Université Ferhat Abbas, Sétif 1
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Polycopié

ANALYSE 2

Cours avec exemples explicatifs

destiné aux étudiants de première année MI

Dr. Louiza DERBAL

2020 - 2021

Table des matières

Introduction

Ce polycopié est déstiné aux étudiants de la $1^{ère}$ année Mathématiques et Informatique, a pour objectif de présenter les différents aspects du calcul d'intégrale : intégrale de Riemann, différentes techniques de calcul des primitives, l'initiation à la résolution des équations différentielles. Il est recommandé d'avoir des connaissances préalables en analyse 1. Ce cours est assez détaillé et contient des compléments qui vont parfois au delà du programme prévu. Il comporte quatre chapitres :

1 Intégrales indéfinies

2 Intégrales définies

3 Équations différentielles du premier ordre

4 Équations différentielles linèaires à coefficients constants du second ordre

Chaque chapitre contient des exemples explicatifs. Il est conseillé de s'exercer à résoudre par soi-même ces exercices sans avoir une solution à coté : c'est grâce à ce travail personnel indispensable que l'on peut aller plus loin dans la compréhension et l'assimilation des notions mathématiques introduites.

Chapitre 1

Intégrales indéfinies

1.1 Introduction

Il existe un lien remarquable entre intégration et dérivation : pour les fonctions continues, la notion d'intégrale permet en effet de construire l'inverse de l'opération $f \to f'$ de dérivation. Précisément étant donnée une fonction g continue, nous pourrons exprimer par une intégrale une fonction G telle que $G' = g$. Les intervalles envisagés sont supposés non vides et non réduits à un point.

Définition 1.1.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, on dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I, si F est une fonction dérivable sur I et vérifie*

$$F'(x) = f(x) \quad \textit{pour tout } x \in I.$$

On note une primitive de f par :

$$F(x) = \int f(x)\, dx,$$

Cette fonction est appelée l'intégrale indéfinie de f.

Remarque 1.1.1 *1. $\int$ est le signe d'intégration, $f(x)$ est l'intégrant, et dx est la no-*

tation différentielle.

2. *Puisque F est dérivable sur I , il s'ensuit qu'elle est continue sur cet intervalle*

3. *Comme la dérivée de toute constante C est nulle alors : si $F'(x) = f(x)$ on a encore $(F(x) + C)' = f(x)$. Par conséquent, si f admet une primitive Falors toute fonction de la forme $F + C$, où C est une constante quelconqueest encore une primitive de f.*

4. *L'ensemble des primitives d'une fonction f est noté : $\displaystyle\int f(x)\ dx$ et aussi appelé intégrale indéfinie de f et on écrit simplement : $\displaystyle\int f(x)\ dx = F(x)$, en incluant la constante.*

5. *La variable x est dite variable muette, c'est-à-dire qu'on peut écrire :*

$$\int f(t)\ dt = F(t), \quad \int f(u)\ du = F(u) \ \text{ ou encore } \int f(x)\ dx = F(x).$$

Exemple 1 *La dérivée de $p(x) = x^n$, $n \geq 0$, est $p'(x) = nx^{n-1}$.*
Par conséquent,

$$P(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \quad \text{est une primitive de } p.$$

Par ailleurs, si F est une primitive quelconque de p, alors, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que,

$$F = P + c, \ i.e. F(x) = P(x) + C \ \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En terme d'intégrale généralisée ceci devient

$$\int p(x)\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1 *Soit f et g deux fonctions continues*

1. $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))\ dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx.$
2. $\displaystyle\int \lambda f(x)\ dx = \lambda \int f(x)\ dx, \ \ \lambda \in \mathbb{R}.$
3. $\displaystyle\int f'(x)\ dx = f(x) + C.$ *ou* $\displaystyle\left(\int f(x)\ dx\right)' = f(x).$
4. $\displaystyle\int f(x)\ dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)\ dx = \tfrac{1}{a}F(ax+b) + C.$

Les propriétés 1 et 2 donnent la linéarité de l'opérateur intégral. Ainsi, pour beaucoup de fonctions usuelles on connait les primitives. Voici quelques exemples (utiles à savoir !). Le tableau suivant résume quelques primitives usuelles, en donnant une primitive F de la fonction f (penser à ajouter une constante si on demande toutes les primitives, ou si on utilise le symbole d'intégrale indéfinie).

Fonction f	Une primitive F de f	Domaine de définition de F
$k \qquad (k = \text{const})$	kx	$\mathbb{R}$
$x^a, a \neq 0$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } a \in \mathbb{N} \\ ]-\infty, 0[\cup]0, \infty[& \text{si } a = -2, -3, ... \\ ]0, \infty[\text{ pour tout autre } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \end{cases}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	sur $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$
a^x, $a \neq 1$ et $a > 0$	$\dfrac{a^x}{\log(a)} \quad /a > 0.a \neq 1$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1, 1[$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln(\dfrac{1+x}{1-x})$	$]-1\ ,\ 1[$

Table 1. Un "petit" tableau de quelques primitives usuelles

Par exemple, on déduit de la deuxième ligne du tableau que

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x},$$

sur des intervalles appropriés. On remarque également qu'il est important de connaitre les dérivées des fonctions usuelles, en particulier des fonctions trigonométriques réciproques. Plus tard nous allons voir des techniques d'intégration qui permettent, à partir de primitives connues comme celles du tableau, de trouver des primitives de fonctions plus élaborées. Il s'ensuit donc que si une fonction admet une primitive alors on peut déterminer toutes ses primitives. Mais on peut se poser la question préalable de savoir d'abord si toute fonction admet une primitive ? La réponse est négative comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 2 *Soit f une fonction définie sur $]0,2[$ par :*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x \in\,]0,1[\,\cup\,]1,2[\\ 1 & \textit{si } x = 1 \end{cases}$$

Si f admettait une primitive F, alors F serait dérivable et donc continue sur $]0,2[$. En particulier, F serait continue au point 1, mais

$$F'(x) = f(x) = 0,$$

pour tout $x \neq 1$, impliquerait que F serait constante sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,2[$. Par continuité, F serait constante sur $]0,2[$ avec

$$F'(1) = f(1) = 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse $f(1) = 1$.

Exemple 3 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}),$$

f admet une primitive sur tout intervalle contenant 0.
Soit

$$F(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x}),$$

on a

$$F'(x) = f(x) \text{ et } f(0) = 0,$$

bien qu'elle ne soit pas continue en 0.

1.2 Quelques règles de recherche de primitives

1.2.1 Méthode directe d'intégration

Cette méthode consiste grâce aux propriétés des intégrales et aux transformations sur la fonction à intégrer.

Exemple 4

$$\begin{aligned}\int (\sin x - 2x^2 + \sqrt{x} + \frac{3}{1+x^2})\ dx &= \int \sin x\ dx - 2\int x^2\ dx + \int \sqrt{x}\ dx + 3\int \frac{3}{1+x^2}\ dx \\ &= -\cos x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3\arctan x + C.\end{aligned}$$

1.2.2 Intégration par parties

Elle repose sur la formule simple : $(uv)'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$

Théorème 1.2.1 *Soient u, v deux fonctions dérivables sur I, telle que la fonction $u'v$*

admet une primitive sur I. Alors la fonction uv' admet une primitive sur I et on a :

$$\int uv'(x)\ dx = u(x)v(x) - \int u'v(x)\ dx.$$

Exemple 5 *1.* $\int xe^x\ dx = xe^x - \int e^x\ dx = xe^x - e^x + C.$

2. $\int x^n \ln x\ dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \dfrac{x^n}{n+1}\ dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$

3. $\int \arcsin(x)\ dx = x\arcsin(x) - \int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C.$

4. $\int x\arctan(x)\ dx$*, on pose*

$$\begin{aligned} u(x) &= \arctan(x) \to u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ v'(x) &= x \to v(x) = \frac{1}{2}x^2, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \int x\arctan(x)\ dx &= \frac{1}{2}x^2\arctan(x) - \int \frac{1}{2}\frac{x^2}{1+x^2}\ dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\ dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\ dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan(x) - \frac{1}{2}\left(x - \arctan(x)\right) + C. \end{aligned}$$

1.2.3 Changement de variables

En posant $x = \varphi(t)$, en utilisant le fait que $dx = \varphi'(t)\ dt$ et en remplaçant dans $\displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt$, on obtient : $\displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int f(x)\ dx$

Exemple 6 *1. Pour calculer* $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\ dx$*, on pose* $\sqrt{x} = y$*, on a alors* $x = y^2$ *et* $dx = 2y$

dy et l'intégrale indéfinie devient :

$$\begin{aligned}\int \frac{2y}{y+1}\ dy &= 2\int \frac{y+1-1}{y+1}\ dy = 2\int \left(\frac{y+1}{y+1} - \frac{1}{y+1}\right)\ dy\\ &= 2\int \left(1 - \frac{1}{y+1}\right)\ dy = 2\left[y - \ln(y+1)\right] + C.\\ &= 2\left[\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1)\right] + C.\end{aligned}$$

2. Pour chercher

$$\int \frac{6x^2+4}{x^3+2x+4}\ dx,$$

on pose $y = x^3 + 2x + 4$*, alors* $dy = (3x^2+2)\ dx$*, donc*

$$\int \frac{6x^2+4}{x^3+2x+4}\ dx = \int \frac{2}{y}\ dy = 2\log|y| + C = 2\log\left|x^3+2x+4\right| + C.$$

3. Pour calculer

$$\int (ax+b)^m\ dx,$$

avec $m \neq -1$*,* a *et* $b \in \mathbb{R}$*, on fait le changement de variable* $y = ax+b$*, on a alors* $dy = a$ dx *et l'intégral devient :*

$$\int (ax+b)^m\ dx = \frac{1}{a}\int y^m\ dy = \frac{1}{a}\frac{y^{m+1}}{m+1} + C = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{m+1}}{m+1} + C.$$

4. Calculer $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\ dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+a^2}\ dx &= \int \frac{1}{a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)}\ dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(y^2+1)}\ dy\\ &= \frac{1}{a}\arctan y + C = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.\end{aligned}$$

5. Pour tout réel a strictement positif,

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}\,d(\frac{x}{a}) = \arcsin(\frac{x}{a})+C.$$

Si a est quelconque on aboutit à $\arcsin(\frac{x}{|a|})+C$.

6. On a

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{x}{a})^2}}\,d(\frac{x}{a}) = \operatorname{arsh}(\frac{x}{|a|})+C.$$

1.2.4 Intégration des fractions rationnelles

On s'intéresse dans ce paragraphe à la recherche des primitives des fractions rationnelles c'est-à-dire d'expression de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes. On sait que la fonction fraction rationnelle est continue sur tout intervalle ne contenant pas de pôle (i.e. de nombre réel qui annule le dénominateur) de la fraction. Dans le cours d'algèbre, on montre que toute fraction rationnelle peut s'écrire comme somme d'un polynôme et de termes de la forme

$$\frac{a}{(x-b)^p}, p \in \mathbb{N}^*$$

(élément de 1ère espèce) et

$$\frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^q}, q \in \mathbb{N}^* \text{ et } a^2-4b<0,$$

(élément de 2ème espèce), avec $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta) \neq 0$.

On dit alors qu'on a décomposé la fraction rationnelle en éléments simples. Ainsi, pour déterminer une primitive de la fonction $\frac{P(x)}{Q(x)}$, il suffit de savoir calculer

- Une primitive d'un plynôme (ce qui est trivial).
- Une primitive de la fonction $\frac{a}{(x-b)^p}, p \in \mathbb{N}^*$.

- Une primitive de la fonction $\dfrac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^q}$, $q \in \mathbb{N}^*$.

***Calcul de** $\displaystyle\int \frac{a}{(x-b)^p}\ dx$

Cas $p=1$: $\displaystyle\int \frac{a}{(x-b)}\ dx = a\log|x-b| + C,\ C \in \mathbb{R}.$
Cas $p>1$: $\displaystyle\int \frac{a}{(x-b)^p}\ dx = \frac{a}{1-p}\,(x-b)^{1-p} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Exemple 7 $I = \displaystyle\int \frac{5}{(x-1)^3}\ dx$

$$I = \int \frac{5}{(x-1)^3}\ dx = -\frac{5}{2\,(x-1)^2} + C.$$

Exemple 8 $I = \displaystyle\int \frac{x+2}{x\,(x+1)\,(x-2)}\ dx$ *($Q(x)$ admet des racines simples). On décompose $f(x) = \dfrac{x+2}{x\,(x+1)\,(x-2)}$ en éléments simples*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{(x+1)} + \frac{A_3}{(x-2)} \\ &= \frac{-1}{x} + \frac{1}{3\,(x+1)} + \frac{2}{3\,(x-2)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-1}{x}\ dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x+1)}\ dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{(x-2)}\ dx \\ &= -\log|x| + \frac{1}{3}\log|x+1| + \frac{2}{3}\log|x-2| + C. \end{aligned}$$

Exemple 9 *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^2\,(x+1)^2}\ dx$ *($Q(x)$ admet des racines réelles multiples)*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{(x+1)} + \frac{A_4}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} I &= -2\int \frac{1}{x}\ dx + \int \frac{1}{x^2}\ dx + 2\int \frac{1}{(x+1)}\ dx + \int \frac{1}{(x+1)^2}\ dx \\ &= -2\log|x| - \frac{1}{x} + 2\log|x+1| - \frac{1}{x+1} + C. \end{aligned}$$

Exemple 10 *Calculer* $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}\ dx.$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}\ dx \\ &= \int \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^3}\ dx \\ &= \int \left(\frac{-3}{16(x-1)} + \frac{1}{8(x-1)^2} + \frac{3}{16(x+1)} + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{4(x+1)^3} \right)\ dx \\ &= \frac{-3}{16}\log|x-1| - \frac{1}{8(x-1)} + \frac{3}{16}\log|x+1| - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{8(x+1)^2} + C \\ &= \frac{3}{16}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{8(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{8(x+1)^2} + C. \end{aligned}$$

Exemple 11

$$I = \int \frac{x^5}{x^3-x^2-x+1}\ dx\ \ (\deg Q(x) \leq \deg P(x)).$$

On commence par décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$*, en éléments simples :*

$$\frac{x^5}{x^3-x^2-x+1} = x^2 + x + 2 + \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{9}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)},$$

puis en intégrant, cela donne :

$$I = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{9}{4}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x+1| + C,\ \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

***Calcul de** $\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^q}\,dx$

On a :

$$\alpha x+\beta = \frac{\alpha}{2}\left(x^2+ax+b\right)' + \beta - \frac{a\alpha}{2}.$$

D'où

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^q}\,dx = \frac{\alpha}{2}\int \frac{(x^2+ax+b)'}{(x^2+ax+b)^q}\,dx + \left(\beta - \frac{a\alpha}{2}\right)\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^q}\,dx.$$

Montrons comment calculer chacune des intégrales du second membre, si

$$q=1,\ \int \frac{(x^2+ax+b)'}{(x^2+ax+b)}\,dx = \log\left(x^2+ax+b\right) + C \text{ car } \left[[\log u(x)\ ]' = \frac{u'(x}{u(x}\right],$$

si

$$q>1,\ \int \frac{(x^2+ax+b)'}{(x^2+ax+b)^q}\,dx = \frac{1}{(1-q)\,(x^2+ax+b)^{q-1}} + C.$$

Il nous reste à montrer comment calculer $\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^q}\,dx$.

On a :

$$\left(x^2+ax+b\right) = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4} = \Delta^2\left[\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 \diagup \Delta^2 + 1\right],$$

avec $\Delta = \left(b-\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ (on rappelle que nous avons ici $a^2-4b<0$).

D'où

$$\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^q}\,dx = \Delta^{-2q}\int \left[\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 \diagup \Delta^2 + 1\right]^{-q}\,dx.$$

On calcule l'intégrale du second membre en utilisant le changement de variable

$$y = \left(x+\frac{a}{2}\right)\diagup \Delta,$$

il vient alors :

$$\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^q}\ dx = \Delta^{1-2q} \int \left(y^2+1\right)^{-q}\ dy.$$

L'intégrale indéfinie $\int \left(y^2+1\right)^{-q} dy$ se calcule par récurrence pour $q>1$.

- Pour $q=1$, on a : $\int \frac{1}{y^2+1}\ dy = \arctan y + C$.
- Pour $q>1$, on pose $u(y) = \left(y^2+1\right)^{-q}$, $v'(y)=1$ et on intègre par partie.

$$\begin{aligned} I_q &= \int \left(y^2+1\right)^{-q}\ dy = y\left(y^2+1\right)^{-q} + 2q\int y^2\left(y^2+1\right)^{-q-1}\ dy \\ &= y\left(y^2+1\right)^{-q} + 2q\int \left(y^2+1\right)^{-q}\ dy - 2q\int \left(y^2+1\right)^{-q-1}\ dy. \end{aligned}$$

D'où

$$I_q = y\left(y^2+1\right)^{-q} + 2qI_q - 2qI_{q+1}.$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} I_{q+1} &= \left[(2q-1)\diagup 2q\right] I_q + \left[y\left(y^2+1\right)^{-q}\right]\diagup 2q, \qquad q>1, \\ I_1 &= \arctan y + C. \end{aligned}$$

Ces deux relations permettent de calculer de proche en proche les intégrales I_q.

