REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS SETIF 1

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Université Ferhat ABBAS Sétif 1

Thèse

Présentée pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en Mathématiques

Option

Analyse non linéaire et EDP

Thème

Comportement asymptotique des solutions de certains systèmes dynamiques de types : Onde, thermoélastique et viscoélastique

Présentée par

SEMCHEDINE Nesrine

Devant le jury composé de :

Président :	Naceurdine BENSALEM	Prof.	Université Ferhat Abbas Sétif 1
Rapporteur :	Hamid BENSERIDI	Prof.	Université Ferhat Abbas Sétif 1
Examinateur :	Nasserdine KECHKAR	Prof.	Université Mentouri-Constantine
Examinateur :	Djamel OUCHENANE	M.C.A	Université d'Amar Telidji Laghouat
Invité :	Salah DRABLA	Prof.	Université Ferhat Abbas Sétif 1

Soutenu le : 27/01/2022

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A

mes chers parents, mon Père **Brahim** et ma Mère **Nacera**.

A

ma chère soeur : **Saoussen** et a mon frère : **Achref**.

A

mon frère : **Djaber** et sa femme : **Nadia**.

A

mon petit frère : **Nizar** (**Zizou**).

A

mes meilleurs amis.

A

toute ma famille.

A

toutes les personnes qui m'ont encouragé et soutenu durant mes années d'étude.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier **ALLAH** le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Je tiens à remercier mon directeur de thèse, Monsieur **BENSERIDI Hamid**, Professeur à l'université Ferhat Abbas de Sétif 1, d'avoir pris la responsabilité de mon encadrement suite au départ à la retraite de mon précédent directeur de thèse le Professeur **DRABLA Salah**. J'ai trouvé en le Professeur **BENSERIDI Hamid** conseils et aide précieux en tout instant.

Je remercie vivement Monsieur **BENSALEM Naceurdine**, Professeur à l'université Ferhat Abbas de Sétif 1, de me faire l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je tiens à remercier Monsieur **KECHKAR Nasserdine**, Professeur à l'université de Mentouri-Constantine et Monsieur **OUCHENANE Djamel**, M.C.A à l'université d'Amar Telidji de Laghouat, pour avoir accepté d'être rapporteurs de la thèse.

J'adresse mes remerciements les plus profonds au Professeur **DRABLA Salah**, membre du laboratoire de mathématiques appliquées (LaMA), pour son aide, son orientation, ses conseils précieux et ses encouragements durant la réalisation de cette thèse.

Je remercie Monsieur **GUESMIA Aissa**, Professeur à l'université de Lorraine Metz-France, pour m'avoir invité et accueilli au sein de l'institut Elie Carton de Lorraine-Metz (IECL), université de Lorraine, France.

Mes remerciements vont aussi aux membres du laboratoire de mathématiques appliquées (LaMA) et à tous les enseignants du département de mathématiques qui m'ont aidé pour l'accomplissement de ce travail de recherche.

Je tiens aussi à remercier tous mes amis, mes collègues de laboratoire, pour le temps passé ensemble et pour leur soutien moral.

Mes remerciements les plus chaleureux s'adressent à mes chers parents, à mon adorable soeur et à mes chers frères pour m'avoir donné le courage de poursuive mon travail et pour leur soutien moral de tout les instants.

Sans oublier de remercier toutes les personnes qui, de près ou de loin, m'ont encouragé et aidé durant mes années d'étude.

Table des matières

Introduction

Au cours des dernières décennies, plusieurs auteurs ont étudié la stabilité des problèmes contenant des équations des ondes, des équations thermoélastiques ainsi que des problèmes des équations viscoélastiques et des nombreux résultats ont été établis et publiés.

Problèmes des équations d'ondes

Cavalcanti et al. [9], ont étudié l'existence et la décroissance uniforme de la solution d'une équation d'onde semi-linéaire avec un amortissement de type mémoire et une source non linéaire sur la frontière. De plus, Rivera et Andrade [40] ont considéré une équation d'onde non linéaire unidimensionnelle soumis à un amortissement de type mémoire sur la frontière. Ces différents auteurs ont montré que cet effet (amortissement de type mémoire sur la frontière) est suffisamment fort pour garantir l'existence globale et la décroissance uniforme, pour des données initiales petites, à condition que le noyau résolvant k décroit de façon exponentielle (ou polynomiale).

Cavalcanti et Guesmia [14], ont considéré le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + F(x,t,u,\nabla u) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0,+\infty) \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times [0,+\infty) \\ u\,(x,t) = -\int\limits_0^t g(t-s)\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(s)ds, & \text{sur } \Gamma_1 \times [0,+\infty) \\ u\,(.,0) = u_0, \quad u_t\,(.,0) = u_1, & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, avec une frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ et ν est la normale extérieure unitaire à Γ. En considérant k le noyau résolvant de $-g'/g\,(0)$, la condition aux limites prend la forme

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{1}{g\,(0)}\left(u_t + k * u_t\right), \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0,+\infty).$$

Les auteurs ont établi un résultat de décroissance générale qui dépend de la valeur de u_0 sur Γ_0 et du taux de décroissance de k'. Dans leur travail, ils ont traité les cas où k' décroît de manière exponentielle ou polynomiale jusqu'à zéro à l'infini. Lorsque $u_0 = 0$ sur Γ_0, ils ont obtenu la décroissance exponentielle et polynomiale comme cas particuliers. Ces résultats ont ensuite été généralisés au cas d'un système de type Timoshenko par Messaoudi et Soufyane [35].

Cavalcanti et al. [11] ont étudié un problème de la forme suivante

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times [0, +\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} - \int\limits_0^t g(t-\tau)\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(\tau)d\tau + h(u_t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times [0, +\infty) \\ u(.,0) = u_0, \quad u_t(.,0) = u_1, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

pour des fonctions spécifiques g et h et ont établi des résultats de décroissance uniforme sous des hypothèses assez restrictives à la fois sur la fonction d'amortissement h et le noyau g. En fait, la fonction g devait se comporter exactement comme e^{-mt} et la fonction h devait avoir un comportement polynomial au voisinage de zéro. Pour des hypothèses plus générales sur g et h, Cavalcanti et al. [10] ont prouvé la stabilité uniforme de (1) à condition que $g(0)$ et $\|g\|_{L^1(0,\infty)}$ soient suffisamment petits. Ils ont également établi des résultats explicites de taux de décroissance pour certains cas particuliers. Ce dernier résultat de Cavalcanti et al. [10] a été amélioré plus tard par Messaoudi et Mustafa [33] où aucune hypothèse de croissance sur h au voisinage de zéro n'a été imposée.

La stabilisation des équations d'onde ou des systèmes d'onde par l'amortissement frictionnel aux limites a été étudiée par de nombreux chercheurs. Différents mécanismes ont été utilisés pour stabiliser de tels systèmes et plusieurs résultats de décroissance et de stabilité ont été obtenus. A cet égard, nous mentionnons parmi beaucoup d'autres travaux, le travail d'Alabau-Boussouira [2], Conrad et Rao [15], Guesmia et Messaoudi [17], Komornik et Zuazua [23], Komornik [21], Komornik et Rao [22], Lasiecka [24], Lasiecka et Tataru [25] et Zuazua [47].

Messaoudi et Soufyane [36] ont traité le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times [0, +\infty) \\ u(x,t) = -\int_0^t g(t-s) \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(s)\, ds, & \text{sur } \Gamma_1 \times [0, +\infty) \\ u(.,0) = u_0, \quad u_t(.,0) = u_1, & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

pour une classe plus large de noyaux k satisfaisant

$$k(0) > 0, \quad k(t) \geq 0, \quad k'(t) \leq 0, \quad k''(t) \geq \gamma(t)(-k'(t)),$$

où $\gamma : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ est une fonction qui satisfait la condition suivante

$$\gamma(t) > 0, \quad \gamma'(t) \leq 0 \text{ et } \int_0^{+\infty} \gamma(t) = +\infty.$$

Ils ont établi un résultat de décroissance générale de l'énergie, où la décroissance exponentielle usuelle est un cas particulier.

Problèmes thermoélastiques

Les problèmes thermoélastiques ont été examinés par de nombreux auteurs et de nombreux résultats ont été établis. A cet égard, parmi différents travaux, nous citons les travaux de Dafermos [16], Lebeau et Zuazua [26], Jian, Mũnoz Rivera et Racke [20], Liu [27], Rivera et Racke [41] et Messaoudi et Al-Shehri [32]. En particulier, Messaoudi et Al-Shehri [32] ont considéré le système

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu \Delta u - (\mu + \lambda) \nabla (divu) + \beta \nabla \theta = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \\ c\theta_t - \kappa \Delta \theta + \beta divu_t = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \\ u(.,0) = u_0, \quad u_t(.,0) = u_1, \quad \theta(.,0) = \theta_0, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times [0, +\infty) \\ u(x,t) = -\int\limits_0^t g(t-s) \left(\mu \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu + \lambda)(divu)\, \nu \right)(s)\, ds, & \text{sur } \Gamma_1 \times [0, +\infty) \\ \theta = 0, & \text{sur } \Gamma \times [0, +\infty), \end{cases} \tag{2}$$

dans un domaine Ω borné de $\mathbb{R}^n$, avec une frontière régulière $\partial \Omega$ subdivisé en deux partie Γ_0 et Γ_1, ils ont trouvé un résultat de décroissance générale si la fonction k décroît d'une manière générale. Mustafa [38] a traité le système (2) pour $u_0 = 0$ sur Γ_1 et k vérifie l'hypothèse suivante

$$k(0) > 0, \quad \lim_{t\to\infty} k(t) = 0, \quad k'(t) \leq 0, \quad k''(t) \geq H(-k'(t)), \quad t > 0.$$

Il a montré une décroissance explicite de l'énergie où la décroissance exponentielle et la décroissance polynômiale sont seulement des cas particuliers. Boulanouar [6] a étendu le résultat de [38], dans le cas où $u_0 \neq 0$ sur Γ_1. Récemment, Boudiaf [5] a généralisé le résultat de [32] en y introduisant un terme source non linéaire de type polynomial.

Problèmes viscoélastiques

Dans [12], Cavalcanti et al. ont considéré le problème

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)\, d\tau + \alpha(x) u_t + |u|^\gamma u = 0, & \text{dans } \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

où $a : \Omega \to \mathbb{R}^+$ est une fonction qui peut s'annuler sur une partie de Ω mais satisfait $a(x) \geq a_0 > 0$ sur sous-domaine $\omega \subset \Omega$ satisfaisant certaines restrictions géométriques, $g(t)$ satisfait

$$-\xi_1 g(t) \leq g'(t) \leq -\xi_2 g(t), \quad \forall t \geq 0,$$

où ξ_1 et ξ_2 sont deux constantes positives. Ils ont établi un résultat de décroissance exponentielle. Ce travail a étendu le résultat de Zuazua [46], dans lequel il a considéré (3) avec $g = 0$ et l'amortissement linéaire localisé. Berrimi et Messaoudi [4] ont établi le résultat de [12] sous des conditions plus faibles à la fois sur a et g pour un problème, où un terme source est en compétition avec le terme d'amortissement.

Dans [28], Wenjun Liu a considéré le système

$$\begin{cases} |u_t|^\rho u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \int_0^t g(t-\tau)\Delta u(x,\tau)\, d\tau + \alpha(t) h(u_t) = b|u|^{p-2}u, & \text{dans } \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4}$$

avec g satisfaisant

$$g'(t) \leq -\xi(t) g(t),$$

où ξ est une fonction différentiable décroissante. Il a établi un résultat de décroissance générale et explicite de l'énergie de la solution du problème (4). Ce type de problèmes apparaît généralement comme un modèle en viscoélasticité non linéaire (voir [8, 37]). Han et Wang [18, 19] ont étudié (4) pour $\alpha(t) = 1$, $b = 0$ et $h(u_t) = |u|^m u_t$ $(m \geq 0)$.

Messaoudi et Mustafa [34] ont étudié le problème suivant

$$\begin{cases} |u_t|^\rho u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \int_0^t g(t-s)\,\Delta u(s)\,ds = 0, & \text{dans } \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

pour la fonction de relaxation g qui satisfait la condition

$$g'(t) \leq -H(g(t)),$$

où H est une fonction positive, $H(0) = H'(0) = 0$ et H linéaire ou strictement croissante et strictement convexe de classe C^2 au voisinage de l'origine. Ils ont obtenu une relation explicite et générale entre la décroissance de l'énergie et la fonction de relaxation g sans imposer d'hypothèses restrictives sur le comportement de g à l'infini.

Récemment, Messaoudi et Al-Khulaifi [31] ont traité (5), avec g satisfaisant

$$g'(t) \leq -\xi(t) g^p(t), \quad \forall t \geq 0, \quad 1 \leq p < \frac{3}{2}.$$

Ils ont obtenu un résultat de stabilité plus générale pour lequel les résultats de [29, 30] ne sont que des cas particuliers. Mustafa [39] a considéré le problème étudié dans [31], avec le terme source non linéaire $u|u|^\gamma$ et la fonction de relaxation g qui satisfait

$$g'(t) \leq -\xi(t) H(g(t)).$$

Il a obtenu un résultat de décroissance de l'énergie qui traité à la fois de l'optimalité et de la généralité.

Cette thèse est consacrée à l'étude de comportement asymptotique de quelques systèmes d'équations d'onde, thermoélastique et viscoélastique. On améliore et on généralise divers résultats antérieurs qui seront mentionnés dans les chapitres de cette thèse.

L'objectif de cette thèse consiste donc à étudier la stabilité de trois problèmes. Le premier problème étudié est un système d'onde semi-linéaire sous l'action d'un amortissement de type mémoire sur la frontière du domaine, le deuxième problème considéré est un système d'équations thermoélastique avec un contrôle frontière de type mémoire et le troisième et dernier problème étudié est un système d'équations viscoélastique avec un terme amortissement distribué.

Cette thèse est composée de quatre chapitres et est organisée comme suit :

Dans le chapitre 1, on va donner quelques notations et rappels d'analyse fonctionnelle qui seront utilisés dans les différents chapitres de cette thèse.

Dans le chapitre 2, on considère une équation d'onde semi-linéaire, où l'amortissement de type mémoire agit sur une partie de la frontière. Cette équation est donnée par le système suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times [0, +\infty) \\ u(x,t) = -\int_0^t g(t-s) \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(s)\, ds, & \text{sur } \Gamma_1 \times [0, +\infty) \\ u(.,0) = u_0, \quad u_t(.,0) = u_1, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{6}$$

où le corps Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ avec une frontière suffisamment régulière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, ν est la normale extérieure unitaire à Γ. L'équation $(6)_3$ est une condition aux limites non locale liée à l'effet mémoire, $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^n$ et $g(t)$ est la fonction de relaxation qui est positive et décroissante. De plus, $f \in C^1(\mathbb{R})$ est une fonction satisfaisant

$$uf(u) \geq bF(u), \quad \text{pour certain} \quad b > 2, \quad \text{où} \quad F(u) = \int_0^u f(\xi)\, d\xi,$$

avec

$$F(u) \geq d|u|^q, \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

pour une constante $d > 0$ et $q \leq 1$ telle que $(n-2)q \leq n$.
Dans ce travail on considère l'hypothèse sur le noyau résolvant k

$$k''(t) \geq \gamma(t)\left(-k'(t)\right)^p, \quad \forall t \geq 0, \quad 1 < p < \frac{3}{2}$$

et on montre la décroissance générale de l'énergie de la solution. Ce travail peut être considéré comme une extension de [36] où les auteurs ont montré la stabilité du système (6) lorsque le noyau résolvant k satisfait l'hypothèse suivante

$$k''(t) \geq \gamma(t)(-k'(t)).$$

Le chapitre 3 est consacré à l'étude de la stabilité de la solution du système thermoélastique suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla(divu) + \beta\nabla\theta = 0, & \text{dans } \Omega\times(0,+\infty) \\ c\theta_t - \kappa\Delta\theta + \beta divu_t = 0, & \text{dans } \Omega\times(0,+\infty) \\ u(.,0) = u_0, \quad u_t(.,0) = u_1, \quad \theta(.,0) = \theta_0, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0\times[0,+\infty) \\ u(x,t) = -\int_0^t g(t-s)\left(\mu\frac{\partial u}{\partial\nu} + (\mu+\lambda)(divu)\nu\right)(s)\,ds, & \text{sur } \Gamma_1\times[0,+\infty) \\ \theta = 0, & \text{sur } \Gamma\times[0,+\infty), \end{cases} \tag{7}$$

où le corps Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ avec une frontière Γ, tels que $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ est une partition de Γ, ν est la normale extérieure unitaire à Γ, $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de déplacement, $\theta = \theta(x,t) \in \mathbb{R}^n$ est la température absolue, $c, \kappa, \mu, \lambda, \beta$ sont des constantes positives, $\beta \neq 0$ est un nombre réel et la fonction de relaxation g est une fonction positive est différentiable.

On va étudier le système (7) sous les mêmes hypothèses proposées dans le chapitre 2 sur le noyau résolvant k, on trouve un résultat de décroissance générale de l'énergie de la solution. Ce résultat à fait l'objet d'une publication [45].

Dans le chapitre 4, on va étudier une équation viscoélastique stabilisé par un terme d'amortissement distribué sous forme $\int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)\,d\tau + \alpha(t)h(u_t)$ dans un domaine Ω borné dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ de frontière régulière $\partial\Omega$. Cette équation est donnée par le système suivant

$$\begin{cases} |u_t|^\rho u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)\,d\tau + \alpha(t)h(u_t) = 0, & \text{dans } \Omega\times(0,\infty), \\ u(x,t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega\times(0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{8}$$

où ρ est un nombre réel positive, g est une fonction de relaxation et α, h sont des fonctions positives particulières.

Dans ce travail on considère l'hypothèse sur la fonction de relaxation g

$$g'(t) \leq -\xi(t) H(g(t)),$$

où $H : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ est une fonction positive, $H(0) = H'(0) = 0$ et H linéaire ou strictement croissante et strictement convexe de classe C^2 au voisinage de l'origine. On obtient un résultat de décroissance en fonction de g, α et h pour lesquels les deux taux de décroissance exponentielle et polynomiale ne sont que des cas particuliers. Plus précisément, nous allons obtenir une relation entre le taux de décroissance de l'énergie et les fonctions g, α et h lorsque t tend vers l'infini. On trouve un résultat de décroissance générale et explicite de l'énergie. Ce travail constitue une généralisation des résultats obtenus par Mustafa dans [39] où il y considère le système (8) sans le terme amortissement distribué et avec un terme source.

Pour obtenir les résultats souhaités dans cette thèse, on se base principalement sur la construction des fonctionnelles de Lyapunov appropriées qui sont équivalentes à l'énergie des solutions de chaque problème. Aussi, on utilise quelques lemmes techniques, quelques propriétés des fonctions convexes, l'inégalité de Young, l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Poincaré, l'inégalité de Jensen et des hypothèses avec des modifications nécessaires et convenables pour chaque problème. Ces différentes notions seront explicitées dans le chapitre 1.

Chapitre 1

Notations et rappels d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre nous présentons brièvement quelques notations et définitions élémentaires d'analyse fonctionnelle (Les espaces de Lebesgue, les espaces de Sobolev, ...), nous rappelons aussi quelques inégalités et notions élémentaires utiles qu'on utilise dans les différents chapitres de cette thèse.

1.1 Notations

On note :

- $|y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$ est la norme euclidienne de y, où $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

- $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ est le vecteur normal unitaire extérieure en un point du bord de Ω.

Pour toute fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ régulière, on note

- $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$, avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$.
- $\nabla u = \text{grad} u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ est le gradient de u.

- $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ est le laplacien de u.

- $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_{tt} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t}$.

Pour toute fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ régulière avec $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, on note

- $\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, ..., \Delta u_n)$.

- $divu = \nabla .u = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}$ est la divergence de u.

Soit Ω est un ouvert et $\partial\Omega = \Gamma$ est sa frontière.

- $C\left(\Omega\right)$: Ensemble des fonctions continues dans Ω.

- $C^k\left(\Omega\right)$: Ensemble des fonctions de classe k dans Ω.

- $C_c^k\left(\Omega\right)$: Ensemble des fonctions de $C^k\left(\Omega\right)$ à support compactes.

1.2 Espaces fonctionnels

1.2.1 Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.2.1 *[7] Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$; on pose*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

Avec

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

Définition 1.2.2 *[7] On pose*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Avec

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf\{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Théorème 1.2.3 ***(Théorème de convergence dominée de Lebesgue)*** *[7] Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1. On suppose que*

a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ p.p. sur Ω.

b) il existe une fonction $g \in L^1$ telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω. Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$.

1.2.2 Les espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels essentiels pour la résolution des problèmes d'équations aux dérivées partielles (voir [1, 7]).

Soit Ω un ouvert borné et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$.

1. Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.2.4 *[7] Étant données un entier $m \geq 2$ et un réel $1 \leq p < +\infty$, on définit $W^{m,p}(\Omega)$ par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m-1,p}(\Omega),\ u' \in W^{m-1,p}(\Omega)\}.$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

et l'espace $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{\alpha=1}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

est un espace de Hilbert.

2. Espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.2.5 *[7] L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega u\varphi' = -\int_\Omega g\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega)\}.$$

Pour $p = 2$, il est d'usage de remplacer la notation $W^{1,2}(\Omega)$ par $H^1(\Omega)$, ce dernier est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (u', v')_{L^2(\Omega)}.$$

3. Espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.2.6 *[7] Étant donné $1 \leq p < +\infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. On note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Notation 1.2.7 *On désigne par $W^{-1,p}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ avec ($1 \leq p < +\infty$) et par $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.*

De plus, on a les inclusions

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega),$$

avec injections continues.

4. Injections de Sobolev

Théorème 1.2.8 *(Rellich-Kondrachof) [7] On suppose Ω borné de classe C^1. On a*

$$\begin{array}{llllll} si & p < N, & alors & W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), & \forall q \in [1, p^*[\text{ oú } \dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}, \\ si & p = N, & alors & W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), & \forall q \in [1, +\infty[, \\ si & p > N, & alors & W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}), & \end{array}$$

avec injections compactes.

