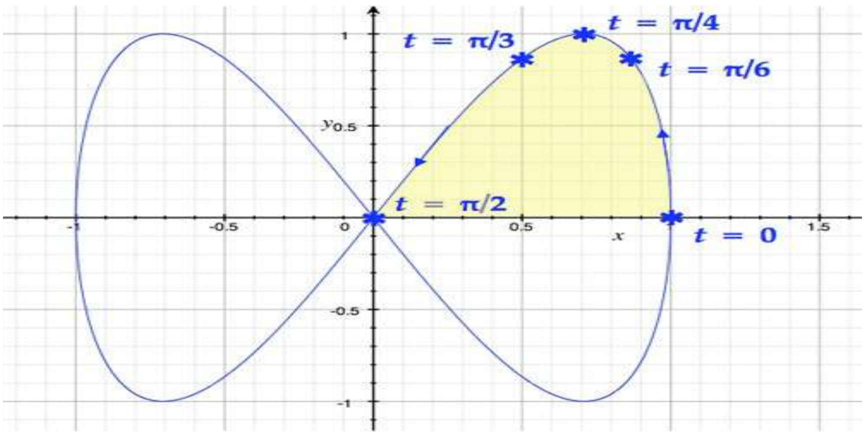
Université Ferhat Abbas, Sétif 1
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Dr. Abdelkader Saadallah

Courbes paramétrées planes et gauches

Notes de cours et exercices

destinées aux étudiants de
2ème année de Licence en Mathématiques



Novembre 2023

Table des matières

Introduction générale

Les courbes paramétrées sont des objets mathématiques fascinants qui permettent de décrire avec précision des trajectoires dans le plan ou l'espace. Elles jouent un rôle essentiel dans de nombreux domaines des mathématiques, tels que la géométrie différentielle, l'analyse et la physique.
Ce cours, destiné aux étudiants de 2ème année de Licence en Mathématiques, a pour objectif de vous familiariser avec les concepts fondamentaux des courbes paramétrées planes et gauches. Nous explorerons leur paramétrisation, leurs propriétés métriques et locales, ainsi que leur courbure.
La première partie du cours se concentre sur la paramétrisation des courbes. Nous commencerons par étudier la construction des courbes planes définies par une représentation paramétrique. Vous apprendrez à décrire ces courbes à l'aide de fonctions qui associent à chaque instant un point du plan. Ensuite, nous aborderons les courbes en coordonnées polaires, qui offrent une autre perspective intéressante pour décrire des trajectoires courbes.
Dans la deuxième partie du cours, nous étudierons les propriétés métriques et locales des courbes. Nous examinerons la longueur d'un arc de courbe, qui permet de mesurer la distance parcourue le long d'une trajectoire. L'abscisse curviligne sera également introduite comme un outil essentiel pour la description paramétrique des courbes.
Enfin, dans la troisième partie du cours, nous aborderons la courbure des courbes planes et gauches. Nous explorerons la courbure dans l'espace tridimensionnel ainsi que dans le plan, en nous intéressant aux notions de

courbure. Vous découvrirez également la notion de développée d'une courbe, qui permet de décrire l'enveloppe d'une famille de droites tangentielles à la courbe.

Ce cours vous fournira une base solide pour comprendre et manipuler les courbes paramétrées planes et gauches. Des exercices pratiques seront proposés tout au long du cours pour vous permettre de consolider vos connaissances et de développer vos compétences en résolution de problèmes. Nous vous encourageons également à consulter la bibliographie fournie à la fin du cours pour approfondir vos connaissances et explorer d'autres aspects des courbes paramétrées.

Nous espérons que ce cours vous permettra de développer une compréhension profonde et intuitive des courbes paramétrées planes et gauches, et de voir leur importance dans de nombreux domaines des mathématiques et au-delà. Bonne étude ! Abdelkader Saadallah

Chapitre 1

Paramétrisation des courbes et surfaces

1.1 Construction des courbes planes définies par une représentation paramétrique

1.1.1 Introduction

Représentation paramétrique

Soient f et g deux applications d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

A tout réel t de D, on associe dans le plan P rapporté à un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ le point de coordonnées $(f(t), g(t))$ noté $M(t)$ et on se propose de construire l'ensemble C de ces points $M(t)$ lorsque t décrit D.

Définitions

Le système $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $t \in D$ est appelé représentation paramétrique de la courbe (C), la variable t s'appelant aussi le paramètre.

Si f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, D est l'intersection des ensembles de définitions de f et de g.

On peut construire C comme la trajectoire du point M, dans ce cas, le paramètre t représente le temps.

Le vecteur $\vec{OM} = \vec{M}(t)$, fonction de t, s'appelle alors le vecteur-espace. Le vecteur $(\vec{OM})' = \vec{M}'(t) = (f'(t), g'(t))$ et $(\vec{OM})'' = \vec{M}''(t) = (f''(t), g''(t))$ s'appellent respectivement vecteur vitesse et vecteur accélération.

Exemple R étant un réel positif donné, das un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, le système :

$$\begin{cases} x = Rcos(t) \\ y = Rsin(t) \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

est une représentation paramétrique du cercle de centre O et de rayon R.

1.1.2 Réduction du domaine d'étude

Pour faire le graphe d'une courbe paramétrée, il est utile de restreindre le domaine d'étude D_e de D qui est en général différent du domaine de définition, en utilisant les propriétés des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ Parité, périodicité et les transformations ponctuelles (symétrie, translation.....)

— **Périodicité**

Si les applications f et g admettent une période commune T c'est à dire pour tout t de D, on a

$$t + T \in D \text{ et } \begin{cases} f(t + T) = f(t) \\ g(t + T) = g(t) \end{cases}$$

La période T peut s'obtenir en cherche le p.p.c.m (plus petit multiple commun) de la période de f et de g. Il suffit de faire varier t dans un intervalle d'amplitude T pour que M décrive toute la courbe.

— **Symétries**

1. Si les applications f et g sont paires : pour tout$t$ de D, on a

$$-t \in D \text{ et } \begin{cases} f(-t) = f(t) \\ g(-t) = g(t) \end{cases}$$

. Pour obtenir toute la courbe (C) il suffit de faire varier t dans $D_e = D \cap \mathbb{R}^+$ ou $D_e = D \cap \mathbb{R}^-$.

Plus généralement, s'il existe un réel a tel que pour tout t de D, on ait

$$a - t \in D \text{ et } \begin{cases} f(a-t) = f(t) \\ g(a-t) = g(t) \end{cases}$$

Pour obtenir toute la courbe (C) il suffit de faire varier t dans $D_e = D \cap \left[\frac{a}{2}, +\infty\right[$ ou $D_e = D \cap \left]-\infty, \frac{a}{2}\right]$.

2. Si l'application f est paire et l'application g est impaire : pour tout$t$ de D, on a

$$-t \in D \text{ et } \begin{cases} f(-t) = f(t) \\ g(-t) = -g(t) \end{cases}$$

Alors les points $M(t)$ et $M(-t)$ se correspondent dans la symétrie par rapport à ox, de direction oy, donc $D_e = D \cap \mathbb{R}+$ ou $D_e = D \cap \mathbb{R}^-$.

Plus généralement, s'il existe un réel a tel que pour tout t de D, on ait

$$a - t \in D \text{ et } \begin{cases} f(a-t) = f(t) \\ g(a-t) = -g(t) \end{cases}$$

Alors les points $M(t)$ et $M(a-t)$ se correspondent dans la symétrie par rapport à ox.

3. Si l'application f est impaire et l'application g est paire : pour tout$t$ de D, on a

$$-t \in D \text{ et } \begin{cases} f(-t) = -f(t) \\ g(-t) = g(t) \end{cases}$$

Alors les points $M(t)$ et $M(-t)$ se correspondent dans la symétrie par rapport à oy, de direction ox, donc $D_e = D \cap \mathbb{R}^+$ ou $D_e = D \cap \mathbb{R}^-$.

Plus généralement, s'il existe un réel a tel que pour tout t de D, on ait

$$a-t \in D \ \text{ et } \begin{cases} f(a-t) = -f(t) \\ g(a-t) = g(t) \end{cases}$$

Alors les points $M(t)$ et $M(a-t)$ se correspondent dans la symétrie par rapport à oy

4. Si les application f et g sont impaire : pour tout$t$ de D, on a

$$-t \in D \ \text{ et } \begin{cases} f(-t) = -f(t) \\ g(-t) = -g(t) \end{cases}$$

Alors les points $M(t)$ et $M(-t)$ se correspondent dans la symétrie de centre o, donc $D_e = D \cap \mathbb{R}+$ ou $D_e = D \cap \mathbb{R}^-$.
Plus généralement, s'il existe un réel a tel que pour tout t de D, on ait

$$a-t \in D \ \text{ et } \begin{cases} f(a-t) = -f(t) \\ g(a-t) = -g(t) \end{cases}$$

Alors les points $M(t)$ et $M(a-t)$ se correspondent dans la symétrie de centre o.

5. Si $f(t') = g(t)$ et $g(t') = f(t)$, alors la première bissectrice est axe de symétrie.

6. Si $f(t') = -g(t)$ et $g(t') = -f(t)$, alors la seconde bissectrice est axe de symétrie.

7. Si $f(t') + f(t) = 2a$ et $g(t') = g(t)$, alors la droite $x = a$ est axe de symétrie.

Exemples

1- Soit la courbe (C) définie par $\begin{cases} x = f(t) = 1+t \\ y = g(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2} \end{cases}$

$D_e =]-\infty, -1[$

2- L'astroïde est la courbe(C) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = f(t) = a\cos^3(t) \\ y = g(t) = a\sin^3(t) \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}^+$$

* Les applications f et g sont périodiques de période 2π, donc $D = [-\pi, \pi]$.

* Comme $\begin{cases} f(-t) = f(t) \text{ paire} \\ g(-t) = -g(t) \text{ impaire} \end{cases}$ l'axe ox est un axe de symétrie de la courbe. Il suffit donc d'étudier la courbe dans l'intervalle $[0, \pi]$.

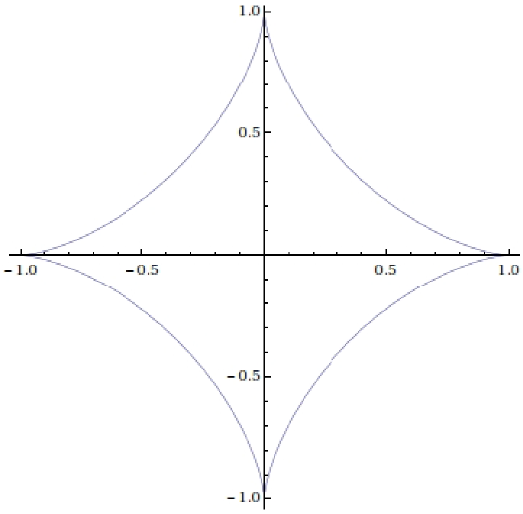
* D'autre part si on change t par $\pi - t$ on obtient

$$\begin{cases} f(\pi - t) = -f(t) \text{ impaire} \\ g(\pi - t) = g(t) \text{ paire} \end{cases}$$

l'axe oy est un axe de symétrie de la courbe. Il suffit donc d'étudier la courbe dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

* Pour tout réel t, on a $f(\frac{\pi}{2}-t) = g(t)$ et $g(\frac{\pi}{2}-t) = f(t)$, la première bissectrice est un axe de symétrie de la courbe. Il suffit donc d'étudier la courbe dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Le plus petit domaine d'étude est $D_e = [0, \frac{\pi}{4}]$.



1.1.3 Tangente en un point ordinaire.

Définition 1. Soit M_0 le point de (C) pour $t = t_0$ c-à-d $M(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ et M un point pour t quelconque. On dit que M_0 est un point ordinaire de (C)

si et seulement si $\vec{M}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq \vec{0}$.

Définition 2. On dit que la courbe admet une tangente en $M(t_0)$ si la droite $(M(t)M(t_0))$ admet une position limite pour $t \longrightarrow t_0$.

Dans ce cas la droite limite est la tangente à la courbe en $M(t_0)$.

