

# Table des matières

0.1	Introduction générale . . . . .	3
1	Analyse asymptotique d'un problème stationnaire d'élasticité linéaire avec frottement	8
1.1	Introduction et position du problème . . . . .	9
1.2	Formulation variationnelle du problème . . . . .	13
1.2.1	Existence et unicité de la solution . . . . .	16
1.3	Analyse asymptotique du problème . . . . .	17
1.3.1	Formulation variationnelle du problème dans $\Omega$ . . . . .	18
1.3.2	Estimation à priori . . . . .	20
1.3.3	Résultats de convergence et problème limite	
	24	
2	Analyse asymptotique d'un problème stationnaire d'élasticité linéaire non isotherme avec frottement	32
2.1	Introduction et position du problème . . . . .	33
2.2	Formulation variationnelle du problème . . . . .	35
2.3	Analyse asymptotique du problème . . . . .	38
2.3.1	Estimations à priori . . . . .	40
2.3.2	Résultats de convergence et problème limite . . . . .	48
3	Analyse asymptotique d'un problème de Stokes perturbé sans frotte-	

ment	54
3.1 Introduction et position du problème . . . . .	55
3.2 Analyse asymptotique du problème . . . . .	56
3.2.1 Changement du domaine de référence . . . . .	56
3.2.2 Formulation variationnelle du problème . . . . .	58
3.3 Estimations à priori . . . . .	58
3.3.1 Estimation à priori sur la vitesse . . . . .	59
3.3.2 Estimation à priori sur la pression . . . . .	61
3.4 Résultats de convergence et problème limite . . . . .	63

## 0.1 Introduction générale

Dans les écoulements de faible épaisseur entre deux surfaces solides, on approche les équations de Stokes ou de Navier-Stokes par une équation dite de Reynolds :

$$\operatorname{div} (h^3 \nabla p) = \operatorname{div} (s h),$$

où  $h$  est l'épaisseur de l'écoulement et  $s$  un vecteur donné représentant le cisaillement de l'une des deux surfaces solides.

L'équation de Reynolds nous permet d'obtenir la pression hydrodynamique, indépendant de la variable décrivant l'épaisseur de l'écoulement, ce qui nous permet de déterminer la distribution de pression  $p$  dans un espace mince rempli de fluide entre deux surfaces. Le contact liquide-solide peut être modélisé par la loi de frottement de Coulomb ou de Tresca.

Des résultats concernant l'étude du phénomène de lubrification par des fluides Newtoniens avec glissement ont été obtenus en [10] lorsque le glissement est donné par la loi de frottement de Coulomb, et par F. Saidi [20] lorsqu'on prend aussi en considération l'effet de température. Dilmi dans [14] a étudié l'analyse asymptotique d'un problème dynamique pour l'élasticité dans un domaine borné en dimension trois avec les conditions de frottement de Tresca.

Le but de ce travail, est l'étude de l'analyse asymptotique d'un problème stationnaire pour l'élasticité linéaire isotherme et non-isotherme dans un domaine borné en dimension trois avec les conditions de frottement de Tresca. Dans la première partie, on s'intéresse à l'étude de l'analyse asymptotique d'un problème stationnaire pour l'élasticité linéaire isotherme dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$  avec les conditions de frottement non linéaires de type de Tresca sur une partie de la frontière et les conditions de Dirichlet sur l'autre partie. Dans la deuxième partie, on étudie le même problème, mais cette fois dans le cas d'élasticité linéaire non-isotherme avec frottement. Enfin, dans la dernière partie, on

s'intéresse au comportement limite d'un fluide régi par le système de Stokes perturbé sans frottement dans un domaine mince dont les frontières sont rugueuses.

Le travail présenté est composé de :

**Dans le premier chapitre**, nous considérons un problème associé à des déformations d'un corps homogène élastique en régime stationnaire isotherme, avec des conditions de frottement non linéaire, de type Tresca dans un domaine mince  $\Omega^\varepsilon \in \mathbb{R}^3$  :

$$\Omega^\varepsilon = \{(x, x_3) \in \mathbb{R}^3, (x, 0) \in \omega \mid 0 < x_3 < \varepsilon h(x)\},$$

où  $\omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$  d'équation  $x_3 = 0$  qui constitue la frontière inférieure du domaine et  $h \in C^1(\mathbb{R})$ .

La frontière de  $\Omega^\varepsilon$  sera notée  $\Gamma^\varepsilon = \omega \cup \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon$ , avec :

- $\Gamma_1^\varepsilon$  est la frontière supérieure du domaine;
- $\Gamma_L^\varepsilon$  est la frontière latérale.

Le problème complet dans  $\Omega^\varepsilon$ , s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega^\varepsilon, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon, \\ u^\varepsilon = g & \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon, \\ u^\varepsilon \cdot n = 0 & \text{sur } \omega, \\ \left. \begin{array}{l} |\sigma_T^\varepsilon| < k^\varepsilon \implies u_T^\varepsilon = s \\ |\sigma_T^\varepsilon| = k^\varepsilon \implies \exists \beta \geq 0 \text{ tel que } u_T^\varepsilon = s - \beta \sigma_T^\varepsilon \end{array} \right\} & \text{sur } \omega, \end{array} \right.$$

où  $f^\varepsilon$ ,  $k^\varepsilon$ ,  $s$  et  $g$  sont des données du problème, et  $\sigma_T^\varepsilon$  est la composante tangentielle du tenseur des contraintes, la fonction vectorielle  $g = (g_1, g_2, g_3)$  vérifie les conditions suivantes :

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} g \cdot n ds = 0,$$

$$g = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon,$$

$$g_3 = 0 \quad \text{sur } \omega.$$

Nous montrons d'abord que pour  $\varepsilon > 0$  fixé, le problème admet une solution unique faible. Ensuite, on étudie l'analyse asymptotique du problème en faisant un changement d'échelle, pour ramener l'étude sur un domaine  $\Omega$  indépendant de  $\varepsilon$ , sur lequel nous définissons des nouvelles inconnues. Nous obtenons des estimations à priori sur la solution indépendamment de  $\varepsilon$  en utilisant les inégalités de Korn, Poincaré et Young. Grâce à ces estimations, on obtient un théorème de convergence, qui nous a permis de passer à la limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. Nous obtenons donc le problème limite suivant :

$$\mu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^*) dx dz + J(\hat{\varphi}) - J(\hat{u}_i^*) \geq \sum_{i=1}^2 \left( \hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^* \right), \quad \forall \varphi \in \Pi(K)$$

avec  $\Pi(K)$  est un convexe de  $H^1(\Omega)^2$

$$\begin{cases} \mu |\tau^*| < \hat{k} \Rightarrow s^* = s \\ \mu |\tau^*| = \hat{k} \Rightarrow \exists \beta > 0 \text{ tel que } s^* = s + \lambda \tau^* \end{cases}$$

$$\int_{\omega} \left( \tilde{F} - \frac{h}{2} s^* + \int_0^h \hat{u}^*(x, z) dz \right) \nabla \psi(x) dx = 0, \quad \forall \psi \in H^1(\omega)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{\tau}^* &= \frac{\partial \hat{u}^*}{\partial z}(x, 0) \quad \text{et} \quad s^*(x) = \hat{u}^*(x, 0), \\ \tilde{F}(x) &= \frac{1}{\mu} \int_0^h F(x, z) dz - \frac{h}{2\mu} F(x, h), \\ F(x, z) &= \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_i(x, \zeta) d\zeta d\alpha. \end{aligned}$$

Enfin, nous montrons l'unicité de  $\hat{u}^*$  solution du problème limite.

**Dans le deuxième chapitre**, nous supposons que le coefficient  $\mu$  dépend de la température. Nous couplons l'équation de la conservation de la quantité du mouvement avec l'équation de la conservation de l'énergie déduite de la loi de Fourier.

Le problème complet dans le même domaine  $\Omega^\varepsilon$  donnée au premier chapitre, s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega^\varepsilon, \\ -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( K^\varepsilon \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_i} \right) = 2\mu^\varepsilon(T^\varepsilon) d_{ij}^2(u^\varepsilon) + r^\varepsilon(T^\varepsilon) & \text{dans } \Omega^\varepsilon, \\ u^\varepsilon = g & \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon, \\ u^\varepsilon \cdot n = 0 & \text{sur } \omega, \\ \left. \begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \implies u_\tau^\varepsilon = s \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \implies \exists \lambda > 0 \text{ tel que } u_\tau^\varepsilon = s - \lambda \sigma_\tau^\varepsilon \end{array} \right\} & \text{sur } \omega, \\ T^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon, \\ \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial n} = 0 & \text{sur } \omega. \end{array} \right.$$

avec  $K^\varepsilon$  et  $r^\varepsilon$  sont des données du problème.

Nous étudions l'analyse asymptotique du problème de la même manière que dans le premier chapitre, on obtient des estimations à priori indépendamment de  $\varepsilon$  concernant le gradient de la température.

Enfin, nous obtenons le problème limite suivant

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{\mu}(\hat{T}^*) \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^*) dx dz + J(\hat{\varphi}) - J(\hat{u}_i^*) &\geq \sum_{i=1}^2 \left( \hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^* \right); \\ - \int_{\Omega} \hat{K} \frac{\partial \hat{T}^*}{\partial z} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z} dx dz &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{\mu}(T^*) \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \right)^2 \hat{\varphi} dx dz + \int_{\Omega} \hat{r}(T^*) \hat{\varphi} dx dz. \\ \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mu}(\zeta^*) |\tau^*| < \hat{k} \implies s^* = s \\ \hat{\mu}(\zeta^*) |\tau^*| = \hat{k} \implies \exists \beta > 0 \text{ tel que } s^* = s + \lambda \tau^* \end{array} \right. \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{\tau}^* &= \frac{\partial \hat{u}^*}{\partial z}(x, 0), \quad s^*(x) = \hat{u}^*(x, 0) \text{ et } \zeta^* = T^*(x, 0) \\ \int_{\omega} \left( \tilde{F} - \frac{h}{2} s^* + \int_0^h \hat{u}^*(x, z) dz \right) \nabla \psi(x) dx &= 0, \quad \forall \psi \in H^1(\omega) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x) &= \frac{1}{\hat{\mu}(\zeta^*)} \int_0^h F(x, z) dz - \frac{h}{2\hat{\mu}(\zeta^*)} F(x, h) \\ F(x, z) &= \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_i(x, \zeta) d\zeta d\alpha.\end{aligned}$$

**Le troisième chapitre** sera consacré à l'étude du système de Stokes stationnaire avec des conditions de type Dirichlet dans un domaine mince  $\Omega^\varepsilon$

$$\begin{cases} \mu \Delta \hat{u}^\varepsilon - k^2 \hat{u}^\varepsilon = \nabla \hat{p}^\varepsilon & \text{dans } \Omega^\varepsilon \\ \operatorname{div} \hat{u}^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega^\varepsilon \\ u^\varepsilon = g & \text{sur } \partial\Omega^\varepsilon \end{cases}$$

avec  $\hat{u}^\varepsilon$ ,  $\hat{p}^\varepsilon$  et  $\mu$  sont respectivement, la vitesse, la pression et la viscosité,  $k$  est une constante positive.

$\Omega^\varepsilon$  est limité par une frontière supérieure notée  $\Gamma_+^\varepsilon$ , la frontière inférieure  $\Gamma_-$  et un bord latéral  $\Gamma_L^\varepsilon$  tel que :

$$\begin{aligned}\Gamma_+^\varepsilon &= \{(x, x_3) \mid x \in \omega, x_3 = \varepsilon h(x)\}, \\ \Gamma_- &= \{(x, x_3) \mid x \in \omega, x_3 = 0\}.\end{aligned}$$

Nous supposons que la fonction  $g$  vérifie

$$\begin{cases} g = \hat{s} & \text{sur } \Gamma_-, \\ g_3 = 0 & \text{sur } \Gamma_L, \\ g = 0 & \text{sur } \Gamma_+. \end{cases}$$

Enfin, nous obtenons le problème limite suivant :

$$\int_\omega \frac{(h)^3}{12\mu} \nabla_x p^* \nabla_x \varphi \, dx = \int_\omega \frac{h}{2} s \nabla_x \varphi \, dx - \int_{\Gamma_l} g \cdot n \varphi \, d\sigma.$$

# Chapitre 1

## Analyse asymptotique d'un problème stationnaire d'élasticité linéaire avec frottement

**Résumé.** Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'analyse asymptotique d'un problème stationnaire pour l'élasticité linéaire isotherme dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$  avec les conditions de frottement non linéaires de type de Tresca sur une partie de la frontière et les conditions de Dirichlet sur l'autre partie.

### Contenu

- 1.1 Introduction et position du problème ;
- 1.2. Formulation variationnelle du problème ;
  - 1.2.1. Existence et unicité de la solution ;
- 1.3. Analyse asymptotique du problème ;
  - 1.3.1. Formulation variationnelle du problème dans  $\Omega$  ;
  - 1.3.2. Estimation à priori ;
  - 1.3.3. Résultats de convergence et problème limite.



## 1.1 Introduction et position du problème

Nous considérons un problème à des déformations d'un corps homogène élastique et isotrope en régime stationnaire dans un domaine mince  $\Omega^\varepsilon$ , où  $\varepsilon$  est un réel positif appartenant à  $]0, 1[$  et qui tend vers zéro.

La frontière de  $\Omega^\varepsilon$  sera notée  $\Gamma^\varepsilon = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \bar{\Gamma}_L^\varepsilon$ , avec :

- \*  $\Gamma_1^\varepsilon$  est la frontière supérieure d'équation  $x_3 = \varepsilon h(x_1, x_2)$  ;
- \*  $\Gamma_L^\varepsilon$  est la frontière latérale ;
- \*  $\omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $x_3 = 0$  qui constitue la frontière inférieure du domaine  $\Omega^\varepsilon$ .

On note  $x' = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  et  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Le domaine  $\Omega^\varepsilon$  est donné par :

$$\Omega^\varepsilon = \{(x, x_3) \in \mathbb{R}^3, (x, 0) \in \omega, \quad 0 < x_3 < \varepsilon h(x)\},$$

où  $h$  est une fonction de classe  $C^1$  définie sur  $\omega$  telle que :

$$0 < h_* \leq h(x) \leq h^*, \quad \forall (x, 0) \in \omega.$$

Pour les forces extérieures  $f^\varepsilon$  données, nous supposons que les déformations d'un corps élastique est gouverné par les équation suivantes :

la loi de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i^\varepsilon = 0. \tag{1.1.1}$$

On désigne par  $\sigma^\varepsilon = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}^\varepsilon$  le tenseur des contraintes et par  $D = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$  le

tenseur des taux de déformations :

$$d_{ij}(u^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

On suppose que la loi de comportement suit la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = 2\mu d_{ij}(u^\varepsilon) + \lambda d_{kk}(u^\varepsilon) \delta_{ij}, \quad (1.1.2)$$

où

-  $\mu, \lambda$  sont les coefficient de Lamé et  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kröneker ;

-  $u^\varepsilon(x)$  est la vitesse de déplacement du corps élastique au point  $x$ .

Le vecteur normal extérieur unitaire à  $\Gamma^\varepsilon$  sera noté  $n = (n_1, n_2, n_3)$ .

La normale unitaire extérieure à  $\omega$  est le vecteur  $(0, 0, -1)$ .

On définit les composantes normales et tangentiels  $u_n^\varepsilon$  et  $u_T^\varepsilon = (u_{T_i}^\varepsilon)_{1 \leq i \leq 3} \in \mathbb{R}^3$  de la vitesse par

$$\begin{aligned} u_n^\varepsilon &= u^\varepsilon \cdot n, \\ u_{T_i}^\varepsilon &= u_i^\varepsilon - u_n^\varepsilon \cdot n_i. \end{aligned}$$

De même, les composantes normales et tangentiels  $\sigma_n^\varepsilon$  et  $\sigma_T^\varepsilon = (\sigma_{T_i}^\varepsilon)_{1 \leq i \leq 3} \in \mathbb{R}^3$  du tenseur des contraintes sont définies par

$$\begin{aligned} \sigma_n^\varepsilon &= (\sigma^\varepsilon \cdot n_i) \cdot n_j, \\ \sigma_{T_i}^\varepsilon &= \sigma_{ij}^\varepsilon \cdot n_j - (\sigma_n^\varepsilon) \cdot n_i \end{aligned}$$

Afin de d'écrire les conditions aux limites, on introduit d'abord la fonction  $g = (g_1, g_2, g_3)$  telle que :

$$\int_{\Gamma_L^\varepsilon} g \cdot n ds = 0. \quad (1.1.3)$$

La vitesse sur le bord est donnée en fonction de  $g$  sauf sur  $\omega$ .

$$u^\varepsilon = g = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon, \quad (1.1.4)$$

$$u^\varepsilon = g \text{ avec } g_3 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon. \quad (1.1.5)$$

Sur  $\omega$  la vitesse est supposée inconnue et elle vérifie la condition suivante :

$$u.n = 0 \quad \text{sur } \omega. \quad (1.1.6)$$

La condition (1.1.6) s'appelle condition de non-pénétration.