5. Théorème de trace au bord

Théorème 1.2.9 *Soit Ω un ouvert de classe C^1, alors il existe un opérateur linéaire continu, appelé opérateur trace et noté γ_0 de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ qui coïncide avec l'opérateur de restriction usuel pour les fonctions continues. En particulier, il existe une constante c_1 qui ne dépend que de Ω, telle que*

$$\|\gamma_0 u\|_{L^2(\Gamma)} \leq c_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}, \ \forall u \in H^1(\Omega).$$

Si on suppose que $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ *constitue une partition de* Γ, *avec* $meas(\Gamma_0) > 0$, *on définit alors*

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

Cet espace est fermé dans $H^1(\Omega)$ *comme noyau de l'application (linéaire) continue* $r \circ \gamma_0$ *où* $r : L^2(\Gamma) \longrightarrow L^2(\Gamma_0)$ *est l'application restriction. Donc* $(H^1_{\Gamma_0}(\Omega), \|.\|_{H^1(\Omega)})$ *est un espace de Hilbert, avec*

$$\forall u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega),\ \|u\|_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

De plus, on a l'injection continue $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \hookrightarrow L^m(\Gamma_1)$, $1 \leq m \leq \dfrac{2(n-1)}{n-2}$, *c'est-à-dire il existe une constante* c_0, *telle que*

$$\|u\|_{L^m(\Gamma_1)} \leq c_0 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

1.2.3 Quelques inégalités utiles

Soit $1 \leq p \leq \infty$; on désigne par p' l'exposant conjugué de p,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Inégalité de Hölder

Théorème 1.2.10 *[7] Soient* $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^{p'}(\Omega)$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$. *Alors* $f \cdot g \in L^1$ *et*

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Remarque 1.2.11 *L'inégalité de Cauchy-Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de Hölder dans le cas* $p = q = 2$. *Alors*

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Inégalité de Young

Théorème 1.2.12 *[7] Pour* $a, b > 0$ *et* $\varepsilon > 0$, *on a*

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{p} a^p + \frac{1}{p' \varepsilon^{p/p'}} b^{p'}.$$

Si $p = p' = 2$, *on a*

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2.$$

Inégalité de Poincaré

Corollaire 1.2.13 *[7] On suppose que Ω est un ouvert borné. Alors il existe une constante C (dépendant de Ω et p) telle que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty).$$

Inégalité de Jensen

L'inégalité de Jensen aura un rôle très important dans la démonstration de notre résultat principal.

Si F est une fonction convexe sur $[a,b]$, $f : \Omega \longrightarrow [a,b]$ et h sont des fonctions intégrables sur Ω, $h(x) \geq 0$ et $\int_\Omega h(x)dx = k > 0$, alors l'inégalité de Jensen affirme que

$$F\left[\frac{1}{k}\int_\Omega f(x)h(x)dx\right] \leq \frac{1}{k}\int_\Omega F[f(x)]h(x)dx.$$

1.3 Notions élémentaires

Produit de convolution

Définition 1.3.1 *Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions définies sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ le produit de convolution de $f(x)$ et $g(x)$ est une autre fonction qui se note généralement $f * g$ et qui est défini par*

$$(f * g)(x) = \int_0^t f(x-y)g(y)dy, \ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Règle de Leibniz généralisée

Elle est donnée par la formule

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx + f(b(t),t)\frac{db(t)}{dt} - f(a(t),t)\frac{da(t)}{dt}. \tag{1.2}$$

Formule de Green généralisée

La formule de Green est un outil fondamental pour la résolution des équations aux dérivées partielles. Elle coïncide, en dimension 1, avec la formule d'intégration par parties.

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière Γ, soient $f \in H^2(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega)$ et $h \in (H^1(\Omega))^n$, alors

$$\int_\Omega v\Delta u \; dx = -\int_\Omega \nabla v.\nabla u \; dx + \int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial v} \; d\Gamma$$

$$\int_\Omega \nabla u.w \; dx = -\int_\Omega u.div \; w \; dx + \int_\Gamma u(w.v) \; d\Gamma,$$

où

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}v_i, \;\; \nu \text{ est la normale extérieure unitaire à } \partial\Omega.$$

Équations intégrales de Volterra

L'équation suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x-t)\varphi(t) \; dt = f(x) + \lambda(R * \varphi), \tag{1.3}$$

est une équation intégrale de Volterra de second espèce, où φ est la fonction inconnue, f et R sont des fonctions données, $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction R s'appelle le noyau de l'équation intégrale de Volterra. Sa solution est donnée par la formule suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x-t)f(t) \; dt = f(x) + \lambda(k * f), \tag{1.4}$$

où la fonction k est le noyau résolvant de R et est défini par

$$k(x) = R(x) + \lambda(R * K)(x). \tag{1.5}$$

Chapitre 2

Stabilisation générale d'une équation d'onde avec un contrôle frontière de type mémoire

2.1 Position du problème

Dans ce chapitre nous considérons une équation d'onde semi-linéaire dans un domaine borné, où l'amortissement de type mémoire agit sur une partie de la frontière. Le problème étudié est donné par le système suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times [0, +\infty) \\ u(x,t) = -\int_0^t g(t-s) \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(s)\, ds, & \text{sur } \Gamma_1 \times [0, +\infty) \\ u(.,0) = u_0, \quad u_t(.,0) = u_1, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où le corps Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ avec une frontière suffisamment régulière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, ν est la normale extérieure unitaire à Γ. L'équation $(2.1)_3$ est une condition aux limites non locale de type mémoire, u représente le vecteur de déplacement et g est la fonction de relaxation qui est positive et décroissante appartenant à $W^{2,1}(\mathbb{R}^+) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)$.

De plus, $f \in C^1(\mathbb{R})$ est une fonction satisfaisant

$$uf(u) \geq bF(u), \quad \text{pour certain} \quad b > 2, \quad \text{où} \quad F(u) = \int_0^u f(\xi)\, d\xi, \tag{2.2}$$

avec

$$F(u) \geq d|u|^q, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

pour une constante $d > 0$ et $q \leq 1$ telle que $(n-2)\,q \leq n$.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2.2, nous présentons quelques notations et le matériel nécessaire à la démonstration de notre résultat principal et nous énonçons sans preuve le résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème (2.1). Quelques lemmes techniques et l'énoncé de notre résultat principal seront donnés dans la section 2.3. Dans la section 2.4 , nous prouvons notre résultat.

2.2 Notations et transformation

Dans cette section et afin d'établir notre résultat principal, on va préparer certains éléments nécessaires à la preuve de notre résultat et on va énoncer sans preuve le théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème (2.1). On aura besoin des hypothèses suivantes :

(H) Supposons que les partitions Γ_0 et Γ_1 sont fermées, disjointes et meas$(\Gamma_0) > 0$, telles que

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma : \; m(x).\nu \leq 0\} \tag{2.4}$$

et

$$\Gamma_1 = \{x \in \Gamma : \; m(x).\nu \geq \delta > 0\}, \tag{2.5}$$

où $m(x) = x - x_0$, pour un point fixe $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

L'estimation du terme $\frac{\partial u}{\partial \nu}$:
La dérivation de la troisième équation du problème (2.1) par rapport à t, donne

$$u_t = \frac{d}{dt} u(x,t) = -\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s)\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)\,ds\right),$$

en utilisant la formule de Leibniz (1.2) et le produit de convolution qui est défini par (1.1), on obtient

$$\begin{aligned} u_t &= -\left[\int_0^t g'(t-s)\frac{\partial u}{\partial \nu} ds + g(0)\frac{\partial u}{\partial \nu}\right] \\ &= -\left[g' * \frac{\partial u}{\partial \nu} + g(0)\frac{\partial u}{\partial \nu}\right], \end{aligned}$$

on divise les deux membres de cette équation par $g(0)$, on arrive à

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{1}{g(0)}\left[u_t + g' * \frac{\partial u}{\partial \nu}\right].$$

Cette équation est une forme d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce (1.3), dont sa solution est donnée comme suit (voir (1.4))

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \nu} &= -\frac{1}{g(0)}\left[u_t + \int_0^t k(t-s)u_t(s)ds\right]\\ &= -\frac{1}{g(0)}\left[u_t + (k * u_t)(t)\right], \quad \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+,\end{aligned}$$

où la fonction k est le noyau résolvant de $-g'/g(0)$ (voir (1.5)), qui satisfait

$$k + \frac{1}{g(0)}(g' * k) = -\frac{1}{g(0)}g'.$$

On prend $\eta = 1/g(0)$ et en utilisant l'intégration par parties et la condition $u_0 = 0$ sur Γ_1, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \nu} &= -\eta\left[u_t + k(t-s)\,u(s)\,|_0^t + \int_0^t k'(t-s)\,u(s)\,ds\right]\\ &= -\eta(u_t + k(0)u + k' * u), \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0,+\infty).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Sachant que les fonctions de relaxation considérées sont à décroissance plus générale, il est utile de savoir si la fonction k hérite de quelques propriétés de la fonction de relaxation g. Le lemme suivant répond à cette question.

Soit $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, une fonction continue et k son noyau de résolvant, c'est-à-dire :

$$k(t) = h(t) + (k * h)(t). \tag{2.7}$$

Il est évident que la fonction k est continue et positive (voir [14, 41]).

Lemme 2.2.1 *Soit $p > 1$, $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction décroissante qui satisfait $\gamma(0) > 0$ et*

$$\begin{aligned}C_p &= \sup_{t\geq 0}\int_0^t \left(1 + \int_0^t \gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}} \left(1 + \int_0^{t-s} \gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{-\frac{1}{2p-2}}\\ &\quad \times \left(1 + \int_0^s \gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{-\frac{1}{2p-2}} ds.\end{aligned}$$

Supposons qu'il existe C et $1-CC_p>0$ tels que

$$h\left(t\right)\leq\frac{C}{\left(1+\int_0^t\gamma^{2p-1}\left(\zeta\right)d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}}}.$$

Alors, il existe $\widetilde{C}$ tels que

$$k\left(t\right)\leq\frac{\widetilde{C}}{\left(1+\int_0^t\gamma^{2p-1}\left(\zeta\right)d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}}}.$$

Preuve. On pose

$$k_p\left(t\right)=k\left(t\right)\left(1+\int_0^t\gamma^{2p-1}\left(\zeta\right)d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}}$$

et

$$h_p\left(t\right)=h\left(t\right)\left(1+\int_0^t\gamma^{2p-1}\left(\zeta\right)d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}}.$$

On multiplie l'équation (2.7) par $\left(1+\int_0^t\gamma^{2p-1}\left(\zeta\right)d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
k_p\left(t\right) &= h_p\left(t\right)+\int_0^t\left(1+\int_0^t\gamma^{2p-1}\left(\zeta\right)d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}}k\left(t-s\right)h\left(s\right)ds\\
&= h_p\left(t\right)+\int_0^t\left(1+\int_0^t\gamma^{2p-1}\left(\zeta\right)d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}}\left(1+\int_0^{t-s}\gamma^{2p-1}\left(\zeta\right)d\zeta\right)^{-\frac{1}{2p-2}}\\
&\quad\times k_p\left(t-s\right)h\left(s\right)ds\\
&= h_p\left(t\right)+\int_0^t\left(1+\int_0^t\gamma^{2p-1}\left(\zeta\right)d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}}\left(1+\int_0^{t-s}\gamma^{2p-1}\left(\zeta\right)d\zeta\right)^{-\frac{1}{2p-2}}\\
&\quad\times\left(1+\int_0^s\gamma^{2p-1}\left(\zeta\right)d\zeta\right)^{-\frac{1}{2p-2}}k_p\left(t-s\right)\left(1+\int_0^s\gamma^{2p-1}\left(\zeta\right)d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}}h\left(s\right)ds\\
&= h_p\left(t\right)+\int_0^t\left(1+\int_0^t\gamma^{2p-1}\left(\zeta\right)d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}}\left(1+\int_0^{t-s}\gamma^{2p-1}\left(\zeta\right)d\zeta\right)^{-\frac{1}{2p-2}}\\
&\quad\times\left(1+\int_0^s\gamma^{2p-1}\left(\zeta\right)d\zeta\right)^{-\frac{1}{2p-2}}k_p\left(t-s\right)h_p\left(s\right)ds.
\end{aligned}$$

On définie par

$$\begin{aligned}
C_p &= \sup_{t\geq0}\int_0^t\left(1+\int_0^t\gamma^{2p-1}\left(\zeta\right)d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}}\left(1+\int_0^{t-s}\gamma^{2p-1}\left(\zeta\right)d\zeta\right)^{-\frac{1}{2p-2}}\\
&\quad\times\left(1+\int_0^s\gamma^{2p-1}\left(\zeta\right)d\zeta\right)^{-\frac{1}{2p-2}}ds
\end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\sup_{0\le s\le t} k_p(s) \le \sup_{0\le s\le t} h_p(s) + CC_p \sup_{0\le s\le t} k_p(s) \le C + CC_p \sup_{0\le s\le t} k_p(s),$$

ce qui implique

$$\sup_{0\le s\le t} k_p(s) \le \frac{C}{1-CC_p}, \ \forall t>0.$$

Par conséquent

$$k_p(t) \le \frac{C}{1-CC_p}.$$

Donc

$$k(t) \le \frac{C}{1-CC_p}\left(1+\int_0^t \gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{-\frac{1}{2p-2}}.$$

D'où

$$k(t) \le \frac{\widetilde{C}}{\left(1+\int_0^t \gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}}}.$$

■

En se basant sur **le lemme 2.2.1**, dans toute la suite on va utiliser l'équation (2.6) à la place de la troisième équation du système (2.1).

Définissons maintenant :

$$(\varphi\circ\psi)(t) = \int_0^t \varphi(t-s)|\psi(t)-\psi(s)|^2 ds,$$

$$(\varphi\Diamond\psi)(t) = \int_0^t \varphi(t-s)(\psi(t)-\psi(s)) ds. \tag{2.8}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, nous avons

$$|(\varphi\Diamond\psi)(t)|^2 \le \left(\int_0^t |\varphi(s)|ds\right)(|\varphi|\circ\psi)(t). \tag{2.9}$$

Lemme 2.2.2 *Si* $\varphi,\ \psi \in C^1(\mathbb{R}^+)$, *alors*

$$\begin{aligned}(\varphi*\psi)(t)\,\psi_t(t) = &-\frac{1}{2}\varphi(t)\,|\psi(t)|^2 + \frac{1}{2}(\varphi'\circ\psi)(t) \\ &-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left((\varphi\circ\psi)(t) - \left(\int_0^t \varphi(s)\,ds\right)|\psi(t)|^2\right).\end{aligned} \tag{2.10}$$

Preuve. Voir [14, 42, 44, 41]. ■

Avant de définir la solution du système (2.1), on considère l'espace suivant :

$$V = H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \ v = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_0\}.$$

Notre système (2.1) est bien posé au sens suivant :

Théorème 2.2.3 *Nous supposons que* (2.2) − (2.5) *sont vérifiées. Alors, il existe une seule solution forte* u *du système* (2.1) *telle que*

$$\begin{aligned} &u \in L^\infty\left(\mathbb{R}^+; H^2\left(\Omega\right) \cap V\right), \\ &u_t \in L^\infty\left(\mathbb{R}^+; V\right), \\ &u_{tt} \in L^\infty\left(\mathbb{R}^+; L^2\left(\Omega\right)\right). \end{aligned}$$

Preuve. La démonstration du **Théorème 2.2.3** est basé sur la méthode de Galerkin comme dans [44, 43]. ■

2.3 Décroissance générale

Dans cette section on va énoncer le résultat principal de notre travail. Précisément, on va étudier le comportement asymptotique de la solution du système (2.1) lorsque le noyau résolvant k vérifie l'hypothèse suivante :
$k : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction C^2 telle que

$$k\left(0\right) > 0, \ k\left(t\right) \geq 0, \ k'\left(t\right) \leq 0, \ k''\left(t\right) \geq \gamma\left(t\right)\left(-k'\left(t\right)\right)^p, \tag{2.11}$$

où $t \geq 0$, $1 < p < \frac{3}{2}$ et $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction qui satisfait les conditions suivantes

$$\gamma\left(t\right) > 0, \ \gamma'\left(t\right) \leq 0. \tag{2.12}$$

On introduit la fonctionnelle d'énergie totale associée au problème (2.1) par

$$E\left(t\right) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2\right) dx + \int_\Omega F\left(u\right) dx + \frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} \left(k\left(t\right)|u|^2 - k' \circ u\right) d\Gamma_1. \tag{2.13}$$

Lemme 2.3.1 *L'énergie de la solution* u *de* (2.1) *satisfait*

$$E'\left(t\right) = -\eta \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 \, d\Gamma_1 + \frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} k'(t)|u(t)|^2 d\Gamma_1 - \frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} k'' \circ u d\Gamma_1 \leq 0. \tag{2.14}$$

Preuve. On multiplie $(2.1)_1$ par u_t et on intègre sur Ω, en utilisant la formule de Green et (2.6), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left[|u_t|^2+|\nabla u|^2+2F(u)\right]dx\\
&=\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial \nu}u_t d\Gamma_1\\
&=-\eta\int_{\Gamma_1}|u_t|^2 d\Gamma_1-\eta\int_{\Gamma_1}k(0)uu_t d\Gamma_1-\eta\int_{\Gamma_1}(k'*u)u_t d\Gamma_1.
\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant le Lemme 2.2.2, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left[|u_t|^2+|\nabla u|^2+2F(u)\right]dx\\
=\;&-\eta\int_{\Gamma_1}|u_t|^2 d\Gamma_1-\eta\int_{\Gamma_1}k(0)uu_t d\Gamma_1+\frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1}k'(t)\,|u(t)|^2 d\Gamma_1-\frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1}k''\circ u d\Gamma_1\\
&+\frac{\eta}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{\Gamma_1}k'\circ u d\Gamma_1\right)-\frac{\eta}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{\Gamma_1}\left(\int_0^t k'(s)\,ds\right)|u(t)|^2 d\Gamma_1\right)\\
=\;&-\eta\int_{\Gamma_1}|u_t|^2 d\Gamma_1+\frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1}k'(t)\,|u(t)|^2 d\Gamma_1-\frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1}k''\circ u d\Gamma_1\\
&-\frac{\eta}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{\Gamma_1}\left(k(t)\,|u(t)|^2-k'\circ u\right)d\Gamma_1\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega \left[|u_t|^2+|\nabla u|^2+2F(u)\right]dx+\frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1}\left(k(t)\,|u(t)|^2-k'\circ u\right)d\Gamma_1\right)\\
=\;&-\eta\int_{\Gamma_1}|u_t|^2 d\Gamma_1+\frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1}k'(t)\,|u(t)|^2 d\Gamma_1-\frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1}k''\circ u d\Gamma_1.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient le résultat souhaité (2.14). ■

Maintenant, on a les lemmes cruciaux suivants qui seront utilisés dans la preuve de notre résultat.

Lemme 2.3.2 *La solution u de (2.1) satisfait*

$$\|u(t)-u(s)\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\le CE(0),\quad \forall s\in[0,t]\,.$$

Preuve. En utilisant le théorème de trace et (2.13), on obtient, pour tout $s\in[0,t]$,

$$\begin{aligned}
\|u(t)-u(s)\|^2_{L^2(\Gamma_1)} &\le c\|\nabla u(t)-\nabla u(s)\|_2^2\\
&\le c\left(\|\nabla u(t)\|_2^2+\|\nabla u(s)\|_2^2\right)\\
&\le c'\left(E(t)+E(s)\right)\\
&\le CE(0).
\end{aligned}$$

■

Lemme 2.3.3 *Supposons que k satisfait* (2.11). *Alors*

$$\int_0^{+\infty} \gamma(t)\left[-k'(t)\right]^{1-\sigma} dt < +\infty,\ \forall \sigma < 2-p.$$

Preuve. Rappelant (2.11), on peut facilement voir que

$$\begin{aligned}\gamma(t)\left[-k'(t)\right]^{1-\sigma} &= \gamma(t)\left(-k'(t)\right)^p\left[-k'(t)\right]^{1-\sigma-p} \\ &\leq k''(t)\left[-k'(t)\right]^{1-\sigma-p}.\end{aligned}$$

On intègre, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\gamma(t)\left[-k'(t)\right]^{1-\sigma} dt &\leq \int_0^{+\infty} k''(t)\left[-k'(t)\right]^{1-\sigma-p} dt \\ &= \frac{-1}{2-p-\sigma}\int_0^{+\infty} -(2-p-\sigma)\,k''(t)\left[-k'(t)\right]^{1-\sigma-p} dt \\ &= -\frac{\left[-k'(t)\right]^{2-p-\sigma}}{2-p-\sigma}\Bigg|_0^{+\infty} < +\infty,\end{aligned}$$

puisque $\sigma < 2-p$ et $-k'$ est positive et décroissante. ■

Lemme 2.3.4 *Supposons que k satisfait* (2.11). *Alors la solution u de* (2.1) *satisfait*

$$\left[\int_{\Gamma_1}\left(\gamma(t)(-k')^p \circ u\right) d\Gamma_1\right]^{\frac{1}{2p-1}} \leq \left[\int_{\Gamma_1}\left(k'' \circ u\right) d\Gamma_1\right]^{\frac{1}{2p-1}}. \tag{2.15}$$

Preuve. En utilisant le fait que γ est décroissante, on obtient

$$\begin{aligned}t-s \leq t \ &\Rightarrow\ \gamma(t-s) \geq \gamma(t) \\ &\Rightarrow\ (-k'(t-s))^p\gamma(t-s) \geq (-k'(t-s))^p\gamma(t).\end{aligned}$$

En multipliant par $|u(t)-u(s)|^2$ et en intégrant sur $(0,t)\times\Gamma_1$, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_1}\int_0^t (-k'(t-s))^p\gamma(t-s)|u(t)-u(s)|^2 ds d\Gamma_1 \\ &\geq \int_{\Gamma_1}\int_0^t (-k'(t-s))^p\gamma(t)|u(t)-u(s)|^2 ds d\Gamma_1,\end{aligned}$$

puis en utilisant (2.11), on trouve

$$\int_{\Gamma_1}\left(\gamma(t)(-k')^p \circ u\right) d\Gamma_1 \leq \int_{\Gamma_1} k'' \circ u d\Gamma_1.$$