Exemple 12 *Calculer*

$$\int \frac{1}{x^3+1}\ dx.$$

On décompose $\frac{1}{x^3+1}$ *en éléments simples, on trouve :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3+1} &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{2-x}{x^2-x+1}\right) \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x+1}, \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+1}\ dx &= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log\left|x^2-x+1\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)+C \\ &= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log\left(x^2-x+1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)+C\end{aligned}$$

Exemple 13 *Calcul de* $I = \displaystyle\int \frac{x-1}{\left(x^2-x+1\right)^2}\ dx.$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(x-1)}{\left(x^2-x+1\right)^2}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-1)-1}{\left(x^2-x+1\right)^2}\ dx. \\ &= \frac{-1}{2\left(x^2-x+1\right)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x^2-x+1\right)^2}\ dx. \\ &= \frac{-1}{2\left(x^2-x+1\right)} - \frac{8}{9}\int \frac{dx}{\left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]^2}. \\ &= \frac{-1}{2\left(x^2-x+1\right)} - \frac{4\sqrt{3}}{9}\int \frac{dy}{\left[y^2+1\right]^2}\ \text{où } y = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Or d'après la formule de récurrence, on a :

$$\int \frac{dy}{\left[y^2+1\right]^2} = I_2 = \frac{y}{2(y+1)} + \frac{1}{2}\arctan y + c.$$

Par conséquent, en revenant à la variable x, il vient :

$$I = \frac{-1}{2\left(x^2-x+1\right)} - \frac{2x-1}{6\left(x^2-x+1\right)} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

1.2.5 Calcul des intégrales de la forme $\int f(\cos x, \sin x)\ dx$ où f est un polynôme ou une fonction rationnelle.

Cas où f est un polynôme

Ici $f(\cos x, \sin x)$ est une combinaison linéaire de termes de la forme : $\cos^p x \sin^q x$, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Il suffit alors de montrer comment on calcule l'intégrale $\int \cos^p x \sin^q x\ dx$.

1 Si p est impair, soit $p = 2n+1$,on a :

$$\int \cos^p x \sin^q x\ dx = \int \cos^{2n+1} x \sin^q x\ dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)^n x \sin^q x \cos x\ dx.$$

Le changement de variable $x = \arcsin y$ ($\Rightarrow y = \sin x$) ramène le calcul de la dernière intégrale au calcul de :

$$\int \left(1 - y^2\right)^n y^q\ dy,$$

c'est-à-dire à la détermination de la primitive d'un polynôme.

Exemple 14 *Calculer*

$$I = \int \cos^5 x \sin^2 x\ dx.$$

En posant $y = \sin x$, on obtient : $I = \int \left(1 - y^2\right)^2 y^2\ dy$

$$\begin{aligned} I &= \int \left(y^6 - 2y^4 + y^2\right)\ dy = \frac{1}{7}y^7 - \frac{2}{5}y^5 + \frac{1}{3}y^3 + C \\ &= \frac{1}{7}\sin x^7 - \frac{2}{5}\sin x^5 + \frac{1}{3}\sin x^3 + C. \end{aligned}$$

2 Si q est impair, le changement de variable $y = \cos x$ permet de ramener le calcul de $\int \cos^p x \sin^q x\ dx$, à la recherche de la primitive d'un polynôme.

Exemple 15 *Calculer l'intégrale*

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \; dx.$$

En posant $y = \cos x \quad (\Rightarrow dy = -\sin x)$, *on obtient :* $I = -\int y^2 \left(1 - y^2\right) \, dy$

$$\begin{aligned} I &= \int \left(y^4 - y^2\right) \; dy = \frac{1}{5} y^5 - \frac{1}{3} y^3 + C \\ &= \frac{1}{5} \cos x^5 - \frac{1}{3} \cos x^3 + C. \end{aligned}$$

3 <u>Si p et q sont tous deux pairs</u>.

(a) le changement de variable $y = \tan \dfrac{x}{2}$ $(x = 2 \arctan y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = \dfrac{2}{1+y^2} \; dt \\ \sin x = \dfrac{2y}{1+y^2} \\ \cos x = \dfrac{1-y^2}{1+y^2} \\ \tan x = \dfrac{2y}{1-y^2} \end{cases},$$

ramène le calcul de l'intégrale à celui de la recherche de la primitive d'une fraction rationnelle.

(b) Ici les puissances de sin et cos sont paires, on doit linéariser $\cos^p x \sin^q x$

$$\cos^p x \sin^q x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^p \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^q$$

Exemple 16 *Calculer*

$$\int \cos^2 x \sin^2 x dx$$

a. Le changement de variable $t = \tan \dfrac{x}{2}$ *ramène le calcul de l'intégrale*

$$\int \cos^2 x \sin^2 x dx,$$

à celui de :

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 \frac{2}{1+t^2}\ dt &= \int \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 \frac{2}{1+t^2}\ dt \\
&= 8\int \frac{t^2\left(1-t^2\right)^2}{\left(1+t^2\right)^5}\ dt
\end{aligned}$$

b. Ici les puissances de sin *et* cos *sont paires (respectivement* 2 *et* 2*) on doit linéariser* $\cos^2 x \sin^2 x$.

$$\begin{aligned}
\cos^2 x \sin^2 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-2ix}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 \\
&= \left(\frac{e^{2ix}+2+e^{-2ix}}{4}\right)\left(\frac{e^{2ix}-2+e^{-2ix}}{-e^{2ix}}\right) \\
&= \frac{e^{4ix}-2e^{2ix}+1+2e^{2ix}-4+2e^{-2ix}+1-2e^{-2ix}+e^{-4ix}}{-16} \\
&= \frac{e^{4ix}+e^{-4ix}-2}{-16} = \frac{2\cos 4x - 2}{-16} = -\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

$$\int \cos^2 x \sin^2 x\ dx = \int \left(-\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{8}\right) dx = -\ \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{8}x + C.$$

Exemple 17 *Calculer*

$$\int \sin^4 x\ dx$$

Ici les puissances de sin *et* cos *sont paires (respectivement* 4 *et* 0*) on doit linéariser* $\sin^4 x$.

$$\begin{aligned}
\sin^4 x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{4ix}+e^{-4ix}-4\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)+6}{16} \\
&= \frac{2\cos 4x - 8\cos 2x + 6}{16} = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\ dx &= \frac{1}{8}\int \cos 4x\ dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\ dx + \frac{3}{8}\int dx \\ &= \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + C.\end{aligned}$$

Cas où f est une fonction rationnelle

Le changement de variable $y = \tan \frac{x}{2}$ permet de ramener le calcul de l'intégrale

$$\int f(\cos x, \sin x)\ dx$$

à celui de l'intégrale d'une fraction rationnelle en y.

Exemple 18 *Calculer*

$$I = \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\ dx,$$

le changement de variable indiqué précédemment donne :

$$\begin{aligned}I &= \int \left(\frac{2y}{1+y^2}\right)^2 \left(1+\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^{-1} \frac{2}{1+y^2}\ dy = 4\int \frac{y^2}{\left(1+y^2\right)^2}\ dy \\ &= 4\int \frac{y^2+1-1}{\left(1+y^2\right)^2}\ dy = 4\int \frac{dy}{1+y^2} - 4\int \frac{dy}{\left(1+y^2\right)^2} = 4\left(I_1 - I_2\right)\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}I_1 &= \int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y + C, \quad C \in \mathbb{R}. \\ I_2 &= \int \frac{dy}{\left(1+y^2\right)^2} = \frac{1}{2}I_1 + \frac{y}{2\left(1+y^2\right)}.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} I &= 4\arctan y - 4\left[\frac{1}{2}\arctan y + \frac{y}{2\left(1+y^2\right)}\right] + C, \quad C \in \mathbb{R}. \\ &= 2\arctan y - \frac{2y}{1+y^2} + C = x - \sin x + C. \end{aligned}$$

Autre méthode : On a :

$$\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = 1 - \cos x.$$

D'où

$$I = \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\ dx = \int \left(1-\cos x\right)\ dx = x - \sin x + C.$$

Dans cet exemple, comme on le remarque, la deuxième méthode est plus rapide que la première c'est-à-dire le changement de variable $y = \tan\frac{x}{2}$ n'est pas toujours le plus simple.

Cas particuliers : Pour calculer

* $I = \int f\left(\cos x\right)\sin x\ dx$, on utilise le changement de variable : $y = \cos x$.

* $I = \int f\left(\sin x\right)\cos x\ dx$, on utilise le changement de variable : $y = \sin x$.

* $I = \int f\left(\tan x\right)\frac{1}{\cos^2 x}\ dx$, on utilise le changement de variable : $y = \tan x$.

* $I = \int \sin ax \sin bx\ dx$, $\left(a \neq \mp b\right)$, on a :

$$\sin ax \sin bx = 1/2\left[\cos\left(a-b\right)x - \cos\left(a+b\right)x\right].$$

Exemple 19 *Calculer les primitives suivantes :*

$$I_1 = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - \sin x}\ dx,\ \ I_2 = \int \frac{\sin^5 x}{\cos x}\ dx \ \ et\ I_3 = \int \sin x \sin 3x\ dx.$$

1) On pose : $y = \sin x \Rightarrow dy = \cos x \; dx,$ *donc*

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - \sin x} \; dx = \int \frac{1}{y^2 - y} \; dy = \int -\frac{1}{y} \; dy + \int \frac{1}{y-1} \; dy \\ &= -\log|y| + \log|y-1| + C = \log\left|\frac{y-1}{y}\right| + C = \log\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x}\right| + C \end{aligned}$$

2)

$$I_2 = \int \frac{\sin^5 x}{\cos x} \; dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos x} \sin x \; dx = \int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2}{\cos x} \sin x \; dx,$$

on pose :

$$y = \cos x \Rightarrow dy = -\sin x \; dx,$$

donc

$$\begin{aligned} I_2 &= \int -\frac{\left(1-y^2\right)^2}{y} \; dy = \int -\frac{y^4 - 2y^2 + 1}{y} \; dy = -\frac{y^4}{4} + y^2 - \log|y| + C \\ &= -\frac{\cos^4 x}{4} + \cos^2 x - \log|\cos x| + C. \end{aligned}$$

3)

$$\sin x \sin 3x = 1/2 \left[\cos(-2)x - \cos 4x\right].$$

D'où

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \sin x \sin 3x \; dx = 1/2 \int \left[\cos(-2)x - \cos 4x\right] \; dx \\ &= \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 4x}{8} + C \end{aligned}$$

1.2.6 Calcul des intégrales de la forme $\int f\left(e^{x},\cosh x,\sinh x\right)\,dx$ où f est une fraction rationnelle.

1. Pour déterminer l'intégrale de type $I=\int f\left(e^{x},\cosh x,\sinh x\right)\,dx$, en général, en utilise le changement de variable $y=e^{x}$, on obtient alors :

$$\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\frac{y^{2}+1}{2y},\ \sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\frac{y^{2}-1}{2y}\ \text{et}\ dx=\frac{dy}{y}.$$

Et par conséquent :

$$I=\int f\left(e^{x},\cosh x,\sinh x\right)\,dx=\int f\left(y,\frac{y^{2}+1}{2y},\frac{y^{2}-1}{2y}\right)\,\frac{dy}{y}=\int F(y)\,dy,$$

où F est une fraction rationnelle réelle.

2. On peut utiliser le changement de variable $y=\tanh\frac{x}{2}\Rightarrow dx=\dfrac{2dy}{1-y^{2}}$.

Exemple 20 *Calculer*

$$I_{1}=\int\frac{\cosh x}{2+\cosh x}\,dx\ \text{ et } I_{2}=\int\frac{\cosh x}{\sinh^{5}x}\,dx.$$

1) On fait le changement de variable

$$y=\tanh\frac{x}{2}\Rightarrow I_{1}=\int\frac{\frac{1+y^{2}}{1-y^{2}}}{2+\frac{1+y^{2}}{1-y^{2}}}\frac{2dy}{1-y^{2}}=\int\frac{2y^{2}+2}{y^{4}-4y^{2}+3}\,dy.$$

On a :

$$y^{4}-4y^{2}+3=\left(y^{2}-1\right)\left(y^{2}-3\right)=(y-1)(y+1)\left(y-\sqrt{3}\right)\left(y+\sqrt{3}\right).$$

Normalement, il faudrait encore décomposer $\dfrac{2y^2+2}{y^4-4y^2+3}$ *en éléments simples :*

$$\frac{2y^2+2}{y^4-4y^2+3} = -\frac{1}{y-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{y-\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{y+\sqrt{3}},$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} I_1 &= -\int \frac{1}{y-1}\,dy + \int \frac{1}{y+1}\,dy + \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{y-\sqrt{3}}\,dy - \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{y+\sqrt{3}}\,dy \\ &= \log\left|\frac{y+1}{y-1}\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}\log\left|\frac{y-\sqrt{3}}{y+\sqrt{3}}\right| + C. \end{aligned}$$

2) La « méthode normale » voudrait que l'on pose $y = e^x$ *mais ici cela s'arrange plus simplement. On pose* $y = \sinh x \Rightarrow dy = \cosh x\ dx$.

$$I_2 = \int \frac{dy}{y^5} = -\frac{1}{4y^4} + C = -\frac{1}{4\sinh^4 x} + C+$$

Cas particuliers :

Pour calculer

* $I = \displaystyle\int f(\cosh x)\sinh x\ dx$, on utilise le changement de variable : $y = \cosh x$.
* $I = \displaystyle\int f(\sinh x)\cosh x\ dx$, on utilise le changement de variable : $y = \sinh x$.
* $I = \displaystyle\int f(\tanh x)\frac{1}{\cosh^2 x}\ dx$, on utilise le changement de variable : $y = \tanh x$.
* $I = \displaystyle\int \sinh ax \sinh bx\ dx$, $(a \neq \mp b)$, on a :

$$\sinh ax \sinh bx = 1/2\left[\cosh(a+b)x - \cosh(a-b)x\right].$$

1.2.7 Intégrales des fonctions contenant des radicaux

1) Fonction de la forme $f\left(x,\ \sqrt[n]{(ax+b)\diagup(cx+d)}\right)$ où f est un plynôme ou une fonction rationnelle.

On suppose que $ad-cb\neq 0$ et $(ax+b)\diagup(cx+d)>0$ (sinon $\sqrt[n]{(ax+b)\diagup(cx+d)}=$ constante). Dans ce cas le changement de variable $y=\sqrt[n]{(ax+b)\diagup(cx+d)}$ permet de ramener le calcul de l'intégrale à celui de l'intégrale d'un plynôme où d'une fraction rationnelle. Expliquons cela par un exemple.

Exemple 21 *Calculer*

$$I=\int\frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx.$$

On pose

$$y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\left(y^2=\frac{1-x}{1+x}\right)\quad&\Leftrightarrow\quad y^2(1+x)=1-x\\&\Leftrightarrow\quad y^2+xy^2=1-x\\&\Leftrightarrow\quad x+xy^2=1-y^2\\&\Leftrightarrow\quad x=\frac{1-y^2}{1+y^2},\end{aligned}$$

donc

$$dx=\frac{-2y\left(1+y^2\right)-2y\left(1-y^2\right)}{\left(1+y^2\right)^2}\,dy=\frac{-4y}{\left(1+y^2\right)^2}\,dy.$$

D'autre part

$$1-x=1-\frac{1-y^2}{1+y^2}=\frac{1+y^2-\left(1-y^2\right)}{1+y^2}=\frac{2y^2}{1+y^2}.$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int \frac{1}{\frac{2y^2}{1+y^2}} y \frac{-4y}{\left(1+y^2\right)^2}\ dy \\
&= -2\int \frac{dy}{1+y^2} = -2\arctan y + c = -2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

2) Fonction de la forme $f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ où f est un plynôme ou une fonction rationnelle.

On a :

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right], \qquad \Delta = b^2-4ac.$$

On va distinguer trois cas.

<u>**1er cas**</u> **:** $\Delta < 0$ **et** $a > 0$.

On a alors :

$$ax^2+bx+c > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

En faisant le changement de variable

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\sinh y,$$

on trouve $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a}}\cosh y$

Exemple 22 *calculer*

$$I = \int \sqrt{x^2+x+1}\ dx.$$

Le changement de variable indiqué donne : $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sinh y$.

