وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة فرحات عباس –سطيف1-
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
-قسم التعليم الأساسي-

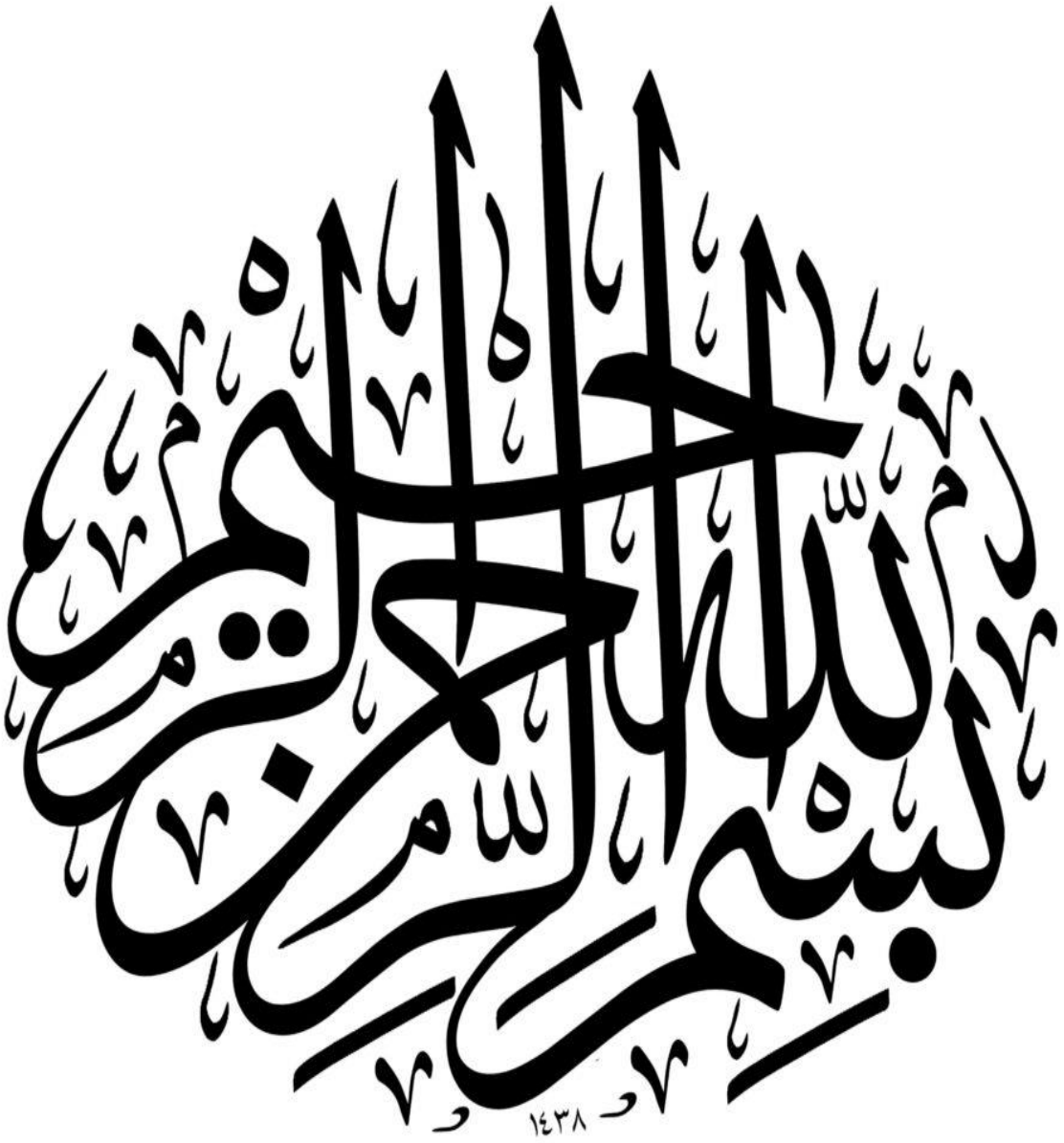
محاضرات في الاقتصاد القياسي المعمق

المستوى: سنة أولى ماسترعلم تجارية

تخصص مالية وتجارة دولية

د. وادة راضية

السنة الجامعية 2024-2025


بسم الله الرحمن الرحيم
١٤٣٨

الفهرس

العنوان	رقم الصفحة
الفهرس.....	
مقدمة	
الفصل الأول: الإطار النظري للاقتصاد القياسي	01
1-تعريف الاقتصاد القياسي وأهدافه وعلاقته بالفروع الأخرى من العلوم.....	02
1-1-تعريف الاقتصاد القياسي.....	02
1-2-أهداف الاقتصاد القياسي.....	03
2-علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى.....	04
2-1-الاقتصاد القياسي والنظرية الاقتصادية.....	04
2-2-الاقتصاد القياسي والاقتصاد الرياضي.....	05
2-3-الاقتصاد القياسي والاحصاء الاقتصادي.....	05
2-4-الاقتصاد القياسي والاحصاء الرياضي.....	05
3-فروع الاقتصاد القياسي.....	05
3-1-الاقتصاد القياسي النظري.....	05
3-2-الاقتصاد القياسي التطبيقي.....	05
4-ماهية النموذج الاقتصادي.....	06
4-1-تعريف النموذج الاقتصادي.....	06
4-2-متطلباته.....	06
4-3-مكونات النموذج الاقتصادي.....	07
4-4-أنواع النماذج الاقتصادية.....	08
2-منهجية الاقتصاد القياسي.....	09
2-1-تعيين النموذج.....	09
2-2-تقدير معلمات النموذج.....	09
2-3-تقييم المقدرات.....	10
2-4-تقييم مقدرة النموذج على التنبؤ.....	11
الفصل الثاني: تحليل الانحدار الخطي البسيط	13
1-مفهوم الانحدار الخطي البسيط.....	14
2-تحديد الشكل الرياضي للنموذج الخطي البسيط وفرضياته.....	15

2-1-الشكل الرياضي للنموذج الخطي البسيط.....	15
2-2 -فرضيات النموذج.....	16
3-تقدير معلمات النموذج	18
3-1-طريقة المربعات الصغرى.....	18
3-2-توزيع المعاينة للمقدرات والتقدير المجالي للمعالم.....	23
4-تقييم المعلمات المقدرة.....	27
4-1-اختبار جودة الارتباط.....	27
4-2-اختبارات المعنوية.....	30
5 – التنبؤ.....	38
الفصل الثالث: تحليل الانحدار الخطي المتعدد	42
1-طبيعة النموذج الخطي المتعدد (العام) وفرضياته.....	43
1-1-طبيعة النموذج الخطي المتعدد (العام).....	43
1-2 -فرضيات النموذج الخطي العام.....	44
2-تقدير معلمات النموذج الخطي المتعدد وتباين حد الخطأ العشوائي.....	46
2-1-تقدير معلمات النموذج.....	46
2-2 -تقدير تباين حد الخطأ العشوائي $\hat{\sigma}_u^2$.....	50
3-تقييم النموذج الخطي المتعدد.....	52
3-1-اختبار جودة الارتباط.....	52
3-2-اختبارات المعنوية.....	54
4-اختبار صلاحية النموذج لكل الفترة.....	58
4-1-اختبار استقرارية معاملات النموذج (اختبار chow)	58
5-التنبؤ.....	60
الفصل الرابع: مشاكل القياس الاقتصادي	63
1-الارتباط الخطي المتعدد.....	64
1-1-أسباب حدوث مشكلة الارتباط الخطي المتعدد.....	64
1-2-أنواع الارتباط الخطي المتعدد.....	65
1-3-اختبارات اكتشاف التعدد الخطي.....	66

4-1-طرق معالجة مشكلة التعدد الخطي.....	71
2-مشكلة الارتباط الذاتي بين الأخطاء.....	72
2-1-تعريف الارتباط الذاتي.....	72
2-2-أسباب حدوث مشكلة الارتباط الذاتي.....	72
2-3-أشكال الارتباط الذاتي.....	73
2-4-النتائج المترتبة على وجود مشكلة الارتباط الذاتي.....	75
2-5-طرق تقدير معامل الارتباط.....	79
2-6-اختبار وجود الارتباط الذاتي.....	76
2-7-معالجة مشكلة الارتباط الذاتي.....	79
3-مشكلة عدم ثبات التباين.....	84
3-1-مفهوم مشكلة عدم ثبات التباين.....	84
3-2-أشكال عدم تجانس التباين.....	85
3-3-أسباب مشكلة عدم ثبات التباين.....	86
3-4-آثار مشكلة عدم ثبات التباين.....	87
3-5-اختبارات كشف عدم تجانس التباين.....	87
4-معالجة عدم ثبات تباين الخطأ.....	90
الفصل الخامس: النماذج غير الخطية	94
1-ماهية النماذج غير الخطية.....	95
1-1-مفهوم النماذج غير الخطية.....	95
1-2-الحالات الدالة على النموذج غير الخطي.....	95
1-3-أهمية النماذج غير الخطية في الدراسات الاقتصادية والإدارية.....	101
2-أنواع النماذج غير الخطية.....	96
2-1-النماذج اللوغاريتمية المزدوجة.....	96
2-2-النموذج شبه اللوغاريتمي.....	99
2-3-النماذج المعكوسة	101
2-4-النموذج شبه اللوغاريتم المعكوس	103
2-5-النموذج الأسي.....	104
2-6-نماذج الانحدار كثيرات الحدود.....	104

2-7-نموذج Log-lin ذو متغير اتجاه تربيعي.....	105
الفصل السادس: النماذج المتباطئة زمنيا	107
1-مفهوم النموذج المتباطئ زمنيا.....	108
1-1-الصياغة الرياضية للنموذج المتباطئ زمنيا.....	108
2-أسباب وجود التباطؤ الزمني.....	110
3-طرق تقدير نماذج التباطؤ الزمني.....	110
3-1-استخدام طريقة الإضافة.....	110
3-2-نموذج كويكKoych.....	111
3-3-نموذج التوقع المكيف لـ Cagan.....	113
3-4-نموذج التعديل الجزئي لـ نيرلوف Nerlov's.....	117
3-5-نموذج الارتداد الزمني متعدد الحدود لـ ألمون Almon	119

مقدمة

يعتبر الاقتصادي القياسي من أبرز فروع علم الاقتصاد عامة، حيث يلعب دورا في نمذجة الظواهر الاقتصادية وقياس العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية، من خلال استناده على الرياضيات والأساليب الإحصائية لتقدير العلاقات الاقتصادية، فهو علم تتكامل فيه الرياضيات مع الاحصاء والنظرية الاقتصادية لفهم الظواهر الاقتصادية المعقدة فهما حقيقيا وكميا واختبار النظريات الاقتصادية، وتقييم وتنفيذ سياسة الحكومة ورجال الأعمال .والتطبيق الأكثر شيوع ا للاقتصاد القياسي هو التنبؤ بالمتغيرات الاقتصادية الكلية المهمة، وازدادت أهميته مع ازدياد حجم البيانات الاقتصادية المتاحة وتطور التقنيات الإحصائية.

ويمكن تقسيم الاقتصاد القياسي إلى فرعين رئيسيين هما الاقتصاد القياسي النظري والاقتصاد القياسي التطبيقي، كما تتعدد مجالات استخدامه كتحديد سعر الفائدة في البنوك المركزية، وتقييم البرامج الاجتماعية، والتوقع بالطلب على السلع والخدمات، لذا يعد أداة قوية وهامة لفهم الاقتصاد وتحليله كميا، ويساعد في اتخاذ القرارات في جميع المستويات.

وعليه نقدم هذه المطبوعة التي تحتوي على محاضرات وفقا لمقرر هذا المقياس، موجهة لطلبة سنة أولى ماستر مالية وتجارة دولية بصفة خاصة وكل الطلبة الذين يدرسون مقياس الاقتصاد القياسي. إذ تحتوي هذه المطبوعة على ستة فصول، حيث نتطرق في الفصل الأول إلى الإطار النظري الاقتصاد القياسي، ثم الفصل الثاني نتناول تحليل الانحدار الخطي البسيط، أما الفصل الثالث فيخصص إلى تحليل الانحدار الخطي المتعدد، في حين الفصل الرابع يركز على مشاكل الاقتصاد القياسي، على أن يكون الفصل الخامس حول النماذج غير الخطية، والفصل السادس يدرس النماذج المتباطئة زمنيا .

ففي الوقت الذي نقدم فيه هذا العمل المتواضع للقارئ الكريم، فإننا نأمل أن يساهم في الالمام والفهم الجيد لهذه المادة، ونستسمح من القارئ الكريم عن أي نقص يشوب هذا العمل.

الإطار النظري للاقتصاد القياسي

تمهيد:

لقد احتل استخدام الأساليب الكمية مكانة هامة في قياس العلاقات التي تتضمنها الظواهر الاقتصادية وعلى الأخص النماذج القياسية التي تسمح بالتحليل والقياس الكمي للظواهر الاقتصادية وتحديد المتغيرات التي تحكمها وتفسرها، مما يسمح بفهمها وشرح سلوكها الاقتصادي ومن ثم اتخاذ القرارات بأفضل الطرق وأنجع السبل، سواء برفض الفروض المستمدة من النظرية الاقتصادية أو قبولها واستخدامها في توقعات مستقبلية.

1-تعريف الاقتصاد القياسي وأهدافه وعلاقته بالفروع الأخرى من العلوم:

سنحاول التطرق إلى مفاهيم ومبادئ أساسية خاصة بالاقتصاد القياسي وأهدافه وعلاقته بالفروع الأخرى من العلوم.

1-1-تعريف الاقتصاد القياسي:

يقصد بمصطلح الاقتصاد القياسي econometrics القياس في الاقتصاد أي القياس الاقتصادي ويتكون من كلمتين أصلها إغريقي econo يقصد بها المتغيرات الاقتصادية والعلاقات فيما بينها أما كلمة metrics فتعني القياس بمعنى قياس العلاقات الاقتصادية.

ولقد تعددت التعاريف التي قدمت للقياس الاقتصادي بتعدد الكتاب والباحثين فيعرف على أنه أحد فروع المعرفة الذي يسمح بقياس العلاقات الاقتصادية من واقع البيانات الفعلية بهدف اختبار مدى صحة هذه العلاقات التي تقدمها النظرية الاقتصادية أو قصد تفسيرها أو لرسم بعض السياسات أو للتنبؤ ببعض المتغيرات الاقتصادية. كما يعرف كذلك بأنه "فرع من فروع علم الاقتصاد يهتم بالقياس والتقدير الميداني للعلاقات الاقتصادية"، كما عرفه الباحث A.S Gldberge " أن القياس الاقتصادي يستخدم أدوات النظرية الاقتصادية والرياضيات والإحصاء لتحليل الظواهر الاقتصادية "، وعرفه عصام عزيز شريف بأن" القياس الاقتصادي فرع من فروع علم الاقتصاد يستخدم التحليل الكمي للظواهر الاقتصادية الواقعية المبني على أساس التماسك بين النظرية والمشاهدة متخذا في ذلك أساليب استقراء ملائمة".

ومن جملة التعاريف المقدمة أعلاه يمكن القول بأن القياس الاقتصادي أسلوب من أساليب التحليل الاقتصادي يهتم بالتقدير الكمي للعلاقات بين المتغيرات الاقتصادية بالاستناد إلى النظرية الاقتصادية التي تحدد المشكلة المراد دراستها، ولأهم المتغيرات الاقتصادية والاجتماعية المؤثرة فيها، كما يستند إلى الاقتصاد الرياضي في توصيف العلاقات القائمة بين المتغيرات في شكل معادلات وأخيرا يستعين بعلم الإحصاء لاستنباط طرق قياس وتقدير معالم الصيغ المقترحة، واختبار الفروض والوصول إلى النتائج الدقيقة لاستعمالها في التنبؤ أو لأغراض أخرى.

وبهذا يعد القياس الاقتصادي علم تتكامل فيه النظرية الاقتصادية مع الرياضيات والأساليب الإحصائية لتقدم قيم عددية للمؤشرات الاقتصادية بما يحقق لها فهما حقيقيا وكميا.

وعلى ضـــوء التعاريف المقدمة حول القياس الاقتصـــادي يمكن اســـتنباط أهم الأهداف التي يســـعى إلى تحقيقها على النحو التالي:

1-2-أهداف الاقتصاد القياسي:

تتلخص الأهداف التي يسعى القياس الاقتصادي إلى خدمتها في:

1-2-1-اختبار النظرية الاقتصادية: إن من بين أهداف القياس الاقتصادي هو وضع النظرية الاقتصادية موضـــع الاختبار وهذا لغرض اكتشـــاف مقدرتها التفســـيرية للواقع، حيث تســـتند في جزء كبير منها على الاستنباط والتي تبدأ من الفروض المبسطة ثم يستنبط بالاستدلال المنطقي ما يسمى بالفروض المفسرة التي تنقسم إلى نوعين:

- فروض مفســـرة ســـلوكية: مرتبطة بهدف الوحدات الاقتصـــادية التي تســـعى الوصـــول إليه، والذي يحكم سلوكها مثل: افتراض أن هدف المستهلك هو تعظيم المنفعة.

- فروض مفســـرة مقيدة: تعتمد على عزل أثر العوامل الأخرى المؤثرة في الظاهرة محل الدراســـة مثل: عند تحديد العلاقة بين الكمية المطلوبة من ســـلعة معينة وســـعرها، يفترض أن الكمية المطلوبة بعيدة عن التأثر بالعوامل الأخرى والتي تعتبر فروضا مقيدة.

وبدمج الفروض بنوعيها يمكن استنباط الفرض المفسر للظاهرة محل البحث.

وللمزيد من التوضيح نستند إلى المثال القائم حول العلاقة بين الكمية المطلوبة والسعر فعند استخدام الافتراض الســـلوكي والمتمثل في تعظيم المنفعة، مع الافتراض المقيد المتمثل في ثبات العوامل المؤثرة في الطلب غير السعر فإنه يمكن استنباط فرض مفسر مؤداه أنه "كلما انخفض سعر السلعة كلما اندفع المســـتهلك نحو زيادة الكمية المطلوبة منها ليزيد من منفعته الكلية " ويلاحظ هنا أن هذا الفرض المفســـر يحتمل الصواب كما يحتمل الخطأ وهذا على حسب الافتراضات المبسطة المستنبطة منها، ولأجل الحكم على مدى صحة الفرض المفسر يقوم القياس الاقتصادي بقياس العلاقة بين الكمية المطلوبة والسعر من واقع البيانات الفعلية لاختبار مدى صحة النظرية الاقتصادية ، ونجد في هذا الصدد احتمالين :

- قبول النظرية إذا ما تطابقت مع الواقع.

- رفض النظرية إذا ما تنافت مع الواقع مع القيام بتعديلها لإعادة اختبارها من الجديد.

1-2-2-تفسير بعض الظواهر الاقتصادية: هناك من يعتقد أنه طالما أن مهمة القياس الاقتصادي تدور حول قياس العلاقات الاقتصـــادية بغرض اختبارها، فإن هذا القياس لا يمكن أن يتم إلا بناء على نظرية التي تقدم العلاقات التي يمكن قياســـها مما يعني عدم وجود قياس بدون نظرية، وأن مهمة النظرية الاقتصادية تأتي قبل مهمة القياس الاقتصادي، ويطلق على مؤيدي هذا الرأي بأصحاب مدخل الاستنباط أو مدخل القياس بنظرية.

إلا أن هناك اتجاه آخر يرى بعدم ضـــرورة توفر نظرية حتى تتم عملية القياس، فيمكن أن يتم القياس ثم تســـتنتج نظرية جديدة تفســـر الظواهر الاقتصـــادية ويطلق على أصـــحاب هذا الرأي بأصـــحاب مدخل

الاستقراء أو القياس بدون نظرية، ثم يقوم الباحث بإسقاط المتغيرات المستقلة التي لها أثر غير معنوي على المتغير التابع ويبقي على المتغيرات المستقلة ذات الأثر المعنوي.

ولقد تعرض أصحاب مدخل القياس بدون نظرية إلى عدد من الانتقادات تتمثل أهمها في:

- يوفر أسلوب القياس بنظرية الوقت عند القياس: حيث توفر النظرية المتغيرات التي يتعين جمع البيانات بشأنها والعلاقة التي تحتاج إلى القياس، أما فيما يخص أسلوب مدخل القياس بدون نظرية فإن الباحث يستغرق وقت ويبذل جهد كبير في جمع البيانات وفي عدد كبير من المتغيرات المستقلة، التي يعتقد أنها تؤثر في المتغير التابع وفي الأخير يستبعد المتغيرات ذات الأثر غير الجوهري ويستبقي على المتغيرات ذات الأثر الجوهري.

- كما أن عملية القياس الإحصائي قد تؤدي إلى نتائج ليست لها أي مدلول، فوجود ارتباط قوي بين متغيرين لا يعني بالضرورة أن التغير في أحدها كان سببا في التغير في الآخر، حيث يمكن أن يكون هناك ارتفاع في متغيرين ليس لهما أي علاقة سببية ومن الناحية الإحصائية يدلي معامل الارتباط أن هناك ارتباط قوي بين المتغيرين، لهذا يستدعي الأمر وجود نظرية اقتصادية تبين العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية ويستند إليها في القياس.

1-2-3 -رسم السياسات و اتخاذ القرارات: يساهم القياس الاقتصادي في رسم السياسات واتخاذ القرارات عن طريق تحديد القيم الرقمية لمعاملات العلاقات الاقتصادية بين المتغيرات لتساعد على استخدام أنجع السبل وأفضل الطرق لاتخاذ القرارات المناسبة سواء على مستوى المؤسسة أو الحكومة.

1-2-4-التنبؤ بقيم المتغيرات الاقتصادية في المستقبل: يساهم القياس الاقتصادي في وضع السياسات من خلال توفير القيم العددية لمعلمات المتغيرات الاقتصادية والتنبؤ بما ستكون عليه الظاهرة الاقتصادية مستقبلا، لتساعد بذلك واضعي السياسات ومتخذي القرارات باتخاذ الإجراءات الكفيلة بتنظيم الحياة الاقتصادية.

2-علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى:

يرتبط الاقتصاد القياسي بعدة علوم من أجل قياس العلاقة المتغيرات الاقتصادية، وتقدير معالمها ويمكن ذكرها فيما يلي:

2-1-الاقتصاد القياسي والنظرية الاقتصادية:

تقوم النظرية الاقتصادية بدراسة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية فيما إذا كانت طردية أم عكسية، وبتقديم فروض مفسرة حول الظاهرة محل الدراسة دون إعطاء قياس كمي للعلاقة، فالنظرية الاقتصادية عبارة عن تحديدات أو فروض في غالبية الأحيان تكون وصفية، فعلى سبيل المثال تنص نظرية الاقتصاد الجزئي أن هناك علاقة عكسية بين سعر السلعة والكمية المطلوبة منها في ظل ثبات العوامل الأخرى، غير أنها لا تعطي المقياس الكمي لذلك، الذي يقيس المقدار العددي لهذه العلاقة، لهذا فالعلاقة بين المتغيرات الاقتصادية المستوحاة من النظرية الاقتصادية تبقى مسألة مجردة ما لم يتم تقدير معالمها.

2-2-الاقتصاد القياسي والاقتصاد الرياضي:

يهتم الاقتصاد الرياضي بإعادة صياغة العلاقة المستوحاة من النظرية الاقتصادية رياضيا على هيئة معادلات ورموز رياضية بدون قياس أو برهنة عددية لتلك الصياغات.

2-3-الاقتصاد القياسي والاحصاء الاقتصادي:

يقتصر دور الإحصاء الاقتصادي على تجميع البيانات الإحصائية المتعلقة بالمتغيرات الاقتصادية، وتسجيلها وجدولتها لتقتصر مهمة الاقتصاد القياسي على تحليل واختبار نوع العلاقة بين المتغيرات بهدف معرفة مدى مطابقة النتائج مع منطوق النظرية الاقتصادية.

2-4-الاقتصاد القياسي والاحصاء الرياضي:

وتتمثل مهمة الإحصاء الرياضي في تجهيز الباحث وتزويده بأدوات تحليلية يستخدمها لدراسة العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية وبطرق خاصة لمعالجة أخطاء التقدير تمهيدا لاستخدامها في تحقيق أهداف القياس الاقتصادي.

ومما سبق يمكن القول أن الاقتصاد القياسي يرتبط بعلاقة وثيقة بالنظرية الاقتصادية والاقتصاد الرياضي والإحصاء الاقتصادي الإحصاء الرياضي، حيث تتكامل هذه الفروع من أجل توفير قيم عددية لمعلمات المتغيرات الاقتصادية المختلفة، إلا أن أيا من هذه الفروع لا تعتبر بديلا عن الاقتصاد القياسي، فهو علم تتكامل فيه النظرية الاقتصادية مع الرياضيات والأساليب الإحصائية.

ومما لا شك فيه أن الاقتصاد القياسي يقوم على مجموعة المراحل والخطوات تمثل منهجيته في قياس العلاقات الاقتصادية بين المتغيرات بما يحقق لها فهما حقيقيا وكميا.

3-فروع الاقتصاد القياسي:

يمكن تقسيم الاقتصاد القياسي إلى قسمين أساسيين هما الاقتصاد القياسي النظري والاقتصاد القياسي التطبيقي.

3-1-الاقتصاد القياسي النظري:

يعتبر الاقتصاد القياسي النظري أحد فروع الاقتصاد القياسي، يستخدم الأساليب الإحصائية والرياضية لتطوير النماذج النظرية، وذلك باشتقاق النماذج الاقتصادية من النظريات والفرضيات الاقتصادية المجردة، والاعتماد على البيانات والمتغيرات الافتراضية في اختبار النماذج، والتركيز على الجوانب النظرية أكثر.

3-2-الاقتصاد القياسي التطبيقي:

يعد الاقتصاد القياسي التطبيقي أحد فروع الاقتصاد القياسي، يهتم بتطبيق الأساليب القياسية في معالجة العلاقات والظواهر الاقتصادية الواقعية، وذلك باستخدام أدوات الاقتصاد القياسي النظري لدراسة ظاهرة اقتصادية ما كدالة الإنتاج، الاستهلاك، ...الخ، ويعتمد الاقتصاد القياسي التطبيقي على البيانات الواقعية والميدانية بدلا من الافتراضية في بناء النماذج، واستخدام الحاسبات والبرمجيات

الاحصائية، الأمر الذي جعله يسهم في تطوير السياسات والبرامج الاقتصادية والحكومية، وبالتالي يعد أداة فعالة لفهم الواقع الاقتصادي وبمقدار كمي.

4-ماهية النموذج الاقتصادي:

إن الهدف الأساسي الذي يقف وراء استخدام الاقتصاد القياسي، هو قياس العلاقة التي تربط متغير تابع المعبر عن الظاهرة محل الدراسة ومتغير مفسر أو أكثر وذلك عن طريق النمذجة أي بناء نماذج قياسية اقتصادية والتي تتم على عدة مراحل مستخدما في ذلك طرق رياضية وأساليب إحصائية.

وفي هذا الإطار يكون من الضروري التطرق إلى مفاهيم خاصة بعنصر جوهري يعد بمثابة مادة أساسية يتعامل معها هذا الفرع المعرفي والمتمثل في النموذج الاقتصادي ومتطلباته وأنواعه، وذلك حتى تكتمل عملية فهم أساسيات القياس الاقتصادي، ويكون من السهل شرح منهجيته في بناء النماذج.

4-1-تعريف النموذج الاقتصادي

يعرف النموذج الاقتصادي بأنه مجموعة من العلاقات الاقتصادية توضع بصيغ رياضية تسمى معادلة تشرح سلوكية وديناميكية العلاقات بين المتغيرات فيطلق عليها اسم المعادلات الهيكلية. كما يمكن تعريف النموذج الاقتصادي بأنه عبارة عن هيكلة الظاهرة في شكل معادلة تتضمن متغيرات اقتصادية، تهدف إلى التعبير عن الواقع وتمثيله.

وبصفة عامة يعتبر النموذج التمثيل المبسط والمترجم للعلاقات المتداخلة والمتشابكة فيما بينها يكون مصاغ في شكل معادلة مبسطة خالية من التعقيدات والتفاصيل تعبر عن الظاهرة محل الدراسة متيحة بذلك فرصة لفهمها وشرح سلوكها.

4-2-متطلباته: ويقصد به الوقوف على أهم الخصائص الجوهرية التي ينبغي توفرها في النموذج الاقتصادي للتأكيد على جودة التقديرات التي تم التوصل إليها، ومن ثم تبرير إمكانية الاعتماد عليه في التنبؤ بالقيم المستقبلية وهي كما يلي:

- ❖ يجب أن يكون النموذج متطابق مع قواعد وافتراضات النظرية الاقتصادية، فيصف الظاهرة الاقتصادية محل الدراسة بدقة؛
- ❖ ينبغي أن يتمتع بالقدرة على تفسير الظواهر التي تحدث في الواقع؛
- ❖ يجب أن تتميز تقديرات المعاملات بالدقة والقرب من القيم الحقيقية والواقعية للمعلمات، إضافة إلى ضرورة استيفاءها للمعايير الاقتصادية والإحصائية هذا وفضلا عن معايير الاتساق وعدم التحيز والكفاءة؛
- ❖ كما ينبغي أن يتمتع النموذج بالقدرة على تقديم توقعات وتنبؤات دقيقة فيما يخص القيم المستقبلية.

4-3-مكونات النموذج الاقتصادي

4-3-1-معادلات النموذج:

يتكون النموذج الاقتصادي من عناصر النظرية الاقتصادية معبرا عنها بالعلاقات الاقتصادية مبسطة في شكل دالة، مثال ذلك الاستهلاك (C)دالة f للدخل (Y)وبالتعبير الرياضي يصبح منطوق النظرية أعلاه كما يلي:

$C = f(Y)$ أي أن $C = B_0 + B_1 Y$ وهذا بافتراض خطية النموذج.

فتتكون المعادلة الرياضية أعلاه من(B_0) الثابت ويطلق عليه ثابت خط الانحدار كما تتكون من معامل الانحدار وهو عبارة عن مقدار التأثير أو التغير أو الميل (B_1) وفي هذا المثال يقصد به الميل الحدي للاستهلاك ويسمى(C) المتغير التابع و(Y)المتغير المستقل، وقد يحتوي النموذج على معادلة واحدة أو على عدة معادلات فنطلق عليها بالمعادلات الهيكلية، ويختلف عددها من نموذج اقتصادي إلى آخر تبعا لمدى سهولة أو صعوبة تفسير الظاهرة قيد الدراسة وتبعا للأهداف التي يرمي الباحث إلى تحقيقها.

ويتم تقسيم المعادلات الهيكلية على أساس محتواها الاقتصادي وليس على أساس شكلها الرياضي إلى عدة مجموعات كما يلي:

أ-المعادلة التعريفية: هي عبارة عن معادلات محاسبية تعرف أحد المتغيرات تعريف غير مشروط.

ب-المعادلة السلوكية: هي المعادلات التي تصف السلوك الاقتصادي للمتغير وتفسر وتبرر القرارات التي يتخذونها، ومثال ذلك تنص النظرية الاقتصادية الجزئية أن الكمية المستهلكة من سلعة ما تتغير بتغير سعرها فهي تعد معادلة سلوكية.

ج-المعادلة الفنية: هي المعادلة التي تختص بشرح طبيعة العلاقة بين مستوى الإنتاج والمستخدمات اللازمة له وفقا للمستوى التقني السائد، وهي التي توضح العلاقات الفنية بين المتغيرات الاقتصادية ولعل أبرز مثال على ذلك دالة الإنتاج كوب – دوكلاس.

د-المعادلة المؤسسية: يطلق عليها أحيانا بالمعادلة التنظيمية التي لا تصدر عن النظرية الاقتصادية وإنما تصف نمطا معينا من السلوك يحدده العرف والعادات والقانون مثل الضرائب والرسوم الجمركية وغيرها.

هـ-المعادلة التطابقية: هي المعادلة التي تأخذ صيغة التطابق وتساوي الجانبين ومثال ذلك تطابق الكميات المطلوبة مع الكميات المعروضة.

4-3-2-متغيرات النموذج:

يتكون النموذج من عدد من المتغيرات التي تصف الظاهرة محل الدراسة في شكل معادلة، ويمكن تصنيف هذه المتغيرات إلى عدة أنواع كما يلي:

أ-المتغيرات الداخلية: هي المتغيرات التي تؤثر في النموذج وتتأثر به وتتحدد قيمتها داخل النموذج عن طريق معاملات وقيم المتغيرات الخارجية وتسمى هذه المتغيرات أيضا بالمتغيرات التابعة.

ب-المتغيرات الخارجية: هي المتغيرات التي تؤثر في النموذج دون أن تتأثر به، وتتحدد قيمتها بعوامل خارجة عن النموذج وفي بعض الأحيان تتحدد قيمها عن طريق نموذج أخر يختلف عن النموذج الأصلي وتسمى هذه المتغيرات بالمتغيرات المستقلة أو المفسرة.

ج-المتغيرات المرتدة زمنيا: وهي المتغيرات التي تنتمي إلى فترة زمنية سابقة أو التي تأخذ قيمها من الفترة السابقة مثل(Y_{t-1}) الذي يمثل دخل السنة الماضية.

4-4-أنواع النماذج الاقتصادية: يمكن تصنيف النماذج الاقتصادية إلى عدة أنواع وهي:

4-4-1-النماذج الاقتصادية الكلية والجزئية:

أ-النماذج الاقتصادية الكلية: وهي النماذج التي تضم مجموعة من المتغيرات الاقتصادية التي تخص الاقتصاد الكلي أو تتصل بالسلوك العام والبنية العامة للاقتصاد كالدخل القومي، الاستثمار.

ب-النماذج الاقتصادية الجزئية: وهي النماذج التي تتكون من مجموعة من المتغيرات الاقتصادية تخص الوحدات الاقتصادية الجزئية كالعرض والطلب على سلعة معينة.

4-4-2-النماذج الاقتصادية الساكنة والمتحركة:

أ-النماذج الاقتصادية الساكنة: وهي النماذج التي لا تتضمن عنصر الزمن كأحد متغيراتها كما لا يؤثر في قيم متغيراتها المكونة لها مما يعني بدون فترة ارتداد زمني وأن لكل متغير قيمة معينة في السنة التي يقع فيها

ب-النماذج الاقتصادية المتحركة: تعتبر من النماذج الواقعية، تأخذ عنصر الزمن كأحد متغيراتها كما أنه يؤثر في قيم متغيراتها الداخلة فيها مثل: $S_t = f(P_{t-1})$

بمعنى العرض على السلعة للسنة الحاليةt يتأثر بسعر السلعة للسنة السابقة$(t-1)$ ويسمى(P_{t-1})المتغير الحركي المرتد زمنيا.

4-4-3-النماذج الخطية واللاخطية:

يعتمد هذا التقسيم على الشكل الرياضي الذي تأخذه العلاقة بين متغيرات النموذج.

أ-النماذج الخطية: هي إحدى النماذج الاقتصادية التي تمثل الظاهرة بمجموعة من المتغيرات الاقتصادية تأخذ معادلاتها الهيكلية صيغة خطية، كما يعبر عنها بيانيا في شكل خط مستقيم.

ب-النماذج اللاخطية: وهي النماذج التي تكون متغيراتها أو بعض منها تحمل أسا أعلى من الدرجة الأولى، حيث لا يعبر عنها بيانيا في شكل خط مستقيم وتأخذ عدة أنواع:

- معادلات من الدرجة الثانية والتي يكون فيها المتغير المفسر مرفوع إلى القوة أو الأساس التربيعي كما يلي:

$$Y = B_0 + B_1 X^2$$

- معادلات من الدرجة الثالثة أو أكثر ويطلق عليها بالمعادلات الأسية ويتم التعبير عنها كما يلي:

$$Y = B_0 \, log \, X$$

- معادلات لوغاريتمية تامة وتكون صياغتها في الشكل الآتي:

$$log \, Y = B_0 \, log \, X$$

2-منهجية الاقتصاد القياسي:

إن العلاقة التي تربط بين المتغيرات الاقتصادية هي علاقة سببية تشكل محور اهتمام القياس الاقتصادي وحتى يتم بناء نموذج قياسي اقتصادي تتوفر فيه كل الخصائص اللازمة، فإن الأمر يتطلب إتباع منهجية معينة في البحث تتمثل في المراحل التالية:

2-1-تعيين النموذج:

تتمثل المرحلة الأولى لمنهجية الاقتصاد القياسي في بحث صياغة العلاقات بين المتغيرات التي تعبر عن الظاهرة محل الدراسة، وتمر بعدة خطوات:

2-2-1-متغيرات النموذج: يتم تحديد المتغيرات التي يتضمنها النموذج من المتغيرات المستقلة أو التفسيرية والمتغير التابع اعتمادا على النظرية الاقتصادية.

ونظرا لأن الواقع الاقتصادي يتميز بتعقيداته الكثيرة والمتعددة بحيث يصعب على الباحث حصر جميع العوامل التي تؤثر في الظاهرة ومن ثم صعوبة اتخاذ القرار، لهذا على الباحث تسخير كل جهده في البحث عن العوامل التي يعتقد أنها أكثر أهمية، فيدخل في الدالة العوامل الأكثر تأثيرا أما المتغيرات الأقل أهمية أو التي يصعب قياسها فيدمجها في المتغير العشوائي والذي يعتبر من شروط النموذج القياسي الاقتصادي ليعبر على أن العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرات المفسرة ليست صحيحة 100% وأن النموذج عشوائي.

2-2-2-تحديد الإشارات المتوقعة للمعلمات: تقدم لنا النظرية الاقتصادية كمصدر أساسي للمعلومات فكرة عن الإشارات المتوقعة لمعلمات النموذج الذي نسعى إلى تقديره.

2-2-3-الصياغة الرياضية للنموذج : لا تحدد النظرية الاقتصادية بدقة الصيغة الرياضية للعلاقات بين المتغيرات الاقتصادية ولا عدد المعادلات التي يشتملها النموذج، على سبيل المثال لا تحدد النظرية الاقتصادية الجزئية إذا كان الطلب على السلعة (X) يتم دراستها بمعادلة واحدة أو عدة معادلات آنية، كما أنها لا تحدد ما إذا كانت دالة الطلب تكتب بصيغة خطية أو غير خطية، وإنما تعطينا بعض المعلومات الرياضية عن الدالة حيث تفترض أن المستهلك الرشيد غير خاضع للخداع النقدي مما يعني أن التغيرات النقدية الطارئة على مستوى الدخل والأسعار بنفس النسبة وفي نفس الاتجاه لا تؤدي إلى التغير في الاستهلاك الحقيقي ومعنى ذلك رياضيا أن دالة الطلب متجانسة من الدرجة صفر، وبرصد البيانات الفعلية الخاصة بمتغيرين تتضح جليا الصيغة الرياضية للدالة إذا ما كانت خطية أو غير خطية.

وتعد هذه الخطوة من أصعب المراحل في القياس الاقتصادي، حيث يترتب الخطأ على مستوى الصياغة الرياضية إلى حذف بعض المتغيرات الهامة من الدالة.