La condition (1.1.3) est équivalente à l'existence d'un relèvement  $G^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon)$  de  $g$  sur  $\Omega^\varepsilon$  vérifiant :

$$G^\varepsilon = g \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon, \quad G^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon, \quad G^\varepsilon.n = 0 \text{ sur } \omega$$

Nous supposons aussi l'existence du frottement sur  $\omega$ , ce frottement est modélisé par la loi non linéaire de Tresca :

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_T^\varepsilon| < k^\varepsilon &\implies u_T^\varepsilon = s \\ |\sigma_T^\varepsilon| = k^\varepsilon &\implies \exists \beta \geq 0 \text{ tel que } u_T^\varepsilon = s - \beta \sigma_T^\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad \text{sur } \omega \quad (1.1.7)$$

où  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^2$ ,  $s$  la vitesse de cisaillement,  $k^\varepsilon$  est le seuil de frottement.

**Remarque 1.1.1.** *La troisième composante de la vitesse vérifie :*

$$u_3^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\varepsilon \quad (1.1.8)$$

En effet, d'après la condition (1.1.6), on a :

$$u^\varepsilon.n = u_1^\varepsilon n_1 + u_2^\varepsilon n_2 + u_3^\varepsilon n_3 = 0 \quad \text{sur } \omega$$

où,  $n = (0, 0, -1)$  est le vecteur normal unitaire extérieur à  $\omega$  donc

$$u_3^\epsilon = 0 \text{ implique que } u_3^\epsilon = 0 \text{ sur } \omega.$$

D'après la condition (1.1.4) et (1.1.5) et le fait que  $g_3 = 0$  sur  $\Gamma_L^\epsilon$ ,  $u_3^\epsilon = 0$  sur  $\Gamma_1^\epsilon \cup \Gamma_L^\epsilon$  car  $u^\epsilon = 0$  sur  $\Gamma_1^\epsilon$ , donc :  $u_3^\epsilon = 0$  sur  $\Gamma^\epsilon$ . ■

Le problème complet consiste donc à trouver un champ de vitesse  $u^\epsilon$  vérifiant les équations et les conditions aux limites suivantes :

$$(Pb^\epsilon) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \sigma_{ij}^\epsilon}{\partial x_j} + f_i^\epsilon = 0 & \text{dans } \Omega^\epsilon, \\ u^\epsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_1^\epsilon, \\ u^\epsilon = g & \text{sur } \Gamma_L^\epsilon, \\ u^\epsilon \cdot n = 0 & \text{sur } \omega, \\ \left. \begin{array}{l} |\sigma_T^\epsilon| < k^\epsilon \implies u_T^\epsilon = s \\ |\sigma_T^\epsilon| = k^\epsilon \implies \exists \beta \geq 0 \text{ tel que } u_T^\epsilon = s - \beta \sigma_T^\epsilon \end{array} \right\} & \text{sur } \omega. \end{array} \right.$$

Afin de donner la formulation variationnelle du problème  $(pb^\epsilon)$ , nous allons établir le lemme suivant :

**Lemme 1.1.1.** *La condition (1.1.7) est équivalente à la relation suivante :*

$$(u_T^\epsilon - s) \sigma_T^\epsilon + k^\epsilon |u_T^\epsilon - s| = 0 \quad \text{sur } \omega.$$

**Preuve.** On suppose que  $(u_T^\epsilon - s) \sigma_T^\epsilon + k^\epsilon |u_T^\epsilon - s| = 0$ .

▷ Si  $|\sigma_T^\epsilon| = k^\epsilon$ , alors

$$(u_T^\epsilon - s) \sigma_T^\epsilon = -|\sigma_T^\epsilon| |u_T^\epsilon - s|,$$

d'où l'existence d'un  $\beta \geq 0$  tel que

$$u_T^\epsilon - s = -\beta \sigma_T^\epsilon.$$

▷ Si  $|\sigma^\varepsilon| < k^\varepsilon$ , alors

$$\begin{aligned} (u_T^\varepsilon - s) \sigma_T^\varepsilon + k^\varepsilon |u_T^\varepsilon - s| &= 0 \geq -|u_T^\varepsilon - s| \cdot |\sigma_T^\varepsilon| + k^\varepsilon |u_T^\varepsilon - s| \\ &\geq |u_T^\varepsilon - s| \cdot (-|\sigma_T^\varepsilon| + k^\varepsilon) \end{aligned}$$

et comme  $-|\sigma_T^\varepsilon| + k^\varepsilon > 0$ , alors  $u_T^\varepsilon = s$ .

Réciproquement, on suppose que  $u^\varepsilon$  vérifie la condition aux limites de Treska

▷ Si  $|\sigma_T^\varepsilon| < k^\varepsilon$ , alors  $u_T^\varepsilon = s$

$$(u_T^\varepsilon - s) \sigma_T^\varepsilon + k^\varepsilon |u_T^\varepsilon - s| = (s - s) \sigma_T^\varepsilon + k^\varepsilon |s - s| = 0 .$$

▷ Si  $|\sigma_T^\varepsilon| = k^\varepsilon$ , alors il existe  $\beta \geq 0$  tel que  $u_T^\varepsilon = s - \beta \sigma_T^\varepsilon$ .

D'où

$$(u_T^\varepsilon - s) \sigma_T^\varepsilon + k^\varepsilon |u_T^\varepsilon - s| = -\beta |\sigma_T^\varepsilon|^2 + \beta |\sigma_T^\varepsilon|^2 = 0. \quad \blacksquare$$

## 1.2 Formulation variationnelle du problème

Pour l'ouvert  $\Omega^\varepsilon$  on définit l'espace et l'ensemble suivants :

$$H^1(\Omega^\varepsilon)^3 = \left\{ v \in (L^2(\Omega^\varepsilon))^3 : \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega^\varepsilon), \forall i, j = 1, \dots, 3 \right\},$$

l'espace de Sobolev muni de la norme  $\|\cdot\|_{1,\Omega^\varepsilon}$ , où la norme de  $(L^2(\Omega^\varepsilon))^3$  sera noté  $\|\cdot\|_{0,\Omega^\varepsilon}$ .

Nous définissons le convexe fermé non vide de  $H^1(\Omega^\varepsilon)^3$

$$K^\varepsilon = \left\{ v \in H^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)^3 : v = 0 \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon, v.n = 0 \text{ sur } \omega \right\}.$$

Pour simplifier l'écriture, on note :

$$a(u, v) = 2\mu \int_{\Omega^\varepsilon} d_{ij}(u) d_{ij}(v) dx' + \lambda \int_{\Omega^\varepsilon} \operatorname{div}(u) \operatorname{div}(v) dx'. \quad (1.2.1)$$

Pour  $v \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3$ , on définit la fonctionnelle  $J^\varepsilon$  par :

$$J^\varepsilon(v) = \int_{\omega} k^\varepsilon |v - s| dx. \quad (1.2.2)$$

Enfin on note

$$(f, v) = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i v_i dx', \quad \forall v \in H^1(\Omega^\varepsilon).$$

**Lemme 1.2.1.** *Si  $u^\varepsilon$  est solution du problème  $(Pb^\varepsilon)$ , alors elle vérifie le problème variationnel suivant :*

$$(PV^\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon \in K^\varepsilon, \text{ telle que} \\ a(u^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon) + J^\varepsilon(\varphi) - J^\varepsilon(u^\varepsilon) \geq (f^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon), \quad \forall \varphi \in K^\varepsilon. \end{array} \right.$$

**Preuve.** En multipliant l'équation (1.1.1) par  $(\varphi - u^\varepsilon)$ , où  $\varphi \in K^\varepsilon$ , et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\varphi_i - u_i^\varepsilon) dx dx_3 - \int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon n_j (\varphi_i - u_i^\varepsilon) d\sigma = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon (\varphi_i - u_i^\varepsilon) dx dx_3.$$

Les conditions aux limites (1.1.4) et (1.1.5) impliquent que :

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon n_j (\varphi_i - u_i^\varepsilon) d\sigma = \int_{\omega} \sigma_{ij}^\varepsilon n_j (\varphi_i - u_i^\varepsilon) dx.$$

Mais :  $\sigma_{ij}^\varepsilon n_j = \sigma_{T_i}^\varepsilon + \sigma_n^\varepsilon n_i$ , on trouve :

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon n_j (\varphi_i - u_i^\varepsilon) d\sigma = \int_{\omega} \sigma_{T_i}^\varepsilon (\varphi_i - u_i^\varepsilon) dx + \int_{\omega} \sigma_n^\varepsilon n_i (\varphi_i - u_i^\varepsilon) dx$$

et comme  $(\varphi_i - u_i^\varepsilon) n_i = 0$ , on a :

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon n_j (\varphi_i - u_i^\varepsilon) d\sigma = \int_{\omega} \sigma_{T_i}^\varepsilon (\varphi_i - u_i^\varepsilon) dx.$$

Donc :

$$\int_{\Omega^\epsilon} \sigma_{ij}^\epsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\varphi_i - u_i^\epsilon) dx dx_3 - \int_{\omega} \sigma_{T_i}^\epsilon (\varphi_i - u_i^\epsilon) dx = \int_{\Omega^\epsilon} f_i^\epsilon (\varphi_i - u_i^\epsilon) dx dx_3 \quad \forall \varphi \in K^\epsilon. \quad (1.2.3)$$

Dans (1.2.3) on ajoute et on retranche le terme  $\int_{\omega} k^\epsilon (|\varphi - s| - |u^\epsilon - s|) dx$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\epsilon} \sigma_{ij}^\epsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\varphi_i - u_i^\epsilon) dx dx_3 - \int_{\omega} \sigma_{T_i}^\epsilon (\varphi_i - u_i^\epsilon) dx + \int_{\omega} k^\epsilon (|\varphi - s| - |u^\epsilon - s|) dx - \\ - \int_{\omega} k^\epsilon (|\varphi - s| - |u^\epsilon - s|) dx = \int_{\Omega^\epsilon} f_i^\epsilon (\varphi_i - u_i^\epsilon) dx dx_3. \end{aligned}$$

On pose :

$$B = \int_{\omega} \sigma_{T_i}^\epsilon (\varphi_i - u_i^\epsilon) dx + \int_{\omega} k^\epsilon (|\varphi - s| - |u^\epsilon - s|) dx.$$

Donc :

$$\begin{aligned} B &= \int_{\omega} \sigma_{T_i}^\epsilon (\varphi_i - u_i^\epsilon + s - s) dx + \int_{\omega} k^\epsilon (|\varphi - s| - |u^\epsilon - s|) dx \\ &= \int_{\omega} \sigma_{T_i}^\epsilon (\varphi_i - s) dx - \int_{\omega} \sigma_{T_i}^\epsilon (u_i^\epsilon - s) dx + \int_{\omega} k^\epsilon |\varphi - s| dx - \int_{\omega} k^\epsilon |u^\epsilon - s| dx. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme (1.1.1) on obtient :

$$B = \int_{\omega} \sigma_{T_i}^\epsilon (\varphi_i - s) dx + \int_{\omega} k^\epsilon |\varphi - s| dx.$$

Alors :

$$\sigma_T^\epsilon (\varphi - s) \geq -|\sigma_T^\epsilon| |\varphi - s| \geq -k^\epsilon |\varphi - s| \quad \text{sur } \omega$$

et

$$B = \int_{\omega} \sigma_{T_i}^\epsilon (\varphi_i - s) dx + \int_{\omega} k^\epsilon |\varphi - s| dx \geq 0.$$

En déduit l'inégalité suivante :

$$\int_{\Omega^\epsilon} \sigma_{ij}^\epsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\varphi_i - u_i^\epsilon) dx dx_3 + \int_{\omega} k^\epsilon |\varphi - s| dx - \int_{\omega} k^\epsilon |u^\epsilon - s| dx \geq \int_{\Omega^\epsilon} f_i^\epsilon (\varphi_i - u_i^\epsilon) dx dx_3.$$

Et par suit, on obtient le problème variationnel en vitesse :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon \in K^\varepsilon, \text{ telle que} \\ a(u^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon) + J^\varepsilon(\varphi) - J^\varepsilon(u^\varepsilon) \geq (f^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon), \quad \forall \varphi \in K^\varepsilon. \blacksquare \end{array} \right. \quad (1.2.4)$$

### 1.2.1 Existence et unicité de la solution

Nous rappelons un théorème d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles de 2<sup>ème</sup> espèce que nous appliquerons pour étudier le problème variationnel  $(PV^\varepsilon)$ .

**Théorème 1.2.1.** *Soit  $A$  un convexe fermé non-vide d'un espace de Hilbert  $V$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_V$ ,  $a(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire continue et coercive de  $A \times A$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $J$  une fonctionnelle de  $A$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$  convexe, semi-continue inférieurement et propre, alors pour tout forme linéaire  $\mathcal{L}$  défini sur  $V$ , il existe un unique  $u$  dans  $V$  solution de l'inéquation variationnelle :*

$$a(u, v - u) + J(v) - J(u) \geq \mathcal{L}(v - u).$$

**Lemme 1.2.2.** *Supposons que  $f^\varepsilon \in (L^2(\Omega^\varepsilon))^3$  et  $k^\varepsilon \in L^\infty(\omega)$ ,  $k^\varepsilon \geq 0$  presque partout sur  $\omega$ . Alors, il existe un et un seul  $u^\varepsilon$  dans  $K^\varepsilon$  satisfaisant l'inéquation variationnelle (1.2.4).*

**Preuve.** La forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est coercive sur  $K^\varepsilon \times K^\varepsilon$ .

En effet, soit  $v$  un élément de  $K^\varepsilon$ . Par l'inégalité de Korn, on obtient

$$a(v, v) \geq 2\mu C_k \sum_{i,j=1}^3 \|d_{ij}(v)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 \geq 2\mu C_k \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}^2,$$

où  $C_k > 0$ , est la constante de Korn.

La forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est continue sur  $K^\varepsilon \times K^\varepsilon$ .



En effet, soit  $v$  et  $u$  deux élément de  $K^\varepsilon$ . En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\begin{aligned}
|a(u^\varepsilon, v^\varepsilon)| &\leq 2\mu \left( \sum_{i,j=1}^3 \|d_{ij}(u^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i,j=1}^3 \|d_{ij}(v^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\
&\quad + \lambda \|\operatorname{div}(u^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \cdot \|\operatorname{div}(v^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \\
&\leq 2\mu \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} + \lambda \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \\
&\leq C \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)},
\end{aligned}$$

où

$$C = 2\mu + \lambda$$

La forme linéaire  $(f^\varepsilon, \cdot)$  est continue sur  $K^\varepsilon$ .

En effet, soit  $v$  un élément de  $K^\varepsilon$ , en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$|(f^\varepsilon, v)| \leq \|f^\varepsilon\|_{L^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)} \|v^\varepsilon\|_{L^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)}.$$

Et comme  $J$  est une fonctionnelle convexe, semi-continue inférieurement et propre. Alors le théorème précédent montre l'existence et l'unicité de la solution du (1.2.4). ■

### 1.3 Analyse asymptotique du problème

Pour l'analyse asymptotique de notre problème, on utilise le changement d'échelle

$$z = \frac{x_3}{\varepsilon}.$$

Donc le domaine  $\Omega^\varepsilon$  se transforme à un domaine  $\Omega$  indépendant de  $\varepsilon$ .

où

$$\Omega = \{(x, z) \in \mathbb{R}^3, (x, 0) \in \omega \text{ et } 0 < z < h(x)\}.$$

On note  $\Gamma = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_L$  sa frontière.

Nous définissons maintenant sur  $\Omega$  des nouvelles inconnues

$$\begin{cases} \hat{u}_i^\varepsilon(x, z) = u_i^\varepsilon(x, x_3), \\ \hat{u}_3^\varepsilon(x, z) = \varepsilon^{-1} u_3^\varepsilon(x, x_3). \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Pour les données du problème  $(Pb^\varepsilon)$ , on suppose qu'elles dépendent de  $\varepsilon$  de la manière suivantes :

$$\begin{cases} \hat{f}(x, z) = \varepsilon^2 f^\varepsilon(x, x_3), \\ \hat{k} = \varepsilon k^\varepsilon, \\ \hat{g}(x, z) = g^\varepsilon(x, x_3), \end{cases} \quad (1.3.2)$$

avec  $\hat{f}$ ,  $\hat{k}$  et  $\hat{g}$  ne dépend pas de  $\varepsilon$ .