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{x^2 + x + 1}\ dx = \frac{3}{4} \int \cosh^2 y\ dy = \frac{3}{4} \int \frac{\cosh 2y + 1}{2}\ dy \\
&= \frac{3}{16} \sinh 2y + \frac{3}{8} y + C = \frac{3}{8} (\sinh y\ \ \cosh y + y) + C \\
&= \frac{3}{8} \left[\sqrt{4 \diagup 3}\, (x + 1 \diagup 2) \cosh \left(\arg\sinh \sqrt{4 \diagup 3}\, (x + 1 \diagup 2) \right) + \arg\sinh \sqrt{4 \diagup 3}\, (x + 1 \diagup 2) \right] + C.
\end{aligned}$$

Or

$$\cosh (\arg\sinh y) = \sqrt{1 + y^2}.$$

D'où

$$I = \frac{\sqrt{3}}{4} (x + 1 \diagup 2) \sqrt{1 + 4 \diagup 3\, (x + 1 \diagup 2)^2} + \frac{3}{8} \arg\sinh \sqrt{4 \diagup 3}\, (x + 1 \diagup 2) + C.$$

2ème cas : $\Delta > 0$ **et** $a < 0$.

On a alors :

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

pour x compris entre les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

D'autre part, on a :

$$ax^2 + bx + c = \frac{\Delta}{-4a} \left[1 - \left((x + b \diagup 2a) \diagup \sqrt{\Delta \diagup 4a^2} \right)^2 \right].$$

En posant :

$$x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\Delta \diagup 4a^2} \cos y, \qquad |y| < \frac{\pi}{2},$$

il vient $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{\Delta \diagup - 4a} \sin y$.

Exemple 23 *Calculer*

$$I = \int \sqrt{4 - 3x^2} dx.$$

Soit $x = \sqrt{4\diagup 3}\cos y,$ *alors*

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{4-4\cos^2 y}\sqrt{4\diagup 3}\,(-\sin y)\,dy = -4\diagup\sqrt{3}\int \sin^2 y \; dy \\
&= -2\diagup\sqrt{3}\int (1-\cos 2y) \; dy = -2\diagup\sqrt{3}\,(y-\sin 2y\diagup 2) + C \\
&= -2\diagup\sqrt{3}\left[\arccos\left(\sqrt{3\diagup 4}x\right) - \sqrt{3\diagup 4}x\sin\left(\arccos\left(\sqrt{3\diagup 4}\;x\right)\right)\right] + C \\
&= -2\diagup\sqrt{3}\left[\arccos\left(\sqrt{3\diagup 4}x\right) - \sqrt{3\diagup 4}x\sqrt{1-3x^2\diagup 4}\right] + C \\
&= -2\diagup\sqrt{3}\arccos\left(\sqrt{3\diagup 4}x\right) + x\sqrt{1-3x^2\diagup 4} + C.
\end{aligned}$$

<u>3ème cas</u> : $\Delta > 0$ **et** $a > 0$.

Le trinôme ax^2+bx+c est positif pour $x \notin \left]x'\ ,\ x''\right[$, où x' et x''sont les racines de l'équation ax^2+bx+c avec $x' < x''$.

On a :

$$ax^2+bx+c = \frac{\Delta}{4a}\left[\left(\frac{x+b\diagup 2a}{\sqrt{\Delta}\diagup 2a}\right)^2 - 1\right].$$

En posant :

$$x + b\diagup 2a = \begin{cases} \sqrt{\Delta}\diagup 2a\ \cosh y \text{ pour } x \in \left]x''\ ,\ +\infty\right[\\ -\sqrt{\Delta}\diagup 2a\ \cosh y \text{ pour } x \in \left]-\infty\ ,\ x'\right[\end{cases},$$

on obtient :

$$ax^2+bx+c = \sqrt{\Delta\diagup 4a}\sinh y.$$

La fonction à intégrer devient alors une fonction rationnelle.

Exemple 24 *Calculer*

$$I = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x-2}}\; dx.$$

On a :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(x^2+x-2)'}{2\sqrt{x^2+x-2}}\,dx + \int \frac{dx}{2\sqrt{x^2+x-2}} \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} I_1 = \sqrt{x^2+x-2} + C \\ I_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x^2+x-2}} \end{cases}.$$

Calculons I_2, en posant conformément à ce qui précède :

$$x + \frac{1}{2} = \begin{cases} (3/2)\cosh y \quad \textit{pour } x \in \left]1, +\infty\right[\\ -(3/2)\cosh y \quad \textit{pour } x \in \left]-\infty, -2\right[\end{cases},$$

(-2 et 1 sont les racines de l'équation $x^2+x-2=0$). Pour $x \in \left]1,+\infty\right[$,on obtient

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x^2+x-2}} = \frac{1}{2}\int dy = \frac{y}{2} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arg\,cosh}\left(\frac{2x+1}{3}\right) + C,$$

d'où

$$I = \sqrt{x^2+x-2} + \frac{1}{2}\operatorname{arg\,cosh}\left(\frac{2x+1}{3}\right) + C.$$

En procédant de la même manière pour $x \in \left]-\infty,-2\right[$, on obtient

$$I = \sqrt{x^2+x-2} - \frac{1}{2}\operatorname{arg\,cosh}\left(-\frac{2x+1}{3}\right) + C.$$

1.2.8 Calcul de $\int P_n(x)e^{\alpha x}dx$, où $P_n(x)$ un polynôme d'ordre n et $\alpha \in \mathbb{C}^*$

On pose :

$$I = \int P_n(x)e^{\alpha x}\,dx = Q_n(x)e^{\alpha x},$$

avec Q_n un polynôme d'ordre n (même ordre que P_n). Pour calculer Q_n, on utilise la dérivation et l'identification.

Remarque 1.2.1 *On peut utiliser l'intégration par parties dans les cas où deg de P est petit.*

Exemple 25 *Calculer*

$$I = \int \left(x^2+1\right) e^{3x}\ dx.$$

On pose

$$I = \int \left(x^2+1\right) e^{3x}\ dx = \left(ax^2+bx+c\right) e^{3x},$$

par dérivation on trouve :

$$\left(x^2+1\right) e^{3x} = \left[3ax^2 + (2a+3b)\,x + b + 3c\right] e^{3x},$$

donc

$$x^2+1 = 3ax^2 + (2a+3b)\,x + b + 3c,$$

par identification on trouve :

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 2a+3b = 0 \\ b+3c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = -\dfrac{2}{9} \\ c = \dfrac{11}{27} \end{cases},$$

et par la suite

$$I = \int \left(x^2+1\right) e^{3x}\ dx = \left(\frac{1}{3}x^2 + -\frac{2}{9}x + \frac{11}{27}\right) e^{3x} + C,$$

1.2.9 Calcul de $\int P_n(x)\cos\beta x\ dx$ et $\int P_n(x)\sin\beta x\ dx$, où $P_n(x)$ un polynôme d'ordre n et $\beta \in \mathbb{R}^*$

$1^{ère}$ **méthode**

Les deux intégrales se traitent de façon analogue. En utilisant l'intégration par partie pour abaisser le degré du polynôme.

Exemple 26 *Calculer* $I(x) = \int (x^2+1)\sin x\ dx$

$$\begin{aligned} I(x) &= -\left(x^2+1\right)\cos x + \int 2x\cos x\ dx \\ &= -\left(x^2+1\right)\cos x + \left(2x\sin x - \int 2\sin x\ dx\right) \\ &= \left(1-x^2\right)\cos x + 2x\sin x + C. \end{aligned}$$

$2^{ème}$ **méthode**

D'après la $1^{ère}$ méthode, il existe deux polynômes $A(x)$ et $B(x)$, de degrés $\leq \deg\left(P_n(x)\right)$, tels que :

$$\int P_n(x)\sin\beta x\ dx = A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On écrit $A(x)$, $B(x)$ avec des coefficients indéterminés, on dérive le second membre ci-dessus, et on *identifie* avec $P_n(x)\sin\beta x$.

Exemple 27 *Calculer* $I(x) = \int (x^2+1)\sin x\ dx$.

$$I(x) = \left(ax^2+bx+c\right)\cos x + \left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)\sin x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

où $a, ..., \gamma$ *sont des réels à calculer.*
En dérivant : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left(\alpha x^2 + (\beta+2a)\,x + b + \gamma\right)\cos x + \left(-ax^2 + (2\alpha - b)\,x + \beta - c\right)\sin x = \left(x^2+1\right)\sin x.$$

Une condition nécessaire et suffisante est :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + 2a = 0 \\ b + \gamma = 0 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} -a = 1 \\ 2\alpha - b = 0 \\ \beta - c = 1 \end{cases},$$

la résolution de ce sytème linéaire donne :

$$\alpha = b = \gamma = 0, \ a = -1, \beta = 2, \ c = 1.$$

D'où :

$$I(x) = \left(1 - x^2\right) \cos x + 2x \sin x + C.$$

$3^{ème}$ **méthode**

Il se peut que l'on désire calculer simultanément

$$I(x) = \int P_n(x) \cos \beta x \ dx \text{ et } J(x) = \int P_n(x) \sin \beta x \ dx.$$

Aux deux méthodes précédentes, on préférera alors l'utilisation de l'exponentielle complexe.

Exemple 28 *Calculer* $I(x) = \int x^2 \cos x \ dx$ *et* $J(x) = \int x^2 \sin x \ dx$.

$$I(x) + iJ(x) = \int x^2 (\cos x + i \sin x) \ dx = \int x^2 e^{ix} \ dx = \left(ax^2 + bx + c\right) e^{ix} + C.$$

$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *à trouver,* $C \in \mathbb{R}$.
En dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, i\left(ax^2 + bx + c\right) + (2ax + b) = x^2,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} ia = 1 \\ ib + 2a = 0 \\ ic + b = 0 \end{cases} \quad \textit{et donc} \begin{cases} a = -i \\ b = 2 \\ c = 2i \end{cases} .$$

Ainsi,

$$I(x) + iJ(x) = \left(-ix^2 + 2x + 2i\right)(\cos x + i \sin x) + C,$$

d'où, en prenant les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} I(x) = (x^2 - 2)\sin x + 2x \cos x + C_1 \\ J(x) = (-x^2 + 2)\cos x + 2x \sin x + C_2 \end{cases} , (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Chapitre 2

Intégrales définies

Dans ce chapitre, on donne une introduction à l'intégrale de Riemann et quelques définitions et propriétés fondamentales. Ensuite, on établit le lien entre cette intégrale et les primitives, pour enfin se dédier à la pratique du calcul intégral. Soit a et b des nombres réels tels que $a < b$ et $I = [a, b]$ compact (c'est-à-dire fermé, borné)

2.1 Intégrale des fonctions en escalier

Commençons par les définitions qui sont à la base de la notion d'intégrale.

2.1.1 Subdivision d'un intervalle compact

Définition 2.1.1 *1- On appelle subdivision de* $[a, b]$, *les nombres réels* $x_0, x_1, ..., x_n$ *tels que*

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

Les points x_i *sont quelconques dans* $[a, b]$, *les intervalles* $[x_{i-1}\ , x_i\ ]$ *ont des longueurs, en général, différentes.*

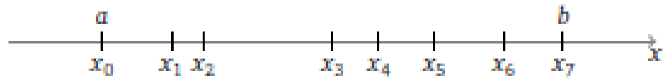

FIG.1- Subdivision de $[a, b]$.

2- On appelle pas de la subdivision $s = (x_0, x_1, ..., x_n)$ et on note $p(s)$ la longueur du plus grand de ces intervalles.

$$p(s) = \sup_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) .$$

3)- On appelle subdivision régulière (ou uniforme) toute subdivision avec des points équidistants. Pour une telle subdivision on a donc

$$h_k = x_k - x_{k-1} = h = \frac{b-a}{n}, \ \forall k = 1, ..., n$$

et par conséquent :

$$x_k = x_{k-1} + h = x_0 + kh = a + kh = a + k\frac{b-a}{n}$$

Exemple 29 (introductif) *Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x$. Sachant calculer l'aire d'un rectangle, on désire évaluer l'aire $A(f)$ délimitée par le graphe de la courbe f, l'axe des x et les deux ordonnées $x = 0$ et $x = 1$. Considérons une subdivision uniforme de $[0, 1]$ en n sous intervalles :*

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1,$$

avec :

$$x_k - x_{k-1} = h = \frac{1}{n}, \forall k = 0, ..., n-1.$$

Il s'ensuit que :

$$x_{k+1} = x_k + h = kh = \frac{k}{n}, \ et \ [x_k, x_k + 1] = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \ \forall k = 0, ..., n-1.$$

D'où

$$\forall x \in [x_k, x_k+1] = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right],$$

on a :

$$\frac{k}{n} \leq f(x) = x \leq \frac{k+1}{n}$$

Soit $I_-^n(f)$ la somme des aires des rectangles inférieurs :

$$I_-^n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \times \frac{k}{n},$$

et I_+^n la somme des aires des rectangles supérieurs :

$$I_+^n = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \times \frac{k+1}{n}.$$

Il est clair que :

$$I_-^n(f) \leq A(f) \leq I_+^n(f).$$

Etudions cette inégalité quand le nombre de points de la subdivision devient assez grand. En remplaçant $x_{k+1} - x_k$ par $h = \dfrac{1}{n}$ on obtient :

$$\begin{aligned} I_-^n(f) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2n^2} \\ I_+^n(f) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n^2}, \end{aligned}$$

comme

$$\lim_{n\to+\infty} I_-^n(f) = \lim_{n\to+\infty} I_+^n(f) = \frac{1}{2},$$

on en déduit que

$$A(f) = \lim_{n\to+\infty} I_-^n(f) = \lim_{n\to+\infty} I_+^n(f) = \frac{1}{2}.$$

2.1.2 Fonctions en escalier

Définition 2.1.2 *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite en escalier (étagée) s'il existe une subdivision $s = (x_0, x_1, ..., x_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i = 1, 2, ..., n$, f est constante sur l'intervalle ouvert $]x_{i-1}, x_i[$ définie par s. Une telle subdivision est dite adapté (associé) à f.*

Remarque 2.1.1 *I) Si f est en escalier et si $s = (x_0, x_1, ..., x_n)$ est une subdivision de $[a,b]$ adapté à f, il existe donc des nombres $m_1, ..., m_n$ tels que $f(x) = m_i$ pour tout $x \in \,]x_{i-1}, x_i[$.*

II) Les valeurs prises par f aux extrémités des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ peuvent être quelconques.

III) Si f est en escalier sur $[a,b]$, elle l'est sur tout sous-intervalle de $[a,b]$.

IV) Une fonction constante est évidemment en escalier.

V) Une fonction f est dite en escalier sur $\mathbb{R}$ s'il existe un intervalle $[a,b]$ tel que $f = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus [a,b]$ et en escalier sur $[a,b]$

Exemple 30 *Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 3 & si \;\; 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \;\; x = 1 \\ 2 & si \;\; 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Cette fonction est en escalier puisque elle est constante sur chacun des intervalles ouverts $]0,1[$ et $]1,2[$. La subdivision $(x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2)$ est adaptée. Et il existe bien d'autres subdivisions adaptées à f, comme par exemple

$$\left(x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1, x_3 = 2\right).$$

Lemme 2.1.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier. Si $(x_0, x_1, ..., x_n)$ est une subdivision de I adaptée à f et si l'on pose $f(x) = m_i$ pour tout $x \in \,]x_{i-1}, x_i[$, alors le* *nombre*

$$(x_1 - x_0)\, m_1 + (x_2 - x_1)\, m_2 + ... + (x_n - x_{n-1})\, m_n$$

ne dépend pas de la subdivision $(x_0, x_1, ..., x_n)$ *.*

Le lemme permet de formuler la définition suivante.

Définition 2.1.3 *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction en escalier. Si* $(x_0, x_1, ..., x_n)$ *est une subdivision de* $[a,b]$ *adaptée à* f *avec* $f(x) = m_i$ *si* $x \in \left]x_{i-1}, x_i\right[$ *, la somme*

$$(x_1 - x_0)\, m_1 + (x_2 - x_1)\, m_2 + ... + (x_n - x_{n-1})\, m_n,$$

qui ne dépend que de f*, s'appelle l'intégrale de* f *sur* $[a,b]$ *et se note* $I(f)$ *ou* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$*.*

Remarque 2.1.2 ▶ *Soit* $c \in [a,b]$ *et soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $f(x) = 0$ *si* $x \neq 0$*. Si l'on a* $c \in \left]a,b\right[$ *, la subdivision* $(x_0 = a,\ x_1 = c,\ x_2 = b)$ *est adaptée à* f*, donc la fonction* f *est en escalier et on a par définition*

$$\int_a^b f(x)\ dx = (c-a) \times 0 + (b-c) \times 0 = 0.$$

De même, si $c = a$ *ou* $c = b$*, l'intégrale de* f *est* 0*.*

▶ *L'intégrale d'une fonction nulle sauf en un nombre fini de points est nulle.*

▶ *Si* f *est une fonction constante de valeur* m*, alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = m\,(b-a)$*.*

Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

Proposition 2 *Soient* f *et* g *deux fonctions en escalier sur* $[a,b]$

1. *La fonction* $f + g$ *est en escalier et l'on a*

$$\int_a^b (f+g)\,(x)\ dt = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx.$$

2. Pour tout nombre réel λ, la fonction λf est en escalier et l'on a

$$\int_a^b \lambda f(x)\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx.$$

3. Si $f \geq g$, alors $\int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b g(x)\ dx$.

4. On a $\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$.

5. Les fonctions en escalier qui diffèrent en un nombre fini de points ont la même intégrale.

6. $\forall c \in [a, b]$, on a $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$.

