

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE SETIF
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE



N° d'ordre :

Série :

THESE

présentée pour obtenir le diplôme de

Doctorat LMD

Spécialité : Physique

Option : Physique Théorique

par

Naima MANA

THEME

Systemes non-hermitiques : classification topologique,
pseudo- PT symétrie et états cohérents pseudo-bosoniques

Soutenue le : 22/05/2021

Devant le Jury :

Président :	S. Lamari	Prof.	UFA. Sétif 1
Rapporteur :	M. Maamache	Prof.	UFA. Sétif 1
Examineurs :	N. Mebarki	Prof.	Univ. Constantine 1
	N. Baadji	Prof.	Univ. M'sila
	A. Boumali	Prof.	Univ. Tebessa

À mes parents,

À ma famille,

Remerciements

Cette thèse n'aurait pu être achevée sans le grand soutien de ma famille, en particulier mes parents, qui ont manifesté beaucoup de bonne humeur, d'amour, et l'intérêt grandissant pour la poursuite de mes études.

Tout d'abord, je voudrais remercier grandement Mr. Mustapha Maamache, Professeur à l'Université de Ferhat Abbas Sétif 1, qui fut mon directeur de thèse et qui m'a fait partager ses brillantes intuitions. Qu'il soit aussi remercié pour sa générosité, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. C'est à ses côtés que j'ai appris la rigueur et la perspicacité scientifique et le goût du travail bien fait.

Je remercie Pr. Cem Yuce pour les encouragements, les discussions et les instructions qu'il a montrées lors du stage à Eskisehir Technical University en Turquie.

Je tiens à remercier Mr. Saadi Lamari pour avoir accepté de présider le jury. Merci ensuite à messieurs Noureddine Mebarki, Nadjib Baadji et Abdelmalek Boumali qui m'ont fait l'honneur d'être examinateurs de cette thèse.

Je salue avec reconnaissance les efforts et le dévouement de tous mes enseignants, chacun d'entre eux a contribué à ma formation. Je ne pourrai jamais assez les remercier.

Je tiens à témoigner mon remerciement pour Mr. Walid Koussa, pour avoir travaillé ensemble.

Je remercie aussi tous mes amis et collègues avec qui j'ai eu l'occasion de travailler ou discuter.

Table des matières

Introduction	6
1 Théorie des invariants pour les systèmes non-hermitiques dépendants du temps	12
1.1 Théorie quantique des invariants	13
1.2 Théorie des pseudo-invariants	15
1.3 \mathcal{PT} et pseudo- \mathcal{PT} symétrie par l'approche des invariants	16
2 Etats cohérents pseudo-bosoniques	22
2.1 Définition des états cohérents	22
2.2 Évolution d'un état cohérent	24
2.3 Etats cohérents généralisés : approche des invariants linéaires	25
2.4 Opérateurs d'annihilation et de création pseudo -bosoniques	26
2.5 Application : Hamiltonien de Swanson non-hermitique dépendant du temps . . .	28
3 Isolants Topologiques	34
3.1 Introduction	34
3.2 Invariants topologiques	38
3.2.1 Nombre d'enroulement (Winding number)	38
3.2.2 Premier nombre de Chern	39
3.2.3 Invariant \mathbb{Z}_2	39
3.3 Classification	40
3.4 Application : Hamiltonien de Su-Schrieffer-Heeger (SSH)	43

Conclusion	45
Bibliographie	46
Annexe : Articles publiés	53

Introduction

La mécanique quantique, c'est-à-dire la théorie fondamentale des phénomènes de base dans le monde microscopique, a été formulée rigoureusement du point de vue mathématique pour vouloir l'appliquer dans toutes les branches de la physique. Ces formulations sont appelées *postulats fondamentaux de la mécanique quantique* et sont énoncées comme

Premier Postulat : Description d'un système physique

A un instant t_0 fixe, l'état d'un système physique est défini par $|\varphi(t_0)\rangle \in \varepsilon$ où ε a la structure d'un espace vectoriel.

Il en découle le principe de superposition tel que : $|\varphi_1\rangle \in \varepsilon$ et $|\varphi_2\rangle \in \varepsilon$ donc $|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle \in \varepsilon$.

Deuxième Postulat : Description des quantités physiques

A toute grandeur physique mesurable A est associé un opérateur hermitique A agissant dans ε ; cet opérateur est une observable.

Troisième Postulat : Mesure des quantités physiques

La mesure d'une grandeur physique A ne peut donner comme résultat qu'une des valeurs propres de l'observable \hat{A} (qui est un opérateur hermitique). Alors :

- Une mesure de A donnera toujours une valeur réelle puisque A est hermitique ;
- Si le spectre de A est discret (nombre de valeurs propres discret), les résultats de la mesure de A sont **quantifiés** ;
- Une des valeurs propres signifie plusieurs résultats possibles pour la mesure : **probabiliste** ;
- Le résultat des mesures possibles est indépendant de l'état du système.

Quatrième Postulat : Probabilité de la mesure

La probabilité avec laquelle on peut trouver a_n comme résultat de la mesure de A , noté $P(a_n)$, dépend de l'état du système physique $|\psi\rangle$. L'état du système physique après la mesure est la projection normée de $|\psi\rangle$ sur $|u_n\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |u_n\rangle, \quad (\langle\psi|\psi\rangle = 1), \quad (1)$$

où $|u_n\rangle$ est un état propre de l'observable \hat{A} associé à la valeur propre a_n

$$A|u_n\rangle = a_n |u_n\rangle, \quad (2)$$

la probabilité $P(a_n)$ d'obtenir la valeur propre non dégénérée a_n

$$P(a_n) = |\langle u_n | \psi \rangle|^2. \quad (3)$$

avec

$$\langle u_n | \psi \rangle = \langle u_n | \sum_m c_m u_m \rangle = c_n, \quad (4)$$

tel que la probabilité de mesure $P(a_n)$ est égale à

$$P(a_n) = |c_n|^2. \quad (5)$$

Cinquième Postulat :

Si le système était initialement dans l'état $|\psi\rangle$, et si le résultat de la mesure de A est a_n , alors immédiatement après la mesure, le système se trouve dans l'état projeté sur le sous-espace de la valeur propre a_n

$$\frac{P_n |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_n | \psi \rangle}}. \quad (6)$$

Sixième Postulat : Équation d'évolution

L'évolution temporelle du vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ est régie par l'équation d'évolution

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle, \quad (7)$$

où $H(t)$ est l'opérateur Hamiltonien.

La mécanique quantique usuelle est généralement dotée d'un Hamiltonien auto-adjoint (i.e. $H = H^\dagger$) et est étudiée dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} avec la définition naturelle du produit scalaire

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int \phi^*(x) \psi(x) dx, \quad (8)$$

d'où l'adjoint d'un Hamiltonien H est défini comme

$$\langle H^\dagger \phi | \psi \rangle = \langle \phi | H \psi \rangle. \quad (9)$$

L'hermiticité de l'opérateur Hamiltonien, dans l'espace de Hilbert, assure naturellement les propriétés fondamentales de la mécanique quantique à savoir

- Les valeurs propres d'énergie sont réelles, c'est-à-dire $E = E^*$,

- Les fonctions propres de l'Hamiltonien forment un ensemble complet de fonctions orthonormées,

$$\sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| = I, \quad (10)$$

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn}; \quad (11)$$

- Les normes des fonctions propres sont toujours définies positives et conduisent à une interprétation probabiliste valide du système ;
- L'évolution temporelle est unitaire,

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | \psi(0) \rangle. \quad (12)$$

en effet, en écrivant

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle, \quad (13)$$

en injectant $|\psi(t)\rangle$ dans l'équation (7), on trouve

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t) |\psi(0)\rangle = H(t) U(t) |\psi(0)\rangle, \quad (14)$$

d'où on obtient

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t}. \quad (15)$$

L'équation (12) est vérifiée lorsque $H = H^+$

$$U(t)U^+(t) = U^+(t)U(t) = 1. \quad (16)$$

Lorsque l'Hamiltonien n'est pas auto-adjoint (i.e. $H \neq H^+$), l'opérateur d'évolution $U(t)$ n'est plus unitaire et dans ce cas là, l'interprétation probabiliste n'est pas valide sauf si on considère la base bi-orthonormée.

Néanmoins, en 1998, Bender et ses collaborateurs ont trouvé une certaine classe des Hamiltoniens non-hermitiques possédants un spectre réel discret [1]. La réalité du spectre est une conséquence directe de la symétrie \mathcal{PT} non-brisée. On désigne respectivement par \mathcal{P} et \mathcal{T} les opérateurs de parité et de renversement du sens du temps et on note que ces deux opérateurs commutent entre eux soit $[\mathcal{P}, \mathcal{T}] = 0$. Le produit de ces deux transformations notée par \mathcal{PT} est la transformation parité-temps. Il est facile de se convaincre que $\mathcal{P}^2 = 1$, $\mathcal{T}^2 = 1$ et $(\mathcal{PT})^2 = 1$.

Les lois de transformations de la position x , de l'impulsion p et du nombre imaginaire i , sont successivement données par

$$\mathcal{P} \{x \rightarrow -x \quad , \quad p \rightarrow -p \quad , \quad i \rightarrow i\} , \quad (17)$$

$$\mathcal{T} \{x \rightarrow x \quad , \quad p \rightarrow -p \quad , \quad i \rightarrow -i\} , \quad (18)$$

en plus, quelques auteurs adoptent le changement $t \rightarrow -t$ sous l'action de l'opérateur \mathcal{T} [2, 3, 4, 5, 6, 7]. L'opérateur \mathcal{PT} est étant anti-linéaire alors l'invariance par \mathcal{PT}

$$[H, \mathcal{PT}] = 0, \quad (19)$$

n'implique pas que les deux opérateurs H et \mathcal{PT} ont des états propres simultanés. Il peut y avoir deux possibilités

- i. si les états propres de l'Hamiltonien H ne sont pas des états propres de l'opérateur \mathcal{PT}

$$H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle , \quad \mathcal{PT} |\psi_n\rangle \neq \lambda_n |\psi_n\rangle , \quad (20)$$

le spectre pourrait être complexe ainsi on dit que la \mathcal{PT} symétrie est *brisée* ou bien *spontanément brisée*.

- ii. si l'opérateur H et l'opérateur \mathcal{PT} admettent les mêmes états propres

$$H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle , \quad \mathcal{PT} |\psi_n\rangle = \pm \lambda_n |\psi_n\rangle , \quad (21)$$

les valeurs propres sont réelles et on dit que la \mathcal{PT} symétrie est *non-brisée*.

La transition entre la \mathcal{PT} symétrie non-brisée et \mathcal{PT} symétrie brisée ; c'est-à-dire les valeurs propres réelles deviennent complexes ; passe par un point appelé *point exceptionnel* (PE). Un point exceptionnel d'ordre n est un point auquel les n valeurs propres et les états propres correspondants coalescent [8, 9, 10].

Bender et al. [11], pour avoir une théorie cohérente et unitaire, ont défini le \mathcal{PT} produit scalaire associé aux Hamiltoniens \mathcal{PT} symétriques comme

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle_{\mathcal{PT}} = (-1)^n \delta_{mn}, \quad (22)$$

ce qui implique que la moitié des états propres ont des normes positives et le reste ont des normes négatives. Le problème des normes négatives a été résolu en introduisant une symétrie

supplémentaire \mathcal{C} [11]. L'opérateur linéaire \mathcal{C} dont les valeurs propres sont ± 1 d'où $\mathcal{C}^2 = 1$ commute avec l'opérateur \mathcal{PT}

$$[\mathcal{C}, \mathcal{PT}] = 0, \quad (23)$$

mais pas avec les opérateurs \mathcal{P} et \mathcal{T} séparément

$$[\mathcal{C}, \mathcal{P}] \neq 0 \quad , \quad [\mathcal{C}, \mathcal{T}] \neq 0. \quad (24)$$

A cette fin, une nouvelle structure de produit scalaire, ou le \mathcal{CPT} produit scalaire, est défini comme

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle_{\mathcal{CPT}} = \delta_{mn} . \quad (25)$$

Se basant sur les travaux de Scholz [12], Mostafazadeh [13, 14, 15] a généralisé la \mathcal{PT} symétrie à la notion de *pseudo-hermiticité*. Un Hamiltonien H est dit pseudo-hermitique lorsque

$$H^+ = \eta H \eta^{-1}, \quad (26)$$

où l'opérateur métrique est linéaire et inversible. On note par H^+ le conjugué hermitique de H . Les opérateurs H et H^+ satisfont respectivement aux équations aux valeurs propres qui sont

$$H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle, \quad (27)$$

$$H^+ |\chi_n\rangle = E_n^* |\chi_n\rangle. \quad (28)$$

et leurs vecteurs propres forment une base bi-orthonormée $\{|\psi_n\rangle, |\chi_n\rangle\}$, c'est-à-dire

$$\langle \chi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn}, \quad (29)$$

où les Hamiltoniens H et H^+ s'écrivent, à l'aide de la relation de fermeture,

$$\sum_n |\psi_n\rangle \langle \chi_n| = \sum_n |\chi_n\rangle \langle \psi_n| = 1, \quad (30)$$

comme suit

$$H = \sum_n E_n |\psi_n\rangle \langle \chi_n| \quad , \quad H^+ = \sum_n E_n^* |\chi_n\rangle \langle \psi_n|. \quad (31)$$

En outre, la pseudo-hermiticité fait correspondre l'Hamiltonien pseudo-hermitique H à un Hamiltonien hermitique h

$$h = \rho H \rho^{-1}, \quad (32)$$

où l'opérateur de Dyson est linéaire, inversible et borné. Si on utilise l'équation (32) on déduit immédiatement la relation (26), en fait

$$\rho H \rho^{-1} = (\rho^{-1})^+ H^+ \rho^+, \quad (33)$$

on multiplie respectivement à gauche par ρ^+ et ensuite à droite par $(\rho^+)^{-1}$, on déduit donc

$$\rho^+ \rho H \rho^{-1} (\rho^+)^{-1} = H^+, \quad (34)$$

qui implique que

$$\eta = \rho^+ \rho \quad , \quad \eta^{-1} = \rho^{-1} (\rho^+)^{-1}. \quad (35)$$

Il est important de noter que la transformation ρ permet de faire passer les vecteurs propres de h aux vecteurs propres de H

$$|\varphi_n\rangle = \rho |\psi_n\rangle. \quad (36)$$

Les vecteurs propres $|\varphi_n\rangle$ préservent le produit scalaire

$$\langle \varphi_m | \varphi_n \rangle = \delta_{mn}, \quad (37)$$

à partir de la relation (36) on obtient

$$\langle \psi_m | \rho^+ \rho |\psi_n\rangle = \langle \psi_m | \eta |\psi_n\rangle = \langle \psi_m | \psi_n \rangle_\eta = \delta_{mn}, \quad (38)$$

cette dernière relation représente le *pseudo-produit scalaire* (η -produit scalaire) [16, 17, 18].

Dans l'objectif d'étudier, au premier chapitre, les conditions sous lesquelles le développement présenté dans l'article de [26] aboutit à un résultat correcte et du même coup de définir la pseudo \mathcal{PT} symétrie, nous présentons la théorie quantique des invariants de Lewis et Riesenfeld ainsi que sa généralisation aux systèmes non-hermitiques dépendants du temps : Théorie des pseudo-invariants.

Dans le second chapitre on utilise les opérateurs invariants linéaires, considérés comme des opérateurs d'annihilation et de création, pour construire les états cohérents pseudo-bosoniques dépendants du temps. Pour clore ce chapitre, on étudie l'Hamiltonien de Swanson non-hermitique dépendant du temps comme un exemple illustratif.

Le chapitre 3 est consacré brièvement à l'introduction des classifications topologiques des systèmes non-hermitiques.

Chapitre 1

Théorie des invariants pour les systèmes non-hermitiques dépendants du temps

Si l'Hamiltonien $H(t)$ dépend du temps, il est généralement difficile de résoudre l'équation de Schrödinger associée

$$i\hbar\partial_t |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle, \quad (1.1)$$

Il est nécessaire d'utiliser des approximations telle que : la théorie des perturbations dépendante du temps , l'approximation soudaine , l'approximation adiabatique ou aussi la méthode des invariants de Lewis et Riesenfeld [24].

Récemment, deux méthodes ont eu un intérêt considérable que ce soit sur le plan théorique ou expérimental, à savoir l'approximation adiabatique reposant sur le théorème adiabatique et la théorie des invariants de Lewis et Riesenfeld [24]. L'importance des deux méthodes vient du fait que le problème (1.1) se réduit à un problème de calcul de phases.

La théorie des invariants a été introduite pour la première fois par Lewis et Riesenfeld [24] pour l'étude de l'oscillateur harmonique avec une fréquence dépendante du temps et la particule dans un champ électromagnétique dépendant du temps.

1.1 Théorie quantique des invariants

La théorie des invariants de Lewis et Riesenfeld [24] permet d'exprimer les solutions de l'équation de Schrödinger des systèmes quantiques décrits par des Hamiltoniens hermitiques dépendants explicitement du temps en fonction des états propres de l'invariant hermitique multiplié par une phase, où il suffit de trouver la forme explicite de l'opérateur invariant et les phases associées à l'évolution. L'opérateur invariant hermitique $I(t)$ vérifiant l'équation de Von-Neuman

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\partial I(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I(t), H(t)] = 0. \quad (1.2)$$

Nous constatons que l'action de l'invariant sur un vecteur d'état $|\Psi\rangle$ solution de l'équation de Schrödinger (7) est aussi solution de l'équation Schrödinger suivante

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (I(t) |\Psi(t)\rangle) = H(t) (I(t) |\Psi(t)\rangle). \quad (1.3)$$

L'opérateur invariant $I(t)$ est supposé admettre un ensemble d'états propres $|\phi_{\lambda,k}\rangle$

$$I(t) |\phi_{\lambda,k}(t)\rangle = \lambda |\phi_{\lambda,k}(t)\rangle, \quad (1.4)$$

qui lui correspondent des valeurs propres λ , où k représente tous les autres nombres quantiques nécessaire spécifiant les états propres de $I(t)$ (car cet opérateur peut avoir un spectre dégénéré).

Ces fonctions propres sont supposées orthonormées

$$\langle \phi_{\lambda',k'}(t) | \phi_{\lambda,k}(t) \rangle = \delta_{\lambda',\lambda} \delta_{k',k}. \quad (1.5)$$

En vertu de l'hermiticité de $I(t)$, les valeurs propres λ sont réelles et indépendantes du temps, en effet, la dérivée par rapport au temps de l'équation (1.4) donne

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\phi_{\lambda,k}(t)\rangle + I \frac{\partial}{\partial t} |\phi_{\lambda,k}(t)\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\phi_{\lambda,k}(t)\rangle + \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\phi_{\lambda,k}(t)\rangle, \quad (1.6)$$

multiplions ensuite à gauche par $\langle \phi_{\lambda,k'} |$, on aura

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \langle \phi_{\lambda,k}(t) | \frac{\partial I}{\partial t} | \phi_{\lambda,k'}(t) \rangle. \quad (1.7)$$

La valeur moyenne de (1.2) dans les états s'écrit

$$i\hbar \langle \phi_{\lambda',k'}(t) | \frac{\partial I}{\partial t} | \phi_{\lambda,k}(t) \rangle + (\lambda' - \lambda) \langle \phi_{\lambda',k'}(t) | H | \phi_{\lambda,k}(t) \rangle = 0, \quad (1.8)$$

qui implique que pour $\lambda' = \lambda$

$$\langle \phi_{\lambda,k}(t) | \frac{\partial I}{\partial t} | \phi_{\lambda,k'}(t) \rangle = 0, \quad (1.9)$$

d'où on déduit que les valeurs propres sont constantes (indépendantes du temps).

Le fait que les valeurs propres λ sont constantes permet de faire le lien entre les états propres de $I(t)$ et les solutions de l'équation de Schrödinger, en effet l'équation (1.6) multiplié à gauche par $\langle \phi_{\lambda',k'}(t) |$ donne

$$(\lambda - \lambda') \langle \phi_{\lambda',k'}(t) | \frac{\partial}{\partial t} | \phi_{\lambda,k}(t) \rangle = \langle \phi_{\lambda',k'}(t) | \frac{\partial I}{\partial t} | \phi_{\lambda,k}(t) \rangle, \quad (1.10)$$

qui, pour $\lambda' \neq \lambda$, permet d'écrire l'équation (1.8) sous la forme suivante

$$i\hbar \langle \phi_{\lambda',k'} | \frac{\partial}{\partial t} | \phi_{\lambda,k} \rangle = \langle \phi_{\lambda',k'} | H | \phi_{\lambda,k} \rangle. \quad (1.11)$$

On aurait pu déduire immédiatement que les fonctions propres $|\phi_{\lambda,k}(t)\rangle$ sont des solutions de l'équation de Schrödinger si $\lambda = \lambda'$. Cela pourrait être le cas si on utilisera le fait que les phases des états stationnaires ne sont pas fixées. En effet, on peut donc très bien multiplier $|\phi_{\lambda,k}(t)\rangle$ par un facteur de phase dépendant du temps :

$$|\phi_{\lambda,k}(t)\rangle_{\alpha} \equiv \exp[i\gamma_{\lambda k}(t)] |\phi_{\lambda,k}(t)\rangle, \quad (1.12)$$

où $\gamma_{\lambda k}(t)$ est une fonction réelle du temps arbitrairement choisie. Ces $|\phi_{\lambda,k}(t)\rangle_{\alpha}$ sont aussi des états propres orthonormés de $I(t)$ associés aux valeurs propres λ . Si on choisit bien les phases $\gamma_{\lambda k}(t)$, l'équation (1.11) sera vérifiée pour $\lambda = \lambda'$ et donc l'objectif sera atteint. Il faut juste avoir le choix des phase $\gamma_{\lambda k}(t)$ tel que

$$\hbar \delta_{kk'} \frac{d\gamma_{\lambda k}}{dt} = \langle \phi_{\lambda,k'}(t) | \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) | \phi_{\lambda,k}(t) \rangle. \quad (1.13)$$

Ce choix montre que l'équation (1.11) pour $|\phi_{\lambda,k}\rangle_{\alpha}$ est vérifiée pour $\lambda = \lambda'$ et les élément non diagonaux $\langle \phi_{\lambda,k'}(t) | \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) | \phi_{\lambda,k}(t) \rangle$ sont identiquement nuls. Pour $k = k'$, la phase $\gamma_{\lambda k}(t)$ vérifie l'équation :

$$\hbar \frac{d\gamma_{\lambda k}}{dt} = \langle \phi_{\lambda,k}(t) | \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) | \phi_{\lambda,k}(t) \rangle. \quad (1.14)$$

La solution de l'équation de Schrödinger s'écrit comme une combinaison linéaire des états propres

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{\lambda k} C_{\lambda k}(0) \exp[i\gamma_{\lambda k}(t)] |\phi_{\lambda,k}(t)\rangle. \quad (1.15)$$

1.2 Théorie des pseudo-invariants

Dans le cas où l'Hamiltonien non-hermitique $H(t)$ dépend du temps, nous supposons, comme en mécanique quantique conventionnelle, l'existence d'un invariant pseudo-hermitique $I^{PH}(t)$ explicitement dépendant du temps vérifiant l'équation de Von-Neumann

$$\frac{\partial I^{PH}(t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [I^{PH}(t), H(t)], \quad (1.16)$$

En introduisant une métrique dépendante du temps $\eta(t) = \rho^+(t)\rho(t)$ et de façon complètement analogue au cas indépendant du temps, la version temporelle de la quasi-hermiticité pour l'invariant est donnée cette fois ci pour l'opérateur invariant de la manière suivante

$$I^{PH+}(t) = \eta(t)I^{PH}(t)\eta^{-1}(t) \Leftrightarrow I^h(t) = \rho(t)I^{PH}(t)\rho^{-1}(t) = I^{h+}(t), \quad (1.17)$$

où l'invariant $I^{PH}(t)$ est relié à l'opérateur invariant hermitique $I^h(t)$ au moyen de la transformation de similarité $\rho(t)$. La vertu d'un tel couple conjugué $I^h(t)$ et $I^{PH}(t)$ est qu'ils possèdent un spectre de valeur propre identique parce que ces deux invariants se situent dans la même classe de similarité. La réalité du spectre est garantie puisque l'un des invariants $I^h(t)$ est hermitique. Cela signifie que tout opérateur invariant auto-adjoint associé à un Hamiltonien hermitique, possède un invariant pseudo-hermitique $I^{PH}(t) = \rho^{-1}(t)I^h(t)\rho(t)$ et par conséquent les équations aux valeurs propres correspondantes sont alors

$$I^h(t) |\phi_n(t)\rangle = \lambda_n |\phi_n(t)\rangle, \quad (1.18)$$

et

$$I^{PH}(t) |\phi_n^H(t)\rangle = \lambda_n |\phi_n^H(t)\rangle, \quad (1.19)$$

où les fonctions propres $|\phi_n(t)\rangle$ et $|\phi_n^H(t)\rangle$ sont reliées par

$$|\phi_n(t)\rangle = \rho(t) |\phi_n^H(t)\rangle. \quad (1.20)$$

Les fonctions propres $|\phi_n^H(t)\rangle$ associées à l'invariant pseudo-hermitique $I^{PH}(t)$ satisfont le pseudo-produit scalaire

$$\langle \phi_m^{PH}(t) | \phi_n^{PH}(t) \rangle_\eta = \langle \phi_m^{PH}(t) | \eta(t) | \phi_n^{PH}(t) \rangle = \delta_{mn}. \quad (1.21)$$

En conclusion, les valeurs propres, les vecteurs propres de l'opérateur invariant $I^{PH}(t)$ ainsi que leurs évolutions peuvent être obtenues par la même technique présentée au paragraphe précédent pour le cas des Hamiltoniens hermitiques dépendants explicitement du temps.