2-2-تقدير معلمات النموذج:

يعرف التقدير بأنه إدراك الواقع وصياغته في شكل نموذج رياضي يوضح العلاقة السببية والارتباطية بين المتغير التابع والمتغيرات المفسرة له، مما يعني أنه على مستوى هذه المرحلة يتم صياغة الظاهرة في شكل معادلة رياضية توضح العلاقة السببية بين المتغيرات لتحقيق تقديرات كمية للمعلمات

ويتم ذلك بجمع البيانات الفعلية من الواقع المتعلقة بالمتغيرات التي يضـمها النموذج وتأخذ البيانات عدة أنواع وهي:

2-2-1-بيانات سلاسل زمنية: تعطى قيم المتغيرات في فترات زمنية متتالية كبيانات الدخل القومي.

2-2-2-بيانات مقطعية: وتقدم بيانات عن المتغيرات الاقتصـادية المتعلقة بوحدات اقتصـادية مختلفة في نقطة زمنية معينة، مثل بيانات خاصة بالدخل لمجموعة من الوحدات الاقتصادية (مؤسسات، عائلات، دول...) في نقطة زمنية معينة.

2-2-3-بيانات بانل: وهي البيانات التي تجمع بين ميزات البيانات المقطعية وبيانات السلاسل الزمنية، فهي تعني مجموع المشاهدات المقطعية التي يتم تجميعها خلال فترة زمنية معينة.

ثم يتم تقدير معالم العلاقة التي تم وصفها وصياغتها رياضيا على مستوى المرحلة الأولى بقيم رقمية، وذلك باسـتخدام إحدى الطرق بناء على اختيار الباحث على ضـوء الظاهرة محل الدراسـة ونوعية البيانات المتوفرة.

ومن بين الطرق المنتشرة نذكر:

*طريقة المربعات الصـغرى Ordinary Least Squares method (OLS)وهي أشـهر طريقة والأكثر استعمالا.

* طريقة الأكثر احتمالا Maximum Likelihood method (ML)

* طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة Indirect Least Squares method (ILS)

* طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين Tow Stage Least Squares (TSLS)

* طريقة المربعات الصغرى على ثلاث مراحل(3SLS) Three Stage Least Squares

2-3-تقييم المقدرات:

على مسـتوى هذه المرحلة يقوم الباحث بتقييم المعالم المقدرة للنموذج الاقتصـادي معتمدا في ذلك على أسس اقتصادية وأخرى إحصائية إضافة إلى معايير قياسية.

2-3-1-المعايير الاقتصـادية: تسـتمد هذه المعايير من النظرية الاقتصـادية التي تحدد الإشـارات المتوقعة لتلك المعلمات التي يتضمنها النموذج الاقتصادي، بحيث ينبغي أن تكون إشارات المعلمات تتوافق وما تقره النظرية الاقتصـادية وإن لم تكن كذلك يتم عزلها من النموذج والتخلي عنها، إلا إذا كانت هناك أسـباب قوية أو أية ظروف اسـتثنائية تسـتدعي بقائها في النموذج، فعلى سـبيل المثال: تعتبر النظرية الكينزية أن الطلب على النقود يتحدد بعلاقة طردية بالدخل النقدي(y) وبعلاقة عكسية بسعر الفائدة(i).

ويعبر عن منطوق النظرية الكينزية بالصيغة الرياضية التالية:

$$M_d = B_0 + B_1 y + B_2 i + U_i$$

فنتوقع أن تكون المعلمة (B_1)موجبة و(B_2) سالبة.

2-3-2-المعايير الإحصـــائية: تســـمى باختبارات الرتبة الأولى، تســـاعد هذه المعايير في تحديد المعنوية الإحصـــائية للقيم المقدرة للمعلمات التي يحتويها النموذج، كما تحدد درجة الاعتماد عليها في تفســـير الظاهرة محل الدراسة وتتمثل هذه المعايير في معامل التحديد واختبارات المعنوية.

وتجدر الإشـــارة إلى أنه في الاقتصـــاد القياســـي نولي للمعايير الإحصـــائية الأهمية والمرتبة بعد المعايير الاقتصادية، بمعنى أننا نرفض القيم التي تناقض المعايير الاقتصادية حتى ولو كانت مقبولة وفقا للمعايير الإحصائية.

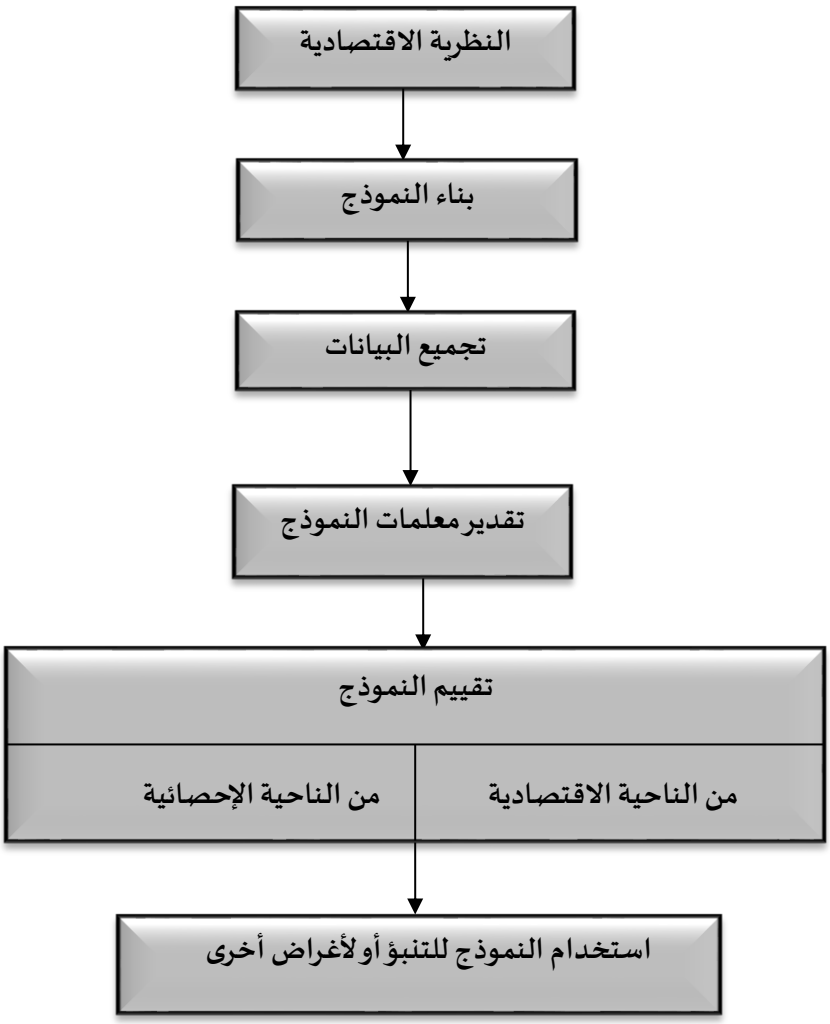
2-3-3-معايير القياس الاقتصـــادي: تســـمى باختبارات الرتبة الثانية وهذه المعايير تضـــعها نظرية القياس الاقتصادي قصد التأكد من الافتراضات الخاصة بالطريقة القياسية المستخدمة في بناء النموذج، فإذا كانت هذه الافتراضـــات متوافرة فإن هذا يكســـب المعلمات المقدرة صـــفات معينة أهمها عدم التحيز والاتساق، وعدم تحققها يؤدي إلى فقدانها هذه الصفات، وإلى عدم صلاحية المعايير الإحصائية لهذا تسمى اختبارات الرتبة الثانية ومن بين هذه المعايير: معايير الارتباط الذاتي، معايير التعدد الخطي، معايير ثبات التباين وغيرها.

وبناء على ما ســـبق فإن الاقتصـــاد القياســـي يعتمد على جميع المعايير الاقتصـــادية والإحصـــائية والقياسية، لقبول أو رفض مقدرات المعلمات التي تم الحصول عليها في النموذج وفي حالة عدم تحقق تلك المعايير، يكون من الضـــروري إعادة تعيين النموذج عن طريق إضـــافة أو حذف بعض المتغيرات وإعادة عملية التقدير حتى نتحصل على مقدرات تستوفي المعايير السابقة.

2-4-تقييم مقدرة النموذج على التنبؤ

تعتبر المرحلة الأخيرة في منهجية الاقتصـــاد القياســـي، يتم على مســـتواها تقييم قدرة النموذج المعالج على التنبؤ بالقيم المســـتقبلية للظاهرة محل الدراســـة ، لأنه يكون من الممكن أن يجتاز النموذج جميع المراحل والاختبارات الســـابقة إلا أنه لا يكون صـــالح للاســـتعمال ســـواء للتنبؤ أو لتفســـير الظواهر الاقتصادية، وهذا لأنه إذا ما حدثت تغيرات هيكلية سريعة في الظروف الاقتصادية فإن النموذج القياسي يصـبح لا يعبر عن كل الفترة لهذا لابد من اختبار اسـتقرار المعلمات المقدرة عبر الزمن، ويمكن التعبير عن منهجية الاقتصاد القياسي في الرسم البياني التالي:

شكل رقم (01): يبين منهجية البحث في القياس الاقتصادي



المصدر: من إعداد الباحثة.

ولأجل توضيح منهجية الاقتصاد القياسي فإنه سيتم تطبيقها على مستوى نماذج الانحدار الخطي من نموذج انحدار خطي بسيط وانحدار خطي متعدد.

تحليل الانحدار الخطي البسيط

تمهيد:

يعتبر الانحدار الخطي أحد الأساليب الإحصائية التي تستخدم في قياس العلاقات الاقتصادية بين متغير يسمى المتغير التابع وآخر أو مجموعة من المتغيرات تسمى المتغيرات المستقلة أو التفسيرية، والذي يعتبر تحديدها إحدى مسؤوليات الباحث وذلك باستناده على مصادر عدة لعل أبرزها النظريات الاقتصادية والتي تعتبر خير مرشد سواء كانت كلية والمرتبطة بالظواهر الكلية مثال ذلك النظرية النقدية الكينزية التي تعتبر أن الطلب على النقود كمتغير تابع وأسعار الفائدة والدخل النقدي الجاري كمتغيرات مفسرة.

أو كانت جزئية تفسر سلوك الوحدات الاقتصادية نأخذ عل سبيل المثال الكمية المطلوبة من سلعة معينة كمتغير تابع تتأثر بمجموعة من المتغيرات المفسرة مثل الدخل، السعر، أسعار السلع البديلة، أسعار السلع المكملة.

وتنقسم نماذج الانحدار الخطي إلى نوعين الانحدار الخطي البسيط والانحدار الخطي المتعدد، وتتحدد نماذج الانحدار الخطي بعدد المتغيرات المستقلة حيث يدرس الانحدار الخطي البسيط العلاقة بين متغير تابع وآخر مستقل في حين الانحدار المتعدد يدرس العلاقة بين متغير تابع وعدة متغيرات مستقلة.

1-مفهوم الانحدار الخطي البسيط:

يعتبر الانحدار البسيط من أبسط نماذج الانحدار المختلفة للتقدير والتحليل الإحصائي والاقتصادي، إذ يقتصر على وصف علاقة خطية عشوائية تربط بين متغيرين أحدهما تابع والآخر مستقل، وتشكل دراسة الانحدار البسيط القاعدة الأساسية ونقطة الانطلاق نحو دراسة نماذج أخرى أكثر عمومية وواقعية، بحيث توجد العديد من العلاقات الاقتصادية التي يمكن قياسها باستخدام هذا الأسلوب، على سبيل المثال النظرية النقدية الكلاسيكية التي تمت دراستها على مستوى الفصل الأول تعتبر أن كمية النقود أو العرض النقدي متغير مفسر والمستوى العام للأسعار المتغير التابع $p = f(M)$.

وتأخذ معادلة الانحدار البسيط الصيغة الخطية التالية:

$Y_i = B_0 + B_1 X_i$ ..... (01) حيث يمثل (Y_i) المتغير التابع و (X_i) المتغير المستقل أو التفسيري الذي يفسر تغيرات المتغير التابع، في حين تمثل B_0 و B_1 معلمات النموذج.

إلا أنه ما يلاحظ على المعادلة رقم(01) أنها لا تعبر عن حقيقة العلاقة بين المتغيرين التابع والمستقل وذلك لأنه إذا ما تم الرجوع إلى الواقع لا يوجد أثر لهذه العلاقات الدقيقة، فالبيانات التي يتم استسقاءها من الواقع خلال فترات معينة تعطينا شكلا انتشاريا مبعثرا لا تتجمع نقاطه على خط مستقيم مما يوحي بوجود انحراف للعلاقة الحقيقية عن العلاقة المعبر عنها بالمعادلة، ولتقريبها من الواقع والحقيقة ينبغي إضافة متغير آخر يسمى المتغير العشوائي أو حد الخطأ ويرمز له بالرمز U_i.

فتصبح المعادلة السابقة التي تعبر عن حقيقة العلاقة والتي تسمى معادلة الانحدار الخطي البسيط كالآتي:

$$Y = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

عندها تصبح الصيغة القياسية جاهزة للتقدير وقريبة من الواقع.

ويستخدم مصطلح المتغير العشوائي للتعبير عن حجم الخطأ أو عدم إصابة الهدف وهناك عدة أسباب تبرر إدخال هذا المتغير ونجملها في:

1-صعوبة إدخال كافة المتغيرات المؤثرة في الظاهرة: ويقصد بهذا العنصر صعوبة الحصول على كافة البيانات المتعلقة بالمتغيرات التي تؤثر في الظاهرة محل الدراسة لهذا يكون من الضروري إدخال عنصر ينوب عنها وهو العنصر العشوائي.

2-صعوبة إدخال المتغيرات غير المتوقعة: قد يتم إضافة المتغير العشوائي إلى المعادلة لكي يعبر عن المتغيرات غير المتوقعة والتي تظهر بالإضافة إلى العناصر الأخرى المؤثرة في المتغير التابع، كالحروب والبراكين، الكوارث الطبيعية الأخرى، أو بعض المتغيرات التي لها تأثير قليل على المتغير التابع وذات مؤشرات ضعيفة لا يمكن تقديرها.

3-الخطأ في القياس: في كثير من الأحيان يحدث خطأ في قياس المتغيرات الاقتصادية فيتم إدراج المتغير العشوائي في المعادلة.

4-التصرفات العشوائية غير المتوقعة للأفراد: يختلف سلوك الأفراد عشوائيا حتى ولو كانت الظروف المحيطة بهم متشابهة، فيتم تضمين المعادلة المتغير العشوائي ليمثل العشوائية المتأصلة في سلوك الأفراد، فليس بالضرورة أن تتفق أسر متشابهة من حيث الدخل وعدد أفرادها وأعمارهم على نفس المقدار من الاستهلاك.

5-عدم الصياغة الدقيقة للنموذج: ويعني ذلك وقوع خطأ في تخصيص الشكل الدالي للعلاقة المدروسة فيتم إدخال المتغير العشوائي.

2-تحديد الشكل الرياضي للنموذج الخطي البسيط وفرضياته:

2-1-الشكل الرياضي للنموذج الخطي البسيط: ويقصد بذلك وصف العلاقة الخطية بين المتغيرين (X_i) و(Y_i) لعينةnمن المشاهدات بواسطة نموذج قياسي في شكل رياضي وليكن كما يلي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i \quad ، \quad (i = 1.....n)$$

حيث:

Y_i: يسمى المتغير التابع أو المتغير الداخلي، يمكن مشاهدته.

X_i: يسمى المتغير المفسر أو المتغير الخارجي، يمكن مشاهدته.

U_i: يسمى الحد العشوائي أو حد الخطأ لا يمكن مشاهدته فهو يشير إلى أن المتغير المفسر X_i لا يمكن لوحده تفسير كل التغيرات التي قد تطرأ على المغير التابعY_i، بل هناك عوامل أخرى لها علاقة بما يحدث لـ Y_iفينوب عنها.

أما القيمB_0 وB_1 فتمثل معلمات النموذج وهي عبارة عن قيم ثابتة وغير معلومة في المعادلة.

ونتيجة لوجود المتغير العشوائي في المعادلة السابقة فإنه يمكن تقسيم العلاقة أعلاه إلى جزئين:

- الجزء الأول يتضمن الخط($B_0 + B_1 X_i$)والتي تعرف بتغيرات المتغير التوضيحي.

- الجزء الثاني فيتمثل في التأثير العشوائي(U_i) وتعرف بالتغيرات غير الموضحة.

كما يمكن التعبير عن العلاقة الخطية للمعادلة السابقة في الشكل المصفوفي الآتي:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

قبل التطرق إلى فرضيات نموذج الانحدار الخطي البسيط يجدر التذكير بأنه تتعدد الصيغ الرياضية التي تعبر عن العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل من خطية وغير خطية التي يمكن أن يصادفها باحث القياس الاقتصادي، ويمكن تلخيص أهم الصيغ في الجدول التالي:

جدول رقم (01): يبين الصيغ الرياضية

نوع الدالة	الصيغة غير الخطية	الصيغة الخطية
الصيغة الخطية	....	$Y_{ij} = B_0 + B_1 X_j + U_{ij}$
الصيغة العكسية	....	$Y_{ij} = B_0 - B_1/X_j + U_{ij}$
الصيغة التربيعية	....	$Y = B_0 + B_1 X + B_2 X^2$
الصيغة نصف اللوغاريتمية	$e^Y = e^{B_0} X^{B_1}$	$Y_{ij} = B_0 + B_1 \ln X_j + U_{ij}$
الصيغة اللوغاريتمية المزدوجة	$Y = B_0 + X^{B_1}$	$\ln Y_{ij} = B_0 + B_1 \ln X_j + U_{ij}$
الصيغة الأسية	$Y = e^{B_1 + B_1 X}$	$\ln Y = B_0 + B_1 X$

المصدر: مجدي الشوربجي، الاقتصاد القياسي النظرية والتطبيق، الطبعة الأولى، الدار المصرية اللبنانية، القاهرة، 1994، ص. 49 بتصرف.

ولأن الصيغة الخطية هي التي يتم استخدامها في التقدير، فيكون من الضروري على باحث القياس الاقتصادي تحويل الصيغ الرياضية غير الخطية بإدخال اللوغاريتم الطبيعي إلى صيغة خطية وذلك حتى يمكن إجراء عملية التقدير بدقة.

2-2 -فرضيات النموذج: من أجل تقدير معلمات النموذج لابد من الاستناد إلى قاعدة سليمة تتمثل في مجموعة من الفروض الأساسية والتي يمكن تلخيصها في القائمة التالية:

الفرضية الأول: تتعلق بقيم المتغير المستقل، حيث يفترض أن البيانات التي جمعت بالنسبة لهذا المتغير قادرة على إظهار تأثيراتها في تغير قيم المتغير التابع، وتكون قيمة واحدة على الأقل من قيم المتغير المستقل مختلفة عن بقية القيم ويمكن صياغة هذا الفرض بالصورة الرياضية التالية:

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 \neq 0$$

حيث أن $(\bar{X})$ تعبر عن متوسط قيم(X_i).

الفرضية الثانية: الأمل الرياضي للأخطاء معدوم أي أن:

$$(E(U_i) = 0) \quad \forall(i = 1.....n)$$

وتعني هذه الفرضية أن الأخطاء لا تدخل في تفسير (Y_i)، إذ تعبر عن حدود عشوائية تأخذ قيما سالبة، موجبة أو معدومة لا يمكن قياسها أو تحديدها بدقة، تخضع لقوانين الاحتمال بحيث يكون وسطها أو توقعها الرياضي مساو للصفر.

الفرضية الثالثة: وتتمثل في أن يكون تباين حد الخطأ متساوي عند جميع قيم (X_i)ويبلغ (σ^2)وهذه القيمة مجهولة ويعبر عنها رياضيا كما يلي:

$$VAR\ (U_i) = E\ (U_i{}^2) = \sigma^2$$

أي أن قيمة التباين ثابتة عند قيم(X_i) المختلفة، مما يعني أن البيانات التي جمعت لتقدير العلاقة يمكن الاعتماد عليها بنفس الدرجة، فكل مشاهدة تؤثر بنفس القوة في العلاقة التي يطلب تقديرها.

ومن الفرض الثاني والفرض الثالث نستنتج أن المتغير العشوائي يتوزع توزيعا طبيعيا أي:

$$U_i \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

الفرضية الرابعة: تتعلق بالارتباط الذاتي بالمتغير العشوائي، ويعني أن تكون قيمة (U_i)مستقلة عن (U_S)و$(i \neq s)$ أي أن القيم المختلفة للمتغير العشوائي (U_i)تكون مستقلة عن بعضها البعض، بمعنى التباين المشترك(U_i) مع (U_S)يساوي الصفر ويمكن كتابة هذه الفرضية رياضيا كما يلي:

$$Cov\ (U_iU_S) = E\ (U_iU_s) = 0 \quad ، \quad \forall\ i \neq S\ ،\ (\ i\ ,\ S)\ = 1.....n$$

ويعود السبب في ذلك إلى كوننا نريد أن نصف نموذجا تكون فيه قوة واحدة فقط تؤثر في قدرته على التنبؤ، فإذا افترضنا أن (U_i)ترتبط بقيمة(U_S) فتكون قيم(Y_i)لا تعتمد فقط على قيمة (X_i)وإنما تعتمد بالإضافة إلى ذلك على(U_S) أي القيم السابقة واللاحقة لها، وبذلك تكون أكثر من قوة تؤثر في قدرة النموذج على التنبؤ.

الفرضية الخامسة: تتمثل هذه الفرضية في أن تكون قيم(U_i) غير مرتبطة بأي من المتغيرات المستقلة في النموذج، ويعبر عنه رياضيا كما يلي:

$$E(U_iX_i) = 0$$

أما فيما يخص الفروض التي تتعلق بالمتغير التابع الممثل للظاهرة:

- أن يكون توزيع هذا المتغير التابع توزيع طبيعي وتوقعه أو متوسطه يعطى كالآتي:

$$\bar{Y} = E(Y_i) = B_0 + B_1X_i$$

- وتباينه يعطى بالشكل التالي:

$$Var(Y_i) = E[(Y_i - E(Y_i)]^2 = \sigma^2$$

بمعنى يكون المتغير التابع خاضع للقانون التالي:

$$Y_i \rightarrow N(B_0 + B_1 X_i \ , \ \sigma^2)$$

وبتوفر هذه الفرضيات يمكن تقدير معلمات النموذج.

3-تقدير معلمات النموذج:

انطلاقا من الصيغة الخطية للنموذج البسيط:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

ومن القانون الاحتمالي الذي يخضع له المتغير العشوائي $U_i \rightarrow N(0, \sigma^2)$

فإن المعلمات المجهولة والتي ينبغي تقديرها من النموذج $B_0 \ , B_1 \ , \sigma^2$.

فيعرف المقدر بأنه الطريقة أو الصيغة التي تسمح بتقدير المعلمات غير المعلومة، أما التقدير فهو القيمة العددية الناتجة عن تطبيق تلك الصيغة أو الطريقة على بيانات العينة، فتكون المعادلة التقديرية على الشكل التالي:

$$\hat{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X$$

وتتعدد طرق تقدير معلمات النموذج المجهولة، إلا أن أحسنها طريقة المربعات الصغرى العادية التي اعتمد عليها لأول مرة العالم الألماني كارل فريدريك جاوس(Gauss) عام 1821، وذلك لما تتميز به من خصائص إحصائية وسهولة الحساب، كما أنها طريقة تقدير طبيعية تتوافق مع هيكل النموذج، فضلا على أن مقدراتها أفضل مقدر خطي أمثل حتى وإن كان النموذج الحقيقي ليس انحدار خطي، كما تتميز بالدقة التي تنعدم لدى غيرها من المقدرات لذلك تعتبر الاستعمال الفعال للبيانات.

1-3 -طريقة المربعات الصغرى: تعد طريقة المربعات الصغرى المحرك الأساسي في التحليل الإحصائي وأحسن أسلوب يتم الاعتماد عليه في اختيار أفضل خط مستقيم يوفق بين مشاهدات العينة من بين الخطوط اللانهائية العدد التي تصف المعادلة الخطية تقوم على مبدأ أساسي يتمثل في تصغير مجموع مربعات الأخطاء إلى أقل قدر ممكن، فعند سحب عينة مكونة من n مشاهدة من الثنائيات (X_i, Y_i) يكون الغرض هو انتقاء أفضل خط مستقيم يعبر عن العلاقة $Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$ ويكون تقديرها بالصيغة التالية:

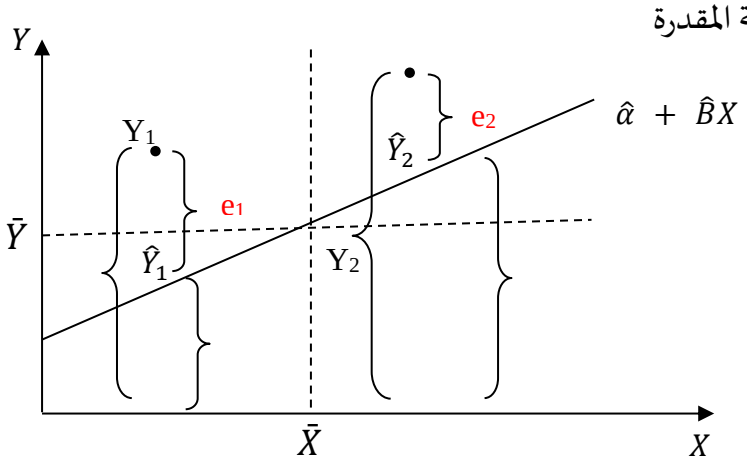
$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i$$

حيث:

$\hat{Y}_i$: يمثل القيمة التقديرية للقيمة الحقيقية لـY_i.

وعند تمثيل بيانات العينة نتحصل على سحابة من النقاط منتشرة في شكل انتشاري كما يوضحه الرسم البياني التالي:

شكل رقم (02): يبين العلاقة المقدرة



المصدر: عبد المحمود محمد عبد الرحمن، مرجع سبق ذكره، ص. 12

يتبين من خلال الشكل أعلاه أن النقاط تتوزع أعلى وأسفل الخط التقديري، تمثل سلسلة الملاحظات الحقيقية Y_i تنحرف عن سلسلة الملاحظات التقديرية $\hat{Y}_i$ (بقيم سالبة أو موجبة أو معدومة)، وتسمى هذه الانحرافات المبينة في الشكل بالبواقي (بواقي المربعات الصغرى) أو مقدرات الأخطاء والتي نرمز لها بالرمز e_i حيث:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

وتقوم طريقة المربعات الصغرى على المبدأ الأول وهو تصغير مجموع البواقي إلى أدنى حد ممكن أو جعله معدوم أي $\sum e_i = 0$ لتعطي أفضل خط مستقيم يوفق مشاهدات العينة (X_i, Y_i) إلا أن هذا الشرط غير كاف وذلك لأنه يمكن للبواقي السالبة أن تلغي البواقي الموجبة وتكون النتيجة صفر، دون أن يتحقق شرط اختيار أفضل مقدرتين B_0 ، B_1 لذا تشترط طريقة المربعات الصغرى قيد آخر يتمثل في تصغير مجموع مربعات البواقي إلى أدنى قيمة ممكنة لتصبح كل البواقي مربعة وبالتالي موجبة، أي $\sum {e_i}^2$ ويتم التعبير عنها رياضيا كما يلي:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} {e_i}^2 = \sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i)^2$$

وبالتفاضل الجزئي للدالة Q بالنسبة لـ $\hat{B}_0$ ، $\hat{B}_1$ ومساواتها إلى الصفر نجد:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta(Q)}{\delta(\hat{B}_0)} = -2\sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i) = 0 \\ \dfrac{\delta(Q)}{\delta(\hat{B}_1)} = -2\sum X_i (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i) = 0 \end{cases}$$

وبتبسيط المعادلتين نتوصل إلى ما يسمى بالمعادلات الطبيعية الخاصة بـ $\hat{B}_1$ ، $\hat{B}_0$ للخط المستقيم وبحل جملة المعادلتين نجد قيم كل من $\hat{B}_1$ ، $\hat{B}_0$ أي أن:

$$\begin{cases} \hat{B}_1 = \dfrac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} \\ \hat{B}_0 = \dfrac{\sum {X_i}^2 \sum Y_i - \sum X_i \sum X_i Y_i}{n\sum {X_i}^2 - (\sum {X_i}^2)} \\ \quad = \bar{Y} - \hat{B}_1 \bar{X} \end{cases}$$

ويعرف هذا التقدير بالتقدير حول نقطة الأصـــل، أما التقدير حول نقطة المتوســـط فيمكن كتابته على الشكل التالي:

$$x_i = X_i - \bar{X} \quad ، \quad y_i = Y_i - \bar{Y}$$

وعليه يمكن إعادة كتابة الصيغة الخاصة $\hat{B}_1$ بالشكل التالي $\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum {x_i}^2}$، أما الحد الثابت فيقدر بنفس الصيغة السابقة[1].

وهكذا إذا ما تم الحصـــول على تقديرات المربعات الصـــغرى فإنه يمكن تحديد خط الانحدار المقدر والخاص بالعينة حيث يعطى بالمعادلة التالية:

$$Y_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i + U_i \quad \text{أو} \quad \hat{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i$$

مثال رقم(01): البيانات التالية تمثل الدخل الشهري X والانفاق الشهري Y للعائلة تتكون من 9 عائلات كما يلي:

X	60	90	56	18	42	38	90	80	48
Y	40	55	38	12	35	30	72	60	45

المطلوب:

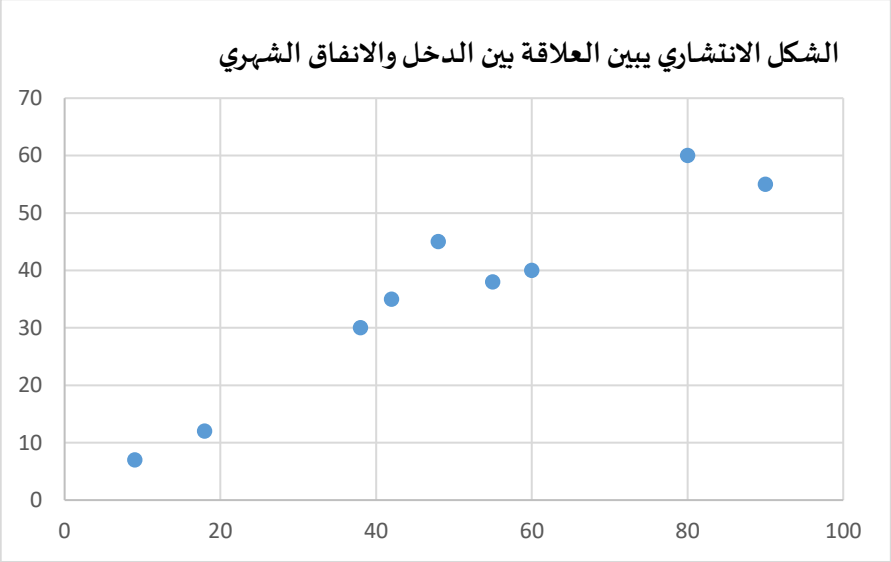
-ارسم الشكل الانتشاري للبيانات.

-قدر معادلة الانحدار الخطي البسيط.

[1] أموري هادي كاظم الحسناوي، مرجع سبق ذكره، ص. 17-18

الحل:

1-رسم الشكل الانتشاري:



القيم	x_i	y_i	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	60	40	2	-3	-6	4
2	90	55	32	12	384	1024
3	56	38	-2	-5	10	4
4	18	12	-40	-31	1240	1600
5	42	35	-46	-8	368	2116
6	38	30	-20	-13	260	400
7	90	72	32	-29	928	1024
8	80	60	22	17	374	484
9	48	45	-10	2	-20	100
المجموع	522	387	/	/	3538	6756

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{522}{9} = 58$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{387}{9} = 43$$

-تقدير معادلة الانحدار الخطي لعلاقة الدخل بالإنفاق الشهري:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{3538}{6756} = 0.52$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 43 - 0.52 \times 58 = 12.84$$

وعليه تكون معادلة الانحدار المقدرة للدخل على الانفاق الشهري كما يلي:

$$\hat{Y}_i = 12.84 + 0{,}52X_i$$

3-1-1-خواص مقدرات المربعات الصغرى

أ-الخواص الحسابية لمقدرات المربعات الصغرى العادية: وتتمثل الخواص الحسابية لمقدرات المربعات الصغرى في:

- يمر الخط المقدر من نقطة متوسطات العينة لـ Xو Y كما توضحه المعادلة التالية:

$$\bar{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1\bar{X}$$

- مجموع البواقي يساوي الصفر $\sum e_i = 0$ أي $\sum e_i = \sum(Y - \hat{Y}) = 0$

وبالتالي القيمة المتوسطة للبواقي تساوي الصفر $\bar{e} = 0$

- البواقي لا ترتبط بالمتغير المفسر X_i أي $\sum e_i X_i = 0$

ب-الخواص الإحصائية لمقدرات طريقة المربعات الصغرى

تتميز المعالم المبنية على طريقة المربعات الصغرى العادية بالخصائص الإحصائية المرغوبة التالية:

- **خاصية الخطية:** تكتسب مقدرات المربعات الصغرى خاصية الخطية والتي يقصد بها إمكانية كتابتها في شكل تركيب خطي أو دالة خطية لمشاهدات المتغير التابع Y.

– **خاصية عدم التحيز:** تتميز مقدرات المربعات الصغرى بخاصية عدم التحيز أي أن قيمة وسطها يساوي القيمة الحقيقية للمعلمة أي:

$$E(\hat{B}) = B.$$

- **خاصية أقل تباين:** كما تتميز مقدرات المربعات الصغرى العادية بخاصية أقل تباين ولأجل هذه الخاصية يكثر استخدامها على وجه التحديد أي أنها تتسم بالكفاية.

- **أفضل مقدر خطي غير متحيز BLUE:** وتستنبط هذه الخاصية من نظرية Gauss Markov والتي تقول من بين المقدرات الخطية وغير المتحيزة تكون مقدرتي المربعات الصغرى العادية $\hat{B}_0$، $\hat{B}_1$ أفضل مقدرتين خطيتين وغير متحيزتين حيث أن لها أصغر تباين ممكن وغير متحيزة مقارنة مع بقية المقدرات الخطية الأخرى.

وطالما أن مقدرات المربعات الصغرى في نموذج الانحدار الخطي البسيط عبارة عن تركيب خطي لمشاهدات المتغير التابع، ولكونها غير متحيزة ولها أقل تباين ممكن، وبالتالي استيفائها لهاته الخصائص الثلاثة يجعلها أفضل مقدر خطي غير متحيز.

– **خاصية الاتساق:** كما تتصف مقدرات المربعات الصغرى أنها مقدرات متسقة وهذا لاستيفائها على الشروط الأساسية لهاته الخاصية وهي أن يكون توزيع المعاينة لـ $\hat{B}$ يقترب من القيمة الحقيقية B وهذا كلما كان $n \to \infty$ أي النهاية الاحتمالية للمقدر $\hat{B}$ هي B والتي يعبر عنها رياضيا كما يلي:

$$\underset{n \to \infty}{\text{Plim}}(\hat{B}) = B$$

ولكون هذا الشرط غير كاف للحصول على مقدر متسق بل ينبغي أن تكون قيمتي التحيز والتباين تقتربان أو تساويان الصفر كلما اقترب حجم العينة n من مالا نهاية.

1) $\lim_{n \to \infty} E(\hat{B}) = P\ lim(\hat{B}) = B$

2) $\lim_{n \to \infty} var(\hat{B}) = P\ lim\ var(\hat{B}) = 0$

وبتوفر هذين الشرطين نقول عن المقدر $\hat{B}$ بأنه مقدر متسق للمعلمة الحقيقية B.

2-3-توزيع المعاينة للمقدرات والتقدير المجالي للمعالم:

3-2-1-تقدير تباين حد الخطأ العشوائي $\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2$ وتباين المقدرات $V(\hat{B}_0)$ و$V(\hat{B}_1)$:

أ-تقدير تباين حد الخطأ العشوائي $\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2$: كون أن تباين $\hat{B}_0$، $\hat{B}_1$ يستعمل في إجراء اختبارات المعنوية الخاصة بتلك المقدرات، غير أن هذا التباين يحتوي على معلمة مجهولة وهي σ^2 والتي تمثل تباين حد الخطأ العشوائي الأمر الذي يستدعي ضرورة تقديره من أجل القيام بالاختبارات الإحصائية لمعالم النموذج ويمكن الحصول على الصيغة التقديرية لتباين حد الخطأ العشوائي كما يلي:

انطلاقا من المعادلة التقديرية والتي تكتب كما يلي:

$$\hat{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i \ \cdots\cdots\ (02)$$

وبإدخال $\sum$ إلى طرفي المعادلة نجد:

$$\sum \hat{Y} = \sum \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i$$

وبقسمة طرفي المعادلة على n تصبح المعادلة كما يلي:

$$\frac{\sum \hat{Y}_i}{n} = \frac{n\ .\ \hat{B}_0}{n} + \hat{B}_1 \frac{\sum X_i}{n}$$

$$\bar{\hat{Y}} = \hat{B}_0 \ + \hat{B}_1\ \bar{X} \ \cdots\cdots\ (03)$$

وبطرح المعادلة رقم (03) من المعادلة رقم (02) نجد:

$$\hat{Y}_i - \bar{\hat{Y}} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1\ X_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 \bar{X}$$

وبعد التبسيط نحصل على:

$$\hat{y}_i = \hat{B}_1 X_i - \hat{B}_1 \bar{X}$$

أي $\hat{y}_i = \hat{B}_1 (X_i - \bar{X})$ ، أو بعبارة أخرى $\hat{y}_i = \hat{B}_1 x_i$

وبما أن $e_i = y_i - \hat{y}_i$ أي أن $e_i = y_i - \hat{B}_1\ x_i$

وبتربيع الطرفين نجد:

$$e_i{}^2 = (\ y_i - \hat{B}_1 x_i)^2$$

وبفك الأقواس وإدخال المجموع $\sum$ على طرفي المعادلة نحصل على:

$$\sum e_i{}^2 = \sum y_i{}^2 + \hat{B}_1{}^2 \sum x_i{}^2 - 2\hat{B}_1 \sum x_i\, y_i \ \cdots\cdots\ (04)$$

ومن الصيغة التقديرية لـ $\hat{B}_1$ في نموذج الانحدار الخطي البسيط المتوصل إليها سابقا:

$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i{}^2}$ وبضرب طرفي المعادلة في الوسطين نجد:

$$\hat{B}_1 . \sum x_i{}^2 = \sum x_i\, .\, y_i \ \cdots\cdots\ (05)$$

وبتعويض المعادلة رقم (05) في المعادلة رقم (04) نجد:

$$\sum e_i{}^2 = \sum y_i{}^2 - \hat{B}_1 \sum x_i\, y_i \cdots\cdots \quad (06)$$

ويعبر عن σ^2بالشكل التالي:

$$\sigma^2 = \frac{\sum e_i{}^2}{n-2} \quad \cdots\cdots \quad (07)$$

وبتعويض المعادلة رقم (06) في المعادلة رقم (07) نجد:

$$\sigma^2 = \frac{\sum y_i{}^2 - \hat{B}_1 \sum x_i y_i}{n-2}$$

ويعني ذلك أن تباين أخطاء العينة تمثل النسبة بين مجموع مربعات انحرافات القيم المشاهدة عن خط انحدار العينة إلى درجة الحرية للخطأ.