Soit  $\hat{G}(x, z)$  tel que :

$$\hat{G} = \hat{g} \quad \text{sur } \Gamma.$$

Le vecteur  $G^\varepsilon$  introduit précédemment sera défini de la manière suivante :

$$\begin{cases} \hat{G}_i(x, z) = G_i^\varepsilon(x, x_3), \\ \hat{G}_3(x, z) = \varepsilon^{-1} G_3^\varepsilon(x, x_3). \end{cases} \quad (1.3.3)$$

### 1.3.1 Formulation variationnelle du problème dans $\Omega$

Nous introduisons maintenant le cadre fonctionnel sur  $\Omega$  comme ce qui suit :

$$K = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega)^3 : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_L \cup \Gamma_1 \text{ et } \varphi \cdot n = 0 \text{ sur } \omega \right\}.$$

$$V_z = \left\{ v = (v_1, v_2) \in L^2(\Omega)^2 : \frac{\partial v_i}{\partial z} \in L^2(\Omega), i = 1, 2 \text{ et } v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\}.$$

$$\Pi(k) = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega)^2 : \varphi = (\varphi_1, \varphi_2), \varphi_i = 0 \text{ sur } \Gamma_L \cup \Gamma_1 \text{ pour } i = 1, 2 \right\}.$$

$V_z$  est un espace de Banach pour la norme :

$$\|v\|_{V_z} = \left( \sum_{i=1}^2 \|v_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial v_i}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En multipliant (1.2.4) par  $\varepsilon$  et en passant au domaine fixe  $\Omega$  on montre que le problème variationnel est équivalent au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \hat{u}^\varepsilon \in K, \text{ telle que :} \\ a(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) + J(\hat{\varphi}) - J(\hat{u}^\varepsilon) \geq \sum_{i=1}^2 \left( \hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon \right) + \varepsilon \left( \hat{f}_3, \hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon \right), \quad \forall \hat{\varphi} \in K \end{array} \right. \quad (1.3.4)$$

où

$$J(\hat{\varphi}) = \int_{\omega} \hat{k} |\hat{\varphi} - s| dx$$

et

$$\begin{aligned} a(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) &= \mu \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) dx dz + \\ &+ \mu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon) \right] dx dz + \\ &+ 2\mu \varepsilon^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon) dx dz + \lambda \varepsilon^2 \int_{\Omega} \operatorname{div}(\hat{u}^\varepsilon) \cdot \operatorname{div}(\hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) dx dz. \end{aligned}$$

### 1.3.2 Estimation à priori

Nous essayons maintenant d'étudier les estimations à priori sur  $\hat{u}^\varepsilon$ . Pour cela nous avons besoin d'établir le lemme suivant :

**Lemme 1.3.1.** (*Inéquation de Poincaré*). *On rappelle que  $0 < h(x) < h^*(x)$ ,  $\forall x \in \omega$ , on a l'inéquation suivante :*

$$\|\hat{u}_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq h^* \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Preuve.** Soit  $0 < z < h(x)$ , on a

$$\hat{u}_i^\varepsilon(x, z) = - \int_z^{h(x)} \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial \zeta}(x, \zeta) d\zeta + u_i^\varepsilon(x, h(x)), \quad i = 1, 2, 3$$

et comme  $u_i^\varepsilon(x, h(x)) = 0$ , alors :

$$\hat{u}_i^\varepsilon(x, z) = - \int_z^{h(x)} \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial \zeta}(x, \zeta) d\zeta.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on voit que :

$$|\hat{u}_i^\varepsilon(x, z)|^2 \leq (h^*) \int_0^{h(x)} \left| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial \zeta}(x, \zeta) \right|^2 d\zeta. \quad (1.3.5)$$

Nous intégrons (1.3.5) par rapport à  $z$  de 0 à  $h(x)$ , on obtient

$$\int_0^{h(x)} |\hat{u}_i^\varepsilon(x, z)|^2 dz \leq (h^*)^2 \int_0^{h(x)} \left| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial \zeta}(x, \zeta) \right|^2 d\zeta,$$

en intégrant l'inéquation précédant sur  $\omega$ , on trouve

$$\int_\omega \int_0^{h(x)} |\hat{u}_i^\varepsilon(x, z)|^2 dz dx \leq (h^*)^2 \int_\omega \int_0^{h(x)} \left| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial \zeta}(x, \zeta) \right|^2 d\zeta dx$$

$$\|\hat{u}_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq h^* \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}. \quad \blacksquare$$

**Lemme 1.3.2.** (*Inégalité de Korn*). Pour tout  $\varphi \in K^\varepsilon$ , on a :

$$\|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq C \|D(\varphi)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)},$$

où  $C$  est une constante positive qui ne dépend pas de  $\varepsilon$  et de  $\varphi$ .

**Lemme 1.3.3.** Etant donné  $f \in L^2(\Omega)^3$  et  $k$  est une fonction positive dans  $L^\infty(\omega)$ , il existe une constante  $c > 0$  ne dépend pas de  $\varepsilon$  telle que :

$$\varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^2 \left( \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^4 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c$$

**Preuve.** Soit  $u^\varepsilon$  la solution du problème (1.2.4), donc

$$a(u^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon) + J^\varepsilon(\varphi) - J^\varepsilon(u^\varepsilon) \geq (f^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon)$$

ce qui implique que :

$$a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq a(u^\varepsilon, \varphi) + J^\varepsilon(\varphi) - J^\varepsilon(u^\varepsilon) + (f^\varepsilon, u^\varepsilon) - (f^\varepsilon, \varphi) \quad \forall \varphi \in K^\varepsilon.$$

Et comme  $J^\varepsilon(u^\varepsilon)$  est positive (car  $k > 0$ ), on a :

$$a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq a(u^\varepsilon, \varphi) + J^\varepsilon(\varphi) + (f^\varepsilon, u^\varepsilon) - (f^\varepsilon, \varphi) \quad \forall \varphi \in K^\varepsilon$$

Mais

$$\begin{aligned} a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) &= 2\mu \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega^\varepsilon} d_{ij}(u^\varepsilon) d_{ij}(u^\varepsilon) dx dx_3 + \lambda \int_{\Omega^\varepsilon} \operatorname{div}(u^\varepsilon) \cdot \operatorname{div}(u^\varepsilon) dx dx_3 \\ &= 2\mu \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega^\varepsilon} |d_{ij}(u^\varepsilon)|^2 dx dx_3 + \lambda \int_{\Omega^\varepsilon} |\operatorname{div}(u^\varepsilon)|^2 dx dx_3. \end{aligned}$$

D'après la coercivité de  $a(.,.)$ , il existe  $C_K$  indépendant de  $\varepsilon$  telle que

$$a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \geq 2\mu C_K \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (1.3.6)$$

En appliquant les inégalités de Hölder et de Yong, on trouve la majoration suivante :

$$\begin{aligned} a(u^\varepsilon, \varphi) &\leq \int_{\Omega^\varepsilon} 2\mu |d_{ij}(u^\varepsilon)| |d_{ij}(\varphi)| dx dx_3 + \lambda \int_{\Omega^\varepsilon} |\operatorname{div}(u^\varepsilon)| |\operatorname{div}(\varphi)| dx dx_3 \\ &\leq \left( \int_{\Omega^\varepsilon} \sqrt{\frac{\mu C_K}{2}} |d_{ij}(u^\varepsilon)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{2\sqrt{2}\mu}{\sqrt{C_K}} |d_{ij}(\varphi)|^2 dx dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad + \left( \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\sqrt{\mu C_K}}{2} |\operatorname{div}(u^\varepsilon)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{2\lambda}{\sqrt{\mu C_K}} |\operatorname{div}(\varphi)|^2 dx dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\mu C_K}{4} \|d_{ij}(u^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{4\mu}{C_K} \|d_{ij}(\varphi)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \\ &\quad + \frac{\mu C_K}{8} \int_{\Omega^\varepsilon} |\operatorname{div}(u^\varepsilon)|^2 dx dx_3 + \frac{2\lambda^2}{\mu C_K} \int_{\Omega^\varepsilon} |\operatorname{div}(\varphi)|^2 dx dx_3. \end{aligned}$$

D'autre part, on sait que :

$$\sum_{i,j=1}^2 |d_{ij}(u^\varepsilon)|^2 \leq |\nabla u^\varepsilon|^2 \quad \text{et} \quad |\operatorname{div}(u^\varepsilon)|^2 \leq |\nabla u^\varepsilon|^2$$

on a donc :

$$a(u^\varepsilon, \varphi) \leq \frac{\mu C_K}{4} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{4\mu}{C_K} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{\mu C_K}{8} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{2\lambda^2}{\mu C_K} \|\nabla \varphi\|_{L^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)}^2. \quad (1.3.7)$$

Par l'inégalité de Poincaré, on obtient :

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \varepsilon h^* \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}.$$

L'analogue de (1.3.7), donne :

$$\begin{aligned}
|(f^\varepsilon, u^\varepsilon)| &\leq \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \quad (\text{Cauchy- Schwartz}) \\
&\leq \varepsilon h^* \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \\
&\leq \frac{\mu C_K}{2} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{(\varepsilon h^*)^2}{2\mu C_K} \|\nabla f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 \quad (\text{inégalité de Yong}).
\end{aligned} \tag{1.3.8}$$

De même :

$$|(f^\varepsilon, \varphi)| \leq \frac{\mu C_K}{2} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{(\varepsilon h^*)^2}{2\mu C_K} \|\nabla f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2. \tag{1.3.9}$$

En utilisant (1.3.6) – (1.3.9) et en choisissant  $\varphi = G^\varepsilon$ , on a :

$$\begin{aligned}
2\mu C_K \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 &\leq a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq \frac{\mu C_K}{4} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{4\mu}{C_K} \|\nabla G^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{\mu C_K}{8} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)}^2 + \\
&\quad + \frac{2\lambda^2}{\mu C_K} \|\nabla G^\varepsilon\|_{L^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{\mu C_K}{2} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{(\varepsilon h^*)^2}{2\mu C_K} \|\nabla f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \\
&\quad + \frac{\mu C_K}{2} \|\nabla G^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{(\varepsilon h^*)^2}{2\mu C_K} \|\nabla f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2.
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\frac{9}{8} \mu C_K \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 \leq \frac{(\varepsilon h^*)^2}{\mu C_K} \|\nabla f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \left( \frac{2\lambda^2}{\mu C_K} + \frac{\mu C_K}{2} + \frac{4\mu}{C_K} \right) \|\nabla G^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2. \tag{1.3.10}$$

Mais :

$$\varepsilon^2 \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 = \varepsilon^{-1} \|\hat{f}\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_3} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 = \varepsilon^{-1} \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

on obtient donc

$$\varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 = \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^4 \sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En multipliant (1.3.10) par  $\varepsilon$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{9}{8} \mu C_K \varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 &\leq \frac{\varepsilon^3 h^{*2}}{\mu C_K} \|\nabla f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \left( \frac{2\lambda^2}{\mu C_K} + \frac{\mu C_K}{2} + \frac{4\mu}{C_K} \right) \varepsilon \|\nabla G^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 \\ &\leq \frac{h^{*2}}{\mu C_K} \|\nabla \hat{f}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \frac{2\lambda^2}{\mu C_K} + \frac{\mu C_K}{2} + \frac{4\mu}{C_K} \right) \varepsilon \|\nabla \hat{G}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Pour  $0 < \varepsilon < 1$ , on voit que :

$$\frac{9}{8} \mu C_K \varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 \leq \frac{h^{*2}}{\mu C_K} \|\nabla \hat{f}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \frac{2\lambda^2}{\mu C_K} + \frac{\mu C_K}{2} + \frac{4\mu}{C_K} \right) \|\nabla \hat{G}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2$$

donc :

$$\varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c,$$

où

$$\begin{aligned} c &= \frac{8}{9\mu C_K} c_0; \\ c_0 &= \frac{h^{*2}}{\mu C_K} \|\nabla \hat{f}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \frac{2\lambda^2}{\mu C_K} + \frac{\mu C_K}{2} + \frac{4\mu}{C_K} \right) \|\nabla \hat{G}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du lemme (1.3.3).

### 1.3.3 Résultats de convergence et problème limite

**Théorème 1.3.1.** *Sous les hypothèses du lemme 1.3.3, il existe  $\hat{u}_i^* \in L^2(V_z)$ ,  $i = 1, 2$  tel que pour toute sous suite de  $\hat{u}^\varepsilon$  notée encore  $\hat{u}^\varepsilon$  on a les résultats de convergences suivants :*

$$\hat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup \hat{u}_i^* \quad i = 1, 2 \text{ faiblement dans } L^2(V_z) \quad (1.3.11)$$



$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup 0 \quad i, j = 1, 2 \text{ faiblement dans } L^2(V_z) \quad (1.3.12)$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 \quad i = 1, 2 \text{ faiblement dans } L^2(V_z). \quad (1.3.13)$$

**Preuve.** D'après le lemme 1.3.3, il existe une constante  $C$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que :

$$\left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C, \quad i = 1, 2.$$

En utilisant cette estimation avec l'inégalité de Poincaré, on obtient :

$$\|\hat{u}_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq h^* \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad i = 1, 2, 3$$

c'est-à-dire que  $u_i^\varepsilon$  est borné dans  $V_z$  pour  $i = 1, 2$ , ceci implique l'existence de  $u_i^*$  dans  $V_z$  tel que  $u_i^\varepsilon$  converge faiblement vers  $u_i^*$  dans  $L^2(V_z)$ .

Grâce au lemme 1.3.3 on a :

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c$$

donc  $\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}$  converge vers  $\frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial x_j}$  et comme  $\|\hat{u}_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c$ , alors  $\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}$  converge vers  $\frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial x_j}$ , ce qui donne la convergence faible de  $\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}$  vers 0 dans  $L^2(V_z)$ .

De même grâce à l'inégalité :  $\varepsilon^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c$ , on a la convergences

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial \hat{u}_3^*}{\partial x_i}, \text{ et } \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup \frac{\partial \hat{u}_3^*}{\partial x_j}.$$

Ce qui montre que  $\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}$  converge faiblement vers 0 dans  $L^2(V_z)$ .

