



Université Sétif 1 Ferhat Abbas
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Thèse de Doctorat

Présentée en vue de l'obtention du diplôme
de Docteur en Mathématiques

Option : Équations différentielles aux dérivées partielles

Thème :

ANALYSE VARIATIONNELLE ET NUMÉRIQUE DE QUELQUES PROBLÈMES VISCOÉLASTIQUES

Présentée par

Mr. Debbacha Laifa

Directeur de thèse: **Professeur NEMIRA LEBRI**

Thèse soutenue le 05 mars 2026, devant le jury composé de :

Mr. Sedik DJABI	Professeur émérit	Université Setif 1 Ferhat Abbas	Président
M ^{em} . Nemira LEBRI	Professeur	Université Setif 1 Ferhat Abbas	Rapporteur
Mr. Adbelbaki MEROUANI	Professeur	Université Setif 1 Ferhat Abbas	Co- Rapporteur
Mr. Azzedine RAHMOUNE	Professeur	Université Bourdj Bouariridj	Examineur
Mr. Bilal GHERMOUL	MCA	Université Bourdj Bouariridj	Examineur
Mr. Bachir GAGUI	MCA	Université Mohamed Boudiaf M'SILA	Examineur

2026

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont participé à la réalisation de ce projet. Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance envers Madame Lebri Nemira, professeur à l'Université de Sétif 1, qui a accepté de superviser mon travail. Je tiens à remercier aussi Abdelbaki Merouani ; Professeur à l'Université de Sétif 1, qui a accepté d'être co-encadreur pour mon travail. Je tiens à exprimer mon plus profond respect à monsieur Djabi Sedik, professeur émérite à l'université de Sétif 1, qui a accepté de présider le jury de ma thèse. Je lui suis extrêmement reconnaissant. Je remercie également Monsieur Rahmoune Azzedine, professeur à l'université de Bordj Bouariridj, Monsieur Ghermoul Bilal, Maître de Conférence classe A à l'université de Bordj Bouariridj, et Monsieur Gagui Bachir, Maître de Conférence classe A à l'université de M'sila, pour l'attention qu'ils ont portée à ma thèse en participant au jury.

Debbacha Laifa

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	i
Notations	iv
Valorisation des travaux de thèse	v
Introduction générale	vi
1 Formulation des problèmes	1
1.1 Espaces fonctionnels	2
1.2 Espaces de Sobolev	3
1.2.1 Espaces liés à l'approche numérique	7
1.3 Modélisation des problèmes thermo-viscoélastiques	8
1.3.1 Cadre physique	8
1.3.2 Lois de comportement	9
1.3.3 Lois de comportement thermo-viscoélastiques avec longue mémoire	9
1.3.4 Condition de contact sous-différentielle	10
1.4 Conditions aux limites de contact	13
1.5 Formulation des problèmes piézoélectriques	18
1.5.1 Cadre physique	18
1.6 Modélisation des problèmes thermo-électro-élasto-viscoplastiques	22
1.7 Rappels d'analyse	23

1.8	Triplet de Gelfand	27
1.9	Equations et inéquations variationnelles d'évolution	28
1.9.1	Théorème du point fixe de Banach	33
1.9.2	Compléments divers	33
1.9.3	Lemmes de type Gronwall	34
1.9.4	Sous différentiabilité	35
1.10	Quelques théorèmes d'existence	36
2	Étude d'un problème dynamique	37
2.1	Formulation du problème mécanique et hypothèses	37
2.2	Résultat d'existence et d'unicité	41
2.3	Analyse d'un schéma numérique	48
3	Étude d'un problème électro-mécanique	53
3.1	Formulation du problème	54
3.2	Résultat d'existence et d'unicité	62
4	Étude d'un problème thermo-électro-viscoplastique	72
4.1	Formulation du problème	73
4.2	Formulation variationnelle	78
4.3	Résultat d'existence et d'unicité	80
	Conclusions et perspectives	94
4.4	Conclusions théoriques	94
4.5	Perspectives	94

NOTATIONS

Dans tous ce qui suit Ω représente un domaine de $\mathbb{R}^N (N = 1, 2, 3)$.

Γ : la frontière de Ω supposée régulière.

$\varepsilon(\mathbf{u})$: tenseur des déformations linéaires.

\mathbf{u} : le vecteur déplacement.

$\dot{\mathbf{u}}$: le champ de la vitesse.

Div : l'opérateur de divergence.

θ : la température.

q : le flux de la chaleur.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$: un produit scalaire sur X .

1. $|\cdot|_X$: la norme sur X .

$W^{K,p}(0, T; H)$: l'espace de Sobolev de paramètres k et p

$\|\cdot\|_{0,T,H}$: la norme de $C(0, T; H)$, H : l'espace $L^2(\Omega)^N$, \mathcal{H} : l'espace $L^2(\Omega)^{N \times N}$

$H_1 = \{u \in H / \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\}$

$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} / \text{Div} \sigma \in H\}$

$\tilde{H}_1 = \{\theta \in \tilde{H} / \nabla(\theta) \in \tilde{\mathcal{H}}\}$

$\tilde{\mathcal{H}}_1 = \{q \in \tilde{\mathcal{H}} / \text{Div} q \in \tilde{H}\}$

$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$: l'application trace associée à H_1 , $Z : H_\Gamma \rightarrow H_1$: application inverse de γ .

$\gamma_v : \mathcal{H}_1 \rightarrow H'_\Gamma$: l'application trace associée à \mathcal{H}_1 .

$Z_v : H'_\Gamma \rightarrow \mathcal{H}_1$: l'application inverse de γ_v .

$V = \{u \in H_1 / \gamma u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$

$\mathcal{V} = \{\sigma \in \mathcal{H}_1 / \text{Div} \sigma = 0 \text{ dans } \Omega, \gamma_v \sigma = 0 \text{ sur } \Gamma_2\}$

$W = \{\sigma \in \mathcal{H} / \gamma_v \sigma = \sigma v = 0 \text{ sur } \Gamma_2\}$

$\tilde{V} = \{\theta \in \tilde{H}_1 / \tilde{\gamma} \theta = 0 \text{ sur } S_1\}$

$\tilde{\mathcal{V}} = \{q \in \tilde{\mathcal{H}}_1 / qv = 0 \text{ sur } S_2\}$.

VALORISATION DES TRAVAUX DE THÈSE

Les travaux de thèse ont fait l'objet d'une publication dans une revue internationale :

Non linear dynamics and System Theory

-L.Debbacha and N.Lebri, **A dynamic contact problem for piezo-thermo-ilasto-viscoplastic materials with damage** for ; Volume 22,issue 5 ,année (2022), pages 503-521.

Et une communication nationale Laifa Debbacha :

Sur la résolution de l'équation intégro-différentielle du transport de neutrons JN-MA'2015 : Bordj Bou Arréridj le 29 Novembre 2015.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les phénomènes de contact entre les corps, déformables ou non, restent encore à ce jour omniprésents dans la vie courante. On peut considérer qu'il s'agit d'un des fondements de l'ingénierie mécanique, avec un domaine d'application particulièrement étendu. A titre d'exemple, on peut citer le secteur ferroviaire, avec le contact roue-rail, l'industrie automobile, via l'étude des caractéristiques d'adhérence entre le pneu et la chaussée ainsi que les crash tests, le génie civil, pour lequel il est nécessaire d'estimer les efforts que vont subir les matériaux qui constituent les ponts ou les gratte-ciels, le frottement inhérent au mouvement des plaques tectoniques ou encore le domaine de l'aéronautique, ne serait ce que pour les propriétés d'absorption des chocs dont sont dotés les amortisseurs des trains d'atterrissage d'avion. Compte tenu de l'importance de ces phénomènes, la mécanique du contact est vaste et aborde autant de sujets différents qui sont la modélisation, l'analyse mathématique ou l'application numérique des problèmes de contact, ils ont été intensivement étudiés depuis longue date et la littérature relevant des sciences de l'ingénieur qui leur est dédié est assez riche. La représentation des problèmes de contact entre un corps déformable et une base repose principalement sur les caractéristiques mécaniques du matériau en question, ainsi que sur les conditions de limite du contact. La question des dommages est primordial dans les conceptions d'ingénierie car elle a un impact direct sur la durée de vie de la structure ou du composant conçu. Le sujet bénéficie d'une abondante documentation. Des études mathématiques ont été effectuées sur les modèles qui tiennent compte de l'impact des dommages internes du matériau sur le mécanisme de contact. L'analyse mathématique de problèmes unidimensionnels peut être trouvée dans [43]. Les premiers modèles de l'endommagement mécanique provenant des considérations thermodynamiques sont apparus dans [20]. Des modèles généraux récents [41, 40, 44, 45] sont issus du principe de la puissance virtuelle. Dans tous

ces travaux, l'endommagement du matériau est décrit par une fonction ayant des valeurs entre zéro et un. Lorsque $\alpha = 1$, il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, lorsque $\alpha = 0$, le matériau est complètement endommagé et lorsque $0 < \alpha < 1$, il y a un endommagement partiel et le système a une capacité réduite. Des problèmes avec endommagement peuvent être trouvés dans [44, 55, 47, 51]. Un autre phénomène sera considéré dans cette thèse, il s'agit du phénomène de contact avec l'effet thermique. Les processus de contact et de frottement s'accompagnent invariablement d'une production de la chaleur qui peut être considérable. A titre d'exemple, le freinage brusque d'une voiture peut entraîner la dissipation d'une puissance importante sous forme de chaleur. L'effet thermique dans les processus de contact affecte la composition et la rigidité des surfaces et provoque des contraintes thermiques dans les corps en contact. La façon dont la chaleur affecte les propriétés mécaniques d'une surface peut être partiellement prise en compte (en supposant que le coefficient de frottement dépend de la température,[54]). Les matériaux piézoélectriques sont extrêmement utilisés comme interrupteurs et actionneurs dans beaucoup de systèmes d'ingénierie, en radioélectronique, l'électroacoustique et la mesure des équipements. Ils sont caractérisés par le couplage des propriétés mécaniques et électriques. Ce couplage conduit à l'apparition d'un potentiel électrique suite à une déformation mécanique et, inversement, une déformation mécanique est générée lorsqu'un potentiel électrique est appliqué. Les matériaux piézoélectriques, pour lesquels les propriétés mécaniques sont viscoélastiques sont appelés "les matériaux électro-viscoélastiques" et ceux pour lesquelles les propriétés mécaniques sont élasto-viscoplastiques sont appelés "les matériaux électro-élasto-viscoplastiques". Des modèles généraux pour des matériaux électro-élastiques ayant un effet piézoélectrique peuvent être trouvés dans [53] L'utilisation de la piézoélectricité a explosé ces dernières années et est en pleine expansion. La capacité de ces matériaux à convertir l'énergie mécanique en énergie électrique et vice-versa est une valeur inestimable pour les transducteurs acoustiques, l'échographie médicale, et pour la haute précision des pompes et des moteurs. Des performances piézoélectriques élevées ont également ouvert de nouvelles possibilités de "récupération d'énergie", en utilisant le mouvement ambiant et les vibrations pour produire de l'électricité où les piles ou autres sources d'énergie sont impraticables ou indispensables [7, 8]. Une étude complète des phénomènes de contact comprend généralement les étapes suivantes : la modélisation, l'analyse variationnelle et numérique des modèles et la mise en oeuvre numérique. L'approche numérique des problèmes

aux limites est un domaine mathématique qui, historiquement, a fait l'objet de nombreuses recherches et continue cependant de rester d'actualité, par le fait qu'elle intéresse particulièrement des disciplines comme la mécanique, la biologie etc. Il est essentiel de construire des méthodes numériques de résolution de ces problèmes qui soient à la fois simples, peu coûteux et efficaces. Les méthodes modernes sont basées sur une " discrétisation " des équations et inéquations dont l'idée est d'approcher de la solution. On distingue deux types de discrétisation : complète et incomplète. La première consiste à discrétiser seul l'espace ; cependant la deuxième est basée sur la discrétisation de l'espace ainsi que l'intervalle de temps. En fait, ces approches, dans le cas des inéquations variationnelles ont fait l'objet de plusieurs études telles que [11] dans le cas d'un problème viscoélastique et [28] pour des problèmes viscoplastiques. Les problèmes sont complexes et dans les applications, les méthodes numériques sont nécessaires pour trouver des approximations pour les solutions des problèmes. Cette thèse représente une contribution à l'étude de l'existence, l'unicité et l'approximation numérique des solutions de quelques problèmes de contact avec ou sans d' endommagements, en tenant compte de l'effet piézoélectrique ou thermique du matériau. Sous l'hypothèse des petites transformations, nous étudions des processus quasistatiques et dynamiques pour des matériaux thermo -viscoélastiques avec mémoire longue, thermo-électro- élasto-viscoplastique et électro -viscoélastiques avec mémoire longue . Notre étude des phénomènes de contact comprend les étapes suivantes : la modélisation mathématique, l'analyse variationnelle incluant des résultats d'existence et d'unicité de la solution et l'approximation numérique pour le premier problème. Cette thèse est composé quatre chapitres est structurée de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, dans la première partie, on commence par définir les cadres physiques, les lois de comportement des différents matériaux, les conditions aux limites ainsi que la formulation mécanique des problèmes a étudié. La deuxième partie de ce chapitre, est dédié aux définitions élémentaires des notions d'analyses, nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle concernant les espaces fonctionnels, les opérateurs fortement monotones et Lipschitz, les équations et les "inéquations variationnelles d'évolution paraboliques, le lemme de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations et qu'ils sont illustres de façons intéressantes de certaines manipulations que l'on peut faire sur notre formulation qui caractérise ce qui nous décrivons dans notre thèse.

Dans le deuxième chapitre nous présentons une formulation variationnelle du problème et nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution faible en utilisant les techniques de point fixe, de monotonie et les inéquations d'évolution non linéaires de premier ordre, puis pour l'analyse des estimations d'erreur, on adopte l'approximation variationnelle complète où on discrétise la variable spatiale et la variable temporelle.

Dans le troisième chapitre, nous présentons des méthodes de résolutions des problèmes électromécanique quasi statique pour les matériaux électro-viscoélastiques avec mémoire longue et endommagement, on présente des résultats d'existence et unicité de la solution faible. La méthode est basée sur les résultats des équations variationnelles, la théorie des opérateurs et argument de point fixe.

Le quatrième chapitre de cette thèse est consacré à la résolution des problèmes thermo-lectro-élasto-viscoplastiques dynamiques en contact avec une base rigide. Le contact est bilatérale. Cette partie contient des résultats originaux de l'auteur publiés en collaboration avec N.Lebri [9]. La nouveauté dans ce travail réside dans :

- 1) le choix des lois constitutives avec variable interne d'état, endommagement, effet électrique ou effet thermique.
- 2) le choix d'un contact avec frottement avec une base conductrice et adhésive (voir chapitre 4).
- 3) le choix d'un contact avec frottement avec une base conductrice et adhésive et l'introduction de l'endommagement dans les conditions aux limites de frottement ce qui donne une version originale (voir chapitre 3).
- 4) l'application de la théorie des inéquations quasi-variationnelles à mémoires (history-dependent) pour la résolution des problèmes de contact.
- 5) finalement on adopte une approximation variationnelle complète où on discrétise la variable spatiale et la variable temporelle puis on analyse les estimations d'erreur. (voir chapitre 2).

CHAPITRE 1

FORMULATION DES PROBLÈMES AUX LIMITES ET RAPPELS D'ANALYSE

Ce premier chapitre vise à établir les modèles mathématiques qui décrivent le changement dynamique d'un corps thermo-mécanique, l'évolution quasistatique d'un corps électro-mécanique et l'évolution dynamique d'un corps thermo-électro-mécanique sous l'action des efforts extérieurs mécanique, électriques et thermiques.

Du point de vue mathématique, les problèmes thermo-électro-mécaniques sont gouvernés par des systèmes d'EDP. Ces systèmes intègrent les équations de mouvement mécanique, électrique et thermique du système, les lois qui régissent le comportement des matériaux, ainsi que les conditions aux limites en termes de mécanique et de thermique. Ils tiennent également compte des conditions initiales imposées au système (mécanique, électrique et thermique). Pour ce faire, rappelons les résultats clés nécessaires. Ces rappels concernent les lois de comportement de divers matériaux, comme la loi électro-viscoélastique à mémoire longue et endommagement, ainsi que la loi thermo-électro-élasto-viscoplastique avec endommagement. Les conditions aux limites ainsi que les phénomènes relatifs à la mécanique, l'électricité et la thermodynamique. On introduit les cadres physiques et les modèles mathématiques correspondants qui seront étudiés dans les chapitres suivants. Enfin, on y introduit un bref rappel utile et essentiel concernant les espaces fonctionnels et à valeurs vectorielles, Les inéquations de type variationnel et quasi-

variationnel, les lemmes de Gronwall, le théorème de Cauchy-Lipschitz ainsi que le théorème du point fixe de Banach.

Introduction

On considère un solide déformable soumis à des efforts extérieurs (mécaniques, électriques et thermiques) il en résulte un changement de son mouvement et son état thermodynamique.

Formulation du problème

Nous nous concentrons sur la condition finale du corps une fois que l'application des forces externes est achevée et que le solide arrive à son état d'équilibre, qui est représenté par un système d'EDP (équations aux dérivées partielles). L'analyse exhaustive d'un phénomène mécanique implique généralement trois phases : - La création de modèles. - L'étude en variation des modèles. - L'évaluation numérique des modèles. - La modélisation englobe toutes les suppositions d'ordre mécanique et thermodynamique prises en compte lors de l'explication du phénomène. Chaque processus est associé à un modèle mathématique qui est décrit par un système d'équations différentielles partielles (EDP), comprenant les conditions aux limites et les conditions initiales qui caractérisent le processus. L'étude variationnelle des modèles inclut la formulation variationnelle ainsi que des résultats concernant l'existence et l'unicité de la solution.

-L'analyse numérique pour qu'on puisse trouver des solutions approchées.

1.1 Espaces fonctionnels

Pour présenter les modèles mathématiques qui illustrent divers processus de contact, Il nous faut définir les espaces fonctionnels auxquels sont associées les données et les variables inconnues. Le but de cette section est d'exposer ces espaces ainsi que leurs caractéristiques.

1.2 Espaces de Sobolev

On note par.

$$H^1(\Omega)^d = \left\{ v = (v_i) : v_i \in H^1(\Omega), \quad 1 \leq i \leq d \right\}$$

L'espace $H^1(\Omega)^d$ constitue un espace de Hilbert, avec le produit scalaire.

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^1(\Omega)^d} = \int_{\Omega} (u_i v_i + u_{i,j} v_{i,j}) dx. \quad (1.1)$$

La norme correspondante est

$$|v|_{H^1(\Omega)^d} = \left(\int_{\Omega} (v_i v_i + v_{i,j} v_{i,j}) dx \right)^{1/2}. \quad (1.2)$$

Soit $\varepsilon : H^1(\Omega)^d \rightarrow \mathcal{H}$ l'opérateur de déformation défini par

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}).$$

On nomme ε le tenseur des déformations linéarisées.

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^1(\Omega)^d} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^d} + (\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_{L^2(\Omega)^d} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d. \quad (1.3)$$

la norme associée est définie par

$$|v|_{H^1(\Omega)^d}^2 = |v|_{L^2(\Omega)^d}^2 + |\varepsilon(v)|_{L^2(\Omega)^d}^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega)^d. \quad (1.4)$$

L'opérateur de trace $\gamma : H^1(\Omega)^d \rightarrow L^2(\Gamma)^d$ est un opérateur linéaire et continu, autrement dit, il existe une constante positive c , qui ne dépend que de Ω , telle que

$$|v|_{L^2(\Gamma)^d} \leq c |v|_{H^1(\Omega)^d} \quad \forall v \in H^1(\Omega)^d. \quad (1.5)$$

Nous désignons par v_ν et v_τ les composantes normales et tangentielle de v sur la frontière pour tout vecteur $v \in H^1(\Omega)^d$, définies comme suit :

$$v_\nu = v \cdot \nu, \quad v_\tau = v - v_\nu \nu. \quad (1.6)$$

Dans l'analyse des problèmes de contact, nous définissons un sous-espace V de $H^1(\Omega)^d$ donné par

$$V = \left\{ v = (v_i) \in H^1(\Omega)^d : v = 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_1 \right\}. \quad (1.7)$$

Dans ce contexte, l'exigence " $v = 0$ p.p. sur Γ_1 ", dans le sens de la trace, signifie que $\gamma v = 0$ p.p. sur Γ_1 . Étant donné que l'opérateur de trace est linéaire et continu, V constitue un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)^d$. En outre, étant donné que $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$, l'inégalité de Korn est valide sur V , ce qui signifie qu'il existe une constante $c_k > 0$ qui dépend uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \geq c_k |v|_{H^1(\Omega)^d} \quad \forall v \in V. \quad (1.8)$$

On définit le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ sur V comme suit :

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}. \quad (1.9)$$

et la norme correspondante est

$$|u|_V = |\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}}. \quad (1.10)$$

On déduit de (1.4), (1.8) et (1.10) que $|\cdot|_V$ et $|\cdot|_{H^1(\Omega)^d}$ représentent des normes équivalentes sur V , ce qui signifie que $(V, |\cdot|_V)$ constitue un espace de Hilbert. Par ailleurs, l'opérateur de déformation $\varepsilon : V \rightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur linéaire et continu. En définitive, en se basant sur (1.5), (1.8) et (1.10), on constate qu'il y a une constante positive c_0 qui dépend de Ω, Γ_1 et Γ_3 telle que

$$|v|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 |v|_V \quad \forall v \in V. \quad (1.11)$$

On définit :

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ \sigma \in \mathcal{H} : \text{Div } \sigma \in L^2(\Omega)^d \right\}. \quad (1.12)$$

L'espace \mathcal{H}_1 est un espace de Hilbert doté d'un produit scalaire

$$(\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} = (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, \text{Div } \tau)_{L^2(\Omega)^d} \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}_1,$$

et $|\cdot|_{\mathcal{H}_1}$ la norme correspondante. Nous faisons référence à σ_ν et σ_τ comme étant les éléments normaux et tangents d'un champ de contraintes à la frontière, tels que

$$\sigma_\nu = (\sigma v) \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma v - \sigma_\nu \nu. \quad (1.13)$$

De plus, la formule de Green suivante est respectée.

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} \text{Div} \sigma \cdot v dx = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in H^1(\Omega)^d. \quad (1.14)$$

Dans ce qui suit, nous définissons les espaces de Sobolev liés aux inconnues électriques :

$$W = \left\{ \psi \in H^1(\Omega) : \psi = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_a \right\}. \quad (1.15)$$

Il faut préciser que W est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$. En outre, étant donné que $\text{mes}(\Gamma_a) > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est respectée.

$$|\nabla \psi|_{L^2(\Omega)^d} \geq c_F |\psi|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \psi \in W. \quad (1.16)$$

Dans ce contexte, c_F est une constante positive liée à Ω et Γ_a et $\nabla : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)^d$ représente l'opérateur gradient, avec $\nabla \psi = (\psi_i)$. On envisage le produit scalaire suivant sur W .

$$(\phi, \psi)_W = (\nabla \phi, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d}. \quad (1.17)$$

et $|\cdot|_W$ la norme correspondante. Il est important de noter que la norme dans l'espace $H^1(\Omega)$ est définie par

$$|\psi|_{H^1(\Omega)}^2 = |\psi|_{L^2(\Omega)}^2 + |\nabla \psi|_{L^2(\Omega)^d}^2. \quad (1.18)$$

On déduit de (1.16)-(1.18) que $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ et $|\cdot|_W$ sont des normes équivalentes sur W , formant ainsi $(W, |\cdot|_W)$ un espace de Hilbert.

Selon le théorème de trace de Sobolev, étant donné un ensemble mesurable Γ_3 qui est inclus dans Γ , il existe une constante positive \tilde{c}_0 qui dépend de Ω, Γ_a et Γ_3 telle que

$$|\psi|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0 |\psi|_W \quad \forall \psi \in W. \quad (1.19)$$

Nous introduisons l'espace pour le champ de déplacement électrique.

$$\mathcal{W}_1 = \left\{ \mathbf{D} \in L^2(\Omega)^d : \operatorname{div} \mathbf{D} \in L^2(\Omega) \right\}. \quad (1.20)$$

C'est un espace de Hilbert muni avec le produit scalaire

$$(\mathbf{D}, \mathbf{E})_{\mathcal{W}_1} = (\mathbf{D}, \mathbf{E})_{L^2(\Omega)^d} + (\operatorname{div} \mathbf{D}, \operatorname{div} \mathbf{E})_{L^2(\Omega)}$$

et la norme correspondante $|\cdot|_{\mathcal{W}_1}$. L'opérateur de divergence $\operatorname{div} : \mathcal{W}_1 \rightarrow L^2(\Omega)$ est un opérateur à la fois linéaire et continu. Par ailleurs, si $D \in \mathcal{W}_1$ représente une fonction régulière, la formule de Green ci-dessous est respectée.

$$(\mathbf{D}, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^d} + (\operatorname{div} \mathbf{D}, \psi)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{v} \psi da \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \quad (1.21)$$

Nous définissons aussi les espaces de Sobolev liés aux inconnues thermiques :

$$E = \left\{ y \in H^1(\Omega) / y = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \right\}.$$

Selon l'inégalité de Poincaré, une constante C existe telle que

$$|\nabla y|_H \geq C|y|_{H^1(\Omega)} \quad \forall y \in E. \quad (1.22)$$

C est une constante positive en lien avec les données du problème, sans influence sur les solutions ; sa valeur peut fluctuer d'une ligne à l'autre. Nous formulons la définition du produit scalaire dans l'espace E de la manière suivante :

$$(y, z)_E = (\nabla y, \nabla z)_H \quad \forall y, z \in E. \quad (1.23)$$

D'après les équations (1.22) et (1.23), on peut conclure que $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ et $|\cdot|_E$ représentent des normes équivalentes sur E . Donc, $(E, |\cdot|_E)$ constitue un espace de Hilbert. En outre, grâce au théorème de trace de Sobolev, on peut trouver une constante $\tilde{C}_\Gamma > 0$ qui est exclusivement

déterminée par $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2$ et Γ_3 telle que

$$|\theta|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{C}_\Gamma |\theta|_E \quad \forall \theta \in E. \quad (1.24)$$

E' représente le dual de l'espace E . Nous pouvons formuler $L^2(\Omega)$ avec son dual associé, ainsi :

$$E \subset L^2(\Omega) \subset E'.$$

On symbolise le crochet de dualité entre E' et E par $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et l'on utilise $|\cdot|_{E'}$ pour représenter la norme sur E' . De plus,

$$\langle \theta, \eta \rangle = (\theta, \eta)_{L^2(\Omega)},$$

pour $\theta \in L^2(\Omega)$ et $\eta \in E$

1.2.1 Espaces liés à l'approche numérique

Soit $\{\tau^h\}$ une famille des triangles réguliers constituant une partition de $\bar{\Omega}$ et compatibles avec la décomposition de la frontière $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$ et $\Gamma = \bar{\Gamma}_a \cup \bar{\Gamma}_v$.

Les espaces V, W et K sont approchés par les espaces de fonctions affines continues par morceaux $V^h \subseteq V$, $W^h \subseteq W$ et $K^h \subseteq K$ et qui sont de dimension finie,

$$\begin{aligned} V^h &= \left\{ v^h \in [C(\Omega)]^d : v^h|_T \in [P_1(T)]^d \quad \forall T \in \tau^h, v^h = 0 \text{ aux noeuds sur } \bar{\Gamma}_1 \right\}, \\ W^h &= \left\{ \zeta^h \in C(\Omega) : \zeta^h|_T \in P_1(T) \quad \forall T \in \tau^h, \zeta^h = 0 \text{ aux noeuds sur } \bar{\Gamma}_a \right\}, \\ E^h &= \left\{ \xi^h \in \mathcal{H} : \xi^h|_T \in [P_1(T)]^{d \times d} \quad \forall T \in \tau^h \right\}, \\ K^h &= \left\{ \xi^h \in E^h : \beta_k \leq \xi^h \leq \alpha \right\}. \end{aligned}$$

où

$P_1(T)$ représente l'espace des polynômes de degré plus petit ou égal à 1 dans T .