وإذا كان يرمز إلى التقدير الخطي غير المتحيز لتباين الخطأ بالرمز $(S_e{}^2)$ فإن صيغته التقديرية تكتب بالشكل التالي:

$$\hat{\sigma}_u^2 = S_e{}^2 = \frac{\sum e_i{}^2}{n-2}$$

ب-تباينات المقدرات:

-تباين المقدر $\widehat{B}_0$:

لدينا:

$$\hat{B}_0 = B_0 - \bar{x}\frac{\sum_{i=1}^n u_i(x_i-\bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2} + \bar{u} \Rightarrow \hat{B}_0 - B_0 = \bar{u} - \bar{x}\frac{\sum_{i=1}^n u_i(x_i-\bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}$$

نضع $w_i = (x_i - \bar{x})$

نجد:

$$\hat{B}_0 - B_0 = \bar{u} - \bar{x}\frac{\sum_{i=1}^n u_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u_i - \bar{x}\frac{\sum_{i=1}^n u_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i^2}$$

$$\hat{B}_0 - B_0 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \bar{x}\frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i^2}\right)u_i$$

$$E(\hat{B}_0 - B_0)^2 = E\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}u_i - \bar{x}\frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i^2}u_i\right)\right]^2 = E\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}u_i - \bar{x}\frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i^2}u_i\right)^2$$

$$E(\hat{B}_0 - B_0)^2 = E\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n^2}u_i^2 - 2\bar{x}\frac{w_i}{n\sum_{i=1}^n w_i^2}u_i^2 + \bar{x}^2\frac{w_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n w_i^2\right)}u_i^2\right)\right]$$

$$V(\hat{B}_0) = E(\hat{B}_0 - B_0)^2 = \sum_{i=1}^n E\left(\frac{1}{n^2}u_i^2 - 2\bar{x}\frac{w_i}{n\sum_{i=1}^n w_i^2}u_i^2 + \bar{x}^2\frac{w_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n w_i^2\right)^2}u_i^2\right)$$

$$V(\hat{B}_0) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n^2}E(u_i^2) - 2\bar{x}\frac{w_i}{n\sum_{i=1}^{n}w_i^2}E(u_i^2) + \bar{x}^2\frac{w_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}w_i^2\right)^2}E(u_i^2)\right)$$

$$V(\hat{B}_0) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n^2}\sigma_u^2 - 2\bar{x}\frac{w_i}{n\sum_{i=1}^{n}w_i^2}\sigma_u^2 + \bar{x}^2\frac{w_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}w_i^2\right)^2}\sigma_u^2\right)$$

وبما أن:

$$\sum_{i=1}^{n}w_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$$

ومنه

$$V(\hat{B}_0) = \left(\frac{n}{n^2} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}w_i^2}\right)\sigma_u^2 = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)\sigma_u^2$$

وعليه:

$$V(\hat{B}_0) = \hat{\sigma}_{\hat{B}_0}^2 = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)\sigma_u^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)\sigma_u^2$$

-تباين المقدر $\widehat{B}_1$:

$$\hat{B}_1 = B_1 + \bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{n}u_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \Rightarrow \hat{B}_1 - B_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}u_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$V(\hat{B}_1) = E(\hat{B}_1 - B_1)^2 = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}u_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right]^2$$

نضع $w_i = (x_i - \bar{x})$

$$V(\hat{B}_1) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}u_i w_i}{\sum_{i=1}^{n}w_i^2}\right]^2 = \frac{1}{[\sum_{i=1}^{n}w_i^2]^2}E\left[\sum_{i=1}^{n}u_i w_i\right]^2$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}u_i w_i\right]^2 = E(u_1w_1 + u_2w_2 + \cdots + u_nw_n)^2$$

$$= E(u_1^2w_1^2 + u_2^2w_2^2 + \cdots + u_n^2w_n^2 + 2u_1w_1u_2w_2 + \cdots + 2u_{n-1}w_{n-1}u_nw_n)$$

$$= w_1^2E(u_1^2) + w_2^2E(u_2^2) + \cdots + w_n^2E(u_n^2) + 2w_1w_2E(u_1u_2) + \cdots + w_{n-1}w_nE(u_{n-1}u_n)$$

ومن فرضيات النموذج:

$$E(u_iu_j) = 0 \ ,\forall(i \neq j), \qquad E(u_i)^2 = \sigma_u^2 \quad \forall i$$

نجد:

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}u_i w_i\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}E(u_iw_i)^2 = \sigma_u^2\sum_{i=1}^{n}w_i^2 + 0 = \sigma_u^2\sum_{i=1}^{n}w_i^2$$

$$V(\hat{B}_1) = \frac{\sigma_u^2 \sum_{i=1}^{n} w_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} w_i^2\right)^2} = \frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^{n} w_i^2}$$

وبتعويض w_i بقيمتها نجد:

$$V(\hat{B}_1) = \frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

وعليه يكون تباين كلا من $\hat{B}_0$، $\hat{B}_1$ بتعويض تباين الأخطاء σ_u^2 بمقدره $\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2$ كما يلي:

$$V(\hat{B}_0) = \hat{\sigma}_{\hat{B}_0}^2 = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2$$

$$V(\hat{B}_1) = \hat{\sigma}_{\hat{B}_1}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

أما الانحرافات المعيارية المقدرة لـ $\hat{B}_0$، $\hat{B}_1$ فتكتب على الترتيب:

$$\hat{\sigma}_{\hat{B}_0} = \sqrt{V(\hat{B}_0)} = \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2} = \hat{\sigma}_{\hat{u}}\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{B}_1} = \sqrt{V(\hat{B}_1)} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}} = \hat{\sigma}_u\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$$

مثال رقم(02): بالعودة إلى المثال السابق أحسب كلا من:

-تباين حد الخطأ العشوائي $\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2$؛

-تباين $\hat{B}_0$، وتباين $\hat{B}_1$ ثم الانحراف المعياري لكل منها؛

الحل:

ومن اجل حساب تباين حد الخطأ العشوائي $\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2$ نحسب أولا $\hat{Y}_i$ من المعادلة التقديرية للمثال السابق:

$$\hat{Y}_i = 12.84 + 0{,}52X_i$$

e_i^2	$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$	$\hat{Y}_i$	Y_i	x_i	القيم
16.3216	-4.04	44.04	40	60	1
21.5296	-4.64	59.64	55	90	2
15.6816	-3.96	41.96	38	56	3
104.04	-10.2	22.2	12	18	4
0.1024	0.32	34.68	35	42	5
6.76	-2.6	32.6	30	38	6
152.7696	12.36	59.64	72	90	7
30.9136	5.56	54.44	60	80	8
51.84	7.2	37.8	45	48	9
399.9584					المجموع

-حساب تباين حد الخطأ العشوائي$\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2$(البواقي):

$$\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2 = \frac{\sum {e_i}^2}{n-2} = \frac{399.9584}{9-2} = 57.137$$

-حساب تباين كل مقدر على حدى:

$$V(\hat{B}_0) = \hat{\sigma}_{\hat{B}_0}^2 = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2 = \left(\frac{1}{9} + \frac{(58)^2}{6756}\right)57.137 = 34.797$$

$$V(\hat{B}_1) = \hat{\sigma}_{\hat{B}_1}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{57.137}{6756} = 0.0084$$

-الانحرافات المعيارية للمقدرات:

$$\hat{\sigma}_{\hat{B}_0} = \sqrt{V(\hat{B}_0)} = \sqrt{34.797} = 5.898$$
$$\hat{\sigma}_{\hat{B}_1} = \sqrt{V(\hat{B}_1)} = \sqrt{0.0084} = 0.0916$$

4-تقييم المعلمات المقدرة:

تتمثل المعايير الإحصائية التي يمكن اعتمادها في تقييم معلمات النموذج المقدرة في نوعين:

- اختبار جودة الارتباط للحكم على مدى المقدرة التفسيرية للنموذج.

- اختبارات المعنوية لقياس درجة الثقة في المعلمات المقدرة من العينة كأساس جيد للوصول إلى معلمات المجتمع.

4-1-اختبار جودة الارتباط: يستخدم معامل التحديد R^2كمقياس لاختبار جودة الارتباط أو المقدرة التفسيرية للنموذج، فيعرف على أنه "النسبة المئوية من التغير الكلي في المتغير التابع(Y_i) التي يمكن تفسيرها بدلالة المتغير المستقل المدرج بالدالة محل القياس (X_i)"، كما يعرف على أنه "نسبة التغيرات في المتغير التابع التي يمكن إرجاعها إلى التغير في المتغير المستقل"، كما يعرف كذلك بأنه "معيار يوضح نسبة مساهمة المتغيرات المستقلة في تفسير التغير الحاصل في المتغير التابع".

ويتم حسابه رياضيا كما يلي:

إذا كان $Y_i = \hat{Y}_i + e_i$ فإن: $Y_i - \bar{Y} = (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + e_i$

فبتربيع طرفي المعادلة نجد:

$$\sum(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum\left[(\hat{Y}_i - \bar{Y}) + e_i)\right]^2$$

ولأن $\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})\ e_i = 0$ فإن المعادلة تصبح كما يلي:

$$\boxed{\sum(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum(\hat{Y}_i\ - \bar{Y}\ )^2 + \sum {e_i}^2}$$

حيث:

$\sum(Y_i - \bar{Y})^2$: يعبر عن مجموع مربعات الانحرافات الكلية للمتغير التابع(Total Sum of squares) والتي يرمز لها بالرمز TSS.

$\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$: تمثل مجموع مربعات الانحرافات المشروحة أو الموضحة التي تقيس تأثير المتغير المفسر على المتغير التابع (Explained Sum of Squares)ويرمز لها بالرمز ESS.

$\sum {e_i}^2$: تمثل مجموع مربعات البواقي التي تقيس تأثير المتغير العشوائي على المتغير التابع (Residual Sum of Squares) ويرمز لها بالرمز RSS.

وعليه يمكن إعادة صياغة المعادلة السابقة على الشكل التالي:

$$TSS = ESS + RSS \quad \cdots\cdots \quad (08)$$

وبقسمة طرفي المعادلة رقم (08) على الانحرافات الكلية TSS نجد:

$$\frac{ESS}{TSS} + \frac{RSS}{TSS} = 1$$

ولأن معامل التحديد R^2 هو المعيار الإحصائي الذي يقيس التغيرات التي تحدث في المتغير التابع بواسطة تغيرات المتغير المستقل(X_i) فإنه يمكن كتابة صيغته كما يلي

$$\boxed{R^2 = r^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}\ = 1 - \frac{\sum {e_i}^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}}$$

وطالما أن RSS محصور ما بين الصفر والقيمة TSS، وطبقا لقانون المربعات الصغرى فإن R^2 يكون معرف وينتمي إلى المجال التالي: $0 \leq\ R^2 \leq 1$

وعليه نميز عدة حالات:

- عندما يكون $RSS = 0$ مجموع مربعات البواقي معدوم معناه أن R^2 يأخذ أكبر قيمة له وهي الواحد مما يعني أن كل نقاط الملاحظة$(x_i، y_i)$ تقع على الخط المقدر $\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i$، عندها يكون التوفيق جيد والارتباط قوي بين المتغير التابع والمتغير المستقل.

- أما إذا كان $ESS = 0$ مجموع مربعات الانحرافات المشروحة أو الموضحة معدومة مما يعني أن

$TSS = RSS$ أي أن مجموع مربعات الانحرافات الكلية تكون ناتجة عن مجموع مربعات البواقي عندها يأخذ معامل التحديد أدنى قيمة له والتي تعادل الصـــفر لتعني بذلك أنه لا توجد أية علاقة خطية بين المتغير المستقل(X_i) والمتغير التابع (Y_i) وأن (X_i)لا تشرح تغيرات(Y_i).

ملاحظة:

يجدر التذكير أن الفرق بين معامل التحديد ومعامل الارتباط يكمن في الســببية، حيث أن معامل الارتباط يقيس العلاقة بين متغيرين بغض النظر عن الدور الذي يلعبه كل متغير التابع أو المســتقل وهو محصــور بين $(+1)$و(-1)، أما معامل التحديد فيقيس أيضــا الارتباط ولكن يأخذ بعين الاعتبار الســببية، حيث أن المتغير(X_i) هو الذي يفسر الظاهرة(Y_i).

4-1-1-جدول تحليل التباين:

يمكن رسم جدول تحليل التباين في حالة نموذج انحدار خطي بسيط كما هو مبين أدناه:

مصدر التغير	درجـــــة الحرية	مجموع المربعات	متوسط مجموع المربعات
المتغير المفسر	1	$ESS = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$	$\frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{1}$
البواقي	n-2	$RSS = \sum {e_i}^2$	$\frac{\sum {e_i}^2}{n-2}$
المجموع	n-1	$TSS = ESS + RSS$ $\sum(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum {e_i}^2$	$\neq$

مثال رقم(03): بالاعتماد على معطيات المثال السابق

-أحسب معامل التحديدR^2، ماذا تستنتج؟

-أنشئ جدول تحليل التباين.

الحل:

-حساب معامل التحديد:R^2

لدينا $R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\sum {e_i}^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$

ولدينا $\sum e_i^2 = 399.9584$ و $\bar{y} = 43$

إذن نحسب $\sum(Y_i - \bar{Y})^2$

القيم	x_i	Y_i	$\hat{Y}_i$	$(Y_i - \bar{Y})^2$
1	60	40	44.04	9
2	90	55	59.64	144
3	56	38	41.96	25
4	18	12	22.2	961
5	42	35	34.68	64
6	38	30	32.6	169
7	90	72	59.64	841
8	80	60	54.44	289
9	48	45	37.8	4
المجموع				2506

ومنه $R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\sum e_i{}^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{399.9584}{2506} = 1 - 0.1596 = 0.8404$

الاستنتاج: أن الدخل الشهري يفسر تغيرات الانفاق الشهري بنسبة 84.04% وهو يدل على جودة وقوة الارتباط بين المتغير المفسر الدخل الشهري والمتغير التابع الانفاق الشهري، وبالتالي النموذج له قدرة تفسيرية عالية.

-إنشاء جدول التحليل التباين:

مصدر التغير	درجة الحرية	مجموع المربعات	متوسط مجموع المربعات
المتغير المفسر	1	$ESS = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = 2106.0416$	$\frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{1} = 2106.0416$
البواقي	7	$RSS = \sum e_i{}^2 = 399.9584$	$\frac{\sum e_i{}^2}{\mathrm{n} - 2} = \frac{399.9584}{7} = 57.1369$
المجموع	8	$TSS = ESS + RSS$ $\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum e_i{}^2 = 2506$	$\neq$

4-2-اختبارات المعنوية: تتمثل المعايير التي يتم اعتمادها في اختبار المعنوية لأجل الوقوف على مدى الملائمة الإحصائية لمعلمات النموذج من بيانات العينة ومدى اعتمادها كأساس جيد للوصول إلى معلمات المجتمع في:

- اختبار الخطأ المعياري $\hat{\sigma}_{\hat{B}}$.
- اختبار الإحصائية t.
- اختبار الإحصائية F لتقييم المعنوية الكلية للنموذج.

4-2-1-اختبار الخطأ المعياري: يعتبر الخطأ المعياري أحد المعايير التي يمكن الاستناد عليها للحكم على مدى معنوية معلمات النموذج ومقدرتها على التفسير ودرجة تأثيرها على المتغير التابع، فنرمز له بالرمز $S_{\hat{B}}$

حيث كلما كان الخطأ المعياري لمعلمات النموذج المقدرة $\hat{B}_0$، $\hat{B}_1$ منخفض كلما ارتفعت المعنوية الإحصائية $\hat{B}_0$، $\hat{B}_1$ وكانت بذلك أساس جيد لتفسير النموذج.

أما إذا كان الخطأ المعياري مرتفع فإن ذلك يشير إلى ضعفها في تمثيل معلمات المجتمع وعدم قدرتها على شرح وتفسير تغيرات المتغير التابع.

ولاختبار معنوية مقدرات العينة $\hat{B}_0$، $\hat{B}_1$ بواسطة الخطأ المعياري يتعين استخدام الفرض العدم والفرض البديل.

الفرض العدم: $H_0: \begin{cases} B_0 = 0 \\ B_1 = 0 \end{cases}$

ضد الفرض البديل: $H_1: \begin{cases} B_0 \neq 0 \\ B_1 \neq 0 \end{cases}$

ويتم حساب قيم الخطأ المعياري لكل من $\hat{B}_0$، $\hat{B}_1$ من خلال الصيغتين التاليتين:

$$S_{\hat{B}_1} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{(n-k)\sum x_i^2}} \quad ، \quad S_{\hat{B}_0} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2 \sum x_i^2}{n(n-k)\sum x_i^2}}$$

حيث:

n: تمثل عدد المشاهدات في العينة.

k: عدد المعالم.

بعدها تتم مقارنة الخطأ المعياري لكل معلمة مقدرة بقيمتها المقدرة ونميز في هذه الحالة أكثر من احتمال.

- إذا كان الخطأ المعياري أقل من نصف القيمة المقدرة للمعلمة أي أقل من 50% من قيمة المعلمة المقدرة نرفض الفرض العدم ونقبل الفرض البديل على أن المقدرات لها معنوية إحصائية ويمكن اعتمادها كأساس جيد للوصول إلى معلمة المجتمع وأن المتغير المفسر يؤثر على المتغير التابع.

- أما إذا كان الخطأ المعياري أكبر من نصف القيمة المقدرة للمعلمة أي أكبر من 50% من قيمة المعلمة المقدرة، فإن ذلك مفاده قبول الفرض العدم ورفض الفرض البديل على أن المقدرات ليست معنوية إحصائيا ولا يمكن اعتمادها كأساس جيد لتمثيل المجتمع.

وتجدر الإشارة في هذا الإطار إلى أنه جرت العادة على كتابة الأخطاء المعيارية بين قوسين أسفل القيم المقدرة للمعلمات حتى تسهل عملية المقارنة بينهما.

4-2-2-اختبار الإحصائية t: يتم اعتماد الإحصائية t كأحد المعايير التي تقيس معنوية المعلمات ومدى تأثيرها على الظاهرة محل الدراسة على أن تكون المعلمات المقدرة موزعة توزيعا معتدلا.

$$\hat{B}_0 \rightarrow N(B_0, \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n \sum x_i^2})$$

$$\hat{B}_1 \rightarrow N(B_1, \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2})$$

وحتى يتم استخدام اختبار t في قياس معنوية المعلمات يتعين إتباع الخطوات التالية:

- تحديد قيمة "t"المحسوبة باستعمال الصيغة التالية:

$$t^* = \frac{\hat{B} - B}{\hat{\sigma}_{\hat{B}i}}$$

- تحديد قيمة "t" الجدولية من جدول توزيع ستيودنت tعند درجات حرية معينة ومستوى معنوية محدد، حيث درجة الحرية = حجم العينة – عدد المعلمات المقدرة أي$n - k$.

- القيام باختبار معنوية المعلمات المقدرة من العينة عن طريق استخدام فرض العدم والفرض البديل الخاصين بمعلمات المجتمع.

الفرض العدم: ينص على عدم وجود علاقة بين المتغيرينXوY.

أي أن $H_0: \begin{cases} B_0 = 0 \\ B_1 = 0 \end{cases}$

الفرض البديل: ينص على وجود علاقة بين المتغيرينXوY

أي أن: $H_1: \begin{cases} B_0 \neq 0 \\ B_1 \neq 0 \end{cases}$

ويتم حسابt بالنسبة لـ$\hat{B}_1$ وفق الصيغة التالية:

$$t_{\hat{B}_1} = \frac{\hat{B}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}}$$

حيث أن:

t : هو اختبار عند مستوى معنوية معين ودرجة حرية $(n - k)$علما أنn تمثل عدد المشاهدات في العينة وk عدد المعالم.

$\hat{B}_1$: تمثل القيمة التقديرية لـB_1 الحقيقية.

$\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}$: تمثل الانحراف المعياري للمقدرة$\hat{B}_1$.

ونفس الشيء بالنسبة للإحصائيةt الخاصة بالمقدرة$\hat{B}_0$:

$$t_{\hat{B}_0} = \frac{\hat{B}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}}$$

وبعد احتساب قيمة (t)للمقدرات نقارن مع قيمتها الجدولية المعطاة في الجداول الخاصة بها عند درجات حرية$(n - 2)$ ومستوى المعنوية المطلوب (5% أو 1%) لتحديد قبول أو رفض فرضية العدم.

- فإذا كانت القيمة المطلقة لـــ (t)المحسوبة أكبر من قيمة (t)الجدولية نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة على أن المعلمة المقدرة لها معنوية إحصائية وتؤثر في المتغير التابع.

- أما إذا كانت القيمة المطلقة لـــ (t)المحسوبة أقل من قيمة (t)الجدولية نقبل فرضية العدم ونرفض الفرضية البديلة على أن المعلمة المقدرة ليست لها معنوية إحصائية ولا تؤثر في المتغير التابع ويجب إزالتها من النموذج.

غير أنه تم تصميم صيغة تقريبية لاختبار"t" صالحة للاستخدام في حالة ما تكون درجة الحرية أكبر من 8 أي $n - k > 8$، فعند النظر إلى جدول توزيع "t" نجد أن قيمة t تتغير ببطء شديد بعدما تزداد درجة

الحرية عن 8، على سبيل المثال t الجدولية تساوي 2.3 عند درجة الحرية $n-k=8$ وتصبح تساوي 1.96 عند درجة حرية $n-k=\infty$ وذلك عند مستوى معنوية 5% ولا شك أن التغير من 2.3 إلى 1.96 يعتبر تغير بطيء جدا، مما يعني أن درجة الحرية لا تؤثر على قيمة t الجدولية بدرجة كبيرة بعد درجة حرية 8 ومن ثم يصبح من الممكن إهمال أثر هذا التغير دون خطأ كبير، ومن هذا المنطلق يمكن اعتبار "t" الجدولية عند جميع درجات الحرية أكبر من 8 تساوي 2 تقريبا، وفي هذه الحالة يصبح اختبار الطرفين عند مستوى معنوية 5% كما يلي:

- إذا كانت $|t^*|>2$ نرفض الفرض العدم ونقبل الفرض البديل على أن القيمة المقدرة للمعلمة لها معنوية إحصائية وتؤثر في المتغير التابع.

- أما إذا كانت $|t^*|<2$ نقبل الفرض العدم ونرفض الفرض البديل على أن القيمة المقدرة للمعلمة غير معنوية إحصائيا، ولا يمكن أن نثق فيها كأساس جيد للوصول إلى معلمة المجتمع.

4-2-2-1-بناء مجال الثقة للمعالم:

إن رفض فرضية العدم ليس معناه أن المقدر $\hat{B}_0$، $\hat{B}_1$ هي المقدرة الحقيقية لمعلمة المجتمع B_0 أو B_1 وإنما يعني أن المقدرة التي حصلنا عليها من العينة المسحوبة من المجتمع معلمته الحقيقية تختلف عن الصفر، لهذا يتم الاستعانة بمجال تنتمي إليه المعلمة يسمى مجال الثقة.

فيعرف مجال الثقة لمعالم الانحدار بأنه الحدود النهائية التي يكون من المتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بدرجة ثقة معينة، كما يمكن تعريفه على أنه مدى الثقة التي تقع ضمنها القيمة الحقيقية للمعلمة. ويمكن بناء مجالات الثقة لمعالم الانحدار B_0 و B_1 وذلك بمعرفة توزيع $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$، الذي يعطي مجالا للقيم التي تنتمي إليها معالم الانحدار الحقيقية عند مستوى معنوية. ونميز حالتين:

-الحالة الأولى: $n \leq 30$ و σ_u^2 مجهول:

ويبنى مجال الثقة في هذه الحالة كما يلي:

$$\frac{\hat{B}_0 - B_0}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}} \rightsquigarrow t_{(n-2)}$$

$$\frac{\hat{B}_1 - B_1}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}} \rightsquigarrow t_{(n-2)}$$

وعند مستوى معنوية $(\alpha\%)$ يكون مجال الثقة (1-α) % لكلا المعلمين كما يلي:

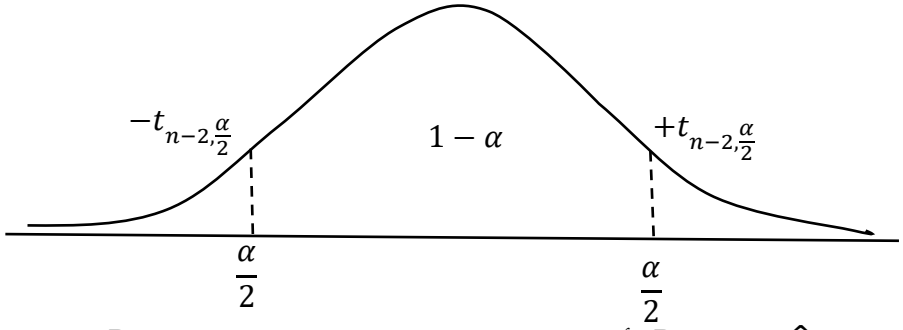
$$pr\left[-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{B}_0 - B_0}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}} \leq +t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

$$pr\left[-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{B}_1 - B_1}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}} \leq +t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

حيث:

$t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$: القيمة المقروءة الحرجة من جدول توزيع ستيودنت عند درجة حرية $n-2$ ومستوى معنوية $(\alpha\%)$ كما في الشكل التالي:

الشكل رقم (03): توزيع المعاينة لـ $\hat{B}_0$ ثنائي الطرف



بضرب كل الأطراف في $\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}$ وإضافة B_0 لأطراف المتراجحة نجد مجال الثقة للمعلمة B_0:

$$B_0 \in \left[\hat{B}_0 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}, \hat{B}_0 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}\right]$$

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد مجال الثقة للمعلمة B_1:

$$B_1 \in \left[\hat{B}_1 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}, \hat{B}_1 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}\right]$$

فإذا أخذنا على سبيل المثال:

$$B \in \left[\hat{B} - \hat{\sigma}_{\hat{B}}.\, t_{n-2,\alpha/2}\ ,\ \hat{B} + \hat{\sigma}_{\hat{B}}.\, t_{n-2,\alpha/2}\right] = 0.95$$

نقول أن هناك احتمال 95% من الثقة بأن تقع المعلمة B في هذا المجال.

-الحالة الثانية: $n > 30$ و σ_u^2 معلوم:

$$\hat{B}_0 \rightsquigarrow N\left(B_0, \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2\right)$$

$$\hat{B}_1 \rightsquigarrow N\left(B_1, \frac{\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right)$$

$$\frac{\hat{B}_0 - B_0}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}} \rightsquigarrow N(0\,,1)$$

$$\frac{\hat{B}_1 - B_1}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}} \rightsquigarrow N(0\,,1)$$

وعند مستوى معنوية $(\alpha\%)$ يكون مجال الثقة لكلا المعلمين كما يلي:

$$pr\left[-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{B}_0 - B_0}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}} \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

$$pr\left[-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{B}_1 - B_1}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}} \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

بضرب كل الأطراف في $\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}$ و $\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}$ وإضافة B_0 و B_1 لأطراف المتراجحة نجد:

$$B_0 \in \left[\hat{B}_0 - Z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}, \hat{B}_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}\right]$$

$$B_1 \in \left[\hat{B}_1 - Z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}, \hat{B}_1 + Z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}\right]$$

$Z_{\frac{\alpha}{2}}$: القيمة الحرجة للتوزيع الطبيعي الموجودة في الجدول بنسبة معنوية$(\alpha\%)$.

ملاحظة:

كلما كان مجال الثقة ضيقا كلما كان المقدر أحسن لأن الأخطاء المعيارية تكون أصغر.

-كما يمكن بناء مجال الثقة لـ $\boldsymbol{\sigma_u^2}$ كما يلي:

لدينا سابقا:

$$u_i \to \mathrm{N}(0, \sigma_u^2) \Longrightarrow \frac{1}{\sigma_u^2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 \longrightarrow \chi^2_{n-2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 = \hat{\sigma}_{\hat{u}}^2(n-2) \Longrightarrow \hat{\sigma}_{\hat{u}}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 \Longrightarrow \frac{(n-2)\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2}{\sigma_u^2} \longrightarrow \chi^2_{n-2}$$

ومنه يمكن إيجاد مجال الثقة لـ σ_u^2 عند مستوى معنوية α كما يلي:

$$pr\left[\chi^2_{n-2,\alpha/2} \le \frac{(n-2)\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2}{\sigma_u^2} \le \chi^2_{n-2,1-\alpha/2}\right]1-\alpha \Longrightarrow \frac{(n-2)\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2}{\chi^2_{n-2,1-\alpha/2}} \le \sigma_u^2 \le \frac{(n-2)\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2}{\chi^2_{n-2,\alpha/2}}$$

$\chi^2_{n-2,\alpha}$: القيمة الحرجة لتوزيع كاي مربع χ^2 بدرجة حرية $n-2$ وعند مستوى معنوية $\alpha\%$.

وعليه يكون مجال الثقة $\boldsymbol{\sigma_u^2}$ كما يلي:

$$\sigma_u^2 \in \left[\frac{(n-2)\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2}{\chi^2_{n-2,1-\alpha/2}}, \frac{(n-2)\hat{\sigma}_{\hat{u}}^2}{\chi^2_{n-2,\alpha/2}}\right]$$

مثال رقم(04): بالعودة إلى المثال السابق

-أحسب مجال الثقة للمعالم B_0، B_1، σ_u^2.

الحل:

-مجالات الثقة للمعالم:

$$B_0 \in \left[\hat{B}_0 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}, \hat{B}_0 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}\right]$$

$$B_1 \in \left[\hat{B}_1 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}, \hat{B}_1 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}\right]$$

حيث:

$t_{7,0.025}$: هي القيمة الحرجة لتوزيع ستيودنت عند مستوى معنوية 5% ودرجة الحرية $n-2=7$ والتي تساوي 2.365 من جدول توزيع ستيودنت، وبتعويض القيم في المجالات نجد:

$$B_0 \in [12.84 - 2.365(5.898), 12.84 + 2.365(5.898)\ ]$$

ومنه:

$$B_0 \in [-1.10877, 26.78877]$$

ومجال الثقة للمعلمة B_1 فهو كما يلي:

$$B_1 \in [0.52 - 2.365(0.0916), 0.52 + 2.365(0.0916)\ ]$$

أي:

$$B_1 \in [0.52 - 2.365(0.0916), 0.52 + 2.365(0.0916)\ ]$$
$$B_1 \in [0.303, 0.736]$$

4-2-3-اختبار الإحصائية F (اختبار المعنوية الكلية للنموذج):

تعرف الإحصائية F على أنها العلاقة بين مجموع مربعات الانحرافات المفسرة عن طريق المتغير المفسر ومجموع مربعات انحرافات البواقي وكل مجموع مقسوم على درجة حريته الموافقة له، حيث تستخدم لاختبار معنوية معادلة الانحدار ككل وتأخذ الصيغة الرياضية التالية:

$$F_c = \frac{\frac{\sum \hat{y}_i{}^2}{k}}{\frac{\sum e_i{}^2}{n-k-1}}$$

وفي هذا النموذج الذي يتضمن متغير مفسر واحد $k=1$ فإنه يمكن إعادة كتابة صيغة الإحصائية F كما يلي:

$$F_c = \frac{\frac{\sum \hat{y}_i}{1}}{\frac{\sum e_i{}^2}{n-2}} = \frac{\frac{R^2}{1}}{\frac{1-R^2}{n-2}} = \frac{R^2}{(1-R^2)}.(n-2)$$

وبعبارة أخرى:

$$F_c = \frac{\frac{ESS}{1}}{\frac{RSS}{n\ -\ 2}}$$

ويقوم هذا الاختبار على نوعين من الفرضيات:

- فرضية العدم: تنص فرضية العدم على عدم معنوية وجوهرية العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المفسر أي أن: $H_0: B_1 = 0$

- الفرضـية البديلة: تنص على وجود علاقة معنوية وجوهرية من الناحية الإحصـائية بين المتغير التابع والمتغير المفسر أي أن: $H_1 : B_1 \neq 0$.

وبعد احتسـاب قيمة (F)يتم مقارنتها مع (F)الجدولية المعطاة في الجداول الخاصـة بها عند مسـتوى المعنوية المطلوب (5%، 1%) ودرجة حرية $(k \ ، \ n-k-1)$للبسط والمقام.

- فإذا كانت قيمة (F)المحسوبة أكبر من قيمة (F)الجدولية نرفض فرضية العدم ونقبل فرضية البديلة أي معنوية العلاقة المقدرة.

- أما إذا كانت قيمة(F) المحسـوبة أقل من قيمة(F) الجدولية نقبل فرضـية العدم ونرفض الفرضـية البديلة على عدم معنوية معادلة الانحدار.

مثال رقم(05): بالاعتماد على معطيات المثال السابق

-اختبر المعنوية الإحصائية لمعلمات النموذج والمعنوية الكلية للنموذج عند مستوى معنوية 5%.

الحل:

-اختبار معنوية لمعالم لنموذج:

لدينا النموذج المقدر $\hat{Y}_i = 12.84 + 0{,}52X_i$

-اختبار معنوية المعلمة B_0

أن $\begin{cases} H_0 : B_0 = 0 \\ H_1 : B_0 \neq 0 \end{cases}$

نحسب

$$t_c = \frac{\hat{B}_0 - B_0}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}} \rightarrow t_{n-2}$$

وحسب الفرضية H_0 $t_c = \frac{\hat{B}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}} = \frac{12.84}{5.898} = 2.177$

وعند مسـتوى معنوية$\alpha = 5\%$ ودرجة حرية $n-2 = 9-2 = 7$ نجد القيمة الجدولية لـــtمن جدول ستيودنت $t_t = 2.3646$

وعند المقارنة نجد$|t_c| = 2.1177 < t_t = 2.3646$ وعليه نقبل الفرضية العدمية ونرفض الفرضية البديلة على أن المعلمةB_0 ليست لها معنوية إحصائية ولا تفسر النموذج المقدر.

-اختبار معنوية المعلمة B_1

أن $\begin{cases} H_0 : B_1 = 0 \\ H_1 : B_1 \neq 0 \end{cases}$

نحسب

$$t_c = \frac{\hat{B}_1 - B_1}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}} \rightarrow t_{n-2}$$

وحسب الفرضية H_0 $t_c = \frac{\hat{B}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}} = \frac{0.52}{0.0916} = 5.676$

وعند مستوى معنوية$\alpha = 5\%$ ودرجة حرية $n - 2 = 9 - 2 = 7$ القيمة الجدولية لـــ tمن جدول ستيودنت $t_t = 2.3646$

وعند المقارنة نجد$|t_c| = 5.676 > t_t = 2.3646$ وعليه نرفض الفرضية العدمية ونقبل الفرضية البديلة على أن المعلمة B_1 لها معنوية إحصائية وأن الدخل الشهري يفسر الانفاق الشهري.

-اختبار المعنوية الكلية للنموذج:

لاختبار المعنوية الكلية للنموذج نعتمد على إحصائية فيشر F.

$$\begin{cases} H_0: B_1 = 0 \\ H_1: B_1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: ESS = 0 \\ H_1: SS \neq 0 \end{cases}$$

$$F_c = \frac{\frac{ESS}{1}}{\frac{RSS}{n\ -\ 2}} \rightarrow F_{(1,n-2,\alpha\%)}$$

$ESS = TSS - RSS = 2506 - 399.9584 = 2106.04$ ومنه $TSS = 2506$

$$F_c = \frac{2106.04}{\frac{399.9584}{7}} = \frac{2106.04}{57.137} = 36.859$$

وعند مستوى معنوية$\alpha = 5\%$ ودرجة حرية1 و $n - 2 = 7$ القيمة الجدولية لـــ $F_{(1,7,5\%)}$من جدول فيشر$F_t = 5.59$

نلاحظ أن $F_c = 36.859 > F_t = 5.59$وعليه نرفض الفرضية H_0ونقبل الفرضي H_1 ونقول أن النموذج معنوي كليا.

4 – التنبؤ:

عقب تقييم نموذج الانحدار والتأكد من استيفاءه للفرضيات والمعايير الإحصائية يصبح بالإمكان استخدامه لأغراض التنبؤ، وذلك بإيجاد قيم للمتغير التابع Y بتغيير قيم المتغير المفسر.

وفي إطار النموذج البسيط نعرف قيمة X في دورة التنبؤ (Forcasting period) ونرمز لها بالرمز x_f وبافتراض أن البناء الهيكلي للمعادلة لا يتغير في المستقبل، فإنه يمكن التنبؤ بقيم المتغير التابع في فترات مستقبلية وفق الصيغة التالية:

$$Y_f = B_0 + B_1 X_f + U_f$$

غير أنه عند التنبؤ بقيمة Y_fيكون هناك مصدران لعدم الوضوح والدقة في التنبؤ هما:

- عدم معرفة المعلمتين B_1 ، B_0وبالتالي يجب الاعتماد على مقدرتي$\hat{B}_0$، $\hat{B}_1$لكي نقدر القيمةY_f وهذه القيمة هي وسط Y الموافق لـ Y_fأي:

$$E(Y_f) = B_0 + B_1 X_f$$

- كذلك الخطأU_fالذي هو عبارة عن متغير عشوائي غير مشاهد لا يسمح بالقيام بعملية التنبؤ بقيمة Y_fحتى وإن تعرفنا على قيمتي B_0، B_1.

لهذا نأخذ أولا مقدر للمقدار $E(Y_f)$ ونستعين به في التنبؤ بقيمة Y_f نفسها ثم نضع مجالا للتنبؤ بـ Y_f.

فيكتب المقدر الطبيعي بالشكل التالي:

$$\hat{Y}_f = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_f$$

وهو مقدر غير متحيز وله أصغر تباين، حيث يعرف باسم أفضل تنبؤ خطي غير متحيز أي Best Linear Unbiased Predictor (BLUP) وتأتي هذه الخاصية من كون أن مقدرتي $\hat{B}_0$، $\hat{B}_1$ لهما خاصية أفضل مقدر خطي غير متحيز.