En tout point ordinaire d'une courbe dérivable, la courbe admet une tangente.

Cette droite $(M(t)M(t_0))$ tangente est rédigée par le vecteur dérivée $\vec{M}'(t_0) = \frac{dM}{dt}(t_0)$ On a alors comme équation de $(M(t)M(t_0))$

$$\begin{vmatrix} x(t)-x(t_0) & x'(t_0) \\ y(t)-y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y'(t_0)(x(t)-x(t_0)) - x'(t_0)(x(t)-x(t_0)) = 0$$

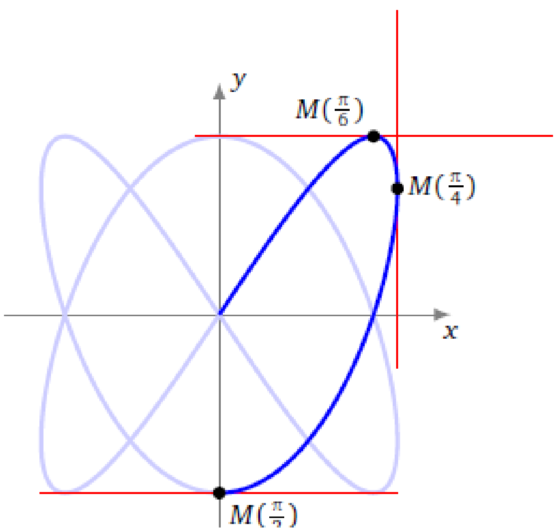
Exemple 1. Donner une équation cartésienne de la tangente (T) en tout point ordinaires de la courbe $M(t) = (3t^2; 2t^3)$.

$y = tx - t^3$.

Exemple 2. Trouver les points où la tangente à la courbe de Lissajous $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$ $t \in [-\pi, \pi]$, est verticale, puis horizontale.

$x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}$

$y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6}$ ou $t = \frac{\pi}{2}$



1.1.4 Tangente en un point singulier.

Définitions :

Les applications f et g étant supposées dérivables en t_0 et $\vec{M}'(t_0) = \dfrac{dM}{dt}(t_0) = (f'(t_0), g'(t_0))$.

1. On dit que M_0 est un point singulier ou stationnaire de (C) si et seulement si $\vec{M}'(t_0) = \vec{0}$.
2. $M(t_0)$ est un point régulier si l'on a $\vec{M}'(t_0) \neq \vec{0}$.
3. La courbe paramétrée (C) est dite régulière si tout point de (C) est régulier.
4. $M(t_0)$ est un point birégulier si l'on a $\vec{M}'(t_0) \neq \vec{0}$ et $\vec{M}''(t_0) \neq \vec{0}$ et $\vec{M}'(t_0)$, $\vec{M}''(t_0)$ sont linéairement indépendants.
5. La courbe paramétrée (C) est dite birégulière si tout point de (C) est birégulier.

Théorème. En un point singulier $M(t_0)$, en supposant que les applications f et g admettent en t_0 des dérivées successives non toutes nulles, la courbe (C) admet une tangente de vecteur directeur, le vecteur de coordonnées $(f^{(p)}(t_0), g^{(p)}(t_0))$ où le p est le premier entier pour lequel les dérivées $f^{(p)}(t_0)$ et $g^{(p)}(t_0)$ ne sont pas simultanément nulles.

En conclusion : dans tous les cas, le premier vecteur dérivée non nul est un vecteur directeur de la tangente.

Remarques.

1. En un point ordinaire $M(t_0)$:

   - Si $f'(t_0) \neq 0$ le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C) est $l = \dfrac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$.
   - Si $f'(t_0) = 0$, la tangente à la courbe est parallèle à l'axe OY.
2. En un point singulier $M(t_0)$, on démontre que :

- si le quotient $l(t) = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$ a une limite l_0 quand t tend vers t_0, l_0 est le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C).

- Si ce quotient a une limite infinie quand t tend vers t_0, la courbe admet une tangente parallèle à l'axe oy.

Exemple. Dans un repère orthonormé du plan, la courbe (C) définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin(t)) \\ y(t) = a(1 - \cos(t)) \end{cases} \quad a > 0$$

Nous calculons

$$\begin{cases} x'(t) = a(1 - \cos(t)) \\ y(t) = a\sin(t)) \end{cases} \quad a > 0$$

Comme $M'(0) = (0,0)$, alors $M(0)$ est un point singulier.
Lorsque t tend vers 0, $l(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = cotg(\dfrac{t}{2})$ tend vers l'infini : l'axe oy est donc tangente en 0.

1.1.5 Position de la courbe par rapport à la tangente en $M(t_0)$

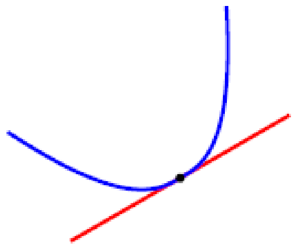
Notons p le plus petit entier tel que le vecteur $\vec{u}_p = \dfrac{d^pM}{dt^p}(t_0)$ soit non nul, c'est à dire, tel que $(f^{(p)}(t_0), g(p)(t_0)) \neq (0,0)$.
$\vec{u}_p$ est donc un vecteur directeur de la tangente en $M(t_0)$ à la courbe (C).
Notons q le plus petit entier, plus grand que p, tel que le vecteur $\vec{u}_q = \dfrac{d^qM}{dt^q}(t_0)$ ne soit pas colinéaire à $\vec{u}_p$.
A l'aide de la formule de Taylor, on démontre que : $M(t_0)M(t)) = X(t)\vec{u}_p + Y(t)\vec{u}_q$ avec au voisinage de t_0 : $X(t) \sim \dfrac{(t-t_0)^p}{p!}$ et $y(t) \sim \dfrac{(t-t_0)^q}{q!}$.
Le point $M(t)$ a donc, dans le repère $(M(t_0), \vec{u}_p, \vec{u}_q)$ du plan. Suivant la parité des entiers p et q, la courbe (C) ne peut donc avoir au voisinage du point $M(t_0)$ que l'une des quatre allures suivantes :

1. p impair, q pair on a un point ordinaire.

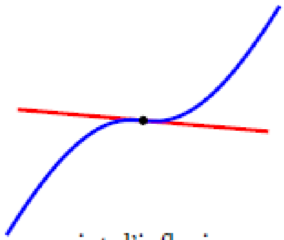
2. p impair, q impair on a un point d'inflexion.

3. p pair, q impair on a un point de rebroussement de première espèce.

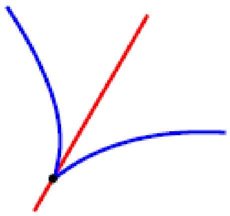
4. p pair, q pair on a un point de rebroussement de deuxième espèce.



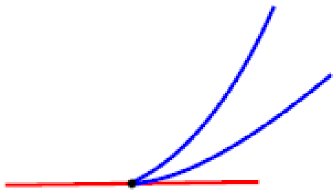
point d'allure ordinaire



point d'inflexion



rebroussement de première espèce



rebroussement de seconde espèce

Exemple. Soit la courbe (C) définie paramétriquement par :

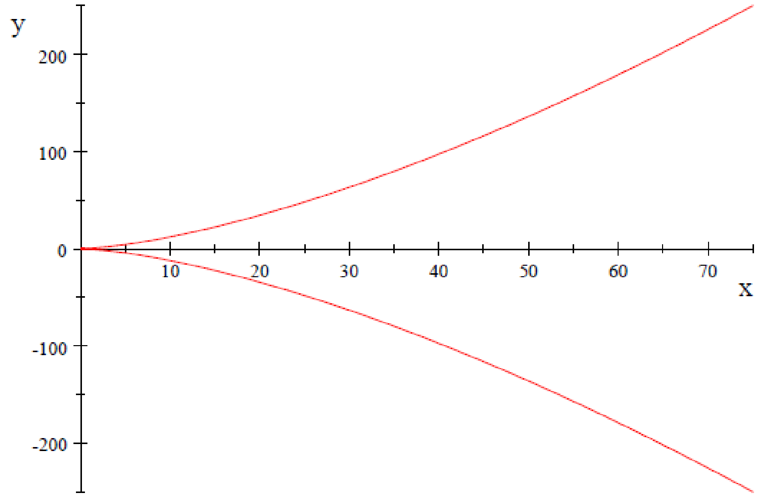
$$\begin{cases} x = f(t) = 1 + t^2 \\ y = g(t) = 2 + t^3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Donc $\begin{cases} x' = f'(t) = 2t \\ y' = g'(t) = 3t^2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x'' = 2 \\ y'' = 6t \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 2t & 2 \\ 3t^2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2$$

Si $t \neq 0$, alors $\vec{u}_1 = (2t, 3t^2)$ et $\vec{u}_2 = (2, 6t)$ ne sont pas colinéaires. La nature du point $M(t)$ est un point ordinaire (type 1).

Si $t = 0$, alors $M(0)$ est un point singulier, de plus ces vecteurs sont colinéaires. $\vec{u}_2 = (2, 0)$ et $\vec{u}_3 = (0, 6)$ les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.



1.1.6 Tableau de variations conjointes.

L'étude de f' et g' permet de connaître les variations de f et g. Reporter les résultats obtenus des variations conjointes des fonctions f et g dans un tableau. Cela donne alors un tableau à compléter :

t	
f'	
f	
g	
g'	

Exemple. Dans un repère orthonormé du plan, construire la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = f(t) = a\cos^3(t) \\ y = g(t) = a\sin^3(t) \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}^+$$

Domaine de définition set $D = \mathbb{R}$.

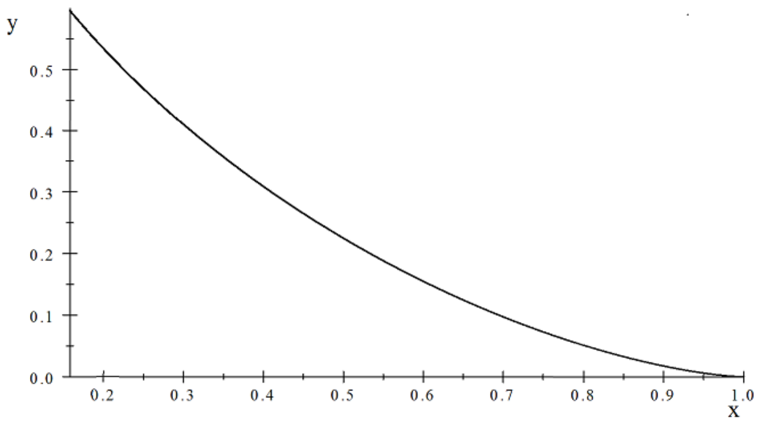
Plus petit domaine d'étude est $D_e = [0, \frac{\pi}{4}]$.

