



Université Sétif 1 Ferhat Abbas
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Thèse de Doctorat

Présentée en vue de l'obtention du diplôme
de Docteur en Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées

Thème :

**RESOLUTION DES EDP NON LINEAIRES :
APPLICATION A L'EQUATION DE BENJAMIN-ONO
MOYENNANT LA METHODE DE FAN**

Présentée par

Mme. BELMECHRI Firouz

Directeur de thèse : **Professeur Abdelouahab KADEM**

Thèse soutenue le 11 /02/ 2026, devant le jury composé de :

Mr. Salim MESBAHI	Prof	Université Setif 1 Ferhat Abbas	Président
Mr. Abdelouahab KADEM	Prof	Université Setif 1 Ferhat Abbas	Rapporteur
Mr. Yassine ADJABI	Prof	Université Boumerdes M'hamed Bougara	Examineur
Mr. El-Hacène CHALABI	MCA	Université Constantine 3 Salah Boubnider	Examineur
Mr. Ahcene MERAD	Prof	Université Oum El-Bouaghi Larbi Ben M'hidi	Examineur

Remerciements

En premier lieu, je remercie Allah, tout puissant, de m'avoir donné la force pour achever ce travail, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

J'aimerais tout d'abord remercier grandement mon directeur de thèse le professeur **Abdelouahab Kadem** pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail et pour ses conseils avisés. Sa rigueur scientifique a permis d'arriver aux objectifs fixés au départ de notre thèse.

J'adresse mes vifs remerciements à Mr. **Salim MESBAHI**, professeur à l'université Ferhat Abbas Sétif 1, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance. J'exprime aussi tous mes remerciements à **Pr Yassine ADJABI**, **Pr El-Hacène CHALABI** et **Pr. Ahcene MERAD** pour avoir accepté de faire partie du jury, et pour leur lecture attentive de ma thèse.

Un merci spécial à Mr. **Ammar MOSBAH** professeur associé à l'université Ferhat Abbas, Setif 1, pour m'avoir permis d'acquérir des données dans son bureau, et pour son disponibilité et toute l'aide qu'il m'a apportée

Dédicaces

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mes proches, et plus particulièrement envers mes parents, pour la confiance qu'ils m'ont accordée tout au long de mes études. Leur soutien indéfectible m'a appris la persévérance et le goût de l'effort.

Je souhaite également remercier de tout cœur mon cher mari, dont l'appui constant m'a permis de poursuivre mes études dans les meilleures conditions. Sa confiance et sa bienveillance tout au long de ces années ont été précieuses.

Ma reconnaissance va aussi à mes sœurs et à mon frère, pour leur présence et leurs encouragements.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance à mes chères amies .

Enfin, je dédie ce travail à toute la famille Belmechri.

Table des figures

1-1	Schéma d'une onde	12
1-2	Une solution de soliton $u(x, t) = \sec h^2(x - t)$	15
1-3	Représentation graphique des fonctions hyperboliques	17
1-4	Tracés des fonctions de Jacobi pour différentes valeurs de k ; sn est en rouge, cn en bleu et dn en vert.	21
1-5	Solution périodique $u(x, t) = \cos(x - t)$	22
1-6	Une solution de kink $u(x, t) = 1 - \tanh(x - t)$	22
1-7	Une solution de peakon $u(x, t) = c \exp(- x - ct)$	23
1-8	Un cuspon $u(x, t) = C \exp\left(- x - ct ^{\frac{1}{n}}\right)$	24
2-1	Surface 3D de la solution (equation (2.38)) de l'équation de Benjamin-Ono avec $k_1 = -1, H = c_1 = a_0 = 1$	40
2-2	Surface de la solution à deux ondes solitaires	41
2-3	Surface de la solution à trois ondes solitaires	42
2-4	Représentation de u_{11} , pour $\mu = 0, \rho\sigma > 0, \rho = 1, \sigma = 1, V = 2, a = 3$, and $A = 2, B = 3$	48
2-5	Représentation de u_{12} , pour $\mu = 0, \rho\sigma > 0, \rho = -1, \sigma = 1, V = 2, a = 4$, and $A = 2, B = 0$	49
2-6	Représentation de u_{14} , pour $\mu \neq 0, \Delta \geq 0, \mu = -3, \rho = 1, \sigma = 2, V = 2, a = 3$, and $A = 2, B = 3$	49

3-1	La solution hyperbolique u_2 de Eq. (3.19) pour les valeurs $k = a_1 = a_2 = \omega = \gamma = \epsilon = 1, \beta = -1$ dans Eq. (3.37)	73
3-2	Solution hyperbolique u_2 de Eq. (3.19) pour les valeurs $k = a_1 = a_2 = \omega = \gamma = \epsilon = 1, \beta = -1$ dans Eq. (3.38)	73
3-3	Solution hyperbolique $u_5(\xi)$ de Eq. (3.19) pour les valeurs $k = 1, \beta = -1, a_1 = 1, a_2 = 1, \omega = 1, \gamma = 1, \epsilon = 1$ dans Eq (3.41)	74
3-4	La solution hyperbolique $u_4(\xi)$ de Eq. (3.19) pour les valeurs $k = 1, \beta = -1, a_1 = 1, a_2 = 1, \omega = 1, \gamma = 1, \epsilon = 1$ dans Eq (3.41)	74

Table des matières

Introduction	5
1 Ondes progressives et solitons	9
1.1 Introduction	9
1.1.1 Ondes progressives	11
1.1.2 Dispersion et dissipation	12
1.1.3 Interaction entre dispersion et dissipation	13
1.1.4 Ondes solitaires et solitons	13
1.2 Fonctions spéciales liées aux ondes	15
1.2.1 Les fonctions hyperboliques	16
1.2.2 Fonctions elliptiques de Jacobi	18
1.3 Classification des ondes solitaires	21
1.3.1 Ondes périodique	21
1.3.2 Les Kinks	21
1.3.3 Peakons	23
1.3.4 Les Cuspons	24
2 Equation de Benjamin Ono et quelques méthode de résolution	26
2.1 Introduction	26
2.2 Méthodes de résolution	29
2.2.1 La méthode de la fonction Exp	29

2.2.2	Méthode de l'équation d'essai :	34
2.2.3	La méthode bilinéaire de Hirota (l'approche bilinéaire)	38
2.2.4	La méthode d'expansion modifiée (G'/G^2)	43
3	Approche analytique de l'équation de Benjamin-Ono par la méthode de sous-équation de Fan	50
3.1	Introduction	50
3.2	Description de la méthode de la sous-équation de Fan	52
3.3	Application de la méthode de sous-équation	62
3.4	Solutions et représentation graphique	68
	Conclusion générale	76
	Bibliographie	78

Introduction

Les mathématiques jouent un rôle essentiel dans l'observation de nombreux processus physiques : hydrodynamique, élasticité et électrodynamique. Un phénomène physique ne peut être réduit uniquement aux concepts mathématiques qu'il contient, mais il peut être traduit à l'aide de ceux-ci. Ce point de vue rejoint l'idée de considérer les mathématiques comme des modèles. L'un des concepts mathématiques qui perdure depuis des siècles et qui joue remarquablement le rôle de modèle pour les phénomènes physiques est celui d'équation différentielle. Les équations différentielles non linéaires occupent une place importante dans l'étude des sciences physiques non linéaires. La résolution exacte des équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires offre une meilleure compréhension des problèmes physiques. Au cours des dernières décennies, de nombreuses méthodes ont été développées, telles que la méthode de diffusion inverse [1], la transformation bilinéaire de Hirota [25], la méthode tanh [15], la méthode sinus-cosinus [3] la méthode de l'équilibre homogène [46], la méthode de la fonction exp [7] et la méthode des équations d'essai [21]

Récemment, en raison de sa simplicité mathématique, la méthode des sous-équations de Fan est un outil incontournable pour résoudre les équations d'évolution non linéaires, permettant d'obtenir plusieurs solutions exactes. Cette méthode, connue sous le nom de méthode de Fan [17, 34] est particulièrement efficace pour traiter les équations différentielles non linéaires, notamment les (EDP). Elle constitue une extension de la méthode de Fan et permet de trouver des solutions exactes sous la forme de fonctions spéciales ou de séries. Parmi les équations où cette méthode a été appliquée, on trouve l'équation de Schrödinger non linéaire [14] La méthode a permis la découverte de solutions exactes sous la forme de fonctions hyperboliques, trigonométriques ou exponentielles. Une application notable est l'équation de Korteweg-de Vries (KdV), qui est une équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire qui modélise des ondes solitaires dans un milieu fluide. La méthode des sous-équations en éventail étendue a été utilisée pour obtenir des solutions analytiques sous forme de solitons pour diverses équations non linéaires. L'équation de

Boussinesq [16], qui décrit la propagation des ondes en eau peu profonde, a été résolue à l'aide de cette méthode pour trouver des solutions exactes. De même, l'équation non linéaire de Klein-Gordon [15], utilisée en physique théorique pour décrire les champs scalaires, a été abordée, donnant des solutions sous forme de fonctions elliptiques ou hyperboliques. L'équation de Sine-Gordon [12], qui se pose dans des problèmes de physique mathématique tels que la théorie des champs, a également été abordée, permettant la découverte de solutions exactes de solitons. Les équations de réaction-diffusion, qui modélisent des phénomènes biologiques, chimiques ou physiques, constituent un autre domaine d'application de cette méthode. La méthode des sous-équations en éventail étendue s'est avérée efficace pour résoudre certaines de ces équations non linéaires. De plus, les équations de type Burgers-Huxley [9], qui combinent les termes de diffusion, de convection et de réaction, ont été analysées, ce qui a conduit à la dérivation de solutions analytiques. Les équations de Ginzburg-Landau [13], utilisées en physique des matériaux et en optique non linéaire, ont également été résolues à l'aide de cette méthode, aboutissant à des solutions exactes. Plus récemment, la méthode a été discutée dans le contexte de l'équation de Burgers-Fisher fractionnaire en temps [2], démontrant ainsi sa polyvalence et son applicabilité à une gamme d'équations complexes.

Nous concentrons notre étude sur l'équation de Benjamin-Ono (BO) introduite dans les années 1960 par T.B.Benjamin et H.Ono. Cette équation est un modèle fondamental en physique mathématique, notamment pour la description des ondes internes en eaux profondes. Elle est utilisée pour modéliser divers phénomènes physiques, notamment les ondes internes en océanographie, où elle décrit leur propagation dans un fluide stratifié, comme les couches d'eau de densités différentes dans l'océan. De plus, l'équation de BO apparaît en physique des plasmas et des particules, où elle est appliquée à l'étude des ondes dans les plasmas et les systèmes de particules chargées. En physique du solide, elle est utilisée pour modéliser les phénomènes dans les cristaux et les matériaux de faible dimension. Au fil du temps, l'équation de Benjamin-Ono a été généralisée et modifiée pour étudier des phénomènes plus complexes. Par exemple, l'équation de Benjamin-Ono

généralisée intègre des termes supplémentaires pour tenir compte de la dispersion ou de la non-linéarité accrue. En raison de sa structure non linéaire et non locale, la résolution de l'équation de BO nécessite des méthodes spécialisées. Des approches analytiques et numériques ont été employées, notamment la transformée de diffusion inverse [19], la méthode de Hirota [26] et la méthode de réduction de symétrie (théorie du groupe de Lie) [36]. Ces techniques ont joué un rôle déterminant dans l'avancement de la compréhension et de l'application de l'équation BO dans divers domaines de la physique. Les recherches actuelles sur l'équation de Benjamin-Ono (BO) se concentrent sur deux domaines principaux : la stabilité des solutions et les solutions N-solitons. La stabilité des solutions implique l'étude du comportement des solitons et des ondes périodiques sous perturbations, tandis que les solutions N-solitons se concentrent sur la construction et l'analyse des interactions entre plusieurs solitons. De plus, il existe un intérêt croissant pour ses applications en physique et en ingénierie, où l'équation est utilisée pour modéliser des phénomènes dans des systèmes du monde réel.

L'équation de Benjamin-Ono est une équation aux dérivées partielles non linéaire et non locale qui modélise la propagation des ondes internes dans un fluide stratifié, en particulier dans des couches d'eau profondes. Elle a été introduite dans les années 1960–70 par T. B. Benjamin et H. Ono.

Elle s'écrit généralement sous la forme

$$u_t + u_x u + H u_{xx} = 0,$$

H est la transformée de Hilbert, un opérateur qui introduit un effet de dispersion non local définie par

$$H[f](x) = \frac{1}{\pi} p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{x-y} dy,$$

Cette équation combine les effets de non-linéarité et de dispersion, ce qui permet l'apparition d'ondes solitaires appelées solitons. Contrairement à d'autres équations comme celle de Korteweg-de Vries, les solitons de Benjamin-Ono ont une décroissance algébrique

et non exponentielle.

L'équation est aussi connue pour être intégrable, ce qui signifie qu'elle peut être résolue exactement par certaines méthodes analytiques.

Cette thèse est constituée d'une introduction générale qui présente l'importance du thème ainsi que les objectifs de notre travail. Elle est organisée en trois chapitres et se termine par une conclusion générale et des perspectives.

- Le premier chapitre est consacré à la présentation générale des ondes progressives et des solitons
- Le deuxième chapitre est l'étude de quelques méthodes de résolution de l'équation Benjamin-Ono telles que la méthode de la fonction-Exp et la méthode modifiée de développement (G'/G^2) , la méthode bilinéaire de Hirota ainsi que la méthode de l'équation d'essai et leurs efficacités sont prouvées pour résoudre l'équation Benjamin-Ono
- Le troisième chapitre est une application de la méthode de la sous-équation de Fan pour obtenir des solutions d'ondes progressives des EDP non linéaires incluant l'équation de Benjamin-Ono et on terminera par une présentation des résultats, suivie de la conclusion générale et des perspectives.

Chapitre 1

Ondes progressives et solitons

1.1 Introduction

Les phénomènes ondulatoires sont omniprésents dans la nature et interviennent dans des domaines variés tels que la mécanique, l'optique, ou encore la physique quantique. D'un point de vue mathématique, les ondes sont modélisées par des équations aux dérivées partielles (EDP), dont les solutions peuvent présenter des comportements très divers. Ce chapitre se propose d'examiner les ondes dites progressives, c'est-à-dire celles qui se déplacent dans l'espace sans changer de forme, ainsi que les effets de dispersion et de dissipation qui peuvent les modifier.

Les ondes solitaires, ou solitons, constituent une classe particulière de solutions d'équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires. Contrairement aux ondes classiques, qui peuvent se disperser ou s'atténuer au cours du temps, une onde solitaire se caractérise par sa capacité remarquable à se propager sur de longues distances sans changement de forme, et à interagir avec d'autres ondes solitaires sans perdre son identité.

Le concept d'onde solitaire remonte au XIX^e siècle. En 1834, le mathématicien et ingénieur écossais John Scott Russell observa un phénomène singulier sur un canal : une élévation isolée de l'eau se déplaçant à vitesse constante, sur une longue distance, sans se déformer. Il nomma ce phénomène une "vague de translation", constituant la première

observation empirique d'un soliton.

D'un point de vue mathématique, les ondes solitaires apparaissent naturellement comme solutions d'équations non linéaires et dispersives, c'est-à-dire des EDP combinant des effets de non-linéarité (termes comme $u\partial_x u$) et de dispersion (termes comme $\partial_x^3 u$). Un exemple fondamental est donné par l'équation de Korteweg-de Vries (KdV)

$$\partial_t u + 6u\partial_x u + \partial_x^3 u = 0,$$

qui modélise la propagation d'ondes de faible amplitude à la surface d'un canal peu profond. Cette équation admet des solutions exactes de type onde solitaire, comme :

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct) \right),$$

$c > 0$ est la vitesse de propagation. Ces solutions sont localisées, de forme stable, et conservent leur structure même après collision avec d'autres ondes du même type.

Depuis lors, les ondes solitaires ont été identifiées dans de nombreux contextes physiques : en optique non linéaire, en physique des plasmas, dans les fibres optiques, en océanographie ou encore en théorie des champs. Leur étude a donné naissance à des théories mathématiques riches, telles que l'analyse spectrale, les systèmes intégrables, la transformée de Fourier inverse non linéaire, et les méthodes de perturbation.

Ce chapitre s'intéressera donc aux propriétés fondamentales des ondes solitaires, en mettant en évidence :

- Leur structure mathématique,
- Les équations qui les gouvernent,
- Le rôle de la non-linéarité et de la dispersion,
- Et les conditions nécessaires à leur existence et à leur stabilité.

1.1.1 Ondes progressives

Il est intéressant maintenant de donner quelques définitions de certains concepts de la théorie mathématiques des ondes [43, 44]

Définition 1.1.1 *Une onde progressive est une solution d'une équation d'évolution, typiquement de la forme :*

$$u(x, t) = f(x - ct),$$

où c est une constante appelée vitesse de propagation. Cette forme implique que le profil f se déplace sans se déformer.

Exemple 1.1.1 *L'exemple canonique est l'équation d'onde classique :*

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u,$$

admet pour solution générale une superposition de deux ondes progressives

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

Les ondes progressives peuvent se propager dans plusieurs directions et avec différentes vitesses. Dans les cas linéaires, le principe de superposition est valable et les solutions peuvent être représentées comme combinaisons linéaires de fonctions sinusoidales. En revanche dans les cas non linéaires, le profil de l'onde au cours de la propagation, peut interagir de manière complexe avec d'autres ondes, ou encore se stabiliser sous la forme d'une structure cohérente : appelée soliton. Celui-ci correspond à une onde solitaire qui conserve sa forme et sa vitesse grâce à un équilibre entre non linéarité et dispersion.

Cependant, dans les milieux réels, la propagation des ondes est rarement idéale. Elle est soumise à des effets tels que la dispersion et la dissipation, qui modifient profondément leur évolution.

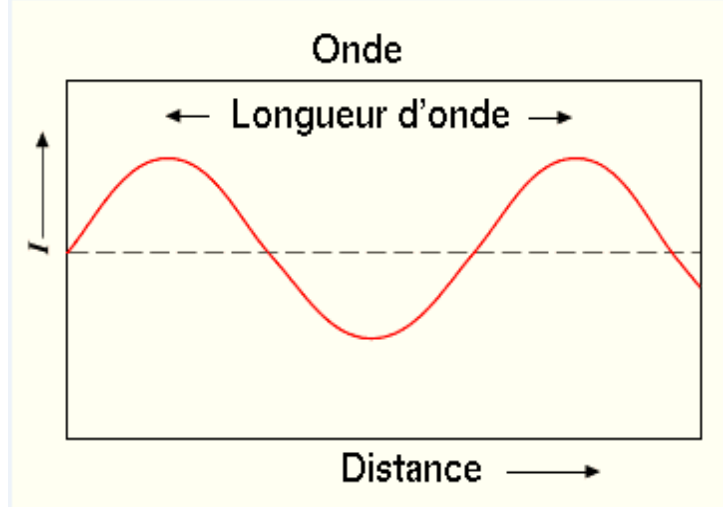


FIG. 1-1 – Schéma d’une onde

1.1.2 Dispersion et dissipation

Dans la dynamique des ondes, la dispersion et la dissipation sont deux phénomènes physiques fondamentaux qui influencent la forme et la propagation d’une onde au cours du temps.

Définition 1.1.2 *dispersion*

On parle de dispersion lorsqu’une onde est composée de plusieurs fréquences qui se propagent à des vitesses différentes. Mathématiquement, cela se traduit par une relation de dispersion non linéaire entre la fréquence ω et le nombre d’onde k , Autrement dit, la vitesse de phase $v_p = \frac{\omega}{k}$ dépend du nombre d’onde k ce qui provoque un étalement de l’onde au fil du temps.

Ce phénomène est typique dans les milieux dispersifs, comme l’eau profonde ou les fibres optiques.

Un exemple typique est l’équation linéaire dispersive classique :

$$u_t + \beta u_{xxx} = 0$$

cela signifie que les composantes de fréquences élevées (grands k) se déplacent plus rapidement, entraînant un étalement du profil de l'onde.

Dans les équations non linéaires comme celle de Benjamin-Ono ou de Korteweg-de Vries (KdV), la dispersion agit en opposition à la non linéarité. Cet équilibre entre les deux effets permet la formation d'une onde solitaire stable, appelée soliton.

Définition 1.1.3 (*dissipation*)

La dissipation désigne une perte d'énergie, souvent modélisée par des termes visqueux ou amortissants. Elle provoque une atténuation de l'amplitude de l'onde au fil du temps.

Par exemple, l'équation de la chaleur :

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u = c^2 \partial_x^2 u,$$

où $\gamma > 0$ représente le coefficient d'amortissement. Cette équation décrit une onde progressive dont l'amplitude décroît exponentiellement avec le temps.