وإذا افترضنا أن (X) مستقلة يكون تباين $\hat{Y}_f$ على الشكل التالي:

$$var(\hat{Y}_f) = var(\hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_f) =$$
$$var(\hat{B}_0) + {X_f}^2 var(\hat{B}_1) + 2X_f . cov(\hat{B}_0, \hat{B}_1)$$

وبتعويض قيم التباين لكل من $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ والتباين المشترك لهما وبعد التبسيط نجد:

$$var(\hat{Y}_f) = \sigma^2 \frac{1}{\sum {w_i}^2} \left[\frac{\sum {x_i}^2}{n} + (x_f - \bar{x}\ )^2 \right]$$

كما يمكن كتابتها على الشكل:

$$var(\hat{Y}_f) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + (\ X_f - \bar{X}\ ). \frac{1}{\sum {w_i}^2} \right]$$

وبتعويض قيمة $w_i = (x_i - \bar{x})$ نجد:

$$\boxed{var(\hat{Y}_f) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(\ X_f - \bar{X}\ )^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right]}$$

ونعرف مقدر خطأ التنبؤ بالصيغة الرياضية التالية:

$$E(\hat{U}_f) = E(Y_f - \hat{Y}_f) = 0 \quad ، \ \hat{U}_f = Y_f - \hat{Y}_f$$
$$var(\hat{U}_f) = var(Y_f - \hat{Y}_f) = var(Y_f) + var(\hat{Y}_f) \ \cdots\cdots \ (\ 09\ )$$

فإذا كانت قيمة Y_f تعتمد مباشرة على U_f فإن $\hat{Y}_f$ تعتمد على أخطاء العينة u_1، u_2 ..... u_n بواسطة المقدرتين $\hat{B}_0$، $\hat{B}_1$ وبالتالي يكون $cov(Y_f, \hat{Y}_f) = 0$

وإذا كانت X مستقلة فإن:

$$var(Y_f) = var(U_f) = \sigma^2$$

وبما أن $var(\hat{Y}_f) = \sigma^2 . \left[\frac{1}{n} + (\ X_f - \bar{X}\ ). \sum {w_i}^2 \right]$

فبالتعويض في المعادلة رقم (09) نجد أن تباين مقدر خطأ التنبؤ هو:

$$var(\hat{U}_f) = \sigma^2 + \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + (X_f - \bar{X}\ )^2 . \sum {w_i}^2 \right]$$
$$var(\hat{U}_f) = \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + (X_f - \bar{X}\ )^2 . \sum {w_i}^2 \right]$$

وإذا عرفنا $var(\ \hat{U}_f) = {\hat{\sigma}_f}^2$ فإنه بعد التعويض يصبح تباين خطأ التنبؤ يكتب كما يلي:

$${\sigma_f}^2 = \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + (X_f - \bar{X})^2 . \sum {w_i}^2 \right]$$

ومقدره هو:

$$\hat{\sigma}_f{}^2 = \hat{\sigma}_{\hat{u}}{}^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_f - \bar{X})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right]$$

كما يلاحظ أنه كلما كبر حجم العينة فإن $\hat{\sigma}_f{}^2$ تقترب من $\hat{\sigma}^2$ أي أن:

$$lim(\hat{\sigma}_f{}^2) = \hat{\sigma}_{\hat{u}}{}^2$$
$$n \to \infty$$

وطالما أن U_f وY_f موزعة توزيعا طبيعيا كذلك هو الأمر نفسه بالنسبة لـ $\hat{B}_0$ ، $\hat{B}_1$ ، $\hat{Y}_f$ والأخطاء العشوائية u_1 ، u_2 ..... u_n فإن خطأ التنبؤ $\hat{U}_f = Y_f - \hat{Y}_f$ موزع توزيع طبيعي بوسط مساو للصفر

وتباين $\sigma_f{}^2$، مقدر هذا التباين هو $\hat{\sigma}_f{}^2$ أي $Z = \frac{\hat{U}_f}{\sigma_f} \to N(0\ ,1)$

ولأن $\sigma_f{}^2$ تعتمد على القيمة غير المعلومة σ^2 فعمليا يتم تعويضها بمقدرها $\hat{\sigma}_f{}^2$ لتعطي المتغير العشوائي t كما يلي:

$\frac{\hat{U}_f}{\hat{\sigma}_f} = \frac{(Y_f - \hat{Y}_f)}{\hat{\sigma}_f} \to t_{n-2\ ,\ \alpha/2}$ ، حيث $t_{n-2\ ,\ \alpha/2}$ هي القيمة الحرجة (من الجدول) لتوزيع t

أي $pr \in \left[t_{n-2\ ,\ \alpha/2} \leq \frac{Y_f - \hat{Y}_f}{\hat{\sigma}_f} \leq t_{n-2\ ,\ \alpha/2}\right] = 1 - \alpha$

وبهذا يكون مجال الثقة للتنبؤ كما يلي:

$$Y_f \in \left[\hat{Y}_f - \hat{\sigma}_f . t_{n-2\ \ \alpha/2} \quad ، \quad \hat{Y}_f + \hat{\sigma}_f\ . t_{n-2\ ,\ \alpha/2}\right] = 1 - \alpha$$

بمعنى أن قيمة المتغير التابع التي سيتم التنبؤ بها تكون داخل المجال الموجود أعلاه بدرجة ثقة $1 - \alpha$.

مثال رقم (05): بالاعتماد على معطيات المثال السابق أوجد الانفاق الشهري المتوقع عند مستوى الدخل الشهري لـ 120 مع تحديد مجال الثقة للقيمة المتوقعة عند مستوى معنوية 5%.

-الانفاق الشهري المتوقع:

$$\hat{Y}_f = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_f = 12.84 + 0{,}52(120) = 75.24$$

-مجال الثقة للإنفاق الشهري المتوقع:

$$Y_f \in \left[\hat{Y}_f - \hat{\sigma}_f . t_{n-2\ ,\ \alpha/2} \quad ، \quad \hat{Y}_f + \hat{\sigma}_f\ . t_{n-2\ ,\ \alpha/2}\right]$$

نحسب الانحراف المعياري لخطأ التنبؤ $\hat{\sigma}_f$:

$$\hat{\sigma}_f = \sqrt{\hat{\sigma}_f^{\,2}} = \sqrt{\hat{\sigma}_{\hat{u}}^{\,2}\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_f - \bar{X})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right]} = \sqrt{57.137(1 + \frac{1}{9} + \frac{(120-58)^2}{6756})}$$

وعليه

$$\hat{\sigma}_f = 9.79$$

ومنه:

$$Y_f \in \left[75.24 - 9.79 \times 2.3646 \quad ; \quad 75.24 + 9.79 \times 2.3646\right]$$

$$Y_f \in \left[52.09 \quad ; \quad 98.39\right]$$

تحليل الانحدار الخطي المتعدد

تمهيد:

تطرقنا فيما سبق إلى الانحدار الخطي البسيط الذي يركز على دراسة العلاقة بين متغيرين أحدهما متغير مستقل (X_i) والآخر تابع(Y_i) ، غير أنه وما يمليه واقع الحياة الاقتصادية والاجتماعية على أنه أية ظاهرة تتأثر بأكثر من متغير مستقل، كان من الضروري توسيع وتمديد الانحدار السابق ليشمل الانحدار المتغير التابع(Y_i)والعديد من المتغيرات المستقلة $X_1, X_2 \ldots\ldots X_n$ بغرض دراسة وتحليل الظواهر الحقيقية المستمدة من واقعها ويسمى هذا النموذج بالانحدار الخطي المتعدد أو العام، أما البروفيسور جوتستن أطلق عليه اسم النموذج الخطي لأكثر من متغيرين .

1-طبيعة النموذج الخطي المتعدد (العام) وفرضياته:

1-1-طبيعة النموذج الخطي المتعدد (العام): يستند النموذج الخطي المتعدد على افتراض وجود علاقة خطية بين المتغير التابع (Y_i)وعدد من المتغيرات المستقلة $X_1,\ X_2\ \ldots\ldots\ X_n$ والحد العشوائي (U_i) الذي يتم إدراجه في المعادلة بغرض تقريبها من الواقع كما سبق وذكرنا في الانحدار الخطي البسيط.

ويتم التعبير عن العلاقة الخطية بالنسبة لـ nمن المشاهدات وk من المتغيرات المستقلة كما يلي:

$$Y_i = B_0 + B_1X_{1i} + B_2X_{2i} + \ldots\ldots + B_kX_{ki} + U_i$$

حيث:

Y_i: يمثل المتغير التابع للفترةi.

B_0: الحد الثابت.

X_{1i}: يمثل المتغير المستقل (المفسر) 1 للفترةi.

X_{2i} : يمثل المتغير المستقل (المفسر) 2للفترةi.

X_{ki} : يمثل المتغير المستقل kللفترةi.

$B_k \ldots\ldots B_3\ ،B_1\ ،B_0$: تمثل معلمات النموذج.

U_i: يمثل حد الخطأ (وهو عبارة عن الفرق بين النموذج الحقيقي والنموذج المقدر) هذا الخطأ غير معلوم ويبقى كذلك.

n: عدد المشاهدات.

k: عدد المتغيرات المستقلة.

ويمكن اختصار صيغة النموذج جبريا بالشكل التالي:

$Y_i = \sum_{j=1}^{k} B_j X_{ji} + U_i$، حيث تشير $j = 1\ldots\ldots k$ إلى عدد المتغيرات المستقلة و(i)إلى عدد المشاهدات المدروسة($i = 1\ldots\ldots n$).

ولأن هذه الكتابة تعد أقل تطبيقا فلتبسيطها وتسهيل التعبير عن بعض النتائج، يتم الاستعانة بالشكل المصفوفي وهذا بإعادة كتابة النموذج مشاهدة بمشاهدة كما يلي:

$$Y_1 = B_0 + B_1X_{11} + B_2X_{21} + B_3X_{31} + \ldots\ldots B_kX_{k1} + U_1$$
$$Y_2 = B_0 + B_1\ X_{12} + B_2X_{22} + B_3X_{32} + \ldots\ldots B_kX_{k2} + U_2$$

$$Y_3 = B_0 + B_1X_{13} + B_2X_{23} + B_3X_{33} + \ldots\ldots B_kX_{k3} + U_3$$
$$\vdots$$
$$Y_n = B_0 + B_1X_{1n} + B_2X_{2n} + B_3X_{3n} + \ldots\ldots B_kX_{kn} + U_n$$

فتكون الصيغة بالشكل المصفوفي التالي:

$$Y_{(n,1)} = X_{(n\ ,\ k+1\ )} . B_{(k+1\ ,\ 1\ )} + U_{(\ n\ ,\ 1\ )} \ldots\ldots\ldots (\ 10\ )$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}_{(n\ ,1)} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & & & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & & \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix}_{(\ n,k+1)}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_k \end{bmatrix}_{(k+1\ ,1)} \qquad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}_{(n\ ,1)}$$

حيث:

Y : مصفوفة مشاهدات المتغير التابع ذو بعد $(n،1)$أي nسطر وعمود واحد.

X: مصفوفة مشاهدات المتغير المستقل ذات بعد $(n،k+1)$أي nسطر و$(k+1)$ عمود حيث يمثل kعدد المتغيرات المفسرة الحقيقية بدون متغير ثابت، يحتوي عمودها الأول على قيم الواحد الصحيح الذي يمثل الحد الثابت.

B: مصفوفة المعالم المطلوب تقديرها ذو بعد $(k+1،1\ )$أي $(k+1)$سطر وعمود واحد.

U: مصفوفة الأخطاء العشوائية ذو بعد $(n\ ،\ 1)$أي nسطر وعمود واحد.

وبما أن المعادلة رقم (10) هي العلاقة الحقيقية المجهولة والمراد تقديرها باستخدام الإحصائيات المتوفرة عن المتغير التابع والمتغيرات المستقلةX_1 ،X_2.....X_kفإن الأمر يتطلب مجموعة من الفروض الأساسية يستند إليها النموذج الخطي العام.

2-1 -فرضيات النموذج الخطي العام:

كما هو الحال بالنسبة لنموذج الانحدار الخطي البسيط، فإنه لتقدير معلمات النموذج الخطي العام لابد من الارتكاز إلى مجموعة من الفروض الأساسية منها ما هو متعلق بالخطأ العشوائي والأخرى تتعلق بهيكل النموذج.

تتمثل إجمالا في:

أ-قيم المتغير المفسر يتم مشاهدتها بدون أخطاء.

ب-القيمة المتوقعة لمصفوفة حدود الخطأ تساوي المصفوفة الصفرية أي $E(U) = 0$ أو بشكل آخر

$$E(U) = E\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(U_1) \\ E(U_2) \\ \vdots \\ E(U_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

بمعنى أن القيمة المتوقعة لكل عنصر من العناصر العشوائية للمصفوفة حد الخطأ تساوي الصفر

ج-عدم وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء الداخلة في دالة الانحدار المتعدد أو انعدام التغاير بينهما ويعبر عنها رياضيا كما يلي:

$$E(U_i U_j) = 0$$

د-تباين العناصر العشوائية ثابت أي $var(U) = \sigma^2 I_n$ ويعبر عنها بشكل آخر:

$$var(U) = E(UU') = E\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}[U_1 U_2 \ \cdots \ U_n \ ]$$

$$= \begin{bmatrix} E({U_1}^2) & E(U_1U_2) \cdots & E(U_1U_n) \\ E(U_2U_1) & E(U_2U_2) \ \cdots & E(U_2U_n) \\ \vdots & & \\ E(U_uU_1) & E(U_uU_2) \ \cdots & E(U_uU_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix} =$$

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 . I_n$$

حيث:

(In): مصفوفة أحادية أو متطابقة ذات مرتبة $(n \ ، \ n)$ تسمى بمصفوفة التباين والتغاير لحد الخطأ، حيث تشكل العناصر القطرية في المصفوفة تباين حدود الخطأ والعناصر التي تقع خارج القطر انعدام التغاير فيما بينها.

ومنه تتوزع مصفوفة حدود الخطأ U توزيع طبيعي بوسط يساوي الصفر ومصفوفة تباين وتغاير $\sigma^2 \ I_n$ أي $U \rightarrow N(0 \ ، \ \sigma^2 I_n)$

هـ-$cov(X_t \ U_t) = 0$ تعني هذه الفرضية أن حد الخطأ غير مرتبط بالمتغيرات المفسرة.

و-مصفوفة البيانات X مصفوفة غير عشوائية، أي أنها تحتوي على قيم ثابتة في المعاينات المتكررة.

فضلا عن هذه الفرضيات المتعلقة بالمتغير العشوائي يجب ألا تكون هناك علاقة خطية تامة (تعدد خطي تام) بين المتغيرات المستقلة حتى تكون المصفوفة (XX') نظامية قابلة للقلب ${}^{-1}(XX')$، فينبغي أن تكون

عدد المشاهدات أكبر من عدد المعالم المراد تقديرها، ليكون عدد أعمدة المصفوفة(X) والبالغ$(K+1)$ أقل من عدد صفوفها البالغ(n) أي$k+1<n$، ونعبر عن هذا المفهوم رياضيا كما يلي:

$p(X)=rank(X)=K+1<n$ حيث تمثل$P(X)$ رتبة المصفوفة(X)، وعند تحقق الفروض أعلاه يمكن تقدير معلمات النموذج.

2-تقدير معلمات النموذج الخطي المتعدد وتباين حد الخطأ العشوائي:

على ضوء الفرضيات السابقة فإنه يتم تقدير معلمات النموذج الخطي العام المكون من$(k+1)$ معلمة غير معلومة $B_0\ ,\ B_1\ \ldots\ B_k$وتباين الخطأ σ^2باستعمال طريقة المربعات الصغرى التي تقوم على مبدأ تصغير مجموع مربعات البواقي إلى أدنى حد ممكن.

2-1-تقدير معلمات النموذج:

ويتم تقدير معلمات النموذج على النحو التالي:

$$Min\sum_{i=1}^{n}e_i^2=Min(e'e)=Min(Y-XB)'(Y-XB)=MinS\ \cdots\cdots\ (11)$$

حيث:

e: عبارة عن شعاع البواقي.

e': منقول شعاع البواقي.

وبأخذ المشتقة الجزئية الأولى للمعادلة رقم (11) بالنسبة لشعاع$\hat{B}$مع مساواتها إلى الصفر نحصل على المعادلات الطبيعية التالية:

$$\frac{\delta S}{\delta \hat{B}}=-2\ X'Y+2X'X\hat{B}=0\cdots\cdots(12)$$

ومنه:

$$\hat{B}=(X'X)^{-1}.X'Y$$

حيث:

X: تمثل مصفوفة المتغيرات المستقلة ذات بعد nسطر معبرة عن عدد المشاهدات و$(k+1)$ عمود معبر عن عدد المعلمات المراد تقديرها.

$(X'X)^{-1}$: مقلوب المصفوفة$(X'X)$.

وتتمثل الصيغة الحسابية للمصفوفة$(X'X)$كما يلي:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{ki} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{ki} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{ki} \\ \vdots & & & \cdots & \\ \sum_{i=1}^{n} X_{ki} & \sum_{i=1}^{n} X_{ki}X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{ki}X_{2i} & & \sum_{i=1}^{n} X_{ki}^2 \end{bmatrix}$$

ومقلوب المصفوفة $(X'X)$هو $(X'X)^{-1}$يحسب كما يلي:

$$(X'X)^{-1} = \frac{adj(X'X)}{|X'X|}$$

حيث:

$adj(X'X)$: مرافق المصفوفة$(X'X)$.

$|X'X|$: محدد المصفوفة$(X'X)$.

أما$X'Y$فيحسب كما يلي:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \\ \vdots \\ \hat{B}_K \end{bmatrix} \qquad X'Y = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i}Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i}Y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} X_{ki}Y_i \end{bmatrix}$$

وعليه تكتب الصيغة التقديرية للنموذج الخطي العام كما يلي:

$$Y_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{1i} + \hat{B}_2 X_{2i} + \cdots\cdots + \hat{B}_k X_{ki} + U_i$$

مثال رقم (01): لتكن البيانات الإحصائية الافتراضية الخاصة بY_i، X_1، X_2والمبينة في الجدول التالي:

X_{2i}	X_{1i}	Y_i	i
1	1	2	1
2	2	3	2
4	3	5	3
3	4	6	4
2	5	8	5
12	15	24	المجموع

المطلوب:

-أكتب الشكل المصفوفي للنموذج.

-قدر معالم النموذج.

-أكتب معادلة الانحدار الخطي المتعدد للنموذج المقدر.

الحل:

$X_{2i}Y_i$	$X_{1i}Y_i$	$X_{1i}X_{2i}$	X_{2i}^2	X_{1i}^2	X_{2i}	X_{1i}	Y_i	i
2	2	1	1	1	1	1	2	1
6	6	4	4	4	2	2	3	2
20	15	12	16	9	4	3	5	3
18	24	12	9	16	3	4	6	4
16	40	10	4	25	2	5	8	5
62	87	39	34	55	12	15	24	المجموع

لدينا عدد المتغيرات المفسرة في هذا النموذج $k = 2$ مع إضافة الحد الثابت للنموذج نتحصل على:

$k + 1 = 2 + 1 = 3$ وعدد المشاهدات $n = 5$.

-كتابة الشكل المصفوفي للنموذج:

$$Y_i = B_0 + B_1X_{1i} + B_2X_{2i} + u_i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y_1 = B_0 + B_1X_{11} + B_2X_{21} + u_1 \\ Y_2 = B_0 + B_1X_{12} + B_2X_{22} + u_2 \\ Y_3 = B_0 + B_1X_{13} + B_2X_{23} + u_3 \\ Y_4 = B_0 + B_1X_{14} + B_2X_{24} + u_4 \\ Y_5 = B_0 + B_1X_{15} + B_2X_{25} + u_5 \\ Y_6 = B_0 + B_1X_{16} + B_2X_{26} + u_6 \\ Y_7 = B_0 + B_1X_{17} + B_2X_{27} + u_7 \\ Y_8 = B_0 + B_1X_{18} + B_2X_{28} + u_8 \end{cases}$$

ومنه صيغة الشكل المصفوفي هي:

$$Y_{(8,1)} = X_{(8\ ,\ 3)}.B_{(3\ ,\ 1)} + U_{(8\ ,\ 1)}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}_{(5,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{(5,3)} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}_{(3,1)} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}_{(5,1)}$$

-تقدير معالم النموذج:

$$\hat{B} = (X'X)^{-1}.X'Y$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 & 12 \\ 15 & 55 & 39 \\ 12 & 39 & 34 \end{bmatrix}$$

نحسب مقلوب المصفوفة $(X'X)$هو $(X'X)^{-1}$كما يلي:

$$(X'X)^{-1} = \frac{adj(X'X)}{|X'X|}$$

حيث:

$adj(X'X)$: مرافق المصفوفة$(X'X)$.

$|X'X|$: محدد المصفوفة$(X'X)$.

$$adj(X'X) = \begin{bmatrix} 349 & 42 & -75 \\ 42 & 26 & 15 \\ -75 & 15 & 50 \end{bmatrix}$$

$$|X'X| = 5315$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{5315}\begin{bmatrix} 349 & 42 & -75 \\ 42 & 26 & 15 \\ -75 & 15 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.008 & -0.01 \\ 0.008 & 0.005 & 0.003 \\ -0.01 & 0.003 & 0.009 \end{bmatrix}$$

نحسب الآن

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i}Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i}Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 87 \\ 62 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = (X'X)^{-1}.X'Y = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.008 & -0.01 \\ 0.008 & 0.005 & 0.003 \\ -0.01 & 0.003 & 0.009 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 24 \\ 87 \\ 62 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.516 \\ 0.751 \\ 0.579 \end{bmatrix}$$

-كتابة معادلة الانحدار الخطي المتعدد للنموذج المقدر:

$$\hat{Y}_i = 1.516 + 0.751X_{1i} + 0.579X_{2i}$$

كما يمكن كتابة النموذج المقدر كما يلي:

$$Y_i = 1.51 + 0.75X_{1i} + 0.58X_{2i} + e_i$$

حيث $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$

1-1-2-خواص مقدرات المربعات الصغرى في نموذج الخطي العام:

انطلاقا من الشكل المصفوفي للنموذج الخطي العام يمكن حصر خواص المقدرات في:

- تتميز مقدرات المربعات الصغرى في نموذج الانحدار المتعدد بعدم التحيز كما هو الحال بالنسبة لنموذج الانحدار الخطي البسيط بحيث القيمة المتوقعة للمقدرات تعادل القيمة الحقيقية، ويمكن التعبير عن هذه الخاصية رياضيا على النحو التالي:

$$E(\hat{B}) = E[(X'X)^{-1}X'(XB + U)]$$

ولأن $E(U) = 0$

فإن $E(\hat{B}) = B + (X'X)^{-1}X'E(U) = B$

- كما تتميز بأن قيمة تباين أي عنصر من عناصر المصفوفة$(\hat{B})$ هو عبارة عن حاصل ضرب قيمة σ^2 لما يقابلها من عناصر الواقعة على القطر الرئيسي لمقلوب المصفوفة $(X'X)^{-1}$أي:

$var(\hat{B}) = \sigma^2 a_{ij}$ أما التباين المشترك بين أي اثنين من عناصر المتجه$(\hat{B})$ عبارة عن حاصل ضرب σ^2بالعنصر المقابل والواقع خارج القطر الرئيسي لمقلوب المصفوفة$(X'X)^{-1}$ ويمكن توضيح ذلك كما يلي:

$$var(\hat{B}) = E\left[(\hat{B} - E(\hat{B}))\ (\hat{B} - E(\hat{B}))\right]$$

ولأن $E(\hat{B}) = B$ يكون

$$var(\hat{B}) = E\left[(\hat{B} - B)\ (\hat{B} - B)'\right] = E[(X'X)^{-1}X'U]\ [(X'X)^{-1}X'U]$$
$$= (X'X)^{-1}X'E(U'U)X(X'X)^{-1}$$

وبما أن $E(UU') = \sigma^2.In$فإن:

$$var(\hat{B}) = (X'X)^{-1}X'.\sigma^2.I_n.X(X'X)^{-1} = (X'X)^{-1}.X'X.\sigma^2.I_n(X'X)^{-1}$$

ومنه:

$$\boxed{var(\hat{B}) = \hat{\Omega}_{\hat{B}} = \hat{\sigma}_u{}^2.(X'X)^{-1}}$$

حيث:

$\hat{\Omega}_{\hat{B}}$: تسمى مصفوفة التباين والتباين المشترك بعدها $(k+1, k+1)$وتكتب كما يلي:

$$\hat{\Omega}_{\hat{B}} = \begin{bmatrix} v(\hat{B}_0) & cov(\hat{B}_1, \hat{B}_0) & \cdots & cov(\hat{B}_k, \hat{B}_0) \\ cov(\hat{B}_0, \hat{B}_1) & v(\hat{B}_1) & \cdots & cov(\hat{B}_k, \hat{B}_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(\hat{B}_0, \hat{B}_k) & cov(\hat{B}_1, \hat{B}_k) & \cdots & v(\hat{B}_k) \end{bmatrix}$$

ويمثل قطر المصفوفة $\hat{\Omega}_{\hat{B}}$ تباين المقدرات.

2-2 -تقدير تباين حد الخطأ العشوائي $\hat{\sigma}_u^2$: بعد تقدير معلمات النموذج $\hat{B}$ غير المعلومة نقوم بتقدير تباين حد الخطأ $\hat{\sigma}_u^2$على النحو التالي:

نذكر أنه يمكن كتابة النموذج بالشكل التالي:

$$e = Y - X\hat{B}$$

وبتعويض قيم Y و$\hat{B}$ بقيمهم على التوالي نحصل على:

$$e = XB + U - X(X'X)^{-1}\ X'(XB + U) = U - X(X'X)^{-1}X'.U$$
$$= [\ I_n\ - X(X'X)^{-1}X']U$$
$$= MU$$

علما أن M مصفوفة نظامية وصماء صيغتها $M = I_n.X(X'X)^{-1}X$.

ومنه فإن مجموع مربعات البواقي تكتب كما يلي:

$$e'e = U'MU = U'[I_n - X(X'X)^{-1}X']U$$

وبأخذ الأمل الرياضي للكمية $e'e$ نتحصل على:

$$E(e'e) = E[U'(I_n - X(X'\ X)^{-1}X')]U$$

ولأن $E(U_iU_j) = 0 \quad , \quad i \neq j$ يصبح الأمل الرياضي للكمية e'e بالشكل التالي:

$$E(e'e) = \sigma^2 Tr(I_n - X(X'X)^{-1}\ X') = \sigma^2[TrIn - Tr((X'X)^{-1}X'X)]$$

حيث يشير الرمز Tr إلى أثر المصفوفة[1] مع العلم أن $Tr.I_n = n$ .1 و$Tr(AB) = Tr(BA)$ فيكون:

$$Tr\sum_{i\ =\ 1}^{n} 1 = k + 1\ Tr[X((X'X)^{-1}X')] = Tr[((X'X)^{-1}X')X] = TrI(k+1) = k+1$$

ومنه يصبح $E(e'e) = \sigma^2(n - k - 1)$

وبما أن $(e'e)$ مقدر غير متحيز لتباين ${\sigma_u}^2$، فإن تقدير ${\sigma_u}^2$ يكتب بالصيغة التالية:

$$\hat{\sigma}_u{}^2 = \frac{E(\ e'\ e\ )}{n\ -\ k\ -\ 1} = \frac{e'e}{n\ -\ k\ -\ 1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k-1} = {S_e}^2$$

مثال رقم(02): بالاعتماد على معطيات المثال السابق أحسب:

-تباين حد الخطأ العشوائي؛

-تباين المقدرات.

الحل:

e_i^2	e_i	$\hat{Y}_i$	X_{2i}	X_{1i}	Y_i	i
0.715	-0.846	2.846	1	1	2	1
1.382	-1.176	4.176	2	2	3	2
1.177	-1.085	6.085	4	3	5	3
0.066	-0.257	6.257	3	4	6	4
2.468	1.571	6.429	2	5	8	5
5.808	/	/	12	15	24	المجموع

[1] يشير الرمز Tr إلى أثر المصفوفة والذي يساوي مجموع العناصر القطرية للمصفوفة.

-حساب تباين حد الخطأ العشوائي:

لحساب تباين حد الخطأ العشوائي نحسب بواقي تقدر e_i من المعادلة $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$

لكن نحسب أولا قيم$\hat{Y}_i$ من المعادلة التالية:

$$\hat{Y}_i = 1.516 + 0.751X_{1i} + 0.579X_{2i}$$

$$\hat{\sigma_u}^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k-1} = \frac{5.808}{5-2-1} = \frac{5.808}{2} = 2.904$$

-حساب تباين المقدرات:

لإيجاد تباين المقدرات نضرب قطر المصفوفة في مقدر تباين الخطأ كما يلي:

$$var(\hat{B}) = \hat{\Omega}_{\hat{B}} = \hat{\sigma_u}^2.(X'X)^{-1} = 2.904\begin{bmatrix} 0.06 & 0.008 & -0.01 \\ 0.008 & 0.005 & 0.003 \\ -0.01 & 0.003 & 0.009 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.174 & 0.023 & -0.029 \\ 0.023 & 0.014 & 0.008 \\ -0.029 & 0.008 & 0.026 \end{bmatrix}$$

ومنه تمثل عناصر قطر المصفوفة تباين المقدرات كما يلي:

$$\hat{\sigma}_{\hat{B}_2} = 0.026\ ,\hat{\sigma}_{\hat{B}_1} = 0.014\ \ ,\ \hat{\sigma}_{\hat{B}_0} = 0.174$$

3-تقييم النموذج الخطي المتعدد:

كما هو الشأن بالنسبة لنموذج الانحدار الخطي البسيط، بعد تقدير معلمات النموذج وتباين حد الخطأ تأتي المرحلة تقييم النموذج أي قياس مدى قدرة المتغيرات التي يتضمنها النموذج في تفسير تغيرات المتغير التابع المعبر عن الظاهرة محل الدراسة، حيث يتم استخدام نوعين من الاختبارات:

- اختبار جودة الارتباط؛
- اختبارات المعنوية.

3-1-اختبار جودة الارتباط: من أجل تقييم النموذج المتحصل عليه بعد تقدير معلماته، وكما هو الحال بالنسبة للنموذج الخطي البسيط، فإنه يتم استخدام اختبار جودة الارتباط اعتمادا على المؤشر السابق الذكر معامل التحديدR^2 الذي يقيس مدى ارتباط المتغير التابع بالمتغيرات المفسرة، حيث توصلنا إلى صيغته الرياضية والتي كانت على الشكل التالي:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

ولأن:

- مجموع مربعات الانحرافات الكليةTSS في نموذج الانحدار الخطي المتعدد تكتب كما يلي:

$$TSS = \sum Y_i^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2 = Y'Y - n\bar{Y}^2$$

- ومجموع مربعات انحرافات التي يمكن تفسيرها بواسطة المتغيرات المفسرة ESSفي نموذج الانحدار المتعدد تكتب على الشكل التالي:

$$ESS = \sum \hat{Y}_i^2 = \sum Y_i - \sum e_i^2 = Y'Y - n\bar{Y}^2 - e'e = Y'Y - e'e - n\bar{Y}^2$$

$$= \hat{B}'X'Y - n\bar{Y}^2$$

- أما مجموع مربعات البواقي RSS فتكون كما يلي:

$$RSS = \sum e_i{}^2 = e'e$$

وبتعويض قيم ESS و TSS في صيغة R^2 نجد:

$$R^2 = \frac{\hat{B}'X'Y - n\bar{Y}^{\,2}}{Y'Y - n\bar{Y}^2} = \frac{\hat{B}'X'X\hat{B} - n\bar{Y}^2}{Y'Y - n\bar{Y}^2}$$

وحسب التجربة تبين أن هذا المؤشر لا يمكن الاعتماد عليه في نموذج يتضمن أكثر من متغير مفسر، وذلك لأنه يرتفع دوما بارتفاع عدد المتغيرات المستقلة، وهذا بغض النظر عما إذا كانت المتغيرات تلعب دورا أم لا في النموذج أي بغض النظر من وجود علاقة سببية بين المتغيرات المستقلة والمتغير التابع أم لا، ولتلاشي هذا القصور يتم الاستعاضة بمؤشر آخر يطلق عليه بمعامل التحديد المعدل أو المصحح $\bar{R}^2$ والتي تكون صيغته على النحو التالي:

$$\bar{R}^2 = 1 - \left[\frac{(1-R^2)(n-1)}{(n-k)}\right]$$

وهذا ليقضي على كافة تساؤلات الباحثين الخاصة بأهمية زيادة عدد المتغيرات المفسرة في النموذج دون التفكير في سبب ظهورها، حيث يتميز معامل التحديد المعدل أنه يأخذ في الاعتبار عند حسابه درجات الحرية، وذلك لأن إدخال أي متغير تفسيري جديد يقلل من درجات الحرية مع ثبات حجم العينة، مما يؤثر سلبا على قيمة معامل التحديد المعدل ومن ثم يزداد الفرق بين R^2 و $\bar{R}^2$.

أما فيما يخص القيم فيمكن أن يتخذ معامل التحديد المعدل $\bar{R}^2$ قيما سالبة عند عدد معين من المتغيرات التفسيرية ففي هذه الحالة يفسر $\bar{R}^2$ على أنه يعادل الصفر، في حين معامل التحديد تبقى قيمه دائما موجبة.

مثال رقم (03): بالاعتماد على معطيات المثال السابق:

أحسب معامل التحديد المعدل $\bar{R}^2$ مع شرح النتيجة.

الحل:

لدينا $\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = RSS = 5.808$

نحسب $\sum_{i=1}^{5}(Y_i - \bar{Y})^2$

i	Y_i	$(Y_i - \bar{Y})^2$
1	2	7.84
2	3	3.24
3	5	0.04
4	6	1.44
5	8	10.24
المجموع	24	22.8

-نحسب $\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{5} Y_i}{n} = \frac{24}{5} = 4.8$

-نحسب $R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{5.808}{22.8} = 0.7807$

-نحسب $\bar{R}^2 = 1 - \left[\frac{(1-R^2)\ (n-1)}{(n-k)}\right] = 1 - \left[\frac{(1-0.7807)(5-1)}{(5-2)}\right] = 1 - \frac{0.8772}{3} = 0.7076$

الشرح:

$\bar{R}^2 = 0.7076$ يعني أن 70.76% من التغيرات التي تحدث في المتغير التابع Y_i سببها X_1 و X_2 أو بمعنى آخر أن X_1 و X_2 تفسر تغيرات المتغير التابع Y_i بنسبة 70.76%.

3-2-اختبارات المعنوية:

3-2-1-اختبار المعنوية الإحصائية لكل مقدرة على حدى: كما هو الشأن بالنسبة للنموذج الخطي البسيط، يتم اختبار المعنوية الإحصائية للمقدرات وذلك بالاعتماد على إحصائية (t) لمعرفة مدى تأثير المتغيرات المستقلة X_1 , X_2 ..... X_k على المتغير التابع (Y) في نموذج الانحدار المتعدد، حيث يقوم هذا الاختبار على نوعين من الفروض.

فرضية العدم $H_0: B_1 = B_2 = \ldots\ldots = B_k = 0$

الفرضية البديلة $H_1: B_1 \neq B_2 \neq \ldots\ldots \neq B_k \neq 0$

فبافتراض أن المتغير العشوائي (U_i) موزع توزيع طبيعي $U \to N(0, \sigma^2 I_n)$ وفي ظل الفرضيات السابقة للنموذج الخطي العام أي $\hat{B} \to N(B_j, a_{ij}\sigma^2) \quad , \quad j = 1\ldots\ldots k$

حيث:

(a_{ij}): تمثل العناصر القطرية في المصفوفة $(X'X)^{-1}$.

فإن الإحصائية (t) تكتب بالصيغة التالية:

$$t_c = \frac{\hat{B}_j - B_j}{\sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-k-1}}\sqrt{a_{ij}}}$$

وإذا كانت B_j تساوي صفر، وهذا لما تنص عليه فرضية العدم أي المتغيرات المستقلة لا تؤثر في المتغير التابع، فإن الصيغة (t) تصبح كما يلي:

$$t_c = \frac{\hat{B}_j}{\sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-k-1}}\sqrt{a_{ij}}}$$

ويتم استخدام هذا الاختبار باحتساب قيمة t ومقارنتها مع نظيرتها الجدولية:

- فإذا كانت (t) المحسوبة أكبر من قيمة (t) الجدولية، نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة على أن (B_j) لا تساوي الصفر وهذا يعني أن المتغير المستقل (X_j) يؤثر على المتغير التابع (Y_i).
- أما إذا كانت (t) المحسوبة أقل من قيمتها الجدولية فإن ذلك معناه أن المتغير التابع لا يتأثر بتغيرات المتغير المستقل وأن المتغير العشوائي (U_i) هو المصدر الوحيد للتأثير في (Y_i).

وكما هو الحال بالنسبة لنموذج الانحدار الخطي البسيط فإنه يمكن استخدام الصيغة التقريبية السابقة الذكر الخاصة باختبار t لاختبار المعنوية الإحصائية لكل مقدر على حدى.

أما فيما يخص مجال الثقة لمعلمات النموذج الخطي المتعدد فإنه يمكن إعطاءه بالصيغة التالية:

$$C.I = B_k \pm t_{\alpha/2,n-k-1}\sqrt{\frac{e'e}{n-k-1}}\sqrt{a_{ij}}$$

3-2-2-اختبار المعنوية الإحصـــائية لكل مقدرات النموذج: وكما هو الحال بالنســبة للنموذج الخطي البسيط يتم اختبار المعنوية الإحصائية لكل مقدرات النموذج في آن واحد، باستخدام اختبار الإحصائية F التي تهدف إلى قياس مدى معنوية العلاقة الخطية بين المتغيرات المستقلة $X_1, X_2 \ldots\ldots\ldots X_k$ والمتغير التابع، أي معنوية الانحدار ككل، من خلال التساؤل التالي:

يوجد على الأقل متغير مفسر معنوي؟ وكما هو الحال بالنسبة للنموذج الخطي البسيط فإنه يعتمد على نوعين من الفروض:

فرضية العدم H_0: تنص على انعدام العلاقة بين المتغيرات المستقلة $X_1, X_2 \ldots\ldots\ldots X_k$ والمتغير التابع أي: $H_0: B_1 = B_2 = \ldots\ldots = B_k = 0$

الفرضية البديلة H_1: يوجد على الأقل معامل من بين المعاملات التي يتضمنها النموذج غير معدوم.

دون الأخذ في الاعتبار الحالة التي يكون فيها الحد الثابت B_0 معدوم، وهذا لأن الذي يهم هو المتغيرات التفسيرية وأن النموذج الذي يحتوي على الحد الثابت فقط معنوي ليس له أي معنى من الناحية الاقتصادية.

وبالرجوع إلى المعادلة الأساسية لتحليل التباين:

$\sum(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum e_i{}^2$ وبالاستناد إلى الجدول الموالي الذي يبين تحليل تباين الانحدار المتعدد فإنه يمكن احتساب الإحصائية F، كما تكمن أهمية هذا الجدول في معرفة تأثير كل متغير من المتغيرات المستقلة في المتغير التابع ومن ثم اعتماد المتغيرات المؤثرة في النموذج.