L'espace \mathcal{H} est approché par l'espace d'éléments finis des fonctions constantes par morceaux, noté \mathcal{H}^h , de la manière suivante :

$$\mathcal{H}^h = \left\{ \tau^h \in \mathcal{H} : \tau^h|_T \in [P_1(T)]^{d \times d}, \quad \forall T \in \tau^h \right\},$$

Pour tout $\tau \in \mathcal{H}$ on désigne par $P_{\mathcal{H}^h\tau}$ sa projection des éléments finis,

$$\left(P_{\mathcal{H}^h\tau}, \tau^h\right)_{\mathcal{H}} = \left(\tau, \tau^h\right)_{\mathcal{H}}, \quad \forall \tau^h \in \mathcal{H}^h.$$

1.3 Modélisation des problèmes thermo-viscoélastiques

Dans cette partie, nous introduisons un cadre physique global relatif aux divers problèmes de contact abordés dans la thèse. Ensuite, nous présentons l'équation de mouvement, les lois constitutives des divers matériaux ainsi que les conditions aux limites employées dans le cadre de cette thèse.

1.3.1 Cadre physique

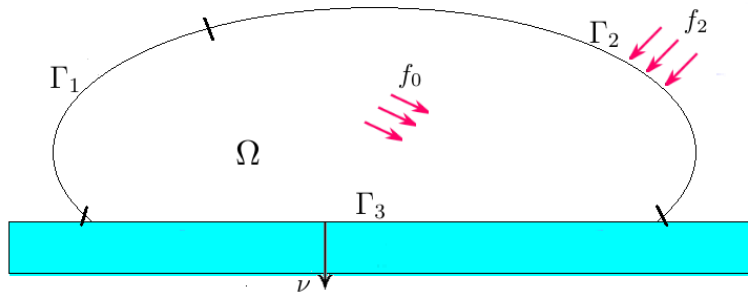


FIGURE 1.1 – Le problème thermo-visoélastique.

Généralement, le contexte physique a été présenté dans dans la section 1.1, qui sera détaillée ci-après. Nous envisageons un matériau déformable occupant un domaine limité $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2,3$) avec une frontière Γ de Lipschitz qui est divisée en trois sections disjointes et mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3 , de sorte que $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$. On présume que le corps est ancré sur la section Γ_1 de sa frontière, pendant que des forces volumétriques et de surface avec des densités f_0 et f_2 s'exercent respectivement dans Ω et sur Γ_2 . Sur Γ_3 , le corps peut potentiellement rencontrer un obstacle, la dite fondation. Dans la configuration de référence, nous présumons l'existence d'un écart h entre Γ_3 et la fondation, qui est évalué suivant la direction normale ν . Considérons u comme le vecteur de déplacement, σ comme le tenseur des contraintes et $\varepsilon = \varepsilon(u)$ comme le tenseur des déformations linéarisées. Il s'agit de fonctions qui sont liées à la variable spatiale x ainsi que la variable de temps t . Toutefois, dans ce qui suit, nous ne précisons pas expressément

la dépendance de ces valeurs à x et à t , par exemple, nous utilisons σ au lieu de $\sigma(x)$ ou $\sigma(x, t)$. T est une constante positive et l'intervalle de temps concerné est $[0, T]$. Le symbole de dérivée d'une fonction indique le taux de variation par rapport au temps, autrement dit $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$ et $\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Pour présenter un modèle mathématique d'un processus de contact spécifique Il est nécessaire pour nous de décrire la loi de comportement, les conditions aux limites et, le cas échéant.

Le modèle de contact d'un corps termo-viscoélastique est spécifié par une condition au limite sous-différentielle générale, où des effets thermiques peuvent se produire dans le contact de frottement avec la base. Nous nous intéressons à l'évolution d'un processus dynamique du corps.

En général, l'évolution d'un solide déformable est décrite par l'équation de mouvement.

$$\text{Div } \sigma + f_0 = \rho \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]. \quad (1.25)$$

Elle se simplifie en équation d'équilibre

$$\text{Div } \sigma + f_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]. \quad (1.26)$$

Pour compléter le système d'équations, on adapte maintenant le problème des lois de comportement.

1.3.2 Lois de comportement

Ce sont des relations entre u, σ et ε et leurs dérivées et caractérisent le comportement du solide .

1.3.3 Lois de comportement thermo-viscoélastiques avec longue mémoire

Elles sont de la forme

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}(\varepsilon(u)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(u(s))ds - C\theta. \quad (1.27)$$

\mathcal{A} et \mathcal{G} sont des opérateurs non linéaires qui correspondent respectivement à l'opérateur de viscosité et à l'opérateur d'élasticité. \mathcal{B} représente le tenseur de relaxation d'ordre quatre, tandis que C correspond à un opérateur de dilatation thermique. L'équation de la chaleur, dérivée du principe de conservation d'énergie, détermine l'évolution du champ de température θ comme suit. où ψ représente la fonction constitutive non linéaire qui illustre la chaleur produite par les forces internes, et $K_c = (k_{ij})$ désigne le tenseur de conductivité thermique tel que $\operatorname{div}(K_c \nabla \theta) = (k_{ij} \theta_i)$.

1.3.4 Condition de contact sous-différentielle

Décrivons ici la condition de contact de surface sur Γ_3 . Nous modélisons le contact frottant par une condition aux limites sous-différentielle générale de la forme

$$\mathbf{u} \in U, \quad \varphi(\mathbf{v}) - \varphi(\dot{\mathbf{u}}) \geq -\boldsymbol{\sigma} \nu \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) \quad \forall \mathbf{v} \in U \text{ dans } \Gamma_3. \quad (1.28)$$

Dans cette condition, U représente l'ensemble des fonctions de test admissibles au contact, et $\boldsymbol{\sigma} \nu$ désigne le vecteur de contrainte de Cauchy sur la frontière de contact, et $\varphi : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe donnée. L'inégalité donnée est vérifiée presque partout sur la surface de contact. Diverses situations peuvent être modélisées par une telle condition. Des exemples et des explications détaillées de problèmes d'inégalité en mécanique de contact conduisant à des conditions aux limites de cette forme sont disponibles dans [20, 21].

Nous présentons ici deux exemples de loi de contact et de frottement conduisant à une telle inégalité sous-différentielle.

Exemple 1

Un contact bilatéral avec la loi de frottement de Tresca.

La Condition de contact sur Γ_c est bilatérale et satisfai (voir [31]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\nu = 0, \quad |\sigma_\tau| \leq h, \\ |\sigma_\tau| < h \implies \dot{u}_\tau = \mathbf{0}, \\ |\sigma_\tau| = h \implies \dot{u}_\tau = -\lambda \cdot \sigma_\tau, \text{ pour quelque } \lambda \geq 0, \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_c \times (0, T) \quad (1.29)$$

Ici, h représente la limite de frottement, c'est-à-dire l'amplitude de la traction limite à laquelle le glissement commence, avec $h \in L^\infty(\Gamma_c)$, $h \geq 0$ p.p. on Γ_c . Nous en déduisons l'espace de déplacement admissible :

$$V := \{\mathbf{w} \in H_1; \text{ with } w_v = 0 \text{ dans } \Gamma_c\},$$

et la fonction de contact sous-différentielle :

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h(\mathbf{x}) |\mathbf{y}_{\tau(x)}| \quad \forall x \in \Gamma_c, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$$

où $\mathbf{y}_{\tau(x)} := \mathbf{y} - y_{v(x)} \mathbf{v}(\mathbf{x})$, $y_{v(x)} := \mathbf{y} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})$, avec $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ la normale à l'unité $\mathbf{x} \in \Gamma_c$.

Nous avons alors

$$\psi(\mathbf{v}) := \int_{\Gamma_c} h |\mathbf{v}_\tau| da, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (1.30)$$

est bien définie sur V avec la propriété : pour un certain $c > 0$,

$$|\psi(\mathbf{w}) - \psi(\mathbf{v})| \leq c \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_{L^2(\Gamma_c)^d}, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$$

Premièrement, il est clair que $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe. En utilisant le plongement continu de V dans $L^2(\Gamma_c)^d$ et la dernière inégalité, nous trouvons que ψ est lipschitzienne continue sur V . Cela donne (1.30). Pour approximer la fonction ψ , on utilise la suite

$$\psi_n(\mathbf{v}) := \int_{\Gamma_c} h \sqrt{|\mathbf{v}_\tau|^2 + \frac{1}{n}} da, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On vérifie que la dérivée de Fréchet de ψ_n est donnée par

$$\psi'_n(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} = \int_{\Gamma_c} h \frac{(\mathbf{v}_\tau, \mathbf{h}_\tau)_{\mathbb{R}^d}}{\sqrt{|\mathbf{v}_\tau|^2 + \frac{1}{n}}} da, \quad \forall \mathbf{h} \in V$$

donc ψ_n est de classe C^1 . D'après la formule précédente, il est clair que la dérivée ψ'_n ($n \geq 1$) est un opérateur monotone. Alors ψ_n est convexe pour tout $n \geq 1$. Une autre méthode plus longue pour trouver cette propriété consiste à utiliser des calculs algébriques directs. On peut

montrer que pour tout $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ telle que $\alpha + \beta = 1$, et pour tout real x et $y, n \geq 1$:

$$\sqrt{(\alpha x + \beta y)^2 + \frac{1}{n}} \leq \alpha \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \beta \sqrt{y^2 + \frac{1}{n}}$$

La propriété de convergence de (1.30) découle du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Pour justifier (1.30), nous utilisons le théorème de plongement compact suivant. (voir e.g. [13])

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_n \rightarrow \mathbf{w}, \mathbf{w}'_n \rightharpoonup w' \text{ weakly in } L^2(0, T; V) &\implies \mathbf{w}_n \rightarrow \mathbf{w} \\ \text{fortement dans } L^2(0, T; L^2(\Gamma)^d) & \end{aligned}$$

et le fait que

$$\psi_n(\mathbf{w}_n) \geq \psi(\mathbf{w}_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

et de la continuité de ψ :

$$\int_0^T \psi(\mathbf{w}_n) \rightarrow \int_0^T \psi(\mathbf{w}), \quad n \rightarrow +\infty$$

Enfin, (1.30) est immédiat de la dérivée de Fréchet de ψ_n .

Exemple 2

Réponse amortie normale et loi de frottement de Tresca

La condition de contact à réponse amortie normale avec la loi de frottement de Tresca (voir par exemple [5]) est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sigma_v = k_0 |\dot{u}_v|^{r-1} \dot{u}_v, \quad |\sigma_\tau| \leq h, \\ |\sigma_\tau| < h \implies \dot{u}_\tau = 0, \\ |\sigma_\tau| = h \implies \dot{u}_\tau = -\lambda \sigma_\tau, \quad \text{pour tout } \lambda \geq 0, \end{array} \right. \quad \text{on } \Gamma_c \times (0, T)$$

Ici $0 < r < 1$ et $h, k_0 \in L^\infty(\Gamma_c), h \geq 0, k_0 \geq 0$. Le coefficient k_0 représente la dureté de la fondation et h le seuil de frottement. L'espace de déplacement admissible est donné par :

$$V := H_1$$

et la fonction de contact sous-différentielle

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{r+1} k_0(\mathbf{x}) |y_{v(\mathbf{x})}|^{r+1} + h(\mathbf{x}) |\mathbf{y}_\tau(\mathbf{x})| \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$$

En notant $p := r + 1$, nous avons la fonction de contact bien définie sur V par

$$\psi(v) := \int_{I_c} \frac{k_0}{p} |v_v|^p da, + \int_{I_c} h |v_\tau| da, \quad \forall v \in V$$

Ici $1 < p < 2$. Ensuite, l'application $x \geq 0 \mapsto x^p$ est alors convexe, ce qui implique que ψ est convexe sur V . En utilisant les plongements continus de V dans $L^2(\Gamma_c)^d$, et de $L^2(\Gamma_c)$ dans $L^p(\Gamma_c)$, nous vérifions également que

ψ is Lipschitz continuous dans V

Pour approximer la fonction ψ , nous utilisons la suite

$$\psi_n(\mathbf{v}) := \int_{\Gamma_c} \frac{k_0}{p} \left(|v_v|^2 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{p}{2}} da + \int_{\Gamma_c} h \sqrt{|\mathbf{v}_\tau|^2 + \frac{1}{n}} da, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Nous vérifions que la dérivée de Fréchet de ψ_n est donnée par

$$\psi'_n(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} := \int_{\Gamma_c} k_0 \frac{v_v h_v}{\left(|v_v|^2 + \frac{1}{n} \right)^{1-\frac{p}{2}}} da + \int_{\Gamma_c} h \frac{(\mathbf{v}_\tau, \mathbf{h}_\tau)_{\mathbb{R}^d}}{\sqrt{|\mathbf{v}_\tau|^2 + \frac{1}{n}}} da, \quad \forall \mathbf{h} \in V.$$

Du fait que l'application $x \geq 0 \mapsto x^p$ est convexe croissante et utilise (1.30), nous vérifions que ψ_n est convexe pour tout $n \geq 1$. De même, nous avons les conditions sur (1.30) avec les mêmes arguments que dans l'exemple précédent. Nous concluons alors que les hypothèses de (1.30) sont également satisfaites dans cet exemple.

1.4 Conditions aux limites de contact

Les conditions aux limites sur la surface de contact sont définies dans la direction normale ou dans le plan tangent, cette dernière étant désignée comme condition de frottement. Vers la

direction normale, nous pouvons observer le contact unilatéral (lorsque l'obstacle est rigide), bilatéral (lorsqu'il n'y a pas de séparation entre le corps et l'obstacle), de conformité normale (lorsque l'obstacle est déformable) ou bien une réponse normale instantanée (lorsque la surface de contact est lubrifiée). Sauf pour le cas extrême où la contrainte tangentielle est absente (le scénario sans frottement), Le frottement peut être différencié en frottement de seuil (lorsque le glissement se produit lorsque la force de frottement atteint un niveau critique) ou sans seuil (lorsque le glissement se produit pour toute valeur de force de frottement). Les lois de frottement à seuil, principalement celles de Coulomb et de Tresca, sont fréquemment citées dans la documentation. Elles représentent un modèle de frottement sec, contrairement aux lois de frottement sans seuil qui illustrent un frottement lubrifié.

On définit maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ .

Conditions aux limites de déplacement

Étant donné que le corps est intégré dans une position stable sur la section Γ_1 , le domaine des déplacements u doit être considéré comme nul.

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, T). \quad (1.31)$$

Conditions aux limites de traction

Par conséquent, le vecteur des contraintes de Cauchy σ_ν satisfait à l'effet d'une traction surfacique de densité f_2 agissant sur Γ_2 .

$$\sigma_\nu = f_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0, T). \quad (1.32)$$

Conditions aux limites bilatéral

Le contact se fait d'une façon bilatérale, c'est à dire le contact est maintenu pendant le mouvement et il n'y a pas de séparation entre le corps et l'obstacle. La composante normale du champ des déplacements s'annule sur la surface de contact et donc

$$u_\nu = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T) \quad (1.33)$$

Conditions de Contact avec compliance normale

Dans ce scénario, on suppose que la fondation peut se déformer et que la zone de contact n'est pas prédéfinie. Le critère conforme est également connu sous le nom de condition normale, et il s'applique à la contrainte normale σ_ν .

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - h). \quad (1.34)$$

Dans cette formule, u_ν symbolise le déplacement normal, h étant la distance entre l'objet et la fondation. Quant à p_ν , c'est une fonction positive définie et appelée fonction de conformité normale. Cette condition indique que la fondation agit sur le corps selon sa pénétration $u_\nu - h$.

Loi de frottement de type Tresca

Cas statique

Nous représentons le frottement en utilisant la version statique de la loi de Tresca. Par les conditions aux limites indiquées ci-dessous :

$$\begin{cases} u_\tau = 0, & |\sigma_\tau| \leq h \quad \text{sur } \Gamma_3 \\ |\sigma_\tau| < h \implies u_\tau = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \\ |\sigma_\tau| = h \implies \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (1.35)$$

où

$h > 0$ représente le seuil de glissement, que nous assumons comme étant constant. L'état $u_\nu = 0$ indique que le contact est mutuel, signifiant que l'objet ne se soulève pas de la base.

L'inégalité $|\sigma_\tau| \leq h$ signifie que la force de frottement σ_τ est limitée par une valeur déterminée, g . Lorsque l'inégalité stricte $|\sigma_\tau| < h$ est respectée, le glissement est impossible et donc les mouvements tangents sont nuls. À ces emplacements, le corps s'attache à la base.

Quand $|\sigma_\tau| = h$, le glissement est autorisé. À ces points, le corps peut glisser sur la base et la force de frottement s'oppose à ce mouvement.

Cas dynamique

Dans le cas dynamique, la loi de Tresca prend la forme suivante :

$$\begin{cases} u_\tau = 0, & |\sigma_\tau| \leq h \quad \text{sur } \Gamma_3 \\ |\sigma_\tau| < h \implies \dot{u}_\tau = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \\ |\sigma_\tau| = h \implies \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (1.36)$$

où

Nous considérons que $h > 0$ est le seuil de glissement, qui est fixé.

La condition $u_\nu = 0$ traduit le fait que le contact est bilatéral et donc le corps ne décolle pas de la fondation .

L'inégalité $|\sigma_\tau| \leq h$ veut dire que la force de frottement σ_τ est bornée par une valeurg fixé .

Quand on a l'inégalité stricte $|\sigma_\tau| < h$, le glissement n'est pas possible et ainsi, les mouvements tangentiels sont inexistant. À ces points, le corps se fixe à la base. Quand $|\sigma_\tau| = h$, le glissement est envisageable. À ces points, le corps peut glisser sur la base et la force de frottement s'oppose à ce mouvement.

Lois de frottement de type Coulomb

C'est une des lois de frottement les plus répandues dans la littérature mathématique. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de glissement et peut s'énoncer comme suit

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq \mu |\sigma_\nu| \\ |\sigma_\tau| < \mu |\sigma_\nu| \implies \dot{u}_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = \mu |\sigma_\nu| \implies \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \end{cases} \quad (1.37)$$

où $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement. Une version quasi-statique de lois de Coulomb s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq \mathbf{F}_b, \\ -\sigma_\tau = \mathbf{F}_b \frac{\dot{u}_\tau}{|\dot{u}_\tau|} \quad \text{si } \dot{u}_\tau \neq 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \end{cases} \quad (1.38)$$

Dans ce contexte, \dot{u}_τ désigne la vitesse tangentielle ou le taux de glissement, tandis que F_b symbolise le seuil de frottement (ce dernier n'est pas déterminé à l'avance et est fonction du

coefficient de frottement ainsi que de la solution du problème). On peut choisir F_b de la façon suivante :

$$F_b = F_b(\sigma_\nu) = \mu |\sigma_\nu|, \quad (1.39)$$

où μ est positif et représente le coefficient de friction. Cette option dans (1.46) mène à la version traditionnelle de la loi de Coulomb. Les options

$$F_b = F_b(\sigma_\nu) = p_\tau(u_\nu - h) \quad \text{et} \quad F_b = F_b(\sigma_\nu) = p_\tau(\dot{u}_\nu) \quad (1.40)$$

sont en accord avec la condition de contact à conformité normale et de réponse immédiate normale, respectivement. Dans ce contexte, p_τ est une fonction positive qui ne s'applique pas aux arguments négatifs, c'est-à-dire en l'absence de contact.

On utilise fréquemment la loi de Coulomb pour les corps rigides ou élastiques. On note également qu'il s'agit d'une loi de seuil. Il n'y a pas de glissement tant que le seuil n'est pas franchi. Ce seuil n'est pas fixe et est tributaire de la contrainte normale, ce qui constitue un obstacle considérable pour l'analyse mathématique de cette loi de frottement. où $\mu \geq 0$ représente le coefficient de friction.

Loi de Coulomb non locale généralisée

En fin de compte, nous introduisons la loi du frottement qui étend la loi antérieure. Considérons l'opérateur R comme un régularisateur normal, c'est-à-dire un opérateur linéaire continu qui agit de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ vers $\mathbb{L}^2(\Gamma)$. L'introduction de la régularisante R est motivée par des considérations techniques, en raison de l'irrégularité marquée de la trace du tenseur des contraintes à la frontière. On formule cette loi de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq \mu p(|R\sigma_\nu|) \\ |\sigma_\tau| < \mu p(|R\sigma_\nu|) \implies \dot{u}_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = \mu p(|R\sigma_\nu|) \implies \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau. \end{array} \right. \quad (1.41)$$

où $p : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ représente le seuil de frottement qui satisfait les conditions ci-dessous.

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \text{il existe } M > 0 \text{ tel que } : |p(x, r_1) - p(x, r_2)| \leq M |r_1 - r_2| \\ \text{pour tout } r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+, p \cdot px \in \Gamma_3 \\ (b) : \text{L'application } : x \rightarrow p(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}_+ \\ (c) : p(x, 0) = 0, p \cdot px \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (1.42)$$

L'inclusion de l'opérateur R dans (1.41) nous amène à qualifier (1.41) de loi de frottement non local. On donne une version quasi-statique de la loi de frottement de Coulomb, utilisée dans la littérature.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - h). \\ \|\sigma_\nu\| \leq p_\nu(u_\nu - h). \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (1.43)$$

Condition aux limites thermiques

Les conditions d'échange de la chaleur ponctuelle sur la frontière Γ sont habituellement données par

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times (0, T). \quad (1.44)$$

$$k_{ij}\theta_i n_j = k_\tau(|\dot{u}_\tau|) - k_e(\theta - \theta_R) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (1.45)$$

où k_{ij} sont les composantes du tenseur de conductivité thermique \mathcal{K}_c , n_j sont les composantes de la normale n ; θ est la température de la surface ponctuelle, $h_\tau(\cdot)$ est la puissance générée par le frottement sous forme de chaleur, qui dépend de la vitesse tangentielle \dot{u} , k_e est le coefficient de l'échange thermique et θ_R est la température connue de la fondation.

1.5 Formulation des problèmes piézoélectriques

Ce passage se concentre sur le cadre physique, les lois de comportement et les conditions aux limites relatives aux problèmes de piézoélectricité.

1.5.1 Cadre physique

Pour un matériau piézoélectrique, Γ_3 désigne la surface de contact qui constitue le cadre physique. Dans le contexte de la modélisation des problèmes de contact avec des matériaux

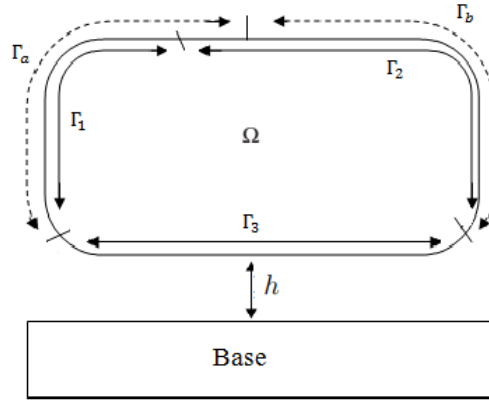


FIGURE 1.2 – Le problème électro-visoélastique.

piézoélectriques, nous prenons en compte le cadre physique illustré dans la Figure 1.2. On envisage un corps déformable qui occupe un domaine limité $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, dont la frontière Γ est de Lipschitz, et qui se divise en trois sections disjointes et mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3 d'une part, et une partition de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ en deux parties disjointes et mesurables Γ_a et Γ_b , d'une autre part, telles que $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$ et $\text{mes}(\Gamma_a) > 0$. Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Le corps est encastré sur Γ_1 , alors le champ de déplacement est nul sur cette partie. Des forces surfaciques de densité f_2 agissent sur Γ_2 et des forces volumiques de densité f_0 agissent dans Ω . Nous supposons aussi que Sur Γ_a , le potentiel électrique est nul et une charge de densité surfacique q_b est attribuée à Γ_b . Le corps touche une base collante et conductrice (avec ou sans friction) sur la section Γ_3 . Nous nous intéressons à des modèles mathématiques qui illustrent le changement de l'état mécanique et électrique du matériau piézoélectrique durant la période allant de $[0, T]$, avec $T > 0$. En plus du champ de contraintes $\sigma = \sigma(x, t)$ et du champ de déplacement $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$, nous intégrons le champ de déplacement électrique $\mathbf{D} = \mathbf{D}(x, t)$ ainsi que le potentiel électrique $\varphi = \varphi(x, t)$. Les fonctions à déterminer dans le problème de contact piézoélectrique sont $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Dans le cas où le processus est dynamique, l'équation du mouvement pour le champ des contraintes est spécifiée par l'équation (1.26), tandis que si le processus est quasi-statique, l'équation d'équilibre pour le champ des contraintes est définie par l'équation (1.27). L'équation d'équilibre pour le champ de déplacement électrique décrit l'évolution du corps piézoélectrique.

$$\text{Div } D - q_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

où q_0 représente la densité de charges électriques en volume et « div » se réfère à l'opérateur de divergence, soit $\text{div } \mathbf{D} = (D_{i,i})$. Nous nous tournons désormais vers les conditions aux limites sur $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_a$ et Γ_b . Premièrement, étant donné que le matériau piézoélectrique est ancré sur Γ_1 , nous appliquons la condition aux limites de déplacement (1.31). De plus, la condition aux limites de traction sur Γ_2 est décrite par (1.32). Par conséquent, étant donné que le potentiel électrique est nul sur Γ_a pendant le processus, nous appliquons la condition aux limites.

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T)$$

Nous tenons également à préciser qu'une charge électrique de densité surfacique q_b est appliquée sur Γ_b . Par conséquent, on a :

$$\text{D. } v = q_b \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T)$$

Afin de parfaire un modèle mathématique dédié à un processus piézoélectrique spécifique, en plus des équations d'équilibre et des conditions aux limites mentionnées précédemment, il est nécessaire d'incorporer les lois de comportement ainsi que les conditions de contact.

Lois de comportement

Pour présenter la loi de comportement d'un matériau piézoélectrique, nous établissons le champ électrique $E(\varphi)$ par l'équation suivante :

$$\mathbf{E}(\varphi) = -\nabla\varphi = -(\varphi, \cdot),$$

où $\varphi_{,i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$. Il est possible d'exprimer une loi constitutive générale de matériau électro-viscoélastique à mémoire longue et à endommagement sous cette forme.

$$\begin{aligned} \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) &+ \mathcal{G}(\varepsilon(u), \alpha) \\ &+ \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(u(s))ds - \mathcal{E}^*\nabla\varphi. \end{aligned} \tag{1.46}$$

$$D = CE(\varphi) + \xi\varepsilon(u). \tag{1.47}$$

où \mathcal{A} représente la fonction non linéaire associée à la viscosité, \mathcal{G} symbolise un opérateur non linéaire relatif à l'élasticité et \mathcal{B} désigne une fonction constitutive générale non linéaire dépendant de la variable interne d'état. α décrivant l'endommagement du matériau. $E(\varphi) = -\nabla\varphi$ représente le champ électrique, $\mathcal{E} = e_{ijk}$ est le tenseur piézoélectrique d'ordre trois, \mathcal{E}^* est sa transposée et \mathcal{C} désigne le tenseur de perméabilité électrique. Lorsque $\mathcal{A} = 0$ La loi constitutive (1.27) se simplifie en la loi constitutive électro-élastique fournie par

$$\sigma = \mathcal{G}(\varepsilon(u), \alpha) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(u(s))ds - \mathcal{E}^*\nabla\varphi.. \quad (1.48)$$

On emploie l'inclusion différentielle suivante pour illustrer la progression du domaine de dégât.

$$\dot{\alpha} - k\alpha + \partial\phi_k(\alpha) \ni \mathcal{S}(\varepsilon(u), \alpha).$$

où K représente l'ensemble des fonctions admissibles de dégradation définies par

$$K = \{\alpha \in H^1(\Omega); 0 \leq \alpha \leq 1, \text{ p.p dans } \Omega\}$$

, où \mathcal{K} est un coefcient positif, $\partial\phi_k$ désigne le sous-différentiel de la fonction indicatrice ϕ_k et \mathcal{S} est une fonction constitutive donnée qui décrit la source d'endommagement dans le système

Les conditions de contact

Dans cette partie, nous allons exposer les conditions de contact électrique liées aux problèmes piézoélectriques sur la section Γ_3 de la surface de contact. Nous étudions la situation où la fondation possède une conductivité électrique et où son potentiel est fixé à φ_0 . On considère que la condition électrique à la surface de contact est définie par

$$D. v = \psi(u_v - h) \Phi(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T),$$

où ψ et Φ sont des fonctions prédéfinies qui seront détaillées plus loin. Cette condition représente une condition régularisée qui peut être obtenue de la façon suivante. En l'absence de contact (c'est-à-dire lorsque $u_v < h$), il n'y a pas de charges électriques libres présentes sur la surface,

et donc, la composante normale du champ de déplacement électrique disparaît. Donc,

$$u_v < h \Rightarrow \mathbf{D} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.49)$$

Durant la phase de contact (c'est-à-dire lorsque $u_v \geq h$), on suppose que la composante normale du champ d'électricité ou la charge électrique libre est proportionnelle à l'écart entre le potentiel de la base et le potentiel de surface du corps, multiplié par une constante positive l servant de coefficient proportionnel. Donc,

$$u_v \geq h \Rightarrow \mathbf{D} \cdot \mathbf{v} = l(\varphi - \varphi_0). \quad (1.50)$$

Utilisons les combinaisons (1.49) et (1.50) pour parvenir à

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{v} = l\chi_{[0,\infty)}(u_v - h)(\varphi - \varphi_0). \quad (1.51)$$

où $\chi_{[0,\infty)}$ représente la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, \infty)$, définie par

$$\chi_{[0,\infty)}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ 1 & \text{si } r \geq 0 \end{cases}$$

La condition (1.51) illustre un contact électrique parfait et elle est en quelque sorte comparable à la condition de contact bien établie de Signorini. On peut voir ces deux conditions comme des sur-idéalisations dans de nombreuses applications.