**Théorème 1.3.2.** *Avec les mêmes hypothèses du théorème 1.3.1,  $\hat{u}^*$  vérifie :*

$$-\mu \frac{\partial^2 \hat{u}_i^*}{\partial z^2} = \hat{f}_i \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \quad (1.3.14)$$

$$\mu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^*) dx dz + J(\hat{\varphi}) - J(\hat{u}_i^*) \geq \sum_{i=1}^2 \left( \hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^* \right), \quad \forall \varphi \in \Pi(K) \quad (1.3.15)$$

**Preuve.** L'inéquation variationnelle (1.3.4) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 I_i(\varepsilon) + \lambda \varepsilon^2 \int_{\Omega} \operatorname{div}(\hat{u}^\varepsilon) \cdot \operatorname{div}(\hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) dx dz + \int_{\omega} \hat{k} |\hat{\varphi} - s| dx - \\ - \int_{\omega} \hat{k} |\hat{u}^\varepsilon - s| dx \geq \sum_{i=1}^2 \left( \hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon \right) + \varepsilon \left( \hat{f}_3, \hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon \right) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \mu \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^2 \left( \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) dx dz; \\ I_2 &= \mu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) dx dz; \\ I_3 &= \mu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon) dx dz; \\ I_4 &= 2\mu \int_{\Omega} \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon) dx dz. \end{aligned}$$

En utilisant les résultats de convergence du théorème 1.3.1, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^4 I_i(\varepsilon) &= \mu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^*) dx dz \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varepsilon \hat{f}_3 \varphi dx dz &= 0. \end{aligned}$$

Et comme  $J$  est convexe et semi-continue inférieurement

$$\left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \inf_{\omega} \int_{\omega} \hat{k} |\hat{u}^{\varepsilon} - s| dx \right) \geq \int_{\omega} \hat{k} |\hat{u}^* - s| dx \right),$$

on a donc :

$$\mu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^*) dx dz + J(\hat{\varphi}) - J(\hat{u}_i^*) \geq \sum_{i=1}^2 \left( \hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^* \right). \quad (1.3.16)$$

On choisit maintenant dans l'inéquation variationnelle (1.3.16)

$$\hat{\varphi}_i = \hat{u}_i^* \pm \psi_i, \quad \psi_i \in H_0^1(\Omega) \quad i = 1, 2 \quad \text{et} \quad \hat{\varphi}_3 = \hat{u}_3^*,$$

on trouve :

$$\mu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} dx dz = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{f}_i \psi_i dx dz.$$

En utilisant la formule de Green et en choisissant  $\hat{\varphi}_1 = 0$  et  $\hat{\varphi}_2 \in H_0^1(\Omega)$ , puis  $\hat{\varphi}_2 = 0$  et  $\hat{\varphi}_1 \in H_0^1(\Omega)$ , on obtient :

$$- \int_{\Omega} \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z} \right) \psi_i dx dz = \int_{\Omega} \hat{f}_i \psi_i dx dz.$$

Donc

$$-\mu \frac{\partial^2 \hat{u}_i^*}{\partial z^2} = \hat{f}_i \quad \text{pour } i = 1, 2 \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \quad (1.3.17)$$

et comme  $\hat{f} \in L^2(\Omega)$ , alors (1.3.17) est valable dans  $L^2(\Omega)$ . ■

**Théorème 1.3.3.** *Sous les mêmes hypothèses du théorème 1.3.2, on a :*

$$\int_{\omega} k |\psi + s^* - s| - |s^* - s| dx - \int_{\omega} \mu \hat{\tau}^* \psi dx \geq 0 \quad \forall \psi \in L^2(\omega)^2 \quad (1.3.18)$$

$$\begin{cases} \mu |\hat{\tau}^*| < \hat{k} \Rightarrow s^* = s \\ \mu |\hat{\tau}^*| = \hat{k} \Rightarrow \exists \beta > 0 \text{ tel que } s^* = s + \beta \hat{\tau}^* \end{cases} \quad (1.3.19)$$

avec :

$$\hat{\tau}^* = \frac{\partial \hat{u}^*}{\partial z}(x, 0) \text{ et } s^*(x) = \hat{u}^*(x, 0).$$

De plus  $\hat{u}^*$  et  $s^*$  vérifient l'inéquation généralisée faible de Reynolds :

$$\int_{\omega} \left( \tilde{F} - \frac{h}{2} s^* + \int_0^h \hat{u}^*(x, z) dz \right) \nabla \psi(x) dx = 0, \quad \forall \psi \in H^1(\omega), \quad (1.3.20)$$

où

$$\tilde{F}(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^h F(x, z) dz - \frac{h}{2\mu} F(x, h);$$

$$F(x, z) = \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_i(x, \alpha) d\zeta d\alpha.$$

**Preuve.** L'inéquation (1.3.4) devient :

$$\begin{aligned} & \mu \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) dx dz + \\ & + \mu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon) \right] dx dz + \\ & + 2\mu \varepsilon^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon) dx dz + \lambda \varepsilon^2 \int_{\Omega} \operatorname{div}(\hat{u}^\varepsilon) \cdot \operatorname{div}(\hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) dx dz + \\ & + \int_{\omega} \hat{k} |\hat{\varphi} - s| dx - \int_{\omega} \hat{k} |\hat{u}^\varepsilon - s| dx \geq \sum_{i=1}^2 \left( \hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon \right) + \varepsilon \left( \hat{f}_3, \hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon \right). \end{aligned}$$

En passant à la limite puis en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$- \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \mu \frac{\partial^2 \hat{u}_i^*}{\partial z^2} \psi_i dx dz + \int_{\partial\Omega} \mu \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z} n \psi_i d\sigma + \int_{\omega} \hat{k} |\hat{\varphi} - s| dx - \int_{\omega} \hat{k} |\hat{u}^* - s| dx \geq \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{f}_i \psi_i dx dz.$$

Mais

$$\int_{\partial\Omega} \mu \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z} n \psi_i d\sigma = - \int_{\omega} \mu \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z}(x, 0) \psi_i dx.$$

Alors

$$-\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \mu \frac{\partial^2 \hat{u}_i^*}{\partial z^2} \psi_i dx dz + \int_{\omega} \hat{k} (|\psi + s^* - s| - |s^* - s|) dx - \int_{\omega} \mu \hat{\tau}_i^* \psi_i dx \geq \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{f}_i \psi_i dx dz.$$

D'autre part grâce à :  $-\frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial \hat{u}^*}{\partial z} \right) = \hat{f}_i$ , on a :

$$\int_{\omega} \hat{k} |\psi + s^* - s| - |s^* - s| dx - \int_{\omega} \mu \hat{\tau}^* \psi dx \geq 0. \quad (1.3.21)$$

Pour (1.3.19), on utilisons l'analogie de [1].

L'inégalité (1.3.21) est aussi valable pour tout  $\psi \in (D(\omega))^2$  et par densité de  $D(\omega)$  dans  $L^2(\omega)$ , on trouve (1.3.18).

Pour démontrer (1.3.20) en intégrant (1.3.14) de 0 à  $z$ , on voit que :

$$\begin{aligned} \int_0^z \hat{f}_i(x, \alpha) d\alpha &= -\mu \int_0^z \frac{\partial^2 \hat{u}_i^*}{\partial \alpha^2}(x, \alpha) d\alpha \\ &= -\mu \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z}(x, z) + \mu \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z}(x, 0). \end{aligned}$$

En intégrant pour la deuxième fois entre 0 à  $z$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^z \int_0^{\zeta} \hat{f}_i(x, \alpha) d\alpha d\zeta &= -\mu \int_0^z \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial \zeta}(x, \zeta) d\zeta + \mu \int_0^z \hat{\tau}^* d\zeta \\ &= -\mu \hat{u}_i^*(x, z) + \mu \hat{u}_i^*(x, 0) + \mu z \hat{\tau}^* \\ \Rightarrow \hat{u}_i^*(x, z) &= s^*(x, 0) + z \hat{\tau}^* - \frac{1}{\mu} \int_0^z \int_0^{\zeta} \hat{f}_i(x, \alpha) d\alpha d\zeta \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

et comme  $\hat{u}_i^*(x, h(x)) = 0$ , on a :

$$s^*(x, 0) + h \hat{\tau}^* = \frac{1}{\mu} \int_0^z \hat{f}_i(x, \alpha) d\alpha d\zeta. \quad (1.3.23)$$

Intégrant (1.3.22) de 0 à  $h$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
-\mu \int_0^h \hat{u}_i^*(x, z) dz + \mu \int_0^h \hat{u}_i^*(x, 0) dz + \mu \int_0^h z \hat{\tau}^* dz &= \int_0^h \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_i(x, \alpha) d\alpha d\zeta dz \\
\int_0^h \hat{u}_i^*(x, z) dz &= h s^*(x, 0) + \frac{1}{2} h^2 \hat{\tau}^* - \frac{1}{\mu} \int_0^h \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_i(x, \alpha) d\alpha d\zeta dz.
\end{aligned} \tag{1.3.24}$$

De (1.3.23) et (1.3.24), on déduit que

$$\int_0^h \hat{u}_i^*(x, z) dz - \frac{h}{2} s^* + \tilde{F} = 0,$$

avec

$$\begin{aligned}
\tilde{F} &= \int_0^h F(x, z) dz; \\
F(x, z) &= \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_i(x, \alpha) d\zeta d\alpha.
\end{aligned}$$

Alors

$$\int_\omega \left( \int_0^h \hat{u}^*(x, y) dy - \frac{h}{2} s^* + \tilde{F} \right) \nabla \psi = 0. \quad \blacksquare$$

**Théorème 1.3.4.** *La solution  $\hat{u}^*$  du problème limite (1.3.14), (1.3.15) est unique dans  $L^2(V_z)$ .*

**Preuve.** Supposons qu'il existe deux solution  $\hat{u}^1$  et  $\hat{u}^2$  de l'inéquation variationnelle (1.3.15), on a :

$$\mu \sum_{i=1}^2 \int_\Omega \frac{\partial \hat{u}_i^1}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_i - \hat{u}_i^1) dx dz + J(\varphi) - J(\hat{u}_i^1) \geq \sum_{i=1}^2 \left( \hat{f}_i, \varphi_i - \hat{u}_i^1 \right) \tag{1.3.25}$$

et

$$\mu \sum_{i=1}^2 \int_\Omega \frac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_i - \hat{u}_i^2) dx dz + J(\varphi) - J(\hat{u}_i^2) \geq \sum_{i=1}^2 \left( \hat{f}_i, \varphi_i - \hat{u}_i^2 \right). \tag{1.3.26}$$

On prend  $\varphi = \hat{u}^2$  dans (1.3.25) puis  $\varphi = \hat{u}^1$  dans (1.3.26) :

$$\mu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{u}_i^1}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{u}_i^2 - \hat{u}_i^1) dx dz + J(\hat{u}^2) - J(\hat{u}^1) \geq \sum_{i=1}^2 \left( \hat{f}_i, \hat{u}_i^2 - \hat{u}_i^1 \right) \quad (1.3.27)$$

$$\mu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{u}_i^1 - \hat{u}_i^2) dx dz + J(\hat{u}^1) - J(\hat{u}^2) \geq \sum_{i=1}^2 \left( \hat{f}_i, \hat{u}_i^1 - \hat{u}_i^2 \right). \quad (1.3.28)$$

En sommant les deux inéquation (1.3.28) et (1.3.27), on obtient :

$$\mu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{u}_i^1}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{u}_i^2 - \hat{u}_i^1) dx dz + \mu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{u}_i^1 - \hat{u}_i^2) dx dz \geq 0$$

et

$$\mu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} (\hat{u}_i^1 - \hat{u}_i^2) \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{u}_i^1 - \hat{u}_i^2) dx dz \leq 0,$$

ceci implique

$$\mu \left\| \frac{\partial}{\partial z} (\hat{u}_i^1 - \hat{u}_i^2) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0.$$

Par Poincaré, on trouve :

$$\|\hat{u}_i^1 - \hat{u}_i^2\|_{V_z} \leq c \left\| \frac{\partial}{\partial z} (\hat{u}_i^1 - \hat{u}_i^2) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0,$$

donc

$$\hat{u}^1 = \hat{u}^2. \quad \blacksquare$$

# Chapitre 2

## Analyse asymptotique d'un problème stationnaire d'élasticité linéaire non isotherme avec frottement

**Résumé.** Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'analyse asymptotique d'un problème stationnaire pour l'élasticité linéaire non-isotherme (c'est-à-dire, le coefficient  $\mu$  dépend de la température), avec les conditions de frottement non linéaires de type de Tresca. Nous couplons l'équation de la conservation de la quantité du mouvement avec l'équation de la conservation de l'énergie déduite de la loi de Fourier.

### Contenu

- 2.1 Introduction et position du problème ;
- 2.2. Formulation variationnelle du problème ;
- 2.3. Analyse asymptotique du problème ;
  - 2.3.1. Estimation à priori ;
  - 2.3.2. Résultats de convergence et problème limite.



## 2.1 Introduction et position du problème

Dans ce chapitre  $\Omega^\varepsilon$  désignera le même domaine mince considéré en premier chapitre.

$$\Omega^\varepsilon = \{(x, x_3) \in \mathbb{R}^3, (x, 0) \in \omega, \quad 0 < x_3 < \varepsilon h(x)\}.$$

Nous rappelons que  $\Gamma^\varepsilon$  est sa frontière :

$$\Gamma^\varepsilon = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \bar{\Gamma}_L^\varepsilon.$$

Nous considérons un problème à des déformations d'un corps homogène élastique et non isotherme en régime stationnaire.

Pour les forces extérieures  $f^\varepsilon$  données, nous supposons que les déformations d'un corps élastique est gouvernées par les équations suivantes :

La loi de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i^\varepsilon = 0. \quad (2.1.1)$$

On désigne par  $\sigma^\varepsilon = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}^\varepsilon$  le tenseur des contraintes et par  $D = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$  le tenseur des taux de déformations :

$$d_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 3. \quad (2.1.2)$$

On suppose que la loi de comportement suit la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = 2\mu(T) d_{ij}(u^\varepsilon) + \lambda d_{kk}(u^\varepsilon) \delta_{ij},$$

où

- \*  $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon)$  est la vitesse de déplacement du corps élastique ;
- \*  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé ;

\*  $T^\varepsilon$  est sa température.

La loi de la conservation de l'énergie est donnée par :

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left( K^\varepsilon \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_i} \right) = 2\mu^\varepsilon (T^\varepsilon) d_{ij}^2 (u^\varepsilon) + r^\varepsilon (T^\varepsilon) ; \quad (2.1.4)$$

où  $K^\varepsilon$  et  $r^\varepsilon$  désignent respectivement, la conductivité thermique et l'apport massique de la chaleur.

Nous supposons que la vitesse est connue sur  $\Gamma_1^\varepsilon$  et sur  $\Gamma_L^\varepsilon$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon \quad (2.1.5)$$

$$u^\varepsilon = g \quad \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon \quad (2.1.6)$$

où,  $g = (g_1, g_2, g_3)$  est une fonction avec  $g_3 = 0$ , telle que :

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} g \cdot n ds = 0.$$

On utilise les notations usuelles :

$$\begin{aligned} u_n^\varepsilon &= u^\varepsilon \cdot n = u_i^\varepsilon \cdot n_i, \\ u_{\tau_i}^\varepsilon &= u_i^\varepsilon - u_n^\varepsilon n_i, \\ \sigma_n^\varepsilon &= (\sigma \cdot n) \cdot n = \sigma_{ij}^\varepsilon n_i n_j, \\ \sigma_{\tau_i}^\varepsilon &= \sigma_{ij}^\varepsilon n_j - \sigma_n^\varepsilon n_i, \end{aligned}$$

respectivement, la vitesse normale, la vitesse tangentielle, la composante normale et tangentielle du tenseur.

Sur  $\omega$  la vitesse tangentielle est connue et vérifie la loi de Tresca :

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon &\implies u_\tau^\varepsilon = s \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon &\implies \exists \beta > 0 \text{ tel que } u_\tau^\varepsilon = s - \beta \sigma_\tau^\varepsilon \end{aligned} \right\} \text{ sur } \omega \quad (2.1.7)$$

Pour la température, on suppose que :

$$T^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon \quad (\text{Dirichlet-homogène sur } \Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon), \quad (2.1.8)$$

$$\frac{\partial T^\varepsilon}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \omega \quad (\text{Neumann-homogène sur } \omega). \quad (2.1.9)$$

Le problème complet consiste donc à trouver le champ de vitesse  $u^\varepsilon$  et la température  $T^\varepsilon$  vérifie les équations et les conditions aux limites suivantes :

$$(pb_1^\varepsilon) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega^\varepsilon, \\ -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( K^\varepsilon \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_i} \right) = 2\mu^\varepsilon(T^\varepsilon) d_{ij}^2(u^\varepsilon) + r^\varepsilon(T^\varepsilon) & \text{dans } \Omega^\varepsilon, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ u^\varepsilon = g & \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon, \\ u^\varepsilon \cdot n = 0 & \text{sur } \omega, \\ \left. \begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \implies u_\tau^\varepsilon = s \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \implies \exists \beta > 0 \text{ tel que } u_\tau^\varepsilon = s - \beta \sigma_\tau^\varepsilon \end{array} \right\} & \text{sur } \omega \\ T^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon, \\ \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial n} = 0 & \text{sur } \omega. \end{array} \right.$$

## 2.2 Formulation variationnelle du problème

On introduit le cadre fonctionnel suivant :

$$H^1(\Omega^\varepsilon)^3 = \left\{ v \in (L^2(\Omega^\varepsilon))^3 : \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega^\varepsilon), \forall i, j = 1, 2, 3 \right\}.$$

Nous définissons le convexe fermé non vide de  $H^1(\Omega^\varepsilon)^3$ , par :

$$K^\varepsilon = \left\{ \varphi \in (H^1(\Omega^\varepsilon))^3 : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon \text{ et } \varphi n = 0 \text{ sur } \omega \right\}.$$

On note par  $H_{\Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon}^1(\Omega^\varepsilon)$  le sous espace vectoriel de  $H^1(\Omega^\varepsilon)$  :

$$H_{\Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon}^1(\Omega^\varepsilon) = \{ \varphi \in H^1(\Omega^\varepsilon) : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon \}.$$