On peut vérifier que

$$|\Psi_n^H(t)\rangle = e^{i\gamma_n(t)} |\phi_n^H(t)\rangle, \quad (1.22)$$

est une solution de l'équation de Schrödinger où la phase $\gamma_n(t)$ est réelle et satisfait à l'équation

$$\frac{d\gamma_n(t)}{dt} = \langle \phi_n^H(t) | \eta(t) \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right] | \phi_n^H(t) \rangle. \quad (1.23)$$

La solution générale de l'équation de Schrödinger associée à un Hamiltonien non-hermitique $H(t)$ dépendant du temps est comme suit

$$|\Psi^H(t)\rangle = \sum_n C_n e^{i\gamma_n(t)} |\phi_n^H(t)\rangle, \quad (1.24)$$

où les coefficients $C_n = \langle \phi_n^H(0) | \eta(0) | \Psi^H(0) \rangle$ sont indépendants du temps.

1.3 \mathcal{PT} et pseudo- \mathcal{PT} symétrie par l'approche des invariants

L'application de la notion des invariants aux systèmes \mathcal{PT} symétriques dépendants du temps [25, 26] a conduit à des résultats erronés qu'on corrigera dans ce qui suit :

L'idée est de chercher pour un Hamiltonien \mathcal{PT} symétrique, un opérateur \mathcal{PT} symétrique dépendant du temps $I(t)$ vérifiant

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I, H] = 0, \quad (1.25)$$

et

$$I(t)^{\mathcal{PT}} = (\mathcal{PT}) I(t) (\mathcal{PT}) = I(t). \quad (1.26)$$

L'invariant $I(t)$ possède un ensemble complet d'états propres orthonormés et satisfait l'équation aux valeurs propres

$$I(t) |\phi_\lambda(t)\rangle = \lambda |\phi_\lambda(t)\rangle, \quad (1.27)$$

avec

$$\langle \phi_{\lambda'}(t) | \phi_{\lambda}(t) \rangle_{\mathcal{PT}} = \sigma_{\lambda} \delta_{\lambda' \lambda}, \quad (1.28)$$

où $\sigma_{\lambda} = \pm 1$. En effectuant une transformation de réflexion espace-temps (transformation \mathcal{PT}) sur l'équation aux valeurs propres (1.27), on vérifie facilement que $\lambda = \lambda^*$ de sorte que les valeurs propres λ sont réelles. En suivant les mêmes étapes décrites précédemment, on différencie l'équation (1.27) par rapport au temps et on fait le produit scalaire avec l'état $\langle \phi_{\lambda'}^H(t) |$, nous obtenons

$$\langle \phi_{\lambda'}(t) | \frac{\partial I}{\partial t} | \phi_{\lambda}(t) \rangle_{\mathcal{PT}} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} \langle \phi_{\lambda'}(t) | \phi_{\lambda}(t) \rangle_{\mathcal{PT}} + (\lambda - \lambda') \langle \phi_{\lambda'}(t) | \frac{\partial}{\partial t} | \phi_{\lambda}(t) \rangle_{\mathcal{PT}}. \quad (1.29)$$

Maintenant, en multipliant le côté gauche de (1.25) avec l'état $|\phi_{\lambda}(t)\rangle$ et le projetant sur l'état $\langle \phi_{\lambda'}(t)|$, nous constatons que

$$\langle \phi_{\lambda'}(t) | \frac{\partial I}{\partial t} | \phi_{\lambda}(t) \rangle_{\mathcal{PT}} = i (\lambda' - \lambda) \langle \phi_{\lambda'}(t) | H | \phi_{\lambda}(t) \rangle_{\mathcal{PT}}, \quad (1.30)$$

alors, en prenant $\lambda = \lambda'$ on trouve que $\langle \phi_{\lambda}(t) | \partial I / \partial t | \phi_{\lambda}(t) \rangle_{\mathcal{PT}} = 0$. En substituant ce résultat dans l'équation (1.29), nous obtenons que les valeurs propres de l'invariant sont indépendantes du temps, c'est-à-dire $\partial \lambda / \partial t = 0$.

Nous procédons à l'étude de la connexion entre les états propres de l'opérateur invariant $I(t)$ et les solutions de l'équation de Schrödinger dépendante du temps. En utilisant le fait que les valeurs propres de l'invariant sont des constantes, nous combinons les équations. (1.29) et (1.30) pour obtenir

$$i (\lambda - \lambda') \langle \phi_{\lambda'}(t) | \frac{\partial}{\partial t} | \phi_{\lambda}(t) \rangle_{\mathcal{PT}} = (\lambda - \lambda') \langle \phi_{\lambda'}(t) | H | \phi_{\lambda}(t) \rangle_{\mathcal{PT}}, \quad (1.31)$$

pour $\lambda \neq \lambda'$

$$i \langle \phi_{\lambda'}(t) | \frac{\partial}{\partial t} | \phi_{\lambda}(t) \rangle_{\mathcal{PT}} = \langle \phi_{\lambda'}(t) | H | \phi_{\lambda}(t) \rangle_{\mathcal{PT}}. \quad (1.32)$$

On note que cette dernière équation n'est pas valable pour $\lambda = \lambda'$. La transformation $|\phi_{\lambda}(t)\rangle \rightarrow |\phi_{\lambda}(t)\rangle_{\mu} = e^{i\mu_{\lambda}(t)} |\phi_{\lambda}(t)\rangle$ permet d'écrire l'équation (1.31) sous la forme

$$\frac{d\mu_{\lambda}(t)}{dt} \sigma_{\lambda} = \langle \phi_{\lambda'}(t) | \left(i \frac{\partial}{\partial t} - H \right) | \phi_{\lambda}(t) \rangle_{\mathcal{PT}}, \quad (1.33)$$

où $\mu_{\lambda}(t)$ est une fonction réelle dépendante du temps. La constante σ_{λ} du côté gauche sera annulée par celle qui apparaîtra du côté droit de l'éq. (1.33). Les nouveaux états $|\phi_{\lambda}(t)\rangle_{\mu}$ sont

toujours des états propres de $I(t)$ et \mathcal{PT} . De plus, si μ_λ satisfait l'équation (1.33) alors l'équation (1.32) est valable pour $\lambda \neq \lambda'$ ainsi que pour $\lambda = \lambda'$. On peut alors déduire que les nouveaux états $|\phi_\lambda(t)\rangle_\mu$ satisfont l'équation de Schrödinger dépendante du temps. Par conséquent, la solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps gouvernée par un Hamiltonien non-hermitique possède une \mathcal{PT} symétrie peut être écrite comme

$$|\psi(t)\rangle_{\mathcal{PT}} = \sum_{\lambda}^{\infty} c_{\lambda} e^{i(\mu_{\lambda}(t)-\theta/2)} |\phi_{\lambda}(t)\rangle_{\mathcal{PT}}, \quad (1.34)$$

où les c_{λ} sont des coefficients indépendants du temps. Le facteur de phase introduit $e^{-i\theta/2}$ dans l'équation (1.34) garantit que les états propres de \mathcal{PT} ont la valeur propre 1. Il est important de mentionner que les équations (1.33) et (1.34) diffèrent des équations (15) et (16) de [24] par la présence, respectivement, des termes σ_{λ} et $e^{-i\theta/2}$.

Pedrosa et al. [26] ont appliqué cette méthode pour l'étude de l'oscillateur forcé non-hermitique dépendant du temps et \mathcal{PT} symétrique. L'Hamiltonien dépendant du temps pour ce système est donné par

$$H(t) = \frac{p^2}{2m(t)} + \frac{1}{2}m(t)\omega^2(t)x^2 + i\eta(t)x, \quad (1.35)$$

où x et p sont des conjugués canoniques ($[x, p] = i\hbar$), les fonctions réelles dépendantes du temps $m(t)$, $\omega(t)$ et $\eta(t)$ représentent, respectivement, la masse, la fréquence et la force externe et i est un nombre imaginaire. Du fait que l'Hamiltonien (1.35) est \mathcal{PT} symétrique, c'est-à-dire qu'il satisfait

$$H^{\mathcal{PT}}(t) = (\mathcal{PT}) H(t) (\mathcal{PT})^{-1} = H(t), \quad (1.36)$$

cette dernière condition implique que les paramètres $m(t)$, $\omega^2(t)$ et $\eta(t)$ sont symétriques sous l'action de l'opérateur \mathcal{PT} , i.e.

$$\begin{aligned} m(t) &= m^*(-t), \\ \omega(t) &= \omega^*(-t), \\ \eta(t) &= \eta^*(-t). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Pedrosa et al. [26] ont cherché un opérateur linéaire non-hermitique dépendant du temps $I(t)$ satisfaisant les conditions (1.25) et (1.26) et a la forme

$$I(t) = \alpha(t)x + \beta(t)p + \gamma(t), \quad (1.38)$$

où $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $\gamma(t)$ sont des fonctions complexes dépendantes du temps à déterminer. D'un côté, la condition d'invariance (1.25) conduit à

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= m\omega^2\beta, \\ \dot{\beta} &= -\frac{\alpha}{m}, \\ \dot{\gamma} &= i\beta\eta,\end{aligned}\tag{1.39}$$

cela implique

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha(t), \\ \beta(t) &= -\int_0^t \frac{\alpha(\tau)}{m(\tau)} d\tau, \\ \gamma(t) &= i\int_0^t \beta(\tau)\eta(\tau) d\tau,\end{aligned}\tag{1.40}$$

il est simple de vérifier que $\beta(t)$ satisfait l'équation différentielle ordinaire du second ordre

$$\ddot{\beta}(t) + \frac{\dot{m}}{m}\dot{\beta}(t) + \omega^2\beta(t) = 0.\tag{1.41}$$

De l'autre côté, la condition de \mathcal{PT} symétrie (1.26) implique

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= -\alpha^*(-t), \\ \beta(t) &= \beta^*(-t), \\ \gamma(t) &= \gamma^*(-t),\end{aligned}\tag{1.42}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= -\alpha^*(t), \\ \beta(t) &= -\beta^*(t), \\ \gamma(t) &= \gamma^*(t),\end{aligned}\tag{1.43}$$

il est facile d'observer que $\alpha(t)$ est un nombre purement imaginaire de sorte qu'il peut s'écrire $\alpha(t) = ia(t)$, où $a(t)$ est une fonction réelle et symétrique. Les expressions ci-dessus, (1.40), peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= ia(t), \\ \beta(t) &= -i\int_0^t \frac{a(\tau)}{m(\tau)} d\tau, \\ \gamma(t) &= \int_0^t \left(\int_0^\tau \frac{a(t')}{m(t')} dt' \right) \eta(\tau) d\tau,\end{aligned}\tag{1.44}$$

la solution de l'équation aux valeurs propres de l'opérateur invariant

$$\left(\alpha(t)x - i\beta(t)\frac{\partial}{\partial x} + \gamma(t) \right) |\phi_\lambda^H(x, t)\rangle = \lambda |\phi_\lambda^H(x, t)\rangle, \quad (1.45)$$

donne

$$\phi_\lambda(x, t) = \sqrt{\frac{\sigma_\lambda}{2\pi\hbar\beta(t)}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar\beta(t)} \left[(\lambda - \gamma(t))x - \frac{\alpha(t)}{2}x^2 \right] \right\}. \quad (1.46)$$

Afin de vérifier le \mathcal{PT} produit scalaire, il faut tout d'abord calculer l'action de l'opérateur \mathcal{PT} sur les fonctions propres $\phi_\lambda(x, t)$

$$\mathcal{PT}\phi_\lambda(x, t) = \phi_\lambda^*(-x, -t) = \sqrt{\frac{\sigma_\lambda}{2\pi\hbar\beta^*(-t)}} \exp \left\{ \frac{-i}{\hbar\beta^*(-t)} \left[(\lambda - \gamma^*(-t))(-x) - \frac{\alpha^*(-t)}{2}x^2 \right] \right\}, \quad (1.47)$$

les équations (1.42) impliquent que $\mathcal{PT}\phi_\lambda(x, t) = \phi_\lambda(x, t)$, c'est à dire que les fonctions $\phi_\lambda(x, t)$ qui sont des fonctions propres de l'opérateur invariant $I(t)$, sont aussi des fonctions propres de l'opérateur \mathcal{PT} . Cependant, le \mathcal{PT} produit scalaire est

$$\begin{aligned} \int dx \phi_{\lambda'}^{\mathcal{PT}}(x, t) \phi_\lambda(x, t) &= \int dx \frac{\sqrt{\sigma_{\lambda'}\sigma_\lambda}}{2\pi\hbar\beta(t)} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar\beta(t)} \left[((\lambda + \lambda') - 2\gamma(t))x - \alpha(t)x^2 \right] \right\}, \\ &\neq \sigma_\lambda \delta(\lambda' - \lambda). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Ainsi, les fonctions propres $\phi_\lambda(x, t)$ ne sont pas normalisées avec la fonction delta de Dirac qui contredit ce que Pedrosa et al. [26] ont prétendu. Pour rétablir la condition de normalisation, nous introduisons [27] le concept de *la symétrie pseudo-parité-temps* (*pseudo- \mathcal{PT} symétrie*). Dans ce nouveau concept, la condition de \mathcal{PT} symétrie (1.26) est remplacée par la condition suivante

$$(\mathcal{PT}) I(t) (\mathcal{PT})^{-1} = I^+(t), \quad (1.49)$$

qui relie l'invariant non-hermitique $I(t)$ à son conjugué hermitique $I^+(t)$. A cette fin, le conjugué hermitique de $I(t)$ (1.38) est

$$I^+(t) = \alpha^*(t)x + \beta^*(t)p + \gamma^*(t), \quad (1.50)$$

dont les fonctions propres sont obtenues sous la forme

$$\phi_\lambda^{I^+}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\beta^*(t)}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar\beta^*(t)} \left[(\lambda - \gamma^*(t))x - \frac{\alpha^*(t)}{2}x^2 \right] \right\}. \quad (1.51)$$

L'utilisation de la condition de pseudo- \mathcal{PT} symétrie (1.49) donne dans ce cas

$$\begin{aligned}\alpha^*(t) &= -\alpha^*(-t), \\ \beta^*(t) &= \beta^*(-t), \\ \gamma^*(t) &= \gamma^*(-t),\end{aligned}\tag{1.52}$$

on peut facilement vérifier la relation suivante

$$\mathcal{PT}\phi_\lambda(x, t) = \phi_\lambda^{I^+}(x, t).\tag{1.53}$$

Maintenant, le produit scalaire est donné comme

$$\begin{aligned}\langle \phi_{\lambda'}^{I^+}(x, t) | \phi_\lambda(x, t) \rangle &= \frac{1}{2\pi\hbar\beta(t)} \int dx \exp \left[\frac{i}{\hbar\beta(t)} (\lambda - \lambda') x \right], \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar\beta(t)} \int dx \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\Lambda - \Lambda') x \right],\end{aligned}\tag{1.54}$$

où $\Lambda = \frac{\lambda}{\beta(t)}$ est un paramètre complexe. Par conséquent, ce produit scalaire est normalisé avec la fonction delta de Dirac généralisée [28]

$$\langle \phi_{\lambda'}^{I^+}(x, t) | \phi_\lambda(x, t) \rangle = \frac{1}{\beta(t)} \delta(\Lambda - \Lambda').\tag{1.55}$$

En conclusion et après avoir présenté la méthode des invariants pseudo- \mathcal{PT} symétriques, nous soulignons que l'utilisation de la théorie des pseudo-invariants [20, 21, 22, 23] pour étudier les systèmes non-hermitiques dépendants du temps est plus appropriée.

Chapitre 2

Etats cohérents pseudo-bosoniques

2.1 Définition des états cohérents

Les états propres $|n\rangle$ de l'Hamiltonien ne sont pas très utiles pour faire le lien avec la théorie classique de l'oscillateur harmonique. A cette fin, on introduit de nouveaux états $|\alpha\rangle$, appelés états cohérents, et qui sont non seulement états propres de l'opérateur d'annihilation $\hat{a} \equiv a$, mais une superposition de tous les états propres $|n\rangle$ de l'Hamiltonien h :

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (2.1)$$

où α est un paramètre complexe. Les états cohérents normalisés $|\alpha\rangle$ sont donnés par

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (2.2)$$

ces états constituent l'outil de base de la correspondance entre théorie classique et théorie quantique du rayonnement électromagnétique. Ils ont été inventés par Schrödinger en 1926 [19] et réintroduits par Glauber [29] dans les années 1960. Ils jouent un rôle important en optique quantique (étude des propriétés quantiques de la lumière). Il n'est pas à priori évident que a , qui n'est pas hermitique, ait des vecteurs propres, et encore moins, que ceux-ci appartiennent à l'espace de Hilbert \mathcal{H} . On montrera par exemple que dans les états $|\alpha\rangle$, les valeurs moyennes des opérateurs positions x et impulsions p ont des propriétés aussi voisines que possibles des valeurs classiques de la position $x_c(t)$ et l'impulsion $p_c(t)$. On vérifie sans peine que $|\alpha\rangle$ (2.2) est vecteur propre de a .

La forme de la norme $\alpha_0 = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$ de l'équation (2.2) montre que l'état fondamental est une gaussienne et est un état cohérent particulier car c'est aussi un état propre de l'Hamiltonien h . Les autres états ne le sont pas puisqu'ils sont des superpositions des vecteurs propres de l'oscillateur harmonique. D'autre part,

$$\begin{aligned}\langle \beta | \alpha \rangle &= e^{-\frac{|\beta|^2}{2} - \frac{|\alpha|^2}{2} + \beta^* \alpha}, \\ &= e^{i\text{Im}(\beta^* \alpha)} e^{-\frac{|\alpha - \beta|^2}{2}} \neq 0.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Ainsi, bien que $|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$ soient deux vecteurs propres de a avec des valeurs propres différentes, ils ne sont pas orthogonaux parce que a n'est pas hermitique. Le recouvrement de ces états cohérents diminue rapidement avec la distance $|\alpha - \beta\rangle$. Une mesure de cette distance est

$$|\langle \beta | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2}. \quad (2.4)$$

Les états cohérents forment une base surcomplète

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \mathbf{1}, \quad (2.5)$$

ainsi, les éléments diagonaux $\langle \alpha | O | \alpha \rangle$ suffisent à définir complètement un opérateur O .

La relation (2.2) se met sous une forme plus élégante grâce à la relation $a |0\rangle = 0$ qui conduit à $e^{-\alpha^* a} |0\rangle = 0$, et par suite

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle, \quad (2.6)$$

avec l'opérateur déplacement

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a), \quad (2.7)$$

d'après la formule de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH),

$$e^{A+B} = e^{-[A,B]/2} e^A e^B, \quad (2.8)$$

l'opérateur $D(\alpha)$ s'écrit

$$D(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^+}, \quad (2.9)$$

la relation (2.6) signifie que les états cohérents sont donc obtenus par le déplacement du vide $|0\rangle$.

Énonçons quelques propriétés remarquables de $D(\alpha)$:

- $D(0) = \mathbf{I}$.
- L'opérateur $D(\alpha)$ est unitaire

$$D^+(\alpha) = D(-\alpha) = [D(\alpha)]^{-1}, \quad (2.10)$$

$$D^+(\alpha) D(\alpha) = D(\alpha) D^+(\alpha) = 1. \quad (2.11)$$

- l'action de l'opérateur $D(\alpha)$ sur a et a^+ conduit à

$$D^+(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha, \quad (2.12)$$

$$D^+(\alpha) a^+ D(\alpha) = a^+ + \alpha^*. \quad (2.13)$$

Enfin, on peut aussi définir les états cohérents de l'oscillateur harmonique comme étant des états qui minimisent la relation d'incertitude d'Heisenberg $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$. Ces différentes définitions des états cohérents de l'oscillateur harmonique ont été pleinement étudiées dans la littérature [19, 29, 30, 31, 32, 33, 34].

2.2 Évolution d'un état cohérent

Étant donné que d'après le postulat d'évolution d'un système,

$$|n, t\rangle = e^{-iht} |n\rangle = e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t}, \quad (2.14)$$

on déduit de (2.2) que l'évolué de l'état cohérent $|\alpha\rangle$ s'écrit

$$|\alpha, t\rangle = e^{-\frac{i}{2}\omega t} e^{-\frac{|\alpha(0)|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\alpha(0)e^{-i\omega t}]^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.15)$$

Nous constatons qu'un état cohérent reste toujours vecteur propre de a au cours du temps avec la valeur propre $\alpha(t) = \alpha(0)e^{-i\omega t}$. Les états $|\alpha, t\rangle$ et $|\alpha\rangle$ sont physiquement indiscernables puisque $|\alpha(t)|^2 = |\alpha|^2$. D'où le terme état cohérent.

2.3 Etats cohérents généralisés : approche des invariants linéaires

En introduisant des opérateurs invariants linéaires en q et p et non-hermitiques [35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]

$$A(t) = f(t)q + ig(t)p, \quad (2.16)$$

$$A^+(t) = f^*(t)q - ig^*(t)p, \quad (2.17)$$

vérifiant la relation (1.16), où $f(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions complexes dépendantes du temps t . On peut définir des états cohérents généralisés sur la base des opérateurs invariants $A(t)$ et $A^+(t)$ considérés comme des opérateurs d'annihilation et de création obeissant à la relation de commutation

$$[A(t), A^+(t)] = I. \quad (2.18)$$

Exploitions néanmoins cette idée et, faute de mieux, intéressons nous aux états propres de $A(t)$. Soit α l'une de ces valeurs propres constante et $|\alpha, t\rangle$ le ket propre correspondant. Autrement dit

$$A(t) |\alpha, t\rangle = \alpha |\alpha, t\rangle. \quad (2.19)$$

Ces états propres de l'opérateur d'annihilation $A(t)$ sont appelés états cohérents généralisés. Déterminer le ket $|\alpha, t\rangle$, c'est trouver son développement sur une base de l'espace des états, par exemple l'ensemble des kets propres de base de l'espace de Fock du nombre $N = A^+(t)A(t)$.

Enfin, l'état cohérent $|\alpha, t\rangle$ s'obtient aussi à l'aide de l'action d'un opérateur déplacement

$$D(\alpha, t) = \exp [\alpha A^+(t) - \alpha^* A(t)], \quad (2.20)$$

sur l'état du vide $|0, t\rangle$ défini par $A(t) |0, t\rangle = 0$, tel que

$$|\alpha, t\rangle = D(\alpha, t) |0, t\rangle. \quad (2.21)$$

Notons que ces états cohérents généralisés vérifient les mêmes propriétés que ceux introduits au paragraphes précédent.

2.4 Opérateurs d'annihilation et de création pseudo - bosoniques

Les pseudo bosons résultent de l'extension pseudo-hermitique des relations de commutation des bosons usuels [42, 43, 44, 45, 46]. Un formalisme général de la définition des pseudo-bosons est donné ci-dessous.

On va considérer deux opérateurs $A(t)$ et $\bar{A}(t)$, opérateurs d'annihilation et de création pseudo-bosoniques respectivement, comme étant des opérateurs invariants dépendants du temps associés à l'Hamiltonien dépendant du temps $H(t)$. On considère aussi deux opérateurs d'annihilation et de création pseudo-bosoniques $\bar{A}^+(t)$ et $A^+(t)$, respectivement, comme des opérateurs invariants associés à $H^+(t)$. Dans ce cas, l'opérateur métrique $\eta(t)$ dépend du temps et permet de relier les opérateurs invariants de $H(t)$ à ceux de $H^+(t)$ via la relation suivante

$$A(t) = \eta^{-1}(t) \bar{A}^+(t) \eta(t) \quad , \quad \bar{A}(t) = \eta^{-1}(t) A^+(t) \eta(t) . \quad (2.22)$$

Les invariants pseudo-bosoniques $A(t)$, $\bar{A}(t)$, $\bar{A}^+(t)$ et $A^+(t)$ vérifient la condition d'invariance (1.25)

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} = i[A(t), H(t)] , \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \bar{A}(t)}{\partial t} = i[\bar{A}(t), H(t)] , \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \bar{A}^+(t)}{\partial t} = i[\bar{A}^+(t), H^+(t)] , \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial A^+(t)}{\partial t} = i[A^+(t), H^+(t)] . \quad (2.26)$$

et les relations de commutations

$$[A(t), \bar{A}(t)] = [\bar{A}^+(t), A^+(t)] = 1. \quad (2.27)$$

et par conséquent, les états du vide $|\psi_0(t)\rangle$ et $|\phi_0(t)\rangle$ des opérateurs $A(t)$ et $\bar{A}^+(t)$, respectivement, sont liés comme

$$|\phi_0(t)\rangle = \eta(t) |\psi_0(t)\rangle . \quad (2.28)$$

Les deux opérateurs $A(t)$ et $\bar{A}^+(t)$ servent à la construction des états pseudo-cohérents dépendants du temps $|\psi_\alpha(t)\rangle$ et $|\phi_\alpha(t)\rangle$ de la manière suivante

(i) $|\psi_\alpha(t)\rangle$ ($|\phi_\alpha(t)\rangle$) sont des états propres de l'opérateur $A(t)$ ($\bar{A}^+(t)$)

$$A(t)|\psi_\alpha(t)\rangle = \alpha|\psi_\alpha(t)\rangle, \quad (2.29)$$

$$\bar{A}^+(t)|\phi_\alpha(t)\rangle = \alpha|\phi_\alpha(t)\rangle. \quad (2.30)$$

avec la valeur propre α qui est un paramètre complexe indépendant du temps.