1.1.3 Interaction entre dispersion et dissipation

Lorsque les deux phénomènes existent, la dynamique devient plus complexe :

Si la dissipation domine, on observe la propagation d'ondes dispersives ou solitaires, et si la dissipation domine, l'onde s'atténue rapidement et perd sa cohérence.

Les solitons apparaissent précisément dans le régime d'équilibre entre non-linéarité et dispersion sans dissipation significative. C'est pourquoi les équations comme Benjamin-Ono ou KdV décrivent des milieux quasi-conservatifs, où l'énergie de l'onde reste stable pendant la propagation.

1.1.4 Ondes solitaires et solitons

L'apparition du concept de solitons remonte à 1834 [39], lorsque John Scott Russell, ingénieur écossais, observe une "vague solitaire" se propageant dans une déformation le long

d'un canal. Cette observation fut décrite comme une (vague de translation) et marque le début d'une nouvelle ère dans la compréhension des phénomènes ondulatoires non linéaires ce n'est que dans les années 1960 que le terme "**soliton**" est introduit par Zabusky et Kruskal, dans le contexte de l'analyse numérique de l'équation de Korteweg-de Vries (KdV). Ils montrent que les vagues solitaires peuvent interagir de façon quasi élastique, retrouvent leur forme après collision, ce qui contredit le comportement attendu des ondes linéaires.

Mathématiquement, cet équilibre apparaît dans des équations non linéaires dispersives comme l'équation de Korteweg-de Vries (KdV)

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Cette équation admet une solution sous forme de solitons

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct) \right).$$

qui se propage avec une vitesse c constante, sans modification de son profil.

Définition 1.1.4 *Les ondes solitaires sont des ondes progressives localisées qui se déplacent à une vitesse constante et dont la forme tend vers zéro à mesure que l'on s'éloigne. Selon [Hereman, 2009], une onde solitaire est définie comme une onde de gravité localisée qui conserve sa cohérence. Elle possède une amplitude finie et se propage avec une vitesse et une forme constantes.*

Définition 1.1.5 *Les solitons constituent une catégorie particulière d'ondes solitaires. Un soliton est une solution spatialement localisée, ce qui signifie que $u'(\xi)$, $u''(\xi)$, $u'''(\xi)$ et $u(\xi) \rightarrow 0$ lorsque ξ ($\xi = x - ct$) approche $\pm\infty$.*

Cependant, selon [Drazin et Johnson, 1989] ([10]), un soliton peut être défini comme toute solution d'une équation non linéaire (ou d'un système) qui :

- (i) est une onde solitaire de forme stable et permanente,
- (ii) est localisée, de sorte qu'elle décroît ou tend vers une constante à l'infini,
- (iii) peut interagir de manière significative avec d'autres solitons tout en conservant son identité,
- (iv) résulte d'un équilibre subtil entre les effets non linéaires et dispersifs.

Remarque 1.1.1 *Dans la littérature scientifique, la distinction entre ondes solitaires et solitons est parfois floue. Les ondes solitaires peuvent être vues comme des solutions de type soliton pour des équations non linéaires décrivant des phénomènes ondulatoires dans des milieux dispersifs et dissipatifs.*

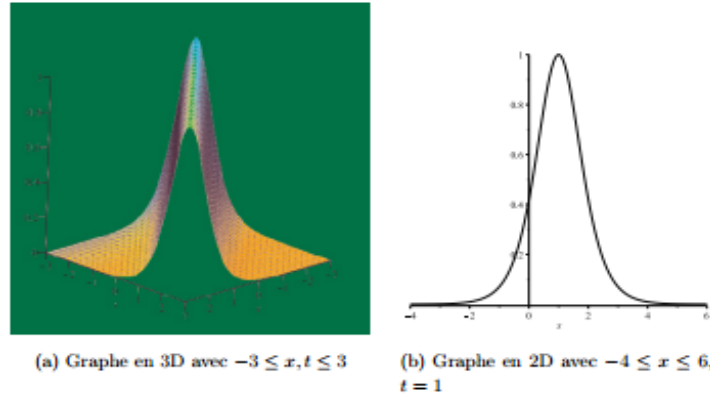


FIG. 1-2 – Une solution de soliton $u(x, t) = \text{sech}^2(x - t)$

1.2 Fonctions spéciales liées aux ondes

Dans l'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires, les solutions exactes prennent souvent la forme de fonctions spéciales. Ces fonctions permettent de décrire avec précision les profils d'ondes localisées, périodiques ou transitoires. Elles constituent donc un outil analytique fondamental pour présenter les solitons, les ondes périodiques et les structures complexes issues des équations non linéaires.

1.2.1 Les fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques apparaissent fréquemment dans les solutions localisées des équations d'ondes.

Définition 1.2.1 *Les fonctions hyperboliques sont des fonctions analogues aux fonctions trigonométriques, mais définies à partir des exponentielles. Elle apparaissent dans la résolution de certaines équations différentielles et dans l'étude des phénomènes ondulatoires et solitoniques.*

On définit les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique ainsi

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}, \\ \sinh(x) &= \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}.\end{aligned}$$

On utilise aussi les notations suivantes :

$$ch(x) = \cosh(x), \quad sh(x) = \sinh(x).$$

Par similarité avec les fonctions trigonométriques, on définit aussi les fonctions suivantes

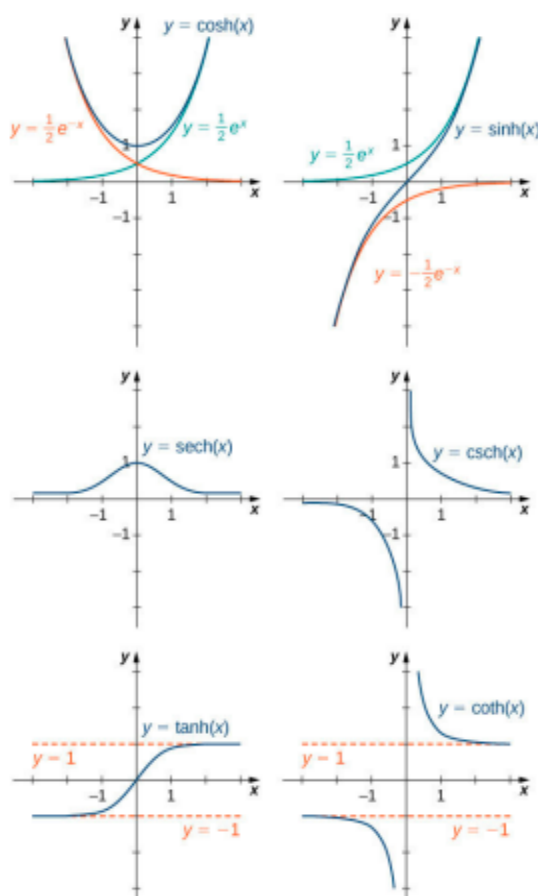
$$\begin{aligned}\tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \\ \coth(x) &= \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}, \\ \sec h(x) &= \frac{1}{\cosh(x)}, \\ \csc h(x) &= \frac{1}{\sinh(x)}.\end{aligned}$$

Dérivées des fonctions hyperboliques

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cosh(x) &= \sinh(x), & \frac{d}{dx}(\sinh(x) &= \cosh(x), \\ \frac{d}{dx}(\tanh(x) &= \operatorname{sech}^2(x), & \frac{d}{dx}(\coth(x) &= -\operatorname{csc} h^2(x), \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}(x) &= -\operatorname{sech}(x) \tanh(x), & \frac{d}{dx}(\operatorname{csc} h(x) &= -\operatorname{csc} h(x) \coth(x).\end{aligned}$$

Graphiques des fonctions hyperboliques :

hy



3.png

FIG. 1-3 – Représentation graphique des fonctions hyperboliques

1.2.2 Fonctions elliptiques de Jacobi

Les fonctions elliptiques de Jacobi généralisent les fonctions trigonométriques et hyperboliques. Elles apparaissent naturellement dans les solutions périodiques des équations non linéaires.

Nous allons dans cette partie définir les fonctions de Jacobi sn, cn et dn qui sont des analogues des fonctions trigonométriques. Afin de faire le lien entre ces deux types de fonctions, nous commençons dans une première partie par définir de manière non conventionnelle les fonctions trigonométriques. La construction des fonctions de Jacobi sera très fortement calquée sur cette définition. Nous verrons à la fin du chapitre qu'elles sont elliptiques.

Construction originale des fonctions trigonométriques

Considérons la fonction

$$u : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \rightarrow \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

et $A = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Cette fonction est impaire, strictement croissante sur $[0; 1]$, valant 0 en 0 et A en 1. La fonction u est donc une bijection de $[-1; 1]$ sur $[-A; A]$ et sa fonction réciproque u^{-1} est aussi impaire et strictement croissante. On pose alors la définition suivante.

Définition 1.2.2 *Pour $x \in [-A; A]$, on définit le sinus et le cosinus par*

$$\begin{aligned}\sin(x) &= u^{-1}(x), \\ \cos(x) &= \sqrt{1 - \sin^2(x)}.\end{aligned}$$

Définitions et formules de dérivation des fonctions de Jacobi

Soit $k \in [0; 1[$, on pose

$$u : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}.$$

et $K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$. Par les mêmes arguments que dans la section précédente, u est une bijection de $[-1; 1]$ dans $[-K; K]$, ce qui nous permet de poser les définitions suivantes.

Définition 1.2.3 Pour x dans $[-K; K]$ on définit les fonctions sn , cn , dn par :

$$\begin{aligned} sn(x) &= u^{-1}(x), \\ cn(x) &= \sqrt{1 - sn^2(x)}, \\ dn(x) &= \sqrt{1 - k^2 sn^2(x)}. \end{aligned}$$

(les fonctions cn et dn sont bien définies car sn prend ses valeurs dans $[-1; 1]$). Ces fonctions dépendent de k , qu'on appelle le module, c'est pourquoi on notera parfois $sn(x, k)$, $cn(x, k)$ et $dn(x, k)$ lorsqu'il sera utile de mettre le module en évidence.

Remarque 1.2.1 On retrouve très facilement les fonctions trigonométriques à partir des fonctions de Jacobi. En effet, pour $k = 0$, on a $sn(\cdot, 0) = \sin$ et $cn(\cdot, 0) = \cos$. De plus, on pourrait prendre $k = 1$ dans les définitions ci-dessus, et on aurait $sn(\cdot, 1) = \sinh$; en revanche, nous n'avons pas d'identité équivalente entre cn et $\cosh$. ($cn(\cdot, 1) = \operatorname{sech}$). C'est cette dissymétrie qui nous pousse à ne définir ces fonctions que pour $k \in [0, 1[$; ce choix évitera de distinguer le cas $k = 1$ dans la plupart des raisonnements.

On peut alors déterminer des propriétés immédiates pour ces fonctions de manière analogue au travail fait pour les fonctions trigonométriques :

$$sn(0) = 0, \quad sn(K) = 1,$$

$$cn(0) = 1, \quad cn(K) = 0,$$

$$dn(0) = 1, \quad dn(K) = \sqrt{1 - k^2}.$$

Posons $k' = \sqrt{1 - k^2}$, qu'on appellera le co-module. Pour $x \in [-K; K]$ on a les identités :

$$\left\{ \begin{array}{l} sn^2(x, k) + cn^2(x, k) = 1, \\ dn^2(x, k) + k^2 sn^2(x, k) = 1, \\ k^2 cn^2(x, k) + k'^2 = dn^2(x, k), \\ cn^2(x, k) + k'^2 sn^2(x, k) = dn^2(x, k). \end{array} \right.$$

Les fonctions de Jacobi vérifient les formules de dérivations suivantes, analogues à celle des fonctions trigonométriques.

Proposition 1.2.1 *Pour tout x dans $] - K; K[$*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} [sn(x)] = cn(x)dn(x), \\ \frac{d}{dx} [cn(x)] = -sn(x)dn(x), \\ \frac{d}{dx} [dn(x)] = -k^2 sn(x)cn(x). \end{array} \right.$$

sn

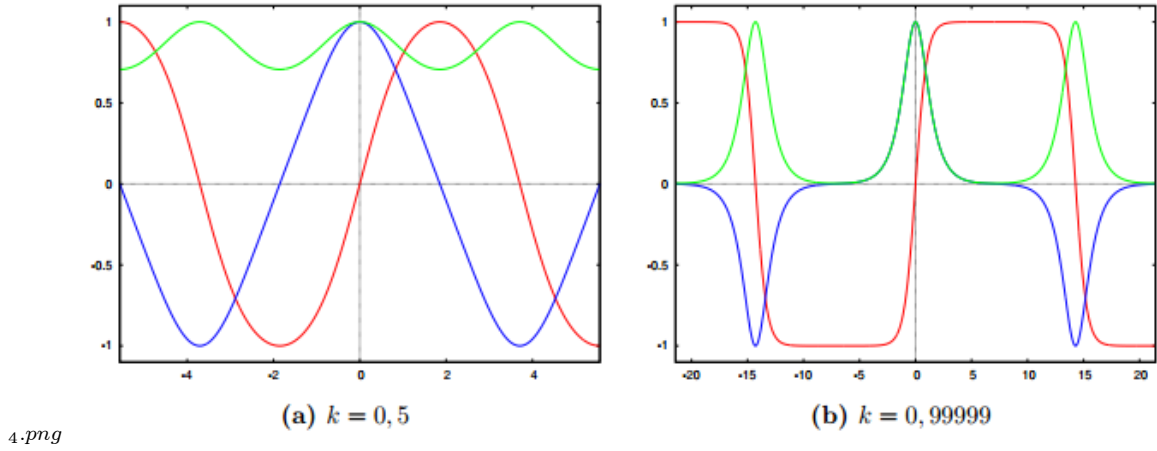


FIG. 1-4 – Tracés des fonctions de Jacobi pour différentes valeurs de k ; sn est en rouge, cn en bleu et dn en vert.

1.3 Classification des ondes solitaires

1.3.1 Ondes périodique

Une onde périodique est une onde qui se répète de manière régulière à intervalles égaux dans le temps ou dans l'espace. Cela signifie que la forme de l'onde (qu'il s'agisse d'une onde sinusoïdale, carrée, triangulaire, etc.) se répète de façon identique après chaque période.

L'équation d'onde standard $u_{tt} = u_{xx}$ admet des solutions périodiques. La figure 1-5 ci-dessus illustre une de ces solutions périodiques, à savoir $u(x, t) = \cos(x - t)$, pour une équation d'onde standard.

1.3.2 Les Kinks

Les kinks sont des solutions particulières d'ondes solitaires qui décrivent des transitions nettes entre deux états asymptotiques. Plus précisément, un kink représente une déformation ou une discontinuité progressive dans une onde, qui passe d'un état stable à

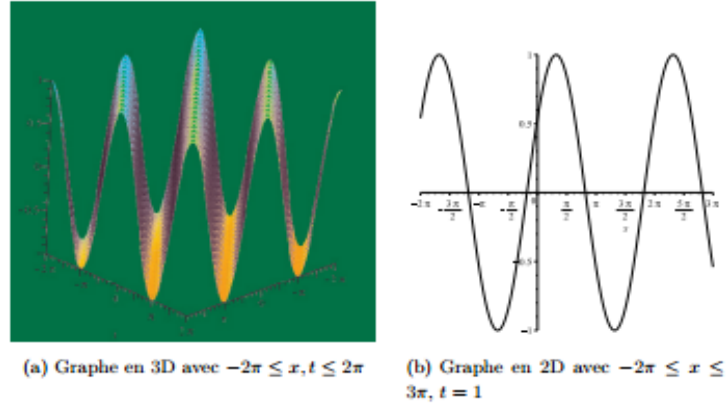


FIG. 1-5 – Solution périodique $u(x, t) = \cos(x - t)$

un autre, généralement de manière lisse mais marquée, et tend vers une valeur constante à mesure qu'on s'éloigne de la région centrale de l'onde. Ces solutions sont souvent associées à des phénomènes non linéaires dans divers systèmes physiques.

L'équation de Burgers standard $u_t + uu_x = \rho u_{xx}$ ou ρ est le coefficient de viscosité, est une équation bien connue qui admet des solutions de type kink. La figure 1-6 ci-dessous illustre une solution de kink, $u(x, t) = 1 - \tanh(x - t)$, pour l'équation de Burgers avec $\rho = \frac{1}{2}$

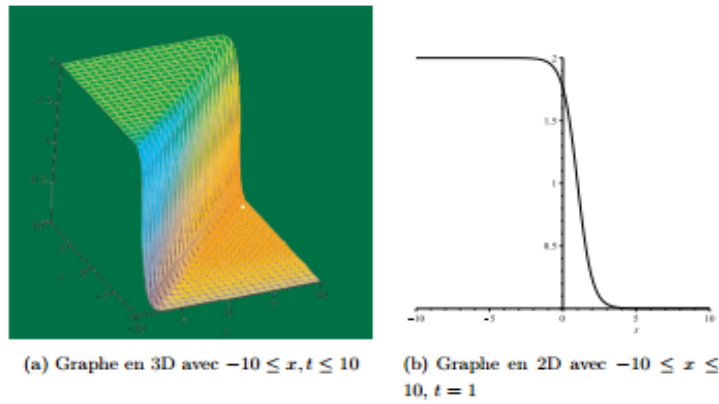


FIG. 1-6 – Une solution de kink $u(x, t) = 1 - \tanh(x - t)$

1.3.3 Peakons

Les peakons sont des ondes solitaires caractérisées par des pointes. Dans ce cas, les solutions d'ondes progressives sont généralement lisses, à l'exception d'un point situé au sommet de la crête. Les peakons correspondent à des points où les dérivées spatiales changent de signe, entraînant un saut fini dans la première dérivée de la solution $u(x, t)$. En d'autres termes, les peakons présentent une discontinuité dans la dérivée par rapport à x , mais les deux dérivées unilatérales existent et diffèrent uniquement par un signe. Les équations intégrables de Camassa-Holm (CH) et Degasperis-Procesi (DP) sont des exemples de systèmes qui décrivent ce type d'ondes.

$$u_t - u_{xxt} + (b+1)uu_x = bu_xu_{xx} + uu_{xxx},$$

pour $b = 2, b = 3$ respectivement, admettent des solutions de peakons.

La figure 1-7 ci-dessous montre une solution de peakon $u(x, t) = c \exp(-|x - ct|)$, pour l'équation CH avec $c = 1$, où c est la vitesse de l'onde.

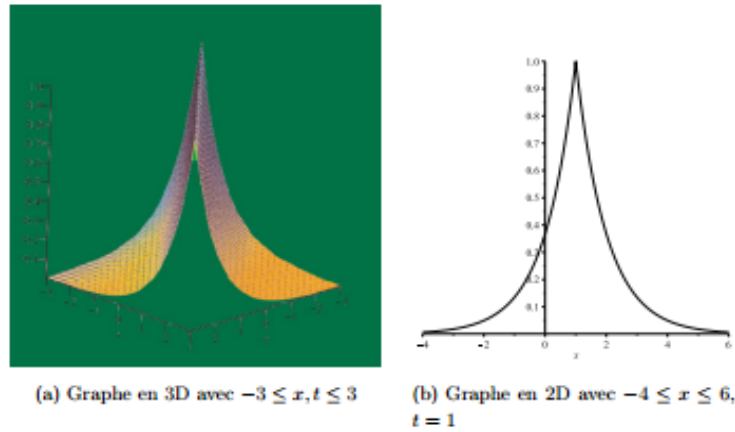


FIG. 1-7 – Une solution de peakon $u(x, t) = c \exp(-|x - ct|)$

1.3.4 Les Cuspons

Les cuspons sont des formes d'ondes solitaires où la solution présente des cuspidés à leurs crêtes. Contrairement aux peakons où les dérivées aux pointes ne diffèrent que par un signe, les dérivées au saut d'un cuspon divergent. La figure 1-8 ci-dessous montre un graphique virtuel d'un cuspon qui n'est pas obtenu à partir d'un modèle bien connu. L'hypothèse est que le cuspon peut être représenté comme suit

$$u(x, t) = C \exp(-|x - ct|^{\frac{1}{n}}), \quad n > 1.$$

Nous pouvons facilement montrer que $u'(\xi) = \infty$ à la cuspide, et $u''(\xi), u'''(\xi), \dots \rightarrow 0$ tel que $\xi \rightarrow \pm\infty, \xi = x - ct$.

