

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Notions fondamentales de géométrie différentielle et de géométrie sous-riemannienne</b>	<b>8</b>
1.1 Quelques outils indispensables de géométrie différentielle . . . . .	8
1.1.1 Champs de vecteurs . . . . .	8
1.1.2 Crochet de Lie . . . . .	10
1.2 Notions de base sur la géométrie sous-riemannienne . . . . .	12
1.2.1 Distributions . . . . .	13
1.2.2 Métrique sous-riemannienne . . . . .	14
1.2.3 Structure sous-riemannienne . . . . .	15
1.2.4 Courbes horizontales . . . . .	16
1.2.5 Courbes minimisantes et formalisme hamiltonien . . . . .	17
1.3 Trajectoires singulières en théorie de contrôle et en géométrie sous-riemannienne	18
1.3.1 Préliminaires . . . . .	18
1.3.2 Le point de vue du contrôle optimal . . . . .	20
1.3.3 Formulation géométrique pour les courbes singulières . . . . .	21
1.3.4 Importance en théorie de contrôle optimal et en géométrie sous-riemannienne . . . . .	22
<b>2 Quelques résultats sur la stabilisation des distributions</b>	<b>23</b>

2.1	Résultats préliminaires . . . . .	23
2.1.1	Concepts de stabilité . . . . .	23
2.1.2	Stabilisation des systèmes commandés GAC . . . . .	26
2.1.3	Quelques exemples classiques de systèmes commandés (GAC) . . .	27
2.1.4	Stabilisation des systèmes contrôlés non-holonomes . . . . .	29
2.1.5	Stabilisation des distributions non-holonomes . . . . .	30
2.1.6	Obstructions à l'existence de feedbacks stabilisants continus . . .	31
2.2	Quelques feedbacks stabilisants . . . . .	33
2.2.1	Feedbacks stabilisants au sens de Carathéodory . . . . .	33
2.2.2	Feedbacks stabilisants répulsifs lisses (SRL) . . . . .	35
2.3	Résultats de stabilisation en dimension deux et en dimension trois . . . .	36
2.3.1	Le problème de la stabilisation sur $\mathbb{R}^2$ . . . . .	36
2.3.2	Le problème de la stabilisation sur $\mathbb{R}^3$ . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Stabilisation répulsive lisse de certaines distributions</b>	<b>42</b>
3.1	Résultats préliminaires . . . . .	42
3.1.1	Introduction . . . . .	42
3.1.2	Stabilisation dans le cas riemannien . . . . .	43
3.2	Stabilisation répulsive lisse . . . . .	45
3.2.1	Stabilisation SRL des champs de vecteurs . . . . .	45
3.2.2	Résultats d'existence de SRL des sections . . . . .	46
3.3	SRL d'une distribution $H_2$ forte sur $\mathbb{R}^n$ . . . . .	47
3.4	Cas d'une structure de contact . . . . .	50
	<b>Conclusion</b>	<b>53</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>54</b>

# Introduction

Les problèmes de stabilisation occupent une place importante en théorie de contrôle et par la suite en géométrie sous-riemannienne. Un système de contrôle est un système dynamique sur lequel on peut agir au moyen d'une commande ou contrôle.

La théorie du contrôle analyse les propriétés de ce système dans le but de l'amener d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères.

Un contrôle (ou une commande) en boucle ouverte est une application  $t \rightarrow u(t)$  d'un intervalle de temps à valeurs dans l'espace des contrôles. Un contrôle en boucle fermée, appelé aussi une rétroaction, ou un bouclage, ou encore un feed back, est une application  $u \rightarrow R(t)$  définie sur les variables d'état du système.

Un des objectifs de la théorie du contrôle est de déterminer des **rétroactions** qui stabilisent le système en un état particulier.

Une distribution de  $p$ -plans de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur une variété  $M$  est la donnée, pour tout point  $x$  de  $M$ , d'un sous-espace vectoriel  $D_x$  de  $T_x M$ , qui dépend de manière  $\mathcal{C}^\infty$  de  $x$ .

Une structure sous-riemannienne sur une variété  $M$  est un couple  $(D, g)$  où  $D$  est une distribution sur  $M$  et  $g$  est une métrique riemannienne sur  $D$ .

Une variété sous-riemannienne  $(M, D, g)$  est une variété  $M$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , muni d'une structure sous-riemannienne  $(D, g)$ . Les variétés sous-riemanniennes ont été étudiées ou utilisées dans des domaines variés des mathématiques, en particulier en géométrie riemannienne, dans la théorie des opérateurs différentiels du second ordre, dans l'étude des équations différentielles stochastiques et de la diffusion, en mécanique des contraintes

non-holonomes. Mais leur étude est aussi intéressante en elle-même.

Soit  $D$  une distribution  $\mathcal{C}^\infty$  de rang  $m$  sur  $M$ , ce qui correspond à la donnée d'un sous-fibré du fibré tangent  $TM$  de rang  $m$  de  $M$ , ce qui implique que pour tout  $x$  de  $M$ , il existe un voisinage  $V_x$  de  $x$  dans  $M$ , et un  $m$ -uplet  $(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})$  de champs de vecteurs sur  $V_x$  linéairement indépendants tels que

$$D(y) = \text{Vect}\{f_{x_1}(y), \dots, f_{x_m}(y)\}$$

On peut dire que le  $m$ -uplet  $(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})$  de champs de vecteurs représente localement la distribution.

La distribution est appelée non-holonome si pour tout  $x$  de  $M$ , il existe un  $m$ -uplets  $(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})$  de champs de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $V_x$  qui représentent localement la distribution et tels que

$$\text{Lie}\{f_{x_1}, \dots, f_{x_m}\}(y) = T_y M$$

c'est à dire, telle que l'algèbre de Lie engendré par  $f_{x_1}, \dots, f_{x_m}$ , est égale à l'espace tangent  $T_y M$  tout entier en chaque point  $y$  de  $V_x$ . Cette propriété d'algèbre de Lie est aussi appelée condition d'Hörmander.

Un chemin horizontal joignant  $x_0$  à  $x_1$  est une courbe absolument continue

$$\gamma(\cdot) : [0, 1] \rightarrow M$$

telle  $\gamma(0) = x_0$ ,  $\gamma(1) = x_1$ , et telle que

$$\dot{\gamma}(t) \in D_{\gamma(t)}, \quad \text{pour presque tout } t \in [0, 1].$$

Dans ce contexte, et puisque la distribution est non-holonome sur  $M$ , il est bien connu (**voir [28-29-30-31]**) que deux points quelconques de  $M$  peuvent être joints par un chemin horizontal.

Donnons nous maintenant une variété  $M$ , connexe de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , de dimension  $n$ , et un système commandé de la forme :

$$\dot{x} = f(x; u) = \sum_{i=1}^{i=m} u_i f_i(x) \quad (1)$$

où  $f_1, \dots, f_m$  sont des champs de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $M$ , et où la commande (ou contrôle)  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  appartient à  $\overline{B}_m$ , la boule unité fermée de  $\mathbb{R}^m$ . Rappelons que pour chaque point  $x \in M$  et pour chaque contrôle  $u(\cdot) \in L^\infty([0, \infty[ \rightarrow \overline{B}_m$ , le système commandé (1) donne lieu à une unique trajectoire maximale  $x(\cdot) : [0, T[ \rightarrow M$  (avec  $T \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , notée  $(x(\cdot); x; u(\cdot))$ , solution du problème de cauchy

$$\dot{x}(t) = (f(x(t), u(t)), \quad \text{p.p. } t \in [0, T[, \quad x(0) = x.$$

Fixons un point privilégié  $O \in M$ .

Le système commandé (1) est dit globalement asymptotiquement commandable au point  $O \in M$  si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

1– **Attractivité** : Pour chaque  $x \in M$  ; il existe un contrôle  $u(\cdot) : [0, +\infty) \rightarrow \overline{B}_m$  tel que la trajectoire  $x(\cdot, x, u(\cdot))$  de (1) tend vers  $O$  quand  $t$  tend vers l'infini.

2– **Stabilité au sens de Lyapunov** : Pour chaque voisinage  $\mathcal{V}$  de  $O$ , il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $O$  tel que si  $x \in \mathcal{U}$  alors le contrôle  $u(\cdot)$  si dessus peut être choisi de manière à avoir  $x(t, x, u(\cdot)) \in \mathcal{V}$ ,  $\forall t \geq 0$ .

On sait que les fonctions de Lyapunov sont un outil puissant pour étudier la stabilité d'un équilibre. L'utilisation de ces fonctions pour les systèmes commandés conduit au résultat suivant :

Si le système commandé (1) admet une fonction de Lyapunov "lisse" au point  $O$ , alors il possède un feedback  $k : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $k(O) = 0$ ) lisse qui stabilise le système (1) au point  $O$ .

Il existe deux **obstructions** majeurs à l'existence de feedbacks stabilisants continus. La première est de **nature globale** : d'après ce qui précède, si le système (1) possède

un feedback stabilisant continu, alors il admet une fonction de Lyapunov de commande "lisse". Des considérations topologiques conduisent au fait que, pour que le système commandé puisse admettre un feedback stabilisant continu, il faut au moins que  $M$  soit homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ .

La deuxième est de **nature locale** : dans le cas  $M = \mathbb{R}^n$ , des considérations topologiques aussi permettent de prouver que si  $X$  est un champ de vecteurs continu défini sur un voisinage de l'origine tel que le système  $\dot{x} = X(x)$  est localement globalement asymptotiquement stable à l'origine, alors pour tout  $\epsilon > 0$  suffisamment petit, il existe  $\delta > 0$  tel que  $\delta B \subset X(\epsilon B)$  (ici,  $B$  désigne la boule unité ouverte de  $\mathbb{R}^n$ ).

Dans le cas du problème de stabilisation, cette propriété nous permet d'en déduire le résultat suivant : si il existe un feedback  $k : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $k(O) = 0$ ) tel que le système bouclé :

$$\dot{x}(t) = (f(x(t), k(x))) = \sum_{i=1}^{i=m} k_i(x) f_i(x) \quad (2)$$

est globalement asymptotiquement stable en  $O$ , alors le résultat précédent s'applique au système (2) et donc pour tout  $\epsilon > 0$  suffisamment petit,

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } \delta B \subset f(\epsilon B, \bar{\bar{B}}_m)$$

Ceci nous donne donc une condition nécessaire, dite **condition de Brockett**, pour qu'un système commandé puisse éventuellement admettre un feedback stabilisant continu.

Les deux obstructions ci dessus réduisent à néant l'espoir de construire pour chaque système commandé GAC, un feedback stabilisant continu (même localement). Ceci a conduit les chercheurs à considérer d'autres types de feedbacks stabilisants et aussi d'autres type de fonctions de Lyapunov de commandes. En particulier on s'intéresse dans ce mémoire aux **feedbacks stabilisants répulsifs lisses** (dénotté en abrégé SRL).

Les résultats présentés ci dessus sont aussi applicables pour les distributions non-holonomes en géométrie sous-riemannienne, où dans ce cadre, les systèmes commandés deviennent des distributions et les feedbacks des sections.

Notre mémoire est composé de trois chapitres, s'inscrit dans ce domaine.

Le premier chapitre est consacré à des rappels fondamentaux de la géométrie différentielle, en particulier, on parle des notions suivantes : champs de vecteurs, crochet de Lie, ainsi que les fondements de la géométrie sous-riemannienne, en particulier, on y trouve, les distributions, la métrique sous-riemannienne, les courbes horizontales. Un paragraphe est consacré au rôle des trajectoires singulières minimisantes des distributions non-holonomes.

Le second chapitre de ce mémoire est une synthèse sur quelques résultats récents (pour plus de détail, on peut consulter par exemple [25, 31]) qui concernent le problème de la stabilisation en théorie du contrôle et en géométrie sous-riemannienne. On commence le chapitre par aborder les différents principes de stabilité des systèmes d'équations différentielles puis on passe au problème de stabilisation des systèmes non-holonomes ainsi que la stabilisation des distributions non-holonomes et l'étroite relation entre eux. Nous donnons aussi des théorèmes de stabilisation des distributions sur des variétés de dimension deux et trois. On y trouve aussi au menu quelques exemples relatifs.

Le troisième chapitre qui représente notre principale contribution est consacré à quelques applications de la notion de la stabilisation répulsive lisse (*SRL*). Dans ce contexte, nous avons montré qu'il existe toujours des sections stabilisantes répulsives lisses (*SRL*) pour les distributions suivantes : pour une distribution  $H_2$  — forte et aussi pour une distribution définie par une structure de contact. Ces distributions jouent le rôle de modèles en géométrie sous-riemannienne et interviennent aussi dans certaines applications.