(ii) les états $|\psi_\alpha(t)\rangle$ ($|\phi_\alpha(t)\rangle$) peuvent également être obtenus à partir de l'action de l'opérateur de déplacement $D^H(\alpha, t)$ ($D^{H^+}(\alpha, t)$) sur les états $|\psi_0(t)\rangle$ ($|\phi_0(t)\rangle$) comme

$$|\psi_\alpha(t)\rangle = D^H(\alpha, t)|\psi_0(t)\rangle, \quad (2.31)$$

$$|\phi_\alpha(t)\rangle = D^{H^+}(\alpha, t)|\phi_0(t)\rangle. \quad (2.32)$$

L'opérateur $D^{H^+}(\alpha, t)$ est le pseudo-adjoint de l'opérateur de déplacement $D^H(\alpha, t)$

$$D^H(\alpha, t) = \exp(\alpha\bar{A}(t) - \alpha^*A(t)) \quad (2.33)$$

et peut être obtenu à partir de la relation

$$D^{H^+}(\alpha, t) = \eta(t)D^H(\alpha, t)\eta^{-1}(t), \quad (2.34)$$

comme

$$D^{H^+}(\alpha, t) = \exp(\alpha A^+(t) - \alpha^*\bar{A}^+(t)). \quad (2.35)$$

Il est évident de noter, de la même manière que les propriétés (2.3-2.5), que lorsque $\langle\psi_0(t)|\eta(t)|\psi_0(t)\rangle = \mathbf{1}$, on obtient la condition de normalisation

$$\langle\psi_\alpha(t)|\eta(t)|\psi_\alpha(t)\rangle = \mathbf{1}, \quad (2.36)$$

et la résolution de l'identité

$$\frac{1}{\pi} \int \eta(t)|\psi_\alpha(t)\rangle \langle\psi_\alpha(t)| d\alpha^* d\alpha = \mathbf{I}. \quad (2.37)$$

2.5 Application : Hamiltonien de Swanson non-hermitique dépendant du temps

Nous allons traiter un exemple très étudié dans la littérature [47, 48, 49, 50] en utilisant la théorie des invariants pseudo-bosoniques : l'oscillateur de Swanson généralisé. En effet, considérons l'Hamiltonien de Swanson non-hermitique avec des coefficients dépendants du temps [51]

$$H(t) = \omega(t) \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right) + \beta(t) a^2 + \gamma(t) a^{+2}, \quad (2.38)$$

où $\omega(t)$, $\beta(t)$ et $\gamma(t)$ sont des paramètres complexes dépendants du temps.

Supposons que l'opérateur invariant pseudo-bosonique $A(t)$ s'écrit sous la forme linéaire en a et a^+ suivante

$$A(t) = \delta_1(t)a + \delta_2(t)a^+ + \delta_3(t), \quad (2.39)$$

où les paramètres $\delta_1(t)$, $\delta_2(t)$ et $\delta_3(t)$ sont réels et dépendants du temps. L'invariant (2.39) est évidemment non-hermitique lorsque $\delta_1(t) \neq \delta_2(t)$. Cette fois-ci les paramètres de $\eta(t)$ sont dépendants du temps. Ainsi on choisit $\eta(t)$ sous la forme suivante [21, 22, 51]

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \exp \left[2 \left(\epsilon(t) \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right) + \mu(t) a^2 + \mu^*(t) a^{+2} \right) \right], \\ &= \exp \left[\frac{1}{2} \vartheta_+(t) a^{+2} \right] \exp \left[\frac{1}{2} \ln \vartheta_0(t) \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right) \right] \exp \left[\frac{1}{2} \vartheta_-(t) a^2 \right], \end{aligned} \quad (2.40)$$

où les coefficients dépendants du temps sont

$$\begin{aligned} \vartheta_+(t) &= \frac{2(2\mu^*) \sinh \theta}{\theta \cosh \theta - 2\epsilon \sinh \theta} = -\zeta e^{-i\varphi}, \\ \vartheta_0(t) &= \left(\cosh \theta - \frac{2\epsilon}{\theta} \sinh \theta \right)^{-2} = \zeta^2 - \chi, \quad \theta = 2\sqrt{\epsilon^2 - 4|\mu|^2}, \\ \vartheta_-(t) &= \frac{2(2\mu) \sinh \theta}{\theta \cosh \theta - 2\epsilon \sinh \theta} = -\zeta e^{+i\varphi}, \\ \chi(t) &= -\frac{\cosh \theta + \frac{2\epsilon}{\theta} \sinh \theta}{\cosh \theta - \frac{2\epsilon}{\theta} \sinh \theta}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

En utilisant les transformations suivantes

$$\begin{cases} \exp \left[\frac{1}{2} \vartheta_- a^2 \right] a \exp \left[-\frac{1}{2} \vartheta_- a^2 \right] = a, \\ \exp \left[\frac{1}{2} \vartheta_+ a^{+2} \right] a \exp \left[-\frac{1}{2} \vartheta_+ a^{+2} \right] = a - \vartheta_+ a^+, \end{cases} \quad (2.42)$$

2.5 Application : Hamiltonien de Swanson non-hermitique dépendant du temps 29

$$\begin{cases} \exp \left[\frac{1}{2} \ln \vartheta_0 \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right) \right] a \exp \left[-\frac{1}{2} \ln \vartheta_0 \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{a}{\sqrt{\vartheta_0}}, \\ \exp \left[\frac{1}{2} \vartheta_+ a^{+2} \right] a^+ \exp \left[-\frac{1}{2} \vartheta_+ a^{+2} \right] = a^+, \end{cases} \quad (2.43)$$

on déduit

$$\begin{cases} \eta(t) a \eta^{-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\vartheta_0}} (a - \vartheta_+ a^+), \\ \eta(t) a^+ \eta^{-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\vartheta_0}} [a \vartheta_- - \chi a^+]. \end{cases} \quad (2.44)$$

L'opérateur $A(t)$ (2.39) est une intégrale du mouvement s'il satisfait la condition d'invariance (2.23), ce qui conduit à

$$\begin{cases} \dot{\delta}_1(t) = i(\omega \delta_1(t) - 2\beta \delta_2(t)), \\ \dot{\delta}_2(t) = i(2\gamma \delta_1(t) - \omega \delta_2(t)), \\ \dot{\delta}_3(t) = 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

On pose $\delta_3(t) = 0$. En exprimant les paramètres de $H(t)$ sous la forme suivante

$$\begin{cases} \omega = |\omega| \exp(i\varphi_\omega), \\ \beta = |\beta| \exp(i\varphi_\beta), \\ \gamma = |\gamma| \exp(i\varphi_\gamma), \end{cases} \quad (2.46)$$

puis en séparant Eq. (2.45) en partie réelle et partie imaginaire, nous trouvons les équations couplées suivantes pour les paramètres $\delta_1(t)$ et $\delta_2(t)$

$$\delta_1 |\omega| \cos \varphi_\omega - 2\delta_2 |\beta| \cos \varphi_\beta = 0, \quad (2.47)$$

$$2\delta_1 |\gamma| \cos \varphi_\gamma - \delta_2 |\omega| \cos \varphi_\omega = 0, \quad (2.48)$$

$$\delta_1(t) = \exp \int |\omega| \cos(\varphi_\omega) [\tan(\varphi_\beta) - \tan(\varphi_\omega)] dt', \quad (2.49)$$

$$\delta_2(t) = \exp \int |\omega| \cos(\varphi_\omega) [\tan(\varphi_\omega) - \tan(\varphi_\gamma)] dt'. \quad (2.50)$$

L'opérateur création $\bar{A}(t)$ sera déterminé à partir de la relation de la pseudo-hermiticité (2.22) et a la forme suivante

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{\sqrt{\vartheta_0}} [\delta_1(t) + \vartheta_+ \delta_2(t)] a^+ + \frac{1}{\sqrt{\vartheta_0}} [-\vartheta_- \delta_1(t) - \chi \delta_2(t)] a. \quad (2.51)$$

Sachant que les opérateurs $A(t)$ et $\bar{A}(t)$ sont, par hypothèse (2.27), des opérateurs d'annihilation et de création, cela conduit à

$$\delta_1^2(t) + \chi \delta_2^2(t) + (\vartheta_+ + \vartheta_-) \delta_1(t) \delta_2(t) = \sqrt{\vartheta_0}, \quad (2.52)$$

2.5 Application : Hamiltonien de Swanson non-hermitique dépendant du temps 30

en substituant Eq.(2.51) dans Eq.(2.24) et utilisant Eqs.(2.47) et (2.48), on obtient l'équation suivante

$$\begin{aligned} & (\chi\delta_2^2 - \delta_1^2) \frac{\dot{\vartheta}_0}{2\vartheta_0} - \delta_2^2 \dot{\chi} \\ & = 2(\delta_1^2 + \chi\delta_2^2) |\omega| \sin \varphi_\omega - 4\zeta \cos \varphi [\delta_1^2 |\gamma| \sin \varphi_\gamma + \delta_2^2 |\beta| \sin \varphi_\beta]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Par conséquent, la métrique sera déterminée à partir des Eqs.(2.49), (2.50) et (2.52) ainsi que de la solution de (2.53) et les coefficients dépendants du temps de l'Hamiltonien de départ (2.38).

En exprimant les opérateurs a et a^+ en fonction de x et p

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (x + ip) \quad \text{et} \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (x - ip), \quad (2.54)$$

on trouve les invariants $A(t)$ et $\bar{A}(t)$ qui s'écrivent sous une forme linéaire

$$A(t) = f(t)x + ig(t)p, \quad (2.55)$$

$$\bar{A}(t) = \tilde{f}(t)x - i\tilde{g}(t)p, \quad (2.56)$$

où

$$\begin{cases} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\delta_1(t) + \delta_2(t)], \\ g(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\delta_1(t) - \delta_2(t)], \end{cases} \quad (2.57a)$$

et

$$\begin{cases} \tilde{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\vartheta_0}} [(1 - \vartheta_-) \delta_1(t) + (\vartheta_+ - \chi) \delta_2(t)], \\ \tilde{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\vartheta_0}} [(1 + \vartheta_-) \delta_1(t) + (\vartheta_+ + \chi) \delta_2(t)], \end{cases} \quad (2.58)$$

on remarque que les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ sont réelles, tandis que $\tilde{f}(t)$ et $\tilde{g}(t)$ sont complexes.

La contrainte (2.52) se traduit par la forme suivante

$$f(t)\tilde{g}(t) + g(t)\tilde{f}(t) = 1. \quad (2.59)$$

Pour construire les états cohérents, il faudrait déterminer les états du vide associés à $A(t)$ et à $\bar{A}^+(t)$ en résolvant les équations aux valeurs propres

$$A(t)\psi_0(x, t) = 0, \quad (2.60)$$

$$\bar{A}^+(t)\phi_0(x, t) = 0, \quad (2.61)$$

2.5 Application : Hamiltonien de Swanson non-hermitique dépendant du temps 31

qui donnent

$$\psi_0(x, t) = \left(\frac{1}{2\pi\tilde{g}(t)g(t)} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{f(t)}{2g(t)} x^2 \right], \quad (2.62)$$

et

$$\phi_0(x, t) = \eta(t)\psi_0(x, t) = \left(\frac{1}{2\pi\tilde{g}(t)g(t)} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{\tilde{f}^*(t)}{2\tilde{g}^*(t)} x^2 \right], \quad (2.63)$$

notons que ces états sont normalisés

$$\langle \psi_0(x, t) | \eta(t) | \psi_0(x, t) \rangle = \int \phi_0^*(x, t) \psi_0(x, t) dx = 1. \quad (2.64)$$

Comme indiqué ci-dessus, nous construisons les états propres de $A(t)$ et $\bar{A}^+(t)$ en appliquant l'opérateur de déplacement sur les états $\psi_0(x, t)$ et $\phi_0(x, t)$, respectivement. Par conséquent, en exprimant les opérateurs de déplacement en termes de

$$\begin{cases} x = g\bar{A} + \tilde{g}A, \\ ip = \tilde{f}A - f\bar{A}, \end{cases} \quad (2.65)$$

on trouve

$$\begin{aligned} D(\alpha, t) &= \exp[i(\langle p \rangle_\eta x - \langle x \rangle_\eta p)] \\ &= \exp \left(-\frac{i}{2} \langle p \rangle_\eta \langle x \rangle_\eta \right) \exp(i \langle p \rangle_\eta x) \exp(-i \langle x \rangle_\eta p), \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$D^{H^+}(\alpha, t) = \exp \left(-\frac{i}{2} \langle p \rangle_\eta^* \langle x \rangle_\eta^* \right) \exp(i \langle p \rangle_\eta^* x) \exp(-i \langle x \rangle_\eta^* p), \quad (2.67)$$

où

$$\langle x \rangle_\eta = \langle \psi_\alpha | \eta x | \psi_\alpha \rangle = \alpha\tilde{g} + \alpha^*g, \quad (2.68)$$

$$i \langle p \rangle_\eta = i \langle \psi_\alpha | \eta p | \psi_\alpha \rangle = \alpha\tilde{f} - \alpha^*f, \quad (2.69)$$

Les états cohérents sont obtenus à l'aide des Eqs. (2.31) et (2.32)

$$\psi_\alpha(x, t) = \left(\frac{1}{2\pi\tilde{g}g} \right)^{\frac{1}{4}} D^H(\alpha, t) \exp \left[-\frac{f}{2g} x^2 \right], \quad (2.70)$$

$$\phi_\alpha(x, t) = \left(\frac{1}{2\pi\tilde{g}^*g} \right)^{\frac{1}{4}} D^{H^+}(\alpha, t) \exp \left[-\frac{\tilde{f}^*}{2\tilde{g}^*} x^2 \right], \quad (2.71)$$

et ont la forme

$$\psi_\alpha(x, t) = \left(\frac{1}{2\pi\tilde{g}g} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{i}{2} \langle p \rangle_\eta \langle x \rangle_\eta \right] \exp \left[i \langle p \rangle_\eta x - \frac{f}{2g} (x - \langle x \rangle_\eta)^2 \right], \quad (2.72)$$

2.5 Application : Hamiltonien de Swanson non-hermitique dépendant du temps 32

$$\phi_\alpha(x, t) = \left(\frac{1}{2\pi\tilde{g}^*g} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{i}{2} \langle p \rangle_\eta^* \langle x \rangle_\eta^* \right] \exp \left[i \langle p \rangle_\eta^* x - \frac{\tilde{f}^*}{2\tilde{g}^*} \left(x - \langle x \rangle_\eta^* \right)^2 \right]. \quad (2.73)$$

La structure des deux dernières formules sont les mêmes que les états cohérents bosoniques dans le cas hermitique, mais les propriétés des opérateurs de déplacement $D(\alpha, t)$ ($D^{H^+}(\alpha, t)$) et $\psi_\alpha(x, t)$ ($\phi_\alpha(x, t)$) sont différentes. Notez que $D(\alpha, t)$ ($D^{H^+}(\alpha, t)$) ne sont pas unitaires et par conséquent $\psi_\alpha(x, t)$ ($\phi_\alpha(x, t)$) ne sont pas normalisés, mais pseudo-normalisés

$$\int \psi_\alpha^*(x, t) \eta(t) \psi_\alpha(x, t) dx = \int \phi_\alpha^*(x, t) \psi_\alpha(x, t) dx = 1. \quad (2.74)$$

Pour ce système, la phase (1.23) est donnée par

$$\dot{\varphi}_\alpha = \int [\psi_\alpha^*(x, t) \eta(t) (i\partial_t - H(t)) \psi_\alpha(x, t)] dx = \int [\phi_\alpha^*(x, t) (i\partial_t - H(t)) \psi_\alpha(x, t)] dx. \quad (2.75)$$

En exprimant l'Hamiltonien $H(t)$ en fonction de x et p

$$H(t) = \frac{1}{2}(\omega - \beta - \gamma)p^2 + \frac{i}{2}(\beta - \gamma)(xp + px) + \frac{1}{2}(\omega + \beta + \gamma)x^2, \quad (2.76)$$

ensuite, après des calculs simples, on peut obtenir les expressions

$$\begin{aligned} \int \phi_\alpha^*(x, t) H(t) \psi_\alpha(x, t) dx &= \frac{1}{2}(\omega - \beta - \gamma) \langle p^2 \rangle_\eta + \frac{1}{2}(\omega + \beta + \gamma) \langle x^2 \rangle_\eta \\ &+ \frac{1}{2}(\beta - \gamma) \left[1 + 2i \langle p \rangle_\eta \langle x \rangle_\eta - 2\frac{f}{g}(\Delta x)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} i \int \phi_\alpha^*(x, t) \partial_t \psi_\alpha(x, t) dx &= -\frac{i}{4} \left(\frac{\dot{g}g + \tilde{g}\dot{g}}{g\tilde{g}} \right) + \frac{1}{2}(\omega + \beta + \gamma) \langle x \rangle_\eta^2 + \frac{1}{2}(\omega - \beta - \gamma) \langle p \rangle_\eta^2 \\ &+ i(\beta - \gamma) \langle p \rangle_\eta \langle x \rangle_\eta + i \left(\frac{f\dot{g} - \dot{f}g}{2g^2} \right) (\Delta x)^2, \end{aligned} \quad (2.78)$$

où

$$\begin{aligned} \Delta x &= \sqrt{\langle x^2 \rangle_\eta - \langle x \rangle_\eta^2}, \\ \langle \dot{p} \rangle_\eta &= -(\omega + \beta + \gamma) \langle x \rangle_\eta - i(\beta - \gamma) \langle p \rangle_\eta, \\ \langle \dot{x} \rangle_\eta &= (\omega - \beta - \gamma) \langle p \rangle_\eta + i(\beta - \gamma) \langle x \rangle_\eta, \end{aligned} \quad (2.79)$$

2.5 Application : Hamiltonien de Swanson non-hermitique dépendant du temps 33

enfin, après quelques simplifications on obtient la phase

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_\alpha = & -\frac{i}{4} \frac{\tilde{g}\dot{g} + \dot{\tilde{g}}g}{g\tilde{g}} + \frac{1}{2} \left[i \frac{f\dot{g} - \dot{f}g}{g^2} - (\omega + \beta + \gamma) + 2\frac{f}{g}(\beta - \gamma) \right] (\Delta x)^2 \\ & - \frac{1}{2}(\omega - \beta - \gamma) (\Delta p)^2 - \frac{1}{2}(\beta - \gamma). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Évaluons maintenant les incertitudes

$$(\Delta x)^2 = \tilde{g}g, \quad (2.81)$$

$$(\Delta p)^2 = \tilde{f}f, \quad (2.82)$$

qui sont des nombres complexes. A partir de l'équation (2.59) et après quelques simplifications, nous obtenons la phase suivante

$$\dot{\varphi}_\alpha = -\frac{(\omega - \beta - \gamma)}{4g\tilde{g}}. \quad (2.83)$$

Chapitre 3

Isolants Topologiques

3.1 Introduction

Les matériaux sont différenciés, selon leur conductivité, en deux types majeurs : les conducteurs et les isolants. La conductivité est déterminée à partir de la structure de la bande électronique décrite par la théorie des bandes des solides. Cette théorie exploite la symétrie translationnelle du cristal pour classer les états électroniques en fonction de leur impulsion cristalline (vecteur d'onde) k , définie dans une zone de Brillouin périodique, dont les solutions de l'équation de Schrödinger indépendante du temps

$$H |\psi\rangle = E |\psi\rangle, \quad (3.1)$$

s'écrivent sous la forme

$$|\psi_n(k)\rangle = e^{ik \cdot r} |u_n(k)\rangle, \quad (3.2)$$

où r est l'opérateur de position, les états de Bloch $|u_n(k)\rangle$ sont des états propres de l'Hamiltonien de Bloch $H(k)$ avec $H(k) |u_n(k)\rangle = E_n(k) |u_n(k)\rangle$. Les valeurs propres $E_n(k)$ définissent des bandes d'énergie qui forment collectivement la structure de bande, où n est l'indice de bande. Les isolants ont une bande de valence entièrement occupée et une bande de conduction inoccupée, ces deux bandes sont séparées par une bande interdite (énergie de gap) qui empêche les électrons de valence de passer à la bande de conduction. Pour les conducteurs, l'interpénétration des bandes de valence et de conduction implique qu'il n'existe pas d'énergie de gap. Leur bande de conduction est alors partiellement pleine.

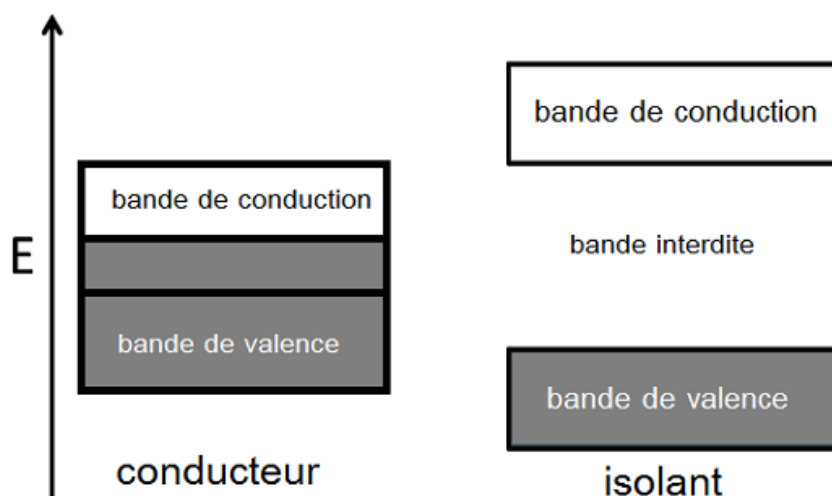


Figure 1 Représentation des bandes d'énergie des conducteurs et des isolants.

La découverte de l'effet Hall quantique, en 1980, a montré que la simple division en isolants et conducteurs (métaux) n'est pas la fin de l'histoire, pas même dans la théorie des bandes. Dans l'effet Hall quantique, un champ magnétique puissant limite le mouvement des électrons en volume (bulk), mais le même champ les force dans des états de bord délocalisés sur la surface. Un métal bidimensionnel dans un champ magnétique fort est donc un isolant en volume, mais conducteur en surface.

Au cours des dernières vingt années, l'étude théorique des systèmes artificiels a montré que le champ magnétique externe n'est pas nécessaire pour qu'un isolant ait des états de bord conducteurs robustes : au contraire, la topologie non triviale des bandes occupées est l'ingrédient crucial. Le nom d'*isolant topologique* [52, 53, 54] a été inventé pour de tels systèmes, et leur étude est devenue une branche florissante de la physique du solide dont une multitude de matériaux se sont révélés être des isolants topologiques tridimensionnels, les films minces et les fils quantiques se sont révélés aussi des isolants topologiques bidimensionnels et unidimensionnels.

Ces matériaux, c'est-à-dire les isolants topologiques, ont une structure de bande de type isolant mais des états conducteurs sur leur surface qui sont protégés par une symétrie d'inversion temporelle. Ces états de surface relient les bandes de conduction et de valence, comme illustré sur la **Figure 2b**.

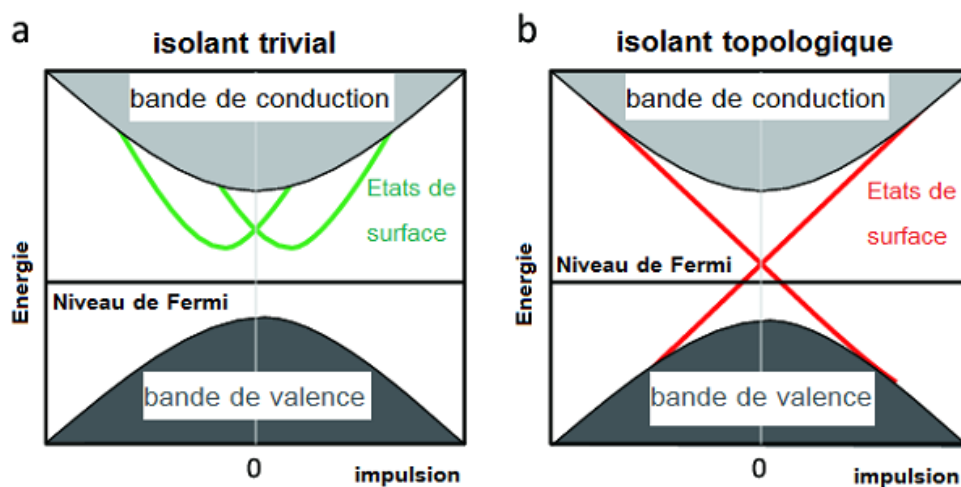


Figure 2 Représentation schématique des niveaux d'énergie de surface d'un cristal en 2D ou en 3D, en fonction de l'impulsion cristalline de surface.

a, isolant conventionnel ; **b**, isolant topologique.

L'intense intérêt pour les isolants topologiques a conduit à des résultats remarquables, comme le "tableau périodique des isolants topologiques", qui montre que c'est la dimensionnalité et les symétries de base d'un isolant qui décident s'il peut être un isolant ou non.

Parmi la grande variété de modèles topologiques, le modèle Su-Schrieffer-Heeger (SSH) [55] est le modèle le plus élémentaire et l'un des plus importants pour décrire la topologie des bandes en physique de la matière condensée. Le modèle SSH décrit des électrons sautillants sur une chaîne (réseau unidimensionnel), avec des amplitudes de saut décalées, comme le montre la **Figure 3**.



Figure 3 Géométrie du modèle SSH. Les cercles pleins (vides) sont des sites sur le sous-réseau A (B), chacun hébergeant un seul état. Les amplitudes de sauts ont décalées ; le saut intracellulaire ν (lignes fines) est différent du saut intercellulaire ω (lignes épaisses).

La chaîne se compose de N cellules unités, chaque cellule unité hébergeant deux sites, un sur le sous-réseau A et un sur le sous-réseau B . La cellule unité de ce réseau 1D comporte donc un couple AB . Les sites A sont reliés à leur voisin de gauche par le coefficient tunnel ω et à leur voisin de droite par le coefficient ν (et inversement pour les sites B). Les interactions entre les électrons sont négligées, et donc la dynamique de chaque électron est décrite par un Hamiltonien de la forme

$$H = \nu \sum_{n=1}^N (|n, B\rangle \langle n, A| + c.h.) + \omega \sum_{n=1}^{N-1} (|n+1, A\rangle \langle n, B| + c.h.), \quad (3.3)$$

où $|n, A\rangle$ et $|n, B\rangle$, avec $n \in \{1, 2, \dots, N\}$, désignent l'état de la chaîne où l'électron est sur la cellule unité n , dans le site du sous-réseau A , respectivement, B , et $c.h.$ représente le conjugué hermitique. La base $|n, A\rangle$ peut également être écrit comme $|n\rangle \otimes |A\rangle$.