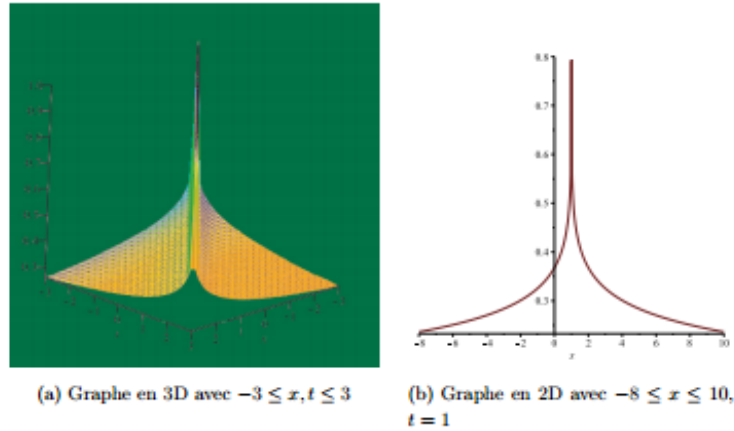


FIG. 1-8 – Un cuspon $u(x, t) = C \exp\left(-|x - ct|^{\frac{1}{n}}\right)$

Conclusion 1.3.1 *Ce chapitre a permis de poser leur fondements conceptuels nécessaires à la compréhension des solutions solitoniques dans les EDP non linéaires. Nous avons introduit la notion d'ondes progressives, distingué entre onde solitaire et soliton, on défini les propriétés essentielles des solitons, présenté leurs différents types ainsi que*

leurs applications. Ces éléments sont indispensables pour aborder dans les chapitres suivants l'analyse des équations intégrables telles que l'équation de Benjamin-Ono, et pour comprendre les techniques numériques permettant de construire ses solutions.

Chapitre 2

Equation de Benjamin Ono et quelques méthode de résolution

2.1 Introduction

L'équation de Benjamin-Ono est une équation aux dérivées partielles non linéaires et dispersive qui modélise la propagation unidimensionnelle d'ondes internes dans des fluides stratifiés, notamment dans des couches profondes d'eau sous une couche de densité différente. Elle a été introduite indépendamment par T. Brooke Benjamin (1967) et H. Ono (1975), d'où son nom.

Mathématiquement, l'équation de Benjamin-Ono s'écrit sous la forme :

$$u_t + \beta u_x u + H u_{xx} = 0, \quad (2.1)$$

ou :

- u est la fonction d'onde,
- H est l'opérateur de Hilbert, qui prend en compte les effets de dispersion définie par

$$H[f](x) = \frac{1}{\pi} p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{x-y} dy, \quad (2.2)$$

Nous procédons comme suit. Premièrement, nous dérivons l'équation de Benjamin-Ono par rapport à t , ce qui donne

$$u_{tt} + \beta(u_x u)_t + H u_{xxt} = 0. \quad (2.3)$$

Le terme $(uu_x)_t$ peut être réécrit grâce à la règle de la chaîne :

$$(uu_x)_t = u_t u_x + uu_{xt} = \partial_x(uu_t) = \frac{1}{2}(u^2)_{xt}.$$

Ensuite, nous développons les termes à l'aide de la règle de la chaîne et introduisons les variables v et ε supposées proportionnelles à u : $v = ku$ et $\varepsilon = mu$, où k et m sont des constantes de proportionnalité. Comme u apparaît toujours sous forme de produits quadratiques (de forme uu_x), on peut représenter ces produits par des dérivées secondes de v^2, ε^2 et $v\varepsilon$, on utilise le fait que : comme $v = ku$ et $\varepsilon = mu$ on a

$$u^2 = \frac{1}{k^2}v^2 = \frac{1}{m^2}\varepsilon^2 = \frac{1}{km}(v\varepsilon).$$

Donc $(u^2)_{xx}$ est équivalent à $(v^2)_{xx}, (\varepsilon^2)_{xx}, (v\varepsilon)_{xx}$.

En regroupant les contributions issues de ces expressions on obtient un terme quadratique unique de la forme

$$(v^2)_{xx} + 2(v\varepsilon)_{xx} = (k^2 + 2km)(u^2)_{xx}.$$

Afin de simplifier le traitement du terme croisé $(u^2)_{xt}$ nous introduisons l'hypothèse de proportionnalité entre les dérivées temporelles et spatiales. Cette hypothèse repose sur l'idée que la solution recherchée correspond à une onde progressive de la forme $u(x, t) = u(\xi), \xi = x - ct$ où c désigne la vitesse de propagation dans ce cas toute dépendance en temps s'exprime uniquement à travers la variable ξ . Ainsi les opérateurs de dérivation deviennent

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

(Il en résulte une relation directe entre les dérivées temporelles et spatiales $\partial_t = -c\partial_x$ il en résulte une approximation couramment adoptée dans l'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires permet de réécrire le terme $(u^2)_{xt} \simeq -c (u^2)_{xx}$). Afin de rendre l'équation de Benjamin-Ono plus adaptée aux méthodes analytiques classiques [18, 29], il est nécessaire d'éliminer la non localité introduite par la transformée de Hilbert.

Rappelons que dans le domaine de Fourier, la transformée de Hilbert agit comme un multiplicateur définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[H(f(k))] &= -i \operatorname{sgn}(k) \hat{f}(k), \\ \mathcal{F}[H(u_{xx})(k)] &= -i \operatorname{sgn}(k) k^2 \hat{u}(k) = i \operatorname{sgn}(k) k^2 \hat{u}(k), \\ \mathcal{F}[H(u_{xxx})(k)] &= -ik^3 \hat{u}(k).\end{aligned}$$

En se limitant aux composantes à fréquence positive (ce qui correspond à une approximation locale), on peut remplacer $i \operatorname{sgn}(k)$ par une dérivée spatiale supplémentaire, ce qui conduit à

$$H(u_{xx}) \approx \gamma u_{xxx},$$

où γ est un paramètre effectif qui conserve l'effet dispersif. Ainsi :

$$H(u_{xxx}) \approx \gamma u_{xxxx}.$$

En substituant l'ensemble de ces résultats dans (2.3), on obtient :

$$u_{tt} + \beta(k^2 + 2km)(u^2)_{xx} + \gamma u_{xxxx} = 0. \quad (2.4)$$

En définissant $\beta'' = \beta(k^2 + 2km)$ et en posant $\beta'' = \beta$ (ce qui implique $k^2 + 2km = 1$) l'équation se simplifie en :

$$u_{tt} + \beta(u^2)_{xx} + \gamma u_{xxxx} = 0, \quad (2.5)$$

où β, γ sont des constantes. Cette équation généralisée est non linéaire et intègre les effets de dispersion, ce qui la rend particulièrement adaptée à la modélisation de la propagation des ondes dans des environnements tels que les eaux profondes.

Cette équation, bien que dérivée du modèle original, conserve la structure non linéaire et dispersive typique des équations d'ondes intégrables. Elle constitue une base plus commode pour l'application de diverses méthodes analytiques, telles que : la méthode $\text{Exp}(-\Phi(\xi))$, ainsi la méthode bilinéaire de Hirota et la méthode de l'équation d'essai ainsi que la méthode (G'/G^2) .

2.2 Méthodes de résolution

La présente partie est consacrée à la présentation de quelques méthodes analytiques permettant de résoudre l'équation de Benjamin-Ono : la méthode de la fonction Exp, la méthode de l'équation d'essai, ainsi que la méthode bilinéaire de Hirota et la méthode d'expansion (G'/G^2) .

2.2.1 La méthode de la fonction Exp

La recherche de solutions exactes aux équations différentielles non linéaires, en particulier les équations aux dérivées partielles (EDP), constitue un domaine fondamental en mathématiques appliquées et en physique théorique. Parmi les méthodes développées dans ce cadre, la méthode de la fonction-Exp, introduite pour la première fois par He and Wu en 2006 [22], s'est rapidement imposée comme une approche efficace et largement utilisée. La méthode repose sur un ansatz exponentiel rationnel, consistant à exprimer la solution d'une EDP non linéaire sous la forme d'un rapport de séries exponentielles finies.

L'un des avantages majeurs de cette méthode est sa capacité à représenter un large spectre de solutions exactes avec une structure simple, ce qui la rend particulièrement adaptée à l'automatisation dans des logiciels de calcul formel tels que Maple ou Mathematica.

Depuis son apparition, la méthode de la fonction-Exp a été appliquée avec succès à un grand nombre d'équations célèbres de la physique mathématique, telles que : l'équation de KdV (Korteweg–de Vries), l'équation de Burgers-Fisher, l'équation de Klein–Gordon, ou encore diverses formes de l'équation de Schrödinger non linéaire. Elle a également fait l'objet de plusieurs améliorations et généralisations, comme la méthode de la fonction Exp, qui introduit l'avantage de termes dans le développement exponentiel pour augmenter la richesse des solutions obtenues.

Déscription de la méthode

Dans cette section, nous donnons une explication de la méthode $\exp(-\Phi(\xi))$ pour obtenir des solutions exactes d'équations différentielles partielles. Considérons une équation différentielle partielle non linéaire générale, disons en deux variables indépendantes x et t , sous la forme suivante :

$$F(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0. \quad (2.6)$$

Nous pouvons résumer les étapes de base de la méthode $\exp(-\Phi(\xi))$ comme suit :

Étape 1 : Utiliser la transformation d'onde progressive. On introduit une nouvelle variable ξ définie par :

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x - vt, \quad (2.7)$$

où v est la vitesse de l'onde, on peut réécrire l'équation (2.6) sous la forme suivante d'une équation différentielle ordinaire non linéaire :

$$Q(u, u', u'', \dots) = 0. \quad (2.8)$$

Ici, la prime ($'$) désigne la dérivée par rapport à ξ . Nous devons intégrer l'équation (2.8) terme par terme dès que possible.

Étape 2 : Selon la méthode $\exp(-\Phi(\xi))$, on suppose que la solution exacte de l'équation

(2.8) peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$u(\xi) = \sum_{n=0}^m a_n (\exp(-\Phi(\xi)))^n, \quad (2.9)$$

où les a_n (pour $n = 0, 1, \dots, m$) sont des constantes à déterminer ultérieurement, avec $m \neq 0$, la fonction $\Phi(\xi)$ satisfait l'équation différentielle ordinaire auxiliaire suivante :

$$\Phi'(\xi) = \exp(-\Phi(\xi)) + \mu \exp(\Phi(\xi)) + \lambda. \quad (2.10)$$

Grâce aux solutions générales de l'équation auxiliaire (2.10), nous obtenons les cas suivants :

Cas 1 : (Solutions en fonctions hyperboliques) : Si $\lambda^2 - 4\mu > 0$ et $\mu \neq 0$

$$\Phi_1(\xi) = \ln \left(\frac{-\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} (\xi + c) \right) - \lambda}{2\mu} \right). \quad (2.11)$$

Cas 2 : (Solutions en fonctions trigonométriques) : Si $\lambda^2 - 4\mu < 0$ et $\mu \neq 0$

$$\Phi_2(\xi) = \ln \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} (\xi + c) \right) - \lambda}{2\mu} \right). \quad (2.12)$$

Cas 3 : (Solutions en fonctions hyperboliques) : Si $\lambda^2 - 4\mu > 0, \mu = 0$ et $\lambda \neq 0$

$$\Phi_3(\xi) = -\ln \left(\frac{\lambda}{\cosh(\lambda(\xi + c)) + \sinh(\lambda(\xi + c)) - 1} \right). \quad (2.13)$$

Cas 4 : (Solutions en fonctions rationnelles) : Si $\lambda^2 - 4\mu = 0, \mu \neq 0$ et $\lambda \neq 0$

$$\Phi_4(\xi) = \ln \left(-\frac{2(\lambda(\xi + c) + 2)}{\lambda^2(\xi + c)} \right). \quad (2.14)$$

Cas 5 : Si $\lambda^2 - 4\mu = 0$, $\mu = 0$ et $\lambda = 0$

$$\Phi_5(\xi) = \ln(\xi + c). \quad (2.15)$$

Ici c est la constante d'intégration et m est un entier positif qui est déterminé en considérant le principe d'équilibre homogène. Plus précisément, on équilibre le terme de plus haut ordre dérivée et le terme non linéaire dans l'équation (2.8).

Étape 3 : En substituant l'expression (2.9) dans l'équation (2.8) ainsi que l'équation (2.10), puis en regroupant tous les coefficients de $\exp(-\Phi(\xi))$, l'équation (2.8) est convertie en un autre polynôme en $\exp(-\Phi(\xi))$. Par la suite, nous égalons chaque coefficient de ce polynôme à zéro et nous obtenons un ensemble d'équations algébriques pour les coefficients a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), v , λ , μ .

Étape 4 : En résolvant le système d'équations algébriques obtenu à l'étape 3 et en substituant ensuite les constantes a_n ($n = 0, 1, 2, \dots, m$), v , λ et μ , ainsi que les solutions de l'équation (2.10) dans l'expression (2.9), nous pouvons obtenir les solutions exactes de l'équation (2.6) sous forme de fonctions trigonométriques, hyperboliques ou rationnelles.

Application de la méthode

En tenant compte de la transformation d'onde progressive (2.7), l'équation de Benjamin-Ono peut être réduite à l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$v^2 u'' + 2\beta \left((u')^2 + uu'' \right) + \gamma u'''' = 0, \quad (2.16)$$

où β et γ sont des constantes, et la prime désigne la dérivée par rapport à ξ . En appliquant le principe de l'équilibre homogène, on détermine le nombre d'équilibre comme étant $m = 2$. Cela signifie que le degré maximal de la solution dans la série exponentielle doit être 2 pour équilibrer les termes de dérivées et les les termes non-linéaires.

Par conséquent, on peut chercher les solutions exactes sous la forme suivante :

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \exp(-\Phi(\xi)) + a_2 (\exp(-\Phi(\xi)))^2. \quad (2.17)$$

Nous substituons l'équation (2.17) dans l'équation (2.16) puis nous regroupons tous les termes selon les puissances de $\exp(-\Phi(\xi))^n$ (pour $n = 0, 1, \dots, 6$). L'équation (2.16) se transforme alors en un polynôme en $\exp(-\Phi(\xi))^n$. Ensuite, en équilibrant chaque coefficient de ce polynôme à zéro, on obtient un système d'équations algébriques.

Ce système peut ensuite être résolu pour déterminer les constantes et obtenir les solutions exactes de l'équation de Benjamin-Ono sous la forme proposée dans (2.17).

En résolvant ce système obtenue, on obtient

$$a_0 = -\frac{v^2 + \gamma\lambda^2 + 8\gamma\mu}{2\beta}, \quad a_1 = \frac{\beta\gamma\lambda}{\beta}, \quad a_2 = -\frac{6\gamma}{\beta}. \quad (2.18)$$

Par conséquent, nous obtenons les différents cas suivants pour les solutions exactes de l'équation de Benjamin-Ono

Cas 1 : (Solutions en fonctions hyperboliques) Si $\lambda^2 - 4\mu > 0$ et $\mu \neq 0$

$$\begin{aligned} u_1(\xi) = & \frac{12\mu\lambda\gamma}{\beta \left(\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} (\xi + c) \right) - \lambda \right)} \\ & - \frac{24\mu^2\gamma}{\beta \left(\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} (\xi + c) \right) - \lambda \right)} \\ & - \frac{v^2 + \gamma\lambda^2 + 8\gamma\mu}{2\beta}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Cas 2 : (Solutions en fonctions trigonométriques) Si $\lambda^2 - 4\mu < 0$ et $\mu \neq 0$

$$u_2(\xi) = \frac{12\mu\lambda\gamma}{\beta \left(\sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} (\xi + c) \right) - \lambda \right)} - \frac{24\mu^2\gamma}{\beta \left(\sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} (\xi + c) \right) - \lambda \right)^2} - \frac{v^2 + \gamma\lambda^2 + 8\gamma\mu}{2\beta}. \quad (2.20)$$

Cas 3 : (Solutions en fonctions hyperboliques) Si $\lambda^2 - 4\mu > 0, \mu = 0$ et $\lambda \neq 0$

$$u_3(\xi) = -\frac{v^2 + \gamma\lambda^2 + 8\gamma\mu}{2\beta} - \left(\frac{6\gamma\lambda^2}{\beta (\cosh(\lambda(\xi + c)) + \sinh(\lambda(\xi + c)) - 1)} \right) - \frac{6\gamma\lambda^2}{\beta (\cosh(\lambda(\xi + c)) + \sinh(\lambda(\xi + c)) - 1)^2}. \quad (2.21)$$

Cas 4 : (Solutions en fonctions rationnelles) Si $\lambda^2 - 4\mu = 0, \mu \neq 0$ et $\lambda \neq 0$

$$u_4(\xi) = -\frac{v^2 + \gamma\lambda^2 + 8\gamma\mu}{2\beta} + \frac{3\gamma\lambda^3(\xi + c)}{\beta (\lambda(\xi + c) + 2)} - \frac{6\gamma}{\beta} \left(\frac{\lambda^2(\xi + c)}{2(\lambda(\xi + c) + 2)} \right)^2. \quad (2.22)$$

Cas 5 : Si $\lambda^2 - 4\mu = 0, \mu = 0$ et $\lambda = 0$

$$u_5(\xi) = -\frac{v^2 + \gamma\lambda^2 + 8\gamma\mu}{2\beta} + \frac{6\gamma\lambda(\xi + c + \gamma)}{\beta(\xi + c)}, \quad (2.23)$$

ou $\xi = x - vt$ et c est la constante d'intégration.

2.2.2 Méthode de l'équation d'essai :

Dans le cadre de la résolution des équations différentielles non linéaires, plusieurs méthodes ont été développées pour construire des solutions exactes d'ondes progressives. Parmi ces approches, la méthode de l'équation d'essai (en anglais trial equation method) s'est imposée comme une technique simple, directe et efficace, notamment pour

les équations différentielles ordinaires (EDO) obtenues après transformation d'équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires via une variable d'onde.

Récemment, M. Boz et A.Bekir. [6] ont proposé une forme généralisée de cette méthode, qui consiste à supposer que la solution cherchée peut être exprimée en fonction d'une solution auxiliaire d'une équation d'essai choisie a priori. Cette équation d'essai est généralement une équation différentielle ordinaire connue, dont les solutions sont bien établies (telles que les fonctions trigonométriques, hyperboliques, rationnelles, elliptiques, etc.).

Elle consiste à supposer une forme de solution (appelée équation Test) basée sur l'expérience ou les propriétés de l'équation, puis à substituer cette forme dans l'équation originale pour déterminer les paramètres inconnus.

Description et application de la méthode

Cette méthode est particulièrement utile lorsque la solution exacte n'est pas évidente à déterminer directement, mais que l'on peut deviner sa structure générale (exponentielle, polynomiale, trigonométrique, etc.)