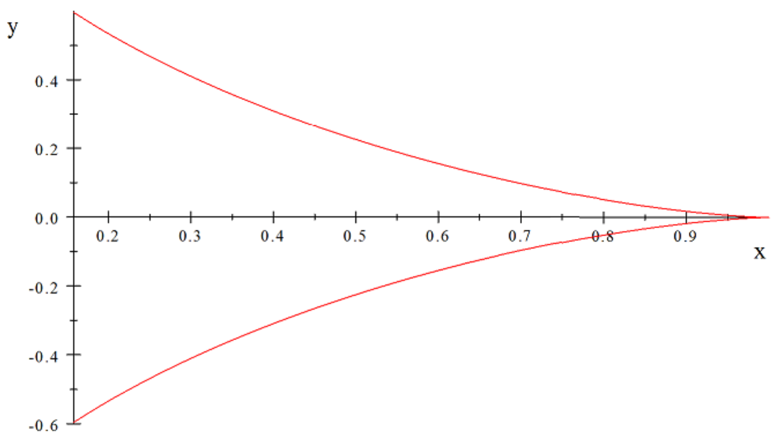
Variations de f et g. On a :

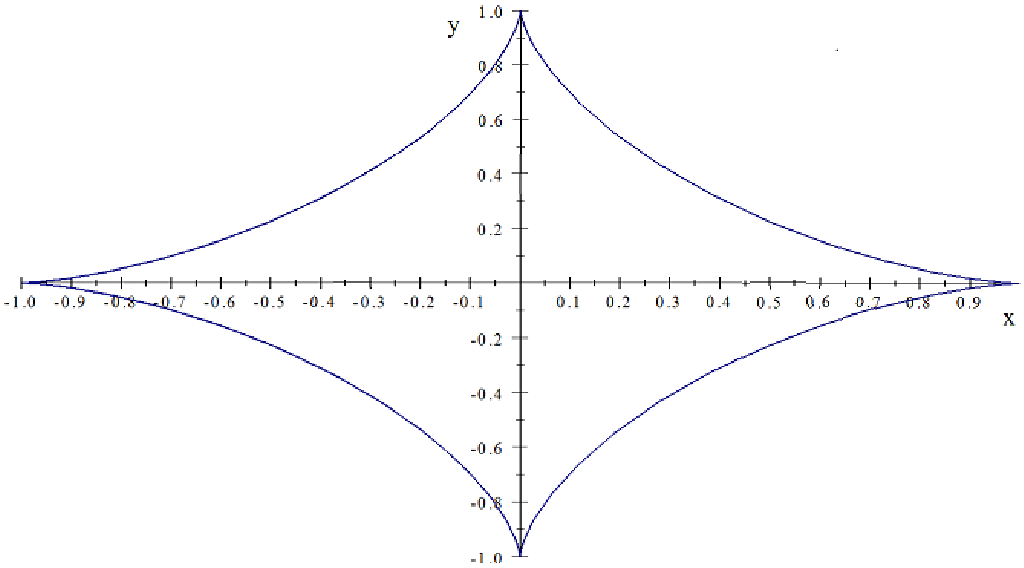
$$\begin{cases} f'(t) = -3a\sin(t)\cos^2(t) = 0 \\ g'(t) = 3a\cos(t)\sin^2(t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

d'où le tableau de variation

t	0		$\frac{\pi}{4}$
f'	0	$-$	
f	a	$\searrow$	$a\frac{\sqrt{2}}{4}$
g	0	$\nearrow$	$a\frac{\sqrt{2}}{4}$
g'	0	$+$	







1.1.7 Branches infinies

On dit qu'une courbe paramétrique présente une branche infinie quand $t \to t_0$ (fini ou infini) quand l'une au moins, des coordonnées tend vers l'infini quand $t \to t_0$. On a alors plusieurs possibilités :

1. $\left.\begin{array}{l} \text{Si } x \to \infty \\ \text{Si } y \to y_0 \text{ (fini)} \end{array}\right\}$ la droite $y = y_0$ est asymptote.

2. $\left.\begin{array}{l} \text{Si } x \to x_0 \text{ (fini)} \\ \text{Si } y \to \infty \end{array}\right\}$ la droite $x = x_0$ est asymptote.

3. $\left.\begin{array}{l} \text{Si } x \to \infty \\ \text{et } y \to \infty \end{array}\right\}$ on étudie la limite de $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ quand $t \to t_0$.

   a) Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to \infty$: la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique oy.

   b) Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to 0$: la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique ox.

   c) Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to a$ (fini et différent de Zéro) : on a une direction asymptotique de pente a. On cherche la limite de $y - ax$ quand $t \to t_0$

i. Si $y - ax \to \infty$ on dit que l'on a une branche parabolique.

ii. Si $y - ax \to b$ on a une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$

Exemple. Soit $M(t) = \begin{cases} x = f(t) = \dfrac{t}{t-1} \\ y = g(t) = \dfrac{3t}{t^2-1} \end{cases}$

La courbe est définie sur $\mathbb{R} - -1, 1$. On a comme limites en 1

$$\lim_{t \longrightarrow 1^-} f(t) = -\infty \text{ et } \lim_{t \longrightarrow 1^-} g(t) = -\infty$$

$$\lim_{t \longrightarrow 1^+} f(t) = +\infty \text{ et } \lim_{t \longrightarrow 1^+} g(t) = +\infty$$

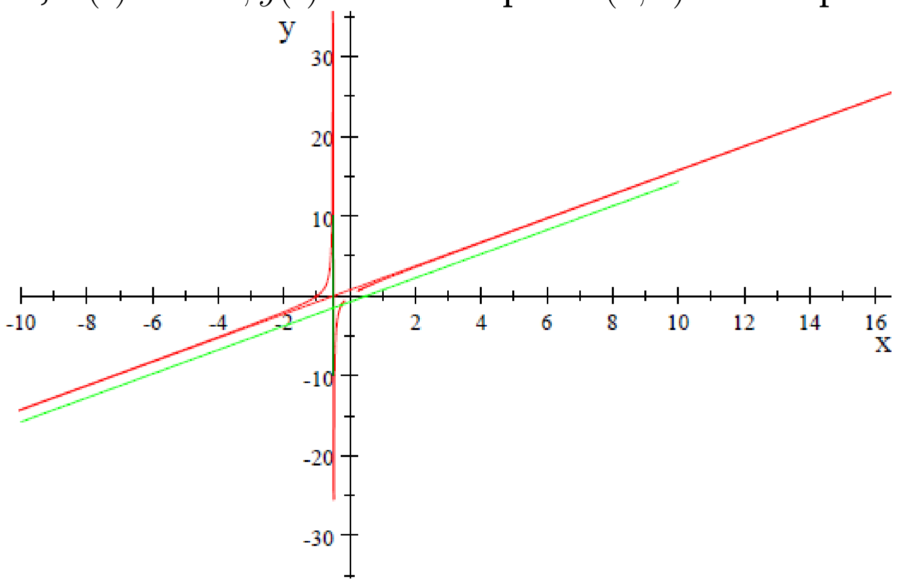
Étude pour $t \longrightarrow 1^+$: On calcule la limite du rapport

$$\lim_{t \longrightarrow 1^+} \frac{g(t)}{f(t)} = \frac{3}{2}$$

On calcule alors la différence :

$$\lim_{t \longrightarrow 1^+} (y - ax) = \lim_{t \longrightarrow 1^+} (g(t) - \frac{3}{2} f(t)) = -\frac{3}{4}$$

Ainsi la droite d'équation : $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{4}$ est une asymptote oblique à la courbe. Étude pour $t \longrightarrow -1$: $\lim_{t \longrightarrow -1} y(t) = \infty$ avec $x(-1) = -\dfrac{1}{2}$ on a une asymptote vertical. Pour $t \longrightarrow \pm\infty$; $x(t) \longrightarrow 1; y(t) \longrightarrow 0$:le point $(1; 0)$ est un point limite pour la courbe.



1.1.8 points multiples

Définition. Soit $\gamma : t \longrightarrow M(t)$ une courbe paramétrée et soit A un point du plan. La multiplicité du point A par rapport à la courbe γ est le nombre de réels t pour lesquels $M(t) = A$.

Si A est atteint pour deux valeurs distinctes du paramètre et deux seulement, on dit que A est un point double de la courbe.

Pour déterminer les points doubles, on cherche deux valeurs réelles distinctes t_1 et t_2 telles que

$$M(t_1) = M(t_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$$

Exemple. Déterminer les coordonnées du point double de la courbe (γ) d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{2t}{t^2 - 1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t - 1} \end{cases}$$

Soient t_1 et t_2 $(t_1 \neq t_2)$ les valeurs de t pour lesquelles on obtient un point double A.

Par hypothèse en A on aura

$$x(t_1) = x(t_2)$$
$$y(t_1) = y(t_2)$$

donc

$$\frac{2t_1}{t_1^2 - 1} = \frac{2t_2}{t_2^2 - 1} \qquad (1)$$
$$\frac{t_1^2}{t_1 - 1} = \frac{t_2^2}{t_2 - 1} \qquad (2)$$

On déduit

de (1), $(t_2 - t_1)(t_1 t_2 - 1) = 0$, comme $t_1 \neq t_2$ on a $t_1 t_2 = -1$.

de (2) $(t_2 - t_1)(t_2 + t_1 + 1) = 0$

comme $(t_1 \neq t_2)$ et $t_1 t_2 = -1$ on a

$$t_1 + t_1 + 1 = 0$$

d'où les racines

$$t_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \quad t_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

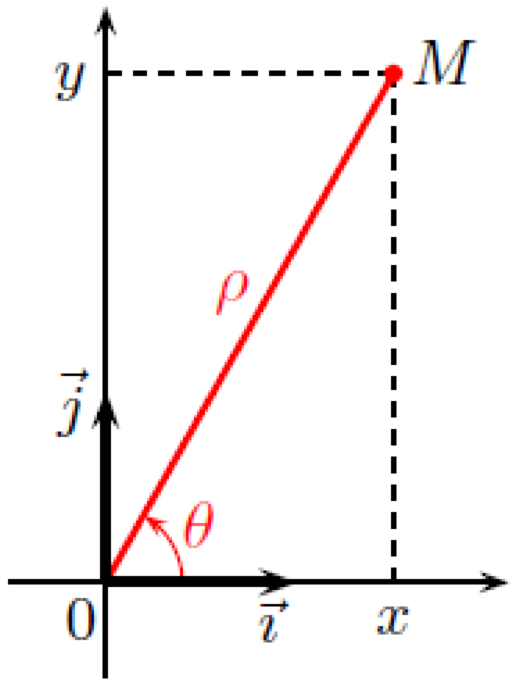
ce qui donne les coordonnées du point A

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

1.2 Construction des courbes en coordonnées polaires

1.2.1 Courbe définie par une équations polaires

La coupe (θ, ρ) est un couple de coordonnées polaires du point M dans le repère polaire $(o, \vec{i})$



La courbe d'équation polaire $\rho = f(\theta)$ est l'application suivante,où les coordonnées des points sont données en coordonnées polaires :

$$D \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\theta \longrightarrow M(\theta) = (f(\theta, \theta))$$

1.2.2 Relation entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes

Si (θ, ρ) est un couple de coordonnées polaires d'un point M et (x, y) ses coordonnées cartésiennes, alors on peut à tout moment écrire une représentation polaire sous la forme d'une représentation paramétrique classique :

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta) \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta) \end{cases}$$

1.2.3 Réduction du domaine d'étude

Périodes

Soit $r = f(\theta)$ l'équation polaire de (γ).
On appelle période de $f(\theta)$ le plus petit nombre positif T tel que $f(\theta + T) = f(\theta)$ quel que soit θ.
S'il existe une telle période θ on étude la fonction f dans l'intervalle $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$

Symétries

La période étant déterminée, on peut réduire l'intervalle de variation par des considérations de symétrie. Si, quel que soit t, on a

1. $\left.\begin{matrix} f(-\theta) = f(\theta) \\ f(\pi - \theta) = -f(\theta) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow (ox)$ est axe de symétrie

2. $\left.\begin{matrix} f(-\theta) = -f(\theta) \\ f(\pi - \theta) = f(\theta) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow (oy)$ est axe de symétrie

3. $f(\pi+\theta)=f(\theta) \Longrightarrow o$ est centre de symétrie

4. $f(\frac{\pi}{2}-\theta)=f(\theta) \Longrightarrow$ la première bissectrice est axe de symétrie

5. $f(\theta_0-\theta)=f(\theta) \Longrightarrow$ la droite $\theta=\frac{\theta_0}{2}$ est axe de symétrie
6. $f(\theta_0-\theta)=-f(\theta) \Longrightarrow$ la droite $\theta=\frac{\theta_0}{2}+\frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie
7. La rotation de centre o et d'angle $\frac{T}{2}+\pi$, $\rho(\theta+\frac{T}{2})=-\rho(\theta)$
8. La rotation de centre o et d'angle ϕ, $\rho(\theta+\phi)=\rho(\theta)$

Exemple. Déterminer un plus petit domaine d'étude D_e de la courbe d'équation polaire $f(\theta)=\cos(\frac{2\theta}{5})$.
La fonction f est définie et continue pour toutes le valeurs de θ c-à-d $\forall\theta\in\mathbb{R}$.
La fonction f est 5π-périodique car

$$\cos(\frac{2\theta}{5}+\frac{2T}{5})=\cos(\frac{2\theta}{5}) \Longrightarrow T=5\pi k$$

La courbe complète est donc obtenue quand θ décrit un intervalle de longueur 5π comme $[-\frac{5\pi}{2},\frac{5\pi}{2}]$ par exemple.
La fonction f est paire car $f(-\theta)=\cos(-\frac{2\theta}{5})=\cos(\frac{2\theta}{5})=f(\theta)$. Il y a donc symétrie par rapport à (ox).
On étudie et construit la courbe sur $[0,\frac{5\pi}{2}]$.
$f(\frac{5\pi}{2}-\theta)=\cos(\pi-\frac{2}{5}\theta)=-\cos(\frac{2\theta}{5})=-f(\theta)$. Donc il y a symétrie par rapport à la seconde bissectrice (car la droite $\theta=\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{7\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$ est axe de symétrie). Donc $D_e=[0,\frac{5\pi}{4}]$.