En supposant maintenant que la chaîne forme une boucle (frontière périodique), cela nous permet d'effectuer une transformation de Fourier

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikn} |k\rangle, \quad (3.4)$$

qui permet d'écrire l'Hamiltonien (3.3) sous la forme

$$H = \sum_k (\nu + \omega e^{-ik}) |k, B\rangle \langle k, A| + (\nu + \omega e^{ik}) |k, A\rangle \langle k, B|, \quad (3.5)$$

ou sous une forme compacte

$$H = \sum_k |k\rangle H(k) \langle k|, \quad (3.6)$$

avec

$$H(k) = \begin{pmatrix} 0 & \nu + \omega e^{ik} \\ \nu + \omega e^{-ik} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

3.2 Invariants topologiques

On appelle un nombre entier (integer) caractérisant un Hamiltonien : un *invariant topologique*, ou invariant adiabatique, s'il ne peut pas changer sous des déformations adiabatiques. Deux Hamiltoniens ne sont pas adiabatiquement équivalents si leurs invariants topologiques diffèrent.

Les isolants topologiques se distinguent en :

- ▶ Isolants topologiques \mathbb{Z} : caractérisés par le nombre d'enroulement (winding number) ou le premier nombre de Chern,
- ▶ Isolants topologiques \mathbb{Z}_2 : possèdent un invariant \mathbb{Z}_2 .

3.2.1 Nombre d'enroulement (Winding number)

La phase géométrique de Berry [56] est un élément essentiel dans l'étude des phases topologiques de la matière. Cette phase est acquise par les états propres d'un système évoluant adiabatiquement dans l'espace des paramètres, et elle est reliée aux états propres de l'Hamiltonien décrivant ce système.

Pour un Hamiltonien $H(k)$ avec les valeurs propres $E_n(k)$ et les états propres $|u_n(k)\rangle$, la phase de Berry est définie comme suit

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \oint_c \mathcal{A}_n(k) dk, \quad (3.8)$$

où

$$\mathcal{A}_n(k) = -i \langle u_n(k) | \nabla_k | u_n(k) \rangle. \quad (3.9)$$

$\mathcal{A}_n(k)$ est la connexion de Berry. Le nombre d'enroulement est donné par

$$w = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{A}_n(k) dk. \quad (3.10)$$

3.2.2 Premier nombre de Chern

L'isolant topologique est étroitement lié à l'état de l'effet Hall quantique entier, sachant que dans l'effet Hall classique, un champ magnétique \mathbf{B} est tourné perpendiculairement à un plan de taille finie. Lorsque on applique un courant électrique et on considère qu'un seul électron circule dans le plan, disons la direction y . La conductance de Hall est calculée comme le rapport de la densité de courant au champ électrique,

$$\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}, \quad (3.11)$$

où ν est le facteur de remplissage, e est la charge élémentaire et h est la constante de Planck. Lorsque le champ magnétique est très fort et la température est suffisamment basse, le facteur ν est quantifié et prend des valeurs entières. Ce phénomène est appelé effet Hall quantique entier,

$$\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \quad (3.12)$$

le nombre quantique ν , également appelé *entier TKNN* ou *premier nombre de Chern* qui a été défini par Thouless, Kohmoto, Nightingale et den Nijs (TKNN) [57] pour expliquer la différence entre un état de Hall quantique et un isolant ordinaire. Le nombre de Chern peut être exprimé à partir de la phase de Berry [56] associée aux états de Bloch $|u_m(k)\rangle$ comme

$$\nu_m = \frac{1}{2\pi} \int d^2k \mathcal{F}_m, \quad (3.13)$$

où la courbure de Berry \mathcal{F}_m égale à

$$\mathcal{F}_m = \nabla \times \mathcal{A}_m. \quad (3.14)$$

Le nombre de Chern est un invariant topologique dans le sens qu'il ne change pas lorsque l'Hamiltonien varie en douceur (smoothly).

3.2.3 Invariant \mathbb{Z}_2

L'invariant \mathbb{Z}_2 est une distinction topologique qui différencie entre les isolants *pairs* et les isolants *impairs*. La classe paire '0' (qui inclut le vide) est communément appelée *isolant ordinaire* ou *isolant topologiquement trivial* et la classe impaire '1' est appelée *isolant topologique bidimensionnel* ou parfois *isolant de Hall quantique de spin (QSH)*. La structure $\mathbb{Z}_2 =$

$\{pair; impair\}$ nous dit ce qui se passe lorsque nous combinons différents isolants. Par exemple, deux isolants topologiques (impairs) se combinent en un isolant ordinaire (impair + impair = pair), mais la combinaison d'un isolant ordinaire et un autre topologique donne un isolant topologique (pair + impair = impair).

L'invariant \mathbb{Z}_2 est difficile à calculer. La définition originale de l'invariant est présentée dans [53, 58]. Une approche tout à fait différente, robuste et calculable, utilise la matrice de diffusion au lieu de l'Hamiltonien [59]. Une expression équivalente de l'invariant topologique \mathbb{Z}_2 pour les isolants de bande utilisant la connexion de Berry non-abélienne [60].

3.3 Classification

Dans les systèmes hermitiques, la classification des isolants topologiques en dix classes distinctes "classes AZ" qui ont été décrites à l'origine par Altland et Zirnbauer [61, 62], est désignée par la présence ou l'absence des trois symétries discrètes; symétrie d'inversion de temps \mathcal{T} , symétrie de conjugaison de charge \mathcal{C} et la chiralité \mathcal{S} . La définition de ces symétries pour les systèmes translationnels invariants est

$$\begin{aligned} \mathcal{T}H(-k)\mathcal{T}^{-1} &= H(k); & \mathcal{T}^2 &= \pm 1 \\ \mathcal{C}H(-k)\mathcal{C}^{-1} &= -H(k); & \mathcal{C}^2 &= \pm 1 \\ \mathcal{S}H(k)\mathcal{S}^{-1} &= -H(k); & \mathcal{S}^2 &= 1. \end{aligned} \tag{3.15}$$

La symétrie chirale \mathcal{S} sera également définie à partir de la combinaison de \mathcal{T} avec \mathcal{C} comme $\mathcal{S} = \mathcal{T}\mathcal{C}$, parfois appelée symétrie de sous-réseau. Puisque \mathcal{T} et \mathcal{C} sont anti-unitaires, \mathcal{S} est un opérateur unitaire. Si les opérateurs \mathcal{T} et \mathcal{C} sont tous deux non nuls, alors la symétrie chirale est présente, c'est-à-dire $\mathcal{S}^2 = 1$. D'un autre côté, si \mathcal{T} et \mathcal{C} sont tous deux égaux à zéro, alors \mathcal{S} peut être soit 0 (type A ou classe unitaire) ou 1 (type AIII ou classe unitaire chirale). En somme, il existe 10 classes de symétrie (Tableau 1). Pour plus de détails sur les classes de symétrie et la classification des isolants topologiques, voir [63, 64, 65, 66, 67].

AZ	Symétrie			Dimension d							
	\mathcal{T}	\mathcal{C}	\mathcal{S}	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	0	0	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}
AIII	0	0	1	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0
AI	1	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}
BDI	1	1	1	\mathbb{Z}	0	0	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2
D	0	1	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}_2
DIII	-1	1	1	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	\mathbb{Z}	0
AII	-1	0	0	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	\mathbb{Z}
CII	-1	-1	1	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0
C	0	-1	0	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0
CI	1	-1	1	0	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0

Tableau 1 Tableau périodique des isolants et supraconducteurs topologiques. Les dix classes de symétrie sont étiquetées en utilisant la notation de Altland et Zirnbauer (AZ) et sont spécifiées par la présence (± 1) ou l'absence (0) des trois symétries \mathcal{T} , \mathcal{C} et \mathcal{S} . Les combinaisons de classe de symétrie et de dimensionnalité qui supportent les invariants topologiques non triviaux sont indiquées par le type de l'invariant topologique (\mathbb{Z} ou \mathbb{Z}_2). Les classes qui ne prennent en charge que les isolateurs triviaux sont désignées par 0.

Cependant, plusieurs auteurs ont récemment réparti les Hamiltoniens non-hermitiques dans différents schémas de classification [68, 69, 70, 71, 72, 73, 74]. Aucune compréhension systématique par analogie avec le tableau périodique des isolants topologiques et des supraconducteurs (Tableau 1) n'a été obtenue jusqu'à présent. Nous étudions [75] la classification d'une classe d'isolants topologiques non-hermitiques en utilisant le schéma de classification AZ employé dans le scénario hermitique et vérifions si le tableau périodique standard (Tableau 1) est toujours valable pour cette classe de systèmes; c'est-à-dire les Hamiltoniens anti-hermitiques vérifiant $H = -H^\dagger$. Un Hamiltonien hermitique $H(k)$ est donné par l'Hamiltonien générique suivant

$$H(k) = h_x(k)\sigma_x + h_y(k)\sigma_y + h_z(k)\sigma_z, \quad (3.16)$$

où les composantes du vecteur $\vec{h} = (h_x(k), h_y(k), h_z(k))$ sont des fonctions réelles et $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$

sont les matrices de Pauli définies comme

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

en effectuant, sur les composantes de l'Hamiltonien (3.16), les transformations suivantes

$$h_x \rightarrow ih_1, \quad h_y \rightarrow ih_2, \quad h_z \rightarrow ih_3, \quad (3.18)$$

avec $h_1 \neq h_2 \neq h_3$ sont des éléments de $\{h_x, h_y, h_z\}$ donc il y a 6 combinaisons différentes. Eq.(3.16) devient

$$\mathcal{H}(k) = ih_1(k)\sigma_x + ih_2(k)\sigma_y + ih_3(k)\sigma_z, \quad (3.19)$$

on peut facilement vérifier que l'Hamiltonien transformé $\mathcal{H}(k)$ est anti-hermitique. On va calculer les valeurs propres de l'énergie des deux Hamiltoniens, commençant avec celles de $H(k)$

$$E_{\pm} = \pm\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}, \quad (3.20)$$

qui sont des valeurs réelles. Maintenant, l'Hamiltonien $\mathcal{H}(k)$

$$\mathcal{E}_{\pm} = \pm i\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}, \quad (3.21)$$

possède des valeurs propres purement imaginaires. Du fait que $h_1 \neq h_2 \neq h_3$ sont des éléments de $\{h_x, h_y, h_z\}$, on peut exprimer la relations entres E_{\pm} et \mathcal{E}_{\pm}

$$\mathcal{E}_{\pm} = \pm iE_{\pm} = \pm i\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}. \quad (3.22)$$

Les valeurs propres de l'énergie des deux Hamiltoniens sont identiques sauf qu'elles se produisent dans le plan réel pour l'Hamiltonien hermitique et dans le plan imaginaire pour l'Hamiltonien anti-hermitique. Revenons à l'Hamiltonien hermitique, en utilisant les coordonnées sphériques $(h_x(k), h_y(k), h_z(k)) = \mathbf{h}(k) (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ pour obtenir les vecteurs propres de $H(k)$, on trouve

$$\psi_- = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \psi_+ = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

on remarque que les vecteurs propres ne dépendent pas de la norme $\mathbf{h}(k)$. Le premier nombre de Chern de la bande inférieure de $H(k)$ est donné par

$$\nu = \frac{1}{4\pi} \int_{BZ} \frac{\vec{h}}{\mathbf{h}^3} \cdot \left(\frac{\partial \vec{h}}{\partial k_x} \times \frac{\partial \vec{h}}{\partial k_y} \right) d^2k. \quad (3.24)$$

Notre but est de comparer les caractéristiques topologiques de l'Hamiltonien original $H(k)$ et de l'Hamiltonien transformé $\mathcal{H}(k)$ et pour cela nous utilisons le tableau périodique bien connu des isolants topologiques pour les systèmes hermitiques (**Tableau 1**). Puisque l'Hamiltonien anti-hermitique peut avoir des symétries différentes de celles de l'hermitique, les classes de symétrie AZ du **Tableau 1** s'échangent. Nous soulignons que la classe de symétrie des deux Hamiltoniens peut également être la même.

3.4 Application : Hamiltonien de Su-Schrieffer-Heeger (SSH)

Pour illustrer la discussion ci-dessus, nous considérons un réseau périodique 1D décrit par l'Hamiltonien anti-hermitique suivant

$$\mathcal{H}(k) = i(\nu + \omega \cos k) \sigma_y + i\omega \sin k \sigma_x, \quad (3.25)$$

où ν et ω sont des nombres réels positifs. $\mathcal{H}(k)$ a une symétrie chirale, $\mathcal{S} = \sigma_z$, et possède des valeurs propres purement imaginaires

$$\mathcal{E}_{\pm} = \pm i \sqrt{(\nu + \omega e^{ik})(\nu + \omega e^{-ik})}. \quad (3.26)$$

Pour étudier les caractéristiques topologiques, nous mappons cet Hamiltonien en un Hamiltonien hermitique et examinons ensuite le **Tableau 1** afin de déterminer leurs classes topologiques. Introduisons les transformations suivantes

$$h_x \rightarrow -ih_y \text{ et } h_y \rightarrow -ih_x, \quad (3.27)$$

pour obtenir l'Hamiltonien hermitique Su-Schrieffer-Heeger (SSH) sous la forme

$$H(k) = (\nu + \omega \cos k) \sigma_x + \omega \sin k \sigma_y. \quad (3.28)$$

Il est facile de voir que la symétrie chirale de l'Hamiltonien anti-hermitique SSH (3.25) reste intacte sous les transformations ci-dessus (3.27). Les opérateurs de chiralité pour les deux Hamiltoniens sont les mêmes. Le spectre d'un Hamiltonien chiral est symétrique avec un respect à l'axe d'énergie zéro. De l'autre côté, la symétrie parité-temps ($\mathcal{PT} = \sigma_x \mathcal{K}$) de l'Hamiltonien

hermitique est brisée pour l'anti-hermitique. Selon le **Tableau 1**, le système hermitique SSH est dans la classe *AIII* et par conséquent il peut prendre un nombre topologique \mathbb{Z} . L'Hamiltonien (3.28) peut s'écrire

$$H(k) = \mathbf{h}(k)\sigma, \quad (3.29)$$

le chemin de $\mathbf{h}(k)$, à travers la zone de Brillouin, est un chemin fermé sur le plan (h_x, h_y) . En raison de la symétrie chirale, le vecteur $\mathbf{h}(k)$ est limité à se trouver sur le plan (h_x, h_y) ,

$$\sigma_z H(k) \sigma_z = -H(k) \Rightarrow h_z(k) = 0, \quad (3.30)$$

et donc $H(k)$ a un nombre d'enroulement entier bien défini autour de l'origine donné par [76]

$$w = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \left(\frac{\vec{h}}{\mathbf{h}} \times \frac{d}{dk} \frac{\vec{h}}{\mathbf{h}} \right)_z, \quad (3.31)$$

pour le modèle SSH, le nombre d'enroulement est 0 ou 1, selon les paramètres. Dans le cas trivial, $\nu > \omega$, le nombre d'enroulement est $w = 0$. Dans le cas topologique, lorsque $\nu < \omega$, on a $w = 1$. Pour l'Hamiltonien anti-hermitique (3.25), le vecteur $\mathbf{h}(k)$ se trouve dans le plan imaginaire (ih_y, ih_x) . Comparés au premier cas, les axes sont interchangeés jusqu'à la constante imaginaire i . Par conséquent, le nombre w ne change pas. Donc les transformations (3.27) n'ont pas changé les caractéristiques topologiques du système et le tableau périodique des isolants topologiques (**Tableau 1**) peut donc être utilisé pour les systèmes topologiques anti-hermitiques.

Conclusion

Cette thèse aborde différents problèmes non-hermitiques :

- Nous avons mis en évidence et corrigé les résultats erronés de la référence [26] trouvés lors de l'application de la notion des invariants aux systèmes \mathcal{PT} symétriques dépendants du temps,
- Nous avons introduit la pseudo- \mathcal{PT} symétrie pour l'étude de l'oscillateur forcé dépendant du temps,
- Nous avons construit des états cohérents pseudo-bosoniques dépendants du temps à l'aide des opérateurs invariants linéaires considérés comme opérateurs d'annihilation et de création ; l'Hamiltonien de Swanson non-hermitique dépendant du temps est traité comme un exemple illustratif,
- Nous avons présenté une transformation qui fait correspondre un Hamiltonien hermitique, topologiquement non-trivial, en un système anti-hermitique et nous avons montré que le tableau périodique des isolants topologiques peut donc être utilisé dans ce cas.

Bibliographie

- [1] C. M. Bender and S. Boettcher, Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having \mathcal{PT} Symmetry, Phys. Rev. Lett. **80**, 5243 (1998).
- [2] O. E. Alon, Dynamical symmetries of time-periodic Hamiltonians, Phys. Rev. A **66**, 013414 (2002).
- [3] A. de Sousa Dutra, M. B. Hott and V. G. C. S. dos Santos, Time-dependent non-Hermitian Hamiltonians with real energies, Europhys. Lett. **71**, 166 (2005).
- [4] C. Yuce, Time-dependent \mathcal{PT} symmetric problems, Phys. Lett. A **336**, 290 (2005).
- [5] C. Yuce, Complex spectrum of a spontaneously unbroken \mathcal{PT} symmetric Hamiltonian, arXiv :quant-ph/0703235v1.
- [6] N. Moiseyev, Crossing rule for a \mathcal{PT} -symmetric two-level time-periodic system, Phys. Rev. A **83**, 052125 (2011).
- [7] X. Luo, J. Huang, H. Zhong, X. Qin, Q. Xie, Y. S. Kivshar and C. Lee, Pseudo-Parity-Time Symmetry in Optical Systems, Phys. Rev. Lett. **110**, 243902 (2013).
- [8] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators (Springer-Verlag, Berlin, 1966).
- [9] Ingrid Rotter, A non-Hermitian Hamilton operator and the physics of open quantum systems, J. Phys. A : Math. Theor. **42**, 153001 (2009).
- [10] W. D. Heiss, The physics of exceptional points, J. Phys. A : Math. Theor. **45**, 444016 (2012).
- [11] C. M. Bender, Dorje C. Brody, and Hugh F. Jones, Complex Extension of Quantum Mechanics, Phys. Rev. Lett., **89**, 270401 (2002).
- [12] F. G. Scholz, H. B. Geyer and F. J. Hahne, Quasi-Hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle, Ann. Phys. **213**, 74 (1992).

-
- [13] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus \mathcal{PT} symmetry : The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian, J. Math. Phys. **43**, 205-214 (2002).
- [14] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus \mathcal{PT} symmetry.II. A complete characterization of non-Hermitian Hamiltonians with real spectrum, J. Math. Phys. **43**, 2814-2816 (2002).
- [15] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus \mathcal{PT} symmetry.III. Equivalence of Pseudo Hermiticity and the presence of antilinear symmetries, J. Math. Phys. **43**, 3944-3951 (2002).
- [16] A. Mostafazadeh, Time-Dependent Pseudo-Hermitian Hamiltonians Defining a Unitary Quantum System and Uniqueness of the Metric Operator, Phys Lett B. **650**, 208 (2007).
- [17] A. Mostafazadeh, Comment on “Time-dependent quasi-Hermitian Hamiltonians and the unitary quantum evolution”0711.0137v1 [quant-ph] (2007).
- [18] A. Mostafazadeh, Comment on “Reply to Comment on Time-dependent Quasi-Hermitian Hamiltonians and the Unitary Quantum Evolution”0711.1078v2 [quant-ph] (2007).
- [19] E. Schrödinger, Der stetige Übergang von der Mikro-zur Makromechanik, Naturwissenschaften **14**, 664 (1926).
- [20] B. Khantoul, A. Bounames and M. Maamache, On the pseudo-Hermitian invariant method for the time-dependent non-Hermitian Hamiltonians, Eur. Phys. J. Plus. **132**, 258 (2017).
- [21] M. Maamache, O.-K. Djeghiour, N. Mana and W. Koussa, Pseudo-invariants theory and real phases for systems with non-Hermitian time-dependent Hamiltonians, Eur. Phys. J. Plus **132**, 383 (2017).
- [22] W. Koussa, N. Mana, O.-K. Djeghiour and M. Maamache, The pseudo-Hermitian invariant operator and time-dependent non-Hermitian Hamiltonian exhibiting a $SU(1,1)$ and $SU(2)$ dynamical symmetry, J. Math. Phys. **59**, 072103 (2018).
- [23] W. Koussa and M. Maamache, Pseudo-Invariant Approach for a Particle in a Complex Time-Dependent Linear Potential, Int. J. Theor. Phys. **59**, 1490–1503 (2020).
- [24] H. R. Lewis and W. B. Riesenfeld, An Exact Quantum Theory of the Time-Dependent Harmonic Oscillator and of a Charged Particle in a Time-Dependent Electromagnetic Field, J. Math. Phys. **10**, 1458 (1969).

- [25] B.F. Ramos, I.A. Pedrosa and A. L. de Lima, Lewis and Riesenfeld approach to time-dependent non-Hermitian Hamiltonians having \mathcal{PT} symmetry, Eur. Phys. J. Plus **133**, 449 (2018).
- [26] I. A. Pedrosa, B. F. Ramos and K. Bakke, Quantum theory of a non-Hermitian time-dependent forced harmonic oscillator having \mathcal{PT} symmetry, Int. J. Mod. Phys. A **34**, 1950187 (2019).
- [27] N. Mana and M. Maamache, Comment on : Quantum theory of a non-Hermitian time-dependent forced harmonic oscillator having \mathcal{PT} symmetry, Int. J. Mod. Phys. A **35**, 2075001 (2020).
- [28] R. A. Brewster and J. D. Franson, Generalized delta functions and their use in quantum optics, J. Math. Phys. **59**, 012102 (2018).
- [29] R. J. Glauber, The Quantum Theory of Optical Coherence, Phys. Rev. **130** (1963) 2529; Photon Correlations, Phys. Rev. Lett. **10** (1963) 84; Coherent and Incoherent States of the Radiation Field, Phys. Rev. **131** (1963) 2766 .
- [30] J. R. Klauder, Continuous-Representation Theory. I. Postulates of Continuous-Representation Theory, J. Math. Phys. **4** (1963) 1055; Continuous-Representation Theory. II. Generalized Relation between Quantum and Classical Dynamics, J. Math. Phys. **4** (1963) 1058.
- [31] P. Carruthers and M. M. Nieto, Phase and angle variables in quantum mechanics, Rev. Mod. Phys. **40** (1968) 411.
- [32] M. M. Nieto and Jr. L. M. Simmons, Phys. Rev. Lett. **41** (1968) 207, *ibid.* Phys. Rev. **A19** (1979) 438, *ibid.* Phys. Rev. **D20** (1979) 1342, *ibid.* Phys. Rev. **D22** (1980) 391.
- [33] J. G. Hartley and J. R. Ray, Coherent states for the time-dependent harmonic oscillator, Phys. Rev. **D25** (1982) 382.
- [34] J. R. Ray, Minimum Uncertainty Coherent States for Certain Time-Dependent Systems, Phys. Rev. **D25** (1982) 3417.1963).
- [35] I. A. Malkin, V. I. Man'ko and D. A. Trifonov, Coherent states and transition probabilities in a time-dependent electromagnetic field, Phys. Rev. **D 2**, 1371 (1970).

-
- [36] I. A. Malkin, V.I. Man'ko and D.A. Trifonov, Linear adiabatic invariants and coherent states, *J. Math. Phys.* 14, 576-82 (1973).
- [37] V. V. Dodonov, I. A. Malkin and V. I. Man'ko, Integrals of the motion, Green functions and coherent states of dynamical systems, *Int. J. Theor. Phys.* 14, 37 (1975).
- [38] V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, Coherent states and the resonance of a quantum damped oscillator, *Phys. Rev. A* 20, 550 (1979).
- [39] V. G. Bagrov, D. M. Gitman, E. S. Macedo, and A. S. Pereira, Coherent states of inverse oscillators and related problems, *J. Phys. A : Math. Theor.* 46, 325305 (2013).
- [40] V. G. Bagrov, D. M. Gitman and A. S. Pereira, Coherent States of Systems with Quadratic Hamiltonians, *Braz. J. Phys.* 45, 369 (2015).
- [41] M. Maamache, A. Khatir, H. Lakehal and J. R. Choi, Analyzing generalized coherent states for a free particle, *Sci Rep* 6, 30538 (2016).
- [42] O. Cherbal, M. Drir, M. Maamache and D. A. Trifonov, Fermionic coherent states for pseudo-Hermitian two-level systems, *J. Phys. A : Math. Theor.* 40, 1835 (2007).
- [43] D. A. Trifonov, in *Differential Geometry, Complex Analysis and Mathematical Physics*, eds. K. Sekigawa et al. (W. Scientific 2009), pp. 241-250. arXiv :quant-ph/0902.3744
- [44] F. Bagarello, Pseudobosons, Riesz bases, and coherent states, *J. Math. Phys.* 51, 023531 (2010).
- [45] F. Bagarello, Linear pseudo-fermions, *J. Phys. A* 45, 444002 (2012).
- [46] F. Bagarello, Intertwining operators for non-self-adjoint Hamiltonians and bicoherent states, *J. Math. Phys.* 57, 103501 (2016).
- [47] H. F. Jones, Gauging non-Hermitian Hamiltonians, *J. Phys. A* 38, 1741 (2005).
- [48] B. Bagchi, C. Quesne and R. Roychoudhury, Pseudo-hermiticity and some consequences of a generalized quantum condition, *J. Phys. A* 38, L647 (2005).
- [49] D. P. Musumbu, H. B. Geyer and W. D. Heiss, The pseudo-Hermitian invariant operator and time-dependent non-Hermitian Hamiltonian exhibiting a $SU(1,1)$ and $SU(2)$ dynamical symmetry, *J. Phys. A* 40, F75 (2007).