Soit l'équation de Benjamin-Ono qui s'écrit sous la forme

$$u_{tt} + \beta (u^2)_{xx} + \gamma u_{xxxx} = 0.$$

On appliquant la transformation $u = u(\xi_1)$ avec $\xi_1 = kx + \omega t$, on peut obtenir l'équation différentielle ordinaire (EDO) réduite correspondante.

$$\omega^2 u'' + 2k^2 \beta u u'' + 2k^2 \beta (u')^2 + \gamma k^2 u'''' = 0. \quad (2.24)$$

On considère l'équation d'essai comme suit :

$$u'' = a_0 + a_1 u + \dots + a_m u^m. \quad (2.25)$$

Selon la méthode de l'équation d'essai appliquée à une équation homogène de rang donné,

en équilibrant u^4 avec uu'' on obtient $m = 2$ et

$$u'' = a_0 + a_1u + a_2u^2. \quad (2.26)$$

En intégrant cette équation par rapport à ξ_1 on obtient

$$\begin{aligned} (u')^2 &= \frac{2}{3}a_2u^3 + a_1u^2 + 2a_0u + d \\ u''' &= \frac{10}{3}a_2^2u^3 + 5a_1a_2u^2 + (6a_0a_2 + a_1^2)u + 2a_2d + a_0a_1. \end{aligned}$$

Substituant u''' et l'équation (2.26) dans l'équation (2.24), nous obtiendrons des équations algébriques non linéaires. En résolvant ces équations, nous déterminerons les valeurs de a_0, a_1, a_2, d

$$a_1 = -\frac{\omega^2}{k^4\gamma}, \quad a_2 = -\frac{\beta}{k^2\gamma}, \quad a_0 \text{ et } d \text{ sont des constantes arbitraires}$$

Les conditions ci-dessus étant satisfaites, nous utilisons le système de discrimination complet pour le polynôme du troisième ordre et obtenons le processus de résolution suivant.

$$v = \left(\frac{2}{3}a_2\right)^{\frac{1}{3}} u, \quad \xi = \left(\frac{2}{3}a_2\right)^{\frac{1}{3}} \xi_1, \quad d_2 = a_1 \left(\frac{2}{3}a_2\right)^{\frac{-2}{3}}, \quad d_1 = 2a_0 \left(\frac{2}{3}a_2\right)^{\frac{-1}{3}}, \quad d_0 = d.$$

L'équation $(u')^2 = \frac{2}{3}a_2u^3 + a_1u^2 + 2a_0u + d$ devient $(v')^2 = v^3 + d_2v^2 + d_1v + d_0$, intégrant cette dernière on obtient

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{dv}{\sqrt{v^3 + d_2v^2 + d_1v + d_0}},$$

on pose

$$F(v) = v^3 + d_2v^2 + d_1v + d_0,$$

$$\Delta = -27 \left(\frac{2d_2^3}{27} + d_0 - \frac{d_1 d_3}{3} \right)^2 - 4(d_1 - d_2^2)^3, D_1 = d_1 - \frac{d_2^2}{3}.$$

Selon le système complet de discrimination, nous donnons les solutions d'onde progressive uniques correspondantes à l'équation de Benjamin-Ono

Cas 1 : $\Delta = 0, D_1 < 0, F(v) = 0$ possède une racine réelle double et une racine réelle simple. On a alors

$$F(v) = (v - \lambda_1)^2 (v - \lambda_2), \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Si $v \geq \lambda_2$, les solutions correspondantes sont

$$u_1 = \left(\frac{2}{3} a_2 \right)^{-\frac{1}{3}} \left\{ (\lambda_1 - \lambda_2) \tanh^2 \left[\frac{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}}{2} \left(\frac{2}{3} a_2 \right)^{\frac{1}{3}} (\xi_1 - \xi_0) \right] + \lambda_2 \right\}, (\lambda_1 > \lambda_2), \quad (2.27)$$

$$u_2 = \left(\frac{2}{3} a_2 \right)^{-\frac{1}{3}} \left\{ (\lambda_1 - \lambda_2) \coth^2 \left[\frac{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}}{2} \left(\frac{2}{3} a_2 \right)^{\frac{1}{3}} (\xi_1 - \xi_0) \right] + \lambda_2 \right\}, (\lambda_1 > \lambda_2), \quad (2.28)$$

$$u_3 = \left(\frac{2}{3} a_2 \right)^{-\frac{1}{3}} \left\{ (-\lambda_1 + \lambda_2) \sec^2 \left[\frac{\sqrt{-\lambda_1 + \lambda_2}}{2} \left(\frac{2}{3} a_2 \right)^{\frac{1}{3}} (\xi_1 - \xi_0) \right] + \lambda_2 \right\}, (\lambda_1 < \lambda_2). \quad (2.29)$$

Cas 2 : $\Delta > 0, D_1 < 0, F(v) = 0$ admet une racine triple et on a :

$$F(v) = (v - \lambda)^3,$$

et

$$u_4 = 4 \left(\frac{2}{3} a_2 \right)^{\frac{2}{3}} (\xi_1 - \xi_0)^{-2} + \lambda. \quad (2.30)$$

Cas 3 : $\Delta = 0, D_1 = 0, F(v) = 0$ admet trois racines réelles distinctes et on a

$$F(v) = (v - \lambda_1) (v - \lambda_2) (v - \lambda_3), \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3,$$

Lorsque $\lambda_1 < v < \lambda_2$, on prend la transformation suivante

$$v = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1) \sin^2 \varphi$$

donc

$$\pm (\xi - \xi_0) = \int \frac{dv}{\sqrt{F(v)}} = \frac{2}{\sqrt{\lambda_3 - \lambda_1}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}}.$$

où $m^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1}$. D'après la définition de la fonction sinus elliptique de Jacobi, nous avons

$$v = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1) sn^2 \left(\frac{\sqrt{\lambda_3 - \lambda_1}}{2} (\xi_1 - \xi_0), m \right)$$

et la solution correspondante est

$$u_5 = \left(\frac{2}{3} a_2 \right)^{-\frac{1}{3}} \left[\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) sn^2 \left(\frac{\sqrt{\lambda_3 - \lambda_1}}{2} (\xi_1 - \xi_0), m \right) \right]. \quad (2.31)$$

Cas 4 : $\Delta < 0$, $F(v) = 0$ admet une racine réel et on a

$$F(v) = (v - \lambda) (v^2 + pv + q), \quad p^2 - 4q < 0,$$

et

$$u_6 = \left(\frac{2}{3} a_2 \right)^{\frac{1}{3}} \left[\lambda + \frac{2\sqrt{\lambda^2 + p\lambda + q}}{1 + cn \left((\lambda^2 + p\lambda + q)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2}{3} a_2 \right)^{-\frac{1}{3}} (\xi_1 - \xi_0), m \right)} - \sqrt{\lambda^2 + p\lambda + q} \right]. \quad (2.32)$$

2.2.3 La méthode bilinéaire de Hirota (l'approche bilinéaire)

La résolution des équations différentielles non linéaires a toujours représenté un défi important en mathématiques appliquées et en physique théorique, en particulier lorsqu'il s'agit de modèles décrivant des phénomènes complexes tels que la propagation d'ondes, les interactions non linéaires ou la dynamique des solitons. Dans ce contexte, la méthode

bilinéaire de Hirota, développée initialement par Ryogo Hirota dans les années 1970, [26], a joué un rôle fondamental dans l'étude et la construction de solutions exactes multi-solitons d'équations intégrables.

La méthode repose sur une transformation de variable dépendente qui permet de réécrire une équation non linéaire donnée sous une forme bilinéaire à l'aide d'opérateurs différentiels spécifiques appelés opérateurs bilinéaires de Hirota. Cette reformulation rend possible la construction systématique de solutions analytiques, souvent sous forme de fonctions exponentielles, déterminants de type Wronskien, ou solutions de type Grammiens.

Description et application de la méthode

Soit l'équation de Benjamin-Ono suivante

$$u_t + H u_{xx} + u u_x = 0, \quad (2.33)$$

où H représente la transformée de Hilbert, que nous considérons comme indépendante de x et de t , donc constante.

Pour l'équation de Benjamin-Ono peut établir un développement de Painlevé tronqué sous la forme

$$u = \frac{u_0}{f} + u_1, \quad (2.34)$$

avec u_0, u_1, f sont des fonctions dépendant de x et t , on substitue (2.34) dans l'équation (2.33) et on équilibrant tous les coefficients des différentes puissances de f , on obtient

$$u_0 = 2H f_x, \text{ et } u_1 = \frac{f_t - 2H f_{xt} + H f_{xx}}{f_x}$$

En remplaçant la valeur de u_0 dans l'équation (2.34) et en tronquant u_1 , on obtient

$$u = 2H \frac{f_x}{f}, \text{ ou encore } u = 2H (\ln f)_x. \quad (2.35)$$

On substituant directement l'équation (2.35) dans l'équation (2.33), on obtient la forme

bilinéaire

$$ff_{xt} + f_x f_t + H(ff_{xxx} - f_x f_{xx}) = 0. \quad (2.36)$$

Pour la solution à un seule soliton, on considère d'abord

$$f(x, t) = a_0 + c_1 \exp(k_1 x + w_1 t), \quad (2.37)$$

et le champ de potentiel associé est donner par $v = -u_x$.

En insérant (2.37) et (2.35) dans l'équation (2.36) on obtient les valeurs de a_0 et w_1 ($a_0 = \text{const}, w_1 = -Hk_1^2$), si l'on remplace la valeur de a_0, w_1 dans (2.36), (2.37). On obtient alors la solution soliton simple suivante

$$u(x, t) = \frac{2Hk_1 c_1 \exp(k_1(x - Hk_1 t))}{a_0 + c_1 \exp(k_1(x - Hk_1 t))}, \quad (2.38)$$

et la fonction de potentiel associée est donnée par

$$v(x, t) = \frac{2Hk_1^2 c_1^2 \exp(2k_1(x - Hk_1 t))}{(a_0 + c_1 \exp(k_1(x - Hk_1 t)))^2} - \frac{2Hk_1^2 c_1^2 \exp(k_1(x - Hk_1 t))}{a_0 + c_1 \exp(k_1(x - Hk_1 t))}. \quad (2.39)$$

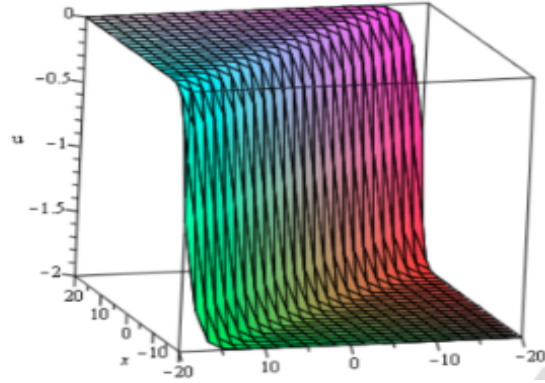


FIG. 2-1 – Surface 3D de la solution (equation (2.38)) de l'équation de Benjamin-Ono avec $k_1 = -1, H = c_1 = a_0 = 1$

Pour obtenir une solution a deux solitons de (2.33) nous supposons simplement que

$$f(x, t) = a_0 + c_1 \exp(\xi_1) + c_2 \exp(\xi_2) + a_{12}c_1c_2 \exp\{\xi_1 + \xi_2\}, \quad (2.40)$$

ou $\xi_1 = k_1x + w_1t$, $\xi_2 = k_2x + w_2t$ et $v = -u_x$. En combinant (2.40) avec (2.35) dans la forme bilinéaire (2.34). Nous obtenons des polynômes qui sont des fonctions des variables x et t . En annulant tous les coefficients des différentes puissances de l'exponentielle, on obtient un système d'equations algébriques en fonction de $k_1, k_2, c_1, c_2, w_1, w_2$. En résolvant ce système, nous obtenons plusieurs ensembles de paramètres donnés ci-dessous.

Cas 1 : $a_0 = \text{const}, a_{12} = 0, w_1 = -Hk_1^2, w_2 = -Hk_2^2$, alors

$$u(x, t) = 2H \left(\frac{k_1c_1 \exp(k_1(x - Hk_1t)) + k_2c_2 \exp(k_2(x - Hk_2t))}{a_0 + c_1 \exp(k_1(x - Hk_1t)) + c_2 \exp(k_2(x - Hk_2t))} \right). \quad (2.41)$$

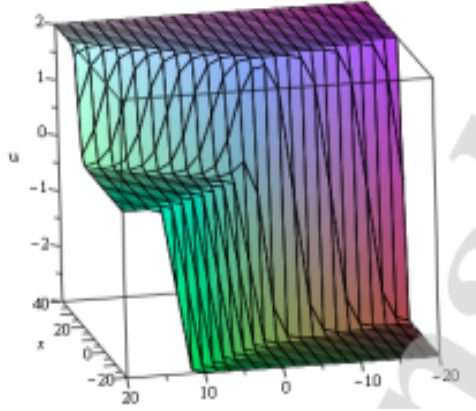


FIG. 2-2 – Surface de la solution à deux ondes solitaires

Cas 2 : $a_0 = 0, a_{12} = \text{const}, w_1 = -H(k_1^2 + 2k_1k_2), w_2 = -H(k_1k_2 + 2k_2^2)$, alors

$$u(x, t) = 2H \left(\frac{k_1c_1 \exp(\xi_1) + k_2c_2 \exp(\xi_2) + a_{12}(k_1 + k_2)c_1c_2 \exp\{\xi_1 + \xi_2\}}{c_1 \exp(\xi_1) + c_2 \exp(\xi_2) + a_{12}c_1c_2 \exp\{\xi_1 + \xi_2\}} \right).$$

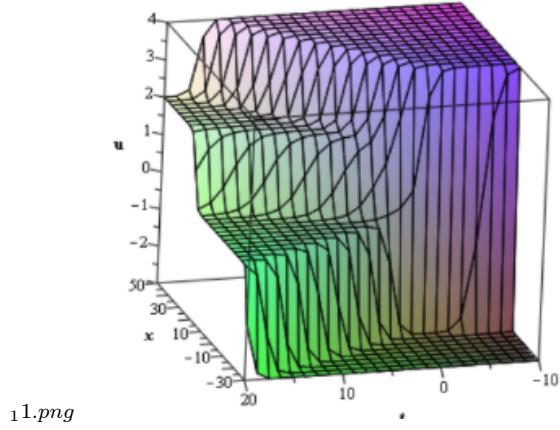


FIG. 2-3 – Surface de la solution à trois ondes solitaires

Cas 3 : $a_0 = 0, a_{12} = 0, w_1 = H(k_2^2 - k_1^2) + w_2, w_2 = \text{const}$, alors

$$u(x, t) = 2H \left(\frac{k_1 c_1 \exp(k_1 x + (H(k_2^2 - k_1^2) + w_2)t) + k_2 c_2 \exp(k_2 x + w_2 t)}{c_1 \exp(k_1 x + (H(k_2^2 - k_1^2) + w_2)t) + c_2 \exp(k_2 x + w_2 t)} \right).$$

Pour obtenir trois solutions solitons de (2.33) nous supposons que

$$\begin{aligned} f(x, t) = & a_0 + c_1 \exp(\xi_1) + c_2 \exp(\xi_2) + c_3 \exp(\xi_3) + a_{12} c_1 c_2 \exp\{\xi_1 + \xi_2\} \\ & + a_{23} c_2 c_3 \exp\{\xi_2 + \xi_3\} + a_{13} c_1 c_3 \exp\{\xi_1 + \xi_3\} + a_{123} c_1 c_2 c_3 \exp\{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3\} \end{aligned} \quad (2.42)$$

ou $\xi_1 = k_1 x + w_1 t, \xi_2 = k_2 x + w_2 t, \xi_3 = k_3 x + w_3 t$ et $v = -u_x$. En combinant (2.42) avec (2.35) dans la forme bilinéaire (2.34). Nous obtenons des polynômes qui sont des fonctions des variables x et t . En annulant tous les coefficients des différentes puissances de l'exponentielle, on obtient un système d'équations algébriques en fonction de $k_1, k_2, k_3, c_1, c_2, c_3, w_1, w_2, w_3, a_{12}, a_{23}, a_{123}$. En résolvant ce système, nous obtenons plusieurs ensembles de paramètres qui sont donnés ci-dessous.

Cas 1 ; $a_0 = \text{constant}, a_{12} = 0, a_{23} = 0, a_{13} = 0, a_{123} = 0, w_1 = -Hk_1^2, w_2 = -Hk_2^2, w_3 =$

$-Hk_3^2$, alors

$$u(x, t) = 2H \left(\frac{k_1 c_1 \exp(k_1(x - Hk_1 t)) + k_2 c_2 \exp(k_2(x - Hk_2 t)) + k_3 c_3 \exp(k_3(x - Hk_3 t))}{a_0 + c_1 \exp(k_1(x - Hk_1 t)) + c_2 \exp(k_2(x - Hk_2 t)) + c_3 \exp(k_3(x - Hk_3 t))} \right)$$

Cas 2 : $a_{12} = \text{constant}, a_0 = a_{23} = a_{13} = 0, a_{123} = 0, w_1 = -H(k_1^2 + 2k_1 k_2), w_2 = -H(k_2^2 + 2k_1 k_2), w_3 = -H(k_3^2 + 2k_1 k_2)$, donc

$$u(x, t) = 2H \left(\frac{k_1 c_1 \exp(\xi_1) + k_2 c_2 \exp(\xi_2) + k_3 c_3 \exp(\xi_3) + a_{12}(k_1 + k_2)c_1 c_2 \exp\{\xi_1 + \xi_2\}}{c_1 \exp(\xi_1) + c_2 \exp(\xi_2) + c_3 \exp(\xi_3) + a_{12}c_1 c_2 \exp\{\xi_1 + \xi_2\}} \right)$$

2.2.4 La méthode d'expansion modifiée (G'/G^2)

Récemment, Liu et A. [32] ont proposé une méthode améliorée d'expansion fonctionnelle pour construire des solutions exactes d'ondes progressives d'équations d'évolution non linéaires, appelée méthode d'expansion (G'/G^2) . Cette méthode constitue une généralisation directe de la méthode bien connue (G'/G) , introduite plus tôt par Wang et al. (2007), dans laquelle la solution est supposée sous la forme d'un polynôme en (G'/G^2) , où $G = G(\xi)$ est une fonction satisfaisant une équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre.

Dans cette section, nous appliquons la méthode d'expansion (G'/G^2) pour déterminer des solutions exactes à ondes progressives de l'équation de Benjamin-Ono. Après transformation par la variable d'onde $\xi = x - ct$, l'équation est réduite à une équation différentielle ordinaire, ce qui permet l'application directe de la méthode.

Les solutions obtenues par cette méthode peuvent être exprimées sous forme de fonctions trigonométriques, exponentielles, hyperboliques ou rationnelles, en fonction des valeurs des paramètres caractéristiques. Ces résultats montrent que la méthode d'expansion (G'/G^2) est simple à mettre en œuvre, puissante, et capable de générer une grande diversité de solutions pour les équations différentielles non linéaires.

Cette étude vise donc à démontrer l'efficacité de la méthode et à élargir le champ des

solutions possibles pour l'équation de Benjamin-Ono.

$$u_t + au_{xx} + uu_x = 0. \quad (2.43)$$

Description de la méthode

Commençons notre discussion par les équations différentielles non linéaires (EDNL), qui peuvent être exprimées comme une combinaison de termes dépendants et indépendants d'ordres différents ainsi que de leurs dérivées partielles

$$P(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0, \quad (2.44)$$

où $u = u(x, t)$ est la fonction inconnue, et P est un polynôme en u et ses dérivées.

Etape 1 : On réduit l'équation (2.43) à l'équation différentielle ordinaire (EDO) non linéaire suivante par la transformation d'onde $\xi = x - Vt$ où V est la vitesse de l'onde progressive. On obtient alors

$$Q(u, -Vu', ku', ku'', \dots) = 0, \quad (2.45)$$

où $u(\xi) = u(x, y, t, \dots)$ et Q est un polynôme de u et de ses dérivées par rapport à ξ .

Etape 2 : Supposons que la solution de l'équation (2.45) par onde progressive puisse être exprimée par un polynôme de la forme suivante :

$$u(\xi) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^N \left\{ \alpha_i \left(\frac{G'}{G^2} \right)^i + \beta_i \left(\frac{G'}{G^2} \right)^{-i} \right\} \quad (2.46)$$

où $\alpha_i (i = 0, 1, 2, \dots, N)$ et $\beta_i (i = 1, 2, \dots, N)$ sont des constantes à déterminer, et $G = G(\xi)$ vérifie l'équation :

$$\left(\frac{G'}{G^2} \right)' = \rho \left(\frac{G'}{G^2} \right)^2 + \mu \left(\frac{G'}{G^2} \right) + \sigma, \quad (2.47)$$

où ρ, μ et σ sont des constantes arbitraires.

Étape 3 : Déterminer l'entier positif N en équilibrant les termes non linéaires de plus haut ordre avec les dérivées d'ordre le plus élevé dans l'équation (2.45).

Étape 4 : La solution générale de l'équation (2.47) correspond à l'un des cinq cas suivants :

Cas 1 : (solution trigonométrique) Si : $\sigma\rho > 0, \mu = 0$

$$\left(\frac{G'}{G^2}\right) = \sqrt{\frac{\sigma\rho}{\sigma}} \left[\frac{A \cos(\sqrt{\sigma\rho}\xi) + B \sin(\sqrt{\sigma\rho}\xi)}{-A \sin(\sqrt{\sigma\rho}\xi) - B \cos(\sqrt{\sigma\rho}\xi)} \right]. \quad (2.48)$$

Cas 2 : (solution hyperbolique) Si : $\sigma\rho < 0, \mu = 0$

$$\left(\frac{G'}{G^2}\right) = -\frac{\sqrt{|\sigma\rho|}}{\rho} \left[\frac{A \sinh(2\sqrt{|\sigma\rho|}\xi) + B \cosh(2\sqrt{|\sigma\rho|}\xi) + B}{A \cosh(2\sqrt{|\sigma\rho|}\xi) + B \sinh(2\sqrt{|\sigma\rho|}\xi) - B} \right]. \quad (2.49)$$

Cas3 : (solution rationnelle) Si : $\sigma = \mu = 0$ et $\rho \neq 0$

$$\left(\frac{G'}{G^2}\right) = \frac{-A}{\rho(A\xi + B)}. \quad (2.50)$$

Cas 4 : (solution hyperbolique) Si : $\mu \neq 0, \Delta \geq 0$

$$\left(\frac{G'}{G^2}\right) = -\frac{\mu}{2\rho} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\rho} \left[\frac{A \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right) + B \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right)}{A \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right) + B \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right)} \right]. \quad (2.51)$$

Cas 5 : (solution hyperbolique) Si : $\mu \neq 0, \Delta < 0$

$$\left(\frac{G'}{G^2}\right) = -\frac{\mu}{2\rho} - \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\rho} \left[\frac{-(A \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}\xi\right) - B \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}\xi\right))}{(A \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}\xi\right) + B \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}\xi\right))} \right]. \quad (2.52)$$

ici A, B sont des constants et $\Delta = \mu^2 - 4\rho\sigma$.

Étape 5 : On utilise l'équation (2.47) pour calculer les dérivées, puis substituez-les dans l'équation (2.46) dans l'équation (2.45). En regroupant tous les termes de même puissance, formez un système d'équations algébriques. Résolvez ce système à l'aide d'un logiciel tel que Maple. Enfin, utilisez les équations (2.48), (2.49), (2.50), (2.51) et (2.52) pour obtenir les solutions exactes de l'équation (2.44).