الجدول رقم (02): يبين تحليل تباين الانحدار المتعدد

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	المربعات المتوسطة
المفسر	$ESS = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$	k	$\frac{ESS}{k}$
البواقي	$RSS = \sum e_i{}^2$	$n-k-1$	$\frac{RSS}{n-k-1}$
الكلي	$TSS = \sum(Y_i - \bar{Y})^2$	$n-1$	$\neq$

Source: Régis Bourbonnais, op.cit, p.66

وتعطى الصيغة الرياضية للإحصائية F كما يلي:

$$F^* = \frac{\frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{k}}{\frac{\sum e_i{}^2}{n-k-1}} = \frac{\frac{R^2}{k}}{\frac{1-R^2}{n-k-1}}$$

بعد احتساب قيمة Fتقارن مع نظيرتها الجدولية بدرجة حرية (k)و$(n-k-1)$ للبسط والمقام عند مستوى دلالة معين.

فإذا كانت قيمةFالمحتسبة أكبر من قيمتها الجدولية نرفض فرضية العدم H_0ونقبل الفرضية البديلة H_1على أن النموذج تفسيري كليا.

أما إذا كانت قيمة Fالمحتسبة أقل من قيمتها الجدولية نقبل فرضية العدم ونرفض الفرضية البديلة على أنه لا توجد أي علاقة خطية معنوية بين المتغير التابع والمتغيرات المفسرة أي مجموع مربعات الانحرافات التفسيرية معنويا تساوي الصفر.

مثال رقم (04): بالاستناد على معطيات المثال السابق

-اختبر معنوية المعالم:$\hat{B}_0$، $\hat{B}_1$، $\hat{B}_2$ عند مستوى معنوية 5%

-اختير المعنوية لكلية للنموذج عند مستوى معنوية 5%

-أنشئ مجال الثقة للمعلمات.

الحل:

اختبار المعنوية الإحصائية للمعالم:

لدينا النموذج المقدر $\hat{Y}_i = 1.516 + 0.751X_{1i} + 0.579X_{2i}$

-اختبار معنوية المعلمة B_0

أن $\begin{cases} H_0: B_0 = 0 \\ H_1: B_0 \neq 0 \end{cases}$

نحسب

$$t_c = \frac{\hat{B}_0 - B_0}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}} \rightarrow t_{n-3,\frac{\alpha}{2}}$$

وحسب الفرضية H_0 $t_c = \frac{\hat{B}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_0}} = \frac{1.516}{0.174} = 6.64$

وعند مستوى معنوية$\alpha = 5\%$ ودرجة حرية $n-3 = 5-3 = 2$ نجد القيمة الجدولية لـ $t_{2,0.025}$ من جدول ستيودنت $t_t = 4.403$

وعند المقارنة نجد$|t_c| = 6.64 > t_t = 4.403$ وعليه نقبل الفرضية البديلة ونرفض الفرضية العدمية على أن المعلمةB_0 لها معنوية إحصائية وتفسر النموذج المقدر.

-اختبار معنوية المعلمة B_1

أن $\begin{cases} H_0: B_1 = 0 \\ H_1: B_1 \neq 0 \end{cases}$

نحسب

$$t_c = \frac{\hat{B}_1 - B_1}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}} \rightarrow t_{n-3,\frac{\alpha}{2}}$$

وحسب الفرضية H_0 $t_c = \frac{\hat{B}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}} = \frac{0.751}{0.014} = 53.64$

وعند مستوى معنوية$\alpha = 5\%$ ودرجة حرية $n - 3 = 5 - 3 = 2$ القيمة الجدولية لـــ$t_{2,0.025}$ من جدول ستيودنت $t_t = 4.403$

وعند المقارنة نجد$|t_c| = 53.64 > t_t = 4.403$ وعليه نرفض الفرضـــية العدمية ونقبل الفرضـــية البديلة على أن المعلمةB_1 لها معنوية إحصائية وتفسر النموذج.

-اختبار معنوية المعلمةB_2

أن $\begin{cases} H_0: B_2 = 0 \\ H_1: B_2 \neq 0 \end{cases}$

نحسب

$$t_c = \frac{\hat{B}_2 - B_2}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_2}} \rightarrow t_{n-3,\frac{\alpha}{2}}$$

$$t_c = \frac{\hat{B}_2}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_2}} = \frac{0.579}{0.026} = 22.27$$ وحسب الفرضية H_0

وعند مستوى معنوية$\alpha = 5\%$ ودرجة حرية $n - 3 = 5 - 3 = 2$ القيمة الجدولية لـــ$t_{2,0.025}$ من جدول ستيودنت$t_t = 4.403$

وعند المقارنة نجد$|t_c| = 22.27 > t_t = 4.403$ وعليه نرفض الفرضـــية العدمية ونقبل الفرضـــية البديلة على أن المعلمةB_2 لها معنوية إحصائية وتفسر النموذج.

-اختبار المعنوية الكلية للنموذج:

لاختبار المعنوية الكلية للنموذج نعتمد على إحصائية فيشر F.

$$H_0: B_1 = B_2 = \ldots\ldots = B_k = 0:$$

$$H_1: \exists B_j \neq 0, j = 1,2$$

$$F_c = \frac{\frac{R^2}{k}}{\frac{(1 - R^2)}{(n - k - 1)}} \rightarrow F_{(1,n-2,\alpha\%)}$$

$$F_c = \frac{\frac{0.7807}{2}}{\frac{1 - 0.7807}{5 - 3}} = \frac{0.39035}{0.10965} = 3.56$$

وعند مستوى معنوية$\alpha = 5\%$ ودرجة حرية2 و$n - 3 = 2$ القيمة الجدولية لـــ $F_{(2,2,5\%)}$من جدول فيشر$F_t = 19$

نلاحظ أن $F_c = 3.56 < F_t = 19$وعليه نقبل الفرضـية H_0ونرفض الفرضـيةH_1 ونقول أن النموذج ليس معنوي كليا.

4-اختبار صلاحية النموذج لكل الفترة

4-1-اختبار استقرارية معاملات النموذج (اختبار chow):

يعد اختبار اســتقرارية معاملات النموذج chow من بين الاختبارات التي يمكن القيام بها لغرض اختبار مدى صلاحية النموذج المتحصل عليه خلال كل الفترة خاصة إذا تعلق الأمر بالبيانات في شكل سلاسل زمنية. حيث غالبا ما تطرأ أحداث سواء اقتصادية أو سياسية أو اجتماعية من شأنها أن تؤثر على معلمات النموذج ومن ثم يصــبح النموذج المتحصــل عليه غير صــالح ابتداء من النقطة الزمنية التي حدثت فيها التغيرات، فيصبح من الغير الممكن الاعتماد على نموذج واحد لتمثيل كل الفترة.

فيتم تقسيم العينة إلى قسمين واختبار إذا ما كانت معاملات النموذج خلال كل الفترة تشهد استقرار أو أن تقسـيم العينة إلى جزئين يحسـن من جودة النموذج، على أن تبقى خصـوصـية النموذج نفسـها فيما تتغير قيم المعاملات المقدرة للعينتين، ويتم هذا الاختبار على النحو التالي:

ليكن النموذج المقدر كمثال خلال فترة واحدة كما يلي:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{1i} + \hat{B}_2 X_{2i} + \hat{B}_3 X_{3i} + e_i$$

وبتقسـيم العينة إلى جزئين عند نقطة زمنية معينة تسـمى بنقطة الانعطاف، يكون النموذج المقدر خلال الفترة الأولى كما يلي:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0{}^{(1)} + \hat{B}_1{}^{(1)} X_{1i} + \hat{B}_2{}^{(1)} X_{2i} + \hat{B}_3{}^{(1)} X_{3i} + e_i$$

أما النموذج المقدر خلال الفترة الثانية يكون بالشكل التالي:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0{}^{(2)} + \hat{B}_1{}^{(2)} X_{1i} + \hat{B}_2{}^{(2)} X_{2i} + \hat{B}_3{}^{(2)} X_{3i} + e_i$$

ويقوم هذا الاختبار على فرضيتين هي:

$$H_0 = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 = \hat{B}_1{}^{(1)} = \hat{B}_1{}^{(2)} \\ \hat{B}_2 = \hat{B}_2{}^{(1)} = \hat{B}_2{}^{(2)} \\ \hat{B}_3 = \hat{B}_3{}^{(1)} = \hat{B}_3{}^{(2)} \\ \hat{B}_0 = \hat{B}_0{}^{(1)} = \hat{B}_0{}^{(2)} \end{bmatrix} \text{ الفرضية} \quad H_1 = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \neq \hat{B}_1{}^{(1)} \neq \hat{B}_1{}^{(2)} \\ \hat{B}_2 \neq \hat{B}_2{}^{(1)} \neq \hat{B}_2{}^{(2)} \\ \hat{B}_3 \neq \hat{B}_3{}^{(1)} \neq \hat{B}_3{}^{(2)} \\ \hat{B}_0 \neq \hat{B}_0{}^{(1)} \neq \hat{B}_0{}^{(2)} \end{bmatrix} \text{ ضد الفرضية}$$

ويسمى اختبار استقرارية المعاملات باختبار chow والذي يتم من خلال التساؤل التالي:

هـل يوجـد اختلاف معنوي بين مجموع مربعـات البواقيRSSعلى طول الفترة ومجموع مربعـات البواقي المحسوبة خلال الفترتين$(RSS^{(1)}، RSS^{(2)})$؟

ويمر هذا الاختبار بالمراحل التالية:

- **المرحلة الأولى:** يتم على مســتوى هذه المرحلة تقدير النموذج خلال كل الفترة وحســاب مجموع مربعات البواقيRSS.

- **المرحلة الثانية:** وفي هذه المرحلة يتم حســاب مجموع مربعات البواقي للعينتين$RSS^{(1)}$ و$RSS^{(2)}$ ليتم حساب فيشر Fisher التطبيقية بأخذ في المقام مجموع المربعات$(RSS^{(1)} + RSS^{(2)})$

وتعطى صيغة فيشر التطبيقية كما يلي:

$$F^* = \frac{\left[(RSS - (RSS^{(1)} + RSS^{(2)})\right]/ddln}{\frac{(RSS^{(1)} + RSS^{(2)})}{ddld}}$$

حيث:

$ddln$: يعبر عن درجة الحرية بالنسبة للبسط وتحسب بالشكل التالي:

$$ddln = (n - k - 1) - [(n_1 - k - 1) + (n_2 - k - 1)]$$

علما أن $n_1 + n_2 = n$

$ddld$: يعبر عن درجة الحرية بالنسبة للمقام وتحسب بالصيغة التالية:

$$ddld = (n_1 - k - 1) + (n_2 - k - 1) = n - 2(k + 1)$$

مع العلم أن n_1 تمثل حجم العينة الأولى و n_2 تمثل حجم العينة الثانية.

وبعد احتساب قيمة F التطبيقية يتم مقارنتها مع نظيرتها الجدولية، فإذا تبين أن F المحسوبة أقل من F الجدولية نقبل الفرضية H_0 على أن المعاملات معنويا مستقرة على طول الفترة ويمكن الاعتماد على النموذج في التنبؤ أو لأغراض أخرى.

وتجدر الإشارة إلى أن أغلب برامج الإعلام الآلي الخاصة بالقياس الاقتصادي، وهذا على غرار برنامج EVIEWS تتيح فرصة ايجاد نقطة الانعطاف (Break point) بسهولة كبيرة وذلك عن طريق اختيار عدة نقاط واختيار النقطة المرتبطة بأقل احتمال للخطأ.

مثال رقم(05): ليكن لدينا النموذج المقدر التالي على عينة حجمها $n = 20$:

$$\hat{Y}_i = \underset{(12.32)}{22.79} + \underset{(0.16)}{0.6}X_{1i} - \underset{(0.21)}{0.05}X_{2i} - \underset{(0.02)}{0.028}X_{3i})$$

$$R^2 = 0.804$$

$$n = 20$$

القيم التي بين القوسين هي قيم الأخطاء المعيارية.

المطلوب:

دراسة استقرارية النموذج.

الحل:

لدراسة استقرارية النموذج المقدر نتبع الخطوات التالية:

-الخطوة الأولى: تقدير النموذج على عينتين جزئيتين وحساب مجموع مربعات البواقي.

الفترة الأولى:

$$\hat{Y}_i = \underset{(11.19)}{12.54} + \underset{(0.34)}{0.53}X_{1i} - \underset{(0.42)}{0.03}X_{2i} - \underset{(0.01)}{0.015}X_{3i})$$

$$R^2 = 0.705$$

$$n_1 = 10$$

$$TSS^1 = 107.177 \quad , \quad ESS^1 = 75.56 \, , \quad RSS^1 = 31.61$$

الفترة الثانية:

$$\hat{Y}_i = \underset{(14.25)}{43.19} + \underset{(0.47)}{0.78}X_{1i} - \underset{(0.67)}{0.86}X_{2i} - \underset{(0.2)}{0.23}X_{3i})$$

$$R^2 = 0.643$$

$$n_2 = 10$$

$$TSS^2 = 71.12 \quad , \quad ESS^2 = 45.73 \, , \quad RSS^2 = 25.38$$

-**الخطوة الثانية:** حساب إحصائية فيشر

$$F^* = \frac{\left[(RSS - (RSS^{(1)} + RSS^{(2)})\right]/ddln}{\frac{(RSS^{(1)} + RSS^{(2)})}{ddld}}$$

نحسب $ddln$:

$$ddln = (n - k - 1) - [(n_1 - k - 1) + (n_2 - k - 1)]$$
$$= (20 - 3 - 1) - [(10 - 3 - 1) + (10 - 3 - 1)] = 16 - 12 = 4$$

-نحسب $ddld$

$$ddld = (n_1 - k - 1) + (n_2 - k - 1) = n \ - 2(k + 1)$$
$$= (10 - 3 - 1) + (10 - 3 - 1) = 12$$

$$F^* = \frac{\left[(RSS - (RSS^{(1)} + RSS^{(2)})\right]/ddln}{\frac{(RSS^{(1)} + RSS^{(2)})}{ddld}} = \frac{[(77.32 - (31.61 + 25.38)]/4}{\frac{(31.61 + 25.38)}{12}}$$
$$= \frac{5.08}{4.75} = 1.07$$

نلاحظ أن الإحصـــائيـة $F^* = 1.07 < F_{0.05,(4,12)} = 3.26$ وعليـه نقبـل الفرضـيـة H_0 ونقول أن المعاملات معنويا مستقرة خلال طول الفترة.

5-التنبؤ:

كما هو الحال بالنســبة لنموذج الانحدار البســيط فبعد تقدير وتقييم النموذج واختبار اســتقرارية معلماته، يصبح صـالح للتنبؤ بالقيم المسـتقبلية بإيجاد قيم للمتغير التابع بتغير قيم المتغيرات المسـتقلة. وذلك على النحو التالي:

نعتبر المعادلة المقدرة لعينة مسحوبة بحجم n كما يلي:

$$Y_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{1i} + \hat{B}_2 X_{2i} + \ldots\ldots\ldots + \hat{B}_k X_{k_i}$$

وبافتراض أن الزمن $(t + 1)$ هو الزمن الذي يتوافق مع زمن تحقيق Y_{i+1} بحيث يكون شـعاع المشـاهدات المتعلق بالمتغيرات المفسرة هو $C' = (1 \ , X_{1,i+1} \ , \ \ldots\ldots\ldots X_{k,i+1})$

وأن التنبؤ بالأمل الرياضي $E(Y_{i+1})$ لـ Y_{i+1} هو:

$$E(Y_{i+1}) = E(C'B + U_{i+1}) = B$$

فيكون $C'\hat{B}$ مقدر غير متحيز لـ $C'B$.

وعليه يكون التقدير النقطي لـ (Y_{i+1}) كما يلي:

$$\hat{Y}_{i+1} = C'\hat{B} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{1,i+1} + \hat{B}_2 X_{2,i+1} + \ldots\ldots\ldots + \hat{B}_k X_{k,i+1}$$

أما فيما يتعلق بالتنبؤ بمجال لـــ $E(Y_{i+1})$ فإن الأمر يتطلب توضـيح توزيع المقدر، حيث نذكر أولا أن: $E(C'\hat{B}) = C'B$

$$var(C'\hat{B}) = \sigma_u{}^2 C(X'X)^{-1}.C$$

وطالما أن $\hat{B}$ يتبع التوزيع الطبيعي فإن $C'\hat{B}$ هو كذلك حيث:

$$C'\hat{B} \rightarrow N(C'B, {\sigma_u}^2 C(X'X)^{-1}.C)$$

ولأن تباين المجتمع σ_u^2 مجهول فإنه يتم تعويضه بمقدره $\hat{\sigma}_u^2$ فنكتب:

$$\frac{C'\hat{B} - C'B}{\sqrt{(\hat{\sigma}_u^2 C'.(X'X)^{-1}.C}} \rightarrow t_{\alpha/2\ ,n-k-1}$$

حيث تشير α إلى درجة المخاطرة التي يتم اختيارها.

ليتم بناء مجال التنبؤ للمشاهدات Y_{i+1} بالطريقة التالية:

$$Y_{i+1} = C'B + U_{i+1} \quad ، \quad \hat{Y}_{i+1} = C'\hat{B}$$

ونعرف مصـــفوفة خطأ التنبؤ σ على أنه الفرق بين القيمة المتوقع بها $\hat{Y}_{i+1}$ والقيمة الحقيقية Y_{i+1} والذي يكتب رياضيا كما يلي:

$$\sigma = Y_{i+1} - \hat{Y}_{i+1} = C'B - C'\hat{B} - U_{i+1} = C'(B - \hat{B}) - U_{i+1}$$

أما توقعه الرياضي وتباينه فهو كالتالي:

$$E(\sigma) = C'E(B - \hat{B}) - E(U_{i+1}) = 0$$
$$var(\sigma) = E(C'(B - \hat{B}) - U_{i+1})^2 = {\sigma_u}^2(1 + C'(X'X)^{-1}.C$$

ومنه التوزيع الاحتمالي لمصفوفة أخطاء التنبؤ فهو:

$$\sigma \rightarrow N(0\ , {\sigma_u}^2(1 + C'(X'X)^{-1}.C)$$

وبتعويض ${\sigma_u}^2$ بـ $\hat{\sigma}_u^2$ تباين العينة يمكن أن نكتب الكتابة التالية:

$$t = \frac{\sigma}{\sqrt{\hat{\sigma}_u^2.(1 + C'(X'X)^{-1}.C)}} = \frac{Y_{i\ +1} - \hat{Y}_{i+1}}{\sqrt{\hat{\sigma}_u^2.(1 + C'(X'X)^{-1}.C)}}$$

وعليه يكون مجال التنبؤ لـ Y_{i+1} كما يلي:

$$Y_{i+1} \in \left[C'\hat{B} \pm t_{\alpha/2,n-k-1}.\sqrt{\hat{\sigma}_u^2.(1 + C'(X'X)^{-1}.C)}\right]$$

حيث:

C': مصفوفة المتغيرات المفسرة المستقبلية $(1, X_{1,i+1}\ ,\ \ldots\ldots X_{k,i+1})$

C: منقول مصفوفة المتغيرات المفسرة المستقبلية.

مثال رقم(06): بالاعتماد على معطيات المثال السابق لـ Y من أجل المشاهدة $i = 6$ علما أن $X_{16} = 7$

$X_{26} = 6$

-أوجد القيمة التنبئية لـ Y

-أوجد مجال الثقة لهذه القيمة التنبئية.

الحل:

-إيجاد القيمة التنبئية:

$$\hat{Y}_{5+1} = \hat{Y}_6 = B_0 + B_1X_{16} + B_2X_{26} = 1.516 + 0.751 \times 7 + 0.579 \times 6 = 10.247$$

-إيجاد مجال الثقة للقيمة التنبئية:

$$Y_{i+1} \in \left[\hat{Y}_{i+1} \pm t_{\alpha/2,n-k-1}.\sqrt{\hat{\sigma}_u^2.(1 + C'(X'X)^{-1}.C)}\right]$$

نحسب $(C'(X'X)^{-1}.C)$

$$(C'(X'X)^{-1}.C) = (1 \quad 7 \quad 6)\begin{bmatrix} 0.06 & 0.008 & -0.01 \\ 0.008 & 0.005 & 0.003 \\ -0.01 & 0.003 & 0.009 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = 0.873$$

ومن جدول توزيع ستيودنت $t_{\alpha/2,n-k-1} = t_{0.025,n-k-1} = t_{0.025,2} = 4.303$

ولدينا $\hat{\sigma}_u^2 = 2.904$ومنه:

$$Y_{5+1} \in \left[10.247 - 4.303.\sqrt{2.904.(1 + 0.873)}, 10.247 + 4.303.\sqrt{2.904.(1 + 0.873)}\right]$$

ومنه مجال الثقة هو: $Y_6 \in [-0.21\ ,\ 20.28]$

مشاكل القياس الاقتصادي

تمهيد:

يواجه باحث القياس الاقتصادي عدة مشاكل قياسية تكون نتيجة انتفاء الفروض المستند إليها النموذج بحيث تلقي بضلالها الكثيفة على مقدرات النموذج، فتفقدها بعض من خصائصها الجوهرية لتؤدي بذلك إلى عدم صلاحية النموذج للاستعمال.

فقد يتعرض النموذج إلى مشكلة قياسية تكون متولدة عن طبيعة المتغيرات الاقتصادية التي غالبا ما ترتبط ببعضها بقدر أو بآخر، فإذا ارتفعت حدة الارتباط بين المتغيرات المستقلة المستخدمة في نموذج الانحدار، فإن ذلك يؤدي إلى ظهور ما يسمى بمشكلة الارتباط الخطي المتعدد التي تؤثر على كفاية مقدرات النموذج وتؤدي إلى العصف بطريقة المربعات الصغرى العادية وانهيارها.

أما إذا انتفى فرض انعدام التغاير لحدود الخطأ العشوائي، فإن ذلك يؤدي إلى ظهور مشكلة قياسية أخرى تسمى بالارتباط الذاتي بين الأخطاء، والتي تحدث في الدراسات التي تعتمد على بيانات السلاسل الزمنية المرتبطة ببعضها، كما تشيع مشكلة قياسية أخرى تتمثل في انتفاء فرض ثبات التباين الذي يؤدي إلى ظهور مشكلة قياسية تسمى اختلاف التباين، وتحدث عادة في الدراسات التي تعتمد على البيانات المقطعية الممثلة لوحدات اقتصادية متراوحة الأحجام، وتؤثر هاتان المشكلتان على مقدرات المربعات الصغرى مما يؤدي إلى انعدام كفاءتهم، ومن ثم يتحتم البحث عن طرق قياس أخرى لغرض الحصول على مقدرات أفضل.

لهذا ارتأينا أن نخصص هذا الفصل لدراسة والتعرف على مشاكل القياس الاقتصادي وكيفية الكشف عنها وطرق معالجتها.

1-الارتباط الخطي المتعدد Multicollinearity

يعتبر الارتباط الخطي المتعدد Multicollinearity مصطلح مركب من Multi والتي تعني متعدد وco يقصد بها مترابط وlinearity تعني خطي، وعليه تعرف مشكلة الارتباط الخطي المتعدد أو التعدد الخطي بأنها الحالة التي يكون فيها بين اثنين أو أكثر من المتغيرات المفسرة في نموذج الانحدار ارتباط قوي، بحيث يكون من الصعب عزل تأثيراتها الفردية على المتغير التابع.

1-1-أسباب حدوث مشكلة الارتباط الخطي المتعدد

تتعدد الأسباب التي تؤدي إلى حدوث مشكلة الارتباط الخطي المتعدد في النموذج ويمكن حصرها في:

أ-ميول بعض المتغيرات الاقتصادية في النموذج إلى التغير سويا وذلك لأن جميعها تتأثر بنفس العوامل.

ب-استخدام المتغيرات المتخلفة زمنيا كمتغيرات تفسيرية في النموذج.

ج-يؤدي صغر حجم العينة إلى أن يصبح عدد المشاهدات قريب من عدد المتغيرات التفسيرية، فتظهر مشكلة الارتباط الخطي المتعدد بين المتغيرات وتسمى هذه المشكلة بمشكلة صغر حجم العينة.

2-1-أنواع الارتباط الخطي المتعدد:

1-2-1-التعدد الخطي التام: ويقصد بذلك وجود علاقة خطية تامة بين قيم اثنين أو أكثر من المتغيرات المستقلة بحيث يكون المتغير المستقل تركيب خطي للمتغير أو المتغيرات المستقلة الأخرى.

ولتوضـيح هذه الحالة نفترض وجود نموذج انحدار خطي متعدد يحتوي على متغيرين مسـتقلين، حيث يمكن تقدير معلمات النموذج بالصيغة التالية:

$$\hat{B} = (X'X)^{-1}.X'Y$$

ويكون محدد المصفوفة بالشكل التالي:

$$|X'X| = \begin{vmatrix} \sum X_1^2 & \sum X_1X_2 \\ \sum X_1X_2 & \sum X_2^2 \end{vmatrix} = \left(\sum X_1^2\right)\left(\sum X_2^2\right) - (\sum X_1\,X_2)^2$$

فوجود علاقة خطية تامة بين قيم مشاهدات المتغيرين المستقلين X_1 و X_2 يمكن التعبير عنها كما يلي:

$$X_2 = pX_1$$

حيث p عبارة عن قيم ثابتة لا تساوي الصفر وبالتالي المحدد $|X'X|$ يصبح بالشكل التالي:

$$|X'X| = \left|(\sum {X_1}^2)(\sum p^2{X_1}^2) - (p\sum {X_1}^2)(p\sum {X_1}^2)\right| = p^2(\sum {X_1}^2)^2 - \ p^2(\sum {X_1}^2) = 0$$

عندها لا يمكن حساب مقلوب المصفوفة $(X'X)^{-1}$ وتسمى هذه المصفوفة بالمصفوفة الشاذة ولا يمكن حساب مقدرات طريقة المربعات الصغرى المعطاة بالقانون $\hat{B} = (X'X)^{-1}.X'Y$ فتنهار طريقة المربعات الصغرى تحت وطأة الارتباط الخطي المتعدد التام.

2-2-1-التعدد الخطي غير التام: وتتمثل ظاهرة التعدد الخطي غير التام في وجود علاقة ارتباطية بدرجات متفاوتة بين المتغيرات المستقلة، حيث تشير إلى الوضع الذي يكون فيه ارتباط خطي غير تام بين متغيرين مستقلين أو أكثر في نموذج الانحدار ويمكن توضيح ذلك بأخذ المثال التالي:

$Y_i = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + U_i$، ووجود علاقة خطية غير تامة بين المتغيرين X_1 و X_2 يمكن صياغتها كما يلي:

$$X_2 = pX_1 + V$$

حيث V متغير يمكن تمثيله بالمقدار الأتي:

$$\sum X_i\,V_i = \sum V = 0$$

وبتعويض قيمة X_2 في صيغة المحدد وبعد مجموعة من الاختصارات نحصل على:

$$|X'X| = \sum {X_1}^2 \sum V^2 + \sum X_1\,V^2$$

وبما أن $\sum {X_i}^2 = 0$، $V^2 > 0$ فإن محدد المصفوفة $(X'X)$ لا يساوي الصفر وهكذا يمكن الحصول على معكوس المصفوفة $(X'X)$.

1-2-3-الآثار المترتبة على وجود الارتباط الخطي المتعدد

من الآثار المترتبة عن وجود مشـكلة الارتباط الخطي المتعدد يتعذر تقدير معالم النموذج لوجود ارتباط خطي تام بين اثنين أو أكثر من المتغيرات المستقلة ويعود السبب في ذلك إلى استحالة إيجاد معكوس المصـفوفة $(X'X)$ وذلك لأن محدد المصـفوفة سـيكون مسـاويا للصـفر، كما تفقد مقدرات المربعات الصـغرى خاصـية هامة تتمثل في خاصـية الكفاءة أي أقل تباين ممكن، نتيجة ارتفاع تباين المصـفوفة بارتفاع درجة الارتباط بين المتغيرات المفسـرة والذي يؤدي إلى ارتفاع حجم الأخطاء المعيارية، بحيث يقدر تباين المعلمات في حالة الارتباط الخطي التام $var(B) = \infty$ وتكون $B = 0$ مما يؤدي إلى التأشير وبصورة خاطئة على عدم معنوية بعض المتغيرات المسـتقلة في النموذج، نتيجة تناقص قيم (t) المحسـوبة مقارنة مع نظيرتها الجدولية، هو الأمر الذي يقود الباحث إلى حذف المتغيرات غير المعنوية في النموذج الناتجة عن ارتباط الخطي بين المتغيرات المفسرة، مع بقاء قيمة معامل التحديد R^2 مرتفعة.

أما إذا كانت درجة ارتباط المتغيرات المسـتقلة لنموذج ما تنتمي للمجال $0 < r_{xixj} < 1$ فإن أثر التعدد الخطي يكون غير واضـح، حيث تكون في بعض الأحيان قيم المعالم المقدرة غير مسـتقرة كلما أضـفنا متغيرات مرتبطة خطيا للدالة أو كلما توسـع حجم العينة، وفي أحيان أخرى لا تتأثر المعنوية الإحصـائية للمعالم المقدرة وتبقى غير متحيزة حتى وفي حالة الارتباط القوي بين المتغيرات المفسـرة وذلك لأن خاصـية عدم التحيز لا تتأثر بالارتباط الخطي بين المتغيرات، كما يمكن أن تؤدي مشـكلة التعدد الخطي إلى تغيرات كبيرة في قيم المعالم المقدرة مثل تغير الإشارة.

1-3-اختبارات اكتشاف التعدد الخطي:

توجد العديد من الاختبارات التي يمكن اسـتخدامها لأجل اكتشـاف التعدد الخطي بين المتغيرات المفسرة أهمها:

1-3-1-اختبار Frish: يشـير هذا الاختبار إلى أنه يمكن اختبار وجود مشـكلة الارتباط الخطي المتعدد بالاعتماد على درجة الارتباط بين المتغيرات المفسـرة r_{xixj} ومعامل التحديد R^2 والخطأ المعياري S_e، إلا أنه لا يمكن الاعتماد على كل معيار من هذه المعايير الثلاثة بمفرده للحكم على وجود التعدد الخطي من عدمه.

ويتم إجراء هذا الاختبار عن طريق إيجاد معادلة الانحدار للمتغير التابع على كل متغير من المتغيرات المسـتقلة على حدى، ثم بعد ذلك نقوم بإجراء الاختبار وفق المعايير الإحصـائية المتعارف عليها ثم يتم اختيار معادلة الانحدار التي تعطي أفضل النتائج، بحيث يجب أن تتميز المعادلة المقدرة المختارة بالآتي:

أولا: أن تكون قيمة معامل التحديد R^2 الخاصة بها أفضل من مثيلتها لأي معادلة أخرى.

ثانيا: أن تكون الأخطاء المعيارية للقيم المقدرة بمعلمات الانحدار الخاصـة أقل من مثيلتها لأي معادلة مقدرة أخرى.

ولغرض توضيح هذه الطريقة نفترض المعادلة الآتية:

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots\ldots X_k)$$

والتي يمكن وصفها بالشكل التالي:

$$Y = f(X_1)$$
$$Y = f(X_2)$$
$$\vdots$$
$$Y = f(X_k)$$

وبافتراض أن أفضل النتائج المتحصل عليها من $Y = f(X_2)$ عندئذ نقوم بأخذ أفضل معادلة ونضيف عليها في كل مرة متغير جديد ونجري عليها الاختبار، فإذا تبين أن المشكلة موجودة نحذف المتغير المضاف ونضيف متغير جديد، بعد ذلك نقوم بإضافة المتغيرات المستقلة التي تم اختيارها الواحدة تلو الأخرى إلى المعادلة ثم اختبار آثار كل منها على قيمة R^2 والخطأ المعياري والقيم المقدرة لمعاملات الانحدار، ويعتبر المتغير المستقل المضاف إلى المعادلة مفيد أو زائد وفقا للحالات الآتية:

- إذا أدت إضافة المتغير المستقل في معادلة الانحدار إلى تحسن في قيمة معامل التحديد دون التأثير على قيم المعلمات فإن المتغير المستقل المضاف يعتبر مفيد.
- إذا لم تؤد إضافة المتغير المستقل في معادلة الانحدار إلى أي تحسن في قيمة معامل التحديد ولا يؤثر على معلمات الانحدار فإن هذا المتغير المضاف يعتبر زائد ولا حاجة له ويجب حذفه من المعادلة.
- أما إذا أدت إضافة المتغير المستقل إلى معادلة الانحدار إلى التأثير على إشارة المعاملات مما يجعلها غير مقبولة من الناحية الإحصائية والاقتصادية يعتبر غير مفيد ولا حاجة لوجوده في معادلة الانحدار.

1-3-2-طريقةFARRAR–GLAUBER : نشرت هذه الطريقة لأول مرة عام 1967 لمقالة بعنوان التعدد الخطي في نموذج الانحدار من قبل FARRAR–GLAUBER وتقوم هذه الطريقة على ثلاثة اختبارات أساسية وهي:

- اختبار كاي مربع chi-Square.
- اختبار الإحصاءة F.
- اختبار الإحصاءة t.

أ-اختبار كاي مربع X^2 chi-Square

يستخدم هذا الاختبار لتحديد وجود أو عدم وجود الارتباط الخطي المتعدد في النموذج المقدر، ولتطبيق هذا الاختبار يتم إتباع الخطوات التالية:

- حساب قيمة محدد الارتباط الخطي $|R|$ وأن قيمة المحدد تمثل معاملات الارتباط البسيطة بين كل متغيرين من المتغيرات المستقلة على حدى.
- بما أن معامل الارتباط بين المتغير نفسه يساوي الواحد الصحيح، فيكون القطر الرئيسي لهذا المحدد يكون عبارة عن واحد، أما بقية العناصر فسوف تكون أقل من الواحد الصحيح.

ويفترض هذا الاختبار وجود فرضيتين أساسيتين هما:

- فرضية العدم H_0: تنص على أن المتغيرات مستقلة.

- الفرضية البديلة H_1: تنص على أن المتغيرات غير مستقلة.

والصيغة الرياضية لهذا الاختبار هي:

$$\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2k + 5)\right] ln.|R|$$

حيث أن:

n: تمثل حجم العينة (عدد المشاهدات).

k: تمثل عدد المتغيرات المستقلة.

$ln|R|$: اللوغاريتم الطبيعي لمحدد مصفوفة معاملات الارتباط الجزئية الآتية:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots\cdots & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & \cdots\cdots & & r_{2k} \\ \vdots & & & & \\ r_{1k} & \cdots\cdots & & & 1 \end{bmatrix}$$

ولما كانت قيمة المحدد R تقع بين الصفر والواحد الصحيح فإن قيمة $ln|R|$ ستكون سالبة دائما.

ويمكن التمييز بين ثلاث حالات لمحدد الارتباط $|R|$ كما يلي:

1-إذا كانت قيمة المحدد $|R| = 1$ معناه عدم وجود ارتباط بين المتغيرين أي معامل الارتباط البسيط يساوي الصفر $r_{x2x1} = 0$ ، $r_{x1x2} = 0$.

2-أما إذا كانت قيمة المحدد $|R| = 0$ فإن ذلك يعني وجود ارتباط خطي تام وتكون معاملات الارتباط البسيط بين المتغيرين مساوية للواحد الصحيح.

3-وإذا كانت قيمة محدد الارتباط محصورة بين الصفر والواحد الصحيح أي $0 \leq |R| \leq 1$ معنى ذلك لابد من إتباع خطوات الاختبار لغرض معرفة الارتباط الخطي، حيث يتم احتساب قيمة X^2 المحسوبة ثم يتم مقارنتها مع نظيرتها الجدولية عند مستوى معين من المعنوية ودرجة حرية $\frac{k(k-1)}{2}$.

- ❖ فإذا كانت قيمة χ^2 المحسوبة أكبر من قيمتها الجدولية ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة على أن هناك مشكلة الارتباط الخطي المتعدد بين المتغيرات المستقلة.
- ❖ أما إذا كانت قيمة χ^2 المحسوبة أقل من قيمتها الجدولية نقبل فرضية العدم ونرفض الفرضية البديلة على أنه لا يوجد ارتباط خطي بين المتغيرات المستقلة.

مثال رقم(07): لتكن البيانات التالية خاصة بدراسة قياسية للمتغير التابع Y_i بدلالة المتغيرات المستقلة التالية X_{1i} و X_{2i} و X_{3i}.

السنة	Y_i	X_{1i}	X_{2i}	X_{3i}
1990	270	31	9	09
1991	323	33	19	10
1992	369	40	21	11
1993	446	57	23	12
1994	475	51	35	14
1995	519	67	47	15
1996	589	137	54	13
1997	671	485	57	12
1998	826	571	58	9
1999	905	1226	66	8
2000	1048	12127	75	6
2001	1238	1007	77	6
2002	1416	3195	79	5
2003	1630	2032	77	4
2004	2171	1447	72	4
2005	2422	4714	73	4
2006	3098	3384	72	4
2007	4233	2515	69	2

المطلوب:

-اختبار وجود تعدد خطي بين المتغيرات المستقلة باستعمال اختبار**FARRAR–GLAUBER.**

الحل:

لاستعمال اختبار **FARRAR–GLAUBER** لاختبار وجود التعدد الخطي بين المتغيرات نحسب أولا مصفوفة معاملات الارتباط الجزئية كما يلي:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & 1 & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.69 & 0.78 \\ 0.69 & 1 & 0.66 \\ 0.79 & 0.66 & 1 \end{bmatrix}$$

نحسب محدد هذه المصفوفة:

$$|R| = \begin{vmatrix} 1 & 0.69 & 0.78 \\ 0.69 & 1 & 0.66 \\ 0.79 & 0.66 & 1 \end{vmatrix} = 0.187$$

نحسب إحصائية FARRAR–GLAUBER

$$\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2k+5)\right] ln.|R| = \left[18 - 1 - \frac{1}{6}(2(3)+5)\right].\ln(0.187)$$
$$= 25.31$$

كما نلاحظ أن قيمة χ^2 الجدولية عند درجة حرية $\frac{k(k-1)}{2} = 3$ تساوي 7.815، وبالتالي χ^2 المحسوبة أكبر من قيمتها الجدولية، وعليه نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة على أن هناك مشكلة الارتباط الخطي المتعدد بين المتغيرات المستقلة.

ب-اختبار F:

إذا كان اختبار"كاي" يفيد فيما إذا كان هناك امتداد خطي متعدد أم لا، لكن بدون أن يحدد أي المتغيرات المستقلة تعتبر هي السبب في وجود المشكلة، لتسند المهمة لاختبار F للقيام بذلك عن طريق حساب مربع معامل الارتباط المتعدد لكل متغير تفسيري (X_j) مع بقية المتغيرات التفسيرية (k)، ثم نقوم بحساب الإحصائية F وتتمثل الصيغة الرياضية لهذا الاختبار كما يلي:

$$F_j = \frac{\frac{(R^2{}_{xj,\, x1\ ,\ x2\ ,\ ....xk})}{(k-1)}}{\frac{(1 - R^2{}_{xj,\, x1,\, x2,\, ...xk})}{(n-k-1)}}$$

وبعد احتساب قيمة F_j تقارن مع قيمتها الجدولية بدرجة حرية $(k-1)$، $(n-k-1)$ للبسط والمقام بمستوى معنوية معين بهدف قبول أو رفض إحدى الفرضيتين:

$$H_0 = R^2 x_j\ ,\ x_1 x_2\ \cdots\cdots x_k\ =\ 0$$
$$H_1 = R^2 x_j\ ,\ x_1 x_2\ \cdots\cdots\ x_k\ \neq\ 0$$

- فإذا كانت قيمة F المحسوبة أكبر من قيمتها الجدولية نرفض H_0 ونقبل H_1 على أن المتغير المستقل (X_j) لا يرتبط خطيا مع بقية المتغيرات المستقلة.