-
- [50] C. Quesne, A non-Hermitian oscillator Hamiltonian and $su(1,1)$: a way towards generalizations, *J. Phys. A* **40**, F745 (2007).
- [51] A. Fring and M. H. Y. Moussa, Non-Hermitian Swanson model with a time-dependent metric, *Phys. Rev. A* **94**, 042128 (2016).
- [52] C. L. Kane and E. J. Mele, Quantum Spin Hall Effect in Graphene, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 226801 (2005).
- [53] C. L. Kane and E. J. Mele, \mathbb{Z}_2 Topological Order and the Quantum Spin Hall Effect, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 146802 (2005).
- [54] J. E. Moore and L. Balents, Topological invariants of time-reversal-invariant band structures, *Phys. Rev. B* **75**, 121306 R (2007).
- [55] W. P. Su, J. R. Schrieffer, and A. J. Heeger, Solitons in Polyacetylene, *Phys. Rev. Lett.* **42**, (1979).
- [56] M. V. Berry, Quantal phase-factors accompanying adiabatic changes, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **392**, 451 (1984).
- [57] D. J. Thouless, M. P. Nightingale and M. den Nijs, Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 405 (1982).
- [58] L. Fu and C. L. Kane, Time reversal polarization and a \mathbb{Z}_2 adiabatic spin pump, *Phys. Rev. B* **74**, 195312 (2006).
- [59] I. C. Fulga, F. Hassler and A. R. Akhmerov, Scattering theory of topological insulators and superconductors, *Phys. Rev. B* **85**, 165409 (2012).
- [60] R. Yu, X. L. Qi, A. Bernevig and Z. Fang, X. Dai, Equivalent expression of \mathbb{Z}_2 topological invariant for band insulators using the non-abelian Berry connection, *Phys. Rev. B* **84**, 075119 (2011).
- [61] M. R. Zirnbauer, Riemannian symmetric superspaces and their origin in random-matrix theory, *J. Math. Phys.* **37**, 4986 (1996).
- [62] A. Altland and M. R. Zirnbauer, Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures, *Phys. Rev. B* **55**, 1142 (1997).

-
- [63] A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki and A. W. W. Ludwig, Classification of topological insulators and superconductors in three spatial dimensions, *Phys. Rev. B* **78**, 195125 (2008).
- [64] A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki and A. W. W. Ludwig, Classification of topological insulators and superconductors, *AIP Conf. Proc.* 1134, 10 (2009).
- [65] Alexei Kitaev, Periodic table for topological insulators and superconductors, *AIP Conf. Proc.* **1134**, 22 (2009).
- [66] S. Ryu, A. P. Schnyder, A. Furusaki and A. W. W. Ludwig, Topological insulators and superconductors : tenfold way and dimensional hierarchy, *New J. Phys.* **12**, 065010 (2010).
- [67] C. K. Chiu, J. C. Y. Teo, A. P. Schnyder and S. Ryu, Classification of topological quantum matter with symmetries, *Rev. Mod. Phys.* 88, 035005 (2016).
- [68] Stefano Longhi, Non-Hermitian Gauged Topological Laser Arrays, *Ann. Phys. (Berlin)* 530 (2018) 1800023.
- [69] Z. Gong, Y. Ashida, K. Kawabata, K. Takasan, S. Higashikawa and M. Ueda, Topological Phases of Non-Hermitian Systems, *Phys. Rev. X* **8** (2018) 031079.
- [70] Simon Lieu, Topological symmetry classes for non-Hermitian models and connections to the bosonic Bogoliubov–de Gennes equation, *Phys. Rev. B* **98** (2018) 115135.
- [71] K. Kawabata, K. Shiozaki, M. Ueda and M. Sato, Symmetry and Topology in Non-Hermitian Physics, *Phys. Rev. X* **9** (2019) 041015.
- [72] H. Zhou and J. Y. Lee, Periodic table for topological bands with non-Hermitian symmetries, *Phys. Rev. B* **99** (2019) 235112.
- [73] CH. Liu, H. Jiang and Shu Chen, Topological classification of non-Hermitian systems with reflection symmetry, *Phys. Rev. B* **99** (2019) 125103.
- [74] CH. Liu and S. Chen, Topological classification of defects in non-Hermitian systems, *Phys. Rev. B* **100** (2019) 144106.
- [75] N. Mana, W. Koussa and M. Maamache, M. Tanisli and C. Yuce, Topological insulating phase for anti-Hermitian Hamiltonians, *Phys. Lett. A* 384 (2020) 126285.

- [76] J. K. Asbóth, L. Oroszlány and A. Palyi, A Short Course on Topological Insulators : Band Structure and Edge States in One and Two Dimensions, in : Lecture Notes in Physics, vol.919, Springer, Cham, 2016.

Articles

Comment on:
**Quantum theory of a non-Hermitian time-dependent
forced harmonic oscillator having \mathcal{PT} symmetry**

Naima Mana* and Mustapha Maamache†

*Laboratoire de Physique Quantique et Systèmes Dynamiques,
Faculté des Sciences, Université Ferhat Abbas Sétif 1, Sétif 19000, Algeria*
*na3ima.mn@hotmail.fr
†maamache@univ-setif.dz

Received 4 December 2019

Accepted 2 January 2020

Published 4 February 2020

Pedrosa *et al.*¹ have recently used a \mathcal{PT} symmetric linear invariant to study a unidimensional time-dependent \mathcal{PT} symmetric harmonic oscillator with a complex time-dependent \mathcal{PT} symmetric external force. We show in this comment that the normalization condition of the eigenfunctions of the invariant is not verified as claimed in Ref. 1. In order to obtain the normalization condition, we introduce a novel concept of the pseudoparity-time (pseudo- \mathcal{PT}) symmetry.

Keywords: \mathcal{PT} symmetric Hamiltonians; pseudo- \mathcal{PT} symmetry; linear invariant.

PACS number: 03.65.-w, 03.65.Ca, 03.65.Ge, 11.30.Er

\mathcal{PT} symmetric Hamiltonians describe a class of systems that, despite being non-Hermitian, generate real eigenvalues. Bender and Boettcher² revealed that the invariance under parity-time reversal transformation, i.e. $(\mathcal{PT})H(\mathcal{PT})^{-1} = H$, ensures the reality of the energy spectrum where the parity operator \mathcal{P} and the time-reversal operator \mathcal{T} have the effect: $\mathcal{P} \{p \rightarrow -p, x \rightarrow -x\}$, $\mathcal{T} \{p \rightarrow -p, x \rightarrow x, i \rightarrow -i\}$, x and p represent the position operator and the momentum operator, respectively, and i is the imaginary number. If the eigenfunctions of the \mathcal{PT} symmetric Hamiltonian are as well eigenfunctions of the \mathcal{PT} operator, the symmetry is said to be unbroken and the eigenvalues are real. Otherwise, the symmetry is said to be broken and the energy eigenvalues become complex. With the

*Corresponding author.

introduction of the concept of \mathcal{PT} symmetry, a \mathcal{PT} inner product was defined as³

$$\langle \phi_m(x) | \varphi_n(x) \rangle_{\mathcal{PT}} = \int dx [\mathcal{PT} \phi_m(x)] \varphi_n(x),$$

where $\mathcal{PT} \phi_m(x) = \phi_m^*(-x)$, thus

$$\langle \phi_m(x) | \varphi_n(x) \rangle_{\mathcal{PT}} = (-1)^m \delta_{mn}$$

it is clear that the \mathcal{PT} -norm is not positively defined. In addition to its action on the position operator, the momentum operator and the imaginary number i , the time-reversal operator \mathcal{T} has been defined for time-dependent Hamiltonians to change the sign of the time $t \rightarrow -t$. This definition of time-reversal operator \mathcal{T} has been used in many papers related to time-dependent systems.⁴⁻⁹

Using the Lewis Riesenfeld invariant,¹⁰ Pedrosa *et al.*¹ have solved the Schrödinger equation for a time-dependent \mathcal{PT} symmetric forced harmonic oscillator given by

$$H(t) = \frac{p^2}{2m(t)} + \frac{1}{2}m(t)\omega^2(t)x^2 + i\eta(t)x, \quad (1)$$

where the time-dependent real functions $m(t)$, $\omega(t)$ and $\eta(t)$ denote, respectively, the mass, frequency and the external driving force. Now, using the effects of the operators \mathcal{P} and \mathcal{T} , it is easily verified that the Hamiltonian is \mathcal{PT} symmetric providing that $m(t)$, $\omega(t)$ and $\eta(t)$ are symmetric under time-reversal.

They introduce a \mathcal{PT} symmetric linear invariant in the form

$$I(t) = \alpha(t)x + \beta(t)p + \gamma(t), \quad (2)$$

which satisfies the invariance condition

$$i \frac{\partial I^{\mathcal{PT}}(t)}{\partial t} = [H^{\mathcal{PT}}(t), I^{\mathcal{PT}}(t)] \quad (3)$$

and the \mathcal{PT} symmetry condition

$$I^{\mathcal{PT}}(t) = (\mathcal{PT})I(t)(\mathcal{PT})^{-1} = I(t) \quad (4)$$

where the complex time-dependent functions $\alpha(t)$, $\beta(t)$ and $\gamma(t)$ are to be determined from Eqs. (3) and (4).

They found that the eigenfunctions $\varphi_\lambda(x, t)$ of the invariant $I^{\mathcal{PT}}(t)$ and of the \mathcal{PT} operator are

$$\varphi_\lambda(x, t) = \sqrt{\frac{\sigma_\lambda}{2\pi\hbar\beta(t)}} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar\beta(t)} \left[(\lambda - \gamma(t))x - \frac{\alpha(t)}{2}x^2 \right] \right\}, \quad (5)$$

with $\sigma_\lambda = \pm 1$.

The authors of Ref. 1 claim that the eigenfunctions $\varphi_\lambda(x, t)$, (5) are normalized with Dirac's delta function, i.e.

$$\int dx \varphi_{\lambda'}^{\mathcal{PT}}(x, t) \varphi_\lambda(x, t) = \sigma_\lambda \delta(\lambda' - \lambda), \quad (6)$$

which is misleading that we emphasize by performing simple calculation. The invariant $I(t)$ (2) is \mathcal{PT} symmetric and provides

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= -\alpha^*(-t), \\ \beta(t) &= \beta^*(-t), \\ \gamma(t) &= \gamma^*(-t).\end{aligned}\tag{7}$$

The invariance equation (3) together with the \mathcal{PT} symmetry condition (7) leads to

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= -\alpha^*(t), \\ \beta(t) &= -\beta^*(t), \\ \gamma(t) &= \gamma^*(t).\end{aligned}\tag{8}$$

Then it is easily obtained that $\mathcal{PT}\varphi_\lambda(x, t) = \varphi_\lambda^*(-x, -t)$ is given as

$$\begin{aligned}\mathcal{PT}\varphi_\lambda(x, t) &= \sqrt{\frac{\sigma_\lambda}{2\pi\hbar\beta^*(-t)}} \exp\left\{\frac{-i}{\hbar\beta^*(-t)}\left[(\lambda - \gamma^*(-t))(-x) - \frac{\alpha^*(-t)}{2}x^2\right]\right\} \\ &= \sqrt{\frac{\sigma_\lambda}{2\pi\hbar\beta(t)}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar\beta(t)}\left[(\lambda - \gamma(t))x - \frac{\alpha(t)}{2}x^2\right]\right\} = \varphi_\lambda(x, t).\end{aligned}\tag{9}$$

Since $\mathcal{PT}\varphi_\lambda(x, t) = \varphi_\lambda(x, t)$, then the \mathcal{PT} inner product yields

$$\begin{aligned}&\int dx \varphi_{\lambda'}^{\mathcal{PT}}(x, t)\varphi_\lambda(x, t) \\ &= \int dx \frac{\sqrt{\sigma_{\lambda'}\sigma_\lambda}}{2\pi\hbar\beta(t)} \exp\left\{\frac{i}{\hbar\beta(t)}\left[(\lambda + \lambda' - 2\gamma(t))x - \alpha(t)x^2\right]\right\} \neq \sigma_\lambda\delta(\lambda' - \lambda).\end{aligned}\tag{10}$$

So, we note that the eigenfunctions of $I^{\mathcal{PT}}(t)$ and the \mathcal{PT} operator are not normalized with Dirac's delta function.

A way to obtain the normalization condition with Dirac's delta function is to introduce a novel concept of the pseudoparity-time (pseudo- \mathcal{PT}) symmetry which connects the non-Hermitian invariant $I(t)$ to its Hermitian conjugate $I^+(t) = \alpha^*(t)x + \beta^*(t)p + \gamma^*(t)$ as

$$(\mathcal{PT})I(t)(\mathcal{PT})^{-1} = I^+(t)\tag{11}$$

the pseudo- \mathcal{PT} condition (11) leads to

$$\begin{aligned}\alpha^*(t) &= -\alpha^*(-t), \\ \beta^*(t) &= \beta^*(-t), \\ \gamma^*(t) &= \gamma^*(-t)\end{aligned}\tag{12}$$

and consequently the eigenfunctions of $I^+(t)$ are obtained in the form

$$\varphi_{\lambda}^{I^+}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\beta^*(t)}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar\beta^*(t)}\left[(\lambda - \gamma^*(t))x - \frac{\alpha^*(t)}{2}x^2\right]\right\}. \quad (13)$$

It is easily verified, when using Eqs. (12), that the eigenfunctions (5) verify the following relation:

$$\mathcal{PT}\varphi_{\lambda}(x, t) = \varphi_{\lambda}^{I^+}(x, t).$$

Now, the inner product reads

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{\lambda'}^{I^+}(x, t) | \varphi_{\lambda}(x, t) \rangle &= \frac{1}{2\pi\hbar\beta(t)} \int dx \exp\left[\frac{i}{\hbar\beta(t)}(\lambda - \lambda')x\right] \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar\beta(t)} \int dx \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\Lambda - \Lambda')x\right], \end{aligned} \quad (14)$$

where $\Lambda = \frac{\lambda}{\beta(t)}$ is a complex parameter. Therefore this inner product is normalized with the generalized Dirac's delta function¹¹

$$\langle \varphi_{\lambda'}^{I^+}(x, t) | \varphi_{\lambda}(x, t) \rangle = \frac{1}{\beta(t)} \delta(\Lambda - \Lambda'). \quad (15)$$

In conclusion, we stress that the use of the pseudo-invariant approach^{12–15} is more appropriate to study time-dependent non-Hermitian systems.



References

1. I. A. Pedrosa, B. F. Ramos and K. Bakke, *Int. J. Mod. Phys. A* **34**, 1950187 (2019).
2. C. M. Bender and S. Boettcher, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5243 (1998).
3. C. M. Bender, D. C. Brody and H. F. Jones, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 270401 (2002).
4. O. E. Alon, *Phys. Rev. A* **66**, 013414 (2002).
5. A. de Sousa Dutra, M. B. Hott and V. G. C. S. dos Santos, *Europhys. Lett.* **71**, 166 (2005).
6. C. Yuce, *Phys. Lett. A* **336**, 290 (2005).
7. C. Yuce, Complex spectrum of a spontaneously unbroken PT symmetric Hamiltonian, arXiv:quant-ph/0703235v1.
8. N. Moiseyev, *Phys. Rev. A* **83**, 052125 (2011).
9. X. Luo, J. Huang, H. Zhong, X. Qin, Q. Xie, Y. S. Kivshar and C. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 243902 (2013).
10. H. R. Lewis and W. B. Riesenfeld, *J. Math. Phys.* **10**, 1458 (1969).
11. R. A. Brewster and J. D. Franson, *J. Math. Phys.* **59**, 012102 (2018).
12. B. Khantoul, A. Bounames and M. Maamache, *Eur. Phys. J. Plus* **132**, 258 (2017).
13. M. Maamache, O.-K. Djeghiour, N. Mana and W. Koussa, *Eur. Phys. J. Plus* **132**, 383 (2017).
14. W. Koussa, N. Mana, O.-K. Djeghiour and M. Maamache, *J. Math. Phys.* **59**, 072103 (2018).
15. W. Koussa and M. Maamache, Pseudo-invariant approach for a particle in a complex time-dependent linear potential, arXiv:1909.09940.

Time-dependent pseudo-bosonic coherent states

Cite as: J. Math. Phys. **61**, 102103 (2020); <https://doi.org/10.1063/5.0013723>

Submitted: 14 May 2020 . Accepted: 26 September 2020 . Published Online: 16 October 2020

Naima Mana , Omar Zaidi, and Mustapha Maamache 

COLLECTIONS

 This paper was selected as an Editor's Pick



[View Online](#)



[Export Citation](#)



[CrossMark](#)

Journal of
Mathematical Physics

Young Researcher Award

Recognizing the outstanding work of early career researchers

LEARN
MORE >>>

AIP
Publishing

Time-dependent pseudo-bosonic coherent states

Cite as: J. Math. Phys. 61, 102103 (2020); doi: 10.1063/5.0013723

Submitted: 14 May 2020 • Accepted: 26 September 2020 •

Published Online: 16 October 2020





View Online



Export Citation



CrossMark

Naima Mana,^{a)}  Omar Zaidi,^{b)} and Mustapha Maamache^{c)} 

AFFILIATIONS

Laboratoire de Physique Quantique et Systèmes Dynamiques, Faculté des Sciences, Université Ferhat Abbas Sétif 1, Sétif 19000, Algeria

^{a)}E-mail: na3ima_mn@hotmail.fr

^{b)}E-mail: zaidiomar32@yahoo.com

^{c)}Author to whom correspondence should be addressed: maamache@univ-setif.dz

ABSTRACT

In order to construct time-dependent pseudo-bosonic coherent states, first, we extend the non-Hermitian integrals of motion method to cases where the quantum systems are described by time-dependent non-Hermitian Hamiltonians; second, we introduce a pseudo-bosonic annihilation operator defined as a time-dependent non-Hermitian linear invariant. The pseudo-bosons operators are a pseudo-Hermitian extension of usual boson operators. In fact, they are obtained from the modification of usual boson commutation relations where the annihilation and creation operators are related to their adjoint operators via the bounded Hermitian invertible operator or metric operator. Thus, the pseudo-bosonic coherent states are just obtained as eigenstates of the pseudo-bosonic annihilation operator. As an illustration, we study the time-dependent non-Hermitian Swanson Hamiltonian and we compare the obtained results with those in the literature (Swanson model but time-independent).

Published under license by AIP Publishing. <https://doi.org/10.1063/5.0013723>

I. INTRODUCTION

Coherent states, or semi-classic states, are remarkable quantum states that were originally introduced in 1926 by Schrödinger for the Harmonic oscillator¹ where the mean values of the position and momentum operators in these states have properties close to the classical values of position $x_c(t)$ and momentum $p_c(t)$. Coherent states were later rediscovered in the early 1960s by Glauber, Klauder, and Sudarshan.^{2–4} Since then, coherent states have grown into an extremely rich domain that pervades almost every corner of physics and have also given rise to a flourishing topic in mathematics. We define coherent states as follows: a coherent state, also called Glauber state, is an eigenstate of the annihilation operator a with eigenvalues $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (1)$$

The coherent state is a concept used to connect quantum solutions to the classical ones.^{1–4} Now, we introduce the so-called displacement operator that generates the coherent states, similar to how the creation operator a^+ creates the occupation number states $|n\rangle$. The unitary displacement operator $d(\alpha)$ is defined by

$$d(\alpha) = \exp[\alpha^* a^+ - \alpha a], \quad (2)$$

and we can now create coherent states. The coherent state $|\alpha\rangle$ is generated from the vacuum $|0\rangle$ by the displacement operator $d(\alpha)$,

$$|\alpha\rangle = d(\alpha)|0\rangle. \quad (3)$$

These states are normalized but not orthogonal, and they are complete in the sense that they guarantee the following resolution of the identity operator I :

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha = I. \quad (4)$$

Using the method of linear non-Hermitian integrals of motion, different kinds of coherent states have been constructed where the creation and annihilation operators have been introduced as integrals of motion.^{5,6,8,9}

Usual coherent states are generally endowed with a self adjoint Hamiltonian (i.e., $H = H^\dagger$) and studied in the Hilbert space \mathcal{H} . The condition of Hermiticity of the Hamiltonian guarantees the unitarity of the evolution. However, other conditions preserve the unitarity of the evolution in the absence of the Hermiticity condition such as the quasi-Hermiticity,¹⁰ \mathcal{PT} symmetry,¹¹ or pseudo-Hermiticity.¹² It has been established¹² that a non-Hermitian Hamiltonian can be connected to its Hermitian conjugate, $H^\dagger = \eta H \eta^{-1}$, through a linear and Hermitian metric operator $\eta = \rho^\dagger \rho$, i.e., H is η -pseudo-Hermitian with respect to a positive-definite inner product defined by $\langle \cdot, \cdot \rangle_\eta = \langle \cdot | \eta | \cdot \rangle$. The Hamiltonian H can also be transformed to an equivalent Hermitian one by $h = \rho H \rho^{-1}$ with respect to the standard inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

More recently, considerable attention is paid to an alternative formalism for the description of non-Hermitian systems based on the concept of the so-called pseudo-bosons.¹³⁻¹⁸ Pseudo-bosons are a pseudo-Hermitian extension of usual bosons. In fact, they are a very particular modification of the standard canonical commutation rule $[A, A^\dagger] = 1$ and are obtained from the modification of boson commutation relations as follows:

$$[A, \bar{A}] = [\bar{A}^\dagger, A^\dagger] = 1, \quad (5)$$

where the operators A and \bar{A} are related to their adjoint operators \bar{A}^\dagger and A^\dagger via the bounded Hermitian invertible operator or metric operator η as

$$\begin{aligned} \bar{A}^\dagger &= \eta A \eta^{-1}, \\ A^\dagger &= \eta \bar{A} \eta^{-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

We will recall the general framework of the pseudo-bosons that originally has been proposed¹³ and developed in Ref. 14. Let \mathcal{H} be a given Hilbert space with the scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and related norm $\| \cdot \|$. We introduce a pair of operators A and \bar{A} acting on \mathcal{H} with domains $\mathcal{D}(A)$ and $\mathcal{D}(\bar{A})$, respectively, A^\dagger and \bar{A}^\dagger their adjoint, and let \mathcal{D} be a dense subspace of \mathcal{H} such that $A\mathcal{D}$ (or $A^\dagger\mathcal{D}$) $\subseteq \mathcal{D}$ and $\bar{A}\mathcal{D}$ (or $\bar{A}^\dagger\mathcal{D}$) $\subseteq \mathcal{D}$, where $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}(A \text{ or } A^\dagger) \cap \mathcal{D}(\bar{A} \text{ or } \bar{A}^\dagger)$. It is well known that A and \bar{A} are unbounded operators, and so they cannot be defined on all of \mathcal{H} . For this reason, the following assumptions¹⁴ are considered:

- (i) There exists a nonzero $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$ such that $|\psi_0\rangle$ is annihilated by A and belongs to the domain of all the powers of \bar{A} , $A|\psi_0\rangle = 0$
- (ii) There exists a nonzero $|\phi_0\rangle = \eta|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$ such that $|\phi_0\rangle$ is annihilated by \bar{A}^\dagger and belongs to the domain of all the powers of A^\dagger , $\bar{A}^\dagger|\phi_0\rangle = 0$ so that we can define in \mathcal{D} the vectors $|\psi_n\rangle$ and $|\phi_n\rangle = \eta|\psi_n\rangle$ and the related sets $F_\psi = \{|\psi_n\rangle, n \geq 0\}$, $F_\phi = \{|\phi_n\rangle = \eta|\psi_n\rangle, n \geq 0\}$. In particular, the choice of the normalization condition as $\langle\phi_0|\psi_0\rangle = \langle\psi_0|\eta|\psi_0\rangle = 1$ leads to

$$\langle\phi_m|\psi_n\rangle = \langle\psi_m|\eta|\psi_n\rangle = \delta_{mn}, \quad \forall m, n \geq 0, \quad (7)$$

so that F_ϕ and F_ψ are biorthogonal sets.

- (iii) $F_\psi = \{|\psi_n\rangle\}$ and $F_\phi = \{|\phi_n\rangle\}$ are bases for \mathcal{H} .

Under the above assumptions, we can introduce different kinds of pseudo-coherent states with similar properties. In connection with pseudo-bosons, the notion of pseudo-coherent states, originally introduced in Ref. 13 and then analyzed from a more mathematically oriented perspective in Ref. 14, has been considered as a non-Hermitian generalization of coherent states. The pseudo-coherent states for the pseudo-Hermitian boson systems are defined as eigenstates of the corresponding pseudo-boson annihilation operators A and \bar{A}^\dagger ,

$$A|\psi_\alpha\rangle = \alpha|\psi_\alpha\rangle, \quad \bar{A}^\dagger|\phi_\alpha\rangle = \alpha|\phi_\alpha\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad (8)$$

and satisfy the resolution of the identity

$$\frac{1}{\pi} \int_C |\phi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha| d\alpha^* d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_C |\psi_\alpha\rangle\langle\phi_\alpha| d\alpha^* d\alpha = I \quad (9)$$

with $|\phi_\alpha\rangle = \eta|\psi_\alpha\rangle$. These pseudo-coherent states $|\psi_\alpha\rangle$ and $|\phi_\alpha\rangle$ can be generated from the vacuum states $|\psi_0\rangle$ and $|\phi_0\rangle$, respectively, by the action of displacement operators $D(\alpha)$ and $\bar{D}^\dagger(\alpha)$, respectively,

$$D(\alpha) = \exp(\alpha\bar{A} - \alpha^* A), \quad \bar{D}^+(\alpha) = \exp(\alpha A^\dagger - \alpha^* \bar{A}^\dagger), \quad (10)$$

where $\bar{D}^+(\alpha) = \eta D(\alpha) \eta^{-1}$ is the complementary pseudo-unitary displacement operator of $D(\alpha)$.

While physical studies have always focused on time-independent non-Hermitian systems, furthermore, the systems with time-dependent non-Hermitian Hamiltonians have attracted the attention of physicists over the last few years.^{19–36} Nevertheless, by adapting the Lewis–Riesenfeld³⁷ approach to time-dependent non-Hermitian systems, the solutions of the time-dependent Schrödinger equation in terms of eigenstates of the pseudo-Hermitian invariant operator $I^{PH}(t)$ have been established.^{34,35} Very recently, using the integral motion operators, Koussa *et al.*³⁸ constructed the time-dependent pseudo-fermionic coherent states for the time-dependent pseudo-fermionic systems. To our knowledge, the pseudo-bosonic coherent states associated with the time-dependent non-Hermitian Hamiltonians admitting time-dependent invariants as annihilation operators with the time-dependent metric operators $\eta(t)$ were not addressed in the literature until now. This is due to the difficulty of dealing with the dynamics of time-dependent non-Hermitian Hamiltonians with the time-dependent metric operators $\eta(t)$, which remains an open problem so far.

In this paper, we address the problem of construction of time-dependent pseudo-bosonic annihilation (creation) operators and pseudo-bosonic coherent states. To do this, we use the pseudo-Hermitian extension invariant technique introduced in Refs. 30, 34, and 35.