Application de la méthode (G'/G^2)

Considérons l'équation BO donnée par (2.43).

Supposons la transformation

$$U(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x - Vt,$$

On trouve alors les dérivées suivantes :

$$u_t = -Vu', \quad u_x = u', \quad u_{xx} = u''.$$

En les substituant dans l'équation (2.43), on obtient l'équation différentielle ordinaire (EDO) suivante :

$$-Vu' + \frac{1}{2}(u^2)' + au'' = 0. \quad (2.53)$$

En intégrant l'équation (2.53) on obtient

$$-Vu + au' + \frac{1}{2}(u)^2 = 0. \quad (2.54)$$

En appliquant la méthode de l'équilibre homogène, comme discuté précédemment, on obtient $N = 1$. Par conséquent, la solution générale prend la forme suivante :

$$u(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'}{G^2} \right)^1 + \beta_1 \left(\frac{G'}{G^2} \right)^{-1}. \quad (2.55)$$

En substituant correctement u, u^2, u' dans l'équation (2.54), conjointement avec l'équation (2.55), puis en regroupant tous les termes en $\frac{G'}{G^2}$ selon les mêmes puissances, et en an-

nulant séparément chacun de ces polynômes, on obtient un système d'équations algébriques, pour déterminer les constantes : $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ et ρ comme suit :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{G'}{G^2}\right)^2 &: \frac{1}{2}\alpha_1^2 = 0, \\
\left(\frac{G'}{G^2}\right)^1 &: Va\alpha_1 + V\alpha_1 + \alpha_0\alpha_1 = 0, \\
\left(\frac{G'}{G^2}\right)^0 &: a\alpha_1\sigma - V\alpha_0 - \beta_1\rho + \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \alpha_1\beta_1 = 0, \\
\left(\frac{G'}{G^2}\right)^{-1} &: \beta_1\alpha_0 - V\beta_1 + 3\alpha_0^2\beta_1 + 3\alpha_1\beta_1^2 = 0, \\
\left(\frac{G'}{G^2}\right)^{-2} &: \frac{1}{2}\beta_1^2 - a\beta_1\sigma = 0.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Par simplification algébrique de l'équation (2.56) ci-dessus à l'aide de Mathematica, on obtient les ensembles de solutions suivants pour différentes valeurs de a_0, a_1, b_1 et σ, ρ

$$\alpha_0 = V, \alpha_1 = \frac{V^2 + 4a\sigma\rho}{4a\sigma}, \beta_1 = 2a\sigma. \tag{2.57}$$

On obtient cinq solutions différentes.

Cas 1 : Solution trigonométrique

$$\begin{aligned}
u_{11} = & V + \frac{V^2 + 4a\sigma\rho}{4a\sigma} \frac{\sqrt{\sigma\rho}}{\sigma} \left(\frac{A_1 \cos \sqrt{\sigma\rho}\phi + A_2 \sin \sqrt{\sigma\rho}\phi}{A_1 \sin \sqrt{\sigma\rho}\phi - A_2 \cos \sqrt{\sigma\rho}\phi} \right)^1 \\
& + 2a\sigma \frac{\sqrt{\sigma\rho}}{\sigma} \left(\frac{A_1 \cos \sqrt{\sigma\rho}\phi + A_2 \sin \sqrt{\sigma\rho}\phi}{A_1 \sin \sqrt{\sigma\rho}\phi - A_2 \cos \sqrt{\sigma\rho}\phi} \right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Cas 2 : Solution hyperbolique

$$\begin{aligned}
u_{12} = & V - \left(\frac{V^2 + 4a\sigma\rho}{4a\sigma} \right) \frac{\sqrt{|\sigma\rho|}}{\sigma} \left(\frac{A_1 \sinh 2\sqrt{|\sigma\rho|}\phi + A_2 \cosh 2\sqrt{|\sigma\rho|}\phi}{A_1 \cosh 2\sqrt{|\sigma\rho|}\phi + A_2 \sinh 2\sqrt{|\sigma\rho|}\phi} \right)^1 \\
& + 2a\sigma \frac{\sqrt{|\sigma\rho|}}{\sigma} \left(\frac{A_1 \sinh 2\sqrt{|\sigma\rho|}\phi + A_2 \cosh 2\sqrt{|\sigma\rho|}\phi}{A_1 \cosh 2\sqrt{|\sigma\rho|}\phi + A_2 \sinh 2\sqrt{|\sigma\rho|}\phi} \right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Cas 3 : Solution rationnelle

$$u_{13} = V - \left(\frac{V^2 + 4a\sigma\rho}{4a\sigma} \right) \left(\frac{A_1}{\rho(A_1\phi + A_2)} \right)^1 - 2a\sigma \left(\frac{A_1}{\rho(A_1\phi + A_2)} \right)^{-1}. \quad (2.60)$$

Cas 4 : solution hyperbolique

$$u_{14} = +2a\sigma \left(-\frac{\mu}{2\rho} - \left[\frac{\sqrt{\Delta} \left(A_1 \cosh \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \right) \phi + A_2 \sinh \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \right) \phi \right)}{2\rho \left(A_1 \cosh \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \right) \phi + A_2 \sinh \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \right) \phi \right)} \right] \right)^{-1} \quad (2.61)$$

$$\left(\frac{V^2 + 4a\sigma\rho}{4a\sigma} \right) \left(-\frac{\mu}{2\rho} - \left[\frac{\sqrt{\Delta} \left(A_1 \cosh \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \right) \phi + A_2 \sinh \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \right) \phi \right)}{2\rho \left(A_1 \cosh \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \right) \phi + A_2 \sinh \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \right) \phi \right)} \right] \right)^1 + V.$$

Cas 5 : solution hyperbolique

$$u_{15} = 2a\sigma \left(-\frac{\mu}{2\rho} - \left[\frac{\sqrt{-\Delta} \left(A_1 \cosh \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \right) \phi - A_2 \sinh \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \right) \phi \right)}{2\rho \left(A_1 \cosh \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \right) \phi + A_2 \sinh \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \right) \phi \right)} \right] \right)^{-1} \quad (2.62)$$

$$+ \left(\frac{V^2 + 4a\sigma\rho}{4a\sigma} \right) \left(-\frac{\mu}{2\rho} - \left[\frac{\sqrt{-\Delta} \left(A_1 \cosh \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \right) \phi - A_2 \sinh \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \right) \phi \right)}{2\rho \left(A_1 \cosh \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \right) \phi + A_2 \sinh \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \right) \phi \right)} \right] \right)^1 + V.$$

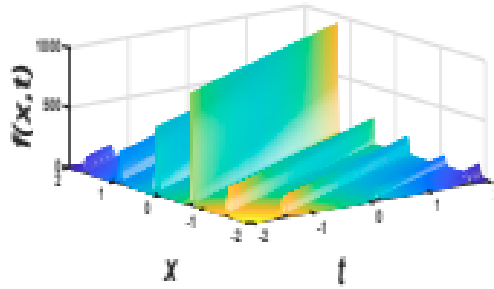


FIG. 2-4 – Représentation de u_{11} , pour $\mu = 0, \rho\sigma > 0, \rho = 1, \sigma = 1, V = 2, a = 3$, and $A = 2, B = 3$

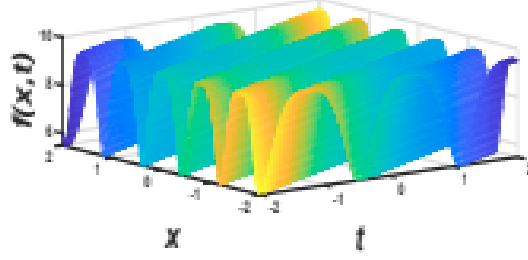


FIG. 2-5 – Représentation de u_{12} , pour $\mu = 0, \rho\sigma > 0, \rho = -1, \sigma = 1, V = 2, a = 4$, and $A = 2, B = 0$

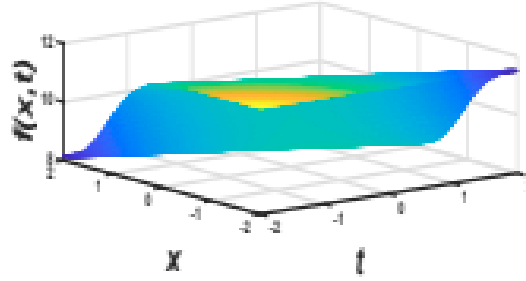


FIG. 2-6 – Représentation de u_{14} , pour $\mu \neq 0, \Delta \geq 0, \mu = -3, \rho = 1, \sigma = 2, V = 2, a = 3$, and $A = 2, B = 3$

Conclusion 2.2.1 *Dans cette partie, nous avons présenté plusieurs méthodes permettant de construire différents types de solutions exactes d'ondes progressives pour l'équation de Benjamin-Ono . Les méthodes étudiées — à s'avoir la méthode de la fonction-Exp, la méthode de l'équation d'essai , la méthode bilinéaire de Hirota ainsi que la méthode d'expansion (G'/G^2) se sont révélées efficaces pour traiter une grande variété d'équations aux dérivées partielles non linéaires , en fournissant des solutions exactes utiles à la modélisation de divers phénomènes physiques non linéaires. La mise en œuvre de ces approches repose sur des étapes de calcul symbolique parfois complexes, ce qui souligne l'importance des outils informatiques comme Mathematica ou Maple, qui facilitent la résolution précise et rapide de ce type d'équations.*

Chapitre 3

Approche analytique de l'équation de Benjamin-Ono par la méthode de sous-équation de Fan

3.1 Introduction

La méthode tanh constitue une approche bien établie pour obtenir des solutions particulières d'un large éventail d'équations différentielles non linéaires. Son efficacité repose sur sa capacité à éviter l'intégration directe en exploitant le fait que les solitons, solutions localisées, peuvent souvent être représentés sous forme de polynômes de fonctions hyperboliques. En substituant cette forme dans l'équation différentielle initiale, celle-ci se transforme en un système d'équations algébriques non linéaires, plus accessible à la résolution.

Dans ce chapitre, nous présentons une extension naturelle et puissante de cette approche : la méthode de la sous-équation de Fan, proposée initialement par **E. Fan** et **Y. Hon** ([13]). Cette méthode permet de rechercher des solutions exactes d'ondes progressives pour diverses équations différentielles non linéaires, en exprimant la solution sous la forme d'un polynôme d'une fonction auxiliaire $\Phi(\xi)$, laquelle satisfait une équation

différentielle ordinaire appelée sous-équation de Fan [47]

Contrairement à d'autres sous-équations classiques (telles que l'équation de Riccati, les équations différentielles elliptiques ou leurs généralisations), la sous-équation de Fan présente une structure plus générale. Elle est en mesure d'englober et de reproduire les solutions issues de ces méthodes antérieures, constituant ainsi un cadre unifié et extensible. La construction de nouvelles formes de solutions pour la sous-équation de Fan revêt donc une importance particulière pour l'enrichissement des familles de solutions exactes applicables aux équations non linéaires.

La méthode de la sous-équation de Fan en éventail s'est imposée comme une technique analytique reconnue et efficace pour la résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires (EDP), offrant plusieurs avantages par rapport aux méthodes traditionnelles. Contrairement à des approches plus classiques, telles que la transformée de diffusion inverse ou la méthode bilinéaire de Hirota, qui exigent souvent une connaissance approfondie de la théorie spectrale, des transformations complexes ou de structures algébriques sophistiquées, la méthode de la sous-équation en éventail repose sur un cadre conceptuel plus simple et systématique. Elle se fonde sur la construction de solutions exactes à partir d'équations auxiliaires et de fonctions spéciales, permettant ainsi de surmonter plusieurs difficultés inhérentes aux techniques non linéaires classiques.

L'un des principaux atouts de cette méthode réside dans sa polyvalence et sa facilité d'application. Elle peut être mise en œuvre pour un large éventail d'EDP non linéaires sans nécessiter de prérequis mathématiques avancés, ce qui en fait un outil pertinent tant pour les chercheurs confirmés que pour les débutants. De plus, elle s'avère particulièrement efficace pour générer des solutions exactes et variées, notamment des solitons, des ondes périodiques ou encore des solutions exprimées à l'aide de fonctions spéciales, qui jouent un rôle fondamental dans l'étude de la dynamique complexe des systèmes non linéaires.

Dans ce qui suit, nous mettons en évidence les principaux avantages de la méthode la sous-équation de Fan en éventail et explorons son importance dans le contexte plus large

de la modélisation mathématique non linéaire.

3.2 Description de la méthode de la sous-équation de Fan

Supposons qu'une équation aux dérivées partielles non linéaire dépend de (x, t) donnée par

$$P(u, u_t, u_x, u_{xt}, u_{tt}, u_{xx}, \dots) = 0. \quad (3.1)$$

où u est une fonction inconnue et P est un polynôme en $u(x, t)$ et ses dérivées partielles, alors au moyen d'une transformation appropriée, elle peut être réduite à une équation différentielle ordinaire non linéaire (EDO) comme suit

$$P(u, u', u'', u''', \dots) = 0. \quad (3.2)$$

Supposons que la solution soit décrite comme suit :

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^n a_i \Phi^i(\xi), \quad (3.3)$$

où a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) sont des constantes à déterminer ultérieurement et $\Phi = \Phi(\xi)$ satisfait l'EDO suivante

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{d\xi} &= \epsilon(b_0 + b_1\Phi + b_2\Phi^2 + b_3\Phi^3 + b_4\Phi^4)^{1/2} \\ &= \epsilon \sqrt{\sum_{i=0}^4 b_i \Phi^i}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

où $\epsilon = \pm 1$ et b_i sont des constantes.

Les dérivées par rapport à ξ sont

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\xi} &= \frac{d\Phi}{d\xi} \frac{du}{d\Phi} \\ &= \epsilon \sqrt{\sum_{i=0}^4 b_i \Phi^i} \frac{du}{d\Phi},\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^4 i b_i \Phi^{i-1} \frac{du}{d\Phi} + \sum_{i=0}^4 b_i \Phi^i \frac{d^2u}{d\Phi^2}, \dots\tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3u}{d\xi^3} &= \left(\frac{1}{2} \sum_{i=0}^4 i(i-1) b_i \Phi^{i-2} \frac{d\Phi}{d\xi} \right) \frac{du}{d\Phi} + \left(\frac{3}{2} \sum_{i=0}^4 i b_i \Phi^{i-1} \frac{d\Phi}{d\xi} \right) \frac{d^2u}{d\Phi^2} \\ &\quad + \left(\sum_{i=0}^4 b_i \Phi \frac{d\Phi}{d\xi} \right) \frac{d^3u}{d\Phi^3}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Les solutions de l'équation (3.4) sont :

Cas 1 : Si $b_0 = b_1 = b_3 = 0$, $b_2 < 0$ et $b_4 > 0$

On a :

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{d\xi} &= \epsilon \sqrt{b_2 \Phi^2 + b_4 \Phi^4} \\ &= \epsilon |\Phi| \sqrt{b_2 + b_4 \Phi^2}\end{aligned}$$

On pose $U = \Phi^2 \Rightarrow \frac{dU}{d\xi} = 2\Phi \frac{d\Phi}{d\xi} = 2\Phi^2 \sqrt{b_2 + b_4 \Phi^2}$, donc :

$$\frac{dU}{d\xi} = 2U \sqrt{b_2 + b_4 U} \Rightarrow \frac{dU}{2U \sqrt{b_2 + b_4 U}} = d\xi$$

On pose : $V = \sqrt{b_2 + b_4 U}$ et $V^2 = b_2 + b_4 U \Rightarrow U = \frac{V^2 - b_2}{b_4}$, alors : $dU = \frac{2V}{b_4} dv$. Donc :

$$\int \frac{dU}{2U \sqrt{b_2 + b_4 U}} = \int d\xi \Rightarrow \int \frac{\frac{2V}{b_4} dv}{\frac{2V}{b_4} (V^2 - b_2)} = \int \frac{dV}{V^2 - b_2} = \int d\xi.$$

Puisque : $b_2 < 0$ on pose $b_2 = -a^2, a > 0$. ($a = \sqrt{-b_2}$)

$$\int \frac{dV}{V^2 - (-a^2)} = \int \frac{dv}{V^2 + a^2} = \int d\xi \Rightarrow \frac{1}{a} \arctan \frac{V}{a} = \xi,$$

ce qui donne :

$$\arctan \frac{V}{a} = a\xi \Rightarrow V = a \tan(a\xi).$$

Puisque $V^2 = b_2 + b_4U = -a^2 + b_4U$ donc

$$\begin{aligned} b_4U &= V^2 + a^2 \\ &= a^2 \tan^2(a\xi) + a^2 \\ &= a^2(1 + \tan^2(a\xi)). \end{aligned}$$

On sait que $1 + \tan^2(a\xi) = \sec^2(a\xi)$ donc :

$$b_4U = a^2 \sec^2(a\xi) \Rightarrow U = \frac{a^2}{b_4} \sec^2(a\xi)$$

$U = \Phi^2 \Rightarrow \Phi = \sqrt{\frac{a^2}{b_4}} \sec(a\xi)$ donc la solution est

$$\Phi(\xi) = \epsilon \sqrt{\frac{-b_2}{b_4}} \sec(\sqrt{-b_2}\xi). \quad (3.8)$$

* **Si** $b_0 = b_1 = b_3 = 0, b_2 > 0$ et $b_4 < 0$

On a :

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \sqrt{b_2\Phi^2 + b_4\Phi^4} = |\Phi| \sqrt{b_2 + b_4\Phi^2}$$

On pose $U = \Phi^2 \Rightarrow \frac{dU}{d\xi} = 2\Phi \frac{d\Phi}{d\xi} = 2\Phi^2 \sqrt{b_2 + b_4\Phi^2}$, donc :

$$\frac{dU}{d\xi} = 2U \sqrt{b_2 + b_4U} \Rightarrow \frac{dU}{2U \sqrt{b_2 + b_4U}} = d\xi$$

Puisque $b_4 < 0$ on suppose $b_4 = -c, c > 0$ et $b_2 = a^2 > 0$.

$$\frac{dU}{d\xi} = 2U\sqrt{a^2 - cU} \Rightarrow \frac{dU}{2U\sqrt{a^2 - cU}} = d\xi$$

On pose $V = \sqrt{a^2 - cU}$ et $V^2 = a^2 - cU \Rightarrow U = \frac{a^2 - V^2}{c}$, alors : $dU = -\frac{2V}{c}dv$. Donc :

$$\int \frac{dU}{2U\sqrt{a^2 - cU}} = \int d\xi \Rightarrow \int \frac{-\frac{2V}{c}dv}{\frac{2V}{c}(a^2 - V^2)} = \int \frac{dV}{V^2 - a^2} = \int d\xi.$$

$\int \frac{dv}{V^2 - a^2} = \int d\xi \Rightarrow \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{V - a}{V + a} \right| = \xi$, ce qui donne : $\ln \left| \frac{V - a}{V + a} \right| = 2a\xi \Rightarrow \frac{V - a}{V + a} = \exp(2a\xi)$. Donc :

$$V = a \left(\frac{1 + \exp(2a\xi)}{1 - \exp(2a\xi)} \right) = a \tanh(a\xi) \quad \text{et} \quad V^2 = a^2 \tanh^2(a\xi)$$

On sait que :

$$V^2 = a^2 - cU \Rightarrow cU = a^2 - V^2 = a^2 - a^2 \tanh^2(a\xi) = a^2 (1 - \tanh^2(a\xi)) = a^2 \operatorname{sech}^2(a\xi).$$

$$U = \frac{a^2}{c} \operatorname{sech}^2(a\xi).$$

On : $U = \Phi^2 \Rightarrow \Phi = \sqrt{\frac{a^2}{c}} \operatorname{sech}(a\xi)$ donc la solution est

$$\Phi(\xi) = \epsilon \sqrt{\frac{-b_2}{b_4}} \operatorname{sech}(\sqrt{b_2}\xi). \quad (3.9)$$

* Si $b_0 = b_1 = b_3 = 0, b_2 = 0$ and $b_4 > 0$.

$$\text{On a : } \frac{d\Phi}{d\xi} = \sqrt{b_4}\Phi^4 = \Phi^2\sqrt{b_4},$$

$$\int \frac{d\Phi}{\Phi^2} = \int \sqrt{b_4}d\xi \Rightarrow \frac{-1}{\Phi} = \sqrt{b_4}\xi, \text{ donc la solution est}$$

$$\Phi(\xi) = -\frac{\epsilon}{\sqrt{b_4}\xi}. \quad (3.10)$$

Cas 2 : Quand $b_1 = b_3 = 0, b_0 = \frac{b_2^2}{4b_4}, b_2 < 0$ and $b_4 > 0$.