Preuve 1 *1. Soient $(x_0, x_1, ..., x_n)$ une subdivision adaptée à f et $(y_0, y_1, ..., y_n)$ une subdivision adaptée à g.*

Comme

$$\{x_0, x_1, ..., x_n\} \cup \{y_0, y_1, ..., y_n\} = \{z_0, z_1, ..., z_l\},$$

où l'on a

$$z_0 < z_1 < ... < z_l \text{ avec } z_0 = a \text{ et } z_l = b,$$

on obtient une subdivision adaptée à f et g, donc à la fonction $f + g$.

Utilisons cette subdivision pour calculer les integrales de f, g et $f + g$.

On a pour tout $x \in \left]z_{i-1}, z_i\right[$

$$\forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq l, \exists (m_i, p_i) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } f(x) = m_i \text{ et } g(x) = p_i$$

Il vient donc

$$\int_a^b f(x)\ dx = (z_1 - z_0)\, m_1 + (z_2 - z_1)\, m_2 + ... + (z_l - z_{l-1})\, m_l.$$
$$\int_a^b g(x)\ dx = (z_1 - z_0)\, p_1 + (z_2 - z_1)\, p_2 + ... + (z_l - z_{l-1})\, p_l.$$
$$\int_a^b (f + g)(x)\ dx = (z_1 - z_0)(m_1 + p_1) + (z_2 - z_1)(m_2 + p_2) + ... + (z_l - z_{l-1})(m_l + p_l).$$

D'où le résultat.

2. La démonstration est semblable à la précédente et plus simple.

3. Si $f \geq g$, *alors la fonction étagée* $f - g \geq 0$, *donc* $\int_a^b (f-g)(x)\ dx \geq 0.$

En utilisant (1) et (2), on en déduit $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f-g)(x)\ dx \geq 0.$

4. Pour tout $t \in [a,b]$ *on a*

$$-\left|f(x)\right| \leq f(x) \leq \left|f(x)\right|.$$

Donc on a

$$-\int_a^b \left|f(x)\right|\ dx \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b \left|f(x)\right|\ dx.$$

D'où

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right|\ dx.$$

5. Soient f *et* g *des fonctions en escalier qui diffèrent en un nombre fini de points,*

alors $f - g$ *est nulle sauf en ces points.*

D'après la remarque, on en déduit $\int_a^b (f-g)(x)\ dx = 0$

donc

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b g(x)\ dx.$$

6. Posons

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad a \leq x \leq c \\ 0 & si \quad c \leq x \leq b \end{cases} \quad et\ f_2(x) = \begin{cases} 0 & si \quad a \leq x \leq c \\ f(x) & si \quad c \leq x \leq b \end{cases},$$

on a $f_1(x) + f_2(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in [a,b]$ *et par définition de l'intégrale*

$$\int_a^b f_1(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx \quad et \quad \int_a^b f_2(x)\ dx = \int_c^b f(x)\ dx.$$

On déduit le résultat en appliquant (1).

Sommes de Darboux

Considérons une subdivision finie de l'intervalle $[a, b]$ en n sous intervalles :

$$[x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, ..., n, \text{ avec } x_0 = a \text{ et } x_n = b.$$

Soit m_k(resp M_k) la borne inférieure (resp la borne supérieure) de la restriction de f à $[x_{k-1}, x_k[$, pour $1 \leq k \leq n-1$ et à $[x_{n-1}, b]$ pour $k = n$.

Définition 2.1.4 *On appelle somme de Darboux inférieure la quantité $s(f; x_0, x_1, ..., x_n)$ définie par :*

$$s(f; x_0, x_1, ..., x_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\, m_k.$$

On appelle somme de Darboux supérieure la quantité $S(f; x_0, x_1, ..., x_n)$ définie par :

$$S(f; x_0, x_1, ..., x_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\, M_k.$$

On obtient alors :

$$I_-(f) = \sup s(f; x_0, x_1, ..., x_n), \quad I^+(f) = \inf S(f; x_0, x_1, ..., x_n) \quad \text{et } I_-(f) \leq I(f) \leq I^+(f)$$

Remarque 2.1.3 *Etudier l'interprétation géométrique des sommes de Darboux comme aire des rectangles de base $[x_{i-1}, x_i]$, encadrant l'épigraphe de f de en-dessous resp. au-dessus.*

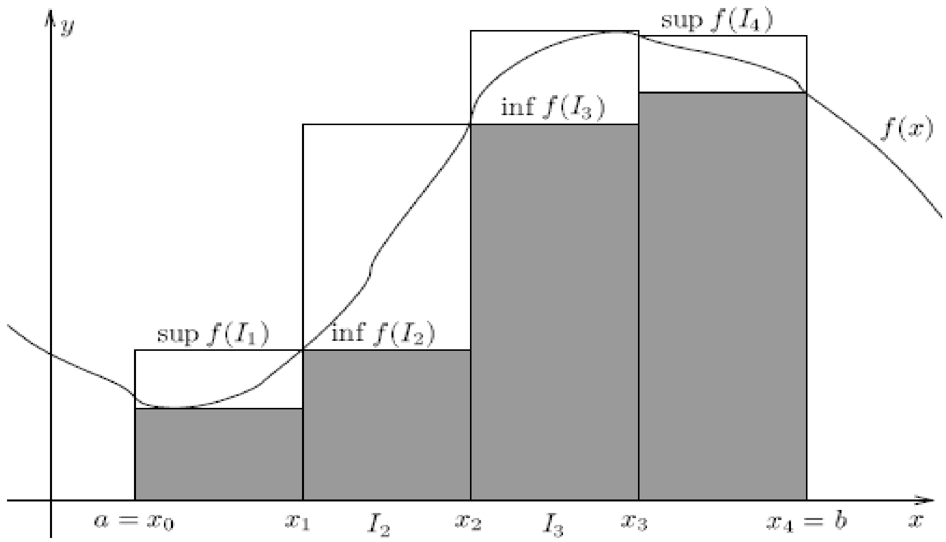

FIG.2-Somme de Darboux inférieure (hachurée) et supérieure (hachurée plus blanc) de $f(x)$ pour une subdivision équidistante d'ordre 4 de $[a, b]$.

2.2 Fonctions Intégrables

Nous allons maintenant définir la notion d'intégrale pour des fonctions plus générales. L'outil théorique permettant cette généralisation est la notion de la borne supérieure et la borne inférieure.

2.2.1 Intégrale de Riemann

Définition 2.2.1 *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier u et U définies sur $[a, b]$, telles que*

$$u \leq f \leq U \quad et \quad \int_a^b (U - u)(x)\, dx \ \leq \varepsilon.$$

Remarque 2.2.1 ► *Si r est un nombre réel et si $-\varepsilon \leq r \leq \varepsilon$, alors $r = 0$.*

► *Une fonction en escalier est intégrable (il suffit de poser $u = U = f$).*

► *Une fonction intégrable est bornée. En effet, une fonction en escalier est majorée et minorée.*

Définition 2.2.2 *On appelle intégrale inférieure de f et on note $I_-(f)$, la borne supérieure des intégrales des fonctions en escalier inférieures ou égales à f, c'est-à-dire :*

$$I_-(f) = \sup\left\{\int_a^b \phi(x)\, dx \ \setminus \ \phi \text{ en escalier et } \phi \leq f\right\}$$

Définition 2.2.3 *On appelle intégrale supérieure de f et on note $I_+(f)$, la borne inférieure des intégrales des fonctions en escalier supérieures ou égales à f, c'est-à-dire :*

$$I_+(f) = \inf\left\{\int_a^b \phi(x)\, dx \ \setminus \ \phi \text{ en escalier et } \phi \geq f\right\}$$

Définition 2.2.4 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable (au sens de Riemann), le nombre $I_-(f) = I_+(f)$ s'appelle l'intégrale de f et se note $I(f)$ ou $\int_c^b f(x)\, dx$.*

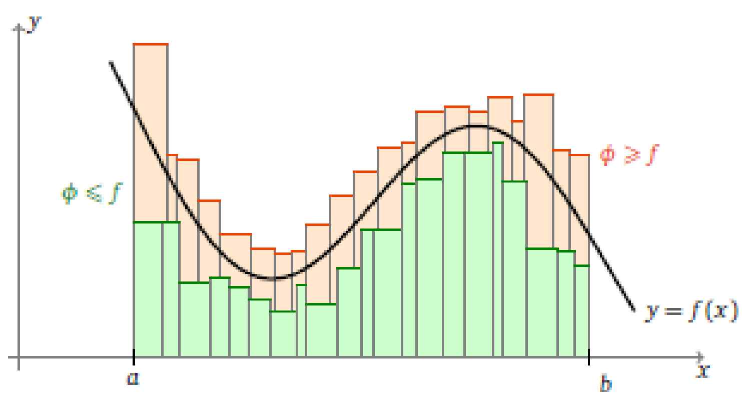

FIG.3-L'intégrale de f au sens de Riemann

Exemple 31 *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Montrons qu'elle est intégrable et calculons*

$\int_0^1 f(t)\,dt.$

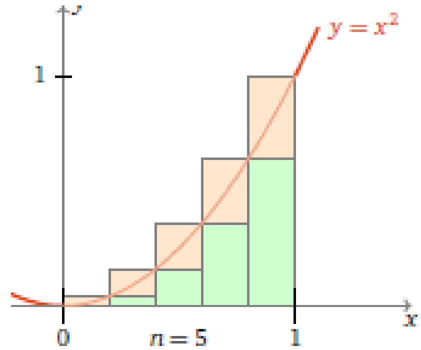

FIG.4-L'intégrale de $f(x) = x^2$ *sur* $[0,1]$

Soit $n \geq 1$ *et considérons la subdivision régulière de* $[0,1]$ *suivante*

$$s = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{i}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right).$$

Sur l'intervalle $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ *nous avons*

$$\forall x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \quad \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \leq x^2 \leq \left(\frac{i}{n}\right)^2.$$

Nous construisons une fonction en escalier ϕ_- *en-dessous de* f *par* $\phi_-(x) = \left(\frac{i-1}{n}\right)^2$ *si* $x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ *(pour chaque* $i = 1, ..., n$ *) et* $\phi_-(1) = 1$*. De même nous construisons une fonction en escalier* ϕ_+ *au-dessus de* f *définie par* $\phi_+(x) = \left(\frac{i}{n}\right)^2$ *si* $x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ *(pour chaque* $i = 1, ..., n$ *) et* $\phi_+(1) = 1$*.* ϕ_- *et* ϕ_+ *sont des fonctions en escalier et l'on a*

$$\phi_- \leq f \leq \phi_+.$$

L'intégrale de la fonction en escalier ϕ_+ est par définition

$$\int_0^1 \phi_+(x)\ dx = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2}\left(\frac{i}{n},\frac{i-1}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^n i^2.$$

On se souvient de la formule $\sum_{i=1}^n i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, et donc

$$\int_0^1 \phi_+(x)\ dx = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

De même pour la fonction ϕ_- :

$$\int_0^1 \phi_-(x)\ dx = \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

Maintenant $I_-(f)$ est la borne supérieure sur toutes les fonctions en escalier inférieures à f donc en particulier

$$I_-(f) \geq \int_0^1 \phi_-(x)\ dx.$$

De même

$$I_+(f) \leq \int_0^1 \phi_+(x)\ dx.$$

En résumé :

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \int_0^1 \phi_-(x)\ dx \leq I_-(f) \leq I_+(f) \leq \int_0^1 \phi_+(x)\ dx = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$ alors les deux extrémités tendent vers $\dfrac{1}{3}$. On en déduit que $I_-(f) = I_+(f) = \dfrac{1}{3}$.
Ainsi f est intégrable et $\displaystyle\int_0^1 x^2\ dx = \frac{1}{3}$.

Convention :

i) $\displaystyle\int_a^a f(x)\ dx = 0$

ii) $\displaystyle\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx \quad (a \leq b)$

2.2.2 Propriétés de l'intégrale

Ce sont les mêmes propriétés que pour les fonctions en escaliers.

Proposition 3 *Soient f et g des fonctions définies sur $[a,b]$ et intégrables.*

1. La fonction $f+g$ est intégrable et l'on a

$$\int_a^b (f+g)(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx.$$

2. Pour tout nombre réel λ, la fonction λf est intégrable et l'on a

$$\int_a^b \lambda f(x)\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx.$$

3. Si $f \geq g$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b g(x)\ dx$.

4. Des fonctions intégrables qui diffèrent en un nombre fini de points ont le même intégrale .

5. Quelque soit $c \in [a,b]$, f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ et l'on a

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx \text{ (Formule de Chasles)}$$

Preuve 2 *1. Puisque les fonctions f et g sont intégrables, $\forall \varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier u, v, U et V telles que*

$$u \leq f \leq U,\ v \leq g \leq V,\ \int_a^b (U-u)(x)\ dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \int_a^b (V-v)(x)\ dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $w = u+v$ et $W = U+V$. Les fonctions w et W sont en escalier. De plus, nous *avons*

$$w \leq f+g \leq W \quad et \int_a^b (W-w)(x)\ dx = \int_a^b (U-u)(x)\ dx + \int_a^b (V-v)(x)\ dx \leq \varepsilon$$

La fonction f est donc intégrable. L'encadrement $w \leq f+g \leq W$ implique

$$\int_a^b u(x)\ dx + \int_a^b v(x)\ dx \leq \int_a^b (f+g)(x)\ dx \leq \int_a^b U(x)\ dx + \int_a^b V(x)\ dx.$$

D'autre part, en ajoutant membre à membre les inégalités

$$\int_a^b u(x)\ dx \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b U(x)\ dx \quad et \quad \int_a^b v(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx \leq \int_a^b V(x)\ dx,$$

nous obtenons

$$\int_a^b u(x)\ dx + \int_a^b v(x)\ dx \leq \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx \leq \int_a^b U(x)\ dx + \int_a^b V(x)\ dx.$$

On déduit les deux inégalités

$$\int_a^b u(x)dx + \int_a^b v(x)dx - \left(\int_a^b U(x)dx + \int_a^b V(x)dx\right) \leq \int_a^b (f+g)(x)dx - \left(\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\right)$$

et

$$\int_a^b (f+g)(x)dx - \left(\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\right) \leq \int_a^b U(x)dx + \int_a^b V(x)dx - \left(\int_a^b u(x)dx + \int_a^b v(x)dx\right)$$

Dans ces encadrements, le membre droit de la deuxième inégalité vaut

$$\int_a^b (U-u)(x)\ dx + \int_a^b (V-v)(x)\ dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

de même, le membre gauche de la première inégalité est supérieur ou égal à ε, il vient

donc

$$\varepsilon \leq \int_a^b (f+g)(x)\ dx - \left(\int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx\right) \leq \varepsilon$$

comme ces inégalités sont vraies pour tout $\varepsilon > 0$, *nous concluons*

$$\int_a^b (f+g)(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$$

d'où le premier résultat.

2. Ce résultat se démontre exactement comme le précédent.

3. La fonction $f-g$ *est intégrable d'après (1) et (2). Si l'on a* $f-g \geq 0$, *donc par définition de l'intégrale*

$$\int_a^b (f-g)(x)\ dx \geq \int_a^b 0\ dx = 0.$$

D'après (1), nous avons

$$\int_a^b (f-g)(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b g(x)\ dx,$$

d'où l'inégalité

$$\int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b g(x)\ dx.$$

Les propriétés (4) et (5) se démontrent comme pour les fonctions en escaliers.

Remarque 2.2.2 *Noter que même si* $f\ .g$ *est intégrable on a en général*

$$\int_a^b (f.g)(x)\ dx \neq \left(\int_a^b f(x)\ dx\right).\left(\int_a^b g(x)\ dx\right).$$

Par exemple, soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ 0 & ailleure \end{cases},$$

et soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & si \qquad x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \\ 0 & ailleure \end{cases},$$

alors $f\ (x).g(x) = 0$ *pour tout* $x \in [0,1]$ *et donc* $\displaystyle\int_0^1 f\ (x).g(x)\ dx = 0.$
Alors que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx = \frac{1}{2}$ *et* $\displaystyle\int_0^1 g(x)\ dx = \frac{1}{2}.$

Proposition 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz.) *Soient* $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions Riemann-intégrables sur* $[a,b]$*, alors, on a l'inégalité dite de Cauchy-schwarz :*

$$\left|\int_a^b f(x).g(x)\ dx\right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_a^b g^2(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Preuve 3 *Posons*

$$P(\lambda) = \int_a^b \left(f(x) + \lambda g(x)\right)^2\ dx = \lambda^2 \int_a^b g^2(x)\ dx + 2\lambda \int_a^b f(x).g(x)\ dx + \int_a^b f^2(x)\ dx.$$

On a $P(\lambda) \geq 0\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$*, alors*

$$\Delta' = \left(\int_a^b f(x).g(x)\ dx\right)^2 - \int_a^b f^2(x)\ dx. \int_a^b g^2(x)\ dx \leq 0$$

d'où le résultat.