D'où, on obtient (2.15). ■

Lemme 2.3.5 *Supposons que k satisfait* (2.11). *Alors il existe $C>0$ telle que la solution u de* (2.1) *satisfait*

$$\int_{\Gamma_1} \gamma(t)(-k' \circ u)\, d\Gamma_1 \leq C\left[-E'(t)\right]^{\frac{1}{2p-1}}.$$

Preuve. Il est facile d'obtenir

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} (-k' \circ u)\, d\Gamma_1 &= \int_{\Gamma_1}\int_0^t -k'(t-s)\left|u(t)-u(s)\right|^2 ds d\Gamma_1 \\
&= \int_{\Gamma_1}\int_0^t \left[-k'(t-s)\right]^{(1-\sigma)\frac{p-1}{p-1+\sigma}} \left(\left|u(t)-u(s)\right|^2\right)^{\frac{p-1}{p-1+\sigma}} \\
&\quad \times \left[-k'(t-s)\right]^{1-(1-\sigma)\frac{p-1}{p-1+\sigma}} \left(\left|u(t)-u(s)\right|^2\right)^{\frac{\sigma}{p-1+\sigma}} ds d\Gamma_1 \\
&= \int_{\Gamma_1}\int_0^t \left[-k'(t-s)\right]^{(1-\sigma)\frac{p-1}{p-1+\sigma}} \left(\left|u(t)-u(s)\right|^2\right)^{\frac{p-1}{p-1+\sigma}} \\
&\quad \times \left[-k'(t-s)\right]^{\frac{\sigma p}{p-1+\sigma}} \left(\left|u(t)-u(s)\right|^2\right)^{\frac{\sigma}{p-1+\sigma}} ds d\Gamma_1.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, où $s=\frac{p-1+\sigma}{p-1}$ et $s'=\frac{p-1+\sigma}{\sigma}$ et le lemme 2.3.2, on aura

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} (-k' \circ u)\, d\Gamma_1 &\leq \left[\int_{\Gamma_1}\int_0^t \left[-k'(t-s)\right]^{1-\sigma}\left|u(t)-u(s)\right|^2 ds d\Gamma_1\right]^{\frac{p-1}{p-1+\sigma}} \\
&\quad \times \left[\int_{\Gamma_1}\int_0^t \left[-k'(t-s)\right]^{p}\left|u(t)-u(s)\right|^2 ds d\Gamma_1\right]^{\frac{\sigma}{p-1+\sigma}} \\
&\leq \left[\int_{\Gamma_1}\int_0^t \left[-k'(t-s)\right]^{1-\sigma}\left|u(t)-u(s)\right|^2 ds d\Gamma_1\right]^{\frac{p-1}{p-1+\sigma}} \\
&\quad \times \left[\int_{\Gamma_1} \left((-k')^p \circ u\right) d\Gamma_1\right]^{\frac{\sigma}{p-1+\sigma}} \\
&\leq C\left[\int_0^t \left[-k'(t-s)\right]^{1-\sigma} ds d\Gamma_1\right]^{\frac{p-1}{p-1+\sigma}} \\
&\quad \times \left[\int_{\Gamma_1} \left((-k')^p \circ u\right) d\Gamma_1\right]^{\frac{\sigma}{p-1+\sigma}}.
\end{aligned}$$

Prenons $\sigma=\frac{1}{2}$, on a

$$\int_{\Gamma_1} (-k' \circ u)\, d\Gamma_1 \leq C\left[\int_0^t \left[-k'(s)\right]^{\frac{1}{2}} ds d\Gamma_1\right]^{\frac{2p-2}{2p-1}} \left[\int_{\Gamma_1} \left((-k')^p \circ u\right) d\Gamma_1\right]^{\frac{1}{2p-1}}. \tag{2.16}$$

On multiplie (2.16) par $\gamma(t)$, rappelant le lemme 2.3.3 et le lemme 2.3.4 et en utilisant le lemme 2.3.1, on obtient

$$\begin{aligned}
\gamma(t)\int_{\Gamma_1}(-k'\circ u)\,d\Gamma_1 &\leq C\gamma(t)\left[\int_0^t[-k'(s)]^{\frac{1}{2}}\,dsd\Gamma_1\right]^{\frac{2p-2}{2p-1}}\left[\int_{\Gamma_1}\left((-k')^p\circ u\right)d\Gamma_1\right]^{\frac{1}{2p-1}}\\
&\leq C\gamma(t)^{\frac{2p-2}{2p-1}}\left[\int_0^t[-k'(s)]^{\frac{1}{2}}\,dsd\Gamma_1\right]^{\frac{2p-2}{2p-1}}\gamma(t)^{\frac{1}{2p-1}}\left[\int_{\Gamma_1}\left((-k')^p\circ u\right)d\Gamma_1\right]^{\frac{1}{2p-1}}\\
&\leq C\left[\int_0^t\gamma(s)[-k'(s)]^{\frac{1}{2}}\,dsd\Gamma_1\right]^{\frac{2p-2}{2p-1}}\left[\int_{\Gamma_1}\left(\gamma(t)(-k')^p\circ u\right)d\Gamma_1\right]^{\frac{1}{2p-1}}\\
&\leq C\left[\int_0^{+\infty}\gamma(s)[-k'(s)]^{\frac{1}{2}}\,dsd\Gamma_1\right]^{\frac{2p-2}{2p-1}}\left[\int_{\Gamma_1}(k''\circ u)\,d\Gamma_1\right]^{\frac{1}{2p-1}}\\
&\leq C\left[-E'(t)\right]^{\frac{1}{2p-1}}.
\end{aligned}$$

■

Lemme 2.3.6 *Sous les hypothèses du* ***Théorème 2.3.8****, la solution u du problème* (2.1) *satisfait*

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\int_\Omega(2m.\nabla u+(n-\varepsilon_0)u)\,u_tdx\right] \qquad (2.17)\\
&\leq\int_{\Gamma_1}m.\nu|u_t|^2d\Gamma_1-\varepsilon_0\int_\Omega|u_t|^2dx+\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}(2m.\nabla u+(n-\varepsilon_0)u)\,d\Gamma_1\\
&\quad-\int_{\Gamma_1}m.\nu|\nabla u|^2d\Gamma_1-(2-\varepsilon_0)\int_\Omega|\nabla u|^2dx-[(b-2)\,n-\varepsilon_0 b]\int_\Omega F(u)\,dx,\quad\forall t\geq0,
\end{aligned}$$

tel que $0<\varepsilon_0<1$.

Preuve. On multiplie l'équation $(2.1)_1$ par $(2m.\nabla u+(n-\varepsilon_0)u)$ et on intègre sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega(2m.\nabla u+(n-\varepsilon_0)u)\,u_{tt}dx-\int_\Omega(2m.\nabla u+(n-\varepsilon_0)u)\,\Delta udx \qquad (2.18)\\
&+\int_\Omega(2m.\nabla u+(n-\varepsilon_0)u)\,f(u)\,dx=0,
\end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega(2m.\nabla u+(n-\varepsilon_0)u)\,u_{tt}dx &= \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega(2m.\nabla u+(n-\varepsilon_0)u)\,u_tdx\right)\\
&\quad-\int_\Omega 2u_tm.\nabla u_tdx-(n-\varepsilon_0)\int_\Omega|u_t|^2dx,
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega (2m.\nabla u+(n-\varepsilon_0)\,u)\,u_t dx\right) = \int_\Omega (2m.\nabla u+(n-\varepsilon_0)\,u)\,u_{tt}dx \qquad (2.19)$$
$$+\int_\Omega 2u_t m.\nabla u_t dx + (n-\varepsilon_0)\int_\Omega |u_t|^2 dx,$$

en remplaçant (2.19) dans (2.18), on aura

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega (2m.\nabla u+(n-\varepsilon_0)\,u)\,u_t dx\right) = \int_\Omega 2u_t m.\nabla u_t dx + (n-\varepsilon_0)\int_\Omega |u_t|^2 dx \qquad (2.20)$$
$$+\int_\Omega (2m.\nabla u+(n-\varepsilon_0)\,u)\,\Delta u dx$$
$$-\int_\Omega (2m.\nabla u+(n-\varepsilon_0)\,u)\,f(u)\,dx.$$

Grâce à la formule d'intégration par partie et la relation $divm = n$, on déduit que

$$\int_\Omega 2u_t m.\nabla u_t dx = \int_\Omega m.\left(2u_t\nabla u_t\right)dx = \int_\Omega m.\nabla |u_t|^2 dx$$
$$= \int_{\Gamma_1} (m.\nu)\,|u_t|^2 d\Gamma_1 - n\int_\Omega |u_t|^2 dx. \qquad (2.21)$$

Maintenant, on va estimer le troisième terme dans (2.20) comme suit

$$\int_\Omega (2m.\nabla u+(n-\varepsilon_0)\,u)\,\Delta u dx = \int_\Omega (2m.\nabla u)\,\Delta u dx + (n-\varepsilon_0)\int_\Omega u\Delta u dx, \qquad (2.22)$$

on commence par

$$\int_\Omega (2m.\nabla u)\,\Delta u dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}(2m.\nabla u)\,d\Gamma - \int_\Omega \nabla u.\nabla(2m.\nabla u)\,dx.$$

On utilise l'identité suivante

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla(2m.\nabla u)\,dx = 2|\nabla u|^2 + m.\nabla\left(|\nabla u|^2\right),$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (2m.\nabla u)\,\Delta u dx &= \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}(2m.\nabla u)\,d\Gamma - 2\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega m.\nabla\left(|\nabla u|^2\right)dx \\
&= \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}(2m.\nabla u)\,d\Gamma - 2\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Gamma (m.\nu)\,|\nabla u|^2 d\Gamma \\
&\quad + \int_\Omega divm|\nabla u|^2 dx \\
&= (n-2)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Gamma (m.\nu)\,|\nabla u|^2 d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}(2m.\nabla u)\,d\Gamma.
\end{aligned}$$

Sachant que

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\nu \quad \text{sur} \quad \Gamma_0,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (2m.\nabla u)\, \Delta u dx = &(n-2)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Gamma (m.\nu)\, |\nabla u|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, (2m.\nabla u)\, d\Gamma_0 \\
&+ \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, (2m.\nabla u)\, d\Gamma_1 \\
=& (n-2)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Gamma (m.\nu)\, |\nabla u|^2 d\Gamma + 2\int_{\Gamma_0} (m.\nu) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma_0 \\
&+ \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, (2m.\nabla u)\, d\Gamma_1 \\
=& (n-2)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Gamma (m.\nu)\, |\nabla u|^2 d\Gamma + 2\int_{\Gamma_0} (m.\nu)\, |\nabla u|^2 d\Gamma_0 \\
&+ \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, (2m.\nabla u)\, d\Gamma_1 \\
=& (n-2)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_{\Gamma_1} (m.\nu)\, |\nabla u|^2 d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_0} (m.\nu)\, |\nabla u|^2 d\Gamma_0 \\
&+ \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, (2m.\nabla u)\, d\Gamma_1. \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$(n-\varepsilon_0)\int_\Omega u\Delta u dx = (n-\varepsilon_0)\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} u d\Gamma_1 - (n-\varepsilon_0)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx. \qquad (2.24)$$

En remplaçant (2.23) et (2.24) dans (2.22), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (2m.\nabla u + (n-\varepsilon_0)\, u)\, \Delta u dx = &- (2-\varepsilon_0)\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_{\Gamma_1} (m.\nu)\, |\nabla u|^2 d\Gamma_1 \qquad (2.25) \\
&+ \int_{\Gamma_0} (m.\nu)\, |\nabla u|^2 d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, (2m.\nabla u + (n-\varepsilon_0)\, u)\, d\Gamma_1,
\end{aligned}$$

en utilisant (2.4), alors (2.25) devient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (2m.\nabla u + (n-\varepsilon_0)\, u)\, \Delta u dx \leq &- (2-\varepsilon_0)\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_{\Gamma_1} (m.\nu)\, |\nabla u|^2 d\Gamma_1 \\
&+ \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, (2m.\nabla u + (n-\varepsilon_0)\, u)\, d\Gamma_1. \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Finalement, le dernier terme dans (2.20), devient

$$
\begin{aligned}
-\int_{\Omega}(2m.\nabla u+(n-\varepsilon_0)u)f(u)\,dx &= -\int_{\Omega}(2m.\nabla u)f(u)\,dx-(n-\varepsilon_0)\int_{\Omega}uf(u)\,dx\\
&= -2\int_{\Gamma_1}(m.\nu)F(u)\,d\Gamma_1+2\int_{\Omega}divmF(u)\,dx\\
&\quad-(n-\varepsilon_0)\int_{\Omega}uf(u)\,dx\\
&= -2\int_{\Gamma_1}(m.\nu)F(u)\,d\Gamma_1+2n\int_{\Omega}F(u)\,dx\\
&\quad-(n-\varepsilon_0)\int_{\Omega}uf(u)\,dx. \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

En utilisant (2.2) et (2.5), alors (2.27) devient

$$
\begin{aligned}
-\int_{\Omega}(2m.\nabla u+(n-\varepsilon_0)u)f(u)\,dx &\leq -2\int_{\Gamma_1}(m.\nu)F(u)\,d\Gamma_1+2n\int_{\Omega}F(u)\,dx\\
&\quad-(n-\varepsilon_0)b\int_{\Omega}F(u)\,dx\\
&\leq -[(b-2)n-\varepsilon_0 b]\int_{\Omega}F(u)\,dx. \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

En combinant (2.21), (2.26) et (2.28), on trouve (2.17). ■

Lemme 2.3.7 *Il existe des constantes positives N, M, ε_0 et t_0 telles que la fonction de Lyapunov*

$$L(t)=NE(t)+\int_{\Omega}[(2M.\nabla u+(n-\varepsilon_0)u)u_t]\,dx$$

est équivalent à $E(t)$ et satisfait

$$L'(t)\leq -dE(t)-c\int_{\Gamma_1}(k'\circ u)(t)\,d\Gamma_1,\quad \forall t\geq t_0, \qquad (2.29)$$

où d et c sont des constantes positives.

Preuve. On commence par la dérivation de la fonctionnelle $L(t)$ par rapport à t, on obtient

$$L'(t)=NE'(t)+\frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega}(2m.\nabla u+(n-\varepsilon_0)u)u_t dx\right],$$

d'après (2.14) et (2.17), on a

$$
\begin{aligned}
L'(t)\leq &N\left(-\eta\int_{\Gamma_1}|u_t|^2\,d\Gamma_1+\frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1}k'(t)|u(t)|^2d\Gamma_1-\frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1}k''\circ ud\Gamma_1\right)\\
&+\int_{\Gamma_1}m.\nu|u_t|^2d\Gamma_1-\varepsilon_0\int_{\Omega}|u_t|^2dx+\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}(2m.\nabla u+(n-\varepsilon_0)u)\,d\Gamma_1\\
&-\int_{\Gamma_1}m.\nu|\nabla u|^2d\Gamma_1-(2-\varepsilon_0)\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx\\
&-[(b-2)n-\varepsilon_0 b]\int_{\Omega}F(u)\,dx. \qquad (2.30)
\end{aligned}
$$

Maintenant, on va estimer le terme

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} \left(2m.\nabla u + (n-\varepsilon_0)\, u\right) d\Gamma_1.$$

En appliquant l'inégalité de Young et l'inégalité de Poincaré, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} \left(2m.\nabla u + (n-\varepsilon_0)\, u\right) d\Gamma_1 \leq & \varepsilon \int_{\Gamma_1} |2m.\nabla u + (n-\varepsilon_0)\, u|^2 d\Gamma_1 + C_\varepsilon \int_{\Gamma_1} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma_1 \\
\leq & \varepsilon \int_{\Gamma_1} m.\nu |\nabla u|^2 d\Gamma_1 + \varepsilon \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1 + C_\varepsilon \int_{\Gamma_1} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma_1 \\
\leq & \varepsilon \int_{\Gamma_1} m.\nu |\nabla u|^2 d\Gamma_1 + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + C_\varepsilon \int_{\Gamma_1} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma_1,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

d'après (2.6), on trouve que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \nu} =& -\eta \left(u_t + k(0)\, u + \int_0^t k'(t-s)\, u(s)\, ds\right) \\
=& -\eta \left(u_t + k(0)\, u - \int_0^t k'(t-s)\left(u(t) - u(s)\right) ds + u(t) \int_0^t k'(t-s)\, ds\right)
\end{aligned}$$

et à partir de (2.8), on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \nu} =& -\eta \left(u_t + k(0)\, u - k' \Diamond u + u(t) \left(\int_0^t k'(t-s)\, ds\right)\right) \\
=& -\eta \left(u_t + k(0)\, u - k' \Diamond u - k(0)\, u + k(t)\, u\right) \\
=& -\eta \left(u_t + uk(t) - k' \Diamond u\right),
\end{aligned} \tag{2.32}$$

en remplaçant (2.32) dans (2.31), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} \left(2m.\nabla u + (n-\varepsilon_0)\, u\right) d\Gamma_1 \leq & \varepsilon \int_{\Gamma_1} m.\nu |\nabla u|^2 d\Gamma_1 + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + C_\varepsilon \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma_1 \\
& + C_\varepsilon k^2(t) \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1 + C_\varepsilon \int_{\Gamma_1} |k' \Diamond u|^2 d\Gamma_1 \\
\leq & \varepsilon \int_{\Gamma_1} m.\nu |\nabla u|^2 d\Gamma_1 + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + C_\varepsilon \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma_1 \\
& + C_\varepsilon k^2(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + C_\varepsilon \int_{\Gamma_1} |k' \Diamond u|^2 d\Gamma_1,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

ensuite, on remplace cette dernière inégalité dans (2.30), on trouve

$$\begin{aligned}
L'(t) &\leq -N\eta\int_{\Gamma_1}|u_t|^2\,d\Gamma_1 + N\frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1}k'(t)|u(t)|^2 d\Gamma_1 - N\frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1}k''\circ u d\Gamma_1 \\
&+\int_{\Gamma_1}m.\nu|u_t|^2 d\Gamma_1 - \varepsilon_0\int_{\Omega}|u_t|^2 dx + \varepsilon\int_{\Gamma_1}m.\nu|\nabla u|^2 d\Gamma_1 \\
&+\varepsilon\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx + C_\varepsilon\int_{\Gamma_1}|u_t|^2 d\Gamma_1 + C_\varepsilon k^2(t)\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx \\
&+C_\varepsilon\int_{\Gamma_1}|k'\Diamond u|^2 d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1}m.\nu|\nabla u|^2 d\Gamma_1 - (2-\varepsilon_0)\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx \\
&-[(b-2)\,n-\varepsilon_0 b]\int_{\Omega}F(u)\,dx,
\end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}
L'(t) \leq &-(N\eta - C_\varepsilon - m.\nu)\int_{\Gamma_1}|u_t|^2 d\Gamma_1 - (1-\varepsilon)\int_{\Gamma_1}(m.\nu)\,|\nabla u|^2 d\Gamma_1 - \frac{\eta N}{2}\int_{\Gamma_1}k''\circ u d\Gamma_1 \\
&-\left(2-\varepsilon_0-\varepsilon-C_\varepsilon k^2(t)\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx - \varepsilon_0\int_{\Omega}|u_t|^2 dx + C_\varepsilon\int_{\Gamma_1}|k'\Diamond u|^2 d\Gamma_1 \\
&-[(b-2)\,n-\varepsilon_0 b]\int_{\Omega}F(u)\,dx
\end{aligned} \tag{2.34}$$

et à partir de (2.9), on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1}|k'\Diamond u|^2 d\Gamma_1 &\leq \int_{\Gamma_1}\left(\int_0^t|k'(s)|ds\right)(k'\circ u)(t) \\
&\leq [k(s)]_0^t\int_{\Gamma_1}(k'\circ u)(t) \\
&\leq (k(t)-k(0))\int_{\Gamma_1}(k'\circ u)(t),
\end{aligned}$$

alors (2.34) devient

$$\begin{aligned}
L'(t) &\leq -(N\eta - C_\varepsilon - m.\nu)\int_{\Gamma_1}|u_t|^2 d\Gamma_1 - (1-\varepsilon)\int_{\Gamma_1}(m.\nu)\,|\nabla u|^2 d\Gamma_1 - \frac{\eta N}{2}\int_{\Gamma_1}k''\circ u d\Gamma_1 \\
&-\left(2-\varepsilon_0-\varepsilon-C_\varepsilon k^2(t)\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx - \varepsilon_0\int_{\Omega}|u_t|^2 dx - [(b-2)\,n-\varepsilon_0 b]\int_{\Omega}F(u)\,dx \\
&+C_\varepsilon(k(t)-k(0))\int_{\Gamma_1}(k'\circ u)(t).
\end{aligned}$$

Posons

$$\varepsilon = \varepsilon_0 < \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{(b-2)\,n}{b}\right\}.$$

On choisit N assez grand pour que

$$N\eta - C_\varepsilon - \max_{\Gamma 1}|m.\nu| > 0.$$

Maintenant, en utilisant le fait que

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} k(t) = 0,$$

nous arrivons à

$$\begin{aligned} L'(t) &\leq -dE(t) - \frac{\eta N}{2}\int_{\Gamma_1} k'' \circ u\Gamma_1 - C\int_{\Gamma_1} (k' \circ u)(t) \\ &\leq -dE(t) - c\int_{\Gamma_1} (k' \circ u)(t) \end{aligned}$$

On obtient le résultat souhaité. ■

On va énoncer notre résultat principal de ce chapitre qui est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.3.8 *Supposons que* $(2.2)-(2.5)$, (2.11) *et* (2.12) *sont satisfaites, avec* $\lim_{t\to\infty} k(t) = 0$ *alors pour* t_0 *assez grand, il existe une constante positive* C' *tel que la solution* u *du problème* (2.1) *vérifie, pour tout* $t \geq t_0$,

$$E(t) \leq C'\left[\frac{1}{\int_0^t \gamma^{2p-1}(s)\,ds + 1}\right]^{\frac{1}{2p-2}} \tag{2.35}$$

De plus,

$$Si \int_0^{+\infty} E(t) < +\infty, \tag{2.36}$$

alors

$$E(t) \leq C'\left[\frac{1}{\int_0^t \gamma^{p}(s)\,ds + 1}\right]^{\frac{1}{p-1}}. \tag{2.37}$$