1.6 Modélisation des problèmes thermo-électro-élasto-viscoplastiques

On considère un corps thermo-électro-viscoélastique occupant un domaine borné $\Omega \in \mathbb{R}(d=2,3)$ avec une surface frontière régulière, divisée en trois sections disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 , qui correspondent aux conditions de bord mécaniques. D'une part, et en deux sections $S_1 = \Gamma_1, (S_2 = \Gamma_2)$ pour les conditions thermiques. On suppose que $mes\Gamma_1 > 0$. Le corps et l'obstacle rigide interagissent de manière bidirectionnelle avec friction sur la section Γ_3 . Prenons en compte l'intervalle

temporel $[0, T]$ avec $T > 0$. Le corps est intégré sur Γ_1 au sein d'une structure fixe. Des forces de traction surfaciques de densité f_2 sont appliquées sur Γ_2 , tandis que des forces volumiques de densité \tilde{g}_0 agissent dans γ . Et d'une source de chaleur externe potentiellement appliquée dans $\Omega \times (0, T)$, spécifiée par les fonctions q . Le corps est exposé à un potentiel électrique ϕ nul sur Γ_1 , tandis qu'il subit l'influence des charges électriques de densité surfaciques q_2 qui agissent sur Γ_2 .

Lois de comportement

On peut formuler une loi constitutive générale de matériaux thermo-électro-élasto-viscoplastiques dotés d'une mémoire longue et d'endommagements sous la forme suivante.

$$\sigma(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))) + \mathcal{G}(\varepsilon u(t), \alpha(t)) + \int_0^t \mathcal{Q}(\sigma(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))), \varepsilon(u(s))) ds + \mathcal{E}^* \nabla \varphi(t) - \mathcal{M}\theta(t). \quad (1.52)$$

$$D(t) = \mathcal{E}\varepsilon(u(t)) - B\nabla(\varphi(t)) - \mathcal{P}\theta(t). \quad (1.53)$$

$$\dot{\theta} - \operatorname{div}(K\nabla\theta) = -M\nabla\dot{u} + q \quad \text{in } \Omega \times (0, T). \quad (1.54)$$

Ou \mathcal{A} et \mathcal{G} sont des opérateurs non linéaires représentent respectivement, l'opérateur de la viscosité, l'opérateur d'élasticité, et \mathcal{B} , $E(\varphi) = -\nabla\varphi$, $\varepsilon = (e_i)$, \mathcal{M} , B , et \mathcal{P} sont des opérateurs de relaxation, champ électrique, piézoélectrique, dilatation thermique, tenseurs de permittivité électrique.

1.7 Rappels d'analyse

Dans cette partie, nous introduisons les espaces fonctionnels utilisés dans cette thèse, et donnons quelques propriétés nécessaires pour l'élaboration de ce travail. Dans ce chapitre, Ω est considéré comme un domaine borné et Lipschitzien de $\mathbb{R}^d (d = 2; 3)$, comprenant une frontière Γ régulière et Lipschitzienne. De plus, nous examinons deux décompositions de Γ , à savoir $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ et $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b$, avec une condition d'exclusion mutuelle pour les ensembles, c'est-à-dire que $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Nous assurons que $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, ainsi que l'ensemble a et l'ensemble b sont mesurables, avec des mesures strictement positives notées respectivement pour chaque ensemble.

Théorème 1.7.1. (Rellich)

$H^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega)$ avec injection compacte.

Théorème 1.7.2. (Trace de Sobolev) Il y a une application continue et linéaire $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow$

$\mathbb{L}^2(\Gamma)$ telle que $\gamma u = u|_\Gamma$ pour $u \in C^1(\bar{\Omega})$

Remarque

L'espace mentionné ci-dessus, noté $L^2(\Gamma)$, fait référence à l'ensemble de fonctions réelles sur Γ qui sont de classe \mathbb{L}^2 au regard de la mesure de surface de Γ . L'application γ , aussi appelée application trace, correspond à l'extension par densité de l'application $u \rightarrow u|_\Gamma$ qui est définie pour $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Il est à noter que l'opérateur de trace $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est compact. Nous allons introduire les espaces de Hilbert suivants, liés aux variables mécaniques u et σ

$$\begin{aligned} H &= \left\{ u = (u_i) \text{ tel que } u_i \in \mathbb{L}^2(\Omega) \right\} = \left(\mathbb{L}^2(\Omega) \right)^d \\ \mathcal{H} &= \left\{ \sigma = (\sigma_{ij}) \text{ tel que } \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in \mathbb{L}^2(\Omega) \right\} = \left(\mathbb{L}^2(\Omega) \right)_o^{d \times d} \\ H_1 &= \left\{ u = (u_i) \text{ tel que } u_i \in H^1(\Omega) \right\} = H^1(\Omega)^d \\ \mathcal{H}_1 &= \left\{ \sigma \in \mathcal{H} \text{ tel que } \sigma_{ij,j} \in H \right\} \end{aligned}$$

Les espaces H , \mathcal{H} , H_1 et \mathcal{H}_1 sont des espaces de Hilbert réels dotés de produits scalaires définis respectivement par

$$\begin{aligned} (u, v)_H &= \int_\Omega u_i \cdot v_i dx \\ (\sigma, \tau)_\mathcal{H} &= \int_\Omega \sigma_{ij} \cdot \tau_{ij} dx \\ (u, v)_{H_1} &= (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_\mathcal{H} \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} &= (\sigma, \tau)_\mathcal{H} + (\text{Div } \sigma, \text{Div } \tau)_H \end{aligned}$$

où $\varepsilon : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$ et $\text{Div} : \mathcal{H}_1 \rightarrow H$ sont les opérateurs de déformation et de divergence, respectivement, définis par et soit $|\cdot|_V$ la norme associée, i.e.

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j})$$

Soit X un espace de Banach, nous désignons par $\|\cdot\|_X$ la norme associée, en particulier les normes associées aux espaces H , \mathcal{H} , H_1 et \mathcal{H}_1

Puisque la frontière Γ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν à la frontière est défini

p.p. On emploie la notation v pour faire référence à la trace γv de v sur Γ , pour tout champ de vecteurs $v \in H_1$. Il faut noter que l'application de trace $\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$ est à la fois linéaire et continue, bien qu'elle ne soit pas surjective. On désigne par H_Γ l'image de H_1 sous cette transformation, et ce sous-espace s'injecte continuellement dans $\mathbb{L}^2(\Gamma)^d$. Notons H'_Γ comme étant le dual de H_Γ , et (\cdot, \cdot) comme le produit dual entre H'_Γ et H_Γ . Pour chaque $\sigma \in \mathcal{H}_1$, on peut trouver un élément $\sigma\nu$ appartenant à H'_Γ tel que

$$(\sigma\nu, \gamma v)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v)_H, \forall v \in H_1. \quad (1.55)$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(\sigma\nu, \gamma v) = \int_{\Gamma} \sigma\nu \cdot v da, \forall v \in H_1$$

Donc, pour σ assez régulier nous avons la formule suivante (Formule de Green)

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma\nu \cdot v da, \quad \forall v \in H_1. \quad (1.56)$$

Nous définissons les sous-espaces fermés de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et H^1

$$Y = \{v \in \mathbb{L}^2(\Omega) / \varepsilon_{ij}(v) \in \mathbb{L}^2(\Omega)\} = H^1(\Omega), \quad V = \{v \in H_1 \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

Puisque $\text{mes } \Gamma_1 > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V , alors, il existe une constante $C_K > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \geq C_K |v|_{H_1}, \quad \forall v \in H_1.$$

Nous considérons sur l'espace V , le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad \forall u, v \in V, \quad (1.57)$$

et soit $|\cdot|_V$ la norme associée, c'est à dire.

$$|v|_V = |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}}, \quad \forall v \in V. \quad (1.58)$$

Selon l'inégalité de Korn, $|\cdot|_{H_1}$ et $|\cdot|_V$ sont des normes équivalentes sur l'espace V , ce qui signifie que $(V, |\cdot|_V)$ constitue un espace de Hilbert. De plus, selon le théorème du tracé de Sobolev, il existe une constante C_0 qui dépend uniquement de Ω , Γ_1 et Γ_3 telle que

$$|v|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 |v|_V, \forall v \in V. \quad (1.59)$$

De plus, on note par V' l'espace dual de V et par Y' celui de Y . Nous utilisons les notations $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$ et $(\cdot, \cdot)_{Y' \times Y}$ pour représenter la dualité entre V', V et Y', Y respectivement. Dans la suite, nous allons établir les espaces de Sobolev liés aux variables électriques (champ de déplacement électrique D et potentiel électrique φ) des problèmes électro-mécaniques qui seront présentés dans la seconde partie de cette thèse. Soient les espaces

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \left\{ D = (D_i) \quad \backslash D_i \in \mathbb{L}^2(\Omega), \operatorname{div} D \in \mathbb{L}^2(\Omega) \right\} \\ W &= \left\{ \zeta \in H^1(\Omega) \quad \backslash \zeta = 0 \text{ sur } \Gamma_a \right\} \end{aligned}$$

où $\operatorname{div} D = (D_{i,j})$: Ces espaces \mathcal{W} et W sont des espaces de Hilbert réels équipés des produits scalaires définis par

$$\begin{aligned} (D, E)_W &= (D, E)_{L^2(\Omega)^d} + (\operatorname{div} D, \operatorname{div} E)_{L^2(\Omega)} \\ (\varphi, \phi)_W &= (\nabla \varphi, \nabla \phi)_{L^2(\Omega)^2} \end{aligned}$$

et leurs normes associées $|\cdot|_W$ et $|\cdot|_W$, respectivement.

$$|D|_W^2 = |D|_{L^2(\Omega)^d}^2 + |\operatorname{div} D|_{L^2(\Omega)}^2, \quad |\varphi|_W = |\nabla \varphi|_{L^2(\Omega)^d}$$

Étant donné que $\operatorname{mes}(\Gamma_a) > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est respectée, donc,

$$|\nabla \xi|_W \leq c_F |\xi|_{H^1(\Omega)}, \forall \xi \in W. \quad (1.60)$$

où $C_F > 0$ est une constante qui dépend exclusivement de Ω et Γ_a , et $\nabla \xi = (\xi_{,i})$. Il s'ensuit de (1.60) que $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ et $|\cdot|_W$ sont des normes équivalentes sur W et donc $(W, |\cdot|_W)$ est un espace réel de Hilbert. De plus, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante \tilde{c}_0

strictement basé sur Ω, Γ_a et Γ_3 , de telle sorte que.

$$|\xi|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0 |\xi|_W, \quad \forall \xi \in W. \quad (1.61)$$

De plus, il convient de noter que lorsque $D \in \mathbb{L}^2(\Omega)^d$ est une fonction régulière, la formule de Green est respectée.

$$(D, \nabla \xi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d} + (\operatorname{div} D, \xi)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} D\nu \cdot \xi da, \quad \forall \xi \in H^1(\Omega) \quad (1.62)$$

Pour des précisions supplémentaires concernant les espaces de Sobolev, nous suggérons au lecteur de se référer à [37, 38, 12].

1.8 Triplet de Gelfand

Dans cette section nous rappelons la définition d'un triplet de Gelfand. Pour cela on va commencer par un rappel sur le théorème de représentation de Riesz-Fréchet

Théorème 1.8.1. *Considérons un espace de Hilbert noté H et son espace dual désigné par H' . Ainsi, pour chaque $\varphi \in H'$, on peut trouver de manière unique un $f \in H$ tel que*

$$(\varphi, v)_{H' \times H} = (f, v)_H, \quad \forall v \in H$$

On a de plus

$$|\varphi|_{H'} = |f|_H$$

Démonstration. . La signification de ce théorème réside dans le fait que toute forme linéaire continue sur H peut être représentée par le biais du produit scalaire. L'application $\varphi \mapsto f$ constitue un isomorphisme isométrique qui facilite l'identification entre H et H' . Considérons maintenant l'espace de Hilbert réel H tel que V y est dense et que l'inclusion $V \subset H$ est continue. On reconnaît H et H' . Appelons V' le dual de l'espace vectoriel V . On peut donc étendre H dans V' grâce au procédé suivant : étant donné $f \in H$, l'application $v \in V \mapsto (f, v)_H$

est une forme linéaire continue sur H et a fortiori sur V ; on la note $Tf \in V'$ de sorte que

$$(Tf, v)_{V' \times V} = (f, v)_H, \forall f \in H, \forall v \in V$$

On s'assure que $T : H \rightarrow V'$ satisfait les conditions suivantes

(1) $|Tf|_{V'} \leq C|f|_H$ pour tout $f \in H$,

(2) La fonction T est injective,

(3) L'image de H par T est dense dans l'espace dual V' . En règle générale, la transformation T n'est pas surjective de l'espace H vers l'espace V' . Grâce à l'utilisation de T , nous prolongeons H dans V' , ce qui nous donne le schéma.

$$V \subset H = H' \subset V' \tag{1.63}$$

où les injections canoniques sont à la fois continues et denses. On désigne ce triplet par l'appellation de triplet de Gelfand. On qualifie souvent H d'espace pivot. \square

1.9 Equations et inéquations variationnelles d'évolution

Nous débutons ce passage par un bref rappel sur des opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. On prend en compte un espace de Hilbert V équipé du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ et de la norme associée $|\cdot|_V$, ainsi que V' , le dual de l'espace V , en désignant par $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$ le produit dualité entre V et V' .

Définition 1.9.1. *L'opérateur $A : V \rightarrow V'$ est dit (a) monotome si*

$$(Au - Av, u - v)_{V' \times V} \geq 0, \forall u, v \in V$$

(b) *fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que*

$$(Au - Av, u - v)_{V' \times V} \geq m|u - v|_V^2, \forall u, v \in V$$

(c) de Lipschitz s'il existe $L > 0$

$$|Au - Av|_{V'} \leq L|u - v|_V, \quad \forall u, v \in V$$

(d) est hémicontinu si pour chaque suite numérique On a une suite (λ_n) dans \mathbb{R} telle que λ_n converge vers λ lorsque n tend vers $+\infty$.

$$(A(u + \lambda_n v), w)_{V' \times V} \rightarrow (A(u + \lambda v), w)_{V' \times V} \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \forall w \in V.$$

En utilisant la définition précédente, on a le résultat suivant

Proposition 1.9.2. *Tout opérateur de Lipschitz est hémicontinu.*

Corollaire 1.9.3. *Considérons X un espace de Hilbert doté du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $|\cdot|_X$. Considérons $A : X \rightarrow X$ comme un opérateur fortement monotone et Lipschitzien. Pour chaque f appartenant à l'ensemble X , il existe un unique élément u dans X tel que l'équation $Au = f$ est satisfaite.*

La précédente déduction est un cas spécifique du théorème de Minty-Browder (référez-vous par exemple à [14] p.88).

Inégalité de Friedrichs-Poincaré

Soit mes $\Gamma_\alpha > 0$. Alors il existe une constante $C_F > 0$ qui dépend seulement de Ω et Γ_α telle que

$$|\nabla\varphi|_H \geq C_F|\varphi|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall\varphi \in W$$

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}$$

Théorème 1.9.4. *Soit (u_n) une suite bornée de X . Il existe alors un élément $u \in X$ et une sous-suite de (u_n) encore notée (u_n) telles que $u_n \rightarrow u$.*

Fonctions convexes-Semi-continuité inférieure

Convexité

On étudie une fonction φ définie sur un espace vectoriel réel X dont les valeurs se situent dans l'intervalle $]-\infty, +\infty]$. On dit qu'une fonction est propre si elle n'est pas identiquement

égale à $+\infty$, ce qui signifie qu'il existe un $u_0 \in X$ tel que $\varphi(u_0) < +\infty$. On dit que la fonction φ est convexe si

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v), \quad \forall u, v \in X, t \in]0, 1[.$$

La fonction φ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u, v \in X$ tels que $u \neq v$. Pour toute fonction $\varphi : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$, on définit le domaine et l'épigraphe de φ respectivement par

$$\begin{aligned} D\varphi &= \{u \in X \mid \varphi(u) < +\infty\} \\ \text{epi } \varphi &= \{(u, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid \varphi(u) \leq \alpha\} \end{aligned}$$

Il est évident que l'on peut tirer les conclusions suivantes :

- 1) φ est propre si et uniquement si $D\varphi \neq \emptyset$.
- 2) Si φ est convexe, alors son domaine est un ensemble convexe de X .
- 3) φ est convexe si, et seulement si, l'épi de φ constitue un ensemble convexe dans $X \times \mathbb{R}$.

Semi-continuité inférieure

Une fonction $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite semi-continue-inférieurement (s.c.i.) en $u_0 \in H$ si

$$\liminf_{u \rightarrow u_0} \varphi(u) \geq \varphi(u_0)$$

Une fonction est dite s.c.i. sur $K \subset H$ si elle est s.c.i. en tout point de K et elle est dite s.c.i. si elle est s.c.i. sur tout H .

Théorème 1.9.5. . Soient $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réel réflexif avec son dual $(V', \|\cdot\|)$ et $K \subset V$ un ensemble non vide convexe et fermé. On considère $j : K \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonctionnelle convexe semicontinue inférieurement et propre et un opérateur $A : V \rightarrow V'$ hémicontinu et fortement monotone, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \exists \alpha > 0 \text{ tel que } (Au - Av, u - v)_V \geq \alpha \|u - v\|_V^2, \quad \forall u, v \in V. \\ (b) \forall u, v \in V, \text{ l'application } t \in [0, 1] \rightarrow (A(1-t)u + tv, u - v)_V, \text{ est continue.} \end{array} \right. \quad (1.64)$$

Alors, pour tout $f \in V'$, il existe $u \in K$ unique tel que

$$(Au, v - u)_V + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_V, \quad \forall v \in K. \quad (1.65)$$

Théorème 1.9.6. Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur hemicontinu et monotone qui satisfait

a) $(Av, v)_{V' \times V} \geq \omega |v|_V^2 + \lambda, \forall v \in V,$

b) $|Av|_{V'} \leq C_1 (|v|_V + 1), \quad \forall v \in V.$

Pour des constantes $\omega > 0, C_1 > 0,$ et un $\lambda \in \mathbb{R}.$ Soit $u_0 \in H$ et $f \in \mathbb{L}^2(0, T; V'),$ alors une unique fonction u existe telle que

$$u \in \mathbb{L}^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \dot{u} \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t), \quad p.p.t \in [0, T]$$

$$u(0) = u_0$$

Théorème 1.9.7. Considérons un triplet de Gelfand $V \subset H \subset V',$ où K est un ensemble convexe, fermé et non vide dans $V;$ et soit donnée une fonction $a(., .) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ désigne un opérateur bilinéaire, continu et symétrique tel que pour des constantes spécifiques $\zeta > 0$ et $c_0,$

$$a(v, v) = c_0 |v|_H^2 \geq \zeta |v|_V^2, \forall v \in H$$

Donc, pour chaque u_0 appartenant à K et chaque f dans $\mathbb{L}^2(0, T; H),$ il existe une fonction unique u qui répond à

$$u \in \mathbb{L}^2(0, T; V) \cap W^{1,2}(0, T; V')$$

et que $u(0) = u_0, u(t) \in K,$ pour tout $t \in [0, T],$

$$(\dot{u}(t), v - u(t))_{V' \times V} + a(u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_H, \forall v \in K, \quad p.p.t \in [0, T],$$

Théorème 1.9.8. Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(., .)$ et la norme $|\cdot|.$ On identifie H et son dual. Soit V un autre espace de Hilbert de norme $|\cdot|.$ On suppose que

$$V \subset H \subset V'$$

Soit $T > 0$ fixé, pour presque tout $t \in [0, T]$ on se donne une forme bilinéaire $a(t; u, v) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés

i) La fonction $t \mapsto a(t; u, v)$ est mesurable $\forall u, v \in V$.

ii) $a(t; u, v) \leq M|u||v|$ p.p.t $\in [0, T], \forall u, v \in V$.

iii) $a(t; v, v) > \alpha\|v\|^2 - C|v|^2 \quad \forall v \in V, \text{ p.p.t } \in [0, T] \forall v \in V,$

où $\alpha > 0, M$ et C sont des constantes, $u_0 \in H$ et $f \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$. Alors il existe une fonction unique u telle que

$$u \in \mathbb{L}^2(0, T; V) \cap C(0, T; H) \text{ et } \frac{du}{dt} \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$$

$$\begin{cases} \left(\frac{du}{dt}(t), v \right) + a(t; u(t), v) = (f(t), v), \text{ p.p.t } \in [0, T], \quad \forall v \in V, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Dans cette partie, nous allons présenter une formulation du théorème de Cauchy-Lipschitz (voir par exemple ([25], p.48).

Théorème 1.9.9. *Considérons l'espace de Banach réel $(X, |\cdot|_X)$ et notons $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ est un opérateur défini sur $[0, T]$. qui répond aux critères suivants*

$$\begin{cases} \text{il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ |F(t, x) - F(t, y)|_X \leq L_F|x - y|_X, \forall x, y \in X, \text{ p.p.t } \in [0, T], \\ \text{il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que } F(\cdot, x) \in \mathbb{L}^p(0, T; X) \forall x \in X. \end{cases}$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0, T; X)$ telle que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad \text{p.p.t } t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Proposition 1.9.10. *Si $u, v \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, on a l'inégalité de Cauchy-Schwartz*

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

1.9.1 Théorème du point fixe de Banach

Dans cette thèse, le théorème du point fixe de Banach sera employé ultérieurement pour prouver l'existence et l'unicité de la solution. Considérons un espace de Banach X avec la norme $|\cdot|_X$, et supposons que K est un sous-ensemble de X . Nous avons également un opérateur $\Lambda : K \rightarrow X$ défini sur ce dernier. Nous nous préoccupons de l'existence d'une solution à l'équation.

$$\Lambda(u) = u, u \in K. \tag{1.66}$$

Une telle solution de (1.66) s'appelle un point fixe de Λ dans K .

Théorème 1.9.11. (point fixe de Banach)

Considérons K une partie non vide et fermée de l'espace de Banach X , et $\Lambda : K \rightarrow K$ une fonction de contraction, c'est-à-dire, $\exists k \in]0, 1[$ tel que

$$|\Lambda u - \Lambda v|_X \leq k|u - v|_X, \forall u, v \in K$$

Il y a donc un seul élément u dans K tel que $\Lambda(u) = u$, c'est-à-dire, Λ a un point fixe unique dans K . N'oublions pas que les puissances de l'opérateur Λ sont définies de manière récursive par

$$\Lambda^n = \Lambda(\Lambda^{n-1}) \text{ pour } n \geq 2.$$

Théorème 1.9.12. *Dans le même contexte que le théorème (1.67), nous supposons que Λ^n est une contraction pour un certain entier $n \geq 2$. Ainsi, Λ possède un seul point fixe dans K .*

1.9.2 Compléments divers

Nous soulignons ici les lemmes traditionnels de la sorte Gronwall qui jouent un rôle dans une multitude de problèmes d'estimation et de majoration d'erreur, spécifiquement pour démontrer l'unicité de la solution. Pour obtenir davantage d'informations sur les rappels présents dans cette section, on peut se référer à [36], par exemple.

1.9.3 Lemmes de type Gronwall

Lemmes

Soit $(m, n) \in C(0, T; \mathbb{R})$ tels que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tous $t \in [0, T]$, où a est une constante non négative et ϕ une fonction dans $C(0, T; \mathbb{R})$. 1. Si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\phi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right), \forall t \in [0, T],$$

2. Si

$$\phi(t) \leq m(t) + a \cdot \int_0^t \phi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

Alors

$$\int_0^t \phi(s)ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

pour une situation spécifique Pour $m = 0$, la partie (1) de ce lemme se transforme en

Corollaire

Soient $n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante et $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$ une fonction telle que Si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\phi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq a \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right), \forall t \in [0, T]$$

On utilise fréquemment le corollaire de présidence pour démontrer l'unicité de la solution, comme suit. On envisage deux solutions, en notant ϕ la norme de leur différence, on cherche par la suite à majorer ϕ sous la forme suivante :

$$\phi(t) \leq \int_0^t n(s)\phi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

avec une fonction spécifique $n \geq 0$. Le corollaire présidant entraîne directement l'invalidité de ϕ .

1.9.4 Sous différentiabilité

Nous considérons partout dans ce paragraphe que X est un espace normé, X' l'espace dual de X et K un sous-ensemble de l'espace X .

Définition 1.9.13. . On appelle fonction indicatrice de K , la fonction χ_K définie par

$$\chi_K = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K, \\ +\infty & \text{si } x \notin K. \end{cases} \quad (1.67)$$

Il est important d'introduire des notions telles que la sous-différentiabilité et le sous-gradient d'une fonction. La notion de sous-différentiabilité intervient fréquemment en mécanique et notamment dans la mécanique du contact.

Définition 1.9.14. Soit une fonction $j : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et u un élément de X tel que $j(u) \neq \pm\infty$ Le sous-différentiel de j en u ; noté $\partial j(u)$ est l'ensemble de X' défini par

$$\partial j(u) = \left\{ u' \in X' : j(v) \geq j(u) + (u', v - u)_{X' \times X}, \forall v \in X \right\}.$$

Tout élément u' de l'ensemble $\partial j(u)$ est appelé sous-gradient de j en u : La fonction j est dite sous-différentiable en u si $\partial j(u) \neq \emptyset$, et on dit sous-différentiable si elle l'est en tout point u de l'espace X . Dans le cas d'un espace de Hilbert X , le sous-différentiel de j en u peut aussi être écrit comme

$$\partial j(u) = \{ u' \in X : j(v) \geq j(u) + (u', v - u)_X, \forall v \in X \}.$$

Maintenant nous supposons que K est un convexe non vide. Nous considérons la fonction indicatrice χ_K de l'ensemble K . Nous avons si $u \notin K$ alors $\partial \chi_K(u) = \emptyset$. Supposons alors que $u \in K$. Il vient que si $u' \in \partial \chi_K(u)$ alors

$$(u', v - u)_{X' \times X} \leq 0, \forall v \in K.$$

Nous pouvons ainsi caractériser le sous-différentiel $\partial\chi_K$ d'une fonction indicatrice χ_K d'un ensemble convexe non vide

$$\partial\chi_K(u) = \left\{ u' \in X' : (u', v - u)_{X' \times X} \leq 0, \forall v \in K \right\}.$$

1.10 Quelques théorèmes d'existence

Nous citons certains théorèmes utilisés dans cette thèse, pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans cette thèse, nous proposons de voir par exemple [25].

Théorème 1.10.1. (L'inégalité de Korn) *Supposons que mes $\Gamma_1 > 0$, alors il existe une constante $C > 0$ qui dépend de Ω et Γ_1 telle que :*

$$|\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} \geq C|u|_{H_1}$$

Théorème 1.10.2. (Lax-Miligram) *Soit X un espace de Hilbert, soit $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une fo bilinéaire, continue et coercive. Alors*

$$\forall f \in X, \exists! u \in X \text{ tel que } a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in X$$

Théorème 1.10.3. (Minty-Browder) *Soit X un espace de Banach, et soit $A : X \rightarrow X$ une application non linéaire fortement monotone et de Lipschitz c'est-à-dire qu'il existe des constantes M, m strictement positives telles que :*

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_{\dot{X} \times X} \geq m |u_1 - u_2| \quad \forall u_1, u_2 \in X$$

$$|Au_1 - Au_2|_{\dot{X}} \leq M |u_1 - u_2|_X, \quad \forall u_1, u_2 \in X$$

Alors : pour tout $f \in \dot{X}$, il existe $u \in X$ unique tel que : $Au = f$.

Théorème 1.10.4. *Si A est un opérateur linéaire, continue et définie positif et A Si H est un ensemble convexe fermé non vide, alors l'inégalité variationnelle elliptique.*

$$u \in K, \langle Au, v - u \rangle_H \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in H.$$

possède une solution unique $u \in K$.