On introduit également les notations suivantes :

$$a(T, u, v) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega^\varepsilon} 2\mu^\varepsilon(T) d_{ij}(u) d_{ij}(v) dx dx_3 + \lambda \int_{\Omega^\varepsilon} \operatorname{div}(u) \cdot \operatorname{div}(v) dx dx_3; \quad (2.2.1)$$

$$(f^\varepsilon, v) = \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon v dx dx_3 = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i dx dx_3; \quad (2.2.2)$$

$$J^\varepsilon(v) = \int_{\omega} k^\varepsilon |v - s| dx; \quad (2.2.3)$$

$$b(T, \psi) = \int_{\Omega^\varepsilon} K^\varepsilon \frac{\partial T}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx dx_3; \quad (2.2.4)$$

$$C(u; T, \psi) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega^\varepsilon} 2\mu^\varepsilon(T) d_{ij}^2(u) \psi dx dx_3 + \int_{\Omega^\varepsilon} r^\varepsilon(T) \psi dx dx_3. \quad (2.2.5)$$

**Lemme 2.2.1.** *Si  $u^\varepsilon, T^\varepsilon$  sont des solution du problème  $(pb_1^\varepsilon)$  alors elles vérifient le problème variationnel :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon \in K^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) \text{ et } T^\varepsilon \in H_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}^1(\Omega^\varepsilon) \text{ telle que} \\ a(T^\varepsilon; u^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon) + J^\varepsilon(\varphi) - J^\varepsilon(u^\varepsilon) \geq (f^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon), \quad \forall \varphi \in K^\varepsilon \\ b(T^\varepsilon, \psi) = C(u^\varepsilon; T^\varepsilon, \psi), \quad \forall \psi \in H_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}^1. \end{array} \right. \quad (2.2.6)$$

**Preuve.** En multipliant l'équation (2.1.1) par  $(\varphi_i - u_i^\varepsilon)$ , où  $\varphi \in K^\varepsilon$  et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\varphi_i - u_i^\varepsilon) dx dx_3 - \int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon n_j (\varphi_i - u_i^\varepsilon) ds = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon (\varphi_i - u_i^\varepsilon) dx dx_3.$$

D'après les condition aux limites on a :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\varphi_i - u_i^\varepsilon) dx dx_3 - \int_{\omega} \sigma_i^\varepsilon (\varphi_i - u_i^\varepsilon) ds = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon (\varphi_i - u_i^\varepsilon) dx dx_3.$$

En utilisant le lemme (1.1.1), on trouve :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\varphi_i - u_i^\varepsilon) dx dx_3 + J^\varepsilon (\varphi) - J^\varepsilon (u^\varepsilon) \geq \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon (\varphi_i - u_i^\varepsilon) dx dx_3.$$

En remplaçant  $\sigma_{ij}^\varepsilon$  par l'expression (2.1.3), on voit que :

$$a(T; u^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon) + J^\varepsilon (\varphi) - J^\varepsilon (u^\varepsilon) \geq (f^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon), \quad \forall \varphi \in K^\varepsilon. \quad (2.2.7)$$

En multipliant l'équation (2.1.4) par  $\psi \in H_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}^1(\Omega^\varepsilon)$  et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx dx_3 = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega^\varepsilon} 2\mu^\varepsilon(T^\varepsilon) d_{ij}^2(u^\varepsilon) \psi dx dx_3 + \int_{\Gamma^\varepsilon} K^\varepsilon \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_i} \psi ds + \int_{\Omega^\varepsilon} r^\varepsilon(T^\varepsilon) \psi dx dx_3.$$

Maintenant les conditions aux limites (2.1.8) et (2.1.9), nous donnons :

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx dx_3 = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega^\varepsilon} 2\mu^\varepsilon(T^\varepsilon) d_{ij}^2(u^\varepsilon) \psi dx dx_3 + \int_{\Omega^\varepsilon} r^\varepsilon(T^\varepsilon) \psi dx dx_3, \quad (2.2.8)$$

c'est-à-dire

$$b(T^\varepsilon, \psi) = C(u^\varepsilon; T^\varepsilon, \psi), \quad \forall \psi \in H_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}^1. \quad \blacksquare$$

## 2.3 Analyse asymptotique du problème

Pour l'analyse asymptotique du problème, nous utilisons comme dans le premier chapitre un changement d'échelle en posant  $z = \frac{x_3}{\varepsilon}$ , et donc le domaine  $\Omega^\varepsilon$  se transforme à un domaine  $\Omega$  indépendant de  $\varepsilon$  défini par :

$$\Omega = \{(x, z) \in \mathbb{R}^3, (x, 0) \in \omega \text{ et } 0 < z < h(x)\}.$$

On note  $\Gamma = \bar{\omega} \cup \Gamma_L \cup \Gamma_1$ , sa frontière.

A la suite de ce changement d'échelle, nous notons par  $u^\varepsilon$  et  $T^\varepsilon$ , les inconnues définies sur  $\Omega$ .

De plus, on définit sur  $\Omega$  les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x, x_3) = \hat{u}_i^\varepsilon(x, z), & i = 1, 2 \\ \varepsilon^{-1}u_3^\varepsilon(x, x_3) = \hat{u}_3^\varepsilon(x, z), \\ T^\varepsilon(x, x_3) = \hat{T}^\varepsilon(x, z). \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Pour les données, nous avons les relations suivantes :

$$\hat{\mu} = \mu^\varepsilon, \quad \hat{k} = \varepsilon k^\varepsilon, \quad \hat{f} = \varepsilon^2 f^\varepsilon \text{ et } \hat{g} = g, \quad (2.3.2)$$

$$\hat{K} = K^\varepsilon \text{ et } \hat{r} = \varepsilon^2 r^\varepsilon \quad (2.3.3)$$

avec  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{f}$ ,  $\hat{K}$ ,  $\hat{k}$  et  $\hat{g}$  indépendant de  $\varepsilon$ .

Ainsi le relèvement  $G^\varepsilon$  de  $g$  est définie par :

$$\begin{aligned} \hat{G}_i(x, z) &= G_i^\varepsilon(x, x_3), \quad i = 1, 2 \\ \varepsilon \hat{G}_3(x, z) &= G_3^\varepsilon(x, x_3). \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Nous introduisons maintenant le cadre fonctionnel sur  $\Omega$ . Pour cela, on note :

$$K = \left\{ v \in (H^1(\Omega))^3 : v = \hat{G} \text{ sur } \Gamma_L \cup \Gamma_1, \ v.n = 0 \text{ sur } \omega \right\}.$$

$$\Pi(K) = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega)^2 : \varphi = (\varphi_1, \varphi_2), \ \varphi_i = \hat{G}_i \text{ sur } \Gamma_L \cup \Gamma_1, \ i = 1, 2 \right\}.$$

$$V_z = \left\{ v = (v_1, v_2) \in L^2(\Omega)^2 : \frac{\partial v_i}{\partial z} \in L^2(\Omega), \ i = 1, 2; \ v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\}.$$

Il est clair que  $V_z$  est un espace de Banach, muni de la norme :

$$\|v\|_{V_z} = \left( \sum_{i=1}^2 \|v_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial v_i}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Avec le changement d'échelle défini dans (2.3.1) et (2.3.2) le problème (2.2.6) devient :

$$\begin{cases} \text{Trouver le champ de vitesse } \hat{u}^\varepsilon \text{ dans } K \text{ et la température } \hat{T}^\varepsilon \text{ dans } H_{\Gamma_L \cup \Gamma_1}^1(\Omega) \text{ tels que} \\ a(\hat{T}^\varepsilon; \hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) + J(\hat{\varphi}) - J(\hat{u}^\varepsilon) \geq (\hat{f}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon), \quad \forall \hat{\varphi} \in K \end{cases} \quad (2.3.5)$$

$$b(\hat{T}^\varepsilon, \hat{\psi}) = C(\hat{u}^\varepsilon; \hat{T}^\varepsilon, \hat{\psi}), \quad \forall \hat{\psi} \in H_{\Gamma_L \cup \Gamma_1}^1(\Omega) \quad (2.3.6)$$

où

$$\begin{aligned} J(\hat{\varphi}) &= \int_{\omega} \hat{k} |\hat{\varphi} - s| dx \\ a(\hat{T}^\varepsilon; \hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) &= \hat{\mu}(\hat{T}^\varepsilon) \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^2 \left( \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) dx dz + \\ &\quad + \mu \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon) \right] dx dz + \\ &\quad + 2\mu \varepsilon^2 \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon) dx dz + \lambda \varepsilon^2 \int_{\Omega} \operatorname{div}(\hat{u}^\varepsilon) \cdot \operatorname{div}(\hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) dx dz. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left( \hat{f}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon \right) &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{f}_i^\varepsilon (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) dx dz + \varepsilon \int_{\Omega} \hat{f}^\varepsilon (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) dx dz. \\
b\left( \hat{T}^\varepsilon, \hat{\psi} \right) &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \varepsilon^2 \hat{K} \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x_i} dx dz + \int_{\Omega} \hat{K} \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \cdot \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} dx dz \\
C\left( \hat{u}^\varepsilon; \hat{T}^\varepsilon, \hat{\psi} \right) &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^2 \hat{\mu} \left( \hat{T}^\varepsilon \right) \left( \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right)^2 \psi dx dz + \\
&\quad + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \int_{\Omega} \hat{\mu} \left( \hat{T}^\varepsilon \right) \left( \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right)^2 \psi dx dz + \\
&\quad + \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} \int_{\Omega} \hat{\mu} \left( \hat{T}^\varepsilon \right) \left( \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial z} \right)^2 \psi dx dz + \\
&\quad + \int_{\Omega} 2\varepsilon^2 \hat{\mu} \left( \hat{T}^\varepsilon \right) \left( \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right)^2 \psi dx dz + \int_{\Omega} r \left( \hat{T}^\varepsilon \right) \psi dx dz.
\end{aligned}$$

### 2.3.1 Estimations à priori

Nous allons établir des estimations sur la vitesse  $u^\varepsilon$ , puis sur la température  $T^\varepsilon$  solution de notre problème variationnel.

#### Estimation à priori sur la vitesse

**Lemme 2.3.1.** *Supposons que  $f \in (L^2(\Omega))^3$ , le coefficient de frottement  $k > 0$  dans  $L^\infty(\omega)$  et qu'il existe deux constantes  $\mu_*$  et  $\mu^*$  telle que*

$$0 < \mu_* \leq \mu(a) \leq \mu^*, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad (2.3.7)$$

*alors, il existe une constante strictement positive  $C$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que :*

$$\sum_{i,j=1}^2 \left\| \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^2 \left( \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq C. \quad (2.3.8)$$



**Preuve.** Soit  $u^\varepsilon$  la solution du problème (2.2.6), c-à-d :

$$a(T^\varepsilon; u^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon) + J^\varepsilon(\varphi) - J^\varepsilon(u^\varepsilon) \geq (f^\varepsilon, \varphi - u^\varepsilon),$$

donc

$$a(T^\varepsilon; u^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq a(T^\varepsilon; u^\varepsilon, \varphi) + J^\varepsilon(\varphi) - J^\varepsilon(u^\varepsilon) + (f^\varepsilon, u^\varepsilon) - (f^\varepsilon, \varphi), \quad \forall \varphi \in K^\varepsilon.$$

Comme  $J^\varepsilon(u^\varepsilon)$  est positive ( $k > 0$ ) on a :

$$a(T^\varepsilon; u^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq a(T^\varepsilon; u^\varepsilon, \varphi) + J^\varepsilon(\varphi) + (f^\varepsilon, u^\varepsilon) - (f^\varepsilon, \varphi), \quad \forall \varphi \in K^\varepsilon.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} a(T^\varepsilon; u^\varepsilon, u^\varepsilon) &= 2\mu^\varepsilon(T^\varepsilon) \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega^\varepsilon} d_{ij}(u^\varepsilon) d_{ij}(u^\varepsilon) dx dx_3 + \lambda \int_{\Omega^\varepsilon} \operatorname{div}(u^\varepsilon) \cdot \operatorname{div}(u^\varepsilon) dx dx_3 \\ &= 2\mu^\varepsilon(T^\varepsilon) \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega^\varepsilon} |d_{ij}(u^\varepsilon)|^2 dx dx_3 + \lambda \int_{\Omega^\varepsilon} |\operatorname{div}(u^\varepsilon)|^2 dx dx_3. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Korn, il existe  $C_K$  indépendant de  $\varepsilon$  telle que :

$$a(T^\varepsilon; u^\varepsilon, u^\varepsilon) \geq 2\mu_* C_K \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.3.9)$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on obtient :

$$|(f^\varepsilon, u^\varepsilon)| \leq \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$$

$$|(f^\varepsilon, u^\varepsilon)| \leq \varepsilon h^* \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}. \quad (2.3.10)$$

Maintenant, par l'inégalité de Yong nous trouvons :

$$|(f^\varepsilon, u^\varepsilon)| \leq \frac{\mu_* C_K}{2} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{(\varepsilon h^*)^2}{2\mu_* C_K} \|\nabla f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2$$

et

$$|(f^\varepsilon, \varphi)| \leq \frac{\mu_* C_K}{2} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{(\varepsilon h^*)^2}{2\mu_* C_K} \|\nabla f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2. \quad (2.3.11)$$

En appliquant les inégalités de Hölder et de Yong, on obtient :

$$\begin{aligned} a(T^\varepsilon; u^\varepsilon, \varphi) &\leq \int_{\Omega^\varepsilon} 2\mu^\varepsilon(T^\varepsilon) |d_{ij}(u^\varepsilon)| \cdot |d_{ij}(u^\varepsilon)| dx dx_3 + \lambda \int_{\Omega^\varepsilon} |\operatorname{div}(u^\varepsilon)| \cdot |\operatorname{div}(\varphi)| dx dx_3 \\ &\leq \int_{\Omega^\varepsilon} 2\mu^* |d_{ij}(u^\varepsilon)| \cdot (|d_{ij}(\varphi)|) dx dx_3 + \int_{\Omega^\varepsilon} \lambda |\operatorname{div}(u^\varepsilon)| \cdot |\operatorname{div}(\varphi)| dx dx_3 \\ &\leq \left( \int_{\Omega^\varepsilon} \sqrt{\frac{\mu_* C_K}{2}} |d_{ij}(u^\varepsilon)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{2\sqrt{2}\mu^*}{\sqrt{\mu_* C_K}} |d_{ij}(\varphi)|^2 dx dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\sqrt{\mu_* C_K}}{2} |\operatorname{div}(u^\varepsilon)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{2\lambda}{\sqrt{\mu_* C_K}} |\operatorname{div}(\varphi)|^2 dx dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\mu_* C_K}{4} \|d_{ij}(u^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{4(\mu^*)^2}{\mu_* C_K} \|d_{ij}(\varphi)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \\ &\quad + \frac{\mu_* C_K}{8} \int_{\Omega^\varepsilon} |\operatorname{div}(u^\varepsilon)|^2 dx dx_3 + \frac{2\lambda^2}{\mu_* C_K} \int_{\Omega^\varepsilon} |\operatorname{div}(\varphi)|^2 dx dx_3. \end{aligned}$$

Mais, on sait que :

$$\sum_{i,j=1}^2 |d_{ij}(u^\varepsilon)|^2 \leq |\nabla u^\varepsilon|^2 \quad \text{et} \quad |\operatorname{div}(u^\varepsilon)|^2 \leq |\nabla u^\varepsilon|^2,$$

on trouve :

$$a(T^\varepsilon; u^\varepsilon, \varphi) \leq \frac{\mu_* C_K}{4} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{4(\mu^*)^2}{\mu_* C_K} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{\mu_* C_K}{8} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{2\lambda^2}{\mu_* C_K} \|\nabla \varphi\|_{L^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)}^2. \quad (2.3.12)$$

En utilisant (2.3.9) – (2.3.12) et en choisissant  $\varphi = G^\varepsilon$ , on a :

$$\begin{aligned} 2\mu_* C_K \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 &\leq a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq \frac{\mu_* C_K}{4} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{4(\mu^*)^2}{\mu_* C_K} \|\nabla G^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \\ &\quad + \frac{\mu_* C_K}{8} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{2\lambda^2}{\mu_* C_K} \|\nabla G^\varepsilon\|_{L^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{\mu_* C_K}{2} \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \\ &\quad + \frac{(\varepsilon h^*)^2}{2\mu_* C_K} \|\nabla f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{\mu_* C_K}{2} \|\nabla G^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \frac{(\varepsilon h^*)^2}{2\mu_* C_K} \|\nabla f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2. \\ \frac{9}{8}\mu_* C_K \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 &\leq \frac{(\varepsilon h^*)^2}{\mu C_K} \|\nabla f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \left( \frac{4(\mu^*)^2}{\mu_* C_K} + \frac{2\lambda^2}{\mu_* C_K} + \frac{\mu_* C_K}{2} \right) \|\nabla G^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