- أما إذا كانت قيمة F المحسوبة أقل من قيمتها نقبل H_0 ونرفض H_1 على أن المتغير (X_j) يرتبط خطيا مع بقية المتغيرات المستقلة، وله علاقة بمشكلة الارتباط الخطي التي يعاني منها النموذج.

- وتتكرر العملية لكل متغير من المتغيرات المستقلة في النموذج حتى يتم تشخيص المتغيرات المستقلة المتداخلة خطيا كلا على انفراد.

ج-اختبار t

يتم الاعتماد على اختبار t لتحديد المتغيرات المستقلة المسؤولة عن حصول مشكلة الارتباط الخطي المتعدد، حيث يعتمد هذا الاختبار على قيم معاملات الارتباط الجزئية بين كل اثنين من المتغيرات المستقلة بصورة منفردة بافتراض ثبات بقية المتغيرات المستقلة في النموذج، أي اختبار مدى معنوية الارتباط r_{ij} الجزئي بين كل متغيرين تفسيريين على حدى وتتمثل الصيغة الرياضية لهذا الاختبار في:

$$t_{ij} = \frac{(r_{xixj\ ,\ x1x2\ ,\ldots xk})\sqrt{n-k}}{\sqrt{(1-r^2{}_{xixj\ ,\ x1x2\ldots\ldots\ldots xk})}}$$

حيث:

$r_{ij}{}^2$: قيمة معامل الارتباط الجزئي بين المتغيرين المستقلين X_j، X_i باعتبار أن بقية المتغيرات المستقلة ثابتة، فالعلاقة بين متغيرين تحسب باستخدام معامل الارتباط البسيط والعلاقة بين أكثر من متغيرين تحسب باستخدام معامل الارتباط الجزئي:

$$r_{xz,w}{}^2 = \frac{(r_{xz} - r_{xw}.r_{zw})^2}{(1-r_{zw})(1-r_{xw})}$$

وبعد احتساب قيمة t_{ij} تقارن مع قيمتها الجدولية بدرجة حرية $(n-k)$ ومستوى معنوية معين لتحديد قبول أو رفض أحد الفرضيتين:

$$H_0: r_{x_ix_j\ ,\ x_1x_2\ \ldots\ldots\ldots xk} = 0$$
$$H_1: r_{x_ix_j\ ,\ x_1x_2\ ,\ \ldots\ldots\ldots xk} \neq 0$$

- فإذا كانت t المحسوبة أكبر من t الجدولية نرفض الفرض العدم ونقبل الفرض البديل على عدم معنوية الارتباط الجزئي بين المتغيرين X_j، X_i ومن ثم لا يكون الارتباط بين X_j، X_i هو المسؤول عن مشكلة التعدد الخطي والعكس، وتكرر العملية لكافة المتغيرات المستقلة في النموذج حتى يتم تشخيص المتغيرات المستقلة التي تسببت في حصول مشكلة التعدد الخطي.

1-3-3-اختبار كلاين KLIEN Test: يقوم هذا الاختبار على مقارنة معامل التحديد المحسوب من النموذج ذو k متغير مفسر ومعاملات الارتباط البسيطة $r_{xixj}{}^2$ بين المتغيرات المستقلة لـ $i \neq j$

$$Y_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1X_1 + \hat{B}_2X_2 + \ldots + \hat{B}_kX_k + U_i$$

- فإذا كان معامل التحديد R^2 أقل من مربع معامل الارتباط البسيط بين المتغيرات المستقلة، فهذا يعني وجود مشكلة التعدد الخطي بين المتغيرات.

1-4-طرق معالجة مشكلة التعدد الخطي

وتتمثل الطرق المقترحة لأجل معالجة مشكلة الارتباط الخطي المتعدد بين المتغيرات المفسرة التي يتضمنها النموذج في:

أ-محاولة توسيع حجم العينة بإضافة بيانات كافية عن متغيرات الظاهرة المدروسة، حيث ترتفع دقة البيانات بارتفاع حجم البيانات المستخدمة في عملية التقدير.

ب-حذف المتغير المستقل أو المتغيرات المستقلة من النموذج التي تسببت في ظهور مشكلة الارتباط الخطي المتعدد، غير أنه غالبا ما ينجر عن هذا الحل مشكلة أخرى خاصة في حالة ما تكون دراسة دالة سلوكية لظاهرة معينة، حيث أن حذف متغيرات الظاهرة يؤدي إلى الإخلال بالنظرية التي تحكم تلك الظاهرة.

ج-كما يقترح كحل لمعالجة مشكلة الارتباط الخطي، استخدام المعلومات المسبقة عن معلمة أو أكثر من معالم النموذج المقترح والتي عادة ما يحصل عليها من الدراسات والتجارب السابقة، إضافة إلى ما تمليه النظرية خلف الظاهرة المدروسة.

د-ومن السبل المقترحة الأخرى لعلاج مشكلة الارتباط الخطي تحويل المتغيرات، أي استخدام الفروق الأولى لتقدير العلاقة بدلا من استخدام قيم المتغيرات نفسها لأنه إذا كانت قيم المتغيرات مرتبطة فليس من داع أن تكون فروقها مرتبطة.

كما يمكن معالجة مشكلة الارتباط الخطي المتعدد بين المتغيرات المفسرة في النموذج باتباع الخطوات التالية:

- إجراء انحدار للمتغيرات المفسرة وتحديد المتغيرات المرتبطة فيما بينها، نفترض بأننا وجدنا أن X_1له علاقة خطية معX_2، نقوم بإسقاط واحد منهما، وليكن مثلا X_1 ونجري انحدار المتغير التابع مع المتغيرات المفسرة المتبقية وننظر إلى قيمة$\bar{R}^2$.
- القيام بنفس العملية مرة ثانية، لكن مع اسقاط المتغير المفسر X_2وننظر إلى قيمة$\bar{R}^2$.
- نقوم بمقارنة قيمة$\bar{R}^2$ في كلا النموذجين الأخيرين ونختار النموذج الذي له أكبر قيمة لـ$\bar{R}^2$.

2-مشكلة الارتباط الذاتي بين الأخطاء:

يعتبر الارتباط الذاتي أحد المشاكل التي ينجر عن وجودها في النموذج عدم الدقة في قياس العلاقات الاقتصادية عند استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية.

2-1-تعريف الارتباط الذاتي:

يشير الارتباط الذاتي إلى الحالة التي لا تتحقق فيها فرضية انعدام الارتباط الذاتي بين الأخطاء والتي تعد أحد الفرضيات التي تقوم عليها طريقة المربعات الصغرى في التقدير، بحيث تكون قيمة المتغير العشوائيU_i في أية فترة زمنية معينة مرتبطة مع قيمة أو قيم نفس المتغير العشوائي السابقة ويعبر عنه رياضيا كما يلي:

$$cov(U_i, U_{i-s}) = E(U_i, U_{i-s}) = \varphi^s . {\sigma_u}^2 \quad s < i:$$

حيث φمعلمة محصورة ما بين (+1) و (-1) أي $|\varphi| < 1$ أماσ_u^2 فهي تباين الأخطاءU_i.

2-2-أسباب حدوث مشكلة الارتباط الذاتي:

ومن الأسباب التي تؤدي إلى إحداث هذه المشكلة هي:

- الآثار الممتدة لبيانات السلاسل الزمنية: قد ينتج عن حدوث بعض العوامل العشوائية الطارئة وغير المتكررة حدوث ارتباط قيم العنصر العشوائيU_i لأكثر من فترة زمنية واحدة مثال: الحروب، الزلازل،

الفيضانات التي تمتد تأثيراتها على فعالية الاقتصاد لعدة سنوات متتالية مما يؤدي إلى حصول ارتباط بين قيم المتغير العشوائي فتكون القيم الحالية U_iتتأثر بالقيم السابقة U_{i-1}.

- حذف بعض المتغيرات المستقلة من العلاق: وذلك لعدة أسباب قد تكون لعدم توفر البيانات المناسبة عنها أو لغرض تبسيط النموذج، مما يؤدي إلى أن يتضمن المتغير العشوائي لهذه المتغيرات المرتبطة، فيصبح المتغير العشوائي لا يعبر فقط عن الخطأ العشوائي وإنما عن المتغيرات المحذوفة.

- معالجة البيانات: في بعض الحالات قد يحتاج الباحث إلى بيانات على أساس ربع سنوي، في حين البيانات المنشورة شهرية، فيقوم بتجميع البيانات كل ثلاثة شهور ويأخذ متوسط لها غير أن تمثيل بيانات ثلاثة شهور بنقطة واحدة ينطوي على نوع من الخطأ يتكرر من مشاهدة لأخرى نتيجة لعملية التقريب مما يؤدي إلى وجود ارتباط ذاتي.

- الصياغة غير الدقيقة للنموذج: ويقصد به إذا تم استخدام صيغة رياضية تختلف عن الصيغة الحقيقية للعلاقة محل التقدير مما يؤدي إلى ظهور مشكلة الارتباط الذاتي.

2-3-أشكال الارتباط الذاتي:

ونميز في هذا الإطار عدة أشكال من الارتباط الذاتي:

فقد يكون الارتباط الذاتي من الرتبة الأولى أو من الرتبة الثانية كما قد يكون من رتبة أعلى، ففي حالة الارتباط من الرتبة الأولى نجد أن كل قيمة من قيم الحد العشوائي مرتبطة بالقيمة التي تسبقها فقط ويمكن التعبير عن الارتباط الذاتي من هذه الرتبة بالصيغة الرياضية التالية:

$$U_i = PU_{i-1}$$

حيث:

U_i: قيمة الحد العشوائي في الفترة الحالية.

U_{i-1}: قيمة الحد العشوائي في الفترة السابقة.

p: معامل الارتباط الذاتي.

أما الارتباط الذاتي من الرتبة الثانية فإن كل قيمة من قيم الحد العشوائي تكون مرتبطة بالقيمتين السابقتين لها، ويمكن صياغته بالشكل الرياضي التالي:

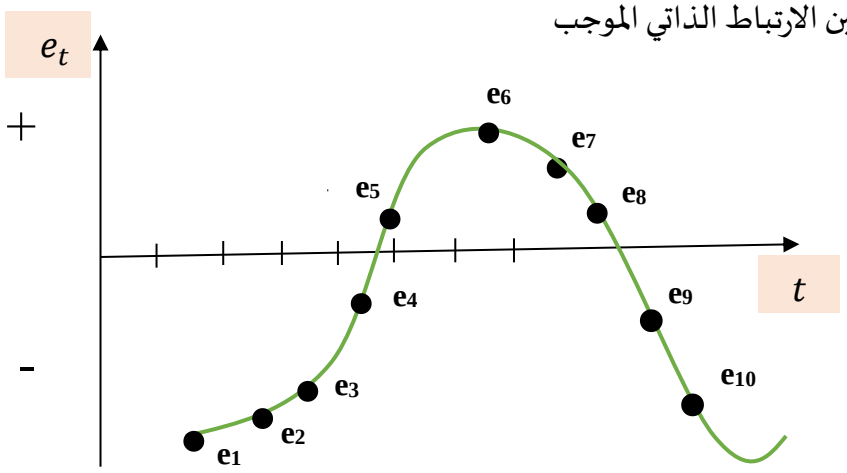
$U_i = p_1U_{i-1} + p_2U_{i-2} + W_i$، وهكذا بالنسبة للحالات الأخرى من الرتبة الأعلى.

كما قد يكون الارتباط الذاتي زمنيا يشير إلى الارتباط بين القيم المتتالية للحد العشوائي عبر فترات زمنية متعاقبة عند استخدام بيانات سلسة زمنية، أما الارتباط الذاتي القطاعي فهو يشير إلى الارتباط بين القيم المختلفة للحد العشوائي الخاصة بمفردات العينة عند نقطة زمنية معينة.

إلا أنه على مستوى هذه الدراسة سوف يتم التركيز على الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى وذلك لأن معظم الدراسات التطبيقية القياسية تتضمن هذا النوع من الأخطاء، والذي يأخذ بدوره عدة أشكال فقد يكون

موجب أو سالب أو معدوم، فيكون موجبا إذا كان معامل الارتباط أكبر من الصفر $p > 0$ والقيم المقدرة للمتغير العشوائي لها نفس الإشارة الجبرية تعبر عن الحالة الدورية، ويمكن تمثيلها بيانيا كما يلي:

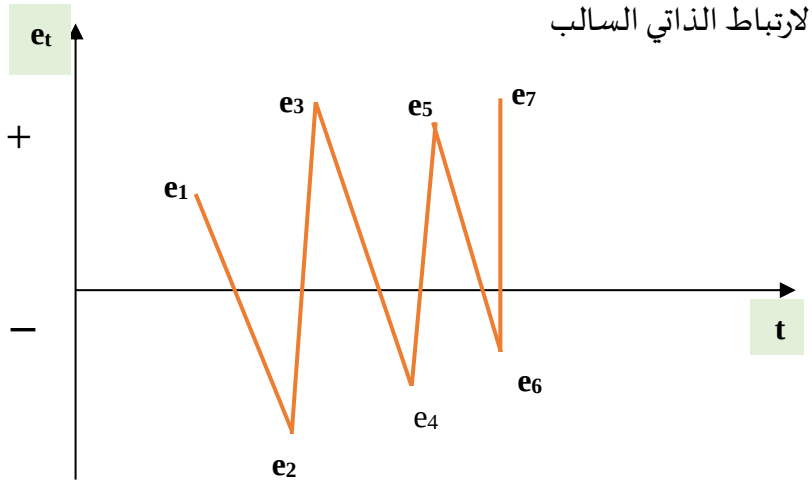
شكل رقم (02): يبين الارتباط الذاتي الموجب



Source: Régis Bourbonnais, op. cit, p.121

ويكون الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى سالب إذا كان معامل الارتباط سالب $p< 0$ والقيم المقدرة للمتغير العشوائي تتغير إشارتها على التوالي من فترة زمنية لأخرى بحيث تكون موجبة في فترة وسالبة في فترة أخرى ويمكن التعبير عنها بالتمثيل البياني التالي:

شكل رقم (03): يبين الارتباط الذاتي السالب



Source: Ibid, p. 122

أما إذا كان معامل الارتباط معدوم $p = 0$ فهذا يشير إلى انعدام الارتباط الذاتي، في حين إذا كان $p = \pm 1$ فإن الارتباط الذاتي يكون عند حده الأقصى.

2-4-النتائج المترتبة على وجود مشكلة الارتباط الذاتي

تبقى مقدرات المربعات الصغرى العادية (OLS) تتسم بالخطية وعدم التحيز إلا أنها تفقد خاصية مهمة وهي أصغر تباين حيث يكون التباين مرتفع في ظل وجود الارتباط الذاتي بين الأخطاء ، مما ينعكس على المعنوية الإحصائية لـ F وt بحيث تصبح أقل دقة وهذا لكون هذه الاختبارات تستند على التباين والخطأ المعياري مما يؤدي إلى اتخاذ قرارات واستنتاجات إحصائية خاطئة، كما يؤدي وجود هذه المشكلة إلى عدم الدقة في التنبؤ وذلك لكبر التباين، الأمر الذي يستدعي استخدام طرق تقدير أخرى كطريقة المربعات الصغرى العامة General Least Squares Method (GLS) لأنها تعطي أفضل تقدير خطي غير متحيز في حالة وجود ارتباط ذاتي شريطة أن يكون قيمة معامل الارتباط p معلومة.

2-5-طرق تقدير معامل الارتباط

هناك عدة طرق لتقدير معامل الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى(p) نذكر منها:

2-5-1-طريقة اختبار إحصائية D-W

ويتم تقدير معامل الارتباط الذاتي من خلال هذه الطريقة كما يلي:

$$D^* = 2(1 - P^*)$$

ومنه يمكن تقدير معامل الارتباط الذاتيp في الصيغة الآتية بعد إعادة ترتيب المعادلة أعلاه نحصل على:

$$P^* = (1 - 0.5D^*) \quad ، \quad P^* = \frac{(2 - D^*)}{2}$$

2-5-2-طريقة THEIL-NAGAR

يتم تقدير معامل الارتباط الذاتي وفق هذه الطريقة بالصيغة التالية:

$$\hat{P} = \frac{n^2\left[1 - \frac{D^*}{2}\right] + (k+1)}{n^2 - (k+1)^2}$$

حيث أن:

k: تمثل عدد المتغيرات المستقلة.

$k + 1$: تمثل عدد معلمات الانحدار المقدرة.

2-5-3-طريقة COHRANE – ORCUTT

ويتم تقدير معامل الارتباط الذاتي وفق هذه الطريقة من خلال تقدير قيم المتغير العشوائي بالصيغة الرياضية التالية:

$$\hat{P} = \frac{\sum e_i e_{i-1}}{\sum {e_i}^2}$$

أو عن طريق استخدام معادلة انحدار المتغير العشوائي التالي:

$$U_i = PU_{i-1}$$

2-6-اختباروجود الارتباط الذاتي:

هناك عدة طرق يمكن استخدامها لاكتشاف مشكلة الارتباط الذاتي، إلا أن أكثرها شيوعا ودقة هو:

2-6-1-اختبار داربن –واتسن Durbin-Watson : الذي يرمز إليه بالرمز (D-W) أو(d)وذلك لسهولته وإمكانية اعتماده في حالة العينات الصغيرة كما يعتمد هذا الاختبار على بواقي الانحدار المقدر، ويعد من أهم الاختبارات المستعملة لكشف الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى.

ويستند هذا الاختبار على فرضيتين أساسيتين وهما:

- فرضية العدم: التي تنص على انعدام الارتباط الذاتي $H_0: P = 0$
- الفرضية البديلة: تنص على وجود ارتباط ذاتي $H_1: P \neq 0$

وتقدر قيمة معامل دربن واتسن (D-W) بموجب الصيغة التالية:

$$D - W = \frac{\sum_{i=2}^{n}(e_i - e_{i-1})^2}{\sum e_i^2}$$

حيث عندما يؤول حجم العينة إلى ما لانهاية، أي أن $(n \to \infty)$يمكن القول أن

$\sum_{i=2}^{n} {e_i}^2 = \sum_{i=2}^{n} {e_{i-1}}^2 = \sum_{i=1}^{n} {e_i}^2$وعليه يمكن تعديل صيغة دربن واتسن أعلاه بعد النشر والاختصار لتصبح على الشكل التالي:

$$D - W = 1 - \frac{2\sum e_i e_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} {e_i}^2} + 1 = 2 - 2P = 2(1 - P)$$

وبما أن $-1 \leq p \leq 1$ فإن قيمة (D-W)تنحصر بين الصفر وأربعة حيث عندما يكون

$$p = 1 \to D - W = 0$$
$$P = 0 \to D - W = 2$$
$$P = -1 \to D - W = 4$$

ويتضح من الكتابة السابقة أنه كلما كانت قيمة (D-W) قريبة من الصفر دل ذلك على وجود ارتباط ذاتي موجب، في حين كلما اقتربت هذه القيمة من أربعة دل ذلك على وجود ارتباط ذاتي سالب، أما القيمة الوسطى لمعامل (D-W) تعني انعدام الارتباط الذاتي.

ولغرض إجراء الاختبار يستوجب إيجاد القيمة العليا والتي نرمز لها بالرمز(d_u) والقيمة الدنيا والتي نرمز لها بالرمز(d_l) الموجودة في جداول خاصة محسوبة على أساس درجات الحرة (n)و(k') عند مستوى معنوية معين لـd.

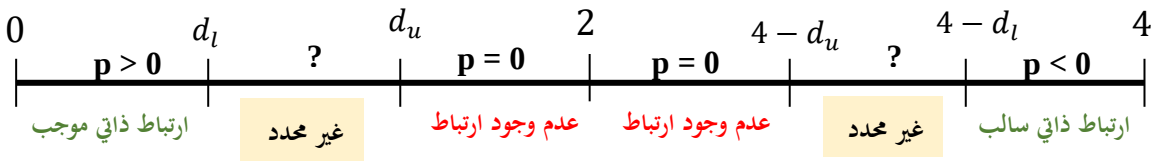
حيث:

n: تمثل عدد المشاهدات في العينة موضوع الدراسة.

k': تمثل عدد المتغيرات المستقلة أو عدد المعالم المقدرة في النموذج ماعدا الحد الثابت.

ويتم قبول أو رفض فرضية العدم كما يوضحه الرسم البياني التالي:

شكل (04): يبين التوزيع الاحتمالي لـ D-W



Source : Régis Bourbonnais, op. cit, p.123

- ❖ عندما يكون $0 < D - W < d_l$ ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة على أن هناك ارتباط ذاتي موجب.
- ❖ وعندما يكون $d_l < D - W < d_u$ أو $4 - d_u < D - W < 4 - d_l$ فتسفر نتيجة الاختبار على أن القرار غير محدد وتبقى للباحث الحرية في قبول أو رفض فرضية العدم.
- ❖ أما إذا كان $d_u < D - W < 4 - d_u$ فيترتب عن نتيجة الاختبار قبول فرضية العدم H_0 على أنه لا يوجد ارتباط ذاتي بين الأخطاء.
- ❖ وإذا كان $4 - d_l < D - W < 4$ فيكون القرار الإحصائي هو قبول الفرضية البديلة H_1 على أنه يوجد ارتباط ذاتي سالب.

2-6-2-اختبار Durbin h: من بين الانتقادات التي وجهت إلى اختبار D-W هو عدم صلاحية استعماله في حالة إذا ما كان نموذج الانحدار يتضمن متغيرات تابعة ذات فترات إبطاء كمتغيرات مستقلة وذلك راجع لارتفاع خطر نوع الخطأ، حيث يكون النموذج بالشكل التالي:

$$Y_i = B_0 + B_1 Y_{i-1} + X_i + U_i \ldots\ldots\ldots\ldots (13) U_i = PU_{i-1} + \varepsilon_i \ldots . (14)$$

ε_i: التشويش الأبيض.

وفي هذه الحالة اقترح داربن استخدام الإحصائية Durbin h ويتم استعمالها في حالة العينات الكبيرة.

ويمر هذا الاختبار بالخطوات التالية:

- تقدير المعادلة رقم (13) عن طريق طريقة المربعات الصغرى OLS والحصول على B_1 و $var(B_1)$ و U_i.
- تقدير المعادلة رقم (14) والحصول على المقدرة (p)

وتتمثل الصيغة الرياضية المستخدمة لهذا الاختبار كما يلي:

$$h = p\sqrt{\frac{n}{1 - nvar(B_1)}}$$

حيث:

$var(B_1)$: يمثل مقدر تباين المتغير التابع المتباطئ Y_{i-1} والذي يتم الحصول عليه عن طريق تربيع الأخطاء المعيارية لـ Y_{i-1}.

p: يمثل قيمة معامل الارتباط والذي يتم الحصول عليه عن طريق العلاقة بين D, p حيث

$$p = 1 - 0.5D$$

n: يعبر عن حجم العينة علما أن المشاهدة الأولى مفقودة فإذا كانت n = 36 يتم استعمال n = 35.

وبناء على ما سبق تصبح صيغة Durbin h كما يلي:

$$h = 1 - \frac{D}{2}\sqrt{\frac{n}{1 - nvar(B_1)}}$$

حيث h يتوزع توزيع طبيعي $h \to N(0,1)$

بعدها يتم اختبار الفرضية العدمية التي تنص على عدم وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء والتي يمكن رفضها إذا كانت القيمة المطلقة للإحصائية h أكبر من 1.96 عند مستوى معنوية 5% أو إذا كانت أكبر من 2.58 عند مستوى معنوية 1 %وقبول الفرضية البديلة القائلة بوجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء.

وتجدر الإشـــارة إلى أن اختبار Durbin h لا يمكن اســـتعماله إذا كانت قيمة $nvar(B_1) > 1$، حيث يصـــبح $1 - n\,var(B_1) < 0$ وبالتالي تكون لدينا قيمة ســـالبة تحت الجذر فيتعذر علينا حســـابها، عندها قدم Durbin الحل على الشكل التالي:

- القيام بتقدير المعادلة رقم (13) عن طريق طريقة المربعات الصغرى OLS والحصول على البواقي U_i

- إجراء الانحدار $U_i = a + pU_{i-1} + B_1Y_{i-1} + B_2X_i + \varepsilon_i$

- تطبيق اختبار Student لأجل اختبار المعنوية p في هذه المعادلة المساعدة.

- إذا كانت p معنويا تختلف عن الصفر نستنتج وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى.

2-3-6-اختبار Breusch-Godfrey:

يقوم هذا الاختبار على مضـــاعف لاغرانج، الذي يســـمح باختبار وجود ارتباط ذاتي من درجة أكبر من الواحد. ونموذج الانحدار الذاتي للأخطاء من الدرجة p يكتب على الشكل التالي:

$$U_i = p_1U_{i-1} + p_2U_{i-2} + \cdots + p_pU_{i-p} + \varepsilon_i$$

لإجراء هذا الاختبار يتم اتباع ثلاث خطوات:

أ-تقدير النموذج العام بطريقة المربعات الصغرى ثم حساب البواقي $\hat{u}_i$

ب-تقدير المعادلة الوسيطية التالية:

$$\hat{u}_i = B_0 + B_1X_{1i} + \cdots + B_kX_{ki} + p_1\hat{u}_{i-1} + p_2\hat{u}_{i-2} + \cdots + p_p\hat{u}_{i-p} + \varepsilon_i$$

ثم يتم حساب معامل التحديد الخاص بهذه المعادلة R^2

ج-ليتم اختبار فرضية استقلالية الأخطاء H_0:

$$H_0: p_1 = p_2 = \cdots = p_p = 0$$

وهذا بحســـاب الإحصـــائية $LM = (n-p) \times R^2$ والتي تتبع χ^2 بدرجة حرية p. إذا كان $(n-p) \times R^2$ أكبر من $\chi^2(p)$ (القيمة الحرجة لتوزيع χ^2 بنسبة معنوية α)، فإننا نرفض H_0 فرضية استقلالية الأخطاء.

2-7-معالجة مشكلة الارتباط الذاتي:

لمعالجة مشكلة الارتباط الذاتي يتعين أولا الوقوف على سبب المشكلة:

- فإذا كان سبب المشكلة هو حذف بعض المتغيرات المستقلة من النموذج فالحل يكمن في إدراج هذه المتغيرات المحذوفة ثم إعادة التقدير.
- أما إذا كان سبب المشكلة هو سوء تعيين النموذج أي الصياغة غير الدقيقة للنموذج فالحل يكون باستخدام الصيغة الرياضية الصحيحة في التقدير.
- أما إذا تبين أن أحد الأسباب السابقة ليس هو المؤدي إلى الارتباط الذاتي، فإنه يتم إتباع طرق أخرى لمعالجة هذه المشكلة أهمها:
  - ❖ طريقة التحويل.
  - ❖ طريقة التكرار.
  - ❖ طريقة الفرق العام.

2-7-1-طريقة التحويل: وتعد هذه الطريقة من أسهل الطرق المتبعة لمعالجة مشكلة الارتباط الذاتي وتسمى بطريقة كوكران – أوكارت ويمكن شرحها في الخطوات التالية:

- افتراض أن المتغير العشوائي U_i يخضع للارتباط الذاتي من الدرجة الأولى أي أن:
- $$U_i = PU_{i-1} + \varepsilon_i$$

والمتغير العشوائي ε_i يتبع افتراضات OLS للقيمة المتوقعة صفر، وثبات التباين وبدون ارتباط ذاتي.

- تحويل البيانات وذلك باستخدام التخلف الزمني للمتغير التابع والمتغير المستقل مع المتغير العشوائي، فيكتب النموذج بالشكل التالي:

$$Y_{i-1} = B_0 + B_1X_{i-1} + U_{i\ -\ 1} \ldots\ldots\ldots (\ 53\ )$$

- ضرب المعادلة(53) بمعامل الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى(p) ثم طرحها من المعادلة الأصلية للنموذج $Y_i = B_0 + B_1X_i + U_i$ فنجد:

$$Y_i - PY_{i\ -\ 1} = B_0(1-p) + B_1(X_i - PX_{i-1}) + (U_i - PU_{i-1})$$

رغم بساطة هذه الطريقة إلا أنه ما يلاحظ عنها أنها غير عملية وذلك بسبب قيمة p المجهولة، لذا فقد اقترح دربن واتسن الطريقة الثانية وهي:

2-7-2-الطريقة التكرارية: بموجب هذه الطريقة يتم التقدير بمرحلتين والتي يمكن توضيحها في الخطوات التالية:

- تقدير معلمات النموذج باستخدام طريقة المربعات الصغرى ثم حساب بواقي المربعات الصغرى e_i حيث $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ ليتم حساب قيمة معامل الارتباط الذاتي التقديري $\hat{p}$ وفق القانون التالي:

$$\hat{P} = \frac{\sum_{i=2}^{n} e_i e_{i-1}}{\sum_{t=2} e_{i-1}}$$

- بعدها يتم تحويل بيانات كل من المتغير التابع Y_i والمتغير المستقل X_i إلى القيمتين الجديدتين Y_i^* والمتغير المستقل X_i^* كالآتي:

$$Y_i^* = Y_i - pY_{i-1}$$

$X_i^* = X_i - PX_{i-1}$ لحساب البواقي الجديدة e_i^* كالاتي:

$$e_i^* = Y_i - Y_i^*$$

ثم تحسب قيمة D-W مرة أخرى بموجب الصيغة التالية:

$$D - W = \frac{\sum(e_i^* - e_{i-1}^*)^2}{\sum e_i^{*2}}$$

تقارن قيمة D-W المحسوبة مع قيمتها الجدولية لقبول أو رفض فرضية العدم.

- ففي حالة قبول H_0 يعني انعدام الارتباط الذاتي والتوقف عند هذا الحد.
- أما في حالة قبول H_1 تجرى عملية تنقية للبيانات مرة أخرى لتتابع عملية معالجة مشكلة الارتباط الذاتي بنفس الطريقة حتى يتم التخلص منها.

2-7-3-طريقة الفرق العام: وتسمى طريقة المربعات الصغرى الشاملة (GLS) وذلك تمييزا عن طريقة المربعات الصغرى العادية حيث يتم معالجة مشكلة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى وفق هذه الطريقة كما يلي:

- تقدير معامل الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى p باستخدام إحدى الطرق التقدير السابقة.
- حساب الفروق الأولى للمتغيرات التابعة والمستقلة Y_i و X_i على التوالي وذلك طبقا لطريقة الفرق العام باستخدام الصيغة التالية:

$$Y_i - Y_{i-1} = B_0(1-P) + B_1(X_i - PX_{i-1}) + U_i \quad \ldots\ldots\ldots (54)$$

على أن تحول البيانات من خلال استخدام الصيغة التالية:

$$Y_i^* = Y_i - PY_{i-1} \quad ، \quad X_i^* = X_i - PX_{i-1}$$

حيث:

Y_i^*: تمثل القيمة Y_i المحولة.

X_i^*: تمثل قيمة X_i المحولة.

غير أن استخدام الفروق بدلا من المشاهدات الأصلية يؤدي إلى فقدان مشاهدة من المشاهدات وهي المشاهدة الأولى وفي هذه الحالة يتم استخدام الصيغة التالية لتقدير هذه المشاهدة:

$$Y_i^* = \sqrt{Y_i(1-P^2)} \quad ، \quad X_i^* = \sqrt{X_i(1-P^2)}$$

وبعد التحويل يتم استخدام طريقة المربعات الصغرى في تقدير معاملات النموذج الجديد

$$Y_i^* = B_0 + B_1X_i^* + U_i$$

ليتم اختبار وجود ارتباط ذاتي باستخدام اختبار D-W، فإذا كانت النتيجة تشير إلى وجود ارتباط ذاتي فإنه يمكن تكرار استخدام الفروق الأولى للقيم المحولة X_i^*، Y_i^* ثم إجراء انحدار على البيانات المحولة وإعادة الاختبار إلى أن نتأكد من إزالة الارتباط الذاتي من النموذج.

مثال رقم (08):

بهدف دراســة العلاقة بين المتغير التابع M_iوالذي يمثل الطلب على النقود المتغير المســتقل والذي يمثل الدخل الحقيقي YR_iتم جمع البيانات حول إحدى الدول كما يلي:

المشاهدات	البيانات الأصلية	
	M_i	YR_i
1970	23.2	506.0
1971	23.1	523.3
1972	25.2	563.8
1973	26.4	594.7
1974	28.4	635.7
1975	32	688.1
1976	37.7	753.0
1977	40.6	796.3
1978	47.7	868.5
1979	52.9	935.5
1980	58.5	982.4
1981	64	1063.4
1982	75.9	1171.1
1983	94.4	1306.6
1984	131.9	1412.9
1985	126.9	1528.8
1986	155.4	1702.2
1987	185.8	1899.5
1988	217.5	2127.6
1989	260.9	2368.5

المطلوب:

-تقدير نموذج الانحدار الخطي للنموذج.

-اختبر استقلالية الأخطاء.

-تصحيح نموذج الارتباط الذاتي إن وجد.

الحل:

الخطوة الأولى: تقدير النموذج باستخدام طريقة المربعات الصغرى.

Dependent Variable : M
Method : Least Squares
Date : 05/29/25 Time : 11:07
Sample : 1970 1989
Included observations : 20

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-56.13319	5.439948	-10.31870	0.0000
YR	0.126230	0.004365	28.91680	0.0000

R-squared	0.978927	Mean dependent var	85.42000
Adjusted R-squared	0.977756	S.D. dependent var	71.14985
S.E. of regression	10.61147	Akaike info criterion	7.656388
Sum squared resid	2026.861	Schwarz criterion	7.755962
Log likelihood	-74.56388	Hannan-Quinn criter.	7.675826
F-statistic	836.1815	Durbin-Watson stat	0.647239
Prob (F-statistic)	0.000000		

$$M = -56.13 + 0.126YR$$

$R^2 = 0.978$ و $D - W = 0.647$

-الخطوة الثانية: اختبار استقلالية الأخطاء

نلاحظ أن إحصائية دربين واتسن التي تساوي0.647 تقع في منطقة رفض H_0أي $0 < DW < d_l$
حيث أن$d_u = 1.41$و$d_l = 1.20$ عند مستوى معنوية 5% و $n = 20$و$k = 1$، فتبين أن هناك ارتباط ذاتي موجب بين الأخطاء.

-الخطوة الثالثة: تصحيح النموذج في حالة الارتباط الذاتي بين الأخطاء

نستعمل طريقة دربين واتسن المباشرة، حيث نقوم أولا بحساب معامل الارتباط الذاتي
$\hat{P} \approx 1 - \frac{DW}{2} = 1 - \frac{0.647}{2} = 0.6765$ ثم نحول المتغيرات الأصلية إلى متغيرات ذات شبه الفروقات:

$$Y_i^* = Y_i - \hat{p}Y_{i-1}$$
$$X_i^* = X_i - \hat{p}X_{i-1}$$

أما المشاهدة الأولى لكل منهما يتم حسابها كما يلي:

$$M_{1970}^* = 506\sqrt{1 - 0.6765^2} = 372.56$$
$$YR_{1970}^* = 23.2\sqrt{1 - 0.6765^2} =$$

البيانات المحولة تظهر كما يلي:

البيانات المحولة		البيانات الأصلية		المشاهدات
YR_i^*	M_i^*	YR_i	M_i	
372.65	17.08	506.0	23.2	1970
180.991	7.4052	523.3	23.1	1971
209.78755	9.57285	563.8	25.2	1972
213.2893	9.3522	594.7	26.4	1973
233.38545	10.5404	635.7	28.4	1974
258.04895	12.7874	688.1	32	1975
287.50035	16.052	753.0	37.7	1976
286.8955	15.09595	796.3	40.6	1977
329.80305	20.2341	868.5	47.7	1978
347.95975	20.63	935.5	52.9	1979
349.53425	22.71315	982.4	58.5	1980
398.8064	24.42475	1063.4	64	1981
451.7099	31.9275	1171.1	75.9	1982
514.3509	43.05365	1306.6	94.4	1983
528.9851	68.0384	1412.9	131.9	1984
572.9732	37.66965	1528.8	126.9	1985
667.9668	69.55215	1702.2	155.4	1986
747.9617	80.6719	1899.5	185.8	1987
842.5883	91.8063	2127.6	217.5	1988
929.1786	113.76125	2368.5	260.9	1989

وبعد تقدير البيانات المحولة كانت النتائج كما يلي:

Dependent Variable : DM
Method : Least Squares
Date : 05/29/25 Time : 11:39
Sample : 1970 1989
Included observations : 20

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-24.80341	3.919808	-6.327711	0.0000
DYR	0.139659	0.008074	17.29734	0.0000

R-squared	0.943253	Mean dependent var	36.11844
Adjusted R-squared	0.940101	S.D. dependent var	31.43846
S.E. of regression	7.694366	Akaike info criterion	7.013493
Sum squared resid	1065.659	Schwarz criterion	7.113066
Log likelihood	-68.13493	Hannan-Quinn criter.	7.032931
F-statistic	299.1981	Durbin-Watson stat	2.487046
Prob (F-statistic)	0.000000		

وعليه فمعادلة الانحدار لـ M_i^* على YR_i^* هي كما يلي:

$$M_i^* = -24.80 + 0.139YR_i^*$$

$D-W=2.48$ ، $R^2=0.943$

نلاحظ من خلال نتائج التقدير على البيانات المحولة أن $D-W=2.48$وهي تقع في منطقة عدم وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء أي $2.48<4-d_u$أي $2.48<2.59$وذلك عند مستوى معنوية 5% و $n=20$و $k=1$ ، وبالتالي يمكن القول أنه تم التخلص من الارتباط الذاتي بين الأخطاء وتم تحقيق الاستقلالية التامة بين الأخطاء، كما نلاحظ أن الدخل الحقيقي YR_i^*له معنوية إحصائية وأن معامل الارتباط $R^2=0.943$ مرتفع.

3-مشكلة عدم ثبات التباين:

من بين الافتراضات الأساسية التي يقوم عليها النموذج الخطي هو ثبات التباين لحدود الخطأ أي تجانس تباين الخطأ Homoscedasticity لجميع المشاهدات (i)أو تساوي انحرافات القيم المشاهدة للمتغير التابع عن الخط المقدر عند كل قيم المتغير التفسيري أي يوجد تباين واحد لجميع القيم المشاهدة حول خط الانحدار المقدر، وفي حالة اختلال هذا الافتراض وتغير تباين القيم المشاهدة مع تغير قيم المتغير التفسيري، فيدلي الأمر على وجود مشكلة قياسية تسمى بمشكلة "عدم ثبات التباين" أو عدم تجانس تباين الخطأ Hetroscedasticity.