2.4 Preuve du résultat principal

On multiplie (2.29) par $\gamma(t)$, on obtient

$$\gamma(t)\,L'(t) \leq -d\gamma(t)\,E(t) - c\gamma(t)\int_{\Gamma_1} (k' \circ u)(t)\,d\Gamma_1, \tag{2.38}$$

d'après le lemme 2.3.5, on a

$$\gamma(t)\int_{\Gamma_1} (-k' \circ u)\,d\Gamma_1 \leq C\left[-E'(t)\right]^{\frac{1}{2p-1}}.$$

Donc (2.38) devient

$$\gamma(t)\,L'(t) \leq -d\gamma(t)\,E(t) + C\left[-E'(t)\right]^{\frac{1}{2p-1}}.$$

On multiplie l'inégalité précédente par $\gamma^{\alpha}(t)E^{\alpha}(t)$ où $\alpha = 2p-2$, donne

$$\gamma^{\alpha+1}(t)E^{\alpha}(t)L'(t) \quad \leq \quad -d\gamma^{\alpha+1}(t)E^{\alpha+1}(t) + C\gamma^{\alpha}(t)E^{\alpha}(t)\left[-E'(t)\right]^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$

On utilise l'inégalité de Young, avec $q = \alpha+1$ et $q^* = \frac{\alpha+1}{\alpha}$, on obtient, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\gamma^{\alpha+1}(t)E^{\alpha}(t)L'(t) \quad &\leq \quad -d\gamma^{\alpha+1}(t)E^{\alpha+1}(t) + C\left[\varepsilon\gamma^{\alpha+1}(t)E^{\alpha+1}(t) - C_{\varepsilon}E'(t)\right] \\
&= \quad -(d-\varepsilon C)\gamma^{\alpha+1}(t)E^{\alpha+1}(t) - C'E'(t).
\end{aligned}$$

On choisit $\varepsilon < \frac{d}{C}$ et on utilise le fait que $\gamma'(t) \leq 0$ et que $E'(t) \leq 0$, on déduit que

$$\left(\gamma^{\alpha+1}E^{\alpha}L\right)'(t) \leq \gamma^{\alpha+1}(t)E^{\alpha}(t)L'(t) \leq -c\gamma^{\alpha+1}(t)E^{\alpha+1}(t) - C'E'(t),$$

ce qui implique

$$\left(\gamma^{\alpha+1}(t)E^{\alpha}(t)L(t) + C'E(t)\right)' \leq -c\gamma^{\alpha+1}(t)E^{\alpha+1}(t) \tag{2.39}$$

On pose

$$F(t) = \gamma^{\alpha+1}(t)E^{\alpha}(t)L(t) + C'E(t), \tag{2.40}$$

où

$$F(t) \sim E(t).$$

Alors (2.39) devient

$$F'(t) \leq -c\gamma^{\alpha+1}(t)F^{\alpha+1}(t) = -c\gamma^{2p-1}(t)F^{2p-1}(t). \tag{2.41}$$

On intègre sur $(0,t)$ et on utilise le fait que $F \sim E$, on obtient

$$E(t) \leq C'\left[\frac{1}{\int_0^t \gamma^{2p-1}(s)\,ds + 1}\right]^{\frac{1}{2p-2}}.$$

Pour établir (2.37), on considère (2.36). Supposons que $\eta(t) > 0$. Alors la multiplication de (2.29) par $\gamma(t)$, donne

$$\begin{aligned}
\gamma(t)\,L'(t) \leq &- d\gamma(t)\,E(t) - c\gamma(t)\int_{\Gamma_1} k' \circ u d\Gamma_1 \\
= &- d\gamma(t)\,E(t) \\
&+ c\frac{\eta(t)}{\eta(t)}\int_{\Gamma_1}\int_0^t \left[\gamma^p(s)\,(-k')^p(s)\right]^{\frac{1}{p}} \|u(t) - u(t-s)\|_2^2\, ds d\Gamma_1,
\end{aligned} \tag{2.42}$$

où

$$\begin{aligned}\eta(t)=\int_0^t\|u(t)-u(t-s)\|_2^2\,ds &\leq 2\int_0^t\|u(t)\|_2^2+\|u(t-s)\|_2^2ds\\ &\leq 2C_\Omega\int_0^t\|\nabla u(t)\|_2^2+\|\nabla u(t-s)\|_2^2ds\\ &\leq 2C_\Omega\int_0^t[E(t)+E(t-s)]\,ds\\ &\leq 4C_\Omega\int_0^t E(t-s)ds=4C_\Omega\int_0^t E(s)ds\\ &< 4C_\Omega\int_0^{+\infty}E(s)ds<+\infty.\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Jensen pour le deuxième terme de (2.42), avec

$$G(y)=y^{\frac{1}{p}},\quad \text{pour}\quad y>0$$

et

$$f(s)=\gamma^p(s)(-k')^p(s),\quad h(s)=\|u(t)-u(t-s)\|_2^2,\quad \text{pour}\quad s>0,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\gamma(t)L'(t)\leq &-d\gamma(t)E(t)\\ &+c\eta(t)\left[\frac{1}{\eta(t)}\int_{\Gamma_1}\int_0^t\left[\gamma^p(s)(-k')^p(s)\right]\|u(t)-u(t-s)\|_2^2\,dsd\Gamma_1\right]^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}\tag{2.43}$$

Si $\eta(t)=0$, alors l'inégalité précédente a toujours un sens car $p>1$. En utilisant le fait que γ est décroissante, pour voir que

$$\begin{aligned}\gamma(t)L'(t) &\leq -d\gamma(t)E(t)\\ &\quad +c\eta^{\frac{p-1}{p}}(t)\left[\gamma^{p-1}(0)\int_{\Gamma_1}\int_0^t\gamma(s)(-k')^p(s)\|u(t)-u(t-s)\|_2^2\,dsd\Gamma_1\right]^{\frac{1}{p}}\\ &\leq -d\gamma(t)E(t)+C'\left(\int_{\Gamma_1}(k''\circ u)\,d\Gamma_1\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq -d\gamma(t)E(t)+C'(-E'(t))^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

On multiplie cette dernière inégalité par le terme $\gamma^\alpha(t)E^\alpha(t)$ pour $\alpha=p-1$, on obtient

$$\gamma^{\alpha+1}(t)E^\alpha(t)L'(t)\leq -d\gamma^{\alpha+1}(t)E^{\alpha+1}(t)+C'\gamma^\alpha(t)E^\alpha(t)(-E'(t))^{\frac{1}{\alpha+1}},$$

on répète les mêmes étapes (cas $p > 1$), on trouve

$$H'(t) \leq -d\gamma^{\alpha+1}(t)\, H^{\alpha+1}(t) = -d\gamma^{p}(t)\, H^{p}(t)\,,$$

où

$$H(t) \sim E(t)\,.$$

Une simple intégration sur $(0, t)$ et on utilise le fait que H est équivalent à E, on arrive à

$$E(t) \leq C' \left[\frac{1}{\int_0^t \gamma^p(s)\, ds + 1}\right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

Chapitre 3

Stabilisation générale d'un système thermoélastique avec un contrôle frontière de type mémoire

Dans ce chapitre nous considérons un système thermoélastique soumis à l'effet d'un amortissement viscoélastique, où l'amortissement de type mémoire agit sur une partie de la frontière. Le but de ce chapitre est d'étudier la stabilité du problème défini dans ce qui suit.

3.1 Position du problème

Soit le problème

$$\begin{cases} u_{tt} - \mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla(divu) + \beta\nabla\theta = 0, & \text{dans } \Omega\times(0,+\infty) \\ c\theta_t - \kappa\Delta\theta + \beta divu_t = 0, & \text{dans } \Omega\times(0,+\infty) \\ u(.,0) = u_0, \quad u_t(.,0) = u_1, \quad \theta(.,0) = \theta_0, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0\times[0,+\infty) \\ u(x,t) = -\int\limits_0^t g(t-s)\left(\mu\dfrac{\partial u}{\partial\nu} + (\mu+\lambda)(divu)\nu\right)(s)\,ds, & \text{sur } \Gamma_1\times[0,+\infty) \\ \theta = 0, & \text{sur } \Gamma\times[0,+\infty). \end{cases} \tag{3.1}$$

Ici le corps Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ avec une frontière suffisamment régulière Γ subdivisé en deux parties Γ_0 et Γ_1 tel que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $c, \kappa, \mu, \lambda, \beta$ sont des constantes positives, où μ, λ sont des modules de Lamé et $\beta \neq 0$ est un nombre réel,

ν est la normale extérieure unitaire à Γ, $u = u(x,t)$ et $\theta = \theta(x,t)$ représentent le vecteur de déplacement et la température absolue. g est la fonction de relaxation positive et différentiable avec $g(0) \neq 0$. La condition au bord sur Γ_1, donnée sous forme d'une intégrale, exprime l'amortissement non local de type mémoire.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. On va donner quelques notations et lemmes nécessaires pour la démonstration dans la section 3.2. Quelques lemmes techniques et le résultat de stabilité générale avec la démonstration sont présentés successivement dans les sections 3.3 et 3.4.

3.2 Notations et transformation

Dans cette section, on va préparer certains éléments nécessaires pour prouver notre résultat principal. On a les hypothèses suivantes :

(H) Supposons que les partitions Γ_0 et Γ_1 sont fermées, disjointes et meas$(\Gamma_0) > 0$, telles que

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma : \; m(x).\nu \leq 0\}$$

et

$$\Gamma_1 = \{x \in \Gamma : \; m(x).\nu \geq \delta > 0\},$$

où $m(x) = x - x_0$, pour un point fixe $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

L'estimation du terme $\left(\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu+\lambda)(\mathrm{div}u)\nu\right)$:

La dérivation de la troisième équation du problème (3.1) par rapport à t, donne

$$u_t = \frac{d}{dt}u(x,t) = -\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s)\left(\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu+\lambda)(divu)\,\nu\right)(s)\,ds\right),$$

en utilisant la formule de Leibniz (1.2) et le produit de convolution qui est défini par (1.1), on obtient

$$\begin{aligned} u_t &= -\left[\int_0^t g'(t-s)\left(\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu+\lambda)(divu)\,\nu\right)ds + g(0)\left(\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu+\lambda)(divu)\,\nu\right)\right] \\ &= -\left[g' * \left(\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu+\lambda)(divu)\,\nu\right) + g(0)\left(\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu+\lambda)(divu)\,\nu\right)\right], \end{aligned}$$

on divise les deux membres de cette équation par $g(0)$, on arrive à

$$\mu\frac{\partial u}{\partial \nu}+(\mu+\lambda)(\text{div}u)\nu=-\frac{1}{g(0)}\left[u_t+\left(g'*\left(\mu\frac{\partial u}{\partial \nu}+(\mu+\lambda)(\text{div}u)\nu\right)\right)\right].$$

Cette équation est une forme d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce (1.3), dont sa solution est donnée comme suit (1.4)

$$\begin{aligned}\mu\frac{\partial u}{\partial \nu}+(\mu+\lambda)(divu)\nu&=-\frac{1}{g(0)}\left[u_t+\int_0^t k(t-s)u_t(s)ds\right]\\&=-\frac{1}{g(0)}\left[u_t+(k*u_t)(t)\right],\quad \text{sur } \Gamma_1\times\mathbb{R}^+,\end{aligned}$$

où la fonction k est le noyau résolvant de $-g'/g(0)$ (voir (1.5)), qui satisfait

$$k+\frac{1}{g(0)}(g'*k)=-\frac{1}{g(0)}g'.$$

On note par $\eta=1/g(0)$ et en utilisant l'intégration par parties et la condition $u_0=0$ sur Γ, nous arrivons à

$$\mu\frac{\partial u}{\partial \nu}+(\mu+\lambda)(divu)\nu=-\eta(u_t+k(0)u+k'*u),\quad \text{sur } \Gamma_1\times[0,+\infty). \tag{3.2}$$

Puisque nous nous sommes intéressés par les fonctions de relaxation à décroissance plus générale, il est important de savoir si la fonction k hérite de quelques propriétés de la fonction de relaxation g. Le lemme suivant répond à cette question.
Soit $h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, une fonction continue et k son noyau de résolvant, c'est-à-dire :

$$k(t)=h(t)+(k*h)(t). \tag{3.3}$$

Il est évident que la fonction k est continue et positive (voir [14, 41]).

Lemme 3.2.1 *Soit $p>1$, $\gamma:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ est une fonction décroissante qui satisfait $\gamma(0)>0$ et*

$$\begin{aligned}C_p&=\sup_{t\geq 0}\int_0^t\left(1+\int_0^t\gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}}\left(1+\int_0^{t-s}\gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{-\frac{1}{2p-2}}\\&\quad\times\left(1+\int_0^s\gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{-\frac{1}{2p-2}}ds.\end{aligned}$$

Supposons qu'il existe C et $1-CC_p>0$ tels que

$$h(t)\leq\frac{C}{\left(1+\int_0^t\gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}}}.$$

Alors, il existe $\widetilde{C}$ tels que

$$k(t) \leq \frac{\widetilde{C}}{\left(1+\int_0^t \gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}}}.$$

Preuve. On pose

$$k_p(t) = k(t)\left(1+\int_0^t \gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}}$$

et

$$h_p(t) = h(t)\left(1+\int_0^t \gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}}.$$

On multiplie l'équation (3.3) par $\left(1+\int_0^t \gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
k_p(t) &= h_p(t) + \int_0^t \left(1+\int_0^t \gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}} k(t-s)\,h(s)\,ds \\
&= h_p(t) + \int_0^t \left(1+\int_0^t \gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}} \left(1+\int_0^{t-s} \gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{-\frac{1}{2p-2}} \\
&\quad \times k_p(t-s)\,h(s)\,ds \\
&= h_p(t) + \int_0^t \left(1+\int_0^t \gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}} \left(1+\int_0^{t-s} \gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{-\frac{1}{2p-2}} \\
&\quad \times \left(1+\int_0^{s} \gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{-\frac{1}{2p-2}} k_p(t-s) \left(1+\int_0^{s} \gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}} h(s)\,ds \\
&= h_p(t) + \int_0^t \left(1+\int_0^t \gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}} \left(1+\int_0^{t-s} \gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{-\frac{1}{2p-2}} \\
&\quad \times \left(1+\int_0^{s} \gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{-\frac{1}{2p-2}} k_p(t-s)\,h_p(s)\,ds.
\end{aligned}$$

On définie par

$$\begin{aligned}
C_p &= \sup_{t\geq 0} \int_0^t \left(1+\int_0^t \gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}} \left(1+\int_0^{t-s} \gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{-\frac{1}{2p-2}} \\
&\quad \times \left(1+\int_0^{s} \gamma^{2p-1}(\zeta)\,d\zeta\right)^{-\frac{1}{2p-2}} ds
\end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\sup_{0\leq s\leq t} k_p(s) \leq \sup_{0\leq s\leq t} h_p(s) + CC_p \sup_{0\leq s\leq t} k_p(s) \leq C + CC_p \sup_{0\leq s\leq t} k_p(s),$$

ce qui implique

$$\sup_{0\leq s\leq t} k_p\left(s\right) \leq \frac{C}{1-CC_p},\ \forall t>0.$$

Par conséquent

$$k_p\left(t\right) \leq \frac{C}{1-CC_p}.$$

Donc

$$k\left(t\right) \leq \frac{C}{1-CC_p}\left(1+\int_0^t \gamma^{2p-1}\left(\zeta\right)d\zeta\right)^{-\frac{1}{2p-2}}.$$

D'où

$$k\left(t\right) \leq \frac{\widetilde{C}}{\left(1+\int_0^t \gamma^{2p-1}\left(\zeta\right)d\zeta\right)^{\frac{1}{2p-2}}}.$$

■

En se basant sur le **lemme 3.2.1**, dans toute la suite on va utiliser l'équation (3.2) à la place de la troisième équation du système (3.1).

Définissons maintenant :

$$(\varphi \circ \psi)(t) = \int_0^t \varphi(t-s)|\psi(t)-\psi(s)|^2 ds,$$

$$(\varphi \Diamond \psi)(t) = \int_0^t \varphi(t-s)(\psi(t)-\psi(s))ds.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, nous avons

$$|(\varphi \Diamond \psi)(t)|^2 \leq \left(\int_0^t |\varphi(s)|ds\right)(|\varphi| \circ \psi)(t). \tag{3.4}$$

Lemme 3.2.2 ([*41*]) *Si* $\varphi,\ \psi \in C^1\left(\mathbb{R}^+\right)$*, alors*

$$\begin{aligned}\left(\varphi * \psi\right)\left(t\right)\psi_t\left(t\right) = &-\frac{1}{2}\varphi\left(t\right)\left|\psi\left(t\right)\right|^2 + \frac{1}{2}\left(\varphi' \circ \psi\right)\left(t\right) \\ &-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left(\varphi \circ \psi\right)\left(t\right) - \left(\int_0^t \varphi\left(s\right)ds\right)\left|\psi\left(t\right)\right|^2\right).\end{aligned} \tag{3.5}$$

Avant de définir la solution du système (3.1), on considère l'espace suivant :

$$V = H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) :\ v = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_0\}.$$

En appliquant la méthode de Galerkin comme dans [13], on montre que notre système (3.1) est bien posé au sens suivant :

Théorème 3.2.3 *Soient* $k \in W^{2,1}(\mathbb{R}^+) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)$, $u_0 \in (H^2(\Omega) \cap V)^n$, $\theta_0 \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ *et* $u_1 \in V^n$, *avec*

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \eta u_0 = 0 \text{ sur } \Gamma_1. \tag{3.6}$$

Alors, le système (3.1) *admet une seule solution forte* (u, θ) *vérifiant*

$$\begin{aligned} u &\in C\left(\mathbb{R}^+; (H^2(\Omega) \cap V)^n\right) \cap C^1(\mathbb{R}^+; V^n) \cap C^2\left(\mathbb{R}^+; (L^2(\Omega))^n\right), \\ \theta &\in C(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)). \end{aligned}$$

3.3 La décroissance générale de l'énergie de la solution

Dans cette section on va étudier le comportement asymptotique de la solution du système (3.1). De plus, supposons que la fonction k vérifie l'hypothèse suivante

$$k(0) > 0,\ k(t) \geq 0,\ k'(t) \leq 0,\ k''(t) \geq \gamma(t)(-k'(t))^p, \tag{3.7}$$

où $t \geq 0$, $1 < p < \frac{3}{2}$ et $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction qui satisfait les conditions suivantes

$$\gamma(t) > 0,\ \gamma'(t) \leq 0. \tag{3.8}$$

On introduit la fonctionnelle d'énergie totale associée au problème (3.1) par

$$\begin{aligned} E(t) =& \frac{1}{2}\int_\Omega \left[|u_t|^2 + \mu |\nabla u|^2 + (\mu+\lambda)(divu)^2 + c\theta^2\right] dx \\ &- \frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} k' \circ u \, d\Gamma_1 + \frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} k(t)|u|^2 d\Gamma_1. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Lemme 3.3.1 *L'énergie de la solution* u *de* (3.1) *satisfait*

$$\begin{aligned} E'(t) =& -\kappa\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx - \eta\int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma_1 + \frac{\eta}{2}k'(t)\int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1 \\ &- \frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} (k'' \circ u)(t) d\Gamma_1 \leq 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Preuve. On multiplie $(3.1)_1$ par u_t et $(3.1)_2$ par θ et on intègre sur Ω, en utilisant (3.2), (3.5) et la formule de Green, nous obtenons

$$\begin{aligned} E'(t) \;=\; & -\kappa\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx - \eta\int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma_1 + \frac{\eta}{2}k'(t)\int_{\Gamma_1} |u(t)|^2 d\Gamma_1 \\ & -\frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} (k'' \circ u)(t)\, d\Gamma_1 \end{aligned}$$

et par conséquent, on obtient (3.10) . ■

Maintenant, pour étudier la stabilité de notre problème (3.1) on a besoin les lemmes cruciaux suivants

Lemme 3.3.2 *La solution u de* (3.1) *satisfait*

$$\|u(t)-u(s)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \leq CE(0), \quad \forall s \in [0,t].$$

Preuve. En utilisant le théorème de trace et (3.9), on obtient, pour tout $s \in [0,t]$,

$$\begin{aligned}
\|u(t)-u(s)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 &\leq c\|\nabla u(t)-\nabla u(s)\|_2^2 \\
&\leq c\left(\|\nabla u(t)\|_2^2+\|\nabla u(s)\|_2^2\right) \\
&\leq c'\left(E(t)+E(s)\right) \\
&\leq CE(0).
\end{aligned}$$

■

Lemme 3.3.3 *Supposons que k satisfait* (3.7). *Alors*

$$\int_0^{+\infty} \gamma(t)\left[-k'(t)\right]^{1-\sigma} dt < +\infty, \ \forall \sigma < 2-p.$$

Preuve. Rappelant (3.7) , on peut facilement voir que

$$\begin{aligned}
\gamma(t)\left[-k'(t)\right]^{1-\sigma} &= \gamma(t)\left(-k'(t)\right)^p\left[-k'(t)\right]^{1-\sigma-p} \\
&\leq k''(t)\left[-k'(t)\right]^{1-\sigma-p}.
\end{aligned}$$

On intègre, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \gamma(t)\left[-k'(t)\right]^{1-\sigma} dt &\leq \int_0^{+\infty} k''(t)\left[-k'(t)\right]^{1-\sigma-p} dt \\
&= \frac{-1}{2-p-\sigma}\int_0^{+\infty} -(2-p-\sigma)\,k''(t)\left[-k'(t)\right]^{1-\sigma-p} dt \\
&= -\left.\frac{\left[-k'(t)\right]^{2-p-\sigma}}{2-p-\sigma}\right|_0^{+\infty} < +\infty,
\end{aligned}$$

puisque $\sigma < 2-p$ et $-k'$ est positive et décroissante. ■

Lemme 3.3.4 *Supposons que k satisfait* (3.7). *Alors la solution u de* (3.1) *satisfait*

$$\left[\int_{\Gamma_1} \left(\gamma(t)(-k')^p \circ u\right) d\Gamma_1\right]^{\frac{1}{2p-1}} \leq \left[\int_{\Gamma_1} \left(k'' \circ u\right) d\Gamma_1\right]^{\frac{1}{2p-1}}. \tag{3.11}$$