In Sec. II, we briefly review, in Hermitian case, the relevant theory of a pair of invariants that are simultaneously ladder (lowering and raising) operators, which will allow us to construct directly the time-dependent coherent states. We also consider, in the non-Hermitian case, the problem of pseudo-bosonic operators and the construction of their eigenstates. In Sec. III, we deal with an explicit example, namely, the time-dependent Swanson Hamiltonian,³⁹ which, when expressed in terms of position x and momentum p , describes the generalized quadratic time-dependent non-Hermitian harmonic oscillator. This example was first studied, in the time-independent case, by Ahmed⁴⁰ and afterward has been extensively studied in the literature.^{41–46} The pseudo-integral of the motion is defined as being a time-dependent pseudo-bosonic operator whose related eigenstates are provided and commented. The pseudo-bosonic coherent states in the position representation for the Swanson non-Hermitian Hamiltonian are introduced and discussed. An outlook over the main results is given in the conclusion.

II. TIME-DEPENDENT PSEUDO-BOSONS AND PSEUDO-BOSONIC COHERENT STATES

A. Brief review on Malkin–Man’ko–Trifonov invariant method

Let us recall the main results of the Malkin–Man’ko–Trifonov linear invariant method.^{5,6} The quantum time evolution is described by the usual time-dependent Schrödinger equation ruled by the time-dependent Hermitian Hamiltonian $h(t)$. Two independent mutually Hermitian conjugate of linear integrals of motion, denoted as $A(t)$ and $A^\dagger(t)$ (non-Hermitian ladder invariant operators), have been originally introduced in Refs 5 and 6 and further developed in Ref. 8, associated with $h(t)$, are integrals of motion if they obey the equations

$$\frac{\partial \mathcal{A}(t)}{\partial t} - i[\mathcal{A}(t), h(t)] = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathcal{A}^\dagger(t)}{\partial t} - i[\mathcal{A}^\dagger(t), h(t)] = 0 \quad (12)$$

and satisfy the commutation relation

$$[\mathcal{A}(t), \mathcal{A}^\dagger(t)] = \mathbf{1}. \quad (13)$$

Then, the operators $\mathcal{A}(t)$ and $\mathcal{A}^\dagger(t)$ are just lowering and raising operators, respectively (ladder operators), and they serve in the construction of the time-dependent coherent states for the system under consideration. The eigenstates of $\mathcal{A}(t)$ are just the coherent states $|z, t\rangle$. To obtain the explicit expressions for these states, the following are considered:

- (i) One should solve the eigenequation $\mathcal{A}(t)|z, t\rangle = z|z, t\rangle$. Since $\mathcal{A}(t)$ is an invariant operator, the complex eigenvalue z does not depend on time t .
- (ii) The coherent states $|z, t\rangle$ may be constructed also from the $\mathcal{A}(t)$ -vacuum state $|0; t\rangle$: $\mathcal{A}(t)|0; t\rangle = 0$, by means of unitary operator $D(z, t) = e^{(z\mathcal{A}^\dagger(t) - z^*\mathcal{A}(t))}$, i.e., $|z, t\rangle = D(z, t)|0; t\rangle$.

In fact, the solutions of the Schrödinger equation

$$i \frac{\partial}{\partial t} |z, t\rangle_e = h(t)|z, t\rangle_e \quad (14)$$

can be written in terms of the eigenfunctions $|z, t\rangle$ of the operator $A(t)$ multiplied by a phase factor³⁷ as

$$|z, t\rangle_e = e^{i\varphi_z(t)}|z, t\rangle, \quad (15)$$

where the phase $\varphi_z(t)$ is given as

$$\dot{\varphi}_z(t) = \langle z, t | \left[i \frac{\partial}{\partial t} - h(t) \right] | z, t \rangle. \quad (16)$$

We would like to emphasize the difference between the Lewis–Riesenfeld invariant operator $I(t)$ and the linear integral of motion operator $\mathcal{A}(t)$: The ladder invariant operator $\mathcal{A}(t)$ is non-Hermitian, while the Lewis–Riesenfeld invariant operator $I(t)$ is Hermitian.

We point out that $h = h^\dagger$, then $\mathcal{A}(t)$ and $\mathcal{A}^\dagger(t)$ are both invariant operators for $h(t)$. However, as we show in Sec. II B, the situation is completely different in the case of time-dependent non-Hermitian Hamiltonians.

B. Time-dependent pseudo-bosons

We should like to consider the non-Hermitian time-dependent case in order to construct the time-dependent pseudo-coherent states. To do this, we should first find the integrals of motion that, of course, we will choose as annihilation and creation operators. Thus, the eigenfunctions of the annihilation operators are therefore the coherent states. On the basis of what has been studied in Refs. 5–9, and 47 and briefly recalled above, we introduce quantum non-Hermitian integrals of motion, namely, $A(t)$ and $\bar{A}(t)$ [$\bar{A}^+(t)$ and $A^+(t)$] associated with the time-dependent non-Hermitian Hamiltonian $H(t)$ [$H^+(t)$], verifying

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} - i[A(t), H(t)] = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \bar{A}(t)}{\partial t} - i[\bar{A}(t), H(t)] = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \bar{A}^+(t)}{\partial t} - i[\bar{A}^+(t), H^+(t)] = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial A^+(t)}{\partial t} - i[A^+(t), H^+(t)] = 0, \quad (20)$$

where the Hamiltonian $H(t)$ governs the following time-dependent Schrödinger equation:

$$i\partial_t|\Psi^H(t)\rangle = H(t)|\Psi^H(t)\rangle, \quad (21)$$

and the solutions $|\Psi^H(t)\rangle$ are equal to the eigenstates $|\psi(t)\rangle$ of the invariant operator $A(t)$ multiplied by a time-dependent global phase factor

$$|\Psi^H(t)\rangle = e^{i\varphi(t)}|\psi(t)\rangle. \quad (22)$$

In order to construct the pseudo-bosonic coherent states, we consider, in analogy with the time-independent case reported above, the invariant operators $A(t)$ and $\bar{A}(t)$ ($\bar{A}^+(t)$ and $A^+(t)$) as time-dependent pseudo-bosonic annihilation and creation operators associated with $H(t)$ ($H^+(t)$), respectively, that verify the so-called Weyl-Heisenberg commutation relations

$$[A(t), \bar{A}(t)] = [\bar{A}^+(t), A^+(t)] = 1. \quad (23)$$

These operators act on a dense subspace \mathcal{D} of \mathcal{H} . The operators $A(t)$ ($\bar{A}(t)$) associated with $H(t)$ are related to the operators $\bar{A}^+(t)$ ($A^+(t)$) associated with $H^+(t)$ via the time-dependent bounded Hermitian invertible operator $\eta(t)$ as

$$A(t) = \eta^{-1}(t)\bar{A}^+(t)\eta(t), \quad \bar{A}(t) = \eta^{-1}(t)A^+(t)\eta(t). \quad (24)$$

The vectors $\{|\psi_0(t)\rangle, |\phi_0(t)\rangle\} \in \mathcal{D}$ denote the vacuum of $\{A(t), \bar{A}^+(t)\}$, and consequently, the vacuum states $|\psi_0(t)\rangle$ and $|\phi_0(t)\rangle$ are related to each other as

$$|\phi_0(t)\rangle = \eta(t)|\psi_0(t)\rangle. \quad (25)$$

The family of semi-bounded operators $F_\psi = \{|\psi_n(t)\rangle = \bar{A}^n(t)|\psi_0(t)\rangle, n \geq 0\}$, $F_\phi = \{|\phi_n(t)\rangle = \eta(t)|\psi_n(t)\rangle = A^{+n}(t)|\phi_0(t)\rangle, n \geq 0\}$ constitute a basis for the Hilbert space \mathcal{H} . A simple reminder: F_ψ, F_ϕ are a basis of \mathcal{H} if any vectors $\{V_\psi, V_\phi\} \in \mathcal{H}$ admit a unique decomposition in terms of

the elements $\{|\psi_n(t)\rangle \text{ or } |\phi_n(t)\rangle = \eta(t)|\psi_n(t)\rangle\}$ of F_ψ or F_ϕ . The linear span of F_ψ or F_ϕ is an infinite dimensional vector space, which is dense in \mathcal{H} .

Note that $A(t)$ and $\bar{A}^+(t)$ serve to the construction of the time-dependent pseudo-coherent states $|\psi_\alpha(t)\rangle$ and $|\phi_\alpha(t)\rangle$, $\{|\psi_\alpha(t)\rangle, |\phi_\alpha(t)\rangle\} \in \mathcal{D}$ for all $\alpha \geq 0$, in the following way:

- (i) $|\psi_0(t)\rangle$ ($|\phi_0(t)\rangle = \eta(t)|\psi_0(t)\rangle$) $\in \mathcal{H}$ are vacuum states of the operator $A(t)$ [$\bar{A}^+(t)$] and belong to the domain of all the powers of $\bar{A}(t)$ [$A^+(t)$],

$$A(t)|\psi_0(t)\rangle = 0, \tag{26}$$

$$\bar{A}^+(t)|\phi_0(t)\rangle = 0. \tag{27}$$

In particular, the choice of the normalization condition as $\langle \psi_0(t) | \eta(t) | \psi_0(t) \rangle = 1$ leads to $\langle \psi_m(t) | \eta(t) | \psi_n(t) \rangle = \delta_{mn}$.

- (ii) $|\psi_\alpha(t)\rangle$ [$|\phi_\alpha(t)\rangle = \eta(t)|\psi_\alpha(t)\rangle$] are eigenstates of the operator $A(t)$ ($\bar{A}^+(t)$) with the complex time-independent eigenvalue α ,

$$A(t)|\psi_\alpha(t)\rangle = \alpha|\psi_\alpha(t)\rangle, \tag{28}$$

$$\bar{A}^+(t)|\phi_\alpha(t)\rangle = \alpha|\phi_\alpha(t)\rangle. \tag{29}$$

- (iii) $|\psi_\alpha(t)\rangle$ [$|\phi_\alpha(t)\rangle$] can also be obtained from the action of the bounded displacement operator $D^H(\alpha, t)$ ($D^{H^+}(\alpha, t)$) on the vacuum state $|\psi_0(t)\rangle$ ($|\phi_0(t)\rangle$) associated with $A(t)$ ($\bar{A}^+(t)$) as

$$\begin{aligned} |\psi_\alpha(t)\rangle &= D^H(\alpha, t)|\psi_0(t)\rangle \\ &= \exp(\alpha\bar{A}(t) - \alpha^*A(t))|\psi_0(t)\rangle, \end{aligned} \tag{30}$$

$$|\phi_\alpha(t)\rangle = D^{H^+}(\alpha, t)|\phi_0(t)\rangle. \tag{31}$$

Note that $D^{H^+}(\alpha, t)$ is the pseudo-adjoint of $D^H(\alpha, t)$, i.e.,

$$\begin{aligned} D^{H^+}(\alpha, t) &= \eta(t)D^H(\alpha, t)\eta^{-1}(t), \\ &= \exp(\alpha A^+(t) - \alpha^* \bar{A}^+(t)). \end{aligned} \tag{32}$$

Consequently, the normalization condition $\langle \psi_0(t) | \eta(t) | \psi_0(t) \rangle = 1$ leads to

$$\langle \psi_\alpha(t) | \eta(t) | \psi_\alpha(t) \rangle = 1 \tag{33}$$

and to resolution of the identity

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{C}} \eta(t) |\psi_\alpha(t)\rangle \langle \psi_\alpha(t) | d\alpha^* d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{C}} |\psi_\alpha(t)\rangle \langle \psi_\alpha(t) | \eta(t) d\alpha^* d\alpha = 1. \tag{34}$$

III. APPLICATION: THE GENERALIZED TIME-DEPENDENT SWANSON HAMILTONIAN

The system we investigate here is related to the non-Hermitian time-dependent Swanson Hamiltonian

$$H(t) = \omega(t) \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right) + \beta(t) a^2 + \gamma(t) a^{+2}, \tag{35}$$

where the coefficients $\omega(t)$, $\beta(t)$, and $\gamma(t)$ are the time-dependent complex parameters and where a and a^+ are the bosonic annihilation and creation operators of a light field mode verifying $[a, a^+] = 1$.

As a starting point, we take the time-dependent linear pseudo-bosonic invariant operator

$$A(t) = \delta_1(t)a + \delta_2(t)a^+ + \delta_3(t), \tag{36}$$

where $\delta_1(t)$, $\delta_2(t)$, and $\delta_3(t)$ are time-dependent real parameters. The invariant (36) is non-Hermitian when $\delta_1(t) \neq \delta_2(t)$.

In order to solve the time-dependent quasi-Hermiticity relation (24), we make an ansatz for the time-dependent metric $\eta(t)$,^{29,34,35}

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \exp\left[2\left(\epsilon(t)\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right) + \mu(t)a^2 + \mu^*(t)a^{+2}\right)\right], \\ &= \exp\left[\frac{1}{2}\vartheta_+(t)a^{+2}\right] \exp\left[\frac{1}{2}\ln \vartheta_0(t)\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right)\right] \exp\left[\frac{1}{2}\vartheta_-(t)a^2\right], \end{aligned} \tag{37}$$

with the time-dependent coefficients

$$\begin{aligned} \vartheta_+(t) &= \frac{2(2\mu^*) \sinh \theta}{\theta \cosh \theta - 2\epsilon \sinh \theta} = -\zeta(t)e^{-i\varphi(t)}, \\ \vartheta_0(t) &= \left(\cosh \theta - \frac{2\epsilon}{\theta} \sinh \theta\right)^{-2} = \zeta^2(t) - \chi(t), \quad \theta = 2\sqrt{\epsilon^2 - 4|\mu|^2}, \\ \vartheta_-(t) &= \frac{2(2\mu) \sinh \theta}{\theta \cosh \theta - 2\epsilon \sinh \theta} = -\zeta(t)e^{+i\varphi(t)}, \\ \chi(t) &= -\frac{\cosh \theta + \frac{2\epsilon}{\theta} \sinh \theta}{\cosh \theta - \frac{2\epsilon}{\theta} \sinh \theta}. \end{aligned} \tag{38}$$

Using the following transformations:

$$\begin{cases} \exp\left[\frac{1}{2}\vartheta_-(t)a^2\right] a \exp\left[-\frac{1}{2}\vartheta_-(t)a^2\right] = a, \\ \exp\left[\frac{1}{2}\vartheta_+(t)a^{+2}\right] a \exp\left[-\frac{1}{2}\vartheta_+(t)a^{+2}\right] = a - \vartheta_+ a^+, \end{cases} \tag{39}$$

$$\begin{cases} \exp\left[\frac{1}{2}\ln \vartheta_0(t)\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right)\right] a \exp\left[-\frac{1}{2}\ln \vartheta_0(t)\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{a}{\sqrt{\vartheta_0}}, \\ \exp\left[\frac{1}{2}\vartheta_+(t)a^{+2}\right] a^+ \exp\left[-\frac{1}{2}\vartheta_+(t)a^{+2}\right] = a^+, \end{cases} \tag{40}$$

we deduce

$$\begin{cases} \eta(t)a\eta^{-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\vartheta_0}}(a - \vartheta_+ a^+), \\ \eta(t)a^+\eta^{-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\vartheta_0}}(a\vartheta_- - \chi a^+). \end{cases} \tag{41}$$

The operator $A(t)$ is an integral of motion if it satisfies the invariance condition (17), which leads to

$$\begin{cases} \dot{\delta}_1(t) = i(\omega\delta_1(t) - 2\beta\delta_2(t)), \\ \dot{\delta}_2(t) = i(2\gamma\delta_1(t) - \omega\delta_2(t)), \\ \dot{\delta}_3(t) = 0. \end{cases} \tag{42}$$

Without loss of generality, we set $\delta_3(t) = 0$. By expressing the parameters of $H(t)$ as

$$\begin{cases} \omega(t) = |\omega(t)| \exp[i\varphi_\omega(t)], \\ \beta(t) = |\beta(t)| \exp[i\varphi_\beta(t)], \\ \gamma(t) = |\gamma(t)| \exp[i\varphi_\gamma(t)], \end{cases} \tag{43}$$

and then separating Eq. (42) into the real part and imaginary part, we find the following coupled equations for the parameters $\delta_1(t)$ and $\delta_2(t)$:

$$\delta_1|\omega| \cos \varphi_\omega - 2\delta_2|\beta| \cos \varphi_\beta = 0, \tag{44}$$

$$2\delta_1|\gamma| \cos \varphi_\gamma - \delta_2|\omega| \cos \varphi_\omega = 0, \tag{45}$$

$$\delta_1(t) = \exp\left[\int_0^t |\omega| \cos \varphi_\omega (\tan \varphi_\beta - \tan \varphi_\omega) dt'\right], \tag{46}$$

$$\delta_2(t) = \exp\left[\int_0^t |\omega| \cos \varphi_\omega (\tan \varphi_\omega - \tan \varphi_\gamma) dt'\right]. \tag{47}$$

Therefore, the operator $\bar{A}(t)$ determined from the quasi-Hermiticity relation (24) has the form

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{\sqrt{\vartheta_0}} [\delta_1 + \vartheta_+ \delta_2] a^+ - \frac{1}{\sqrt{\vartheta_0}} [\vartheta_- \delta_1 + \chi \delta_2] a. \tag{48}$$

Knowing that the operators $A(t)$ and $\bar{A}(t)$ are, by assumption (23), annihilation and creation operators, this leads to

$$\delta_1^2 + \chi \delta_2^2 + (\vartheta_+ + \vartheta_-) \delta_1 \delta_2 = \sqrt{\vartheta_0}. \tag{49}$$

The operator $\bar{A}(t)$ is also an integral of motion, i.e., obeying relation (18). Substituting representation (48) into (18) and using Eqs. (44) and (45), we obtain the following equation for the parameters $\zeta(t)$, $\chi(t)$, and $\varphi(t)$:

$$(\chi \delta_2^2 - \delta_1^2) \frac{\dot{\vartheta}_0}{2\vartheta_0} - \delta_2^2 \dot{\chi} = 2(\delta_1^2 + \chi \delta_2^2) |\omega| \sin \varphi_\omega - 4\zeta \cos \varphi [\delta_1^2 |\gamma| \sin \varphi_\gamma + \delta_2^2 |\beta| \sin \varphi_\beta]. \tag{50}$$

Therefore, the metric will be determined from Eqs. (46), (47) and (49) as well as the solution of (50) and the time dependent coefficients of the starting Hamiltonian (35).

A. Coherent states in position representation

Writing the annihilation and creation operators a and a^+ in terms of position and momentum components x and p ,

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip), \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - ip). \tag{51}$$

A subtle but important point is that all these operators are constants. Thus, we find the integrals of motion $A(t)$ and $\bar{A}(t)$ linear in x and p ,

$$A(t) = f(t)x + ig(t)p, \tag{52}$$

$$\bar{A}(t) = \tilde{f}(t)x - i\tilde{g}(t)p, \tag{53}$$

where

$$\begin{cases} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_1 + \delta_2), \\ g(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_1 - \delta_2) \end{cases} \tag{54}$$

and

$$\begin{cases} \tilde{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\vartheta_0}} [(1 - \vartheta_-)\delta_1 + (\vartheta_+ - \chi)\delta_2], \\ \tilde{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\vartheta_0}} [(1 + \vartheta_-)\delta_1 + (\vartheta_+ + \chi)\delta_2], \end{cases} \tag{55}$$

and we note that $f(t)$ and $g(t)$ are real functions, while $\tilde{f}(t)$ and $\tilde{g}(t)$ are the complex ones. Equation (49) reads

$$f(t)\tilde{g}(t) + g(t)\tilde{f}(t) = 1. \tag{56}$$

The definition of the vacuum state is needed for the construction of coherent states. Being written in the x -representation, Eqs. (26) and (27) become

$$\left(g \frac{\partial}{\partial x} + f x\right) \psi_0(x, t) = 0, \tag{57}$$

$$\left(-\tilde{g} \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{f} x\right) \phi_0(x, t) = 0 \tag{58}$$

whose solutions are

$$\psi_0(x, t) = \left(\frac{1}{2\pi\tilde{g}g}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{f}{2g}x^2\right], \tag{59}$$

$$\phi_0(x, t) = \left(\frac{1}{2\pi\tilde{g}^*g}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{\tilde{f}^*}{2\tilde{g}^*}x^2\right], \tag{60}$$

and both $\psi_0(x, t)$ and $\phi_0(x, t)$ belong to $L^2(\mathbb{R})$, which is the Hilbert space \mathcal{H} of the theory.

One can verify that these functions are not separately normalized,

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_0(x, t)|^2 dx = \left(\frac{1}{\tilde{g}\tilde{g}^*f^2}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{61}$$

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi_0(x, t)|^2 dx = \left(\frac{\sqrt{\tilde{g}\tilde{g}^*}}{g(\tilde{f}^*\tilde{g} + \tilde{f}\tilde{g}^*)}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{62}$$

but the scalar product between $\phi_0(x, t)$ and $\psi_0(x, t)$ is normalized,

$$\begin{aligned} \langle \phi_0(x, t) | \psi_0(x, t) \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \phi_0^*(x, t) \psi_0(x, t) dx \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\tilde{g}g}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{1}{2\tilde{g}g}x^2\right] dx = 1, \end{aligned} \tag{63}$$

which shows that $\{\phi_0(x, t), \psi_0(x, t)\}$ constitutes bi-orthogonal functions. In this case, since $\phi_0(x, t) = \eta(t)\psi_0(x, t)$, it is easy to understand that replacing $\langle \phi_0(x, t) | \psi_0(x, t) \rangle$ with $\langle \psi_0(x, t) | \eta(t)\psi_0(x, t) \rangle$ makes almost no difference.

As pointed above, we construct eigenstates of $A(t)$ and $\tilde{A}^+(t)$ as displaced ground states $\psi_0(x, t)$ and $\phi_0(x, t)$, respectively. Hence, by expressing the displacement operators in terms of

$$\begin{cases} x = g\tilde{A} + \tilde{g}A, \\ ip = \tilde{f}A - f\tilde{A}, \end{cases} \tag{64}$$

we find

$$\begin{aligned} D^H(\alpha, t) &= \exp[i(\langle p \rangle_{\eta} x - \langle x \rangle_{\eta} p)] \\ &= \exp\left(-\frac{i}{2}\langle p \rangle_{\eta} \langle x \rangle_{\eta}\right) \exp(i\langle p \rangle_{\eta} x) \exp(-i\langle x \rangle_{\eta} p), \end{aligned} \tag{65}$$

$$D^{H^*}(\alpha, t) = \exp\left(-\frac{i}{2}\langle p \rangle_{\eta}^* \langle x \rangle_{\eta}^*\right) \exp(i\langle p \rangle_{\eta}^* x) \exp(-i\langle x \rangle_{\eta}^* p), \tag{66}$$

where

$$\langle x \rangle_\eta = \langle \psi_\alpha | \eta x | \psi_\alpha \rangle = \alpha \tilde{g} + \alpha^* g, \quad (67)$$

$$i \langle p \rangle_\eta = i \langle \psi_\alpha | \eta p | \psi_\alpha \rangle = \alpha \tilde{f} - \alpha^* f. \quad (68)$$

The coherent states are obtained by the action of the displacement operators on the vacuum states (30) and (31) and have the form

$$\psi_\alpha(x, t) = \left(\frac{1}{2\pi\tilde{g}g} \right)^{\frac{1}{4}} D^H(\alpha, t) \exp\left[-\frac{f}{2g}x^2\right], \quad (69)$$

$$\phi_\alpha(x, t) = \left(\frac{1}{2\pi\tilde{g}^*g} \right)^{\frac{1}{4}} D^{H^*}(\alpha, t) \exp\left[-\frac{\tilde{f}^*}{2\tilde{g}^*}x^2\right] \quad (70)$$

and are equal to

$$\psi_\alpha(x, t) = \left(\frac{1}{2\pi\tilde{g}g} \right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{i}{2}\langle p \rangle_\eta \langle x \rangle_\eta\right] \exp\left[i\langle p \rangle_\eta x - \frac{f}{2g}(x - \langle x \rangle_\eta)^2\right], \quad (71)$$

$$\phi_\alpha(x, t) = \left(\frac{1}{2\pi\tilde{g}^*g} \right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{i}{2}\langle p \rangle_\eta^* \langle x \rangle_\eta^*\right] \exp\left[i\langle p \rangle_\eta^* x - \frac{\tilde{f}^*}{2\tilde{g}^*}(x - \langle x \rangle_\eta^*)^2\right]. \quad (72)$$

Let us note that $\mathcal{H} = L^2(R)$ and the domains $D(D^H) [D(D^{H^*})] \subset L^2(\mathbb{R})$. We have for the bounded invertible self adjoint operator $\eta(t)$: $\eta(t)^{1/2}\psi_0(x, t) \in D(D^H(\alpha, t))$, and the action of the operator $\eta(t)^{1/2}D^H(\alpha, t) = D_\eta^H(\alpha, t)$ on $\psi_0(x, t)$ belongs to the domain of D such that $\{\eta(t)^{1/2}\psi_0(x, t) \in L^2(R); D_\eta^H(\alpha, t)\psi_0(x, t) \in L^2(R)\}$.