En utilisant les égalités :

$$\varepsilon^2 \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 = \varepsilon^{-1} \|\hat{f}\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_3} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 = \varepsilon^{-1} \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

on obtient :

$$\varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 = \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^4 \sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En multipliant (2.3.13) par  $\varepsilon$ , on trouve :

$$\frac{9}{8}\mu_* C_K \varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 \leq \frac{(\varepsilon h^*)^2}{\mu_* C_K} \varepsilon \|\nabla f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \left( \frac{4(\mu^*)^2}{\mu_* C_K} + \frac{2\lambda^2}{\mu_* C_K} + \frac{\mu_* C_K}{2} \right) \varepsilon \|\nabla G^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2$$

Pour  $0 < \varepsilon < 1$  on a :

$$\frac{9}{8} \mu_* C_K \varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 \leq \frac{h^{*2}}{\mu_* C_K} \|\nabla \hat{f}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \frac{4(\mu^*)^2}{\mu_* C_K} + \frac{6\lambda^2}{\mu_* C_K} + \frac{\mu_* C_K}{2} \right) \|\nabla \hat{G}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2$$

donc :

$$\varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 = \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^4 \sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C ,$$

où

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{h^{*2}}{\mu_* C_K} \|\nabla \hat{f}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \left( \frac{4(\mu^*)^2}{\mu_* C_K} + \frac{2\lambda^2}{\mu_* C_K} + \frac{\mu_* C_K}{2} \right) \|\nabla \hat{G}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2 ; \\ C &= \frac{8}{9\mu_* C_K} c_1. \end{aligned}$$

Donc le lemme 2.3.1 est démontré. ■

### Estimation sur la température

Dans cette section, on cherche des estimations à priori sur la température  $\hat{T}^\varepsilon$ , pour cela nous avons besoin d'établir le lemme suivant :

**Lemme 2.3.2.** *La température  $\hat{T}^\varepsilon$  est majorée par :*

$$\left\| \hat{T}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} \leq h^* \left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} . \quad (2.3.14)$$

**Preuve.** Pour la démonstration de lemme 2.3.2, on utilisons les mêmes techniques qu'on a utilisé dans le lemme 1.3.1.

**Lemme 2.3.3.** *Supposons que les hypothèses du lemme 2.3.1 sont vérifiées, de plus supposons qu'il existe :*

- deux constantes strictement positives  $K_*$  et  $K^*$ , telle que

$$0 < K_* \leq K(x, z) \leq K^*, \quad \forall (x, z) \in \Omega \quad (2.3.15)$$

- une constante positive  $\hat{r}^*$ , telle que

$$\hat{r}(a) \leq \hat{r}^*. \quad (2.3.16)$$

Alors, il existe une constante positive  $C_2$  indépendante de  $\varepsilon$ , telle que :

$$\varepsilon^2 \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_2. \quad (2.3.17)$$

**Preuve.** Dans l'inéquation variationnelle (2.2.8), on choisit  $\varphi = \hat{T}^\varepsilon$ , on obtient :

$$\sum_{i=1}^2 I_i = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \varepsilon^2 \hat{K} \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i} dx dz + \int_{\Omega} \hat{K} \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} dx dz,$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 = & \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^2 \hat{\mu}(\hat{T}^\varepsilon) \left( \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right)^2 \hat{T}^\varepsilon dx dz + \\ & + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \int_{\Omega} \hat{\mu}(\hat{T}^\varepsilon) \left( \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right)^2 \hat{T}^\varepsilon dx dz + \\ & + \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} \int_{\Omega} \hat{\mu}(\hat{T}^\varepsilon) \left( \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial z} \right)^2 \hat{T}^\varepsilon dx dz + \\ & + \int_{\Omega} 2\varepsilon^2 \hat{\mu}(\hat{T}^\varepsilon) \left( \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right)^2 \hat{T}^\varepsilon dx dz; \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_{\Omega} r(\hat{T}^\varepsilon) \hat{T}^\varepsilon dx dz.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a :

$$\begin{aligned}
|I_1| \leq & \frac{\varepsilon^2 \hat{\mu}^*}{2} \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \left\| \hat{T}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} + \\
& + \frac{\hat{\mu}^*}{2} \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \left\| \hat{T}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} + \\
& + \frac{\hat{\mu}^*}{2} \sum_{j=1}^2 \left\| \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \left\| \hat{T}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} + \\
& + 2\varepsilon^2 \hat{\mu}^* \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \left\| \hat{T}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité  $\|a + b\|^2 \leq 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$ , on trouve :

$$\begin{aligned}
|I_1| \leq & 2\varepsilon^2 \hat{\mu}^* \sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \left\| \hat{T}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} + 2\hat{\mu}^* \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \left\| \hat{T}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} + \\
& + 2\hat{\mu}^* \varepsilon^4 \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \left\| \hat{T}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} + 2\varepsilon^2 \hat{\mu}^* \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \left\| \hat{T}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Maintenant l'inégalité (2.3.8), nous donnons :

$$|I_1| \leq 2\mu^* C \left\| \hat{T}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc, en utilisant le lemme (2.3.2), on obtient :

$$|I_1| \leq 2\mu^* h^* C \left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.3.18)$$

De même, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le lemme (2.3.2) on obtient :

$$|I_2| \leq r^* \left\| \hat{T}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} \leq r^* h^* \left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.3.19)$$

D'autre part, les hypothèses (2.3.15) et (2.3.16), nous donnons :

$$\begin{aligned} b(T^\varepsilon, T^\varepsilon) &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \varepsilon^2 \hat{K} \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i} dx dz + \int_{\Omega} \hat{K} \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} dx dz \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \varepsilon^2 \hat{K} \left| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i} \right|^2 dx dz + \int_{\Omega} \hat{K} \left| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \right|^2 dx dz. \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} \hat{K}_* \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \hat{K}_* \left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq b(\hat{T}^\varepsilon, \hat{T}^\varepsilon) \\ &\leq 2\hat{\mu}^* h^* C \left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} + \hat{r}^* h^* \left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$K_* \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \hat{K}_* \left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_1 \left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.3.20)$$

où,  $C_1$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$  donnée par :

$$C_1 = 2\hat{\mu}^* h^* C + \hat{r}^* h^*$$

donc :

$$\left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \hat{K}_*^{-1} C_1. \quad (2.3.21)$$

De plus, en injectant cette dernière estimation dans (2.3.20) on trouve :

$$\varepsilon^2 \left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_2,$$

où

$$C_2 = \hat{K}_*^{-1} C_1^2. \blacksquare$$

### 2.3.2 Résultats de convergence et problème limite

Dans ce paragraphe, on va énoncer du théorème de convergence.

**Théorème 2.3.1.** *Sous les mêmes hypothèses des lemmes (2.3.1) et (2.3.3), il existe  $\hat{u}^* = (\hat{u}_1^*, \hat{u}_2^*)$  dans  $V_z$  et  $\hat{T}^*$  dans  $V_z$ , tel que pour des sous suites de  $\hat{u}^\varepsilon$  ( resp  $\hat{T}^\varepsilon$  ) notée encore  $\hat{u}^\varepsilon$  ( resp.  $\hat{T}^\varepsilon$  ), on a les résultats de convergence suivants :*

$$\hat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup \hat{u}_i^* \quad 1 \leq i \leq 2 \text{ faiblement dans } L^2(V_z) \quad (2.3.22)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup 0 \quad 1 \leq i, j \leq 2 \text{ faiblement dans } L^2(V_z) \quad (2.3.23)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \rightharpoonup 0 \text{ faiblement dans } L^2(V_z) \quad (2.3.24)$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup 0 \quad 1 \leq i \leq 2 \text{ faiblement dans } L^2(V_z) \quad (2.3.25)$$

$$\hat{T}^\varepsilon \rightharpoonup \hat{T}^* \text{ faiblement dans } L^2(V_z) \quad (2.3.26)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 \text{ faiblement dans } L^2(V_z) \quad (2.3.27)$$

**Preuve.** D'après (2.3.8), nous obtenons (2.2.22)–(2.3.25) comme dans le théorème 1.2.2 du premier chapitre.

Grâce à l'estimation (2.3.17), il existe une constante positive  $C$  ne dépend pas de  $\varepsilon$  telle que :

$$\left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

En utilisant le lemme (2.3.2), on en déduit que :

$$\left\| \hat{T}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} \leq h^* \left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq h^* C,$$



donc  $\hat{T}^\varepsilon$  est borné dans  $V_z$ , ce qui implique l'existence d'un élément  $\hat{T}^*$  dans  $V_z$  tel que  $\hat{T}^\varepsilon$  converge faiblement vers  $\hat{T}^*$  dans  $V_z$ .

De plus l'estimation (2.3.17), montre que  $\varepsilon \left\| \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C$ , donc  $\varepsilon \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i}$  converge vers

$\frac{\partial \hat{T}^*}{\partial x_i}$ , et comme  $\hat{T}^\varepsilon$  converge vers  $\hat{T}^*$  dans  $V_z$ , alors  $\varepsilon \frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i}$  converge vers 0 dans  $V_z$ . ■

**Théorème 2.3.2.** *Sous les hypothèses du théorème 2.3.1 les solutions  $\hat{u}^*$  et  $\hat{T}^*$  vérifient les relations suivantes :*

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{\mu}(\hat{T}^*) \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^*) dx dz + J(\hat{\varphi}) - J(\hat{u}_i^*) \geq \sum_{i=1}^2 \left( \hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^* \right); \quad (2.3.28)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left( \hat{\mu}(\hat{T}^*) \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z} \right) = \hat{f}_i \quad \text{pour } i = 1, 2 \text{ dans } L^2(\Omega); \quad (2.3.29)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left( \hat{K} \frac{\partial \hat{T}^*}{\partial z} \right) = \sum_{i=1}^2 \hat{\mu}(\hat{T}^*) \left( \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z} \right)^2 + \hat{r}(\hat{T}^*) \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (2.3.30)$$

**Preuve.** L'inéquation variationnelle (2.3.5) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^4 I_i(\varepsilon) + \lambda \varepsilon^2 \int_{\Omega} \operatorname{div}(\hat{u}^\varepsilon) \cdot \operatorname{div}(\hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon) dx dz + \int_{\omega} \hat{k} |\hat{\varphi} - s| dx - \\ & - \int_{\omega} \hat{k} |\hat{u}^\varepsilon - s| dx \geq \sum_{i=1}^2 \left( \hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon \right) + \varepsilon \left( \hat{f}_3, \hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon \right), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \hat{\mu}(\hat{T}^\varepsilon) \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^2 \left( \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon) dx dz; \\ I_2 &= \hat{\mu}(\hat{T}^\varepsilon) \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i + \hat{u}_i^\varepsilon) dx dz; \\ I_3 &= \hat{\mu}(\hat{T}^\varepsilon) \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon) dx dz; \\ I_4 &= 2\hat{\mu}(\hat{T}^\varepsilon) \int_{\Omega} \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon) dx dz. \end{aligned}$$

En passant à la limite et en utilisant les résultats de convergence du théorème 2.3.1, il existe une sous suite  $\hat{T}^\varepsilon$  qui converge presque partout vers  $\hat{T}^*$ , et comme  $\mu(\hat{T}^\varepsilon)$  est continue, alors  $\mu(\hat{T}^\varepsilon)$  converge presque partout vers  $\hat{\mu}(\hat{T}^*)$ .

Le fait que  $J$  est semi-continue et inférieurement, alors :

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{\mu}(\hat{T}^*) \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^*) dx dz + J(\hat{\varphi}) - J(\hat{u}_i^*) \geq \sum_{i=1}^2 \left( \hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^* \right). \quad (2.3.31)$$

On choisit  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  dans (2.3.31) par

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \hat{u}_i^* \pm \psi, \quad i = 1, 2 \\ \varphi_3 &= \hat{u}_3^*, \end{aligned}$$

on obtient :

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{\mu}(\hat{T}^*) \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} dx dz = \sum_{i=1}^2 \left( \hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^* \right).$$

En utilisant la formule de Green et en choisissant  $\hat{\varphi}_1 = 0$  et  $\hat{\varphi}_2 \in H_0^1(\Omega)$ , puis  $\hat{\varphi}_2 = 0$  et  $\hat{\varphi}_1 \in H_0^1(\Omega)$ , on trouve :

$$- \int_{\Omega} \hat{\mu}(\hat{T}^*) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z} \right) \psi_i dx dz = \int_{\Omega} \hat{f}_i \psi_i dx dz$$

donc :

$$-\hat{\mu}(\hat{T}^*) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z} \right) = \hat{f}_i \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega) \quad (2.3.32)$$

et comme  $\hat{f}_i \in L^2(\Omega)$ , alors (2.3.32) est vraie dans  $L^2(\Omega)$ .

D'autre part, en passant à la limite dans (2.3.6) et en utilisant les résultats de convergence du théorème 2.3.1, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \hat{K} \frac{\partial \hat{T}^*}{\partial z} \cdot \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} dx dz &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \int_{\Omega} \hat{\mu}(\hat{T}^*) \left( \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z} \right)^2 \psi dx dz + \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} \int_{\Omega} \hat{\mu}(\hat{T}^*) \left( \frac{\partial \hat{u}_j^*}{\partial z} \right)^2 \psi dx dz + \\
&\quad + \int_{\Omega} \hat{r}(\hat{T}^*) \psi dx dz \\
&= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{\mu}(\hat{T}^*) \left( \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z} \right)^2 \psi dx dz + \int_{\Omega} \hat{r}(\hat{T}^*) \psi dx dz, \quad \forall \psi \in H_{\Gamma_L \cup \Gamma_1}^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Maintenant la formule de Green, nous donnons :

$$-\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left( \hat{K} \frac{\partial \hat{T}^*}{\partial z} \right) \cdot \psi dx dz = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \hat{\mu}(\hat{T}^*) \left( \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z} \right)^2 \psi dx dz + \int_{\Omega} \hat{r}(\hat{T}^*) \psi dx dz, \quad \forall \psi \in H_{\Gamma_L \cup \Gamma_1}^1(\Omega).$$

Par conséquent :

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left( \hat{K} \frac{\partial \hat{T}^*}{\partial z} \right) = \sum_{i=1}^2 \hat{\mu}(\hat{T}^*) \left( \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z} \right)^2 + \hat{r}(\hat{T}^*) \quad \text{dans } H_{\Gamma_L \cup \Gamma_1}^{-1}(\Omega). \quad (2.3.33)$$

La formule (2.3.33) est valable dans  $L^2(\Omega)$ , puisque  $\hat{\mu}$  et  $\hat{r}$  sont deux fonctions bornées sur  $\mathbb{R}$  et  $\left( \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z} \right)^2$  est un élément de  $L^2(\Omega)$ . ■

**Théorème 2.3.3.** *Sous les mêmes hypothèses du théorème 2.3.2, on a :*

$$\int_{\omega} \hat{k} |\psi + s^* - s| - |s^* - s| dx - \int_{\omega} \hat{\mu} \hat{\tau}^* \psi dx \geq 0 \quad \forall \psi \in L^2(\omega)^2 \quad (2.3.34)$$

et

$$\begin{cases} \hat{\mu}(\zeta^*) |\hat{\tau}^*| < \hat{k} \Rightarrow s^* = s \\ \hat{\mu}(\zeta^*) |\hat{\tau}^*| = \hat{k} \Rightarrow \exists \beta > 0 \text{ tel que } s^* = s + \beta \hat{\tau}^* \end{cases} \quad (2.3.35)$$

avec :

$$\hat{\tau}^* = \frac{\partial \hat{u}^*}{\partial z}(x, 0), \quad s^*(x) = \hat{u}^*(x, 0) \quad \text{et} \quad \zeta^* = \hat{T}^*(x, 0).$$

De plus,  $\hat{u}^*$  vérifie l'inéquation généralisée de Reynolds :

$$\int_{\omega} \left( \tilde{F} - \frac{h}{2} s^* + \int_0^h \hat{u}^*(x, z) dz \right) \nabla \psi(x) dx = 0, \quad \forall \psi \in H^1(\omega), \quad (2.3.36)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x) &= \frac{1}{\hat{\mu}(\zeta^*)} \int_0^h F(x, z) dz - \frac{h}{2\hat{\mu}(\zeta^*)} F(x, h), \\ F(x, z) &= \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_i(x, \alpha) d\alpha d\zeta. \end{aligned}$$

**Preuve.** Pour démontrer (2.3.36) en intégrant deux fois l'équation (2.3.29) de 0 à  $z$ , on trouve :

$$\hat{u}_i^*(x, z) = s^*(x, 0) + z\hat{\tau}^* - \frac{1}{\hat{\mu}(\zeta^*)} \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_i(x, \alpha) d\alpha d\zeta \quad (2.3.37)$$

et comme  $\hat{u}_i^*(x, h(x)) = 0$ , on a :

$$s^*(x, 0) + h\hat{\tau}^* = \frac{1}{\hat{\mu}(\zeta^*)} \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_i(x, \alpha) d\alpha d\zeta \quad (2.3.38)$$

En intégrant (2.3.37) de 0 à  $h$ , on obtient :

$$\begin{aligned} -\hat{\mu}(\zeta^*) \int_0^h \hat{u}_i^*(x, z) dz + \hat{\mu}(\zeta^*) \int_0^h \hat{u}_i^*(x, 0) dz + \hat{\mu}(\zeta^*) \int_0^h z\hat{\tau}^* dz &= \int_0^h \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_i(x, \alpha) d\alpha d\zeta dz \\ \int_0^h \hat{u}_i^*(x, z) dz &= hs^*(x, 0) + \frac{1}{2} h^2 \hat{\tau}^* - \frac{1}{\hat{\mu}(\zeta^*)} \int_0^h \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_i(x, \zeta) d\alpha d\zeta dz. \end{aligned} \quad (2.3.39)$$

De (2.3.38) et (2.3.39), on en déduit que :

$$\int_0^h \hat{u}_i^*(x, z) dz - \frac{h}{2} s^* + \tilde{F} = 0,$$

avec

$$\int_0^h F(x, z) dz = \frac{1}{\hat{\mu}(\zeta^*)} \int_0^h \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_i(x, \alpha) d\alpha d\zeta dz;$$

$$F(x, z) = \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_i(x, \alpha) d\alpha d\zeta.$$

Il résulte donc que :

$$\int_\omega \left( \int_0^h \hat{u}^*(x, z) dz - \frac{h}{2} s^* + \tilde{F} \right) \nabla \psi = 0. \quad \blacksquare$$

**Théorème 2.3.4.** *La solution  $\hat{u}^*$  du problème limite (2.3.28) et (2.3.29) est unique dans  $L^2(V_z)$ .*

**Preuve.** La démonstration de cet théorème est analogue à celle du théorème 1.3.4.

# Chapitre 3

## Analyse asymptotique d'un problème de Stokes perturbé sans frottement

**Résumé.** Dans ce chapitre, on s'intéresse au comportement limite d'un fluide régi par le système de Stokes perturbé sans frottement dans un domaine mince dont les frontières sont rugueuses.