# Chapitre 1

## Notions fondamentales de géométrie différentielle et de géométrie sous-riemannienne

### 1.1 Quelques outils indispensables de géométrie différentielle

#### 1.1.1 Champs de vecteurs

Soit  $M$  une variété de dimension  $n$  et de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Il est bien connu qu'en chaque point  $m$  de  $M$  on peut définir l'espace tangent à  $M$  en  $m$  noté  $T_m M$  et nous avons donc la possibilité de considérer une application qui associe à chaque point  $m$  de  $M$  un vecteur dans  $T_m M$  ; c'est la notion de champ de vecteurs. Formalisons ce concept

Nous posons tout d'abord

$$TM = \cup T_m M ; m \in M.$$

Alors  $TM$  est une variété différentiable ; dont il est facile de voir qu'elle est orientable



appelé **fibré tangent** à  $M$ ;

un élément de  $TM$  est un couple  $(m, X(m))$  avec  $m \in M$  et  $X(m) \in T_m M$ .

Cherchons maintenant des coordonnées sur  $TM$ . Soit le couple  $(u, \varphi)$  une carte locale sur  $M$  de coordonnées  $(x^i)$ .

Les coordonnées du couple  $(m, X(m))$  sont les réels :

$(x^1(m), x^2(m), \dots, x^n(m), X^1(m, X), X^2(m, X), \dots, X^n(m, X))$  tels que  $m \in M$  et  $X(m) \in T_m M$  où  $X(m)$  se décompose de la façon suivante :

$$X(m) = X^i(m, p) \frac{d}{dx^i}(m)$$

et  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  est la base de  $T_m M$ . Nous avons donc  $2n$  coordonnées pour caractériser un élément de  $TM$ ; cette variété est donc de dimension  $2n$ . De plus, il est facile de voir, grâce à ces coordonnées, que  $TM$  est bien une variété différentiable. Il est de même assez facile de montrer que c'est une variété orientable.

Il existe une application surjective particulière  $\pi : TM \rightarrow M$  définie par :

$\pi(m, X) = m$ , c'est la projection de  $TM$  sur  $M$ .

**Définition 1** *Une section de  $TM$  est une application  $X : M \rightarrow TM$  telle que :  $\pi \circ X$  soit l'identité sur  $M$ . C'est à dire que pour tout  $m \in M$ , on associe un élément  $X(m)$  de  $T_m M$ . Une telle section  $X$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , sera appelée un **champ de vecteurs** sur  $M$ .*

Un champ de vecteur est donc une application  $\mathcal{C}^\infty$  qui à tout point  $m$  de la variété  $M$  associe un vecteur au dessus de ce point (dans l'espace tangent à ce point sur la variété  $M$ ), de façon  $\mathcal{C}^\infty$ . Cette dernière hypothèse équivaut à ce que si :

$$X(m) = X^i(m, p) \frac{d}{dx^i}(m).$$

Les fonctions  $X^i : M \rightarrow \mathbb{R}$  soient  $\mathcal{C}^\infty$  sur l'ouvert de la carte locale.

**Définition 2** On appelle **dérivation**  $D$  sur l'algèbre  $\mathcal{F}^\infty(M)$

$$\mathcal{F}^\infty(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } f \text{ est de class } \mathcal{C}^\infty\},$$

toute application linéaire de  $\mathcal{F}^\infty(M)$  dans  $\mathcal{F}^\infty(M)$  qui vérifie la relation de Leibnitz :  
 $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ .

Il est bien connu que tout champ de vecteur  $X$  sur  $M$  définit une dérivation sur  $\mathcal{F}^\infty(M)$  par la relation suivante :  $(X.f)(m) = X(m).f$  où  $X(m)$  est la dérivation dans l'espace tangent  $T_m M$ .

**Exemple 1** Soient :  $X = y \frac{d}{dx} + \frac{d}{dy}$  et  $Y = \frac{d}{dy}$  deux champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$

alors on a :

$$1- (X.f) = y \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \quad ;$$

$$2- (Y.f) = \frac{df}{dy}$$

$$3- Y.(X.f) = \frac{df}{dx} + y \frac{d^2 f}{dy dx} + \frac{d^2 f}{dy dx} + \frac{d^2 f}{dy^2}$$

$$4- X.(Y.f) = y \frac{d^2 f}{dx dy} + \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dy dx}.$$

### 1.1.2 Crochet de Lie

**Définition 3** Soit  $X ; Y \in \Gamma^\infty(M)$  où  $\Gamma^\infty(M)$  l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur la variété  $M$  ; alors il existe un champ de vecteur unique  $Z$  tel que :

pour toute fonction  $f \in \mathcal{F}^\infty(M)$  on ait :

$$X.(Y.f) - Y.(X.f) = Z.f$$

$Z$  est appelé le crochet de Lie de  $X ; Y$  et on le note :  $[X, Y]$ .

Si dans une carte  $(U, \varphi)$  on a :

$$X = \sum_{i=1}^{i=k} X^i \frac{d}{dx^i} \quad \text{et} \quad Y = \sum_{i=1}^{i=k} Y^i \frac{d}{dx^i}$$

alors :

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{i=k} \left( \sum_{j=1}^{j=k} X^j \frac{dY^i}{dx^j} - Y^j \frac{dX^i}{dx^j} \right) \frac{d}{dx^i}$$

On a les propriétés suivantes :

**Proposition 1** Soient  $X, Y, Z \in \Gamma^\infty(M)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ; et  $f, g \in \mathcal{F}^\infty(M)$ , alors on a :

$$1 - [X, Y] = -[Y, X]$$

$$2 - [\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda [X, Z] + \mu [Y, Z]$$

$$3 - [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (\text{l'identité de jacobi})$$

$$4 - [fX, gY] = fg[X, Y] + f(X.g)Y - g(Yf).X.$$

**Définition 4** Une algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  est un espace vectoriel muni d'un crochet de Lie  $[X, Y]$  tel que les deux propriétés suivantes soient satisfaites :

$$1 - [X, Y] = -[Y, X]$$

$$2 - [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (\text{l'identité de jacobi}).$$

Des exemples courants d'algèbre de Lie sont les algèbres matricielles munies du crochet  $[A, B] = AB - BA$  (commutateur des matrices).

La notion d'algèbre de Lie a un grand intérêt, et son importance en géométrie est renforcée par le fait qu'on peut associer à tout groupe de Lie une algèbre de Lie de façon canonique.

**Définition 5** Un groupe de Lie  $G$  est une variété différentiable munie d'une structure de groupe (ou un groupe muni d'une structure différentiable) telle que :

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G & G &\rightarrow G \\ (h, g) &\rightarrow gh & g &\rightarrow g^{-1} \end{aligned}$$

*Soient des applications différentiables.*

Pour introduire l'algèbre de Lie associé au groupe de Lie  $G$ , on considère l'application particulière sur le groupe  $G$  par :

$$\begin{aligned} L_g : G &\rightarrow G \\ h &\rightarrow gh, \end{aligned}$$

qui est la translation à gauche sur le groupe  $G$ .

Si  $X$  est un champ de vecteur de  $G$ , nous dirons que  $X$  est invariant à gauche si :

$$\forall g \in G, \forall a \in G, T_a L_g X(a) = X(ga).$$

Nous rappelons que  $T_a L_g : T_a G \rightarrow T_{ga} G$  est l'application linéaire tangente. Il est possible de vérifier que si  $X, Y$  sont des invariants à gauche sur  $G$  alors  $[X, Y]$  est aussi invariant à gauche sur  $G$ .

## 1.2 Notions de base sur la géométrie sous-riemannienne

La géométrie sous-riemannienne a émergé dans les trente dernières années comme un domaine de recherche à part entière avec des motivations dans plusieurs branches de mathématiques pures et appliquées ; en plus de la théorie du contrôle citons, la géométrie riemannienne (dont la géométrie sous-riemannienne est une généralisation) ; la mécanique non-holonome ; la théorie des diffusions sur les variétés, ainsi que l'analyse des opérateurs hypo-élliptiques.

Soit  $M$  une variété différentielle connexe de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et de dimension  $n$ . Rappelons les notions suivantes :

### 1.2.1 Distributions

**Définition 6** Une distribution horizontale  $D$  (ou simplement distribution ) sur  $M$  de rang  $m \leq n$  est une famille de sous espaces vectoriels  $D_x \subset T_x M$  de dimension  $m$  (i.e :  $\dim D_x = m$  ; pour tout  $x \in M$  ).

Citons les exemples classiques suivants :

- 1– Le fibré tangent  $TM$  est l'unique distribution de rang  $n$ .
- 2– Un champ de vecteur  $X$  sur  $M$  définit une distribution de rang  $p = 1$  s'il ne s'anule jamais sur  $M$ .
- 3– plus généralement une famille  $F$  de champs de vecteurs peut engendrer une distribution si les sous espaces  $F_x = \text{Vect}\{X(x), X \in F\}$  sont de dimension constante sur  $M$ .
- 4– La distribution définie par une structure de contact : Soit  $M$  une variété différentielle de classe  $C^\infty$  de dimension  $(2n + 1)$  .

Une structure de contact sur  $M$  est la donnée d'une 1-forme  $\omega$  telle que la condition de non intégrabilité de Frobenius :  $\omega \wedge (d\omega)^n \neq 0$  soit vérifiée . On définit une distribution  $D$  comme suit :

$$D = \ker \omega$$

Il est connu que si  $2n+1 = 3$  (c.à.d :  $n = 1$ ), la condition de non intégrabilité de Frobenius s'écrit :  $d\omega|_D \neq 0$ .

**Définition 7** Une distribution  $D \subset TM$  est dite intégrale si pour tout  $x \in M$ , il existe une sous-variété  $N_x \subset M$  telle que  $T_x N_x = D_x$ .

On appelle  $N_x$  la variété intégrale de  $D$  en  $x$ .

**Définition 8** Une distribution  $D \subset TM$  est dite involutive si pour tout champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  on ait :

$$[X, Y](x) \in D_x; \forall x \in M$$

### 1.2.2 Métrique sous-riemannienne

**Définition 9** *La métrique sous-riemannienne est une fonction régulière :*

$$g_{SR} : TM \rightarrow \mathbb{R}$$

*satisfaisant la propriété suivante : en tout point  $x \in M$ , une fois restreinte au sous espace vectoriel  $D_x$  de  $T_x M$ ,  $g_{SR}$  est une forme quadratique définie positive et elle est infinie ailleurs.*

Cette métrique sous-riemannienne peut être obtenue de deux façons différentes selon que l'on se place respectivement dans cadre de la géométrie sous-riemannienne où dans le cadre de la théorie du contrôle.

1– Soit le couple  $(D, g)$  formé d'une distribution  $D$  et d'une métrique riemannienne  $g$  définie seulement sur  $D$ , en posant pour tout  $x \in M$  et  $v \in T_x M$  :

$$\begin{cases} g_{SR} = g(x, v) & \text{si } v \in D \\ & \text{et} \\ g_{SR} = +\infty & \text{si } v \notin D. \end{cases}$$

2– Soit à partir d'une famille de champs de vecteurs  $f_1, f_2, \dots, f_m$  en posant pour tout  $x \in M$  et  $v \in T_x M$  :

$$g_{SR}(x, v) = \inf \left\{ u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_m^2 : v = \sum_{i=1}^m u_i f_i \right\}$$

avec la convention que l'infimum de l'ensemble vide égale à  $+\infty$ .

Par polarisation  $g_{SR}$  peut être définie comme suit :

Si  $u \in D_x, v \in D_x$  tels que :

$$u = \sum_{i=1}^n u_i X_i(x) ; v = \sum_{i=1}^n v_i X_i(x),$$

alors :

$$g_{SR} : D_x \times D_x \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \rightarrow g_{SR}(u, v) = \frac{1}{2} [g(u + v, u + v) - g(u, v) - g(v, u)].$$

Munie d'une telle métrique  $g_{SR}$ , on peut définir la longueur d'un chemin absolument continu  $\gamma(t)$ ,  $t \in [a, b]$  :

$$\text{long}(\gamma(t)) = \int_a^b \sqrt{g_{SR}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt.$$

On définit la distance sous-riemannienne comme suit :

Pour deux point quelconques  $x_1, x_2$  de  $M$  :

$$d(x_1, x_2) = \inf ( \text{long}(\gamma) )$$

l'infimum étant pris sur tous les chemins  $\gamma$  absolument continus joignant  $x_1$  à  $x_2$ .