Proposition 5 (Inégalité de Minkowski) *Soient* $f,\ g\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions Riemann-intégrables sur* $[a,b]$*, alors, on a l'inégalité suivante :*

$$\left[\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Preuve 4

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx &= \int_a^b f^2(x)\;dx + 2\int_a^b f(x).g(x)\;dx + \int_a^b g^2(x)\;dx \\
&\leq \int_a^b f^2(x)\;dx + 2\left(\int_a^b f^2(x)\;dx\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\int_a^b g^2(x)\;dx\right)^{\frac{1}{2}} + \int_a^b g^2(x)\;dx \\
&= \left[\left(\int_a^b f^2(x)\;dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\;dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2
\end{aligned}$$

D'où

$$\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b f^2(x)\;dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\;dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Corollaire 2.2.1 *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable. Si m et M sont des nombres réels tels que $m\leq f(x)\leq M$ quelque soit $x\in[a,b]$, alors on a*

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\;dx \leq M.$$

Preuve 5 *D'après la propriété (3) de la proposition 3, on a*

$$\begin{aligned}
m(b-a) &= \int_a^b m\;dx \leq \int_a^b f(x)\;dx \leq \int_a^b M\;dx = M(b-a). \\
&\Leftrightarrow\;\; m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\;dx \leq M.
\end{aligned}$$

Théorème 2.2.1 *(Formule de la moyenne). Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et g intégrable sur $[a,b]$ avec g de signe constant, alors il existe un nombre $c\in[a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\;dx = f(c)\int_a^b g(x)\;dx.$$

En particulier si $g = 1$ on a

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx.$$

Preuve 6 *Nous supposerons ici que g est positive. L'autre cas se traite de manière analogue.*

Puisque la fonction f est continue, elle admet un maximum M et un minimum m . On a

$$mg(x) \leq f(x)\, g(x) \leq Mg(x) \quad \forall x \in [a,b]\, ,$$

donc

$$m\int_a^b g(x)\ dx \leq \int_a^b f(x)\, g(x)\ dx \leq M\int_a^b g(x)\ dx \tag{*}$$

1er cas : Si $\int_a^b g(x)\ dx = 0$, alors $\int_a^b f(x)g(x)\ dx = 0$ et le théorème est évidement vérifié.
2ème cas : Si $\int_a^b g(x)\ dx \neq 0$, les inégalités ( ) impliquent que*

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\, g(x)\ dx}{\int_a^b g(x)\ dx} \leq M$$

alors on a, d'après le corollaire précédent, le nombre

$$\frac{\int_a^b f(x)\, g(x)\ dx}{\int_a^b g(x)\ dx} \in [m, M]\, ,$$

donc il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\frac{\int_a^b f(x)\, g(x)\ dx}{\int_a^b g(x)\ dx} = f(c).$$

Théorème 2.2.2 *Si $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors*
- f est bornée et intégrable sur tout segment contenu dans I.
- Pour tout $c \in I$, la fonction $F(x) = \int_c^x f(t)\ dt$ est la primitive de f qui s'annule en c.
- Pour tout $x \in]a, b[$, $F'(x) = f(x)$, $F'_d(a) = f(a)$, $F'_g(b) = f(b)$.

Preuve 7 *Il suffit de montrer que F est dérivable en tout point $x_0 \in I$ et que*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Soit $x_0 \in I$, alors on a :

$$\frac{1}{h}\left(F(x_0 + h) - F(x_0)\right) = \frac{1}{h}\int_c^{x_0+h} f(x)\ dx - \frac{1}{h}\int_c^{x_0} f(x)\ dx = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\ dx.$$

En utilisant la continuité de f sur $[x_0, x_0 + h]$ et la formule de la moyenne, on obtient $\exists \eta_h \in [x_0, x_0 + h]$ tel que :

$$f(\eta_h) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\ dx$$

D'où

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\eta_h) = f(\lim_{h\to 0}(\eta_h)) = f(x_0).$$

Donc on a : $F'(x_0) = f(x_0)$.
Si $x_0 = a$, on considère $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = F'_d(a)$.
Si $x_0 = b$, on considère $\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = F'_g(b)$.

Remarque 2.2.3 *1) Si les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées et si on considère la fonction $F(x) = \int_x^c f(t)\ dt$ $(a \le x \le b)$, alors*
- Pour tout $x \in]a, b[$, $F'(x) = -f(x)$.
- Si $a \in I$ alors $F'_d(a) = -f(a)$ et si $b \in I$ alors $F'_g(b) = -f(b)$
2) Pour toute primitive F de f on a : $\int_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

3) En reprenant l'intégration par parties, vue lors de l'étude des primitives, on obtient :

$$\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx.$$

4) En utilisant le changement de variables $x = \psi(t)$, on obtient :

$$\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(x)\ dx = \int_a^b f(\psi(t))\psi'(t)\ dt$$

Théorème 2.2.3 *Si $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction monotone, alors f est intégrable sur I*

2.2.3 Sommes de Riemann

L'intégrale est définie à partir des limites des sommes. Mais maintenant que nous savons calculer des intégrales sans utiliser ces sommes on peut faire le cheminement inverse : calculer des limites de sommes à partir d'intégrales.

Théorème 2.2.4 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, alors*

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\ dx$$

S_n s'appelle la somme de Riemann associée à l'intégrale et correspond à une subdivision régulière de l'intervalle $[a,b]$ en n petits intervalles. La hauteur de chaque rectangle est évaluée à son extrémité droite. Le cas le plus utile est celui où $a = 0$ et $b = 1$, alors

$$\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \quad et\ f(a + k\frac{b-a}{n}) = f(\frac{k}{n}),$$

ainsi

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)dx$$

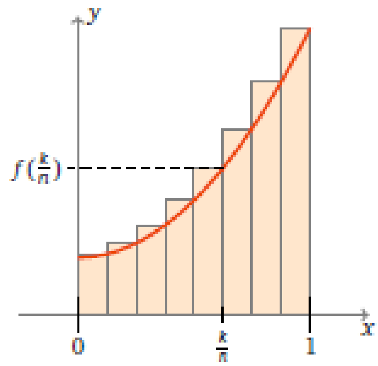

FIG.5-Somme de Riemann

Exemple 32 *Calculer la limite de la somme* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

On a

$$S_1 = \frac{1}{2},\ S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4},\ S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6},\ S_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}, \dots$$

La somme S_n *s'écrit aussi* $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$. *En posant* $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $a = 0$ *et* $b = 1$, *on reconnaît que* S_n *est une somme de Riemann.*

Donc

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\log|1+x|]_0^1 = \log 2.$$

Ainsi, $\quad S_n \to \log 2$ *(lorsque* $n \to +\infty$ *).*

Proposition 6 *Si* $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ *(* f' *existe et continue)*

et si on pose

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

on a

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - R_n \right| \leq \frac{M_1}{2n}$$

où $M_1 = \sup\{|f'(x)|\ ;\ x \in [0,1]\}$.

Preuve 8 *Sur l'intervalle* $[x_k, x_{k+1}]$*, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, l'erreur est*

$$\begin{aligned}
\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(f(x) - f\left(x_k\right)\right)\ dx\right| &\leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left|f(x) - f(x_k)\right|\ dx \\
&\leq M_1 \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left|x - x_k\right| dx \\
&= M_1 \left[\frac{\left(x - x_k\right)^2}{2}\right]_{x_k}^{x_{k+1}} \\
&= \frac{M_1}{2n^2}.
\end{aligned}$$

Cette erreur étant obtenue sur n *intervalles, on a le résultat annoncé.*

Théorème 2.2.5 *Soit* f *une fonction intégrable et positive sur* $[a, b]$*, alors* $\int_a^b f(x)dx$ *est l'aire du domaine*

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)\right\}.$$

Pour f *de signe quelconque alors* $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f_+(x)\ dx - \int_a^b f_-(x)\ dx$ *est la différence des surfaces des domaines* D_+ *et* D_- *associés à* f_+ *et à* f_-.

Preuve 9 *Les sommes de Darboux sont des sommes de surfaces de rectangles qui encadrent le domaine* D *comme précisé ci-dessus. Si* f *est intégrable, on a vu que ces sommes convergent vers l'intégrale de* f.

Exemple 33 *Déterminer les sommes de Darboux inférieures et supérieures et étudier l'intégrabilité au sens de Riemann des fonctions* f *suivantes :*

a) f *constante sur* $[a, b]$ *et* σ *une subdivision quelconque de* $[a, b]$.

b) f *en escalier sur* $[a, b]$ *et* σ *une subdivision adaptée.*

c) f *monotone sur* $[a, b]$*,* σ *une subdivision quelconque et* σ_n *une subdivision uniforme de pas* $\frac{b-a}{n}$.

d) f définie sur $[a,b]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \in \mathbb{Q} \cap [a,b] \\ 1; & x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [a,b] \end{cases}$$

e) f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x; & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0; & x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$$

Preuve 10 *a) On pose $f(x) = C$, soit $\sigma = \{x_0, ..., x_n\}$ alors : $M_i = m_i = C$,$\forall i \in [0; n-1]$, donc $I_+^\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i) = C(b-a)$ et $I_-^\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i) = C(b-a)$ d'où $I_+(f) = I_-(f) = C(b-a)$, f est intégrable avec $\int_a^b f(x)dx = C(b-a)$.*

b) Soit $\sigma_0 = \{x_0, ..., x_n\}$ une subdivision adaptée à f, on pose

$$f(x) = C_i \forall x \in]x_i, x_{i+1}[, \forall i \in [0, n-1],$$

donc

$$I_+^{\sigma_0}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i) = I_-^{\sigma_0}(f),$$

d'où

$$I_+^{\sigma_0}(f) = I_-^{\sigma_0}(f).$$

Intégrabilité : Soit σ une subdivision quelconque, on prend $\sigma_1 = \sigma \cup \sigma_0$ où σ_1 est une subdivision adaptée à f et on a :

$$I_-^\sigma(f) \leq I_-^{\sigma_1}(f) = I_+^{\sigma_1}(f) \leq I_+^\sigma(f)$$

donc

$$\sup_{\sigma} I_-^{\sigma}(f) = \inf_{\sigma} I_+^{\sigma}(f),$$

alors f *est intégrable et* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} C_i\left(x_{i+1}-x_i\right).$

c) Soit $\sigma = \{x_0, ..., x_n\}$ *une subdivision quelconque, alors,*

$$\begin{aligned} M_i &= \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f = f(x_{i+1})(\text{ ou } f(x_i)\ ) \\ m_i &= \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f = f(x_i)(\text{ ou } f(x_{i+1})\ ). \end{aligned}$$

(f *est croissante ou décroissante). On suppose par exemple que* f *est croissante,*

$$\begin{aligned} I_+^{\sigma}(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\left(x_{i+1}-x_i\right) \\ I_-^{\sigma}(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\left(x_{i+1}-x_i\right) \end{aligned}$$

<u>Intégrabilité</u> : On a $\forall \sigma$ *subdivision de* $[a,b]$

$$\begin{aligned} I_+^{\sigma}(f) - I_-^{\sigma}(f) &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x_{i+1})-f(x_i)\right)\left(x_{i+1}-x_i\right) \\ &\leq \max_i\left(x_{i+1}-x_i\right)\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x_{i+1})-f(x_i)\right) \\ &\leq \max_i\left(x_{i+1}-x_i\right)\left(f(b)-f(a)\right). \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ *telle que*

$$h_{\sigma} = \max_i\left(x_{i+1}-x_i\right) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1},$$

alors

$$\begin{aligned} I_+^{\sigma}(f) - I_-^{\sigma}(f) &\leq \frac{\varepsilon\left(f(b)-f(a)\right)}{f(b)-f(a)+1} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui montre l'intégrabilité.

Si $\sigma_n = \{x_0, ..., x_n\}$ *est la subdivision régulière à* n *intervalles, alors*

$$\begin{aligned} I_+^{\sigma_n}(f) &= \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \\ I_-^{\sigma_n}(f) &= \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \end{aligned}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \in \mathbb{Q} \cap [a,b] \\ 1; & x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \cap [a,b] \end{cases}$$

On sait que $\forall\, [c,d] \in \mathbb{R}$*, alors*

$$[c,d] \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing \quad et \quad [c,d] \cap \mathbb{R}/\mathbb{Q} \neq \varnothing$$

$\mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ *sont denses dans* $\mathbb{R}$*, d'où* $\forall \sigma = \{x_0, ..., x_n\}$ *une subdivision de* $[a,b]$ *alors :*

$$M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f = 1,\ m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f = 0,$$

d'où

$$I_+^{\sigma}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = b - a \quad et \quad I_-^{\sigma}(f) = 0$$

alors

$$\inf_{\sigma} I_+^{\sigma}(f) = b - a \quad et \quad \sup_{\sigma} I_+^{\sigma}(f) = 0$$

donc f *est non intégrable au sens de Riemann.*

e)

$$f(x) = \begin{cases} x; & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0; & x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}.$$

Soit $\sigma = \{x_0, ..., x_n\}$ *une subdivision de* $[0,1]$ *et* $M_i = \sup\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f = x_{i+1}$ *car* $\exists\, (r_k)$ *est une*

suite de rationnels dans $[x_i, x_{i+1}]$ *telle que* $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k = x_{i+1}$.
Comme $f(r_k) = r_k$ *donc* $\lim\limits_{k\to+\infty} f(r_k) = x_{i+1}$, *d'où*

$$\begin{cases} \forall x \in [x_i, x_{i+1}], & f(x) \leq x_{i+1} \\ \exists (r_k) \in [x_i, x_{i+1}] & / \lim\limits_{k\to+\infty} f(r_k) = x_{i+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_i = \sup\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f = x_{i+1} \\ m_i = \inf\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f = 0 \end{cases},$$

d'où

$$\begin{cases} I_+^\sigma(f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} x_{i+1}(x_{i+1} - x_i) \\ I_-^\sigma(f) = 0 \end{cases}.$$

Prenons la fonction continue sur $[0,1]$, $g(x) = x$, g *est intégrable et* $I_+^\sigma(g) = I_+^\sigma(f)$.
Or on sait que

$$\inf_\sigma I_+^\sigma(g) = \lim_{n\to+\infty} I_+^{\sigma_n}(g)$$

où σ_n *est la subdivision régulière de* $[0,1]$, *donc*

$$\begin{aligned} \inf_\sigma I_+^\sigma(g) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{cases} \inf\limits_\sigma I_+^\sigma(f) = \dfrac{1}{2} \\ \sup\limits_\sigma I_-^\sigma(f) = 0 \end{cases},$$

donc f *n'est pas intégrable.*

Exemple 34 *Considérons la fonction définie sur* $[a,b]$ *par* $f(x) = x^3$ *et* σ_n *la subdivision uniforme de pas* $\dfrac{b-a}{n}$.

a) Calculer les sommes de Darboux inférieures $I_-^n(f)$ *et supérieures* $I_+^n(f)$ *de* f *assosiées à la subdivision* σ_n *(On rapelle que :* $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *et* $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 =$

$n^2\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$).

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_-^n(f) = \lim\limits_{n\to+\infty} I_+^n(f) = \dfrac{b^4-a^4}{4}$.

Preuve 11 *a) On a*

$$\begin{aligned}
x_k &= a+\frac{k}{n}(b-a), k\in[0,n],\\
M_k &= \sup_{[x_k,x_{k+1}]} f = f(x_{k+1}) = \left(a+\frac{k+1}{n}(b-a)\right)^3\\
m_k &= \inf_{[x_k,x_{k+1}]} f = f(x_k) = \left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_+^n(f) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}\left(a+\frac{k+1}{n}(b-a)\right)^3\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}\left(a^3+\frac{3a^2}{n}(b-a)(k+1)+\frac{3a}{n^2}(b-a)^2(k+1)^2+\left(\frac{b-a}{n}\right)^3(k+1)^3\right)\\
&= \frac{b-a}{n}\left(na^3\right)+\frac{3a^2(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{3a}{n^3}(b-a)^3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&\quad+\left(\frac{b-a}{n}\right)^4\frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} I_+^n(f) = \dfrac{b^4-a^4}{4}$.