### Contenu

- 3.1 Introduction et position du problème ;
- 3.2. Analyse asymptotique du problème ;
  - 3.2.1. Changement du domaine de référence ;
  - 3.2.2. Formulation variationnelle du problème ;
- 3.3. Estimation à priori ;
  - 3.3.1. Estimation à priori sur la vitesse ;
  - 3.3.2. Estimation à priori sur la pression ;
  - 1.3.3. Résultats de convergence et problème limite.

### 3.1 Introduction et position du problème

Dans ce chapitre, on étudie le comportement asymptotique d'un fluide perturbé dans un domaine mince.

On suppose l'écoulement régi par le système de stokes perturbé :

$$\begin{cases} \mu \Delta \hat{u}^\varepsilon - k^2 \hat{u}^\varepsilon = \nabla \hat{p}^\varepsilon, \\ \operatorname{div} \hat{u}^\varepsilon = 0, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

avec  $\hat{u}^\varepsilon$ ,  $\hat{p}^\varepsilon$  et  $\mu$  sont respectivement, la vitesse, la pression et la viscosité,  $k$  est une constante positive .

Soit  $\Omega^\varepsilon$  est un film mince définie par :

$$\Omega^\varepsilon = \{(x, x_3) \in \mathbb{R}^3; x \in \omega, 0 < x_3 < \varepsilon h(x)\},$$

avec :

$$h \in C^1(\omega), \exists h^*, h_* > 0 \text{ et } h_* < h(x) < h^*.$$

$\omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $x_3 = 0$  qui constitué la frontière inférieure du domaine  $\Omega^\varepsilon$ .

$\Omega^\varepsilon$  est limité par une frontière supérieure notée  $\Gamma_+^\varepsilon$ , la frontière inférieure  $\Gamma_-$  et un bord latéral  $\Gamma_L^\varepsilon$  tel que :

$$\Gamma_+^\varepsilon = \{(x, x_3) \text{ , } x \in \omega \text{ , } x_3 = \varepsilon h(x) \},$$

$$\Gamma_- = \{(x, x_3) \text{ , } x \in \omega \text{ , } x_3 = 0 \},$$

$$\Gamma_L^\varepsilon = \Gamma^\varepsilon - (\overline{\Gamma_-^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}) \quad \text{et } \Gamma^\varepsilon = \partial\Omega^\varepsilon.$$

Des conditions de types Dirichlet sont imposées sur la frontière du domaine  $\Omega^\epsilon$  :

$$\begin{cases} \hat{u}^\epsilon = \hat{s} & \text{sur } \Gamma_-, \\ \hat{u}^\epsilon = \hat{g}^\epsilon & \text{sur } \Gamma_L, \\ \hat{u}^\epsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_+, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

avec  $\hat{s} = (\hat{s}_1, \hat{s}_2)$  est une fonction donnée dans  $C^1(\omega)$ .

On suppose que  $\hat{g}^\epsilon \in \left(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^\epsilon)\right)^3$  et vérifier la condition de compatibilité :

$$\int_{\partial\Omega^\epsilon} \hat{g}^\epsilon \cdot n^\epsilon d\sigma = 0.$$

L'existence et l'unicité de la solution est démontré.

Nous voulons étudier le comportement asymptotique des solutions du problème précédent lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro.

## 3.2 Analyse asymptotique du problème

### 3.2.1 Changement du domaine de référence

Pour l'analyse asymptotique du problème considérer nous allons utiliser le changement d'échelle  $z = \frac{x_3}{\varepsilon}$ .

Cette méthode consiste à transposer le problème initialement posé dans le domaine  $\Omega^\epsilon$  dépendant de  $\varepsilon$ , en un problème équivalent posé sur un domaine fixe indépendant de  $\varepsilon$ .

Le domaine  $\Omega$  est définie par :

$$\Omega = \{(x, z) \in \mathbb{R}^3 ; x \in \omega, 0 < z < h(x)\}.$$



On définit sur  $\Omega$  les fonctions suivantes :

$$\hat{u}_i^\varepsilon(x, x_3) = u_i^\varepsilon(x, z), \quad i = 1, 2, 3$$

$$\hat{p}^\varepsilon(x, x_3) = p^\varepsilon(x, z)$$

vérifient

$$\mu \Delta_\varepsilon u^\varepsilon - k^2 u^\varepsilon = \nabla_\varepsilon p^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.2.1)$$

$$\operatorname{div}_\varepsilon u^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.2.2)$$

$$u^\varepsilon = g \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (3.2.3)$$

avec

$$\Delta_\varepsilon = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\varepsilon^2 \partial x_3^2},$$

$$\nabla_\varepsilon = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right).$$

On suppose qu'il existe  $g$  dans  $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^3$ , indépendant de  $\varepsilon$  tel que :

$$g = (s_1, s_2, 0) \quad \text{sur } \Gamma_-, \quad (3.2.4)$$

$$g = (0, 0, 0) \quad \text{sur } \Gamma_+, \quad (3.2.5)$$

$$g = (g_1, g_2, 0) \quad \text{sur } \Gamma_L, \quad (3.2.6)$$

avec  $g$  vérifié la condition de compatibilité :

$$\int_\Gamma g \cdot n d\sigma = 0. \quad (3.2.7)$$

### 3.2.2 Formulation variationnelle du problème

**Lemme 3.2.1.** *Soient  $u^\varepsilon$  et  $p^\varepsilon$  des solutions du problème (3.1.1), alors elles vérifient la formulation variationnelle suivante :*

$$\mu \int_{\Omega} \nabla_\varepsilon u^\varepsilon \cdot \nabla_\varepsilon \varphi \, dx dz + k^2 \int_{\Omega} u^\varepsilon \varphi \, dx dz = \int_{\Omega} p^\varepsilon \operatorname{div}_\varepsilon \varphi \, dx dz, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad (2.3.8)$$

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div}_\varepsilon u^\varepsilon = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega)^3 \quad (2.3.9)$$

**Preuve.** En multipliant l'équation (3.2.1) par  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  puis en intégrant, on obtient :

$$\mu \int_{\Omega} \Delta_\varepsilon u^\varepsilon \cdot \varphi \, dx dz - k^2 \int_{\Omega} u^\varepsilon \varphi \, dx dz = \int_{\Omega} \nabla_\varepsilon p^\varepsilon \cdot \varphi \, dx dz \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Par la formule de Green, on trouve l'équation (2.3.8).

De même, en multipliant l'équation (3.2.2) par  $q \in L^2(\Omega)$  et en intégrant, on obtient (2.3.9). ■

### 3.3 Estimations à priori

Nous essayons maintenant de trouver des estimations à priori sur la vitesse  $u^\varepsilon$  et la pression  $p^\varepsilon$ .

On introduit l'espace de Hilbert :

$$V(z) = \{\vartheta \in L^2(\Omega) : \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \in L^2(\Omega)\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{V_z} = \|v\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}.$$

### 3.3.1 Estimation à priori sur la vitesse

**Lemme 3.3.1.** *Pour  $\varepsilon$  petit, on a l'estimation suivante :*

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1, \quad \varepsilon \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \quad (3.3.1)$$

**Preuve.** Il existe un relèvement  $J \in (H^1(\Omega))^3$  des conditions aux limites de  $u^\varepsilon$  tels que :

$$J = (0, 0, 0) \text{ si } z = h(x) \text{ et } J = (s_1, s_2, 0) \text{ si } z = 0 \text{ avec : } \operatorname{div}_\varepsilon J = 0.$$

Posons :  $J^\varepsilon = (J_1, J_2, \varepsilon J_3)$ , alors  $(u^\varepsilon - J^\varepsilon)$  est une fonction test dans (1.2.8) et on a :

$$\mu \int_\Omega \nabla_\varepsilon u^\varepsilon \nabla_\varepsilon (u^\varepsilon - J^\varepsilon) \, dx dz + k^2 \int_\Omega u^\varepsilon (u^\varepsilon - J^\varepsilon) \, dx dz = \int_\Omega p^\varepsilon \operatorname{div}_\varepsilon (u^\varepsilon - J^\varepsilon) \, dx dz = 0.$$

Donc :

$$\mu \int_\Omega \nabla_\varepsilon u^\varepsilon \nabla_\varepsilon u^\varepsilon \, dx dz + k^2 \int_\Omega u^\varepsilon u^\varepsilon \, dx dz = \mu \int_\Omega \nabla_\varepsilon u^\varepsilon \nabla_\varepsilon J^\varepsilon \, dx dz + k^2 \int_\Omega u^\varepsilon J^\varepsilon \, dx dz.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient :

$$\mu \|\nabla_\varepsilon u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + k^2 \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \mu \|\nabla_\varepsilon u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla_\varepsilon J^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + k^2 \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \|J^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}.$$

L'inégalité  $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ , montre qu'il existe  $c' = \sup(\mu, k^2)$  indépendant de  $\varepsilon$  tel que :

$$c' (\|\nabla_\varepsilon u^\varepsilon\| + \|u^\varepsilon\|)^2 \leq \mu \|\nabla_\varepsilon u^\varepsilon\|^2 + k^2 \|u^\varepsilon\|^2 \leq \mu \|\nabla_\varepsilon u^\varepsilon\| \|\nabla_\varepsilon J^\varepsilon\| + k^2 \|u^\varepsilon\| \|J^\varepsilon\|.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré ( $\|J^\varepsilon\| \leq b \|\nabla_\varepsilon J^\varepsilon\|$ ) avec  $b > 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} c' \left( \|\nabla_\varepsilon u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 &\leq c \|\nabla_\varepsilon J^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \left( \|\nabla_\varepsilon u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \right) ; \\ C_0 \left( \|\nabla_\varepsilon u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \right) &\leq \|\nabla_\varepsilon J^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} ; \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} c &= \sup(\mu, k^2 b) , \\ C_0 &= \frac{c'}{c} . \end{aligned}$$

Et comme  $\|\nabla_\varepsilon J^\varepsilon\| \leq \frac{K}{\varepsilon}$ , on trouve :

$$\|\nabla_\varepsilon u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C_0^{-1} \|\nabla_\varepsilon J^\varepsilon\| \leq \frac{C_0^{-1} K}{\varepsilon} = \frac{C}{\varepsilon} .$$

On voit donc que :

$$\|\nabla_\varepsilon u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\varepsilon} . \quad (3.3.2)$$

D'autre part l'inégalité (3.3.2) montre que :

$$\begin{aligned} \varepsilon \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} &\leq C , \quad \text{pour } i = 1, 2 \\ \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \end{aligned}$$

et d'après l'inégalité de Poincaré, on trouve :

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} &\leq h^* \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq h^* C, \quad (z \text{ direction}) \\ \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_1, \quad \text{avec } C_1 = h^* C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 3.3.2 Estimation à priori sur la pression

On définit maintenant le cadre fonctionnel sur  $\Omega$

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q dx dz = 0 \right\}.$$

**Lemme 3.3.2.** *Pour  $\varepsilon$  petit on a les estimations suivantes :*

$$\varepsilon^2 \|P^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \text{ et } \varepsilon^2 \|\nabla P^\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C_2. \quad (3.3.3)$$

**Preuve.** On choisit dans (3.2.8) la fonction test  $\varphi$  par  $\varphi = (\varphi_1, 0, 0)$ , alors :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial x_1}, \varphi_1 \right\rangle_{H' \times H_0^1} &= \int_{\Omega} \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial x_1} \varphi_1 dx dz = \mu \int_{\Omega} \nabla_\varepsilon u_1^\varepsilon \nabla_\varepsilon \varphi_1 dx dz + k^2 \int_{\Omega} u_1^\varepsilon \varphi_1 dx dz \\ &\leq \mu \sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left\| \frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} + \\ &\quad + k^2 \|u_1^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon} \sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C}{\varepsilon^2} \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} + k^2 C_1 \|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

En multipliant (3.3.4) par  $\varepsilon^2$ , on obtient :

$$\left| \left\langle \varepsilon^2 \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial x_1}, \varphi_1 \right\rangle_{H' \times H_0^1} \right| \leq \varepsilon C \sum \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} + C \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2 C_1 \|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \|\varphi_1\|_{H_0^1(\Omega)},$$

avec :  $C_2 = \sup(C, C_1)$ .

donc, on aura :

$$\varepsilon^2 \left\| \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C_2.$$

De même, en choisissant la fonction test  $\varphi$  par  $(0, \varphi_2, 0)$  puis par  $(0, 0, \varphi_3)$  dans (3.2.8),

on trouve :

$$\varepsilon^2 \left\| \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial x_2} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C_2.$$

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial z}, \varphi_3 \right\rangle_{H' \times H_0^1} \right| &\leq \mu \sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left\| \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} + \\
&+ k^2 \|u_3^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_3\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.3.5}
\end{aligned}$$

En multipliant (3.3.5) par  $\varepsilon^2$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ), on obtient :

$$\left| \left\langle \varepsilon \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial z}, \varphi_3 \right\rangle_{H' \times H_0^1} \right| \leq \varepsilon C \sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} + C \left\| \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \right\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2 C_1 k^2 \|\varphi_3\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \|\varphi_3\|_{H_0^1(\Omega)},$$

donc, on aura :

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C_2.$$

Par conséquent :

$$\varepsilon^2 \|\nabla p^\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C_2 \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega).$$

Il est clair que le domaine  $\Omega$  est Lipschitzien borné, on a donc l'inégalité suivante :

$$\|p^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq K \left( \|\nabla p^\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} + \int_{\Omega} p^\varepsilon dx dz \right);$$

et comme :  $p^\varepsilon \in L_0^2(\Omega)$ , en déduit que :

$$\varepsilon^2 \|p^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq K C_2 = C_3. \quad \blacksquare$$

### 3.4 Résultats de convergence et problème limite

**Lemme 3.4.1.** *Sous les hypothèses des lemme 3.3.1 et lemme 3.3.2, il existe  $u_i^*$  dans  $V(z)$  et  $p^*$  dans  $L_0^2(\Omega)$ , tel que pour la sous suite de  $u^\varepsilon$  (resp  $p^\varepsilon$ ) notée encore  $u^\varepsilon$  (resp  $p^\varepsilon$ ), on a les résultats de convergence faible suivants :*

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\rightharpoonup u^* && \text{dans } L^2(\Omega), \\ \varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} &\rightharpoonup 0 && \text{dans } L^2(\Omega), \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial z} &\rightharpoonup \frac{\partial u^*}{\partial z} && \text{dans } L^2(\Omega), \\ \varepsilon^2 p^\varepsilon &\rightharpoonup p^* && \text{dans } L_0^2(\Omega) \end{aligned}$$

**Preuve.** D'après l'estimation de la vitesse (3.3.1), on a :

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C,$$

donc, il existe une sous suite extraire notée  $u^\varepsilon$  qui converge faiblement vers  $u^*$  dans  $L^2(\Omega)$ .

et comme

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \quad \text{et} \quad u^\varepsilon \rightharpoonup u^*$$

on aura :

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} &\rightarrow \frac{\partial u^*}{\partial x_i} && \text{faiblement dans } L^2(\Omega) \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} &\rightarrow \frac{\partial u^*}{\partial x_i} && \text{faiblement dans } L^2(\Omega) \\ \varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} &\rightarrow 0 && \text{faiblement dans } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

D'autre part, d'après l'inégalité (3.3.1), on a :

$$\left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C$$

donc, il existe une sous suite extraire notée  $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial z}$  qui converge faiblement vers  $\frac{\partial u^*}{\partial z}$  dans  $L^2(\Omega)$ .