Preuve. En utilisant le fait que γ est décroissante, on obtient

$$\begin{aligned} t-s \leq t \quad &\Rightarrow \quad \gamma(t-s) \geq \gamma(t) \\ &\Rightarrow \quad (-k'(t-s))^p \gamma(t-s) \geq (-k'(t-s))^p \gamma(t). \end{aligned}$$

En multipliant par $|u(t)-u(s)|^2$ et en intégrant sur $(0,t) \times \Gamma_1$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_1} \int_0^t (-k'(t-s))^p \gamma(t-s) |u(t)-u(s)|^2 ds d\Gamma_1 \\ &\geq \int_{\Gamma_1} \int_0^t (-k'(t-s))^p \gamma(t) |u(t)-u(s)|^2 ds d\Gamma_1, \end{aligned}$$

puis en utilisant (3.7), on trouve

$$\int_{\Gamma_1} (\gamma(t)(-k')^p \circ u)\, d\Gamma_1 \leq \int_{\Gamma_1} k'' \circ u d\Gamma_1.$$

D'où, on obtient (3.11). ■

Lemme 3.3.5 *Supposons que k satisfait* (3.7). *Alors il existe $C>0$ telle que la solution u de* (3.1) *satisfait*

$$\int_{\Gamma_1} \gamma(t) (-k' \circ u)\, d\Gamma_1 \leq C \left[-E'(t)\right]^{\frac{1}{2p-1}}.$$

Preuve. Il est facile d'obtenir

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} (-k' \circ u)\, d\Gamma_1 &= \int_{\Gamma_1} \int_0^t -k'(t-s) \left|u(t)-u(s)\right|^2 ds d\Gamma_1 \\ &= \int_{\Gamma_1} \int_0^t \left[-k'(t-s)\right]^{(1-\sigma)\frac{p-1}{p-1+\sigma}} \left(\left|u(t)-u(s)\right|^2\right)^{\frac{p-1}{p-1+\sigma}} \\ &\quad \times \left[-k'(t-s)\right]^{1-(1-\sigma)\frac{p-1}{p-1+\sigma}} \left(\left|u(t)-u(s)\right|^2\right)^{\frac{\sigma}{p-1+\sigma}} ds d\Gamma_1 \\ &= \int_{\Gamma_1} \int_0^t \left[-k'(t-s)\right]^{(1-\sigma)\frac{p-1}{p-1+\sigma}} \left(\left|u(t)-u(s)\right|^2\right)^{\frac{p-1}{p-1+\sigma}} \\ &\quad \times \left[-k'(t-s)\right]^{\frac{\sigma p}{p-1+\sigma}} \left(\left|u(t)-u(s)\right|^2\right)^{\frac{\sigma}{p-1+\sigma}} ds d\Gamma_1. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, où $s = \frac{p-1+\sigma}{p-1}$ et $s' = \frac{p-1+\sigma}{\sigma}$ et le lemme 3.3.2, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} (-k' \circ u)\, d\Gamma_1 &\leq \left[\int_{\Gamma_1}\int_0^t [-k'(t-s)]^{1-\sigma} |u(t)-u(s)|^2\, dsd\Gamma_1\right]^{\frac{p-1}{p-1+\sigma}} \\
&\quad \times \left[\int_{\Gamma_1}\int_0^t [-k'(t-s)]^{p} |u(t)-u(s)|^2\, dsd\Gamma_1\right]^{\frac{\sigma}{p-1+\sigma}} \\
&\leq \left[\int_{\Gamma_1}\int_0^t [-k'(t-s)]^{1-\sigma} |u(t)-u(s)|^2\, dsd\Gamma_1\right]^{\frac{p-1}{p-1+\sigma}} \\
&\quad \times \left[\int_{\Gamma_1} \left((-k')^p \circ u\right) d\Gamma_1\right]^{\frac{\sigma}{p-1+\sigma}} \\
&\leq C\left[\int_0^t [-k'(t-s)]^{1-\sigma}\, dsd\Gamma_1\right]^{\frac{p-1}{p-1+\sigma}} \\
&\quad \times \left[\int_{\Gamma_1} \left((-k')^p \circ u\right) d\Gamma_1\right]^{\frac{\sigma}{p-1+\sigma}}.
\end{aligned}$$

Prenons $\sigma = \frac{1}{2}$, on a

$$\int_{\Gamma_1} (-k' \circ u)\, d\Gamma_1 \leq C\left[\int_0^t [-k'(s)]^{\frac{1}{2}}\, dsd\Gamma_1\right]^{\frac{2p-2}{2p-1}} \left[\int_{\Gamma_1} \left((-k')^p \circ u\right) d\Gamma_1\right]^{\frac{1}{2p-1}}. \tag{3.12}$$

On multiplie (3.12) par $\gamma(t)$, rappelant le lemme 3.3.3 et le lemme 3.3.4 et en utilisant le lemme 3.3.1, on obtient

$$\begin{aligned}
\gamma(t)\int_{\Gamma_1} (-k' \circ u)\, d\Gamma_1 &\leq C\gamma(t)\left[\int_0^t [-k'(s)]^{\frac{1}{2}}\, dsd\Gamma_1\right]^{\frac{2p-2}{2p-1}} \left[\int_{\Gamma_1} \left((-k')^p \circ u\right) d\Gamma_1\right]^{\frac{1}{2p-1}} \\
&\leq C\gamma(t)^{\frac{2p-2}{2p-1}}\left[\int_0^t [-k'(s)]^{\frac{1}{2}}\, dsd\Gamma_1\right]^{\frac{2p-2}{2p-1}} \gamma(t)^{\frac{1}{2p-1}} \left[\int_{\Gamma_1} \left((-k')^p \circ u\right) d\Gamma_1\right]^{\frac{1}{2p-1}} \\
&\leq C\left[\int_0^t \gamma(s)[-k'(s)]^{\frac{1}{2}}\, dsd\Gamma_1\right]^{\frac{2p-2}{2p-1}} \left[\int_{\Gamma_1} \left(\gamma(t)(-k')^p \circ u\right) d\Gamma_1\right]^{\frac{1}{2p-1}} \\
&\leq C\left[\int_0^{+\infty} \gamma(s)[-k'(s)]^{\frac{1}{2}}\, dsd\Gamma_1\right]^{\frac{2p-2}{2p-1}} \left[\int_{\Gamma_1} (k'' \circ u)\, d\Gamma_1\right]^{\frac{1}{2p-1}} \\
&\leq C[-E'(t)]^{\frac{1}{2p-1}}.
\end{aligned}$$

■

Lemme 3.3.6 *Sous les hypothèses* (H) *et* $(3.7)-(3.8)$, *la solution* u *de* (3.1) *vérifie, pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t.\left[M+(n-1)\,u\right]dx \leq & -\int_\Omega |u_t|^2dx - \mu\int_\Omega |\nabla u|^2dx - \frac{\mu+\lambda}{2}\int_\Omega (divu)^2\,dx \\ & + C\int_\Omega |\nabla\theta|^2dx - \frac{\mu\delta}{2}\int_{\Gamma_1}|\nabla u|^2d\Gamma_1 - (\mu+\lambda)\,\delta\int_{\Gamma_1}(divu)^2\,d\Gamma_1 \\ & + \frac{C}{\mu}\int_{\Gamma_1}|u_t|^2d\Gamma_1 + Ck^2\,(t)\int_{\Gamma_1}|u|^2d\Gamma_1 - \frac{C\mu}{\varepsilon}\int_{\Gamma_1}(k'\circ u)\,(t)\,d\Gamma_1 \\ & + \varepsilon\int_{\Gamma_1}|u|^2d\Gamma_1, \end{aligned} \tag{3.13}$$

où

$$M = (M_1, M_2, ..., M_n)^T\,, \quad \textit{tel que} \quad M_i = 2m.\nabla u^i$$

et C *est une constante positive.*

Preuve. Voir [32, 6, 38]. ■

Maintenant, nous adoptons sans preuve le résultat suivant de [32].

Lemme 3.3.7 *Il existe des constantes positives* N, M, m, c *et* t_0 *telles que la fonction de Lyapunov*

$$L\,(t) = NE\,(t) + \int\limits_\Omega u_t.\left[M+(n-1)\,u\right]dx$$

est équivalent à $E\,(t)$ *et satisfait*

$$L'\,(t) \leq -mE\,(t) - c\int_{\Gamma_1}(k'\circ u)\,(t)\,d\Gamma_1, \quad \forall t\geq t_0. \tag{3.14}$$

On va énoncer notre résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.3.8 *Soit* $(u_0, u_1, \theta_0) \in \left(V^n, \left(L^2\,(\Omega)\right)^n, H_0^1\,(\Omega)\right)$. *Supposons que* (H) *et* $(3.7)-(3.8)$ *sont satisfaites, avec* $\lim\limits_{t\to\infty} k\,(t) = 0$ *alors pour* t_0 *assez grand, il existe une constante positive* C' *tel que la solution* u *du problème* (3.1) *vérifie, pour tout* $t \geq t_0$,

$$E\,(t) \leq C'\left[\frac{1}{\int_0^t \gamma^{2p-1}\,(s)\,ds + 1}\right]^{\frac{1}{2p-2}} \tag{3.15}$$

De plus,

$$\textit{Si}\int_0^{+\infty} E(t) < +\infty, \tag{3.16}$$

alors

$$E(t) \leq C' \left[\frac{1}{\int_0^t \gamma^p(s)\, ds + 1} \right]^{\frac{1}{p-1}}. \tag{3.17}$$

3.4 Preuve du résultat principal

On multiplie (3.14) par $\gamma(t)$, on obtient

$$\gamma(t) L'(t) \leq -m\gamma(t) E(t) - c\gamma(t) \int_{\Gamma_1} (k' \circ u)(t)\, d\Gamma_1 \tag{3.18}$$

d'après le lemme 3.3.5, on a

$$\gamma(t) \int_{\Gamma_1} (-k' \circ u)\, d\Gamma_1 \leq C\left[-E'(t)\right]^{\frac{1}{2p-1}}.$$

Donc (3.18) devient

$$\gamma(t) L'(t) \leq -m\gamma(t) E(t) + C\left[-E'(t)\right]^{\frac{1}{2p-1}}.$$

On multiplie l'inégalité précédente par $\gamma^\alpha(t)E^\alpha(t)$ où $\alpha = 2p-2$, donne

$$\gamma^{\alpha+1}(t)E^\alpha(t)L'(t) \quad \leq \quad -m\gamma^{\alpha+1}(t)E^{\alpha+1}(t) + C\gamma^\alpha(t)E^\alpha(t)\left[-E'(t)\right]^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$

On utilise l'inégalité de Young, avec $q = \alpha + 1$ et $q^* = \frac{\alpha+1}{\alpha}$, on obtient, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\gamma^{\alpha+1}(t)E^\alpha(t)L'(t) &\leq -m\gamma^{\alpha+1}(t)E^{\alpha+1}(t) + C\left[\varepsilon\gamma^{\alpha+1}(t)E^{\alpha+1}(t) - C_\varepsilon E'(t)\right] \\
&= -(m - \varepsilon C)\gamma^{\alpha+1}(t)E^{\alpha+1}(t) - C'E'(t).
\end{aligned}$$

On choisit $\varepsilon < \frac{m}{C}$ et on utilise le fait que $\gamma'(t) \leq 0$ et que $E'(t) \leq 0$, on déduit que

$$\left(\gamma^{\alpha+1}E^\alpha L\right)'(t) \leq \gamma^{\alpha+1}(t)E^\alpha(t)L'(t) \leq -c\gamma^{\alpha+1}(t)E^{\alpha+1}(t) - C'E'(t),$$

ce qui implique

$$\left(\gamma^{\alpha+1}(t)E^\alpha(t)L(t) + C'E(t)\right)' \leq -c\gamma^{\alpha+1}(t)E^{\alpha+1}(t) \tag{3.19}$$

On pose

$$F(t) = \gamma^{\alpha+1}(t)E^\alpha(t)L(t) + C'E(t), \tag{3.20}$$

où

$$F(t) \sim E(t).$$

Alors (3.19) devient

$$F'(t) \leq -c\gamma^{\alpha+1}(t)F^{\alpha+1}(t) = -c\gamma^{2p-1}(t)F^{2p-1}(t). \tag{3.21}$$

On intègre sur $(0,t)$ et on utilise le fait que $F \sim E$, on obtient

$$E(t) \leq C' \left[\frac{1}{\int_0^t \gamma^{2p-1}(s)\,ds + 1}\right]^{\frac{1}{2p-2}}.$$

Pour établir (3.17), on considère (3.16). Supposons que $\eta(t) > 0$. Alors la multiplication de (3.14) par $\gamma(t)$, donne

$$\begin{aligned}\gamma(t)\,L'(t) \leq & -m\gamma(t)\,E(t) - c\gamma(t)\int_{\Gamma_1} k' \circ u d\Gamma_1 \\ = & -m\gamma(t)\,E(t) \\ & + c\frac{\eta(t)}{\eta(t)}\int_{\Gamma_1}\int_0^t \left[\gamma^p(s)\,(-k')^p(s)\right]^{\frac{1}{p}} \|u(t) - u(t-s)\|_2^2\,dsd\Gamma_1,\end{aligned} \tag{3.22}$$

où

$$\begin{aligned}\eta(t) = \int_0^t \|u(t) - u(t-s)\|_2^2\,ds \ & \leq \ 2\int_0^t \|u(t)\|_2^2 + \|u(t-s)\|_2^2 ds \\ & \leq \ 2C_\Omega \int_0^t \|\nabla u(t)\|_2^2 + \|\nabla u(t-s)\|_2^2 ds \\ & \leq \ 2C_\Omega \int_0^t [E(t) + E(t-s)]\,ds \\ & \leq \ 4C_\Omega \int_0^t E(t-s)ds = 4C_\Omega \int_0^t E(s)ds \\ & < \ 4C_\Omega \int_0^{+\infty} E(s)ds < +\infty.\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Jensen pour le deuxième terme de (3.22), avec

$$G(y) = y^{\frac{1}{p}}, \quad \text{pour} \quad y > 0$$

et

$$f(s) = \gamma^p(s)\,(-k')^p(s)\,, \quad h(s) = \|u(t) - u(t-s)\|_2^2\,, \quad \text{pour} \quad s > 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\gamma(t)\,L'(t) \leq & -m\gamma(t)\,E(t) \\ & + c\eta(t)\left[\frac{1}{\eta(t)}\int_{\Gamma_1}\int_0^t \left[\gamma^p(s)\,(-k')^p(s)\right] \|u(t) - u(t-s)\|_2^2\,dsd\Gamma_1\right]^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Si $\eta(t)=0$, alors l'inégalité précédente a toujours un sens car $p>1$. En utilisant le fait que γ est décroissante, pour voir que

$$\begin{aligned}
\gamma(t)\,L'(t) &\leq -m\gamma(t)\,E(t)+c\eta^{\frac{p-1}{p}}(t)\left[\gamma^{p-1}(0)\int_{\Gamma_1}\int_0^t\gamma(s)\,(-k')^p(s)\,\|u(t)-u(t-s)\|_2^2\,dsd\Gamma_1\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\leq -m\gamma(t)\,E(t)+C'\left(\int_{\Gamma_1}(k''\circ u)\,d\Gamma_1\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq -m\gamma(t)\,E(t)+C'\left(-E'(t)\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

On multiplie par $\gamma^{\alpha}(t)\,E^{\alpha}(t)$ pour $\alpha=p-1$ et on répète les mêmes étapes (cas $p>1$), on obtient

$$E(t)\leq C'\left[\frac{1}{\int_0^t\gamma^p(s)\,ds+1}\right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

Chapitre 4

Résultat de décroissance générale pour une équation viscoélastique avec un terme d'amortissement faible

4.1 Position du problème

Dans ce chapitre nous considérons une équation viscoélastique avec un terme amortissant faible pour une classe plus large des fonctions de relaxation. L'objet de ce chapitre est d'étudier le problème suivant :

$$\begin{cases} |u_t|^\rho u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \int_0^t g(t-\tau)\,\Delta u(\tau)\,d\tau + \alpha(t)\,h(u_t) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

où Ω est un domaine bornée dans $\mathbb{R}^n\,(n \geq 1)$ avec une frontière régulière $\partial\Omega$, ρ est un nombre réel positive, le terme intégral est responsable de l'amortissement viscoélastique où g est une fonction de relaxation. le terme $h(u_t)$ est responsable de l'amortissement faible où h est une fonction donnée. α, h sont des fonctions positives particulières.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 4.2, nous présentons quelques préliminaires nécessaires pour la suite de notre travail. Quelques lemmes techniques sont présentés dans la section 4.3. Dans la section 4.4, nous énonçons et prouvons notre résultat principal.

4.2 Préliminaires

On considère les hypothèses suivantes :

(**H1**) ρ est une constante qui satisfait

$$\begin{aligned} &0 < \rho \leq 2/(n-2), \quad \text{si } n \geq 3 \\ &\rho > 0, \quad \text{si } n = 1, 2. \end{aligned}$$

(**H2**) $g : [0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ est une fonction différentiable qui satisfait

$$1 - \int_0^{+\infty} g(s)\, ds = l > 0 \tag{4.2}$$

et il existe une fonction $H : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ de classe C^1 avec $H(0) = H'(0) = 0$, H linéaire ou strictement croissante et strictement convexe de classe C^2 sur $(0, r]$, $r \leq g(0)$, telle que

$$g'(t) \leq -\xi(t) H(g(t)), \quad \forall t \geq 0, \tag{4.3}$$

où ξ est une fonction décroissante différentiable.

(**H3**) $\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante différentiable.

(**H4**) $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante dans C^0 telle que il existe des constantes $\varepsilon,\ c_1,\ c_2 > 0$ et une fonction croissante $G \in C^1([0, +\infty))$, avec $G(0) = 0$ et G est une fonction linéaire ou strictement convexe dans C^2 sur $(0, \varepsilon]$, telle que

$$\begin{aligned} &c_1 |s| \leq |h(s)| \leq c_2 \min\{|s|, |s|^p\} \quad \text{si } |s| \geq \varepsilon, \\ &s^{\rho+2} + h^2(s) \leq G^{-1}(sh(s)) \quad \text{si } |s| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

et p satisfait

$$\begin{aligned} &1 \leq p \leq \tfrac{n+2}{n-2} \quad \text{si } n > 2 \\ &1 \leq p < \infty \quad \text{si } n \leq 2. \end{aligned}$$

En utilisant les espaces standards de Lebesgue et Sobolev avec leurs produits scalaires et les normes usuels et l'inégalité de Sobolev-Poincaré suivante

$$\|\phi\|_q \leq c_q \|\nabla \phi\|_2, \qquad \phi \in H_0^1(\Omega), \tag{4.4}$$

pour q satisfait

$$\begin{aligned} &2 \leq q \leq 2n/(n-2) \quad \text{si} \quad n \geq 3 \\ &q \geq 2 \quad \text{si} \quad n = 1,2. \end{aligned}$$

On introduit la fonctionnelle d'énergie totale associée au problème (4.1) par

$$\begin{aligned} E(t) = &\frac{1}{\rho+2} \int_\Omega |u_t|^{\rho+2} dx + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s)\, ds\right) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t), \end{aligned} \tag{4.5}$$

où $\circ$ est définie par

$$(g \circ v)(t) = \int_\Omega \int_0^t g(t-s) |v(t) - v(s)|^2 dsdx.$$

Remarque 4.2.1 *1) L'hypothèse* (**H4**) *implique que* $sh(s) > 0$, *pour tout* $s \neq 0$.

2) En utilisant l'hypothèse (**H2**), *on peut montrer facilement que*

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = 0.$$

D'où, il existe t_1 assez grand pour que

$$g(t_1) = r \Rightarrow g(t) \leq r, \quad \forall t \geq t_1. \tag{4.6}$$

Comme g et ξ sont positives décroissantes continues et H est une fonction positive continue, alors pour tout $t \in [0, t_1]$,

$$\begin{cases} 0 < g(t_1) < g(t) \leq g(0) \\ 0 < \xi(t_1) < \xi(t) \leq \xi(0) \end{cases} \Rightarrow a \leq \xi(t) H(g(t)) \leq b$$

où a et b sont des constantes positives. Par conséquent, pour tout $t \in [0, t_1]$,

$$g'(t) \leq -\xi(t) H(g(t)) \leq -\frac{a}{g(0)} g(0) \leq -\frac{a}{g(0)} g(t). \tag{4.7}$$

3) Si H est une fonction strictement croissante et strictement convexe de classe C^2 sur $(0, r]$, avec $H(0) = H'(0) = 0$, alors il a une extension $\overline{H}$ qui est strictement croissante et strictement convexe de classe C^2 sur $(0, \infty)$.

Par exemple, si $H(r) = a$, $H'(r) = b$, $H''(r) = c$, on peut définir $\overline{H}$, pour $t > r$ par

$$\overline{H} = \frac{c}{2} t^2 + (b - cr) t + \left(a + \frac{c}{2} r^2 - br\right). \tag{4.8}$$

Pour compléter, on va énoncer sans preuve le résultat d'existence global suivant, voir [28, 31].

Théorème 4.2.2 *Soit* $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. *Supposons que* $(\mathbf{H1})-(\mathbf{H4})$ *sont vérifiées. Alors le problème* (4.1) *admet une solution globale unique* u *qui satisfait*

$$u, u_t \in C\left(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega)\right).$$

4.3 Lemmes techniques

Dans cette section, on va établir quelques lemmes nécessaires pour pouvoir démontrer notre résultat principal.