Plan d'étude

1. Domaine de définition et réduction du domaine d'étude en détaillant à chaque fois les transformations géométriques permettant de reconstituer la

courbe.

2. Passages par l'origine. On résout l'équation $\rho(\theta) = 0$.

3. Variations de la fonction ρ ainsi que le signe de la fonction ρ. Ce signe aura une influence sur le tracé de la courbe.

1.2.4 Tracé de la courbe d'équation polaire

Tracé de la courbe d'équation polaire $\rho = f(\theta)$

Si ρ est positif et croît, on tourne dans le sens direct en s'écartant de l'origine.

Si ρ est positif et décroît, on tourne dans le sens direct en se rapprochant de l'origine.

Si ρ est négatif et décroit, on tourne dans le sens direct en s'écartant de l'origine.

Si ρ est négatif et croît, on tourne dans le sens direct en se rapprochant de l'origine.

Exemple. Construire la rosace d'équation polaire $\rho = \sin(4\theta)$

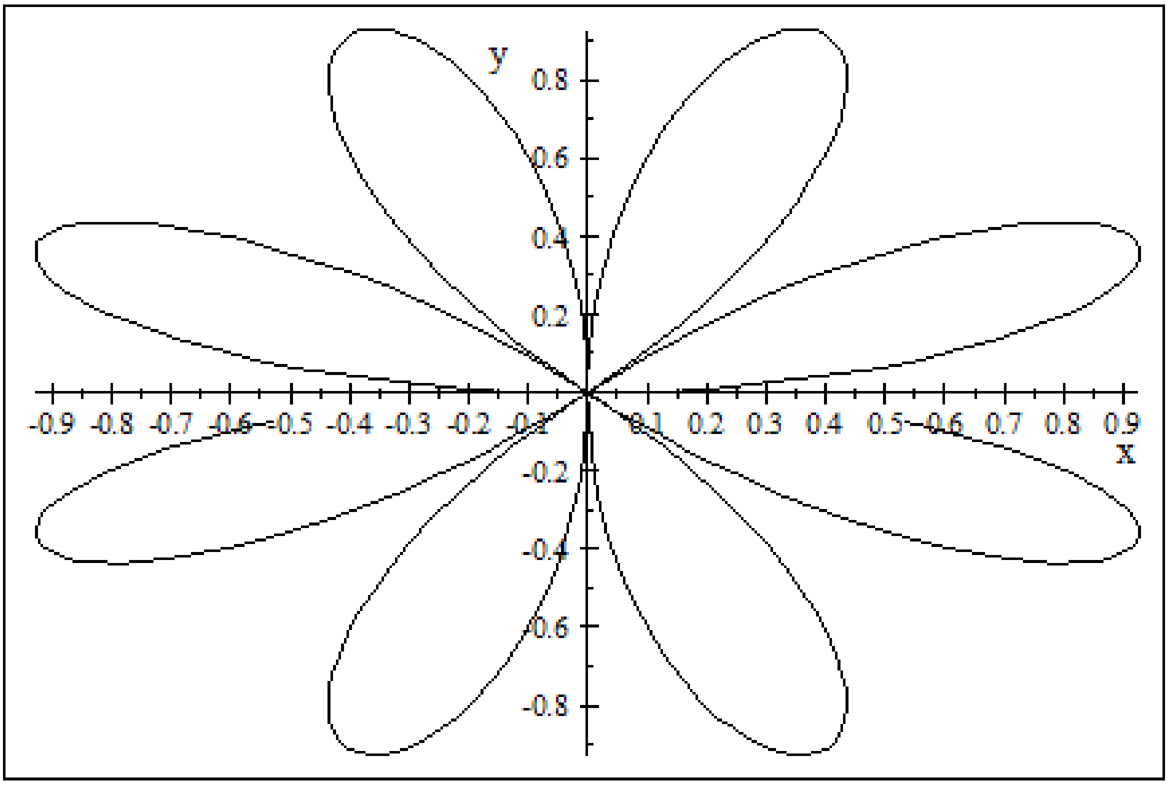
ρ est périodique de période $\dfrac{\pi}{2}$, donc $D = [-\pi/4, \pi/4]$.

Comme la fonction ρ est impaire c-à-d $\rho(-\theta) = -\rho(t)$ et $\rho(\pi/4 - \theta) = \rho(\theta)$, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe oy et par rapport la première bissectrice. Il suffit étudier la courbe sur l'intervalle $[0, \pi/8]$.

Les symétries.

La symétrie par rapport à oy. La rotation de centre o d'angle $T/2 + \pi = 5\pi/4$.

ρ	0		$\dfrac{\pi}{8}$
ρ'	0	$+$	
ρ	0	$\nearrow$	1


y
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-0.9
-0.8
-0.7
-0.6
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
x

1.3 Exercices

Exercice 01. La courbe paramétrée (C) est définie comme suite

$$M(t) = \begin{cases} x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) + \sin(2t) \end{cases}$$

1- Trouver le plus petit domaine d'étude de la courbe.

2- Trouver le point singulier. Étudier la nature de ce point.

3- Donner l'équation de la tangente au point $M(0)$

Exercice 02.

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (γ) définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2} \\ y(t) = 2t + t^2 \end{cases}$$

1. Montrer que (γ) présente un point de rebroussement.
2. Déterminer une équation de la tangente à (γ) en ce point.

Exercice 03.

1- Trouver les points réguliers de la courbe(C) définie paramétriquement par

$$M(t) = \begin{cases} x(t) = (t-2)^3 + 1 \\ y(t) = t^2 - 4 \end{cases}$$

2- Étudier la position de la courbe C au voisinage d'un de ses points $M(t)$.

Exercice 04.

Soit $M(t) = \begin{cases} x(t) = \sqrt{2}(\cos^3(t) + \sin^3(t)) \\ y(t) = \sqrt{2}(\cos^3(t) - \sin^3(t)) \end{cases}$

1)Montrer que la courbe est symétrique par rapport à la droite $x = y$ et par rapport à l'origine.

2) Trouver le plus petit domaine d'étude de la courbe.

3) En remarquant que le point $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ est singulier.

4)Tracer le graphe sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

5) En profitant des symétries, tracer le graphe sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$

Exercice 05.

La limniscate de Bernoulli est définie paramétriquement comme suit

$$M(t) = \begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^4} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$$

1) Étudier les propriétés de symétrie du support de la courbe.

2) En déduire le domaine d'étude D_e.

3) Faire le tableau de variations conjointes.

Exercice 06.

On considère la courbe d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = cos(t/3) \\ y(t) = sin(t) \end{cases}$$

1. Étudier la périodicité et la parité de la courbe, puis montrer que l'on peut restreindre son étude à l'intervalle $[0, \frac{3\pi}{2}]$.
2. Dresser le tableau de variation de la courbe.
3. Tracer finalement la courbe.

Exercice 07.

Dans le plan affine euclidien, rapporté au repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on se propose de construire la courbe (γ) définie en fonction de paramètre réel t par :

$$\begin{cases} x(t) = \sin^2(t)\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$$

1. Montrer que le plus petit domaine d'étude D_e de la courbe (γ) est $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Étudier les variations de x et y en fonction de t sur D_e.
3. Trouver les tangentes verticales et horizontales de la courbe γ.
4. Tracer l'allure de la courbe.

Exercice 08.

Le Folium de Descartes est défini paramétriquement comme suit

$$M(t) = \begin{cases} x(t) = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \quad a > 0$$

1- Étudier les branches infinies.

2- Calculer l'équation de l'asymptote oblique.

Exercice 09.

Construire les courbes d'équations polaires :

1. $\rho = f(\theta) = a\theta$ avec $a > 0$
2. $\rho = f(\theta) = (1 + \sin(\theta))$
3. $\rho = f(\theta) = (1 - \cos(\theta))$
4. $\rho = f(\theta) = (1 + \cos^2(\theta))$

Chapitre 2

Propriétés métriques et locales des courbes planes et gauches

2.1 Longueur d'un arc de courbe

2.1.1 Courbe plane d'équation $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

Soit t_0 et t_1 les paramètres respectifs de A et B c-à-d $[A(x(t_0), y(t_0)), B(x(t_1), y(t_1))]$ avec $t_0 < t_1$ et $x(t)$ et $y(t)$ sont pourvues de dérivées continues. Donc la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est

$$L_A^B = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

2.1.2 Courbe plane d'équation $y = f(x)$

Soit, par rapport à un repère orthonormé xOy, un arc $\overset{\frown}{AB}$ de courbe d'équation : $y = f(x)$, où f pourvue d'une dérivée continue.
Notons a et b les abscisses respectivement de A et B et $a < b$.
Donc la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est

$$L_A^B = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

2.1.3 Courbe gauche d'équation $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

Dans l'espace, une courbe (γ) peut être définie par la donnée de trois fonctions d'un même paramètre $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$. On dit dans ce cas que (γ) et une courbe gauche ou non plane.

Dans le cas d'une courbe gauche (γ) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

la longueur de la courbe est le réel positif L défini par

$$L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt$$

Définition 1. On dit d'un arc est rectifiable si sa longueur existe.

Exemple 1. Soit (γ) la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = r\cos(t) \\ y(t) = r\sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Donc

$$\begin{cases} x'(t) = -r\sin(t) \\ y'(t) = r\cos(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$L_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} dt = 2\pi r$$

Exemple 2. Soit (γ) la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 - 1 \\ y(t) = 3t^3 - 1 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Donc

$$L_0^1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \int_0^1 9t^2 + 1 dt = 9$$

2.2 Abscisse curviligne

Soit un point fixe $A(t_0)$ de (γ) et un point variable $M(t)$ de (γ). On appelle abscisse curviligne de M par rapport à l'origine A la fonction de t :

$$s(t) = \varepsilon \int_{t_0}^{t} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

avec :

$\varepsilon = +1$ quand la courbe est orientée dans le sens des t croissants $(\frac{ds}{dt} > 0)$ et
$\varepsilon = +1$ quand la courbe est orientée dans le sens des t décroissants $(\frac{ds}{dt} < 0)$.
On peut donc considérés l'abscisse curviligne s d'un point M comme une fonction du paramètre t, les applications x' et y' étant supposées continues, cette fonction est dérivable et on a :

$$\frac{ds}{dt} = \varepsilon \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

On en déduit

$$(\frac{ds}{dt})^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2$$

ce que l'on pourra écrire, étant donné que $dx = x'(t)dt$ et $dy = y'(t)dt$:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Dans le cas d'une courbe gauche

$$s(t) = \varepsilon \int_{t_0}^{t} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Exemple 1. Soit (γ) la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = a.ch(t) \\ y(t) = a.sh(t) \\ z(t) = a.t \end{cases}$$

on a

$$\begin{cases} x'(t) = a.sh(t) \\ y'(t) = a.ch(t) \\ z'(t) = a \end{cases}$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \int_0^t \sqrt{a^2 sh^2(t) + a^2 ch^2(t) + a^2} dt$$

donc

$$s(t) = \int_0^t a\sqrt{2} ch(t) dt = a\sqrt{2} sh(t)$$

2.3 Exercices

Exercice 01.