The structures of the above two formulas are the same as the bosonic coherent states in the Hermitian case, but the properties of the displacement operators $D(\alpha, t) [D^{H^*}(\alpha, t)]$ and $\psi_\alpha(x, t) (\phi_\alpha(x, t))$ are different. Note that $D(\alpha, t) [D^{H^*}(\alpha, t)]$ are not unitary. Therefore, $\psi_\alpha(x, t) (\phi_\alpha(x, t))$ are not normalized, but they are pseudo-normalized,

$$\int_R \psi_\alpha^*(x, t)\eta(t)\psi_\alpha(x, t)dx = \int_R \phi_\alpha^*(x, t)\psi_\alpha(x, t)dx = 1. \quad (73)$$

B. Evolution of the coherent state $\psi_\alpha(x, t)$

For this system, the phase (22) is given as

$$\dot{\phi}_\alpha = \int_R [\psi_\alpha^*(x, t)\eta(t)(i\partial_t - H(t))\psi_\alpha(x, t)]dx = \int_R [\phi_\alpha^*(x, t)(i\partial_t - H(t))\psi_\alpha(x, t)]dx. \quad (74)$$

Expressing $H(t)$ in terms of x and p ,

$$H(t) = \frac{1}{2}(\omega - \beta - \gamma)p^2 + \frac{i}{2}(\beta - \gamma)(xp + px) + \frac{1}{2}(\omega + \beta + \gamma)x^2, \quad (75)$$

and after all calculations, one can obtain the expressions

$$\begin{aligned} \int_R \phi_\alpha^*(x, t)H(t)\psi_\alpha(x, t)dx &= \frac{1}{2}(\omega - \beta - \gamma)\langle p^2 \rangle_\eta + \frac{1}{2}(\omega + \beta + \gamma)\langle x^2 \rangle_\eta \\ &+ \frac{1}{2}(\beta - \gamma)\left[1 + 2i\langle p \rangle_\eta \langle x \rangle_\eta - 2\frac{f}{g}(\Delta x)^2\right], \end{aligned} \quad (76)$$

$$i \int_R \phi_\alpha^*(x, t) \partial_t \psi_\alpha(x, t) dx = -\frac{i}{4} \left(\frac{\tilde{g}g + \tilde{g}\dot{g}}{g\tilde{g}} \right) + \frac{1}{2} (\omega + \beta + \gamma) \langle x \rangle_\eta^2 + \frac{1}{2} (\omega - \beta - \gamma) \langle p \rangle_\eta^2 + i(\beta - \gamma) \langle p \rangle_\eta \langle x \rangle_\eta + i \left(\frac{f\dot{g} - \dot{f}g}{2g^2} \right) (\Delta x)^2, \quad (77)$$

where

$$\begin{aligned} \Delta x &= \sqrt{\langle x^2 \rangle_\eta - \langle x \rangle_\eta^2}, \\ \langle \dot{p} \rangle_\eta &= -(\omega + \beta + \gamma) \langle x \rangle_\eta - i(\beta - \gamma) \langle p \rangle_\eta, \\ \langle \dot{x} \rangle_\eta &= (\omega - \beta - \gamma) \langle p \rangle_\eta + i(\beta - \gamma) \langle x \rangle_\eta, \end{aligned} \quad (78)$$

and finally, after some simplifications, one obtain the phase

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_\alpha &= -\frac{i}{4} \frac{\tilde{g}g + \tilde{g}\dot{g}}{g\tilde{g}} + \frac{1}{2} \left[i \frac{f\dot{g} - \dot{f}g}{g^2} - (\omega + \beta + \gamma) + 2 \frac{f}{g} (\beta - \gamma) \right] (\Delta x)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} (\omega - \beta - \gamma) (\Delta p)^2 - \frac{1}{2} (\beta - \gamma). \end{aligned} \quad (79)$$

Let us now evaluate the uncertainty in position and the momentum. Hence, taking into account Eqs. (64), (66) and (67), we find, after some algebra, the position and momentum uncertainties

$$(\Delta x)^2 = \tilde{g}g, \quad (80)$$

$$(\Delta p)^2 = \tilde{f}f, \quad (81)$$

which are complex numbers. Using Eq. (56) and after executing a minor mathematical procedure, we get that the phase is

$$\dot{\varphi}_\alpha = -\frac{(\omega - \beta - \gamma)}{4g\tilde{g}}. \quad (82)$$

Before concluding, we can show that the system described by Hamiltonian (75) is linked to the generalized non-Hermitian Caldirola-Kanai Hamiltonian, denoted as $\tilde{H}(t)$, whose Hermitian equivalent has been reported in Ref. 50. This linking is performed via the time-dependent non-unitary transformation

$$V(t) = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^t \Omega(t') dt' (px + xp) \right] \text{ with } \Omega(t) = \beta(t) - \gamma(t), \quad (83)$$

which maps the Schrödinger equation (21) to

$$i\partial_t |\tilde{\Psi}(t)\rangle = \tilde{H}(t) |\tilde{\Psi}(t)\rangle, \quad (84)$$

where

$$\tilde{H}(t) = V(t)H(t)V^{-1}(t) - iV(t)\partial_t V^{-1}(t) \quad (85)$$

and

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = V(t)|\Psi^H(t)\rangle. \quad (86)$$

Indeed, this transformation changes the position x and the momentum p as

$$\begin{aligned} V(t)xV^{-1}(t) &= xe^{i\int_0^t \Omega(t') dt'}, \\ V(t)pV^{-1}(t) &= pe^{-i\int_0^t \Omega(t') dt'}, \end{aligned} \quad (87)$$

and its action on a wave function in the x -representation reads

$$V(t)_F(x, t) = \exp\left(\frac{i}{2} \int_0^t \Omega(t') dt'\right) F\left(x \exp\left(i \int_0^t \Omega(t') dt'\right), t\right), \quad (88)$$

and due to the above properties [Eqs. (87) and (88)], the transformed Hamiltonian $\tilde{H}(t)$ is of the form

$$\tilde{H}(t) = \frac{1}{2}(\omega - \beta - \gamma)p^2 e^{-2i \int_0^t \Omega(t') dt'} + \frac{1}{2}(\omega + \beta + \gamma)x^2 e^{2i \int_0^t \Omega(t') dt'}, \quad (89)$$

and its pseudo-bosonic coherent states are given as

$$\tilde{\Psi}_\alpha(t) = \exp(i\varphi_\alpha) \exp\left(\frac{i}{2} \int_0^t \Omega(t') dt'\right) \psi_\alpha[x \exp\left(i \int_0^t \Omega(t') dt'\right), t]. \quad (90)$$

Note that in the particular case where the complex parameters (ω , β , and γ) are time-independent, the Hamiltonian (89) is nothing but the non-Hermitian Caldirola–Kanai whose Hermitian equivalent is reported in Refs. 51 and 52 and its equation of motion

$$\ddot{x} + 2i(\beta - \gamma)\dot{x} + (\omega^2 - (\beta + \gamma)^2)x = 0 \quad (91)$$

describes the motion of a harmonic oscillator with a complex friction coefficient.

Moreover, if we drop the complex friction coefficient, this last equation will be reduced to that of an oscillator obtained, for example, from the Swanson Hamiltonian studied in Refs. 48 and 49. To see it, it suffices to perform the following non-unitary transformations:

$$WT = \exp\left[\frac{1}{2}\left(-v - i \ln\left\{\frac{\sqrt{\omega^2 - 4\beta\gamma}}{(\omega - \beta - \gamma)}\right\}\right)(px + xp)\right] \exp\left[-\frac{\beta - \gamma}{2(\omega - \beta - \gamma)}x^2\right]. \quad (92)$$

It can easily be shown that under these transformations, the coordinate and momentum operators change according to

$$TpT^{-1} = p - i\frac{\beta - \gamma}{(\omega - \beta - \gamma)}x, \quad TxT^{-1} = x,$$

$$WpW^{-1} = e^{-iv}e^{\ln\left\{\frac{\sqrt{\omega^2 - 4\beta\gamma}}{(\omega - \beta - \gamma)}\right\}}p, \quad WxW^{-1} = e^{iv}e^{-\ln\left\{\frac{\sqrt{\omega^2 - 4\beta\gamma}}{(\omega - \beta - \gamma)}\right\}}x.$$

An important property of the transformation W , the action of which on a wave function in the x -representation, reads

$$Wf(x) = \left(\frac{\sqrt{\omega^2 - 4\beta\gamma}}{(\omega - \beta - \gamma)}\right)^{-1/2} e^{\frac{1}{2}iv} f\left(e^{iv}e^{-\ln\left\{\frac{\sqrt{\omega^2 - 4\beta\gamma}}{(\omega - \beta - \gamma)}\right\}}x\right).$$

The Hamiltonian H (75) transforms according to

$$H \rightarrow H_{WT} = WHT^{-1}W^{-1} = \frac{1}{2}\sqrt{\omega^2 - 4\beta\gamma}(p^2 e^{-2iv} + x^2 e^{2iv}), \quad (93)$$

and consequently, for the time-independent Swanson model, our pseudo-coherent states $\psi_\alpha(x)$ are linked to the Bagarello bi-squeezed states $\tau_z(x)$ via the transformation WT as

$$\psi_\alpha(x) = T^{-1}W^{-1}\tau_z(x). \quad (94)$$

IV. CONCLUSION

In this paper, we have constructed the time-dependent pseudo-bosonic coherent state solutions of the Schrödinger equation for non-Hermitian Hamiltonians. Our construction of pseudo-bosonic coherent states is based on the introduction of the time-dependent

pseudo-bosonic creation and annihilation operators subjected to the time-dependent metric such that the latter are integrals of motion. These pseudo-bosonic coherent states form a quasi-normalized and quasi-overcomplete set of states in the Hilbert space and are eigenfunctions of the introduced annihilation operators. As an illustration, we have treated in detail the non-Hermitian time-dependent Swanson Hamiltonian. Thus, we have introduced a set of linear integrals of motion that are pseudo-creation and pseudo-annihilation operators. With the help of these operators, we constructed, in the position-representation, pseudo-bosonic coherent states as the eigenfunctions of the introduced pseudo-annihilation operators. We have determined the associated phase of the evolved coherent states solution of the Schrödinger equation.

DATA AVAILABILITY

Data sharing is not applicable to this article as no new data were created or analyzed in this study.

REFERENCES

- ¹E. Schrödinger, "Der stetige Übergang von der Mikro-zur Makromechanik," *Naturwissenschaften* **14**, 664 (1926).
- ²R. J. Glauber, "The quantum theory of optical coherence," *Phys. Rev.* **130**, 2529 (1963); "Photon correlations," *Phys. Rev. Lett.* **10**, 84 (1963); "Coherent and incoherent states of the radiation field," **131**, 2766 (1963).
- ³J. R. Klauder, "Continuous-representation theory. I. Postulates of continuous-representation theory," *J. Math. Phys.* **4**, 1055 (1963); "Continuous-representation theory. II. Generalized relation between quantum and classical dynamics," **4**, 1058 (1963).
- ⁴E. C. G. Sudarshan, "Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams," *Phys. Rev. Lett.* **10**, 277 (1963).
- ⁵I. A. Malkin, V. I. Man'ko, and D. A. Trifonov, "Coherent states and transition probabilities in a time-dependent electromagnetic field," *Phys. Rev. D* **2**, 1371 (1970).
- ⁶I. A. Malkin, V. I. Man'ko, and D. A. Trifonov, "Linear adiabatic invariants and coherent states," *J. Math. Phys.* **14**, 576 (1973).
- ⁷V. V. Dodonov, I. A. Malkin, and V. I. Man'ko, "Integrals of the motion, Green functions and coherent states of dynamical systems," *Int. J. Theor. Phys.* **14**, 37 (1975).
- ⁸V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, "Coherent states and the resonance of a quantum damped oscillator," *Phys. Rev. A* **20**, 550 (1979).
- ⁹V. G. Bagrov, D. M. Gitman, E. S. Macedo, and A. S. Pereira, "Coherent states of inverse oscillators and related problems," *J. Phys. A: Math. Theor.* **46**, 325305 (2013).
- ¹⁰F. G. Scholz, H. B. Geyer, and F. J. Hahne, "Quasi-Hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle," *Ann. Phys.* **213**, 74 (1992).
- ¹¹C. M. Bender, "Making sense of non-hermitian Hamiltonians," *Rep. Prog. Phys.* **70**, 947 (2007).
- ¹²A. Mostafazadeh, "Pseudo-Hermitian representation of quantum mechanics," *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **07**, 1191 (2010).
- ¹³D. A. Trifonov, "Pseudo-boson coherent and Fock states," in *Differential Geometry, Complex Analysis and Mathematical Physics*, edited by K. Sekigawa *et al.* (World Scientific, Singapore, 2009), pp. 241–250; [arXiv:0902.3744](https://arxiv.org/abs/0902.3744).
- ¹⁴F. Bagarello, "Pseudobosons, Riesz bases, and coherent states," *J. Math. Phys.* **51**, 023531 (2010).
- ¹⁵F. Bagarello, "(Regular) pseudo-bosons versus boson," *J. Phys. A: Math. Gen.* **44**, 015205 (2011).
- ¹⁶F. Bagarello, "Linear pseudo-fermions," *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**, 444002 (2012).
- ¹⁷F. Bagarello, "Intertwining operators for non-self-adjoint Hamiltonians and bicoherent states," *J. Math. Phys.* **57**, 103501 (2016).
- ¹⁸F. Bagarello and A. Fring, "From pseudo-bosons to pseudo-Hermiticity via multiple generalized Bogoliubov transformations," *Int. J. Mod. Phys. B* **31**, 1750085 (2017).
- ¹⁹C. Figueira de Morisson Faria and A. Fring, "Time evolution of non-Hermitian Hamiltonian systems," *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 9269 (2006).
- ²⁰C. Figueira de Morisson Faria and A. Fring, "Non-Hermitian Hamiltonians with real eigenvalues coupled to electric fields: From the time-independent to the time-dependent quantum mechanical formulation," *Laser Phys.* **17**, 424 (2007).
- ²¹A. Mostafazadeh, "Time-dependent pseudo-Hermitian Hamiltonians defining a unitary quantum system and uniqueness of the metric operator," *Phys. Lett. B* **650**, 208 (2007).
- ²²M. Znojil, "Time-dependent version of crypto-Hermitian quantum theory," *Phys. Rev. D* **78**, 085003 (2008).
- ²³M. Znojil, "Three-Hilbert-space formulation of quantum mechanics," *SIGMA* **5**, 001 (2009).
- ²⁴H. Bila, "Adiabatic time-dependent metrics in \mathcal{PT} -symmetric quantum theories," [arXiv:0902.0474](https://arxiv.org/abs/0902.0474).
- ²⁵J. Gong and Q.-h. Wang, "Geometric phase in \mathcal{PT} -symmetric quantum mechanics," *Phys. Rev. A* **82**, 012103 (2010).
- ²⁶J. Gong and Q.-h. Wang, "Time-dependent \mathcal{PT} -symmetric quantum mechanics," *J. Phys. A: Math. Theor.* **46**, 485302 (2013).
- ²⁷M. Maamache, "Periodic pseudo-Hermitian Hamiltonian: Nonadiabatic geometric phase," *Phys. Rev. A* **92**, 032106 (2015).
- ²⁸A. Fring and M. H. Y. Moussa, "Unitary quantum evolution for time-dependent quasi-Hermitian systems with non-observable Hamiltonians," *Phys. Rev. A* **93**, 042114 (2016).
- ²⁹A. Fring and M. H. Y. Moussa, "Non-Hermitian Swanson model with a time-dependent metric," *Phys. Rev. A* **94**, 042128 (2016).
- ³⁰B. Khantoul, A. Bounames, and M. Maamache, "On the invariant method for the time-dependent non-Hermitian Hamiltonians," *Eur. Phys. J. Plus* **132**, 258 (2017).
- ³¹A. Fring and T. Frith, "Exact analytical solutions for time-dependent Hermitian Hamiltonian systems from static unobservable non-Hermitian Hamiltonians," *Phys. Rev. A* **95**, 010102 (2017).
- ³²F. S. Luiz, M. A. Pontes, and M. H. Y. Moussa, "Unitarity of the time-evolution and observability of non-Hermitian Hamiltonians for time-dependent Dyson maps," *Phys. Scr.* **95**, 065211 (2020).
- ³³F. S. Luiz, M. A. Pontes, and M. H. Y. Moussa, "Gauge linked time-dependent non-Hermitian Hamiltonians," [arXiv:1703.01451](https://arxiv.org/abs/1703.01451).
- ³⁴M. Maamache, O. Kaltoum Djeghiour, N. Mana, and W. Koussa, "Pseudo-invariants theory and real phases for systems with non-Hermitian time-dependent Hamiltonians," *Eur. Phys. J. Plus* **132**, 383 (2017).
- ³⁵W. Koussa, N. Mana, O. K. Djeghiour, and M. Maamache, "The pseudo Hermitian invariant operator and time-dependent non-Hermitian Hamiltonian exhibiting a $SU(1, 1)$ and $SU(2)$ dynamical symmetry," *J. Math. Phys.* **59**, 072103 (2018).
- ³⁶M. Maamache, "Non-unitary transformation of quantum time-dependent non-Hermitian systems," *Acta Polytech.* **57**, 424 (2017).
- ³⁷H. R. Lewis and W. B. Riesenfeld, "An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field," *J. Math. Phys.* **10**, 1458 (1969).

- ³⁸W. Koussa, M. Attia, and M. Maamache, "Pseudo-fermionic coherent states with time-dependent metric," *J. Math. Phys.* **61**, 042101 (2020).
- ³⁹M. S. Swanson, "Transition elements for a non-Hermitian quadratic Hamiltonian," *J. Math. Phys.* **45**, 585 (2004).
- ⁴⁰Z. Ahmed, "Pseudo-Hermiticity of Hamiltonians under gauge-like transformation: Real spectrum of non-Hermitian Hamiltonians," *Phys. Lett. A* **294**, 287 (2002).
- ⁴¹H. F. Jones, "On pseudo-Hermitian Hamiltonians and their Hermitian counterparts," *J. Phys. A: Math. Theor.* **38**, 1741 (2005).
- ⁴²B. Bagchi, C. Quesne, and R. Roychoudhury, "Pseudo-Hermiticity and some consequences of a generalized quantum condition," *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, L647 (2005).
- ⁴³D. P. Musumbu, H. B. Geyer, and W. D. Heiss, "Choice of a metric for the non-Hermitian oscillator," *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, F75 (2007).
- ⁴⁴C. Quesne, "Non-Hermitian oscillator Hamiltonian and $SU(1, 1)$: A way towards generalizations," *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, F745 (2007).
- ⁴⁵A. Sinha and P. Roy, "Generalized Swanson models and their solutions," *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 10599 (2007).
- ⁴⁶E.-M. Graefe, H. J. Korsch, A. Rush, and R. Schubert, "Classical and quantum dynamics in the (non-Hermitian) Swanson oscillator," *J. Phys. A: Math. Theor.* **48**, 055301 (2015).
- ⁴⁷M. Maamache, Y. Bouguerra, and J. R. Choi, "Time behavior of a Gaussian wave packet accompanying the generalized coherent state for the inverted oscillator," *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2016**, 063A01.
- ⁴⁸F. Bagarello, F. Gargano, and S. Spagnolo, "Bi-squeezed states arising from pseudo-bosons," *J. Phys. A: Math. Theor.* **51**, 455204 (2018).
- ⁴⁹F. Bagarello, F. Gargano, and S. Spagnolo, "Two-dimensional non commutative Swanson model and its bi-coherent states," in *Geometric Methods in Physics, XXXVI*, Trends in Mathematics, edited by P. Kielanowski, A. Odziejewicz, and E. Previato (Birkhäuser, 2019), pp. 9–19.
- ⁵⁰M. Maamache, J.-P. Provost, and G. Vallée, "Unitary equivalence and phase properties of the quantum parametric and generalized harmonic oscillators," *Phys. Rev. A* **59**, 1777 (1999).
- ⁵¹P. Caldirola, "Forze no-conservative nella meccanica quantistica," *Nuovo Cimento* **18**, 393 (1941).
- ⁵²E. Kanai, "On the quantization of the dissipative systems," *Prog. Theor. Phys.* **3**, 440 (1948).



Topological insulating phase for anti-Hermitian Hamiltonians

N. Mana^a, W. Koussa^a, M. Maamache^a, M. Tanisli^b, C. Yuce^{b,*}

^a Laboratoire de Physique Quantique et Systemes Dynamiques, Faculte des Sciences, Universite Ferhat Abbas Setif 1, Setif 19000, Algeria

^b Department of Physics, Faculty of Science, Eskisehir Technical University, Eskisehir, 26555, Turkey

ARTICLE INFO

Article history:

Received 28 November 2019
 Received in revised form 19 January 2020
 Accepted 20 January 2020
 Available online 22 January 2020
 Communicated by R. Wu

Keywords:

Non-Hermitian topological insulator
 PT symmetry

ABSTRACT

We study classification of anti-Hermitian topological insulators based on the discrete symmetries: time-reversal, particle-hole and chiral symmetries. Contrary to the most general form of non-Hermitian systems, bulk boundary correspondence can hold in anti-Hermitian topological systems. We map a topologically nontrivial Hermitian Hamiltonians into an anti-Hermitian system and we show that the standard table of topological insulators can be used for anti-Hermitian Hamiltonians.

© 2020 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

The classification of topological insulators (and also superconductors) has been greatly developed in the last decades [1–3]. The standard periodical table of topological insulators classifies topological materials based on the ten classes using Altland-Zirnbauer (AZ) symmetry classes in terms of the absence or presence of the three discrete symmetries; time-reversal, particle-hole and chiral symmetries. A topological material in the standard periodical table is characterized by either Z or Z_2 topological invariant. The former topological invariant had been known before Kane and Mele introduced a Z_2 topological number characterizing the time-reversal invariant quantum spin-hall system in 2005 [4]. Recent experimental and theoretical progress on the study of optical systems with gain and loss has lead the way to explore non-Hermitian extension of topological insulators [5–8]. The 1D Su-Schrieffer-Heeger (SSH) model with non-Hermitian impurities [9–34] and 2D non-Hermitian variants of Bernevig-Hughes-Zhang (BHZ) models [35–44] are prototype models to understand the topological phase in non-Hermitian systems. The topological phase has also been searched in many other non-Hermitian systems [45–65]. One may expect that non-Hermitian topological systems exhibit peculiar aspects because of unique non-Hermitian features such as non-orthogonal character of eigenstates and exceptional points where at least two eigenstates coalesce. One of the most well-known peculiar aspect is the broken bulk-boundary correspondence [66–78].

In a non-Hermitian lattice with asymmetric tunneling amplitudes, the so-called the non-Hermitian skin effect where not only topological edge states but also bulk states get localized near edges arises.

We now ask whether the standard periodical table of topological insulators can be used in a class of non-Hermitian topological systems. An attempt of constructing of non-Hermitian version of periodical table of topological insulators is not easy as some problems arise such as non-orthogonality of eigenstates, presence of complex eigenvalues and exceptional points. On contrary to Hermitian systems, topological phase transition point can not be generally determined by the translationally invariant form of the non-Hermitian Hamiltonian. Recently, classification of non-Hermitian topological insulators have been studied by some authors [79–85]. It has been discussed that other symmetries in addition to the three well-known discrete symmetries are needed to explore topological classification in non-Hermitian systems [79, 80]. Zhou and Lee have classified non-Hermitian topological phases using Bernard-LeClair symmetry classes, based on four types of fundamental symmetries with total of 38 symmetry classes [82]. Very recently, topological classification has been extended to include reflection symmetry [84].

In this paper, we consider the AZ symmetry classes and show that we can still use the standard table of topological insulators for a class of anti-Hermitian Hamiltonians, which satisfies $\mathcal{H} = -\mathcal{H}^\dagger$. In this way, a total of 10 possible symmetry classes can be used to classify them. Our construction is based on a simple direct map of a Hermitian topological nontrivial Hamiltonian into an anti-Hermitian Hamiltonian.

* Corresponding author.

E-mail address: cyuce@eskisehir.edu.tr (C. Yuce).

2. Classification

A Hermitian gapped Hamiltonian $H(\mathbf{k})$ of any two-band model in momentum-space is given by the following generic Hamiltonian

$$H(\mathbf{k}) = h_x(\mathbf{k}) \sigma_x + h_y(\mathbf{k}) \sigma_y + h_z(\mathbf{k}) \sigma_z \quad (1)$$

where the components of the vector $\vec{h} = (h_x(\mathbf{k}), h_y(\mathbf{k}), h_z(\mathbf{k}))$ are \mathbf{k} -dependent 3-dimensional real-valued functions and σ_x , σ_y and σ_z are the well-known Pauli matrices. If the two energy bands, defined as eigenvalues of $H(\mathbf{k})$ don't touch each other at any point of \mathbf{k} , then the system is said to be an insulator. Note that the band gap can be closed and reopened by varying some parameters in this Hamiltonian. In this way, one can visualize topological phase transition in the system.

Symmetries play important roles in the classification of topological insulators. Let us begin with the definitions of the three basic types of symmetries for translational invariant systems

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \mathcal{H}(-\mathbf{k}) \mathcal{T}^{-1} &= \mathcal{H}(\mathbf{k}); & \mathcal{T}^2 &= \mp 1 \\ \mathcal{C} \mathcal{H}(-\mathbf{k}) \mathcal{C}^{-1} &= -\mathcal{H}(\mathbf{k}); & \mathcal{C}^2 &= \mp 1 \\ \mathcal{S} \mathcal{H}(\mathbf{k}) \mathcal{S}^{-1} &= -\mathcal{H}(\mathbf{k}); & \mathcal{S}^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Here \mathcal{T} and \mathcal{C} are the antiunitary time-reversal and particle-hole operators, respectively and \mathcal{S} is the unitary chiral operator. Note that the chiral operator can also be defined as $\mathcal{S} = \mathcal{T}\mathcal{C}$. Hermitian topological insulators are classified according to these three discrete symmetries [1–3]. The results are summarized in Table 1.

Let us now introduce the following transformations

$$h_x \rightarrow ih_1, \quad h_y \rightarrow ih_2, \quad h_z \rightarrow ih_3 \quad (3)$$

where $h_1 \neq h_2 \neq h_3$ are an element of $\{h_x, h_y, h_z\}$, which implies that there are 6 different combinations. Under these transformations, the Hermitian Hamiltonian (1) becomes a non-Hermitian one

$$\mathcal{H}(\mathbf{k}) = ih_1(\mathbf{k}) \sigma_x + ih_2(\mathbf{k}) \sigma_y + ih_3(\mathbf{k}) \sigma_z \quad (4)$$

The vector $\vec{h} = (h_1(\mathbf{k}), h_2(\mathbf{k}), h_3(\mathbf{k}))$ is in fact obtained by a rotation of the original vector $\vec{h} = (h_x(\mathbf{k}), h_y(\mathbf{k}), h_z(\mathbf{k}))$.