Lemme 4.3.1 *Supposons que* $(\mathbf{H2})-(\mathbf{H4})$ *sont satisfaites. Alors la fonctionnelle d'énergie satisfait*

$$E'(t) = \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2} g(t) \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 \, dx - \alpha(t) \int_\Omega u_t h(u_t) \, dx \leq 0. \tag{4.9}$$

Preuve. On multiplie l'équation $(4.1)_1$ par u_t et on intègre le résultat obtenu sur Ω, utilisant l'intégration par parties et les hypothèses $(\mathbf{H1})-(\mathbf{H4})$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}\,dx + \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)\,ds\right)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx + \frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(t)\right)\\
&= \frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\,dx - \alpha(t)\int_\Omega u_t h(u_t)\,dx,
\end{aligned}$$

par conséquent, on obtient (4.9). ■

Lemme 4.3.2 *Supposons que* $(\mathbf{H1})-(\mathbf{H4})$ *sont satisfaites, la fonctionnelle* $K_1(t)$ *définie par*

$$K_1(t) = \frac{1}{\rho+1}\int_\Omega u\,|u_t|^\rho\,u_t dx + \int_\Omega \nabla u.\nabla u_t dx, \tag{4.10}$$

satisfait, pour u *solution de (4.1), l'estimation*

$$\begin{aligned}
K_1'(t) \leq & -\frac{l}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx + \int_\Omega \frac{|u_t|^{\rho+2}}{\rho+1}dx + \frac{C_\beta}{2l}(k\circ\nabla u)(t)\\
& - \alpha(t)\int_\Omega u h(u_t)\,dx,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

pour tout $0 < \beta < 1$, *où* l *est défini dans (4.2),*

$$C_\beta = \int_0^\infty \frac{g^2(s)}{\beta g(s) - g'(s)}ds \quad et \quad k(t) = \beta g(t) - g'(t). \tag{4.12}$$

Preuve. On dérive la fonctionnelle $K_1(t)$ par rapport à t, on obtient

$$K_1'(t)=\frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}\,dx+\int_\Omega u|u_t|^\rho u_{tt}dx+\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx+\int_\Omega \nabla u.\nabla u_{tt}dx. \tag{4.13}$$

Par ailleurs, en multipliant l'équation $(4.1)_1$ par u et on intégre sur Ω, on trouve

$$\begin{aligned}\int_\Omega u|u_t|^\rho u_{tt}dx &= \int_\Omega \Delta u.udx+\int_\Omega \Delta u_{tt}.udx-\int_\Omega\int_0^t g(t-s)\,\Delta u(\tau)\,d\tau udx\\ &\quad -\alpha(t)\int_\Omega uh(u_t)\,dx.\end{aligned}$$

Grâce à la formule de Green, on déduit que

$$\begin{aligned}\int_\Omega u|u_t|^\rho u_{tt}dx &= -\int_\Omega |\nabla u|^2dx-\int_\Omega \nabla u.\nabla u_{tt}dx+\int_\Omega \nabla u.\int_0^t g(t-\tau)\,\nabla u(\tau)\,d\tau dx\\ &\quad -\alpha(t)\int_\Omega uh(u_t)\,dx.\end{aligned}$$

En remplaçant cette dernière égalité dans (4.13), on obtient

$$\begin{aligned}K_1'(t) &= \frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}\,dx-\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx+\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx\\ &\quad+\int_\Omega \nabla u.\int_0^t g(t-\tau)\,\nabla u(\tau)\,d\tau dx-\alpha(t)\int_\Omega uh(u_t)\,dx\\ &= \frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}\,dx-\left(1-\int_0^t g(\tau)\,d\tau\right)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx+\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx\\ &\quad+\int_\Omega \nabla u.\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla u(\tau)-\nabla u(t)\right)d\tau dx-\alpha(t)\int_\Omega uh(u_t)\,dx,\end{aligned}$$

en utilisant (4.2) et l'inégalité de Young, on aura

$$\begin{aligned}K_1'(t) \leq&\frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}\,dx-l\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx+\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx-\alpha(t)\int_\Omega uh(u_t)\,dx\\ &+\frac{l}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx+\frac{1}{2l}\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|\,d\tau\right)^2dx.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Maintenant, l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|\,d\tau\right)^2dx\\ &=\int_\Omega\left(\int_0^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\beta g(t-\tau)-g'(t-\tau)}}\sqrt{\beta g(t-\tau)-g'(t-\tau)}\,|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|\,d\tau\right)^2dx\\ &\leq\left(\int_0^t \frac{g^2(\tau)}{\beta g(\tau)-g'(\tau)}d\tau\right)\int_\Omega\int_0^t \left[\beta g(t-\tau)-g'(t-\tau)\right]|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2\,d\tau dx\\ &\leq\left(\int_0^t \frac{g^2(\tau)}{\beta g(\tau)-g'(\tau)}d\tau\right)\int_\Omega\int_0^t k(t-\tau)\,|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2\,d\tau dx\\ &\leq C_\beta\,(k\circ\nabla u)(t)\,.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Remplaçons (4.15) dans (4.14) , on obtient (4.11) . ■

Lemme 4.3.3 *Supposons que les hypothèses* (**H1**) − (**H4**) *sont vérifiées, la fonctionnelle* $K_2(t)$ *définie par*

$$K_2(t) = \int_\Omega \left(\Delta u_t - \frac{|u_t|^\rho u_t}{\rho+1} \right) \int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\, d\tau dx, \tag{4.16}$$

satisfait, pour tout $0 < \delta < 1$, *l'estimation*

$$\begin{aligned} K_2'(t) \leq & -\frac{\left(\int_0^t g(\tau)\, d\tau\right)}{\rho+1} \int_\Omega |u_t|^{\rho+2}\, dx - \left(\int_0^t g(\tau)\, d\tau - \delta \right) \int_\Omega |\nabla u_t|^2\, dx \\ & + \frac{\delta}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \frac{c\,[C_\beta+1]}{\delta} (k \circ \nabla u)(t) + \frac{\delta}{2} \alpha^2(t) \int_\Omega h^2(u_t)\, dx. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Preuve. Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} K_2'(t) = & \int_\Omega (\Delta u_{tt} - |u_t|^\rho u_{tt}) \int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\, d\tau dx \\ & + \int_\Omega \Delta u_t \int_0^t g'(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\, d\tau dx \\ & + \int_\Omega \Delta u_t \int_0^t g(t-\tau)\, u_t(t)\, d\tau dx \\ & - \int_\Omega \frac{|u_t|^\rho u_t}{\rho+1} \int_0^t g'(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\, d\tau dx \\ & - \int_\Omega \frac{|u_t|^\rho u_t}{\rho+1} \int_0^t g(t-\tau)\, u_t(t)\, d\tau dx. \end{aligned} \tag{4.18}$$

D'autre part, en multipliant l'équation $(4.1)_1$ par $\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\, d\tau$ et on intègre sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_\Omega (\Delta u_{tt} - |u_t|^\rho u_{tt}) \int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\, d\tau dx \\ = & -\int_\Omega \Delta u \int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\, d\tau dx \\ & + \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)\, \Delta u(\tau)\, d\tau \right) \left(\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\, d\tau \right) dx \\ & + \int_\Omega \alpha(t)\, h(u_t) \int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\, d\tau dx, \end{aligned}$$

à l'aide de la formule de Green, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\left(\Delta u_{tt}-|u_t|^{\rho}u_{tt}\right)\int_0^t g(t-\tau)\left(u(t)-u(\tau)\right)d\tau dx\\
=\;&\int_{\Omega}\nabla u\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla u(t)-\nabla u(\tau)\right)d\tau dx\\
&-\int_{\Omega}\left(\int_0^t g(t-\tau)\nabla u(\tau)\,d\tau\right)\left(\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla u(t)-\nabla u(\tau)\right)d\tau\right)dx\\
&+\int_{\Omega}\alpha(t)\,h(u_t)\int_0^t g(t-\tau)\left(u(t)-u(\tau)\right)d\tau dx,
\end{aligned}$$

d'après l'égalité précédente, alors (4.18) devient

$$\begin{aligned}
K_2'(t)=&\left(1-\int_0^t g(\tau)\,d\tau\right)\int_{\Omega}\nabla u.\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla u(t)-\nabla u(\tau)\right)d\tau dx\\
&+\int_{\Omega}\left(\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla u(t)-\nabla u(\tau)\right)d\tau\right)^2dx\\
&+\int_{\Omega}\alpha(t)\,h(u_t)\int_0^t g(t-\tau)\left(u(t)-u(\tau)\right)d\tau dx\\
&-\int_{\Omega}\frac{|u_t|^{\rho}u_t}{\rho+1}\int_0^t g'(t-\tau)\left(u(t)-u(\tau)\right)d\tau dx\\
&-\int_{\Omega}\nabla u_t\int_0^t g'(t-\tau)\left(\nabla u(t)-\nabla u(\tau)\right)d\tau dx\\
&-\left(\int_0^t g(\tau)\,d\tau\right)\int_{\Omega}|\nabla u_t|^2dx-\frac{\left(\int_0^t g(\tau)\,d\tau\right)}{\rho+1}\int_{\Omega}|u_t|^{\rho+2}(t)\,dx.
\end{aligned}\tag{4.19}$$

L'hypothèse (**H2**), l'inégalité de Young, l'inégalité de Poincaré et (4.15), nous permettent d'estimer le premier et le troisième terme de (4.19) comme suit :

$$\begin{aligned}
&\left(1-\int_0^t g(\tau)\,d\tau\right)\int_{\Omega}\nabla u.\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla u(t)-\nabla u(\tau)\right)d\tau dx\\
\leq&\frac{\delta}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx+\frac{1}{2\delta}\int_{\Omega}\left(\int_0^t g(t-\tau)\left(\nabla u(t)-\nabla u(\tau)\right)d\tau\right)^2dx\\
\leq&\frac{\delta}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx+\frac{cC_{\beta}}{\delta}(k\circ\nabla u)(t)
\end{aligned}\tag{4.20}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\alpha(t)\,h(u_t)\int_0^t g(t-\tau)\left(u(t)-u(\tau)\right)d\tau dx\\
\leq&\frac{\delta}{2}\alpha^2(t)\int_{\Omega}h^2(u_t)\,dx+\frac{c}{\delta}\int_{\Omega}\left(\int_0^t g(t-\tau)\left(u(t)-u(\tau)\right)d\tau\right)^2dx\\
\leq&\frac{\delta}{2}\alpha^2(t)\int_{\Omega}h^2(u_t)\,dx+\frac{cC_{\beta}}{\delta}(k\circ\nabla u)(t)\,.
\end{aligned}\tag{4.21}$$

Pour les quatrième et cinquième termes de (4.19) , en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz et l'inégalité de Young, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& -\int_\Omega \frac{|u_t|^\rho u_t}{\rho+1}\int_0^t g'(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau dx \\
= \;& \int_\Omega \frac{|u_t|^\rho u_t}{\rho+1}\int_0^t k(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau dx - \int_\Omega \frac{|u_t|^\rho u_t}{\rho+1}\int_0^t \beta g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau dx \\
\leq \;& \delta_1 \int_\Omega |u_t|^{2(\rho+1)}\,dx + \frac{c}{\delta_1}\int_\Omega \left(\int_0^t \sqrt{k(t-\tau)}\sqrt{k(t-\tau)}(u(t)-u(\tau))\,d\tau\right)^2 dx \\
& +\frac{c\beta^2}{\delta_1}\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)(\nabla u(t)-\nabla u(\tau))\,d\tau\right)^2 dx \\
\leq \;& \delta_1 c_{2(\rho+1)}^{2(\rho+1)}\left(\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx\right)^{\rho+1} + \frac{c\left(\int_0^t k(\tau)\,d\tau\right)}{\delta_1}\int_\Omega\int_0^t k(t-\tau)|u(t)-u(\tau)|^2\,d\tau dx \\
& +\frac{c\beta^2 C_\beta}{\delta_1}(k\circ u)(t) \\
\leq \;& \delta_1 c_{2(\rho+1)}^{2(\rho+1)}(2E(0))^\rho \int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx + \frac{c\,[C_\beta+1]}{\delta 1}(k\circ\nabla u)(t).
\end{aligned}$$

On prend $\delta_1 = \frac{\delta}{2c_{2(\rho+1)}^{2(\rho+1)}(2E(0))^\rho}$, on obtient

$$-\int_\Omega \frac{|u_t|^\rho u_t}{\rho+1}\int_0^t g'(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau dx \leq \frac{\delta}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx + \frac{c\,[C_\beta+1]}{\delta}(k\circ\nabla u)(t). \tag{4.22}$$

Aussi,

$$\begin{aligned}
& -\int_\Omega \nabla u_t \int_0^t g'(t-\tau)(\nabla u(t)-\nabla u(\tau))\,d\tau dx \\
& \leq \int_\Omega \nabla u_t \int_0^t (k(t-s)-\beta g(t-s))(\nabla u(t)-\nabla u(\tau))\,ds dx \\
& \leq \frac{\delta}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx + \frac{c\,[C_\beta+1]}{\delta}(k\circ\nabla u)(t).
\end{aligned}\tag{4.23}$$

En combinant (4.20) − (4.23), on obtient alors le résultat souhaité. ■

Soit, la fonctionnelle

$$K_3(t) = \int_\Omega\int_0^t f(t-\tau)|\nabla u(\tau)|^2\,d\tau dx, \tag{4.24}$$

où $f(t) = \int_t^\infty g(\tau)\,d\tau$.

Lemme 4.3.4 *Supposons que les hypothèses* (**H1**) − (**H2**) *sont vérifiées. La fonctionnelle* $K_3(t)$ *satisfait, l'estimation*

$$K_3'(t) \leq -\frac{1}{2}(g\circ\nabla u)(t) + 3(1-l)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\,dx. \tag{4.25}$$

Preuve. On dérive la fonction $K_3(t)$ par rapport a t, on obtient

$$K_3'(t) = \int_\Omega \int_0^t f'(t-\tau)|\nabla u(\tau)|^2 d\tau dx + f(0) \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx,$$

en utilisant l'inégalité de Young et le fait que $f'(t) = -g(t)$, on voit que

$$\begin{aligned}
K_3'(t) &= f(0) \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx - \int_\Omega \int_0^t g(t-\tau) |\nabla u(\tau)|^2 d\tau dx \\
&= -\int_\Omega \int_0^t g(t-\tau) |\nabla u(\tau) - \nabla u(t)|^2 d\tau dx \\
&\quad -2 \int_\Omega \nabla u(t) . \int_0^t g(t-\tau) (\nabla u(\tau) - \nabla u(t)) d\tau dx \\
&\quad +f(t) \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
& -2 \int_\Omega \nabla u(t) . \int_0^t g(t-\tau) (\nabla u(\tau) - \nabla u(t)) d\tau dx \\
\leq\ & 2(1-l) \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{\int_0^t g(\tau) d\tau}{2(1-l)} \int_\Omega \int_0^t g(t-\tau) |\nabla u(\tau) - \nabla u(t)|^2 d\tau dx.
\end{aligned}$$

Alors, comme

$$f(t) \leq f(0) = (1-l) \quad \text{et} \quad \int_0^t g(\tau) d\tau \leq (1-l),$$

par conséquent, on obtient (4.25) . ■

Lemme 4.3.5 *La fonctionnelle $\mathcal{L}(t)$ définie par*

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + N_1 K_1(t) + N_2 K_2(t),$$

satisfait, pour des constantes $N,\ N_1,\ N_2 > 0$ convenablement choisies, l'inégalité suivantes

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq & -4(1-l) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega |u_t|^{\rho+2} dx - \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{4} (g \circ \nabla u)(t) \\
& + c \left(\int_\Omega h^2(u_t) dx + \int_\Omega \left(|u_t|^{\rho+2} + |uh(u_t)| \right) dx \right), \quad \forall t \geq t_1 \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

et,

$$\mathcal{L}(t) \sim E(t), \qquad (4.27)$$

où t_1 a été introduit dans (4.6)*.*

Preuve. On dérive par rapport à t la fonctionnelle $\mathcal{L}(t)$, on obtient

$$\mathcal{L}'(t) = NE'(t) + N_1 K_1'(t) + N_2 K_2'(t),$$

en utilisant (4.9), (4.11) et (4.17),

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq\ & \frac{N}{2}(g' \circ \nabla u)(t) - \frac{N}{2} g(t) \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx - N\alpha(t) \int_\Omega u_t h(u_t)\, dx \\
& - \frac{l}{2} N_1 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + N_1 \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + N_1 \int_\Omega \frac{|u_t|^{\rho+2}}{\rho+1} dx \\
& + \frac{C_\beta}{2l} N_1 (k \circ \nabla u)(t) - N_1 \alpha(t) \int_\Omega u h(u_t)\, dx \\
& - \frac{\left(\int_0^t g(\tau)\, d\tau\right)}{\rho+1} N_2 \int_\Omega |u_t|^{\rho+2} dx - \left(\int_0^t g(\tau)\, d\tau - \delta\right) N_2 \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx \\
& + \frac{\delta}{2} N_2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{c[C_\beta + 1]}{\delta} N_2 (k \circ \nabla u)(t) + \frac{\delta}{2} N_2 \alpha^2(t) \int_\Omega h^2(u_t)\, dx.
\end{aligned}$$

Soit $g_1 = \int_0^{t_1} g(\tau)\, d\tau$, rappelant que $g' = (\beta g - k)$ et en prenant $\delta = 1/N_2$, on obtient, pour tout $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq\ & -\left(\frac{l}{2} N_1 - \frac{1}{2}\right) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \left(\frac{g_1 N_2}{\rho+1} - \frac{N_1}{\rho+1}\right) \int_\Omega |u_t|^{\rho+2} dx \\
& - (g_1 N_2 - 1 - N_1) \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{\beta}{2} N (g \circ \nabla u)(t) \\
& - N\alpha(t) \int_\Omega u_t h(u_t)\, dx - N_1 \alpha(t) \int_\Omega u h(u_t)\, dx + \frac{1}{2} \alpha^2(t) \int_\Omega h^2(u_t)\, dx \\
& - \left(\frac{1}{2} N - c N_2^2 - C_\beta \left[\frac{1}{2l} N_1 + c N_2^2\right]\right) (k \circ \nabla u)(t).
\end{aligned}$$

En choisissant N_1 assez grand pour que

$$\frac{l}{2} N_1 - \frac{1}{2} > 4(1 - l)$$

et N_2 assez grand tels que

$$g_1 N_2 - 1 - N_1 > 1 \quad \text{et} \quad \frac{g_1 N_2}{\rho+1} - \frac{N_1}{\rho+1} > 1.$$

Maintenant, comme

$$\frac{\beta g^2(s)}{\beta g(s) - g'(s)} < g(s),$$

en utilisant le théorème de convergence dominé de Lebesgue, il est facile de montrer que

$$\beta C_\beta = \int_0^\infty \frac{\beta g^2(s)}{\beta g(s) - g'(s)} ds \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \beta \longrightarrow 0.$$

Par conséquent, il y a $0<\beta_0<1$ tel que

$$\text{si} \quad \beta<\beta_0 \quad \text{alors} \quad \beta C_\beta<\frac{1}{8\left[\frac{1}{2l}N_1+cN_2^2\right]}.$$

On choisit N assez grand et on choisit β satisfait

$$\frac{1}{2}N-cN_2^2>0 \quad \text{et} \quad \beta=\frac{1}{2N}<\beta_0$$

ce qui signifie

$$\frac{1}{2}N-cN_2^2-C_\beta\left[\frac{1}{2l}N_1+cN_2^2\right]>0,$$

nous arrivons à

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(t) \;\leq\;& -4(1-l)\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx-\int_\Omega|u_t|^{\rho+2}\,dx-\int_\Omega|\nabla u_t|^2\,dx+\frac{1}{4}(g\circ\nabla u)(t)\\ &-N\alpha(t)\int_\Omega u_th(u_t)\,dx-N_1\alpha(t)\int_\Omega uh(u_t)\,dx+\frac{1}{2}\alpha^2(t)\int_\Omega h^2(u_t)\,dx,\end{aligned}$$

on déduit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(t) \;\leq\;& -4(1-l)\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx-\int_\Omega|u_t|^{\rho+2}\,dx-\int_\Omega|\nabla u_t|^2\,dx+\frac{1}{4}(g\circ\nabla u)(t)\\ &+c\left(\int_\Omega h^2(u_t)\,dx+\int_\Omega\left(|u_t|^{\rho+2}+|uh(u_t)|\right)dx\right).\end{aligned}$$

D'autre part, on trouve

$$\begin{aligned}|\mathcal{L}(t)-NE(t)| \;\leq\;& N_1|K_1(t)|+N_2|N_2(t)|\\ \leq\;& N_1\int_\Omega\frac{|u|\,|u_t|^{\rho+1}}{\rho+1}dx+N_1\int_\Omega|\nabla u|\,|\nabla u_t|\,dx\\ &+N_2\int_\Omega\frac{|u_t|^{\rho+1}}{\rho+1}\int_0^t g(t-\tau)\,|u(t)-u(\tau)|\,d\tau dx\\ &+N_2\int_\Omega|\nabla u_t|\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla u(t)-\nabla u(\tau)|\,d\tau dx\\ \leq\;& \frac{N_1}{2(\rho+1)}\int_\Omega|u|^2\,dx+\frac{N_1+N_2}{2(\rho+1)}\int_\Omega|u_t|^{2(\rho+1)}\,dx\\ &+\frac{N_2}{2(\rho+1)}\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)\,|u(t)-u(\tau)|\,d\tau\right)^2dx+\frac{N_1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx\\ &+\frac{N_1+N_2}{2}\int_\Omega|\nabla u_t|^2\,dx+\frac{N_2}{2}\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla u(t)-\nabla u(\tau)|\,d\tau\right)^2dx\\ \leq\;& \frac{N_1}{2(\rho+1)}c_2^2\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx+\frac{N_1+N_2}{2(\rho+1)}c_{\rho+1}^{\rho+1}[E(0)]^\rho\int_\Omega|\nabla u_t|^2\,dx\\ &+c(g\circ\nabla u)(t)+\frac{N_1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx+\frac{N_1+N_2}{2}\int_\Omega|\nabla u_t|^2\,dx\\ \leq\;& c\left[\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx+\int_\Omega|\nabla u_t|^2\,dx+c(g\circ\nabla u)(t)\right].\end{aligned}$$

Ce qui signifie, pour certain constant $C > 0$, que

$$\int_{\Omega} |u_t|^{\rho+2}\, dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx + \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2\, dx + (g \circ \nabla u)(t) \leq CE(t)$$

et donc

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq cE(t).$$

Par conséquent, on peut choisir N encore plus grand (si nécessaire) pour que (4.27) soit satisfait. ■