1. Calculer la longueur du premier quart de l'astroide.

2. Calculer la longueur de la spirale d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = ae^{bt}\cos(t) \\ y(t) = ae^{bt}\sin(t) \end{cases}$$

Exercice 02.

1. Démontrer que la longueur d'une courbe polaire $\rho = \rho(t)$, de classe C^1 est donnée par : $L_a^b = \displaystyle\int_a^b \sqrt{\rho^2(t) + \rho'^2(t)} dt$.

2. Montrer que la longueur de la cardioide définie par $\rho(t) = 1 + \cos(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$ est 8.

3. Montrer que son abscisse curviligne est donnée par $s(t) = 4\sin(t/2)$.

Exercice 03.

Dans l'espace rapporté à un repère $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère la courbe (C) d'équation paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)\sin(u)du \\ y(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)\cos(u)du \\ z(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)\tan(u)du \end{cases}$$

où $f(t) = \cos(t)\sqrt{1+\cos^2(t)}$

Montrer que la courbure de (C) est constante.

Exercice 04.

Soit (γ) la courbe de l'hélice définie par :

$$\alpha(t) = \begin{cases} x(t) = \frac{a}{c}\cos(t) \\ y(t) = \frac{a}{c}\sin(t) \\ z(t) = \frac{b}{c}t \end{cases} \quad \text{avec } a^2+b^2=c^2$$

a. Montrer que t représente l'abscisse curviligne.

b. Calculer la courbure au point $M_t = \alpha(t)$.

c. Déterminer le centre de courbure.

Exercice 05.

On considère la courbe (γ) d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{3}{2}t^2 \\ z(t) = \frac{3}{2}t^3 \end{cases}$$

1. Trouver une abscisse curviligne $s(t)$. Calculer la longueur de (γ) entre $\gamma(0)$ et $\gamma(2)$.

2. Calculer la courbure de (γ).

3. Déterminer les vecteur tangent et normal.

Chapitre 3

Courbure des courbes planes et gauches

3.1 Dans l'espace

3.1.1 Vecteur unitaire tangent.

Soit un repère orthonormé $Oxyz$ et une courbe (γ) de représentation paramétrique supposée propre :

$O\vec{M} = O\vec{M}(t)$; ou $x = x(t); y = y(t); z = z(t)$ On suppose que, sur un certain intervalle, la fonction $O\vec{M}(t)$ admet des dérivées première et seconde. Cette fonction est donc continue, ainsi que sa dérivée première et la courbe est rectifiable sur l'intervalle considéré. Soit s l'abscisse curviligne de M. Le vecteur $\dfrac{d\vec{M}}{ds}$ est :

1. tangent à la courbe (γ).

2. unitaire car ses composantes sont telles que :

$$(\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2 + (\frac{dz}{ds})^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds^2} = 1$$

Un vecteur unitaire $\vec{T}$ de la tangente est donc :

$$\vec{T} = \frac{d\vec{M}}{ds} = (\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds})$$

L'axe défini par M et T est appelé tangente orientée en M à la courbe (γ).

3.1.2 Courbure. Rayon de courbure

Comme on a : $\|\vec{T}\| = 1$ ou $\vec{T}^2 = 1$ on en déduit en dérivant : $\vec{T}.\dfrac{d\vec{T}}{ds} = 0$.
Le vecteur $\dfrac{d\vec{T}}{ds}$ est donc normal à $\vec{T}$.
Définition 3.1.

On appelle, au point M de la courbe (γ) :

1. Norme principale, le support de $\dfrac{d\vec{T}}{ds}$ attaché en M.

2. Vecteur normal principal $\vec{N}$, le vecteur unitaire, de même sens que $\dfrac{d\vec{T}}{ds}$, de la normale principale. On a

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \|\frac{d\vec{T}}{ds}\|\vec{N}$$

Définition 3.2.

On appelle courbure de la courbe gauche au point M d'abscisse curviligne s le nombre $\kappa(s) = \|\dfrac{d\vec{T}}{ds}\|$
Proposition 3.1.

La courbure d'une courbe paramétrée régulière γ de classe C^2 au point de paramètre t vaut

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

Exemple. Soit (γ) la courbe de l'hélice circulaire d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = r.\cos(t) \\ y(t) = r.\sin(t) \quad r \text{ et } h \text{ costantes} > 0 \\ z(t) = h.r.t \end{cases}$$

Calculons de ds de l'hélice. on a $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (r^2 + h^2r^2)dt^2$ et en orientant la courbe dans le sens des t croissants :

$$ds = r\sqrt{1+h^2}dt$$

D'autre part, les composantes du vecteur unitaire $\vec{T} = \frac{d\vec{M}}{ds}$ de la tangent orientée au point M sont :

$$a = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{-\sin(t)}{\sqrt{1+h^2}}, b = \frac{dy}{ds} = \frac{\cos(t)}{\sqrt{1+h^2}}, c = \frac{dz}{ds} = \frac{h}{\sqrt{1+h^2}}$$

On en déduit les composantes du vecteur $\frac{d\vec{M}}{ds}$

$$\frac{da}{ds} = \frac{da}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{-\cos(t)}{\sqrt{1+h^2}}, \frac{db}{ds} = \frac{db}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{-\sin(t)}{\sqrt{1+h^2}}, \frac{dc}{ds} = \frac{dc}{dt}\frac{dt}{ds} = 0$$

On sait que $\kappa = \|\frac{d\vec{T}}{ds}\|$, donc $\kappa = \sqrt{(\frac{da}{ds})^2 + (\frac{db}{ds})^2 + (\frac{dc}{ds})^2} = \frac{1}{r(1+h^2)}$.
Deuxième méthode.

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{r^2(1+h^2)^{1/2}}{r^3(1+h^2)^{3/2}} = \frac{1}{r(1+h^2)}$$

Définition 3.3. On appelle rayon de courbure de la courbe gauche au point M le nombre $R = \frac{1}{\kappa}$.
Comme $\frac{d\vec{T}}{ds} = \|\frac{d\vec{T}}{ds}\|\vec{N}$, on trouve

$$\vec{N} = R\frac{d\vec{T}}{ds}$$

3.1.3 Centre de courbure.

Le centre de courbure par le vecteur $\vec{M\Omega}$ (dit vecteur-courbure) :

$$\vec{M\Omega} = R.\vec{N} = R^2\frac{d\vec{T}}{ds}$$

L'égalité vectorielle $\vec{O\Omega} = \vec{OM} + \vec{M\Omega}$ donne :

$$\begin{cases} x_\Omega = x(t) + R^2 \dfrac{da}{ds} \\ y_\Omega = y(t) + R^2 \dfrac{db}{ds} \\ z_\Omega = z(t) + R^2 \dfrac{dc}{ds} \end{cases}$$

avec $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = (\dfrac{da}{ds}, \dfrac{db}{ds}, \dfrac{dc}{ds})$ et $a = \dfrac{dx}{ds}$, $b = \dfrac{dy}{ds}$, $c = \dfrac{dz}{ds}$ **Exemple.** Soit (γ) la courbe de l'hélice circulaire d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) & = r.\cos(t) \\ y(t) & = r.\sin(t) \\ z(t) & = h.r.t \end{cases} \quad r \text{ et } h \text{ costantes} > 0$$

Calculons centre de courbure. on a

$$\begin{cases} x_\Omega = x(t) + R^2 \dfrac{da}{ds} \\ y_\Omega = y(t) + R^2 \dfrac{db}{ds} \\ z_\Omega = z(t) + R^2 \dfrac{dc}{ds} \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x_\Omega & = -h^2.r.\cos(t) \\ y_\Omega & = -h^2.r.\sin(t) \\ z_\Omega & = h.r.t \end{cases}$$

3.2 Dans le plan

Dans tout ce paragraphe, nous orientons l'axe$\overset{\frown}{AB}$ en choisissant le sens des t croissants. On suppose que la courbe γ est plane et rapportée au repère orthonormé (Ox, Oy).

3.2.1 Vecteur unitaire de la tangente orientée.

Nous noterons $\frac{d\vec{M}}{ds}$ le vecteur de coordonnées $(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds})$, or, d'après les règles de dérivations des fonctions composées on a :

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$$
$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$$

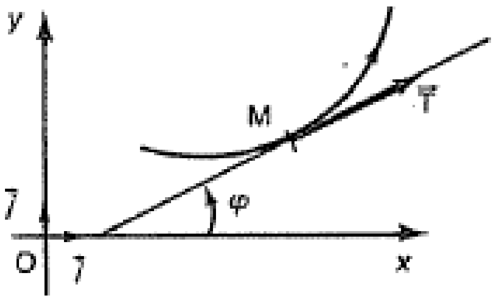
d'où

$$\begin{aligned} \|\frac{d\vec{M}}{ds}\| &= \sqrt{(\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2} \\ &= \sqrt{\frac{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

En conclusion

Théorème 3.1. *On un point non singulier de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$, le vecteur de coordonnées $(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds})$ est un vecteur unitaire de la tangente en M à l'arc $\overset{\frown}{AB}$. on note $\vec{T}$.*

On désigne par α l'angle polaire du vecteur tangent unitaire $\vec{T}$ c-à-d $\varphi = (\vec{ox}, \vec{T})$



Les composantes de $\vec{T}$ sont, d'un part, $\dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}$ et d'autre part, $\cos(\varphi)$, $\sin(\varphi)$ (car le vecteur $\vec{T}$ est unitaire), d'où

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\varphi), \frac{dy}{ds} = \sin(\varphi)$$

$$\vec{T} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

on retrouve bien

$$tg(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\varphi)} = \frac{\frac{dx}{ds}}{\frac{dy}{ds}} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}}{\frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds}} = \frac{x'(t)}{y'(t)}$$

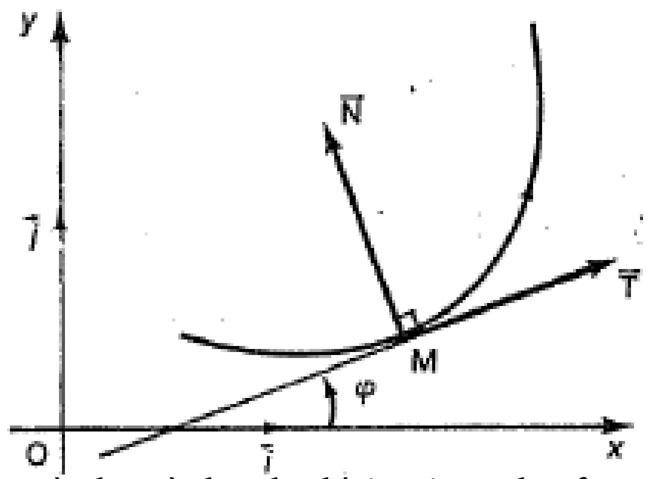
3.2.2 Courbure orientée.

Rappelons que $\dfrac{d\vec{T}}{d\varphi}$, dérivée du vecteur unitaire par rapport à l'angle polaire φ, et le vecteur unitaire $\vec{n}$ directeur perpendiculaire à $\vec{T}$.

Définition 3.3.

On appelle vecteur unitaire de la normale orientée le vecteur $\vec{N}$ défini par :

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{d\varphi}$$



D'après les règles de dérivations des fonctions composées, on a

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d^2M}{ds^2}$$

donc

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d}{ds}(\frac{dx}{ds}) = \frac{d}{ds}(\cos(\varphi)) = -\sin(\varphi)\frac{d\varphi}{ds}$$
$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d}{ds}(\frac{dy}{ds}) = \frac{d}{ds}(\sin(\varphi)) = \cos(\varphi)\frac{d\varphi}{ds}$$

Les coordonnées du vecteur $\frac{d\vec{T}}{ds}$ sont donc $(-\sin(\varphi), \cos(\varphi)\frac{d\varphi}{ds}$.
La formule de Frenet donne

$$\frac{\vec{N}}{\Re} = \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds}$$

d'où, en prenant les modules :

$$\frac{1}{\Re} = |\frac{d\varphi}{ds}|, \text{ puisque } \|\frac{d\vec{T}}{d\varphi}\| = 1$$

Définition 3.4.