De la même manière on trouve

$$I_-^n(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)^3 \ \textit{ et } \lim_{n\to+\infty} I_-^n(f) = \frac{b^4-a^4}{4}.$$

Exemple 35 *Soit* α, $\beta\in\mathbb{R}_+^*$, *calculer la limite des suites suivantes :*

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n\alpha+k\beta}$ 2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$ 3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^3+8k^3}$ 4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k^p}{n^{p+1}}$, $p\in\mathbb{R}_+^*$

5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$ 6. $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{n}$ 7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$ 8. $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sqrt[n]{a^k}$, $(a>1)$

Preuve 12 *1.On a*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n\alpha + k\beta} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\alpha + \beta \dfrac{k}{n}}$$

la somme de Riemann associée à la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\alpha + \beta x}$, *définie et continue sur* $[0,1]$. *Pour la subdivision* $\sigma = \{x_0, ..., x_n\}$, *définie par* $x_k = \dfrac{k}{n}$, $k \in \{0, ..., n\}$, *on obtient*

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n\alpha + k\beta} = \int_0^1 \frac{dx}{\alpha + \beta x} = \frac{1}{\beta} \log\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha}\right).$$

2. On a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1 + \left(\dfrac{k}{n}\right)^2}$$

la somme de Riemann associée à la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, *définie et continue sur* $[0,1]$. *Pour la subdivision* $\sigma = \{x_0, ..., x_n\}$, *définie par* $x_k = \dfrac{k}{n}$, $k \in \{0, ..., n\}$, *on obtient*

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

3. On a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^3 + 8k^3} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}{1 + 8\left(\dfrac{k}{n}\right)^3}$$

la somme de Riemann associée à la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + 8x^2}$, *définie et continue sur* $[0,1]$. *Pour la subdivision* $\sigma = \{x_0, ..., x_n\}$, *définie par* $x_k = \dfrac{k}{n}$, $k \in \{0, ..., n\}$, *on obtient*

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^3 + 8k^3} = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1 + 8x^3} = \left[\frac{1}{24} \log\left(1 + 8x^3\right)\right]_0^1 = \frac{1}{12} \log 3.$$

4. On a

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p$$

la somme de Riemann associée à la fonction $f(x)=x^p$, définie et continue sur $[0,1]$ (car $p>0$). Pour la subdivision $\sigma=\{x_0,...,x_n\}$, définie par $x_k=\frac{k}{n}$, $k\in\{0,...,n\}$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^p}{n^{p+1}}=\int_0^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}.$$

5. On a

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+2\left(\frac{k}{n}\right)}}$$

la somme de Riemann associée à la fonction $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$, définie et continue sur $[0,1]$. Pour la subdivision $\sigma=\{x_0,...,x_n\}$, définie par $x_k=\frac{k}{n}$, $k\in\{0,...,n\}$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+2x}}=\left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1=\sqrt{3}-1.$$

6. On a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{n}$$

la somme de Riemann associée à la fonction $f(x)=\cos^2\pi x$, définie et continue sur $[0,1]$. Pour la subdivision $\sigma=\{x_0,...,x_n\}$, définie par $x_k=\frac{k}{n}$, $k\in\{0,...,n\}$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{n}=\int_0^1\cos^2\pi x dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1+\cos 2\pi x)\,dx=\frac{1}{2}.$$

7. On a

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

la somme de Riemann associée à la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, *définie et continue sur* $[0,1]$. *Pour la subdivision* $\sigma = \{x_0, ..., x_n\}$, *définie par* $x_k = \dfrac{k}{n}$, $k \in \{0, ..., n\}$, *on obtient*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

8. On a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \sqrt[n]{a^k} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} (a)^{\dfrac{k}{n}}$$

la somme de Riemann associée à la fonction $f(x) = a^x$, *définie et continue sur* $[0,1]$. *Pour la subdivision* $\sigma = \{x_0, ..., x_n\}$, *définie par* $x_k = \dfrac{k}{n}$, $k \in \{0, ..., n\}$, *on obtient*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \sqrt[n]{a^k} = \int_0^1 a^x dx = \int_0^1 e^{x\log a} dx = \frac{a-1}{\log a}.$$

Chapitre 3

Équations différentielles du premier ordre

3.1 Introduction (définitions générales)

De nombreux problèmes issus de la physique sont modélisés à l'aide d'une équation différentielle (ID), dans laquelle interviennent la fonction inconnue et ses dérivées successives. Cette équation relie la fonction inconnue y à sa dérivée, éventuellement à des dérivées supérieures (y', y'',y''', .) et à d'autres fonctions. Par exemple :

$$\begin{aligned} & y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \sin x \\ & y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\ & (y'(x))^2 + \exp(y(x)) = \cos x \end{aligned} .$$

Un exemple que vous connaissez bien sans doute, l'équation du mouvement d'un objet physique ponctuel lancé avec une vitesse initiale et soumis au champ de la pesanteur :

$$mx''(t) = -mg.$$

Ou encore un ressort soumis à la gravité et à la force de rappel

$$mx''(t) = -kx(t) - mg$$

En toute généralité la résolution d'une équation différentielle vraiment quelconque est un problème qui peut être extrêmement difficile, parfois même au niveau de la recherche.

L'objectif de ce chapitre est de donner les techniques nécessaires pour la résolution de certaines classes d'équations différentielles.

Définition 3.1.1 • *Une équation différentielle d'ordre n est une équation de la forme*

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{ED}$$

où Fest une fonction de $(n+2)$ variables.

• *Une solution d'une telle équation différentielle sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y \in C^n(I; R)$ (une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ qui est n fois continûment dérivable) qui vérifie l'équation (ED). ($\forall\ x \in I,$ on a $F(x, y(x), y\prime(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0$).*

Exemple 36 • $y' + xy = \sin x$ *(l'équation est du 1^{er}ordre, dont y est la fonction inconue et x est la variable).*

• $y''' + y = 0$ *(l'équation est du $3^{\text{ème}}$ordre, dont y est la fonction inconue).*

Remarque 3.1.1 • *Par abréviation, on note y au lieu de $y(x)$, y' au lieu $y\prime(x)$,...,. On note donc « $y\prime = x + 1$ » ce qui signifie « $y'(x) = x + 1$ ».*

• *Résoudre (ou intégrer) une équation différentielle, c'est trouver toutes les solutions de cette équation.*

• *La notion d'intervalle dans la résolution d'une équation différentielle est fondamentale. Si on change d'intervalle, on peut très bien obtenir d'autres solutions. Par exemple,* *si on se place sur l'intervalle* $I_1 =]0, +\infty[$, *l'équation différentielle* $y\prime = \dfrac{1}{x}$ *a pour solutions les fonctions* $y(x) = \log(x) + k$. *Alors que sur l'intervalle* $I_2 =]-\infty, 0[$, *les solutions sont les fonctions* $y(x) = \log(-x) + k$, *(* k *est une constante).*

Définition 3.1.2 *- L'équation différentielle* $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ *est une équation différentielle implicite.*

- L'équation différentielle $F(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = y^{(n)}$ *est une équation différentielle explicite.*

Exemple 37 $y\prime \log x - y = 0$ *est la forme implicite.*

$y\prime = \dfrac{y}{\log x}$ *est la forme explicite.*

Définition 3.1.3 *On parle de problème (ou équation différentielle) aux conditions (ou valeurs) initiales lorsqu'on considère une équation différentielle :*

$$\begin{cases} F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) \quad = y_0 \\ y'(x_0) \;\; = y_1 \\ y''(x_0) = y_2 \\ \qquad\quad \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) \quad = y_{n-1} \end{cases}.$$

Exemple 38 *La solution de l'équation différentielle suivante :* $y\prime = y$ *avec* $y(0) = 1$ *est* $y = e^x$.

3.1.1 Équations différentielles linéaires

Définition 3.1.4 • *Une équation différentielle d'ordre* n *est linéaire si elle est de la forme*

$$a_0(x)y + a_1(x)y\prime + ... + a_n(x)y^{(n)} = g(x) \qquad (E)$$

où les a_i et g sont des fonctions réelles continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
Le terme linéaire signifie qu'il n'y a pas d'exposant pour les termes y, y', y'', . . .

• *Une équation différentielle linéaire est homogène ou sans second membre, si la fonction g ci-dessus est la fonction nulle :*

$$a_0(x)y + a_1(x)y\prime + ... + a_n(x)y^{(n)} = 0. \qquad (E_0)$$

• *Une équation différentielle linéaire est à coefficients constants si les fonctions a_i ci-dessus sont constantes :*

$$a_0 y + a_1 y\prime + ... + a_n y^{(n)} = g(x)$$

où les a_i sont des constantes réelles et g une fonction continue.

Exemple 39 • $y' + x^2y = \sin x$ *est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.*

• $y' + x^2y = 0$ *est l'équation différentielle homogène associée à la précédente.*

• $3y^{(4)} + y' + y = x^2 + 1$ *est une équation différentielle linéaire d'ordre 4 à coefficients constants, avec second membre.*

•$y''y + y' = e^x$ *et* $(y')^3 + y = 0$ *ne sont pas des équations différentielles linéaires.*

Proposition 7 *(Principe de linéarité).*
Si y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène

$$a_0(x)y + a_1(x)y\prime + ... + a_n(x)y^{(n)} = 0,$$

alors, quelque soient λ, $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est aussi solution de cette équation.

Remarque 3.1.2 • *L'ensemble des solutions forme un espace vectoriel.*

• (E_0) *est l'équation différentielle linéaire homogène associée à* (E)

Proposition 8 *(Principe de superposition).*
L'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de (E) est formé de

$$y_0 + y \text{ avec } y \in \mathcal{S}_h$$

où

- $\mathcal{S}_h$ *est l'ensemble des solutions y de l'équation homogène (E_0).*
- y_0 *est une solution particulière de l'équation (E).*

Exemple 40 *Chercher la solution de l'équation*

$$y'' = \cos 2x.$$

On a : $y_0 = -\frac{1}{4}\cos 2x$ une solution particulière de l'équation avec second membre et $y = kx + c$ $(k,\ c \in \mathbb{R})$ la solutions de l'équation homogène. Donc la solution générale est

$$y = -\frac{1}{4}\cos 2x + kx + c, \quad k, c \in \mathbb{R}.$$

3.2 Les équations diffé私etielles du premier ordre

Définition 3.2.1 *Une équation différentielle du premier ordre est une expression qui décrit une relation entre une fonction à une variable et sa dérivée première*

$$F(x, y, y') = 0,$$

lorsque cette équation est résoluble en y', on peut la mettre sous la forme

$$y' = f(x, y).$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est appelé solution générale.
Si on ajoute à l'équation une condition initiale $y(x_0) = y_0$*, on dit que le système*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

admet une solution particulière.

3.2.1 Types d'équations différentielles du premier ordre

Équations différentielles à variables séparables

Définition 3.2.2 *On dit qu'une équation différentielle du* 1^{er} *ordre est à variable séparable si elle s'écrit*

$$y' = f(x)g(y),$$

où $f \in C^0(I, \mathbb{R})$ *et* $g \in C^0(I, \mathbb{R})$*.*

En pratique, on écrit $y' = f(x)g(y)$ de la façon suivante

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

ce qui donne, en intégrant des deux cotés

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \Leftrightarrow G(y) = F(x) + k,$$

où G est une primitive de $\frac{1}{g}$, F est une primitive de f et k est une constante arbitraire.

Exemple 41 *Soit* $y\prime = e^y sin(x)$*.*

- *Tout d'abord, vérifions qu'il s'agit bien d'une équation différentielle à variable séparable :* $f(x) = \sin(x)$ *et* $g(y) = e^y$ *où* f *et* g *sont bien continues sur* $\mathbb{R}$*.*

- $y\prime = e^y sin(x) \Leftrightarrow e^{-y}dy = \sin x dx$, *ce qui donne en intégrant*

$$\begin{aligned} \textstyle\int e^{-y}dy = \int \sin x dx \quad &\Rightarrow e^{-y} = \cos x + k \\ &\Rightarrow y = -\log|\cos x + k| = \log\frac{1}{|\cos x + k|}. \end{aligned}$$

Équations différentielles homogènes

Définition 3.2.3 *On appelle équation différentielle homogène l'équation différentielle du* 1^{er} *ordre de type :* $y' = f(\frac{y}{x})$ *où* f *est continue sur* I*.*

Exemple 42 $y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}$ *est une équation différentielle homogène.*
En effet :

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} = \frac{x}{y} - \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2} = f(\frac{y}{x}) \text{ où } f(t) = t - \frac{1}{t^2}.$$

Méthode de résolution On considère l'équation différentielle $y' = f(\frac{y}{x})$, on pose $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ avec $x \neq 0$ $(y(x) = u(x)x)$.
Si y est une solution de l'équation, alors :

$$y'(x) = xu'(x) + u(x).$$

En remplaçant y et y' par leurs valeurs, on trouve

$$xu' + u = f(u).$$

C'est une équation à variables séparables et s'écrit sous la forme :

$$\frac{u'}{f(u) - u} = \frac{1}{x} \text{ où } g(u) = \frac{1}{f(u) - u} \text{ et } h(x) = \frac{1}{x}.$$

On pose

$$G(u) = \int g(u)\ du \text{ et } H(x) = \int h(x)\ dx,$$

donc

$$G(u) = H(x) + k.$$

Équations différentielles de type $y'(x) = f(ax + by + c)$

1. Si $b = 0$, $y\prime = f(ax + c)$ est une équation différentielle du 1^{er}ordre est à variables séparables.
2. Si $b \neq 0$, il ne s'agit pas d'une équation à variables séparables, mais on peut la ramener en posant

   $$u(x) = ax + by(x) + c.$$

   Si y est une solution de l'équation différentielle $y\prime = f(ax + by + c)$, on a :

   $$\begin{aligned} u'(x) &= a + by'(x) \\ &= a + bf(ax + by + c) \\ &= a + bf(u(x)). \end{aligned}$$

   Il s'agit d'une équation de type $u' = g(u)$ (à variables séparables) qui est résolue.

Exemple 43 $y' = (x + y + 1)^2 = f(x + y + 1)$ *avec* $f(t) = t^2$*.*
On pose

$$u(x) = x + y(x) + 1,$$

donc

$$u'(x) = 1 + y'(x) = 1 + (x + y + 1)^2 = 1 + u^2(x).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} u'(x) = 1 + u^2(x) \quad &\Leftrightarrow \frac{u'(x)}{1 + u^2(x)} = 1 \\ &\Leftrightarrow \int \frac{du}{1 + u^2} = \int 1dx \quad , \\ &\Leftrightarrow \arctan u = x + k \\ &\Leftrightarrow u = \tan g\,(x + k) \end{aligned}$$

d'où

$$u(x) = x + y(x) + 1 = \tan g\,(x+k) \Rightarrow y(x) = \tan g\,(x+k) - x - 1.$$

Équations différentielles linéaires du 1^{er}ordre

Définition 3.2.4 *On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1, toute équation différentielle de la forme :*

$$y' + a(x)y(x) = f(x) \qquad (E)$$

où a et f sont des fonctions continues de I à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{K}$), I étant un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.
L'équation homogène (ou sans second membre) associée à (E) est :

$$y' + a(x)y = 0 \qquad (E_0)$$

a) Résolution de l'équation sans second membre

On remarque que $y = 0$ est une solution de (E_0).
Par ailleurs, si $y \neq 0$ alors

$$\begin{aligned} y' + a(x)y = 0 \quad &\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -a(x) \\ &\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -a(x)\ dx \\ &\Leftrightarrow \log|y| = -A(x) + k \\ &\Leftrightarrow y = Ce^{-A(x)}\ \ (C = \mp e^k) \end{aligned}$$

où $k \in \mathbb{R}$ et A est une primitive de $a(x)$ dans I, puis $y = Ce^{-A(x)}$ où $C \in \mathbb{R}^*$.
Cette méthode ne fait pas apparaître la solution nulle que l'on aura le soin de ne pas oublier en choisissant C dans $\mathbb{R}$ (tout entier).

Exemple 44 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

$$a)\ \ y' + e^x y = 0 \qquad b)\ y' + y^3 e^x = 0.$$

Preuve 13 *a)*

$$\begin{aligned} y' + e^x y = 0 \ &\Rightarrow \tfrac{y'}{y} = -e^x \\ &\Rightarrow \int \tfrac{y'}{y} = -\int e^x dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = -e^x + c \\ &\Rightarrow y = ke^{-e^x} \ \ ,\ k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} y' + y^3 e^x = 0 \ &\Rightarrow y' = -y^3 e^x \\ &\Rightarrow \int -\tfrac{y'}{y^3} = \int e^x dx \\ &\Rightarrow \tfrac{1}{2y^2} = e^x + c \\ &\Rightarrow y = \mp\sqrt{\frac{1}{2e^x + k}},\ k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b) Résolution de l'équation avec second membre

i) Les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière de (E) les solutions de (E_0). Ce qui donne :

Proposition 9 *Si y_0 est une solution de (E), alors les solutions de (E) sont les fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ définies par :*

$$y = y_0 + ke^{-A(x)} \qquad \textit{avec } k \in \mathbb{R}$$

où $x \to A(x)$ est une primitive de $x \to a(x)$.

Preuve 14 *Montrons d'abord qu'elles forment des solutions de (E).*

On a

$$\begin{aligned} y'(x) &= y_0'(x) - ka(x)e^{-A(x)} \\ &= \quad - a(x)y_0(x) + C(x) - ka(x)e^{-A(x)} \\ &= -a(x)\left[y_0(x) + ke^{-A(x)}\right] + C(x) \\ &= -a(x)y(x) + C(x). \end{aligned}$$

Ce sont bien des solutions de (E).

Il reste a voir qu'on les aura toutes de la même forme.

