



Université Sétif 1 Ferhat Abbas
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Thèse de Doctorat

présentée en vue de l'obtention du diplôme
de Docteur en Mathématiques

Option : Analyse non linéaire et EDP

Thème :

**Stabilisation des solutions pour certains problèmes
d'ondes viscoélastiques et d'une plaque
viscoélastique**

Présentée par

Mr. Islam Baaziz

Directeur de thèse : **Professeur Benyattou Benabderrahmane**

Thèse soutenue le 09/07/2025, devant le jury composé de :

Mr. Naceurdine BENSALAM	Prof. Université Ferhat Abbas, Sétif 1	Président
Mr. Benyattou BENABDERRAHMANE	Prof. Ecole Nationale Supérieure de Mathématiques	Rapporteur
Mr. Nasserddine KECHKAR	Prof. Université Larbi Ben M'hidi, Oum El-Bouaghi	Examineur
Mr. Brahim NOUIRI	Prof. Université Mohamed Boudiaf, M'Sila	Examineur
Mr. Nadhir CHOUGUI	Prof. Université Ferhat Abbas, Sétif 1	Examineur
Mr. Hamid BENSERIDI	Prof. Université Ferhat Abbas, Sétif 1	Examineur
Mr. Salah DRABLA	Prof. Université Ferhat Abbas, Sétif 1	Invité

2024-2025

Dédicace

Avec toute ma gratitude et ma reconnaissance, je dédie cette thèse à :

Mes chers parents, Toufik et Lynda, dont les paroles d'encouragement et l'incitation à la ténacité résonnent encore à mes oreilles.

Mes trois chères frères, Mahfoud, Zinou et Ayoub, qui ne m'ont jamais quitté et occupent une place très spéciale dans mon cœur.

Ma seule sœur Imene et son mari Ibrahim, qui restent à mes côtés lorsque tout paraît sombre et qui ne cessent jamais de se donner de mille manières.

Toute ma famille, symbole d'amour et de générosité.

Mes amis, qui m'ont encouragé et soutenu.

À toutes les personnes de ma vie qui ont touché mon cœur, je dédie cette recherche.

Remerciement

Entreprendre ce doctorat a été une aventure intellectuelle et humaine profondément enrichissante, rendue possible grâce au soutien et à l'accompagnement de nombreuses personnes, à qui j'exprime ici ma profonde gratitude.

Avant tout, je rends grâce à Allah, le Très Miséricordieux, qui m'a accordé la force, la patience et les opportunités nécessaires pour mener à bien ce travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance infinie à mon directeur de thèse, le Professeur Benyattou BENABDERRAHMANE, de l'École Nationale Supérieure en Mathématiques de Sidi Abdellah, Alger. Son encadrement rigoureux, ses conseils avisés, sa patience et sa bienveillance ont été des piliers essentiels de mon parcours. Grâce à lui, j'ai pu affiner ma réflexion et approfondir mes recherches avec rigueur et persévérance. Travailler sous sa direction a été un honneur et un privilège, tant il incarne l'excellence et le dévouement envers ses étudiants.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements aux membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en évaluant ce travail. Je remercie tout particulièrement le Professeur Naceurdine BENSALAM (Université Ferhat Abbas Sétif 1) d'avoir accepté la présidence du jury. Ma gratitude s'étend également aux Professeurs Nasserline KECHKAR (Université Larbi Ben M'hidi d'Oum El-Bouaghi), Brahim NOURI (Université Mohamed Boudiaf de M'Sila), Hamid BENSERIDI (Université Ferhat Abbas Sétif 1) et Nadhir CHOUGUI (Université Ferhat Abbas Sétif 1) pour avoir accepté d'être examinateurs de ce travail de thèse. Je leur serai profondément reconnaissant pour toutes leurs suggestions et remarques constructives.

Je tiens à exprimer une gratitude toute particulière au Professeur Salah DRABLA de l'Université Ferhat Abbas Sétif 1. Son soutien indéfectible, depuis le début de mon parcours doctoral jusqu'à son aboutissement, a été un véritable pilier dans ma formation. Sa disponibilité, ses conseils avisés et sa bienveillance ont guidé ma

réflexion et enrichi ma recherche d'une manière inestimable.

Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude au Professeur Boualem KHOUIDER de l'Université de Victoria (Canada), dont l'aide précieuse a été déterminante dans la partie numérique de ce travail. Son expertise, sa disponibilité et ses conseils ont grandement contribué à améliorer la qualité et la précision de mes simulations numériques. Travailler sous sa supervision a été une opportunité exceptionnelle qui a enrichi ma compréhension des aspects computationnels de ma recherche. Au-delà de l'encadrement scientifique, je tiens à remercier chaleureusement toutes les personnes qui m'ont accueilli avec bienveillance à l'Université de Victoria.

J'exprime aussi ma gratitude aux membres du Laboratoire de Mathématiques Appliquées (LaMA), dont le soutien a été précieux à chaque étape de mon projet de recherche.

Je souhaite adresser un immense merci au personnel administratif de la Faculté des Sciences, et en particulier au Vice-Doyen, le Professeur Ammar MOSBAH. Sa gentillesse, sa disponibilité et son efficacité m'ont grandement facilité la tâche, me permettant de me concentrer pleinement sur mes recherches.

Je ne saurais exprimer toute ma gratitude envers mes parents bien-aimés, dont l'amour inconditionnel, les sacrifices et les encouragements constants ont été ma plus grande source de force et d'inspiration. Ils m'ont appris à suivre mes rêves et à surmonter les épreuves avec résilience et optimisme. À mes frères, à ma sœur chérie et à son époux, je témoigne également ma profonde reconnaissance pour leur soutien indéfectible et leur présence précieuse tout au long de cette aventure.

À toutes et à tous, je vous suis infiniment reconnaissant.

Table des matières

Introduction	i
Notations	xv
Rappels d'analyse fonctionnelle	xvii
1 Stabilisation frontière d'une équation d'ondes viscoélastique avec une source non linéaire	1
1.1 Introduction	1
1.2 Préliminaires	2
1.3 Décroissance de la solution	9
1.4 Résultats Numériques	29
2 Résultat général de décroissance pour un problème viscoélastique avec une source non linéaire et contrôle de frontière de type mémoire	32
2.1 Introduction	33
2.2 Préliminaires	34
2.3 Lemmes techniques	39
2.4 Décroissance des solutions	47
2.5 Résultats Numériques	63
3 Résultat général de décroissance pour un problème viscoélastique	

avec une source logarithmique et un contrôle frontière de type	
mémoire	66
3.1 Introduction	66
3.2 Préliminaires	69
3.3 Lemmes techniques	72
3.4 Décroissance des solutions	82
3.5 Résultats Numériques	100
 4 Résultat général de décroissance pour une équation d'Euler-Bernoulli	
viscoélastique avec une source logarithmique et un contrôle frontière	
de type feedback	102
4.1 Introduction	102
4.2 Préliminaires	105
4.3 Lemmes techniques	111
4.4 Résultat principal	123
 Conclusion générale et perspectives	i
 References	iv

Introduction

Les équations d'évolution non linéaires, qui sont des équations aux dérivées partielles impliquant le temps t comme l'une des variables indépendantes, apparaissent non seulement dans plusieurs domaines des mathématiques, mais aussi dans diverses disciplines scientifiques telles que la physique, la mécanique et la science des matériaux. Parmi les exemples d'équations d'évolution non linéaires, on peut citer les équations de Navier-Stokes et d'Euler en mécanique des fluides, les équations non linéaires de réaction-diffusion dans les domaines des transferts de chaleur et des sciences biologiques, ainsi que les équations de Klein-Gordon et de Schrödinger non linéaires en mécanique quantique. On trouve également les équations de Cahn-Hilliard en science des matériaux. Ces équations illustrent des cas particuliers d'équations d'évolution non linéaires. La complexité des équations d'évolution non linéaires et les défis liés à leur étude théorique ont suscité beaucoup d'intérêt de la part de nombreux mathématiciens et scientifiques dans différents domaines de recherche.

Du point de vue physique, les types de problèmes considérés dans cette thèse surviennent généralement en viscoélasticité. Ces problèmes ont été examinés pour la première fois par Dafermos [24] en 1970 où la décroissance générale de la solution a été discutée et ont suscité l'intérêt de beaucoup de chercheurs au cours des deux dernières décennies.

Les problèmes viscoélastiques ont été étudiés par de nombreux auteurs et plusieurs

résultats de stabilisation ont été établis.

Cette thèse est consacrée à l'étude de la stabilisation des solutions de quelques modèles régis par des équations des ondes viscoélastiques et par une équation de plaque viscoélastique avec différents termes sources, tout en tenant compte, indifféremment, de l'amortissement distribué ou de frontière de type dissipation (amortissement lié à la vitesse) ou de type mémoire (amortissement produit par la viscosité). Nous utilisons ces divers types de mécanismes d'amortissement et montrons leurs effets sur la stabilisation de différents systèmes d'équations.

Problèmes d'ondes viscoélastiques

L'importance des propriétés viscoélastiques des matériaux a été mise en évidence par les progrès rapides dans l'industrie du caoutchouc et des plastiques. L'intérêt pour les matériaux viscoélastiques réside dans le fait qu'ils présentent un amortissement naturel. Du point de vue mathématique, ces matériaux viscoélastiques sont modélisés par des systèmes de type intégraux-différentiels.

Nous commençons, tout d'abord, en citant le travail de Messaoudi et Mustafa [51] qui ont considéré le système viscoélastique sans source suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-\tau) \Delta u(\tau) d\tau = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t g(t-\tau) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\tau) d\tau + h(u_t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x); \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (1)$$

avec g , fonction de relaxation satisfaisant

$$g'(t) \leq -\xi(t)g(t),$$

et où ξ est une fonction décroissante et différentiable. Ils ont obtenu un résultat explicite et général sur le taux de décroissance. Récemment, Messaoudi et Al-Khulaifi [52] ont considéré le système

$$\left\{ \begin{array}{ll} |u_t|^p u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \int_0^t g(t-\tau) \Delta u(\tau) d\tau = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x); \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{array} \right.$$

avec une fonction de relaxation satisfaisant

$$g'(t) \leq -\xi(t)g^p(t), \quad \forall t \geq 0, \quad 1 \leq p < \frac{3}{2}.$$

Ils ont obtenu un résultat de stabilisation plus général pour lequel les résultats de [47, 48] ne sont que des cas particuliers. De plus, le taux de décroissance optimal pour le cas polynomial est atteint sans aucune hypothèse ou condition supplémentaire comme dans [38] et [37]. Pour la stabilisation par dissipation frontière, Cavalcanti et al. [17] ont étudié (1) et ont prouvé un résultat d'existence globale pour des solutions faibles et fortes. De plus, ils ont donné quelques résultats de taux de décroissance uniforme sous certaines hypothèses restrictives sur le noyau g et la fonction d'amortissement h . Ces restrictions ont été assouplies par Cavalcanti et al. [21] et en outre, ils ont établi une stabilisation uniforme dépendant du comportement de h près de l'origine et du comportement de g à l'infini. En l'absence du terme viscoélastique

($g = 0$), le problème (1) a été étudié par de nombreux auteurs et plusieurs résultats de stabilisation ont été établis. Nous renvoyons le lecteur aux travaux de Lasiecka et Tataru [37], Alabau-Boussouira [3], Cavalcanti et al. [20], Guesmia [27, 28], Cavalcanti [19] et les références qui y sont mentionnées.

Nous citons à titre d'exemple, aussi, le travail de Messaoudi [48] qui a étudié le système avec une source non linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t - \tau) \Delta u(\tau) d\tau = |u|^\gamma u, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x); \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{array} \right.$$

où la fonction de relaxation g satisfait

$$g'(t) \leq -\xi(t)g(t), \tag{2}$$

où ξ est une fonction décroissante et différentiable. Il a établi un résultat de décroissance plus général pour une classe plus large de fonctions de relaxation. Ensuite, une série d'articles utilisant (2) est apparue, voir, par exemple, les travaux antérieurs [31, 41, 42, 49] et [53]- [62].

Dans la suite, nous nous intéressons aux cas où la non linéarité de la source est de type logarithmique et qui suscitent un grand intérêt en physique, car ils apparaissent naturellement dans la mécanique quantique et la physique nucléaire [10, 26]. Dans le cas de la non linéarité logarithmique de la source sous la forme $u \ln |u|^k$, où la source rivalise avec la dissipation viscoélastique, de nombreux auteurs ont établi des résultats de stabilisation. Nous commençons par les travaux de Birula et Mycielski [13, 14], où ils ont prouvé que les équations d'ondes avec une source

non linéaire de type logarithmique ont des solutions stables et localisées. Parmi les premières recherches introduisant une source non linéaire de type logarithmique, on peut mentionner celles de Cazenave et Haraux [22], qui ont étudié le problème de Cauchy suivant :

$$u_{tt} - \Delta u = u \ln |u|^\alpha,$$

et ont prouvé l'existence et des résultats de décroissance des solutions. Récemment, Al-Gharabli et al. [7] ont considéré le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u + \int_0^t g(t - \tau) \Delta u(\tau) d\tau + |u_t|^{\gamma(\cdot)-2} u_t = u \ln |u|^\alpha, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x); \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

où $\gamma(\cdot)$ est une fonction satisfaisant certaines conditions. Ils ont d'abord prouvé un résultat d'existence globale, puis ont établi des résultats de décroissance explicites et généraux pour une large classe de fonctions de relaxation et certaines conditions spécifiques sur la fonction d'exposant variable. Plus récemment, une série d'articles utilisant une source non linéaire de type logarithmique sous la forme $|u|^{\gamma-2} u \ln |u|$ a été publiée, voir, par exemple [16, 25, 57].

Dans un travail récent, Tae Gab Ha et al. [30] ont considéré le problème

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t - \tau) \Delta u(\tau) d\tau = |u|^{\gamma-2} u \ln |u|, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x); \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Ils ont prouvé l'existence de solutions et établi une estimation générale de la décroissance

de la solution en utilisant des estimations d'énergie et la théorie des fonctions convexes.

Problème de plaque viscoélastique

L'étude des problèmes de plaques viscoélastiques a été largement explorée par des mathématiciens et des scientifiques dans diverses disciplines. Ces problèmes présentent des applications variées dans différents domaines de la science et de l'ingénierie, tels que l'ingénierie des matériaux, l'ingénierie mécanique, la physique nucléaire et l'optique. L'exploration de ces phénomènes viscoélastiques contribue non seulement à une compréhension fondamentale, mais ouvre également la voie à des avancées technologiques et à l'innovation dans ces domaines.

Rivera et al. [60] ont considéré le problème de plaque viscoélastique sans source suivant :

$$u_{tt} + \gamma \Delta u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s) \Delta^2 u(s) ds = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

avec des conditions aux limites dynamiques et ont établi que la somme des première et deuxième énergies possède un taux de décroissance exponentiel et polynomial lorsque la fonction de relaxation g décroît respectivement de manière exponentielle et polynomiale. Cavalcanti et al. [18] ont également considéré

$$u_{tt} + \Delta^2 u_{tt} - \int_0^t g(t-s) \Delta^2 u(s) ds + a(t) u_t = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty),$$

et ont établi un résultat de décroissance exponentielle dans un domaine général. Pour des résultats connexes, nous mentionnons entre autres, l'article de Mustafa [56] où

il a considéré le système de plaque suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s) \Delta^2 u(s) ds = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \beta_1 u - \beta_1 \left(\int_0^t g(t-s) u(s) ds \right) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ -\beta_2 u + \beta_2 \left(\int_0^t g(t-s) u(s) ds \right) + \theta(t) h(ut) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x); u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{array} \right.$$

il obtient une relation générale entre le taux de décroissance de l'énergie (quand t tend vers l'infini) et les fonctions g , θ , et h sans imposer d'hypothèses de croissance près de l'origine sur h et en affaiblissant fortement les hypothèses habituelles sur g . Il généralise des résultats similaires antérieurs en considérant une plus grande classe de fonctions g et h et montre que le taux de décroissance de l'énergie n'est pas nécessairement de types exponentiels ou polynomiaux et tient compte de l'effet du coefficient dépendant du temps $\theta(t)$.

Dans le cas d'une source non linéaire de type logarithmique nous citons, à titre d'exemples, les travaux des auteurs suivants :

Al-Gharabli et al. dans [6] ont considéré le système de plaque viscoélastique suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s) \Delta^2 u(s) ds = ku \ln |u|, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x); u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{array} \right.$$

où la fonction de relaxation g satisfait

$$g'(t) \leq -\xi(t)g^p(t).$$

Ils ont prouvé l'existence des solutions localement et globalement, et ont établi un résultat général de décroissance.

Ghalabli dans [5] a également considéré le système de plaque viscoélastique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} + \Delta^2 u + u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds = ku \ln |u|, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x); u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega. \end{array} \right.$$

L'auteur a établi un résultat général de décroissance sous des conditions plus faibles sur la fonction de relaxation g à savoir :

$$g'(t) \leq -\xi(t)G(g(t)), \tag{3}$$

où $G \in C^1(R)$ avec $G(0) = 0$ et G est une fonction linéaire ou strictement croissante et strictement convexe C^2 près de l'origine.

Récemment, B.K. Kakumani et S.P. Yadav dans [32] ont établi des résultats généraux sur le taux de décroissance pour la même condition que (3) sur la fonction de relaxation b en considérant l'équation de plaque viscoélastique suivante avec une source non linéaire de type logarithmique en présence d'un terme d'amortissement

non linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} |u_t|^\rho u_{tt} + \Delta^2 u + \Delta^2 u_{tt} + u - \int_0^t b(t-s) \Delta^2 u(s) ds + h(u_t) = ku \ln |u|, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x); u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega. \end{array} \right.$$

Notre contribution

Dans cette thèse, s'inspirant de tous les résultats cités ci-dessus, nous nous sommes penchés sur la stabilisation des solutions de quelques systèmes d'ondes viscoélastiques et d'une équation de plaque viscoélastique avec une source de différente forme et en tenant compte de l'amortissement viscoélastique avec ou sans dissipation distribué et de l'amortissement frontière. Le but essentielle de cette thèse est d'améliorer et de généraliser certains resultats de la littérature dans ce domaine de recherche et qui seront mentionnés dans cette thèse.

Dans la suite, on donnera une brève analyse du contenu de la thèse.

Cette thèse se compose d'un rappel de certaines notations et notions d'analyse fonctionnelle ainsi que de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous nous intéressons au problème viscoélastique suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-\tau) \Delta u(\tau) d\tau = |u|^\gamma u, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t g(t-\tau) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\tau) d\tau + h(u_t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x); u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{array} \right.$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière assez régulière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Ici, Γ_0 et Γ_1 sont fermés et disjoints, avec $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$, ν est la normale extérieure unitaire à $\partial\Omega$, $\gamma > 0$, h est une fonction spécifique et g la fonction de relaxation satisfait

$$g'(t) \leq -\xi(t)g^p(t), \quad \forall t \geq 0, \quad 1 \leq p < \frac{3}{2}, \quad (4)$$

où $\xi(t)$ est une fonction positive, décroissante et différentiable.

Dans ce travail, nous obtenons un nouveau résultat général de décroissance de l'énergie pour les solutions du problème précédent. L'objectif de ce chapitre est d'étendre le résultat en tenant compte de la non linéarité de la source, de la dissipation viscoélastique distribuée et frontière et où la fonction de relaxation satisfait (4). En particulier, ce travail est une extension des résultats obtenus dans [3, 7, 9]. Les résultats de ce chapitre ont été acceptés pour publication dans la revue *Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica*.

I. Baaziz, B. Benabderrahmane, S. Drabla, *General decay rates of the solution energy in a viscoelastic wave equation with boundary feedback and a nonlinear source*, Univ. Babe s-Bolyai Math. 69(2024), No. 2, 383-397 DOI : 10.24193/subb-math.2024.2.09.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons au problème viscoélastique avec une source non linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau = |u|^\gamma u, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t g(t-\tau)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\tau)d\tau + h(u_t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x); u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{array} \right.$$

où la fonction de relaxation satisfait

$$g'(t) \leq -\xi(t)G(g(t)),$$

G est strictement croissante et strictement convexe près de l'origine, et Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Ici, Γ_0 et Γ_1 sont fermés et disjoints, avec $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$, ν est la normale extérieure unitaire à $\partial\Omega$, $\gamma > 0$, et g, h sont des fonctions spécifiques.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un nouveau résultat de décroissance de l'énergie pour les solutions du problème précédent. L'objectif de ce chapitre est d'étendre le résultat du chapitre précédent dans le cas où

$$g'(t) \leq -\xi(t)G(g(t)).$$

En particulier, ce travail constitue une extension des résultats obtenus dans [3, 7–9]. Dans le troisième chapitre, nous considérons le problème viscoélastique suivant avec une source non linéaire de type logarithmique

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau = |u|^{\gamma-2}u \ln |u|, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t g(t-\tau)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\tau)d\tau + h(u_t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x); u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{array} \right.$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière assez régulière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Ici, Γ_0 et Γ_1 sont fermés et disjoints, avec $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$, ν est la normale extérieure unitaire à $\partial\Omega$. La fonction $u(x, t)$ décrit la position de la particule matérielle au temps

t , qui est fixée dans la portion Γ_0 de sa frontière avec dans sa portion Γ_1 soutenue par support viscoélastique avec des réponses frontières non linéaires, représentées par la fonction $h(u_t)$.

Dans ce travail, nous nous intéressons à un nouveau résultat de décroissance de l'énergie pour les solutions du problème précédent. La nouveauté de ce chapitre actuel est d'étendre le résultat dans le contexte de la viscoélasticité, de la source non linéaire de type logarithmique et lorsque l'amortissement aux limites est pris en compte. Ce travail constitue une extension des résultats obtenus dans [6].

Dans le dernier et quatrième chapitre, nous considérons l'équation de plaque viscoélastique suivante avec une source non linéaire de type logarithmique et une dissipation non linéaire sur une partie de la frontière :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds + h(u_t) = |u|^{\gamma-2}u \ln |u|, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \beta_1 u - \beta_1 \left(\int_0^t g(t-s)u(s)ds \right) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ -\beta_2 u + \beta_2 \left(\int_0^t g(t-s)u(s)ds \right) + |u_t|^{m-2}u_t = |u|^{p-2}u, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x); u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (5)$$

Où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ avec une frontière assez régulière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Ici, Γ_0 et Γ_1 sont fermés et disjoints, avec $\text{mes}(\Gamma_0) > 0$, et $n = (\nu_1, \nu_2)$ est la normale extérieure unitaire à $\partial\Omega$, $\eta = (-\nu_2, \nu_1)$ est la tangente unitaire orientée positivement sur $\partial\Omega$ où g est la fonction de relaxation et h est une fonction spécifique.

On désigne par β_1, β_2 les opérateurs différentiels suivants :

$$\beta_1 u = \Delta u + (1 - \mu)B_1, \quad \beta_2 u = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} + (1 - \mu)\frac{\partial B_2 u}{\partial \eta}, \quad (6)$$

où

$$B_1 u = 2\nu_1 \nu_2 u_{xy} - \nu_1^2 u_{yy} - \nu_2^2 u_{xx}, \quad B_2 u = (\nu_1^2 - \nu_2^2) u_{xy} + \nu_1 \nu_2 (u_{yy} - u_{xx}),$$

et $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ représente le coefficient de Poisson. Ce système décrit le déplacement transversal $u = u(x, y, t)$ d'une plaque mince vibrant sous l'effet d'un amortissement viscoélastique distribué et d'un amortissement dissipatif dépendant du temps à la frontière. De plus, il existe une fonction positive $H \in C^1(\mathbb{R}_+)$ et H est linéaire ou strictement croissante et strictement convexe C^2 sur $(0, r]$, $r < 1$, avec $H(0) = H'(0) = 0$, telle que

$$g'(t) \leq -\xi(t)H(g(t)), \quad \forall t > 0, \quad (7)$$

où $\xi(t)$ est une fonction positive décroissante et différentiable.

On obtient un nouveau résultat de décroissance de l'énergie pour les solutions au problème (5). Ce chapitre étend le résultat dans le contexte de la viscoélasticité avec une source non linéaire de type logarithmique et lorsque l'amortissement aux frontières avec source est pris en compte. Les résultats de ce chapitre constituent une extension des résultats obtenus dans [6, 18, 56].

Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans la revue *Mediterranean Journal of Mathematics*.

I Baaziz, B Benabderrahmane, S Drabla, *General Decay Results for a Viscoelastic Euler–Bernoulli Equation with Logarithmic Nonlinearity Source and a Nonlinear Boundary Feedback*, *Mediterranean Journal of Mathematics* 20 (3), 157, <https://doi.org/10.1007/s00009-023-02363-9>.

Nous notons que nous avons justifié les résultats obtenus dans les trois premiers chapitres par des testes numériques réalisés en fin de chaque chapitre.

Méthodologie

Pour obtenir les résultats de ses différents travaux, nous appliquons essentiellement la méthode de l'énergie (méthode du multiplicateur), combinée à diverses inégalités différentielles et intégrales. La méthode de l'énergie repose principalement sur la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov appropriée équivalente à l'énergie de la solution. Dans le cas d'un résultat général de décroissance, nous prouvons que la fonctionnelle de Lyapunov satisfait une inégalité différentielle qui combine la fonction de relaxation et les autres termes provenant des différents systèmes non linéaires considérés. Ensuite, nous utilisons et exploitons certaines propriétés des fonctions convexes et d'autres arguments mathématiques pour obtenir des estimations générales de décroissance en fonction de la fonction de relaxation et de la nature de la non linéarité de chaque système étudié. En fait, la méthode du multiplicateur s'est avérée efficace pour traiter de tels problèmes avec des termes dissipatifs soit sur le domaine, soit sur une partie de la frontière.

Notations

On note :

- $|y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$ est la norme euclidienne de y , où $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

- $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ est le vecteur normal unitaire extérieure en un point du bord de Ω .

Pour toute fonction $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ régulière, on note

- $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $|\alpha| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$.

- $\nabla u = \text{gradu} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ est le gradient de u .

- $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ est le laplacien de u .

- $\Delta^2 u = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}$ est le bilaplacien de u .

- $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Pour toute fonction $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ régulière avec $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, on note

- $\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \dots, \Delta u_n).$

- $\operatorname{div} u = \nabla \cdot u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ est la divergence de u .

Soit Ω est un ouvert et $\partial\Omega = \Gamma$ est sa frontière.

- $C(\Omega)$: Ensemble des fonctions continues dans Ω .

- $C^k(\Omega)$: Ensemble des fonctions de classe k dans Ω .

- $C_c^k(\Omega)$: Ensemble des fonctions de $C^k(\Omega)$ à support compactes.

Rappels d'analyse fonctionnelle

Espaces fonctionnels

Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1. [15] Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$; on pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

Avec

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Définition 2. [15] On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Avec

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf\{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Théorème 3. (Théorème de convergence dominée de Lebesgue) [15]

Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1 . On suppose que

a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ p.p. sur Ω .

b) il existe une fonction $g \in L^1$ telle que pour chaque n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur

Ω . Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$.

Les espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels essentiels pour la résolution des problèmes d'équations aux dérivées partielles (voir [1, 15]).

Soit Ω un ouvert borné et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$.

Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 4. [15] Étant données un entier $m \geq 2$ et un réel $1 \leq p < +\infty$, on définit $W^{m,p}(\Omega)$ par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{\alpha=1}^m \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

et l'espace $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{\alpha=1}^m (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

est un espace de Hilbert.

Espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 5. [15] *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \int_{\Omega} u\varphi' = - \int_{\Omega} g\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega)\}.$$

Pour $p = 2$, il est d'usage de remplacer la notation $W^{1,2}(\Omega)$ par $H^1(\Omega)$, ce dernier est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (u', v')_{L^2(\Omega)}.$$

Espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 6. [15] *Étant donné $1 \leq p < +\infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. On note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Notation. On désigne par $W^{-1,p}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $(1 \leq p < +\infty)$ et par $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.

De plus, on a les inclusions

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega),$$

avec injections continues.

Injections de Sobolev

Théorème 7. (*Rellich-Kondrachof*) [15] On suppose Ω borné de classe C^1 . On a

$$\begin{aligned} \text{si } p < N, \quad & \text{alors } W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, p^*[\text{ où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \\ \text{si } p = N, \quad & \text{alors } W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty[, \\ \text{si } p > N, \quad & \text{alors } W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}), \end{aligned}$$

avec injections compactes.

Théorème de trace au bord

Théorème 8. Soit Ω un ouvert de classe C^1 , alors il existe un opérateur linéaire continu, appelé opérateur trace et noté γ_0 de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ qui coïncide avec l'opérateur de restriction usuel pour les fonctions continues. En particulier, il existe une constante c_1 qui ne dépend que de Ω , telle que

$$\|\gamma_0 u\|_{L^2(\Gamma)} \leq c_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Si on suppose que $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ constitue une partition de Γ , avec $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$, on définit alors

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

Cet espace est fermé dans $H^1(\Omega)$ comme noyau de l'application (linéaire) continue $r \circ \gamma_0$ où $r : L^2(\Gamma) \longrightarrow L^2(\Gamma_0)$ est l'application restriction. Donc $(H_{\Gamma_0}^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ est un espace de Hilbert, avec

$$\forall u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega), \quad \|u\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

De plus, on a l'injection continue $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \hookrightarrow L^m(\Gamma_1)$, $1 \leq m \leq \frac{2(n-1)}{n-2}$, c'est-à-dire il existe une constante c_0 , telle que

$$\|u\|_{L^m(\Gamma_1)} \leq c_0 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Quelques inégalités utiles

Soit $1 \leq p \leq \infty$; on désigne par p' l'exposant conjugué de p ,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Inégalité de Hölder

Théorème 9. [15] Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $f \cdot g \in L^1$ et

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Remarque 10. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de Hölder dans le cas $p = q = 2$. Alors

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Inégalité de Young

Théorème 11. [15] For $a, b > 0$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{p} a^p + \frac{1}{p' \varepsilon^{p/p'}} b^{p'}.$$

Si $p = p' = 2$, on a

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2.$$

Inégalité de Poincaré

Corollaire 12. [15] On suppose que Ω est un ouvert borné. Alors il existe une constante C (dépendant de Ω et p) telle que

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty).$$

Inégalité de Jensen

L'inégalité de Jensen jouera un rôle très important dans la démonstration de nos résultats principaux.

Si F est une fonction convexe sur $[a, b]$, $f : \Omega \longrightarrow [a, b]$ et h sont des fonctions intégrables sur Ω , $h(x) \geq 0$ et $\int_{\Omega} h(x)dx = k > 0$, alors l'inégalité de Jensen affirme que

$$F \left[\frac{1}{k} \int_{\Omega} f(x)h(x)dx \right] \leq \frac{1}{k} \int_{\Omega} F[f(x)]h(x)dx. \quad (1)$$

Notions élémentaires

Produit de convolution

Définition 13. Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions définies sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ le produit de convolution de $f(x)$ et $g(x)$ est une autre fonction qui se note généralement $f * g$ et qui est défini par

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Règle de Leibniz généralisée

Elle est donnée par la formule

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f(b(t), t) \frac{d b(t)}{dt} - f(a(t), t) \frac{d a(t)}{dt}. \quad (3)$$

Formule de Green généralisée

La formule de Green est un outil fondamental pour la résolution des équations aux dérivées partielles. Elle coïncide, en dimension 1, avec la formule d'intégration par parties.

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière Γ , soient $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ et $w \in (H^1(\Omega))^n$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \Delta u \, dx &= - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dx + \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\Gamma \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot w \, dx &= - \int_{\Omega} u \operatorname{div} w \, dx + \int_{\Gamma} u (w \cdot \nu) \, d\Gamma, \end{aligned}$$

où

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i, \quad \nu \text{ est la normale extérieure unitaire à } \partial\Omega.$$

Dans toute la suite, c et C désigneront des constantes génériques pouvant varier d'une ligne à l'autre.

Chapitre 1

Stabilisation frontière d'une équation d'ondes viscoélastique avec une source non linéaire

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au taux de décroissance de l'énergie du problème viscoélastique avec une source non linéaire et une dissipation frontière suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t - \tau) \Delta u(\tau) d\tau = |u|^\gamma u, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t g(t - \tau) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\tau) d\tau + h(u_t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x); \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (1.1.1)$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Ici, Γ_0 et Γ_1 sont fermés et disjoints, avec $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$, ν est la normale extérieure unitaire à $\partial\Omega$, $\gamma > 0$, h est une fonction spécifique et g une fonction de relaxation satisfaisant

$$g'(t) \leq -\xi(t)g^p(t), \quad \forall t \geq 0, \quad 1 \leq p < \frac{3}{2}.$$

Nous nous intéressons à un nouveau résultat de décroissance de l'énergie pour les solutions du problème (1.1.1). Le but de ce chapitre est d'étendre certains résultats dans le contexte où la source non linéaire entre en compétition avec une dissipation viscoélastique distribuée et une dissipation frontière. En particulier, ce travail est une extension des résultats obtenus dans [4, 48, 55]. Le reste de notre chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2, nous énonçons les hypothèses et les éléments nécessaires à notre travail. Les preuves des résultats principaux sont données dans la section 3.

1.2 Préliminaires

Dans cette section, nous présentons certains éléments nécessaires à la démonstration de nos résultats. Concernant la fonction de relaxation g , nous faisons les hypothèses suivantes :

(G_1) $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction C^1 décroissante satisfaisant

$$g(0) > 0, \quad 1 - \int_0^\infty g(s)ds = l > 0.$$

(G_2) Il existe une fonction ξ décroissante et différentiable telle que $\xi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, avec $\xi(0) > 0$, satisfaisant

$$g'(t) \leq -\xi(t)g^p(t), \quad 1 \leq p < \frac{3}{2}, \quad t \geq 0.$$

(G_3) Pour le terme source non linéaire, nous supposons

$$0 < \gamma \leq \frac{2}{(n-2)}, \quad n \geq 3$$

$$\gamma > 0, \quad n = 1, 2.$$

(G_4) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^0 croissante telle qu'il existe une fonction strictement croissante $h_0 \in C^1([0, +\infty))$, avec $h_0(0) = 0$, et des constantes positives c_1, c_2, ϵ telles que

$$h_0(|s|) \leq |h(s)| \leq h_0^{-1}(|s|) \quad \text{pour tout } |s| \leq \epsilon$$

$$c_1 |s| \leq |h(s)| \leq c_2 |s| \quad \text{pour tout } |s| \geq \epsilon.$$

De plus, nous supposons que la fonction H , définie par $H(s) = \sqrt{s}h_0(\sqrt{s})$, est une fonction strictement convexe C^2 sur $(0, r_1^2]$, pour un certain $r_1 > 0$, lorsque h_0 est non linéaire.

Remarque 1.2.1. *Il existe de nombreuses fonctions satisfaisant (G_1) et (G_2).*

Des exemples de telles fonctions sont

$$g(t) = a(1+t)^\nu, \quad \nu < -1,$$

$$g(t) = ae^{-b(t+1)^p}, \quad 0 < p \leq 1,$$

$$g(t) = \frac{ae^{-bt}}{(1+t)^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

pour $a, b > 0$ sont des coefficients à choisir correctement.

Remarque 1.2.2. *Puisque ξ est décroissante, alors $\xi(t) \leq \xi(0) = M$.*

Remarque 1.2.3. *Nous utiliserons l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour $2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2}$, si $n \geq 3$ et $q \leq 2$, si $n = 1, 2$; et $L^r(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, pour $q < r$. Nous utiliserons, dans*

ce cas, la même constante d'inclusion notée C_e ; c'est-à-dire

$$\|u\|_q \leq C_e \|\nabla u(t)\|_2, \quad \|u\|_q \leq C_e \|u\|_r. \quad (1.2.1)$$

En utilisant la méthode de Galerkin et une procédure similaire à celle de [39], et de [58], nous obtenons le résultat d'existence local suivant pour le problème (1.1.1).