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi}{d\xi} &= \epsilon \sqrt{b_0 + b_2 \Phi^2 + b_4 \Phi^4} \\
&= \epsilon \sqrt{b_4 \left(\Phi^4 + \frac{b_2}{b_4} \Phi^2 + \frac{b_2^2}{4b_4^2} \right)} \\
&= \epsilon \sqrt{b_4 (\Phi^2 - \alpha)^2},
\end{aligned}$$

tel que $\alpha = -\frac{b_2}{2b_4}$, donc :

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \sqrt{b_4} (\alpha - \Phi^2) \Rightarrow \frac{d\Phi}{(\alpha - \Phi^2)} = \sqrt{b_4} d\xi,$$

$$\int \frac{d\Phi}{(\alpha - \Phi^2)} = \int \sqrt{b_4} d\xi \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan h \left(\frac{\Phi}{\sqrt{\alpha}} \right) = \sqrt{b_4} \xi, \text{ donc :}$$

$$\arctan h \left(\frac{\Phi}{\sqrt{\alpha}} \right) = \sqrt{\alpha b_4} \xi \Rightarrow \frac{\Phi}{\sqrt{\alpha}} = \tanh(\sqrt{\alpha b_4} \xi),$$

donc la solution est :

$$\Phi(\xi) = \epsilon \sqrt{\frac{-b_2}{2b_4}} \tanh \left(\sqrt{\frac{-b_2}{2}} \xi \right). \quad (3.11)$$

* Quand : $b_1 = b_3 = 0$, $b_0 = \frac{b_2^2}{4b_4}$, $b_2 > 0$ et $b_4 < 0$.

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi}{d\xi} &= \epsilon \sqrt{b_0 + b_2 \Phi^2 + b_4 \Phi^4} \\
&= \epsilon \sqrt{b_4 \left(\Phi^4 + \frac{b_2}{b_4} \Phi^2 + \frac{b_2^2}{4b_4^2} \right)} \\
&= \epsilon \sqrt{b_4 (\Phi^2 + \alpha)^2},
\end{aligned}$$

tel que $\alpha = \frac{b_2}{2b_4}$, donc :

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \sqrt{b_4} (\Phi^2 + \alpha) \Rightarrow \frac{d\Phi}{(\Phi^2 + \alpha)} = \sqrt{b_4} d\xi,$$

$$\int \frac{d\Phi}{(\Phi^2 + \alpha)} = \int \sqrt{b_4} d\xi \Rightarrow \arctan\left(\frac{\Phi}{\sqrt{\alpha}}\right) = \sqrt{\alpha b_4} \xi, \text{ donc :}$$

$$\tan(\arctan(\frac{\Phi}{\sqrt{\alpha}})) = \tan\left(\sqrt{\alpha b_4} \xi\right) \Rightarrow \frac{\Phi}{\sqrt{\alpha}} = \tan\left(\sqrt{\alpha b_4} \xi\right),$$

donc la solution est

$$\Phi(\xi) = \epsilon \sqrt{\frac{b_2}{2b_4}} \tan\left(\sqrt{\frac{b_2}{2}} \xi\right). \quad (3.12)$$

Cas 3 : Quand $b_1 = b_3 = 0$, $b_2 > 0$ et $b_4 < 0$, $b_0 = \frac{1 - m^2}{(2m^2 - 1)^2}$.

On a

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \epsilon \sqrt{b_0 + b_2 \Phi^2 + b_4 \Phi^4}, \quad \epsilon = \pm 1.$$

Nous supposons un ansatz de type elliptique de Jacobi de la forme

$$\Phi(\xi) = \epsilon A \operatorname{cn}(k\xi, m),$$

où A désigne l'amplitude, k le nombre d'onde effectif et $m \in (0, 1)$.

La dérivation de cet ansatz conduit à

$$\begin{aligned} \Phi' &= -A k \operatorname{sn}(k\xi, m) \operatorname{dn}(k\xi, m) \\ (\Phi')^2 &= A^2 k^2 \operatorname{sn}^2 \operatorname{dn}^2. \end{aligned}$$

Utilisant : $\operatorname{sn}^2 = 1 - \operatorname{cn}^2$ et $\operatorname{dn}^2 = 1 - m^2 \operatorname{sn}^2 = 1 - m^2 + m^2 \operatorname{cn}^2$, on obtient :

$$\operatorname{sn}^2 \operatorname{dn}^2 = (1 - m^2) + (2m^2 - 1) \operatorname{cn}^2 - m^2 \operatorname{cn}^4.$$

Donc :

$$(\Phi')^2 = A^2 k^2 [(1 - m^2) + (2m^2 - 1)cn^2 - m^2 cn^4].$$

En identifiant avec le polynôme quartique du membre de droite, on obtient les conditions de cohérence suivantes

$$\begin{cases} A^2 k^2 (1 - m^2) = b_0, \\ A^2 k^2 (2m^2 - 1) = A^2 b_2 \Rightarrow k^2 = \frac{b_2}{2m^2 - 1}, \\ -A^2 k^2 m^2 = A^4 b_4 \Rightarrow A^2 = \frac{-k^2 m^2}{b_4}. \end{cases}$$

En remplaçant $k^2 = \frac{b_2}{2m^2 - 1}$ dans la troisième égalité, on obtient

$$A^2 = \frac{b_2 m^2}{-b_4 (2m^2 - 1)},$$

donc $A = \sqrt{\frac{b_2 m^2}{-b_4 (2m^2 - 1)}}$ (puisque $b_4 < 0$)

En utilisant les valeurs de A^2 et k^2 on trouve

$$b_0 = \frac{1 - m^2}{(2m^2 - 1)^2} \Leftrightarrow b_4 = -b_2^2 m^2.$$

Sous cette condition les expression deviennent

$$k = \sqrt{\frac{b_2}{2m^2 - 1}}, \quad A = \sqrt{\frac{b_2 m^2}{-b_4 (2m^2 - 1)}}$$

et la solution s'écrit

$$\Phi(\xi) = \sqrt{\frac{b_2 m^2}{-b_4 (2m^2 - 1)}} cn \left(\sqrt{\frac{b_2}{(2m^2 - 1)}} \xi, m \right). \quad (3.13)$$

* Quand : $b_1 = b_3 = 0$, $b_2 < 0$ et $b_4 > 0$, $b_0 = \frac{b_2^2 m^2}{b_4(m^2 + 1)}$.

On a :

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \epsilon \sqrt{b_0 + b_2 \Phi^2 + b_4 \Phi^4}.$$

Nous supposons un ansatz de type fonction elliptique de Jacobi de la forme

$$\Phi(\xi) = \epsilon A \operatorname{sn}(k\xi, m),$$

où A désigne l'amplitude, k le nombre d'onde effectif et $m \in (0, 1)$ le module elliptique.

La dérivation de cet ansatz conduit à

$$\begin{aligned} \Phi' &= A k \operatorname{cn}(k\xi, m) \operatorname{dn}(k\xi, m) \\ (\Phi')^2 &= A^2 k^2 \operatorname{cn}^2 \operatorname{dn}^2. \end{aligned}$$

Utilisant : $\operatorname{cn}^2 = 1 - \operatorname{sn}^2$ et $\operatorname{dn}^2 = 1 - m^2 \operatorname{sn}^2$, on obtient : $\operatorname{cn}^2 \operatorname{dn}^2 = (1 - \operatorname{sn}^2)(1 - m^2 \operatorname{sn}^2) = 1 - m^2 \operatorname{sn}^2 - \operatorname{sn}^2 + m^2 \operatorname{sn}^4$. Donc :

$$(\Phi')^2 = A^2 k^2 [1 - (1 + m^2) \operatorname{sn}^2 + m^2 \operatorname{sn}^4].$$

En identifiant avec le polynôme quartique du membre de droite, on obtient les conditions de cohérence suivantes

$$\begin{cases} A^2 k^2 = b_0 \\ -A^2 k^2 (1 + m^2) = A^2 b_2 \Rightarrow k^2 = \frac{-b_2}{1 + m^2} \\ A^2 k^2 m^2 = A^4 b_4 \Rightarrow A^2 = \frac{k^2 m^2}{b_4}. \end{cases}$$

En remplaçant $k^2 = \frac{-b_2}{1 + m^2}$ dans la troisième égalité, on obtient

$$A^2 = \frac{-b_2 m^2}{b_4 (1 + m^2)}.$$

Ainsi, la solution de l'équation différentielle peut être écrite sous la forme

$$\Phi(\xi) = \epsilon \sqrt{\frac{-b_2}{b_4(m^2 + 1)}} \operatorname{sn} \left(\sqrt{-\frac{b_2}{m^2 + 1}} \xi, m \right). \quad (3.14)$$

Cas 4 : Quand $b_0 = b_1 = b_4 = 0$, $b_2 > 0$ on a

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \epsilon \sqrt{b_2 \Phi^2 + b_3 \Phi^3} = \epsilon \Phi \sqrt{b_2 + b_3 \Phi}.$$

On pose : $V = \sqrt{b_2 + b_3 \Phi}$, donc $V^2 = b_2 + b_3 \Phi \Rightarrow \Phi = \frac{V^2 - b_2}{b_3}$ et $d\Phi = \frac{2V}{b_3} dV$,

$\frac{d\Phi}{d\xi} = \Phi \sqrt{b_2 + b_3 \Phi} \Rightarrow \frac{d\Phi}{\Phi \sqrt{b_2 + b_3 \Phi}} = d\xi$, après intégration on obtient :

$$\int \frac{\frac{2V}{b_3} dV}{\frac{V^2 - b_2}{b_3} V} = \int d\xi \Rightarrow 2 \int \frac{dV}{V^2 - b_2} = \xi,$$

donc :

$$\frac{1}{\sqrt{b_2}} \ln \left(\frac{V - \sqrt{b_2}}{V + \sqrt{b_2}} \right) = \xi,$$

$$\ln \left(\frac{V - \sqrt{b_2}}{V + \sqrt{b_2}} \right) = \sqrt{b_2} \xi \Rightarrow \frac{V - \sqrt{b_2}}{V + \sqrt{b_2}} = \exp(\sqrt{b_2} \xi),$$

donc

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{b_2} \left(\frac{1 + \exp(\sqrt{b_2} \xi)}{1 - \exp(\sqrt{b_2} \xi)} \right) \\ &= -\sqrt{b_2} \left(\frac{\exp(\sqrt{b_2} \xi) + 1}{\exp(\sqrt{b_2} \xi) - 1} \right) \\ &= -\sqrt{b_2} \coth \left(\frac{\sqrt{b_2}}{2} \xi \right). \end{aligned}$$

On a : $V^2 = b_2 \coth^2 \left(\frac{\sqrt{b_2}}{2} \xi \right) = b_2 + b_3 \Phi \Rightarrow \Phi = \frac{b_2}{b_3} (\coth^2 \left(\frac{\sqrt{b_2}}{2} \xi \right) - 1) = \frac{b_2}{b_3} \operatorname{csc} h^2 \left(\frac{\sqrt{b_2}}{2} \xi \right)$

et la solution est

$$\Phi(\xi) = -\frac{b_2}{b_3} \sec h^2 \left(\frac{\sqrt{b_2}}{2} \xi \right) \quad (3.15)$$

Quand $b_0 = b_1 = b_4 = 0$, $b_2 < 0$.

On a $\frac{d\Phi}{d\xi} = \sqrt{b_2\Phi^2 + b_3\Phi^3} = \Phi\sqrt{b_2 + b_3\Phi}$.

On pose : $b_2 = -\beta < 0$ ($\beta > 0$), on obtient

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \Phi\sqrt{-\beta + b_3\Phi},$$

on pose : $V = \sqrt{-\beta + b_3\Phi}$, $V^2 = -\beta + b_3\Phi \Rightarrow \Phi = \frac{V^2 + \beta}{b_3}$, et $d\Phi = \frac{2VdV}{b_3}$,

$\frac{d\Phi}{\Phi\sqrt{-\beta + b_3\Phi}} = d\xi \Rightarrow \frac{\frac{2VdV}{b_3}}{\frac{V^2 + \beta}{b_3}V} = \frac{2dV}{V^2 + \beta} = d\xi$, en intégrant les deux membres de l'équation, on obtient :

$$\frac{2}{\sqrt{\beta}} \arctan \frac{V}{\sqrt{\beta}} = \xi \Rightarrow \frac{V}{\sqrt{\beta}} = \tan \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2} \xi \right) \text{ et } V = \sqrt{\beta} \tan \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2} \xi \right).$$

Mais on a $V = \sqrt{-\beta + b_3\Phi} \Rightarrow V^2 = -\beta + b_3\Phi = \beta \tan^2 \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2} \xi \right)$,

$b_3\Phi = \beta \left(\tan^2 \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2} \xi \right) + 1 \right) = \beta \sec^2 \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2} \xi \right) \Rightarrow \Phi = \frac{\beta}{b_3} \sec^2 \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2} \xi \right)$ et la solution est

$$\Phi(\xi) = -\frac{b_2}{b_3} \sec^2 \left(\frac{\sqrt{-b_2}}{2} \xi \right). \quad (3.16)$$

Quand $b_0 = b_1 = b_4 = 0$, $b_2 = 0$.

On a $\frac{d\Phi}{d\xi} = \sqrt{b_3\Phi^3} = \sqrt{b_3}\Phi^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{d\Phi}{\Phi^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{b_3}d\xi$ après intégrant des deux membres de l'équation ,on obtient $\frac{-1}{2\sqrt{\Phi}} = \sqrt{b_3}\xi$ donc la solution est

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{4b_3\xi^2}. \quad (3.17)$$

La recherche des solutions à l'équation (3.2) est décrite par les étapes 1 à 5 suivantes :

Etape 1 - Pour réduire l'équation NPDE (3.1) à l'équation ODE (3.2), nous utilisons la transformation d'onde progressive $u(x, t) = u(\xi)$, ou $\xi = kx + \omega t$.

Etape 2- Pour la méthode suggérée, nous supposons que la solution de l'équation (3.2) peut être présentée sous la forme suivante :

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^n a_i \Phi^i(\xi), \quad (3.18)$$

ou a_i sont des constantes à déterminer, et $\Phi(\xi)$ satisfait l'équation (3.4) .

Etape 3- Pour déterminer l'entier positif n , nous équilibrons le terme linéaire de l'ordre le plus élevé avec le terme non linéaire en substituant l'équation (3.18) et l'équation (3.4) dans l'équation (3.2).

Etape 4- En substituant Eq. (3.4) et Eq. (3.18) dans Eq. (3.2) et en collectant tous les termes de memes puissance de Φ , le membre de gauche de l'équation (3.2) est transformé en un polynôme. En ramenant le coefficient de ce polynôme à zéro, nous dérivons un système d'équations algébriques en termes de a_i ou ($i = 0, 1, 2$) et b_j ($j = 0, 1, 2, 3, 4$).

Etape 5- On obtient une solution sous la forme (3.18) de l'équation NPDE (3.1) en résolvant la sous équation (3.3) pour tous les paramètres possibles a_i ou ($i = 0, 1, 2$).

3.3 Application de la méthode de sous-équation

Dans cette section, nous appliquerons la méthode des sous-équations de Fan à l'équation BO. Considérons d'abord l'équation (2.4) de la section précédente, écrite sous la forme suivante :

$$u_{tt} + \beta(u^2)_{xx} + \gamma u_{xxxx} = 0. \quad (3.19)$$

On considère la transformation d'onde progressive $u = u(\xi)$, $\xi = kx + \omega t$, on appliquant la règle de chaîne, les dérivées partielles deviennent

$$u_t = \omega u', u_x = k u', u_{xx} = k^2 u'', u_{xxx} = k^3 u''', u_{xxxx} = k^4 u'''.$$

de plus :

$$\begin{aligned} (u^2)_{xx} &= (2uu')' = 2(u'u' + u''u) \\ &= 2(u')^2 + 2uu'' \\ &= 2k^2(u')^2 + 2k^2uu'' \end{aligned}$$

et comme :

$$u_{tt} = \omega^2 u''$$

En substituant ces expressions dans l'équation.(3.19),on obtient :

$$(\omega^2)u'' + 2k^2\beta uu'' + 2k^2\beta(u')^2 + \gamma k^4 u''' = 0. \quad (3.20)$$

Afin de déterminer le degré du polynome recherché dans la méthode de Fan,nous appliquons le principe d'équilibre (la balance) entre le terme de plus haut ordre dérivatif et le terme non linéaire dominant de l'équation

On suppose que : $u(\xi) \sim \Phi^n(\xi)$ ou $\Phi(\xi)$ vérifie une équation auxiliaire telle que

$$\Phi' \sim \Phi^2$$

Ainsi, les ordres dominants des dérivées sont

$$u' \sim \Phi^{n+1}, u'' \sim \Phi^{n+2}, u''' \sim \Phi^{n+3}, u^{(4)} \sim \Phi^{n+4}$$

Le terme non linéaire dominant est :

$$uu'' \sim \Phi^n \Phi^{n+2} \sim \Phi^{2n+2}$$

En équilibrant le terme de plus haut ordre dérivatif u'''' avec le terme non linéaire uu'' (ou $(u')^2$), on obtient $(n + 4 = 2n + 2)$ donc $n = 2$.

Par conséquent la solution cherchée de l'équation (3.20) d'écrit sous la forme polynomiale suivante :

$$u(\xi) = a_0 + a_1\Phi(\xi) + a_2\Phi^2(\xi), \quad (3.21)$$

où a_0, a_1 et a_2 à déterminer plutard et $\Phi(\xi)$ satisfait (3.4).

Nous calculons ensuite les dérivées nécessaires : $u', u'', u'''; u''''$ en utilisant la règle de chaine ainsi que l'équation vérifiée par Φ .

En substituant ces expressions et équations (3.21) et (3.4) dans (3.20), nous obtenons un

systeme d'équations algébriques.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 2k\beta\epsilon a_1^2 b_0 + \frac{3}{2}\gamma k^2 \epsilon^2 a_2 b_1^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \epsilon a_1 b_1 + 2\omega^2 \epsilon a_2 b_0 + k^2 \beta \epsilon a_0 a_1 b_1 + \\
 + 4k^2 \beta \epsilon a_0 a_2 b_0 + \frac{1}{2}\gamma k^2 \epsilon^2 a_1 b_1 b_2 + 3\gamma k^2 \epsilon^2 a_1 b_0 b_3 + 8\gamma k^2 \epsilon^2 a_2 b_0 b_2 = 0 \\
 \\
 6k^2 \beta \epsilon a_0 a_2 b_1 + 4k^2 \beta \epsilon a_1 a_2 b_0 + 8k\beta \epsilon a_1 a_2 b_0 + \frac{9}{2}\gamma k^2 \epsilon^2 a_1 b_1 b_3 + 15\gamma k^2 \epsilon^2 a_2 b_1 b_2 + \\
 + 12\gamma k^2 \epsilon^2 a_1 b_0 b_4 + 30\gamma k^2 \epsilon^2 a_2 b_0 b_3 + 2k^2 \beta \epsilon a_0 a_1 b_2 + \omega^2 \epsilon a_1 b_2 + 3\omega^2 \epsilon a_2 b_1 + \\
 k^2 \beta \epsilon a_1^2 b_1 + \gamma k^2 \epsilon^2 a_1 b_2^2 = 0 \\
 \\
 2k^2 \beta \epsilon a_1^2 b_2 + 4k^2 \beta \epsilon a_2^2 b_0 + 8k\beta \epsilon a_2^2 b_0 + 2k\beta \epsilon a_1^2 b_2 + 16\gamma k^2 \epsilon^2 a_2 b_2^2 + \\
 3k^2 \beta \epsilon a_0 a_1 b_3 + 7k^2 \beta \epsilon a_1 a_2 b_1 + 8k^2 \beta \epsilon a_0 a_2 b_2 + 8k\beta \epsilon a_1 a_2 b_1 + 15\gamma k^2 \epsilon^2 a_1 b_1 b_4 \\
 + \frac{15}{2}\gamma k^2 \epsilon^2 a_1 b_2 b_3 + 42\gamma k^2 \epsilon^2 a_2 b_1 b_3 + 72\gamma k^2 \epsilon^2 a_2 b_0 b_4 + 4\omega^2 \epsilon a_2 b_2 + \frac{3}{2}\omega^2 \epsilon a_1 b_3 = 0 \\
 \\
 6k^2 \beta \epsilon a_2^2 b_1 + 8k\beta \epsilon a_2^2 b_1 + 2k\beta \epsilon a_1^2 b_3 + \frac{15}{2}\gamma k^2 \epsilon^2 a_1 b_3^2 + 3k^2 \beta \epsilon a_1^2 b_3 + \\
 + 10k^2 \beta \epsilon a_0 a_2 b_3 + 8k\beta \epsilon a_1 a_2 b_2 + 20\gamma k^2 \epsilon^2 a_1 b_2 b_4 + 90\gamma k^2 \epsilon^2 a_2 b_1 b_4 + \\
 + 65\gamma k^2 \epsilon^2 a_2 b_2 b_3 + 4k^2 \beta \epsilon a_0 a_1 b_4 + 10k^2 \beta \epsilon a_1 a_2 b_2 + 2\omega^2 \epsilon a_2 b_4 + 5\omega^2 \epsilon a_2 b_3 = 0 \\
 \\
 8k^2 \beta \epsilon a_2^2 b_2 + 8k\beta \epsilon a_2^2 b_2 + 2k\beta \epsilon a_1^2 b_4 + \frac{105}{2}\gamma k^2 \epsilon^2 a_2 b_3^2 + 4k^2 \beta \epsilon a_1^2 b_4 + 30\gamma k^2 \epsilon^2 a_1 b_3 b_4 + \\
 + 120\gamma k^2 \epsilon^2 a_2 b_1 b_4 + 13k^2 \beta \epsilon a_1 a_2 b_3 + 12k^2 \beta \epsilon a_0 a_2 b_4 + 8k\beta \epsilon a_1 a_2 b_3 + 6\omega^2 \epsilon a_2 b_4 = 0 \\
 \\
 10k^2 \beta \epsilon a_2^2 b_3 + 8k\beta \epsilon a_2^2 b_3 + 24\gamma k^2 \epsilon^2 a_1 b_4^2 + 8k\beta \epsilon a_1 a_2 b_4 + 168\gamma k^2 \epsilon^2 a_2 b_3 b_4 \\
 + 16k^2 \beta \epsilon a_1 a_2 b_4 = 0 \\
 \\
 120k^2 \gamma \epsilon^2 a_2 b_4^2 + 12k^2 \beta \epsilon a_2^2 b_4 + 8k\beta \epsilon a_2^2 b_4 = 0
 \end{array} \right. \quad (3.22)$$