La courbure algébrique de l'arc en son point de paramètre s est le réel $c(s) = \frac{d\varphi}{ds}$. Alternativement, pour un autre paramétrage, $c(t) = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{ds}$

Définition 3.5.

Le rayon de courbure en un point régulier est le réel $R(t) = \frac{1}{c(t)}$

$$R(t) = \frac{ds}{d\varphi}. \tag{3.1}$$

3.2.3 Calcul du rayon de courbure.

Le rayon de courbure algébrique R peut se calculer à l'aide de la forme (3.1).
Le rayon de courbure $\mathbb{R} = \dfrac{ds}{d\varphi}$ peut aussi se calculer de la manière suivante :
comme : $tg(\varphi) = \dfrac{y'}{x'}$ on a

$$\varphi = arc\ tg(\frac{y'}{x'})$$

on dérive

$$\begin{aligned} d(\varphi) &= \frac{\frac{y''x'-y'x''}{x'^2}}{1+(y'/x')^2}dt \\ &= \frac{y''x'-y'x''}{x'^2+y'^2}dt \end{aligned}$$

d'autre part $|ds| = \sqrt{x'^2+y'^2}dt$ donc

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{y''x'-y'x''} \tag{3.2}$$

Cas particulier. Si $y = f(x)$,on peut prendre x comme paramètre, d'où :

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

Plus particulièrement si (γ) est tangente en o à ox, on a

$$R = \frac{1}{y''}$$

Exemple 1. calculons la courbure de l'astroide.

$$\frac{ds}{dt} = 3/2\sin(2t).$$

Par ailleurs, $tg(\varphi) = \dfrac{y'}{x'} = \dfrac{3\cos(t)\sin^2(t)}{-3\sin(t)\cos^2(t)} = -tg(t)$. On peut prendre $\varphi(t) = -t$, donc

$$\frac{d\varphi}{dt} = -1$$

reste à conclure $c(t)$

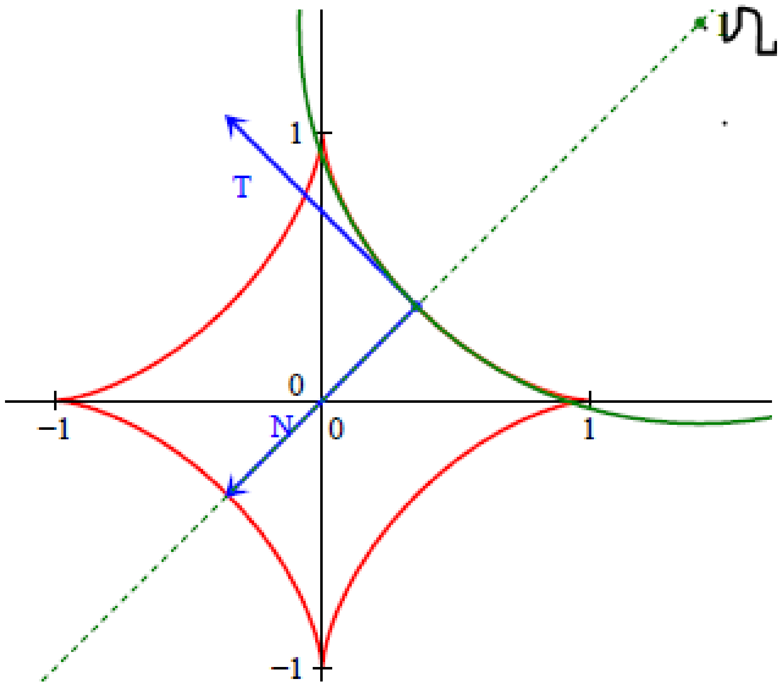
$$c(t) = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{2}{3\sin(t)}$$

donc

$$R(t) = -\frac{3}{2}\sin(2t)$$

Le signe négatif n'est pas surprenant : sur le morceau de courbe considéré, la normale sera dirigée vers l'intérieur de la courbe, alors que le centre de courbure est manifestement à l'extérieur.

Un exemple concret : en $\frac{\pi}{4}$, $R = -\frac{3}{2}$. Avec le repère de Frénet, le centre de courbure et le cercle osculateur au point de paramètre $\frac{\pi}{4}$:



Exemple 2. Calcul du rayon de courbure en un point M de la Cycloïde définie par

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \cos(t)) \\ y(t) = a(1 + \sin(t)) \end{cases} \quad a > 0$$

Pour $t \in [0, 2\pi]$, on calcul tout d'abord

$$\begin{cases} x'(t) = a(1 + \sin(t)) \\ y'(t) = a(\cos(t)) \end{cases} \quad a > 0$$

$$\begin{cases} x''(t) = a\cos(t) \\ y''(t) = -a\sin(t) \end{cases} \quad a > 0$$

donc

$$\begin{aligned}
R(t) = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{y''x' - y'x''} &= \frac{(4a\sin(t/2))^{3/2}}{a^2(\cos(t) - \cos^2(t)) - \sin^2(t))} \\
&= \frac{(4a\sin(t/2))^{3/2}}{a^2(\cos(t) - 1)} \\
&= -\frac{(4a\sin(t/2))^{3/2}}{2a^2\sin^2(t/2)} \\
&= -4a\sin(t/2)
\end{aligned}$$

Exemple 3.

Soit (E) la courbe de l'ellipse d'équation paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = b\sin(t) \end{cases}$$

On peut calcule le rayon de courbure en M par la formule (3.2) donc

$$R = \frac{(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t))^{3/2}}{ab}$$

pour $t = 0$, on trouve $R = \frac{b^2}{a}$.

3.2.4 Centre de courbure.

Définition 3.6.

Le centre de courbure est le point $\Omega(t)$ défini par $\vec{M\Omega} = R\vec{N}$, où M est le point de la courbe correspondant à la valeut t du paramètre, R est le rayon de courbure algébrique au point M et $\vec{N}$ le vecteur unitaire de la normale orientée en M.

Le cercle de courbure, ou cercle osculateur est le cercle de centre $\Omega(t)$ et de rayon $|R(t)|$. C'est le cercle le « mieux » tangent à la courbe au point M.

Coordonnées du centre de courbure

Rappelons que

$$\vec{M\Omega} = R\vec{N} = R^2\frac{d\vec{T}}{ds} = R^2\frac{d\vec{T}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds}$$

et comme $\frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds}$, on trouve

$$\vec{M\Omega} = R\vec{N} = R\frac{d\vec{T}}{d\varphi}$$

D'autre part, on a

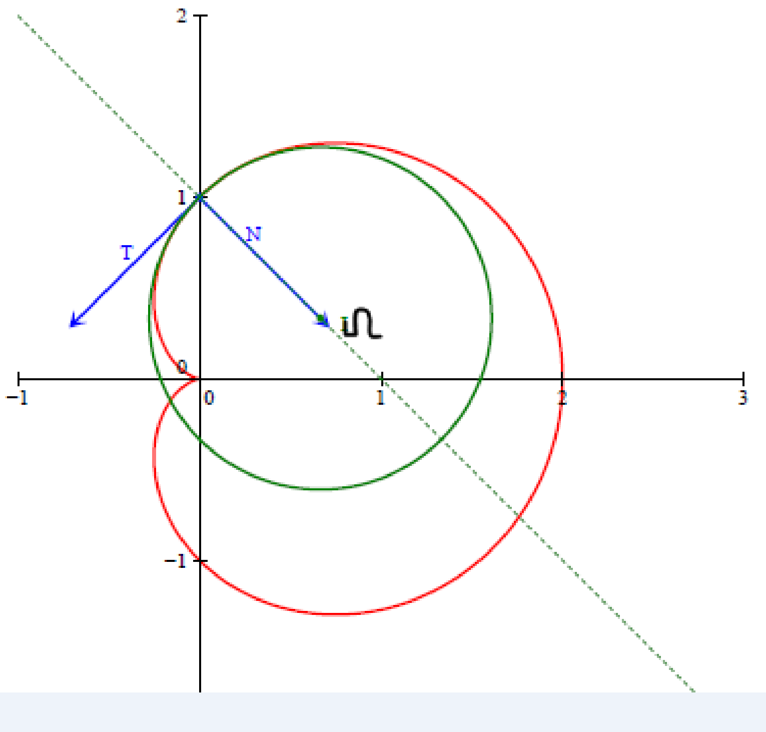
$$\frac{d\vec{T}}{d\varphi} = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi))$$

donc

$$\begin{cases} x_\Omega = x(t) - R\sin(\varphi) = x(t) - R\dfrac{dy}{ds} \\ y_\Omega = y(t) + R\cos(\varphi) = y(t) + R\dfrac{dx}{ds} \end{cases}$$

D'après (3.2), on obtient

$$\begin{cases} x_\Omega = x(t) - \dfrac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} \\ y_\Omega = y(t) + \dfrac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} \end{cases}$$



3.3 Développée d'une courbe

Définition 3.7

L'ensemble des centres de courbure d'une courbe est appelé développée de la courbe.

Équation cartésienne de la développée d'une courbe définie paramétriquement :

$$\begin{cases} X = x(t) - \dfrac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} \\ Y = y(t) + \dfrac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} \end{cases}$$

X et Y coordonnées du point cartésienne (Point de contact avec la normale).

Équation cartésienne de la développée d'une courbe définie par $y = f(x)$:

$$\begin{cases} X = x - \dfrac{y'(1 + y'^2)}{y''} \\ Y = y + \dfrac{(1 + y'^2)}{y''} \end{cases}$$

Exemple.

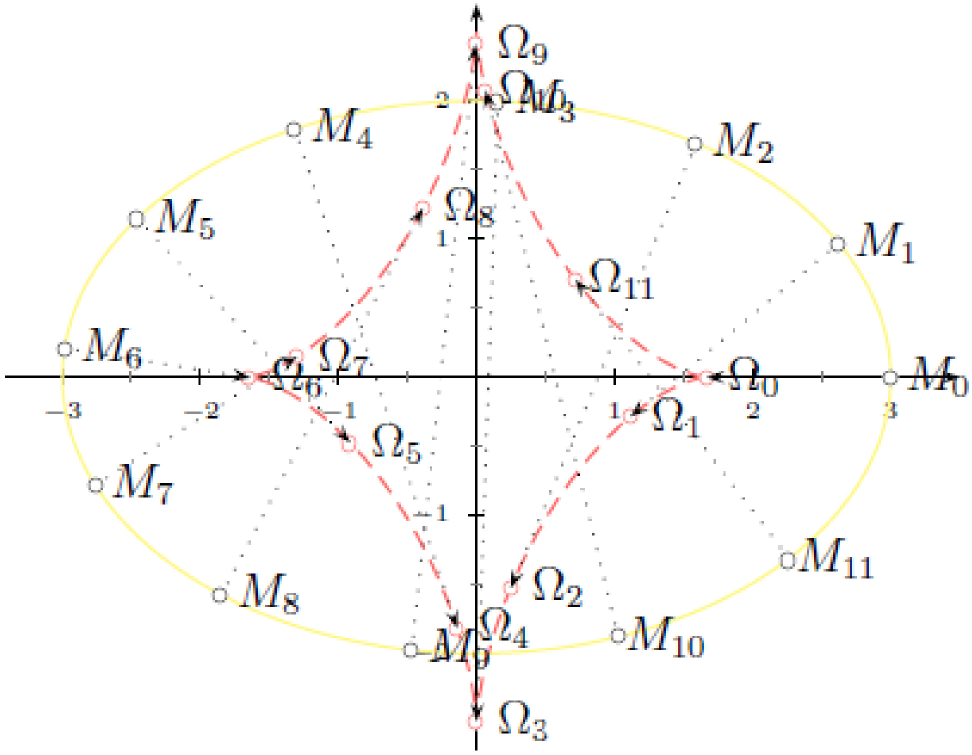
Développée d'une ellipse paramétrée par $(a\cos(t), b\sin(t))$

$$\begin{cases} X = x(t) - \dfrac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} = a\cos(t) - b\cos(t)\dfrac{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}{ab} \\ Y = y(t) + \dfrac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} = b\sin(t) - a\sin(t)\dfrac{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}{ab} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{ab}(a^2b\cos(t)(1 - \sin^2(t)) - b^3\cos(t)) \\ Y = \dfrac{1}{ab}(a^2b\sin(t)(1 - \cos^2(t)) - b^3\sin(t)) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} X = \dfrac{a^2 - b^2}{a}\cos^3(t) \\ Y = \dfrac{b^2 - a^2}{ab}\sin^3(t) \end{cases}$$



3.4 Exercices

Exercice 01.