Théorème 1.2.4. *Supposons que les hypothèses (G1)-(G4) sont satisfaites et que $u_0 \in H_{\Gamma_0}^1 \cap H^2(\Omega)$ et $u_1 \in H_{\Gamma_0}^1$. Alors il existe une solution forte unique u de (1.1.1) vérifiant*

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty([0, T]; H_{\Gamma_0}^1 \cap H^2(\Omega)) \\ u_t &\in L^\infty([0, T]; H_{\Gamma_0}^1) \\ u_{tt} &\in L^\infty([0, T]; L^2(\Omega)), \end{aligned}$$

pour tout $T > 0$.

Nous introduisons également les fonctionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2+\gamma} \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} \\ E(t) &= K(t) + \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

$$S(t) = \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) - \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}, \quad (1.2.3)$$

où

$$(g \circ v)(t) = \int_\Omega \int_0^t g(t-\tau) \|v(t) - v(\tau)\|_2^2 d\tau dx, \quad (1.2.4)$$

et $E(t)$ est la fonctionnelle énergie.

Remarque 1.2.5. *L'hypothèse (G₄) implique que $sh(s) > 0$, pour tout $s \neq 0$.*

Nous définissons également

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

Lemme 1.2.6. *Supposons que (G1) et (G3) sont satisfaites, et que $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$ soit donné. Si u est la solution de (1.1.1) alors la fonctionnelle énergie E satisfait*

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t) \|\nabla u(t)\|_2^2 - \int_{\Gamma_1} u_t(t)h(u_t(t))d\Gamma \\ &\leq \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) \leq 0, \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

pour presque tout $t \in [0, T]$.

Démonstration. En multipliant l'équation différentielle dans (1.1.1) par u_t et en intégrant sur Ω , en utilisant l'intégration par parties et (G1), nous obtenons (1.2.5) pour toute solution régulière. Ceci reste valable pour les solutions faibles par un simple argument de densité. Voir [12, 44, 45] pour des calculs détaillés.

Lemme 1.2.7. *Supposons que (G1) et (G3) sont satisfaites, et que $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$, tel que*

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{C_e^{\gamma+2}}{l} \left(\frac{2(\gamma+2)}{\gamma l} E(u_0, u_1) \right)^{\gamma/2} < 1 \\ S(u_0) &> 0, \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

alors $S(u(t)) > 0, \forall t > 0$.

Démonstration. Puisque $S(u_0) > 0$, alors il existe (par continuité) $T_m < T$ tel que

$$S(u(t)) \geq 0, \quad \forall t \in [0, T_m];$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 K(t) &= \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2+\gamma} \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} \\
 &= \frac{\gamma}{2(\gamma+2)} \left[\left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) \right] + \frac{1}{2+\gamma} S(t) \\
 &\geq \frac{\gamma}{2(\gamma+2)} \left[\left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) \right]. \tag{1.2.7}
 \end{aligned}$$

En utilisant (G1), (1.2.2), (1.2.5) et (1.2.7) nous avons facilement

$$\begin{aligned}
 l \|\nabla u(t)\|_2^2 &\leq \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 \leq \frac{2(\gamma+2)}{\gamma} K(t) \\
 &\leq \frac{2(\gamma+2)}{\gamma} E(t) \leq \frac{2(\gamma+2)}{\gamma} E(u_0, u_1), \quad \forall t \in [0, T_m]. \tag{1.2.8}
 \end{aligned}$$

Nous exploitons alors (G1), (1.2.1), (1.2.6) et (1.2.8) pour obtenir, $\forall t \in [0, T_m]$,

$$\begin{aligned}
 \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} &\leq C_e^{\gamma+2} \|\nabla u(t)\|_2^{\gamma+2} \leq \frac{C_e^{\gamma+2}}{l} \|\nabla u(t)\|_2^\gamma l \|\nabla u(t)\|_2^2 \\
 &\leq \beta l \|\nabla u(t)\|_2^2 \leq \beta \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 \\
 &< \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2. \tag{1.2.9}
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$S(t) = \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) - \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} > 0,$$

pour tout $t \in [0, T_m]$. En répétant cette procédure, et en utilisant le fait que

$$\lim_{t \rightarrow T_m} \frac{C_e^{\gamma+2}}{l} \left(\frac{2(\gamma+2)}{\gamma l} E(u(t), u_t(t)) \right)^{\gamma/2} \leq \beta < 1,$$

T_m est étendu à T .

Remarque 1.2.8. Si H est une fonction C^2 strictement croissante et strictement convexe sur $(0, r]$, avec $H(0) = H'(0) = 0$, alors elle a une extension $\bar{H}$, qui est une fonction C^2 strictement croissante et strictement convexe sur $(0, \infty)$. Par exemple, si $H(r) = a$, $H'(r) = b$, $H''(r) = c$, nous pouvons définir $\bar{H}$, pour $t > r$, par

$$\bar{H}(t) = \frac{c}{2}t^2 + (b - cr)t + \left(a + \frac{c}{2}r^2 - br\right).$$

Proposition 1.2.9. Supposons que (G1), (G3) et (G4) soient vérifiées.

Soient $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$ donnés, satisfaisant (1.2.6). Alors la solution u de (1.1.1) est globale et bornée.

Démonstration. il suffit de montrer que

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2 \tag{1.2.10}$$

est borné indépendamment de t . Pour y parvenir, on utilise (1.2.2), (1.2.3), et (1.2.5) pour obtenir

$$\begin{aligned} E(0) &\geq E(t) = \frac{1}{2} \|u_t\|_2^2 + K(u(t)) \\ &\geq \left(\frac{\gamma-2}{2\gamma}\right) (l \|\nabla u(t)\|_2^2 + (g \circ \nabla u)(t)) + \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{\gamma} S(t) \\ &\geq \left(\frac{\gamma-2}{2\gamma}\right) l \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2, \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

car $S(t)$ et $(g \circ \nabla u)(t)$ sont positives. D'où on obtient

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2 \leq CE(0),$$

où C est une constante positive, qui dépend uniquement de γ et l .

Dans ce qui suit, nous énonçons les lemmes suivants qui sont cruciaux pour la

démonstration de notre résultat principal.

Lemme 1.2.10. *Supposons que g satisfait (G1) et (G2) alors*

$$\int_0^{+\infty} \xi(t) g^{1-\delta}(t) dt < +\infty, \quad \forall \delta < 2 - p.$$

Démonstration. En se référant à (G1) et (G2), on voit facilement que

$$\xi(t) g^{1-\delta}(t) = \xi(t) g^{1-\delta}(t) g^p(t) g^{-p}(t) \leq -g'(t) g^{1-\delta-p}(t).$$

L'intégration donne alors

$$\int_0^{+\infty} \xi(t) g^{1-\delta}(t) dt \leq - \int_0^{+\infty} g'(t) g^{1-\delta-p}(t) dt = - \left[\frac{g^{2-p-\delta}(t)}{2-p-\delta} \right]_0^{+\infty} < +\infty,$$

car $\delta < 2 - p$.

Lemme 1.2.11. ([46]) *Supposons que g satisfait (G1) et (G2) et u est la solution de (1.1.1). Alors, pour $0 < \delta < 1$, nous avons*

$$(g \circ \nabla u)(t) \leq C \left[\left(\int_0^{+\infty} g^{1-\delta}(t) dt \right) E(0) \right]^{\frac{p-1}{p-1+\delta}} (g^p \circ \nabla u)^{\frac{\delta}{p-1+\delta}}(t).$$

En prenant $\delta = \frac{1}{2}$, nous obtenons

$$(g \circ \nabla u)(t) \leq C \left[\int_0^t g^{\frac{1}{2}}(s) ds \right]^{\frac{2p-2}{2p-1}} (g^p \circ \nabla u)^{\frac{1}{2p-1}}(t). \quad (1.2.12)$$

Corollaire 1.2.12. *Supposons que g satisfait (G1) et (G2) et u est la solution de (1.1.1) alors*

$$\xi(t) (g \circ \nabla u)(t) \leq C [-E'(t)]^{\frac{1}{2p-1}}. \quad (1.2.13)$$

Démonstration. En multipliant les deux membres de (1.2.12) par $\xi(t)$, en rap-

pelant le Lemme 1.2.11 et (1.3.1) on obtient

$$\begin{aligned}
 \xi(t) (g \circ \nabla u)(t) &\leq C \xi(t)^{\frac{2p-2}{2p-1}}(t) \left[\int_0^t g^{\frac{1}{2}}(s) ds \right]^{\frac{2p-2}{2p-1}} \xi^{\frac{1}{2p-1}}(t) (g^p \circ \nabla u)^{\frac{1}{2p-1}}(t) \\
 &\leq C \left[\int_0^t \xi(s) g^{\frac{1}{2}}(s) ds \right]^{\frac{2p-2}{2p-1}} (\xi g^p \circ \nabla u)^{\frac{1}{2p-1}}(t) \\
 &\leq C \left[\int_0^{+\infty} \xi(s) g^{\frac{1}{2}}(s) ds \right]^{\frac{2p-2}{2p-1}} (-g' \circ \nabla u)^{\frac{1}{2p-1}}(t) \leq C [-E'(t)]^{\frac{1}{2p-1}}.
 \end{aligned}$$

1.3 Décroissance de la solution

Dans cette section, nous énonçons et prouvons notre résultat de décroissance. A cette fin, nous utilisons la fonctionnelle

$$F(t) := E(t) + \varepsilon_1 \psi_1(t) + \varepsilon_2 \psi_2(t), \quad (1.3.1)$$

où

$$\begin{aligned}
 \psi_1(t) &:= \int_{\Omega} u u_t dx, \\
 \psi_2(t) &:= - \int_{\Omega} u_t \int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau)) d\tau dx.
 \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

et ε_1 et ε_2 sont des constantes positives qui seront spécifiées ultérieurement.

Lemme 1.3.1. *Pour $u \in V$, nous avons*

$$\int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau)) d\tau \right)^2 dx \leq (1-l) C_*^2 (g \circ \nabla u)(t),$$

où C_* est la meilleure constante de Poincaré.

Démonstration.

$$\int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau)) d\tau \right)^2 dx = \int_{\Omega} \left(\int_0^t \sqrt{g(t-\tau)} \sqrt{g(t-\tau)} (u(t) - u(\tau)) d\tau \right)^2 dx.$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré, on voit facilement que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau)) d\tau \right)^2 dx \\ & \leq \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-\tau) d\tau \right) \left(\int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau))^2 d\tau \right) dx \\ & \leq (1-l)C_*^2(g \circ \nabla u)(t). \end{aligned}$$

Lemme 1.3.2. *Supposons que u est la solution de (1.1.1). Alors il existe une constante $\varepsilon_0 > 0$ telle que pour tout $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ et tout $\varepsilon_2 < \varepsilon_0$, nous avons*

$$\frac{1}{2}E(t) \leq F(t) \leq 2E(t). \quad (1.3.3)$$

Démonstration. En utilisant le **Lemme 1.3.1** et de simples transformations, on obtient

$$\begin{aligned} F(t) & \leq E(t) + \left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right) \xi(t) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right) \xi(t) \int_{\Omega} |u|^2 dx \\ & \quad + \left(\frac{\varepsilon_2}{2}\right) \xi(t) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \left(\frac{\varepsilon_2}{2}\right) \xi(t) \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau)) d\tau \right)^2 dx \\ & \leq \frac{1}{2} \left[1 - \int_0^t g(s) ds + \varepsilon_1 C_*^2 M \right] \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{\gamma+2} \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} \\ & \quad + \frac{1}{2} [1 + \varepsilon_2 C_*^2 M(1-l)] (g \circ \nabla u)(t) + \frac{1}{2} [1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)M] \int_{\Omega} |u_t|^2 dx. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Ainsi, en utilisant $1 - \int_0^t g(s) ds \geq l$ et (1.3.4), nous obtenons

$$\begin{aligned} 2E(t) - F(t) &\geq \frac{1}{2}[1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)M] \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{\gamma + 2} S(t) \\ &\quad + \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma + 2} \right) l - \frac{\varepsilon_1}{2} C_*^2 M \right] \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\quad + \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma + 2} \right) - \frac{\varepsilon_2}{2} C_*^2 M(1 - l) \right] (g \circ \nabla u)(t). \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

En choisissant ε_1 et ε_2 suffisamment petits, on obtient $2E(t) - F(t) \geq 0$. Des calculs similaires montrent alors

$$F(t) - \frac{1}{2}E(t) \geq 0.$$

Le lemme est démontré.

Lemme 1.3.3. *Supposons que (G1)–(G4) sont vérifiés, et que $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$ soit donné. Si u est la solution de (1.1.1), alors la fonctionnelle*

$$\psi_1(t) := \int_{\Omega} u u_t dx,$$

vérifie

$$\begin{aligned} \psi_1'(t) &\leq \int_{\Omega} u_t^2 dx - \frac{l}{4} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1-l}{2l} (g \circ \nabla u)(t) \\ &\quad + \int_{\Omega} |u|^{\gamma+2} dx + c \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Démonstration. En utilisant (1.1.1), on voit facilement que

$$\begin{aligned} \psi_1'(t) &= \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{\Omega} |u|^{\gamma+2} dx - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \int_0^t g(t-\tau) \nabla u(\tau) d\tau dx + \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} u h(u_t) d\Gamma. \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Nous estimons maintenant le quatrième terme du membre droit de l'équation (1.3.7) comme suit :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \int_0^t g(t-\tau) \nabla u(\tau) d\tau dx \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-\tau) (\nabla u(\tau) - \nabla u(t) + \nabla u(t)) d\tau \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Nous utilisons ensuite le Lemme 1.3.1, l'inégalité de Young et le fait que

$$\int_0^t g(\tau) d\tau \leq \int_0^\infty g(\tau) d\tau = 1 - l,$$

pour obtenir, pour tout $\eta > 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-\tau) (|\nabla u(\tau) - \nabla u(t)| + |\nabla u(t)|) d\tau \right)^2 dx \\ & \leq \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-\tau) (|\nabla u(\tau) - \nabla u(t)|) d\tau \right)^2 dx \\ & \quad + \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-\tau) |\nabla u(t)| d\tau \right)^2 dx \\ & \quad + 2 \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-\tau) (|\nabla u(\tau) - \nabla u(t)|) d\tau \right) \left(\int_0^t g(t-\tau) |\nabla u(t)| d\tau \right) dx \\ & \leq (1 + \eta) \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-\tau) |\nabla u(t)| d\tau \right)^2 dx \\ & \quad + \left(1 + \frac{1}{\eta} \right) \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-\tau) (|\nabla u(\tau) - \nabla u(t)|) d\tau \right)^2 dx \\ & \leq \left(1 + \frac{1}{\eta} \right) (1 - l)(g \circ \nabla u)(t) + (1 + \eta)(1 - l)^2 \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx. \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

En combinant (1.3.7) – (1.3.8), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\psi'_1(t) &\leq \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) (1-l)(g \circ \nabla u)(t) \\
&\quad - \frac{1}{2} [1 - (1+\eta)(1-l)^2] \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \\
&\quad + \int_{\Omega} |u(t)|^{\gamma+2} dx - \int_{\Gamma_1} uh(u_t) d\Gamma \\
&\leq \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) (1-l)(g \circ \nabla u)(t) \\
&\quad - \frac{1}{2} [1 - (1+\eta)(1-l)^2] \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \\
&\quad + \int_{\Omega} |u(t)|^{\gamma+2} dx - \int_{\Gamma_1} uh(u_t) d\Gamma, \tag{1.3.9}
\end{aligned}$$

De plus, en utilisant les inégalités de Young et de Poincaré ainsi que le théorème de trace, on obtient

$$- \int_{\Gamma_1} uh(u_t) d\Gamma \leq C_*^2 \delta_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{\beta}{4\delta_1} \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma.$$

En choisissant $\eta = \frac{l}{1-l}$ et $\delta_1 = \frac{l}{8c}$, (1.3.6) est établie.

Lemme 1.3.4. *Supposons que (G1) – (G4) soient vérifiés, et que $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$ soit donné. Si u est la solution de (1.1.1), alors la fonctionnelle*

$$\psi_2(t) := - \int_{\Omega} u_t \int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau)) d\tau dx,$$

vérifie

$$\begin{aligned}
\psi'_2(t) &\leq \delta \left[1 + 2(1-l)^2 + \delta C_e^{2\gamma+2} \left(\frac{2(\gamma+2)E(0)}{\gamma l} \right)^\gamma \right] \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \\
&+ (K_\delta + c)(g \circ \nabla u)(t) - \frac{g(0)}{4\delta} C_*^2(g' \circ \nabla u)(t) \\
&+ \left[\delta - \int_0^t g(s) ds \right] \int_{\Omega} u_t^2 dx + c \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma, \quad \forall \delta > 0,
\end{aligned} \tag{1.3.10}$$

où K_δ est une constante dépendant de δ .

Démonstration. Les calculs directs, en utilisant (1.1.1), donnent

$$\begin{aligned}
\psi'_2(t) &= \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \left(\int_0^t g(t-\tau)(\nabla u(\tau) - \nabla u(t)) d\tau \right) dx \\
&- \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-\tau) \nabla u(\tau) d\tau \right) \cdot \left(\int_0^t g(t-\tau)(\nabla u(\tau) - \nabla u(t)) d\tau \right) dx \\
&- \int_{\Omega} u_t \int_0^t g'(t-\tau)(u(t) - u(\tau)) d\tau dx - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} u_t^2 dx \\
&+ \int_{\Omega} |u|^\gamma u \int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau)) d\tau dx \\
&+ \int_{\Gamma_1} \left(\int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau)) d\tau \right) h(u_t) d\Gamma.
\end{aligned} \tag{1.3.11}$$

De façon similaire à (1.3.6), nous estimons les termes du membre droit de (2.3.2).

En utilisant l'inégalité de Young, le premier terme donne

$$\begin{aligned}
&- \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \left(\int_0^t g(t-\tau)(\nabla u(t) - \nabla u(\tau)) d\tau \right) dx \\
&\leq \delta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1-l}{4\delta} (g \circ \nabla u)(t) \quad \forall \delta > 0.
\end{aligned} \tag{1.3.12}$$

De manière similaire, le second terme peut être estimé comme suit :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-\tau) \nabla u(\tau) d\tau \right) \cdot \left(\int_0^t g(t-\tau) (\nabla u(\tau) - \nabla u(t)) d\tau \right) dx \\
& \leq \delta \int_{\Omega} \left| \int_0^t g(t-\tau) \nabla u(\tau) d\tau \right|^2 dx + \frac{1}{4\delta} \int_{\Omega} \left| \int_0^t g(t-\tau) (\nabla u(\tau) - \nabla u(t)) d\tau \right|^2 dx \\
& \leq \delta \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-\tau) (|\nabla u(\tau) - \nabla u(t)| + |\nabla u(t)|) d\tau \right)^2 dx \\
& + \frac{1}{4\delta} \int_{\Omega} \left| \int_0^t g(t-\tau) (\nabla u(\tau) - \nabla u(t)) d\tau \right|^2 dx \\
& \leq \left(2\delta + \frac{1}{4\delta} \right) \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-\tau) |\nabla u(\tau) - \nabla u(t)| d\tau \right)^2 dx \\
& + 2\delta(1-l)^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\
& \leq \left(2\delta + \frac{1}{4\delta} \right) (1-l)(g \circ \nabla u)(t) + 2\delta(1-l)^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \tag{1.3.13}
\end{aligned}$$

Quant au troisième terme, nous avons

$$- \int_{\Omega} u_t \int_0^t g'(t-\tau) (u(t) - u(\tau)) d\tau dx \leq \delta \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{g(0)}{4\delta} C_*^2 (g' \circ \nabla u)(t). \tag{1.3.14}$$

Le quatrième terme

$$\int_{\Omega} u_t \int_0^t g(t-\tau) (u(t) - u(\tau)) d\tau dx \leq \delta \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{C_*^2}{4\delta} (g \circ \nabla u)(t). \tag{1.3.15}$$

Le cinquième terme

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |u|^{\gamma} u \int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau)) d\tau dx \\
& \leq \delta \int_{\Omega} |u|^{2\gamma+2} dx + \frac{C_*^2(1-l)}{4\delta} (g \circ \nabla u)(t) \\
& \leq \delta C_e^{2\gamma+2} \|\nabla u(t)\|_2^{2\gamma+2} + \frac{C_*^2(1-l)}{4\delta} (g \circ \nabla u)(t) \\
& \leq \delta C_e^{2\gamma+2} \left(\frac{2(\gamma+2)E(0)}{\gamma l} \right)^{\gamma} \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{C_*^2(1-l)}{4\delta} (g \circ \nabla u)(t). \quad (1.3.16)
\end{aligned}$$

Le sixième terme

$$\int_{\Gamma_1} \left(\int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau)) \right) h(u_t) d\Gamma \leq c(g \circ \nabla u)(t) + c \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma. \quad (1.3.17)$$

En combinant (2.3.2) – (1.3.17), l'assertion du lemme est établie.

Lemme 1.3.5. *Supposons que (G1) et (G2) soient vérifiés. Alors il existe des constantes génériques $m, c > 0$ telles que la fonctionnelle F vérifie, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,*

$$F'(t) \leq -mE(t) + c \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\tau + c(g \circ \nabla u)(t). \quad (1.3.18)$$

Démonstration. Puisque g est positive, continue et $g(0) > 0$, alors pour tout $t_0 > 0$, nous avons

$$\int_0^t g(s) ds \geq \int_0^{t_0} g(s) ds = g_0 > 0, \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.3.19)$$

En utilisant (1.2.5), (1.3.1), (1.3.6), (1.3.10) et (1.3.19), nous obtenons, pour $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned}
 F'(t) \leq & - \left[\frac{\varepsilon_1 l}{4} - \varepsilon_2 \delta \left\{ 1 + 2(1-l)^2 + C_e^{2\gamma+2} \left(\frac{2(\gamma+2)E(0)}{\gamma l} \right)^\gamma \right\} \right] \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \\
 & + \left(\frac{\varepsilon_1(1-l)}{2l} + \varepsilon_2(K_\delta + c) \right) (g \circ \nabla u)(t) + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_2 \frac{g(0)}{4\delta} C_*^2 M \right) (g' \circ \nabla u)(t) \\
 & + \varepsilon_1 \int_{\Omega} |u|^{\gamma+2} dx - \left[\varepsilon_2(g_0 - \delta) - \varepsilon_1 \left(1 + \frac{k^2 C_*}{l} \right) \right] \int_{\Omega} u_t^2 dx \\
 & + c \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma.
 \end{aligned} \tag{1.3.20}$$

A ce stade, nous choisissons δ assez petit pour que

$$g_0 - \delta > \frac{1}{2}g_0$$

$$\frac{8}{l}\delta \left[1 + 2(1-l)^2 + C_e^{2\gamma+2} \left(\frac{2(\gamma+2)E(0)}{\gamma l} \right)^\gamma \right] < \frac{1}{4}g_0.$$

D'où, δ étant fixé, le choix de deux constantes positives quelconques ε_1 et ε_2 satisfaisant

$$\frac{g_0}{4}\varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \frac{g_0}{2}\varepsilon_2,$$

fera en sorte que

$$\frac{\varepsilon_1 l}{8} - \varepsilon_2 \delta \left\{ 1 + 2(1-l)^2 + \delta C_e^{2\gamma+2} \left(\frac{2(\gamma+2)E(0)}{\gamma l} \right)^\gamma \right\} > 0,$$

$$\varepsilon_2(g_0 - \delta) - \varepsilon_1 \left(1 + \frac{k^2 C_*}{l} \right) > 0,$$

et

$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon_2 \frac{g(0)}{4\delta} C_*^2 M \right) > 0,$$

par conséquent, nous arrivons à

$$F'(t) \leq -mE(t) + c \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\tau + c(g \circ \nabla u)(t).$$

Lemme 1.3.6. [51] *Sous les hypothèses (G1), (G2) et (G4), la solution de (1.1.1) satisfait les estimations*

$$\int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma \leq \int_{\Gamma_1} u_t h(u_t) d\Gamma, \quad \text{si } h_0 \text{ est linéaire,} \quad (1.3.21)$$

$$\int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma \leq cH^{-1}(J(t)) - cE'(t), \quad \text{si } h_0 \text{ est non linéaire,} \quad (1.3.22)$$

où

$$J(t) = \frac{1}{|\Gamma_{12}|} \int_{\Gamma_{12}} u_t h(u_t) d\Gamma \leq E'(t),$$

et

$$\Gamma_{12} = \{x \in \Gamma_1 : |u_t| \leq \varepsilon_1\}.$$

Démonstration. Cas 1 : h_0 est linéaire, en utilisant (G4), nous avons

$$c'_1 |u_t| \leq |h(u_t)| \leq c'_2 |u_t|,$$

et donc

$$h^2(u_t) \leq c'_2 u_t h(u_t).$$

Ainsi, (1.3.21) est établi.

Cas 2 : h_0 est non linéaire sur $[0, \varepsilon]$:

Tout d'abord, supposons que $\max\{r, h_0(r)\} < \varepsilon$; sinon, nous prenons r plus petit. Soit $\varepsilon_0 = \min\{r, h_0(r)\}$; alors, pour $\varepsilon_0 \leq s \leq \varepsilon$, en utilisant (G4), nous

obtenons

$$|h(s)| \leq \frac{h_0^{-1}(|s|)}{|s|} |s| \leq \frac{h_0^{-1}(\varepsilon)}{\varepsilon} |s| \quad \text{et} \quad |h(s)| \geq \frac{h_0(|s|)}{|s|} |s| \geq \frac{h_0(\varepsilon_0)}{\varepsilon} |s|,$$

nous en concluons que

$$\begin{cases} h_0(|s|) \leq |h(s)| \leq h_0^{-1}(|s|), & \text{pour tous } |s| < \varepsilon_0, \\ c'_1 |s| \leq |h(s)| \leq c'_2 |s|, & \text{pour tous } |s| \geq \varepsilon_0. \end{cases} \quad (1.3.23)$$

Puisque $H(s^2) = |s| h_0(|s|)$, alors en utilisant (1.3.23), nous obtenons

$$H(h^2(s)) \leq sh(s) \quad \text{pour tous } |s| \leq \varepsilon_0,$$

ce qui donne

$$h^2(s) \leq H^{-1}(sh(s)), \quad \text{pour tous } |s| \leq \varepsilon_0.$$

Pour estimer la dernière intégrale dans (1.3.18), nous considérons la partition suivante de Γ_1 :

$$\Gamma_{11} = \{x \in \Gamma_1 : |u_t| > \varepsilon_0\}, \quad \Gamma_{12} = \{x \in \Gamma_1 : |u_t| \leq \varepsilon_0\}.$$

En rappelant la définition de ε_0 et en utilisant (1.3.23), nous obtenons sur Γ_{12} ,

$$u_t h(u_t) \leq \varepsilon_0 h_0^{-1}(\varepsilon_0) \leq h_0(r)r = H(r^2) \quad (1.3.24)$$

et

$$u_t h(u_t) \leq \varepsilon_0 h_0^{-1}(\varepsilon_0) \leq r h_0^{-1} h_0(r) = r^2.$$

L'utilisation de l'inégalité de Jensen donne

$$H^{-1}(J(t)) \geq c \int_{\Gamma_{12}} H^{-1}(u_t h(u_t)) d\Gamma. \quad (1.3.25)$$

Ainsi, en utilisant (1.3.23) – (1.3.25), nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma &= \int_{\Gamma_{12}} h^2(u_t) d\Gamma + \int_{\Gamma_{11}} h^2(u_t) d\Gamma \\ &\leq \int_{\Gamma_{12}} H^{-1}(u_t h(u_t)) d\Gamma + c \int_{\Gamma_{11}} u_t h(u_t) d\Gamma \\ &\leq c H^{-1}(J(t)) - c E'(t). \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

Théorème 1.3.7. *Soit $(u_0, u_1) \in (H_{\Gamma_0}^1 \times L^2(\Omega))$ donné. Supposons que les conditions de (G1) à (G4) soient satisfaites et que h_0 **soit linéaire**. Alors, pour tout $t_0 > 0$, il existe deux constantes positives K et λ telles que la solution de (1.1.1) satisfait, pour tout $t \geq t_0$,*

$$E(t) \leq K e^{-\lambda \int_{t_0}^t \xi(s) ds}, \quad \text{si } p = 1, \quad (1.3.27)$$

$$E(t) \leq K \left[\frac{1}{1 + \int_{t_0}^t \xi^{2p-1}(s) ds} \right]^{\frac{1}{2p-2}}, \quad \text{pour } 1 < p < \frac{3}{2}. \quad (1.3.28)$$

De plus, si

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{t \xi^{2p-1}(t) + 1} \right]^{\frac{1}{2p-2}} dt < +\infty, \quad \text{pour } 1 < p < \frac{3}{2}, \quad (1.3.29)$$

alors

$$E(t) \leq K \left[\frac{1}{1 + \int_{t_0}^t \xi^p(s) ds} \right]^{\frac{1}{p-1}}, \quad \text{pour } 1 < p < \frac{3}{2}. \quad (1.3.30)$$

Démonstration. En multipliant (1.3.18) par $\xi(t)$ et en utilisant les équations

(1.3.21), nous obtenons

$$\begin{aligned}\xi(t)F'(t) &\leq -m\xi(t)E(t) + c\xi(t)(g \circ \nabla u)(t) + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\tau \\ &\leq -m\xi(t)E(t) + c\xi(t)(g \circ \nabla u)(t) - c\xi(t)E'(t),\end{aligned}$$

ce qui donne, comme $\xi(t)$ est décroissante,

$$(\xi F + CE)'(t) \leq -m\xi(t)E(t) + c\xi(t)(g \circ \nabla u)(t), \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.3.31)$$

Soit $L(t) := \xi(t)F(t) + CE(t)$, alors, nous déduisons clairement que $L \sim E$ et nous avons, pour un certain $m_1 > 0$,

$$L'(t) \leq -m_1\xi(t)L(t) + c\xi(t)(g \circ \nabla u)(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

Maintenant, dans le même esprit que [52], nous obtenons les résultats du théorème.

Théorème 1.3.8. *Soit $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$ donné, satisfaisant (1.2.6). Supposons que (G1) – (G4) soient vérifiées et que h_0 **soit non linéaire**. Alors, il existe des constantes positives k_1, k_2 et k_3 , telles que la solution de (1.1.1) satisfait, pour tout $t \geq t_0$,*

$$E(t) \leq k_3 H_1^{-1} \left(k_1 \int_{t_0}^t \xi(s) ds + k_2 \right), \quad \text{pour } p = 1, \quad (1.3.32)$$

$$E(t) \leq k_3 H_1^{-1} \left(k_1 \int_{t_0}^t \xi^{2p-1}(s) ds + k_2 \right), \quad \text{pour } 1 < p < \frac{3}{2}. \quad (1.3.33)$$

De plus, si

$$\int_0^{+\infty} H_1^{-1} (k_1 t \xi^{2p-1}(t) + k_2) dt < +\infty, \quad \text{pour } 1 < p < \frac{3}{2}, \quad (1.3.34)$$

alors

$$E(t) \leq k_3 G_1^{-1} \left(k_1 \int_{t_0}^t \xi^p(s) ds + k_2 \right), \quad \text{pour } 1 < p < \frac{3}{2}, \quad (1.3.35)$$

où $H_1(t) = \int_t^1 \frac{1}{t^{2p-1} H'(\varepsilon_0 t)} ds$ et où $G_1(t) = \int_t^1 \frac{1}{t^p H'(\varepsilon_0 t)} ds$.

Ici, H_1 et G_1 sont strictement décroissantes et convexes sur $(0, 1]$, avec $\lim_{t \rightarrow 0} H_1(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 0} G_1(t) = +\infty$.

Remarque 1.3.9. Des calculs simples montrent que (1.3.33) et (1.3.34) impliquent

$$\int_{t_0}^{+\infty} E(t) dt < +\infty.$$

Démonstration. Cas de $p = 1$. En rappelant $G(2)$ et (1.2.5), en multipliant (1.3.18) par $\xi(t)$, nous obtenons, pour tout $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} \xi(t) F'(t) &\leq -m\xi(t)E(t) + C(\xi(t)g \circ \nabla u)(t) + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\tau \\ &\leq -m\xi(t)E(t) - C(g' \circ \nabla u)(t) + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\tau \\ &\leq -m\xi(t)E(t) - CE'(t) + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\tau, \end{aligned} \quad (1.3.36)$$

ceci implique que

$$(\xi F + CE)'(t) \leq -m\xi(t)E(t) + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\tau, \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.3.37)$$

Soit $L(t) := \xi(t)F(t) + CE(t)$, alors clairement $L \sim E$ et nous avons, pour un certain $m_1 > 0$,

$$L'(t) \leq -m_1 \xi(t)L(t) + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\tau, \quad \forall t \geq t_0.$$

Maintenant, en utilisant la procédure similaire à celle de [51], nous obtenons les résultats du théorème.

Cas de $1 < p < \frac{3}{2}$. Multiplier (1.3.18) par $\xi(t)$ et en utilisant 1.2.12, nous obtenons

$$\xi(t)F'(t) \leq -m\xi(t)E(t) + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t)d\tau + k(-E'^{\frac{1}{2p-1}}(t)),$$

en multipliant par $\xi^{2p-2}(t)E^{2p-2}(t)$ et en utilisant l'inégalité de Young

$$\begin{aligned} \xi^{2p-1}(t)E^{2p-2}(t)F'(t) &\leq -m\xi^{2p-1}(t)E^{2p-1}(t) + c\xi^{2p-1}(t)E^{2p-2}(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t)d\tau \\ &\quad + k(-E'(t))^{\frac{1}{2p-1}}(t)\xi^{2p-2}(t)E^{2p-2}(t) \\ &\leq -m\xi^{2p-1}(t)E^{2p-1}(t) + c\xi^{2p-1}(t)E^{2p-2}(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t)d\tau \\ &\quad + k(-E'^{2p-1}(t)E^{2p-1}(t)) \\ F'_0(t) &\leq k_1\xi^{2p-1}(t)E^{2p-1}(t) + c\xi^{2p-1}(t)E^{2p-2}(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t)d\tau. \end{aligned} \quad (1.3.38)$$

Avec $F_0(t) = F(t)\xi^{2p-1}(t)E^{2p-2}(t) + kE(t)$; $F_0 \sim E$.

Par conséquent, en utilisant (1.3.22), (1.2.4), on deduit que

$$\begin{aligned} F'_0(t) &\leq k_1\xi^{2p-1}(t)E^{2p-1}(t) + c\xi^{2p-1}(t)E^{2p-2}(t) (H^{-1}(\lambda(t)) - E'(t)) \\ F'_0(t) &\leq k_1\xi^{2p-1}(t)E^{2p-1}(t) + c\xi^{2p-1}(t)E^{2p-2}(t)H^{-1}(\lambda(t)) - c\xi^{2p-1}(0)E^{2p-2}(0)E'(t) \\ F'_1(t) &\leq k_1\xi^{2p-1}(t)E^{2p-1}(t) + c\xi^{2p-1}(t)E^{2p-2}(t)H^{-1}(\lambda(t)) \end{aligned}$$

avec $F_1 = F_0 + CE$ alors, $F_1 \sim E$.