L'espace métrique ainsi construit est appelé structure sous-riemannienne. Cette distance sous-riemannienne est aussi appelé la distance de Carnot-Carathéodory.

### 1.2.3 Structure sous-riemannienne

**Définition 10** Une structure sous-riemannienne sur  $M$  est une paire  $(D, g_{SR})$  où  $D$  est une distribution sur  $M$  et  $g_{SR}$  est une métrique sous-riemannienne sur  $D$ .

**Exemple 2 (Modèle de Heisenberg)**  $M = \mathbb{R}^{2n+1}$  possède une structure de groupe naturelle  $H_n$  : si  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$  désigne les coordonnées canoniques de  $\mathbb{R}^{2n+1}$  alors :

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z). (x'_1, \dots, x'_n, y'_1, \dots, y'_n, z') = (x_1 + x'_1, \dots, y_1 + y'_1, \dots; z + z')$$

la distribution  $D$  sera la distribution invariante à gauche sur  $M = \mathbb{R}^{2n+1}$  noyau de  $dz$  en 0 et la métrique  $g_{SR}$  sera la métrique invariante à gauche sur  $D$  dont la valeur en 0 est :

$$g = \sum_{i=1}^{i=m} (dx_i^2 + dy_i^2).$$

**Exemple 3 (Modèle de Martinet)** Un exemple d'une structure sous-riemannienne est donné par le modèle de Martinet  $(M, D, g_{SR})$  où la variété  $M = \mathbb{R}^3$  et la distribution  $D$  est :

$$D = \ker(dz - \frac{y^2}{2}dx)$$

et  $\omega = dz - \frac{y^2}{2}dx$  est une 1-forme différentielle et où la métrique  $g_{SR}$  est la métrique général graduée d'ordre 0 définie par :

$$g_{SR} = (1 + \alpha y)^2 dx^2 + (1 + \beta x + \gamma y)^2 dy^2$$

tel que :  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des reels.

**Remarque 1** Si on considère la variété  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  équipée de la métrique riemannienne  $g = dx^2 + \frac{1}{x^2}dy^2$  et les deux champs de vecteurs

$$X_1 = dx ; X_2 = xdy.$$

Ces deux champs de vecteurs sont définis en tout points de  $\mathbb{R}^2$  et il ne génèrent pas la distribution en  $(0, 0)$ . Donc ils ne définient pas une structure sous-riemannienne.

## 1.2.4 Courbes horizontales

**Définition 11** Une courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  est dite horizontale pour une distribution  $D$  si sa dérivée appartient à  $D_\gamma$ , c'est à dire :

$$\dot{\gamma}(t) \in D_{\gamma(t)}, \forall t \in [a, b].$$

Ainsi dans la première formulation de la métrique  $g_{SR}$  (dans le cas sous-riemannien) se sont les chemins tangent à la distribution  $D$  et dans la deuxième formulation (dans la



théorie de contrôle) se sont les trajectoires du système contrôlé non-holonyme qui peuvent avoir une longueur finie .

**Définition 12** Soit  $(M, D, g)$  une variété sous-riemannienne.

- La longueur d'une courbe horizontale  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  est le nombre réel  $l(\gamma)$  définie par :

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt$$

- L'énergie d'une courbe horizontale  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  est le nombre réel  $E(\gamma)$  définie par :

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

- La distance sous-riemannienne est définie par :

$$d(x_1; x_2) = \inf \{l(\gamma); \gamma(a) = x_1, \gamma(b) = x_2 \ ; \dot{\gamma} \in D\}$$

**Remarque 2** En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient :

$$l^2(\gamma) \leq 2(b - a)E(\gamma).$$

Donc si  $\gamma$  est d'énergie  $E(\gamma)$  finie, sa longueur  $l(\gamma)$  sera finie. La réciproque est fautive en général.

### 1.2.5 Courbes minimisantes et formalisme hamiltonien

Soit  $D = \text{Vect}\{X_1, \dots, X_m\}$  une distribution de rang  $m$ ,  $m < n$ , sur une variété  $M$  de dimension  $n$ . On peut alors définir :

**Définition 13** Le **hamiltonien** associé à  $X_1, \dots, X_m$  comme le symbole principal de l'opérateur sous-elliptique  $\Delta_X = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m X_j^2$  :

$$H(x, \xi) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \langle X_i(x), \xi \rangle^2$$

où  $\langle, \rangle$  dénote le produit scalaire usuel sur  $T_x M \simeq \mathbb{R}^n$ .

**Définition 14** Une géodésique **normale** reliant  $x_0$  à  $x_1$  est une solution  $x(s)$  du système hamiltonien

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dH}{d\xi} \\ \dot{\xi} &= -\frac{dH}{dx}. \end{aligned}$$

avec les conditions  $x(a) = x_0$  et  $x(b) = x_1$ .

**Définition 15** Une courbe minimisante qui ne satisfait pas le système hamiltonien est appelé un **minimiseur anormal**.

## 1.3 Trajectoires singulières en théorie de contrôle et en géométrie sous-riemannienne

### 1.3.1 Préliminaires

Considérons le système affine contrôlé sur  $M$

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x)$$

où l'état  $x \in M$ ,  $m$  est un entier positif,  $(f_1, f_2, \dots, f_m)$  est un  $m$ -uplets de champs de vecteurs sur  $M$  et le contrôle  $u = (u_1; u_2, \dots, u_m)$  prend ces valeurs dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^m$ .

Pour tout  $x_0 \in M$  et  $T > 0$ ; un contrôle  $u \in L^\infty([0; T], U)$  est dit admissible si la trajectoire  $x(\cdot, u, x_0)$  du système associée à  $u$  et partant de  $x_0$  est bien définie sur  $[0; T]$ .

Sur l'ensemble des contrôles admissibles  $U_{x_0;T}$  définissons l'application **entrée-sortie** :

$$\begin{aligned} E_{x_0;T} &: U_{x_0;T} \rightarrow M \\ u &\rightarrow x(T, u, x_0) \end{aligned}$$

l'ensemble  $U_{x_0;T}$  est un ouvert dans  $L^\infty([0; T], U)$  et l'application  $E_{x_0;T}$  est une application régulière.

**Définition 16** *Un contrôle  $u \in U_{x_0;T}$  est dit singulier si  $u$  est un point critique de l'application entrée-sortie  $E_{x_0;T}$  e.i : que sa différentielle  $DE_{x_0;T}(u)$  n'est pas surjective .*

**Définition 17** *Une trajectoire  $x(\cdot; x_0; u)$  est dite singulière si le contrôle  $u$  est singulier et de corang un et si la codimension de l'image de  $DE_{x_0;T}(u)$  dans l'espace tangent est égale à un.*

## Courbes et chemins singuliers

Considérons une distribution  $D$  de rang  $m \leq n$  sur la variété  $M$ . Pour tout  $x_0 \in M$ , on note  $\Omega(x_0)$  l'ensemble des chemins horizontaux  $x(\cdot) : [0, 1] \rightarrow M$  tel que

$x(0) = x_0$ ; et  $End_{x_0} : \Omega(x_0) \rightarrow M$  l'application "extrémité" définie par :

$End_{x_0}(x(\cdot)) = x(1)$  muni de la topologie induite de  $M$ . L'ensemble  $\Omega(x_0)$  à une structure de variété de Banach et l'application  $End_{x_0}$  est régulière. Pour tout  $x_1, x_2$  de  $M$ , l'ensemble  $\Omega(x_0, x_1) = End_{x_0}^{-1}(x_1)$  des chemins horizontaux joignant  $x_0$  à  $x_1$  est une sous-variété de Banach (de  $\Omega(x_0)$ ) excepté éventuellement au voisinage d'un point critique de  $End_{x_0}$ .

**Définition 18** *On dit que  $x(\cdot)$  est un chemin singulier s'il est horizontal et si c'est un point critique de l'application  $End_{x_0}$ . La codimension de la singularité est appelée le corang du chemin singulier.*

Localement dans un ouvert  $\Omega$ , on peut choisir un champ de repères :  $(f_1; f_2; \dots; f_m)$  de la distribution  $D$ . Tout chemin horizontal contenu dans  $\Omega$  est alors trajectoire du système contrôlé :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{i=m} u_i f_i(x)$$

et il est clair que le chemin est singulier si et seulement si la trajectoire est singulière. Les deux notions coïncident donc localement ; il y a cependant une légère différence : quand  $(f_1; f_2; \dots; f_m)$  est le champ de repère de la distribution  $D$  le rang de la famille est identiquement égale à  $m$  et il y a correspondance entre les chemins  $D$ -horizontaux issus de  $x_0$  et les contrôles. L'ensemble des courbes singulières constitue un invariant géométrique de la distribution  $D$  qu'il suffit parfois à la caractériser à difféomorphisme près. Les trajectoires et les courbes singulières apparaissent comme des singularités respectivement de  $\Omega(x_0, x_1)$  et de l'espace des trajectoires joignant deux points données. Elles jouent un rôle important en théorie du contrôle optimal et en calcul des variations avec des contraintes non-holonomes, en particulier en géométrie sous-riemannienne.

### 1.3.2 Le point de vue du contrôle optimal

Soient  $x_0$  et  $x_1$  deux points de  $M$  et  $T > 0$ . Considérons le problème de contrôle optimal suivant : parmi toutes les trajectoires reliant  $x_0$  à  $x_1$ , déterminer la trajectoire minimisant le coût quadratique :

$$C_{Q,\alpha,g}(T; u) = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} u(t)^T Q(x(t)) u(t) + \alpha(x(t))^T u(t) + g(t, x(t)) \right) dt$$

où  $\alpha = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m) \in C^\infty(M, R)$  et  $g \in C^\infty(R \times M)$  et  $Q \in S_m^+(M)$  ou  $S_m^+(M)$  désigne l'ensemble des applications régulières  $q \rightarrow Q(q)$  sur  $M$  à valeurs dans l'ensemble  $S_m^+$  des matrices  $m \times m$  symétriques définies positives. D'après le principe de maximum de Pontryagin, pour toute trajectoire optimale  $x(\cdot) = x(\cdot, x_0, u)$  ; il existe un couple non nul  $(\lambda(\cdot); \lambda^0)$  ; où  $\lambda^0$  est un réel négatif ou nul et  $\lambda(\cdot)$  est une fonction absolument continue sur  $[0, T]$  (appelée vecteur adjoint) avec  $\lambda(t) \in T_{x(t)}^* M$  tel presque partout sur  $[0; T]$  :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t; x(t), \lambda(t), \lambda^0, u(t)) \\ \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t; x(t), \lambda(t), \lambda^0, u(t)) \\ \frac{\partial H}{\partial u}(t; x(t), \lambda(t), \lambda^0, u(t)) = 0 \end{cases}$$

où :

$$H(t, x, \lambda, \lambda^0, u) = \sum u_i \langle \lambda, f_i(x) \rangle + \lambda^0 \left( \frac{1}{2} u^T Q(x) u + \alpha(x)^T + g(t, x) \right)$$

est le hamiltonien du système précédent.

- Une extrémale est un quadruplet  $(x(\cdot), \lambda(t), \lambda^0, u(\cdot))$  solution du système d'équations précédent.

- L'extrémale est dite normale si  $\lambda^0 \neq 0$  et anormale si  $\lambda^0 = 0$

c'est ici que les trajectoires singulières font leur apparition en contrôle optimal : ce sont exactement les projections des extrémales anormales.

### 1.3.3 Formulation géométrique pour les courbes singulières

Pour les courbes singulières pour une distribution  $D$ , en plus de la caractérisation locale précédente on dispose d'une caractérisation géométrique suivante :

soit  $D$  une distribution de rang  $m$  sur  $M$  et  $\omega$  la forme symplectique canonique sur  $T^*M$ . On note  $D^\perp$  l'annulateur de  $D$  sur  $T^*M$  privé de sa section nul et  $\varpi$  la restriction de  $\omega$  à  $D^\perp$ .

Une courbe absolument continue  $\psi(\cdot) : [0, 1] \rightarrow D^\perp$  tel que  $\dot{\psi}(t) \in \ker \varpi(\psi(t))$  pour tout  $t \in [0, 1]$  est appelé une courbe caractéristique où une extrémale anormale de  $D$ .

Les courbes singulières de  $D$  sont exactement les projections sur  $M$  des extrémales anormales.