CHAPITRE 2

ÉTUDE D'UN PROBLÈME DYNAMIQUE THERMO-VISCOELASTIQUE

Nous considérons un problème de contact dans le cas dynamique entre un corps thermo-viscoélastiques avec longue mémoire et une base rigide.

Le contact est modélisé par une condition sous-différentielle généralisées. Des résultats d'existence et d'unicité résultent de solutions faibles sur les champs de déplacement et de température ont été prouvés, La démonstration est basée sur les inéquations d'évolution non linéaires de premier ordre, les équations variationnelle du type paraboliques de premier ordre de point fixe mais aucune approximation numérique n'a été effectuée.

Ici nous proposons un schéma numérique pour l'approximation des champs de solutions afin d'élaborer une analyse numérique générale des estimations d'erreur. Les résultats théoriques sont ensuite illustrés par différentes simulations numériques.

2.1 Formulation du problème mécanique et hypothèses

On se place dans le cadre des problèmes mécaniques et on considère que le corps est thermo-viscoélastique, dont la loi constitutive dépend d'une variable d'état, représente la température θ . La condition aux limites est modélisée par une condition générale du type sous différentielle.

Ce modèle mathématique nous conduit au problème mécanique suivant.

Problème \mathcal{P} . Identifiez le champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, la température $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ pour $t \in (0, T)$: tels que

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(\mathbf{u}(s))ds - \theta(t)C_e \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (2.1)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + f_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u}(t) = 0 \quad \text{dans } \Gamma_1. \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\nu = f_2(t) \quad \text{dans } \Gamma_2. \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u}(t) \in U, \quad \varphi(\mathbf{w}) - \varphi(\dot{\mathbf{u}}(t)) \geq -\boldsymbol{\sigma}(t)\nu \cdot (\mathbf{w} - \dot{\mathbf{u}}(t)) \quad \forall \mathbf{w} \in U \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (2.5)$$

$$\dot{\theta}(t) - \text{div}(K_c \nabla \theta(t)) = -c_{ij} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j}(t) + q(t) \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.6)$$

$$-k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}(t) n_i = k_e(\theta(t) - \theta_R) \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (2.7)$$

$$\theta(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \quad (2.8)$$

$$\theta(0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.9)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.10)$$

L'équation (2.1) est la loi de comportement thermo-visco-élastique à mémoire longue du corps, l'opérateur élastique est désigné par \mathcal{E} , $C_e := (c_{ij})$ correspond au tenseur de dilatation thermique et \mathcal{B} représente le tenseur de relaxation qui définit la mémoire à long terme du matériau. Dans un cas spécifique crucial. L'équation (2.2) représente l'équation du mouvement. L'équation (2.3) correspond à la condition de déplacement et (2.4) la condition de traction. Sur la surface de contact, la relation générale (2.5) est une condition limite sous-différentielle, vérifiant

$$\mathcal{D}(\Omega)^d \subset U \subset H_1,$$

$\boldsymbol{\sigma}_\nu$ est le vecteur de contrainte de Cauchy sur la frontière de contact. $K_c := (k_{ij})$ symbolise le tenseur de conductivité thermique et $q(t)$ correspond à la densité des sources de chaleur volumétriques. Les conditions aux limites de température associées sont données par (2.7)-(2.8),

où θ_R représente la température de la fondation et k_e désigne le coefficient de transfert thermique entre le corps et l'obstacle. Enfin dans (2.9)-(2.10), $\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \theta_0$ représentent les conditions initiales. (2.6) représente l'équation de conservation de l'énergie ou q est la quantité de chaleur dans Ω . Pour l'étude du problème mécanique (2.1)–(2.10), nous supposons les conditions suivantes (voir. [23, 33]) :

Nous donnons maintenant les hypothèses sur les données du problème.

L'opérateur de viscosité \mathcal{A} , défini comme suit :

$\mathcal{A} : \Omega \times S_d \rightarrow S_d$, respecte les propriétés usuelles suivantes.

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \mathcal{A}\sigma \cdot \tau = \sigma \cdot \mathcal{A}\tau \quad \forall \sigma, \tau \in S_d, \text{ p.p. in } \Omega; \\ (ii) \quad \text{il existe } m_A > 0 \text{ telle que} \\ \quad \mathcal{A}\tau \cdot \tau \geq m_A |\tau|^2 \quad \forall \tau \in S_d, \text{ p.p. in } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Supposons que l'opérateur d'élasticité $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_G > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{G}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{G}(x, \varepsilon_2)\| \leq L_G \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ (b) \text{ l'application } x \rightarrow \mathcal{G}(x, \varepsilon) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega, \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ (c) \text{ l'application } x \rightarrow \mathcal{G}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Le tenseur de relaxation $\mathcal{B} : [0, T] \times \Omega \times S_d \rightarrow S_d$, satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \mathcal{B} \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Omega)); \\ (ii) \quad \mathcal{B}(t)\sigma \cdot \tau = \sigma \cdot \mathcal{B}(t)\tau \\ \quad \forall \sigma, \tau \in S_d, \text{ p.p. } t \in (0, T), \text{ p.p. sur } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Nous supposons que les forces volumiques et les tractions surfaciques satisfont

$$f_0 \in W^{1,2}(0, T; H), \quad f_2 \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_2)^d). \quad (2.14)$$

Concernant les tenseurs thermiques et la densité des sources de chaleur., on suppose que

$$C_e = (c_{ij}), \quad c_{ij} = c_{ji} \in L^\infty(\Omega), \quad q \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.15)$$

Les données thermiques aux limites satisfont

$$k_e \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^+), \quad \theta_R \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_3)).$$

Le tenseur de conductivité thermique vérifie les propriétés usuelles de symétrie et d'ellipticité.

On suppose que les données initiales vérifient les conditions (2.9)–(2.10).

$$\mathbf{u}_0 \in V, \quad \mathbf{v}_0 \in V \cap H_0^2(\Omega)^d, \quad \theta_0 \in L^2(\Omega). \quad (2.16)$$

Sur la zone de contact, la fonction suivante s'applique.

$$\psi(\mathbf{w}) := \int_{\Gamma_3} \varphi(\mathbf{w}) \, da$$

verifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \psi : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ est bien définie, continue et convexe;} \\ \text{(ii) il existe une suite de fonctions convexes différentiables } B(t)\sigma \cdot \tau = \sigma \cdot B(t)\tau \\ \quad (\psi'_n) : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \forall w \in L^2(0, T; V), \\ \quad \int_0^T \psi_n(w_n(t)) \, dt \rightarrow \int_0^T \psi(w(t)) \, dt, \quad \text{for } n \rightarrow +\infty; \\ \text{(iii) pour toutes les suites } (w_n^*) \text{ et } w \text{ sur } W^{1,2}(0, T; V) \text{ telle que} \\ \quad w_n^* \rightarrow w, \quad w_n^* \rightharpoonup w^* \text{ faiblement dans } L^2(0, T; V), \text{ donc} \\ \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \psi_n(w_n^*(t)) \, dt \geq \int_0^T \psi(w^*(t)) \, dt; \\ \text{(iv)} \forall w \in V, (w = 0 \text{ dans } \Gamma_3 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \psi'_n(w) = 0_V). \end{array} \right. \quad (2.17)$$

$\psi'_n(w)$ désigne la dérivée de Fréchet de ψ_n à w .

En appliquant la formule de Green, on dérive la formulation variationnelle du problème mécanique. \mathcal{P} sous sa forme abstraite comme suit :

Problème \mathcal{PV} :

Trouver le champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow V$, le champ de température $\theta : [0, T] \rightarrow E$ pour $t \in (0, T)$ tels que.

$$\begin{aligned} (\ddot{u}(t) + A\dot{u}(t) + \mathcal{B}u(t) + C\theta(t), w - \dot{u}(t))_{V' \times V} + \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(u(s)) ds, \varepsilon(w) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \right)_{\mathcal{H}} \\ + \psi(w) - \psi(\dot{u}(t)) \geq \\ (f_0(t), w - \dot{u}(t))_{V' \times V} \quad \forall w \in V, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = R\dot{u}(t) + Q(t) \quad \text{sur } E', \quad (2.19)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (2.20)$$

Les opérateurs et les fonctions $A, B : V \rightarrow V'$, $C : E \rightarrow V'$, $K : E \rightarrow E'$, $R : V \rightarrow E'$, $f : [0, T] \rightarrow V'$, and $Q : [0, T] \rightarrow E'$ sont définis par $\forall v \in V, \forall w \in V, \forall \tau \in E, \forall \eta \in E$:

$$\langle Av, w \rangle_{V' \times V} = (\mathcal{A}(\varepsilon v), \varepsilon w)_{\mathcal{H}};$$

$$\langle Bv, w \rangle_{V' \times V} = (\mathcal{G}(\varepsilon v), \varepsilon w)_{\mathcal{H}};$$

$$\langle C\tau, w \rangle_{V' \times V} = -(\mathcal{C}\tau, \varepsilon w)_{\mathcal{H}};$$

$$\langle f(t), w \rangle_{V' \times V} = (f_0(t), w)_{\mathcal{H}} + (f_2(t), w)_{L^2(\Gamma_2)^d};$$

$$\langle Q(t), \eta \rangle_{E' \times E} = \int_{\Gamma_3} k_e \theta_R(\eta) da + \int_{\Omega} q(t) \eta dx;$$

$$\langle K\tau, \eta \rangle_{E' \times E} = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} dx + \int_{\Gamma_3} k_e \tau \cdot \eta da;$$

$$\langle Rv, \eta \rangle_{E' \times E} = - \int_{\Omega} c_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \eta dx.$$

2.2 Résultat d'existence et d'unicité

Le résultat principal concernant la formulation du problème. \mathcal{PV} : est le suivant (voir pour plus de détails [23]) :

Théorème 2.2.1. *Admettons que (2.11)–(2.19) soient satisfaites. Donc, il n'y a qu'une seule*

solution. (u, θ) au problème \mathcal{PV} de régularité.

$$\begin{cases} u \in W^{2,2}(0, T; V) \cap W^{1,\infty}(0, T; H) \\ \theta \in W^{1,2}(0, T; E) \cap W^{1,\infty}(0, T; F). \end{cases} \quad (2.21)$$

Montrons que les hypothèses de (2.21) sont vérifiées.

L'idée est de transformer l'inégalité du second ordre en une inégalité du premier ordre, en utilisant l'opérateur monotone, la convexité et les arguments de point fixe.

Ce processus se déroulera en plusieurs étapes.

Introduisons maintenant la variable de vitesse

$$v = \dot{u} \quad \text{telle que} \quad u(t) = u_0 + \int_0^t \mathbf{v}(s) \, ds.$$

Le système du problème \mathcal{PV} s'écrit comme suit, pour $t \in (0, T)$:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \mathbf{v}(s) \, ds; \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \langle \dot{v}(t) + Av(t) + \mathcal{B}u(t) + C\theta(t), w - v(t) \rangle_{V' \times V} + \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) \, ds, \boldsymbol{\varepsilon}(w) - \boldsymbol{\varepsilon}(v(t)) \right)_{\mathcal{H}} \\ + \psi(w) - \psi(v(t)) \geq \langle f(t), w - v(t) \rangle_{V' \times V}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\forall w \in V, \quad \dot{\theta}(t) + K\theta(t) = R\mathbf{v}(t) + Q(t) \quad \text{in } E'; \quad (2.24)$$

$$v(0) = v_0, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (2.25)$$

avec la régularité.

$$\begin{cases} v \in W^{1,2}(0, T; V) \cap W^{1,\infty}(0, T; H) \\ \theta \in W^{1,2}(0, T; E) \cap W^{1,\infty}(0, T; F). \end{cases}$$

Différentes formulations abstraites concernant l'existence et l'unicité des résultats sur les inégalités variationnelles paraboliques de seconde espèce ont été trouvées dans la littérature, selon les hypothèses sur les opérateurs et les données (voir par exemple [32, 13, 30]).

Nous utiliserons une version tirée de ([13], p. 46), suffisante pour notre proposition et que nous rappelons ci-dessous.

Théorème 2.2.2. *Soit $A : V \longrightarrow V'$ est linéaire continue satisfait la condition semi-coercitive*

suivante :

$$\exists c_1 \in \mathbb{R}, \exists c_2 > 0, \quad \forall \mathbf{w} \in V, \quad \langle A\mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{V' \times V} + c_1 \|\mathbf{w}\|_H^2 \geq c_2 \|\mathbf{w}\|_V^2$$

et $\{\psi; (\psi_n)\}$ vérifier les hypothèses (2.17), $\mathcal{F} \in W^{1,2}(0, T; V')$, et $v_0 \in V$: il existe une suite (v_0^n) dans V , il existe une suite bornée (h_n) dans H telle que $v_0^n \rightarrow v_0$ sur V et pour tous $n \in \mathbb{N}$,

$$(Av_0^n, \mathbf{w})_{V' \times V} + \langle \psi'_n(v_0^n), \mathbf{w} \rangle_{V' \times V} = (\mathbf{h}_n, \mathbf{w})_H, \quad \forall \mathbf{w} \in V$$

alors il existe un unique v , telle que.

$$v \in W^{1,2}(0, T; V) \cap W^{1,\infty}(0, T; H)$$

Satisfait,

$$\begin{cases} \langle \dot{v}(t), \mathbf{w} - \mathbf{v}(t) \rangle_{V' \times V} + \langle Av(t), \mathbf{w} - \mathbf{v}(t) \rangle_{V' \times V} + \psi(\mathbf{w}) - \psi(\mathbf{v}(t)) \\ \geq \langle \mathcal{F}(t), \mathbf{w} - \mathbf{v}(t) \rangle_{V' \times V}, \quad \forall \mathbf{w} \in V, \quad p.p. \ t \in (0, T) \text{ et } \mathbf{v}(0) = v_0. \end{cases}$$

On peut appliquer le Théorème 2.2.2 : car nous avons à partir de la définition de A et en utilisant (2.10) telle que

$$\forall \mathbf{w} \in V, \quad \langle A\mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}} (\|\mathbf{w}\|_V^2 - \|\mathbf{w}\|_H^2)$$

Les conditions sur v_0 dans (2.17) impliquent l'existence d'une suite (v_0^n) dans $\mathcal{D}(\Omega)^d$ telle que $v_0^n \rightarrow v_0$ pour $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)^d}$. Alors

$$\psi'_n(v_0^n) = 0_{V'}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et

$$\mathbf{h}_n := Av_0^n = -\text{Div}(\mathcal{A}(\varepsilon v_0^n)) \rightarrow -\text{Div}(\mathcal{A}(\varepsilon v_0)) = Av_0 \text{ sur } H$$

Ainsi on définit une suite bornée (\mathbf{h}_n) dans H .

Pour continuer, nous supposons dans la suite que les conditions (2.10)-(2.18) lesquelles du théorème 2.2.2 sont satisfaites.

Soit

$$\mathcal{W} := \left\{ \eta \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{H}), \eta(0) = \mathcal{G}(\varepsilon u_0) - \theta_0 C_c \right\}$$

On commence par le lemme suivant.

Lemme 2.2.3. *Pour tout $\eta \in \mathcal{W}$, il existe un solution unique v_η telle que.*

$$v_\eta \in W^{1,2}(0, T; V) \cap W^{1,\infty}(0, T; H)$$

satisfait,

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \dot{\mathbf{v}}_\eta(t) + Av_\eta(t), \mathbf{w} - \mathbf{v}_\eta(t) \rangle_{V' \times V} + (\eta(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_\eta(t)))_{\mathcal{H}} \\ \quad + \psi(\mathbf{w}) - \psi(\mathbf{v}_\eta(t)) \geq (f(t), \mathbf{w} - v_\eta(t))_{V' \times V} \\ \forall \mathbf{w} \in V, \quad p.p. \ t \in (0, T) \\ \mathbf{v}_\eta(0) = v_0. \end{array} \right. \quad (2.26)$$

De plus, $\exists c > 0$ telle que $\forall \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{W}$:

$$\|\mathbf{v}_{\eta_2}(t) - \mathbf{v}_{\eta_1}(t)\|_H^2 + \int_0^t \|v_{\eta_1} - v_{\eta_2}\|_V^2 \leq c \int_0^t \|\eta_1 - \eta_2\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.27)$$

Démonstration

Soit $\eta \in \mathcal{W}$. l'existence et l'unicité de \mathbf{v}_η découlent directement du théorème 2.2.2 , où l'on applique \mathcal{F} défini pour tout $t \in [0, T]$, par :

$$\langle \mathcal{F}(t), \mathbf{w} \rangle_{V' \times V} := \langle f(t), \mathbf{w} \rangle_{V' \times V} - (\eta(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_{\mathcal{H}}, \quad \forall \mathbf{w} \in V$$

Les hypothèses de (2.13) impliquent que $\mathcal{F} \in W^{1,2}(0, T; V')$. Maintenant soit $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{W}$. sur (2.1) prenons $(\eta = \eta_1, \mathbf{w} = \mathbf{v}_{\eta_2}(t))$, alors $(\eta = \eta_2, \mathbf{w} = v_{\eta_1}(t))$. En additionnant les deux inégalités, on en déduit que pour $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} & \langle \dot{\mathbf{v}}_{\eta_2}(t) - \dot{\mathbf{v}}_{\eta_1}(t), \mathbf{v}_{\eta_2}(t) - \mathbf{v}_{\eta_1}(t) \rangle_{V' \times V} + \langle Av_{\eta_2}(t) - Av_{\eta_1}(t), v_{\eta_2}(t) - v_{\eta_1}(t) \rangle_{V' \times V} \\ & \leq -(\eta_2(t) - \eta_1(t), \boldsymbol{\varepsilon}(v_{\eta_2}(t)) - \boldsymbol{\varepsilon}(v_{\eta_1}(t)))_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

En intégrant ensuite sur $(0, t)$, depuis (2.17)(iii) et à partir de la condition initiale sur la

vitesse, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T], \quad & \|\mathbf{v}_{\eta_2}(t) - \mathbf{v}_{\eta_1}(t)\|_H^2 + m_A \int_0^t \|\mathbf{v}_{\eta_2}(s) - \mathbf{v}_{\eta_1}(s)\|_V^2 ds \\ & \leq - \int_0^t (\eta_2(s) - \eta_1(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_{\eta_2}(s)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_{\eta_1}(s)))_{\mathcal{H}} ds + m_A \\ & \quad \times \int_0^t \|\mathbf{v}_{\eta_2}(s) - \mathbf{v}_{\eta_1}(s)\|_H^2 ds \end{aligned}$$

On conclut que $\exists c > 0$ telle que $\forall \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{W}, \forall t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} \|\mathbf{v}_{\eta_2}(t) - \mathbf{v}_{\eta_1}(t)\|_H^2 + \int_0^t \|\mathbf{v}_{\eta_1}(s) - \mathbf{v}_{\eta_2}(s)\|_V^2 ds \\ \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathcal{H}^2}^2 ds + c \int_0^t \|\mathbf{v}_{\eta_2}(s) - \mathbf{v}_{\eta_1}(s)\|_H^2 ds. \end{cases} \quad (2.28)$$

Soit $\tau \in [0, T]$ fixé . On a $\forall t \in [0, \tau]$:

$$\|\mathbf{v}_{\eta_2}(t) - \mathbf{v}_{\eta_1}(t)\|_H^2 \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathcal{H}^2}^2 ds + c \int_0^t \|\mathbf{v}_{\eta_2}(s) - \mathbf{v}_{\eta_1}(s)\|_H^2 ds$$

En utilisant ensuite l'inégalité de Gronwall, on obtient $\forall \tau \in [0, T]$:

$$\|\mathbf{v}_{\eta_2}(\tau) - \mathbf{v}_{\eta_1}(\tau)\|_H^2 \leq \left(c \int_0^{\tau} \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathcal{H}^2}^2 ds \right) e^{cT}.$$

Finalement, en intégrant la dernière inéquation et en reportant le résultat dans (2.28), on obtient (2.27). Nous appelons ici et par la suite $c > 0$ une constante générique dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre.

Lemme 2.2.4. *Pour tout $\eta \in \mathcal{W}$, Il existe une solution unique.*

$$\theta_\eta \in W^{1,2}(0, T; E) \cap W^{1,\infty}(0, T; F)$$

satisfaits

$$\begin{cases} \dot{\theta}_\eta(t) + K\theta_\eta(t) = Rv_\eta(t) + Q(t), \quad \text{sur } E', \quad p.p. t \in (0, T), \\ \theta_\eta(0) = \theta_0. \end{cases} \quad (2.29)$$

De plus, $\exists c > 0$ telle que $\forall \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{W}$:

$$\|(\theta_{\eta_1} - \theta_{\eta_2})(t)\|_L^2(\Omega) \leq c \int_0^t \|\mathbf{v}_{\eta_1}(s) - \mathbf{v}_{\eta_2}(s)\|_V^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.30)$$

et

$$\left\| \dot{\theta}_{\eta_1}(t) - \dot{\theta}_{\eta_2}(t) \right\|_F^2 \leq c \int_0^t \|v_{\eta_1} - v_{\eta_2}\|_V^2, \quad p.p. t \in (0, T). \quad (2.31)$$

Démonstration

Le résultat d'existence et d'unicité vérifiant(2.28) Résulte du résultat standard sur l'équation d'évolution de premier ordre, qui peut être considéré comme une application spécifique du théorème 2.2.2 appliqué au triplet d'évolution de Gelfand. (voir par exemple [33], p. 416) :

$$E \subset F \equiv F' \subset E'$$

Nous nous assurons que l'opérateur $K : E \longrightarrow E'$ est linéairement continu et fortement monotone. À partir de l'expression de cet opérateur R ,

$$v_\eta \in W^{1,2}(0, T; V) \implies Rv_\eta \in W^{1,2}(0, T; F)$$

comme $Q \in W^{1,2}(0, T; E')$ Alors $Rv_\eta + Q \in W^{1,2}(0, T; E')$. Maintenant pour $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{W}$, nous avons pour $t \in (0; T)$:

$$\begin{aligned} & \langle \dot{\theta}_{\eta_1}(t) - \dot{\theta}_{\eta_2}(t), \theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t) \rangle_{E' \times E} + \langle K\theta_{\eta_1}(t) - K\theta_{\eta_2}(t), \theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t) \rangle_{E' \times E} \\ & = \langle Rv_{\eta_1}(t) - Rv_{\eta_2}(t), \theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t) \rangle_{E' \times E}. \end{aligned}$$

En incorporant ensuite la propriété la plus récente sur $(0, t)$, en faisant appel à la forte monotonie de K ainsi qu'à sa continuité lipschitzienne. de $R : V \longrightarrow E'$, nous en déduisons (2.6). Pour continuer, à partir de

$$\dot{\theta}_\eta \in L^2(0, T; E)$$

et de (2.5) ce qui implique

$$\ddot{\theta}_\eta(t) + K\dot{\theta}_\eta(t) = Ru_\eta(t) + \dot{Q}(t) \text{ p.p. } t \in (0, T) \implies \ddot{\theta}_\eta \in L^2(0, T; E')$$

nous en déduisons que

$$\dot{\theta}_\eta \in C([0, T]; F)$$

Pour $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{W}$, on a pour $t \in (0; T)$:

$$\begin{aligned} & \left\langle \ddot{\theta}_{\eta_1}(t) - \ddot{\theta}_{\eta_2}(t), \dot{\theta}_{\eta_1}(t) - \dot{\theta}_{\eta_2}(t) \right\rangle_{E' \times E} + \left\langle K\dot{\theta}_{\eta_1}(t) - K\dot{\theta}_{\eta_2}(t), \dot{\theta}_{\eta_1}(t) - \dot{\theta}_{\eta_2}(t) \right\rangle_{E' \times E} \\ & = \left\langle R\mathbf{u}_{\eta_1}(t) - R\mathbf{u}_{\eta_2}(t), \dot{\theta}_{\eta_1}(t) - \dot{\theta}_{\eta_2}(t) \right\rangle_{E' \times E} \end{aligned}$$

En intégrant la dernière propriété sur $(0, t)$, et avec des arguments similaires, on en déduit

$$\left\| \dot{\theta}_{\eta_1}(t) - \dot{\theta}_{\eta_2}(t) \right\|_F^2 \leq c \int_0^t \|\mathbf{u}_{\eta_1} - \mathbf{u}_{\eta_2}\|_V^2, \quad \text{p.p. } t \in (0, T)$$

et (2.6) est le suit.

Démonstration de Théorème 2.2.1

Nous disposons désormais de tous les éléments nécessaires pour prouver le théorème 2.2.1 .

Considérons l'opérateur $\Lambda : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ défini par pour tout $\eta \in \mathcal{W}$:

$$\Lambda\eta(t) = \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t))) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)) ds - \theta_\eta(t)C_e, \quad \forall t \in [0, T]$$

où

$$u_\eta(t) = u_0 + \int_0^t v_\eta(s) ds, \quad \forall t \in [0, T]; \quad u_\eta \in W^{2,2}(0, T; V)$$

Ensuite, de (2.11), (2.12) et du lemme 2, nous déduisons que pour tout $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{W}$, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 & \leq c \|(\theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2})(t)\|_F^2 + c \int_0^t \|\mathbf{v}_{\eta_1}(s) - \mathbf{v}_{\eta_2}(s)\|_V^2 ds \\ & \leq c \int_0^t \|\mathbf{v}_{\eta_1}(s) - \mathbf{v}_{\eta_2}(s)\|_V^2 ds \end{aligned}$$

De (2.12) et (2.11), nous avons

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(\mathbf{u}_{\eta_1}(s)) ds - \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(\mathbf{u}_{\eta_2}(s)) ds \right) \right|_{\mathcal{H}}^2 \\ & \leq c \|\mathbf{u}_{\eta_1}(t) - \mathbf{u}_{\eta_2}(t)\|_V^2 + c \int_0^t \|\mathbf{u}_{\eta_1}(s) - \mathbf{u}_{\eta_2}(s)\|_V^2 ds \\ & \leq c \int_0^t \|\mathbf{v}_{\eta_1}(s) - \mathbf{v}_{\eta_2}(s)\|_V^2 ds \end{aligned}$$

et

$$\left\| \frac{d}{dt} (\mathcal{G}(\varepsilon(u_{\eta_1}(t))) - \mathcal{G}(\varepsilon(u_{\eta_2}(t)))) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c \|\mathbf{v}_{\eta_1}(t) - \mathbf{v}_{\eta_2}(t)\|_V^2$$

Alors

$$\left| \frac{d}{dt} (\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c \|v_{\eta_1}(t) - v_{\eta_2}(t)\|_V^2 + c \int_0^t \|v_{\eta_1}(s) - v_{\eta_2}(s)\|_V^2 ds$$

En utilisant maintenant (2.7) et (2.8), après quelques manipulations algébriques, nous avons pour tout $\beta > 0$:

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-\beta\tau} \left(\|(\Lambda\eta_1 - \Lambda\eta_2)(\tau)\|_{\mathcal{H}}^2 + \|(\Lambda\dot{\eta}_1 - \Lambda\dot{\eta}_2)(\tau)\|_{\mathcal{H}}^2 \right) d\tau \\ & \leq \frac{c}{\beta} \int_0^t e^{-\beta\tau} \left(\|(\eta_1 - \eta_2)(\tau)\|_{\mathcal{H}}^2 + \|(\dot{\eta}_1 - \dot{\eta}_2)(\tau)\|_{\mathcal{H}}^2 \right) d\tau \end{aligned}$$

Nous concluons de la dernière inégalité par principe de contraction que l'opérateur Λ possède un unique point fixe $\eta^* \in \mathcal{W}$. Nous vérifions ensuite que les fonctions

$$\mathbf{u}(t) := \mathbf{u}_0 + \int_0^t v_{\eta^*}, \forall t \in [0, T], \quad \theta := \theta_{\eta^*}$$

Sont des solutions du problème PV avec la régularité (2.21), l'unicité découle de l'unicité dans le **Lemme1** et le **Lemme2**, pour avoir plus de détails nous proposons de voir par exemple [35].