Maintenant, pour $\epsilon_0 < r^2$ et $c_0 > 0$, en utilisant (1.3.26) et le fait que $E' \leq 0$, $H' \geq 0$, $H'' \geq 0$ sur $(0, r^2]$, nous trouvons que la fonctionnelle F_2 définie par

$$F_2(t) := H' \left(\epsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) F_1(t) + c_0 E(t)$$

satisfait, pour certains $\alpha_1, \alpha_2 > 0$,

$$\alpha_1 F_2(t) \leq E(t) \leq \alpha_2 F_2(t) \quad (1.3.39)$$

et

$$\begin{aligned} F_2'(t) &= \epsilon_0 \frac{E'(t)}{E(0)} H'' \left(\epsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) F_1(t) + H' \left(\epsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) F_1'(t) + c_0 E'(t) \\ &\leq -k \xi^p E^p(t) H' \left(\epsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c \xi^p(t) E^{p-1}(t) H^{-1}(\lambda(t)) H' \left(\epsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c_0 E'(t). \end{aligned} \quad (1.3.40)$$

Soit H^* la conjuguée convexe de H au sens de Young (voir [9] p. 61 – 64) ; alors

$$H^*(s) = s (H')^{-1}(s) - H \left[(H')^{-1}(s) \right], \quad \text{if } s \in [0, H'^2]$$

et H^* satisfait l'inégalité de Young suivante :

$$AB \leq H^*(A) + H(B), \quad \text{if } A \in (0, H'^2], B \in (0, r^2]. \quad (1.3.41)$$

Avec $A = H' \left(\epsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right)$ et $B = H^{-1}(\lambda(t))$, en utilisant (2.2.7), (1.3.24) et (1.3.40) – (1.3.41), nous obtenons

$$\begin{aligned} F_2'(t) &\leq -k \xi^{2p-1} E^{2p-1}(t) H' \left(\epsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c \xi(t) \lambda(t) \\ &\quad + c \xi^{2p-1}(t) E^{2p-2}(t) H^* \left(H' \left(\epsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \right) + c_0 E'(t), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} F'_2(t) \leq & -k\xi^{2p-1}E^{2p-1}(t)H'\left(\epsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) + c\epsilon_0\xi^{2p-1}(t)\frac{E^{2p-1}(t)}{E(0)}H'\left(\epsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) \\ & -cE'(t) + c_0E'(t). \end{aligned}$$

Par conséquent, avec un choix approprié de ϵ_0 et k , nous obtenons, pour tout $t \geq t_0$,

$$F'_2(t) \leq -k_1\xi^{2p-1}(t)\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right)^{2p-1}H'\left(\epsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) = -k_1\xi^{2p-1}(t)H_2\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right), \quad (1.3.42)$$

où $H_2(t) = t^{2p-1}H'(\epsilon_0 t)$.

Comme $h_0 \in C^1([0, +\infty])$, il est évident que $H \in C^1([0, +\infty])$ et $H'(0) = h'_0(0)$.

Ainsi, $H_2(0) = 0$ et comme

$$H'_2(t) = (2p-1)t^{2p-2}H'(\epsilon_0 t) + \epsilon_0 t^{2p-1}H''(\epsilon_0 t)$$

alors, en utilisant la convexité stricte de H sur $(0, r^2]$, nous trouvons que $H'_2(t), H_2(t) > 0$ sur $[0, 1]$. Ainsi, avec $R(t) = \frac{\alpha_1 F_2(t)}{E(0)}$, et en utilisant (1.3.39) et (1.3.42), nous avons $R \sim E$ et, pour certains $k_1 > 0$,

$$R'(t) \leq -k_1\xi^{2p-1}(t)H_2(R(t)), \quad \forall t \geq t_0.$$

Ensuite, une intégration simple donne, pour certains $k_2 > 0$,

$$R(t) \leq H_1^{-1}\left(k_1 \int_{t_0}^t \xi^{2p-1}(s)ds + k_2\right), \quad \forall t > t_0,$$

où $H_1(t) = \int_t^1 \frac{1}{H_2(s)}ds$.

Pour établir (1.3.35), en multipliant (1.3.18) par $\xi(t)$ et en rappelant la Remarque

1.3.9. Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \xi(t)F'(t) &\leq -m\xi(t)E(t) + C\xi(t)(g \circ \nabla u)(t) + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\tau \\
 &= -m\xi(t)E(t) + C \frac{\eta(t)}{\eta(t)} \int_0^t [\xi^p(s) g^p(s)]^{\frac{1}{p}} \|\nabla u(t) - \nabla u(t-s)\|_2^2 ds \\
 &\quad + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\tau,
 \end{aligned} \tag{1.3.43}$$

où

$$\begin{aligned}
 \eta(t) &= \int_0^t \|\nabla u(t) - \nabla u(t-s)\|_2^2 ds \leq C \int_0^t \|\nabla u(t)\|_2^2 + \|\nabla u(t-s)\|_2^2 ds \\
 &\leq C \int_0^t [E(t) + E(t-s)] ds \leq 2C \int_0^t E(t-s) ds \\
 &= 2C \int_0^t E(s) ds < 2C \int_0^{+\infty} E(s) ds < +\infty.
 \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Jensen (1) pour le deuxième terme du membre de droite de (1.3.43), avec $G(y) = y^{\frac{1}{p}}$, $y > 0$, $f(s) = \xi^p(s) g^p(s)$ et $h(s) = \|\nabla u(t) - \nabla u(t-s)\|_2^2$, pour obtenir

$$\begin{aligned}
 \xi(t)F'(t) &\leq -m\xi(t)E(t) + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\tau, \\
 &\quad + C\eta(t) \left[\frac{1}{\eta(t)} \int_0^t \xi^p(s) g^p(s) \|\nabla u(t) - \nabla u(t-s)\|_2^2 ds \right]^{\frac{1}{p}}
 \end{aligned}$$

où l'on suppose que $\eta(t) > 0$.

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}
 \xi(t)F'(t) &\leq -m\xi(t)E(t) + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\tau \\
 &\quad + C\eta^{\frac{p-1}{p}}(t) \left[\xi^{p-1}(0) \int_0^t \xi(s) g^p(s) \|\nabla u(t) - \nabla u(t-s)\|_2^2 ds \right]^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq -m\xi(t)E(t) + C(-g' \circ \nabla u)^{\frac{1}{p}}(t) + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\tau \\
 &\leq -m\xi(t)E(t) + C(-E'(t))^{\frac{1}{p}} + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\tau.
 \end{aligned}$$

En multipliant par $\xi^p(t) E^p(t)$, et en répétant les mêmes calculs que ci-dessus, on obtient

$$E(t) \leq k_3 G_1^{-1} \left(k_1 \int_{t_0}^t \xi^p(s) ds + k_2 \right), \quad 1 < p < \frac{3}{2},$$

où $G_1(t) = \int_t^1 \frac{1}{s^p H'(\varepsilon_0 s)} ds$.

Remarque 1.3.10. Dans le cas où $\|\nabla u(t) - \nabla u(t-s)\| = 0$ et ainsi de (1.3.18) nous avons

$$F'(t) \leq -mE(t) + c \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\tau,$$

en utilisant la procédure similaire à celle de [51], nous obtenons Cas h_0 linéaire

$$E(t) \leq Ce^{-mt}.$$

Cas h_0 non linéaire

$$E(t) \leq H_1^{-1}(k_1 t + k_2), \quad \forall t > t_0$$

Cela conclut la preuve de notre résultat principal.

Exemple 1.3.11. Comme dans [52], nous donnons un exemple pour illustrer l'existence d'une fonction de relaxation g et ξ satisfaisant (G2) :

Si $p = 1$:

Soit $g(t) = ae^{-b(1+t)}$, où $b > 0 < \nu \leq 1$ et $a > 0$ est choisi de telle sorte que $\int_0^{+\infty} g(t) dt < 1$. Alors, $g'(t) = -\xi(t)g(t)$ avec $\xi(t) = b$.

Si $1 < p < \frac{3}{2}$:

Soit $g(t) = \frac{a}{(1+t)^\nu}$, $\nu > 2$, où $a > 0$ est une constante telle que $\int_0^{+\infty} g(t) dt < 1$. On a

$$g'(t) = -\frac{a\nu}{(1+t)^{\nu+1}} = -b \left(\frac{a}{(1+t)^\nu} \right)^{\frac{\nu+1}{\nu}} = -bg^p(t), \quad p = \frac{\nu+1}{\nu} < \frac{3}{2}, \quad b > 0.$$

avec $\xi(t) = b$.

Exemple 1.3.12. Comme dans [3, 21], nous donnons un exemple pour illustrer les taux de décroissance de l'énergie donnés par **Théorème** (1.3.7) et **Théorème** (1.3.8).

Si h satisfait

$$c_1 \min \{ |s|, |s|^q \} \leq |h(s)| \leq c_2 \max \{ |s|, |s|^{1/q} \},$$

pour certains $c_1, c_2 > 0$ et $q \geq 1$. Alors $h_0(s) = cs^q$ et $\bar{H}(s) = \sqrt{s}h_0(\sqrt{s}) = cs^{\frac{q+1}{2}}$ est une fonction strictement convexe C^2 sur $(0, \infty)$, alors $H_1^{-1}(t) = (ct + c_1)^{\frac{-2}{4p+q-5}}$, et la fonction de relaxation g et ξ données dans Exemple(1.3.11).

Ensuite, nous obtenons pour certaines constantes $c, c', c'' > 0$:

Si $p = 1$ et $q = 1$ (h_0 **est linéaire**), par **Théorème** (1.3.7) nous obtenons

$$E(t) \leq ce^{-c' \int_0^t \xi(s) ds} = ce^{-c'bt}.$$

$1 < p < \frac{3}{2}$ et $q = 1$ (h_0 **est linéaire**), par **Théorème** (1.3.7) nous obtenons

$$E(t) \leq c \left(c' \int_0^t \xi^{2p-1}(s) ds + c'' \right)^{-\frac{1}{2p-2}} = c (c'bt + c'')^{-\frac{1}{2p-2}}.$$

Si $p = 1$ et $q > 1$ (h_0 **est non linéaire**), par **Théorème** (1.3.8) nous obtenons

$$E(t) \leq c \left(c' \int_0^t \xi(s) ds + c'' \right)^{-\frac{2}{q-1}} = c (c'bt + c'')^{-\frac{2}{q-1}}.$$

Si $1 < p < \frac{3}{2}$ et $q > 1$ (h_0 **est non linéaire**), par **Théorème** (1.3.8) nous obtenons

$$E(t) \leq c \left(c' \int_0^t \xi^{2p-1}(s) ds + c'' \right)^{-\frac{2}{4p+q-5}} = c (c'bt + c'')^{-\frac{2}{4p+q-5}}.$$

1.4 Résultats Numériques

Dans cette section, nous réalisons quelques expériences numériques pour illustrer les résultats théoriques des Théorèmes 1.3.7 et 1.3.8. A cette fin, nous discrétisons le système (1.1.1) en utilisant une méthode des différences finies (MDF) à la fois dans le temps et dans l'espace. En considérant un domaine spatial rectangulaire dans $\mathbb{R}^2$, donc on exprime le domaine espace-temps comme suit :

$[0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, T] = [0, 2] \times [0, 1] \times [0, 50]$. L'intervalle spatial $(0, 2)$ est divisé en 20 sous-intervalles et l'intervalle spatial $(0, 1)$ est divisé en 10 sous-intervalles tandis que l'intervalle temporel $(0, 50)$ est divisé en 700 sous-intervalles, avec $h(u_t) = u_t$, $\gamma = 2$ et $g(t) = e^{-t}$.

La condition aux limites du problème (1.1.1) est donnée, en utilisant les conditions initiales suivantes : $u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$; $u_t(x, y, 0) = 0$.

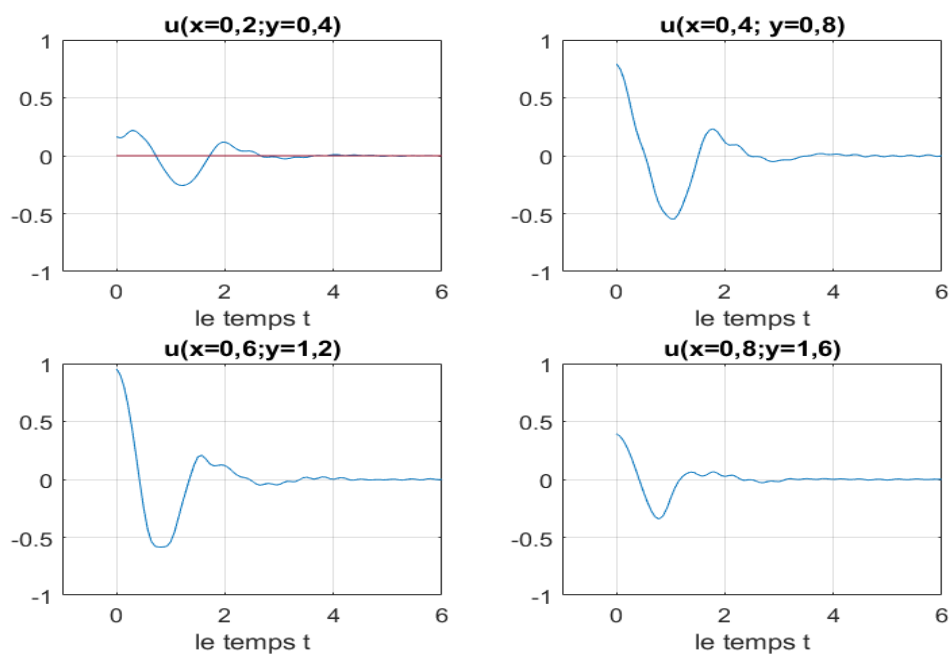


FIGURE 1.1 – La solution du système pour différents points du plan

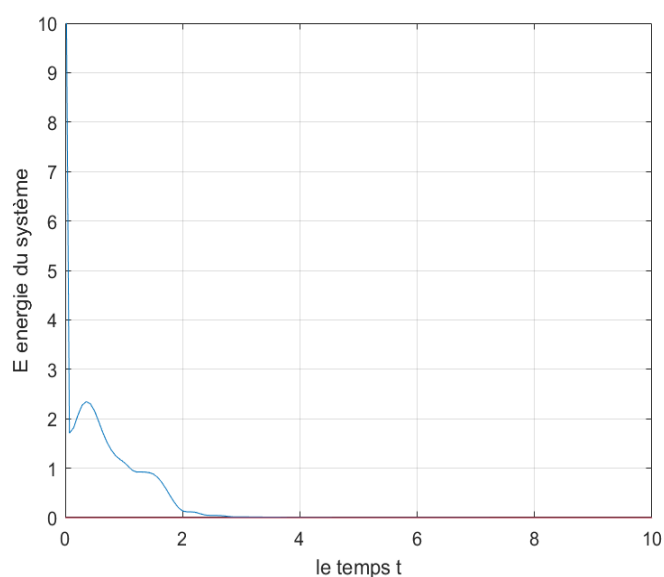


FIGURE 1.2 – L'énergie du système

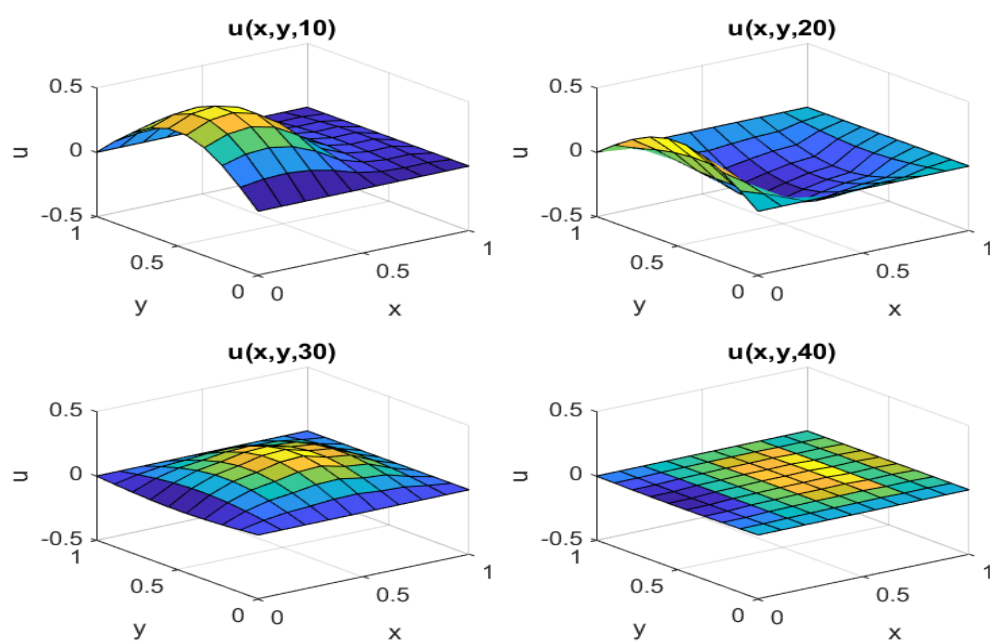


FIGURE 1.3 – La solution du système pour différents instants

Chapitre 2

Résultat général de décroissance pour un problème viscoélastique avec une source non linéaire et contrôle de frontière de type mémoire

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons le système viscoélastique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-\tau) \Delta u(\tau) d\tau = |u|^\gamma u, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t g(t-\tau) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\tau) d\tau + h(u_t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x); u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (2.1.1)$$

où la fonction de relaxation g satisfait

$$g'(t) \leq -\xi(t)G(g(t)), \quad (2.1.2)$$

G est une fonction strictement croissante et strictement convexe près de l'origine et Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière assez régulière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Ici, Γ_0 et Γ_1 sont fermés et disjoints, avec $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$, ν est la normale externe unitaire à $\partial\Omega$, $\gamma > 0$, et g, h sont des fonctions spécifiques.

Nous nous intéressons à un résultat de décroissance de l'énergie pour la solution du problème (2.1.1) dans le cadre d'une fonction de relaxation plus générale. En effet, en prenant en compte l'inéquation différentielle (2.1.2) satisfaite par la fonction de relaxation, ce chapitre représente une extension du chapitre 1. En particulier, ce travail est une extension des résultats obtenus dans [4, 48, 51, 55]. Le reste de notre chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2, nous énonçons les hypothèses et le cadre nécessaire à notre travail. La section 3 est dédiée à l'énoncé et à la démonstration de résultats techniques essentiels pour le développement de l'ensemble de l'étude. Enfin, les démonstrations des résultats principaux sont présentées dans la section 4.

2.2 Préliminaires

Dans cette section, nous présentons certains éléments nécessaires à la démonstration de nos résultats. Pour la fonction de relaxation g , nous supposons ce qui suit :

(G1) $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction C^1 décroissante satisfaisant

$$g(0) > 0, \quad 1 - \int_0^\infty g(s)ds = l > 0, \quad (2.2.1)$$

et il existe une fonction C^1 $G : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ qui est linéaire ou strictement croissante et strictement convexe C^2 sur $(0, r_1]$, $r_1 \leq g(0)$, avec $G(0) = G'(0) = 0$, telle que

$$g'(t) \leq -\xi(t)G(g(t)), \quad t \geq 0, \quad (2.2.2)$$

où $\xi(t)$ est une fonction positive décroissante différentiable.

(G2) Pour le terme non linéaire, nous supposons

$$0 < \gamma \leq \frac{2}{(n-2)}, \quad n \geq 3,$$

$$\gamma > 0, \quad n = 1, 2.$$

(G3) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^0 croissante telle qu'il existe une fonction strictement croissante $h_0 \in C^1([0, +\infty))$, avec $h_0(0) = 0$, et des constantes positives c_1, c_2, ϵ telles que

$$\begin{aligned} h_0(|s|) &\leq |h(s)| \leq h_0^{-1}(|s|) \quad \text{pour tout } |s| \leq \epsilon, \\ c_1 |s| &\leq |h(s)| \leq c_2 |s| \quad \text{pour tout } |s| \geq \epsilon. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

De plus, nous supposons que la fonction H , définie par $H(s) = \sqrt{s}h_0(\sqrt{s})$, est une fonction strictement convexe C^2 sur $(0, r_2]$, pour un certain $r_2 > 0$, lorsque h_0 est non linéaire.

Remarque 2.2.1. *Puisque ξ est décroissante, alors $\xi(t) \leq \xi(0) = M$.*

Remarque 2.2.2. *Nous utiliserons l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour $2 \leq q \leq 2n/(n-2)$, si $n \leq 3$ et $q \leq 2$, si $n = 1, 2$; et $L^r(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, pour $q < r$.*

Nous utiliserons, dans ce cas, la même constante d'inclusion notée C_e ; c'est-à-dire

$$\|u\|_q \leq C_e \|\nabla u(t)\|_2, \quad \|u\|_q \leq C_e \|u\|_r. \quad (2.2.4)$$

Nous introduisons également les fonctionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2+\gamma} \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} \\ E(t) &= K(t) + \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 \\ S(t) &= \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) - \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2}, \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

où

$$(g \circ v)(t) = \int_{\Omega} \int_0^t g(t-\tau) \|v(t) - v(\tau)\|_2^2 d\tau dx, \quad (2.2.6)$$

et $E(t)$ représente la fonctionnelle d'énergie.

Remarque 2.2.3. *L'hypothèse (G3) implique que $sh(s) > 0$, pour tout $s \neq 0$.*

Nous posons également

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

Lemme 2.2.4. *Supposons que (G1) et (G2) soient satisfaites, et que $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$ soit donné. Si u est la solution de (2.1.1) alors la fonctionnelle E satisfait*

$$E'(t) = \frac{1}{2} (g' \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2} g(t) \|\nabla u(t)\|_2^2 - \int_{\Gamma_1} u_t(t) h(u_t(t)) d\Gamma \leq \frac{1}{2} (g' \circ \nabla u)(t) \leq 0, \quad (2.2.7)$$

pour presque tout $t \in [0, T]$.

Démonstration. En multipliant l'équation différentielle dans (2.1.1) par u_t et en intégrant sur Ω , en utilisant une intégration par parties et (G1), nous obtenons

(2.2.7) pour toute solution régulière. Ceci reste valable pour les solutions faibles par un simple argument de densité. Voir [12, 44, 45] pour des calculs détaillés.

Lemme 2.2.5. *Supposons que (G1) et (G2) soient vérifiées, et $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$, de telle sorte que*

$$\beta = \frac{C_e^{\gamma+2}}{l} \left(\frac{2(\gamma+2)}{\gamma l} E(u_0, u_1) \right)^{\gamma/2} < 1, \quad (2.2.8)$$

et

$$S(u_0) > 0,$$

alors $S(u(t)) > 0, \forall t > 0$.

Démonstration. Puisque $S(u_0) > 0$, il existe (par continuité) un $T_m < T$ tel que

$$S(u(t)) \geq 0, \quad \forall t \in [0, T_m];$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2+\gamma} \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} \\ &= \frac{\gamma}{2(\gamma+2)} \left[\left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) \right] + \frac{1}{2+\gamma} S(t) \\ &\geq \frac{\gamma}{2(\gamma+2)} \left[\left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

En utilisant (G1), (2.2.5), (2.2.7) et (2.2.9), on obtient facilement

$$\begin{aligned} l \|\nabla u(t)\|_2^2 &\leq \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 \leq \frac{2(\gamma+2)}{\gamma} K(t) \\ &\leq \frac{2(\gamma+2)}{\gamma} E(t) \leq \frac{2(\gamma+2)}{\gamma} E(u_0, u_1), \quad \forall t \in [0, T_m]. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Nous exploitons ensuite (G1), (2.2.4), (2.2.8) et (2.2.10) pour obtenir, pour tout

$t \in [0, T_m]$,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} &\leq C_e^{\gamma+2} \|\nabla u(t)\|_2^{\gamma+2} \leq \frac{C_e^{\gamma+2}}{l} \|\nabla u(t)\|_2^\gamma l \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\leq \beta l \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\leq \beta \left(1 - \int_0^t g(s) ds\right) \|\nabla u(t)\|_2^2 < \left(1 - \int_0^t g(s) ds\right) \|\nabla u(t)\|_2^2. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Par conséquent,

$$S(t) = \left(1 - \int_0^t g(s) ds\right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) - \|u(t)\|_{\gamma+2}^{\gamma+2} > 0,$$

pour tout $t \in [0, T_m]$. En répétant cette procédure et en utilisant le fait que

$$\lim_{t \rightarrow T_m} \frac{C_e^{\gamma+2}}{l} \left(\frac{2(\gamma+2)}{\gamma l} E(u(t), u_t(t)) \right)^{\gamma/2} \leq \beta < 1,$$

on prolonge T_m jusqu'à T .

Remarque 2.2.6. Si G est une fonction strictement croissante et strictement convexe C^2 sur $(0, r_1]$, avec $G(0) = G'(0) = 0$, alors elle possède une extension $\overline{G}$, qui est une fonction strictement croissante et strictement convexe C^2 sur $(0, \infty)$. Par exemple, si $G(r_1) = a$, $G'(r_1) = b$, $G''(r_1) = c$, on peut définir $\overline{G}$, pour $t > r_1$, par

$$\overline{G}(t) = \frac{c}{2} t^2 + (b - cr_1) t + \left(a + \frac{c}{2} r_1^2 - br_1\right). \quad (2.2.12)$$

La même remarque peut être établie pour $\overline{H}$.

Proposition 2.2.7. Supposons que $(G1) - (G3)$ soient vérifiées.

Soit $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$ donné, satisfaisant (2.2.8). Alors la solution de (2.1.1) est globale et bornée.

Démonstration. Voir [12].

2.3 Lemmes techniques

Dans cette section, en adoptant la démonstration de [4], nous avons les résultats suivants qui sont utiles pour la preuve de notre résultat principal.

Lemme 2.3.1. *Soit $u(t)$ solution de (2.1.1), alors sous les hypothèses (G1) et (G2), la fonctionnelle*

$$\psi_1(t) := \int_{\Omega} u(t)u_t(t)dx,$$

satisfait l'estimation

$$\psi_1'(t) \leq -\frac{\ell}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{cC_\alpha}{2\ell}(ko\nabla u)(t) + c \int_{\Gamma_1} h^2(u_t(t)) d\Gamma + \int_{\Omega} |u|^{\gamma+2} dx, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad (2.3.1)$$

où, pour tout $0 < \alpha < 1$,

$$C_\alpha = \int_0^\infty \frac{g^2(s)}{\alpha g(s) - g'(s)} ds \quad \text{et} \quad k(t) = \alpha g(t) - g'(t).$$

Démonstration. Les calculs directs, utilisant (2.1.1), donnent

$$\begin{aligned} \psi_1'(t) &= \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{\Omega} u \Delta u dx - \int_{\Omega} u \int_0^t g(t-s) \Delta u(s) ds dx + \int_{\Omega} |u|^{\gamma+2} dx \\ &= \int_{\Omega} u_t^2 dx - \left(1 - \int_0^t g(s) ds\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Gamma_1} u h(u_t) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Omega} |u|^{\gamma+2} dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \int_0^t g(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds dx. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

L'utilisation des inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \nabla u \cdot \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds dx \\
& \leq \delta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4\delta} \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s) |\nabla u(s) - \nabla u(t)| ds \right)^2 dx \\
& \leq \delta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\
& + v \frac{1}{4\delta} \int_{\Omega} \left(\int_0^t \frac{g(t-s)}{\sqrt{\alpha g(t-s) - g'(t-s)}} \sqrt{\alpha g(t-s) - g'(t-s)} |\nabla u(s) - \nabla u(t)| ds \right)^2 dx \\
& \leq \delta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + v \frac{1}{4\delta} \left(\int_0^t \frac{g^2(s)}{\alpha g(s) - g'(s)} ds \right) \\
& \times \int_{\Omega} \int_0^t [\alpha g(t-s) - g'(t-s)] |\nabla u(s) - \nabla u(t)|^2 ds dx \\
& \leq \delta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4\delta} C_{\alpha}(ko\nabla u)(t). \tag{2.3.3}
\end{aligned}$$

De même, l'utilisation des inégalités de Young et de Poincaré ainsi que du théorème de trace donne

$$\begin{aligned}
- \int_{\Gamma_1} u h(u_t) d\Gamma & \leq \delta \int_{\Gamma_1} u^2 d\Gamma + \frac{1}{4\delta} \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma \\
& \leq C_* \delta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Gamma + \frac{1}{4\delta} \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma, \tag{2.3.4}
\end{aligned}$$

où C_* est la constante de Poincaré.

En combinant (2.3.3) et (2.3.4), on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \nabla u \cdot \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds dx - \int_{\Gamma_1} u h(u_t) d\Gamma \\
& \leq (1 + C_*) \delta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4\delta} C_{\alpha}(ko\nabla u)(t) + \frac{1}{4\delta} \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma \\
& \leq c\delta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4\delta} C_{\alpha}(ko\nabla u)(t) + \frac{1}{4\delta} \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma. \tag{2.3.5}
\end{aligned}$$

En combinant (2.3.2) et (2.3.5) et en choisissant $\delta = \ell/(2c)$, on obtient (2.3.1).

Lemme 2.3.2. *Soit $u(t)$ solution de (2.1.1), alors sous les hypothèses (G1) et (G2), la fonctionnelle*

$$\psi_2(t) := - \int_{\Omega} u_t(t) \int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s)) ds dx,$$

satisfait l'estimation

$$\begin{aligned} \psi_2'(t) \leq & \delta \left(1 + C_e^{2\gamma+2} \left(\frac{2(\gamma+2)E(0)}{\gamma l} \right)^\gamma \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 - \left(\int_0^t g(s) ds - \delta \right) \|u_t(t)\|_2^2 \\ & + c \int_{\Gamma_1} h^2(u_t(t)) d\Gamma + c \left(\frac{2C_\alpha + 1}{\delta} + C_\alpha \right) (ko \nabla u)(t) \\ & + \frac{C_*^2(1-l)}{4\delta} (g \circ \nabla u)(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall \delta > 0. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Démonstration. En exploitant l'équation (2.1.1) et en effectuant une intégration par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned} \psi_2'(t) = & \int_{\Omega} \nabla u \cdot \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds dx \\ & - \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s) \nabla u(s) ds \right) \cdot \left(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds \right) dx \\ & + \int_{\Gamma_1} \left(\int_0^t g(t-s)(u(s) - u(t)) ds \right) h(u_t) d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} u_t \int_0^t g'(t-s)(u(s) - u(t)) ds dx - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} u_t^2 dx \\ & + \int_{\Omega} |u|^\gamma u \int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau)) d\tau dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \int_0^t g(s) ds\right) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \left| \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds \right|^2 dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} \left(\int_0^t g(t-s)(u(s) - u(t)) ds \right) h(u_t) d\Gamma \\
&\quad - \int_{\Omega} u_t \int_0^t g'(t-s)(u(s) - u(t)) ds dx - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} u_t^2 dx \\
&\quad + \int_{\Omega} |u|^{\gamma} u \int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau)) d\tau dx.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young et en effectuant des calculs similaires à ceux de (2.3.3), nous obtenons

$$\left(1 - \int_0^t g(s) ds\right) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds dx \leq \delta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{c}{\delta} C_{\alpha}(ko\nabla u)(t),$$

et

$$\int_{\Gamma_1} \left(\int_0^t g(t-s)(u(s) - u(t)) ds \right) h(u_t) d\Gamma \leq c C_{\alpha}(ko\nabla u)(t) + c \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma,$$

et

$$\begin{aligned}
- \int_{\Omega} u_t \int_0^t g'(t-s)(u(s) - u(t)) ds dx &= \int_{\Omega} u_t \int_0^t k(t-s)(u(t) - u(s)) ds dx \\
&\quad - \int_{\Omega} u_t \int_0^t \alpha g(t-s)(u(t) - u(s)) ds dx \\
&\leq \delta \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{\alpha^2}{2\delta} \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s)|u(s) - u(t)| ds \right)^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{2\delta} \int_{\Omega} \left(\int_0^t \sqrt{k(t-s)} \sqrt{k(t-s)} |u(s) - u(t)| ds \right)^2 dx \\
&\leq \delta \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{\left(\int_0^t k(s) ds \right)}{2\delta} (kou)(t) + \frac{\alpha^2 C_{\alpha}}{2\delta} (ko\nabla u)(t) \\
&\leq \delta \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{c}{\delta} (ko\nabla u)(t) + \frac{c C_{\alpha}}{\delta} (ko\nabla u)(t).
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u|^{\gamma} u \int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau)) d\tau dx &\leq \delta \int_{\Omega} |u|^{2\gamma+2} dx + \frac{C_*^2(1-l)}{4\delta} (g \circ \nabla u)(t) \\
&\leq \delta C_e^{2\gamma+2} |\nabla u(t)|_2^{2\gamma+2} + \frac{C_*^2(1-l)}{4\delta} (g \circ \nabla u)(t) \\
&\leq \delta C_e^{2\gamma+2} \left(\frac{2(\gamma+2)E(0)}{\gamma l} \right)^{\gamma} |\nabla u(t)|_2^2 \\
&\quad + \frac{C_*^2(1-l)}{4\delta} (g \circ \nabla u)(t).
\end{aligned}$$

En combinant toutes les estimations ci-dessus, (2.3.6) est établi.

Lemme 2.3.3. *Soit $u(t)$ solution de (2.1.1), alors sous les hypothèses (G1) et (G2), la fonctionnelle :*

$$\psi_3(t) = \int_{\Omega} \int_0^t r(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx, \quad (2.3.7)$$

satisfait l'estimation

$$\psi_3'(t) \leq -\frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t) + 3(1-l) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx, \quad (2.3.8)$$

où $r(t) = \int_t^{+\infty} g(s) ds$.

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Young et le fait que $r'(t) = -g(t)$, nous voyons que

$$\begin{aligned}
\psi_3'(t) &= r(0) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx - \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx \\
&= - \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s) |\nabla u(s) - \nabla u(t)|^2 ds dx \\
&\quad - 2 \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \int_0^t g(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds dx + r(t) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} & -2 \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds dx \\ \leq & 2(1-\ell) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{\int_0^t g(s) ds}{2(1-\ell)} \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s) |\nabla u(s) - \nabla u(t)|^2 ds dx. \end{aligned}$$

Sachant que $r(t) \leq r(0) = 1 - \ell$ et $\int_0^t g(s) ds \leq 1 - \ell$, (2.3.8) est établi.

Lemme 2.3.4. *Il existe des constantes positives d et t_1 telles que*

$$g'(t) \leq -dg(t), \quad \forall t \in [0, t_1]. \quad (2.3.9)$$

Démonstration. Par (G1), nous déduisons facilement que $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$.