3-1-مفهوم مشكلة عدم ثبات التباين

يتكون مصطلح عدم ثبات التباين Hetroscedasticityمن كلمتين (Hetro) والتي يقصد بها التباين و(Scedasticity) تعني عدم التجانس ويقصد بذلك إجمالا عدم ثبات التباين أو عدم تجانس التباين.

وتعد هذه المشكلة خرق لأحد الفرضيات الأساسية التي تقوم عليها طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير معلمات النموذج، حيث تعرف على أنها تغير تباين الحد العشوائي مع تغير قيم المتغير التفسيري، وتحدث هذه الظاهرة خاصة في بيانات المقطع العرضي أكثر من بيانات السلسلة الزمنية، وهذا لأن بيانات المقطع العرضي تناقش عادة الظاهرة في لحظة زمنية معينة أما بيانات السلسلة الزمنية تأخذ فترة طويلة والتي قد تختفي فيها الآثار التي تظهر في الأجل القصير.

ويعبر عن هذه المشكلة رياضيا في حالة النموذج البسيط بالصيغة التالية:

$$var(U_i)=E({U_i}^2)={\sigma_i}^2\neq\sigma^2$$

أما في حالة النموذج الخطي العام يصبح القطر الرئيسي لمصفوفة التباين والتغاير الخاصة بحدود الخطأ تحتوي على قيم مختلفة وغير ثابتة.

بحيث تكتب بالشكل التالي:

$$E(UU')=\sigma^2\Omega\neq\sigma^2 In$$

حيث:

Ω: تمثل مصفوفة من الدرجة n . n تحتوي على أرقام أو أوزان مختلفة W_i في قطرها الرئيسي وعلى أصفار خارج القطر الرئيسي.

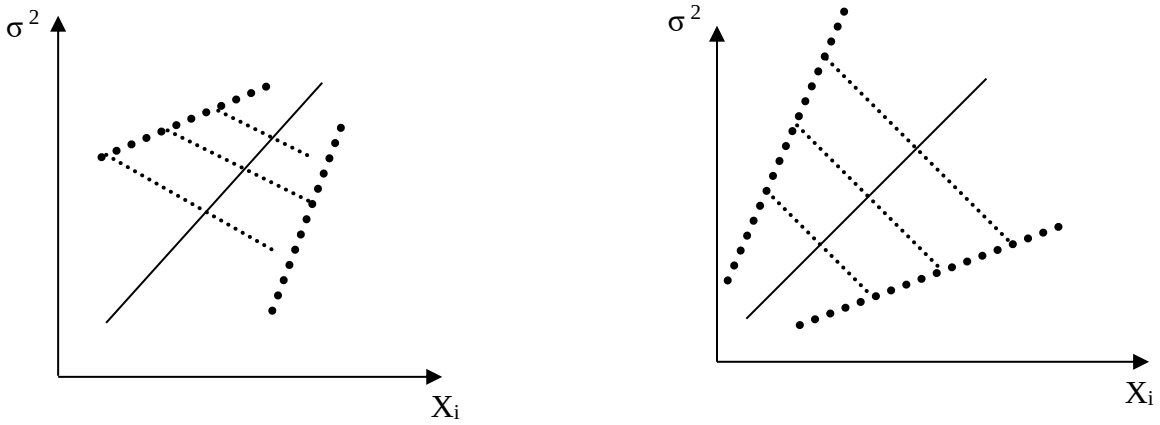
$$\Omega = \begin{bmatrix} w_1 & 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 & w_2 \ldots\ldots 0 \\ \vdots & \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots w_n \end{bmatrix}$$

و $w_1 \neq w_2 \neq \ldots\ldots\ldots \neq w_n$

3-2-أشكال عدم تجانس التباين:

تتعدد الأشـــكال التي تأخذها مشـــكلة عدم تجانس تباين الخطأ بتعدد العلاقة بين حد الخطأ العشوائي والمتغير التفسيري، ويمكن توضيح ذلك من خلال الرسوم البيانية التالية:

شـــكل رقم (05): يبين تزايد تباين الحد العشـــوائي **شـــكل رقم(06):** يبين تناقص تباين الحد العشوائي



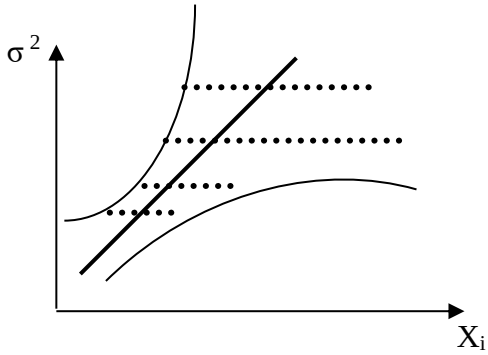
المصدر: عبد القادر محمد عبد القادر عطية، مرجع سبق ذكره، ص. 496

يتبين من خلال الشـكلين السـابقين أنه توجد علاقة خطية بين المتغير التفسـيري وحد الخطأ فمن خلال الشـكل رقم (05) يتجلى أن تباين الحد العشـوائي يتزايد مع تزايد قيمة المتغير التفسـيري بصـورة منتظمة، مما يعني أن العلاقة بين المتغير التفسـيري وتباين الحد العشـوائي خطية وطردية، أما الشـكل رقم (06) فيبين أن تبـاين الحـد العشـوائي يتزايـد بتنـاقص قيم المتغير التفسـيري، ممـا يعني أن العلاقـة خطيـة وعكسية. وعموما يمكن التعبير عن العلاقة بين تباين الحد العشوائي والمتغير التفسيري بالصيغة التالية:

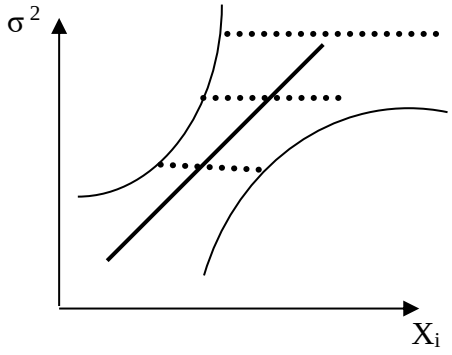
$$\sigma_{ei}{}^2 = a + bX_i + w_i$$

كما تأخذ مشـكلة عدم تجانس التباين أشـكال أخرى تكون فيها العلاقة بين المتغير التفسـيري وتباين الحد العشوائي غير خطية وذلك كما يتضح من الشكلين:

شكل رقم (07):يبين تباين الحد العشوائي غير الخطي متزايد



شكل رقم (08): يبين تباين الحد العشوائي غير الخطي على شكل حرف U



المصدر: عبد القادر محمد عبد القادر عطية، مرجع سابق، ص. 497

فمن خلال الشكل (07) يتضح وجود علاقة غير خطية وطردية حيث يتزايد تباين المتغير العشوائي بتزايد قيم المتغير التفسيري وبمعدل متزايد، ويمكن تمثيل هذه العلاقة باستخدام الصيغة التالية:

$$\sigma_{ei}{}^2 = ax^a e^w$$

أما الشكل (08) فيبين أن العلاقة بين تباين حد الخطأ والمتغير التفسيري غير خطية وعكسية حيث يتناقص تباين حد الخطأ بتزايد قيم المتغير التفسيري إلى أن يصل إلى حده الأدنى ثم يتزايد بعد ذلك ويمكن تمثيل هذه العلاقة بالصيغة الرياضية التالية:

$$\sigma_{ei}{}^2 = a + bX_i + cX_i{}^2 + w_i$$

3-3-أسباب مشكلة عدم ثبات التباين:

تظهر مشكلة عدم ثبات التباين تحت عدة أسباب أهمها:

- وجود علاقة ذات اتجاهين بين المتغيرات المستقلة.
- استخدام البيانات القطاعية بدلا من بيانات السلسلة الزمنية، فعلى سبيل المثال:

في دراسة لدالة الاستهلاك التي تعتمد على الدخل وإنفاق العائلات على مختلف السلع والخدمات تبين أن تباين إنفاق العائلات أصحاب المداخيل المنخفضة على السلع الضرورية منخفض، وذلك لأن الحد الأقصى للدخل منخفض وأن هناك حد أدنى للإنفاق يسمى بالحد الكفاف أي أن إنفاقهم يكون في حدود ضيقة، أما العائلات أصحاب المداخيل المرتفعة عادة ما يكون إنفاقهم على السلع الكمالية أكثر تشتتا وذلك لعدم وجود حدود، ومنه يتضح أن تباين الخطأ الخاص بالإنفاق الاستهلاكي يتزايد بتزايد الدخل، أي تباين الحد العشوائي منخفض عند قيم المداخيل المنخفضة ومرتفع عند قيم المداخيل المرتفعة وبالتالي عدم ثبات التباين.

- كذلك من ضمن الأسباب التي تؤدي إلى مشكلة عدم ثبات التباين هي استخدام بيانات جزئية بدلا من بيانات تجميعية، لأن البيانات التجميعية تخفي الاختلافات بين المفردات حيث يلغي بعضها

البعض فلا يكون هناك مجال لتشـتت القيم بدرجة كبيرة، أما في حالة البيانات الجزئية كتلك المتاحة عن الأفراد أو المنشـآت الفردية فعادة يكون التشـتت كبير بين القيم للاختلافات الكبيرة بين سـلوك الوحدات الفردية.

3-4-آثار مشكلة عدم ثبات التباين:

يترتب عن وجود مشكلة عدم ثبات التباين عدد من الآثار يمكن تلخيصها في:

أ- تبقى المعلمات المقدرة باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية $(B_0، B_1)$تتصف بعدم التحيز والاتساق ولكنها تفقد صفة الكفاءة.

ب-تصـبح التباينات والتغايرات الخاصـة بالمعلمات المقدرةB_1،B_0متحيزة وغير متسـقة فتصـبح اختبارات الفروض غير دقيقة وغير ملائمة.

ج-كذلك تصبح التنبؤات أقل مصداقية من التنبؤات الأخرى المبنية على طرق خالية من مشكلة عدم ثبات التباين.

3-5-اختبارات كشف عدم تجانس التباين:

هناك عدة طرق يمكن اعتمادها لاكتشاف عدم تجانس التباين منها:

3-5-1-اختبار كولد فيلد وكوانت goldfeld and quandt test: يعتبر من أبسط وأسهل الاختبارات المسـتخدمة لغرض كشـف مشـكلة عدم تجانس التباين، ويسـتخدم في حالة البيانات المقطعية والعينات كبيرة الحجم، حيث يمر بعدة مراحل:

- ترتيب البيانات الخاصة بالمتغير المستقل X_iمن أصغر قيمة إلى أكبر قيمة.
- حذف المشاهدات الوسيطية من بيانات العينة، ويفضل في هذا الإطار حذف$\frac{1}{5}$ من المشاهدات.
- ثم تقسم مجموع المشاهدات المتبقية إلى مجموعتين بالتساوي، حيث تنطوي المجموعة الأولى على قيم المشاهدات الصغيرة، في حين تنطوي الثانية على القيم الكبيرة.
- يتم تقدير معلمات العلاقة الخطية بين المتغير التابع والمتغير المستقل لكل عينة جزئية على انفراد.
- بعدها يتم احتساب تباين الخطأ للعينة الأولى ${S_{i1}}^2$ وللعينة الثانية ${S_{i2}}^2$بموجب الصيغة التالية:

بالنسبة للعينة الجزئية الأولى:

$$S_{i1}^2 = \frac{\sum {e_i}^2}{T_1 - k} = \frac{RSS_1}{T_1 - k}$$

حيث:

$\sum {e_i}^2$: مجموع مربعات البواقي في العينة الجزئية الأولى كما نرمز لها بالرمز RSS_1.

T_1: حجم العينة الجزئية الأولى.

k: عدد معلمات النموذج.

بالنسبة للعينة الجزئية الثانية:

$$S_{i2}^2 = \frac{\sum {e_i}^2}{T_2 - k} = \frac{RSS_2}{T_2 - k}$$

وفي الأخير يتم احتساب الإحصائية F^*وفق الصيغة التالية:

$$F^* = \frac{{S_{i2}}^2}{S_{i_1}} = \frac{RSS_2}{RSS_1}$$

ويتم الاختبار كما يلي:

* إذا كانت قيمة F^* المحسوبة أصغر من قيمةFالجدولية عند مستوى معنوية معين ودرجة حرية قدرها $T_2 - k$للبسط و$T_1 - k$ للمقام نقبل فرضية العدم القائلة بثبات تباين الخطأ أي

$$H_0: {\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2 = \cdots = {\sigma_n}^2$$

*وإذا كانت قيمةF^* المحتسبة أكبر من قيمةFالجدولية عند نفس مستوى المعنوية ودرجة الحرية المذكورين أعلاه، نقبل الفرضية البديلة H_1 القائلة بعدم ثبات تباين الخطأ

$$H_1: {\sigma_1}^2 \neq {\sigma_2}^2 \neq \cdots \neq {\sigma_n}^2$$

3-2-5-اختبار معامل ارتباط الرتب لسبيرمان: Spearman's Rank Correlation Coefficient test

يعد هذا الاختبار من أبسط وأسهل الاختبارات المعتمدة لكشف مشكلة عدم تجانس التباين ويمكن تطبيقه على العينات الكبيرة والصغيرة، حيث يعتمد على القيم المطلقة لحدود الخطأ$|e_i| = e_i$، وقيم المتغير التفسيري موضوع الدراسة.

ولحساب هذا المؤشر يتطلب:

- تقدير معلمات النموذج باستخدام طريقة المربعات الصغرى.
- احتساب البواقيe_i، $e_i = y_i - \hat{y}_i$
- ترتيب قيم المتغير المستقل(X_i) والانحرافاتe_i تصاعديا أو تنازليا، وإعطاء كل منها رتبا معينة وفق تسلسل القيم ثم تحسب الفروقات بين الرتب، ومن ثم نستخرج معامل ارتباط الرتب ما بين القيم المطلقة للانحرافات وقيم المتغير المستقل وفق قانون سبيرمان Spearmanلارتباط الرتب كالآتي:

$$r_s = 1 - \left[\frac{6 \sum {D_i}^2}{n(n^2 - 1)}\right]$$

حيث:

n: تمثل حجم العينة.

D_i: يمثل الفرق ما بين رتب القيم المطلقة للانحرافات (حد الخطأ$|e_i|$) ورتبة المتغير المستقلX_iالمناظرة.

حيث كلما اقتربت قيمة r_s من الواحد الصحيح دل ذلك على وجود علاقة قوية بين e_i وX_iومن ثم ظهور مشكلة عدم تجانس التباين.

ويمكن التأكد من وجود المشكلة من خلال اختبارt وفقا للصيغة التالية:

$$t = \frac{r_s \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - {r_s}^2}}$$

بعدها يتم البحث عن قيمة t الجدولية عند درجة حرية $(n-k+1)$ومستوى معنوية معين، ثم تتم المقارنة بين قيمة t^*المحسوبة مع نظيرتها الجدولية.

- فإذا تبين أن t^*المحسوبة أقل من t الجدولية نقبل الفرضية البديلة التي تنص على وجود مشكلة تباين الخطأ أي $H_1: {\sigma_1}^2 \neq {\sigma_2}^2 \neq \ldots\ldots\ldots \neq {\sigma_n}^2$

- أما إذا كانت tالمحسوبة أكبر من t الجدولية فإنه يتم قبول فرضية العدم H_0 التي تنص على عدم وجود مشكلة تجانس الخطأ أي $H_0: {\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2 = \ldots\ldots\ldots = {\sigma_n}^2$

3-5-3-اختبار بارك (park-1966): يعتبر من الاختبارات التي يتم استعمالها لكشف مشكلة عدم ثبات التباين التي يعاني منها النموذج.

وينطلق هذا الاختبار من افتراض أن ${\sigma_i}^2$دالة للمتغير المستقل X_i أي:

${\sigma_i}^2 = f(X_i)$ ويقترح بارك في هذا الاختبار استخدام الشكل المحدد التالي للدالة السابقة

${\sigma_i}^2 = \sigma^2 {X_i}^y$

وبصورته الخطية القياسية يصبح:

$$ln{\sigma_i}^2 = ln\sigma^2 + ylnX_i + V_i$$

حيث V_iمتغير عشوائي تم إدخاله في النموذج للتمكين من قياس الدالة، ويجرى اختبار ثبات التباين باستخدام الفرضيتين:

الفرض العدمي: $H_0: Y = 0$

الفرض البديل: $H_1: Y \neq 0$

فإذا تم قبول الفرض العدمي فإن ذلك معناه ثبات التباين أما إذا تم قبول الفرض البديل ورفض الفرض العدمي فإن ذلك يشير إلى اختلاف التباين، غير أنه ما يلاحظ هو أن المتغير التابع على مستوى النموذج القياسي السابق مجهول وعليه يجرى استخدام مربعات البواقي كبديل مناسب ويتم تقدير النموذج التالي:

$$ln{e_i}^2 = ln\,\sigma^2 + y\,ln\,X_i + V_i$$

وهذا عن طريق مرحلتين:

على مستوى المرحلة الأولى يتم إجراء انحدار عادي للنموذج تحت افتراض تماثل التباين، حيث يتم الحصول على العلاقة المقدرة التي تحتوي على البواقي.

أما المرحلة الثانية يتم إجراء انحدار ثاني باستعمال البواقي، بعدها تجرى اختبارات المعنوية لـ Yبهدف تأكيد أو نفي فرض ثبات التباين.

ويعاب على هذا الاختبار أن المتغير العشوائي V_i في الانحدار الثاني قد لا يستوفي فروض المربعات الصغرى العادية وقد يعاني هو نفسه من مشكلة اختلاف التباين.

4-5-3 -اختبارات جليسر (Glejser 1969) : ويستخدم هذا الاختبار لغرض كشف مشكلة عدم ثبات التباين ويتم على مرحلتين:

المرحلة الأولى: يتم فيها إجراء انحدار عادي للنموذج $Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$

المرحلة الثانية: يتم حساب البواقي حسب القانون $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$وتختلف المرحلة الثانية بين الاختبارين في أن جليسر يستعمل القيمة المطلقة للبواقي$|e_i|$كمتغير تابع في انحدار يكون المتغير المستقل هو X_iوفق الصيغة التالية:

$$|e_i| = \sigma + yX_i{}^h + V_i \quad , \quad h = 1 \ , \ \frac{1}{2} \ , -1$$

ويتم قبول أو رفض ثبات التباين بناءا على معنوية أو عدم معنوية المعلمةy ، غير أن ما يعاب على هذا الاختبار أن المتغير العشوائي المستخدم فيهاV_iلا يستوفي لفروض المربعات الصغرى، فقيمته المتوقعة لا تساوي الصفر، أي $E(V_i) \neq 0$

3-5-5-اختبارWhite: ويعتبر من بين الاختبارات التي يتم اعتمادها لكشف مشكلة عدم ثبات التباين وتتمثل خطوات إجراء هذا الاختبار كما يلي:

1-تقدير دالة الانحدار الأصلية باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية، بافتراض النموذج التالي:

$$Y_i = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 X_{2i} + \hat{B}_3 X_{3i} + U_i$$

2-استخراج قيم البواقي على النحو التالي:

$$e_i = Y_i - \hat{B}_1 - \hat{B}_2 X_{2i} - B_3 X_{3i}$$

1-تقدير انحدار مساعد بين$e_i{}^2$من ناحية والمتغيرات التالية:

X_{2i} , X_{3i} , $X_{2i}{}^2$, $X_{3i}{}^2$, $X_{2i}.X_{3i}$ من ناحية أخرى وفق الصيغة التالية:

$$\hat{e}_i{}^2 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 X_{2i} + \hat{B}_3 X_{3i} + \hat{B}_4 X_{2i}^2 + \hat{B}_5 X_{3i}^2 + \hat{B}_6 X_{2i} X_{3i} + V_i$$

حيث إذا كان عدد المعلمات المقدرة (k)بما فيها الحد الثابت في نموذج الانحدار الأصلي فإن عدد حدود الانحدار المساعد يعادل $\left[\frac{k\ (\ k+1\ )}{2}\right]$

4 – ثم القيام بتقدير(nR^2) حيث(n) حجم العينة، (R^2)معامل التحديد للانحدار المساعد.

5 –ليتم إجراء اختبار الفرض العدمي$B_1 = B_2 = \ldots\ldots = 0$ وذلك بمقارنةnR^2 معχ^2عند مستوى معنوية5% أو 1% ودرجات حرية = عدد المعلمات الانحدارية في صيغة الانحدار المساعد مع استبعاد الحد الثابت أي-1، فإذا كان$nR^2 > \chi^2{}_{5,0.05}$ فإن ذلك يعني وجود مشكلة عدم ثبات التباين والعكس.

4-معالجة عدم ثبات تباين الخطأ:

من أبرز الطرق المستخدمة لمعالجة مشكلة عدم ثبات التباين هي طريقة المربعات الصغرى المرجحة أو المعممة، وتقوم هذه الفكرة على إعطاء القيم ذات الانحراف أقل عن خط الانحدار أوزان أكبر من القيم ذات الانحراف أكبر في تقدير العلاقة محل الدراسة، ويتم معالجة هذه المشكلة بتحويل شكل النموذج الأصلي حسب نمط عدم ثبات التباين المكتشف في النموذج الأصلي المقدر.

وبافتراض أن النموذج الأصلي كان كما يلي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

فيكون هناك عدة افتراضات (أنماط) لعدم ثبات التباين ويختلف النموذج المحول من افتراض لآخر.

أ-**الافتراض الأول**: يفترض أن تباين المتغير العشوائي ${\sigma_i}^2$يتناسب مع مربع المتغير التفسيري ${\sigma_i}^2 = \sigma^2 {X_i}^2$وذلك إذا ما تم التقدير من خلال الاختبارات كاختبار بارك أو اختبار جليسر وتبين أن تباينU_i هو تناسبي لمربعات المتغيرات المفسرةX_i.

وطبقا لهذا الافتراض يتم تحويل النموذج الأصلي إلى الشكل التالي:

$$\frac{Y_i}{X_i} = \frac{B_0}{X_i} + B_1 + \frac{U_i}{X_i} = B_0 . \frac{1}{X_i} + B_1 + V_i$$

حيث:

V_i: عبارة عن الخطأ المحول$\frac{U_i}{X_i}$

وبإجراء الانحدار $\frac{Y_i}{X_i}$ على$\frac{1}{X_i}$مستخدما في ذلك طريقة المربعات الصغرى العادية

نحصل على:$\frac{Y_i}{X_i} = B_0 \frac{1}{X_i} + B_1$

وبضرب المعادلة المحولة المقدرة سابقا في X_iيتم الحصول على النموذج الأصلي بعد معالجة عدم ثبات التباين ${\sigma_i}^2$، ويتضح مما سبق أن الحد الثابت من النموذج المحول (B_1)وهو عبارة عن ميل معامل الانحدار للنموذج الأصلي وميل معامل الانحدار للنموذج المحول هو عبارة عن الحد الثابت في النموذج الأصلي.

ب-**الافتراض الثاني**: يفترض أن تباين الحد العشوائي${\sigma_i}^2$ يتناسب مع المتغير التفسيري أي ${\sigma_i}^2 = \sigma^2 . X_i$

ووفقا لهذا الافتراض فإنه يتم تحويل النموذج الأصلي إلى المعادلة التالية:

$$\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} = \frac{B_0}{\sqrt{X_i}} + B_1 \sqrt{X_i} + \frac{U_i}{\sqrt{X_i}} = B_0 . \frac{1}{\sqrt{X_i}} + B_1 \sqrt{X_i} + V_i$$

(حيث V_iعبارة عن حد الخطأ المحول$\frac{U_i}{\sqrt{X_i}}$، $X_i > 0$) وبنفس الطريقة السابقة نجري انحدار$\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}}$ على$\frac{1}{\sqrt{X_i}}$بواسطة طريقة المربعات الصغرى العادية نحصل على:

$$\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} = B_0 . \frac{1}{\sqrt{X_i}} + B_1$$

ج-**الافتراض الثالث**: يفترض في هذه الحالة أن تباين المتغير العشوائي يتناسب مع مربع المتوسط$E(Y_i)$ لـ Y_iيكون ${\sigma_i}^2 = \sigma^2 (B_0 + B_1 X_i)^2$

حيث B_1، B_2 غير معلومة يتم تقديرهما عن طريق طريقة المربعات الصغرى العادية فتكتب العلاقة كما يلي: ${\sigma_i} = \sigma^2 Y^2$

وتكون المعادلة المحولة من الشكل:

$$\frac{Y_i}{Y_i} = \frac{B_0}{Y_i} + \frac{B_1 X_i}{Y_i} + \frac{U_i}{Y_i}$$

د-**الافتراض الرابع**: التحويلات اللوغاريتمية

إن تحويل النموذج الأصلي إلى الصيغة اللوغاريتمية سوف تؤدي غالبا إلى تقليل درجة عدم ثبات تباين حد الخطأ ومن ثم فإنه طبقا لهذا الافتراض تكون المعادلة المحولة المناسبة للنموذج الأصلي كما يلي:

$$ln\, Y_i = B_0 + B_1\, ln\, X_i + U_i$$

مثال رقم(09): لتكن لدينا 31 مشاهدة والتي تخص الدخل (x_i)والادخار (y_i)في الجدول التالي:

السنوات	الدخل (x_i)	الادخار (y_i)
1	8777	264
2	9954	90
3	10979	122
4	15522	588
5	18575	779
6	21163	1222
7	25604	1654
8	26500	1400
9	27670	1829
10	28300	2200
11	27430	2017
12	29560	2105
13	9210	105
14	11912	107
15	13499	503
16	16730	898
17	19635	819
18	22880	1702
19	28150	1600
20	32500	2450
21	35250	2570
22	33500	1720
23	36000	1900
24	10508	131
25	12747	406
26	14269	431
27	17663	951
28	24127	1578
29	32100	2250
30	36200	2100
31	38200	2300

المطلوب:

-اختبار مشكلة ثبات التباين من عدمه للمتغير العشوائي (u_i)

الحل:

لاختبار مشكلة ثبات التباين من عدمه نستخدم اختبار Goldfeld-Quandt وذلك باتباع الخطوات التالية:

بعد تقدير النموذج تم الحصول على النتائج التالية:

$$\hat{y}_i = -649.71 + 0.08x_i$$

$$R^2 = 0.911 \text{ ، } RSS = 1798234.34 \text{ ، } D - W = 1.49$$

-**الخطوة الأولى**: يتم ترتيب المشاهدات ترتيبا تصاعديا حسب قيم (x_i)الدخل السنوي.

-**الخطوة الثانية**: يتم حذف عدد المشاهدات الوسيطة والتي تساوي $c = 9$من عدد المشاهدات الكلية $n = 31$وهي تقع بين القيمتين $\frac{11}{3}$ و $\frac{n}{4}$لكي يكون عدد المشاهدات المتبقي زوجيا، فنحصل على مجموعتين متساويتين كل منهما يساوي 11 أي $\frac{n-c}{2} = \frac{31-9}{2} = 11$

-**الخطوة الثالثة**: نقوم بتقدير نموذج الجزء الأول من البيانات بعد ترتيبها تصاعديا واستبعاد المشاهدات الوسيطة فنجد:

$$\hat{y}_i = -738.84 + 0.08x_i$$

$$R^2 = 0.78 \text{ ، } RSS_1 = 144771.5 \text{ ، } n = 11$$

-**الخطوة الرابعة**: نقوم بتقدير نموذج الجزء الثاني من البيانات بعد ترتيبها، والنتائج كانت كما يلي:

$$\hat{y}_i = -100.79 + 0.032x_i$$

$$R^2 = 0.16 \text{ ،} RSS_2 = 769899.3 \text{ ، } n = 11$$

-**الخطوة الخامسة**: اختبار الفرضية واتخاذ القرار بحساب إحصائية فيشر F_cكما يلي:

$$F_c = \frac{RSS_2}{RSS_1} = \frac{769899.3}{144771.5} = 5.31$$

نلاحظ أن قيمة إحصائية فيشر F_cالمحسوبة أكبر تماما من القيمة المجدولة لتوزيع فيشر عند مستوى معنوية 5% ودرجتي حرية $DF = v_1 = v_2 = \frac{n-m-2(k+1)}{2} = \frac{31-9-4}{2} = 9$

وبالتالي$F_{0.05}(9,9) = 3.18$.

أي $F_c > F_{0.05}(9,9)$ومنه نرفض الفرضية H_0ونقول أنه يوجد عدم ثبات التباين.

النماذج غير الخطية

تمهيد:

لقد احتلت النماذج الخطية وتطبيقاتها الاقتصادية والإدارية مكانتها العلمية في الدراسات، على عكس النماذج غير الخطية التي لم تكن لها الأهمية الكبيرة، وهذا لأن جل العلاقات الخطية بين الظواهر الاقتصادية هي علاقات شائعة وذات استخدام واسع، على الرغم أن الكثير من العلاقات الاقتصادية بين المتغيرات لا تأخذ طابعا خطيا، وذلك نابعا من طبيعة العلاقة واتجاهها وتأثير المتغيرات إحداهما على الأخرى، وأن تجاوز هذه العلاقات ينتج عنه أخطاء في التقدير ومخالفة الفروض القياسية، مما يؤدي إلى خلل في القياس.

1-ماهية النماذج غير الخطية:

1-1-مفهوم النماذج غير الخطية: وهي النماذج التي تظهر فيها العلاقات بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة على أشكال غير خطية، حيث يتبين ذلك من خلال التقديرات غير المتناسبة التي يتم الحصول عليها لـ (y_i)قياسا إلى(x_i)، مقارنة مع المشاهدات الحقيقية. عندها يكون معامل الارتباط منخفض والخطأ المعياري كبيرا، مما يدل على عدم صحة النموذج للعلاقة بين المتغيرات. والذي سببه زيادة كبيرة في تشتت القيم حول متوسطها، نتيجة ارتفاع قيم الانحراف المعياري للمتغيرات، فتنخفض القدرة التفسيرية للمتغيرات المستقلة، وهذا كله نتيجة انحراف القيم المشاهدة عن المقدرة انحرافا كبيرا بسبب سوء توفيق النموذج.

1-2-الحالات الدالة على النموذج غير الخطي:

-عند تزايد أو انخفاض القيمة المشاهدة للمتغير التابع بوتيرة أسرع من وتيرة زيادة أو انخفاض القيم المشاهدة للمتغيرات المستقلة في حالة العلاقة الطردية.

- عند تزايد أو انخفاض القيمة المشاهدة للمتغير التابع بوتيرة أسرع أو أبطأ من وتيرة زيادة أو انخفاض القيم المشاهدة للمتغيرات المستقلة في حالة العلاقة العكسية.

-عندما يعطي الشكل الانتشاري صورة عن وجود علاقة غير خطية، في شكل خطوط منحنية إلى الأعلى أو الأسفل، أو تأخذ شكل موجة، أو قطع مكافئ أو قطع ناقص.

1-3-أهمية النماذج غير الخطية في الدراسات الاقتصادية والإدارية:

تحتل النماذج أهمية كبيرة في الدراسات الاقتصادية، كدوال الإنتاج ودالة المنفعة ودوال الطلب الأسية وغيرها من النماذج، حيث تتمثل أهميتها في:

-صحة الوصف والتفسير للعلاقة بين المتغيرات؛

-التحليل العلمي والمنطقي؛

-دقة التقديرات للنموذج ومعلماته والتي تحقق الفروض الرئيسية مثل أقل تباين ومتوسط صفري للخطأ العشوائي.

-دقة التنبؤات والتي تستند على تحليل واقعي؛

-تجنب الوقوع في أخطاء قياسية واقتصادية والتي قد تكون نتائجها سلبية.

2-أنواع النماذج غير الخطية:

سنتناول في هذا العنصر بعض النماذج غير الخطية في المتغيرات ولكنها خطية في المعلمات، في هذا النوع من النماذج يكفي تحويل المتغيرات الداخلة في النموذج حتى نتمكن من تقديره بطريقة المربعات الصغرى، من بين هذه النماذج نجد:

2-1-النماذج اللوغاريتمية المزدوجة Double-log

وتأخذ الصيغة التالية:

$$Y = e^{\alpha} X^{\beta} e^{U_i} \dots\dots (01)$$

حيث:

e: يمثل أساس اللوغاريتم الطبيعي ويساوي 2.71828

e^{α}: ثابت موجب.

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الطرفين في المعادلة 01 نجد:

$$lnY = lne^{\alpha} + lnX^{\beta} + lne^{U_i}$$

$$lnY = \alpha + \beta lnX + U_i$$

وبوضع $lnY = Y^*$ و $lnX = X^*$

$$Y^* = \alpha + \beta X^* + U_i \dots\dots (02)$$

تمثل المعادلة (02) العلاقة الخطية بين X^* وY^* والتي يمكن حلها بسهولة حسب طريقة OLS.

ويمكن أن نأخذ مثالا عن دالة كوب دوغلاس Cobb-Douglas التي تربط بين الإنتاج وعوامله، والتي تعطى بالعلاقة التالية:

$$Q_t = \beta_0 L_t^{\beta_1} K_t^{\beta_2} U_t \dots\dots (03)$$

حيث:

Q_t : يمثل الإنتاج عند الفترة t؛

K: متغيرة رأس المال؛

L :متغيرة العمل.

وبإدخال اللوغاريتم الطبيعي على طرفي المعادلة (03) تصبح الدالة على الصيغة التالية:

$$lnQ_t = A + \beta_1 lnL_t + \beta_2 lnK_t + lnU_t \dots\dots (04)$$

حيث :

ln: يمثل اللوغاريتم الطبيعي؛

$A = ln\beta_0$

وتعتبر هذه المعادلة خطية في المعلمات أي معادلة خطية على الرغم من أنها غير خطية في المتغيرات.

وتعرف هذه المعادلة بالنموذج اللوغاريتمي log-log - أو اللوغاريتمي المزدوج Double log أو اللوغاريتمي الخطي linear-log ، أو بنموذج ذو مرونة ثابتة Constant elasticity model ، لأن كل من المتغير التابع والمتغيرات المستقلة في شكل لوغاريتمي.

وتكمن الخاصية الأساسية لهذه النماذج، أن معاملات الانحدار يمكن تفسيرها على أنها مرونات .فالمتغيرة β_1مثلا تمثل المرونة الجزئية للإنتاج فيما يتعلق بمدخلات العمل، مع الإبقاء على جميع الأخرى ثابتة (متغيرة رأس المال) ، نفس التفسير بالنسبة للمتغيرة β_2التي تمثل المرونة الجزئية للإنتاج فيما يتعلق بمدخلات رأس المال، مع الإبقاء على جميع الأخرى ثابتة(متغيرة العمل).

بما أن هذه المرونات تكون ثابتة على طول سلسلة المشاهدات فإن هذا النموذج يعرف أيضا بنموذج المرونة الثابتة

خاصية أخرى لدالة Cobb-Douglas هي أن مجموع معاملات الميل الجزئية$(\beta_1 + \beta_2)$ يعطي معلومات حول العوائد إلى الحجم أي استجابة المخرجات للتغير النسبي في المدخلات فإذا كان:

*$\beta_1 + \beta_2 = 1$معناه عوائد الحجم ثابتة، أي زيادة المدخلات بقيمة معينة سيؤدي إلى زيادة الإنتاج بنفس القيمة.

*$\beta_1 + \beta_2 < 1$معناه عوائد الحجم متناقصة، أي زيادة المدخلات بقيمة معينة سيؤدي إلى زيادة أقل في الإنتاج.

*$\beta_1 + \beta_2 > 1$معناه عوائد الحجم متزايدة، أي زيادة المدخلات بقيمة معينة سيؤدي إلى زيادة أكثر في الإنتاج.

مثال رقم (01): لتوضيح طريقة تقدير دالة الإنتاجCobb-Douglas، نقدم بيانات بآلاف الدولارات في الجدول التالي عن الإنتاجQ، رأس المال K والعمالة L حول 20 مؤسسة:

المؤسسة	Q	L	K
1	107	24	9
2	82.08	15	10
3	73.8	39	5
4	58.34	98	3
5	67.79	12	7
6	99.23	44	7
7	83.68	94	4
8	100.77	50	7
9	111	37	9
10	119.93	44	9
11	96.05	62	5
12	113.83	32	9
13	65.54	58	4
14	138.22	98	7
15	87.17	94	5
16	57.25	73	3
17	82.1	62	4
18	66.23	98	4
19	150.56	90	10
20	66.43	26	4

المطلوب:

-تقدير دالة كوب دو غلاس مع شرح عوائد الإنتاج.

الحل:

حتى يتم تقدير دالة كوب دوغلاس بصيغتها $Q_t = \beta_0 L_t^{\beta_1} K_t^{\beta_2} U_t$ بطريقة المربعات الصغرى العادية لابد من تحويلها إلى الشكل الخطي كما يلي:

$$lnQ_t = A + \beta_1 lnL_t + \beta_2 lnK_t + lnU_t$$

حيث:

ln: يمثل اللوغاريتم الطبيعي ، $A = ln\beta_0$

ونتائج التقدير كانت كما يلي:

Dependent Variable: LNQ
Method: Least Squares
Date: 04/29/25 Time: 09:32
Sample: 1 20
Included observations: 20

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.165836	0.244426	8.860912	0.0000
LNK	0.741353	0.065989	11.23443	0.0000
LNL	0.259297	0.042406	6.114585	0.0000

R-squared	0.881763	Mean dependent var	4.476813
Adjusted R-squared	0.867853	S.D. dependent var	0.280854
S.E. of regression	0.102096	Akaike info criterion	-1.588325
Sum squared resid	0.177201	Schwarz criterion	-1.438966
Log likelihood	18.88325	Hannan-Quinn criter.	-1.559169
F-statistic	63.38968	Durbin-Watson stat	2.369219
Prob (F-statistic)	0.000000		

تفسير النتائج:

نلاحظ من خلال نتائج التقدير الموضحة في الجدول:

أن جميع معاملات الانحدار لها معنوية إحصائية ويتبين ذلك من خلال الإحصائية $t \geq 2$ والقيمة الاحتمالية $prob = 0$

كما يظهر أن النموذج معنوي كليا من خلال الإحصائية $F = 63.38968$ باحتمال $prob(F - statistic) = 0$

كذلك قيمة معامل التحديد المعدل $\bar{R}^2 = 0.8678$ وهي مرتفعة وتعني أن للنموذج قوة تفسيرية عالية.

وعليه نكتب المعادلة التقديرية للدالة كما يلي:

$$\hat{Q}_t = 8.67 L_t^{0.259} K_t^{0.741}$$

$$\beta_0 = e^{2.16} = 8.67$$

نلاحظ من خلال المعادلة التقديرية أن معامل lnL_t يساوي 0.259 مما يعني أن زيادة مدخلات العمل بنسبة 1% يؤدي إلى ارتفاع الإنتاج بـ 25.9% مع بقاء مدخلات رأس المال ثابتة.

أن زيادة مدخلات رأس المال بنسبة 1% يؤدي إلى ارتفاع الإنتاج بـ 74.1 %مع بقاء مدخلات العمل ثابتة.