### 1.3.4 Importance en théorie de contrôle optimal et en géométrie sous-riemannienne

Pour un problème de contrôle optimal donné, les trajectoires singulières peuvent être des solutions minimisantes et jouent un rôle particulier puisqu'elles ne dépendent que du système de contrôle et non pas du problème spécifique de minimisation considéré.

L'existence de telles courbes et trajectoires était déjà connue dans la théorie du calcul des variations classiques et a posé un problème majeur du développement de cette discipline qui est devenue la théorie du contrôle optimal. On a pourtant longtemps douté qu'il existe des courbes singulières optimales ; Montgomery a finalement donné un exemple de courbes singulières en géométrie sous-riemannienne.

Ce résultat a activé une série de travaux ayant pour but d'élucider le rôle des trajectoires et des courbes singulières, notamment en géométrie sous-riemannienne ; leur optimalité a été principalement étudié en ce qui concerne les systèmes de contrôles affines mono-entrés ( $\dot{x} = X(x) + uY(x)$ ) c'est à dire quand  $m = 1$ .

Ces extrémals anormaux sont à la base de la démonstration des théorèmes de la stabilisation des distributions de rang supérieur à trois.

# Chapitre 2

## Quelques résultats sur la stabilisation des distributions

### 2.1 Résultats préliminaires

#### 2.1.1 Concepts de stabilité

Un contrôle (ou une commande) en **boucle ouverte** est une application  $t \rightarrow u(t)$  d'un intervalle de temps dans l'espace des contrôles. Un contrôle en **boucle fermée**, appelé aussi une **rétroaction**, ou un **bouclage**, ou encore un **feed back**, est une application  $u \rightarrow R(t)$  définie sur les variables d'état du système. Un des objectifs de la théorie du contrôle est de déterminer des rétroactions qui stabilisent le système en un état particulier. Autrement dit, le problème de la stabilisation (ou régulation) consiste à maintenir le système près d'un équilibre. Il s'agit donc de construire une loi de commande (ou retour d'état) telle l'équilibre soit globalement asymptotiquement stable du système en boucle fermée. Lorsque le système étudié est linéaire et sans contrainte sur la commande, la théorie des systèmes fournit des outils efficaces pour la construction de ces retours d'états ; cependant, dans le cas non linéaire et quand il y a une contrainte sur les contrôle, la théorie actuelle est beaucoup moins avancée.

Avant de commencer l'étude proprement dite des systèmes commandés ; il est intéressant de rappeler le cas des systèmes sans commandes ou autrement dit sur le cas classique des équations différentielles.

Étant donnée un système de la forme

$$\dot{x} = f(x(t)) \quad (**)$$

où  $f$  est une fonction continue de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  possédant un équilibre à l'origine (c'est à dire  $f(0) = 0$ ). Il s'agit d'étudier et même de caractériser l'existence éventuelle de propriétés asymptotiques.

**Définition 19** *L'équilibre  $x_0$  du système  $(**)$  est dit stable si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour toute solution  $x(t)$  de  $(**)$  on ait :*

$$\|x_0\| < \eta \Rightarrow \forall t \geq 0 : \|x(t)\| < \varepsilon.$$

Si l'équilibre n'est pas stable on dira qu'il est instable.

**Définition 20** *L'équilibre  $x_0$  du système  $(**)$  est dit attractif s'il existe  $r > 0$  telle que pour toute solution  $x(t)$  de  $(**)$  on ait :*

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

**Définition 21** *Le système  $(**)$  est globalement asymptotiquement stable à l'origine 0 (en abrégé GAS) s'il vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. *Pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , toutes les trajectoires  $x(.)$  solutions de  $(**)$  d'origine  $x_0$  sont définies sur  $[0, +\infty)$  et convergent vers l'équilibre quand  $t$  tend vers l'infini.*

2. *Pour tout  $\varepsilon > 0$  ; il existe  $\delta > 0$  telle que pour toute donnée initiale  $x_0$  vérifiant  $\|x_0\| \leq \delta$ , les trajectoires de  $(**)$  d'origine  $x_0$  sont définies sur  $[0, +\infty)$  et vérifiant  $\|x(t)\| \leq \varepsilon$  pour tout  $t \geq 0$ .*



Attention, il convient de bien distinguer la stabilité asymptotique globale de la notion d'attractivité seule qui suppose la convergence de  $x(t)$  vers l'équilibre 0 ; l'ajout de la deuxième condition traduit une propriété de stabilité uniforme locale.

Un outil fort intéressant permet d'assurer la stabilité asymptotique d'un système à l'équilibre c'est le concept de **fonction de Lyapunov**.

**Définition 22** La fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite de Lyapunov associée au système (1) si elle est  $\mathcal{C}^\infty$ , définie positive (c'est à dire  $V(0) = 0$  et  $V > 0$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ; propre ( i.e.  $V(x) \rightarrow \infty$  quand  $\|x\| \rightarrow \infty$  ) et si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall x \neq 0 \quad \langle \nabla V(x); f(x) \rangle < 0$$

en d'autre termes ; une fonction de Lyapunov est strictement décroissante le long des trajectoires du système auquel elle est associé (hors l'origine) ; elle se comporte comme l'énergie totale d'un système dissipatif qui déclinerait pour tendre asymptotiquement vers la valeur minimale à l'équilibre. En fait le long d'une trajectoire de(1) on a, lorsque  $x(t)$  se situe hors de l'origine :

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \langle \nabla V(x(t)); f(x(t)) \rangle < 0.$$

Il n'ya pas donc rien d'étonnant à ce qu'une fonction de Lyapunov garantisse la stabilité asymptotique globale d'un système. En résumé, regarder les propriétés de stabilité asymptotique à l'origine d'une équation différentielle revient à étudier l'existence éventuelle d'une fonction de Lyapunov.

**Théorème 1** Soit  $f$  une application continue de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Si le système

$$\dot{x} = f(x(t))$$

possède une fonction de Lyapunov alors il est globalement asymptotiquement stable.

### 2.1.2 Stabilisation des systèmes commandés GAC

Dans ce qui suit, nous allons faire appel au même type d'objet pour étudier la stabilisation des systèmes commandés. Donnons-nous une variété  $M$  connexe de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de dimension  $n$  et un système contrôlé (ou commandé) de la forme

$$\dot{x} = f(x; u) \quad (1)$$

où :  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $M$  et  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ , le contrôle (ou la commande) appartient à la boule unité fermée  $\overline{\overline{B_m}}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Rappelons que pour chaque point  $x$  de  $M$  et pour chaque contrôle  $u \in (L^\infty([0, +\infty), \overline{\overline{B_m}}))$ , le système commandé (1) donne lieu à une unique trajectoire maximale  $x(\cdot) : [0, T) \rightarrow M$ , ( $T \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ) noté :  $x(\cdot, x.u(\cdot))$ , solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), & t \in [0, T) \\ x(0) = x. \end{cases}$$

**Le problème de la stabilisation est énoncé comme suit :**

Fixons un point privilégié  $O \in M$ . Etant donné un système commandé du type (1) qui GAC au point  $O$ . Le problème de stabilisation consiste à étudier l'existence d'une fonction continue  $k(\cdot) : M \rightarrow \overline{\overline{B_m}}$  appelée feedback continu qui rend le système bouclé :

$$\dot{x} = f(x; k(x)) \quad (2)$$

globalement asymptotiquement stable au point  $O$  (abrégé GAC), c'est à dire tel que toutes les trajectoires du système (2) convergent asymptotiquement vers  $O$  en satisfaisant la propriété de stabilité au sens de Lyapunov.

Ceci nous conduit à la définition suivante :

**Définition 23** Le système commandé (1) est *GAC* au point  $O \in M$  si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

1– **Attractivité** : Pour chaque  $x \in M$  ; il existe un contrôle  $u(.) : [0, +\infty) \rightarrow \bar{\bar{B}}_m$  tel que la trajectoire  $x(., x.u(.))$  de (1) tend vers  $O$  quand  $t$  tend vers l’infini.

2– **Stabilité au sens de Lyapunov** : Pour chaque voisinage  $\mathcal{V}$  de  $O$ , il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $O$  tel que si  $x \in \mathcal{U}$  alors le contrôle  $u(.)$  si dessus peut être choisi de manière à avoir  $x(t, x, u(.)) \in \mathcal{V}$ ,  $\forall t \geq 0$ .

**Remarque 3** Si le système commandé (1) admet un feedback stabilisant continu  $k(.) : M \rightarrow \bar{\bar{B}}$  cela signifie que le système bouclé (2) est *GAS* au point  $O$ , ce qui implique que ce système admet une fonction de Lyapunov au point  $O$ . Ainsi, on obtient une fonction  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie les propriétés suivantes :

(i)  $V$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $M \setminus O$  et continue au point  $O$  ;

(ii)  $V \geq 0, V(x) = 0 \Leftrightarrow x = O$  et  $V$  est propre sur  $M$  ;

(iii)  $\forall x \in M \setminus O$ , il existe  $u \in \bar{\bar{B}}_m$  tel que  $(L_{f(.,u)}V)_x < 0$ .

### 2.1.3 Quelques exemples classiques de systèmes commandés (GAC)

1. Un exemple de système commandé *GAC* est donné par les cercles d’Artstein ( $n = 2; m = 1$ ) dans le plan par le système :

$$\begin{cases} \dot{x} &= u(x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= u(2xy) \end{cases}$$

où la commande  $u$  appartient à l’intervalle  $[-1, 1]$ . Ce système possède un équilibre à l’origine  $(0, 0)$  et de plus, pour chaque point du plan  $(x, y) \neq (0, 0)$ , l’ensemble des vitesses autorisées par le système en  $(x, y)$  correspond exactement à l’espace tangent en  $(x, y)$  au cercle passant par les points  $(x, y)$  et  $(0, 0)$  et centré sur l’axe des ordonnées. Ceci implique que pour chaque commande  $u(.) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  et chaque point  $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / (0, 0)$ , la trajectoire  $X(., u(.), X)$  reste sur le cercle passant par les points  $(x, y)$  et  $(0, 0)$  et centré sur l’axe des ordonnées et on peut remarquer que pour  $u \equiv 1$  la trajectoire

correspondante tourne sur le cercle dans le sens trigonométrique ; et que pour  $u \equiv -1$  elle tourne dans le sens inverse (comme le montre la figure 1) la propriété *GAC* au  $(0, 0)$  est assuré

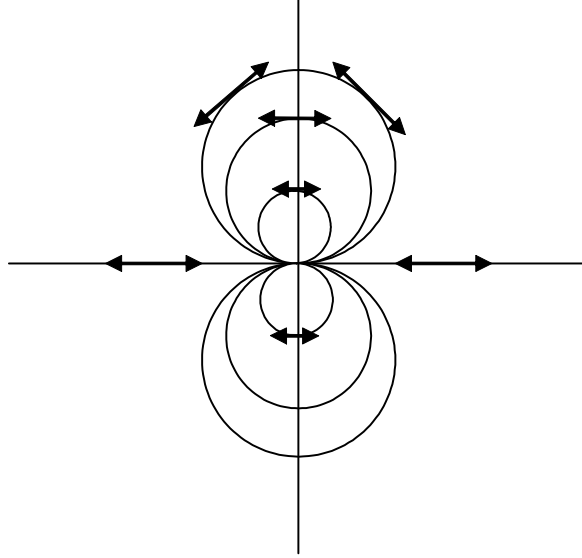


Figure (1) : système des cercles d'Artstein

**2.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , le système classiquement appelé "**non-holonomic integrator**" et défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 u_2 - x_2 u_1, \quad u_1^2 + u_2^2 \leq 1 \end{cases}$$

est un exemple célèbre de système commandé *GAC* en tout point de l'espace..

Le problème auquel nous nous intéressant maintenant est le suivant : étant donné un système *GAC* ; existe -t-il un retour d'état ( appelé aussi feedback) qui stabilise asymptotiquement le système commandé à l'origine ? en d'autre termes existe-il- une fonction continue (ou même de classe  $\mathcal{C}^\infty$ )  $k : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  qui rend le système bouclé :

$$\dot{x} = f(x(t), k(x(t))) \tag{3}$$

globalement asymptotiquement stable à l'origine ( en abrégé : *GAS*) c'est à dire tel que toutes les trajectoires du systèmes (3) convergent asymptotiquement vers l'origine  $O$  en satisfaisant la propriété de stabilité au sens de Lyapunov ?

En général de tels feedbacks stabilisants n'existe pas ; de nombreux systèmes *GAC* ne possèdent pas de retours d'états stabilisant continue.