Ainsi, il existe un $t_1 \geq 0$ suffisamment grand tel que

$$g(t_1) = r,$$

et

$$g(t) \leq r, \quad \forall t \geq t_1.$$

Comme g et ξ sont des fonctions continues, positives, décroissantes et que H est une fonction continue et positive, alors, pour tout $t \in [0, t_1]$,

$$\begin{cases} 0 < g(t_1) \leq g(t) \leq g(0) \\ 0 < \xi(t_1) \leq \xi(t) \leq \xi(0) \end{cases}$$

ce qui implique qu'il existe deux constantes positives a et b telles que

$$a \leq \xi(t)H(g(t)) \leq b.$$

En conséquence, pour tout $t \in [0, t_1]$,

$$g'(t) \leq -\xi(t)H(g(t)) \leq -\frac{a}{g(0)}g(0) \leq -\frac{a}{g(0)}g(t). \quad (2.3.10)$$

Remarque 2.3.5. *Utilisant le fait que $\frac{\alpha g^2(s)}{\alpha g(s) - g'(s)} < g(s)$ et en rappelant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on peut facilement déduire que*

$$\alpha C_\alpha = \int_0^\infty \frac{\alpha g^2(s)}{\alpha g(s) - g'(s)} ds \rightarrow 0 \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0. \quad (2.3.11)$$

Lemme 2.3.6. *Supposons que (G1) et (G2), soient vérifiées. Alors il existe des constantes $N, N_1, N_2, m, m_0, c > 0$ telles que la fonctionnelle*

$$L(t) = NE(t) + N_1\psi_1(t) + N_2\psi_2(t) + m_0E(t),$$

satisfait, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$L'(t) \leq -mE(t) + c \int_{t_1}^t g(t-s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 dx ds + c \int_{\Gamma_1} h^2(u_t(t)) d\Gamma. \quad (2.3.12)$$

Démonstration. Puisque g est positive, continue et que $g(0) > 0$, alors pour tout $t_0 > 0$, nous avons

$$\int_0^t g(s) ds \geq \int_0^{t_0} g(s) ds = g_1 > 0, \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.3.13)$$

En utilisant (2.2.7), (2.3.1) et (2.3.6), et en rappelant que $g' = (\alpha g - k)$ et en prenant

$\delta = \frac{\ell}{4N_2}$, nous voyons facilement que

$$\begin{aligned}
 L'(t) \leq & - \left(\frac{\ell}{2} N_1 - \frac{\ell}{4} \left(1 + C_e^{2\gamma+2} \left(\frac{2(\gamma+2)E(0)}{\gamma l} \right)^\gamma \right) \right) \|\nabla u\|_2^2 \\
 & - \left(N_2 g_1 - \frac{\ell}{4} - N_1 \right) \|u_t\|_2^2 \\
 & + \left(\frac{\alpha}{2} N + \frac{C_*^2(1-l)}{4\delta} N_2 \right) (go \nabla u)(t) \\
 & - \left(\frac{1}{2} N - \frac{4c}{\ell} N_2^2 - C_\alpha \left(\frac{c}{2\ell} N_1 + \frac{8c}{\ell} N_2^2 + c N_2 \right) \right) (ko \nabla u)(t) \\
 & + c(N_1 + N_2) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma + N_1 \int_{\Omega} |u|^{\gamma+2} dx + m_0 E'(t). \tag{2.3.14}
 \end{aligned}$$

A ce stade, nous choisissons N_1 suffisamment grand pour que

$$\frac{\ell}{2} N_1 - \frac{\ell}{4} \left(1 + C_e^{2\gamma+2} \left(\frac{2(\gamma+2)E(0)}{\gamma l} \right)^\gamma \right) > 4(1-\ell),$$

et ensuite N_2 suffisamment grand pour que

$$N_2 g_1 - \frac{\ell}{4} - N_1 - 1 > 0.$$

Maintenant, en utilisant la remarque 2.3.5, il existe $0 < \alpha_0 < 1$ tel que si $\alpha < \alpha_0$, alors

$$\alpha C_\alpha < \frac{1}{8 \left(\frac{c}{2\ell} N_1 + \frac{8c}{\ell} N_2^2 + c N_2 \right)}.$$

Nous choisissons maintenant N suffisamment grand et α tel que

$$\frac{1}{4} N - \frac{4c}{\ell} N_2^2 > 0 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1}{2N} < \alpha_0,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2} N - \frac{4c}{\ell} N_2^2 - C_\alpha \left(\frac{1}{\ell} N_1 + \frac{8c}{\ell} N_2^2 + c N_2 \right) > 0.$$

Par conséquent, nous arrivons à

$$L'(t) \leq -4(1-\ell)\|\nabla u\|_2^2 - \|u_t\|_2^2 + c(g \circ \nabla u)(t) + c \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma + N_1 \int_{\Omega} |u|^{\gamma+2} dx + m_0 E'(t). \quad (2.3.15)$$

En utilisant (2.2.7) et (2.3.9), nous concluons que, pour tout $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} g(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds &\leq \frac{-1}{d} \int_0^{t_1} g'(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \\ &\leq -cE'(t). \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

En combinant (2.3.15) et (2.3.16) et en choisissant une valeur appropriée de m_0 , (2.3.12) est établi. D'autre part (voir [11]), nous pouvons choisir N encore plus grand (si nécessaire) de sorte que

$$L \sim E. \quad (2.3.17)$$

2.4 Décroissance des solutions

Dans cette section, nous énonçons et démontrons le résultat principal de notre travail. Enonçons, tout d'abord, quelques lemmes et remarques.

Lemme 2.4.1. *Sous les hypothèses (G1) – (G3), la solution satisfait les estimations suivantes*

$$\int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma \leq c \int_{\Gamma_1} u_t h(u_t) d\Gamma, \quad \text{si } h_0 \text{ est linéaire}, \quad (2.4.1)$$

$$\int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma \leq cH^{-1}(J(t)) - cE'(t), \quad \text{si } h_0 \text{ est non linéaire}, \quad (2.4.2)$$

où

$$J(t) := \frac{1}{|\Gamma_{12}|} \int_{\Gamma_{12}} u_t(t) h(u_t(t)) d\Gamma \leq -cE'(t), \quad (2.4.3)$$

et

$$\Gamma_{12} = \{x \in \Gamma_1 : |u_t(t)| \leq \varepsilon_1\}.$$

Démonstration. Cas 1 : h_0 est linéaire.

Alors, en utilisant (G3), nous avons

$$c'_1 |u_t| \leq |h(u_t)| \leq c'_2 |u_t|,$$

et donc

$$h^2(u_t) \leq c'_2 u_t h(u_t), \quad (2.4.4)$$

ainsi, (2.4.1) est établi.

Cas 2 : h_0 est non linéaire sur $[0, \varepsilon]$.

Nous établissons ce cas, en empruntant certaines idées de [37]. Donc, nous supposons d'abord que $\max\{r_2, h_0(r_2)\} < \varepsilon$; sinon, nous prenons r_2 plus petit. Soit $\varepsilon_1 = \min\{r_2, h_0(r_2)\}$. En utilisant (G3), nous avons, pour $\varepsilon_1 \leq |s| \leq \varepsilon$

$$|h(s)| \leq \frac{h_0^{-1}(|s|)}{|s|} |s| \leq \frac{h_0^{-1}(|\varepsilon|)}{|\varepsilon_1|} |s|,$$

et

$$|h(s)| \geq \frac{h_0(|s|)}{|s|} |s| \geq \frac{h_0(|\varepsilon_1|)}{|\varepsilon|} |s|.$$

Ainsi, nous déduisons que

$$\left\{ \begin{array}{l} h_0(|s|) \leq |h(s)| \leq h_0^{-1}(|s|) \text{ pour tout } |s| < \varepsilon_1, \\ c'_1 |s| \leq |h(s)| \leq c'_2 |s| \text{ pour tout } |s| \geq \varepsilon_1. \end{array} \right. \quad (2.4.5)$$

Ensuite, (2.4.5), nous donne, pour tout $|s| \leq \varepsilon_1$

$$H(h^2(s)) = |h(s)|h_0(|h(s)|) \leq sh(s),$$

ce qui donne

$$h^2(s) \leq H^{-1}(sh(s)) \text{ pour tout } |s| \leq \varepsilon_1. \quad (2.4.6)$$

Maintenant, nous définissons la partition suivante qui a été introduite pour la première fois par Komornik [33] :

$$\Gamma_{11} = \{x \in \Gamma_1 : |u_t(t)| > \varepsilon_1\}, \quad \Gamma_{12} = \{x \in \Gamma_1 : |u_t(t)| \leq \varepsilon_1\}.$$

En utilisant (2.4.5), nous obtenons sur Γ_{12}

$$u_t h(u_t(t)) \leq \varepsilon_1 h_0^{-1}(\varepsilon_1) \leq h_0(r_2) r_2 = H(r_2^2). \quad (2.4.7)$$

Ensuite, l'inégalité de Jensen donne (notons que H^{-1} est concave)

$$H^{-1}(J(t)) \geq c \int_{\Gamma_{12}} H^{-1}(u_t(t) h(u_t(t))) d\Gamma. \quad (2.4.8)$$

Ainsi, en combinant (2.4.6) et (2.4.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} h^2(u_t(t)) d\Gamma &= \int_{\Gamma_{12}} h^2(u_t(t)) d\Gamma + \int_{\Gamma_{11}} h^2(u_t(t)) d\Gamma \\ &\leq \int_{\Gamma_{12}} H^{-1}(u_t h(u_t(t))) d\Gamma + \int_{\Gamma_{11}} h^2(u_t(t)) d\Gamma \\ &\leq cH^{-1}(J(t)) - cE'(t). \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Lemme 2.4.2. *Supposons que (G1) – (G3) sont vérifiées et que h_0 est linéaire.*

Alors, la fonctionnelle énergie satisfait l'estimation suivante

$$\int_0^{+\infty} E(s)ds < \infty. \quad (2.4.10)$$

Démonstration. Soit $F(t) = L(t) + \psi_3(t)$, alors en utilisant (2.3.8), (2.3.12), nous obtenons

$$F'(t) \leq -(1-\ell) \int_{\Omega} |\nabla u| dx - \int_{\Omega} u_t^2 dx - \frac{1}{4} (go \nabla u)(t) + c \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma + N_1 \int_{\Omega} |u|^{\gamma+2} dx. \quad (2.4.11)$$

En utilisant (2.2.7), (2.4.1) et (2.4.11), nous obtenons

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -bE(t) + c \int_{\Omega} u_t h(u_t) dx \\ &\leq -bE(t) - cE'(t), \end{aligned}$$

où b est une constante positive. Par conséquent,

$$b \int_{t_1}^t E(s)ds \leq F_1(t_1) - F_1(t) \leq F_1(t_1) < \infty,$$

où $F_1(t) = F(t) + cE(t) \sim E$.

Définissons

$$I(t) := - \int_{t_1}^t g'(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \leq -cE'(t). \quad (2.4.12)$$

Lemme 2.4.3. *Sous les hypothèses et (G1) – (G3), nous avons les estimations suivantes*

$$\int_{t_1}^t g(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \leq \frac{1}{q} \overline{G}^{-1} \left(\frac{qI(t)}{\xi(t)} \right), \text{ si } h_0 \text{ est linéaire} \quad (2.4.13)$$

$$\int_{t_1}^t g(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \leq \frac{(t-t_1)}{q} \overline{G}^{-1} \left(\frac{qI(t)}{(t-t_1)\xi(t)} \right), \quad \text{si } h_0 \text{ est non linéaire} \quad (2.4.14)$$

où $q \in (0, 1)$ et $\overline{G}$ est une extension de G telle que $\overline{G}$ est strictement croissante, strictement convexe et C^2 sur $(0, \infty)$; (voir Remarque 2.2.6).

Démonstration. Établissons d'abord (2.4.13). Pour cela, définissons la quantité suivante

$$\lambda(t) := q \int_{t_1}^t \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds, \quad (2.4.15)$$

où, par (2.4.10), q est choisi suffisamment petit pour que, pour tout $t \geq t_1$

$$\lambda(t) < 1.$$

Comme G est strictement convexe sur $(0, r_1]$ et $G(0) = 0$, alors

$$G(\theta z) \leq \theta G(z), \quad 0 \leq \theta \leq 1 \text{ et } z \in (0, r_1]. \quad (2.4.16)$$

L'utilisation de (2.2.2), (2.4.15), et (2.4.16) et l'inégalité de Jensen nous donnent

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{q\lambda(t)} \int_{t_1}^t \lambda(t) (-g'(s)) \int_{\Omega} q |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \\ &\geq \frac{1}{q\lambda(t)} \int_{t_1}^t \lambda(t) \xi(s) G(g(s)) \int_{\Omega} q |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \\ &\geq \frac{\xi(t)}{q\lambda(t)} \int_{t_1}^t G(\lambda(t)g(s)) \int_{\Omega} q |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \\ &\geq \frac{\xi(t)}{q} G \left(q \int_{t_1}^t g(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \right) \\ &= \frac{\xi(t)}{q} \overline{G} \left(q \int_{t_1}^t g(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 dx ds \right). \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

Cela implique (2.4.13).

Pour la démonstration de (2.4.14) nous définissons la quantité suivante

$$\lambda_1(t) := \frac{q}{(t-t_1)} \int_{t_1}^t \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds,$$

puis en utilisant (2.2.5) et (2.2.7) nous deduisant aisement que

$$\lambda_1(t) \leq \frac{8qE(0)}{\ell},$$

choisissant alors $q \in (0, 1)$ suffisamment petit pour que, pour tout $t \geq t_1$

$$\lambda_1(t) < 1. \tag{2.4.18}$$

L'utilisation de (2.2.2), (2.4.16) et (2.4.18) et l'inégalité de Jensen nous donnent

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{q\lambda_1(t)} \int_{t_1}^t \lambda_1(t) (-g'(s)) \int_{\Omega} q |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \\ &\geq \frac{1}{q\lambda_1(t)} \int_{t_1}^t \lambda_1(t) \xi(s) G(g(s)) \int_{\Omega} q |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \\ &\geq \frac{\xi(t)}{q\lambda_1(t)} \int_{t_1}^t G(\lambda_1(t)g(s)) \int_{\Omega} q |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \\ &\geq \frac{(t-t_1)\xi(t)}{q} G\left(\frac{q}{(t-t_1)} \int_{t_1}^t g(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds\right) \\ &= \frac{(t-t_1)\xi(t)}{q} \overline{G}\left(\frac{q}{(t-t_1)} \int_{t_1}^t g(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds\right). \end{aligned}$$

Cela implique que

$$\int_{t_1}^t g(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \leq \frac{(t-t_1)}{q} \overline{G}^{-1}\left(\frac{qI(t)}{(t-t_1)\xi(t)}\right).$$

Théorème 2.4.4. *Soit $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$ donné. Supposons que (G1) – (G3) soient satisfaites et que h_0 soit linéaire. Alors il existe des constantes strictement*

positives c_1, c_2, k_1 et k_2 telles que la solution de (2.1.1) satisfait, pour tout $t \geq t_1$

$$E(t) \leq c_1 e^{-c_2 \int_{t_1}^t \xi(s) ds}, \quad \text{si } G \text{ est linéaire} \quad (2.4.19)$$

$$E(t) \leq k_2 G_1^{-1} \left(k_1 \int_{t_1}^t \xi(s) ds \right), \quad \text{si } G \text{ est non linéaire}, \quad (2.4.20)$$

$$\text{où } G_1(t) = \int_t^{r_1} \frac{1}{s G'(s)} ds.$$

Démonstration. Cas 1 : G est linéaire.

En multipliant (2.3.12) par $\xi(t)$ et en utilisant (2.2.2), (2.2.7), (2.4.1), (2.4.3) et (2.4.12), nous obtenons

$$\begin{aligned} \xi(t) L'(t) &\leq -m\xi(t)E(t) + c\xi(t) \int_{t_1}^t g(t-s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 dx ds + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t(t)) d\Gamma \\ &\leq -m\xi(t)E(t) + c \int_{t_1}^t \xi(s)g(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 dx ds + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t(t)) d\Gamma \\ &\leq -m\xi(t)E(t) - c \int_{t_1}^t g'(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 dx ds + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} u_t h(u_t(t)) d\Gamma \\ &\leq -m\xi(t)E(t) - cE'(t) - c\xi(t)E'(t) \\ &\leq -m\xi(t)E(t) - cE'(t) - c\xi(0)E'(t) \\ &\leq -m\xi(t)E(t) - cE'(t) \end{aligned}$$

ce qui donne, comme $\xi(t)$ est décroissante,

$$(\xi L + 2cE)' \leq -m\xi(t)E(t), \quad \forall t \geq t_1. \quad (2.4.21)$$

Ainsi, en utilisant le fait que $\xi L + 2cE \sim E$, nous obtenons facilement

$$E(t) \leq c_1 e^{-c_2 \int_{t_1}^t \xi(s) ds}. \quad (2.4.22)$$

Cas 2 : G est non linéaire.

En utilisant (2.3.12), (2.4.1) et (2.4.13), nous obtenons

$$L'(t) \leq -mE(t) + c(\overline{G})^{-1} \left(\frac{qI(t)}{\xi(t)} \right) - cE'(t). \quad (2.4.23)$$

Soit $\mathcal{F}_1(t) = L(t) + cE(t) \sim E$, alors (2.4.23) devient

$$\mathcal{F}_1'(t) \leq -mE(t) + c(\overline{G})^{-1} \left(\frac{qI(t)}{\xi(t)} \right), \quad (2.4.24)$$

nous trouvons que la fonctionnelle $\mathcal{F}_2$, définie par

$$\mathcal{F}_2(t) := \overline{G}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \mathcal{F}_1(t),$$

satisfait, pour certains $\alpha_1, \alpha_2 > 0$

$$\alpha_1 \mathcal{F}_2(t) \leq E(t) \leq \alpha_2 \mathcal{F}_2(t), \quad (2.4.25)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2'(t) &= \varepsilon_0 \frac{E'(t)}{E(0)} \overline{G}'' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \mathcal{F}_1(t) + \overline{G}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \mathcal{F}_1'(t) \\ &\leq -mE(t) \overline{G}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c \overline{G}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \overline{G}^{-1} \left(\frac{qI(t)}{\xi(t)} \right). \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

Soit $\overline{G}^*$ la conjuguée convexe de $\overline{G}$ au sens de Young (voir [9]), alors

$$\overline{G}^*(s) = s(\overline{G}')^{-1}(s) - \overline{G} \left[(\overline{G}')^{-1}(s) \right], \quad \text{si } s \in (0, \overline{G}'(r_1)] \quad (2.4.27)$$

et $\overline{G}^*$ satisfait l'inégalité généralisée de Young suivante

$$AB \leq \overline{G}^*(A) + \overline{G}(B), \quad \text{si } A \in \left(0, \overline{G}'(r_1)\right], \quad B \in (0, r_1]. \quad (2.4.28)$$

Ainsi, avec $A = \overline{G}'\left(\varepsilon_0 \frac{E'(t)}{E(0)}\right)$ et $B = \overline{G}^{-1}\left(\frac{qI(t)}{\xi(t)}\right)$ et en utilisant (2.2.7) et (2.4.26) – (2.4.28), nous obtenons

$$\mathcal{F}_2'(t) \leq -mE(t)\overline{G}'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) + c\overline{G}^*\left(\overline{G}'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right)\right) + c\left(\frac{qI(t)}{\xi(t)}\right). \quad (2.4.29)$$

Ainsi, en multipliant (2.4.29) par $\xi(t)$ et en utilisant le fait que $\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} < r_1$, $\overline{G}'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) = G'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right)$, donne

$$\begin{aligned} \xi(t)\mathcal{F}_2'(t) &\leq -m\xi(t)E(t)G'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) + c\xi(t)\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}G'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) + cqI(t) \\ &\leq -m\xi(t)E(t)G'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) + c\xi(t)\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}G'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) - cE'(t). \end{aligned}$$

En conséquence, avec un choix approprié de ε_0 , nous obtenons, pour tous $t \geq t_1$

$$\mathcal{F}_3'(t) \leq -k\xi(t)\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right)G'\left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) = -k\xi(t)G_2\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right), \quad (2.4.30)$$

où $\mathcal{F}_3 = \xi\mathcal{F}_2 + cE \sim E$ et $G_2(t) = tG'(\varepsilon_0 t)$. Puisque $G_2'(t) = G'(\varepsilon_0 t) + \varepsilon_0 tG''(\varepsilon_0 t)$ alors, en utilisant la convexité stricte de G sur $(0, r_1]$, nous trouvons que $G_2'(t)$, $G_2(t) > 0$ sur $(0, 1]$. Ainsi, avec

$$R(t) = \varepsilon \frac{\alpha_1 \mathcal{F}_3(t)}{E(0)}, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

en tenant compte de (2.4.25) et (2.4.30), nous avons

$$R(t) \sim E(t), \quad (2.4.31)$$

et, pour un certain $k_1 > 0$.

$$R'(t) \leq -k_1 \xi(t) G_2(R(t)), \quad \forall t \geq t_1,$$

puis, l'intégration sur (t_1, t) donne

$$\int_{t_1}^t \frac{-R'(s)}{G_2(R(s))} ds \geq k_1 \int_{t_1}^t \xi(s) ds.$$

Ainsi, par un changement de variable approprié, nous obtenons

$$\int_{\varepsilon_0 R(t)}^{\varepsilon_0 R(t_1)} \frac{1}{\tau G'(\tau)} d\tau \geq k_1 \int_{t_1}^t \xi(s) ds,$$

ainsi, nous avons

$$R(t) \leq \frac{1}{\varepsilon_0} G_1^{-1} \left(k_1 \int_{t_1}^t \xi(s) ds \right),$$

où $G_1(t) = \int_t^{r_1} \frac{1}{s G'(s)} ds$. Ici, nous avons utilisé le fait que G_1 décroît strictement sur $(0, r_1]$. Par conséquent, (2.4.20) est établi grâce à (2.4.31).

Remarque 2.4.5. *Le taux de décroissance de $E(t)$ donné par (2.2.2) est optimal car il est cohérent avec le taux de décroissance de $g(t)$ donné par (2.4.20). En fait,*

$$g(t) \leq G_0^{-1} \left(\int_{g^{-1}(r_1)}^t \xi(s) ds \right), \quad \forall t \geq g^{-1}(r_1),$$

où $G_0(t) = \int_t^r \frac{1}{G(s)} ds$.

En utilisant les propriétés de G , G_0 et G_1 , nous pouvons voir que

$$G_1(t) = \int_t^{r_1} \frac{1}{sG'(s)} ds \leq \int_t^{r_1} \frac{1}{G(s)} ds = G_0(t),$$

ce qui implique

$$G_1^{-1}(t) \leq G_0^{-1}(t).$$

Cela montre que (2.4.20) fournit les meilleurs taux de décroissance attendus en vertu de l'hypothèse très générale (2.2.2).

Théorème 2.4.6. Soit $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$ donné. Supposons que (G1) – (G3) sont satisfaites et que h_0 soit non linéaire. Alors il existe des constantes strictement positives c_3 , c_4 , k_2 , k_3 et ε_2 telles que la solution de (2.1.1) satisfait, pour tout $t \geq t_1$,

$$E(t) \leq H_1^{-1} \left(c_3 \int_{t_1}^t \xi(s) ds + c_4 \right), \text{ si } G \text{ est linéaire,} \quad (2.4.32)$$

où $H_1(t) = \int_t^1 \frac{1}{H_2(s)} ds$.

$$E(t) \leq k_3 (t - t_1) W_2^{-1} \left(\frac{k_2}{(t - t_1) \int_{t_1}^t \xi(s) ds} \right), \text{ si } G \text{ est non linéaire,} \quad (2.4.33)$$

où $H_2(t) = tH'(\varepsilon_1 t)$, et $W_2(t) = tW'(\varepsilon_2 t)$ avec $W = \left(\overline{G}^{-1} + \overline{H}^{-1} \right)^{-1}$.

Démonstration. Cas 1 : G est linéaire.

En multipliant (2.3.12) par $\xi(t)$ et en utilisant Eq. (2.4.2), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\xi(t)L'(t) &\leq -m\xi(t)E(t) + c\xi(t) \int_{t_1}^t g(t-s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 dx ds + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t(t)) d\Gamma \\
&\leq -m\xi(t)E(t) - cE'(t) + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t(t)) d\Gamma \\
&\leq -m\xi(t)E(t) - cE'(t) + c\xi(t)H^{-1}(J(t)) - c\xi(t)E'(t) \\
&\leq -m\xi(t)E(t) - cE'(t) + c\xi(t)H^{-1}(J(t)) - c\xi(0)E'(t) \\
&\leq -m\xi(t)E(t) - cE'(t) + c\xi(t)H^{-1}(J(t)),
\end{aligned}$$

ce qui donne, comme $\xi(t)$ est décroissante,

$$(\xi L + cE)' \leq -m\xi(t)E(t) + c\xi(t)H^{-1}(J(t)), \quad \forall t \geq t_1. \quad (2.4.34)$$

Par conséquent, (2.4.34) devient

$$\mathcal{L}'(t) \leq -m\xi(t)E(t) + c\xi(t)H^{-1}(J(t)), \quad \forall t \geq t_1, \quad (2.4.35)$$

où $\mathcal{L} := \xi L + 2cE$, qui est clairement équivalent à E . Maintenant, pour $\varepsilon_1 < r_2$ et $c_0 > 0$, en utilisant (2.4.35) et le fait que $E' \leq 0$, $H' > 0$, $H'' > 0$ sur $(0, r_2]$, nous trouvons que la fonctionnelle $\mathcal{L}_1$, définie par

$$\mathcal{L}_1(t) := H' \left(\varepsilon_1 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \mathcal{L}(t) + c_0 E(t),$$

satisfait, pour certains $\alpha_3, \alpha_4 > 0$

$$\alpha_3 \mathcal{L}_1(t) \leq E(t) \leq \alpha_4 \mathcal{L}_1(t), \quad (2.4.36)$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_1(t) &= \varepsilon_0 \frac{E'(t)}{E(0)} H'' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \mathcal{L}(t) + H' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \mathcal{L}'(t) + c_0 E'(t) \\ &\leq -mE(t) H' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c\xi(t) H' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) H^{-1}(J(t)) + c_0 E'(t).\end{aligned}\quad (2.4.37)$$

Soit H^* le conjugué convexe de H au sens de Young (voir [9]), alors, comme dans (2.4.27) et (2.4.28), avec $A = H' \left(\varepsilon_1 \frac{E(t)}{E(0)} \right)$ et $B = H^{-1}(J(t))$, en utilisant (2.2.7) et (2.4.7) nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_1(t) &\leq -mE(t) H' \left(\varepsilon_1 \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c\xi(t) H^* \left(H' \left(\varepsilon_1 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \right) + c\xi(t) J(t) + c_0 E'(t) \\ &\leq -mE(t) H' \left(\varepsilon_1 \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c\varepsilon_1 \xi(t) \frac{E(t)}{E(0)} H' \left(\varepsilon_1 \frac{E(t)}{E(0)} \right) - cE'(t) + c_0 E'(t).\end{aligned}$$

Par conséquent, avec un choix approprié de ε_1 et c_0 , nous obtenons, pour tout $t \geq t_1$,

$$\mathcal{L}'_1(t) \leq -c\xi(t) \frac{E'(t)}{E(0)} H' \left(\varepsilon_1 \frac{E(t)}{E(0)} \right) = -c\xi(t) H_2 \left(\varepsilon_1 \frac{E(t)}{E(0)} \right), \quad (2.4.38)$$

où $H_2(t) = tH'(\varepsilon_1 t)$. Puisque $H'_2(t) = H'(\varepsilon_1 t) + \varepsilon_1 t H''(\varepsilon_1 t)$, alors, en utilisant la convexité stricte de H sur $(0, r_2]$, nous trouvons que $H'_2(t), H_2(t) > 0$ sur $(0, 1]$.

Ainsi, avec

$$R_1(t) = \varepsilon \frac{\alpha_3 \mathcal{L}_1(t)}{E(0)}, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

en tenant compte de (2.4.36) et (2.4.38), nous avons

$$R_1(t) \sim E(t),$$

et, pour certains $c_3 > 0$

$$R'_1(t) \leq -c_3 \xi(t) H_2(R_1(t)), \quad \forall t \geq t_1,$$

alors, une simple intégration donne, pour certains $c_4 > 0$

$$R_1(t) \leq H_1^{-1} \left(c_3 \int_{t_1}^t \xi(s) ds + c_4 \right), \quad \forall t \geq t_1,$$

où $H_1(t) = \int_t^1 \frac{1}{H_2(s)} ds$.

Cas 2. G est non linéaire.

En utilisant (2.3.12), (2.4.2) et (2.4.14), nous obtenons

$$L'(t) \leq -mE(t) + c(t - t_1) (\overline{G})^{-1} \left(\frac{qI_1(t)}{(t - t_1) \xi(t)} \right) + cH^{-1}(J(t)) - cE'(t). \quad (2.4.39)$$

Puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t - t_1} = 0$, il existe $t_2 > t_1$ tel que $\frac{1}{t - t_1} < 1$ chaque fois que $t > t_2$.

En combinant cela avec les propriétés strictement croissantes et strictement convexes de $\overline{H}$, en posant $\theta = \frac{1}{t - t_1} < 1$ et en utilisant (2.4.16), nous obtenons

$$\overline{H}^{-1}(J(t)) \leq (t - t_1) \overline{H}^{-1} \left(\frac{J(t)}{(t - t_1)} \right), \quad \forall t \geq t_2,$$

et, alors, (2.4.39) devient

$$L'(t) \leq -mE(t) + c(t - t_1) (\overline{G})^{-1} \left(\frac{qI_1(t)}{(t - t_1) \xi(t)} \right) + c(t - t_1) \overline{H}^{-1} \left(\frac{J(t)}{(t - t_1)} \right) - cE'(t), \quad \forall t \geq t_2. \quad (2.4.40)$$

Soit $L_1(t) = L(t) + cE(t) \sim E$, alors (2.4.40) prend la forme

$$L'_1(t) \leq -mE(t) + c(t - t_1) (\overline{G})^{-1} \left(\frac{qI_1(t)}{(t - t_1) \xi(t)} \right) + c(t - t_1) \overline{H}^{-1} \left(\frac{J(t)}{(t - t_1)} \right). \quad (2.4.41)$$

Soit $r_0 = \min \{r_1, r_2\}$, $\chi(t) = \max \left\{ \frac{qI_1(t)}{(t - t_1) \xi(t)}, \frac{J(t)}{(t - t_1)} \right\}$ et $W = ((\overline{G})^{-1} + (\overline{H})^{-1})^{-1}$.

Ainsi, (2.4.41) se réduit à

$$L_1'(t) \leq -mE(t) + c(t - t_1) W^{-1}(\chi(t)), \quad \forall t \geq t_2.$$

Maintenant, pour $\varepsilon_2 < r_0$ et en utilisant (2.4.39) et le fait que $E' \leq 0$, $W' > 0$, $W'' > 0$ sur $(0, r_0]$, nous trouvons que la fonctionnelle L_2 , définie par

$$L_2(t) := W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) L_1(t), \quad \forall t \geq t_2,$$

satisfait, pour certains $\alpha_5, \alpha_6 > 0$

$$\alpha_5 L_2(t) \leq E(t) \leq \alpha_6 L_2(t),$$

et, pour tout $t \geq t_2$

$$\begin{aligned} L_2'(t) &= \left(\frac{-\varepsilon_2}{(t - t_1)^2} \frac{E(t)}{E(0)} + \frac{\varepsilon_2}{(t - t_1)} \frac{E'(t)}{E(0)} \right) W'' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) L_1(t) + W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) L_1'(t) \\ &\leq -mE(t) W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c(t - t_1) W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) W^{-1}(\chi(t)). \end{aligned} \quad (2.4.42)$$

Soit W^* le conjugué convexe de W au sens de Young (voir [9]), alors, comme dans (2.4.27) et (2.4.28), et avec $A = W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right)$ et $B = W^{-1}(\chi(t))$, en utilisant (2.2.7), nous arrivons à

$$\begin{aligned} L_2'(t) &\leq -mE(t) W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c(t - t_1) W^* \left(W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) \right) + c(t - t_1) \chi(t) \\ &\leq -mE(t) W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c(t - t_1) \frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) \\ &\quad + c(t - t_1) \chi(t). \end{aligned} \quad (2.4.43)$$

En utilisant (2.4.3) et (2.4.12), nous observons que

$$\begin{aligned}
 (t - t_1) \xi(t) \chi(t) &\leq qI(t) + \xi(t)J(t) \\
 &\leq qI(t) + \xi(0)J(t) \\
 &\leq -cE'(t) - cE'(t) \\
 &\leq -cE'(t).
 \end{aligned}$$

Ainsi, en multipliant (2.4.43) par $\xi(t)$ et en utilisant le fait que, $\varepsilon_2 \frac{E(t)}{E(0)} < r_0$, on obtient

$$\xi(t)L'_2(t) \leq -m\xi(t)E(t)W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c\varepsilon_2 \xi(t) \cdot \frac{E(t)}{E(0)} W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) - cE'(t), \quad \forall t \geq t_2.$$

En utilisant la propriété de décroissance de ξ , on obtient, pour tout $t \geq t_2$,

$$(\xi(t)L_2 + cE)'(t) \leq -m\xi(t)E(t)W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c\varepsilon_2 \xi(t) \frac{E(t)}{E(0)} W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right).$$

Par conséquent, en posant $L_3 := \xi(t)L_2 + cE \sim E$, on obtient

$$L'_3(t) \leq -m\xi(t)E(t)W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c\varepsilon_2 \xi(t) \cdot \frac{E(t)}{E(0)} W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right)$$

Cela donne, pour un choix approprié de ε_2 ,

$$L'_3(t) \leq -k\xi(t) \left(\frac{E(t)}{E(0)} \right) W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right), \quad \forall t \geq t_2,$$

ou

$$k\xi(t) \left(\frac{E(t)}{E(0)} \right) W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) \leq -L'_3(t), \quad \forall t \geq t_2, \quad (2.4.44)$$

une intégration de (2.4.44) donne

$$\int_{t_2}^t k \left(\frac{E(s)}{E(0)} \right) W' \left(\frac{\varepsilon_2}{s - t_1} \cdot \frac{E(s)}{E(0)} \right) \xi(s) ds \leq - \int_{t_2}^t L'_3(s) ds \leq L_3(t_2).$$

En utilisant le fait que $W', W'' > 0$ et la propriété de décroissance de E , nous déduisons que la fonction $t \mapsto E(t)W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right)$ est décroissante et par conséquent, nous avons

$$k \left(\frac{E(t)}{E(0)} \right) W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) \int_{t_2}^t \xi(s) ds \leq \int_{t_2}^t k \left(\frac{E(s)}{E(0)} \right) W' \left(\frac{\varepsilon_2}{s - t_1} \cdot \frac{E(s)}{E(0)} \right) \xi(s) ds \leq L_3(t_2). \quad (2.4.45)$$

En multipliant chaque membre de (2.4.45) par $\frac{1}{t - t_1}$, nous avons

$$k \left(\frac{1}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) \int_{t_1}^t \xi(s) ds \leq \frac{k_2}{t - t_1}, \quad \forall t \geq t_2. \quad (2.4.46)$$

Ensuite, posons $W_2(t) = tW'(\varepsilon_2 t)$ qui est strictement croissante, alors nous obtenons,

$$kW_2 \left(\frac{1}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) \int_{t_1}^t \xi(s) ds \geq \frac{k_2}{t - t_1}, \quad \forall t \geq t_2. \quad (2.4.47)$$

Enfin, pour deux constantes positives k_2 et k_3 , nous obtenons

$$E(t) \leq k_3 (t - t_1) W_2^{-1} \left(\frac{k_2}{(t - t_1) \int_{t_1}^t \xi(s) ds} \right). \quad (2.4.48)$$

Cela termine la démonstration.

2.5 Résultats Numériques

Dans cette section, nous réalisons quelques expériences numériques pour illustrer les résultats théoriques des Théorèmes 2.4.4 et 2.4.6. A cette fin, nous discrétisons le

système (2.1.1) en utilisant une méthode des différences finies (MDF) à la fois dans le temps et dans l'espace. En considérant un domaine rectangulaire dans $\mathbb{R}^2$, donc on exprime le domaine espace-temps comme suit : $[0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, T] = [0, 2] \times [0, 1] \times [0, 50]$. L'intervalle spatial $(0, 2)$ est divisé en 20 sous-intervalles et l'intervalle spatial $(0, 1)$ est divisé en 10 sous-intervalles tandis que l'intervalle temporel $(0, 50)$ est divisé en 700 sous-intervalles, avec $h(u_t) = u_t$, $\gamma = 2$ et $g(t) = e^{-t}$.

La condition aux limites du problème (2.1.1) est donnée, en utilisant les conditions initiales suivantes : $u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$; $u_t(x, y, 0) = 0$.