en résolvant le système algébrique (3.22) avec l'aide de Maple, nous obtenons les solutions suivantes

$$a_0 = a_0, a_1 = 0, a_2 = 0, b_0 = b_0, b_1 = b_1, b_2 = b_2, b_3 = b_3, b_4 = b_4, \quad (3.23)$$

$$a_0 = \frac{-1}{2} \frac{5k^3 \gamma \epsilon b_2 + 3k\omega^2 + 2\omega^2}{k^2 \beta (3k + 2)}, a_1 = a_1, a_2 = 0, b_0 = \frac{25}{12} \frac{k^2 \gamma^2 \epsilon^2 b_2^3}{\beta^2 a_1^2 (9k^2 + 12k + 4)},$$

$$b_1 = \frac{-5}{2} \frac{\gamma k \epsilon b_2^2}{a_1 \beta (3k+2)}, b_2 = b_2, b_3 = \frac{-2}{15} \frac{a_1 \beta (3k+2)}{k \gamma \epsilon}, b_4 = 0, \quad (3.24)$$

$$a_0 = a_0, a_1 = a_1, a_2 = a_2, b_0 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 0, b_4 = 0, \quad (3.25)$$

$$a_0 = \frac{1}{4} \frac{k^2 \beta a_1^2 - 2\omega^2 a_2}{k^2 \beta a_2}, a_1 = a_1, a_2 = a_2, b_0 = \frac{-1}{480} \frac{4\beta a_1^4 (3k+2)}{k a_2^3 \gamma \epsilon}, b_1 = \frac{-1}{60} \frac{a_1^3 \beta (3k+2)}{\gamma k \epsilon a_2^2},$$

$$b_2 = \frac{-1}{20} \frac{a_1^2 \beta (3k+2)}{\gamma k \epsilon a_2}, \quad b_3 = \frac{-1}{15} \frac{a_1 \beta (3k+2)}{k \gamma \epsilon}, \quad b_4 = \frac{-1}{30} \frac{a_2 \beta (3k+2)}{\gamma k \epsilon}. \quad (3.26)$$

Cas 1 : Si $b_0 = b_1 = b_3 = 0$, $b_2 < 0$ et $b_4 > 0$, Eq (3.4) admet une solution triangulaire

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \sqrt{\frac{-b_2}{b_4}} \sec \sqrt{-b_2} \xi \\ &= \sqrt{\frac{\frac{1}{20} \frac{a_1^2 \beta (3k+2)}{\gamma k \epsilon a_2}}{\frac{-1}{30} \frac{a_2 \beta (3k+2)}{\gamma k \epsilon}}} \sec \sqrt{\frac{1}{20} \frac{a_1^2 \beta (3k+2)}{\gamma k \epsilon a_2}} \xi \\ &= \sqrt{\frac{-3a_1^2}{2a_2^2}} \sec \frac{1}{2\sqrt{5}} \sqrt{\frac{a_1^2 \beta (3k+2)}{\gamma k \epsilon a_2}}, \end{aligned}$$

donc

$$\Phi(\xi) = \sqrt{\frac{-3a_1^2}{2a_2^2}} \sec \left(\frac{1}{10} \sqrt{5} \sqrt{\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2} (3k+2)} \xi \right). \quad (3.27)$$

Cas 2 : Si $b_0 = \frac{b_2^2}{4b_4}$, $b_1 = b_3 = 0$, $b_2 > 0$ et $b_4 > 0$, Eq (3.4) admet deux solutions périodiques

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \pm \sqrt{\frac{b_2}{2b_4}} \tan \sqrt{\frac{b_2}{2}} \xi \\ &= \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{20} \frac{a_1^2 \beta (3k+2)}{\gamma k \epsilon a_2}}{\frac{-2}{30} \frac{a_2 \beta (3k+2)}{\gamma k \epsilon}}} \tan \sqrt{\frac{\frac{1}{20} \frac{a_1^2 \beta (3k+2)}{\gamma k \epsilon a_2}}{2}} \xi \\ &= \pm \sqrt{\frac{3}{4} \frac{a_1^2}{a_2^2}} \tan \left(\frac{1}{2\sqrt{10}} \sqrt{-\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2} (3k+2)} \xi \right) \end{aligned}$$

donc

$$\Phi(\xi) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{a_1^2}{a_2^2}} \tan \left(\frac{1}{20} \sqrt{10} \sqrt{-\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2} (3k+2) \xi} \right) \quad (3.28)$$

Cas 3 : Si $b_0 = b_1 = b_3 = 0$, $b_2 > 0$ et $b_4 < 0$, Eq (3.4) admet une solution de fonction hyperbolique

$$\Phi(\xi) = \sqrt{-\frac{3}{2} \frac{a_1^2}{a_2^2}} \sec h \left(\frac{1}{10} \sqrt{5} \sqrt{-\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2} (3k+2) \xi} \right). \quad (3.29)$$

Cas 4 : pour $b_0 = \frac{b_2^2}{4b_4}$, $b_1 = b_3 = 0$, $b_2 < 0$ et $b_4 > 0$, Eq (3.4) admet deux solutions de fonction hyperbolique

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \pm \sqrt{-\frac{b_2}{2b_4}} \tanh \left(\sqrt{-\frac{b_2}{2}} \xi \right). \\ &= \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{20} \frac{a_1^2 \beta (3k+2)}{\gamma k \epsilon a_2} - \frac{-2}{30} \frac{a_2 \beta (3k+2)}{\gamma k \epsilon}}{\frac{1}{20} \frac{a_1^2 \beta (3k+2)}{\gamma k \epsilon a_2} - \frac{-2}{30} \frac{a_2 \beta (3k+2)}{\gamma k \epsilon}}} \tanh \left(\sqrt{\frac{\frac{1}{20} \frac{a_1^2 \beta (3k+2)}{\gamma k \epsilon a_2} - \frac{-2}{30} \frac{a_2 \beta (3k+2)}{\gamma k \epsilon}}{2}} \xi \right), \end{aligned}$$

donc

$$\Phi(\xi) = \pm \sqrt{-\frac{3}{2} \frac{a_1^2}{a_2^2}} \tanh \left(\frac{1}{10} \sqrt{5} \sqrt{\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2} (3k+2) \xi} \right) \quad (3.30)$$

Cas 5 : pour $b_0 = b_1 = 0$, $b_3 = \pm 2\sqrt{b_2 b_4}$, $b_2 > 0$ et $b_4 > 0$, Eq (3.4) admet une solution hyperbolique

$$\Phi(\xi) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{a_1^2}{a_2^2}} \left[1 + \tanh \left(\frac{1}{20} \sqrt{5} \sqrt{-\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2} (3k+2) \xi} \right) \right]. \quad (3.31)$$

Cas 6 : pour $b_0 = \frac{b_2^2 k_1^2 (k_1^2 - 1)}{b_4 p_1}$, $b_1 = b_3 = 0$, $b_2 > 0$ et $b_4 < 0$, Eq (3.4) admet les

solutions de fonctions jacobienues suivantes

$$\begin{aligned}\Phi(\xi) &= \sqrt{-\frac{3}{2} \frac{a_1^2}{a_2} \frac{k_1^2}{p_1}} cn \left(\sqrt{-\frac{1}{20k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2 p_1}} (3k+2)\xi, k_1 \right), \\ p_1 &= 2k_1^2 - 1, k_1 \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right)\end{aligned}\quad (3.32)$$

Cas 7 : pour $b_0 = \frac{b_2^2(1-k_2^2)}{b_4 p_2^2}$, $b_1 = b_3 = 0$, $b_2 > 0$ et $b_4 < 0$, Eq (3.4) admet la solution de fonction elliptique jacobienne suivante

$$\begin{aligned}\Phi(\xi) &= \sqrt{-\frac{3}{2} \frac{a_1^2}{a_2 p_2}} dn \left(\frac{1}{10} \sqrt{5} \sqrt{-\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2 p_1}} (3k+2)\xi, k_2 \right), \\ p_2 &= 2 - k_2^2, k_2 \in (0, 1).\end{aligned}\quad (3.33)$$

Cas 8 : pour $b_0 = \frac{b_2 k_3^2}{b_4 p_3^2}$, $b_1 = b_3 = 0$, $b_2 > 0$ et $b_4 < 0$, Eq (3.4) admet deux types de solutions d'ondes elliptiques doublement p6riodiques jacobienues :

$$\begin{aligned}\Phi(\xi) &= \pm \sqrt{-\frac{3}{2} \frac{a_1^2 k_3^2}{a_2 p_3}} sn \left(\frac{1}{10} \sqrt{5} \sqrt{\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2 p_3}} (3k+2)\xi, k_3 \right), \\ p_3 &= 1 + k_3^2, k_3 \in (0, 1).\end{aligned}\quad (3.34)$$

3.4 Solutions et repr6sentation graphique

Dans cette partie, nous pr6sentons les solutions exactes de l'equation de Benjamin-Ono ,ainsi que certaines de ses repr6sentation graphiques.

Solution u_1 :

Si $b_0 = b_1 = b_3 = 0$, $b_2 < 0$ et $b_4 > 0$, et $\Phi(\xi) = \sqrt{\frac{-3a_1^2}{2a_2^2}} \sec \left(\frac{1}{10} \sqrt{5} \sqrt{\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2}} (3k+2)\xi \right)$.

Remplacant (3.27) et (3.23)-(3.26) dans (3.21), on obtient

$$\begin{aligned} u_1(\xi) = & a_0 + \sqrt{\frac{-3a_1^2}{2a_2^2}} a_1 \sec \left(\frac{1}{10} \sqrt{5} \sqrt{\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2} (3k+2) \xi} \right) \\ & - \frac{-3a_1^2}{2a_2} \sec^2 \left(\frac{1}{10} \sqrt{5} \sqrt{\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2} (3k+2) \xi} \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Solution u_2 :

Si $b_0 = \frac{b_2^2}{4b_4}$, $b_1 = b_3 = 0$, $b_2 > 0$ et $b_4 > 0$, (3.4) admet deux solutions périodiques

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) = & \pm \sqrt{\frac{b_2}{2b_4}} \tan \sqrt{\frac{b_2}{2}} \xi \\ = & \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{a_1^2}{a_2^2}} \tan \left(\frac{1}{20} \sqrt{10} \sqrt{-\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2} (3k+2) \xi} \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

remplacant (3.28), et (3.23)-(3.26) dans (3.21), on obtient la solution

$$\begin{aligned} u_2(\xi) = & a_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{a_1^2}{a_2^2}} \tan \left(\frac{1}{20} \sqrt{10} \sqrt{-\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2} (3k+2) \xi} \right) \right) \\ & + a_2 \frac{3}{4} \frac{a_1^2}{a_2^2} \tan^2 \left(\frac{1}{20} \sqrt{10} \sqrt{-\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2} (3k+2) \xi} \right) \\ & + \frac{1}{4} \frac{k^2 \beta a_1^2 - 2\omega^2 a_2}{k^2 \beta a_2}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} u_2(\xi) = & a_1 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{a_1^2}{a_2^2}} \tan \left(\frac{1}{20} \sqrt{10} \sqrt{-\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2} (3k+2) \xi} \right) \right) \\ & + a_2 \frac{3}{4} \frac{a_1^2}{a_2^2} \tan^2 \left(\frac{1}{20} \sqrt{10} \sqrt{-\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2} (3k+2) \xi} \right) \\ & + \frac{1}{4} \frac{k^2 \beta a_1^2 - 2\omega^2 a_2}{k^2 \beta a_2}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Solution u_3 :

Si $b_0 = b_1 = b_3 = 0$, $b_2 > 0$ et $b_4 < 0$, et $\Phi(\xi) = \sqrt{-\frac{3}{2} \frac{a_1^2}{a_2^2}} \operatorname{sech} \left(\frac{1}{10} \sqrt{5} \sqrt{-\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2}} (3k+2)\xi \right)$,
remplacant (3.29), et (3.23)-(3.26) dans (3.21), on obtient la solution

$$\begin{aligned} u_3(\xi) = & a_0 + \sqrt{-\frac{3}{2} \frac{a_1^2}{a_2^2}} a_1 \operatorname{sech} \left(\frac{1}{10} \sqrt{5} \sqrt{-\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2}} (3k+2)\xi \right) - \\ & - \frac{3}{2} \frac{a_1^2}{a_2^2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{10} \sqrt{5} \sqrt{-\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2}} (3k+2)\xi \right). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Solution u_4 :

Si $b_0 = \frac{b_2^2}{4b_4}$, $b_1 = b_3 = 0$, $b_2 < 0$ et $b_4 > 0$, avec $\Phi(\xi) = \pm \sqrt{-\frac{3}{2} \frac{a_1^2}{a_2^2}} \tanh \left(\sqrt{-\frac{b_2}{2}} \xi \right)$,
remplacant (3.30), et (3.23)-(3.26) dans (3.21), on obtient deux solutions de fonction
hyperbolique

$$u_4(\xi) = a_0 \pm \sqrt{-\frac{3}{2} \frac{a_1^2}{a_2^2}} a_1 \tanh \left(\sqrt{-\frac{b_2}{2}} \xi \right) - \frac{3}{2} \frac{a_1^2}{a_2^2} \tanh^2 \left(\sqrt{-\frac{b_2}{2}} \xi \right). \quad (3.40)$$

Solution u_5 :

Pour $b_0 = b_1 = 0$, $b_3 = \pm 2\sqrt{b_2 b_4}$, $b_2 > 0$ et $b_4 > 0$, et

$$\Phi(\xi) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{a_1^2}{a_2^2}} \left[1 + \tanh \left(\frac{1}{20} \sqrt{5} \sqrt{-\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2}} (3k+2)\xi \right) \right],$$

remplacant (3.31) et (3.23)-(3.26) dans (3.21), on obtient

$$\begin{aligned}
u_5(\xi) = & a_1 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 a_1^2}{2 a_2^2}} \left[1 + \tanh \left(\frac{1}{20} \sqrt{5} \sqrt{-\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2} (3k+2) \xi} \right) \right] \right) \\
& + a_2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 a_1^2}{2 a_2^2}} \left[1 + \tanh \left(\frac{1}{20} \sqrt{5} \sqrt{-\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2} (3k+2) \xi} \right) \right] \right)^2 \\
& + \frac{1}{4} \frac{k^2 \beta a_1^2 - 2 \omega^2 a_2}{k^2 \beta a_2}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
u_5(\xi) = & a_1 \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 a_1^2}{2 a_2^2}} \left[1 + \tanh \left(\frac{1}{20} \sqrt{5} \sqrt{-\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2} (3k+2) \xi} \right) \right] \right) \\
& + a_2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 a_1^2}{2 a_2^2}} \left[1 + \tanh \left(\frac{1}{20} \sqrt{5} \sqrt{-\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2} (3k+2) \xi} \right) \right] \right)^2 \\
& + \frac{1}{4} \frac{k^2 \beta a_1^2 - 2 \omega^2 a_2}{k^2 \beta a_2}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Solution u_6 :

Pour $b_0 = \frac{b_2^2 k_1^2 (k_1^2 - 1)}{b_4 p_1}$, $b_1 = b_3 = 0$, $b_2 > 0, b_4 < 0$, et

$$\Phi(\xi) = \sqrt{-\frac{3 a_1^2 k_1^2}{2 a_2 p_1}} c n \left(\sqrt{-\frac{1}{20 k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2 p_1} (3k+2) \xi, k_1} \right), p_1 = 2k_1^2 - 1, k_1 \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right),$$

remplacant (3.32) et (3.23)-(3.26) dans (3.21) on obtient les solutions de fonctions jacobiennes suivantes

$$\begin{aligned}
u_6(\xi) = & a_0 + \sqrt{-\frac{3 a_1^2 k_1^2}{2 a_2 p_1}} a_1 c n \left(\sqrt{-\frac{1}{20 k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2 p_1} (3k+2) \xi, k_1} \right) \\
& - \frac{3 a_1^2 k_1^2}{2 a_2 p_1} a_2 c n^2 \left(\sqrt{-\frac{1}{20 k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2 p_1} (3k+2) \xi, k_1} \right).
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Solution u_7

Pour $b_0 = \frac{b_2^2(1-k_2^2)}{b_4 p_2^2}$, $b_1 = b_3 = 0$, $b_2 > 0$, $b_4 < 0$, et

$$\Phi(\xi) = \sqrt{-\frac{3}{2} \frac{a_1^2}{a_2 p_2}} dn \left(\frac{1}{10} \sqrt{5} \sqrt{-\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2 p_1}} (3k+2)\xi, k_2 \right), p_2 = 2 - k_2^2, k_2 \in (0, 1),$$

remplaçant (3.33) et (3.23)-(3.26) dans (3.21) on obtient les solutions de fonctions jacobiniennes suivantes

$$\begin{aligned} u_7(\xi) = & a_0 + \sqrt{-\frac{3}{2} \frac{a_1^2}{a_2 p_2}} a_1 dn \left(\frac{1}{10} \sqrt{5} \sqrt{-\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2 p_1}} (3k+2)\xi, k_2 \right) \\ & - \frac{3}{2} \frac{a_1^2}{a_2 p_2} a_2 dn^2 \left(\frac{1}{10} \sqrt{5} \sqrt{-\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2 p_1}} (3k+2)\xi, k_2 \right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Solution u_8 :

Pour $b_0 = \frac{b_2 k_3^2}{b_4 p_3^2}$, $b_1 = b_3 = 0$, $b_2 > 0$ et $b_4 < 0$, et

$$\Phi(\xi) = \pm \sqrt{-\frac{3}{2} \frac{a_1^2 k_3^2}{a_2 p_3}} sn \left(\frac{1}{10} \sqrt{5} \sqrt{\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2 p_3}} (3k+2)\xi, k_3 \right), p_3 = 1 + k_3^2, k_3 \in (0, 1),$$

remplaçant (3.34) et (3.23)-(3.26) dans (3.21) on obtien deux types de solutions d'ondes elliptiques doublement périodiques jacobiniennes

$$\begin{aligned} u_8(\xi) = & a_0 \pm \sqrt{-\frac{3}{2} \frac{a_1^2 k_3^2}{a_2 p_3}} a_1 sn \left(\frac{1}{10} \sqrt{5} \sqrt{\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2 p_3}} (3k+2)\xi, k_3 \right) \\ & - \frac{3}{2} \frac{a_1^2 k_3^2}{a_2 p_3} a_2 sn^2 \left(\frac{1}{10} \sqrt{5} \sqrt{\frac{1}{k} \frac{\beta}{\gamma \epsilon} \frac{a_1^2}{a_2 p_3}} (3k+2)\xi, k_3 \right) \end{aligned}$$