Par exemple le système des cercles d'Artstein qui est  $GAC_0$  ne possède pas de feedbacks stabilisants continue ; il suffit de remarquer que chacun des cercles représentés dans la figure (1) est invariant par le système bouclé (3) et de plus par les deux propriétés d'attractivité et de stabilité au sens de lyapunov du système il est clair que si on considère un cercle centré sur l'axe des ordonnées stictement positive alors autour de l'origine tout feed-backs stabilisant continu doit prendre des valeurs strictement positives sur la partie du cercle qui se trouve à gauche de l'origine ; par la connexité du cercle en endéduit qu'un tel feed-back stabilisant continu devrait avoir un équilibre sur ce cercle invariant ce qui apporte une contradiction.

#### 2.1.4 Stabilisation des systèmes contrôlés non-holonomes

Soient  $f_1, f_2; \dots; f_m$ ,  $m$  champs de vecteurs de classe  $C^\infty$  sur une variété  $M$  de dimension  $n$ .

**Définition 24** *On dit que le système contrôlé :*

$$\dot{x} = f(x; u) = \sum_{i=1}^{i=m} u_i f_i(x) \quad (4)$$

*est **non-holonyme** sur  $M$  (ou totalement non-holonyme), si la propriété suivante est satisfaite :*

$$Lie\{f_1, f_2; \dots; f_m\}(x) = T_x M \quad \forall x \in M.$$

Rappelons que, pour tout  $x \in M$  et tout contrôle  $u(.) \in L^\infty([0, \infty); \mathbb{R}^m)$ , il existe une unique solution maximale  $x(.) = x(.; u, x) : [0, T_u] \rightarrow M$  (où  $T_u > 0$ ) pour le

problème de Cauchy

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{i=m} u_i(t) f_i(x(t)), \quad \text{pour presque tout } t \in [0, T_u], \quad x(0) = x.$$

Le théorème suivant, montre que tout système contrôlé non-holonyme est contrôlable.

Plus précisément, nous avons le théorème suivant :

**Théorème 2** (*Théorème de Chow-Rashevsky*) Soit le système de contrôle *non-holonyme* dans  $M$  :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{i=m} u_i(t) f_i(x).$$

Alors pour tout couple de points  $x_1, x_2$  de  $M$  ; il existe un contrôle  $u(.) : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$

tel que :  $x(1, u, x_1) = x_2$ .

Le problème de stabilisation dans ce cadre se pose comme suit : Existe t'il une application  $k : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( feedback stabilisant) telle le système dynamique (appelé boucle fermé) défini par

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{i=m} k_i(x) f_i(x)$$

soit globalement asymptotiquement stable (abrégé GAS).

Le théorème de Chow-Rashevsky implique que tout système de la forme (4) est *GAC*.

### 2.1.5 Stabilisation des distributions non-holonomes

Soit  $D$  une distribution non- holonome de rang  $m \leq n$  dans  $M$  ; c'est à dire pour tout point  $x \in M$  ; il existe un voisinage  $V_x$  de  $M$  et  $m$ -uplets  $\{f_1^x, f_2^x; \dots, f_m^x\}$  de champs de vecteurs lisses dans  $V_x$  tel que :

$$Lie \{f_1^x, f_2^x; \dots, f_m^x\} (y) = T_y M \quad ; \forall y \in M$$

Nous rappelons q'un courbe horizontale entre  $x_1$  et  $x_2$  et un chemin absolument continue :  $\gamma(\cdot) : [0; 1] \rightarrow M$  tel que  $\gamma(0) = x_1$  et  $\gamma(1) = x_2$  qui satisfait :

$$\dot{\gamma}(\cdot) \in D(\gamma(t)) \quad ; \forall t \in [0, 1]$$

Dans le contexte des **distributions non-holonomes**, le théorème de Chow-Rashevsky prend la forme suivante.

**Théorème 3** *Soit  $D$  une distribution non-holonyme sur  $M$  ; alors tout couple de points de  $M$  peut être joint par un chemin horizontal de classe  $C^\infty$ .*

Le problème de stabilisation des distributions non-holonomes consiste à trouver si possible une section stabilisante  $X$  de  $D$  en  $x_0$  ; c'est à dire un champ de vecteur lisse  $X$  dans  $M$  qui satisfait  $X(x) \in D(x)$  pour tout  $x \in M$  tel que le système dynamique  $\dot{x} = X(x)$  soit *GAS*.

### 2.1.6 Obstructions à l'existence de feedbacks stabilisants continus

Considérons un système contrôlé non-holonomes (respectivement une distribution non-holonyme), il existe deux obstructions pour l'existence de feedbacks stabilisants (respectivement de sections stabilisantes). La première est purement locale et la deuxième est globale.

(i) **Une obstruction locale : La condition de Brockett.** Comme l'obstruction dont nous allons parler est locale, on peut supposer pour un moment qu'on travaille dans  $\mathbb{R}^n$ .

Par des considération assez simples de topologie algébrique (voir [1]) permettent de montrer que si  $X$  est un champ de vecteur continu défini sur un voisinage de l'origine tel que le système  $\dot{x} = X(x)$  est localement *GAS* à l'origine ; alors pour tout  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, il existe  $\delta > 0$  tel que  $\delta B \subset X(\varepsilon B)$  ( $B$  désigne la boule unité ouverte

de  $\mathbb{R}^n$ ). Dans le cadre du problème de stabilisation cette propriété nous permet d'en déduire le résultat suivant :

Si il existe un feedback  $k : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $k(O) = 0$ ) tel que le système bouclé (2) est localement GAS en  $O$ , alors le résultat ci-dessus s'applique au système

$$\dot{x} = f(x, k(x)) = \sum_{i=1}^{i=m} k_i(x) f_i(x),$$

et donc pour tout  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit il existe  $\delta > 0$  tel que  $\delta B \subset f(\varepsilon B, \bar{B}_m)$ . Ceci nous donne une condition nécessaire **dite condition de Brockett** (voir [ ] ), pour qu'un système commandé puisse éventuellement admettre un feedback stabilisant continu.

Dans l'exemple 2 : le système 'nonholonomic integrator' ne vérifie pas la condition nécessaire de Brockett. En effet aucun vecteur de la forme  $(0, 0, \epsilon)$  (avec  $\epsilon \in \mathbb{R}$ ) n'appartient à l'ensemble  $f(x, \bar{B}_2)$  pour  $x$  dans voisinage de l'origine ;

(ii) Une **obstruction globale** : On sait que si le système précédent possède un feedback stabilisant continu ; alors il admet une fonction de lyapunov de commande " lisse". Cette fonction constitue en faite une fonction de Morse topologique sur  $M$  avec un unique point critique au point  $O$ . Par un résultat classique (voir [ ] ), si une variété  $M$  possède une telle fonction de Morse elle est homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ . Par conséquent pour qu'un système commandé puisse éventuellement admettre un feed-back stabilisant continue il faut au moins que  $M$  soit homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ .

**Conséquence.** Les deux obstructions précédente nous laisse impossible de prouver l'existence de feed-backs (retour d'états) stabilisants continu (resp.sections stabilisantes continus) pour les systèmes non-holonomes (resp. les distributions non-holonomes) cela nous mènent à chercher de nouveaux genre de feedback stabilisant.

Plusieurs contributions dans ce sens ont étai faitent par les travaux de Sussman ; Coron ; Clarck ; Ladayev ;sontag ; et celle de Subotin et Bressen et on particulier la notion de feed-back stabilisant répulsif qui permette dans la plupart des cas de stabiliser les systèmes de contrôles non-holonomes (ou les distributions non-holonomes ) autour de



l'origine 0.

## 2.2 Quelques feedbacks stabilisants

De nombreux systèmes GAC n'admettent pas de feedbacks stabilisants continus, même localement. Cette anomalie a motivée de nombreux auteurs à considérer d'autres types de feedbacks stabilisants, on peut citer les contributions suivantes

### 2.2.1 Feedbacks stabilisants au sens de Carathéodory

**Définition 25** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Une fonction  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *semi-concave* sur  $\Omega$  si elle est continue sur  $\Omega$ , et si pour tout  $x_0 \in \Omega$  il existe des constantes  $\rho, C > 0$  telles que

$$\frac{1}{2}(g(x) + g(y)) - g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq C \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in x_0 + \rho B.$$

En d'autres termes, la propriété ci dessus signifie que la fonction  $g$  peut s'écrire localement comme somme d'une fonction concave et d'une fonction lisse (quadratique) :

$$g(x) = [g(x) - 4C \|x\|^2] + 4C \|x\|^2, \quad \forall x \in x_0 + \rho B.$$

On observe que toute fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  est semi concave. Par ailleurs, on remarque que toute fonction semi-concave est localement lipschitzienne sur son domaine de définition, ce qui implique d'après un résultat classique (Théorème de Rademacher) qu'elle est différentiable presque partout sur son domaine. Si  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction semi-concave sur  $\Omega$ , on désigne par  $D_g \subset \Omega$  l'ensemble des points où  $g$  est différentiable, et par  $\Gamma(g) := \Omega \setminus D_g$  son complémentaire, appelé ensemble singulier de  $g$ . De plus, on appellera sous-différentiel limite de  $g$  au point  $x \in \Omega$  l'ensemble compact non vide défini de la manière suivante :

$$\partial_L g(x) := \left\{ \lim_k \nabla g(x_k) \mid x_k \rightarrow x \text{ et } x_k \in D_g \right\}$$

Dans [1] Sontag a introduit la notion de **fonction de Lyapunov de commande "non-lisse"**. Voici comment une fonction de Lyapunov de commande semi-concave (au point  $O$ ) peut générer de manière très simple ce feedback stabilisant :

Soit  $x \in M$ , si  $x = O$ , alors on pose  $k(O) = 0$ ; sinon, on considère un élément  $\zeta$  de  $\partial_L V(x)$ , on choisit un contrôle  $u \in \bar{\bar{B}}_m$  tel que :  $\langle \nabla \zeta, f(x, u) \rangle \leq -V(x)$  et on pose  $k(x) := u$ .

Il a été montré que tout feedback construit de cette manière stabilise le système

$$\dot{x} = f(x; u) \dot{x} = \sum_{i=1}^{i=m} u_i f_i(x)$$

au point  $O$ . Ce type de feedback construit "point par point" n'a aucune raison d'être continu, mais la semi-concavité de  $V$  peut permettre d'affirmer la construction de  $k$  et d'améliorer ses propriétés de stabilité .

On dira donc qu'un feedback  $k : M \rightarrow \bar{\bar{B}}_m$  est stabilisant **au sens de Carathéodory** si pour chaque  $x \in M$  au moins une solution de l'équation différentielle :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k(x(t))) \text{ p.p. } t \in [0; +\infty), x(0) = 0$$

existe et si toute les solutions convergent asymptotiquement vers  $O$  en satisfaisant la propriété de stabilité au sens de Lyapunov. Dans cette situation, on dira que le système bouclé :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{i=m} k_i(x).f_i(x)$$

est *GAS* au point 0.

Nous avons alors le théorème suivant :

**Théorème 4** *Si le système commandé*

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{i=m} u_i f_i(x)$$

est GAC au point  $O$ , alors il existe un ensemble  $\mathcal{D}$  de  $M$  et un feedback  $k : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  tel que :

(1)  $\mathcal{D}$  est un ouvert dense dans  $M$  ; de plus son complémentaire à une dimension de Hausdorff inférieure ou égale à  $(n-1)$  ;

(2)  $k$  est de class  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $D$

(3) le système bouclé

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{i=m} k_i(x).f_i(x)$$

est GAS pour les solutions de Carathéodory au point  $O$  .

### 2.2.2 Feedbacks stabilisants répulsifs lisses (SRL)

**Définition 26** Un feedback  $k : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  sera dit **stabilisant répulsif lisse** au point  $O$  (abrégé SRL ), si les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. Il existe un ensemble  $S \subset M$  fermé et de mesure nulle ;
2. le feedback  $k$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur l'ouvert  $M \setminus S$  ;
3. le système bouclé

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{i=m} k_i(x).f_i(x),$$

est GAS au sens de Carathéodory au point  $O$  ;

4. pour tout  $t > 0$  , les trajectoires du système bouclé précédent n'appartiennent pas à l'ensemble  $S$ .