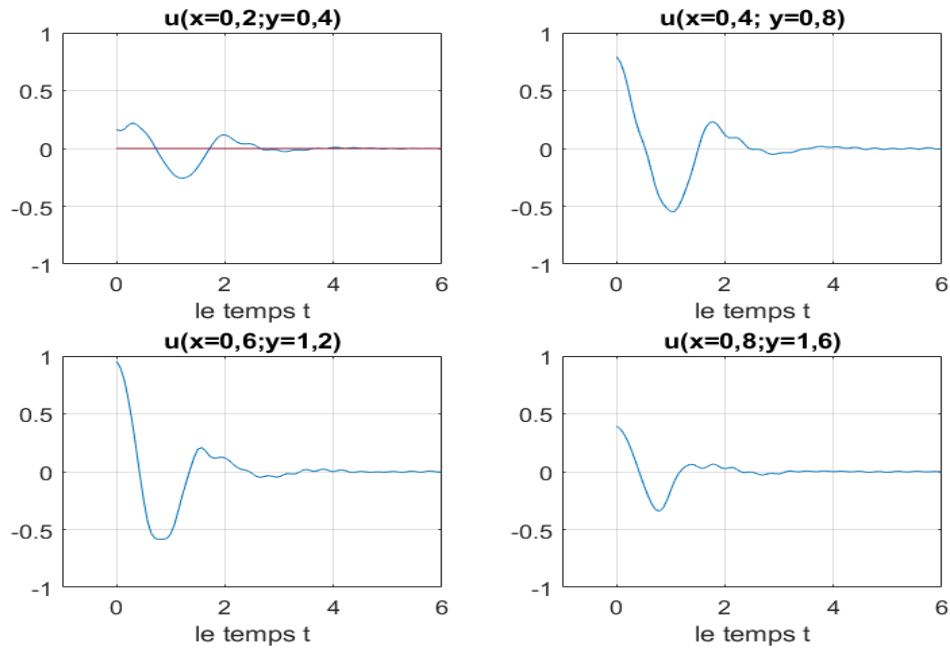


FIGURE 2.1 – La solution du système pour différents points du plan

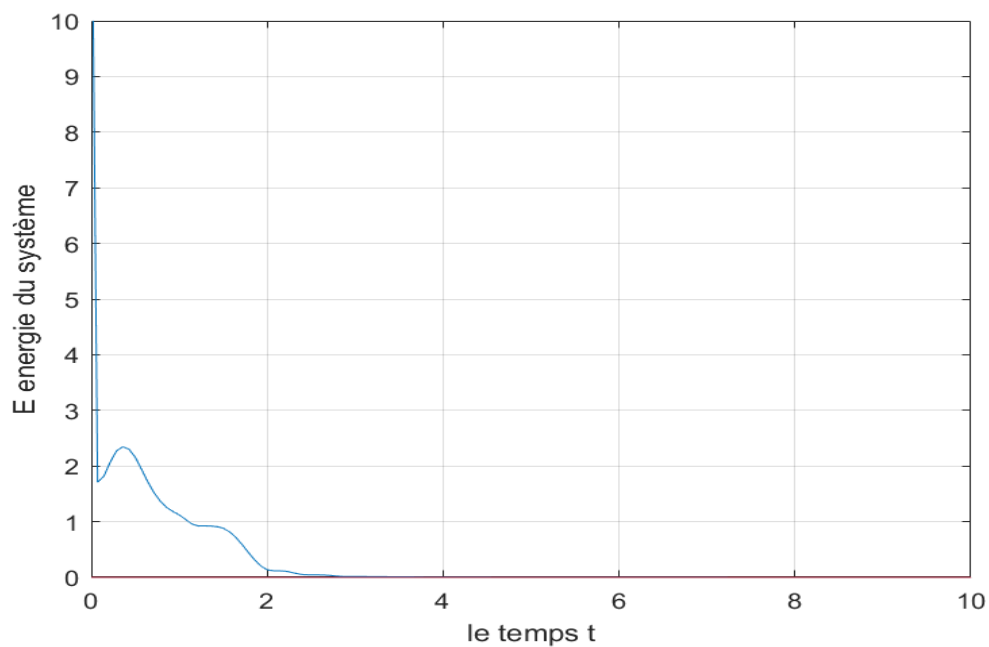


FIGURE 2.2 – L'energie du système

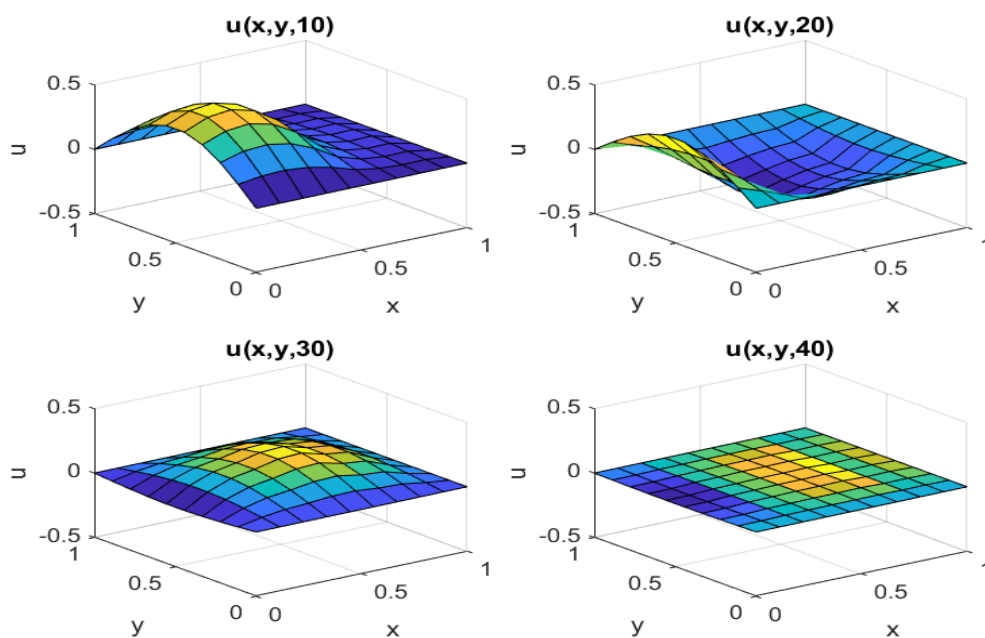


FIGURE 2.3 – La solution du système pour différents instants

Chapitre 3

Résultat général de décroissance pour un problème viscoélastique avec une source logarithmique et un contrôle frontière de type mémoire

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons le problème aux limites viscoélastique d'équation (3.1.1), avec une source non linéaire de type logarithmique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-\tau) \Delta u(\tau) d\tau = |u|^{\gamma-2} u \ln |u|, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t g(t-\tau) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\tau) d\tau + h(u_t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x); u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Ici, Γ_0 et Γ_1 sont fermés et disjoints, avec $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$, ν est la normale extérieure unitaire à $\partial\Omega$. La fonction $u(x, t)$ décrit la position de la particule matérielle au temps t , qui est fixée dans la partie Γ_0 de sa frontière avec sa partie Γ_1 supportée par des supports élastiques avec des réponses de bord non linéaires, représentées par la fonction $h(u_t)$. Les fonctions g , h et la constante γ doivent satisfaire les hypothèses suivantes :

(G1) $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction C^1 décroissante qui satisfait

$$g(0) > 0, \quad 1 - \int_0^\infty g(s) ds = l > 0, \quad (3.1.2)$$

et il existe une fonction C^1 $G : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ qui est linéaire ou strictement croissante et strictement convexe C^2 sur $(0, r_1]$, $r_1 \leq g(0)$, avec $G(0) = G'(0) = 0$, telle que

$$g'(t) \leq -\xi(t)G(g(t)), \quad t \geq 0, \quad (3.1.3)$$

où $\xi(t)$ est une fonction positive décroissante différentiable.

(G2) Pour le terme non linéaire, nous supposons

$$2 < \gamma \leq \frac{2(n-1)}{(n-2)}, \quad n \geq 3,$$

$$\gamma > 2, \quad n = 1, 2.$$

(G3) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^0 croissante telle qu'il existe une fonction strictement croissante $h_0 \in C^1([0, +\infty))$, avec $h_0(0) = 0$, et des constantes positives c_1, c_2, ϵ telles que

$$\begin{cases} h_0(|s|) \leq |h(s)| \leq h_0^{-1}(|s|), & \text{pour tout } |s| \leq \epsilon, \\ c_1 |s| \leq |h(s)| \leq c_2 |s|, & \text{pour tout } |s| \geq \epsilon. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

De plus, nous supposons que la fonction H , définie par $H(s) = \sqrt{s}h_0(\sqrt{s})$, est une fonction strictement convexe C^2 sur $(0, r_2]$, pour un certain $r_2 > 2$, lorsque h_0 est non linéaire. De plus, l'hypothèse (G3) implique que $sh(s) > 0$, pour tout $s \neq 0$.

Nous nous intéressons à un nouveau résultat de décroissance d'énergie pour les solutions du problème (3.1.1). L'originalité du travail de ce chapitre est d'étendre le résultat dans le contexte de la viscoélasticité, de la source non linéaire de type logarithmique et lorsque l'amortissement de la frontière est pris en compte. Ce travail constitue une extension des résultats obtenus dans [30].

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2, nous présentons les hypothèses et le matériel nécessaire à notre étude. La section 3 est consacrée à l'énoncé et à la démonstration de quelques lemmes techniques qui sont fondamentales pour le reste du travail. Les démonstrations des résultats principaux sont fournies dans la section 4.

3.2 Préliminaires

Dans cette section, nous introduisons quelques notations et lemmes qui seront utilisés dans ce chapitre. Par la suite, c est utilisé pour représenter une constante positive générique. Définissons tout d'abord l'espace

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

Nous utiliserons l'injection : $V \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour $2 < q \leq \frac{2n}{(n-2)}$, si $n \geq 3$ et $q \geq 2$, si $n = 1, 2$; et l'injection $L^r(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, pour $q < r$. Nous utiliserons, dans ce cas, la même constante optimale d'inclusion de Sobolev noté $C_q > 0$ et on écrit alors :

$$\|u\|_q \leq C_q \|\nabla u\|_2 \text{ et } \|u\|_q \leq C_q \|u\|_r, \quad (3.2.1)$$

et nous utilisons l'injection de trace-Sobolev : $V \hookrightarrow L^k(\Gamma_1)$, $1 \leq k < \frac{2(n-1)}{n-2}$. Dans ce cas, la constante d'inclusion est notée B_1 , c'est-à-dire

$$\|u\|_{k,\Gamma_1} \leq B_1 \|\nabla u\|_2. \quad (3.2.2)$$

A présent, nous énonçons les hypothèses pour le problème (3.1.1) comme suit.

Soit

$$(g \circ v)(t) = \int_0^t g(t - \tau) \|v(t) - v(\tau)\|_2^2 d\tau, \quad (3.2.3)$$

$$k_\alpha(t) = \alpha g(t) - g'(t),$$

et

$$C_\alpha = \int_0^\infty \frac{g^2(s)}{k_\alpha(s)} ds.$$

En suivant un raisonnement similaire à celui présenté dans [55], nous obtenons les

résultats suivants, qui sont essentiels pour la démonstration de notre résultat principal.

Lemme 3.2.1. *Pour tout $\alpha > 0$ et $z \in L^2_{loc}(0, \infty; L^2(\Omega))$*

$$\left\| \int_0^t g(t-s)(z(s) - z(t)) ds \right\|^2 \leq C_\alpha(k_\alpha \circ z)(t), \quad (3.2.4)$$

et

$$\left\| \int_0^t g'(t-s)(z(s) - z(t)) ds \right\|^2 \leq 2 \left(\int_0^t k_\alpha(s) ds \right) (k_\alpha \circ z)(t) + 2\alpha^2 C_\alpha(k_\alpha \circ z)(t). \quad (3.2.5)$$

Pour traiter le terme source logarithmique, nous définissons

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{l}{2} \|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{\gamma} \int_\Omega |u(x)|^\gamma \ln |u(x)| dx + \frac{1}{\gamma^2} \|u\|_\gamma^\gamma, \\ I(u) &= l \|\nabla u\|_2^2 - \int_\Omega |u(x)|^\gamma \ln |u(x)| dx, \\ d &= \inf_{u \in V \setminus \{0\}} \sup_{\xi > 0} J(\xi u). \end{aligned}$$

Alors, grâce à [30], nous avons

$$d = \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u),$$

où $\mathcal{N} = \{u \in V \setminus \{0\} \mid I(u) = 0\}$.

De la même manière que dans [30], nous utilisons le lemme auxiliaire ci-dessous plusieurs fois.

En utilisant la méthode de Galerkin et une procédure similaire à celle de [4, 17, 25, 30], nous pouvons obtenir le résultat d'existence suivant pour le problème (3.1.1).

Rappelons tout d'abord l'espace

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

Théorème 3.2.2. *Soit $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$ donné. Supposons que (G1) et (G2) sont satisfaits, $I(u_0) > 0$, et*

$$E(u_0, u_1) = \frac{l}{2} \|u_1\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 - \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} |u_0(x)|^\gamma \ln |u_0(x)| dx + \frac{1}{\gamma^2} \|u_0\|_\gamma^\gamma < d,$$

alors le problème (3.1.1) a une solution globale (faible) unique

$$u \in L^\infty(0, \infty; V) \text{ et } u_t \in L^2(0, \infty; V).$$

De plus, si

$$(u_0, u_1) \in (H^2(\Omega) \cap V) \times V,$$

et satisfait la condition de compatibilité

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} + h(u_1) = 0,$$

alors (3.1.1) a une solution globale (forte) unique

$$u \in L^\infty(0, \infty; H^2(\Omega) \cap V) \cap W^{1,\infty}(0, \infty; V) \cap W^{2,\infty}(0, \infty; L^2(\Omega)).$$

Introduisons également l'énergie du problème (3.1.1) définie par :

$$\begin{aligned} E(t) = E(u(t), u_t(t)) = & \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds\right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t) \\ & - \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} |u(x, t)|^\gamma \ln |u(x, t)| dx + \frac{1}{\gamma^2} \|u\|_\gamma^\gamma. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Il est facile de montrer que

$$\begin{aligned} E(t) &\geq \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t) + J(u(t)) \\ &= \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t) + \frac{l(\gamma-2)}{2\gamma} \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{\gamma^2} \|u\|_\gamma^\gamma + \frac{1}{\gamma} I(u(t)). \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Lemme 3.2.3. *Supposons que (G1) et (G2) sont vérifiées, et soit $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$ donné. Si u est la solution de (3.1.1), alors la fonctionnelle E satisfait*

$$E'(t) = \frac{1}{2} (g' \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2} g(t) \|\nabla u(t)\|_2^2 - \int_{\Gamma_1} u_t(t) h(u_t(t)) d\Gamma \leq 0, \quad (3.2.8)$$

pour presque tout $t \in [0, T]$.

Démonstration. En multipliant l'équation différentielle dans (3.1.1) par u_t et intégration sur Ω , en utilisant une intégration par parties et (G1), nous obtenons (3.2.8) pour toute solution régulière. Ceci reste valable pour les solutions faibles par un simple argument de densité (voir [12, 44, 45]) pour des calculs détaillés.

3.3 Lemmes techniques

Dans cette section, nous établissons plusieurs lemmes nécessaires à la démonstration de notre résultat principal.

Lemme 3.3.1. *Sous les hypothèses (G1) et (G2), pour $0 < \alpha < 1$ et pour $u(t)$ solution de (3.1.1), la fonctionnelle*

$$\Phi(t) := \int_{\Omega} u(t) u_t(t) dx,$$

satisfait l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &\leq \|u_t(t)\|_2^2 - \frac{\ell}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2 + \int_{\Omega} |u(x, t)|^\gamma \ln |u(x, t)| \, dx \\ &\quad + \frac{cC_\alpha}{2\ell} (k_\alpha \circ \nabla u)(t) + c \int_{\Gamma_1} h^2(u_t(t)) \, d\Gamma, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Démonstration. Des calculs directs, en utilisant (3.1.1) et l'inégalité de Young, donnent

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= \int_{\Omega} u_t^2 \, dx - \left(1 - \int_0^t g(s) \, ds\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Gamma_1} u h(u_t) \, d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t)) \, ds \, dx + \int_{\Omega} |u(x, t)|^\gamma \ln |u(x, t)| \, dx. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

En utilisant les inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \nabla u \cdot \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t)) \, ds \, dx \\ &\leq \delta \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{4\delta} \left\| \int_0^t g(t-s) |\nabla u(s) - \nabla u(t)| \, ds \right\|^2 \\ &\leq \delta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{4\delta} C_\alpha(k_\alpha \circ \nabla u)(t). \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

En utilisant les inégalités de Young et de Poincaré, ainsi que le théorème de trace, nous obtenons

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_1} u h(u_t) \, d\Gamma &\leq \delta \int_{\Gamma_1} u^2 \, d\Gamma + \frac{1}{4\delta} \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) \, d\Gamma \\ &\leq C_* \delta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\Gamma + \frac{1}{4\delta} \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

En appliquant (3.2.4), à partir de (3.3.3) et (3.3.4), nous avons

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \nabla u \cdot \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds dx - \int_{\Gamma_1} u h(u_t) d\Gamma \\
& \leq (1 + C_*) \delta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4\delta} C_{\alpha}(k_{\alpha} \circ \nabla u)(t) + \frac{1}{4\delta} \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma \\
& \leq c \delta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4\delta} C_{\alpha}(k_{\alpha} \circ \nabla u)(t) + \frac{1}{4\delta} \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma. \tag{3.3.5}
\end{aligned}$$

En combinant (3.3.2) et (3.3.5) et en choisissant $\delta = \ell/(2c)$, on obtient (3.3.1).

Lemme 3.3.2. *Sous les hypothèses (G1) et (G2), pour chaque $0 < \delta < 1$ et $\alpha > 0$ et pour $u(t)$ solution de (3.1.1), la fonctionnelle*

$$\Psi(t) := - \int_{\Omega} u_t(t) \int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s)) ds dx,$$

satisfait l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) & \leq - \left(\int_0^t g(s) ds - \delta \right) \|u_t(t)\| + \frac{c(C_{\alpha} + 1)}{\delta} (k_{\alpha} \circ \nabla u)(t) \\
& \quad + \delta C_{E(0)} \|\nabla u(t)\|_2^2 + c \int_{\Gamma_1} h^2(u_t(t)) d\Gamma, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } 0 < \delta < 0, \tag{3.3.6}
\end{aligned}$$

où

$$C_{E(0)} = 1 + \left(\frac{C^{\gamma-1-\mu_3}_{2(\gamma-1-\mu_3)}}{e\mu_3} \right)^2 \left(\frac{2\gamma E(0)}{l(\gamma-2)} \right)^{\gamma-2-\mu_3} + \left(\frac{C^{\gamma-1+\mu_4}_{2(\gamma-1+\mu_4)}}{e\mu_4} \right)^2 \left(\frac{2\gamma E(0)}{l(\gamma-2)} \right)^{\gamma-2+\mu_4}.$$

Démonstration. En exploitant l'équation (3.1.1) et en effectuant une intégration

par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) = & \left(1 - \int_0^t g(s)ds\right) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))ds dx \\
& + \int_{\Omega} \left| \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))ds \right|^2 dx \\
& + \int_{\Gamma_1} \left(\int_0^t g(t-s)(u(s) - u(t))ds \right) h(u_t) d\Gamma \\
& - \int_{\Omega} u_t \int_0^t g'(t-s)(u(s) - u(t))ds dx - \left(\int_0^t g(s)ds \right) \int_{\Omega} u_t^2 dx \\
& - \int_{\Omega} |u(x,t)|^{\gamma-2} u \ln |u(x,t)| \int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau))d\tau dx.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young et les inégalités (3.2.4) et (3.2.5), il vient, pour $0 < \delta < 1$ et $0 < \alpha < 1$,

$$\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))ds dx \leq \delta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{cC_{\alpha}}{\delta} (k_{\alpha} \circ \nabla u)(t),$$

et

$$\int_{\Gamma_1} \left(\int_0^t g(t-s)(u(s) - u(t))ds \right) h(u_t) d\Gamma \leq \frac{cC_{\alpha}}{\delta} (k_{\alpha} \circ \nabla u)(t) + \delta \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma,$$

et

$$\int_{\Omega} \left| \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))ds \right|^2 dx \leq C_{\alpha} (k_{\alpha} \circ \nabla u)(t),$$

et

$$- \int_{\Omega} u_t \int_0^t g'(t-s)(u(s) - u(t))ds dx \leq \delta \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{c}{\delta} (k_{\alpha} \circ \nabla u)(t) + \frac{cC_{\alpha}}{\delta} C_{\alpha} (k_{\alpha} \circ \nabla u)(t),$$

aussi,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |u(x, t)|^{\gamma-2} u \ln |u(x, t)| \int_0^t g(t - \tau)(u(t) - u(\tau)) d\tau dx \\ & \leq \delta \int_{\Omega} (|u(x, t)|^{\gamma-1} \ln |u(x, t)|)^2 dx + \frac{cC_{\alpha}}{\delta} (k_{\alpha} \circ \nabla u)(t). \end{aligned}$$

En utilisant la même notation que dans [30], considérons

$$\Omega_3 = \{x \in \Omega : |u(x, t)| < 1\} \text{ et } \Omega_4 = \{x \in \Omega : |u(x, t)| \geq 1\}.$$

En raison de $2 < 2(\gamma - 1) < \frac{2N}{N-2}$, il existe $\mu_3 > 0$ et $\mu_4 > 0$ tels que $2 < 2(\gamma - 1 - \mu_3) < \frac{2N}{N-2}$ et $2 < 2(\gamma - 1 + \mu_4) < \frac{2N}{N-2}$, respectivement. En utilisant le Lemme ??, (3.2.7) et (3.2.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (|u(x, t)|^{\gamma-1} \ln |u(x, t)|)^2 dx \\ & \leq \left(\frac{1}{e\mu_3}\right)^2 \int_{\Omega_3} |u(x, t)|^{2(\gamma-1)-2\mu_3} dx + \left(\frac{1}{e\mu_4}\right)^2 \int_{\Omega_4} |u(x, t)|^{2(\gamma-1+\mu_4)} dx \\ & \leq \left[\left(\frac{C^{\gamma-1-\mu_3}}{e\mu_3}\right)^2 \left(\frac{2\gamma E(0)}{l(\gamma-2)}\right)^{\gamma-2-\mu_3} + \left(\frac{C^{\gamma-1+\mu_4}}{e\mu_4}\right)^2 \left(\frac{2\gamma E(0)}{l(\gamma-2)}\right)^{\gamma-2+\mu_4} \right] \|\nabla u(t)\|^2. \end{aligned}$$

En combinant toutes les estimations ci-dessus, l'inégalité (3.3.6) est établie.

Lemme 3.3.3. *Sous les hypothèses (G1) et (G2) et pour $u(t)$ solution de (3.1.1), la fonctionnelle :*

$$\Xi(t) = \int_{\Omega} \int_0^t r(t-s) \|\nabla u(s)\|^2 ds dx, \quad (3.3.7)$$

satisfait l'estimation

$$\Xi'(t) \leq -\frac{1}{2}(go\nabla u)(t) + 3(1-\ell) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx, \quad (3.3.8)$$

où $r(t) = \int_t^{+\infty} g(s) ds$.

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Young et le fait que $r'(t) = -g(t)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\Xi'(t) &= r(0) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx - \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s) \|\nabla u(s)\|^2 ds dx \\ &= - \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s) |\nabla u(s) - \nabla u(t)|^2 ds dx \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \int_0^t g(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds dx + r(t) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx,\end{aligned}$$

mais sachant que

$$\begin{aligned}& -2 \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \int_0^t g(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds dx \\ & \leq 2(1-\ell) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{\int_0^t g(s) ds}{2(1-\ell)} \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s) \|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|^2 ds dx.\end{aligned}$$

En utilisant les faits que $r(t) \leq r(0) = 1 - \ell$ et $\int_0^t g(s) ds \leq 1 - \ell$, (3.3.8) est établi.

Lemme 3.3.4. *Il existe des constantes positives d et t_1 telles que*

$$g'(t) \leq -dg(t), \quad \forall t \in [0, t_1]. \quad (3.3.9)$$

Démonstration. Par (G1), nous déduisons facilement que $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$. Ainsi, il existe $t_1 \geq 0$ suffisamment grand tel que

$$g(t_1) = r,$$

et

$$g(t) \leq r, \quad \forall t \geq t_1.$$

Comme g et ξ sont des fonctions continues positives décroissantes, et H est une

fonction continue positive, alors, pour tout $t \in [0, t_1]$,

$$\begin{cases} 0 < g(t_1) \leq g(t) \leq g(0), \\ 0 < \xi(t_1) \leq \xi(t) \leq \xi(0), \end{cases}$$

ce qui implique qu'il existe deux constantes positives a et b telles que

$$a \leq \xi(t)H(g(t)) \leq b.$$

En conséquence, pour tout $t \in [0, t_1]$,

$$g'(t) \leq -\xi(t)H(g(t)) \leq -\frac{a}{g(0)}g(0) \leq -\frac{a}{g(0)}g(t). \quad (3.3.10)$$

Remarque 3.3.5. *En utilisant le fait que $\frac{\alpha g^2(s)}{\alpha g(s) - g'(s)} < g(s)$ et en rappelant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous pouvons facilement déduire que*

$$\alpha C_\alpha = \int_0^\infty \frac{\alpha g^2(s)}{\alpha g(s) - g'(s)} ds \rightarrow 0 \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0. \quad (3.3.11)$$

Lemme 3.3.6. *Supposons que (G1) et (G2) soient vérifiées et supposons que*

$$E(0) < \min \left\{ d, \frac{(\gamma - 2)}{2\gamma} \left(\frac{lek}{2C_{\gamma+k}^{\gamma+k}} \right)^{\frac{2}{\gamma+k-2}} \right\},$$

où $k > 0$ avec $2 < \gamma + k < \frac{2n}{n-2}$. Alors il existe des constantes $N, N_1, N_2, m, m_0, c > 0$ telles que la fonctionnelle

$$L(t) = NE(t) + N_1\psi(t) + N_2\Phi(t) + m_0E(t),$$

satisfait, pour tout $t > t_1$,

$$L'(t) \leq -mE(t) + \frac{1}{2}(go\nabla u)(t) - 3(1-l)\|\nabla u\|_2^2 + c \int_{\Gamma_1} h^2(u_t(t)) d\Gamma. \quad (3.3.12)$$

De plus, $E(t)$ est équivalente à $L(t)$.

Démonstration. Étant donné que g est positive, continue et $g(0) > 0$, alors pour tout $t_1 > 0$, nous avons

$$\int_0^t g(s)ds \geq \int_0^{t_1} g(s)ds = g_1 > 0, \quad \forall t \geq t_1. \quad (3.3.13)$$

En utilisant (3.2.8), (3.3.1) et (3.3.6) en rappelant que $g' = (\alpha g - k_\alpha)$ et en prenant $\delta = \frac{\ell}{4N_2}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & \frac{\alpha}{2}N(go\nabla u)(t) - \frac{1}{2}N(k_\alpha o\nabla u)(t) - \frac{N}{2}g(t)\|\nabla u\|_2^2 \\ & - \{N_2(g_1 - \delta) - N_1\} \|u_t(t)\|_2^2 \\ & + N_1 \int_{\Omega} |u(x, t)|^\gamma \ln |u(x, t)| dx - \left(\frac{\ell}{2}N_1 - N_2\delta C_{E(0)} \right) \|\nabla u\|_2^2 \\ & - \left\{ \frac{c}{2\ell}N_1C_\alpha - \frac{N_2c(C_\alpha + 1)}{\delta} \right\} (k_\alpha o\nabla u)(t) \\ & + c(N_1 + N_2) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma + m_0E'(t). \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
L'(t) \leq & -mE(t) + \left\{ \frac{\alpha}{2}N + \frac{m}{2} \right\} (go\nabla u)(t) - \frac{1}{2}N(k_\alpha o\nabla u)(t) - \frac{N}{2}g(t)\|\nabla u\|_2^2 \\
& - \left\{ N_2(g_1 - \delta) - N_1 - \frac{m}{2} \right\} \|u_t(t)\|_2^2 \\
& + \left(N_1 - \frac{m}{\gamma} \right) \int_{\Omega} |u(x, t)|^\gamma \ln |u(x, t)| dx + \frac{m}{\gamma^2} \|u(t)\|_\gamma^\gamma \\
& - \left(\frac{\ell}{2}N_1 - N_2\delta C_{E(0)} - \frac{m}{2} \left(1 - \int_0^t g(s)ds \right) \right) \|\nabla u\|_2^2 \\
& - \left\{ \frac{N}{2} - \frac{c}{2\ell}N_1C_\alpha - \frac{N_2c(C_\alpha + 1)}{\delta} \right\} (k_\alpha o\nabla u)(t) \\
& + c(N_1 + N_2) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma + m_0E'(t) \quad \text{pour tout } m > 0.
\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

A ce stade, choisissons $k > 0$ tel que

$$2 < \gamma + k < \infty, \text{ si } n = 1, 2; \quad 2 < \gamma + k < \frac{2n}{n-2}, \text{ si } n \geq 3,$$

et en utilisant le Lemme ??, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u(x, t)|^\gamma \ln |u(x, t)| dx & \leq \frac{1}{ek} \int_{|u(x, t)| \geq 1} |u(x, t)|^{\gamma+k} dx \\
& \leq \frac{1}{ek} \|u(t)\|_{\gamma+k}^{\gamma+k} \\
& \leq \frac{C_{\gamma+k}^{\gamma+k}}{ek} (\|\nabla u(t)\|^2)^{\frac{\gamma+k-2}{2}} \|\nabla u(t)\|^2 \\
& \leq \frac{C_{\gamma+k}^{\gamma+k}}{ek} \left(\frac{2\gamma E(t)}{l(\gamma-2)} \right)^{\frac{\gamma+k-2}{2}} \|\nabla u(t)\|^2 \\
& \leq \frac{C_{\gamma+k}^{\gamma+k}}{ek} \left(\frac{2\gamma E(0)}{l(\gamma-2)} \right)^{\frac{\gamma+k-2}{2}} \|\nabla u(t)\|^2,
\end{aligned}$$

et

$$\|u(t)\|_\gamma^\gamma \leq C_\gamma^\gamma \left(\frac{2\gamma E(0)}{l(\gamma-2)} \right)^{\frac{\gamma-2}{2}} \|\nabla u(t)\|^2.$$

En substituant cela dans (3.3.15), et en sélectionnant $N_1 > \frac{m}{\gamma}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} L'(t) &\leq -mE(t) + \left\{ \frac{\alpha}{2}N + \frac{m}{2} \right\} (go\nabla u)(t) - \left\{ N_2(g_1 - \delta) - N_1 - \frac{m}{2} \right\} \|u_t(t)\| \\ &\quad - \left\{ N_1 \left(\frac{\ell}{2} - \frac{C_{\gamma+k}^{\gamma+k}}{ek} \left(\frac{2\gamma E(0)}{l(\gamma-2)} \right)^{\frac{\gamma+k-2}{2}} \right) - N_2\delta C_{E(0)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{m}{2} \left(1 - \int_0^t g(s)ds \right) - \frac{\rho}{\gamma^2} C_\gamma^\gamma \left(\frac{2\gamma E(0)}{l(\gamma-2)} \right)^{\frac{\gamma-2}{2}} \right\} \|\nabla u\|_2^2 \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{2}N - \frac{c}{2\ell}N_1C_\alpha - \frac{N_2c(C_\alpha + 1)}{\delta} \right\} (k_\alpha o\nabla u)(t) \\ &\quad + c(N_1 + N_2) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma + m_0 E'(t). \end{aligned}$$

En prenant $\delta = \frac{1}{4N_2}$, nous avons

$$\begin{aligned} L'(t) &\leq -mE(t) + \left\{ \frac{\alpha}{2}N + \frac{m}{2} \right\} (go\nabla u)(t) - \left\{ N_2g_1 - \frac{l}{4} - N_1 - \frac{m}{2} \right\} \|u_t(t)\| \\ &\quad - \left\{ N_1 \left(\frac{\ell}{2} - \frac{C_{\gamma+k}^{\gamma+k}}{ek} \left(\frac{2\gamma E(0)}{l(\gamma-2)} \right)^{\frac{\gamma+k-2}{2}} \right) - \frac{l}{4}C_{E(0)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{m}{2} \left(1 - \int_0^t g(s)ds \right) - \frac{\rho}{\gamma^2} C_\gamma^\gamma \left(\frac{2\gamma E(0)}{l(\gamma-2)} \right)^{\frac{\gamma-2}{2}} \right\} \|\nabla u\|_2^2 \\ &\quad - \left\{ \frac{N}{4} - \frac{4c}{\ell}N_2^2 + \frac{N}{4} - cC_\alpha \left(\frac{N_1}{2l} + \frac{4}{\ell}N_2^2 \right) \right\} (k_\alpha o\nabla u)(t) \\ &\quad + c(N_1 + N_2) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma + m_0 E'(t), \end{aligned}$$

où nous exigeons que $E(0) < \frac{(\gamma-2)}{2\gamma} \left(\frac{lek}{2C_{\gamma+k}^{\gamma+k}} \right)$ et $2 < \gamma + k < \frac{2n}{n-2}$ tel que

$$\frac{\ell}{2} - \frac{C_{\gamma+k}^{\gamma+k}}{ek} \left(\frac{2\gamma E(0)}{l(\gamma-2)} \right)^{\frac{\gamma+k-2}{2}} > 0. \quad (3.3.16)$$

Nous choisissons N_1 assez grand pour que

$$N_1 \left(\frac{\ell}{2} - \frac{C_{\gamma+k}^{\gamma+k}}{ek} \left(\frac{2\gamma E(0)}{l(\gamma-2)} \right)^{\frac{\gamma+k-2}{2}} \right) - \frac{l}{4} C_{E(0)} > 4(1-l).$$

En utilisant le choix similaire de la preuve du Lemme 4.2 de [30], nous obtenons

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & -mE(t) + \left\{ \frac{1}{4} + \frac{m}{2} \right\} (go\nabla u)(t) - \left\{ 1 - \frac{m}{2} \right\} \|u_t(t)\| \\ & - \left\{ 4(1-l) - \frac{m}{2} \left(1 - \int_0^t g(s)ds \right) - \frac{\rho}{\gamma^2} C_{\gamma}^{\gamma} \left(\frac{2\gamma E(0)}{l(\gamma-2)} \right)^{\frac{\gamma-2}{2}} \right\} \|\nabla u\|_2^2 \\ & + c \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Sélectionnons $m > 0$ suffisamment petit, (3.3.17) et choisissons convenablement m_0 , (3.3.12) est établi. D'autre part (voir [11]), nous pouvons choisir N assez grand (si nécessaire) de sorte que

$$L \sim E. \quad (3.3.18)$$

3.4 Décroissance des solutions

Dans cette section, nous énonçons et démontrons le résultat principal de notre travail. A cette fin, nous disposons des lemmes et des remarques suivants.

Lemme 3.4.1. *Sous les hypothèses (G1)–(G3), la solution satisfait les estimations*

$$\int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma \leq c \int_{\Gamma_1} u_t h(u_t) d\Gamma, \quad \text{si } h_0 \text{ est linéaire,} \quad (3.4.1)$$

$$\int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma \leq c H^{-1}(J(t)) - c E'(t), \quad \text{si } h_0 \text{ est non linéaire,} \quad (3.4.2)$$

où

$$J(t) := \frac{1}{|\Gamma_{12}|} \int_{\Gamma_{12}} u_t(t) h(u_t(t)) d\Gamma \leq -c E'(t), \quad (3.4.3)$$

et

$$\Gamma_{12} = \{x \in \Gamma_1 : |u_t(t)| \leq \varepsilon_1\}.$$

Démonstration.

Cas 1 : h_0 est linéaire.

Alors, en utilisant (G3), nous avons

$$c'_1 |u_t| \leq |h(u_t)| \leq c'_2 |u_t|,$$

et donc

$$h^2(u_t) \leq c'_2 u_t h(u_t), \quad (3.4.4)$$

ainsi, (3.4.1) est établi.

Cas 2 : h_0 est non linéaire sur $[0, \varepsilon]$.

Nous établissons ce cas, en s'inspirant de [37]. Ainsi, nous supposons d'abord que $\max\{r_2, h_0(r_2)\} < \varepsilon$; sinon, nous prenons r_2 plus petit. Soit $\varepsilon_1 = \min\{r_2, h_0(r_2)\}$.