Déterminer les coordonnées du centre de courbure au point M pour les courbes suivantes :

1. $x(t) = 3t - t^3$, $y(t) = 2t^2$
2. $x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t)$, $y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t)$
3. $xy = 1$

Exercice 02.

Déterminer la représentation paramétrique de la développée de l'astroide définie paramétriquement par le système

$$\begin{cases} x(t) = a\cos^3(t) \\ y(t) = a\sin^3(t) \end{cases}$$

Exercice 03.

Une courbe plan est définie en coordonnées polaires par $\rho = \rho(t)$. Autrement dit, la paramétrisation de la courbe est de la forme :

$$\gamma = \begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos(t) \\ y(t) = \rho(t)\sin(t) \end{cases}$$

où t appartient à un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. Pour la courbe (γ) régulière de classe C^2, monter que le rayon de courbure de la courbe polaire est donnée par :

$$R(t) = \frac{(\rho^2(t) + \rho'^2(t))^{3/2}}{\rho^2(t) + 2\rho'^2(t) - \rho(t)\rho''(t)}.$$

2. Déterminer cette quantité dans le cas de la cardioïde où $\rho(t) = 1 + \cos(t)$

Chapitre 4

Sujets d'examen corrigés

Examen :Géométrie -06 Juin 2022

Questions de cours 3pt

Soit $f : t \to M(t)$ une courbe paramétrée, $t \in D$ et $M(t_0)$un point simple de la courbe.

— Donner la définition du point double.

— On dit que la courbe paramétrée admet une asymptote verticale si............

— On dit que la courbe admet un tangente en $M(t_0)$ si.....

Exercice 02. 8pt.

Construire, dans le plan rapporté au repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (γ) définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2} \\ y(t) = 2t + t^2 \end{cases}$$

1. Montrer que (γ) présente un point de rebroussement.
2. Déterminer une équation de la tangente à (γ) en ce point.
3. Etudier les branches infinies de (γ).

4. Soit M_1 le point de (γ) correspondant à la valeur 1 du paramètre t. Déterminer le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure au point M_1

Exercice 03. 9pt

On considère les fonctions numériques f et g de la variable réelle θ définies par $f(\theta) = 4\sqrt{2}\sin(\theta), \quad g(\theta) = \sin(2\theta)$ On désigne par (γ) la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = f(\theta) \\ y = g(\theta) \end{cases}$$

1. Étudier la périodicité et la parité des fonctions f et g. Calculer $f(\pi - \theta)$, $g(\pi - \theta)$.
2. Étudier les variations des fonctions f et g lorsque θ appartient à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. Tracer la courbe (γ).
3. calculer la longueur de la courbe (γ).

Corrigé type de Géométrie

Questions de cours 3pt

1. Un point A est dit point double s'il existe $t_1 \neq t_2$ tel que $M(t_1) = M(t_2)$.**(1pt)**
2. On dit que la courbe paramétrée admet une asymptote verticale si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = l$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \infty$.**(1pt)**
3. on dit que la courbe admet un tangente en $M(t_0)$ si la droite $M(t)M(t_0)$ admet une position limite pour $t \to t_0$.**(1pt)**

Exercice 01. 8 pt.

1. Montrons que γ présente un point de rebroussement. **(2.5pt)**

x et y sont définies ser $\mathbb{R}^*$. Le calcul de dérivées donne

$$x'(t) = 2(\frac{1+t}{t^2-t+1}), y'(t) = 2(1+t)$$

donc

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$$

Le point $M(-1)$ de coordonnées $(-3, -1)$ est un point stationnaire.

Déterminons les vecteurs dérivés successifs

$$\begin{cases} x''(t) = -\dfrac{6}{t^4} \\ y''(t) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''(-1) = -6 \\ y''(-1) = 2 \end{cases}$$

$\vec{u}_1 = (-6, 2) \neq (0, 0)$. Donc $p = 2$.

$$\begin{cases} x'''(t) = \dfrac{24}{t^5} \\ y'''(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'''(-1) = 24 \\ y'''(-1) = 0 \end{cases}$$

$\vec{u}_2 = (-6, 2)$ est un vecteur non colinéaire au vecteur $\vec{u}_1$, ceci nous permet d'affirmer que le point $M(-1)$ est un point de rebroussement de première espèce de la courbe (γ) car ($p = 2, q = 3$).

2. L'équation de la tangente est donnée par le déterminant **(1.5pt)**

En un point singulier $M(-1)$, on étudier la limite $\lim\limits_{t \to -1} \dfrac{y(t) - y(-1)}{x(t) - x(-1)}$ donc

$$\lim_{t \to -1} \frac{y(t) - y(-1)}{x(t) - x(-1)} = \lim_{t \to -1} \frac{t^2(t+1)^2}{(t+1)^2(2t-1)} = -\frac{1}{3}$$

γ admet une tangente en $M(-1)$ et cette tangente est la droite passent par $(-3, -1)$ et de pente $-\dfrac{1}{3}$, alors $y = -\dfrac{1}{3}x - 2$.

3. Les branche infinies. **(2pt)**

Lorsque $\lim\limits_{t \to 0} x(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to 0} y(t) = 0$, on a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

Lorsque $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t\to\infty} y(t) = +\infty$ et $\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ La courbe (γ) admet une branche parabolique verticale.

4. Courbure et centre de courbure **(3pt)**

Le point M_1 a pour coordonnées $(1,3)$. On calcule que : $x'(1) = 4, x''(1) = -6, y'(1) = 4, y''(1) = 2$.

$$R = |\frac{ds}{d\alpha}| = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - x''y'|} = 4\sqrt{2}$$

Les coordonnées de centre de courbure au point M_1sont données par les formules :

$$\begin{cases} x_c = x(t) - \frac{dy}{d\alpha}(t) = x(t) - y'(t)\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} \\ y_c = y(t) + \frac{dx}{d\alpha}(t) = x(t) + x'(t)\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} \end{cases}$$

Pour $t = 1$, nous calculons : $x_c = -3$ et $y_c = 7$.

Exercice 02. 9 pt.

1.**(1.5pt)**

La périodicité

$f(\theta + 2\pi) = 4\sqrt{2}\sin(\theta + 2\pi) = 4\sqrt{2}\sin(\theta) = f(\theta)$.

$g(\theta + 2\pi) = \sin(2\theta + 4\pi) = \sin(2\theta) = g(\theta)$

Donc les fonctions f et g sont périodiques de période 2π.

La parité

$f(-\theta) = -f(\theta)$ et $g(-\theta) = -g(\theta)$. Les deux applications sont impaires, l'origine du repère est un centre de symétrie de la courbe (γ).

$f(\pi - \theta) = 4\sqrt{2}\sin(\pi - \theta) = 4\sqrt{2}\sin(\theta) = f(\theta)$.

$g(\pi - \theta) = \sin(2\pi - 2\theta) = \sin(-2\theta) = -g(\theta)$.

L'axe (ox) est un axe de symétrie de (γ).

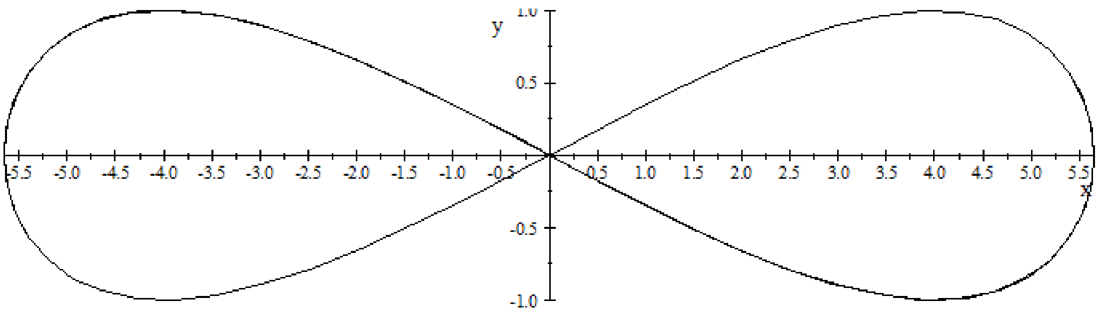
2. Les variations.**(3pt)**

$$\begin{cases} x' = 4\sqrt{2}\cos(\theta) = 0 \\ y' = 2\cos(2\theta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \dfrac{\pi}{2} \\ \theta = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Le tableau de variation est la suivant :

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
x'		$+$		$+$	0
y'		$+$	0	$-$	
x	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$4\sqrt{2}$
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Le tracé de la courbe (γ) est le suivant :**(2pt)**



3. Calculons la longueur de la courbe. **(2.5pt)**

D'après les symétries de la courbe, la longueur de la courbe (γ) est

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2 + y'^2}d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{32\cos^2(\theta) + 4\cos^2(2\theta)}d\theta$$

en utilisant la relation : $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4(\cos(2\theta)+2)^2}d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2\theta)+2)d\theta = 8[1/2\sin(2\theta)+2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8\pi$$

Examen de Rattrapage :Géométrie - 19 Juin 2023

Exercice 01. 9pts

Soit (γ) la courbe de l'hélice définie par :

$$M(t) = \begin{cases} x(t) = \dfrac{a}{c}\cos(t) \\ y(t) = \dfrac{a}{c}\sin(t) \\ z(t) = \dfrac{b}{c}t \end{cases} \quad \text{avec } a^2 + b^2 = c^2$$

avec $a^2 + b^2 = c^2$ et $a, b, c > 0$.

1. Montrer que t représente l'abscisse curviligne.
2. En déduire la longueur de (γ) entre $\gamma(0)$ et $\gamma(2)$.
3. Déterminer le vecteur tangent unitaire $\vec{T}$ et le vecteur normal unitaire $\vec{N}$ au point $M(t)$.
4. Déterminer le centre de courbure au point $M(0)$.

Exercice 02. 11pts

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe (γ) définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$$

1. Montrer que le plus petit domaine d'étude D_e de la courbe est $[0, +\infty[$.
2. Trouver le point singulier de la courbe.

3. Montrer que la courbe présente une tangente horizontale en $M(0)$.
4. Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est asymptote.
5. Étudier les variations des fonctions x et y en fonction de t sur D_e.
6. Tracer la courbe (Γ).
7. En déduire la nature du point $M(0)$.

Corrigé type de Géométrie

Exercice 01. 9pts

Soit (γ) la courbe de l'hélice définie par :

$$M(t) = \begin{cases} x(t) = \frac{a}{c}\cos(t) \\ y(t) = \frac{a}{c}\sin(t) \\ z(t) = \frac{b}{c}t \end{cases}$$

avec $a^2 + b^2 = c^2$ et $a, b, c > 0$.