**Remarque 4** Nous précisons immédiatement que tous les systèmes commandés GAC du type précédent n'admettent pas forcément de feedbacks stabilisants. Pour les distributions non-holonomes, certains chercheurs ont montré que lorsqu'une hypothèse classique de géométrie sous-riemannienne est vérifiée, alors il est possible de construire de feedback de type SRL. Ce travail étant fait dans le cadre sous-riemannien, les systèmes commandés deviennent donc des distributions sur la variété  $M$  et les feedbacks des sections. Voici un premier résultat .

**Théorème 5** *Soit  $M$  une variété connexe, compacte sans bord, de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , de dimension  $n$ , soit  $D$  une distribution non-holonyme (c'est à dire satisfait la condition du rang) sur  $M$  de rang  $m \leq n$ , et soit  $\bar{x}$  un point fixé de  $M$ . Si il existe une métrique sous-riemannienne  $g$  sur  $D$  pour laquelle il n'existe pas de courbes minimisantes singulières. Alors il existe une section  $X$  de  $D$  de type SRL.*

**Remarque 5** *Nous remarquons que l'hypothèse faite sur la distribution  $D$  dans l'énoncé du théorème est vérifiée génériquement pour des distributions de rang supérieur ou égal à trois dans  $\mathbb{R}^n$  (pour  $n \geq 3$ ), ceci signifie en particulier que ce résultat s'applique pour la majorité des distributions de rang supérieur à trois.*

## 2.3 Résultats de stabilisation en dimension deux et en dimension trois

### 2.3.1 Le problème de la stabilisation sur $\mathbb{R}^2$

Soit  $M$  une variété de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de dimension deux. On considère le problème de stabilisation des systèmes contrôlés de la forme :

$$\dot{x} = u_1 X(x) + u_2 Y(x), \quad (4)$$

où  $X ; Y$  sont des champs de vecteurs de classes  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $M$  et le contrôle  $u(u_1; u_2)$  défini de  $\overline{\overline{B}}_2$  la boule unité fermé dans  $\mathbb{R}^2$ .

On sait que le système commandé (4) est *GAC* si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

**1- Attractivité** : pour tout  $x \in M$ , il existe un contrôle  $u(.) : [0; +\infty[ \rightarrow \overline{\overline{B}}$  tel que la trajectoire correspondante du système (1),  $x(., u, x)$  tend vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ .

**2- La stabilité au sens de Lyapunov** : pour tout voisinage  $V$  de 0, il existe un voisinage  $U$  de 0 tel que si  $x \in U$  alors le contrôle  $u(.)$  peut être choisit tel que  $x(., u, x) \in V$

.  $\forall t \geq 0$ .

Soit un système commandé *GAC* de la forme (4). La stabilité du système consiste à trouver si possible un feedback  $k(.) = (k_1(x); k_2(x)) : M \rightarrow \overline{\overline{B}}_2$  qui rend le système bouclé :

$$\dot{x} = k_1(x)X(x) + k_2(x)Y(x) \quad (5)$$

globalement asymptotiquement stable (c'est à dire toutes les trajectoires du système précédent convergent asymptotiquement vers 0 et tel que la propriété de stabilité au sens de Lyapunov soit satisfaite).

On sait que les systèmes de contrôle de la forme (4) sont globalement asymptotiquement comandable à l'origine mais cependant ne possèdent pas généralement de feedbacks stabilisants continue et cela est dû à la condition nécessaire de Brockett qui est une obstruction locale et à la théorie de Morse qui est une obstruction globale.

Dans ce qui suit on va voir que si le système de contrôle (4) est *GAC*, alors il existe un feed-back  $k : M \rightarrow \overline{\overline{B}}_2$  qui satisfait :

1- Le système bouclé (5) est *GAC* au sens de carathéodory

2-Le feed-back  $k$  est lisse en dehors de l'ensemble fini de point de  $M \setminus \{O\}$  et de plus les seuls singularités apparantes sont celle qui sont classifier dans la figure (5).

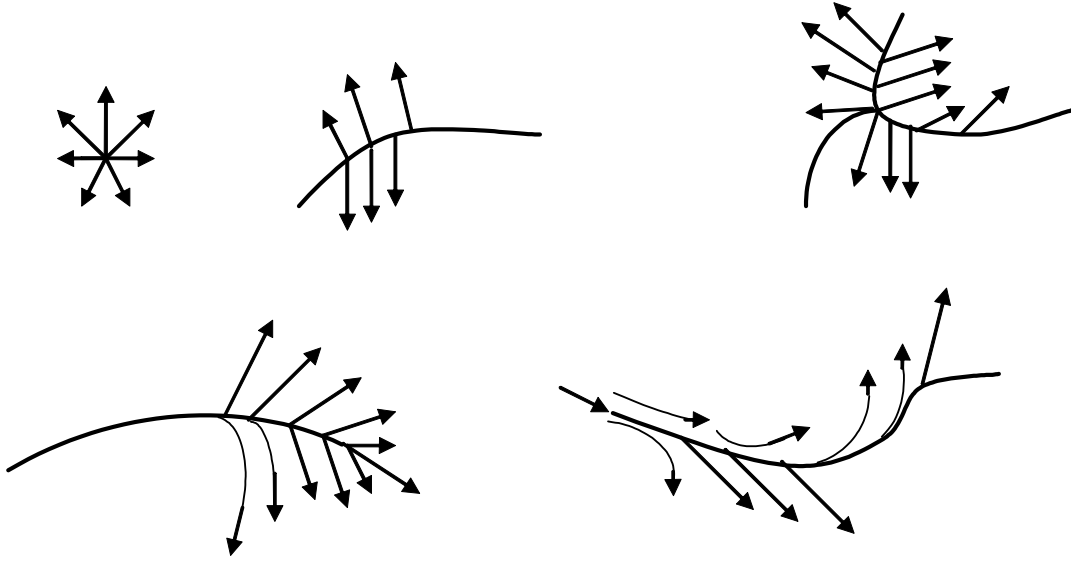


Figure2 : les différentents types de singularités sur les surfaces dites les bifurcartions

Ces singularités sont dites les bifurcations; dans ce cas il existe une seule trajectoire du système bouclé (2) qui touche ce type de singularités en un seul point puis se disperse loins de ces singularités. Notant en l'absence de ces points -bifurcations- la solution de carathéodory du système de cauchy :

$$\begin{cases} \dot{x} = k_1(x)X(x) + k_2(x)Y(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où  $x_0 \in M$  n'atteigne pas ces singularités en tout  $t > 0$  et elle est lisse pour tout  $t > 0$ .

La question qui se pose est; sous quelles conditions peut-on éliminer ces points de singularités -bifurcations-?, c'est à dire sous quel conditions existe-il des feed-backs stabilisants  $k : M \rightarrow \overline{B_2}$  qui satisfont les propriéts (4) et (5) et qui n'admettent pas de singularités du type bifurcations (ce types de feed-backs sera appelés feedbacks stabilisant répulsif lisse en abrégée *SRL*).

Le théorème suivant va nous donner une condition necessaire et suffisante pour qu'un

système de la forme (4) admet un tel feedback.

**Théorème 6** *Si la variété  $M$  est de dimension deux, alors tout système contrôlé non holonome de la forme :*

$$\dot{x} = u_1 X(x) + u_2 Y(x)$$

*admet un feedback stabilisant du type SRL dans  $M$  s'il vérifie la condition de Hormander*

$$\text{Lie} \{X, Y\}(x) = T_x M$$

**Exemple 4** *On considère la distribution engendré par les deux champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$*

$$\begin{cases} X(x_1, x_2) &= (x_1 - 2) \frac{d}{dx_1} + x_2 \sigma \frac{d}{dx_2} \\ Y(x_1, x_2) &= (\sigma - 1) \frac{d}{dx_1} + (\sigma - 1) [(x_1 - 2)x_2 + 1] \frac{d}{dx_2}, \end{cases}$$

*où :  $\sigma := (x_1 - 2)^2 + x_2^2$ .*

*On peut vérifier que  $\text{Lie} \{X, Y\}(x) = T_x \mathbb{R}^2$ . d'après le théorème précédent le système de contrôle*

$$\dot{x} = u_1 X(x) + u_2 Y(x) ..$$

*admet un feedback du type SRL autour de l'origine.*

**Remarque 6** *Actuellement il est prouvé que si le système de contrôle (4) est analytique et GAC ; il peut être stabilisé localement par un feedback du type SRL. Ce résultat ne peut pas être généralisé pour les variété de dimension supérieur à deux.*

### 2.3.2 Le problème de la stabilisation sur $\mathbb{R}^3$

En dimension trois, on peut obtenir le théorème suivant :

**Théorème 7** *Si  $M$  est de dimension trois, alors tout système contrôlé non-holonyme de la forme  $\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x)$  admet un feed-back de type SRL définie sur un voisinage de l'origine si la condition de Hormander*

$$\text{Lie}\{f_1, \dots, f_m\}(0) = \mathbb{R}^3$$

*tel que  $D = \text{Vect}\{f_1, \dots, f_m\}$*

La preuve de ce théorème est basé sur le concept de la fonction semi-concave de Lyapunov et sur la classification des singularités des feedbacks stabilisants pour les systèmes de contrôles sur les surfaces.

**Exemple 5** *Reprenons dans  $\mathbb{R}^3$ , l'exemple du problème appelé "**non-holomic integrator**". Rappelons qu'il est définie par les deux champs de vecteurs  $f_1$  et  $f_2$  donnés par :*

$$\begin{cases} f_1 = \frac{d}{dx_1} + x_2 \frac{d}{dx_3} \\ f_2 = \frac{d}{dx_2} - x_1 \frac{d}{dx_3} \end{cases}$$

*Il est facile à remarquer que pour tout point  $x \in \mathbb{R}^3$ , les champs de vecteurs  $\{f_1, f_2, [f_1, f_2]\}$  sont linéairement indépendants. Associons le système contrôlé non-holonyme dans  $\mathbb{R}^3$  :*

$$\dot{x} = u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x).$$

*Ce système peut être stabilisé à l'origine par un feed-back stabilisant lisse en dehors de la ligne verticale  $S$  définie par  $x_1 = x_2 = 0$  dans  $\mathbb{R}^3$ . En utilisant une fonction de Lyapunov adapté on peut construire une fonction  $k = (k_1, k_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  où les propriétés suivantes sont satisfaites :*



1- la fonction  $k$  est localement borné et lisse dans  $\mathbb{R}^3 \setminus S$

2- l'ensemble  $\mathbb{R}^3 \setminus S$  est invariant pour le système :

$$\dot{x} = k_1(x)f_1(x) + k_2(x)f_2(x),$$

et où toutes ces trajectoires tendent asymptotiquement vers l'origine.

# Chapitre 3

## Stabilisation répulsive lisse de certaines distributions

### 3.1 Résultats préliminaires

#### 3.1.1 Introduction

Soit  $D$  une distribution non-holonome de rang  $m \leq n$  sur une variété connexe  $M$ . Ceci implique que pour tout  $x \in M$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}_x$  de  $x$  dans  $M$  et un  $m$ -uplets  $(f_1^x, \dots, f_m^x)$  de champs de vecteurs lisse sur  $\mathcal{V}_x$  tel que

$$D(y) = \text{Vect} \{f_1^x(y), f_2^x(y), \dots, f_m^x(y)\}$$

et

$$\text{Lie} \{f_1^x, \dots, f_m^x\}(y) = T_y M, \quad \forall y \in M$$

Nous rappelons q'un chemin horizontal joignant  $x$  et  $y$  quelconque est une courbe absolument continue  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  avec  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma(1) = y$  et qui satisfait

$$\dot{\gamma}(t) \in D(\gamma(t)), \quad \text{p.p, } t \in [0, 1].$$

Dans le contexte des distributions non-holonomes, le théorème de Chow-Rashevsky prend la forme suivante :

**Théorème 8** *Soit  $D$  une distribution non-holonyme sur  $M$ . Alors pour tout couple de points de  $M$ , il existe un chemin horizontal lisse, joignant ces deux points.*

Le problème de la stabilisation pour des distributions non-holonomes, consiste à trouver, s'il est possible, une section stabilisante lisse de  $D$  en  $\bar{x}$ , c'est à dire un champ de vecteurs lisse  $X$  sur  $M$  satisfaisant  $X(x) \in D(x)$  pour tout  $x \in M$  et tel que le système dynamique  $\dot{x}(t) = X(x)$  soit globalement assymptotiquement stable au point  $\bar{x}$ .