En utilisant (G3), nous avons, pour $\varepsilon_1 \leq |s| \leq \varepsilon$

$$|h(s)| \leq \frac{h_0^{-1}(|s|)}{|s|} |s| \leq \frac{h_0^{-1}(\|\varepsilon\|)}{|\varepsilon_1|} |s|,$$

et

$$|h(s)| \geq \frac{h_0(|s|)}{|s|} |s| \geq \frac{h_0(|\varepsilon_1|)}{|\varepsilon|} |s|.$$

Ainsi, nous déduisons que

$$\begin{cases} h_0(|s|) \leq |h(s)| \leq h_0^{-1}(|s|), \text{ pour tout } |s| < \varepsilon_1, \\ c'_1 |s| \leq |h(s)| \leq c'_2 |s|, \text{ pour tout } |s| \geq \varepsilon_1. \end{cases} \quad (3.4.5)$$

Alors, (3.4.5), donne, pour tout $|s| \leq \varepsilon_1$

$$H(h^2(s)) = |h(s)| h_0(|h(s)|) \leq sh(s),$$

ce qui donne

$$h^2(s) \leq H^{-1}(sh(s)) \text{ pour tout } |s| \leq \varepsilon_1. \quad (3.4.6)$$

Maintenant, nous définissons la partition suivante qui a été introduite par Komornik [33] :

$$\Gamma_{11} = \{x \in \Gamma_1 : |u_t(t)| > \varepsilon_1\}, \quad \Gamma_{12} = \{x \in \Gamma_1 : |u_t(t)| \leq \varepsilon_1\}.$$

En utilisant (3.4.5), nous obtenons sur Γ_{12}

$$u_t h(u_t(t)) \leq \varepsilon_1 h_0^{-1}(\varepsilon_1) \leq h_0(r_2) r_2 = H(r_2^2). \quad (3.4.7)$$

Alors, l'inégalité de Jensen donne (notez que H^{-1} est concave)

$$H^{-1}(J(t)) \geq c \int_{\Gamma_{12}} H^{-1}(u_t(t) h(u_t(t))) d\Gamma. \quad (3.4.8)$$

Ainsi, en combinant (3.4.6) et (3.4.8), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_1} h^2(u_t(t)) \, d\Gamma &= \int_{\Gamma_{12}} h^2(u_t(t)) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{11}} h^2(u_t(t)) \, d\Gamma \\
 &\leq \int_{\Gamma_{12}} H^{-1}(u_t h(u_t(t))) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{11}} h^2(u_t(t)) \, d\Gamma \\
 &\leq cH^{-1}(J(t)) - cE'(t).
 \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

Lemme 3.4.2. *Supposons que (G1) – (G3) sont satisfaites et que h_0 est linéaire. Alors, la fonctionnelle d'énergie satisfait l'estimation suivante*

$$\int_0^{+\infty} E(s) \, ds < \infty. \tag{3.4.10}$$

Démonstration. D'abord, en utilisant (3.2.8) et (3.3.9), nous concluons que, pour tout $t \geq t_1$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t_1} g(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 \, dx \, ds &\leq \frac{-1}{d} \int_0^{t_1} g'(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 \, dx \, ds \\
 &\leq -cE'(t).
 \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Soit $F(t) = L(t) + \Xi(t)$, alors en utilisant (3.3.8), (3.3.12), nous obtenons

$$F'(t) \leq -\rho E(t) + c \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) \, d\Gamma. \tag{3.4.12}$$

En utilisant (3.2.8), (3.4.1) et (3.4.12), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 F'(t) &\leq -bE(t) + c \int_{\Omega} u_t h(u_t) \, dx \\
 &\leq -bE(t) - cE'(t),
 \end{aligned}$$

où b est une constante positive. Par conséquent,

$$b \int_{t_1}^t E(s) ds \leq F_1(t_1) - F_1(t) \leq F_1(t_1) < \infty,$$

où $F_1(t) = F(t) + cE(t) \sim E$.

Définissons

$$I(t) := - \int_{t_1}^t g'(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \leq -cE'(t). \quad (3.4.13)$$

Lemme 3.4.3. *Sous les hypothèses et (G1) – (G3), nous avons les estimations suivantes*

$$\int_{t_1}^t g(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \leq \frac{1}{q} \overline{G}^{-1} \left(\frac{qI(t)}{\xi(t)} \right), \text{ si } h_0 \text{ est linéaire} \quad (3.4.14)$$

$$\int_{t_1}^t g(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \leq \frac{(t-t_1)}{q} \overline{G}^{-1} \left(\frac{qI(t)}{(t-t_1)\xi(t)} \right), \text{ si } h_0 \text{ est non linéaire} \quad (3.4.15)$$

où $q \in (0, 1)$ et $\overline{G}$ est une extension de G telle que $\overline{G}$ est strictement croissante et strictement convexe, de classe C^2 , sur $(0, \infty)$.

Remarque 3.4.4. *Si G est une fonction C^2 strictement croissante et strictement convexe sur $(0, r_1]$, avec $G(0) = G'(0) = 0$, alors elle a une extension $\overline{G}$, qui est une fonction C^2 strictement croissante et strictement convexe sur $(0, \infty)$. Par exemple, si $G(r_1) = a$, $G'(r_1) = b$, $G''(r_1) = c$, nous pouvons définir $\overline{G}$, pour $t > r_1$, par*

$$\overline{G}(t) = \frac{c}{2}t^2 + (b - cr_1)t + \left(a + \frac{c}{2}r_1^2 - br_1\right).$$

Démonstration. Commençons par établir (3.4.14). Pour cela, nous définissons

la quantité suivante

$$\lambda(t) := q \int_{t_1}^t \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds, \quad (3.4.16)$$

où, selon (3.4.10), q est choisi suffisamment petit pour que, pour tout $t \geq t_1$,

$$\lambda(t) < 1.$$

Puisque G est strictement convexe sur $(0, r_1]$ et $G(0) = 0$, alors

$$G(\theta z) \leq \theta G(z), \quad 0 \leq \theta \leq 1 \text{ et } z \in (0, r_1]. \quad (3.4.17)$$

L'utilisation de (3.1.3), (3.4.16), et (3.4.17) ainsi que l'inégalité de Jensen conduit à

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{q\lambda(t)} \int_{t_1}^t \lambda(t) (-g'(s)) \int_{\Omega} q |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \\ &\geq \frac{1}{q\lambda(t)} \int_{t_1}^t \lambda(t) \xi(s) G(g(s)) \int_{\Omega} q |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \\ &\geq \frac{\xi(t)}{q\lambda(t)} \int_{t_1}^t G(\lambda(t)g(s)) \int_{\Omega} q |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \\ &\geq \frac{\xi(t)}{q} G \left(q \int_{t_1}^t g(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \right) \\ &= \frac{\xi(t)}{q} \overline{G} \left(q \int_{t_1}^t g(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \right). \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Cela donne (3.4.14).

Pour la démonstration de (3.4.14), nous définissons la quantité suivante

$$\lambda_1(t) := \frac{q}{(t-t_1)} \int_{t_1}^t \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds,$$

puis en utilisant (3.2.6) et (3.2.8) nous voyons facilement que

$$\lambda_1(t) \leq \frac{8qE(0)}{\ell},$$

puis en choisissant $q \in (0, 1)$ suffisamment petit de sorte que, pour tout $t \geq t_1$

$$\lambda_1(t) < 1. \quad (3.4.19)$$

L'utilisation de (3.1.3), (3.4.17) et (3.4.19) ainsi que l'inégalité de Jensen conduit à

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{q\lambda_1(t)} \int_{t_1}^t \lambda_1(t) (-g'(s)) \int_{\Omega} q |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \\ &\geq \frac{1}{q\lambda_1(t)} \int_{t_1}^t \lambda_1(t) \xi(s) G(g(s)) \int_{\Omega} q |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \\ &\geq \frac{\xi(t)}{q\lambda_1(t)} \int_{t_1}^t G(\lambda_1(t)g(s)) \int_{\Omega} q |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \\ &\geq \frac{(t-t_1)\xi(t)}{q} G\left(\frac{q}{(t-t_1)} \int_{t_1}^t g(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds\right) \\ &= \frac{(t-t_1)\xi(t)}{q} \overline{G}\left(\frac{q}{(t-t_1)} \int_{t_1}^t g(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds\right). \end{aligned}$$

Cela implique que

$$\int_{t_1}^t g(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \leq \frac{(t-t_1)}{q} \overline{G}^{-1}\left(\frac{qI(t)}{(t-t_1)\xi(t)}\right).$$

Théorème 3.4.5. *Soient $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$ donnés. Supposons que (G1) – (G3) soient satisfaites et que h_0 soit **linéaire**. Alors il existe des constantes strictement positives c_1, c_2, k_1 et k_2 telles que la solution de (3.1.1) satisfait, pour tout $t \geq t_1$*

$$E(t) \leq c_1 e^{-c_2 \int_{t_1}^t \xi(s) ds}, \quad \text{si } G \text{ est linéaire} \quad (3.4.20)$$

$$E(t) \leq k_2 G_1^{-1} \left(k_1 \int_{t_1}^t \xi(s) ds \right), \quad \text{si } G \text{ est non linéaire} \quad (3.4.21)$$

où $G_1(t) = \int_t^{r_1} \frac{1}{sG'(s)} ds$.

Démonstration. Tout d'abord, en utilisant (3.2.8) et (3.3.9), nous concluons que, pour tout $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} g(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds &\leq \frac{-1}{d} \int_0^{t_1} g'(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds \\ &\leq -cE'(t). \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

En posant $F(t) = L(t) + cE(t)$, nous obtenons, en utilisant (3.3.12) et (3.4.22),

$$F'(t) \leq -mE(t) + \frac{1}{2} \int_{t_1}^t g(t-s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds + c \int_{\Gamma_1} h^2(u_t(t)) d\Gamma. \quad (3.4.23)$$

Cas 1 : G est linéaire.

En multipliant (3.3.12) par $\xi(t)$ et en utilisant (3.1.3), (3.2.8), (3.4.1), (3.4.3) et (3.4.13), nous obtenons

$$\begin{aligned} \xi(t)F'(t) &\leq -m\xi(t)E(t) + c\xi(t) \int_{t_1}^t g(t-s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t(t)) d\Gamma \\ &\leq -m\xi(t)E(t) + c \int_{t_1}^t \xi(s)g(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t(t)) d\Gamma \\ &\leq -m\xi(t)E(t) - c \int_{t_1}^t g'(s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(t-s)|^2 dx ds + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} u_t h(u_t(t)) d\Gamma \\ &\leq -m\xi(t)E(t) - cE'(t) - c\xi(t)E'(t) \\ &\leq -m\xi(t)E(t) - cE'(t) - c\xi(0)E'(t) \\ &\leq -m\xi(t)E(t) - cE'(t), \end{aligned}$$

ce qui donne, puisque $\xi(t)$ est décroissante,

$$(\xi F + 2cE)' \leq -m\xi(t)E(t), \quad \forall t \geq t_1. \quad (3.4.24)$$

Ainsi, en utilisant le fait que $\xi L + 2cE \sim E$, nous obtenons facilement

$$E(t) \leq c_1 e^{-c_2 \int_{t_1}^t \xi(s) ds}. \quad (3.4.25)$$

Cas 2 : G est non linéaire.

En utilisant (3.3.12), (3.4.1) et (3.4.14), nous obtenons

$$F'(t) \leq -mE(t) + c(\overline{G})^{-1} \left(\frac{qI(t)}{\xi(t)} \right) - cE'(t). \quad (3.4.26)$$

Soit $\mathcal{F}_1(t) = F(t) + cE(t) \sim E$, alors (3.4.26) devient

$$\mathcal{F}_1'(t) \leq -mE(t) + c(\overline{G})^{-1} \left(\frac{qI(t)}{\xi(t)} \right), \quad (3.4.27)$$

nous trouvons que la fonctionnelle $\mathcal{F}_2$, défini par

$$\mathcal{F}_2(t) := \overline{G}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \mathcal{F}_1(t),$$

satisfait, pour certains $\alpha_1, \alpha_2 > 0$

$$\alpha_1 \mathcal{F}_2(t) \leq E(t) \leq \alpha_2 \mathcal{F}_2(t), \quad (3.4.28)$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'_2(t) &= \varepsilon_0 \frac{E'(t)}{E(0)} \bar{G}'' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \mathcal{F}_1(t) + \bar{G}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \mathcal{F}'_1(t) \\ &\leq -mE(t) \bar{G}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c \bar{G}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \bar{G}^{-1} \left(\frac{qI(t)}{\xi(t)} \right).\end{aligned}\quad (3.4.29)$$

Soit $\bar{G}^*$ la conjuguée convexe de $\bar{G}$ au sens de Young (voir [9]), alors

$$\bar{G}^*(s) = s(\bar{G}')^{-1}(s) - \bar{G} \left[(\bar{G}')^{-1}(s) \right], \quad \text{si } s \in (0, \bar{G}'(r_1)], \quad (3.4.30)$$

et $\bar{G}^*$ satisfait l'inégalité de Young généralisée suivante

$$AB \leq \bar{G}^*(A) + \bar{G}(B), \quad \text{si } A \in (0, \bar{G}'(r_1)], \quad B \in (0, r_1]. \quad (3.4.31)$$

Ainsi, avec $A = \bar{G}' \left(\varepsilon_0 \frac{E'(t)}{E(0)} \right)$ et $B = \bar{G}^{-1} \left(\frac{qI(t)}{\xi(t)} \right)$ et en utilisant (3.2.8) et (3.4.29) – (3.4.31), nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'_2(t) &\leq -mE(t) \bar{G}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c \bar{G}^* \left(\bar{G}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \right) + c \left(\frac{qI(t)}{\xi(t)} \right) \\ &\leq -mE(t) \bar{G}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c \varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \bar{G}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c \left(\frac{qI(t)}{\xi(t)} \right).\end{aligned}\quad (3.4.32)$$

Ainsi, en multipliant (3.4.32) par $\xi(t)$ et en utilisant le fait que $\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} < r_1$, $\bar{G}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) = G' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\xi(t) \mathcal{F}'_2(t) &\leq -m\xi(t)E(t)G' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c\xi(t)\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} G' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) + cqI(t) \\ &\leq -m\xi(t)E(t)G' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c\xi(t)\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} G' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) - cE'(t).\end{aligned}$$

Par conséquent, avec un choix approprié de ε_0 , nous obtenons, pour tout $t \geq t_1$

$$\mathcal{F}'_3(t) \leq -k\xi(t) \left(\frac{E(t)}{E(0)} \right) G' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) = -k\xi(t) G_2 \left(\frac{E(t)}{E(0)} \right), \quad (3.4.33)$$

où $\mathcal{F}_3 = \xi\mathcal{F}_2 + cE \sim E$ et $G_2(t) = tG'(\varepsilon_0 t)$. Puisque $G'_2(t) = G'(\varepsilon_0 t) + \varepsilon_0 t G''(\varepsilon_0 t)$ alors, en utilisant la convexité stricte de G sur $(0, r_1]$, nous trouvons que $G'_2(t)$, $G_2(t) > 0$ sur $(0, 1]$ Ainsi, avec

$$R(t) = \varepsilon \frac{\alpha_1 \mathcal{F}_3(t)}{E(0)}, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

en tenant compte de (3.4.28) et (3.4.33) nous obtenons

$$R(t) \sim E(t), \quad (3.4.34)$$

et, pour certains $k_1 > 0$.

$$R'(t) \leq -k_1 \xi(t) G_2(R(t)), \quad \forall t \geq t_1,$$

ensuite, l'intégration sur (t_1, t) donne

$$\int_{t_1}^t \frac{-R'(s)}{G_2(R(s))} ds \geq k_1 \int_{t_1}^t \xi(s) ds.$$

Ainsi, par un changement de variable approprié, nous obtenons

$$\int_{\varepsilon_0 R(t)}^{\varepsilon_0 R(t_1)} \frac{1}{\tau G'(\tau)} d\tau \geq k_1 \int_{t_1}^t \xi(s) ds,$$

donc, nous avons

$$R(t) \leq \frac{1}{\varepsilon_0} G_1^{-1} \left(k_1 \int_{t_1}^t \xi(s) ds \right),$$

où $G_1(t) = \int_t^{r_1} \frac{1}{sG'(s)} ds$. Ici, nous avons utilisé le fait que G_1 est strictement décroissant sur $(0, r_1]$. Par conséquent, (3.4.21) est établi en vertu de (3.4.34).

Remarque 3.4.6. *Le taux de décroissance de $E(t)$ donné par (3.1.3) est optimal car il est cohérent avec le taux de décroissance de $g(t)$ donné par (3.4.21). En fait,*

$$g(t) \leq G_0^{-1} \left(\int_{g^{-1}(r_1)}^t \xi(s) ds \right), \quad \forall t \geq g^{-1}(r_1),$$

où $G_0(t) = \int_t^r \frac{1}{G(s)} ds$.

En utilisant les propriétés de G , G_0 et G_1 , nous pouvons voir que

$$G_1(t) = \int_t^{r_1} \frac{1}{sG'(s)} ds \leq \int_t^{r_1} \frac{1}{G(s)} ds = G_0(t),$$

ce qui implique

$$G_1^{-1}(t) \leq G_0^{-1}(t).$$

Cela montre que l'équation (3.4.21) fournit les meilleures taux de décroissance attendues dans le cadre de l'hypothèse très générale (3.1.3).

Théorème 3.4.7. *Soit $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$ donné. Supposons que (G1) – (G3) soient satisfaites et que h_0 soit **non linéaire**. Alors il existe des constantes strictement positives c_3, c_4, k_2, k_3 et ε_2 telles que la solution de (3.1.1) satisfait, pour tout $t \geq t_1$*

$$E(t) \leq H_1^{-1} \left(c_3 \int_{t_1}^t \xi(s) ds + c_4 \right), \quad \text{si } G \text{ est linéaire}$$

où $H_1(t) = \int_t^1 \frac{1}{H_2(s)} ds$.

$$E(t) \leq k_3 (t - t_1) W_2^{-1} \left(\frac{k_2}{(t - t_1) \int_{t_1}^t \xi(s) ds} \right), \quad \text{si } G \text{ est non linéaire,}$$

où $H_2(t) = tH'(\varepsilon_1 t)$, et $W_2(t) = tW'(\varepsilon_2 t)$ avec $W = (\overline{G}^{-1} + \overline{H}^{-1})^{-1}$.

Démonstration.

Cas 1 : G est linéaire

En multipliant (3.4.23) par $\xi(t)$ et en utilisant l'équation (3.4.2), on obtient

$$\begin{aligned}
 \xi(t)F'(t) &\leq -m\xi(t)E(t) + c\xi(t) \int_{t_1}^t g(t-s) \int_{\Omega} |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 dx ds + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t(t)) d\Gamma \\
 &\leq -m\xi(t)E(t) - cE'(t) + c\xi(t) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t(t)) d\Gamma \\
 &\leq -m\xi(t)E(t) - cE'(t) + c\xi(t)H^{-1}(J(t)) - c\xi(t)E'(t) \\
 &\leq -m\xi(t)E(t) - cE'(t) + c\xi(t)H^{-1}(J(t)) - c\xi(0)E'(t) \\
 &\leq -m\xi(t)E(t) - cE'(t) + c\xi(t)H^{-1}(J(t)),
 \end{aligned}$$

ce qui donne, comme $\xi(t)$ est décroissante,

$$(\xi F + cE)' \leq -m\xi(t)E(t) + c\xi(t)H^{-1}(J(t)), \forall t \geq t_1. \quad (3.4.35)$$

Par conséquent, (3.4.35) devient

$$\mathcal{L}'(t) \leq -m\xi(t)E(t) + c\xi(t)H^{-1}(J(t)), \forall t \geq t_1, \quad (3.4.36)$$

où $\mathcal{L} := \xi F + 2cE$, qui est clairement équivalent à E . Maintenant, pour $\varepsilon_1 < r_2$ et $c_0 > 0$, en utilisant (3.4.36) et le fait que $E' \leq 0$, $H' > 0$, $H'' > 0$ sur $(0, r_2]$, on trouve que la fonctionnelle $\mathcal{L}_1$, définie par

$$\mathcal{L}_1(t) := H' \left(\varepsilon_1 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \mathcal{L}(t) + c_0 E(t),$$

satisfait, pour certains $\alpha_3, \alpha_4 > 0$

$$\alpha_3 \mathcal{L}_1(t) \leq E(t) \leq \alpha_4 \mathcal{L}_1(t), \quad (3.4.37)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_1(t) &= \varepsilon_0 \frac{E'(t)}{E(0)} H'' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \mathcal{L}(t) + H' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \mathcal{L}'(t) + c_0 E'(t) \\ &\leq -m E(t) H' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c \xi(t) H' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) H^{-1}(J(t)) + c_0 E'(t). \end{aligned} \quad (3.4.38)$$

Soit H^* la conjuguée convexe de H au sens de Young voir ([9]), alors, comme dans (3.4.30) et (3.4.31), avec $A = H' \left(\varepsilon_1 \frac{E(t)}{E(0)} \right)$ et $B = H^{-1}(J(t))$, en utilisant (3.2.8) et (3.4.7) nous arrivons à

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_1(t) &\leq -m E(t) H' \left(\varepsilon_1 \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c \xi(t) H^* \left(H' \left(\varepsilon_1 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \right) + c \xi(t) J(t) + c_0 E'(t) \\ &\leq -m E(t) H' \left(\varepsilon_1 \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c \varepsilon_1 \xi(t) \frac{E(t)}{E(0)} H' \left(\varepsilon_1 \frac{E(t)}{E(0)} \right) - c E'(t) + c_0 E'(t). \end{aligned}$$

Par conséquent, avec un choix approprié de ε_1 et c_0 , nous obtenons, pour tout $t \geq t_1$

$$\mathcal{L}'_1(t) \leq -c \xi(t) \frac{E'(t)}{E(0)} H' \left(\varepsilon_1 \frac{E(t)}{E(0)} \right) = -c \xi(t) H_2 \left(\varepsilon_1 \frac{E(t)}{E(0)} \right), \quad (3.4.39)$$

où $H_2(t) = t H'(\varepsilon_1 t)$. Puisque $H'_2(t) = H'(\varepsilon_1 t) + \varepsilon_1 t H''(\varepsilon_1 t)$, alors, en utilisant la stricte convexité de H sur $(0, r_2]$, nous trouvons que $H'_2(t), H_2(t) > 0$ sur $(0, 1]$. Ainsi, avec

$$R_1(t) = \varepsilon \frac{\alpha_3 \mathcal{L}_1(t)}{E(0)}, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

en tenant compte de (3.4.37) et (3.4.39), nous avons

$$R_1(t) \sim E(t),$$

et, pour un certain $c_3 > 0$,

$$R_1'(t) \leq -c_3 \xi(t) H_2(R_1(t)), \quad \forall t \geq t_1,$$

ensuite, une intégration simple donne, pour un certain $c_4 > 0$,

$$R_1(t) \leq H_1^{-1} \left(c_3 \int_{t_1}^t \xi(s) ds + c_4 \right), \quad \forall t \geq t_1,$$

où $H_1(t) = \int_t^1 \frac{1}{H_2(s)} ds$.

Cas 2. G est non linéaire.

En utilisant (3.3.12), (3.4.2) et (3.4.14), nous obtenons

$$L'(t) \leq -mE(t) + c(t - t_1) (\overline{G})^{-1} \left(\frac{qI_1(t)}{(t - t_1) \xi(t)} \right) + cH^{-1}(J(t)) - cE'(t). \quad (3.4.40)$$

Puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t - t_1} = 0$, il existe $t_2 > t_1$ tel que $\frac{1}{t - t_1} < 1$ lorsque $t > t_2$.

Combinant cela avec les propriétés strictement croissantes et strictement convexes de $\overline{H}$, en posant $\theta = \frac{1}{t - t_1} < 1$ et en utilisant (3.4.17), nous obtenons

$$\overline{H}^{-1}(J(t)) \leq (t - t_1) \overline{H}^{-1} \left(\frac{J(t)}{(t - t_1)} \right), \quad \forall t \geq t_2,$$

et, alors, (3.4.40) devient, pour $t \geq t_2$.

$$L'(t) \leq -mE(t) + c(t - t_1) (\overline{G})^{-1} \left(\frac{qI_1(t)}{(t - t_1) \xi(t)} \right) + c(t - t_1) \overline{H}^{-1} \left(\frac{J(t)}{(t - t_1)} \right) - cE'(t), \quad (3.4.41)$$

Soit $L_1(t) = L(t) + cE(t) \sim E$, alors (3.4.41) prend la forme

$$L_1'(t) \leq -mE(t) + c(t - t_1) (\overline{G})^{-1} \left(\frac{qI_1(t)}{(t - t_1) \xi(t)} \right) + c(t - t_1) \overline{H}^{-1} \left(\frac{J(t)}{(t - t_1)} \right). \quad (3.4.42)$$

Soit $r_0 = \min \{r_1, r_2\}$, $x(t) = \max \left\{ \frac{qI_1(t)}{(t-t_1)\xi(t)}, \frac{J(t)}{(t-t_1)} \right\}$ et $W = ((\overline{G})^{-1} + (\overline{H})^{-1})^{-1}$.
Ainsi, (3.4.42) se réduit à

$$L_1'(t) \leq -mE(t) + c(t-t_1)W^{-1}(\chi(t)), \quad \forall t \geq t_2.$$

Maintenant, pour $\varepsilon_2 < r_0$ et en utilisant (3.4.40) et le fait que $E' \leq 0$, $W' > 0$, $W'' > 0$ sur $(0, r_0]$, on trouve que la fonction L_2 , définie par

$$L_2(t) := W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) L_1(t), \quad \forall t \geq t_2$$

satisfait, pour certains $\alpha_5, \alpha_6 > 0$

$$\alpha_5 L_2(t) \leq E(t) \leq \alpha_6 L_2(t),$$

et, pour tout $t \geq t_2$

Soit W^* la conjuguée convexe de W au sens de Young (voir [9]) alors, comme dans (3.4.30) et (3.4.31), et avec $A = W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right)$ et $B = W^{-1}(\chi(t))$, en utilisant (3.2.8), on arrive à

$$\begin{aligned} L_2'(t) &\leq -mE(t)W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c(t-t_1)W^* \left(W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) \right) \\ &\quad + c(t-t_1)\chi(t) \\ &\leq -mE(t)W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c(t-t_1) \frac{\varepsilon_2}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) \\ &\quad + c(t-t_1)\chi(t). \end{aligned} \tag{3.4.43}$$

En utilisant (3.4.3) et (3.4.13), on observe que

$$\begin{aligned}
 (t - t_1) \xi(t) \chi(t) &\leq qI(t) + \xi(t)J(t) \\
 &\leq qI(t) + \xi(0)J(t) \\
 &\leq -cE'(t) - cE'(t) \\
 &\leq -cE'(t).
 \end{aligned}$$

Ainsi, en multipliant (3.4.43) par $\xi(t)$ et en utilisant le fait que, $\varepsilon_2 \frac{E(t)}{E(0)} < r_0$, on obtient, pour $t \geq t_2$

$$\xi(t)L'_2(t) \leq -m\xi(t)E(t)W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c\varepsilon_2\xi(t) \cdot \frac{E(t)}{E(0)} W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) - cE'(t).$$

En utilisant la propriété de décroissance de ξ , on obtient, pour tout $t \geq t_2$

$$(\xi(t)L_2 + cE)'(t) \leq -m\xi(t)E(t)W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c\varepsilon_2\xi(t) \frac{E(t)}{E(0)} W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right).$$

Par conséquent, en posant $L_3 := \xi(t)L_2 + cE \sim E$, on obtient

$$L'_3(t) \leq -m\xi(t)E(t)W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c\varepsilon_2\xi(t) \cdot \frac{E(t)}{E(0)} W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right).$$

Cela donne, pour un choix approprié de ε_2 ,

$$L'_3(t) \leq -k\xi(t) \left(\frac{E(t)}{E(0)} \right) W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right), \quad \forall t \geq t_2,$$

où

$$k \left(\frac{E(t)}{E(0)} \right) W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) \xi(t) \leq -L'_3(t), \quad \forall t \geq t_2, \quad (3.4.44)$$

une intégration de (3.4.44) donne

$$\int_{t_2}^t k \left(\frac{E(s)}{E(0)} \right) W' \left(\frac{\varepsilon_2}{s-t_1} \cdot \frac{E(s)}{E(0)} \right) \xi(s) ds \leq - \int_{t_2}^t L'_3(s) ds \leq L_3(t_2).$$

En utilisant le fait que $W', W'' > 0$ et la propriété de décroissance de E , on déduit que l'application $t \mapsto E(t)W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right)$ est croissante et, par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} k \left(\frac{E(t)}{E(0)} \right) W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) \int_{t_2}^t \xi(s) ds &\leq \int_{t_2}^t k \left(\frac{E(s)}{E(0)} \right) W' \left(\frac{\varepsilon_2}{s-t_1} \cdot \frac{E(s)}{E(0)} \right) \xi(s) ds \\ &\leq L_3(t_2). \end{aligned} \quad (3.4.45)$$

En multipliant chaque membre de (3.4.45) par $\frac{1}{t-t_1}$, nous avons

$$k \left(\frac{1}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) W' \left(\frac{\varepsilon_2}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) \int_{t_1}^t \xi(s) ds \leq \frac{k_2}{t-t_1}, \quad \forall t \geq t_2. \quad (3.4.46)$$

Ensuite, nous posons $W_2(t) = tW'(\varepsilon_2 t)$ qui est strictement croissante, alors nous obtenons,

$$kW_2 \left(\frac{1}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) \int_{t_1}^t \xi(s) ds \geq \frac{k_2}{t-t_1}, \quad \forall t \geq t_2. \quad (3.4.47)$$

Enfin, pour deux constantes positives k_2 et k_3 , nous obtenons

$$E(t) \leq k_3 (t-t_1) W_2^{-1} \left(\frac{k_2}{(t-t_1) \int_{t_1}^t \xi(s) ds} \right). \quad (3.4.48)$$

Cela termine la démonstration.

3.5 Résultats Numériques

Dans cette section, nous réalisons quelques expériences numériques pour illustrer les résultats théoriques des Théorèmes 3.4.5 et 3.4.7. A cette fin, nous discrétisons le système (3.1.1) en utilisant une méthode des différences finies (MDF) à la fois dans le temps et dans l'espace. En considérant un domaine rectangulaire dans $\mathbb{R}^2$, donc on exprime le domaine espace-temps comme suit : $[0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, T] = [0, 2] \times [0, 1] \times [0, 50]$. L'intervalle spatial $(0, 2)$ est divisé en 20 sous-intervalles et l'intervalle spatial $(0, 1)$ est divisé en 10 sous-intervalles tandis que l'intervalle temporel $(0, 50)$ est divisé en 700 sous-intervalles, avec $h(u_t) = u_t$, $\gamma = 2$ et $g(t) = e^{-t}$.

La condition aux limites du problème (3.1.1) est donnée, en utilisant les conditions initiales suivantes : $u(x, y, 0) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$; $(u_t(x, y, 0) = 0$.

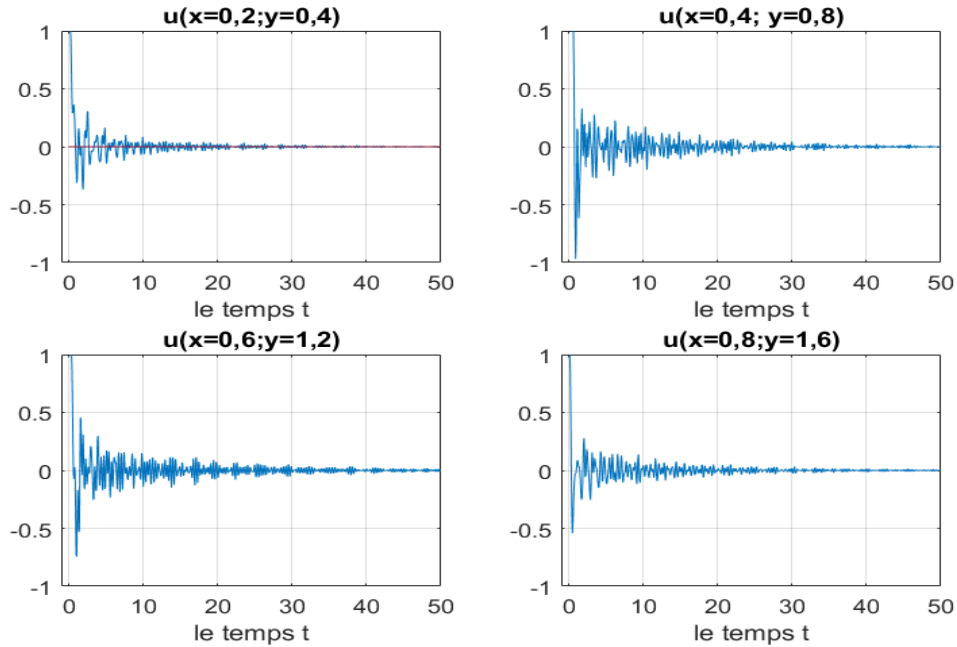


FIGURE 3.1 – La solution du système pour différents points du plan

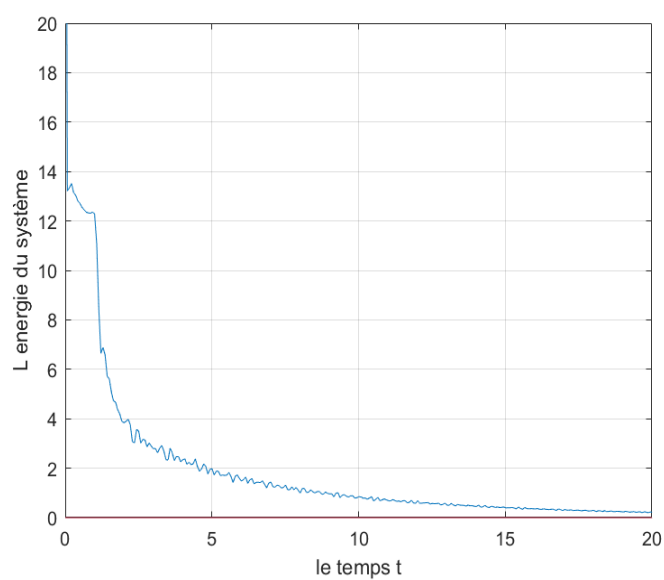


FIGURE 3.2 – L'énergie du système

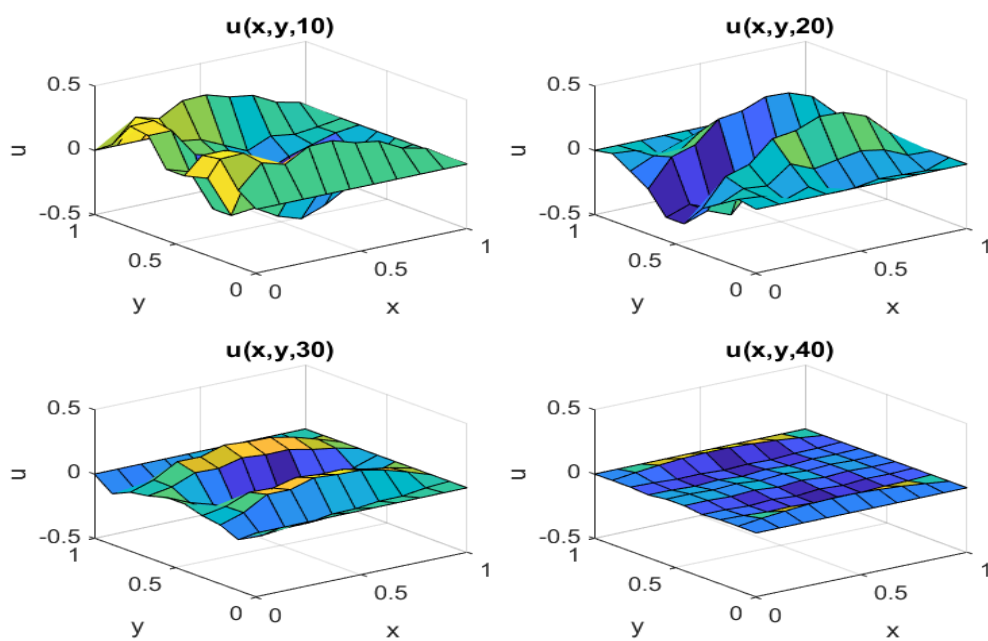


FIGURE 3.3 – La solution du système pour différents instants

Chapitre 4

Résultat général de décroissance pour une équation d'Euler-Bernoulli viscoélastique avec une source logarithmique et un contrôle frontière de type feedback

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons l'équation suivante pour une plaque viscoélastique (4.1.1) avec une source non linéaire de type logarithmique et une dissipation de type feedback non linéaire sur une partie de la frontière :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s) \Delta^2 u(s) ds + h(u_t) = |u|^{\gamma-2} u \ln |u|, & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \beta_1 u - \beta_1 \left(\int_0^t g(t-s) u(s) ds \right) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ -\beta_2 u + \beta_2 \left(\int_0^t g(t-s) u(s) ds \right) + |u_t|^{m-2} u_t = |u|^{p-2} u, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x); u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (4.1.1)$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ avec une frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Ici, Γ_0 et Γ_1 sont fermées et disjointes, avec $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$, et $n = (\nu_1, \nu_2)$ est la normale unitaire sortante à $\partial\Omega$, $\eta = (-\nu_2, \nu_1)$ est la tangente unitaire orientée positivement sur $\partial\Omega$, le terme intégral dans (1.1)₁ est la mémoire responsable de l'amortissement viscoélastique où g est une fonction positive appelée la fonction de relaxation, et h est une fonction spécifique. Nous notons par β_1, β_2 les opérateurs différentiels suivants :

$$\beta_1 u = \Delta u + (1 - \mu) B_1, \quad \beta_2 u = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} + (1 - \mu) \frac{\partial B_2 u}{\partial \eta}, \quad (4.1.2)$$

où

$$B_1 u = 2\nu_1 \nu_2 u_{xy} - \nu_1^2 u_{yy} - \nu_2^2 u_{xx}, \quad B_2 u = (\nu_1^2 - \nu_2^2) u_{xy} + \nu_1 \nu_2 (u_{yy} - u_{xx}),$$

et $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ représente le coefficient de Poisson. Ce système décrit le déplacement transversal $u = u(x, y, t)$ d'une plaque mince vibrante soumise à un amortissement viscoélastique distribué et un amortissement par friction dépendant du temps à la frontière. Nous considérons les hypothèses suivantes.