Soit y une solution quelconque de (E), considérons $z(x) = (y(x) - y_0(x))\, e^{A(x)}$, on a

$$\begin{aligned} z'(x) &= (y'(x) - y_0'(x))\, e^{A(x)} + (y(x) - y_0(x))\, a(x)e^{A(x)} \\ &= (-a(x)y(x) + C(x) + a(x)y_0(x) - C(x))\, e^{A(x)} + (y(x) - y_0(x))\, a(x)e^{A(x)} \\ &= -(y(x) - y_0(x))\, a(x)e^{A(x)} + (y(x) - y_0(x))\, a(x)e^{A(x)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $z(x) = C$ et on conclut facilement que $y = y_0 + Ce^{-A(x)} \quad$ avec $C \in \mathbb{R}$.

La recherche de la solution générale de (E) se réduit donc à la recherche d'une solution particulière. Parfois ceci se fait en remarquant une solution évidente. Par exemple, l'équation différentielle $y' = -2xy + 2x$ a pour solution particulière $y_0(x) = 1$. Donc l'ensemble des solutions de cette équation sont les $y(x) = 1 + ke^{-x^2} \quad$ avec $k \in \mathbb{R}$.

ii) Dans le cas où l'on ne dispose pas de solution particulière de (E), on recherche les solutions de (E) à partir d'une solution non nulle de (E_0) de la forme $y = Ce^{-A(x)}$ où $C = C(x)$ est maintenant une fonction à déterminer pour que y_0 soit une solution de (E).

On a

$$y' = C'(x)e^{-A(x)} - a(x)C(x)e^{-A(x)}.$$

En reportant y et y'dans (E) on obtient

$$C'(x) = f(x)e^{A(x)}$$

que l'on intègre pour obtenir $C(x)$.

Exemple 45 1° *Résoudre les équations différentielles*

$$a)\ \ y' + 2xy = 2xe^{-x^2} \qquad b)\ \ \left(x + y^2\right) dy = ydx$$

2° *Trouver la solution particulière de l'équation*

$$y' + y = \cos x + \sin x$$

qui vérifie la condition $y(0) = 1$.

Preuve 15 *Les équations données sont des équations différentielles linéaires d'ordre 1.*
1° *a) Soit l'équation différentielle avec second membre*

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}, \tag{E}$$

on considère l'équation différentielle sans second membre associée à (E)

$$y' + 2xy = 0 \tag{E_0}$$

(c'est une équation différentielle à variables séparables).
Pour $y \neq 0$, *l'équation* (E_0) *est équivalente à l'équation*

$$\frac{dy}{y} = -2x\ dx,$$

donc les solutions vérifient

$$\log|y| = -x^2 + C_1 \qquad \textit{où} \;\; C_1 \in \mathbb{R},$$

ou bien encore

$$y = Ce^{-x^2} \qquad \textit{où} \quad C \in \mathbb{R}^*.$$

D'autre part $y = 0$ *est une solution de* (E_0)*, donc*

$$y = Ce^{-x^2} \qquad \textit{où} \quad C \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de l'équation sans second membre.

Pour la résolution de l'équation (E)*, on considère deux méthodes :*

1ère méthode : On utilise la méthode de variation de la constante. On recherche les solutions de l'équation (E) *de la forme*

$$y = C(x)e^{-x^2}.$$

On a

$$y' = C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2}$$

et on reportant y *et* y' *dans l'équation* (E)*, on obtient*

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}$$

d'où

$$C'(x) = 2x \Longrightarrow C(x) = x^2 + k \qquad \textit{où} \;\; k \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$y = (x^2 + k)e^{-x^2} \,\textit{où}\;\; k \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de l'équation (E)*.*

$2^{ème}$ <u>méthode</u> : On recherche la solution particulère de l'équation (E).

Puisque le second membre de l'équation (E) est le produit d'un polynôme de degré un et de e^{-x^2}, on cherche une solution particulière y_p de l'équation (E) sous la forme

$$y_p = (ax^2 + bx + c)e^{-x^2}$$

où a, b, c sont des nombres réels à déterminer.

On dérive y_p et on la remplace dans l'équation (E), ensuite par identification des coefficients, on trouve

$$a = 1,\ b = 0 \text{ et } c \text{ quelconque.}$$

Donc

$$y_p = (x^2 + c)e^{-x^2} \text{ où } c \in \mathbb{R}$$

est une solution particulière de (E).

La solution générale de l'équation (E) est donnée par la somme de la solution générale de l'équation (E_0) et la solution particulière y_p de l'équation (E). On a donc

$$\begin{aligned} y &= Ce^{-x^2} + (x^2 + c)e^{-x^2} \quad \text{où } C,\ c \in \mathbb{R} \\ &= (x^2 + k)e^{-x^2} \qquad \text{où } k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b) Si on considère x comme une fonction de y, l'équation donnée s'écrit pour $y \neq 0$ sous la forme

$$x' - \frac{x}{y} = y.$$

On résoud d'abord l'équation sans second membre et on utilise ensuite la méthode de la variation de la constante ou on cherche une solution particulière sous la forme

$$x_p = ay^2 + by + c \qquad \text{où } a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$$

2° *Considérons l'équation sans second membre*

$$y' + y = 0 \ . \tag{E_0}$$

C'est une équation à variables séparables car pour $y \neq 0$, *on a*

$$\frac{dy}{y} = -dx.$$

La solution de l'équation différentielle (E_0) *est*

$$y = Ce^{-x} \ \text{où} \ \ C \in \mathbb{R}.$$

1ère méthode : Variation de la constante.
On recherche les solutions de l'équation (E) *avec second membre de la forme*

$$y = C(x)e^{-x}$$

où C *est une fonction dérivable de* x.
En dérivant y *et en la remplaçant dans* (E) *on obtient*

$$C'(x)e^{-x} = \sin x + \cos x$$

d'où

$$C(x) = \int (\sin x + \cos x) \, e^{x} dx.$$

En utilisant l'intégration par parties, deux fois, on obtient

$$\begin{aligned} C(x) &= (\sin x + \cos x)\, e^x - \int (\cos x - \sin x)\, e^x dx \\ &= (\sin x + \cos x)\, e^x - \left[(\cos x - \sin x)\, e^x - \int (-\sin x - \cos x)\, e^x dx \right] \\ &= (\sin x + \cos x)\, e^x - \left[(\cos x - \sin x)\, e^x + \int (\sin x + \cos x)\, e^x dx \right] \\ &= (\sin x + \cos x)\, e^x - (\cos x - \sin x)\, e^x - C(x). \end{aligned}$$

D'où

$$C(x) = \sin x e^x + k \quad \textit{où} \;\; k \in \mathbb{R}.$$

La solution générale avec second membre est

$$\begin{aligned} y &= (\sin x e^x + k\ )e^{-x} \\ &= \sin x + k e^{-x} \quad \textit{où} \;\; k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En utilisant la condition initiale $y(0) = 1$*, alors* $k = 1$ *et* $y = \sin x + e^{-x}$.

<u>*2ème méthode*</u> *: On remarque que* $y_p = \sin x$ *est une solution particulière de l'équation avec second membre, donc*

$$y = Ce^{-x} + \sin x, \qquad C \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de l'équation (E) donnée. Puisque $y(0) = 1$*, alors* $C = 1$.

Équation de Bernoulli

Définition 3.2.5 *Soient* $a(x)$ *et* $b(x)$ *deux fonctions numériques continues dans un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et* α *un réel différent de* 0 *et* 1*. L' équation différentielle*

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha} \tag{E}$$

est dite de Bernouli.

Méthode de résolution : On écarte les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ pour lesquels l'équation est linéaire, la fonction inconnue y sera supposée positive si α est non entier et de plus non nulle si α est négatif.

En divisant l'équation de Bernoulli par y^α (éventuellement en écartant la solution triviale $y = 0$) on obtient

$$y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x). \tag{E'}$$

On effectue ensuite, le changement de fonction $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$, d'où $z'(x) = (1-\alpha)\, y'(x)y^{-\alpha}(x)$, on obtient une équation différentielle en z :

$$\frac{z'}{1-\alpha} + a(x)z = b(x). \tag{E''}$$

C'est une équation linéaire du 1^{er}ordre non homogène. On la résout par la méthode de la variation de la constante.

Exemple 46 *Soit l'équation différentielle de Bernoulli*

$$y' + xy + xy^4 = 0.$$

Ici, $\alpha = 4$. *En posant* $z(x) = y^{-3}$ *et en ayant écarter au préalable la solution triviale* $y = 0$, *on a l'équation différentielle linéaire*

$$z' = 3xz + 3x.$$

L'équation homogène associée a pour solution générale

$$z = c\exp\left(\frac{3x^2}{2}\right).$$

La méthode de la variation de la constante donne

$$z = \frac{1}{y^3} = -1 + c\exp\left(\frac{3x^2}{2}\right)$$

et par la suite

$$y = \frac{1}{\left(-1 + c\exp\left(\frac{3x^2}{2}\right)\right)^{\frac{1}{3}}} \quad \textit{où} \quad c \textit{ constante.}$$

Équation de Riccati

Définition 3.2.6 *Une équation différencielle du premier ordre est dite de Riccati si elle est de la forme*

$$y' + a(x)y + b(x) = c(x)y^2 \ , \tag{E}$$

les fonctions a, b et c étant supposées continues dans l'intervalle I.

Méthode de résolution : Ce type d'équations différentielles n'est pas toujours résoluble de façon élémentaire. Mais, si une solution particulière y_1 pouvait être trouvée, on pourrait alors ramener la résolution de l'équation de Riccati à celle d'une équation différentielle linéaire. En effet, en posant

$$y = y_1 + z$$

et en la remplaçant dans (E) on obtient

$$z' + (a(x) - 2y_1c(x))\,z = c(x)z^2 \tag{E'}$$

qui est de Bernoulli, que nous pouvons résoudre.
En posant $u = \dfrac{1}{z}$, on est ramené à une équation linéaire. La solution générale est donc

donnée par

$$y = y_1 + \frac{1}{u}$$

où u est la solution générale de

$$-u' + (a(x) - 2y_1 c(x))\, u = c(x) \qquad (E'')$$

qui est une équation différentielle linéaire résoluble.

Exemple 47 *Soit l'équation différentielle de Riccati*

$$y' = 1 - x^3 + xy^2.$$

Il est aisé de vérifier que $y_1 = x$ *est une solution particulière. La solution générale est donc*

$$y = x + \frac{1}{u}$$

où u *est la solution générale de*

$$u' + 2x^2 u + x = 0.$$

Équation de Lagrange

Définition 3.2.7 *Une équation différencielle du premier ordre est dite de Lagrange si elle est de la forme*

$$y = xf(y') + g(y') \qquad (E)$$

les fonctions f *et* g *étant supposées continûment dérivables dans un intervalle* I*.*

Méthode de résolution : Pour la résoudre, on pose

$$y' = u, \qquad (E_1)$$

alors

$$y = xf(u) + g(u) \tag{E_2}$$

et on prend u comme nouvelle variable. x et y sont alors considérées comme fonctions de u.

En dérivant, par rapport à u, les deux membres de la relation (E_2), on obtient

$$y'_u = x'_u f(u) + xf'(u) + g'(u). \tag{E_3}$$

Or d'après le théorème de dérivation des fonctions composées, on a

$$y'_u = y' x'_u$$

et en utilisant (E_1), on obtient

$$y'_u = u x'_u$$

Donc en la remplaçant dans (E_3), il vient

$$(u - f(u)) \frac{dx}{du} = xf'(u) + g'(u). \tag{E_4}$$

Deux cas sont à distinguer :

Premier cas : $u \neq f(u)$

On peut mettre l'équation (E_4) sous la forme normale. Dans l'ensemble des couples (x, u) tels que $u \neq f(u)$, elle est équivalente à

$$x'_u = x \frac{f'(u)}{u - f(u)} + \frac{g'(u)}{u - f(u)} \tag{E_5}$$

qui est donc une équation différentielle linéaire du premier ordre pour la fonction inconnue x de la variable u. Une fois $x(u)$ déterminée, en résolvant (E_5), on aura

$$y(u) = x(u)f(u) + g(u).$$

Second cas : $u = f(u)$

Les u_0 de I telles que $u_0 = f(u_0)$ donnent d'après la relation (E_2),

$$y = u_0 x + g(u_0).$$

Cette solution est définie dans $\mathbb{R}$ tout entier et diffère des solutions obtenues dans le premier cas.

Exemple 48 *Considérons l'équation de Lagrange*

$$y = -x + (y' + 1)^2 .$$

En posant $y' = u$, *on obtient*

$$(u + 1)\, x'_u = 2\,(u + 1)\,.$$

* *Pour* $u \neq 1$, *on trouve*

$$\begin{aligned} x'_u = 2 \quad & \Rightarrow x = 2u + c \\ & \Rightarrow y = -2u - c + (u + 1)^2 \\ & \Rightarrow y = u^2 + 1 - c, \ \ c \textit{ est une constante.} \end{aligned}$$

On peut éliminer le paramètre u *entre ces deux dernières équations et trouver*

$$y = \frac{1}{4}\,(x - c)^2 + 1 - c \qquad \textit{(les courbes intégrales sont des paraboles).}$$

* *Pour* $u = -1$, *on trouve la solution* $y = -x$ *(cette solution ne fait pas partie de la famille de paraboles).*

Équation de Clairaut

Définition 3.2.8 *Une équation différencielle du type*

$$y = xy' + f(y'). \tag{E}$$

La fonction f étant supposée dérivable dans l'intervalle I, est dite de Clairaut.

Méthode de résolution : L'équation de Clairaut est un cas particulier de l'équation de Lagrange. Elle se résout par le même procédé que celui décrit ci-dessus (on pose $y' = u$).

Deux cas sont donc à envisager :

a) $u = c$ (c constante), on obtient alors une famille de solutions donnée par :

$$y = cx + f(c)\ ,\ \ (c \text{ constante arbitraire}),$$

les courbes intégrales sont des droites.

b) $x = -f'(u)$, donc

$$y = -uf'(u) + f(u)$$

c'est une équation qui constitue une représentation paramétrique (paramètre u) d'une solution bien déterminée. C'est une solution de l'équation de Clairaut qui ne peut être obtenue à partir des solutions de (**a)** en donnant à c une valeur appropriée.

Exemple 49 *Résoudre*

$$y = xy\prime - \frac{y\prime^2}{4}.$$

On utilise le paramètre $u = y\prime$, l'équation s'écrit alors :

$$y = xu - \frac{u^2}{4},$$

donc

$$dy = udx + xdu - \frac{u}{2}du,$$

c'est-à-dire

$$(x - \frac{u}{2})du = 0.$$

* *Lorsque* $du = 0$, *on trouve les solutions affines, qui sont de la forme*

$$y = cx - \frac{c^2}{4}, \text{ (} c \text{ constante).}$$

* *Lorsque* $x = \frac{u}{2}$, *on trouve la solution* x^2.

Chapitre 4

Équations différentielles linéaires à coefficients constants du second ordre

On aborde dans ce chapitre le cas des équations différentielles linéaires du second ordre dont les coefficients sont constants et qu'on rencontre souvent en pratique. On peut mettre de telles équations sous la forme

$$ay'' + by' + cy = g(x). \tag{E}$$

où a, b , $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et g est une fonction continue sur un intervalle ouvert I.
L'équation

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{E_0}$$

est appelée l'équation homogène associée à (E).
Pour commencer, on montrera que l'équation différentielle homogène associée peut être résolue sans difficulté.

Théorème 4.0.1 *L'ensemble des solutions de l'équation homogène* (E_0) *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension* 2.

4.1 Équations linéaires sans second membre

Pour résoudre l'équation différentielle sans second membre (E_0), on cherche des solutions sous la forme $y = e^{rx}$ avec r constante complexe à déterminer.
On a $y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2e^{rx}$.
Ainsi, la fonction e^{rx} est une solution si et seulement si

$$e^{rx}\left(ar^2 + br + c\right) = 0 \Leftrightarrow ar^2 + br + c = 0.$$

Définition 4.1.1 *L'équation $ar^2+br+c = 0$ est appelée équation caractéristique associée à (E_0).*

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E_0).