2.3 Analyse d'un schéma numérique

Dans cette section, nous étudions un schéma d'approximation numérique entièrement discret du problème variationnel $\mathcal{P}V$ (voir [10]). À cet effet, nous supposons ci-après que les conditions sur les données (2.11)-(2.17) du théorème 2.2.1 sont satisfaites. En particulier, nous avons

$$f \in C([0, T]; V'), \quad \mathcal{P} \in C([0, T]; E')$$

Soit $\{u, \theta\}$ La seule solution du problème PV et introduisons la variable vitesse.

$$v(t) = \dot{u}(t), \quad \forall t \in [0, T]$$

Alors

$$u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds, \quad \forall t \in [0, T]$$

Depuis le théorème 2.2.1 nous voyons que $\{v, \theta\}$ vérifie pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} \langle \dot{v}(t) + Av(t) + \mathcal{B}u(t) + C\theta(t), w - v(t) \rangle_{V' \times V} \\ + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(u(s))ds, \varepsilon(w) - \varepsilon(\dot{u}(t)) + \psi(w) - \psi(v(t)) \\ \geq \langle f(t), w - v(t) \rangle_{V' \times V}, \quad \forall w \in V. \end{cases}$$

$$\langle \dot{\theta}(t), \eta \rangle_F + \langle K\theta(t), \eta \rangle_{E' \times E} = \langle Rv(t), \eta \rangle_{E' \times E} + \langle Q(t), \eta \rangle_{E' \times E}, \quad \forall \eta \in E.$$

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad \theta(0) = \theta_0,$$

avec la régularité :

$$\begin{cases} v \in W^{1,2}(0, T; V) \cap W^{1,\infty}(0, T; H) \\ \theta \in W^{1,2}(0, T; E) \cap W^{1,\infty}(0, T; F) \end{cases}$$

Dans cette section, nous posons les hypothèses supplémentaires suivantes sur la fonction solution et la fonction contact :

$$v \in W^{2,2}(0, T; H). \quad (2.32)$$

$$\theta \in W^{2,2}(0, T; F). \quad (2.33)$$

$$\psi \text{ est continue Lipschitzient sur } V. \quad (2.34)$$

Soit $V^h \subset V$ et $E^h \subset E$ soit une famille de sous-espaces de dimension finie, avec $h > 0$ comme paramètre de discrétisation. Nous divisons l'intervalle de temps. $[0, T]$ dans N parties égales : $t_n = nk, n = 0, 1, \dots, N$, avec le pas de temps $k = T/N$.

Pour une fonction continue $w \in C([0, T]; X)$ ayant des valeurs dans un espace X , on utilise la notation $w_n = w(t_n) \in X$. Ensuite, à partir de (2.18) et (2.19), on introduit le schéma entièrement discret suivant.

Problème P^{hk} .

Trouver un champ de vitesse discret $v^{hk} = \{v_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset V^h$, et un champ de température discret $\theta^{hk} = \{\theta_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset E^h$ tel que

$$v_0^{hk} = v_0^h, \quad \theta_0^{hk} = \theta_0^h$$

et pour $n = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{v_n^{hk} - v_{n-1}^{hk}}{k}, w^h - v_n^{hk} \right)_H + \langle Av_n^{hk}, w^h - v_n^{hk} \rangle_{V' \times V} + \langle Bu_{n-1}^{hk}, w^{hk} - v_n^{hk} \rangle_{V' \times V} \\
 & + \langle C\theta_{n-1}^{hk}, w^h - v_n^{hk} \rangle_{V' \times V} + \psi(w^h) - \psi(v_n^{hk}) \\
 & + \left(k \sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{B}(t_n - t_m) \varepsilon(u_m^{hk}), \varepsilon(w^h) - \varepsilon(v_n^{hk}) \right) \\
 & \geq \langle f_n, w^h - v_n^{hk} \rangle_{V' \times V}, \quad \forall w^h \in V^h,
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\theta_n^{hk} - \theta_{n-1}^{hk}}{k}, \eta^h \right)_F + \langle K\theta_n^{hk}, \eta^h \rangle_{E' \times E} \\
 & = \langle R_n^{hk}, \eta^h \rangle_{E' \times E} + \langle Q_n, \eta^h \rangle_{E^r \times E}, \quad \forall \eta^h \in E^h.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

où

$$u_n^{hk} = u_{n-1}^{hk} + kv_n^{hk}, \quad u_0^{hk} = u_0^h. \tag{2.37}$$

Ici $u_0^h \in V^h, v_0^h \in V^h, \theta_0^h \in E^h$ sont des approximations appropriées des valeurs initiales u_0, v_0, θ_0 . pour $n = 1, \dots, N$, supposons que $u_{n-1}^{hk}, v_{n-1}^{hk}, \theta_{n-1}^{hk}$ soient connues. On peut alors calculer v_n^{hk} par (2.35), θ_n^{hk} par (2.36), et u_n^{hk} par (2.37). D'où la solution discrète $v^{hk} \subset V^h, \theta^{hk} \subset E^h$ existe et est unique.

Nous passons maintenant à l'analyse des erreurs de la solution numérique. Le principal résultat de cette section est le suivant (voir [35] pour plus de détails.).

Théorème 2.3.1. *Nous conservons les hypothèses du théorème 2.3.1. Sous les hypothèses supplémentaires (2.32)-(2.33), alors pour la solution unique $v^{hk} \subset V^h, \theta^{hk} \subset E^h$ du problème discret P^{hk} , nous avons l'estimation d'erreur suivante.*

Modèles d'inégalités variationnelles issus de l'étude des matériaux viscoélastiques.

$$\begin{aligned}
 & \max_{1 \leq n \leq N} \|v_n - v_n^{hk}\|_H^2 + \left(k \sum_{n=1}^N \|v_n - v_n^{hk}\|_V^2 \right) + \max_{1 \leq n \leq N} \|\theta_n - \theta_n^{hk}\|_F^2 + \left(k \sum_{n=1}^N \|\theta_n - \theta_n^{hk}\|_E^2 \right) \\
 & \leq c \|u_0 - u_0^h\|_V^2 + c \|v_0 - v_0^{hk}\|_H^2 + c \|\theta_0 - \theta_0^h\|_F^2 + c \max_{1 \leq n \leq N} \|v_n - w_n^h\|_H \\
 & + c \max_{1 \leq n \leq N} \|\theta_n - \eta_n^h\|_F^2 + ck \sum_{j=1}^N \|v_j - w_j^h\|_V^2 + ck \sum_{j=1}^N \|\theta_j - \eta_j^h\|_E^2 \\
 & + c \left(\sum_{j=1}^{N-1} \|(v_j - w_j^h) - (v_{j+1} - w_{j+1}^h)\|_H \right)^2 \\
 & + c \left(\sum_{j=1}^{N-1} \|\theta_j - \eta_j^h - (\theta_{j+1} - \eta_{j+1}^h)\|_F \right)^2 + ck^2 + ck \sum_{j=1}^N \|v_j - w_j^h\|_V,
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

$j = 1, \dots, N, w_j^h \in V^h, \eta_j^h \in E^h$ sont arbitraires.

L'inégalité (2.38) est une base pour les estimations d'erreur pour un choix particulier du sous-espace de dimension finie V^h et sous des données supplémentaires et des régularités de solution.

À titre d'exemple typique, considérons $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}^*$, considérons un domaine polygonal. soit T^h être une partition régulière par éléments finis de Ω . Soit $V^h \subset V$ et $E^h \subset E$ soit l'espace des éléments finis constitué de polynômes de degré $\leq m - 1$, avec $m \geq 2$, selon la partition T^h . noté par $\Pi_V^h : H^m(\Omega)^d \rightarrow V^h$ et $\Pi_E^h : H^m(\Omega) \rightarrow E^h$ soit l'opérateur d'interpolation par éléments finis correspondant. Rappelons (voir, par exemple, [11]) que :

$$\begin{cases} \|w - \Pi_V^h w\|_{H^l(\Omega)^d} \leq ch^{m-l} |w|_{H^m(\Omega)^d}, & \forall w \in H^m(\Omega)^d, \\ \|\eta - \Pi_E^h \eta\|_{H^l(\Omega)} \leq ch^{m-l} |\eta|_{H^m(\Omega)}, & \forall \eta \in H^m(\Omega) \end{cases}$$

où $l = 0$ (pour lequel $H^0 = L^2$) ou $l = 1$.

Dans ce qui suit, nous supposons des données supplémentaires et des régularités de solution.

$$\begin{cases} u_0 \in H^{\alpha+1}(\Omega)^d, \\ v \in C([0, T]; H^{2\alpha+1}(\Omega)^d), \quad \dot{v} \in L^1(0, T; H^\alpha(\Omega)^d), \\ \theta \in C([0, T]; H^{\alpha+1}(\Omega)), \quad \dot{\theta} \in L^1(0, T; H^\alpha(\Omega)) \end{cases} \tag{2.39}$$

Ici

$$\alpha = m - 1 \geq 1$$

2.3. ANALYSE D'UN SCHEMA NUMERIQUE

Nous remarquons que les propriétés précédentes sont déjà valables pour $\alpha = 1$, sauf pour $v \in C([0, T]; H^3(\Omega)^d)$ et $\theta \in C([0, T]; H^2(\Omega))$. Ensuite, on choisit dans (2.38) les éléments

$$u_0^h = \Pi_V^h u_0, \quad v_0^h = \Pi_V^h v_0, \quad \theta_0^h = \Pi_E^h \theta_0$$

et

$$w_j^h = \Pi_V^h v_j, \quad \eta_j^h = \Pi_E^h \theta_j, \quad j = 1, \dots, N$$

D'après les hypothèses (2.39), on a :

$$\begin{aligned} \|u_0 - u_0^h\|_V &\leq ch^\alpha, \quad \|e_0\|_H \leq ch^\alpha, \quad \|\varepsilon_0\|_F \leq ch^\alpha \\ A_0 &\leq ch^\alpha, \quad B_0 \leq ch^{2\alpha} \\ A_3 &\leq ch^\alpha, \quad B_3 \leq ch^\alpha, \\ kA_2 &\leq ch^{2\alpha}, \quad kB_2 \leq ch^{2\alpha}, \quad k\hat{B}_2 \leq ch^{2\alpha} \end{aligned}$$

En utilisant ces estimations dans (2.38), on obtient le résultat d'estimation d'erreur suivant.

Théorème 2.3.2. *On conserve les hypothèses du théorème 3. Sous les hypothèses supplémentaires (2.39), on obtient l'estimation d'erreur pour la solution discrète correspondante. v_n^{hk} , θ_n^{hk} , $n = 1, \dots, N$:*

$$\begin{aligned} &\max_{0 \leq n \leq N} \|v_n - v_n^{hk}\|_H + \left(k \sum_{n=0}^N \|v_n - v_n^{hk}\|_V^2 \right)^{1/2} \\ &+ \max_{0 \leq n \leq N} \|\theta_n - \theta_n^{hk}\|_F + \left(k \sum_{n=0}^N \|\theta_n - \theta_n^{hk}\|_E^2 \right)^{1/2} \leq c(h^\alpha + k) \end{aligned}$$

En particulier, pour $\alpha = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} &\max_{0 \leq n \leq N} \|v_n - v_n^{hk}\|_H + \left(k \sum_{n=0}^N \|v_n - v_n^{hk}\|_V^2 \right)^{1/2} \\ &+ \max_{0 \leq n \leq N} \|\theta_n - \theta_n^{hk}\|_F + \left(k \sum_{n=0}^N \|\theta_n - \theta_n^{hk}\|_E^2 \right)^{1/2} \leq c(h + k) \end{aligned}$$

(voir [35] pour plus de détails).

CHAPITRE 3

ÉTUDE D'UN PROBLÈME QUASI-STATIQUE EN ÉLECTRO-VISCOÉLASTICITÉ

Ce chapitre aborde un problème de contact avec frottement dans le cadre d'un processus quasi-statique. Le matériau présente des caractéristiques électro-viscoélastiques avec une mémoire longue et endommagement. Une variable interne du matériau, appelée champ d'endommagement, modélise l'endommagement causé par les déformations élastiques. Le problème est décrit par un système d'équations et d'inéquations aux dérivées partielles, incluant l'équation de mouvement (ou d'équilibre) du corps, la loi de comportement du matériau avec endommagement, une inclusion différentielle de type parabolique gouvernant l'évolution du champ d'endommagement ainsi que les conditions aux limites imposées au système.

Cette partie est subdivisée en trois paragraphes. Dans la première section, nous exposons le problème mécanique puis nous précisons les suppositions relatives aux données. Le second paragraphe concerne la formulation variationnelle du problème mécanique. Pour conclure, dans le troisième paragraphe, nous examinons l'existence et l'unicité d'une solution faible au problème mécanique. Les méthodes utilisées s'appuient sur les équations variationnelles et la théorie des opérateurs monotones, suivies par les arguments du point fixe.

3.1 Formulation du problème

Le problème étudié dans cette section s'inscrit dans le cadre électro-mécanique présenté dans l'introduction de cette thèse. Nous considérons une loi de comportement électro-viscoélastique donnée par (1.46), ainsi qu'une condition de contact définie par (1.34). Les effets de frottement sont modélisés suivant la loi de Coulomb (1.43). Dans ce cadre couplé électro-mécanique, le modèle standard pour cette approche est le suivant :

Problème \mathcal{P} .

Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le champ de potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ des déplacements électriques $\mathbf{D} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, et l'endommagement $\alpha : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$

tels que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) &+ \mathcal{G}(\varepsilon(\mathbf{u}), \alpha) \\ &+ \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(\mathbf{u}(s))ds + \mathcal{E}^*\nabla\varphi. \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{D}(t) = \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) - B\nabla(\varphi(t)), \quad (3.2)$$

$$\text{Div}\boldsymbol{\sigma} + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.3)$$

$$\dot{\alpha} - K\Delta\alpha + \partial\varphi_K(\alpha) \ni \Phi(\varepsilon(\mathbf{u}) - \alpha) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.4)$$

$$\text{div}\mathbf{D} - q_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.5)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \quad (3.7)$$

$$\sigma_\tau = p_r(u_\nu - h) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - h). \\ \|\sigma_\nu\| \leq p_\nu(u_\nu - h). \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.9)$$

$$\dot{u}_\tau \neq 0 \Rightarrow \sigma_\tau = -p_\nu(u_\nu - h) \frac{\dot{u}_\tau}{\|\dot{u}_\tau\|} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (3.11)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T). \quad (3.12)$$

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_b \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (3.13)$$

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = \psi(u_\nu - h) \phi_L(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.14)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.15)$$

les relations (3.1) et (3.2) modélisent le comportement du matériau avec mémoire longue. L'évolution d'endommagement est régie par une inclusion parabolique définie par (3.4), où S désigne la fonction source d'endommagement. Les équations (3.3) et (3.5) correspondent respectivement aux équations mécanique et électrique. Les conditions (3.6) et (3.7) représentent les conditions aux limites de déplacement traction. La relation (3.9) constitue une formulation quasistatique de la loi de frottement de Coulomb, tandis que (3.8) modélise la condition de contact à compliance normale. Les équations (3.12 - 3.13) et (3.14) sont les conditions aux limites électriques. Par ailleurs, (3.11) exprime une condition de Neumann homogène, où $\frac{\partial \alpha}{\partial \nu}$ représente la dérivée normale du champ α . Enfin, (3.15) sont des conditions initiales. sur Γ_3 . Dans l'équation (3.15), u_0 représente le mouvement initial, tandis que α_0 symbolise le préjudice initial. Finalement, afin de dériver la formulation variationnelle du problème (3.1)- (3.15), nous établissons le domaine de liaison du groupe. Ensuite, pour obtenir la formulation du problème (3.1)- (3.15) on considère les hypothèses suivantes :

Supposons que l'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ ,p.p. } x \in \Omega , \\ \text{(b) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2, \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ p.p. } x \in \Omega , \\ \text{(c) l'application } x \longrightarrow \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega , \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ \text{(d) l'application } x \longrightarrow \mathcal{A}(x, \varepsilon) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

3.1. FORMULATION DU PROBLÈME

Supposons que l'opérateur d'élasticité $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que} \\ \|\mathcal{G}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{G}(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{G}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ \text{(b) l'application } x \longrightarrow \mathcal{G}(x, \varepsilon) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega, \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ \text{(c) l'application } x \longrightarrow \mathcal{G}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E}(x, \tau) = (e_{ijk}, \tau_{jk}), \quad \forall \tau = (\tau_{jk}) \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \text{ in } \Omega. \\ \text{(b) } e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i, j, k \leq d. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

La fonction tangentielle satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ verifie :} \\ \text{(a) : } \exists L_\tau > 0 \text{ s.t. } |h_\tau(x, r_1) - h_\tau(x, r_2)| \leq L_\tau |r_1 - r_2|, \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(b) : l'application } \mathbf{x} \mapsto h_\tau(x, r) \in L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Le tenseur de permittivité électrique $B = (B_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } B(x, E) = (b_{ij}(x) E_j) \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ \text{(b) } b_{ij} = b_{ji} \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i, j \leq d, \\ \text{(c) Il existe une constante } M_{\mathcal{B}} > 0 \text{ tel que } BE \cdot E \geq M_{\mathcal{B}} |E|^2, \\ \quad \quad \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.20)$$

La fonction source d'endommagement $\Phi : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe une constante } L_\Phi > 0 \text{ tel que} \\ |\Phi(x, \eta_1, \omega_1, \beta_1) - \Phi(x, \eta_2, \omega_2, \beta_2)| \leq L_\Phi (|\eta_1 - \eta_2| + |\omega_1 - \omega_2| + |\beta_1 - \beta_2|) \\ \forall \eta_1, \eta_2, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{S}^d, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, x \in \Omega. \\ \text{(b) l'application } x \longrightarrow \Phi(x, \eta, \omega, \beta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \text{pour tout } \eta, \omega \in \mathbb{S}^d \text{ and } \forall \beta \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) l'application } x \longrightarrow \Phi(x, 0, 0, 0) \in \mathbb{L}^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.21)$$

3.1. FORMULATION DU PROBLÈME

La fonction $\Psi : \varepsilon \times \mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe une constante } L_\Psi > 0 \text{ tel que} \\ |\Psi(x, \sigma_1, \varepsilon_1, \theta_1, \xi_1) - \Psi(x, \sigma_2, \varepsilon_2, \theta_2, \xi_2)| \leq L_\Psi (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\theta_1 - \theta_2| + |\xi_1 - \xi_2|) \\ \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}_n, \theta_1, \theta_2, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, x \in \Omega. \\ \text{(b) l'application } x \longrightarrow \Psi(x, \sigma, \varepsilon, \theta, \xi) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \forall \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}_n \text{ et } \forall \theta, \xi \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) l'application } x \longrightarrow \Psi(x, 0, 0, 0) \in \mathbb{L}^2(\varepsilon). \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Les fonctions de normales de conformité $p_r : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_r > 0 \text{ telle que} \\ \|p_r(x, \xi_1) - p_r(x, \xi_2)\| \leq M_\nu \|\xi_1 - \xi_2\| \\ \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(b) L'application } x \mapsto p_r(x, \xi) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \\ \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } x \mapsto p_r(x, \xi) = 0, \text{ pour tout } \xi \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Le tenseur de la relaxation $B = (B_{ij})$ satisfait

$$B \in C(0, T; \mathcal{H}). \quad (3.24)$$

Enfin le champ initial d'endommagement vérifie

$$\alpha_0 \in K. \quad (3.25)$$

Les forces volumiques f_0 et les tractions superficielles f_2 vérifient

$$f_0 \in C(0, T; H), \quad f_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_2)^d) \quad (3.26)$$

Par ailleurs, la charge volumique q_0 et surfacique q_2 respectent

$$q_0 \in C(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_0)) \quad (3.27)$$

3.1. FORMULATION DU PROBLÈME

Finalement, nous assumons que l'interstice h , le potentiel donné et le déplacement initial satisfont

$$\begin{aligned} h &\in L^2(\Gamma_3), \quad h \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3 \\ \varphi_0 &\in L^2(\Gamma_3) \\ u_0 &\in V \end{aligned}$$

Nous définissons la forme bilinéaire $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$a(\zeta, \varphi) = \kappa \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \nabla \varphi, dx$$

Dans notre étude du problème PV1, nous formulons une supposition de petitesse.

$$M_\psi < \frac{m_E}{\bar{c}_0^2} \tag{3.28}$$

avec $M_\psi > 0$, $m_B > 0$ et $\bar{c}_0 > 0$ étant des constantes données par (3.24), (1.60) et (3.21) respectivement.

Rappelons que seule la constante de trace (relative aux espaces V et W) est concernée.

Le théorème de représentation de Riesz garantit alors l'existence d'une application $f \in C([0, T]; V)$ telle que

$$(f(t), v)_{V' \times V} = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v da \quad \forall v \in V \text{ p.p. } t \in (0, T) \tag{3.29}$$

Pour tout $v \in V, t \in [0, T]$. Ensuite, les conditions (3.28) impliquent

$$f \in C(0, T; V) \tag{3.30}$$

De même, par application du théorème de représentation de Riesz, on obtient l'existence d'un élément $q : [0, T] \rightarrow W$ par

$$(q(t), \zeta)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \zeta dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \zeta da \quad \forall \zeta \in W, t \in [0, T] \tag{3.31}$$

3.1. FORMULATION DU PROBLÈME

Pour tout $\phi \in W$, $t \in [0, T]$. Ensuite, les conditions (3.28) impliquent

$$q \in C(0, T; W) \quad (3.32)$$

Par les hypothèses sur p_ν et p_τ , on obtient que pour $v \in V$.

$$p_\nu(u_\nu - h), p_\tau(u_\nu - h) \in L^2(\Gamma_3) \quad (3.33)$$

Nous considérons l'application $j : [0, T] \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$j(t, u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - l) v_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - l) \|v_\tau\|_{L^2(\Gamma_3)^d} da$$

Soit l'application $h : V \times W \rightarrow W$ la fonctionnelle

$$(h(u, \varphi), \xi)_W = \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu - h) \phi_L(\varphi - \varphi_0) \xi da \quad (3.34)$$

Il résulte de hypothèses(3.17)-(3.25) que les intégrales dans (3.32)-(3.35) sont bien définis. Revenons donc à la formulation variationnelle du problème \mathcal{P} . Nous recourons à la formule de Green (1.56) en conjonction avec les équations (3.5), (3.6), (3.7) et (3.30) dans le but de déterminer

$$(\sigma, \varepsilon(u) - \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (f, u - v)_H = \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - v) \quad \forall v \in V,$$

et, en prenant en compte la décomposition du tenseur de contrainte de Cauchy, nous obtenons

$$(\sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u))_{\mathcal{H}} = (f, v - u)_H + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau (\nu_\tau - u_\tau) da, \quad \forall v \in V$$

En combinant les conditions (3.9) et (3.10), nous obtenons

$$\begin{aligned} (\sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u))_{\mathcal{H}} &\geq (f, v - u)_H \\ &+ \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - h) (v_\nu - u_\nu) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - h) (\|\nu_\tau\| - \|u_\tau\|) da, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

3.1. FORMULATION DU PROBLÈME

L'association de cette inégalité avec (3.1) conduit à

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}\varepsilon(u(t), \alpha), \varepsilon(v) - \varepsilon(u)) \\
& \quad + j(u, v) - j(u, u) + \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(u(s)) ds, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \right)_{\mathcal{H}} \\
& \quad + (\varepsilon^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u))_{\mathcal{H}} \\
& \geq (f(t), u - v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, t \in (0, T) \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, une application de la formule de Green donne

$$(D, \nabla \zeta)_H + (\operatorname{div} D, \zeta)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} D \cdot \nu \zeta da \quad \forall \zeta \in W$$

on a

$$\int_{\Omega} D \cdot \nabla \zeta dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} D \zeta da = \int_{\Gamma_3} D \cdot \nu \zeta da + \int_{\Gamma_a} D \cdot \nu \zeta da + \int_{\Gamma_b} D \cdot \nu \zeta da \quad \forall \zeta \in W$$

À partir de la définition de l'espace W et des relations (3.5), (3.13)–(3.15), on déduit

$$\int_{\Omega} D \cdot \nabla \zeta dx = \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu - h) \phi(\varphi - \varphi_0) \zeta da + \int_{\Gamma_b} q_2 \zeta da - \int_{\Omega} q_0 \zeta dx \quad \forall \zeta \in W.$$

De (3.32) et (3.36), on obtient

$$(D(t), \nabla \zeta)_w + (q(t), \zeta)_w = (h(u, \varphi), \xi)_w \quad \forall \xi \in \mathcal{W}, t \in (0, T) \quad (3.36)$$

Enfin, pour tout $\alpha(t) \in K$ avec $t \in [0, T]$, la définition (1.67) du sous-différentiel $\partial\varphi_K(\alpha)$ combinée à (3.4) implique

$$\begin{aligned}
& (\dot{\alpha}(t), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} - k(\alpha\alpha(t), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} \\
& \geq (S(\varepsilon(u(t)), \alpha(t)), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K.
\end{aligned} \quad (3.37)$$

En utilisant la formule de Green avec (3.10) et la forme bilinéaire $a(\zeta, \varphi)$, on trouve

$$(\dot{\alpha}(t), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \geq (S(\varepsilon(u(t)), \alpha(t)), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K \quad (3.38)$$

3.1. FORMULATION DU PROBLÈME

De (3.36)-(3.38),(3.17) et (3.15)-(3.16), on obtient la formulation variationnelle du problème P .

Problème \mathcal{PV} . Trouver le champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow V$, le champ potentiel électrique $\varphi : [0, T] \rightarrow W$, le champ d'endommagement $\alpha : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$ tels que.

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}\varepsilon(u(t), \alpha), \varepsilon(v) - \varepsilon(u)) \\ & + j(u, v) - j(u, u) + \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(u(s)) ds, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \right)_{\mathcal{H}} \\ & + (\varepsilon^* \nabla \varphi(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u))_{\mathcal{H}} \geq (f(t), u - v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, t \in (0, T) \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\alpha(t) \in K, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\begin{aligned} & (\dot{\alpha}(t), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + \alpha(\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\ & \geq (S(\varepsilon(u(t)), \alpha(t)), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$(\mathbf{B}\nabla\varphi(t), \nabla\zeta)_W - (\varepsilon\varepsilon(u(t)), \nabla\zeta)_W + (h(u(t), \varphi(t)), \xi)_w = (q(t), \xi)_w \quad \forall \zeta \in \mathcal{W}. \quad (3.41)$$

$$u(0) = u_0, \alpha(0) = \alpha_0. \quad (3.42)$$

L'apport principal de cette section réside dans la preuve du théorème d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 3.1.1. *Sous les hypothèses (3.17) - (3.30) , le problème PV admet une solution unique $\{u, \varphi, \alpha\}$ ayant la régularité*

$$u \in C^1(0, T; V). \quad (3.43)$$

$$\sigma \in C(0, T; \mathcal{H}_1). \quad (3.44)$$

$$\varphi \in C(0, T; W). \quad (3.45)$$

$$\alpha \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.46)$$

Les fonctions u, φ, σ, D et α satisfaisant (3.1) -(3.2) et (3.40)-(3.43) s'appellent une solution faible du problème \mathbf{P} . Nous concluons que sous les hypothèses (3.17)-(3.30), le problème mécanique (3.1) - (3.15) a une solution faible unique qui satisfait (3.50) - (3.51). La régularité de la

solution faible est donnée par (3.47) et en termes de contraintes

$$D \in C(0, T; \mathcal{W}_1) \quad (3.47)$$

En effet, de (3.42), il vient que $\operatorname{div} D = q_0(t)$ pour tout $t \in [0, T]$. De la régularité (3.46) de φ combinée avec (3.2) et (3.17) - (3.28), on obtient (3.48).

La démonstration du Théorème 3.1.1 sera développée selon une approche progressive, combinant la théorie des inéquations variationnelles, les propriétés fondamentales des opérateurs monotones et des arguments classiques de point fixe. Dans le cadre de cette analyse, nous admettrons la validité des hypothèses (3.17)–(3.30). Nous utiliserons fréquemment la notation c pour désigner diverses constantes positives génériques, dépendant des paramètres géométriques du domaine $(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3)$ et des coefficients physiques du problème $(p_\nu, p_\tau, L, \gamma_\nu, \gamma_\tau)$, dont les valeurs numériques peuvent différer selon les contextes d'application. Pour initier cette démonstration, nous considérons deux champs donnés : un champ η appartenant à l'espace $C(0, T; V)$ des fonctions continues à valeurs dans V , et un champ thermique θ dans $C(0, T; L^2(\Omega))$. La première étape de notre raisonnement consiste à examiner un problème variationnel auxiliaire dont l'étude nous conduira, dans la section suivante, au résultat central d'existence et d'unicité que nous formulons maintenant précisément.