Maintenant, on choisit $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ telle que

$$sh(s) \leq \min\{\varepsilon, G(\varepsilon)\}, \quad \text{pour tout } |s| \leq \varepsilon_1. \tag{4.28}$$

Alors, il est facile de montrer que

$$\begin{cases} c_1' |s|^{\rho+1} \leq |h(s)| \leq c_2' \min\{|s|, |s|^p\} & \text{si } |s| \geq \varepsilon_1, \\ s^{\rho+2} + h^2(s) \leq G^{-1}(sh(s)) & \text{si } |s| \leq \varepsilon_1. \end{cases} \tag{4.29}$$

Nous considérons la partition de Ω suivante

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : |u_t| \leq \varepsilon_1\},$$
$$\Omega_2 = \{x \in \Omega : |u_t| > \varepsilon_1\}.$$

A partir de (4.29), on a

Si $\min\{|u_t|, |u_t|^p\} = |u_t|$, alors

$$\int_{\Omega_2} h^2(u_t)\, dx \leq c_2' \int_{\Omega_2} u_t h(u_t)\, dx \leq -cE'(t). \tag{4.30}$$

Si $\min\{|u_t|, |u_t|^p\} = |u_t|^p$, alors

$$\int_{\Omega_2} h^2(u_t)\, dx \leq c_2' \int_{\Omega_2} |u_t|^p h(u_t)\, dx \leq \int_{\Omega_2} u_t h(u_t)\, dx \leq -cE'(t). \tag{4.31}$$

d'après (4.30) et (4.31), on conclut que

$$\int_{\Omega_2} h^2(u_t)\, dx \leq -cE'(t) \tag{4.32}$$

En utilisant $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Poincaré, on aura

Si $\min\{|u_t|, |u_t|^p\} = |u_t|$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2} |uh(u_t)|\, dx \le \int_{\Omega_2} |u|\,|h(u_t)|\, dx &\le \varepsilon \int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 dx + C_\varepsilon \int_{\Omega_2} h^2(u_t)\, dx \\ &\le \varepsilon \int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 dx + C_\varepsilon \int_{\Omega_2} u_t h(u_t)\, dx \\ &\le \varepsilon E(t) - C_\varepsilon E'(t). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Si $\min\{|u_t|, |u_t|^p\} = |u_t|^p$, alors

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2} |uh(u_t)|\, dx &\le \left(\int_{\Omega_2} |u|^{p+1}\, dx\right)^{\frac{1}{p+1}} \left(\int_{\Omega_2} |h(u_t)|^{1+\frac{1}{p}}\, dx\right)^{\frac{p}{p+1}} \\ &\le c\,\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \left(\int_{\Omega_2} |h(u_t)|^{1+\frac{1}{p}}\, dx\right)^{\frac{p}{p+1}} \\ &\le c\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_2} |h(u_t)|^{1+\frac{1}{p}}\, dx\right)^{\frac{p}{p+1}} \\ &\le c\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_2} u_t h(u_t)\, dx\right)^{\frac{p}{p+1}}, \end{aligned} \tag{4.34}$$

à partir de (4.33) et (4.34), on déduit que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_2} \left(|u_t|^{\rho+2} + |uh(u_t)|\right) dx \\ \le\ & \int_{\Omega_2} u_t h(u_t)\, dx + c\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_2} u_t h(u_t)\, dx\right)^{\frac{p}{p+1}} \\ & + \varepsilon E(t) - C_\varepsilon E'(t) \\ \le\ & -cE'(t) + cE(t)^{\frac{1}{2}} (-E'(t))^{\frac{p}{p+1}} + \varepsilon E(t) - C_\varepsilon E'(t). \end{aligned}$$

Utilisons (4.32), l'inégalité de Young avec $s = p+1$ et $s' = \dfrac{p+1}{p}$ pour le terme

$$E(t)^{\frac{1}{2}} (E'(t))^{\frac{p}{p+1}}$$

et les propriétés de la fonction d'énergie $E(t)$, nous arrivons à

$$\int_{\Omega_2} h^2(u_t)\, dx + \int_{\Omega_2} \left(|u_t|^{\rho+2} + |uh(u_t)|\right) dx \le c\varepsilon E(t) - C_\varepsilon E'(t). \tag{4.35}$$

Aussi,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1} h^2(u_t)\,dx + \int_{\Omega_1} \left(|u_t|^{\rho+2} + |uh(u_t)|\right) dx \\
&\leq \int_{\Omega_1} |u_t|^{\rho+2}\,dx + \varepsilon \int_{\Omega_1} u^2 dx + C_\varepsilon \int_{\Omega_1} h^2(u_t)\,dx \\
&\leq \int_{\Omega_1} |u_t|^{\rho+2}\,dx + c\varepsilon \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2\,dx + C_\varepsilon \int_{\Omega_1} h^2(u_t)\,dx \\
&\leq \int_{\Omega_1} |u_t|^{\rho+2}\,dx + c\varepsilon E(t) + C_\varepsilon \int_{\Omega_1} h^2(u_t)\,dx. \qquad (4.36)
\end{aligned}$$

D'après (4.35), (4.36) et le lemme 4.3.5, pour ε assez petit, la fonctionnelle $L(t)$ définie par

$$L(t) = \mathcal{L}(t) + C_\varepsilon E(t),$$

satisfait

$$L'(t) \leq -dE(t) + c(g \circ \nabla u)(t) + c\int_{\Omega_1} \left(|u_t|^{\rho+2} + h^2(u_t)\right) dx \tag{4.37}$$

et

$$L(t) \sim E(t).$$

4.4 Résultat de décroissance générale

Dans cette section, on va énoncer et prouver notre résultat principal qui est donnée par le théorème suivant :

Théorème 4.4.1 *Supposons que les hypothèses* $(\mathbf{H1}) - (\mathbf{H4})$ *sont vérifiées. Alors, il existe des constantes positives* t_1, k_1, k_2 *et* ε_0 *telle que pour tout* $t \geq t_1$, *la solution* u *du problème* (4.1) *satisfait*

$$E(t) \leq k_2 \mathcal{D}_1^{-1}\left(k_1 \int_{t_1}^{t} \xi(s)\,\alpha(s)\,ds\right), \tag{4.38}$$

où

$$\mathcal{D}_1(t) = \int_t^1 \frac{1}{\mathcal{D}_2(s)} ds \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2(t) = t\mathcal{D}'(\varepsilon_0 t)$$

et $\mathcal{D}_1$ *est strictement décroissante et convexe sur* $(0, min\{\varepsilon, r\}]$, *avec*

$$\lim_{t\to 0} \mathcal{D}_1(t) = +\infty.$$

Preuve. D'abord, on utilise (4.7) et (4.9) pour conclure que, pour tout $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_1} g(s) \int_\Omega |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 \, dxds \\
\leq &-\frac{g(0)}{a} \int_0^{t_1} g'(s) \int_\Omega |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 \, dxds \\
\leq &-cE'(t).
\end{aligned}$$

A partir de (4.37), on a

$$\begin{aligned}
L'(t) \leq & -dE(t) - cE'(t) + c\int_{t_1}^t g(s) \int_\Omega |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 \, dxds \\
& + c\int_{\Omega_1} \left(|u_t|^{\rho+2} + h^2(u_t) \right) dx,
\end{aligned}$$

on prend

$$F(t) = L(t) + cE(t) \sim E(t),$$

on obtient pour tout $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned}
F'(t) \leq & - dE(t) + c\int_{t_1}^t g(s) \int_\Omega |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 \, dxds \\
& + c\int_{\Omega_1} \left(|u_t|^{\rho+2} + h^2(u_t) \right) dx. \qquad (4.39)
\end{aligned}$$

La multiplication de (4.39) par $\xi(t)$ et $\alpha(t)$, donne

$$\begin{aligned}
\xi(t)\alpha(t)F'(t) \leq & - d\xi(t)\alpha(t)E(t) + c\xi(t)\alpha(t)\int_{t_1}^t g(s) \int_\Omega |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 \, dxds \\
& + c\xi(t)\alpha(t)\int_{\Omega_1} \left(|u_t|^{\rho+2} + h^2(u_t) \right) dx. \qquad (4.40)
\end{aligned}$$

Maintenant, nous considérons les quatre cas suivants.

Cas 1 : H et G sont linéaires. Alors

$$\begin{aligned}
\xi(t)\alpha(t)F'(t) \leq & -d\xi(t)\alpha(t)E(t) + c\alpha(t)\int_{t_1}^t \xi(s)g(s) \int_\Omega |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 \, dxds \\
& + c\xi(t)\alpha(t)\int_{\Omega_1} \left(|u_t|^{\rho+2} + h^2(u_t) \right) dx,
\end{aligned}$$

d'après (**H2**), (**H4**) et (4.9), on a

$$\begin{aligned}
\xi(t)\alpha(t)F'(t) \leq & -d\xi(t)\alpha(t)E(t) - c\alpha(t)\int_{t_1}^t g'(s) \int_\Omega |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 \, dxds \\
& + c\xi(t)\alpha(t)\int_{\Omega_1} u_t h(u_t) \, dx \\
\leq & -d\xi(t)\alpha(t)E(t) - c(\alpha(t) + \xi(t))E'(t),
\end{aligned}$$

Rappelons que $\xi' \leq 0$, $\alpha' \leq 0$ et $E' \leq 0$, on obtient

$$(\xi\alpha F + (\xi + \alpha) E)'(t) \leq -d\xi(t)\alpha(t)E(t).$$

Par conséquent, on utilise le fait que

$$(\xi\alpha F + (\xi + \alpha) E)(t) \sim E(t)$$

et une simple intégration, on arrive à

$$E(t) \leq c' e^{-\int_{t_1}^{t} \xi(s)\alpha(s)ds}.$$

Cas 2 : H est linéaire et G est non-linéaire. Alors

$$\xi(t)\alpha(t)F'(t) \leq -d\xi(t)\alpha(t)E(t) - c\alpha(t)E'(t) + c\xi(t)\alpha(t)\int_{\Omega_1}\left(|u_t|^{\rho+2} + h^2(u_t)\right)dx,$$

on utilise le fait que $\xi' \leq 0$, $\alpha' \leq 0$ et $E' \leq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
(\xi\alpha F)'(t) &\leq \xi(t)\alpha(t)F'(t) \\
&\leq -d\xi(t)\alpha(t)E(t) - c\alpha(t)E'(t) + c\xi(t)\alpha(t)\int_{\Omega_1}\left(|u_t|^{\rho+2} + h^2(u_t)\right)dx,
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$(\xi\alpha F + c\alpha E)'(t) \leq -d\xi(t)\alpha(t)E(t) + c\xi(t)\alpha(t)\int_{\Omega_1}\left(|u_t|^{\rho+2} + h^2(u_t)\right)dx.$$

Soit

$$R_0(t) = (\xi\alpha F + c\alpha E)(t) \sim E(t),$$

alors l'inégalité précédente devient

$$R_0'(t) \leq -d\xi(t)\alpha(t)E(t) + c\xi(t)\alpha(t)\int_{\Omega_1}\left(|u_t|^{\rho+2} + h^2(u_t)\right)dx. \tag{4.41}$$

Maintenant, on va estimer le dernier terme du second membre de (4.41), pour cela, on utilise la fonction $I(t)$ qui est défini par

$$I(t) = \frac{1}{|\Omega_1|}\int_{\Omega_1} u_t h(u_t)\,dx$$

et l'inégalité de Jensen pour obtenir

$$G^{-1}(I(t)) \geq c\int_{\Omega_1} G^{-1}(u_t h(u_t))\,dx, \tag{4.42}$$

donc

$$\alpha(t)\int_{\Omega_1}\left(|u_t|^{\rho+2}+h^2(u_t)\right)dx \leq \alpha(t)\int_{\Omega_1} G^{-1}(u_t h(u_t))\,dx \leq c\alpha(t)\,G^{-1}(I(t)).$$

D'où (4.41) devient

$$R_0'(t) \leq -d\xi(t)\,\alpha(t)\,E(t) + c\xi(t)\,\alpha(t)\,G^{-1}(I(t)). \tag{4.43}$$

En utilisant (4.43) et le fait que $E' \leq 0$, $G' > 0$, $G'' > 0$ sur $(0,\varepsilon]$, nous constatons que la fonctionnelle $R_1(t)$, définie par

$$R_1(t) = G'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) R_0(t) + c_0 E(t),$$

où $\varepsilon_0 < \varepsilon$, $c_0 > 0$ et pour des constantes positives a_1, a_2 la fonctionnelle $R_1(t)$ satisfait

$$a_1 R_1(t) \leq E(t) \leq a_2 R_1(t) \tag{4.44}$$

et

$$\begin{aligned} R_1'(t) =& \varepsilon_0 \frac{E'(t)}{E(0)} G''\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) R_0(t) + G'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) R_0'(t) + c_0 E'(t) \\ \leq& G'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) R_0'(t) + c_0 E'(t), \end{aligned} \tag{4.45}$$

insérant (4.43) dans (4.45), on obtient

$$\begin{aligned} R_1'(t) \leq& -d\xi(t)\,\alpha(t)\,G'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) E(t) + c\xi(t)\,\alpha(t)\,G'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) G^{-1}(I(t)) \\ & + c_0 E'(t). \end{aligned} \tag{4.46}$$

Soit G^* la fonction convexe conjuguée de G au sens de Young (voir [3] p. 61-64), alors

$$G^*(s) = s\,(G')^{-1}(s) - G\left[(G')^{-1}(s)\right] \tag{4.47}$$

et G^* satisfait l'inégalité de Young généralisée suivante

$$AB \leq G^*(A) + G(B). \tag{4.48}$$

Avec $A = G'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right)$ et $B = G^{-1}(I(t))$ alors, moyennant (4.9), (4.28) et (4.46) $-$ (4.48), on trouve

$$\begin{aligned}
R_1'(t) &\leq -d\xi(t)\alpha(t)E(t)G'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)+c\xi(t)\alpha(t)G^*\left(G'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)\right)\\
&\quad +c\xi(t)\alpha(t)G\left(G^{-1}(I(t))\right)\\
&\leq -d\xi(t)\alpha(t)E(t)G'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)+c\varepsilon_0\xi(t)\alpha(t)\frac{E(t)}{E(0)}G'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)\\
&\quad +c\xi(t)\alpha(t)I(t)+c_0E'(t)\\
&\leq -d\xi(t)\alpha(t)E(t)G'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)+c\varepsilon_0\xi(t)\alpha(t)\frac{E(t)}{E(0)}G'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)\\
&\quad -cE'(t)+c_0E'(t).
\end{aligned}$$

Par conséquent, avec un choix convenable de ε_0 et c_0, on obtient

$$R_1'(t)\leq -k\xi(t)\alpha(t)\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right)G'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right), \tag{4.49}$$

on prend

$$G_2(t)=tG'(\varepsilon_0 t),$$

alors (4.49) devient

$$R_1'(t)\leq -k\xi(t)\alpha(t)G_2\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right). \tag{4.50}$$

Puisque

$$G_2'(t)=G'(\varepsilon_0 t)+tG''(\varepsilon_0 t)$$

et en utilisant la stricte convexité de G sur $(0,\varepsilon]$, nous concluons que $G_2'(t)$, $G_2(t)>0$ sur $(0,\varepsilon]$. Ainsi, en posant

$$R(t)=\frac{a_1R_1(t)}{E(0)}$$

et en utilisant (4.44) et (4.50), on aura

$$R(t)\sim E(t) \tag{4.51}$$

et, pour $k_1>0$,

$$R'(t)\leq -k_1\xi(t)\alpha(t)G_2(R(t)).$$

Par suite, une simple intégration donne,

$$R(t)\leq G_1^{-1}\left(k_1\int_{t_1}^{t}\xi(s)\alpha(s)\,ds\right), \tag{4.52}$$

où

$$G_1(t)=\int_t^1\frac{1}{G_2(s)}ds.$$

Ici, nous avons utilisé les propriétés de G_2 et le fait que G_1 est strictement décroissante sur $(0,\varepsilon]$. Utilisons $(4.51)-(4.52)$, on obtient

$$E(t) \leq k_2 G_1^{-1}\left(k_1 \int_{t_1}^{t} \xi(s)\,\alpha(s)\,ds\right).$$

Cas 3 : G est linéaire et H est non-linéaire. Alors

D'abord, on utilise Lemme 4.3.4 et Lemme 4.3.5 pour déduit que

$$L_1(t) = \mathcal{L}(t) + K_3(t)$$

est non-négative et satisfait, pour tout $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned}
L_1'(t) &\leq -(1-l)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega |u_t|^{\rho+2}\,dx - \int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx - \frac{1}{4}(g\circ\nabla u)(t) \\
&\quad + c\left(\int_\Omega h^2(u_t)\,dx + \int_\Omega \left(|u_t|^{\rho+2} + |uh(u_t)|\right)dx\right) \\
&\leq -bE(t) + c\left(\int_\Omega h^2(u_t)\,dx + \int_\Omega \left(|u_t|^{\rho+2} + |uh(u_t)|\right)dx\right),
\end{aligned}$$

ainsi, de (4.35) et (4.36), on obtient

$$L_1'(t) \leq -mE(t) - C_\varepsilon E'(t) + c\int_{\Omega_1} \left(|u_t|^{\rho+2} + h^2(u_t)\right)dx.$$

Soit $L_2(t) = L_1(t) + C_\varepsilon E(t) \sim E(t)$, alors

$$\begin{aligned}
L_2'(t) &\leq -mE(t) + c\int_{\Omega_1} \left(|u_t|^{\rho+2} + h^2(u_t)\right)dx \\
&\leq -mE(t) + c\int_{\Omega_1} u_t h(u_t)\,dx \\
&\leq -mE(t) - cE'(t),
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$L_3'(t) \leq -mE(t),$$

où m est un constant positive et $L_3(t) = L_2(t) + cE(t) \sim E(t)$. Donc

$$m\int_{t_1}^{t} E(s)\,ds \leq L_3(t_1) - L_3(t) \leq L_3(t_1).$$

Ce qui implique

$$\int_0^\infty E(s)\,ds < \infty. \tag{4.53}$$

Maintenant, on définit $J(t)$ par

$$J(t) = q\int_{t_1}^{t}\int_{\Omega}|\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2\, dxds \leq q\int_{0}^{\infty} c'E(s)\, ds < +\infty,$$

où (4.53) permet de choisir une constante $0 < q < 1$ de sorte que, pour tout $t \geq t_1$,

$$J(t) < 1. \tag{4.54}$$

On suppose aussi, sans perte de généralité que $J(t) > 0$, pour tout $t \geq t_1$; sinon (4.39) donne une décroissance exponentielle.

De plus, on définit $\lambda(t)$ par

$$\lambda(t) = -\int_{t_1}^{t} g'(s)\int_{\Omega}|\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2\, dxds,$$

on observe que

$$\lambda(t) \leq -cE'(t).$$

Puisque H est strictement convexe sur $(0, r]$ et $H(0) = 0$, alors

$$H(\theta x) \leq \theta H(x).$$

On munit $0 \leq \theta \leq 1$ et $x \in (0, r]$. L'utilisation de ce fait, hypothèses $(\mathbf{H2})$, (4.54) et l'inégalité de Jensen, il vient

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \frac{1}{qJ(t)}\int_{t_1}^{t} J(t)(-g'(s))\int_{\Omega} q|\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2\, dxds \\
&\geq \frac{1}{qJ(t)}\int_{t_1}^{t} J(t)\xi(s) H(g(s))\int_{\Omega} q|\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2\, dxds \\
&\geq \frac{\xi(t)}{qJ(t)}\int_{t_1}^{t} H(J(t)g(s))\int_{\Omega} q|\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2\, dxds \\
&\geq \frac{\xi(t)}{q} H\left(\frac{1}{J(t)}\int_{t_1}^{t} J(t) g(s)\int_{\Omega} q|\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2\, dxds\right) \\
&= \frac{\xi(t)}{q} H\left(q\int_{t_1}^{t} g(s)\int_{\Omega}|\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2\, dxds\right) \\
&= \frac{\xi(t)}{q}\overline{H}\left(q\int_{t_1}^{t} g(s)\int_{\Omega}|\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2\, dxds\right)
\end{aligned}$$

où $\overline{H}$ est une extension de H tel que $\overline{H}$ est une fonction strictement croissante et strictement convexe de classe C^2 sur $(0,\infty)$ [voir (4.8)]. Ce qui implique

$$\int_{t_1}^{t} g(s)\int_{\Omega}|\nabla u(t)-\nabla u(t-s)|^2\,dxds \leq \frac{1}{q}\overline{H}^{-1}\left(\frac{q\lambda(t)}{\xi(t)}\right)$$

donc (4.40) devient

$$\begin{aligned}\xi(t)\alpha(t)F'(t) \quad &\leq \quad -d\xi(t)\alpha(t)E(t)+c\xi(t)\alpha(t)\overline{H}^{-1}\left(\frac{q\lambda(t)}{\xi(t)}\right)\\ &\quad\;\; -c\xi(t)E'(t).\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}(\xi\alpha F)'(t) \quad &\leq \quad \xi(t)\alpha(t)F'(t)\\ &\leq \quad -d\xi(t)\alpha(t)E(t)+c\xi(t)\alpha(t)\overline{H}^{-1}\left(\frac{q\lambda(t)}{\xi(t)}\right)-c\xi(t)E'(t).\end{aligned}$$

Soit $F_1(t)=(\xi\alpha F+c\xi E)(t)\sim E(t)$, alors

$$F_1'(t)\leq -d\xi(t)\alpha(t)E(t)+c\xi(t)\alpha(t)\overline{H}^{-1}\left(\frac{q\lambda(t)}{\xi(t)}\right). \tag{4.55}$$

Pour $\varepsilon_0<r$ et $c_0>0$, en utilisant (4.55) et le fait que $E'\leq 0$, $\overline{H}'>0$, $\overline{H}''>0$ sur $(0,r]$, nous constatons que la fonction $F_2(t)$, définie par

$$F_2(t)=\overline{H}'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)F_1(t)+E(t)$$

est équivalent à $E(t)$ et

$$\begin{aligned}F_2'(t)=&\varepsilon_0\frac{E'(t)}{E(0)}\overline{H}''\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)F_1(t)+\overline{H}'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)F_1'(t)+E'(t)\\ \leq&-d\xi(t)\alpha(t)\overline{H}'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)E(t)+c\xi(t)\alpha(t)\overline{H}'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)\overline{H}^{-1}\left(\frac{q\lambda(t)}{\xi(t)}\right)\\ &+E'(t).\end{aligned} \tag{4.56}$$