Théorème 4.1.1 • *Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et les solutions de (E_0) sont les*

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \qquad \text{où} \;\; \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}.$$

• *Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double r_0 et les solutions de (E_0) sont les*

$$y(x) = (\lambda + \mu x)\, e^{r_0 x} \qquad \text{où}\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

• *Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ et les solutions de (E_0) sont les*

$$y(x) = e^{\alpha x}\left(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\right) \quad \text{où} \;\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Preuve 16 *La preuve consiste à trouver deux solutions linéairement indépendantes, ce qui permet d'affirmer qu'elles forment une base d'après le théorème précédent.*

• *Si* $\Delta > 0$*, alors l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes* $r_1 \neq r_2$*. On obtient ainsi deux solutions* $y_1 = e^{r_1 x}$*,* $y_2 = e^{r_2 x}$ *qui sont linéairement indépendantes car* $r_1 \neq r_2$*.*
Comme l'espace des solutions est un espace vectoriel de dimension 2*, alors une base de l'espace des solutions de* (E_0) *est* $\{e^{r_1 x},\, e^{r_2 x}\}$*.*
La solution générale de (E_0) *s'écrit*

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

• *Si* $\Delta = 0$*, alors l'équation caractéristique a une racine réelle double* r_0*. On obtient ainsi une solution* $y_1 = e^{r_0 x}$*. On vérifie que* $y_2 = x e^{r_0 x}$ *est aussi une solution :*

$$\begin{aligned} a y_2'' + b y_2' + c y_2 &= \left(2ar_0 + ar_0^2 x\right) e^{r_0 x} + \left(b + br_0 x\right) e^{r_0 x} + cxe^{r_0 x} \\ &= \left(ar_0^2 + br_0 + c\right) x e^{r_0 x} + \left(2ar_0 + b\right) e^{r_0 x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $2ar_0 + b = P'(r_0) = 0$*, où* $P(r) = ar^2 + br + c$*.*
Ces deux solutions sont linéairement indépendantes. Une base de l'espace des solutions est $\{e^{r_0 x},\, x e^{r_0 x}\}$*, et la solution générale de* (E_0) *s'écrit*

$$y(x) = (\lambda + \mu x)\, e^{r_0 x} \qquad \text{où } \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}.$$

• *Si* $\Delta < 0$*, alors l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées* $r_1 = \alpha + i\beta$*,* $r_2 = \alpha - i\beta$*. On obtient deux solutions complexes*

$$\begin{aligned} Y_1 &= e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i \sin\beta x\right), \\ Y_2 &= e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i \sin\beta x\right). \end{aligned}$$

Les fonctions

$$\begin{aligned}\frac{Y_1+Y_2}{2} &= e^{\alpha x}\cos\beta x\\ \frac{Y_1-Y_2}{2i} &= e^{\alpha x}\sin\beta x,\end{aligned}$$

sont encore des solutions particulères réelles linéairement indépendantes de (E_0) *et la solution générale pourra alors se mettre sous la forme*

$$y(x)=e^{\alpha x}\left(\lambda\cos(\beta x)+\mu\sin(\beta x)\right)\quad \textit{où}\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Exemple 50 *:*

• *Le polynôme caractéristique associé à*

$$y''-3y'+2y=0$$

est r^2-3r+2 *qui a le discriminant* $\Delta=1$*, a deux solutions réelles distinctes*

$$r_1=\frac{3-1}{2}=1 \qquad \textit{et} \qquad r_1=\frac{3+1}{2}=2\ .$$

Toutes les solutions sont alors les fonctions

$$y(x)=\lambda e^{x}+\mu e^{2x}\ \textit{pour tout}\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

• *Le polynôme caractéristique associé à*

$$y''-4y'+4y=0$$

est r^2-4r+4 *qui a le discriminant* $\Delta=0$*, a deux solutions réelles coïncidentes*

$$r_1=r_2=2.$$

Toutes les solutions sont les fonctions

$$y(x) = (\lambda + \mu x)e^{2x} \quad \textit{pour tout } \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

• *Le polynôme caractéristique associé à*

$$y'' + y' + y = 0$$

est $r^2 + r + 1$ *qui a le discriminant* $\Delta = -3 < 0$. *Les deux racines sont*

$$r_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \textit{et} \quad r_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$

et la solution générale est

$$y(x) = e^{\frac{-1}{2}x} \left(\lambda \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + \mu \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \right) \quad \textit{où} \ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

4.2 Équations linéaires avec second membre

Nous passons au cas général d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients constants, mais avec un second membre g qui est une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$:

$$ay'' + by' + cy = g(x). \tag{E}$$

Théorème 4.2.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz) *Pour chaque* $x_0 \in I$ *et chaque couple* $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, *l'équation* (E) *admet une unique solution* y *sur* I *satisfaisant aux conditions initiales :* $y(x_0) = y_0$ *et* $y'(x_0) = y_1$

Dans la pratique, pour résoudre une équation différentielle linéaire avec second membre (avec ou sans conditions initiales), on cherche d'abord une solution de l'équation homogène, puis une solution particulière de l'équation avec second membre et on applique le principe de superposition :

Proposition 10 *Les solutions générales de l'équation* (E) *s'obtiennent en ajoutant les solutions générales de l'équation homogène* (E_0) *à une solution particulière de* (E).

Remarque 4.2.1 *Si* $g(x) = u(x) + v(x)$ *avec* y_1 *une solution particulière de* $ay'' + by' + cy = u(x)$ *et* y_2 *une solution particulière de* $ay'' + by' + cy = v(x)$, *alors* $y_1 + y_2$ *est une solution particulière de* (E).

Considérons maintenant quelques cas de second membre simples qui apparaissent souvent en pratique et pour lesquels la recherche d'une solution particulière est relativement aisée.

4.2.1 Le second membre est un polynôme de degré n

Lorsque le second membre de (E) est un plynôme en x, on cherche une solution particulière polynômiale et on procèdera par identification pour déterminer les coefficients. On distingue deux cas :

a) Si $c \neq 0$, on détermine une solution sous la forme d'un polynôme de degré n $(P_n(x))$.

b) Si $c = 0$ (avec $b \neq 0$), on cherche une solution sous la forme $xP_n(x)$.

Exemple 51 *Résoudre les équations différentielles*

$$\textbf{\textit{a)}}\ y'' + y' - 2y = 2x^2 - 3x + 1$$
$$\textbf{\textit{b)}}\ y'' - y' = x + 1$$

a) *La solution de l'équation homogène associée est* $y = \lambda e^x + \mu e^{-2x}$ *où* $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ *(car les racines de l'équation caractéristique, sont* $r_1 = 1$ *et* $r_2 = -2$*). Comme* $c \neq 0$, *on cherche une solution particulière de l'équation complète de la forme*

$$y_p = ax^2 + bx + c \quad \text{où} \quad a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$$

En dérivant y_p deux fois et en reportant y_p, y'_p et y''_p dans l'équation (a), on obtient

$$2a + 2ax + b - 2\left(ax^2 + bx + c\ \right) = 2x^2 - 3x + 1.$$

Par identification des coefficients, on a :

$$a = -1, b = \frac{1}{2}, c = \frac{-5}{4}.$$

Ainsi

$$y_p = -x^2 + \frac{x}{2} - \frac{5}{4}.$$

L'intégrale générale est

$$y = \lambda e^x + \mu e^{-2x}\ - x^2 + \frac{x}{2} - \frac{5}{4} \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

b) *L'équation caractéristique de l'équation homogène associée est $r^2 - r = 0$. Elle admet deux racines ($r = 0$ et $r = 1$). Ainsi, la solution générale de l'équation homogène est*

$$y(x) = \lambda + \mu e^x \quad \text{pour tout } \lambda{,}\mu \in \mathbb{R}.$$

Comme $c = 0$, on cherche une solution particulière de l'équation complète de la forme

$$y_p = x\,(ax + b) \quad \text{ où } a,\ b \in \mathbb{R}.$$

En dérivant y_p deux fois et en reportant y_p, y'_p et y''_p dans l'équation (b), on obtient

$$2a - (2ax + b) = x + 1.$$

Par identification des coefficients, on a :

$$a = -\frac{1}{2}, b = -2,$$

ainsi

$$y_p = -\frac{1}{2}x^2 - 2x.$$

L'intégrale générale est

$$y = \lambda + \mu e^x \ - \frac{1}{2}x^2 - 2x \quad où \ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

4.2.2 Le second membre est de la forme $\exp mx$ (m constante)

On distingue trois cas selon les valeurs de m

1. m n'est pas une racine de l'équation caractéristique, on cherche alors une solution de la forme ke^{mx}.
2. m est une racine simple de l'équation caractéristique, on détermine alors une intégrale particulière de type kxe^{mx}.
3. m est une racine double de l'équation caractéristique, la forme de la solution particulière sera kx^2e^{mx}.

Exemple 52 *Soit l'équation différencielle*

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}.$$

Comme solution particulière de l'équation complète, on en cherchera une de type

$$y_1 = kx^2e^{2x}.$$

En prenant $k = \frac{1}{2}$, *la solution générale (d'après l'exemple* 50 *) s'écrit*

$$y = e^{2x}\left(\lambda + \mu x + \frac{x^2}{2}\right).$$

Exemple 53 *Résoudre l'équation différentielle*

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x} + e^{4x}.$$

On a $r_1 = 2$ *et* $r_2 = 3$ *comme racines de l'équation caractéristique* $r^2 - 5r + 6 = 0$, *alors la solution générale de l'équation sans second membre est*

$$y = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}.$$

En utilisant la Remarque 4.2.1, on cherche la solution particulière pour chacune des équations différentielles

$$\begin{aligned} y'' - 5y' + 6y &= 2e^{3x} \quad (*) \\ y'' - 5y' + 6y &= e^{4x}. \quad (**) \end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation (*) est donnée par $2xe^{3x}$. *Quant à l'équation différentielle (**), elle en possède une de la forme* $\dfrac{e^{4x}}{2}$.
Finalement, l'intégrale générale est

$$y = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x} + 2xe^{3x} + \frac{e^{4x}}{2}$$

4.2.3 Le second membre est de la forme $f(x) \exp mx$(m constante)

Pour chercher une solution particulière, on fait le changement de fonction inconue $y = ue^{mx}$. La nouvelle fonction inconnue u étant supposée deux fois dérivables, on trouve successivement

$$\begin{cases} y' = (u' + mu)\, e^{mx} \\ y'' = (m^2u + 2mu' + u'')\, e^{mx} \end{cases}.$$

Ainsi, l'équation se transforme à une équation différentielle en u de la forme

$$au'' + b_1 u' + c_1 u = f(x)$$

où

$$\begin{cases} b_1 = b + 2am \\ c_1 = am^2 + bm + c \end{cases}$$

et le second membre est plus simple.

4.2.4 Le second membre est du type $\cos mx$ (ou $\sin mx$, m constante)

Dans cette situation, on distingue deux cas dans la recherche de la solution particulière

1. im n'est pas racine de l'équation caractéristique (cos mx ou $\sin mx$ n'est pas solution de l'équation sans second membre). On pose $y_1 = k_1 \cos mx + k_2 \sin mx$ et on détermine les constantes k_1 et k_2 par identification.
2. im est racine de l'équation caractéristique. On cherche alors une solution de la forme $y_1 = x(k_1 \cos mx + k_2 \sin mx)$ et comme au cas précédent, on détermine les constantes k_1 et k_2.

Exemple 54 *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{2x} + 25 \cos x \qquad (E)$$

La solution de l'équation homogène est $y = (\lambda + \mu x) e^{2x}$ *(exemple 50).*
Déterminons une solution particulière $y_{p,1}$ *de*

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{2x} \qquad (E_1)$$

$r = 2$*, étant racine double de l'équation caractéristique, on cherchera une solution de la forme*

$$y = R(x)e^{2x}$$

avec $R(x) = x^2\,(ax+b)$, *on obtient*

$$\begin{aligned} y' &= (R'(x) + 2R(x))\, e^{2x} \\ y'' &= (R''(x) + 4R'(x) + 4R(x))\, e^{2x}. \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans (E_1), *on obtient :*

$$R''(x) e^{2x} = x e^{2x},$$

puis, après simplification

$$2b + 6ax = x,$$

ce qui donne $a = \dfrac{1}{6}$ *et* $b = 0$.
Finalement

$$y_{p,1} = \frac{x^3}{6} e^{2x}.$$

Déterminons une solution $y_{p,2}$ *de*

$$y'' - 4y' + 4y = 25 \cos x. \tag{E_2}$$

On pose

$$y_{p,2} = k_1 \cos x + k_2 \sin x,$$

on obtient après substitution

$$y_{p,2} = 3 \cos x - 4 \sin x.$$

Donc

$$y_p = y_{p,1} + y_{p,2} = \frac{x^3}{6} e^{2x} + 3 \cos x - 4 \sin x$$

est une solution particulière de (E).

Finalement, la solution générale est

$$y = \left(\lambda + \mu x + \frac{x^3}{6}\right) e^{2x} + 3\cos x - 4\sin x.$$

4.2.5 Méthode de variation des constantes

Si $\{y_1, y_2\}$ est une base de solutions de l'équation homogène (E_0), on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p = \lambda y_1 + \mu y_2.$$

Considérons λ et μ comme des fonctions de x continûment dérivables.
En dérivant, on obtient

$$y_p' = \lambda' y_1 + \mu' y_2 + \lambda y_1' + \mu y_2'$$

Comme λ et μ sont des fonctions inconnues, on peut imposer une condition supplémentaire qui est de la forme

$$\lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0.$$

Il reste alors

$$y_p' = \lambda y_1' + \mu y_2' \text{ et } y_p'' = \lambda' y_1' + \mu' y_2' + y' + \lambda'' y_1 + \mu'' y_2.$$

Pour que $\lambda y_1 + \mu y_2$ soit une solution de l'équation complète, il faut et il suffit que

$$\lambda' y_1' + \mu' y_2' = \frac{g(x)}{a}.$$

Ainsi, λ' et μ' vérifient le système

$$(S) \quad \begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = \dfrac{g(x)}{a} \end{cases}$$

qui est de Gramer car son déterminant n'est autre que le Wronskien $W(\lambda, \mu) \neq 0$ pour x de I. Le système linéaire (S) permet de calculer λ' et μ' ; on déduira λ et μ en prenant des primitives.

Exemple 55 *Résoudre l'équation différentielle :*

$$y'' + 4y = \sin x. \tag{E}$$

L'équation homogène associée est

$$y'' + 4y = 0, \tag{E_0}$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 + 4 = 0,$$

donc la solution générale de l'équation homogène est

$$y = \lambda \sin 2x + \mu \cos 2x \quad \text{où} \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

<u>1ère méthode</u> : On utilise la méthode de variation des constantes pour trouver la solution de (E) sous la forme

$$y = \lambda(x) \sin 2x + \mu(x) \cos 2x \tag{*}$$

où λ et μ sont deux fonctions dérivables vérifiant le système

$$\begin{cases} \lambda' \sin 2x + \mu' \cos 2x = 0 \\ \lambda' \cos 2x - \mu' \sin 2x = \dfrac{\sin x}{2}. \end{cases}$$

En multipliant la première équation par $\sin 2x$, la seconde par $\cos 2x$ et en additionnant les deux, on obtient

$$\lambda' = \frac{1}{2} \sin x \cos 2x.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{2}\int \sin x\cos 2x\ dx = \frac{1}{4}\int 2\sin x\cos 2x\ dx\\ &= \frac{1}{4}\int(\sin 3x - \sin x)\,dx = -\frac{1}{12}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x + k_1 \quad \text{où} \quad k_1 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\mu' = -\frac{1}{2}\sin x\sin 2x = -\frac{1}{4}\left(\cos x - \cos 3x\right).$$

Donc

$$\mu = -\frac{1}{4}\int(\cos x - \cos 3x)\ \ dx = -\frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x + k_2 \quad \text{où} \quad k_2 \in \mathbb{R}.$$

On reporte ensuite λ et μ dans (*), on aura

$$\begin{aligned}y &= (-\frac{1}{12}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x + k_1\ )\sin 2x + (-\frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x + k_2)\cos 2x\\ &= \frac{1}{3}\sin x + k_1\sin 2x + k_2\cos 2x \ \ \text{où} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2ème méthode : On cherche une solution particulière y_p de l'équation donnée sous la forme

$$y_p = a\sin x \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Cette méthode contient moins de calculs.

Bibliographie

[1] K. Allab. Eléments d'analyse, O.P.U. ,Alger 1984.

[2] Z. Ammari. Polycopié de cours. ED1 -Polycopié de cours Equation Différentielle. 9 janvier 2017.

[3] C. Baba- Hamed et K. Benhabib. Analyse 1, Rappels de cours et exercices avec solutions. Module (SEM 300). Office des publications universitaires, 1992.

[4] A. Bodin, N. Borne et L. Desideri. Analyse Cours de mathématiques première année, http ://exo7.emath.fr/cours/livre-analyse-1.pdf.

[5] F. Hasler. Polycopié de cours de Mathématiques 2. première partie : Analyse 2. DEUG MIAS 1e année, 2e semestre. Département Scientifique Interfacultaire B.P. 7209-F-97275 SCHOELCHER CEDEX. version du 21 avril 2002.

[6] F. Liret et D. Martinais. Cours et exercices avec solutions, Analyse 1^{re}année , Licence 1^{re}année MIAS -MASS-SM. 2^{e} édition, 2003.

[7] D.E. Medjadi, M. Boukra, A. Djanane et B.K. Sadallah. Analyse mathématique, 1ère année d'Université. Volume 1. Fonction d'une variable réelle.Office des publications universitaires, 2001.

[8] J.M. Monier. Analyse PSCI-PTSI, Cours et 800 exercices corrigés, 4^{e} édition, 2003.

[9] F. Pécastaings et J. Sevin, Chemins vers l'analyse, tome 1, Librairie Vuibert, 1979.