Comme on l'a mentionné dans le chapitre précédent, il existe dans ce contexte deux obstructions majeurs, l'une locale et l'autre globale (voir, chapitre 2) pour construire des feed-backs stabilisants pour les systèmes non-holonomes et aussi des sections stabilisantes pour les distributions non-holonomes. Ces obstructions ont conduit les chercheurs à se poser la question suivante : est-il possible de prouver l'existence, pour ce type de problèmes de feedbacks stabilisants lisse (resp. sections) pour des systèmes contrôlés non-holonomes (resp. distributions). On peut citer dans cet axe, les contributions de Sussmann, Coron, Clarke,...

Dans ce chapitre, nous adoptons la construction de feedbacks stabilisants proposés par R. Rifford (voir 29). De tels feedbacks (ou sections) ont été appelés, feedbacks stabilisants répulsifs lisses (abrégé. SRL) ( pour plus de détails sur cette notion, voir le chapitre 2).

### 3.1.2 Stabilisation dans le cas riemannien

Dans ce paragraphe, la distribution  $D$  est donnée par :

$$D(x) = T_x M, \quad \forall x \in M$$

On va montrer comment, on peut construire dans ce contexte, une section stabilisante pour  $D$ .

On considère une métrique riemannienne "lisse" et complète  $g$  sur  $M$  et dénotons par  $d_g$  la distance riemannienne associée à  $g$ . Nous rappelons que, pour  $x_1, x_2$  de  $M$  la distance riemannienne entre  $x_1$  et  $x_2$  est définie par :

$$d_g(x_1, x_2) = \inf \{ \text{long}_g(\gamma(\cdot)) \}, \text{ pour tout } x_1, x_2 \text{ de } M$$

où l'infimum est pris sur tous les chemins  $\gamma(\cdot) : [0, 1] \rightarrow M$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , joignant  $x_1$  à  $x_2$  et où :

$$\text{long}_g(\gamma(\cdot)) = \int_0^1 \sqrt{g_\gamma(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt$$

Soit  $V_g : M \rightarrow \mathbb{R}$ , la fonction définie par :

$$V_g(x) = (d_g(\bar{x}, x))^2; \quad \forall x \in M$$

Il est facile de voir que  $V_g$  est lipshitzienne et continue sur  $M$  et "lisse" en dehors de l'ensemble  $\mathcal{S}$  définie par le "cut-locus" au point  $\bar{x}$  (le cut-locus au point  $\bar{x}$  est définie comme la closure de l'ensemble où  $V_g$  n'est pas différentiable)

Définissons maintenant, le champ de vecteurs  $X$  sur  $M$ , par :

$$X(x) = -\nabla_g V_g(x); \quad \forall x \in M \setminus \mathcal{S},$$

$\nabla_g V_g(x)$  dénote le gradient de  $V_g$  en  $x$  de  $M$  par rapport la métrique  $g$ .

Par construction, chaque trajectoire du système :  $\dot{x}(t) = X(x(t))$  tendent vers  $\bar{x}$  quand  $t \rightarrow \infty$  et satisfait la propriété suivante :

$$\forall t \geq 0 : x(t) \notin \mathcal{S}.$$

## 3.2 Stabilisation répulsive lisse

### 3.2.1 Stabilisation SRL des champs de vecteurs

Soit  $\mathcal{S}$  un sous ensemble fermé de  $M$  et  $X$  un champ de vecteurs lisse sur  $M$ .

Le système dynamique  $\dot{x}(t) = X(x(t))$  est dit globalement assymptotiquement stable répulsif lisse en  $\bar{x}$  par rapport à  $\mathcal{S}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  (dénnoté en abrégé  $\text{SRL}_{\mathcal{S},\bar{x}}$ ), si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i) Le champ de vecteurs  $X$  est localement borné sur  $M$  et lisse sur  $M \setminus \mathcal{S}$ .
- (ii) Le système dynamique  $\dot{x}(t) = X(x(t))$  est globalement assymptotiquement stable en  $\bar{x}$  dans le sens de Carathéodory, et pour tout  $x \in M$ , il existe une solution de

$$\dot{x}(t) = X(x(t)), \quad \text{pour presque tout } t \in [0, \infty[ \quad x(0) = x \quad (*)$$

et pour tout  $x \in M$ , toute solution de  $(*)$  (appelée solution de Carathéodory de  $\dot{x}(t) = X(x(t))$ ) sur  $[0, \infty[$  tend vers  $\bar{x}$  quand  $t$  tend vers  $\infty$ .

D'autre part, pour tout voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\bar{x}$ , il existe un voisinage  $\mathcal{W}$  de  $\bar{x}$  tel que, pour  $x \in \mathcal{W}$ , la solution de  $(*)$  satisfait  $x(t) \in \mathcal{V}$ , pour tout  $t \geq 0$ .

- (iii) Pour tout  $x \in M$ , la solution de  $(*)$  satisfait  $x(t) \notin \mathcal{S}$ , pour  $t > 0$ .

Si on se donne un système contrôlé non holonome de la forme  $\dot{x} = \sum_{i=1}^{i=m} u_i f_i(x)$ , alors l'application  $k : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  est un feedback stabilisant répulsif lisse en  $\bar{x}$  (dénnoté en abrégé  $\text{SRL}_{\bar{x}}$ ) pour ce système, si il est localement borné sur  $M$  et si il existe un sous ensemble fermé  $\mathcal{S}$  tel que  $k$  soit lisse sur  $M \setminus \mathcal{S}$  et tel que le système en boucle ouverte associé soit  $\text{SRL}_{\mathcal{S},\bar{x}}$ . Si on se donne une distribution non holonome  $D$  et un champ de vecteur  $X$  sur  $M$ , on dit que  $X$  est une section stabilisante répulsive lisse en  $\bar{x}$  (en abrégé.  $\text{SRL}_{\bar{x}}$ ) pour  $D$ , si  $X$  est une section de  $D$  sur  $M$  et si le système dynamique  $\dot{x}(t) = X(x(t))$  est  $\text{SRL}_{\mathcal{S},\bar{x}}$  pour un certain sous-ensemble fermé  $\mathcal{S} \subset M$ .

### 3.2.2 Résultats d'existence de SRL des sections

La méthode présentée ci dessus pour le cas riemannien peut être aussi développée pour le cas sous-riemannien comme suit :

Soit  $D$  une distribution non-holonyme de rang  $m \leq n$  sur  $M$ , l'ensemble des chemins horizontaux  $\gamma(.) : [0, 1] \rightarrow M$  tels que  $\gamma(0) = \bar{x}$ , dénoté par  $\Omega_D(\bar{x})$  peut être muni d'une structure de variété banachique. Nous rappelons que l'application "extrémité"

(ou Entrée-Sortie ) en  $\bar{x}$  est l'application  $E_{\bar{x}} : \Omega_D(\bar{x}) \rightarrow M$  définie par

$$E_{\bar{x}}(\gamma(.)) = \gamma(1), \quad \forall \gamma(.) \in \Omega_D(\bar{x})$$

est une application "lisse" sur  $\Omega_D(\bar{x})$ . Un chemin  $\gamma(.)$  est dit **singulier** si il est horizontal et si il est un point critique de l'application extrémité  $E_{\bar{x}}$ , c'est à dire si la différentielle de  $E_{\bar{x}}$  en  $\gamma(.)$  n'est pas une submersion.

Soit  $g$  une métrique riemannienne lisse sur  $M$ , la distance sous-riemannienne

$d_{SR}(x_1, x_2)$  entre deux points  $x_1, x_2$  de  $M$  est définie par :

$$d_{SR}(x_1, x_2) = \inf \{ \text{long}_g(\gamma(.)) / \gamma(.) \in \Omega_D(\bar{x}) \},$$

et d'après le théorème de Chow-Rashevsky, puisque  $D$  est non-holonyme sur  $M$ , la distance sous-riemannienne est bien définie et continue sur  $M \times M$ . Cependant si la variété  $M$  est un espace métrique complet pour la distance sous-riemannienne  $d_{SR}$ , et comme  $M$  est connexe, pour tout  $x_1, x_2 \in M$ , il existe un chemin horizontal

$\gamma(.) : [0, 1] \rightarrow M$  joignant  $x_1$  à  $x_2$  tel que

$$d_{SR}(x_1, x_2) = \text{long}_g(\gamma(.)).$$

Ce chemin horizontal est appelé minimisant.

Nous énonçons alors le résultat suivant, démontré récemment par E. Trélat et

L.Rifford (voir Réf.23 ) :

**Théorème 9** Soit  $D$  une distribution lisse non-holonyme sur  $M$  de rang  $m \leq n$ .

Supposons qu'il existe une métrique riemannienne "lisse"  $g$  sur  $D$  pour laquelle  $M$  est complète et il n'existe pas de chemins minimisants singuliers non triviaux.

Alors il existe une section  $X$  de  $D$  sur  $M$ , et un sous ensemble fermé  $S$  de  $M$ , de dimension de Hausdorff inférieure ou égale à  $n - 1$ , telle que  $X$  soit  $SRL_{\bar{x}}$

**Remarque 7** Une coube minimisante est singulière si et seulement si elle n'est pas une géodésique, c'est à dire elle n'est pas une solution du système hamiltonien. Dans le cas riemannien ( $D = TM$ ), un chemin est une géodésique si et seulement si il est une géodésique hamiltonienne.

Dans ce qui suit, on va donner deux applications du théorème précédent pour certaines distributions qui jouent un rôle fondamentale en géométrie sous-riemannienne. Il s'agit de la distribution  $H_2$  forte sur  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.3 SRL d'une distribution $H_2$ forte sur $\mathbb{R}^n$

On considère  $M = \mathbb{R}^n$  et soit  $D$  une distribution de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$  de rang  $m$ ,  $D$  est engendrée par  $m$  champs de vecteurs classe  $C^\infty$  indépendants  $f_1, \dots, f_m$ . Un chemin absolument continu  $\gamma$  sera, donc, horizontal si et seulement si il existe un élément  $u$  de  $L^1(I, \mathbb{R}^m)$  tel que

$$\dot{\gamma} = \sum_{k=1}^m u^k f_k(\gamma(t)).$$

Si  $f_k = \sum_{i=1}^m f_k^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , notons  $\mathcal{B}(t)$  la matrice de terme général

$$\mathcal{B}_j^i(t) = \sum_{k=1}^m u^k \frac{\partial f_k^i}{\partial x_j}$$

Cette matrice est dite la matrice associée à  $\gamma$ . Le résultat suivant sera très utile dans la suite :

**Proposition 2** *Soit  $\gamma$  un chemin horizontal tel que*

$$\dot{\gamma} = \sum_{k=1}^m u^k f_k(\gamma(t)),$$

*et  $\mathcal{B}$  la matrice associée. Alors :*

*Le chemin  $\gamma$  est anormal si et seulement si il existe un champ de 1-forme absolument continu  $\dot{\xi}$  appartenant à  $D_\gamma^\perp$  (l'orthogonal par dualité de  $D$ ) tel que :*

$$\dot{\xi} = {}^t \mathcal{B} \xi.$$

**Remarque 8** *L'ensemble des champs de 1-formes qui sont solutions du système précédent est appelé ensemble d'anormalité. Dans le cas riemannien ( $D = TM$ ), l'ensemble d'anormalité d'un chemin est égale à  $\{0\} (D^\perp)$ . Ce qui justifie que tous les chemins sont non singuliers (ou normaux).*

Dans ce qui suit nous allons introduire la notion d'une d'une distribution  $H_2$  forte. L'objectif est de prouver que dans cas et sous les conditions du théorème[9], il existe pour cette distribution une section stabilisante  $SRL$ . En fait, on montre que dans le contexte d'une distribution  $H_2$  forte, on a aussi équivalence entre les géodésiques et les géodésiques hamiltonienne. Ce qui représente une généralisation du cas riemannien.

**Définition 27** *On dit que la distribution  $D$  vérifie la condition  $H_2$  forte, si pour tout champ de vecteur  $X$  non nul de  $D$ , l'espace vectoriel  $(D + [X, D])_x$  est égal à l'espace tangent  $T_x M$  pour tout  $x$  de la variété  $M$ .*

Ceci implique en particulier que toute distribution  $D$  vérifiant  $H_2$  forte est non-holonyme.