Soit $\overline{H}^*$ la fonction convexe conjuguée de $\overline{H}$ au sens de Young, alors

$$\overline{H}^*(s)=s\left(\overline{H}'\right)^{-1}(s)-\overline{H}\left[\left(\overline{H}'\right)^{-1}(s)\right] \tag{4.57}$$

et $\overline{H}^*$ satisfait l'inégalité de Young généralisée

$$AB\leq\overline{H}^*(A)+\overline{H}(B). \tag{4.58}$$

Avec $A = \overline{H}'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right)$ et $B = \overline{H}^{-1}\left(\frac{q\lambda(t)}{\xi(t)}\right)$, on utilise (4.9) et (4.56) – (4.58), nous arrivons à

$$\begin{aligned}
F_2'(t) &\leq -d\xi(t)\alpha(t)E(t)\overline{H}'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) + c\xi(t)\alpha(t)\overline{H}^*\left(\overline{H}'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)\right) \\
&\quad + c\xi(t)\alpha(t)\overline{H}\left(\overline{H}^{-1}\left(\frac{q\lambda(t)}{\xi(t)}\right)\right) + E'(t) \\
&\leq -d\xi(t)\alpha(t)E(t)\overline{H}'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) + c\varepsilon_0\xi(t)\alpha(t)\frac{E(t)}{E(0)}\overline{H}'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) \\
&\quad + c\alpha(t)q\lambda(t) + E'(t).
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)} < r$ et $\overline{H}'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) = H'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)$, on trouve

$$F_2'(t) \leq -d\xi(t)\alpha(t)E(t)H'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) + c\varepsilon_0\xi(t)\alpha(t)\frac{E(t)}{E(0)}H'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) - cE'(t)$$

Par conséquent, avec $F_3(t) = F_2(t) + cE(t) \sim E(t)$ et pour un choix convenable de ε_0, on obtient, pour certain constante $k > 0$ et pour tout $t \geq t_1$,

$$F_3'(t) \leq -k\xi(t)\alpha(t)\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right)H'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) = -k\xi(t)\alpha(t)H_2\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right), \tag{4.59}$$

où

$$H_2(t) = tH'(\varepsilon_0 t).$$

Puisque

$$H_2'(t) = H'(\varepsilon_0 t) + tH''(\varepsilon_0 t),$$

alors, en utilisant la stricte convexité de H sur $(0, r]$, on déduit que $H_2'(t)$, $H_2(t) > 0$ sur $(0, r]$. Ainsi, en posant

$$R(t) = \frac{a_1 F_2(t)}{E(0)}$$

et en utilisant (4.59) et $F_2(t) \sim E(t)$, on aura

$$R(t) \sim E(t) \tag{4.60}$$

et, pour $k_1 > 0$,

$$R'(t) \leq -k_1\xi(t)\alpha(t)H_2(R(t)).$$

Par suite, une simple intégrale sur (t_1, t) donne

$$R(t) \leq H_1^{-1}\left(k_1\int_{t_1}^{t}\xi(s)\alpha(s)\,ds\right), \tag{4.61}$$

où

$$H_1(t) = \int_t^r \frac{1}{H_2(s)} ds.$$

Ici, nous avons utilisé les propriétés de H_2 et le fait que H_1 est strictement décroissante sur $(0, r]$. Utilisons (4.60) – (4.61), on aura

$$E(t) \leq k_2 H_1^{-1} \left(k_1 \int_{t_1}^t \xi(s) \alpha(s) ds \right).$$

Cas 4 : H et G sont non-linéaires.

D'après H est non linéaire dans le **cas 3** et G non-linéaire dans le **cas 2**, alors (4.40) devient

$$\mathcal{F}'(t) \leq -d\xi(t)\alpha(t)E(t) + c\xi(t)\alpha(t)\left[\overline{H}^{-1}\left(\frac{q\lambda(t)}{\xi(t)}\right) + G^{-1}(I(t))\right],$$

où

$$\mathcal{F}(t) = (\xi\alpha F + E)(t) \sim E(t).$$

On a

$$\frac{q\lambda(t)}{\xi(t)} \leq \frac{q\lambda(t)}{\xi(t)} + I(t)$$

et

$$I(t) \leq \frac{q\lambda(t)}{\xi(t)} + I(t),$$

en utilisant le fait que H et G sont croissantes, on obtient

$$\overline{H}^{-1}\left(\frac{q\lambda(t)}{\xi(t)}\right) \leq \overline{H}^{-1}\left(\frac{q\lambda(t)}{\xi(t)} + I(t)\right),$$

et

$$G^{-1}(I(t)) \leq G^{-1}\left(\frac{q\lambda(t)}{\xi(t)} + I(t)\right),$$

alors

$$\overline{H}^{-1}\left(\frac{q\lambda(t)}{\xi(t)}\right) + G^{-1}(I(t)) \leq \left(\overline{H}^{-1} + G^{-1}\right)\left(\frac{q\lambda(t)}{\xi(t)} + I(t)\right).$$

Soit

$$\mathcal{D}^{-1}\left(\frac{q\lambda(t)}{\xi(t)} + I(t)\right) = \left(\overline{H}^{-1} + G^{-1}\right)\left(\frac{q\lambda(t)}{\xi(t)} + I(t)\right),$$

donc

$$\mathcal{F}'(t) \leq -d\xi(t)\alpha(t)E(t) + c\xi(t)\alpha(t)\mathcal{D}^{-1}\left(\frac{q\lambda(t)}{\xi(t)} + I(t)\right), \tag{4.62}$$

en utilisant (4.62) et le fait que $E' \leq 0$, $\mathcal{D}' > 0$, $\mathcal{D}'' > 0$, nous constatons que la fonction $\mathcal{F}_1(t)$, définie par

$$\mathcal{F}_1(t) = \mathcal{D}'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) \mathcal{F}(t) + cE(t)$$

est équivalent à $E(t)$ et

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1'(t) =& \varepsilon_0 \frac{E'(t)}{E(0)} \mathcal{D}''\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) \mathcal{F}(t) + \mathcal{D}'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) \mathcal{F}'(t) + cE'(t) \\
\leq & - d\xi(t)\alpha(t)E(t)\mathcal{D}'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) + c\xi(t)\alpha(t)\mathcal{D}'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) \\
& \times \mathcal{D}^{-1}\left(\frac{q\lambda(t)}{\xi(t)} + I(t)\right) + cE'(t).
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Soit $\mathcal{D}^*$ la fonction convexe conjuguée de $\mathcal{D}$ au sens de Young, alors

$$\mathcal{D}^*(s) = s(\mathcal{D}')^{-1}(s) - \mathcal{D}\left[(\mathcal{D}')^{-1}(s)\right] \tag{4.64}$$

et $\mathcal{D}^*$ satisfait l'inégalité de Young généralisée

$$AB \leq \mathcal{D}^*(A) + \mathcal{D}(B). \tag{4.65}$$

Avec $A = \mathcal{D}'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right)$ et $B = \mathcal{D}^{-1}\left(\frac{q\lambda(t)}{\xi(t)} + I(t)\right)$, à partir de (4.5), (4.28) et (4.63) – (4.65), on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1'(t) \leq & -d\xi(t)\alpha(t)E(t)\mathcal{D}'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) + c\xi(t)\alpha(t)\mathcal{D}^*\left(\mathcal{D}'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right)\right) \\
& + c\xi(t)\alpha(t)I(t) + cq\alpha(t)\lambda(t) + cE'(t) \\
\leq & -d\xi(t)\alpha(t)E(t)\mathcal{D}'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) + c\varepsilon_0\xi(t)\alpha(t)\frac{E(t)}{E(0)}\mathcal{D}'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) \\
& - cE'(t).
\end{aligned}$$

Par conséquent, avec $\mathcal{F}_2(t) = \mathcal{F}_1(t) + cE(t)$, qui satisfait, pour certains $b_1, b_2 > 0$,

$$b_1\mathcal{F}_2(t) \leq E(t) \leq b_2\mathcal{F}_2(t) \tag{4.66}$$

et avec un choix convenable de ε_0, on obtient

$$\mathcal{F}_2'(t) \leq -k\xi(t)\alpha(t)\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right)\mathcal{D}'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) = -k\xi(t)\alpha(t)\mathcal{D}_2\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right), \tag{4.67}$$

où

$$\mathcal{D}_2(t) = t\mathcal{D}'(\varepsilon_0 t).$$

Puisque

$$\mathcal{D}_2'(t) = \mathcal{D}'(\varepsilon_0 t) + \varepsilon_0 t \mathcal{D}''(\varepsilon_0 t),$$

alors, en utilisant la stricte convexité de $\mathcal{D}$ sur $(0, \min\{\varepsilon, r\}]$, on déduit que $\mathcal{D}_2'(t), \mathcal{D}_2(t) > 0$ sur $(0, \min\{\varepsilon, r\}]$. Ainsi, en posant

$$R(t) = \frac{b_1 \mathcal{F}_2(t)}{E(0)},$$

à partir de (4.66) et (4.67), on aura

$$R(t) \sim E(t) \tag{4.68}$$

et pour $k_1 > 0$,

$$R'(t) \leq -k_1 \xi(t) \alpha(t) \mathcal{D}_2(R(t)), \ \forall t \geq t_1.$$

Alors, l'intégration sur (t_1, t) donne

$$R(t) \leq k_2 \mathcal{D}_1^{-1}\left(k_1 \int_{t_1}^{t} \xi(s) \alpha(s) \, ds\right), \tag{4.69}$$

où

$$\mathcal{D}_1(t) = \int_t^r \frac{1}{\mathcal{D}_2(s)} ds.$$

Ici, nous avons utilisé, en ce basant sur les propriétés de $\mathcal{D}$, le fait que $\mathcal{D}_1$ est strictement décroissante sur $(0, \min\{\varepsilon, r\}]$ et $\lim_{t \to 0} \mathcal{D}_1 = +\infty$. Finalement, une combinaison de (4.68) et (4.69), l'estimation (4.38) est établi. ■

Conclusion et perspectives

Conclusion

Dans cette thèse nous avons étudié la stabilité de trois systèmes dynamiques : Onde, thermoélastique et viscoélastique. On a amélioré et généralisé divers résultats antérieurs en se basant sur des techniques récentes d'analyse mathématique.

Tout d'abord nous avons considéré un système d'onde semi-linéaire avec un amortissement de type mémoire agissant sur une partie de la frontière. Sous certaines hypothèses sur le noyau résolvant k, nous avons montré la décroissance générale de l'énergie de la solution. La preuve est basée sur la méthode de construction de la fonctionnelle de Lyapunov équivalente à la fonctionnelle d'énergie. Ce travail peut être considéré comme une extension de Messaoudi et Soufyane [36].

Ensuite, nous avons étudié le comportement asymptotique de la solution d'un système thermoélastique soumis à l'effet d'un amortissement frontière de type mémoire, sous les mêmes hypothèses proposées dans le premier travail, nous avons montré la décroissance uniforme de l'énergie. Ce travail peut être considéré comme une extension de Boulanouar [6] et de Messaoudi et Al-Shehri [32]. De plus, ce résultat à fait l'objet d'une publication [45].

Enfin, nous nous somme intéressé à l'étude d'un système d'équations viscoélastique stabilisé par un terme d'amortissement distribué sous forme $\int_0^t g(t-s)\,\Delta u(s)\,ds + \alpha(t)\,h(u_t)$ et on a trouvé un résultat de décroissance générale et explicite de l'énergie. Ce travail constitue une généralisation des résultats obtenus par Mustafa dans [39].

Perspectives

En perspectives, on peut reconsidérer les deux premier chapitres pour un noyau résolvant de même type que la fonction de relaxation considérée dans le dernier chapitre.

Enfin et pour conforter nos résultats théoriques il sera judicieux de faire quelques simulations numériques en utilisant les logiciels libres tels que Freefem++ ou Scilab.

Bibliographie

[1] Adams, R. A., Fournier, J. J. F., Sobolev spaces, Academic press 2003.

[2] Alabau-Boussouira, F., Convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems, Appl. Math. Optim. 51 (1) (2005) 61-105.

[3] Arnold, V. I., Mathematical Methods of Classical Mechanics Springer-Verlag, New York 1989.

[4] Berrimi, S., Messaoudi, S. A., Existence and decay of solutions of a viscoelastic equation with a nonlinear source, Nonlinear Anal. 64 (2006) 2314-2331.

[5] Boudiaf, F., Analyse asymptotique de quelques problèmes en thermoélasticité et en thermoviscoélasticité. Thèse de Doctorat LMD Chapitre 1, Faculté des Sciences, Université Ferhat Abbas de Sétif 1, (2016).

[6] Boulanouar, F., Stabilisation frontière et distribuée de quelques problèmes en thermoélasticité. Thèse de Doctorat LMD Chapitre 1, Faculté des Sciences, Université Ferhat Abbas de Sétif 1, (2015).

[7] Brézis, H., Analyse Fonctionnelle Théorie et Application, Masson. Paris (1983).

[8] Cavalcanti, M. M., Domingos Cavalcanti, V. N., and Ferreira, J., Existence and uniform decay for nonlinear viscoelastic equation with strong damping, Math. Methods Appl. Sci. 24, 1043 (2001).

[9] Cavalcanti, M.M., Domingos Cavalcanti, V.N., and Lasiecka, I., Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction, J. Differential Equations 236 (2) (2007) 407-459.

[10] Cavalcanti, M. M., Domingos Cavalcanti, V. N., and Martinez, P., General decay rate estimates for viscoelastic dissipative systems, Nonlinear Anal. 68 (1) (2008) 177-193.

[11] Cavalcanti, M. M., Domingos Cavalcanti, V. N., Prates Filho, J. S., and Soriano, J. A., Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with non-linear boundary damping, Differential Integral Equations 14 (1) (2001) 85-116.

[12] Cavalcanti, M. M., Domingos Cavalcanti, V. N., and Soriano, J. A., Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping, Electron. J. Differ. Equations 2002, 1 (2002).

[13] Cavalcanti, M. M., Domingos Cavalcanti, V. N., Soriano J. A., and Souza, J. S., Homogenization and uniform stabilization for a nonlinear hyperbolic equation in domains with holes of small capacity, Electron. J. Differ. Equ. Vol. 2004, No. 55 (2004), 1-19.

[14] Cavalcanti, M. M., Guesmia, A., General decay rates of solutions to a non-linear wave equation with boundary conditions of memory type, Differential Integral Equations 18 (5) (2005) 583-600.

[15] Conrad, F., and Rao, B., Decay of solutions of wave equations in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback, Asympt. Anal. 7 (1993) 159-177.

[16] Dafermos, C. M., On the existence and the asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity, Arch. Rational Mech. Anal. 29 (1968), 241-271.

[17] Guesmia, A., and Messaoudi, S. A., On the boundary stabilization of a compactly coupled system of nonlinear wave equations, Int. J. Evol. Equ. 1 (3) (2005) 211-224.

[18] Han, X. S., and Wang, M. X., General decay of energy for a viscoelastic equation with nonlinear damping, Math. Methods Appl. Sci. 32, 346 (2009).

[19] Han, X. S., and Wang, M. X., Global existence and uniform decay for a nonlinear viscoelastic equation with damping, Nonlinear Analysis : Real World Appl. 70, 3090 (2009).

[20] Jian, S., Mũnoz Rivera, J. E., and Racke, R., Asymptotic stability and global existence in thermoelasticity with symmetry, Q. Appl. Math. 56, 259 (1998).

[21] Komornik, V., On the nonlinear boundary stabilization of the wave equation, Chen. Ann. Math 14B (2) (1993) 153-164.

[22] Komornik, V., and Rao, B., Boundary stabilization of compactly coupled wave equations, Asympt. Anal. 14 (1997) 339-359.

[23] Komornik, V., and Zuazua, E., A direct method for the boundary stabilization of the wave equation, J. Math. Pure Appl. 69 (1990) 33-54.

[24] Lasiecka, I., Stabilization of wave and plate-like equations with nonlinear dissipation on the boundary, J. Differential Equations 79 (1989) 340-381.

[25] Lasiecka, I., and Tataru, D., Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping, Differential Integral Equations 6 (3) (1993) 507-533.

[26] Lebeau, G., Zuazua, E., Sur la décroissance non uniforme de l'énergie dans le système de la thermoélasticité linéaire, C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 324 (1997), 409-415.

[27] Liu, W. J., Partial exact controllability and exponential stability of the higher-dimensional linear thermoelasticity, ESAIM. Control. Optm. Calc. Var. 3 (1998), 23-48.

[28] Liu, W. J., General decay rate estimate for a viscoelastic equation with weakly nonlinear time-dependent dissipation and source terms, J. Math. Phys. 50 (11) (2009) 113506.

[29] Messaoudi, S. A., General decay of the solution energy in a viscoelastic equation with a nonlinear source, Nonlinear Anal. 69 (2008) 2589-2598.

[30] Messaoudi, S. A., General decay of solutions of a viscoelastic equation. J. Math. Anal. App. 341 (2008) 1457-1467.

[31] Messaoudi, S. A., Al-Khulaifi, W., General and optimal decay for a quasilinear viscoelastic equation. Appl. Math. Lett. 66 (2017) 16-22.

[32] Messaoudi, S. A., Al-Shehri, A., General boundary stabilization of memory-type thermoelasticity, J. Math. Phys. 51, 103514 (2010).

[33] Messaoudi, S. A., Mustafa, M. I., On the control of solutions of viscoelastic equations with boundary feedback, Nonlinear Analysis : Real World Applications 10 (2009) 3132-3140.

[34] Messaoudi, S.A., Mustafa, M.I., A general stability result for a quasilinear wave equation with memory, Nonlinear Anal. Real World Appl. 14 (4) (2013) 1854-1864.

[35] Messaoudi, S. A., Soufyane, A., Boundary stabilization of solutions of a nonlinear system of Timoshenko type, Nonlinear Anal. 67 (2007) 2107-2121.

[36] Messaoudi, S. A., Soufyane, A., General decay of solutions of a wave equation with a boundary control of memory type, Nonlinear Analysis : Real World Applications 11 (2010) 2896-2904.

[37] Messaoudi, S. A., Tatar, N. E., Global existence and uniform stability of solutions for a quasilinear viscoelastic problem, Math. Methods Appl. Sci. 30, 665 (2007).

[38] Mustafa, M. I., Boundary stabilization of memory-type thermoelastic systems, Electron. J. Differ. Equ. 2013 No. 52 (2013), 1-16.

[39] Mustafa, M. I., General decay result for nonlinear viscoelastic equations. J. Math. Anal. Appl. 2018, 457 (1) : 134-152.

[40] Muñoz Rivera, J.E., Andrade, D., Exponential decay of nonlinear wave equation with a viscoelastic boundary condition, Math. Methods Appl. Sci. 23 (1) (2000) 41-61.

[41] Muñoz Rivera, J. E., Racke, R., Magneto-thermo-elasticity-Large time behavior for linear systems, Adv. Differential Equations 6 (3) (2001), 359-384.

[42] Santos, M. L., Asymptotic behavior of solutions to wave equations with a memory conditions at the boundary, Electron. J. Differ. Equ. 78 (2001) 1-11.

[43] Santos, M. L., Ferreira, J., Pereira, D. C., and Raposo, C. A., Global existence and stability for wave equation of Kirchhoff type with memory condition at the boundary, Nonlinear Anal. 54 (2003) 959-976.

[44] Santos, M. L., and Junior, F., A boundary condition with memory for Kirchhoff plates equations, Appl. Math. Comput. 148 (2) (2004) 475-496.

[45] Semchedine, N., Benseridi, H., and Drabla, S., General stabilization of a thermoelastic systems with a boundary control of a memory type, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 2020 (accepté).

[46] Zuazua, E., Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping, Commun. Partial Differ. Equ. 15, 205 (1990).

[47] Zuazua, E., Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback, SIAM J. Control. Optim 28 (1990) 466-477.

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de comportement asymptotique de trois systèmes dynamiques de types : Onde, thermoélastique et viscoélastique. Dans les deux premiers systèmes on considère un amortissement frontière de type viscoélastique et dans le troisième système l'amortissement est de type distribué. On a montré la décroissance générale de l'énergie de la solution de chaque système, sous certaines hypothèses nécessaires et convenables sur les noyaux résolvants. Pour obtenir ces résultats, différentes méthodes ont été utilisées telles que la méthode de l'énergie, la construction des fonctions de Lyapunov et les propriétés des fonctions convexes.

Mots clés : Onde, thermoélastique, viscoélastique, décroissance générale, convexité, noyau résolvant, fonction de relaxation, amortissement, mémoire.

الملخص

في هذه الأطروحة، تمت دراسة السلوك المقارب لثلاثة أنواع من الأنظمة الديناميكية: الموجة، المرونة الحرارية و المرونة اللزجة.

ويعطى التبديد لكل من النظامين الأولين على صورة حد لزوجة مرنة و يؤثر على جزء من الحدود وفي النظام الثالث يعطى بواسطة حد الاحتكاك. لقد قمنا ببرهنة الاضمحلال العام لطاقة الحل لكل نظام، في ظل افتراضات معينة ضرورية و ملائمة حول نواة الحل. للحصول على هذه النتائج، اتبعنا طرق مختلفة كطريقة الطاقة، بناء وظائف ليابونوف و خصائص الوظائف المحدبة.

الكلمات المفتاحية: موجة، مرونة حرارية، مرونة لزجة، الاضمحلال العام، التحدب، نواة الحل، دالة الاسترخاء، مخمد، ذاكرة.

Abstract

This thesis is devoted to the study of asymptotic behavior of three type dynamic systems: Wave, thermoelastic and viscoelastic. In the first and second systems, the dissipation is given by a boundary viscoelastic term and the third system being with a distributed damping term. We prove a general decay of the energy of the solution of each system, under certain necessary and suitable assumptions on the resolvent kernels. To obtain these results, we use the multiplier method such as the energy method, the construction of Lyapunov functions and the properties of convex functions.

Key words: Wave, thermoelastic, viscoelastic, general decay, convexity, resolvent kernel, relaxation function, damping, memory.