3.2 Résultat d'existence et d'unicité

Problème \mathcal{PV}_η^u . Trouver le champ des déplacements $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$ tel que

$$\sigma_\eta = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta) + \eta \quad (3.48)$$

$$(\sigma_\eta, \varepsilon(\omega - \dot{u}_\eta))_{\mathcal{H}} + j(u_\eta, \omega) - j(u_\eta, \dot{u}_\eta) \geq (f, \omega - \dot{u}_\eta)_V, \quad \forall \omega \in V. \quad (3.49)$$

$$u_\eta(0) = u_0 \quad (3.50)$$

Dans l'étude du problème variationnel \mathbf{PV}_η^u nous avons le résultat suivant

Lemme 3.2.1. *Soit $h \in C(0, T; V)$. Alors il existe une fonction unique $v_{\eta h} \in C(0, T; V)$ tel*

que

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{A}\varepsilon(v_{\eta\mathbf{h}}), \varepsilon(\omega - v_{\eta\mathbf{h}}))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{h}, \omega) - j(\mathbf{h}, v_{\eta\mathbf{h}}) \\
 & \geq (f, \omega - v_{\eta\mathbf{h}})_V - (\eta, \varepsilon(\omega - v_{\eta\mathbf{h}}))_{\mathcal{H}}, \\
 & t \in [0, T], \quad \forall \omega \in V \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

Démonstration de Lemme 3.2.1. Il résulte qu'il existe une fonction unique

$$v_{\eta\mathbf{h}} : [0, T] \rightarrow V$$

qui constitue une solution de l'inégalité variationnelle elliptique (3.52). Afin de caractériser précisément sa régularité, nous démontrons que $v_{\eta\mathbf{h}} \in C(0, T; V)$. Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$ et désignons par $\eta_i = \eta(t_i)$, $\mathbf{h}_i = \mathbf{h}(t_i)$, $f_i = f(t_i)$ et $v_i = v_{\eta\mathbf{h}}(t_i)$, $i = 1, 2$. Nous choisissons $\omega = v_2$ dans (3.52) à $t = t_1$, $\omega = v_1$ dans (3.51) (3.4) à $t = t_1$ et ajouter les deux inégalités pour obtenir

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2), \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{H}} \leq (f_1 - f_2, v_1 - v_2)_V + (\eta_1 - \eta_2, \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{H}} \\
 & + j(\mathbf{g}_1, v_2) - j(\mathbf{g}_1, v_1) + j(\mathbf{h}_2, v_1) - j(\mathbf{h}_2, v_2)
 \end{aligned}$$

Par minoration via (3.17) du terme gauche, on obtient

$$(\mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2), \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{H}} \geq m_{\mathcal{A}} \|v_1 - v_2\|_V^2 \quad \forall u, v \in V \quad (3.52)$$

Le dernier membre de (3.52) est majoré grâce à (3.24), propriété selon laquelle

$$j(\mathbf{h}_1, v_2) - j(\mathbf{h}_1, v_1) + j(\mathbf{h}_2, v_1) - j(\mathbf{h}_2, v_2) \leq c(\|\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2\|_V \|v_1 - v_2\|_V) \quad (3.53)$$

L'utilisation de ces limites dans (3.52), nous obtenons

$$\|v_1 - v_2\|_V \leq c(\|f_1 - f_2\|_V + \|\eta_1 - \eta_2\|_{\mathcal{H}} + \|\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2\|_V) \quad (3.54)$$

Ensuite, la conclusion que $v_{\eta\mathbf{h}} \in C([0, T]; V)$ résulte de la continuité de f, η , et \mathbf{g} dans leurs espaces respectifs V, \mathcal{H} et V . \square

3.2. RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

Grâce au Lemme 3.2.1, nous établissons maintenant l'existence et l'unicité de solutions pour le problème \mathbf{PV}_η^u .

Lemme 3.2.2. *Il existe une solution unique à un problème \mathbf{PV}_η^u tels que $u_\eta \in C^1([0, T]; V)$ et $\sigma_\eta \in C(0, T; \mathcal{H}_1)$.*

Démonstration de Lemme 3.2.2. Nous considérons l'opérateur $\Lambda_\eta : C(0, T; V) \rightarrow C(0, T; V)$ défini par

$$\Lambda_\eta \mathbf{h}(t) = u_0 + \int_0^t v_{\eta \mathbf{h}}(s) ds, \quad \mathbf{h} \in C(0, T; V), \quad t \in [0, T] \quad (3.55)$$

où $v_{\eta \mathbf{g}}$ est une solution de (3.51). Nous allons montrer que cet opérateur a une unique point fixe $\mathbf{h}_\eta \in C(0, T; V)$. A cette fin, soit $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in C(0, T; V)$ et notons par $v_i = v_{\eta \mathbf{h}_i}, i = 1, 2$. Les solutions de (3.52) correspondant. En utilisant la définition (3.56), nous obtenons

$$\|\Lambda_\eta \mathbf{h}_1(t) - \Lambda_\eta \mathbf{h}_2(t)\|_V \leq \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V ds, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.56)$$

En outre, en utilisant des estimations similaires à ceux menant à (3.55) dans la preuve de lemme 3.2.1, nous avons

$$\|v_1(s) - v_2(s)\|_V \leq c \|\mathbf{h}_1(s) - \mathbf{h}_2(s)\|_V, \quad \forall s \in [0, t]$$

Ensuite, il découle de (3.57) que.

$$\|\Lambda_\eta \mathbf{h}_1(t) - \Lambda_\eta \mathbf{h}_2(t)\|_V \leq \int_0^t \|\mathbf{h}_1(s) - \mathbf{h}_2(s)\|_V ds, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.57)$$

Réitérant cette inégalité m fois, nous obtenons

$$\|\Lambda_\eta^m \mathbf{h}_1 - \Lambda_\eta^m \mathbf{h}_2\|_{C(0, T; V)} \leq \frac{(cT)^m}{m!} \|\mathbf{h}_1(s) - \mathbf{h}_2(s)\|_{C(0, T; V)}, \quad \forall t \in [0, T]$$

Ceci montre que pour m suffisamment grande à l'opérateur Λ_η^m est une contraction de l'espace de Banach $C(0, T; V)$. Ainsi, l'opérateur Λ_η a un unique point fixe $\mathbf{g}_\eta \in C(0, T; V)$ \square

Ensuite, $v_\eta \in C(0, T; V), u_\eta \in C^1(0, T; V)$ et $\sigma_\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$

soient proposée par

$$v_\eta = v_{\eta g}. \quad (3.58)$$

$$u_\eta(t) = u_0 + \int_0^t v_\eta(s) ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.59)$$

$$\sigma_\eta = \mathcal{A}\varepsilon(v_\eta) + \eta. \quad (3.60)$$

De (3.49) et (3.51) sont satisfaites. En outre, par (3.59), (3.60) et (3.56), il s'ensuit que $u_\eta = g_\eta$ et $\dot{u}_\eta = v_\eta$. Par conséquent, si nous laissons $g = g_\eta$ dans (3.52) on obtient (3.50). Pour prouver la régularité de σ_η , nous choisissons $\omega = \dot{u}_\eta \pm \varphi$ dans (3.50), avec $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, pour obtenir.

$$(\sigma_\eta, \varepsilon(-\varphi))_H = (f, \varphi)_V, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \text{sur} \quad [0, T] \quad (3.61)$$

Rappelant la définition du terme $(f, \varphi)_V$ dans (3.29), nous trouvons

$$\text{Div } \sigma_\eta + f_0 = 0 \quad \text{sur} \quad [0, T] \quad (3.62)$$

Sous l'hypothèse (3.27) et compte tenu de l'équation (3.62), on déduit que $\sigma_\eta \in C([0, T]; \mathcal{H}_1)$. Ce résultat permet d'établir l'existence dans le Lemme 3.2.2. L'unicité de la solution est une conséquence directe des estimations (3.49) et (3.51), combinées avec les propriétés (3.17), (3.23) et une application standard de l'inégalité de Gronwall. Pour l'étape suivante, nous exploitons la solution $u_\eta \in C^1([0, T], V)$ obtenue via le Lemme 3.2.2 afin de formuler le problème variationnel suivant pour le potentiel électrique.

Problem $\mathcal{PV}_\eta^\varphi$. Trouver le champ de potentiel électrique $\varphi_\eta : [0, T] \rightarrow W$ tel que

$$(\mathbf{B}\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\zeta)_w - (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\zeta)_w + (h(u_\eta(t), \varphi_\eta(t)), \xi)_w = (q(t), \zeta)_w \quad \forall \zeta \in \mathcal{W}, t \in (0, T). \quad (3.63)$$

pour tout $\zeta \in W, t \in [0, T]$. Pour que le problème \mathbf{PV}_η^φ soit bien posé on a le résultat suivant

Lemme 3.2.3. *Le problème variationnel \mathbf{PV}_η^φ admet une solution unique qui satisfait la régularité (3.45). De plus, si φ_{η_1} et φ_{η_2} sont deux solutions (3.45) correspondants à $\eta_1, \eta_2 \in C([0, T]; \mathcal{H})$ alors il existe c tel que*

$$\|\varphi_{\eta_1}(t) - \varphi_{\eta_2}(t)\|_W \leq c \|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_V, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.64)$$

Démonstration de Lemme 3.2.3. . En utilisant les memes argument du lemme 3.3.2. On note par φ_η la solution de problème \mathbf{PV}_η^φ obtenue dans le lemme 3.3.3. \square

Dans la troisième étape, soit $\theta \in C(0, T; L^2(\Omega))$. On considère alors pour le champ d'endommagement le problème variationnel suivant.

Problem $\mathcal{PV}_\theta^\alpha$. Trouver le champ d'endommagement $\alpha_\theta : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} \alpha_\theta(t) &\in K, \\ (\dot{\alpha}_\theta(t), \xi - \alpha_\theta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha_\theta(t), \xi - \alpha_\theta(t)) & \\ &\geq (\theta(t), \xi - \alpha_\theta(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \xi \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\alpha_\theta(0) = \alpha_0. \tag{3.66}$$

On a le résultat suivant.

Lemme 3.2.4. *Le problème variationnel $\mathbf{PV}_\theta^\alpha$ admet une solution unique α_θ qui satisfait la régularité (3.46).*

Démonstration de Lemme 3.2.4. . L'inclusion de l'application qui définit de $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ dans $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ est continue et sa gamme est dense. We désignons par $H^1(\Omega)'$ la double espace de $H^1(\Omega)$ et en identifiant le double de $L^2(\Omega)$ avec lui-même, nous pouvons écrire le Gelfand triple

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)'$$

Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)'}$ pour représenter l'appariement de la dualité entre $H^1(\Omega)'$ et $H^1(\Omega)$. nous avons

$$(\alpha, \zeta)_{H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)'} = (\alpha, \zeta)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \alpha \in L^2(\Omega), \quad \zeta \in H^1(\Omega)$$

et nous notons que K est un ensemble convexe fermé dans $H^1(\Omega)$. Puis, en utilisant la définition de la forme bilinéaire $a(\zeta, \varphi)$ et le fait que $\alpha_0 \in K$, il est facile de voir que Lemme 3.3.4 est une conséquence directement du théorème 1.9.7. \square

Dans la quatrième étape, on définit l'opérateur Λ

$$\Lambda : C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega)) \rightarrow C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$$

défini par : pour chaque $(\eta, \theta) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$

$$\Lambda(\eta, \theta)(t) = (\Lambda_1(\eta, \theta)(t), \Lambda_2(\eta, \theta)(t)) \in \mathcal{H} \times L^2(\Omega) \quad (3.67)$$

avec

$$\begin{aligned} (\Lambda_1(\eta, \theta)(t), v)_{\mathcal{H} \times V} &= (\mathcal{G}(\varepsilon(u_\eta(t)), \alpha_\theta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\ &\quad + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \left(\int_0^t \mathcal{B}(t-s) \varepsilon(u_\eta(s)) ds, \varepsilon(v) \right)_H. \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\Lambda_2(\eta, \theta)(t) = S(\varepsilon(u_\eta(t)), \alpha_\theta(t)). \quad (3.69)$$

Ici, pour tout $(\eta, \theta) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$; u_η, φ_η et α_θ représentent le champ des déplacements, le champ potentiel électrique, et le champ d'endommagement obtenus dans les lemmes 3.3.1, 3.3.3 et 3.3.4 respectivement. Nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.2.5. *Il existe un élément unique $(\eta^*, \theta^*) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$ tel que*

$$\Lambda(\eta^*, \theta^*) = (\eta^*, \theta^*)$$

Démonstration de Lemme 3.2.5. . Soient (η_1, θ_1) et $(\eta_2, \theta_2) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$. Nous utilisons les notations $u_{\eta_i} = u_i, \dot{u}_{\eta_i} = v_{\eta_i} = v_i, \varphi_{\eta_i} = \varphi_i$, et $\alpha_{\theta_i} = \alpha_i$ pour $i = 1, 2$. En employant

(3.17) et (3.22) - (3.24) avec les définitions de R_ν, R_τ, j et la remarque 1.3.1, nous avons

$$\begin{aligned}
 & \|\Lambda_1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda_1(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \\
 & \leq c \left(\|\mathcal{G}(\varepsilon(u_1(t)), \alpha_1(t)) - \mathcal{G}(\varepsilon(u_2(t)), \alpha_2(t))\|_{\mathcal{H}}^2 \right. \\
 & \quad + \int_0^t \|M(t-s)\varepsilon(u_1(s) - u_2(s))\|_{\mathcal{H}}^2 ds \\
 & \quad \left. + \|\mathcal{E}^*\nabla\varphi_1(t) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \right) \\
 & \leq c \left(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \right. \\
 & \quad \left. + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 \right). \tag{3.70}
 \end{aligned}$$

Maintenant, de (3.70), on obtient

$$\|\Lambda_2(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda_2(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \left(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \tag{3.71}$$

Alors, depuis (3.71) et (3.72), on a

$$\begin{aligned}
 & \|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{H \times L^2(\Omega)}^2 \\
 & \leq c \left(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \right. \\
 & \quad \left. + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \tag{3.72}
 \end{aligned}$$

Pourtout p.p. $t \in [0, T]$. Il découle de (3.60), que

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V ds, \quad \forall t \in [0, T] \tag{3.73}$$

En utilisant (3.49), (3.50), et des estimations comparables à celles de la preuve du lemme 3.3.1 (voir (3.52)), nous constatons que, pour $s \in [0, T]$,

$$\|v_1(s) - v_2(s)\|_V \leq c(\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{\mathcal{H}} + \|u_1(s) - u_2(s)\|_V), \quad \forall t \in [0, T] \tag{3.74}$$

3.2. RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

La combinaison de (3.74) et (3.75), et en utilisant l'inégalité de Gronwall, nous avons

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_T ds, \quad \forall t \in [0, T]$$

ce qui implique que

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_H^2 ds, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.75)$$

Nous utilisons (3.64), (3.19), (1.62) et l'inégalité de Friedrichs-Poincaré (1.60) pour obtenir

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 \leq c \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \quad (3.76)$$

De (3.66), nous déduisons que

$$(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{L^2(\Omega)} + a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \leq (\theta_1 - \theta_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{L^2(\Omega)} \text{ p.p. } t \in [0, T].$$

En intégrant l'inégalité précédente avec les conditions initiales

$$\alpha_1(0) = \alpha_0 \text{ et } \alpha_2(0) = \alpha_0$$

et en utilisant l'inégalité

$$a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \geq 0$$

on obtien

$$\frac{1}{2} \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t (\theta_1(s) - \theta_2(s), \alpha_1(s) - \alpha_2(s))_{L^2(\Omega)} ds, \quad \forall t \in [0, T]$$

Il vient alors que

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]$$

Nous combinons l'inégalité précédente avec le lemme de Gronwall, pour trouver

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.77)$$

De l'inégalité et estimations précédente (3.76), (3.77) et (3.78) il s'ensuit que maintenant

$$\|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{H \times L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t \|(\eta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \theta_2)(s)\|_{\mathcal{H} \times L^2(\Omega)}^2 ds$$

En réitégrant m fois l'inégalité précédente, on obtient

$$\|\Lambda^m(\eta_1, \theta_1) - \Lambda^m(\eta_2, \theta_2)\|_{C(0,T;H \times L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{(cT)^m}{m!} \|(\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)\|_{C(0,T;H \times L^2(\Omega))}^2 \quad (3.78)$$

Ce qui implique que pour m suffisamment grand, l'opérateur Λ^m est une contraction sur l'espace de Banach $C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$, donc, Λ^m possède un point fixe unique $(\eta^*, \theta^*) \in C(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$ et par conséquent (η^*, θ^*) est l'unique point fixe de Λ . Maintenant, on peut établir la démonstration du théorème 3.2.1. \square

Démonstration du théorème 3.2.1.

Existence. Soit $(u_{\eta^*}, \sigma_{\eta^*})$ la solutions du problème $PV_{\eta^*}^u$ et φ_{η^*} est la solution de probleme $PV_{\eta^*}^\varphi$ pour $\eta = \eta^*$, et soit α_{θ^*} la solution du prnlème $PV_{\theta^*}^\alpha$ pour $\theta = \theta^*$. Depuis

$$\eta^*(t) = \mathcal{G}(\varepsilon(u_*(t)), \beta_*(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(u_*(s)) ds + \mathcal{E}^* \nabla \varphi_*(t) \quad (3.79)$$

$$\theta^*(t) = S\varepsilon(u_*(t)) \quad (3.80)$$

nous trouvons que $(u_{\eta^*}, \sigma_{\eta^*}, \varphi_{\eta^*}, \alpha_{\theta^*})$ sont des solutions des problèmes(3.40) et (3.43) qui satisfait (3.44) -(3.45).

Unicité. Soit $(u_{\eta^*}, \sigma_{\eta^*}, \varphi_{\eta^*}, \alpha_{\theta^*})$ la solution de (3.40) -(3.43) obtenue ci-dessus, et soit $(u, \sigma, \varphi, \alpha)$ soit une autre solution du probleme, qui satisfait(3.44) -(3.45). On note $\eta \in C([0, T], \mathcal{H})$ et $\theta \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ les opétreurs

$$\eta(t) = \mathcal{G}(\varepsilon(u(t)), \alpha(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(u(s))ds + \varepsilon^* \nabla \varphi(t) \quad (3.81)$$

$$\theta(t) = S(\varepsilon(u(t)), \alpha(t)) \quad (3.82)$$

Maintenant (3.40), (3.41) et(3.43) impliquent que (u, σ, φ) est une solution du problème \mathbf{PV}_{η}^u et $\mathbf{PV}_{\eta}^\varphi$. Du lemmes 3.3.1 et 3.3.3, il s'ensuit que ce problème a une solution unique $u_{\eta} \in$

3.2. RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

$C^1([0, T]; V)$, $\varphi_\eta \in C([0, T]; W)$ et $\sigma_\eta \in C([0, T]; \mathcal{H}_1)$ et si nous concluons que

$$u = u_\eta, \quad \sigma = \sigma_\eta, \quad \varphi = \varphi_\eta. \quad (3.83)$$

Ensuite(3.6),(3.8), et un des rendements similaires argument

$$\alpha = \alpha_\theta \quad (3.84)$$

En utilisant maintenant (3.79) nous obtenons $\Lambda(\eta, \theta) = (\eta, \theta)$ telle que

$$\eta = \eta^*, \quad \theta = \theta^* \quad (3.85)$$

L'unicité est garantie par l'unicité du point fixe de $\Lambda(\eta, \theta)$ combinée à celle des solutions de \mathbf{PV}_η^u , \mathbf{PV}_η^φ et $\mathbf{PV}_\theta^\alpha$, ce qui termine la preuve. \square

CHAPITRE 4

ÉTUDE D'UN PROBLÈME DYNAMIQUE EN THERMO-ÉLECTRO- ÉLASTO-VISCOPLASTICITÉ AVEC ENDOMMAGEMENT

Dans ce chapitre, nous considérons un problème de contact dans le cas dynamique entre un corps thermo-électro-élasto-viscoplastique avec endommagement et une fondation. Le contact est bilatéral avec frottement. Le frottement est formulé par une version de la loi de Coulomb. Nous utilisons la loi thermo-électro-élasto-viscoplastique avec endommagement pour modéliser le comportement du matériau. L'évolution d'endommagement est décrite par l'insertion d'un type parabolique. Nous établissons une formulation variationnelle pour le modèle et nous prouvons l'existence d'une solution faible unique du problème. La preuve est basée sur un résultat d'existence et d'unicité d'inégalités paraboliques, d'équations différentielles et d'arguments du point fixe.

Ce chapitre est organisé comme suit. D'abord, nous décrivons le modèle mathématique du problème, nous introduisons des notations, Nous énumérons les suppositions concernant les données du problème. Ensuite, nous présenterons le problème variationnel du modèle. Finalement, nous

formulons notre résultat principal concernant l'existence et l'unicité, et nous présentons sa preuve.

4.1 Formulation du problème

. Dans le contexte des problèmes mécaniques, nous envisageons un corps qui est thermo-électro-élasto-viscoplastique, avec une loi constitutive qui est fonction de deux variables d'état : l'endommagement α et la température θ . Le contact est illustré par l'état de conformité standard et une version de la loi associée à la friction. Ce modèle mathématique nous conduit au problème mécanique qui s'ensuit.

Problème \mathcal{P} . Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le champ de potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ des déplacements électriques $\mathbf{D} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, la temperature $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et l'endommagement $\alpha : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t))) + \mathcal{G}(\varepsilon \mathbf{u}(s), \alpha(t)) + \int_0^t \mathcal{Q}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t))), \varepsilon(\mathbf{u}(s))) ds + \mathcal{E}^* \nabla \varphi(t) - \mathcal{M}\theta(t), \quad (4.1)$$

$$\mathbf{D} = \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}) - B\nabla(\varphi(t)) - \mathcal{P}\theta \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (4.2)$$

$$\dot{\theta} - \operatorname{div}(K\nabla\theta) = -M\nabla\dot{\mathbf{u}} + q \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.3)$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + f_0 = \rho\ddot{\mathbf{u}} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.4)$$

$$\dot{\alpha} - K\Delta\alpha + \partial\varphi_K(\alpha) \ni \Phi(\varepsilon(\mathbf{u}) - \alpha) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (4.5)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} - q_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.6)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (4.7)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T). \quad (4.8)$$

$$\sigma_\tau = p_r(u_\nu - h) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (4.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\sigma_\tau\| \leq \mu p \|R\sigma_\nu\| \\ \|\sigma_\tau\| < \mu p \|R\sigma_\nu\| \implies \dot{\mathbf{u}}_\tau = 0 \\ \|\sigma_\tau\| = \mu p \|R\sigma_\nu\| \implies \exists \lambda > 0 : \sigma_\tau = -\lambda \dot{\mathbf{u}}_\tau \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T). \end{array} \right. \quad (4.10)$$

$$-K_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \nu_j = K_e(\theta - \theta_R) - h_\tau(|\dot{\mathbf{u}}_\tau|) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]. \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0, T), \quad (4.12)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \times (0, T). \quad (4.13)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T). \quad (4.14)$$

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_b \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T). \quad (4.15)$$

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = \psi(u_\nu - h) \phi_L(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (4.16)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0 \quad \text{et} \quad \theta(0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (4.17)$$

Les équations et des conditions aux frontières. Les équations (4.1) et (4.2) décrivent la loi de comportement thermo-électro-élastique-viscoplastique, tandis que l'évolution du champ thermique est contrôlée par l'équation différentielle fournie par la relation (4.3), supposée être une fonction assez générale des souches. Les équations mentionnées (4.6) et (4.16) représentent les équations stationnaires relatives au champ de déplacement électrique, Alors que les conditions (4.7) et (4.8) concernent les contraintes aux limites associées au déplacement et à la traction. L'équation (4.12) révèle que la température devient nulle sur $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \times (0, T)$ ce qui implique qu'il n'y a qu'un effet électromécanique sur $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$. Les équations (4.14) et (4.15) représentent respectivement les conditions aux limites électriques pour le potentiel électrique sur Γ_a et pour les charges électriques sur Γ_b . Nous employons (4.16) comme condition de contact électrique sur Γ_3 , qui symbolise une condition régularisée. L'équation (4.17) illustre le champ de déplacement initial et le champ d'endommagement initial, où u_0 désigne le déplacement initial et θ_0 représente la température initiale.

Nous nous tournons vers les conditions de contact (4.9)-(4.10) décrivent le contact thermo-mécanique par frottement sur la surface de contact potentielle Γ_3 . La relation (4.9) décrit une condition de conformité normale avec la loi de Coulomb. L'équation (4.11) représente une condition limite de température associée sur la surface de contact.

4.1. FORMULATION DU PROBLÈME

Nous formulons à présent des suppositions concernant les données du problème.

On suppose que l'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ \text{(b) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2, \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ \text{(c) l'application } x \longrightarrow \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ \text{(d) l'application } x \longrightarrow \mathcal{A}(x, \varepsilon) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (4.18)$$

Supposons que l'opérateur d'élasticité $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{G}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{G}(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{G}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ \text{(b) l'application } x \longrightarrow \mathcal{G}(x, \varepsilon) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ \text{(c) l'application } x \longrightarrow \mathcal{G}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (4.19)$$

L'opérateur de viscoplasticité $\mathcal{Q} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) il existe une constante } L_{\mathcal{Q}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{Q}(x, \sigma_1, \varepsilon_1) - \mathcal{Q}(x, \sigma_2, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{Q}} (\|\sigma_1 - \sigma_2\| + \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|), \\ \quad \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ \text{(b) l'application } x \longrightarrow \mathcal{Q}(x, \sigma, \varepsilon) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon, \sigma \in \mathbb{S}^d, \\ \text{(c) l'application } x \longrightarrow \mathcal{Q}(x, 0, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (4.20)$$

Le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E}(x, \tau) = (e_{ijk}, \tau_{jk}), \quad \forall \tau = (\tau_{jk}) \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \text{ in } \Omega. \\ \text{(b) } e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i, j, k \leq d. \end{array} \right. \quad (4.21)$$

4.1. FORMULATION DU PROBLÈME

L'opérateur de dilatation thermique $\mathcal{M} : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe une constante } L_{\mathcal{M}} > 0 \text{ tel que} \\ \|\mathcal{M}(x, \theta_1) - \mathcal{M}(x, \theta_2)\| \leq L_{\mathcal{M}} \|\theta_1 - \theta_2\| \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega . \\ \text{(b) l'application } x \longrightarrow \mathcal{M}(x, \theta) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega, \forall \theta \in \mathbb{R} \\ \text{(c) l'application } x \longrightarrow \mathcal{M}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (4.22)$$

La fonction tangentielle satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{\tau} : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ verifie :} \\ \text{(a) : } \exists L_{\tau} > 0 \text{ s.t. } |h_{\tau}(x, r_1) - h_{\tau}(x, r_2)| \leq L_{\tau} |r_1 - r_2|, \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(b) : l'application } \mathbf{x} \mapsto h_{\tau}(x, r) \in L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (4.23)$$

Le tenseur de permittivité électrique $B = (B_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } B(x, E) = (B_{ij}(x) E_j) \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ \text{(b) } B_{ij} = B_{ji} \in L^{\infty}(\Omega), \quad 1 \leq i, j \leq d, \\ \text{(c) Il existe une constante } M_{\mathcal{B}} > 0 \text{ tel que } BE \cdot E \geq M_{\mathcal{B}} |E|^2, \\ \quad \quad \quad \forall E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.24)$$

L'opérateur de conductivité thermique $\mathcal{K} : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe une constante } L_{\mathcal{K}} > 0 \text{ tel que} \\ \|\mathcal{K}(x, r_1) - \mathcal{K}(x, r_2)\| \leq L_{\mathcal{K}} \|r_1 - r_2\| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega, \\ \text{(b) } m_{ij} = m_{ji} \in L^{\infty}(\Omega), \quad 1 \leq i, j \leq d. \\ \text{(c) l'application } x \longrightarrow S(x, 0, 0) \in L^2(\Omega) . \end{array} \right. \quad (4.25)$$

4.1. FORMULATION DU PROBLÈME

La fonction source d'endommagement $\Phi : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe une constante } L_\Phi > 0 \text{ tel que} \\ |\Phi(x, \eta_1, \omega_1, \beta_1) - \Phi(x, \eta_2, \omega_2, \beta_2)| \leq L_\Phi (|\eta_1 - \eta_2| + |\omega_1 - \omega_2| + |\beta_1 - \beta_2|) \\ \forall \eta_1, \eta_2, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{S}^d, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, x \in \Omega. \\ \text{(b) l'application } x \longrightarrow \Phi(x, \eta, \omega, \beta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \text{pour tout } \eta, \omega \in \mathbb{S}^d \text{ et } \forall \beta \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) l'application } x \longrightarrow \Phi(x, 0, 0, 0) \in \mathbb{L}^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (4.26)$$

la fonction $\Psi : \varepsilon \times \mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe une constante } L_\Psi > 0 \text{ telle que} \\ |\Psi(x, \sigma_1, \varepsilon_1, \theta_1, \xi_1) - \Psi(x, \sigma_2, \varepsilon_2, \theta_2, \xi_2)| \leq L_\Psi (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\theta_1 - \theta_2| + |\xi_1 - \xi_2|) \\ \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}_n, \theta_1, \theta_2, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, x \in \Omega. \\ \text{(b) l'application } x \longrightarrow \Psi(x, \sigma, \varepsilon, \theta, \xi) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \forall \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}_n \text{ et } \forall \theta, \xi \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) l'application } x \longrightarrow \Psi(x, 0, 0, 0) \in \mathbb{L}^2(\varepsilon). \end{array} \right. \quad (4.27)$$

Dans cette partie, nous rappelons quelques éléments et notations préliminaires. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [8, 13]. Les indices i, j, k et l vont de 1 à d et Il est implicite de faire une somme sur des indices répétés. Un indice post-virgule signale la dérivée partielle en relation avec le composant spécifique de la variable spatiale. Afin d'obtenir la formulation variationnelle du problème (2.1)-(2.16), nous définissons les ensembles pour le corps de liaison comme suit :

$$W = \left\{ \phi \in H^1(\Omega)^d : \phi = 0 \text{ dans } \Gamma_a \right\}, \quad \mathcal{W} = \left\{ D = (D_i) : D_i \in L^2(\Omega), \operatorname{div} D \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Sur les espaces V, W, \mathcal{W} , nous définissons les produits internes suivants

$$(u \cdot v)_V = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(v))_{\mathcal{H}}, \forall u, v \in V, \quad (4.28)$$

$$(\varphi, \phi)_W = (\nabla_\varphi, \nabla_\phi)_W, \forall \varphi, \phi \in W, \quad (4.29)$$

$$(w, z)_E = (\nabla_w, \nabla_z)_{\mathcal{H}}, \forall w, z \in E, \quad (4.30)$$

où $E = \{\gamma \in H^1(\Omega) : \gamma = 0 \text{ p.p. on } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}$.