Maintenant, l'estimation de la pression montre qu'il existe une sous suite extraire  $\varepsilon^2 p^\varepsilon$  converge faiblement vers  $p^*$  dans  $L^2(\Omega)$ .

Mais, on sait que  $L_0^2(\Omega)$  est un sous espace fermé dans  $L^2(\Omega)$ , on aura donc :

$$p^* \in L_0^2(\Omega) . \quad \blacksquare$$

**Théorème 3.4.2.** *Sous les mêmes hypothèses du théorème 3.4.1, la solution limite  $(u^*, p^*)$  vérifie les relations suivantes :*

$$u_3^* = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$\mu \frac{\partial^2 u_j^*}{\partial z^2} = \frac{\partial p^*}{\partial x_j} \quad \text{pour } j = 1, 2 \quad \text{dans } L^2(\omega) \quad (3.4.1)$$

$$p^* \in H^1(\omega) \quad \text{avec } p^* \text{ ne dépend pas de la variable } z \quad (3.4.2)$$

$$\int_{\omega} \frac{(h)^3}{12\mu} \nabla_x p^* \nabla_x \varphi \, dx = \int_{\omega} \frac{h}{2} s \nabla_x \varphi \, dx - \int_{\Gamma_l} g \cdot n \varphi \, d\sigma. \quad (3.4.3)$$

**Preuve.** Soit  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  est une fonction test dans l'équation (3.2.2) :

$$\int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} u^\varepsilon \, dx dz = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x_2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial z} \right) \varphi \, dx dz = 0. \quad (3.4.4)$$

En multipliant l'équation (3.4.4) par  $\varepsilon$  et en passant à la limite puis en utilisant la convergence de  $\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}$  vers 0, on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_3^*}{\partial z} \varphi \, dx dz = \int_{\Omega} u_3^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} \, dx dz = 0,$$



donc :

$$\frac{\partial u_3^*}{\partial z} = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

ce qui implique que  $u_3^*$  ne dépend pas de la variable  $z$ .

D'après la continuité de trace, on a :

$$\|u_3^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_+^\varepsilon)} \leq C \|u_3^\varepsilon\|_{V(x_3)} \leq C,$$

on voit donc :

$$u_3^\varepsilon(x, h) \rightarrow u_3^*(x, h) = 0.$$

Lorsque  $u_3^* = 0$  sur  $\Gamma_+$ , alors  $u_3^* = 0$  sur  $\Omega$ .

On démontre maintenant que  $p^*$  ne dépend pas de  $z$ .

Soit  $\varphi_3 \in H_0^1(\Omega)$  est une fonction test dans l'équation (3.2.8) :

$$\mu \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_i} dx dz + \mu \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} dx dz + k^2 \int_{\Omega} u_3^\varepsilon \varphi_3 dx dz = \int_{\Omega} p^\varepsilon \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} dx dz, \quad (3.4.5)$$

en multipliant l'équation (3.4.5) par  $\varepsilon^2$  et en passant à la limite puis en utilisant le théorème 3.4.1, on obtient :

$$\mu \int_{\Omega} \frac{\partial u_3^*}{\partial z} \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} dx dz = \int_{\Omega} p^* \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} dx dz,$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial p^*}{\partial z} \varphi_3 dx dz = 0, \quad \left( \text{car } \frac{\partial u_3^*}{\partial z} = 0 \right),$$

alors  $p^*$  ne dépend pas de la variable  $z$ .

Soit  $\varphi_j \in H_0^1(\Omega)$  pour  $j = 1, 2$  est une fonction test dans (3.2.8), on a :

$$\mu \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx dz + \mu \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} dx dz + k^2 \int_{\Omega} u_j^\varepsilon \varphi_j dx dz = \int_{\Omega} p^\varepsilon \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} dx dz, \quad (3.4.6)$$

en multipliant l'équation (3.4.6) par  $\varepsilon^2$  et en passant à la limite, on trouve :

$$\mu \int_{\Omega} \frac{\partial u_j^*}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} dx dz = \int_{\Omega} p^* \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} dx dz, \quad (3.4.7)$$

en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\mu \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_j^*}{\partial z^2} \varphi_j dx dz = \int_{\Omega} \frac{\partial p^*}{\partial x_j} \varphi_j dx dz, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

donc :

$$\mu \frac{\partial^2 u_j^*}{\partial z^2} = \frac{\partial p^*}{\partial x_j}, \quad \text{pour } j = 1, 2 \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega). \quad (3.4.8)$$

En posant  $\varphi = z(z-h)\theta$ , tel que  $\theta \in D(\omega)$  dans l'équation (3.4.7) puis en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$-2\mu \int_{\omega} \int_0^h u_j^* \theta dx dz + \mu \int_{\omega} s_j h \theta dx = - \int_{\omega} \int_0^h \frac{\partial p^*}{\partial x_j} (z(z-h)\theta) dx dz,$$

Mais

$$\int_0^h (z(z-h)\theta) dz = - \left( \frac{(h)^3}{6} \right) \theta,$$

on aura donc :

$$-2\mu \int_{\omega} \int_0^h u_j^* \theta dx dz + \mu \int_{\omega} s_j h \theta dx = \int_{\omega} \frac{\partial p^*}{\partial x_j} \left( \frac{(h)^3}{6} \right) \theta dx$$

$$\left\langle -2\mu \int_0^h u_j^* dz + \mu s_j h, \theta \right\rangle_{D' \times D} = \left\langle \frac{\partial p^*}{\partial x_j} \left( \frac{(h)^3}{6} \right), \theta \right\rangle_{D' \times D}$$

ce qui est vraie pour tout  $\theta \in D(\omega)$ , alors :

$$\int_0^h u_j^* dz = \frac{s_j h}{2} - \frac{\partial p^*}{\partial x_j} \left( \frac{(h)^3}{12\mu} \right) \quad \text{dans } D'(\omega). \quad (3.4.9)$$

D'autre part l'équation (3.4.9) implique que  $\frac{\partial p^*}{\partial x_j}$  appartient à  $L^2(\omega)$  car  $\int_0^h u_j^* dz$  est dans  $L^2(\omega)$  pour tout  $j = 1, 2$ , donc  $p^*$  appartient à  $H^1(\omega)$ .

On en déduit que la relation (3.4.8) est vraie dans  $L^2(\omega)$ .

En choisissant  $\varphi \in H^1(\omega)$  dans l'équation de la divergence, on aura :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}_{\varepsilon} u^{\varepsilon} \varphi \, dx dz &= - \int_{\Omega} u^{\varepsilon} \nabla_{\varepsilon} \varphi \, dx dz + \int_{\Gamma} u^{\varepsilon} \cdot n \varphi \, d\sigma = 0, \\ &= - \int_{\Omega} u^{\varepsilon} \nabla_{\varepsilon} \varphi \, dx dz + \int_{\Gamma_l} g \cdot n \varphi \, d\sigma = 0, \end{aligned}$$

donc :

$$- \int_{\Omega} u_1^{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \, dx dz - \int_{\Omega} u_2^{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \, dx dz + \int_{\Gamma_l} g \cdot n \varphi \, d\sigma = 0.$$

En passant à la limite ( $g$  ne dépend pas de  $\varepsilon$ ) et en utilisant (3.4.9), on trouve :

$$\begin{aligned} - \int_{\omega} \int_0^h u_1^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \, dx dz - \int_{\omega} \int_0^h u_2^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \, dx dz + \int_{\Gamma_l} g \cdot n \varphi \, d\sigma &= 0, \\ - \int_{\omega} \left( \frac{s_1 h}{2} - \frac{\partial p^*}{\partial x_1} \left( \frac{(h)^3}{12\mu} \right) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \, dx - \int_{\omega} \left( \frac{s_2 h}{2} - \frac{\partial p^*}{\partial x_2} \left( \frac{(h)^3}{12\mu} \right) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \, dx &+ \int_{\Gamma_l} g \cdot n \varphi \, d\sigma = 0, \\ - \sum_{j=1}^2 \int_{\omega} \left( \frac{s_j h}{2} - \frac{\partial p^*}{\partial x_j} \left( \frac{(h)^3}{12\mu} \right) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx &+ \int_{\Gamma_l} g \cdot n \varphi \, d\sigma = 0, \quad \varphi \in H^1(\omega), \\ \int_{\omega} \frac{(h)^3}{12\mu} \nabla_x p^* \nabla_x \varphi \, dx &= \int_{\omega} \frac{h}{2} s \nabla_x \varphi \, dx - \int_{\Gamma_l} g \cdot n \varphi \, d\sigma. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Théorème 3.4.3.** *La pression  $p^*$  est l'unique solution de l'équation (3.4.3).*

**Preuve.** Supposons qu'il existe deux solutions  $p_1^*$  et  $p_0^*$  de l'équation (3.4.3), on voit que :

$$\int_{\omega} \frac{(h)^3}{12\mu} \nabla_x p_0^* \nabla_x \varphi \, dx = \int_{\omega} \frac{h}{2} s \nabla_x \varphi \, dx - \int_{\Gamma_l} g \cdot n \varphi \, d\sigma. \quad (3.4.10)$$

$$\int_{\omega} \frac{(h)^3}{12\mu} \nabla_x p_1^* \nabla_x \varphi \, dx = \int_{\omega} \frac{h}{2} s \nabla_x \varphi \, dx - \int_{\Gamma_l} g \cdot n \varphi \, d\sigma. \quad (3.4.11)$$

En retranchant (3.4.11) du (3.4.10), on obtient :

$$\int_{\omega} \frac{(h)^3}{12\mu} \nabla_x (p_1^* - p_0^*) \nabla_x \varphi \, dx dx_3 = 0. \quad (3.4.12)$$

Posons  $\varphi = p_1^* - p_0^*$  fonction test dans (3.4.12), on aura :

$$\int_{\omega} \frac{(h)^3}{12\mu} \nabla_x (p_1^* - p_0^*) \nabla_x (p_1^* - p_0^*) \, dx = 0;$$

$$\frac{h^{*3}}{12\mu} \|\nabla_x (p_1^* - p_0^*)\|_{L^2(\omega)} \leq \int_{\omega} \frac{(h)^3}{12\mu} \nabla_x (p_1^* - p_0^*) \nabla_x (p_1^* - p_0^*) \, dx = 0.$$

L'inégalité de Poincare, nous donne :

$$\|(p_1^* - p_0^*)\|_{L^2(\omega)} \leq C \frac{h^{*3}}{12\mu} \|\nabla_x (p_1^* - p_0^*)\|_{L^2(\omega)} \leq 0,$$

et donc :

$$\|(p_1^* - p_0^*)\|_{L^2(\omega)} = 0.$$

Ce qui donne l'unicité de  $p^*$ . ■

# Bibliographie

- [1] G. ALLAIRE, *Analyse numérique et optimisation*, Paris,(2005).
- [2] G. BAYADA, L. CHUPIN AND S. MARTIN, *Viscoelastic fluids in a thin domain*, Quart. Appl. Math.Vol. 65 , pp. 625–651, (2007).
- [3] G. BAYADA, L. CHUPIN AND B.GREC, *Fluides viscoélastiques en film mince*, Institut carmille, Jordan, lyon, (2007).(math.univ-lyon1.fr/~grec/pres\_smai\_grec.pdf).
- [4] G. BAYADA, M. BOUKROUCHE. *On a free boundary for the Reynolds equation derived from the stokes system with Tresca boundary condition*, Journal of mathematical Analysis and Applications, vol. 282, pp. 212-213, (2003).
- [5] N. BENHABOUCHE, *Quelques problèmes mathématiques délatifs à la modélisation des conditions aux limites fluide-solide pour des écoulements de faible épaisseur*, Thèse, Université Claude Bernard, Lyon, (2003).
- [6] N. BENHABOUCHE, M. CHAMBAT, *New models in micropolar fluid and their application to lubrication*, Insa de Lyon, Vol. 15, No. 3, (2005).
- [7] M. BOUKROUCHE, F. BOUGHANIM, H. SMAOUI, *Asymptotic behavior of a non-Newtonian flow with stick- slip condition*, Electronic Journal of Differential Equations, Conference 11, pp. 71–80, (2004).
- [8] M. BOUKROUCHE, R. ELMI, *Asymptotic of a non-Newtonian Fluide in a then domain with Trisca law*, Nonlinear Analysis. Theory Methods and Applixations, vol.59, Issues 1-2, pp 85-105, (2004).

- [9] M. BOUKROUCHE, R. ELMIR, *On a non-isothermal, non Newtonian lubrication problem with Tresca law : Existence and behavior of weak solution*. Nonlinear Analysis : RealWorld Applications, (2007).
- [10] M. BOUKROUCHE, G. LUKASZEWICZ, *Asymptotic analysis of solutions of a thin film lubrication problem with Coulomb fluid–solid interface law*, International Journal of Engineering Science, Vol. 41, 521–537, (2003).
- [11] H. BREZIS, *Equation et inéquation non linéaire dans les espaces vectoriels en dualité*, Annales de l’institut Fourier, tome 18, pp.115-175, n° 1(1968).
- [12] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, paris, (1987).
- [13] L. CHUPIN, *Modélisation et Analyse mathématique en films minces*, Institut Camille Jordan - INSA de Lyon, (2009). ( [math.univ-lyon1.fr/~chupin/FICHIERS.../chupin-hdr-soutenance.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~chupin/FICHIERS.../chupin-hdr-soutenance.pdf) ).
- [14] M. DILMI, *Problèmes aux limites obliques et non linéaires pour les équations de Lamé*, Thèse de Doctorat en sciences, Janvier (2009).
- [15] R. EL MIR, *Etude mathématique et analyse asymptotique de quelques problèmes de lubrification par des fluides non-newtoniens avec des conditions de non adhérence aux bords*, Thèse, Université Jean Monnet - Saint-Etienne, (2005).
- [16] B. GREC, *Fluides complexes en films minces*, Thèse de Doctorat, l’Ecole Centrale de Lyon, le 04 d’ecembre 2008.
- [17] V. GIRAULT, P. A. RAVIART, *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*. Springer (1979).
- [18] R. KH. ZEYTOUNIAN. (ed.) *Les Modeles Asymptotiques de la Mecanique des Fluides 1*. LNP0245, Springer, (1986).
- [19] M.R LAYDI, M. LENCZNER, *Equation de Navier- Stokes dans un domaine mince avec viscosité évanescence*, C. R. Acad. sci. Paris, t. 326, séri I, p. 127-130, (1998).
- [20] S. MARTIEN, *Contribution à la modélisation de phénomènes frontière libre en mécanique des films minces*, Thèse de Doctorat, Lyon, le 21 novembre (2005).

- [21] Y. OUAFIK, *Contribution à l'étude mathématique et numérique des structures piézoélastiques en contact*, Thèse de Doctorat, Perpignan, (2007).
- [22] F. SAIDI, *Sur quelques problèmes de lubrification par des fluides newtoniens non isothermes et incompressibles avec des conditions aux bords non linéaires. Etude mathématique et numérique*, Thèse, Université Jean Monnet - Saint-Etienne, (2004).
- [23] F. SAIDI, M. BOUKROUCHE, *Non-isothermal lubrication problem with Trisca Fluide-solide interface law*, Nonlinear Analysis : RealWorld Applications, Vol. 7, pp. 1145 – 1166, (2006).