(A1) Les constantes m, p et γ satisfont

$$2 < m, p, \gamma < \infty \text{ avec } p(\gamma - 4) + \gamma(p - 4) > 0.$$

(A2) $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction différentiable telle que

$$g(0) > 0, \quad 1 - \int_0^\infty g(s)ds = l > 0, \quad (4.1.3)$$

et il existe une fonction positive $H \in C^1(\mathbb{R}_+)$ et H est linéaire ou strictement croissante et strictement convexe de classe C^2 sur $(0, r]$, $r < 1$, avec $H(0) = H'(0) = 0$, telle que

$$g'(t) \leq -\xi(t)H(g(t)), \quad \forall t > 0, \quad (4.1.4)$$

où $\xi(t)$ est une fonction positive décroissante différentiable.

(A3) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^0 croissante et il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$c_1|s| \leq |h(s)| \leq c_2|s|, \quad \text{si } |s| \geq r,$$

$$h^2(s) \leq H^{-1}(sh(s)), \quad \text{si } |s| \leq r.$$

Nous nous intéressons à un nouveau résultat de décroissance d'énergie pour les solutions du problème (4.1.1). L'originalité de ce chapitre est d'étendre le résultat dans le contexte de la viscoélasticité, de la source non linéaire de type logarithmique et lorsque **l'amortissement à la frontière avec une source est pris en compte**. Ce travail constitue une extension des résultats obtenus dans [6, 18, 56]. La suite de ce chapitre est organisée comme suit. Dans la Section 2, nous énonçons les hypothèses ainsi que le cadre théorique nécessaire à la suite de notre étude. La Section 3 est consacrée à l'énoncé et à la démonstration de plusieurs lemmes techniques qui interviennent tout au long du développement. Enfin, la démonstration du résultat

principal est présentée dans la Section 4.

4.2 Préliminaires

Nous utilisons les espaces de Lebesgue et de Sobolev standard avec leurs produits scalaires et normes habituels. Tout au long de ce chapitre, c est utilisé pour désigner une constante positive générique, on définit également

$$W = \left\{ w \in H^2(\Omega) : w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \right\}.$$

Nous avons d'abord l'injection : $W \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour $2 \leq q$, et $L^r(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, pour $q < r$. Soit $C_q > 0$ la même constante optimale de l'injection de Sobolev qui satisfait les inégalités suivantes :

$$\|u\|_q \leq C_q \|\nabla u\|_2 \text{ et } \|u\|_q \leq C_q \|u\|_r, \quad (4.2.1)$$

et nous utilisons l'injection de trace-Sobolev : $W \hookrightarrow L^k(\Gamma_1)$, $1 \leq k$. Dans ce cas, la constante d'inclusion est notée par B_k , c'est-à-dire

$$\|u\|_{k,\Gamma_1} \leq B_k \|\nabla u\|_2. \quad (4.2.2)$$

Définissons la forme bilinéaire $a(.,.)$ comme suit

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \{u_{xx}v_{xx} + u_{yy}v_{yy} + \mu(u_{xx}v_{yy} + u_{yy}v_{xx}) + 2(1 - \mu)u_{xy}v_{xy}\} dx dy,$$

et, comme $\text{meas } \Gamma_0 > 0$, nous savons que $\sqrt{a(u, u)}$ est une norme équivalente sur

W ; c'est-à-dire, pour certaines constantes positives α et β ,

$$\alpha \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq a(u, u) \leq \beta \|u\|_{H^2(\Omega)}^2, \quad (4.2.3)$$

ainsi

$$\alpha \|\nabla u\|_2^2 \leq a(u, u), \quad (4.2.4)$$

l'inégalité de Young donne, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$a(u, v) \leq \varepsilon a(u, u) + \frac{1}{4\varepsilon} a(v, v). \quad (4.2.5)$$

De plus, mentionnons l'identité utile suivante, voir [34],

$$\int_{\Omega} (\Delta^2 u) v dx = a(u, v) + \int_{\Gamma} \left\{ (\beta_2 u) v - (\beta_1 u) \frac{\partial v}{\partial n} \right\} d\Gamma. \quad (4.2.6)$$

Remarque 4.2.1. *L'hypothèse (A3) implique que $sh(s) > 0$, pour tout $s \neq 0$.*

Remarque 4.2.2. *Si H est une fonction strictement croissante et strictement convexe C^2 sur $(0, r]$, avec $H(0) = H'(0) = 0$, alors elle a une extension $\bar{H}$, qui est une fonction strictement croissante et strictement convexe C^2 sur $(0, \infty)$. Par exemple, si $H(r) = a$, $H'(r) = b$, $H''(r) = c$, nous pouvons définir $\bar{H}$, pour $t > r$, par*

$$\bar{H}(t) = \frac{c}{2} t^2 + (b - cr) t + \left(a + \frac{c}{2} r^2 - br \right).$$

Maintenant, introduisons les fonctionnelles suivantes :

$$\begin{aligned}
J(t) &= \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) a(u, u) - \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} |u(x, t)|^{\gamma} \ln |u(x, t)| dx - \frac{1}{p} \|u\|_{p, \Gamma_1}^p, \\
E(t) &= E(u(t), u_t(t)) = J(t) + \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} (g \circ u)(t) + \frac{1}{\gamma^2} \|u\|_{\gamma}^{\gamma}, \quad (4.2.7) \\
I_1(t) &= I_1(u(t)) = \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) a(u, u) - \int_{\Omega} |u(x, t)|^{\gamma} \ln |u(x, t)| dx, \\
I_2(t) &= I_2(u(t)) = \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) a(u, u) - \|u\|_{p, \Gamma_1}^p,
\end{aligned}$$

où

$$(g \circ u)(t) = \int_0^t g(t-s) a(u(t) - u(s), u(t) - u(s)) ds,$$

et $E(t)$ représente la fonctionnelle énergie.

Lemme 4.2.3. *Supposons que (A1) et (A2) soient vérifiées, en utilisant la Remarque 4.2.1 et soit $(u_0, u_1) \in H^4(\Omega) \cap W \times W$ donné. Si u est la solution de (4.1.1), alors la fonctionnelle E satisfait*

$$E'(t) = \frac{1}{2} (g' \circ u)(t) - \frac{1}{2} g(t) a(u, u) - \int_{\Omega} u_t(t) h(u_t(t)) dx - \|u_t\|_{m, \Gamma_1}^m \leq 0, \quad (4.2.8)$$

pour presque tout $t \in [0, T]$.

Démonstration. En multipliant l'équation différentielle dans (4.1.1) par u_t et en intégrant sur Ω , en utilisant l'intégration par parties et (A2), nous obtenons (4.2.8) pour toute solution régulière. Cela reste valide pour les solutions faibles par un simple argument de densité. Voir [12, 44, 45] pour des calculs détaillés.

Lemme 4.2.4 (Lemme 2.1 Dans [29]). *Pour chaque $\mu > 0$, on a*

$$|\ln \tau| \leq \frac{\tau^{-\mu}}{e\mu} \text{ pour } 0 < \tau < 1 \text{ et } 0 \leq \ln \tau \leq \frac{\tau^{\mu}}{e\mu} \text{ pour } \tau \geq 1.$$

Lemme 4.2.5. *Supposons que (A1) et (A2) soient vérifiées, et $(u_0, u_1) \in H^4(\Omega) \cap W \times W$, telles que*

$$\max(\alpha_1, \alpha_2) < 1, \quad (4.2.9)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{C_{\gamma+k}^{\gamma+k}}{\alpha e k l} \left(\frac{4p\gamma}{\alpha l(p(\gamma-4) + \gamma(p-4))} E(u_0, u_1) \right)^{\frac{\gamma+k-2}{2}}, \\ \alpha_2 &= \frac{B_p^p}{\alpha l} \left(\frac{4p\gamma}{\alpha l(p(\gamma-4) + \gamma(p-4))} E(u_0, u_1) \right)^{\frac{p-2}{2}}, \end{aligned}$$

et

$$I_1(u_0) > 0, \quad I_2(u_0) > 0, \quad (4.2.10)$$

alors $I_1(u(t)) > 0$ et $I_2(u(t)) > 0 \quad \forall t > 0$.

Démonstration. Puisque $I_1(u_0) > 0$ et $I_2(u_0) > 0$, alors il existe (par continuité) $T_m < T$ tel que

$$I_1(u(t)) \geq 0, \quad I_2(u(t)) \geq 0, \quad \forall t \in [0, T_m];$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) a(u, u) - \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} |u(x, t)|^{\gamma} \ln |u(x, t)| dx - \frac{1}{p} \|u\|_{p, \Gamma_1}^p \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{p} \right) \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) a(u, u) + \frac{1}{\gamma} I_1(t) + \frac{1}{p} I_2(t) \\ &\geq \frac{p(\gamma-4) + \gamma(p-4)}{4p\gamma} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) a(u, u). \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

En utilisant (A1), (A2), (4.2.8) et (4.2.11), nous avons facilement

$$\begin{aligned}
 la(u, u) &\leq \left(1 - \int_0^t g(s)ds\right) a(u, u) \\
 &\leq \frac{4p\gamma}{p(\gamma - 4) + \gamma(p - 4)} J(t) \leq \frac{4p\gamma}{p(\gamma - 4) + \gamma(p - 4)} E(t) \\
 &\leq \frac{4p\gamma}{p(\gamma - 4) + \gamma(p - 4)} E(u_0, u_1), \quad \forall t \in [0, T_m]. \tag{4.2.12}
 \end{aligned}$$

Nous exploitons ensuite (A1), (A2), (4.2.1), (4.2.4), (4.2.9) et (4.2.12) pour obtenir, $\forall t \in [0, T_m]$, nous choisissons $k > 0$ avec

$$2 < \gamma + k < \infty,$$

et en utilisant le Lemme 4.2.4, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |u(x, t)|^{\gamma} \ln |u(x, t)| dx &\leq \frac{1}{ek} \int_{|u(x, t)| \geq 1} |u(x, t)|^{\gamma+k} dx \\
 &\leq \frac{1}{ek} \|u(t)\|_{\gamma+k}^{\gamma+k} \\
 &\leq \frac{\alpha C_{\gamma+k}^{\gamma+k}}{\alpha ekl} \|\nabla u(t)\|^{\gamma+k-2} l \|\nabla u(t)\|^2 \\
 &\leq \alpha \alpha_1 l \|\nabla u(t)\|_2^2 \leq l \alpha_1 a(u, u) \tag{4.2.13} \\
 &< \left(1 - \int_0^t g(s)ds\right) a(u, u).
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$I_1(t) = \left(1 - \int_0^t g(s)ds\right) a(u, u) - \int_{\Omega} |u(x, t)|^{\gamma} \ln |u(x, t)| dx > 0,$$

et en utilisant (A1), (A2), (4.2.2), (4.2.4), (4.2.9) et (4.2.12), nous obtenons,

$$\begin{aligned}
 \| u(t) \|_{\Gamma_{1,p}}^p &\leq B_p^p \| \nabla u(t) \|_2^p \leq \frac{\alpha B_p^p}{\alpha l} \| \nabla u(t) \|_2^{p-2} l \| \nabla u(t) \|_2^2 \\
 &\leq \alpha \alpha_2 l \| \nabla u(t) \|_2^2 \leq l \alpha_2 a(u, u) \\
 &< \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) a(u, u).
 \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

Par conséquent,

$$I_2(t) = \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) a(u, u) - \| u(t) \|_{\Gamma_{1,p}}^p > 0,$$

pour tout $t \in [0, T_m]$. En répétant cette procédure, et en utilisant le fait que

$$\lim_{t \rightarrow T_m} \frac{C_{\gamma+k}^{\gamma+k}}{\alpha e k l} \left(\frac{4p\gamma}{\alpha l(p(\gamma-4) + \gamma(p-4))} E(u(t), u_t(t)) \right)^{\frac{\gamma+k-2}{2}} \leq \alpha_1 < 1,$$

et

$$\lim_{t \rightarrow T_m} \frac{B_p^p}{\alpha l} \left(\frac{4p\gamma}{\alpha l(p(\gamma-4) + \gamma(p-4))} E(u(t), u_t(t)) \right)^{\frac{p-2}{2}} \leq \alpha_2 < 1,$$

T_m est prolongé à T .

Nous terminons cette section en énonçant le théorème d'existence d'une solution globale, dont la démonstration peut être établie en combinant les arguments de [6, 12] et en utilisant le Lemme 4.2.5.

Théorème 4.2.6. *Supposons que les conditions (A1) et (A2) soient vérifiées. Soit $(u_0, u_1) \in H^4(\Omega) \cap W \times W$ donné, et que (4.2.9) et (4.2.10) soient satisfaites. Alors le problème (4.1.1) admet une solution globale unique*

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^4(\Omega) \cap W) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; W) \cap W^{2,\infty}(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)).$$

4.3 Lemmes techniques

Dans cette section, nous établissons plusieurs lemmes techniques.

Lemme 4.3.1. *Sous les conditions du lemme 4.2.5, nous obtenons, pour toute constante $k \geq 2$, l'inégalité suivante :*

$$\|\nabla u(t)\|_2^k \leq C_0^{\frac{k-2}{2}} \|\nabla u(t)\|_2^2, \quad \forall t > 0, \quad (4.3.1)$$

où $C_0 = \frac{4p\gamma}{\alpha l(p(\gamma - 4) + \gamma(p - 4))} E(u_0, u_1)$.

Démonstration. En utilisant (4.2.4), (4.2.12) et le lemme 4.2.5, nous obtenons

$$\alpha \|\nabla u(t)\|_2^2 \leq a(u, u) \leq \frac{4p\gamma}{l(p(\gamma - 4) + \gamma(p - 4))} E(u_0, u_1), \quad \forall t > 0,$$

puis,

$$\begin{aligned} \|\nabla u(t)\|_2^k &\leq \|\nabla u(t)\|_2^{k-2} \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\leq \left(\frac{4p\gamma}{\alpha l(p(\gamma - 4) + \gamma(p - 4))} E(u_0, u_1) \right)^{\frac{k-2}{2}} \|\nabla u(t)\|_2^2, \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

Lemme 4.3.2. *Il existe des constantes positives d et t_1 telles que*

$$g'(t) \leq -dg(t), \quad \forall t \in [0, t_1]. \quad (4.3.2)$$

Démonstration. En utilisant (A2), nous déduisons que $\lim_{t \rightarrow T_m} g(t) = 0$.

Ainsi, il existe $t_1 \geq 0$ assez grand tel que

$$g(t_1) = r,$$

et

$$g(t) \leq r, \quad \forall t \geq t_1. \quad (4.3.3)$$

Comme g et ξ sont des fonctions continues positives et décroissantes, et H est une fonction continue positive, alors, pour tout $t \in [0, t_1]$,

$$0 < g(t_1) \leq g(t) \leq g(0),$$

$$0 < \xi(t_1) \leq \xi(t) \leq \xi(0),$$

ce qui implique qu'il existe deux constantes positives a et b telles que

$$a \leq \xi(t)H(g(t)) \leq b.$$

Par conséquent, pour tout $t \in [0, t_1]$,

$$g'(t) \leq -\xi(t)H(g(t)) \leq -\frac{a}{g(0)}g(0) \leq -\frac{a}{g(0)}g(t).$$

Lemme 4.3.3. *Sous les hypothèses (A1)-(A3) et $u(t)$ solution de (4.1.1), la fonctionnelle ψ_1 définie par*

$$\psi_1(t) := \int_{\Omega} uu_t dx,$$

satisfait l'estimation

$$\begin{aligned} \psi_1'(t) &\leq -\frac{l}{2}a(u, u) + \int_{\Omega} u_t^2 dx + cg \circ u + c \int_{\Omega} h^2(u_t) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Omega} |u(x, t)|^\gamma \ln |u(x, t)| dx + \|u\|_{p, \Gamma_1}^p + \frac{m-1}{m} C(\sigma) \|u_t\|_{m, \Gamma_1}^m. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Démonstration. Des calculs directs, en utilisant (4.1.1), donnent

$$\begin{aligned}
 \psi'_1(t) &= \int_{\Omega} u_t^2 dx - \int_{\Omega} u \Delta^2 u dx + \int_{\Omega} u \int_0^t g(t-s) \Delta^2 u(s) ds dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} |u(x, t)|^\gamma \ln |u(x, t)| dx - \int_{\Omega} u h(u_t) dx \\
 &= \int_{\Omega} u_t^2 dx - \int_{\Omega} u \Delta^2 u dx + \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} u [\Delta^2 u(s) - \Delta^2 u(t)] dx ds \\
 &\quad + \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} u \Delta^2 u(t) dx + \int_{\Omega} |u(x, t)|^\gamma \ln |u(x, t)| dx \\
 &\quad - \int_{\Omega} u h(u_t) dx.
 \end{aligned}$$

Ensuite, par (4.2.5) – (4.2.6), (4.1.1)₂₋₄, (A1) – (A3), et le théorème de trace, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \psi'_1(t) &= \int_{\Omega} u_t^2 dx - \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) a(u, u) + \int_0^t g(t-s) a(u(s) - u(t), u(t)) ds \\
 &\quad + \int_{\Omega} |u(x, t)|^\gamma \ln |u(x, t)| dx - \int_{\Omega} u h(u_t) dx + \|u\|_{p, \Gamma_1}^p - \int_{\Gamma_1} u |u_t|^{m-2} u_t d\Gamma.
 \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Nous estimons maintenant le dernier terme du membre droit de (4.3.5). En utilisant l'inégalité de Young et une technique similaire à celle de (4.2.14), nous avons

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Gamma_1} u |u_t|^{m-2} u_t d\Gamma &\leq \frac{\sigma}{m} \|u\|_{m, \Gamma_1}^m + \frac{m-1}{m} C(\sigma) \|u_t\|_{m, \Gamma_1}^m \\
 &\leq \frac{\sigma}{m} l \alpha_0 a(u, u) + \frac{m-1}{m} C(\sigma) \|u_t\|_{m, \Gamma_1}^m,
 \end{aligned}$$

où

$$\alpha_0 = \frac{B_m^m}{\alpha l} \left(\frac{4p\gamma}{\alpha l(p(\gamma-4) + \gamma(p-4))} E(u_0, u_1) \right)^{\frac{m-2}{2}}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\psi'_1 &\leq \int_{\Omega} u_t^2 dx - la(u, u) + \left(\varepsilon \int_0^t g(s) ds + \frac{\sigma}{m} l\alpha_0 \right) a(u, u) + \frac{1}{4\varepsilon} g \circ u \\
&\quad + c\varepsilon \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{c}{4\varepsilon} \int_{\Omega} h^2(u_t) dx + \int_{\Omega} |u(x, t)|^\gamma \ln |u(x, t)| dx \\
&\quad + \|u\|_{p, \Gamma_1}^p + \frac{m-1}{m} C(\sigma) \|u_t\|_{m, \Gamma_1}^m \\
&\leq \int_{\Omega} u_t^2 dx - la(u, u) + \left(\varepsilon + \frac{\sigma}{m} l\alpha_0 \right) a(u, u) + \frac{1}{4\varepsilon} g \circ u + c\varepsilon |u|_{H^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \frac{c}{4\varepsilon} \int_{\Omega} h^2(u_t) dx + \int_{\Omega} |u(x, t)|^\gamma \ln |u(x, t)| dx \\
&\quad + \|u\|_{p, \Gamma_1}^p + \frac{m-1}{m} C(\sigma) \|u_t\|_{m, \Gamma_1}^m.
\end{aligned}$$

En utilisant (4.2.3) et en choisissant ε et σ assez petits nous obtenons (4.3.4).

Lemme 4.3.4. *Sous les hypothèses (A1)-(A3) et $u(t)$ est solution de (4.1.1), la fonctionnelle ψ_2 définie par*

$$\psi_2(t) := - \int_{\Omega} u_t \int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s)) ds dx,$$

satisfait l'estimation

$$\begin{aligned}
\psi'_2(t) &\leq \left(\frac{\delta}{\alpha} \left(C_{E(0)} + B_{2(p-1)}^{2(p-1)} C'^{p-2} \right) + \varepsilon \right) a(u, u) - \left(\int_0^t g(s) ds - \varepsilon \right) \int_{\Omega} u_t^2 dx \\
&\quad + C_{\varepsilon, \delta} g \circ u - \frac{c}{\alpha \varepsilon} g' \circ u + c \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma + \frac{\delta(m-1)}{m} (1-l) \|u_t\|_{m, \Gamma_1}^m, \quad (4.3.6)
\end{aligned}$$

pour tout $0 < \varepsilon < 1$, avec

$$C_{E(0)} = \left(\frac{C^{\gamma-1-\mu_3}}{e\mu_3} \right)^2 (C_0)^{\gamma-2-\mu_3} + \left(\frac{C^{\gamma-1+\mu_4}}{e\mu_4} \right)^2 (C_0)^{\gamma-2+\mu_4}, \quad (4.3.7)$$

où $C_0 = \frac{4p\gamma}{\alpha l(p(\gamma-4) + \gamma(p-4))} E(u_0, u_1)$.

Démonstration. En exploitant les équations (4.1.1), en intégrant par parties, (4.2.6), et en effectuant quelques manipulations, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\psi'_2(t) = & \int_0^t g(t-s)a(u(t)-u(s), u(t))ds \\
& - \int_0^t g(t-s)a\left(u(t)-u(s), \int_0^t g(t-s)u(s)ds\right) ds \\
& - \int_{\Omega} |u|^{\gamma-2}u \ln |u| \left(\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))ds\right) dx \\
& + \int_{\Omega} h(u_t) \left(\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))ds\right) dx \\
& - \int_{\Gamma_1} |u|^{p-2}u \left(\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))ds\right) d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma_1} |u_t|^{m-2}u_t \left(\int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))ds\right) d\Gamma \\
& - \int_{\Omega} u_t \int_0^t g'(t-s)(u(t)-u(s))ds dx - \left(\int_0^t g(s)ds\right) \int_{\Omega} u_t^2 dx.
\end{aligned}$$

Ensuite, nous utilisons (4.1.3) et (4.2.5) pour obtenir

$$\begin{aligned}
& \int_0^t g(t-s)a(u(t)-u(s), u(t))ds \\
& \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\int_0^t g(s)ds\right) a(u, u) + \frac{1}{2\varepsilon} g \circ u \leq \frac{\varepsilon}{2} a(u, u) + \frac{1}{2\varepsilon} g \circ u,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t g(t-s)a\left(u(t)-u(s), \int_0^t g(t-s)u(s)ds\right) ds \\
& = \int_0^t g(t-s) \int_0^t g(t-s)a(u(t)-u(s), u(t)-u(s))ds ds \\
& \quad - \left(\int_0^t g(s)ds\right) \int_0^t g(t-s)a(u(t)-u(s), u(t))ds \\
& \leq \left(1 + \frac{1}{2\varepsilon}\right) g \circ u + \frac{\varepsilon}{2} a(u, u).
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, pour $0 < \delta < 1$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |u(x, t)|^{\gamma-2} u \ln |u(x, t)| \int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s)) ds dx \\ & \leq \delta \int_{\Omega} (|u(x, t)|^{\gamma-1} \ln |u(x, t)|)^2 dx + \frac{cC_{\alpha}}{\delta} \int_{\Omega} \left| \int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s)) ds \right|^2 dx. \end{aligned}$$

En utilisant la même notation que dans [30], posons

$$\Omega_3 = \{x \in \Omega : |u(x, t)| < 1\} \text{ et } \Omega_4 = \{x \in \Omega : |u(x, t)| \geq 1\}.$$

Comme $2 < 2(\gamma - 1) < \infty$, il existe $\mu_3 > 0$ et $\mu_4 > 0$ tels que $2 < 2(\gamma - 1 - \mu_3) < \infty$ et $2 < 2(\gamma - 1 + \mu_4) < \infty$, respectivement. En utilisant le Lemme 4.2.4, (4.2.1), le lemme 4.3.1, (4.2.4) et (4.3.7), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (|u(x, t)|^{\gamma-1} \ln |u(x, t)|)^2 dx \\ & \leq \left(\frac{1}{e\mu_3} \right)^2 \int_{\Omega_3} |u(x, t)|^{2(\gamma-1)-2\mu_3} dx + \left(\frac{1}{e\mu_4} \right)^2 \int_{\Omega_4} |u(x, t)|^{2(\gamma-1+\mu_4)} dx \\ & \leq \left[\left(\frac{C^{\gamma-1-\mu_3}}{e\mu_3} \right)^2 (C_0)^{\gamma-2-\mu_3} + \left(\frac{C^{\gamma-1+\mu_4}}{e\mu_4} \right)^2 (C_0)^{\gamma-2+\mu_4} \right] \|\nabla u(t)\|^2 \\ & \leq \frac{C_{E(0)}}{\alpha} a(u, u). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Holder et (4.2.3), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left| \int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s))ds \right|^2 dx \\
& \leq \int_{\Omega} \left| \int_0^t \sqrt{g(t-s)} \sqrt{g(t-s)}(u(t) - u(s))ds \right|^2 dx \\
& \leq \left(\int_0^t g(s)ds \right) \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s)|u(t) - u(s)|^2 ds dx \\
& \leq c \int_0^t g(t-s)|u(t) - u(s)|_{H^2(\Omega)}^2 ds \\
& \leq \frac{c}{\alpha} g \circ u.
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

De même, en utilisant (4.2.3), (4.3.8) et l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} h(u_t) \left(\int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s))ds \right) dx \\
& \leq c \int_{\Omega} h^2(u_t) dx + \int_{\Omega} \left| \int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s))ds \right|^2 dx \\
& \leq c \int_{\Omega} h^2(u_t) dx + \frac{c}{\alpha} g \circ u.
\end{aligned}$$

En exploitant l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Young, (4.2.3) et (4.2.14), on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_1} |u_t|^{m-2} u_t \left(\int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s))ds \right) d\Gamma \\
& \leq \int_0^t g(t-s) \left(\int_{\Gamma_1} |u_t|^m d\Gamma \right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\int_{\Gamma_1} |u(t) - u(s)|^m d\Gamma \right)^{\frac{1}{m}} ds \\
& \leq \frac{\delta(m-1)}{m} (1-l) \|u_t\|_{m,\Gamma_1}^m + \frac{C(\delta)B_m^m}{m} \int_0^t g(t-s) \left(\int_{\Gamma_1} |u(t) - u(s)|^2 d\Gamma \right)^{\frac{m}{2}} ds \\
& \leq \frac{\delta(m-1)}{m} (1-l) \|u_t\|_{m,\Gamma_1}^m + \frac{C(\delta)B_m^m}{m} \int_0^t g(t-s) \|u(t) - u(s)\|_{H^2(\Omega)}^m ds \\
& \leq \frac{\delta(m-1)}{m} (1-l) \|u_t\|_{m,\Gamma_1}^m + \frac{C(\delta)B_m^m}{\alpha m} C'^{\frac{m-2}{2}} (g \circ u)(t),
\end{aligned}$$

où $C_0 = \frac{4p\gamma}{\alpha l(p(\gamma - 4) + \gamma(p - 4))} E(u_0, u_1)$.

À partir de (4.2.4), (4.2.14), (4.3.8) et de l'inégalité de Young, on peut estimer le cinquième et le septième terme comme suit,

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Gamma_1} |u|^{p-2} u \left(\int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s)) ds \right) d\Gamma \\
& \leq \delta \|u\|_{2(p-1), \Gamma_1}^{2(p-1)} + \frac{1}{4\delta} \int_{\Gamma_1} \left| \int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s)) ds \right|^2 d\Gamma \\
& \leq \delta B_{2(p-1)}^{2(p-1)} \|\nabla u\|_2^{2(p-1)} + \frac{1}{4\delta} \int_{\Gamma_1} \left| \int_0^t g(t-s)(u(t) - u(s)) ds \right|^2 d\Gamma \\
& \leq \delta C'^{p-2} B_{2(p-1)}^{2(p-1)} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{c}{\alpha\delta} g \circ u \\
& \leq \frac{\delta}{\alpha} C'^{p-2} B_{2(p-1)}^{2(p-1)} a(u, u) + \frac{c}{\alpha\delta} g \circ u,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} u_t \int_0^t g'(t-s)(u(t) - u(s)) ds dx \\
& \leq \varepsilon \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} \left| \int_0^t g'(t-s)(u(t) - u(s)) ds \right|^2 dx \\
& \leq \varepsilon \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \left(\int_0^t g'(s) ds \right) \int_{\Omega} \int_0^t g'(t-s) |u(t) - u(s)|^2 ds dx \\
& \leq \varepsilon \int_{\Omega} u_t^2 dx - \frac{c}{\alpha\varepsilon} g' \circ u.
\end{aligned}$$

En combinant toutes les estimations ci-dessus, l'affirmation du Lemme 4.3.4 est prouvée.

Définissons

$$I(t) := - \int_{t_1}^t g'(s) a(u(t) - u(t-s), u(t) - u(t-s)) ds \leq -cE'(t). \quad (4.3.9)$$

Lemme 4.3.5. *Sous les hypothèses et (A1) – (A3), nous avons les estimations*

suivantes

$$\int_{t_1}^t g(s) a(u(t) - u(t-s), u(t) - u(t-s)) ds \leq \frac{(t-t_1)}{q} \bar{H}^{-1} \left(\frac{qI(t)}{(t-t_1)\xi(t)} \right) \quad (4.3.10)$$

où $q \in (0, 1)$ et $\bar{H}$ est une extension de H telle que $\bar{H}$ soit strictement croissante et strictement convexe, une fonction C^2 sur $(0, \infty)$; voir Remarque 4.2.2.

Démonstration. Nous définissons la quantité suivante

$$\lambda(t) := \frac{q}{(t-t_1)} \int_{t_1}^t a(u(t) - u(t-s), u(t) - u(t-s)) ds,$$

puis en utilisant (4.2.7) et (4.2.8), nous voyons facilement que,

$$\lambda(t) \leq cqE(0),$$

puis en choisissant $q \in (0, 1)$ suffisamment petit pour que, pour tout $t \geq t_1$

$$\lambda(t) < 1. \quad (4.3.11)$$

Étant donné que H est strictement convexe sur $(0, r]$ et $H(0) = 0$, alors

$$H(\theta z) \leq \theta H(z), \quad 0 \leq \theta \leq 1 \text{ et } z \in (0, r]. \quad (4.3.12)$$

L'utilisation de (4.1.4), (4.3.11), (4.3.12) et en utilisant l'inégalité de Jensen, on obtient

$$\begin{aligned}
I(t) &= \frac{1}{q\lambda(t)} \int_{t_1}^t q\lambda(t) (-g'(s)) a(u(t) - u(t-s), u(t) - u(t-s)) ds \\
&\geq \frac{1}{q\lambda(t)} \int_{t_1}^t q\lambda(t) \xi(s) H(g(s)) a(u(t) - u(t-s), u(t) - u(t-s)) ds \\
&\geq \frac{\xi(t)}{q\lambda(t)} \int_{t_1}^t qH(\lambda(t)g(s)) a(u(t) - u(t-s), u(t) - u(t-s)) ds \\
&\geq \frac{(t-t_1)\xi(t)}{q} H\left(\frac{q}{(t-t_1)} \int_{t_1}^t g(s) a(u(t) - u(t-s), u(t) - u(t-s)) ds\right) \\
&= \frac{(t-t_1)\xi(t)}{q} \bar{H}\left(\frac{q}{(t-t_1)} \int_{t_1}^t g(s) a(u(t) - u(t-s), u(t) - u(t-s)) ds\right).
\end{aligned}$$

Cela implique que

$$\int_{t_1}^t g(s) a(u(t) - u(t-s), u(t) - u(t-s)) ds \leq \frac{(t-t_1)}{q} \bar{H}^{-1}\left(\frac{qI(t)}{(t-t_1)\xi(t)}\right).$$

Lemme 4.3.6. *Supposons que (A1) et (A2) sont vérifiées, et supposons que*

$$\alpha_1 + \alpha_2 < \frac{1}{2}, \tag{4.3.13}$$

où α_1 et α_2 sont introduits dans le Lemme 4.2.5.

Alors, il existe des constantes $N_1, N_2, N_3, m, c > 0$ telles que la fonctionnelle

$$\mathcal{L}(t) = N_1 E(t) + N_2 \psi_2(t) + N_3 \psi_1(t),$$

satisfait, pour tout $t > t_1$,

$$\mathcal{L}'(t) \leq -mE(t) + c(g \circ u)(t) + c \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma, \quad \forall t \geq t_1. \tag{4.3.14}$$

De plus, $E(t)$ est équivalent à $\mathcal{L}(t)$.

Remarque 4.3.7. La condition (4.3.13) vérifie la condition (4.2.9) du lemme 4.2.5.