Ainsi, les espaces $(V, (\cdot, \cdot)_V)$, $(W, (\cdot, \cdot)_W)$ et $(E, (\cdot, \cdot)_E)$ sont de véritables espaces de Hilbert.

Nous partons également du principe Que les forces physiques et les tensions de surface montrent une certaine régularité.

$$f_0 \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), f_2 \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \rho \in \mathbb{L}^\infty(\Omega). \quad (4.31)$$

$$q_0 \in C(0, T, L^2(\Omega)), \quad q_2 \in C(0, T, L^2(\Gamma_b)), \quad (4.32)$$

$$q_2(t) = 0 \text{ dans } \Gamma_3, \forall t \in [0, T]. \quad (4.33)$$

les fonctions g et μ ont les propriétés suivantes :

$$h \in L^2(\Gamma_3), \quad h(x) \geq 0, \quad \text{dans } \Gamma_3, \quad (4.34)$$

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(x) > 0, \quad \text{dans } \Gamma_3, \quad (4.35)$$

ici μ est le coefficient de frottement. Le champ de déplacement initial satisfait

$$u_0 \in V, \quad (4.36)$$

et le champ de température initial satisfait

$$\theta_0 \in E, \quad \theta_F \in L^2(0, T, L^2(\Gamma_3)), k_e \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+), q_{th} \in L^2(0, T, E'). \quad (4.37)$$

4.2 Formulation variationnelle

En utilisant la notation ci-dessus et en utilisant la formule de Green, nous dérivons la formulation variationnelle du problème mécanique. (4.1)-(4.17) pour toutes les fonctions $v \in V$, $w \in W_{th}$, $\phi \in W_e$ et p.p. $t \in (0, T)$, donné comme suit

Problem \mathcal{PV} . Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$, le champ des contraintes $\varphi : [0, T] \rightarrow W$, le champ des déplacements électriques $D : [0, T] \rightarrow H$ et la température

$\theta : [0, T] \longrightarrow V$, et l'endomangement $\alpha : [0, T] \longrightarrow E_1$ tel que

$$\begin{aligned} \sigma(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))) + \mathcal{G}(u(t), \alpha(t)) + \int_0^t \mathcal{Q}(\sigma(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))), \varepsilon(u(s))) ds \\ + \mathcal{E}^* \nabla \varphi(t) - \mathcal{M}\theta(t), \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$(\ddot{u}(t), v - \dot{u}(t))_{V' \times V} + (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{v}(t)) - j(\dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V, \quad (4.39)$$

$$(\dot{\alpha}(t), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha(t), \zeta - \alpha(t)) \geq (\Phi(\varepsilon(u(t))), \alpha(t), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)}, \quad (4.40)$$

pour toutes $\alpha(t) \in F$, $\zeta \in F$ et $t \in [0, T]$.

$$D(t) = \mathcal{E}\varepsilon(u(t)) - B\nabla(\varphi(t)) - \mathcal{P}\theta(t). \quad (4.41)$$

$$(D(t), \nabla\phi)_H = -(q_e(t), \phi)_W + (h(u(t), \varphi), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W, \quad t \in [0, T] \quad (4.42)$$

$$\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = R\dot{u}(t) + Q(t) \quad \text{dans } E' \quad (4.43)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0 \text{ et } \theta(0) = \theta_0 \text{ dans } \Omega. \quad (4.44)$$

Ici, la fonction $Q : [0, T] \rightarrow E'$ et les opérateurs $K : E \rightarrow E'$, $R : V \rightarrow E'$; $M : E \rightarrow V'$ sont définis par $\forall v \in V$, $\forall \tau \in E$, $\forall \eta \in E$:

$$\langle Q(t), \eta \rangle_{E' \times E} = \int_{\Gamma_3} k_e \theta_R \eta ds + \int_{\Omega} q \eta dx, \quad \langle K\tau, \eta \rangle_{E' \times E} = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma_3} k_e \tau \eta ds, \quad (4.45)$$

$$\langle Rv, \eta \rangle_{E' \times E} = \int_{\Gamma_3} h_\tau(|v_\tau|) \eta ds - \int_{\Omega} (M_e \nabla v) \eta dx, \quad \langle M\tau, v \rangle_{V' \times V} = (-\tau M_e, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}. \quad (4.46)$$

où $J_\varepsilon : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [0, T] \rightarrow V$, $q_e : [0, T] \rightarrow W$ and $\gamma : V \times W \rightarrow W$ sont respectivement définis par

$$J_\varepsilon(N, v) = \int_{\Gamma_3} \mu p |R \times N_\nu| \sqrt{|v_\tau|^2 + \varepsilon^2} da, \quad \forall v \in V, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4.47)$$

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot \mathbf{v} da. \quad (4.48)$$

Nous définissons la forme bilinéaire $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$a(\alpha, \zeta) = \kappa \int_{\Omega} \nabla \alpha \cdot \nabla \zeta dx \quad (4.49)$$

$$(q_e(t), \phi)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \phi dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \phi da, \quad (4.50)$$

$$(\gamma(u, \varphi), \phi)_W = \int_{\Gamma_3} \psi(u_\nu - h) \phi_L(\varphi - \varphi_0) \phi da \quad (4.51)$$

pour toutes $u, v \in V$, $\theta, w \in W$, $\phi \in W$ et $t \in [0; T]$. Nous observons que les définitions de f et q_e reposent sur le théorème de représentation de Riesz. Par ailleurs, les conditions (4.32) et (4.33) implique que

$$f \in C(0, T, V), \quad q_e \in C(0, T, W_e). \quad (4.52)$$

On note par $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_H$ and $\|\cdot\|_{V'}$, les normes sur les espaces V , H et V' , respectivement, et nous utilisons $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$ pour le jumelage de dualité entre V' and V . Notez que si $f \in H$, donc

$$(f, v)_{V' \times V} = (f, v)_H, \quad \forall v \in H. \quad (4.53)$$

La section suivante expose et prouve l'affirmation concernant l'unicité de la solution au problème \mathcal{P}_V .

4.3 Résultat d'existence et d'unicité

Le résultat d'existence et d'unicité est le suivant.

Théorème 4.3.1. *Supposons que (4.19)-(4.38) prise. Alors si $N_\psi < \frac{m_\beta}{a_0^2}$, il existe une solution unique $\{u, \sigma, \theta, \varphi, D\}$ au problème \mathcal{P}_V satisfaisant*

$$u \in W^{1,2}(0; T; V) \cap C^1(0; T; V) \cap W^{2,2}(0; T; V'), \sigma \in C(0; T; \mathcal{H}) \quad (4.54)$$

$$\varphi \in C(0; T; W), D \in C(0; T; \mathcal{W}), \quad (4.55)$$

$$\theta \in W^{1,2}(0; T; E') \cap L^2(0; T; E) \cap C(0; T; L^2(\Omega)). \quad (4.56)$$

$$\alpha \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (4.57)$$

La fonction $u, \sigma, \theta, \varphi, D, \theta$ et α , qui satisfont (4.39)-(4.44), sont appelées la solution faible au problème de contact \mathcal{P} . Nous concluons que, sous les hypothèses (4.19)-(4.37) et si $N_\psi < \frac{m_\beta}{a_0^2}$ est satisfait,

le problème mécanique (4.1)-(4.17) a une solution faible unique satisfaisant (4.1)-(4.3).

La démonstration du théorème 4.3.1 s'effectue en plusieurs phases. Elle se base sur les conclusions des inéquations variationnelles évolutives, des équations différentielles ordinaires et des raisonnements par point fixe. Dans la première phase, nous examinons le problème intermédiaire suivant pour tout η appartenant à $\mathbb{L}^2(0, T; V)$.

Problem $\mathcal{PV}u_\eta$. Trouver le champ des déplacements $u_\eta : [0; T] \rightarrow V$ tel que $\forall t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} (\ddot{u}(t), v - \dot{u}(t))_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v - \dot{u}_\eta(t)))_{\mathcal{H}} + j(u_\eta(t), v) - j(u_\eta(t), \dot{u}_\eta(t)) \\ + (\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t))_V \geq (f(t), v - \dot{u}_\eta(t))_V, \end{aligned} \quad (4.58)$$

$u_\eta(0) = u_0, \dot{u}_\eta(0) = v_0$ for all $u_\eta, v \in V$. Concernant l'analyse du problème $\mathcal{PV}u_\eta$, voici les conclusions que nous avons obtenues.

Lemme 4.3.2. $\mathcal{PV}u_\eta$ Il existe une seule solution qui répond à la condition de régularité mentionnée dans (4.1) :

$$u_\eta(t) = u_0 + \int_0^t v_{\eta g_\eta}(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Nous définissons l'opérateur $A : V \rightarrow V'$ par

$$(Av, w)_{V' \times V} = (\mathcal{A}\varepsilon(v), \varepsilon(w))_{\mathcal{H}}, \quad \forall v, w \in V. \quad (4.59)$$

Nous considérons l'inégalité variationnelle suivante.

Problème $\mathcal{PV}v_\eta$. Trouver le champ des déplacements $v_\eta : [0; T] \times \Omega \rightarrow V$ tel que $\forall t \in [0, T]$.

$$\begin{aligned} (\dot{v}_{N_\eta}(t), w - v_{N_\eta}(t))_{V' \times V} + (Av_{N_\eta}(t), w - v_{N_\eta}(t))_{V' \times V} + j(N, w) \\ - j(N, v_{N_\eta}(t)) \geq (f_\eta(t), w - v_{N_\eta}(t))_{V' \times V}, \quad \forall w \in V, \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$v_{N_\eta}(0) = v_o. \quad (4.61)$$

Dans l'étude du problème $\mathcal{PV}v_\eta$, On obtient le résultat suivant.

Lemme 4.3.3. pour tous $N \in \mathbb{L}^2(0, T, \mathcal{H}_1)$ and $\eta \in \mathbb{L}^2(0, T, V')$, le problème $\mathcal{PV}v_\eta$ a une solution unique avec la régularité $v_{N_\eta} \in C(0, T, H) \cap \mathbb{L}^2(0, T, V) \cap W^{1,2}(0, T, V')$.

Démonstration de Lemme 4.3.3. Nous commençons par l'étape de régularisation que nous

4.3. RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

avons définie, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$j_\varepsilon(N, v) = \int_{\Gamma_3} \mu p |R \times N_\nu| \sqrt{|v_\tau|^2 + \varepsilon^2} da, \quad \forall v \in V, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Après quelques étapes algébriques et pour tout $\varepsilon > 0$, j_ε est C^1 convexe sur V , et son dérivé de Frechet satisfait

$$\forall c > 0, \quad \forall w \in V \quad \left| j'_\varepsilon(N, w) \right|_{V'} \leq C |N|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}. \quad (4.62)$$

Depuis (4.23) et la monotonie de j'_ε , il résulte de l'équation d'évolution classique du premier ordre que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad v_{N_\eta}^\varepsilon \in \mathbb{L}^2(0, T; V) \cap C(0, T; H) \text{ et } \dot{v}_{N_\eta}^\varepsilon \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$$

tel que

$$\begin{cases} \dot{v}_{N_\eta}^\varepsilon(t) + Av_{N_\eta}^\varepsilon + j'_\varepsilon(N, v_{N_\eta}^\varepsilon) = f_\eta(t) \text{ sur } V', \text{ p.p. } t \in [0, T], \\ v_{N_\eta}^\varepsilon(0) = v_0. \end{cases} \quad (4.63)$$

Donc, $v_{N_\eta}^\varepsilon \in \mathbb{L}^2(0, T; V) \cap W^{1,2}(0, T; V')$, on obtient

$$\begin{cases} \left(\dot{v}_{N_\eta}^\varepsilon(t), w - v_{N_\eta}^\varepsilon(t) \right)_{V' \times V} + \left(Av_{N_\eta}^\varepsilon(t), w - v_{N_\eta}^\varepsilon(t) \right)_{V' \times V} + j_\varepsilon(N, w) \\ - j_\varepsilon(N, v_{N_\eta}^\varepsilon(t)) \geq \left(f_\eta(t), w - v_{N_\eta}^\varepsilon(t) \right)_{V' \times V} \quad \forall w \in V, \text{ p.p. } t \in [0, T]. \end{cases} \quad (4.64)$$

En utilisant (4.23) et la monotonie de j'_ε , nous en déduisons que

$$\exists C > 0, \quad \forall t \in [0, T] : \left| v_{N_\eta}^\varepsilon(t) \right| \leq C \int_0^T \left| v_{N_\eta}^\varepsilon(t) \right|_V^2 dt \leq C \int_0^T \left| \dot{v}_{N_\eta}^\varepsilon(t) \right|_{V'}^2 dt \leq C,$$

en utilisant une sous-suite pour trouver que

$$\begin{cases} v_{N_\eta}^\varepsilon \rightharpoonup v_{N_\eta} \text{ faiblement dans } \mathbb{L}^2(0, T; V) \text{ et faiblement dans } \mathbb{L}^\infty(0, T; H), \\ \dot{v}_{N_\eta}^\varepsilon \rightharpoonup \dot{v}_{N_\eta} \text{ faiblement dans } \mathbb{L}^2(0, T; V'). \end{cases} \quad (4.65)$$

□

Il s'ensuit que

$$v_{N_\eta} \in C(0, T; H) \text{ et } v_{N_\eta}^\varepsilon(t) \rightharpoonup v_{N_\eta}(t) \text{ faiblement dans } H, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.66)$$

4.3. RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

Par intégration de (4.63), nous avons $\forall w \in \mathbb{L}^2(0, T; V)$,

$$\int_0^T (\dot{v}_{N\eta}^\varepsilon(t), w)_{V' \times V} dt + \int_0^T (Av_{N\eta}^\varepsilon(t), w)_{V' \times V} dt + \int_0^T j_\varepsilon(N, w) dt \geq \int_0^T (f_\eta(t), w(t))_{V' \times V} dt,$$

Alors nous avons

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\dot{v}_{N\eta}^\varepsilon(t), w)_{V' \times V} dt + \int_0^T (Av_{N\eta}^\varepsilon(t), w)_{V' \times V} dt + \int_0^T j_\varepsilon(N, w) dt \\ & \geq \int_0^T (\dot{v}_{N\eta}^\varepsilon(t), v_{N\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} dt + \int_0^T (Av_{N\eta}^\varepsilon(t), v_{N\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} dt + \\ & \int_0^T j_\varepsilon(N, v_{N\eta}^\varepsilon(t)) dt + \int_0^T (f_\eta(t), w(t) - v_{N\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} dt \\ & \geq \frac{1}{2} |v_{N\eta}^\varepsilon(t)|_H^2 - \frac{1}{2} |v_{N\eta}^\varepsilon(0)|_H^2 + \int_0^T (Av_{N\eta}^\varepsilon(t), v_{N\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} dt + \\ & \int_0^T j_\varepsilon(v_{N\eta}^\varepsilon(t)) dt + \int_0^T (f_\eta(t), w(t) - v_{N\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} dt. \end{aligned}$$

Depuis (4.64) et (4.65) nous obtenons que pour tout $w \in \mathbb{L}^2(0, T; V)$,

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\dot{v}_{N\eta}^\varepsilon(t), w - v_{N\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} dt + \int_0^T (Av_{N\eta}^\varepsilon(t), w - v_{N\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} dt + \\ & \int_0^T (j(N, w) - j(N, v_{N\eta}^\varepsilon)) dt \geq \int_0^T (f_\eta(t), w(t) - v_{N\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} dt. \end{aligned}$$

L'inégalité précédente implique (voir [13]) Cette

$$\begin{aligned} & (\dot{v}_{N\eta}^\varepsilon(t), w - v_{N\eta}^\varepsilon)_{V' \times V} + (Av_{N\eta}^\varepsilon(t), w - v_{N\eta}^\varepsilon)_{V' \times V} + j_\varepsilon(N, w) \\ & - j_\varepsilon(N, v_{N\eta}^\varepsilon(t)) \geq (f_\eta(t), w - v_{N\eta}^\varepsilon(t))_{V' \times V} \quad \forall w \in V, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Nous concluons que le problème $\mathcal{P}\mathcal{V}v_\eta$ a au moins une solution $v_{N\eta} \in C(0, T; H) \cap \mathbb{L}^2(0, T; V) \cap W^{1,2}(0, T; V')$ et $\dot{v}_{N\eta} \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$.

Pour l'unicité, laisser $v_{N\eta}^1, v_{N\eta}^2$ être deux solutions du **Problem** $\mathcal{P}\mathcal{V}v_\eta$, nous utilisons (4.59) obtenir pour $t \in [0, T]$,

$$(\dot{v}_{N\eta}^2(t) - \dot{v}_{N\eta}^1(t), v_{N\eta}^2(t) - v_{N\eta}^1(t)) - (Av_{N\eta}^2(t) - Av_{N\eta}^1(t), v_{N\eta}^2(t) - v_{N\eta}^1(t)) \leq 0.$$

Intégration de l'inégalité précédente, en utilisant (4.19) et (4.58), nous trouvons

$$\frac{1}{2} |v_{N\eta}^2(t) - v_{N\eta}^1(0)|_V^2 + m_{\mathcal{A}} \int_0^T |v_{N\eta}^2(s) - v_{N\eta}^1(s)|_V^2 ds \leq 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

4.3. RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

ce qui implique $v_{N\eta}^1 = v_{N\eta}^2$. Considérons maintenant $u_{N\eta} : [0, T] \rightarrow V$ est la fonction définie par

$$u_{N\eta}(t) = \int_0^t v_{N\eta}(s) ds + u_0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.67)$$

Concernant l'étude du problème $\mathcal{PV}u_\eta$, nous obtenons le résultat suivant.

Lemme 4.3.4. *Le problème $\mathcal{PV}u_\eta$ possède une unique solution qui répond à la régularité mentionnée dans (4.1).*

Démonstration de Lemme 4.3.4. La démonstration est une conséquence du lemme 4.3.3 avec (4.66). \square

Dans la seconde phase, en prenant $\eta \in C(0, T; V)$, Nous faisons appel au champ de déplacement u_η issu du lemme 4.3.2, et étudions le problème variationnel suivant.

Problème $\mathcal{PV}\varphi_\eta$. Trouver le potentiel électrique $\varphi_\eta : [0; T] \rightarrow W$ telle que $\forall t \in [0, T]$,

$$(B \nabla \varphi_\eta(t), \nabla \phi) - (\mathcal{E} \varepsilon(u_\eta(t)), \nabla \phi)_H + (\gamma(u_\eta(t), \varphi_\eta(t)), \phi)_W = (q_e(t), \phi)_W. \quad \forall \phi \in W. \quad (4.68)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 4.3.5. *$\mathcal{PV}\varphi_\eta$ Il existe une solution unique φ_η qui adhère à la régularité précisée. dans (4.2). En outre, si φ_{η_1} et φ_{η_2} représentent des solutions de (4.5) associées à $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{L}^2(0, T; V)$, alors on peut trouver un $C > 0$ tel que*

$$|(\varphi_{\eta_1} - \varphi_{\eta_2})(t)|_W \leq C |(u_{\eta_1} - u_{\eta_2})(t)|_V, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.69)$$

Démonstration de Lemme 4.3.5. Le même résultat pour ce lemme 4.3.5 est donné en [19]. \square

Dans la troisième phase, pour un λ donné appartenant à $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))$, nous examinons le problème variationnel suivant relatif au champ de température.

Problème $\mathcal{PV}\theta_\lambda$. Trouver un champ de température $\theta_\lambda : [0, T] \longrightarrow E$ tel que

$$\begin{cases} \dot{\theta}_\lambda(t) + K\theta_\lambda(t) = R\dot{u}_\eta(t) + Q(t) \text{ sur } E' \ t \in [0, T], \\ \theta_\lambda(0) = \theta_0, \end{cases} \quad (4.70)$$

pour tous $\theta_\lambda, w \in E$, p.p. $t \in (0, T)$. Pour le problème $\mathcal{PV}\theta_\lambda$ On obtient le résultat suivant.

Lemme 4.3.6. *Le problème $\mathcal{PV}\theta_\lambda$ possède une solution unique telle que*

$$\theta_\lambda \in L^2(0, T; E) \cap \mathcal{C}(0, T; L^2(\Omega)) \cap W^{1,2}(0, T; E'). \quad (4.71)$$

De plus, $\exists C > 0$ tel que $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in L^2(0, T; V')$,

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \|(\lambda_1 - \lambda_2)(s)\|_{E'}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.72)$$

Démonstration de Lemme 4.3.6. Le résultat est issu de l'équation d'évolution classique du premier ordre présentée dans [4]. Ici, le triplet de Gelfand est fourni par

$$E \subset L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \subset E'.$$

L'opérateur K a les caractéristiques de linéarité et de continuité. et de coercivité. Grâce à l'inégalité de Korn, nous obtenons

$$|K(u)|_{\mathcal{H}} \geq C|u|_{H_1}, \text{ for all } u \in V,$$

avec C étant une constante strictement positive définie uniquement sur Ω and Γ_1 .

Donc

$$(K\tau, \tau)_{E' \times E} \geq C|\tau|_E^2. \quad (4.73)$$

□

Dans la quatrième étape, pour $\mu \in \mathbb{L}^2(0, T; L^2(\Omega))$ donné en considère le problème variationnel suivant pour le champ d'endommagement.

Problème $\mathcal{PV}\alpha_\mu$. Trouver le champ d'endommagement $\alpha_\mu : [0, T] \longrightarrow H^1(\Omega)$ tel que $\alpha_\mu \in F$

et

$$(\dot{\alpha}_\mu(t), \zeta - \alpha_\mu(t))_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + a(\alpha_\mu(t), \zeta - \alpha_\mu(t)) \geq (\mathcal{S}(\varepsilon(u_\mu(t)), \alpha_\mu(t)), \zeta - \alpha_\mu(t))_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad (4.74)$$

$$\alpha_\mu(0) = \alpha_0, \quad (4.75)$$

pour tous $\alpha(t) \in F$, $\zeta \in F$ et $t \in [0, T]$. Notez que si $f \in H$, Alors

$$(f, v)_{V' \times V} = (f, v)_H, \quad \forall v \in H.$$

Théorème 4.3.7. *Considérons un triplet de Gelfand tel que $V \subset H \subset V'$. Considérons K comme un ensemble non vide, qui est à la fois fermé et convexe dans l'espace V . Imaginons que $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme continue et symétrique, où certaines constantes $\zeta > 0$ et c_0 sont données.*

$$a(v, v) = c_0 \|v\|_H^2 \geq \zeta \|v\|_V^2, \quad \forall v \in H.$$

Ensuite, Pour chaque u_0 appartenant à K et chaque f dans $\mathbb{L}^2(0, T; H)$, on trouve une unique fonction. $u \in H^1(0, T; H) \cap \mathbb{L}^2(0, T, V)$ tel que $u(0) = u_0$, $u(t) \in K$ pour tous $t \in [0, T]$ et pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$(\dot{u}(t), v - u(t))_{V' \times V} + a(u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_H, \quad \forall v \in K.$$

Nous appliquons ce théorème au problème $\mathcal{PV}\alpha_\mu$.

Lemme 4.3.8. *Une solution unique α_μ existe pour le problème auxiliaire $\mathcal{PV}\alpha_\mu$ de telle sorte que*

$$\alpha_\mu \in W^{1,2}(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)) \cap \mathbb{L}^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (4.76)$$

Le lemme ci-dessus découle du résultat standard pour les inégalités variationnelles paraboliques.

Démonstration de Lemme 4.3.8. l'inclusion de $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ dans $(\mathbb{L}^2(\Omega), \|\cdot\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)})$ est continue et sa ronc est dense. On note $(H^1(\Omega))'$ l'espace dual de $H^1(\Omega)$ et, en identifiant En considérant le dual de $\mathbb{L}^2\Omega$ avec lui-même, nous pouvons établir le triplet de Gelfand.

$$H^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))'.$$

4.3. RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

Nous notons la dualité entre $(H^1(\Omega))'$ et $H^1(\Omega)$ à l'aide de la notation $(\cdot, \cdot)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)}$, et nous avons

$$(\alpha, \beta)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} = (\alpha, \beta)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{L}^2(\Omega), \beta \in H^1(\Omega),$$

Nous observons que F constitue un ensemble fermé convexe dans $H^1(\Omega)$. Par la suite, nous faisons appel à la définition de la forme bilinéaire a . donné par (4.48), termine le fait que $\alpha_\mu \in F$. \square

Problème $\mathcal{PV}\sigma_{\eta,\lambda,\mu}$. Trouver un champ de contrainte $\sigma_{\eta\lambda\mu} : [0, T] \longrightarrow \mathcal{H}$,

$$\sigma_{\eta\lambda\mu}(t) = \mathcal{G}(\varepsilon(u_\eta(t)), \alpha_\mu(t)(v))_{\mathcal{H}} + \int_0^t \mathcal{Q}(\sigma(s), \varepsilon(u_\eta(s))) ds - \mathcal{M}\theta_\lambda(t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.77)$$

Lors de l'étude du problème $\mathcal{PV}\sigma_{\eta\lambda\mu}$, nous avons obtenu le résultat suivant.