1. Montrer que t représente l'abscisse curviligne. **(2pt)**

$$S(t) = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt = \int_0^t \sqrt{\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}}dt = \int_0^t 1dt = t$$

2. En déduire la longueur de (γ) entre $\gamma(0)$ et $\gamma(2)$. **(1pt)**

$$L_0^2 = \int_0^2 \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt = 2 - 0 = 2$$

3. Déterminer le vecteur tangent unitaire $\vec{T}$ et le vecteur normal unitaire $\vec{N}$ au point $M(t)$. **(4pt)**

$$\vec{T} = \frac{dM}{ds}(t) = \frac{dM}{dt}\frac{dt}{ds} = (-\frac{a}{c}\sin(t), \frac{a}{c}\cos(t), \frac{b}{c})$$

car $\frac{ds}{dt} = 1$

$$\vec{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\vec{T}}{ds}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt}\frac{dt}{ds} = (-\frac{a}{c}\cos(t), -\frac{a}{c}\sin(t), 0)$$

$$\kappa = \|\frac{d\vec{T}}{ds}\| = \frac{a}{c}$$

donc $\vec{N} = \frac{c}{a}(-\frac{a}{c}\cos(t), -\frac{a}{c}\sin(t), 0)$

4. Déterminer le centre de courbure au point $M(0)$. **(2pt)**

$$\begin{cases} x_\Omega = x(0) - \frac{c}{a} = \frac{a}{c} - \frac{c}{a} \\ y_\Omega = y(0) + 0 = 0 \\ z_\Omega = z(0) + 0 = 0 \end{cases}$$

Exercice 02. 11pts

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe (γ) définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$$

1. Montrer que le plus petit domaine d'étude D_e de la courbe est $[0, +\infty[$. **(1pt)**

$$x(-t) = \frac{-t^2}{1+t^2} = x(t)$$

$$y(-t) = \frac{-t^3}{1+t^2} = -y(t)$$

La courbe est symétrique par rapport à (ox) donc $D_e = [0, +\infty[$

2. Trouver le point singulier de la courbe. **(2pt)**

$$\begin{cases} x'(t) &= \dfrac{2t}{(1+t^2)^2} = 0 \\ y'(t) &= \dfrac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2} \end{cases} \Longrightarrow t = 0$$

le point singulier est $(0,0)$.

3. Montrer que la courbe présente une tangente horizontale en $M(0)$. **(1pt)**

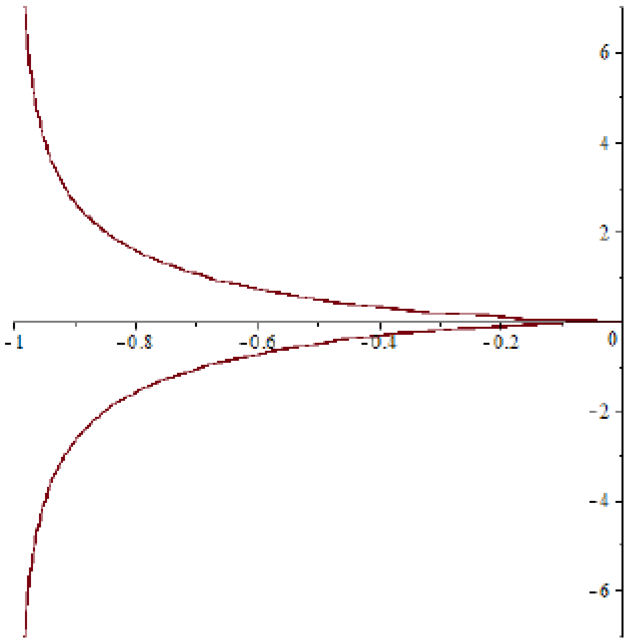
Lorsque t tend vers 0, $\lim \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = 0$, l'axe (ox) est donc tangente en M(0).

4. Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est asymptote. **(1pt)** Lorsque t tend vers $+\infty$, $x(t)$ tend vers -1 et $y(t)$ tend vers $+\infty$, donc $x = -1$ est asymptote

5. Étudier les variations des fonctions x et y en fonction de t sur D_e. **(3pt)**

t	0		∞
x'	0	$+$	
x	0	$\searrow$	-1
y	0	$\nearrow$	∞
y'	0	$+$	

6. Tracer la courbe (Γ). **(2pt)**


6
4
2
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
-2
-4
-6

Examen :Géométrie - 31 Mai 2023

N.B : L'usage de tout appareil électronique est strictement interdit.

Questions de cours 4pts

— On dit que la courbe paramétrée plane admet une branche infinie quand $t \to t_0$ si.............

— En un point régulier $M(t_0)$, on dit que la courbe paramétrée plane admet une tangente verticale si...........

— On dit que la courbe polaire d'équation $\rho = \rho(\theta)$ est symétrique par rapport à la droite $\theta = \frac{\theta_0}{2}$ si............

— Le cercle osculateur est le cercle..........

Exercice 01. 9pts

On construit, dans le plan rapporté au repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe paramétrée (γ) définie en coordonnées polaires par :

$$\rho(t) = \cos(2t) + \cos^2(t)$$

1. Étudier la périodicité et la parité de ρ.
2. Déterminer les symétries de (γ).
3. Pour quelle valeur de $t_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ a-t-on $\rho(t_0) = 0$.
4. Dresser le tableau de variations de ρ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.
5. Tracer la courbe (γ).
   Indication : $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$

Exercice 02. 7pts

Soit ρ une application de classe C^2 d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Une courbe plan est définie en coordonnées polaires par $\rho = \rho(t)$.

1. Montrer que la courbure en un point régulier est donnée par

$$c(t) = \frac{\rho^2(t) + 2\rho'^2(t) - \rho(t)\rho''(t)}{(\rho^2(t) + \rho'^2(t))^{3/2}}$$

2. Calculer la courbure dans le cas $\rho(t) = ae^{-bt}$ avec $a, b > 0$.
3. Donner les coordonnées du centre de courbure au point $M(0)$.

Corrigé type de Géométrie

Questions de cours 4pts

1. On dit que la courbe paramétrée plane admet une branche infinie quand $t \to t_0$ si : quand l'une au moins, des coordonnées tend vers l'infini quand $t \to t_0$. **(1pt)**
2. En un point régulier $M(t_0)$, on dit que la courbe paramétrée plane admet une tangente verticale si : $x'(t_0) = 0$. **(1pt)**
3. On dit que la courbe polaire d'équation $\rho = \rho(\theta)$ est symétrique par rapport à la droite $\theta = \frac{\theta_0}{2}$ si : $f(\theta_0 - \theta) = f(\theta)$. **(1pt)**
4. Le cercle osculateur est le cercle de centre $\Omega(t)$ et de rayon $|R(t)|$. **(1pt)**

Exercice 01. 9 pts.

1. La périodicité **(1.5pt)**

$\rho(T+t) = \rho(t)) \Longrightarrow \cos(2T+2t) + \cos^2(T+t) = \cos(2t) + \cos^2(t)$.

et comme $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ et $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ on trouve :

$\cos(2t) + \cos^2(t) = 3\cos^2(t) - 1$.

Donc $3\cos^2(T+t) - 1 = 3\cos^2(t) - 1 \Longrightarrow T = 2k\pi$.

Donc la fonction ρ est périodique de période 2π.

La parité : (1pt)

$\rho(-t) = \cos(-2t) + \cos^2(-t) = \cos(2t) + \cos^2(t) = \rho(t)$

Donc la fonction ρ est paire.

2. Les symétries (1.5pt)

Comme la fonction ρ est paire, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe (ox). De plus, comme : $\rho(\pi - t) = \cos(2\pi - 2t) + \cos^2(\pi - t) = \cos(2t) + \cos^2(t) = \rho(t)$, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe (oy).

3. Résoudre l'équation $\rho(t) = 0$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ **(1pt)**

$$3\cos^2(t) - 1 = 0 \Longrightarrow \cos(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

donc $t_0 = \arccos(\frac{\sqrt{3}}{3})$.

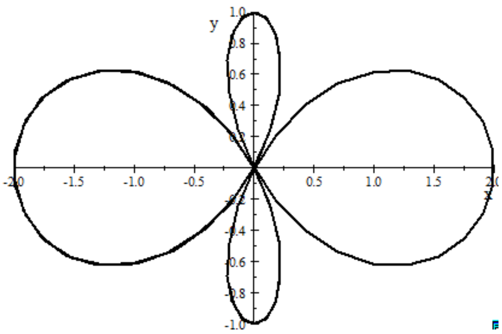
4.Tableau de variation. (2pts)

$$\rho'(t) = -6\sin(t)\cos(t) = 0 \Longrightarrow t = 0 \text{ ou } t = \frac{\pi}{2}.$$

Le tableau de variation est la suivant :

t	0		$\frac{\pi}{2}$
ρ'	0	$-$	0
ρ	2	$\searrow$	-1

5. **Le trace de la courbe (γ) est le suivant :** **(2pt)**



Exercice 02. 7 pts.

1. Montrer que la courbure en coordonnées polaires est donnée par

$$c(t) = \frac{\rho^2(t) + 2\rho'^2(t) - \rho(t)\rho''(t)}{(\rho^2(t) + \rho'^2(t))^{3/2}}$$

La courbure d'une courbe de classe C^2 est donnée par

$$c(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}}$$ **(0.5pt)**

donc

$$\begin{cases} x'(t) = \rho'(t)\cos(t) - \rho(t)\sin(t) \\ y'(t) = \rho'(t)\sin(t) + \rho(t)\cos(t) \end{cases}$$ **(0.5pt)** et

$$\begin{cases} x''(t) = \rho''(t)\cos(t) - 2\rho'(t)\sin(t) - \rho(t)\cos(t) \\ y''(t) = \rho''(t)\sin(t) + 2\rho'(t)\cos(t) - \rho(t)\sin(t) \end{cases}$$ **(0.5pt)**

Ce qui donne :

$$x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = \rho^2(t) + 2\rho'^2(t) - \rho(t)\rho''(t)$$ **(0.5pt)**

$$x'^2(t) + y'^2(t) = \rho^2(t) + \rho'^2(t)$$ **(0.5pt)**

Par conséquent

$$c(t) = \frac{\rho^2(t) + 2\rho'^2(t) - \rho(t)\rho''(t)}{(\rho^2(t) + \rho'^2(t))^{3/2}}$$ **(0.5pt)**

2. Calculer la courbure dans le cas $\rho = ae^{-bt}$ **(2pts)**

$$\rho'(t) = -abe^{-bt} \text{ et } \rho''(t) = ab^2e^{-bt}$$

donc

$$c(t) = \frac{a^2e^{-2bt} + 2a^2b^2e^{-2bt} - a^2b^2e^{-2bt}}{(a^2e^{-2bt} + a^2b^2e^{-2bt})^{3/2}} = \frac{a^2e^{-2bt}(1+b^2)}{a^3e^{-3bt}(1+b^2)^{3/2}} = \frac{e^{bt}}{a\sqrt{1+b^2}}$$

3. Les coordonnées du centre de courbure au point $M(0)$ **(2pts)**

$$\begin{cases} x_\Omega(0) = x(0) - \dfrac{y'(0)(x'^2(0)+y'^2(0))}{x'(0)y''(0)-x''(0)y'(0)} = x(0) - \dfrac{y'(0)(\rho^2(0)+\rho'^2(0))}{\rho^2(0)+2\rho'^2(0)-\rho(0)\rho''(0)} \\ y_\Omega(0) = y(0) + \dfrac{x'(0)(x'^2(0)+y'^2(0))}{x'(0)y''(0)-x''(0)y'(0)} = y(0) + \dfrac{x'(0)(\rho^2(0)+\rho'^2(0))}{\rho^2(0)+2\rho'^2(0)-\rho(0)\rho''(0)} \end{cases}$$

$\rho(0) = a$, $\rho'(0) = -ab$, $\rho''(0) = ab^2$, $x'(0) = -ab$, $y'(0) = a$, $x(0) = a$ et $y(0) = 0$

$$\begin{cases} x_\Omega(0) & = a - \dfrac{a(a^2+a^2b^2)}{a^2+2a^2b^2-a^2b^2} = 0 \\ y_\Omega(0) & = 0 + \dfrac{-ab(a^2+a^2b^2)}{a^2+2a^2b^2-a^2b^2} = -ab \end{cases}$$

Bibliographie

1. P.C AITCIN, P.LOUQUET, A.VOGT Géométrie (Applications de l'algèbre linéaire et de l'analyse à la géométrie).

2. JEAN-PAUL TRUC, PIERRE-JEAN BRAVO Construction de courbes planes (paramétriques, polaires). Cours et exercices corrigés.

3. C. BABA- HAMED , K. BENHABIB Analyse 2 Rappels de cours et exercices avec solution.

4. M.CHOSSAT Collection " aide-mémoire". Mathématiques de l'ingénieur.