**Théorème 10** *Soit  $M$  une variété connexe, compacte sans bord, de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , de dimension  $n$ . Soit  $D$  une distribution  $H_2$  forte sur  $M$  de rang  $m \leq n$ , et soit  $\bar{x}$  un point fixé de  $M$ . Alors, il existe une section  $X$  de  $D$  de type  $SRL_{\bar{x}}$ .*

**Preuve.** L'essentiel de la démonstration est contenu dans la proposition suivante :

**Proposition 3** *Soit  $D$  une distribution sur  $\mathbb{R}^3$ . Si  $D$  vérifie la condition  $H_2$  forte, alors, tout chemin horizontal non constant est normal (ou non singulier).*

**Démonstration.** Soit  $c$  un chemin horizontal non constant dans la variété  $M$ .

On peut trouver une carte  $U$  telle que  $c$  soit non constant et que  $D$  soit trivialisable au dessus de  $U$ .

Posons  $\gamma = c|_U$  et soit  $f_1, \dots, f_m$  un repère de  $D|_U$ . Il existe alors une application  $u = (u_1, \dots, u_m)$  absolument continue telle que :

$$\dot{\gamma} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} u^\alpha X_\alpha.$$

Montrons que  $c$  est normal (ou non singulier).

Supposons que  $c$  est anormal (ou singulier), il existe donc un champ de 1-forme  $\xi$  non nul absolument continue appartenant à  $D_\gamma^\perp$  et tel que :

$$\dot{\xi} = -{}^t\mathcal{B}\xi$$

où  $\mathcal{B}$  est la matrice associé à  $\gamma$ . On a :

$$\xi([f_\alpha, f_\beta]) = \left\langle \xi, f_\alpha \frac{\partial f_\beta}{\partial x} \right\rangle - \left\langle \xi, f_\beta \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} \right\rangle$$

d'où,

$$\begin{aligned} \xi([\dot{\gamma}, f_\beta]) &= \left\langle \xi, \dot{\gamma} \frac{df_\beta}{dx} \right\rangle - \left\langle \xi, f_\beta \left( \sum_{\alpha=1}^m u^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \xi, \dot{f}_\beta \right\rangle - \langle {}^t\mathcal{B}\xi, f_\beta \rangle. \end{aligned}$$

Comme  $\langle \xi, f_\beta \rangle = 0$  pour  $\beta = 1, 2, \dots, m$  on obtient :

$$\xi([\dot{\gamma}, X_\beta]) = \left\langle -\dot{\xi} + {}^t \mathcal{B}\xi, f_\beta \right\rangle = 0.$$

Par suite :

$$[\dot{\gamma}, D]_{\gamma(t)} \subset D_{\gamma(t)},$$

et

$$(D + [\dot{\gamma}, D]_{\gamma(t)}) \neq T_{\gamma(t)}M$$

ce qui contredit le fait que la distribution vérifie la condition  $H_2$  forte.

Ceci nous permet d'énoncer le corollaire suivant.

**Corollaire 1** *Si la distribution vérifie la condition  $H_2$  forte, alors les géodésiques (c'est à dire les chemins minimisants) sont exactement les géodésiques hamiltonienne. En d'autres termes, pour une distribution  $H_2$  forte, il n'existe pas de chemins minimisants singuliers non constants.*

### 3.4 Cas d'une structure de contact

Un cas spécial d'une variété sous-riemannienne est donné par la distribution définie de la manière suivante :

**Une structure de contact** sur une variété  $M$ , où  $\dim M = 2n + 1$

(c'est à dire  $M$  est de dimension impaire), est une distribution  $\mathcal{H} : x \rightarrow \mathcal{H}_x$

de rang  $n$  qui est non-intégrable.

Une structure de contact  $M$  est définie par une 1-forme  $\omega$  qui satisfait la condition de non-intégrabilité de Frobenius :

$$\omega \wedge (d\omega)^n \neq 0.$$

La distribution (ou distribution horizontale) est donnée par

$$\mathcal{H} = \ker \omega.$$

Pour une structure de contact nous avons la proposition suivante :

**Proposition 4** *La distribution  $\mathcal{H}$  définie par une structure de contact vérifie la condition  $H_2$  forte.*

**Démonstration.**

Il suffit de montrer que pour tout champ de vecteurs  $X$  non nul de  $\mathcal{H}$ , il existe un champ de vecteur  $Y$  de  $D$  tel que :

$$\omega_x([X, Y]) \neq 0, \quad \forall x \in M.$$

Supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe  $X \in \mathcal{H}$  et  $x \in M$  tels que :

$$\omega_x([X, Y]) = 0, \quad \forall Y \in \mathcal{H}.$$

Or, d'après l'égalité usuelle :

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$$

on a :

$$d\omega(X, Y) = 0,$$

ce qui contredit le fait que  $\omega \wedge (d\omega)^n \neq 0$ .

Ce résultat conduit au corollaire suivant :

**Corollaire 2** *Sous les hypothèses du théorème [9], il existe une section  $X$  de  $D$  de type  $SRL_{\bar{x}}$  pour tout  $\bar{x}$  fixé de  $M$ .*

**Exemple 6** Sur  $\mathbb{R}^3$ , la distribution engendrée par les deux champs de vecteurs

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}y^2 \frac{\partial}{\partial z} \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$$

est appelée la **distribution de Martinet**. Il est facile à voir que

$$\ker \omega = \text{Vect}\{X_1, X_2\},$$

$$\text{où } \omega = dz - \frac{1}{2}y^2 dx.$$

Et comme

$$\omega \wedge d\omega = (dz - \frac{1}{2}y^2 dx) \wedge (y dx \wedge dy) = y dx \wedge dy \wedge dz,$$

d'où  $\mathcal{H} = \ker \omega$  est une structure de contact en dehors du plan  $\{y = 0\}$ . Ce plan est appelé surface de martinet. On peut en déduire qu'une distribution de martinet possède une section stabilisante du type SRL en chaque point n'appartenant pas à la surface de Martinet.

# Conclusion

Le problème de la stabilisation est l'un des thèmes fondamentaux en théorie des contrôles.

L'objectif étant de construire un feedback stabilisant continu ou "lisse", en utilisant les différents outils de la stabilité, en particulier les fonctions de Lyapunov.

Lorsque l'espace des états est une variété différentielle  $M$ , le système contrôlé devient une distribution et le feedback une section. Le passage à ce cadre géométrique n'est pas évident. En fait, il existe deux obstructions majeures à l'existence de feedbacks stabilisants continus, l'une est locale et l'autre est globale.

Ceci a amené beaucoup de chercheurs de considérer d'autres types de stabilisateurs non nécessairement continus. Dans ce mémoire, on s'intéresse principalement à la stabilisation des distributions non-holonomes.

Avec cette hypothèse, le théorème de Chow -Rashevsky affirme que chaque couple de points de la variété  $M$  peut être joint par un chemin horizontal "lisse".

On présente les nouveaux stabilisateurs introduits par L.Rifford appelés feedbacks stabilisants répulsifs lisses (abrégé SRL). Pour une variété  $M$ , connexe, compacte sans bord, de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , de dimension  $n$ . et une distribution non-holonome  $D$  sur  $M$  de rang  $m \leq n$ , si  $\bar{x}$  est un point fixé de  $M$  et si il existe une métrique sous-riemannienne  $g$  sur  $D$  pour laquelle il n'existe pas de courbes singulières. Alors il existe une section  $X$  de  $D$  de type *SRL*.

Si  $M = \mathbb{R}^3$  et si la distribution  $D$  vérifie la condition de Hörmander à l'origine,

$$Lie \{f_1, \dots, f_m\} (0) = \mathbb{R}^3$$

où  $D = \text{Vect}\{f_1, \dots, f_m\}$ , alors il existe un feedback (SRL) dans un voisinage de l'origine.

Notre contribution principale dans ce travail, a été d'appliquer quelques méthodes sur l'existence des sections stabilisantes de type SRL pour obtenir des résultats qui concenent en particulier la stabilisation d' une distribution vérifiant la condition  $H_2$  forte et aussi pour une structure de contact.

Ces distributions jouent un rôle important en géométrie sous-riemannienne et représentent de très bon modèles d'applications.

# Bibliographie

- [1] G.Alberti et L.Ambrosio : On the singularities of convex functions :Manuscripta Math.76(3-4) :pg :421-435 1992
- [2] Z.Arstein : Stabilisation with related controls :Nonlinear Analysis TMA,7 :1163-1173, 1983
- [3] A.Bellaïche : The tangent space in sub-Riemannian geometry : in Sub-Riemannian Geometry ,Birkhauser ,1-78 , 1996
- [4] B.Bonnard et E.Trélat : On the role of abnormal minimizers in sub-Riemannien geometry :CR.Acad.Sci Parie .Serie1(2001)
- [5] R..Brockett : Asymptotic stability and feedback stabilisation : Differentiel geometric control theory Toulouse Math.6 :405-491 ,2001
- [6] Y.Chitour ,F.jean : propriétés génériques des trajectoires singulières : C.R.Acad.Sci.Paris .Serie 1 (2003)
- [7] F..Clarck : optimization and nonsmooth analysis : Second edition .Classics in Applied Math5 , philidelphia 1990
- [8] F.H.Clarck et E .Sontag et A.Subbotin : Asymptotic controllability implies feedback stabilization : I.E.E.E .Trans ,42 : 1394-1407,1997
- [9] J.Frédéric : Géométrie sous-riemannienne et controle non-linéaire : Habilitation a dériger des recherche Université Pierre et Marie Curie Parie6
- [10] C .Lobry et tawfik Sari : introduction à la théorie de contrôle : Cours d'automatique ,commande linéaire des systèmes Dynamiques (Parie 2000)

- [11] Ivan Kupka : Géométrie Sous-Riemannienne. exp No 817 pages :351-380 séminaire bourbaki 1997
- [12] L.Montgomery : A tour of subriemannian geometries : Mathematical Surveys and monographs ,Vol 91 (2002)
- [13] P. Orro et Fernand Pelletier : Differentiel proprieties of the distance function associated to the sub-rimanniann geometry ,Publication du LAMA,2001
- [14] E.D Sontag : A lyapunov like characterization of asymptotic controlability : SIM J Control and Optim,21 :462-471,1983
- [15] Patrice Orro et Fernand Pelletier : Singularités et géométrie sous-riemannienne ( livre)Hermann editeurs des science et des arts , Paris 8/10/1997
- [16] Y.chitour, F.jaen and E.trélat : singular trajectories of control-affine systemsPreprint Université de Parie Sud ,2006
- [17] F.H.Clark : optimization and nonsmooth analysis :Institut Girard Desargue Lyon I 96622 Villeurbanne .
- [18] E.Ryan : on Brockett's condition for smooth stabilization and its necessity in a context of nonsmooth feedbaks :SIAM J .Control Optim 32 , pg : 1597-1604 , 1994
- [19] Claude Lobry et tawfik Sari : introduction à la théorie de contrôle :Cours d'automatique ,commande linéaire des systèmes Dynamiques (Parie 2000)
- [20] Frédéric Jean : Sub-Riemannian Geometry : ( cour . ENSTA,Parie ,2005)
- [21] Eduardo D.Sontag : stability and stabilisation discontinuities and effect of disturbances : Department of matgematics Rutgers University New brunswick ,NJ08903(USA)
- [22] L.Rifford et E.Trélat : On the stabilisation problem for nonholonomic distributions : article Université de Nice-SofiaAntipolisLabo J.A. Dieudonné UMR6621
- [23] L.Rifford : The stabilisation problem in the plane : Institut Girard desargue 226( 2) :429-500 ,2006



- [24] L.Rifford : The stabilisation Problem(AGAS and SRS feedbacks) : In optimal contril , Stabilisation Lectures Notes 301Springer -Verlag , Heidelberg (2004),173-184
- [25] L.Rifford : introduction au problème de stabilisation en théorie de contrôl : Thèse de Doctorat (Université Claude Bernard Lyon I )
- [26] L.Rifford : Stabilisation des systèmes globalement asymptotiquement comman- dables : Institut Girard Desargues Université Claude Bernard Lyon I
- [27] L.Rifford : problemes de stabilisation en théorie du contrôle : these de doctorat année 2000 n<sup>o</sup>d'ordre 76-2000
- [28] L.Rifford :stabilisation problem for nonholonomic control systems : Laboratoire J .A Dieudonné Université de Nice-Sofia Antipolis
- [29] L.Rifford : Stratified semiconcave control-lyapunov function and the stabilisation problem : Ann .Inst H.pioncaré Non Linéaire 22(3) :343-384,1998
- [30] L.Rifford : on the existence of local smooth repulsive stabilizing feedback in dimen- sion three : J Differential Equations 226(2) : 429-500 , 2006
- [31] Naceurdine Bensalem : régularité lipschitzienne des géodésiques minimisantes pour quelques distributions affine :Serdica Mathematical journal no 34(2008)pg : 383-394