Démonstration. Soit $g_1 = \int_0^{t_1} g(s)ds > 0$ où $t_1 > 0$ a été introduit dans (4.3.3). En combinant (4.2.8), (4.3.4), (4.3.6) et en prenant $\delta = l\alpha/8N_2(C_{E(0)} + B_{2(p-1)}^{2(p-1)}C'^{p-2})$, $\varepsilon = l/(8N_2)$, nous obtenons, pour tout $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) \leq & - \left(N_3 \frac{l}{2} - \frac{l}{4} \right) a(u, u) - \left(N_2 g_1 - \frac{l}{8} - N_3 \right) \int_{\Omega} u_t^2 dx \\ & + (N_2 C_{\varepsilon, \delta} + cN_3) (g \circ u)(t) + \left(\frac{1}{2} N_1 - \frac{8c}{\alpha l} N_2^2 \right) (g' \circ u)(t) \\ & + c(N_2 + N_3) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma + N_3 \int_{\Omega} |u(x, t)|^\gamma \ln |u(x, t)| dx + N_3 \|u\|_p^p \\ & - \left(N_1 - N_3 \frac{m-1}{m} C(\sigma) - \frac{\alpha l(m-1)}{8m(C_{E(0)} + B_{2(p-1)}^{2(p-1)}C'^{p-2})} (1-l) \right) \|u_t\|_{m, \Gamma_1}^m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) \leq & -mE(t) - \left(N_3 \frac{l}{2} - \frac{l}{4} - \frac{m}{2} \left(1 - \int_0^t g(s)ds \right) \right) a(u, u) \\ & - \left(N_2 g_1 - \frac{l}{8} - N_3 - \frac{m}{2} \right) \int_{\Omega} u_t^2 dx + \left(N_2 C_{\varepsilon, \delta} + cN_3 + \frac{m}{2} \right) (g \circ u)(t) \\ & + \left(\frac{1}{2} N_1 - \frac{8c}{\alpha l} N_2^2 \right) (g' \circ u)(t) + c(N_2 + N_3) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma \\ & + \left(N_3 - \frac{m}{\gamma} \right) \int_{\Omega} |u(x, t)|^\gamma \ln |u(x, t)| dx + \frac{m}{\gamma^2} \|u\|_\gamma^\gamma + \left(N_3 - \frac{m}{p} \right) \|u\|_p^p \\ & - \left(N_1 - N_3 \frac{m-1}{m} C(\sigma) - \frac{\alpha l(m-1)}{8m(C_{E(0)} + B_{2(p-1)}^{2(p-1)}C'^{p-2})} (1-l) \right) \|u_t\|_{m, \Gamma_1}^m, \end{aligned}$$

en utilisant (4.2.13) et (4.2.14) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq & -mE(t) - \left(N_2 g_1 - \frac{l}{8} - N_3 - \frac{m}{2} \right) \int_{\Omega} u_t^2 dx + \left(N_2 C_{\varepsilon, \delta} + c N_3 + \frac{m}{2} \right) (g \circ u)(t) \\
& - l \left(N_3 \left(\frac{1}{2} - \alpha_2 - \alpha_1 \right) - \frac{1}{4} - \frac{m}{2l} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) + \frac{m}{\gamma} \alpha_1 + \alpha_2 \frac{m}{p} - \alpha_3 \frac{m}{\gamma^2} \right) a(u, u) \\
& + \left(\frac{1}{2} N_1 - \frac{8c}{\alpha l} N_2^2 \right) (g' \circ u)(t) + c (N_2 + N_3) \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma \\
& - \left(N_1 - N_3 \frac{m-1}{m} C(\sigma) - \frac{\alpha l(m-1)}{8m(C_{E(0)} + B_{2(p-1)}^{2(p-1)} C'^{p-2})} (1-l) \right) \|u_t\|_{m, \Gamma_1}^m,
\end{aligned}$$

où

$$\alpha_3 = \frac{C_{\gamma}^{\gamma}}{\alpha l} \left(\frac{4p\gamma}{\alpha l(p(\gamma-4) + \gamma(p-4))} E(u_0, u_1) \right)^{\frac{\gamma-2}{2}}.$$

Selon (4.3.13), nous pouvons choisir N_3 suffisamment grand pour que

$$N_3 \left(\frac{1}{2} - \alpha_2 - \alpha_1 \right) - \frac{1}{4} - \frac{m}{2l} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) + \frac{m}{\gamma} \alpha_1 + \alpha_2 \frac{m}{p} - \alpha_3 \frac{m}{\gamma^2} \geq 0,$$

puis on prend N_2 suffisamment grand pour que

$$N_2 g_1 - \frac{l}{8} - N_3 - \frac{m}{2} \geq 0,$$

enfin N_1 suffisamment grand pour que

$$\frac{1}{2} N_1 - \frac{8c}{\alpha l} N_2^2 \geq 0,$$

et

$$N_1 - N_3 \frac{m-1}{m} C(\sigma) - \frac{\alpha l(m-1)}{8m(C_{E(0)} + B_{2(p-1)}^{2(p-1)} C'^{p-2})} (1-l) \geq 0.$$

Ainsi, nous obtenons

$$\mathcal{L}'(t) \leq -mE(t) + c(g \circ u)(t) + c \int_{\Gamma_1} h^2(u_t) d\Gamma, \quad \forall t \geq t_1.$$

D'autre part, nous pouvons choisir N_1 encore plus grand (si nécessaire) pour que

$$\mathcal{L}(t) \sim E(t),$$

ce qui signifie que, pour certaines constantes $a_1, a_2 > 0$,

$$a_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq a_2 E(t).$$

4.4 Résultat principal

Théorème 4.4.1. *Sous les conditions du Lemme 4.3.6 et en supposant que (A1) – (A3) sont vérifiées. Alors, il existe des constantes positives $c_1, c_2, k_1, k_2, \varepsilon_0, t_1$ et t_2 telles que la solution de (4.1.1) satisfait pour tout $t > t_2 > t_1$,*

$$E(t) \leq c_1 e^{-c_2 \int_{t_1}^t \xi(s) ds}, \quad \text{Si } H \text{ est linéaire} \quad (4.4.1)$$

$$E(t) \leq k_2 (t - t_1) H_1^{-1} \left(\frac{k_1}{(t - t_1) \int_{t_2}^t \xi(s) ds} \right), \quad \text{Si } H \text{ est non linéaire} \quad (4.4.2)$$

où $H_1(t) = tH'(\varepsilon_0 t)$.

Démonstration.

Nous considérons la partition suivante de Γ_1 ,

$$\Gamma_{11} = \{x \in \Gamma_1 : |u_t| \leq r\}, \quad \Gamma_{12} = \{x \in \Gamma_1 : |u_t| > r\},$$

et utilisons (A3), (4.2.8) et (4.3.2) pour conclure que, pour tout $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_1} g(s) a(u(t) - u(t-s), u(t) - u(t-s)) ds + \int_{\Gamma_{12}} h^2(u_t) d\Gamma \\ & \leq -\frac{c}{d} \int_0^{t_1} g'(s) a(u(t) - u(t-s), u(t) - u(t-s)) ds + c \int_{\Gamma_{12}} u_t h(u_t) d\Gamma \\ & \leq -cE'(t). \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Ensuite, prenons $F(t) = \mathcal{L}(t) + cE(t)$, qui est clairement équivalent à $E(t)$, et utilisons (4.3.14) et (4.4.3), pour tout $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned} F'(t) & \leq -mE(t) + c \int_{t_1}^t g(s) a(u(t) - u(t-s), u(t) - u(t-s)) ds \\ & \quad + c \int_{\Gamma_{11}} h^2(u_t) d\Gamma, \quad \forall t \geq t_1. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Maintenant, estimons la dernière intégrale dans (4.4.4). Tout d'abord, nous pouvons supposer que r est suffisamment petit pour que

$$sh(s) \leq \frac{1}{2} \min \{r, H(r)\}, \quad \text{pour tout } |s| \leq r.$$

Ensuite, avec $S(t)$ défini par

$$S(t) := \frac{1}{|\Gamma_{11}|} \int_{\Gamma_{11}} u_t h(u_t) d\Gamma,$$

(A3) et l'inégalité de Jensen donnent

$$H^{-1}(S(t)) \geq c \int_{\Gamma_{11}} H^{-1}(u_t h(u_t)) d\Gamma \geq c \int_{\Gamma_{11}} h^2(u_t) d\Gamma. \quad (4.4.5)$$

En insérant les estimations (4.3.10), (4.4.5) dans (4.4.4) et en utilisant la Remarque

4.2.2, nous obtenons

$$F'(t) \leq -mE(t) + c \frac{(t-t_1)}{q} \bar{H}^{-1} \left(\frac{qI(t)}{(t-t_1)\xi(t)} \right) + cH^{-1}(S(t)), \quad \forall t \geq t_1. \quad (4.4.6)$$

Si H est linéaire :

En multipliant (4.4.6) par $\xi(t)$, nous obtenons

$$\xi(t)F'(t) \leq -m\xi(t)E(t) + cI(t) + c\xi(t)S(t), \quad \forall t \geq t_1,$$

en utilisant (4.2.8) et (4.3.9), nous obtenons

$$\xi(t)F'(t) \leq -m\xi(t)E(t) - cE'(t) - c\xi(t)E'(t), \quad \forall t \geq t_1,$$

ce qui donne, comme $\xi(t)$ est décroissante,

$$(\xi F + cE + c\xi E)'(t) \leq -m\xi(t)E(t), \quad \forall t \geq t_1,$$

par conséquent, en utilisant le fait que $(\xi F + cE + c\xi E) \sim E$, nous obtenons facilement

$$E(t) \leq c_1 e^{-c_2 \int_{t_1}^t \xi(s) ds}.$$

Si H est non linéaire :

Puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t-t_1} = 0$, il existe $t_2 > t_1$ tel que $\frac{1}{t-t_1} < 1$ chaque fois que $t > t_2$.

En combinant cela avec les propriétés strictement croissantes et strictement convexes

de $\bar{H}$, en posant $\theta = \frac{1}{t - t_1} < 1$ et en utilisant (4.3.12), nous obtenons

$$\bar{H}^{-1}(S(t)) \leq (t - t_1) \bar{H}^{-1} \left(\frac{S(t)}{(t - t_1)} \right), \quad \forall t \geq t_2. \quad (4.4.7)$$

De (4.4.6), (4.4.7) et en utilisant le fait que $\bar{H}^{-1}$ est strictement croissante, nous obtenons

$$F'(t) \leq -mE(t) + c(t - t_1) \bar{H}^{-1} \left(\frac{qI(t)}{(t - t_1) \xi(t)} + \frac{S(t)}{(t - t_1)} \right), \quad \forall t \geq t_2.$$

Maintenant, pour $\varepsilon_0 < r$, en utilisant le fait que $E' \leq 0$, $\bar{H}' > 0$, $\bar{H}'' > 0$ sur $(0, r]$ nous trouvons que la fonctionnelle $\mathcal{F}_0$, définie par

$$\mathcal{F}_0(t) := \bar{H}' \left(\frac{\varepsilon_0}{t - t_1} \frac{E(t)}{E(0)} \right) F(t),$$

satisfait, pour certains $b_1, b_2 > 0$,

$$b_1 \mathcal{F}_0(t) \leq E(t) \leq b_2 \mathcal{F}_0(t),$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0'(t) &= \left(\frac{-\varepsilon_0}{(t - t_1)^2} \frac{E(t)}{E(0)} + \frac{\varepsilon_0}{(t - t_1)} \frac{E'(t)}{E(0)} \right) \bar{H}'' \left(\frac{\varepsilon_0}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) F(t) \\ &\quad + \bar{H}' \left(\frac{\varepsilon_0}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) F'(t) \\ &\leq -mE(t) \bar{H}' \left(\frac{\varepsilon_0}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) \\ &\quad + c(t - t_1) \bar{H}' \left(\frac{\varepsilon_0}{t - t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) \bar{H}^{-1} \left(\frac{qI(t)}{(t - t_1) \xi(t)} + \frac{S(t)}{(t - t_1)} \right). \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Soit $\bar{H}^*$ la conjuguée convexe de $\bar{H}$ au sens de Young (voir [9]), alors

$$\bar{H}^*(s) = s(\bar{H}')^{-1}(s) - \bar{H} \left[\left(\bar{H}' \right)^{-1}(s) \right], \quad \text{si } s \in \left(0, \bar{H}'(r) \right], \quad (4.4.9)$$

et $\bar{H}^*$ satisfait l'inégalité de Young généralisée suivante

$$AB \leq \bar{H}^*(A) + \bar{H}(B), \quad \text{si } A \in \left(0, \bar{H}'(r) \right], \quad B \in (0, r]. \quad (4.4.10)$$

Ainsi, avec $A = \bar{H}' \left(\varepsilon_0 \frac{E'(t)}{E(0)} \right)$ et $B = \bar{H}^{-1} \left(\frac{qI(t)}{(t-t_1)\xi(t)} + \frac{S(t)}{(t-t_1)} \right)$ et en utilisant (4.4.8) et (4.4.10), nous arrivons à

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'_0(t) &\leq -mE(t)\bar{H}' \left(\frac{\varepsilon_0}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c(t-t_1)\bar{H}^* \left(\bar{H}' \left(\frac{\varepsilon_0}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) \right) \\ &\quad + c \left(\frac{I(t)}{\xi(t)} + S(t) \right). \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

Multiplions (4.4.11) par $\xi(t)$ et en utilisant (4.2.8), (4.3.9) et (4.4.9), nous obtenons

$$\begin{aligned} \xi(t)\mathcal{F}'_0(t) &\leq -m\xi(t)E(t)H' \left(\frac{\varepsilon_0}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) \\ &\quad + c(t-t_1)\xi(t)H^* \left(H' \left(\frac{\varepsilon_0}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) \right) + c(I(t) + \xi(t)S(t)) \\ &\leq -m\xi(t)E(t)H' \left(\frac{\varepsilon_0}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c\xi(t)\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} H' \left(\frac{\varepsilon_0}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) \\ &\quad - cE'(t). \end{aligned}$$

Par conséquent, en posant $\mathcal{F}_1 := \xi \cdot \mathcal{F}_0 + cE \sim E$, nous obtenons

$$\mathcal{F}'_1(t) \leq -m\xi(t)E(t)H' \left(\frac{\varepsilon_0}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c\varepsilon_0\xi(t) \cdot \frac{E(t)}{E(0)} H' \left(\frac{\varepsilon_0}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right).$$

Cela donne, pour un choix approprié de ε_0 ,

$$\mathcal{F}'_1(t) \leq -k\xi(t) \left(\frac{E(t)}{E(0)} \right) H' \left(\frac{\varepsilon_0}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right), \quad \forall t \geq t_2,$$

ou

$$k \left(\frac{E(t)}{E(0)} \right) H' \left(\frac{\varepsilon_0}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) \xi(t) \leq -\mathcal{F}'_1(t), \quad \forall t \geq t_2, \quad (4.4.12)$$

une intégration de (4.4.12) donne

$$\int_{t_2}^t k \left(\frac{E(s)}{E(0)} \right) H' \left(\frac{\varepsilon_0}{s-t_1} \cdot \frac{E(s)}{E(0)} \right) \xi(s) ds \leq - \int_{t_2}^t \mathcal{F}'_1(s) ds \leq \mathcal{F}_1(t_2).$$

En utilisant les faits que H' , $H'' > 0$ et la propriété de décroissance de E , nous déduisons que la fonction $t \mapsto E(t)H' \left(\frac{\varepsilon_0}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right)$ est décroissante et par conséquent, nous avons pour $\forall t \geq t_2$,

$$\begin{aligned} & k \left(\frac{E(t)}{E(0)} \right) H' \left(\frac{\varepsilon_0}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) \int_{t_2}^t \xi(s) ds \\ & \leq \int_{t_2}^t k \left(\frac{E(s)}{E(0)} \right) H' \left(\frac{\varepsilon_0}{s-t_1} \cdot \frac{E(s)}{E(0)} \right) \xi(s) ds \\ & \leq \mathcal{F}_1(t_2). \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

En multipliant chaque membre de (4.4.13) par $\frac{1}{t-t_1}$, nous avons

$$k \left(\frac{1}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) H' \left(\frac{\varepsilon_0}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) \int_{t_2}^t \xi(s) ds \leq \frac{k_1}{t-t_1}, \quad \forall t \geq t_2.$$

Ensuite, nous posons $H_1(t) = tH'(\varepsilon_0 t)$ qui est strictement croissante, alors nous obtenons,

$$kH_1 \left(\frac{1}{t-t_1} \cdot \frac{E(t)}{E(0)} \right) \int_{t_2}^t \xi(s)ds \geq \frac{k_1}{t-t_1}, \quad \forall t \geq t_2.$$

Enfin, pour deux constantes positives k_1 et k_2 , nous obtenons

$$E(t) \leq k_2 (t-t_1) H_1^{-1} \left(\frac{k_1}{(t-t_1) \int_{t_2}^t \xi(s)ds} \right), \quad \forall t \geq t_2.$$

Cela conclut la démonstration.

Les exemples suivants illustrent nos résultats.

Exemple 4.4.2. Comme dans [4], nous donnons des exemples pour illustrer les taux de décroissance d'énergie donnés par le Théorème 4.4.1 :

1. H est linéaire :

Soit $g(t) = ae^{-b(1+t)}$, où $b > 0$ et $a > 0$ est suffisamment petit pour que (4.1.3) soit satisfaite, alors $g'(t) = -\xi(t)H(g(t))$ où $H(t) = t$ et $\xi(t) = b$. Par conséquent, nous pouvons utiliser (4.4.1) pour déduire qu'il existe des constantes positives k et c telles que,

$$E(t) \leq ke^{-ct}.$$

2. H est non linéaire :

Soit $g(t) = \frac{a}{(1+t)^2}$, où a est choisi de manière à ce que l'hypothèse (4.1.3) reste valide. Alors $g'(t) = -\xi(t)H(g(t))$ où $\xi(t) = b$ et $H(t) = t^{\frac{3}{2}}$, alors $H_1^{-1}(t) = ct^{\frac{2}{3}}$ où b est une constante fixe. Nous pouvons utiliser (4.4.2) pour déduire qu'il existe une constante positive k_2 telle que,

$$\begin{aligned}
 E(t) &\leq k_2 (t - t_1) c \left(\frac{k_1}{(t - t_1) \int_{t_2}^t b ds} \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &\leq ck_2 \left(\frac{k_1}{b} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{(t - t_1)^{\frac{1}{3}}}{(t - t_2)^{\frac{2}{3}}} \\
 &\leq ck_2 \left(\frac{k_1}{b} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{(t - t_2 + t_2 - t_1)^{\frac{1}{3}}}{(t - t_2)^{\frac{2}{3}}},
 \end{aligned}$$

pour t suffisamment grand tel que $t - t_2 \geq t_2 - t_1$ nous obtenons

$$E(t) \leq ck_2 \left(\frac{k_1}{b} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{(2(t - t_2))^{\frac{1}{3}}}{(t - t_2)^{\frac{2}{3}}},$$

alors,

$$E(t) \leq \frac{k}{(t - t_2)^{\frac{1}{3}}},$$

où $k = \sqrt[3]{2}ck_2 \left(\frac{k_1}{b} \right)^{\frac{2}{3}}$.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale

L'ensemble des travaux présentés dans cette thèse constitue une contribution notable à l'étude de la stabilisation de certains problèmes d'ondes et de plaques viscoélastiques. Nous y avons proposé des généralisations et des améliorations de résultats antérieurs en nous appuyant sur des outils modernes de l'analyse mathématique.

Dans un premier temps, nous avons étudié un système d'ondes viscoélastiques comportant un terme source non linéaire et un terme d'amortissement à mémoire appliqué sur la frontière. Sous des conditions initiales appropriées, nous avons établi un résultat de décroissance générale de l'énergie, dont le taux est explicitement lié aux propriétés de la fonction de relaxation g , vérifiant une inéquation différentielle de la forme :

$$g'(t) \leq -\xi(t)g^p(t), \quad \forall t \geq 0, \quad 1 \leq p < \frac{3}{2}.$$

La démonstration repose sur une méthode d'énergie, principalement fondée sur la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov équivalente à l'énergie. Ce travail prolonge les résultats obtenus dans [3, 7, 9], et a été accepté pour publication dans la revue *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*.

Dans le deuxième chapitre, nous avons analysé le comportement asymptotique des solutions du système précédent, dans le cas où la fonction de relaxation g satisfait une condition plus générale de la forme :

$$g'(t) \leq -\xi(t)G(g(t)),$$

où G est une fonction strictement croissante et strictement convexe au voisinage de l'origine. Ce cadre général nous a permis d'étendre les résultats des travaux précédents, notamment ceux de [3, 7–9].

Le troisième chapitre poursuit cette analyse dans le même cadre viscoélastique, en conservant l'hypothèse sur la fonction de relaxation, mais en introduisant cette fois une source non linéaire de type logarithmique. Nous y avons obtenu un nouveau résultat de décroissance de l'énergie, qui généralise les conclusions de [6].

Dans le dernier chapitre, nous avons abordé un modèle de plaque viscoélastique de type Euler–Bernoulli avec amortissement distribué de type frictionnel, une source non linéaire logarithmique, ainsi qu'une dissipation non linéaire localisée sur une partie du bord. Les résultats obtenus étendent plusieurs travaux récents portant sur des problèmes similaires, en particulier ceux de [6, 18, 56].

Ce dernier travail a été publié dans la revue *Mediterranean Journal of Mathematics*.

Enfin, les résultats théoriques présentés dans les trois premiers chapitres ont été validés par des simulations numériques effectuées en fin de chaque chapitre. Ces tests ont permis d'illustrer le comportement asymptotique des solutions et de confirmer la cohérence entre l'analyse théorique et les observations numériques.

Perspectives

Ce travail ouvre plusieurs perspectives de recherche. Parmi celles-ci, on peut mentionner l'étude du premier chapitre pour le cas où le paramètre $p \geq \frac{3}{2}$ et pour lequel on prévoit, sous certaines conditions, un phénomène de blow-up. De plus, il sera judicieux de considérer des exemples d'applications pour des cas de fonction de relaxations plus générales et une application numérique reste à développer pour le quatrième chapitre.. On pourra aussi considérer des systèmes avec source couplés dans des contextes d'ondes thermo-viscoélastiques ou de plaques thermo-viscoélastiques . De tels prolongements pourraient enrichir encore notre compréhension des phénomènes de dissipation en milieux viscoélastiques.

Bibliographie

- [1] Adams, R. A., Fournier J. J. F. : Sobolev spaces, Academic Press. (2003).
- [2] Aassila, M. Cavalcanti, M.M., Soriano, J.A. : Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of the wave equation with memory in a star-shaped domain, SIAM J. Control Optim. 1581–160, (2000).
- [3] Alabau-Boussouira, F. : On convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems. Appl. Math. Optim., 51, 61-105, (2005).
- [4] Al-Gharabli, M.M., Al-Mahdi, A.M., Messaoudi, S.A. : General and optimal decay result for a viscoelastic problem with nonlinear boundary feedback. J. Dyn. Control Syst. 25, 551-572, (2019).
- [5] Al-Gharabli, M.M. : New general decay results for a viscoelastic plate equation with a logarithmic nonlinearity. Bound Value Probl, 194, (2019). <https://doi.org/10.1186/s13661-019-01308-0>.
- [6] Al-Gharabli, M.M., Guesmia, A., Messaoudi, S.A. : Existence and a general decay results for a viscoelastic plate equation with a logarithmic nonlinearity. Commun. Pure Appl. Anal. 18(1), 159-180, (2019).
- [7] Al-Gharabli, M. M., Al-Mahdi, A. M., Kafini, M. : Global existence and new decay results of a viscoelastic wave equation with variable exponent and logarithmic nonlinearities. AIMS Mathematics, (2021). doi : 10.3934/math.2021587.
- [8] Al-Mahdi, A.M. : Stability result of a viscoelastic plate equation with past history and a logarithmic nonlinearity. Boundary Value Problems, 84, (2020).
- [9] Arnold, V. : Mathematical Methods of Classical Mechanics. 61-64, Springer, New York (1989).
- [10] Barrow, J., Parsons, P. : Inflationary models with logarithmic potentials. Phys. Rev., D 52, 5576-5587, (1995).
- [11] Berrimi, S., Messaoudi S.A. : Exponential decay of solutions to a viscoelastic equation with nonlinear localized damping. Electronic Journal of Differential Equations (EJDE), vol. 2004, No. 88, 1-10, (2004).
- [12] Berrimi, S., Messoudi, S. A. : Existence and decay of solution of a viscoelastic equation with a nonlinear source. Nonlinear Anal., 64, 2314-2331 (2006).

- [13] Bialynicki-Birula, I., Mycielski, J. : Wave equations with logarithmic nonlinearities. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 23(4), 461-466, (1975).
- [14] Bialynicki-Birula I. Mycielski J. : Nonlinear wave mechanics. *Ann. Physics.*, 100(1-2), 62-93, (1976).
- [15] Brézis, H. : *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Masson. Paris, (1983).
- [16] Cao, Y., Liu, C. : Initial boundary value problem for a mixed pseudo-parabolic p-Laplacian type equation with logarithmic nonlinearity. *Electron. J. Differ. Equat.*, No. 116, 1-19, (2018).
- [17] Cavalcanti, M., Cavalcanti, V. D., Prates Filho, J., Soriano, J., et al. : Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping, *Differ. integ. equa.*, 14(1), 85-116, (2001).
- [18] Cavalcanti, M.M., Domingos Cavalcanti, V.N., Ma, T.F. : Exponential decay of the viscoelastic Euler-Bernoulli equation with a nonlocal dissipation in general domains. 495–510, May/June (2004).
- [19] Cavalcanti M., Guesmia A., et al. : General decay rates of solutions to a nonlinear wave equation with boundary condition of memory type. *Differ. Integ. equat.*, 18(5), 583-600, (2005).
- [20] Cavalcanti, M.M., Cavalcanti, V.D., Lasiecka, I. : Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction. *J. Differ. Equat.*, 236, 407-459, (2007).
- [21] Cavalcanti, M.M., Domingos Cavalcanti, V.N., Martinez, P. : General decay rate estimates for viscoelastic dissipative systems, *Nonlinear Anal.* 68 (1), 177-193, (2008).
- [22] Cazenave, T., Haraux, A. : Equations d'évolution avec non-linéarité logarithmique. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, 2(1), 21-51, (1980).
- [23] Dafermos, C.M. : An abstract volterra equation with application to linear viscoelasticity, *J. Differential Equations*, 7, 554–589, (1970).
- [24] Dafermos, C.M. : Asymptotic stability in viscoelasticity, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 37, 297–308, (1970).
- [25] Di, H., Shang, Y., Song, Z. : Initial boundary value problem for a class of strongly damped semilinear wave equations with logarithmic nonlinearity. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, (2020). <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2019.102968>.
- [26] Enqvist, K., McDonald, J. : Q-balls and baryogenesis in the MSSM. *Phys. Lett., B*, 425, 309-321, (1998).
- [27] Guesmia, A. : A new approach of stabilization of nondissipative distributed systems. *SIAM journal on control and optimization*, 42(1), 24-52, (2003).

- [28] Guesmia, A. : Well-posedness and optimal decay rates for the viscoelastic kirchhoff equation. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 35(3), 203-224, (2017).
- [29] Ha, T.G., Park, S.H. : Blow-up phenomena for a viscoelastic wave equation with strong damping and logarithmic nonlinearity. *Adv. Difference Equ.*, 253, 17 pp, (2020). <https://doi.org/10.1186/s13662-020-02694-x>.
- [30] Ha, T.G., Park, S.H. : Existence and general decay for a viscoelastic equation with logarithmic nonlinearity. *J. Korean Math. Soc.*, 58, No. 6, pp. 1433-1448, (2021). <https://doi.org/10.4134/JKMS.j210084>.
- [31] Han, X., Wang, M. : General decay of energy for a viscoelastic equation with nonlinear damping. *Math Meth Appl Sci*, 32(3), 346-358, (2009).
- [32] Kakumani, B.K., Yadav, S.P. : Global existence and decay estimates for a viscoelasticplate equation with nonlinear damping and logarithmic nonlinearity. Communicated in Arxiv, <https://arxiv.org/pdf/2201.00983.pdf>.
- [33] Komornik, V. : Exact controllability and stabilization. the multiplier method, 36, (1994).
- [34] Lagnese, J.E. : *Boundary Stabilization of Thin Plates*, SIAM, Philadelphia, PA, (1989).
- [35] Lagnese, J.E. : Asymptotic Energy Estimates for Kirchhoff Plates Subject to Weak Viscoelastic Damping, in : *International Series of Numerical Mathematics*, vol. 91, Birkhäuser, Verlag, Basel, 1989.
- [36] Lasiecka, I. : Exponential decay rates for the solutions of Euler-Bernoulli moments only. *J. Differential Equations*, 95, 169-182, (1992).
- [37] Lasiecka, I., Tataru, D. : Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping, *Differential Integral Equations*, 6 (3), 507-533, (1993).
- [38] Lasiecka, I., Messaoudi, S.A., Mustafa, M.I. : Note on intrinsic decay rates for abstract wave equations with memory. *Journal of Mathematical Physics*, 54(3), 031504, (2013).
- [39] Li, F., Zhao, Z., Chen, Y. : Global existence uniqueness and decay estimates for nonlinear viscoelastic wave equation with boundary dissipation, *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, vol. 12, no. 3, pp. 1759–1773, 2011
- [40] Lu, L., Li, S., Chai, S. : On a viscoelastic equation with nonlinear boundary damping and source terms : global existence and decay of the solution. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 12, 1, 295-303, (2011).
- [41] Liu, W.J. : General decay of solutions to a viscoelastic wave equation with nonlinear localized damping. *Ann Acad Sci Fenn Math*, 34(1), 291-302, (2009).
- [42] Liu, W.J. : General decay rate estimate for a viscoelastic equation with weakly nonlinear time-dependent dissipation and source terms. *J. Math. Phys.* 50(11), Articl No 113506, (2009).

- [43] Liu, W.J., Yu, J. : On decay and blow-up of the solution for a viscoelastic wave equation with boundary damping and source terms. *Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications*, 74, 6, 2175-2190, (2011).
- [44] Messaoudi, S.A. : Blow up and global existence in a nonlinear viscoelastic wave equation. *Math. Nachr.* 260, 58-66, (2003).
- [45] Messaoudi, S.A. : Blow up of positive-initial-energy solutions of a nonlinear viscoelastic hyperbolic equation. *J. Math. Anal. Appl.* 320, 902-915, (2006).
- [46] Messaoudi, S.A. : On the control of solutions of a viscoelastic equation, *J. Franklin Inst.* 344, 765–776, (2007).
- [47] Messaoudi, S.A. : General decay of solutions of a viscoelastic equation. *JMAA* 341, 1457-1467, (2008).
- [48] Messaoudi, S.A. : General decay of the solution energy in a viscoelastic equation with a nonlinear source. *Nonlinear Anal.* 69, 2589-2598, (2008).
- [49] Messaoudi S.A., Mustafa M.I. : On the control of solutions of viscoelastic equations with boundary feedback, *Nonlinear Anal Real World Applications*, 10, 3132-3140, (2009).
- [50] Messaoudi, S.A., Soufyane, A. : General decay of solutions of a wave equation with a boundary control of memory type. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*. vol. 11, no. 4, 2896-2904, (2010).
- [51] Messaoudi, S.A., Mustafa, M.I. : on convexity for energy decay rates of a viscoelastic equation with boundary feedback. *Nonlinear Analysis*, 72, 3602–3611, (2010).
- [52] Messaoudi, S.A., Al-Khulaifi, W. : General and optimal decay for a quasilinear viscoelastic equation. *Appl Math Lett*, 66, 16-22, (2017).
- [53] Mustafa M.I. : Well posedness and asymptotic behavior of a coupled system of nonlinear viscoelastic equations, *Nonlinear Anal : Real World Applications*. 13, 452-463, (2012).
- [54] Mustafa M.I. : Uniform decay rates for viscoelastic dissipative systems. *J Dyn Control Syst*, 22(1), 101-116, (2016).
- [55] Mustafa, M.I. : Optimal decay rates for the viscoelastic wave equation, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 1-13, (2017). <https://doi.org/10.1002/mma.4604>.
- [56] Mustafa, M.I. : Viscoelastic plate equation with boundary feedback. *Evolution Equations and Control Theory.*, 6, 2, 61-276, (2017).
- [57] Nhan, L.C., Truong, L.X. : Global solution and blow-up for a class of pseudo p-Laplacian evolution equations with logarithmic nonlinearity. *Comput. Math. Appl.* (2017). <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2017.02.030>.
- [58] Park, J.Y., Park, S.H. : Existence and asymptotic stability for viscoelastic problems with nonlocal boundary dissipation. *Czechoslovak Mathematical Journal*, vol. 56, no. 2, 273-286, (2006).

- [59] Park, J., Park, S. : General decay for quasilinear viscoelastic equations with nonlinear weak damping. *J Math Phys*, 50(8), art. No 083505, (2009).
- [60] Rivera, J.E.M., Lapa, E.C., Barreto, R. : Decay rates for viscoelastic plates with memory. *Journal of Elasticity*, 44, 61-87, (1996).
- [61] Rivera, J.E.M., Salvatierra, A.P. : Asymptotic behavior of the energy in partially viscoelastic materials. *Quarterly of Applied Mathematics*. vol. 59, 557-578, (2001).
- [62] Wu, S.T. : General decay for a wave equation of Kirchhoff type with a boundary control of memory type, *Boundary Value Problems*, 55, (2011).
- [63] Wu, S.T., Chen, H.F. : Uniform decay of solutions for a nonlinear viscoelastic wave equation with boundary dissipation. *Journal of Function Spaces and Applications*. (2012). <https://doi.org/10.1155/2012/421847>.

ملخص: الهدف الرئيسي من هذه الأطروحة هو دراسة تثبيت الحلول لبعض المعادلات الموجية والصفائح الزلجة، وبشكل خاص معادلة أويلر-بيرنولي الزلجة مع مصدر غير خطي لوغاريتمي. نركز على السلوك الحدي للحلول، وبشكل خاص على التناقص الذي يحدث للحلول تحت شروط التحكم على الحدود من نوع الذاكرة. تعتمد الطريقة المستخدمة على تحليل المضاعفات وخصائص الدوال المحدبة، مما يؤدي إلى نتائج تناقص عامة للحلول. توفر هذه النتائج فهماً أعمق لظواهر التثبيت في هذه المعادلات الزلجة وتفتح آفاقاً جديدة لتحليلها في مجال محدود.

كلمات مفتاحية: التثبيت، معادلة أويلر-بيرنولي الزلجة، المصدر اللوغاريتمي، التحكم على الحدود من نوع الذاكرة، التناقص، المضاعفات، الدوال المحدبة، تثبيت الصفائح الزلجة.

Résumé: L'objectif principal de cette thèse est d'étudier la stabilisation des solutions pour certains problèmes d'ondes viscoélastiques et de plaques viscoélastiques, en particulier l'équation d'Euler-Bernoulli viscoélastique avec une source non linéaire logarithmique. Nous nous intéressons au comportement asymptotique des solutions, en particulier à la décroissance des solutions sous des conditions de contrôle de type mémoire appliquées à la frontière. La méthode utilisée repose sur l'analyse des multiplicateurs et des propriétés des fonctions convexes, permettant d'obtenir des résultats généraux de décroissance des solutions. Ces résultats fournissent une compréhension approfondie des phénomènes de stabilisation pour ces problèmes viscoélastiques et ouvrent de nouvelles perspectives pour leur analyse dans un domaine borné.

Mots-clés: Stabilisation, équation d'Euler-Bernoulli viscoélastique, source logarithmique, contrôle de type mémoire, décroissance, multiplicateurs, fonctions convexes, stabilisation des plaques viscoélastiques.

Abstract: The main objective of this thesis is to study the stabilization of solutions for certain viscoelastic wave and plate problems, particularly the viscoelastic Euler-Bernoulli equation with a logarithmic nonlinear source. We focus on the asymptotic behavior of the solutions, specifically the decay of solutions under boundary control conditions of memory type. The method used relies on the analysis of multipliers and the properties of convex functions, leading to general decay results for the solutions. These results provide a deeper understanding of the stabilization phenomena for these viscoelastic problems and open new perspectives for their analysis in a bounded domain.

keywords: viscoelastic Euler-Bernoulli equation, logarithmic source, memory-type boundary control, decay, multipliers, convex functions, stabilization of viscoelastic plates.