Lemme 4.3.9. *On ne trouve qu'une seule solution au problème. $\mathcal{PV}\sigma_{\eta\lambda\mu}$ qui respecte (4.1). De plus, si u_{η_i} , θ_{λ_i} , α_{μ_i} et $\sigma_{\eta_i,\lambda_i,\mu_i}$ épréserver la solution des problèmes $\mathcal{PV}u_{\eta_i}$, $\mathcal{PV}\theta_{\lambda_i}$, $\mathcal{PV}\alpha_{\mu_i}$ and $\mathcal{PV}\sigma_{\eta_i,\lambda_i,\mu_i}$, respectivement, pour $i = 1, 2$, alors il existe $c > 0$ tel que*

$$\begin{aligned} \|\sigma_{\eta_1,\lambda_1,\mu_1}(t) - \sigma_{\eta_2,\lambda_2,\mu_2}(t)\|_{\mathcal{H}^2} &\leq C(\|u_{\eta_1(t)} - u_{\eta_2(t)}\|_V^2 \\ &+ \int_0^t (\|u_{\eta_1(s)} - u_{\eta_2(s)}\|_V^2 + \|\theta_{\lambda_1}(s) - \theta_{\lambda_2}(s)\|_V^2 + \|\alpha_{\mu_1}(s) - \alpha_{\mu_2}(s)\|_V^2) ds). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Démonstration de Lemme 4.3.9. Soit $\Pi_{\eta,\lambda,\mu} : \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H})$ soit l'application donnée par

$$\Pi_{\eta,\lambda,\mu}\sigma(t) = \mathcal{G}(\varepsilon(u_\eta(t)), \alpha_\mu(t)) + \int_0^t \mathcal{Q}(\sigma(s), \varepsilon(u_\eta(s))) ds - \mathcal{M}\theta_\lambda(t). \quad (4.79)$$

Soit $\sigma_i \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H}) : i = 1, 2$ et $t_1 \in [0, T]$. l'utilisation d'hypothèses (4.21) et l'inégalité de Hölder . Nous trouvons

$$\|\Pi_{\eta,\lambda,\mu}\sigma_1(t) - \Pi_{\eta,\lambda,\mu}\sigma_2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq L_G^2 T \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds.$$

Il résulte de cette inégalité que pour m assez grand, une puissance $\Pi_{\eta,\lambda,\mu}^m$ de l'application $\Pi_{\eta,\lambda,\mu}$ est une contraction de l'espace de Banach $\mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H})$, et donc il existe un élément unique $\sigma_{\eta,\lambda,\mu} \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H})$ tel que $\Pi_{\eta,\lambda,\mu}\sigma_{\eta,\lambda,\mu} = \sigma_{\eta,\lambda,\mu}$. De plus, $\sigma_{\eta,\lambda,\mu}$ est la solution unique du

4.3. RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

problème $\mathcal{PV}\sigma_{\eta\lambda\mu}$. Si u_{η_i} , θ_{λ_i} , α_{μ_i} and $\sigma_{\eta_i,\lambda_i,\mu_i}$ représenter la solution des problèmes $\mathcal{PV}u_{\eta_i}$, $\mathcal{PV}\theta_{\lambda_i}$, $\mathcal{PV}\alpha_{\mu_i}$ and $\mathcal{PV}\sigma_{\eta_i\lambda_i\mu_i}$, respectivement, pour $i = 1, 2$, alors nous utilisons (4.1), (4.19), (4.20) et l'inégalité de Young pour obtenir

$$\begin{aligned} & \|(\sigma_{\eta_1,\lambda_1,\mu_1} - \sigma_{\eta_2,\lambda_2,\mu_2})(t)\|_{\mathcal{H}^2} \leq C(\|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_V^2 \\ & + \int_0^t (\|\sigma_{\eta_1,\lambda_1,\mu_1}(s) - \sigma_{\eta_2,\lambda_2,\mu_2}(s)\|_{\mathcal{H}^2} + \|u_{\eta_1(s)} - u_{\eta_2(s)}\|_V^2 + \|\theta_{\lambda_1}(s) - \theta_{\lambda_2}(s)\|_V^2 \\ & + \|\alpha_{\mu_1}(s) - \alpha_{\mu_2}(s)\|_V^2) ds). \end{aligned}$$

Ceci nous permet d'obtenir, en utilisant le lemme de Gronwall, l'inégalité (4.78). \square

Enfin, nous considérons l'opérateur Λ tel que

$$\Lambda(\eta, \lambda, \mu)(t) = (\Lambda^1(\eta, \lambda, \mu)(t), \Lambda^2(\eta, \lambda, \mu)(t), \Lambda^3(\eta, \lambda, \mu)(t)), \quad (4.80)$$

où Λ^1 , Λ^2 et Λ^3 sont définis par

$$\begin{aligned} & (\Lambda^1(\eta(t), \lambda(t), \mu(t), v(t)))_{V' \times V} = \mathcal{G}(\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_\eta(t), \varepsilon(v(t)))_{\mathcal{H}} \\ & + \dot{J}_\varepsilon(u_\eta(t), v(t)) + \left(\int_0^t \mathcal{Q}(\sigma_{\eta,\lambda,\mu}(s), \varepsilon(u_\eta(s))) ds - \mathcal{M}\theta_\lambda(t), \varepsilon(v(t)) \right)_{\mathcal{H}}, \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\Lambda^2(\eta(t), \lambda(t), \mu(t), v(t)) = \Psi(\sigma_{\eta,\lambda,\mu}(t), \varepsilon(u_\eta(t)), \theta_\lambda(t)) \quad (4.82)$$

et

$$\Lambda^3(\eta(t), \lambda(t), \mu(t), v(t)) = \Phi(\sigma_{\eta,\lambda,\mu}(t), \varepsilon(u_\eta(t)), \alpha_\mu(t)). \quad (4.83)$$

Ici, pour $\eta \in \mathbb{L}^2(0, T; V)$, $\lambda \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))$ et $\mu \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))$, u_η , ϕ_η , θ_λ , α_μ et $\sigma_{\eta,\lambda,\mu}$ illustrent le champ de déplacement, le champ de potentiel électrique, la température, le champ d'endommagement et le champ de contrainte qui ont été dérivés des lemmes 4.3.2, 4.3.5, 4.3.6, 4.3.8 and 4.3.9. Nous avons le résultat suivant.

Lemme 4.3.10. .

L'opérateur Λ a un point fixe unique $(\eta^, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{L}^2(0, T; V \times \mathbb{L}^2(\Omega)) \times \mathbb{L}^2(\Omega)$.*

Démonstration de Lemme 4.3.10. Nous montrons pour un entier positif m , l'application Λ^m est une contraction de $\mathbb{L}^2(0, T; V \times \mathbb{L}^2(\Omega)) \times \mathbb{L}^2(\Omega)$. À la fin, nous supposons que $(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)$ and $(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)$ sont deux fonctions dans $\mathbb{L}^2(0, T; V \times \mathbb{L}^2(\Omega)) \times \mathbb{L}^2(\Omega)$ et notons $u_{\eta_i} = u_i$,

$\dot{u}_{\eta_i} = v_i$, $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$, $\theta_{\lambda_i} = \theta_i$, $\alpha_{\mu_i} = \alpha_i$ et $\sigma_{\eta_i, \lambda_i, \mu_i} = \sigma_i$ for $i = 1, 2$. Nous avons

$$\begin{aligned}
 & \|(\Lambda^1(\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - \Lambda^1(\eta_2, \lambda_2, \mu_2))(t)\|_{V'}^2 \leq C \|R_\nu(u_\nu(t) - u_{2\nu}(t))\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}^2 \\
 & + C \|R_\tau(u_\tau(t) - u_{2\tau}(t))\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)}^2 + \|\mathcal{G}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{G}\varepsilon(u_2(t))\|_{\mathcal{H}}^2 \\
 & + \|(\varepsilon^* \nabla \varphi_1 - \varepsilon^* \nabla \varphi_2)(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \\
 & + \int_0^t \|\mathcal{Q}(\sigma_1(s), \varepsilon(u_2(s))) - \mathcal{G}(\sigma_2(s), \varepsilon(u_2(s)))\|_{\mathcal{H}}^2 ds \\
 & + C \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{\mathbb{L}^2\Omega}^2.
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

Par conséquent, à partir de (4.20), (4.21), (4.22) et la définition de R_ν , R_τ , on obtient

$$\begin{aligned}
 & \|(\Lambda^1(\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - \Lambda^1(\eta_2, \lambda_2, \mu_2))(t)\|_{V'}^2 \leq C (\|(u_1 - u_2)(t)\|_V^2 \\
 & + \int_0^t \|(u_1 - u_2)(s)\|_V^2 ds + \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds \\
 & + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_E^2 ds + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_F^2 ds \\
 & + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2).
 \end{aligned} \tag{4.85}$$

Nous utilisons des estimations (4.78) pour obtenir

$$\begin{aligned}
 & \|\Lambda^1(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)(t)\|_{V'}^2 \leq C (\|(u_1 - u_2)(t)\|_V^2 \\
 & + \int_0^t \|(u_1 - u_2)(s)\|_V^2 ds + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_E^2 ds \\
 & + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_F^2 ds + \|(\varphi_1 - \varphi_2)(t)\|_W^2).
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

Rappelons que ci-dessus u_{η_ν} et u_{η_τ} désigne les composantes respectives normale et tangentielle de la fonction u_η . des arguments similaires, à partir de la fonction Φ et la définition de Λ^2 , it suit que

$$\begin{aligned}
 & \|(\Lambda^2(\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - \Lambda^2(\eta_2, \lambda_2, \mu_2))(t)\|_E^2 \leq C (\|(u_1 - u_2)(t)\|_V^2 \\
 & + \int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_V^2 ds + \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_E^2) \\
 & \leq C (\|(u_1 - u_2)(t)\|_V^2 + \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_E^2 \\
 & + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_E^2 ds).
 \end{aligned} \tag{4.87}$$

D'autre part, par (4.26), (4.77) et la définition de Λ^3 , que nous obtenons

$$\begin{aligned} \|(\Lambda^3(\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - \Lambda^3(\eta_2, \lambda_2, \mu_2))(t)\|_F^2 &\leq C(\|(u_1 - u_2)(t)\|_V^2 \\ &+ \|(\varphi_1 - \varphi_2)(t)\|_W^2 + \int_0^t \|(u_1 - u_2)(s)\|_V^2 ds \\ &+ \|(\alpha_1 - \alpha_2)(s)\|_F^2 + \int_0^t \|(\alpha_1 - \alpha_2)(s)\|_F^2 ds). \end{aligned} \quad (4.88)$$

Aussi, depuis

$$u_i(t) = \int_0^t v_i(s) ds + u_0, \quad t \in [0, T], \quad (4.89)$$

nous avons

$$u_i(t) = \|(u_1 - u_2)(t)\|_V^2 \leq \int_0^t \|v_i(s)\|_V^2 ds + u_0, \quad (4.90)$$

ce qui implique

$$\|(u_1 - u_2)(t)\|_V^2 + \int_0^t \|(u_1 - u_2)(s)\|_V^2 ds \leq C \int_0^t \|(v_1 - v_2)(s)\|_V^2 ds. \quad (4.91)$$

Donc

$$\begin{aligned} \|(\Lambda(\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - \Lambda(\eta_2, \lambda_2, \mu_2))(t)\|_{V' \times E \times F}^2 &\leq C(\|(u_1 - u_2)(t)\|_V^2 \\ &+ \int_0^t \|(u_1 - u_2)(s)\|_V^2 ds + \|(\alpha_1 - \alpha_2)(s)\|_F^2 \\ &+ \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_F^2 ds + \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_E^2 \\ &+ \int_0^t \|(\theta_1 - \theta_2)(s)\|_E^2 ds + \|(\varphi_1 - \varphi_2)(t)\|_W^2). \end{aligned} \quad (4.92)$$

De plus, à partir de (4.57), on obtient

$$\begin{aligned} (\dot{v}_1 - \dot{v}_2, v_1 - v_2)_{V' \times V} &= (\mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2), \varepsilon(v_2 - v_1))_{V' \times V} \\ &+ (\eta_1 - \eta_2, v_1 - v_2)_{V' \times V} \leq 0. \end{aligned} \quad (4.93)$$

En utilisant les deux conditions initiales, $v_1(0) = v_2(0) = v_0$, on intègre cette dernière inégalité, et d'après (4.21) et (4.58), nous concluons que

$$m_{\mathcal{A}} \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 ds \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V \|v_1(s) - v_2(s)\|_V ds \quad (4.94)$$

4.3. RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

pour tous $t \in [0, T]$. Ensuite, en utilisant l'inégalité $2ab \leq \frac{a^2}{m_A} + m_A b^2$, on obtient

$$\int_0^t \|(v_1 - v_2)(s)\|_V^2 ds \leq C \int_0^t \|(\eta_1 - \eta_2)(s)\|_V ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.95)$$

Depuis $u_1(0) = u_2(0) = u_0$, nous avons

$$\|(u_1 - u_2)(s)\|_V^2 \leq C \int_0^s \|v_1(s) - v_2(s)\|_V ds, \quad (4.96)$$

et de (4.20), nous avons

$$\|(\theta_1 - \theta_2)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t \|(\lambda_1 - \lambda_2)(s)\|_{E'}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.97)$$

et d'après (4.6), nous avons

$$\|(\varphi_1 - \varphi_2)(t)\|_W^2 \leq C \|(u_1 - u_2)(t)\|_V^2, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.98)$$

Nous substituons (4.90) et (4.97) sur (4.91) pour obtenir

$$\begin{aligned} \|(\Lambda(\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - \Lambda(\eta_2, \lambda_2, \mu_2))(t)\|_{V' \times E \times F}^2 &\leq C \left(\int_0^t (\|v_1 - v_2\|_V)^2 ds \right. \\ &\quad + \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_E^2 + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_E^2 ds \\ &\quad \left. + \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_F^2 + \int_0^t \|(\alpha_1 - \alpha_2)(s)\|_F^2 ds \right), \end{aligned} \quad (4.99)$$

d'autre part, de (4.73), nous en déduisons que

$$(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{F' \times F} + a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \leq (\mu_1 - \mu_2, \alpha_1 - \alpha_2)_F, \quad t \in [0, T]. \quad (4.100)$$

On intègre cette dernière inégalité par rapport à t , en utilisant les conditions initiales $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_0$ et les inégalités $a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \geq 0$, nous trouvons

$$\frac{1}{2} \|(\alpha_1 - \alpha_2)(s)\|_F^2 \leq \int_0^s (\mu_1 - \mu_2)(s), (\alpha_1 - \alpha_2)(s))_F ds. \quad (4.101)$$

4.3. RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

Ce qui associée à l'inégalité remarquable de Gronwall, mène à

$$\|(\alpha_1 - \alpha_2)(s)\|_F^2 \leq C \int_0^t \|(\mu_1 - \mu_2)(s)\|_F^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.102)$$

Nous substituons (4.94), (4.96) et (4.101) sur (4.98) pour obtenir

$$\begin{aligned} \|(\Lambda(\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - \Lambda(\eta_2, \lambda_2, \mu_2))(t)\|_{V' \times E \times F}^2 &\leq C \int_0^t \|((\eta_1, \lambda_1, \mu_1)(s) \\ &- (\eta_2, \lambda_2, \mu_2)(s))\|_{V' \times E \times F}^2 ds. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Réintégrer cette inégalité n fois, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\Lambda^n(\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - \Lambda^n(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)\|_{\mathbb{L}^2(0, T; V' \times E \times F)}^2 &\leq \frac{C^n T^n}{n!} \|((\eta_1, \lambda_1, \mu_1) \\ &- (\eta_2, \lambda_2, \mu_2))\|_{\mathbb{L}^2(V' \times E \times F)}^2, \end{aligned} \quad (4.104)$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(CT)^n}{n!} = 0$; il vient que pour n assez grand, Λ^n est une application contractante dans l'espace de Banach $\mathbb{L}^2(0, T; V' \times E \times F)$, ce qui signifie que Λ possède un point fixe unique. À présent, nous disposons de tous les éléments nécessaires pour démontrer le théorème. 4.3.1. \square

Démonstration. (de Théorème 4.3.1.) Soit $(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{L}^2(0, T; V' \times \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega))$ est le point fixe de Λ défini par (4.79), (4.80), (4.81) et (4.82) et

$$u_* = u_{\eta^*}, \quad \varphi_* = \varphi_{\eta^*}, \quad \theta_* = \theta_{\eta^*} \quad \text{and} \quad \alpha_* = \alpha_{\eta^*}. \quad (4.105)$$

Let $\sigma_* : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ be the function defined by

$$\sigma_* = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_*) + \varepsilon^* \nabla \varphi_* + \sigma_{\eta^*, \lambda^*, \mu^*}. \quad (4.106)$$

Nous prouvons que $\{u_*, \sigma_*, \varphi_*, \theta_*, \alpha_*\}$ satisfait (4.39), (4.44) et les régularités (4.53)-(4.55). En effet, nous écrivons (4.57) et utiliser (4.101) pour trouver

$$\begin{aligned} (\ddot{u}_*(t), v)_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_*(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + J_\varepsilon(\dot{u}_*(t), v) \\ + (\eta^*(t), v)_{V' \times V} \geq (f(t), v)_{V' \times V}, \quad \forall v \in V \text{ p.p.}, t \in 0, T, \end{aligned} \quad (4.107)$$

Nous utilisons des égalités $\Lambda^1(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) = \mu^*$, $\Lambda^2(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) = \lambda^*$ et $\Lambda^3(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) = \eta^*$, il

résulte que

$$\begin{aligned}
 (\eta_*(t), v)_{V' \times V} &= (\mathcal{B}\varepsilon(u_*(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\varepsilon^* \nabla \varphi_*(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\
 &+ \left(\int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta^*, \lambda^*, \mu^*}(s), \varepsilon(u_*(s)), \alpha_*(s)) ds - \mathcal{M}\theta_*(t), \varepsilon(v) \right)_{\mathcal{H}} \\
 &+ J_\varepsilon(u_*(t), v(t)),
 \end{aligned} \tag{4.108}$$

$$\lambda_*(t) = \Phi(\sigma_{\eta^*, \lambda^*, \mu^*}(t), \varepsilon(u_*(t)), \theta_*(t)), \tag{4.109}$$

$$\mu_*(t) = \Psi(\sigma_{\eta^*, \lambda^*, \mu^*}(t), \varepsilon(u_*(t)), \alpha_*(t)). \tag{4.110}$$

Nous substituons maintenant (4.107) dans (4.106) pour obtenir

$$\begin{aligned}
 (\ddot{u}_*(t), v)_{V' \times V} &+ (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_*(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}\varepsilon(u_*(t)), \varepsilon(v), \alpha_*(t))_{\mathcal{H}} + (\varepsilon^* \nabla \varphi_*, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\
 &+ \left(\int_0^t \mathcal{Q}(\sigma_{\eta^*, \lambda^*, \mu^*}(s), \varepsilon(u_*(s))) ds - \mathcal{M}\theta_*(t), \varepsilon(v) \right)_{\mathcal{H}} \\
 &+ J_\varepsilon(u_*(t), v) \geq (f(t), \dot{v})_{V' \times V}, \quad \forall v \in V.
 \end{aligned} \tag{4.111}$$

Il résulte du lemme 4.3.9 et (4.105) Cette $\sigma_* \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathcal{H})$ et (4.40) implique que

$$\operatorname{div} \sigma_* + f_0(t) = \rho \ddot{u}_*(t), \text{ p.p., } t \in [0, T].$$

Nous écrivons (4.69) pour $\lambda = \lambda^*$ pour trouver ça (4.71) est satisfait, d'écrire aussi (4.73) pour $\mu = \mu^*$ pour trouver ça (4.73) est satisfait, nous considérons maintenant (4.57) pour $\eta = \eta^*$ pour trouver ça (4.57) est satisfaite. Ensuite, les régularités (4.53)-(4.79) suivre les lemmes 4.3.2, 4.3.3, 4.3.5, 4.3.6, 4.3.8 et la régularité (4.1) suivant le lemme 4.3.9, la partie unique du théorème 4.3.1 est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (4.79)-(4.82) et prouve ainsi la solvabilité unique des problèmes $\mathcal{P}\mathcal{V}u_\eta$, $\mathcal{P}\mathcal{V}\varphi_\eta$, $\mathcal{P}\mathcal{V}\theta_\lambda$, $\mathcal{P}\mathcal{V}\alpha_\mu$ et $\mathcal{P}\mathcal{V}\sigma_{\eta, \lambda, \mu}$, ce qui complète la preuve, et pour avoir plus de détails nous proposons de voir par exemple [9] \square

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse, on a présenté une étude suffisante (modélisation, analyse mathématique et étude numérique) de quelques systèmes aux dérivées partielles qu'on rencontre dans les applications de la mécanique de contact, ceci nous amène aux conclusions suivantes :

4.4 Conclusions théoriques

On a étudié l'existence et l'unicité de la solution pour les problèmes de contact. La résolution variationnelle de tels problèmes nécessite des outils mathématiques :

- la formulation variationnelle des problèmes de contact est composée de systèmes couplés des équations et inéquations elliptiques ou paraboliques.

4.5 Perspectives

Cette thèse permet de trouver quelques problèmes ouverts dans la mécanique de contact et les méthodes de résolution de tels problèmes mécaniques.

- Formulation des problèmes multiphysiques (termomagnétomécanique, magnétomécanique ou thermoélectromagnétomécanique)

- Trouver les résultats dans le cadre abstrait afin de les appliquer dans la résolution des problèmes de contact.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Aissaoui, N. Hemici; *A frictional contact problem with damage and adhesion for an electro elastic-viscoplastic body*, Electron. J. Differential Equations. Vol. 2014 (2014), No. 11, pp. 1-19.
- [2] A. Aissaoui, N. Hemici; *Bilateral contact problem with adhesion and damage*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 2014, No. 18, 1-16.
- [3] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, Editura Academiei, Bucharest-Noordho , Leyden, 1976.
- [4] V. Barbu, *Optimal Control of Variational Inequalities*, Pitman, Boston, 1984.
- [5] H. Benaissa, E. Essou , R. Fakhar, *Existence results for unilateral contact problem with friction of thermo-electro-elasticity*, Appl. Math. Mech. -Engl. Ed. Vol. 36, Issue 7, pp 911-926
- [6] E. Bonetti, G. Bonfanti, R. Rossi, *Modeling via the internal energy balance and analysis of adhesive contact with friction in thermoviscoelasticity*, Nonlinear Analysis : Real World Applications, 22 (2015) 473-507.
- [7] I. Boukaroura, S. Djabi, *Analysis of a quasistatic contact problem with wear and damage for thermo-viscoelastic materials*, Malaya Journal of Matematik, 6(2018), no. 2, 299-309.
- [8] H. Brézis; *Equations et inequations nonlinéaires dans les espaces vectoriels en dualité*, Ann. Inst. Fourier 18 (1968), 115-175. (In French.)

- [9] L. Debbacha and N. Lebri, A Dynamic Contact Problem for Piezo-Thermo-Elastic-Viscoplastic Materials with Damage Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 22 (5) (2022) 503–521
- [10] A. Djabi, A. Merouani, *A fixed point method for a class of nonlinear evolution systems modeling a mechanical phenomenon*, Int. J. Open Problems Compt. Math. Vol. 8, No. 1(2015),p1-13.
- [11] A. Djabi, A. Merouani, A. Aissaoui, *A frictional contact problem with wear involving elastic-viscoplastic materials with damage and thermal effects*, Electron. J. Qual. Theory Di er. Equ.No. 27(2015), p 1-18.
- [12] A. Djabi, A. Merouani, *Bilateral contact problem with friction and wear for an electro elastic-viscoplastic materials with damage*, Taiwanese J. Math. Vol. 8, No. 1(2015),p 1-13.
- [13] G. Duvaut, J.-L. Lions, *Les inequations en mecanique et en physique*. Springer, Berlin,1976. (In French.)
- [14] W. Han, M. Sofonea ; *Evolutionary Variational inequalities arising in viscoelastic contact problems*, SIAM Journal of Numerical Analysis **38** (2000), 556–579.
- [15] A. Merouani, F. Messelmi ; *Dynamic evolution of damage in elastic-thermo-viscoplastic materials*, Electron. J. Differential Equations,Vol. 2010(2010), No. 129, pp. 1-15.
- [16] A. Merouani, F. Messelmi, *Quasi-static transmission problem in thermo-viscoplasticity*, Int. J. Open Problems Compt. Math., Vol. 6, No. 3(2013), p 29-46.R. D. Mindlin ;
- [17] A. Merouani,S. Djabi, *A monotony method in quasistatic processes for viscoplastic materials*, Stud. Univ. Babes-Bolyai Math., 3(2008), no. 1.
- [18] S. Ntouyas’ *Boundary value problems for nonlinear fractional differential equations and inclusions with nonlocal and fractional integral boundary conditions*, Opuscula Math. 33 (2013), no. 1, 117-138.
- [19] Selmani, M. *A Frictional Contact Problem Involving Piezoelectric Materials with Long Memory*, A.ory, Mediterr. J. Math., Vol. 12, Issue 3, pp 1177-1197.
- [20] Chau, O., Motreanu, D., Sofonea, M. : *Quasistatic frictional problems for elastic and viscoelastic materials*. Appl. Math. 47(4), 341–360 (2002)

- [21] Panagiotopoulos, P.D. : Hemivariational Inequalities, Applications in Mechanics and Engineering. Springer, Berlin (1993)
- [22] Duvaut, G., Lions, J.L. : Les Inéquations en Mécanique et en Physique. Dunod, Paris (1972)
- [23] Adly, S., Chau, O., Rochdi, M. : Solvability of a class of thermal dynamical contact problems with subdifferential conditions. Numer. Algebra Control Optim. 2(1), 89–101 (2012)
- [24] Chau, O., Goeleven, D., Oujja, R. : A numerical treatment of a class variational inequalities arising in the study of viscoelastic materials. Int. J. Appl. Math. Mech. (to appear)
- [25] P. Suquet, Plasticité et homogénéisation, Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1982.
- [26] G. Leszek, A. Ochala, M. Shillor, Quasistatic thermoviscoelastic problem with normal compliance, multivalued friction and wear diffusion. Nonlinear Analysis : R. W. A (27), 183-202. (2016).
- [27] H. Brézis ; Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson, (1987).
- [28] J. Nečas, I. Hlaváček, Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : An Introduction, Elsevier, Amsterdam, 1981.
- [29] S. Adly, O. Chau, M. Rochdi, Solvability of a class of dynamical thermal contact problems with subdifferential conditions, Numer. Algebra Control Optim. 2 (1) (2012) 89–101.
- [30] J.L. Lions, Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires, Dunod et Gauthier-Villars, 1969.
- [31] Han, W., Reddy, B.D. : Plasticity : Mathematical Theory and Numerical Analysis. Springer, New York (1999)
- [32] Brézis, H. : Problèmes unilatéraux. J. Math. Pures et Appli. 51, 1–168 (1972)
- [33] Lions, J.L. : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod et Gauthier-Villars, Paris (1969)
- [34] Zeidler, E. : Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, II/A, Linear Monotone Operators. Springer, Berlin (1997)
- [35] Chau, O., Goeleven, D., Oujja, R. : A numerical treatment of a class variational inequalities arising in the study of viscoelastic materials. Int. J. Appl. Math. Mech.

- [36] I. R. Ionescu and M. Sofonea, *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford University Press, Oxford, (1994).
- [37] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975
- [38] M. Barboteu, J.R. Fernandez, Y. Oua. . . k, Numerical analysis of a frictionless viscoelastic piezoelectric contact problem, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* (in press).
- [39] Adly.S, Chau.O : On some dynamic thermal non clamped contact problems, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg and Mathematical Optimization Society* 2013
- [40] M. Frémond, *Non-Smooth Thermomechanics*, Springer, Berlin, 2002.
- [41] M. Frémond, B. Nedjar, Damage in concrete : The unilateral phenomenon, *Nucl. Eng. Des.* 156, pp. 323-335, 1995.
- [42] M. Frémond , B. Nedjar, Damage, Gradient of Damage and Principle of Virtual Work, *Int. J. Solids Structures*, 33 (8), 1083-1103. (1996).
- [43] M. Frémond, K. L. Kuttler, B. Nedjar, M. Shillor ; One-dimensional models of damage, *Adv. Math. Sci. Appl.*, 8(2), pp. 541-570, 1998.
- [44] P. Germain, *Cours de Mécanique des Milieux Continus*, Masson et Cie, Paris, (1973).
- [45] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea, Analysis of Quasistatic Viscoelastic Problem with Friction and Damage, *Adv. Math. Sci. App.* 10, 2002, 173-189.
- [46] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, A quasistatic contact problem with directional friction and damped response. *Appl. Anal*, 68, 409-422 (1998).
- [47] M. Selmani, L. Selmani, Analysis of a frictionless contact problem for elasticviscoplastic material. *Nonlinear Analysis : Modelling and Control*, 2012, Vol. 17, No. 1, 99-117.
- [48] M. Selmani, L. Selmani, Frictional contact problem for elastic-viscoplastic materials with thermal effect, *Appl. Math. Mech. -Engl. Ed.*, 34 (6), 761–776 (2013).
- [49] M. Shillor, M. Sofonea, J. J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, Lecture Notes in Physics 655, Springer, Berlin, (2004).
- [50] S. Smata, N. Lebri, A dynamic electroviscoelastic problem with thermal effects. *Studia Univ. Babeş bolayai, Mathematica* : accepted in December, 2019.
- [51] M. Sofonea, *Functional Methods in Thermo-Elasto-Visco-Plasticity*, Ph. D. Thesis, Univ

- [52] M. Sofonea, El. H. Essoufi, A piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction, *Mathematical Modelling and Analysis* 9,2004, 229-242.
- [53] R. C. Batra , J. S. Yang, Saint Venant's principle in linear piezoelectricity, *Journal of Elasticity*, 38 (1995), 209-218.
- [54] S. Adly, O. Chau, M. Rochdi, Solvability of a class of dynamical thermal contact problem-swith subdifferential conditions, *Numer. Algebra Control Optim.* 2 (1) (2012) 89–101.
- [55] M. Selmani, Frictional contact problem with wear for electro-viscoelastic materials with long memory. *Bull. Belg. Math. Simon Stevin* 20, 461-479 (2013).