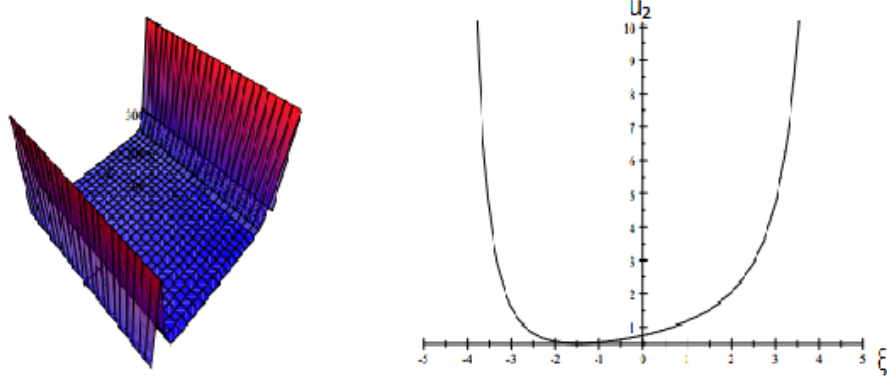


FIG. 3-1 – La solution hyperbolique u_2 de Eq. (3.19) pour les valeurs $k = a_1 = a_2 = \omega = \gamma = \epsilon = 1, \beta = -1$ dans Eq. (3.37)

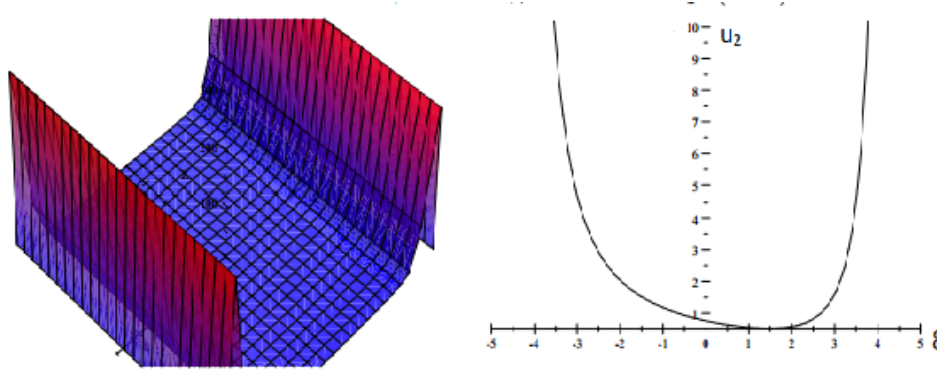


FIG. 3-2 – Solution hyperbolique u_2 de Eq. (3.19) pour les valeurs $k = a_1 = a_2 = \omega = \gamma = \epsilon = 1, \beta = -1$ dans Eq. (3.38)

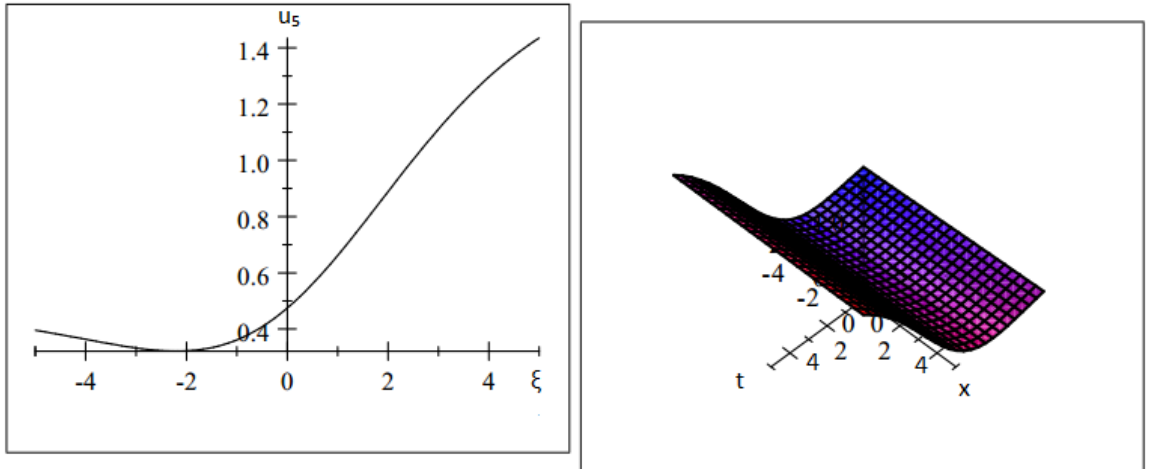


FIG. 3-3 – Solution hyperbolique $u_5(\xi)$ de Eq. (3.19) pour les valeurs $k = 1, \beta = -1, a_1 = 1, a_2 = 1, \omega = 1, \gamma = 1, \epsilon = 1$ dans Eq (3.41)

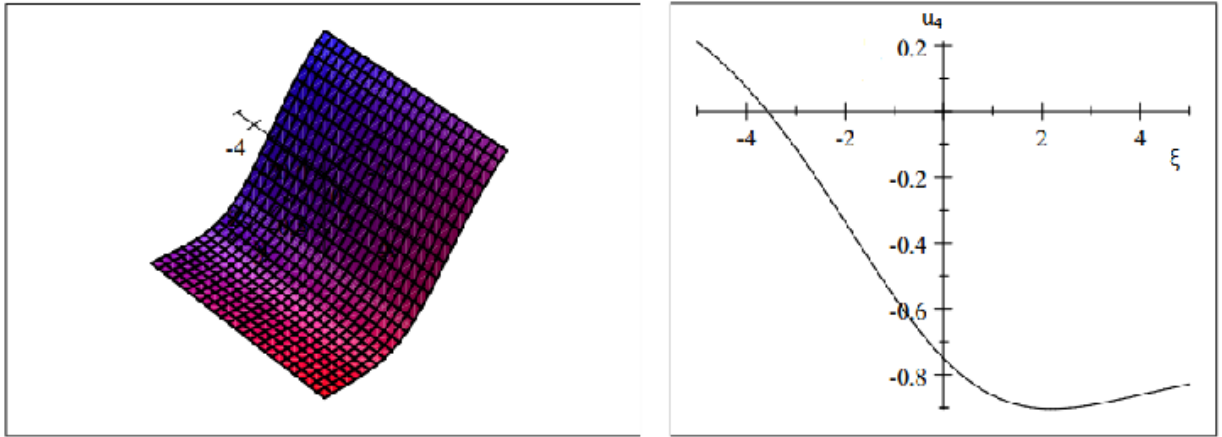


FIG. 3-4 – La solution hyperbolique $u_4(\xi)$ de Eq. (3.19) pour les valeurs $k = 1, \beta = -1, a_1 = 1, a_2 = 1, \omega = 1, \gamma = 1, \epsilon = 1$ dans Eq (3.41)

Conclusion 3.4.1 *L'application de la méthode de la sous-équation de Fan à l'équation de Benjamin-Ono a démontré son efficacité pour obtenir des solutions analytiques pertinentes. Simple et facile à mettre en œuvre, cette méthode a généré des solutions régulières et stables, conformes aux propriétés physiques et mathématiques du problème. Cependant, certaines solutions complexes ont été rejetées en raison de leur manque d'interprétation physique réaliste, soulignant l'importance de critères de sélection rigoureux pour valider les solutions. Par ailleurs, cette équation, qui décrit les ondes internes en eaux profondes, demeure un modèle intégrable riche et complexe, offrant de nombreuses perspectives de recherche.*

Conclusion générale et perspectives

La résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires issues de la physique attire de plus en plus l'attention des communautés mathématiques, scientifiques et d'ingénierie, en raison de leurs vastes applications dans la modélisation des phénomènes naturels complexes. Ces équations interviennent dans de nombreux domaines tels que la mécanique des fluides, l'optique non linéaire, la biologie mathématique, la météorologie, la propagation des ondes et bien d'autres encore. Elles permettent de représenter des systèmes dynamiques dans lesquels les interactions non linéaires jouent un rôle fondamental, rendant ces modèles particulièrement pertinents pour la compréhension du monde réel.

Cependant, la complexité intrinsèque de ces équations rend souvent difficile leur résolution analytique ou même numérique. En effet, contrairement aux équations linéaires, celles non linéaires peuvent présenter des comportements hautement irréguliers, voire chaotiques, ce qui exige le développement de techniques mathématiques sophistiquées. C'est précisément là que réside tout l'intérêt de ces équations : malgré leur difficulté, elles offrent des outils précieux pour explorer des phénomènes physiques profonds, comme la formation d'ondes solitaires (solitons), la turbulence, ou encore les instabilités dans les milieux continus.

Dans ce contexte, l'équation de Benjamin-Ono apparaît comme un modèle canonique important. Elle décrit la propagation d'ondes internes dans des fluides stratifiés de grande profondeur et possède des propriétés intégrables qui en font un cas d'étude privilégié. Dans cette thèse, la méthode de Fan, une technique algébrique efficace basée sur la recherche de solutions sous forme d'expressions trigonométriques, hyperboliques ou rationnelles a été appliquée avec succès à cette équation. Les résultats obtenus montrent clairement que cette méthode constitue un outil mathématique puissant et robuste pour explorer les solutions exactes des équations non linéaires, y compris celles dont la structure est relativement complexe comme celle de Benjamin-Ono.

En outre, cette approche se distingue par sa flexibilité et sa généralité, ce qui en fait

une candidate prometteuse pour être étendue à d'autres classes d'équations aux dérivées partielles non linéaires, telles que les équations de Korteweg-de Vries généralisées, les équations de Schrödinger non linéaires ou encore des modèles couplés intervenant en physique des plasmas ou en théorie des champs.

Comme perspectives, il serait intéressant d'explorer des configurations géométriques plus complexes, notamment dans des cadres spatio-temporels multidimensionnels, afin d'évaluer l'adaptabilité et l'efficacité de la méthode de Fan dans ces contextes plus généraux. Une direction prometteuse pourrait également consister à combiner cette méthode analytique avec des techniques numériques avancées, afin de traiter des problèmes où les non-linéarités sont fortes où les conditions aux limites présentent des hétérogénéités spatiales significatives.

Bibliographie

- [1] D. Abbas and A. Kadem. Application of the extended fan sub-equation method to time fractional burgers-fisher equation. Tatra Mt. Math. Publ, 79 (2021) :1–12.
- [2] M. J. Ablowitz, P.A. Clarkson. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering,Cambridge University Press, New York, 1991
- [3] M.Alquran, A.Qawasmeh. Classification of solutions to some non linear evolution equation ,CSP Cambridge,UK ;I&S-Florida,vol 20 ,No.2 (2013),pp 263-272.
- [4] S.Behera,J.Singh Pal Virdi,"on the modified G'/G^2 -expansion method for finding some analytical solutions of the traveling waves" Journal of ocean Engineering and science (2021).
- [5] F.Belmechri and A.Kadem.A systematic approach to exact solutions of nonlinear wave equations via the extended fan sub-equation method.Journal of Computational Analysis and Applications, vol 34, no 4 (2025).
- [6] A.Bekir.M.Boz,A generalized trial equation method for solving nonlinear partial differential equations.Communications in nonlinear science and numerical simulation.(2012)
- [7] Benjamin, T Brooke. Internal waves of permanent form in fluids of great depth", Journal of Fluid Mechanics, 29 (03) (1967) : 559
- [8] A. Borhanifar, M.M. Kabir. New periodic and soliton solutions by application of Exp-function method for nonlinear evolution equations,Journal of Computational and Applied Mathematics 229 (2009) 158–167

- [9] M.David .Ambrose,Jon Wilkening,"Computation of Time Periodic Solutions of the Benjamin-Ono equation.
- [10] P. G.Drazin et R. S. Johnson.Solitons : An Introduction. Cambridge University Press, Cambridge.(1989) 15, 22, 23
- [11] E. Fan, "A generalized extended Fan sub-equation method and its application to the BurgersHuxley equation," Applied Mathematics and Computation, vol. 217, no 1 (2010), pp. 1–7.
- [12] E. Fan, H. Zhang. A note on the homogeneous balance method," Physics Letters A, vol. 246, no. 5 (1998), pp. 403–406.
- [13] E. Fan, J. Zhang. Applications of the Jacobi elliptic function method to special-type nonlinear equations. Physics Letters A, vol. 305 , no. 6 (2002), pp. 383–392.
- [14] E. Fan, Y. Hon, "Applications of the extended Fan sub-equation method to the GinzburgLandau equation," Journal of Mathematical Physics, vol. 48, no. 11 (2007), pp 113501.
- [15] E. Fan. Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations, Physics Letters A, vol. 277, no. 4-5 (2000), pp. 212–218.
- [16] E. Fan. Multiple travelling wave solutions of nonlinear evolution equations using a unified algebraic method. Journal of Physics A : Mathematical and General, vol. 35, no. 32 (2002), pp.6853–6872.
- [17] E. Fan. Traveling wave solutions for nonlinear equations using symbolic computation. Computers & Mathematics with Applications, vol. 43, no. 8-9 (2002), pp. 1151–1162.
- [18] E.G. Fan. Uniformly constructing a series of explicit exact solutions to nonlinear equations in mathematical physics, Chaos Soliton Fract. 16 (2003) 819–839
- [19] E.Fan The integrable sysyems and the the computer algebra,science press,Beijing.2024.

- [20] Fokas, A. S., & Ablowitz, M. J. "On the inverse scattering transform of multidimensional nonlinear equations related to first-order systems in the plane." *Journal of Mathematical Physics*, 24 (11) (1983), 2494–2503.
- [21] D.Geziç and M.Tuz.New analytical wave solutions and physical interpretation of the Benjamin-Ono equation.*International Journal of advanced natural sciences and engineering researches*, 9 (6) (2025),54-60.
- [22] Y. Gurefe, A. Sonmezoglu, E. Misirli. Application of the trial equation method for solving some nonlinear evolution equations arising in mathematical physics. *Pramana journal of physics*. Indian academy of sciences Vol. 77 ,No.6. (2011).pp.1023-1023-1029.
- [23] J.H.He and X.H.Wu,Exp function method and its application for nonlinear wave equations,chaos,solitons and fractals,30 (3) (2006), 700-708.
- [24] R.Hedli,A.Kadem.Exact traveling wave solutions to the fifth order KdV equation using the exponential expansion method.IAENG.*International Journal of applied mathematics*, (2020), 50 :1
- [25] J.Hietarinta.Depart of physics,University of turkey Doi :10.1007/BFb0113694.
- [26] J. Hietarinta. Hirota's bilinear method and soliton solutions,*Physics* vol 15(2005),(part 1)31- 37.
- [27] R..Hirota, "Exact Solution of the Korteweg-de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons." *Physical Review Letters*, 27 (18) (1971), 1192–1194.
- [28] M.B.Hossen,H.O.Rochid and M.Z.Ali,Study on exact solutions of Benjamin-Ono equation via bilinear approach,*Partial differential equations in Applied.Mathematics* (2021)
- [29] M.Kaplan,S.San and A.Bekir.On the exact solutions and conservation laws to the benjamin-Ono equation.*Journal of applied analysis and computation*.Vol 8,No1 (2018), 1-9.

- [30] A.Korpel and Banerjee,P.Heuristic guide to nonlinear dispersive wave equation and soliton-type solution.Proceeding of the IEEF,72 (1984),1109-1130.
- [31] Li.Z.B,Wang,M.L,Zhang,H.Q.Anew function expansion method for solving nonlinear differential equation .physics Letters A, 345 (3) (2007), 279-284.
- [32] C.-S.Liu, Trial Equation Method to Nonlinear Evolution Equations with Rank Inhomogeneous : Mathematical Discussions and Its Applications.Communications in Theoretical Physics, 45 (2) (2006), 219–223.
- [33] C,S.Liu,A new approach to exact solutions of nonlinear differential equation the G'/G^2 expansion method.Applied mathematics and computaion (2012).
- [34] A. R., Lu, D.Seadawy et M. M. A.Khater, Solitary wave solutions for the generalized Zakharov–Kuznetsov–Benjamin–Bona–Mahony nonlinear evolution equation. Journal of Ocean Engineering and Science,. 2 (2) (2017), 137–142.
- [35] W. Malfiet, W. Hermann. The Tanh method Exact solutions of non linear evolution and wave equation, physica scripta.Vol 54.(1996), 563-568.
- [36] Ono Hioraki. Algebraic solitary waves in stratified fluids", Journal of the Physical Society of Japan, 39 (4) (1975), 1082–1091.
- [37] L. V.Ovsiannikov, Group Analysis of Differential Equations. Academic Press.(1982).
- [38] S. M.Rayhanul Islam, Applications of the $\exp(-\Phi(\xi))$ -Expansion Method to Find Exact Traveling Wave Solutions of the Benney-Luke Equation in Mathematical Physics. American Journal of Applied Mathematics, 3 (3) (2015), 100–105.
- [39] J.S.Russell.Report on waves.14 meeting of the British Association for the Advancement of science,York,London(1844).3,7.
- [40] N.Taghizedah,M.Mizazadah and Foroozan Farahrooz.Exact solution for Second Order Benjamin-Ono equation.Applications and applied mathematics.Vol 6 (2011),pp.2125-2136.
- [41] F.Verheest, et W.Hereman, Conservations Laws and Solitary Wave Solutions for Generalized Schamel Equations. Physica Scripta, 50 (6) (1994), 611–614.

- [42] M.Wang,, Y.Zhou, et Li, Z. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics. *Physics Letters A*, 216 (1-5) (1996), 67–75.
- [43] A. M. Wazwaz, *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.(2009). 1, 2, 10, 21, 30, 32, 38.
- [44] A. M.Wazwaz, Peakons, kinks, compactons and solitary patterns solutions for a family of Camassa–Holm equations by using new hyperbolic schemes.*Applied Mathematics and Computation*, 182 (1) (2006), 412–424.
- [45] A. M.Wazwaz,The extended Exp function method and its application to several nonlinear equation .*comum.Nonlinear Sci Numer,Simulat*,14 (9) (2009).
- [46] L.I.Yang,Application of Trial Equation Method for Solving the Benjamin-Ono equation.*Journal of Applied Mathematics and physics*, 2 (2014), 45-49.
- [47] E. Yomba. The extended fan’s sub-equation method and its application to kdv–mkdv, bkk and variant boussinesq equations. *Physics Letters A*, 336 (6) (2005), 463–476.
- [48] E.M.E Zayed, K.A.E Alur. The homogenous balance method and it’s applications for finding the exact solution for non linear evolution equation,*Italian journal of pure and applied mathematics-N.33* (2014), (307-318).
- [49] M.Zhao, et C.Li, The $\exp(-\Phi(\xi))$ –expansion method applied to nonlinear evolution equations. [http ://www.paper.edu.cn](http://www.paper.edu.cn). 2(2008), 61, 64

الملخص :

في هذه الأطروحة، تمت دراسة المعادلة التفاضلية الجزئية الغير الخطية لبنجامين-أونو باستخدام طريقة فان، المعروفة بقدرتها على توليد حلول دقيقة في أشكال متنوعة. هذه المعادلة التي تمثل الظواهر الفيزيائية ذات أهمية نظرية وعملية كبيرة. وهي تنتمي إلى فئة من المعادلات القابلة للتكامل مع حلول سوليتون محلية مستقرة، والتي تعتبر دراستها مهمة في العديد من مجالات الفيزياء الرياضية.

تعتمد الفكرة على تحويل مناسب يمكن من اختزال المعادلة التفاضلية الجزئية الغير الخطية الابتدائية إلى معادلات جبرية عن طريق إدخال معادلة مساعدة، تكون حلولها معطاة في صورة مثلثية أو زائدية أو منطقية.

من أجل التحقق من فعالية هذه الطريقة في حالة معادلة بنجامين-أونو، تم إجراء تطبيق عددي .

Abstract:

In this thesis, the nonlinear Benjamin-Ono PDE was studied using Fan's method, which is recognised for its ability to generate exact solutions in a variety of forms. This equation, which models physical phenomena, is of major interest from both the theoretical and practical points of view. It belongs to a class of integrable equations with stable localised soliton solutions, the study of which is crucial in several areas of mathematical physics.

The idea is based on an appropriate transformation enabling the initial PDE to be reduced to an algebraic system of equations by introducing an auxiliary equation, the solutions of which are given in trigonometric, hyperbolic or rational form.

In order to validate the effectiveness of this approach in the specific case of the Benjamin-Ono equation, a numerical implementation was carried out.

Résumé :

Dans cette thèse, l'EDP non linéaire de Benjamin-Ono a été étudiée moyennant la méthode de Fan, reconnue pour sa capacité à générer des solutions exactes sous des formes variées. Cette équation, qui modélise des phénomènes physiques, présente un intérêt majeur tant du point de vue théorique que pratique. Elle appartient à une classe d'équations intégrables possédant des solitons solutions localisées stables dont l'étude est cruciale dans plusieurs domaines de la physique mathématique.

L'idée repose sur une transformation appropriée permettant de réduire l'EDP initiale en un système d'équations algébrique en introduisant une équation auxiliaire, dont les solutions sont données sous forme trigonométrique, hyperbolique ou rationnelle.

Afin de valider l'efficacité de cette approche dans le cas spécifique de l'équation de Benjamin-Ono, une implémentation numérique a été réalisée.