One can see that the transformed Hamiltonian is anti-Hermitian, i.e., $\mathcal{H}(\mathbf{k}) = -\mathcal{H}^\dagger(\mathbf{k})$. As opposed to most non-Hermitian Hamiltonians, anti-Hermitian Hamiltonians have orthogonal eigenvectors, which implies that one can construct Hilbert space for them. This is interesting since the absence of Hilbert space lead to some unusual effects such as the breakdown of the standard bulk-boundary correspondence. This allows us to study topological phase of a special class of non-Hermitian Hamiltonians in Hilbert space.

There are in principle 6 such non-Hermitian Hamiltonians. One may think that the Hamiltonian (1) can describe a spin-1/2 particle in a k -dependent external magnetic field. If we rotate the coordinate axis, then we can get the Hamiltonian (4) divided by the imaginary unit i , which can describe the same spin-1/2 particle in the k -dependent external magnetic field in a new coordinate system. Since the physics is independent of the choice of coordinate system, they give the same topological effect as we shall discuss below. The imaginary unit i in front of the Hamiltonian maps the energy eigenvalues from the real space to the purely imaginary space. Fortunately, topological phase transition points are the same for both systems. To visualize this, let us use the spherical coordinates to parametrize the Hermitian Hamiltonian $(h_x(\mathbf{k}), h_y(\mathbf{k}), h_z(\mathbf{k})) = \mathbf{h}(\mathbf{k})(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$. The corresponding eigenstates are then given by

$$\psi_- = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}; \quad \psi_+ = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Table 1

Periodic table of topological insulators. The columns specify the symmetry class, the square of each symmetry [time-reversal symmetry (TRS), particle-hole symmetry (PHS), and chiral symmetry], where 0 denotes that this symmetry is not present.

	Symmetry			Dimension							
	\mathcal{T}	\mathcal{C}	\mathcal{S}	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	0	0	0	Z	0	Z	0	Z	0	Z
AIII	0	0	1	Z	0	Z	0	Z	0	Z	0
AI	1	0	0	0	0	0	Z	0	Z ₂	Z ₂	Z
BDI	1	1	1	Z	0	0	0	Z	0	Z ₂	Z ₂
D	0	1	0	Z ₂	Z	0	0	0	Z	0	Z ₂
DIII	-1	1	1	Z ₂	Z ₂	Z	0	0	Z	0	0
AII	-1	0	0	0	Z ₂	Z ₂	Z	0	0	0	Z
CII	-1	-1	1	Z	0	Z ₂	Z ₂	Z	0	0	0
C	0	-1	0	0	Z	0	Z ₂	Z ₂	Z	0	0
CI	1	-1	1	0	0	Z	0	Z ₂	Z ₂	Z	0

which show that the eigenstates don't depend on the norm \mathbf{h} . They are defined on the parameter space, which is a 2D spherical surface. However, they can't be defined continuously on the spherical surface because of the singularity at $\theta = 0$. This leads to the nontrivial topological nature of the Hamiltonians. If we rotate the coordinate axis to get the system described by the anti-Hermitian Hamiltonian without the imaginary unit i , the singularity does not disappear, which implies that the topological feature remains the same.

The first Chern number of the lowest band for the Hermitian one is given by

$$c = \frac{1}{4\pi} \int_{BZ} \frac{\vec{h}}{h^3} \cdot \left(\frac{\partial \vec{h}}{\partial \mathbf{k}_x} \times \frac{\partial \vec{h}}{\partial \mathbf{k}_y} \right) d^2 \mathbf{k} \quad (6)$$

Below, we will study the transformation of the Chern number under (3) for some specific examples.

To this end, let us study the corresponding energy eigenvalues. They are real-valued for $H(\mathbf{k})$ and purely imaginary for $\mathcal{H}(\mathbf{k})$. They coincide if they are zero. The relation between the eigenvalues are given by

$$\mathcal{E}_\pm = iE_\mp = \mp i \mathbf{h} = \mp i \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \quad (7)$$

where $\mathbf{h}^2 = h_x^2 + h_y^2 + h_z^2$ and E_\mp and \mathcal{E}_\mp are the energy eigenvalues for $H(\mathbf{k})$ and $\mathcal{H}(\mathbf{k})$, respectively. We stress that such a simple relation between the energy eigenvalues exist also for open boundary conditions. The topological zero energy states in a 1D Hermitian topological lattice with open edges is also available in the transformed anti-Hermitian lattice.

To sum up, the band gap closing and reopening occur in the same way for both systems. The only difference is that it occurs in the real plane for $H(\mathbf{k})$ and imaginary plane for $\mathcal{H}(\mathbf{k})$. Both systems have the same topological features and can be characterized by the Z or Z_2 topological invariants. Some gapless modes arise between the interface of two systems with different topological numbers. However, no topological surface states occur at an interface between the original topologically nontrivial Hermitian and the transformed anti-Hermitian lattice as they have the same topological features. An important distinction between the two systems is as follows: Topological edge states are protected by some symmetries of the system. Since the anti-Hermitian system can have different symmetries, the topological edge states of Hermitian and anti-Hermitian states are not necessarily protected against the same kind of disorders.

The above transformation allows us to study the topological phase of a class of non-Hermitian Hamiltonian. If we want to study topological insulating phase, we can start with the well-known periodical table of topological insulators for Hermitian systems (Table 1). Notice that the symmetry properties of the parent and

transformed Hamiltonians can change. Therefore, the AZ symmetry classes in the periodical table interchange. We should look at the symmetry properties of the parent Hermitian Hamiltonian in the periodical table to study relation between the topological numbers and symmetry properties of anti-Hermitian Hamiltonians. We stress that the symmetry class of Hermitian and anti-Hermitian Hamiltonians can also be the same.

To illustrate our points, we consider a 1D periodical lattice with staggered asymmetric hopping amplitudes in forward and backward directions

$$\mathcal{H}(k) = \begin{pmatrix} 0 & v + \omega e^{ik} \\ -(v + \omega e^{-ik}) & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

where the positive real-valued numbers v and ω describe hopping amplitudes. One can check that this Hamiltonian is anti-Hermitian and has chiral symmetry, where $S = \sigma_z$. To study its topological feature, we map this Hamiltonian into a Hermitian one and then look at the Table 1 for its topological class. Let us rewrite this Hamiltonian in terms of the Pauli spin matrices and introduce the following transformations: $h_x \rightarrow -i h_y$ and $h_y \rightarrow -i h_x$. Then we get the standard Hermitian Su-Schrieffer-Heeger (SSH) Hamiltonian $H(k)$.

$$\mathcal{H}(k) = i(v + \omega \cos k)\sigma_y + i\omega \sin k \sigma_x$$

$$H(k) = (v + \omega \cos k)\sigma_x + \omega \sin k \sigma_y \quad (9)$$

Both SSH and anti-Hermitian SSH Hamiltonians describe a one-dimensional tight binding periodical lattice with staggered hopping amplitudes. But the hopping amplitudes in forward and backward directions for the anti-Hermitian SSH Hamiltonian have the opposite signs.

It is easy to see that the chiral symmetry of the anti-Hermitian SSH Hamiltonian remains intact under the above transformations. The chiral operators for both Hamiltonians are the same. The spectrum of a chiral symmetric Hamiltonian is symmetric with respect to zero energy axis. Therefore, energy eigenvalues come in pairs. The corresponding eigenvalues for the anti-Hermitian SSH Hamiltonian are purely imaginary since the parity-time symmetry ($\mathcal{P}\mathcal{T} = \sigma_x \mathcal{K}$) of the Hermitian Hamiltonian is broken for (8). The band gap closes and reopens for $v = \omega$ at $k = \mp\pi$, which implies that topological phase transition occurs. According to Table 1, the Hermitian SSH system is in class *AIII* and hence it can have Z topological number in 1D. Since both Hamiltonians have the same chiral symmetry operator, their topological edge states have the same kind of symmetry protection. Therefore they are protected against disorders in hopping amplitudes, which don't break the chiral symmetry of the original system.

To see a clear picture of the topological feature, consider (h_x, h_y) -plane. The vector $\vec{h}(k) = h_x(k) \mathbf{i} + h_y(k) \mathbf{j}$ makes a closed circle as k sweeps across the Brillouin zone, $-\pi < k \leq \pi$. The winding number, which describes the topology of the loop is equal to the number of times the loop winds around the origin of the (h_x, h_y) -plane. One can see that the winding number for $H(k)$ is 1 for $v < \omega$ and 0 for otherwise. Consider next the imaginary (ih_y, ih_x) -plane. Compared to the former case, the axes are interchanged (up to the imaginary constant). Consequently, the winding number does not change. One can also compute the winding number using [86]

$$w = \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{\vec{h}}{h} \times \frac{d\vec{h}}{dk} \frac{\vec{h}}{h} \right)_z dk \quad (10)$$

One can show that $w \rightarrow w$ under the transformations $h_x \rightarrow i h_y$ and $h_y \rightarrow i h_x$.

To this end, let us study topological edge states in both systems with open boundary conditions. Topological zero energy states appear in the Hermitian SSH model. Therefore, zero energy states are also available in the anti-Hermitian SSH model. We numerically see that not the eigenstates but the densities are the same for both systems. This is true not only for topological zero energy states but also for all bulk states: $|\psi_n|^2 = |\psi'_n|^2$, where ψ_n and ψ'_n are the eigenstates for H and \mathcal{H} with OBC, respectively. We note that bulk-boundary correspondence is satisfied in this example.

Our method can also be used to find topologically trivial systems. As an example, consider the Hamiltonian (8) with the additional gain and loss.

$$\mathcal{H}(k) = i(v + \omega \cos k)\sigma_y + i\omega \sin k \sigma_x + ig \sigma_z \quad (11)$$

where g is the gain/loss strength. Using the transformations $h_x \rightarrow -i h_y$, $h_y \rightarrow -i h_x$ and $h_z \rightarrow -i h_z$, we get the Hermitian parent Hamiltonian $H(k) = (v + \omega \cos k)\sigma_x + \omega \sin k \sigma_y + g \sigma_z$. This is the well-known massive SSH Hamiltonian. It has no discrete symmetries. Therefore, it is in class *A* according to the Table 1. Therefore, it is topologically trivial. This implies that the non-Hermitian Hamiltonian (11) is also topologically trivial according to the AZ class. Note that the non-Hermitian Hamiltonian has particle-hole symmetry with $\mathcal{C} = \sigma_z \mathcal{K}$ and hence it is in class *D*. As mentioned above, we should consider the AZ class of the parent Hermitian Hamiltonian to study its topological feature.

As a final example in 1D, consider the Dirac Hamiltonian $H = k \sigma_x + m \sigma_z$, where m is a constant. It is a Chiral insulator since it is in class *AIII* as it anticommutes with σ_y . The corresponding winding number is given by $\frac{1}{2} \text{sgn}(m)$ [3]. Using the transformation $h_x \rightarrow i h_y$ and $h_z \rightarrow i h_z$, we get an anti-Hermitian Dirac insulator $\mathcal{H} = ik \sigma_y + im \sigma_z$. This non-Hermitian Hamiltonian has gain and loss through the parameter m . It has also topological feature as its parent Hamiltonian does. The symmetry class is changed to *BDI* since the non-Hermitian Hamiltonian has all the three symmetries: $\mathcal{T} = \sigma_x \mathcal{K}$, $\mathcal{C} = \mathcal{K}$ and $S = \sigma_x$.

One can also find other examples not only in 1D but also in higher dimensions. Let us now consider the following Hermitian Dirac Hamiltonian in two dimensions $H = (M - B(k_x^2 + k_y^2))\sigma_z + A(k_x \sigma_x + k_y \sigma_y)$, where A , B , and M are real valued parameters [87]. A band closing at $k_x = k_y = 0$ can be controlled through these parameters. According to the standard periodic table of topological insulators, the Hermitian Hamiltonian is in class *D* and hence it can have Z topological number. The corresponding particle-hole operator reads $\mathcal{C} = \sigma_x \mathcal{K}$. The Chern number of the lowest band is determined by the signs of parameters $-\frac{1}{2}(\text{sign}(M) + \text{sign}(B))$ [87]. If we make the replacement $h_z \rightarrow ih_z$, $h_x \rightarrow ih_y$ and $h_y \rightarrow ih_x$, we obtain

$$\mathcal{H} = i(M - B(k_x^2 + k_y^2))\sigma_z + iA(k_x \sigma_y + k_y \sigma_x) \quad (12)$$

One can check that this Hamiltonian is anti-Hermitian, i.e. $\mathcal{H} = -\mathcal{H}^\dagger$, which has purely imaginary energy eigenvalues and orthogonal eigenvectors.

The anti-Hermitian Hamiltonian \mathcal{H} is in class *AI* since it has time-reversal symmetry $\mathcal{T} = \sigma_x \mathcal{K}$. The class *AI* in 2D has no topological features. As discussed above, we should consider its parent Hermitian Hamiltonian to study its topological feature according to the Table 1. Therefore, the Hamiltonian (12) has Z topological number. Note that \mathcal{H} has not parity-time symmetry but particle-hole-parity symmetry $\mathcal{C}\mathcal{P} = \sigma_y \mathcal{K}$. To this end, let us study the transformation of the chern number (6). If we substitute $h_1(\mathbf{k}) = h_y(\mathbf{k})$, $h_2(\mathbf{k}) = h_x(\mathbf{k})$ and $h_3(\mathbf{k}) = h_z(\mathbf{k})$ into (6), we find that the integrand is left unchanged. Therefore the chern number transforms as $c \rightarrow c$.

In this paper, we have studied topological features of anti-Hermitian Hamiltonians, which admit purely imaginary energy eigenvalues and orthogonal eigenstates. Generally speaking, non-Hermitian topological insulators fail to obey standard bulk boundary correspondence. We have shown that this is not always the case in an anti-Hermitian system. We have shown that topological features of such non-Hermitian Hamiltonians can be studied using the transformation (1). We have discussed that the standard periodical table of topological insulators based on Altland-Zirnbauer (AZ) symmetry classes can still be used for anti-Hermitian Hamiltonians. The transformation (1) can change the symmetry properties. This implies that surface states of the parent Hermitian and the corresponding anti-Hermitian Hamiltonians can be protected against different kind of disorders. Furthermore, one can get different symmetry classes depending on the specific form of the transformation (1). Fortunately, it is enough to use the symmetry classes of the Hermitian counterpart. Note that our method is not only restricted to two band topological insulators and can also be extended to topological superconductors, topological crystalline insulators etc.

Acknowledgements

Two of the authors, N. M. and W. K., would like to thank L. Louail, the dean of the Sciences Faculty at the University of Ferhat Abbas Setif 1, for the financial support of their visit in the Department of Physics at Eskisehir Technical University in Turkey.

References

- [1] Andreas P. Schnyder, Shinsei Ryu, Akira Furusaki, Andreas W.W. Ludwig, *Phys. Rev. B* 78 (2008) 195125.
- [2] Ching-Kai Chiu, Jeffrey C.Y. Teo, Andreas P. Schnyder, Shinsei Ryu, *Rev. Mod. Phys.* 88 (2016) 035005.
- [3] Shinsei Ryu, Andreas Schnyder, Akira Furusaki, Andreas Ludwig, *New J. Phys.* 12 (2010) 065010.
- [4] C.L. Kane, E.J. Mele, *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005) 146802.
- [5] S. Weiman, et al., *Nat. Mater.* 16 (2017) 433.
- [6] C. Yuce, *Phys. Lett. A* 379 (2015) 1213.
- [7] Ananya Ghatak, Tanmoy Das, *J. Phys. Condens. Matter* 31 (2019) 263001.
- [8] V.M. Martinez Alvarez, J.E. Barrios Vargas, M. Berdakin, L.E.F. Foa Torres, *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 227 (2018) 1295.
- [9] L. Jin, *Phys. Rev. A* 96 (2017) 032103.
- [10] Chuanhao Yin, Hui Jiang, Linhu Li, Rong Lu, Shu Chen, *Phys. Rev. A* 97 (2018) 052115.
- [11] C. Yuce, Z. Oztas, *Sci. Rep.* 8 (2018) 17416.
- [12] L. Jin, P. Wang, Z. Song, *Sci. Rep.* 7 (2017) 5903.
- [13] Kun Ding, Z.Q. Zhang, C.T. Chan, *Phys. Rev. B* 92 (2015) 235310.
- [14] C.W. Ling, Ka Hei Choi, T.C. Mok, Z.Q. Zhang, Kin Hung Fung, *Sci. Rep.* 6 (2016) 38049.
- [15] Li-Jun Lang, You Wang, Hailong Wang, Y.D. Chong, *Phys. Rev. B* 98 (2018) 094307.
- [16] Mingsen Pan, Han Zhao, Pei Miao, Stefano Longhi, Liang Feng, *Nat. Commun.* 9 (2018) 1308.
- [17] X.Z. Zhang, Z. Song, *Phys. Rev. A* 99 (2019) 012113.
- [18] B.X. Wang, C.Y. Zhao, *Phys. Rev. B* 98 (2018) 165435.
- [19] Simon Lieu, *Phys. Rev. B* 97 (2018) 045106.
- [20] Ze-Zhong Li, Xue-Si Li, Lian-Lian Zhang, Wei-Jiang Gong, arXiv:1901.10688, 2019.
- [21] C. Yuce, *Phys. Rev. A* 98 (2018) 012111; C. Yuce, *Phys. Rev. A* 97 (2018) 042118.
- [22] Bikashkali Midya, Liang Feng, *Phys. Rev. A* 98 (2018) 043838.
- [23] Mingsen Pan, Han Zhao, Pei Miao, Stefano Longhi, Liang Feng, *Nat. Commun.* 9 (2018) 1308.
- [24] Lei Du, Jin-Hui Wu, M. Artoni, G.C. La Rocca, *Phys. Rev. A* 100 (2019) 012112.
- [25] Lei Du, Jin-Hui Wu, M. Artoni, G.C. La Rocca, *Phys. Rev. A* 100 (2019) 052102.
- [26] C. Yuce, *Eur. Phys. J. D* 69 (2015) 184.
- [27] Z. Turker, S. Tombuloglu, C. Yuce, *Phys. Lett. A* 382 (2018) 2013.
- [28] Mingsen Pan, Han Zhao, Pei Miao, Stefano Longhi, Liang Feng, *Nat. Commun.* 9 (2018) 1308.
- [29] Ryo Okugawa, Takehito Yokoyama, *Phys. Rev. B* 99 (2019) 041202(R).
- [30] Zhesen Yang, Jiangping Hu, *Phys. Rev. B* 99 (2019) 081102(R).
- [31] Mario G. Silveirinha, *Phys. Rev. B* 99 (2019) 125155.
- [32] Motohiko Ezawa, *Phys. Rev. B* 99 (2019) 121411(R).
- [33] Shaolin Ke, Dong Zhao, Jianxun Liu, Qingjie Liu, Qing Liao, Bing Wang, Peixiang Lu, *Opt. Express* 27 (2019) 13858.
- [34] Kenta Takata, Masaya Notomi, *Phys. Rev. Lett.* 121 (2018) 213902.
- [35] Z. Oztas, C. Yuce, *Phys. Rev. A* 98 (2018) 042104.
- [36] Xue-Yi Zhu, Samit Kumar Gupta, Xiao-Chen Sun, Cheng He, Gui-Xin Li, Jian-Hua Jiang, Xiao-Ping Liu, Ming-Hui Lu, Yan-Feng Chen, *Opt. Express* 26 (2018) 24307.
- [37] R. Wang, X.Z. Zhang, Z. Song, *Phys. Rev. A* 98 (2018) 042120.
- [38] Z. Ozcakmakli Turker, C. Yuce, *Phys. Rev. A* 99 (2019) 022127.
- [39] Huaiqiang Wang, Jiawei Ruan, Haijun Zhang, *Phys. Rev. B* 99 (2019) 075130.
- [40] Jan Carl Budich, Johan Carlstrom, Flore K. Kunst, Emil J. Bergholtz, *Phys. Rev. B* 99 (2019) 041406(R).
- [41] Kristof Moors, Alexander A. Zyuzin, Alexander Yu. Zyuzin, Rakesh P. Tiwari, Thomas L. Schmidt, *Phys. Rev. B* 99 (2019) 041116(R).
- [42] Tsuneya Yoshida, Robert Peters, Norio Kawakami, Yasuhiro Hatsugai, *Phys. Rev. B* 99 (2019) 121101.
- [43] Zhesen Yang, Jiangping Hu, *Phys. Rev. B* 99 (2019) 081102(R).
- [44] C. Yuce, H. Ramezani, *Phys. Rev. A* 100 (2019) 032102.
- [45] J.Y. Lee, J. Ahn, H. Zhou, A. Vishwanath, *Phys. Rev. Lett.* 123 (2019) 206404.
- [46] Fei Song, Shunyu Yao, Zhong Wang, *Phys. Rev. Lett.* 123 (2019) 246801.
- [47] P. Wang, L. Jin, Z. Song, *Phys. Rev. A* 99 (2019) 062112.
- [48] H.C. Wu, L. Jin, Z. Song, *Phys. Rev. B* 100 (2019) 155117.
- [49] Z. Oztas, N. Candemir, *Phys. Lett. A* 383 (2019) 1821.
- [50] Ya-jie Wu, Junpeng Hou, *Phys. Rev. A* 99 (2019) 062107.
- [51] Xiang Ni, Daria Smirnova, Alexander Poddubny, Daniel Leykam, Yidong Chong, Alexander B. Khanikaev, *Phys. Rev. B* 98 (2018) 165129.
- [52] Jan Carl Budich, Johan Carlstrom, Flore K. Kunst, Emil J. Bergholtz, *Phys. Rev. B* 99 (2019) 041406(R).
- [53] David J. Luitz, Francesco Piazza, *Phys. Rev. Res.* 1 (2019) 033051.
- [54] Flore K. Kunst, Vatsal Dwivedi, *Phys. Rev. B* 99 (2019) 245116.
- [55] Zi-Yong Ge, Yu-Ran Zhang, Tao Liu, Si-Wen Li, Heng Fan, Franco Nori, *Phys. Rev. B* 100 (2019) 054105.
- [56] S. Lin, L. Jin, Z. Song, *Phys. Rev. B* 99 (2019) 165148.
- [57] C. Yuce, *Phys. Lett. A* 383 (2019) 2567.
- [58] C. Yuce, H. Ramezani, *Europhys. Lett.* 126 (2019) 17002.
- [59] Tsuneya Yoshida, Robert Peters, Norio Kawakami, Yasuhiro Hatsugai, *Phys. Rev. B* 99 (2019) 121101(R).
- [60] Rui Chen, Chui-Zhen Chen, Bin Zhou, Dong-Hui Xu, *Phys. Rev. B* 99 (2019) 155431.
- [61] Yu Chen, Hui Zhai, *Phys. Rev. B* 98 (2018) 245130.
- [62] Kazuki Yokomizo, Shuichi Murakami, *Phys. Rev. Lett.* 123 (2019) 066404.
- [63] S. Longhi, *Phys. Rev. Lett.* 122 (2019) 237601.
- [64] C. Yuce, *Phys. Rev. A* 99 (2019) 032109.
- [65] Linhu Li, Ching Hua Lee, Jiangbin Gong, *Phys. Rev. B* 100 (2019) 075403.
- [66] V.M. Martinez Alvarez, J.E. Barrios Vargas, L.E.F. Foa Torres, *Phys. Rev. B* 97 (2018) 121401(R).
- [67] Flore K. Kunst, Elisabet Edvardsson, Jan Carl Budich, Emil J. Bergholtz, *Phys. Rev. Lett.* 121 (2018) 026808.
- [68] Elisabet Edvardsson, Flore K. Kunst, Emil J. Bergholtz, *Phys. Rev. B* 99 (2019) 081302(R).
- [69] Daniel Leykam, Konstantin Y. Bliokh, Chunli Huang, Y.D. Chong, Franco Nori, *Phys. Rev. Lett.* 118 (2017) 040401.
- [70] L. Jin, Z. Song, *Phys. Rev. B* 99 (2019) 081103(R).
- [71] C.H. Lee, R. Thomale, *Phys. Rev. B* 99 (2019) 201103(R).
- [72] Z. Ozcakmakli Turker, C. Yuce, *Phys. Rev. A* 99 (2019) 022127.
- [73] Hui Jiang, Li-Jun Lang, Chao Yang, Shi-Liang Zhu, Shu Chen, *Phys. Rev. B* 100 (2019) 054301.
- [74] Loic Herviou, Jens H. Bardarson, Nicolas Regnault, *Phys. Rev. A* 99 (2019) 052118.
- [75] Shunyu Yao, Fei Song, Zhong Wang, *Phys. Rev. Lett.* 121 (2018) 136802.
- [76] Shunyu Yao, Zhong Wang, *Phys. Rev. Lett.* 121 (2018) 086803.
- [77] Dan S. Borgnia, Alex Jura Kruchkov, Robert-Jan Slager, arXiv:1902.07217, 2019.
- [78] Stefano Longhi, *Ann. Phys. (Berlin)* 530 (2018) 1800023.
- [79] Zongping Gong, Yuto Ashida, Kohei Kawabata, Kazuaki Takasan, Sho Higashikawa, Masahito Ueda, *Phys. Rev. X* 98 (2018) 031079.
- [80] Kohei Kawabata, Ken Shiozaki, Masahito Ueda, Masatoshi Sato, *Phys. Rev. X* 9 (2019) 041015.
- [81] Simon Lieu, *Phys. Rev. B* 98 (2018) 115135.
- [82] Hengyun Zhou, Jong Yeon Lee, *Phys. Rev. B* 99 (2019) 235112.
- [83] Chun-Hui Liu, Shu Chen, *Phys. Rev. B* 100 (2019) 144106.
- [84] Chun-Hui Liu, Hui Jiang, Shu Chen, *Phys. Rev. B* 99 (2019) 125103.
- [85] Jong Yeon Lee, Junyeong Ahn, Hengyun Zhou, Ashvin Vishwanath, *Phys. Rev. Lett.* 123 (2019) 206404.
- [86] J.K. Asbóth, L. Oroszlány, A. Palyi, in: *A Short Course on Topological Insulators: Band Structure and Edge States in One and Two Dimensions*, in: *Lecture Notes in Physics*, vol. 919, Springer, Cham, 2016.
- [87] B.A. Bernevig, T.L. Hughes, S.-C. Zhang, *Science* 314 (2006) 1757.