أما بالنسبة لغلة الحجم (عائد إنتاج الحجم) فإن:

$$\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 = 0.259 + 0.741 = 1$$

معناه أن عوائد الحجم ثابتة، أي زيادة المدخلات بقيمة 100 %سيؤدي إلى زيادة الإنتاج بـ 100%.

2-2-النموذج شبه اللوغاريتمي:

ويمكن توضيحه بافتراض ان العلاقة بين المتغير التابع Y والمتغير المفسر X تكون كما يلي:

$$Y = e^{(\alpha + \beta X + U_i)} \dots\dots (05)$$

$$Y = e^{(\alpha+\beta X+U_i)} \dots \dots (05)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة (05) نجد:

$$lnY = \alpha + \beta X + U_i$$

وتمثل هذه المعادلة العلاقة الخطية بين (lnY) و (X) ومن هنا جاءت تسمية الدالة بالنصف اللوغاريتمية.

$$Y^* = \alpha + \beta X + U_i$$

وهي علاقة خطية بسيطة يمكن حلها بطريقة OLS.

2-2-1-مجالات استخدام النموذج شبه اللوغاريتمي:

يستخدم النموذج شبه اللوغاريتمي في العديد من المجالات التطبيقية نذكر منها:

1-يستخدم في نظرية رأس المال البشري بهدف تحديد الكسب، حيث تضع النظرية أن لوغاريتم الكسب يكون له علاقة خطية بمستوى التعليم، وذلك وفقا للصيغة التالية:

$$\mathrm{lnL} = \mathrm{B_0} + \mathrm{B_1E} + \mathrm{U_i}$$

حيث:

L: الكسب.

E: مستوى التعليم.

2-يستخدم النموذج شبه اللوغاريتمي في تقدير العلاقة بين متغيرين عندما يكون التغير المطلق في المتغير المستقل بمقدار معين مصحوب بتغير نسبي ثابت في المتغير التابع، مثال ذلك نمو الدخل أو الصادرات أو العمالة بمعدل ثابت عبر الزمن، وفي مثل هذه الحالات يمكن استخدام الزمن كمتغير مستقل، وأحد هذه المتغيرات كمتغير تابع، ثم نقوم بتقدير معادلة الاتجاه العام.

فهي النماذج التي تحظى بأهمية كبيرة لدى الاقتصاديين والحكومة وصانعي السياسات، فهي نماذج معدل نمو المتغيرات الاقتصادية مثل الناتج المحلي الاجمالي الخام، عرض النقود، السكان، معدلات الفائدة ...الخ.

من بين هذه النماذج نأخذ مثال لنموذج يقيس معدل نمو الناتج المحلي الاجمالي GDP خلال الفترة ممتدة من 1990 إلى 2023 فتكون صيغته كما يلي:

$$GDP_t = GDP_{1990}(1+r)^{t_{U_t}}$$

حيث:

r: يمثل معدل النمو.

وبإدخال اللوغاريتم الطبيعي على طرفي المعادلة نجد:

$$lnGDP_t = lnGDP_{1690} + tln(1+r) + lnU_t$$

وبتبسيطها نكتب:

$$lnGDP_t = B_0 + B_1 t + U_t \dots\dots (06)$$

والمعادلة رقم(06) عبارة عن نموذج انحدار خطي يمثل الزمن tالمتغير المستقل.

المعامل B_1 يقيس التناسب الثابت أو التغير النسبي في المتغير التابع عند تغير في المتغير المستقل:

$$B_1 = \frac{\text{التغير النسبي في المتغير GDP}}{\text{التغير المطلق في المتغير } t}$$

نسبة النمو تحسب بضرب B_1 في 100، والتي تعرف أيضا باسم شبه المرونة للمتغير التابع فيما يتعلق بالم تغير المستقل.

مثال رقم(02): باستخدام بيانات الناتج الإجمالي الخام في الجزائر خلال الفترة الممتدة من سنة 1990 إلى غاية 2023، نقدر النموذج المبين في المعادلة (06)، وكانت نتائج التقدير كما يلي:

Dependent Variable: LNPIB
Method: Least Squares
Date: 05/01/25 Time: 10:14
Sample: 1990 2023
Included observations: 34

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	7.007393	0.081936	85.52237	0.0000
@TREND	0.110027	0.004268	25.77758	0.0000

R-squared	0.954055	Mean dependent var	8.822843
Adjusted R-squared	0.952619	S.D. dependent var	1.121751
S.E. of regression	0.244173	Akaike info criterion	0.075144
Sum squared resid	1.907856	Schwarz criterion	0.164930
Log likelihood	0.722555	Hannan-Quinn criter.	0.105763
F-statistic	664.4837	Durbin-Watson stat	0.200745
Prob(F-statistic)	0.000000		

نلاحظ من خلال النتائج الموضحة في الجدول أن ارتفاع الناتج المحلي الإجمالي الخام PIB في الجزائر بمعد ل 11% سنويا، وهو معنوي جدا لأن الإحصائية t مرتفعة جدا.

أما بالنسبة للثابت B_0 إذا أخذنا اللوغاريتم العكسي للقيمة 7.007393 سوف نجد 1104.765 وهي القيمة الأولى لـPIB في سنة 1990.

ويعطي المعامل B_1 معدل النمو عند كل فترة زمنية معينة (معدل نقطي)، ولحساب معدل النمو على مدى فترة من الزمن والذي رمزنا له في المعادلة بـ r نجد:

$$\hat{B}_1 = \ln(1+r) \Longrightarrow r = e^{\hat{B}_1} - 1 = 1.1163 - 1 = 0.1163 \approx 11.63\%$$

2-3-النماذج المعكوسة :

وهي النماذج التي تكون فيها العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل علاقة معكوسة، وهي نماذج خطية في المعلمات وغير خطية في X، يستعمل هذا النوع من النماذج لتقدير دوال فيليبس(Philips) .

وتتمثل الصيغة الرياضية لهذه النماذج في:

$$Y_t = B_1 + B_2\left(\frac{1}{X_t}\right) + U_t \dots\dots (07$$

من خلال هذه المعادلة نلاحظ أنه عندما تؤول قيم المتغير X إلى مالا نهاية فإن الحد $B_2\left(\frac{1}{X_t}\right)$ يقترب من الصفر، وبالتالي Y يقترب من القيمة B_1.

أما ميل المعادلة (07) فيكتب بالصيغة التالية:

$$\frac{dY_t}{dX_t} = -B_2(\frac{1}{X_t^2})$$

-إذا كان B_2 موجبا فإن الميل يكون سالبا؛

-وإذا كان B_2 سالبا يكون الميل موجبا.

مثال رقم (03): لتكن البيانات التالية الخاصة بمعدلات التضخم X ومعدلات البطالة Y لدولة ما:

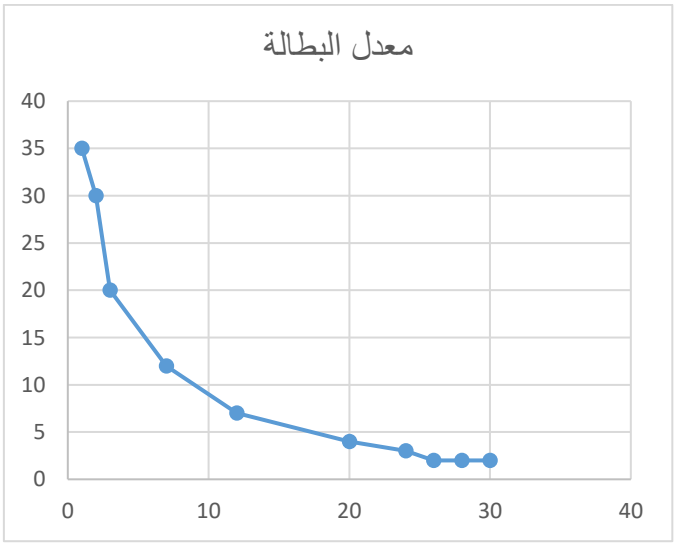
السنوات	معدل التضخم	معدل البطالة
1992	01	35
1993	02	30
1994	03	20
1995	07	12
1996	12	07
1997	20	04
1998	24	03
1999	26	02
2000	28	02
2001	30	02

المطلوب:

تقدير نموذج فليبس لعلاقة معدل التضخم بمعدل البطالة.

الحل:

عند رسم شكل الانتشاري لبيانات الجدول نجد:



ومن الشكل يبدو أن العلاقة تكون كما يلي:

$$Y_t = B_1 + B_2\left(\frac{1}{X_t}\right) + U_t$$

ونتائج التقدير موضحة في الجدول التالي:

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 05/02/25 Time: 17:43
Sample: 1992 2001
Included observations: 10

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	26.29998	3.277007	8.025609	0.0000
XT	-0.954247	0.174097	-5.481115	0.0006

R-squared	0.789710	Mean dependent var	11.70000
Adjusted R-squared	0.763423	S.D. dependent var	12.41012
S.E. of regression	6.036178	Akaike info criterion	6.610276
Sum squared resid	291.4836	Schwarz criterion	6.670793
Log likelihood	-31.05138	Hannan-Quinn criter.	6.543889
F-statistic	30.04262	Durbin-Watson stat	0.525803
Prob (F-statistic)	0.000587		

حيث $Xt = \frac{1}{x}$

ومنه معادلة التقدير هي كما يلي:

$\hat{Y}_i = 26.29 - 0.95Xt_i$ ومنه $Y_i = 26.29 - 0.95\frac{1}{x_i} + U_i$

ومن معادلة الانحدار المحسوبة يتبين لنا أن 26.29% هو الحد الأدنى للبطالة الذي لا ينخفض دونه مهما ارتفع معدل التضخم.

2-4-النموذج شبه اللوغاريتم المعكوس :

يمكن صياغة النموذج شبه اللوغاريتم المعكوس كما يلي:

$$Y = e^{\alpha}\left[e^{-\frac{1}{X}\beta}\right].e^{U_i} \dots\dots(08)$$

بإدخال اللوغاريتم الطبيعي على طرفي المعادلة (08) نجد:

$$lnY = \alpha - \beta lnX^{-1} + U_i$$
$$Y^* = \alpha + \beta lnX^* + U_i$$

حيث:

$$X^{-1} = X^*$$

ومنه نحصل على علاقة خطية بسيطة يمكن حلها بواسطة طريقة OLS.

2-5-النموذج الأسي:

يمكن صياغته كما يلي:

$$Y = \alpha e^{\beta X}.e^{U_i} \ldots..(09)$$

بإدخال اللوغاريتم الطبيعي إلى طرفي المعادلة (09) نجد:

$$lnY = ln\alpha + \beta X + U_i$$
$$Y^* = \alpha^* + \beta X + U_i$$

وهي علاقة خطية بسيطة يمكن حلها بواسطة طريقة OLS.

2-6-نماذج الانحدار كثيرات الحدود:

يكتب نموذج كثير الحدود من الدرجة 2 على الشكل التالي:

$$Y_t = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + U_t \ldots..(10)$$

المعادلة (10) هي دالة تربيعية أو ما يسمى بدالة كثير الحدود من الدرجة 2 في متغير الزمنt، وهي معادلة خطية في المعلمات. أما المتغيراتt و t^2ذات علاقة دالية ولها درجة ارتباط مرتفعة، حيث لا يؤدي الأمر إلى خلق مشكلة ارتباط بين المتغيرات المستقلة لأن t^2 هي دالة غير خطية في الزمن.

ومن خلال المعادلة (10)، فإن معدل التغير في Y يعطى بالطريقة التالية:

$$\frac{dY_t}{dt} = B_1 + 2B_2 t$$

يعتمد معدل التغير في Y على الزمن الذي يتم فيه قياس معدل التغير.

مثال رقم(04): باستخدام بيانات الخاصة بالناتج المحلي الإجمالي الخام للجزائر خلال الفترة الممتدة من (1990-2020) تم تقدير النموذج المبين في المعادلة(10) وكانت نتائج التقدير كما يلي:

Dependent Variable : PIB
Method : Least Squares
Date : 05/03/25 Time : 18:12
Sample : 1990 2020
Included observations : 31

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	96.52989	471.3868	30.52890	0.8392
@TREND	270.1401	72.73260	3.714154	0.0009
@TREND*@TREND	16.04391	2.342802	6.848170	0.0000

R-squared	0.983407	Mean dependent var	9042.024
Adjusted R-squared	0.982222	S.D. dependent var	6989.209
S.E. of regression	931.9054	Akaike info criterion	16.60411
Sum squared resid	24316537	Schwarz criterion	16.74288
Log likelihood	-254.3636	Hannan-Quinn criter.	16.64934
F-statistic	829.7303	Durbin-Watson stat	0.585732
Prob (F-statistic)	0.000000		

تكتب المعادلة المقدرة كما يلي:

$$\widehat{PIB} = 96.52989 + 270.1401t + 16.04391t^2$$

نلاحظ أن جميع المعاملات المقدرة معنوية، معدل تغير PIBيحسب باشتقاق المعادلة بالنسبة للزمن t أي:

وهو موجب لأن كلا من B_1 و B_2موجبان.

$$\frac{dY_t}{dt} = 270.1401 + 2(16.04391)t = 270.1401 + 32.08782t$$

حسب هذه المعادلة، يعتمد معدل التغيير في الناتج المحلي الإجمالي الخام على الزمن الذي يتم فيه قياس معدل التغيير.

إذا أخذنا المشتقة الثانية لهذه المعادلة بالنسبة للزمن، نتحصل على القيمة 32.08782، لذلك فإن معدل التغيير هذا يكون ثابتا عبر الزمن (القيمة الموجبة للمشتقة الثانية تدل على أن الناتج المحلي الإجمالي الخام يزيد بمعدل متزايد).

2-7-نموذج Log-lin ذو متغير اتجاه تربيعي:

يكتب هذا النموذج بالصيغة التالية:

$$lnY_t = B_0 + B_1t + B_2t^2 + U_t \dots\dots (11)$$

يمكن حساب معدل المتغيرة Yبالصيغة التالية:

$$\frac{dlnY_t}{dt} = B_1 + 2B_2$$

$$\frac{1}{Y_t}\frac{dY_t}{dt} = B_1 + 2B_2t$$

ومنه يكمن الفرق بين هذه المعادلة والمعادلة (10) في أنه في هذه المعادلة (11) يتم قياس معدل نمو في Y وليس معدل التغير.

مثال رقم(05):

بالاستعانة بنفس المثال السابق نقوم بتقدير المعادلة:

$$lnPIB_t = B_0 + B_1t + B_2t^2 + U_t$$

ونتائج التقدير هي كما يلي:

Dependent Variable : LNPIB
Method : Least Squares
Date : 05/04/25 Time : 11:30
Sample : 1990 2023
Included observations : 34

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	6.572183	0.053133	123.6922	0.0000
@TREND	0.191629	0.007451	25.71726	0.0000
@TREND*@TREND	0.002473	0.000218	-11.33083	0.0000

R-squared	0.991064	Mean dependent var	8.822843
Adjusted R-squared	0.990487	S.D. dependent var	1.121751
S.E. of regression	0.109407	Akaike info criterion	-1.503385
Sum squared resid	0.371067	Schwarz criterion	-1.368706
Log likelihood	28.55755	Hannan-Quinn criter.	-1.457456
F-statistic	1719.046	Durbin-Watson stat	0.805168
Prob (F-statistic)	0.000000		

حساب معدل نمو الناتج الداخلي الخام:

$$\frac{1}{PIB_t}\frac{dPIB_t}{dt} = B_1 + 2B_2t$$

$$\frac{1}{PIB_t}\frac{dPIB_t}{dt} = 0.191 + 2(0.0024)t = 0.191 + 0.0048t$$

يزيد معدل نمو الناتج الداخلي الخام بمعدل 0.0048 لكل وحدة من الزمن.

النماذج المتباطئة زمنيا

تمهيد:

يعبر التباطؤ الزمني أو ما يطلق عليه بالتخلف الزمني عن عنصر الزمن، والذي يجب أخذه بعين الاعتبار في بناء النماذج الاقتصادية، وذلك من أجل جعل نطاق التحليل أوسع وأقرب إلى الواقع، من خلال وجود فترة زمنية بين حركة المتغيرات التابعة التي تستجيب للمتغيرات المستقلة أو تأثير متغيرات مستقلة حدثت في زمن سابق على المتغير التابع في الزمن الحالي وتسمى هذه النماذج بالنماذج الديناميكية، وهي النماذج التي تعبر عن التأثير غير الفوري للمتغيرات المستقلة على المتغير التابع.

1-مفهوم النموذج المتباطئ زمنيا:

يعرف النموذج المتباطئ زمنيا بأنه النموذج الذي يكون فيه قيم المتغيرات متباطئة زمنيا، سواء أكانت هذه المتغيرات مستقلة أو تابعة.

1-1-الصياغة الرياضية للنموذج المتباطئ زمنيا:

وتتمثل الصيغة الرياضية للنموذج المتباطئ زمنيا كما يلي:

$$Y_i = \mathrm{a} + B_0X_i + B_1X_{i-1} + B_2X_{i-2} + \cdots + B_kX_{i-k} + U_i \dots\dots (01)$$

حيث توضح الصيغة وجود علاقة بين المتغير التابع Y_i و X_i كمتغير مستقل واحد بالإضافة إلى متغيرات مستقلة خلال فترات زمنية سابقة.

وتشير B_0 إلى التأثير المعلوم الذي يعطي متوسط التأثير للمتغير المستقل على المتغير التابع خلال الفترة الزمنية نفسها؛

أما B_1 و B_2 تشير إلى التأخر الزمني الذي يقيس متوسط تأثير المتغير المستقل خلال فترات زمنية سابقة على المتغير التابع.

ويعود أصل تسمية النماذج القياسية بنماذج المتباطئة زمنيا إلى كون تأثير المتغير المستقل فيها على المتغير التابع يتوزع عبر عدد من قيم المتغير المستقل المرتد زمنيا ولـ k من فترات الارتداد الزمني والتي قد تكن محدودة أو غير محدودة، ويمكن كتابة الصيغة السابقة وبالشكل المختصر كما يلي:

$$Y_i = \mathrm{a} + B_0X_i + \sum_{i=1}^{k} B_iX_{i-k} + U_i \dots (02)$$

حيث: a، B_0، B_i، المعلمات المراد تقديرها.

وبافتراض أن B_k تحتوي على عدد محدد من فترات من الارتداد الزمني من السنوات k أي أن:

$$\sum_{i=0}^{k} B_i < \infty$$

ونعرف معدل الارتداد الزمني والذي نرمز له بالرمز $Avrage\ lag$ بأنه متوسط جميع أوزان الارتداد التي يحتويها النموذج بالارتباط مع الوزن النسبي لكل معلمات B على التوالي، ويمكن كتابته كما يلي:

$$Avrage\ lag = \frac{\sum_{i=0}^{k} iB_i}{\sum_{i=0}^{k} B_i} \qquad (i = 0,1,2 \dots \dots k) \dots \dots \dots (03)$$

هذا وتعد المتغيرات المتباطئة زمنيا متغيرات مستقلة مهمة جدا في معظم العلاقات الاقتصادية، وهذا لأن السلوك الاقتصادي لكل فترة محددة يتأثر إلى حد ما بنمط السلوك السائد في الفترة السابقة، كما تعد نماذج التباطؤ الزمني من النماذج المهمة في اتخاذ القرارات، إذ تمكن من معرفة الفترة الزمنية التي ستكون فيا الوحدات الاقتصادية قادرة على الاستجابة للقرارات التي تتخذ بشأن الإنتاج، المبيعات، .... الخ.

مثال رقم(01):

بافتراض أن النموذج التالي هو نموذج يبين علاقة الانفاق الاستهلاكي Y_i كمتغير تابع والدخل X_i كمتغير مستقل واحد، وبعد التقدير كانت نتائج التقدير كما يلي:

$$\hat{Y}_i = 65.08 + 0.4X_i + 0.36X_{i-1} + 0.1X_{i-2}$$

ومنه فإن معدل التباطؤ الزمني (الارتداد الزمني) هو:

$$Avrage\ lag = \frac{\sum_{i=0}^{k} iB_i}{\sum_{i=0}^{k} B_i} = \frac{0(0.5) + 1(0.36) + 2(0.1)}{2} = 0.28$$

فالأثر في الأجل القصير (الميل الحدي للاستهلاك في الأجل القصير) على الانفاق الاستهلاكي نتيجة زيادة الدخل المتاح بدولار واحد هو (0.4) وهذا يعني أن زيادة الدخل الشخصي المتاح للإنفاق على الاستهلاك بدولار واحد يترتب عليه الانفاق الاستهلاكي الشخصي في السنة نفسها بمقدار (400) دولار.

أما الأثر طويل الأجل (الميل الحدي للاستهلاك طويل الاجل) على الانفاق الاستهلاكي، يساوي:

$$\sum_{i=0}^{k} B_i = B_0 + B_1 + B_2 = 0.5 + 0.36 + 0.1 = 0.96$$

ويعني ذلك أن زيادة الدخل الشخصي المتاح للإنفاق بدولار واحد ينتج عنه زيادة في الانفاق الاستهلاكي الشخصي بمقدار (960) دولار.

2-أسباب وجود التباطؤ الزمني:

توجد العديد من الأسباب لظهور التباطؤ الزمني في نماذج الاقتصاد القياسي نذكر أهمها:

-الأسباب النفسية: وهي العادات والتقاليد الاستهلاكية؛

-الأسباب الفنية: التي تحدث خلال بعض التغيرات المتعلقة بالإنتاج، كالتغيرات في الأسعار والأجور، وكذلك فإن عرض المنتجات الزراعية يعتمد على متغيرات عديدة منها الأسعار في الفترات الزمنية السابقة.

-السبب المؤسسي والتشريعي الحكومي: والذي يؤدي إلى إحداث تباطؤ زمني، ومثال ذلك قد تحول التشريعات الحكومية المنتج من استخدام العمل إلى استخدام عنصر آخر، وبهذا فإنها تؤثر في اتخاذ القرار.

ولهذه الأسباب فإن التباطؤ الزمني يمثل مركزا رئيسيا في الاقتصاد لأنه يؤثر في التحليل الاقتصادي سواء كان في الأجل القصير أو الأجل الطويل مثلا: نقول أن الميل الحدي للاستهلاك MPC، في الأجل القصير أقل منه في الأجل الطويل بوجود الارتداد الزمني في العوامل المؤثرة على الاستهلاك، وكذلك فإن مرونة الدخل في الأجل القصير تكون صغيرة في القيمة المطلقة مقارنة بمرونة الدخل في الأجل الطويل.

3-طرق تقدير نماذج التباطؤ الزمني:

3-1-استخدام طريقة الإضافة:

في هذ الطريقة يتم إضافة القيمة الأولى من Xواستخدام طريقة المربعات الصغرى ويتم التقدير ثم إضافة قيمة Xالمتباطئة ويتم الاستمرار في إضافة المتباطئات إلى أن نصل إلى متباطئات لا تتصف بالمعنوية أو تتغير إشارة من موجب إلى سالب أو من سالب إلى موجب.

مثال رقم(02): لتكن نتائج التقدير الموضحة في المعادلة التالية:

$$Y_i = 5.72 + 0.26X_i$$

$$Y_i = 4.96 + 0.16X_i + 0.048X_{i-1}$$

$$Y_i = 4.96 + 0.104X_i + 0.05X_{i-1} + 0.034X_{i-2}$$

$$Y_i = 4.85 + 0.11X_i + 0.06X_{i-1} + 0.032X_{i-2} - 0.022X_{i-3}$$

نلاحظ أنه في المعادلة الأخيرة أصبحت إشارة معامل X_{i-3}سالبة وهذا لا يمكن تفسيره اقتصاديا.

من التقديرات أعلاه نختار نموذج الانحدار الرابع أي أن قيمة المتباطئة غير مستقرة وبالسالب.

هذه الطريقة لها عيوبها وهي:

- لا يوجد دليل نظري يعتمد عليه في اختيار عدد المتباطئات.

-بزيادة عدد المتباطئات تقل درجة الحرية.

- بزيادة عدد المتباطئات ترتفع قيمة الارتباط بين قيم X في النموذج. ونعلم أن وجود الارتباط المتعدد يؤدي إلى تقدير غير دقيق. بارتفاع قيمة الانحراف المعياري.

-تؤدي هذه الطريقة إلى ما يسمى بتعدين البيانات Data Mining وهو اختبار البيانات لإيجاد المتغيرات التي تعطي مستوى معنوية وتصبح أهمية نتيجة اختبار الفرضية اكبر من دراسة العلاقة.

2-3-نموذج كويكKoych

يعرف نموذج كويك بنموذج التخلف الهندسي ويعد من النماذج الجيدة في تقدير المتغيرات المستقلة المتباطئة زمنيا، من خلال اعتماده على قيم الأوزان بمتتالية هندسية، حيث تكون فيها قيم الأوزان تتناقص تدريجيا إلى ان تصبح المعلمات أصغر فأصغر مع مرور الزمن، ويكون ذلك حسب القانون التالي:

$$B_j = B_0\lambda^j \qquad (j = 0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (04)$$

حيث أن: $0 < \lambda < 1$

وλ تمثل معامل التباطؤ، ويعرف بسرعة الاستجابة، ويوضح شرط المتتالية الهندسية السابقة، إن المعلماتB_j تتناقص بصورة مستمرة، إذ أن:$\lambda < 1$ فكلما بعد الزمن كلما قل تأثير المتغير المتباطئ زمنيا على المتغير التابع، ويشتق نموذج كويك للتباطؤ الزمني ذو المتغيرات المستقلة من النموذج الأصلي الذي يحتوي على متغير تابع متباطئ زمنيا فقط وذلك وفق الصيغة الآتية:

$$Y_i = \mathrm{a} + B_0X_i + B_1X_{i-1} + B_2X_{i-2} + \cdots + B_kX_{i-k} + U_i \dots\dots (05)$$

حيث أن:

$$U_i \backsim N(0, \sigma_u^2)$$

وأنB_jتتناقص تدريجيا بشكل متتالية هندسية أي أن:

$$B_1 = \lambda B_0$$

$$B_2 = \lambda^2 B_0$$

$$\vdots\ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots$$

$$B_i = \lambda^i B_0$$

وبالتعويض في المعادلة (05) نجد:

$$Y_i = \mathrm{a} + B_0X_i + \lambda B_0X_{i-1} + \lambda^2 B_0X_{i-2} + \cdots + U_i \dots\dots (06)$$

وبجعل النموذج مرتد لفترة زمنية واحدة فإن:

$$Y_{i-1} = \mathrm{a} + B_0X_{i-1} + \lambda B_0X_{i-2} + \lambda^2 B_0X_{i-3} + \cdots + U_{i-1} \dots\dots (07)$$

وبضرب طرفي المعادلة في λنحصل على:

$$\lambda Y_{i-1} = \lambda\mathrm{a} + \lambda B_0X_{i-1} + \lambda^2 B_0X_{i-2} + \lambda^3 B_0X_{i-3} + \cdots + \lambda U_{i-1} \dots\dots (08)$$

وبطرح المعادلة (08) من المعادلة (06) نجد:

$$Y_i - \lambda Y_{i-1} = \mathrm{a} - \lambda \mathrm{a} + B_0 X_i + U_i - \lambda U_{i-1} \dots \dots (09)$$

وبعد ترتيب المعادلة تصبح كما يلي:

$$Y_i - \lambda Y_{i-1} = \mathrm{a}(1-\lambda) + B_0 X_i + U_i - \lambda U_{i-1}$$

$$Y_i = \mathrm{a}(1-\lambda) + B_0 X_i + \lambda Y_{i-1} + V_i \dots \dots . (10)$$

حيث أن $V_i = U_i - \lambda U_{i-1}$وهو حد الخطأ الجديد.

كما يمكن كتابة نموذج **كويك Koych** بالصورة المختصرة بعد حذف الحد الثابت كما يلي:

$$Y_i = B_0 X_i + \lambda Y_{i-1} + V_i$$

وتسمى هذه الصيغة بتحويلة كويك، والتي تستخدم في نقل النموذج الأصلي والذي يحتوي على عدد لا نهائي من المتغيرات المرتدة زمنيا، إلى نموذج يحتوي على متغيرين مستقلين فقط هما X_iوY_{i-1}، كما تناقصت عدد المعلمات التي يراد تقديرها من العدد اللانهائي في النوذج الأصلي إلى ثلاث معلمات فقط في نموذج كويك المحول هي: a ، B_0 ، λ.

وبتطبيق طريقة المربعات الصغرى يمكن تقدير معادلة كويك للحصول على المقدرات â، $\hat{B}_0$ ، $\hat{\lambda}$.

ثم نجري استعادة تقديرات المعلمات الأصلية B_jبتطبيق القانون:

$$B_j = B_0 \lambda^j \qquad (j = 0, 1, 2, \dots . \infty) \dots \dots \dots (11)$$

فعلى سبيل المثال:

$$At\ j = 0$$

$$\hat{B}_0 = \hat{B}_0 \hat{\lambda}^0$$

$$\hat{B}_0 = \hat{B}_0 \qquad ، \quad \hat{\lambda}^0 = 1$$

$$At\ j = 1$$

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_0 \hat{\lambda}^1$$

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_0$$

$$At\ j = 0$$

$$\hat{B}_2 = \hat{B}_0 \hat{\lambda}^2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\hat{B}_\infty = \hat{B}_0 \hat{\lambda}^\infty$$

مثال رقم (03): لتكن المعادلة(10)كما يلي:

$$Y_i = 64 + 0.3X_i - 0.6X_{i-1} \dots \dots (12)$$

ومنه$B = 0.3$و$\lambda = 0.6$، أي أن:

$$\hat{a} = \frac{a}{(1-\hat{\lambda})} = \frac{64}{1-0.6} = 160$$

وعند تعويض هذه المعاملات في المعادلة (05) نجد:

$$\hat{Y}_i = 160 + 0.3X_i + 0.18X_{i-1} + 0.108X_{i-2} \dots \dots \dots (13)$$

بالاعتماد على العرض السابق للنموذج يمكن استخراج النتائج التالية:

-أننا انطلقنا من نموذج بمتغيرات متباطئة زمنيا موزعة بصورة لا نهائية، إلا أنه تحول إلى نموذج انحدار ذاتي لـ Y_i على X_i و Y_{i-1}.

-أن المتغير التابع المتباطئ زمنيا يظهر ضمن المتغيرات المستقلة مما يخرق الفرض اللازم للحصول على مقدرات طريقة المربعات الصغرى القائمة على ثبات قيم المتغيرات المستقلة في المعاينات المتكررة.

-أن حد الخطأ العشوائي الخاص بالنموذج الأصلي هو U_i بينما حد الخطأ الخاص بنموذج كويك المحول هو V_i، فإذا كانت U_i الأصلية لا تترابط ذاتيا سب فروض طريقة المربعات الصغرى فإن V_i لا تحتفظ بتلك الخاصية.

-ونتيجة لعشوائية Y_{i-1} وعدم استقلال V_i عن قيمها السابقة تنتهك فروض طريقة المربعات الصغرى العادية مما يقود إلى مقدرات متحيزة وغير متسقة لنموذج كويك المتخلف زمنيا.

3-3-نموذج التوقع المكيف لـ Cagan:

يعتمد هذا النموذج على بقاء التباطؤ الزمني بشكل فعلي متطابق مع نموذج كويك، إلا أن المتغير التابع Y_i يعتمد على القيم المتوقعة أو الدائمة للمتغير X^* وليست على القيمة الحقيقية لـ X. لذلك يستخدم نموذج **Cagan** للتوقع المكيف في النموذج ذاتي الانحدار والذي يكون المتغير المستقل فيه له قيم متوقعة مثلى، ويمكن كتابة هذا النموذج بالصيغة التالية:

$$Y_i = a + BX_i^* + U_i \dots \dots \dots (14)$$

حيث أن:

Y_i: تمثل الكمية المطلوبة من سلعة ما؛

X_i^*: يمثل السعر المتوقع للسلعة؛

i: يمثل الزمن؛

U: يمثل المتغير العشوائي.

إن التفسير الأكثر شيوعا لـ X^* في النظرية الاقتصادية، أنه يمثل الدخل الدائم في نظرية فريدمان للاستهلاك وكذلك في دالة الطلب على النقود، وبما أن X مجهولة أي لا تتوفر عنها بيانات، لذلك نحتاج إلى

كيفية تحديدها، وبالتالي فإن المعادلة (14) لابد وأن ترتبط ببعض الافتراضات عند تكوينها، والفرضية العامة لها هي التوقعات المكيفة التي تأخذ خطة دقيقة لتحديد قيمة X^*، كما يلي:

$$X_i^* - X_{i-1}^* = \mu(X_i^* - X_{i-1}^*) \dots \dots \dots (15)$$

حيث أن: $0 \leq \mu \leq 1$

لذلك فإن الأفراد سيقومون برفع مشترياتهم عندما يتوقعون ارتفاع الأسعار في المستقبل، وعلى افتراض أن الأسعار المتوقعة هي عبارة عن متوسط للأسعار المرجحة في الفترة الحالية والأسعار في الفترة الزمنية السابقة أي أن:

$$X_i^* = \mu X_i + (1-\mu)X_{i-1}^* \dots \dots \dots (16)$$

وإن القيمة μ تقع بين الصفر والواحد الصحيح، وفي هذه الحالة لابد من تحديد ما يلي:

-عندما تكون $\boldsymbol{\mu = 1}$:

وهذا يعني أن الأسعار المتوقعة تكون دائما مساوية للأسعار الحقيقية، وتعرف μ بمعامل التوقع المكيف، وتعرف هذه الفرضية أيضا بفرضية التوقع المتطور، أو فرضية تعلم الخطأ، إذ أن المعادلتين (15) و(16) تعرف على أنها فرضية التوقعات المكيفة.

فالمعادلة (15) تشير إل أن الدخل الحقيقي في الفترة (X_i) يفوق الدخل المتوقع في الفترة السابقة (X_{i-1}^*)، لذلك فإن فكرة توقع الدخل قد تعدل إلى الأعلى، ومن ثم فإن الدخل المتوقع في الفترة i

(X_i) يفوق الدخل المتوقع في الفترة السابقة (X_{i-1}^*)، وأن تحديد التعديل يعتمد على حجم معامل التوقع المكيف μ.

وأنه عند $\mu = 1$ يكون التعديل قد تم بسبب أن $X_i^* = X_i$ ولذلك يتطابق الدخل الحقيقي مع الدخل المتوقع.

-عندما تكون $\boldsymbol{\mu = 0}$:

في هذه الحالة لا يحدث تعديل على الاطلاق، وأن الدخل المتوقع يبقى بدون تغيير ويكون غير متأثر بالدخل الحقيقي مهما كان حجمها، وبشكل عام يمكن تحديد ما يأتي:

كلما كانت قيمة μ أكبر كلما كان امتداد التعديل أكبر ويمكن ملاحظة ذلك، أنه عند التعويض في المعادلة (16) لـ (X_{i-1}^*) و (X_{i-2}^*).....(X_{i-n}^*) يترتب عليه ما يأتي:

$$X_i^* = \mu X_i + (1-\mu)\mu X_{i-1} + (1-\mu)^2 X_{i-2}^*$$

$$X_i^* = \mu X_i + (1-\mu)\mu X_{i-1} + (1-\mu)^2 X_{i-2}^* + (1-\mu)^3 X_{i-3}^*$$

$$X_i^* = \mu X_i + (1-\mu)\mu X_{i-1} + (1-\mu)^2 X_{i-2}^* + (1-\mu)^3 X_{i-3}^* + (1-\mu)^4 X_{i-4}^* \dots (17)$$

وهكذا لتحديد الدخل المتوقع فإن معظم الأوزان قد أعطيت إلى الدخل الجاري (X_i)وقد تم انحدار الأوزان بشكل ناجح إلى المستويات السابقة للدخل(X_{i-1})، (X_{i-2})، (X_{i-3})وبتعويض المعادلة (17) في المعادلة (14) نحصل على:

$$Y_i = a + B\mu[X_i + (1-\mu)^3 X_{i-1}^* + (1-\mu)^2 X_{i-2}^* + \cdots] \dots\dots (18)$$

حيث أن المعادلة (18) تتطابق مع المعادلة (05) لنموذج الارتداد الزمني الكويك وإن:

$$B\mu = b \quad ، \quad b = (1-\mu)$$

وباستخدام تحويل Cagan بارتداد زمني لفترة واحدة، كما في المعادلة (18) أولا وبضرب طرفي المعادلة في $(1-\mu)$ثانيا، ثم بطرح النتيجة من المعادلة (18) نجد ما يلي:

$$Y_i = a\mu + B\mu X_i + (1-\mu)Y_{i-1} + U_i - (1-\mu)U_{i-1} \dots\dots (19)$$

ومما سبق إذا توقعنا افتراض التوقعات المكيفة، فإنه لتعديل معادلة التقدير (12) سوف نقترح ما يأتي:

$1-\hat{\mu} = 0.6$لأن $\hat{\mu} = 0.4$وأن:

$$\hat{B} = \frac{0.3}{\hat{\mu}} = \frac{0.3}{0.4} = 16$$

وهكذا يمكن تقدير العلاقات السلوكية للمعادلة (14) كما يأتي:

$$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{B}X_i^* + e_i$$

$$\hat{Y}_i = 160 + 0.75X_i^* \dots\dots (19)$$

وأن معامل التعديل المكيف في معادلة التوقعات المعدلة (15) هو 0.4، هذه القيمة يمكن استخدامها بأنها تمثل 40% لأي اختلاف بين الدخل الحقيقي والدخل المتوقع.

مثال رقم(04): لتكن البيانات التالية الخاصة بالكمية المطلوبة من سلعة ما (Y)والسعر الحقيقي لتلك السلعة (X)والموضحة في الجدول التالي:

i	X	Y
1	125	30.6
2	140	31.6
3	130	31.3
4	155	33.3
5	145	33.5
6	163	33.2
7	170	36.7
8	182	38.6
9	173	39.0
10	192	40.8
11	203	42.7
12	178	41.9
13	163	40.2

14	182	40.7
15	175	40.4

المطلوب: تقدير المعادلة (14) وكيف يمكن إيجاد السعر المتوقع للسلعة X.

الحل:

- يمكن تقدير المعادلة (14) من البيانات في الجدول أعلاه، لأن قيمة X_i^* ليست معلومة، لذلك لابد من إيجادها أولا ثم تقدير النموذج:
- إيجاد السعر المتوقع X_i^* من خلال الخطوات الآتية:

أ- تقدير معادلة الانحدار الخطي باستخدام طريقة المربعات الصغرى وتطبيقها على المعادلة (14) نحصل على:

$$\hat{Y}_i = 1.95825 + 0.0805855X_i + 0.598679Y_{i-1}$$

$$(1 - \hat{\mu}) = 0.598679$$

ومنه $\hat{\mu} = 0.401321$

$\hat{a}\hat{\mu} = 1.95825$ أي أن $\hat{a} = \frac{1.95825}{\hat{\mu}} = 4.87951$

كذلك $\hat{B}\hat{\mu} = 0.0805855$ وعليه $\hat{B} = \frac{0.0805855}{\hat{\mu}} = \frac{0.0805855}{0.401321} = 0.20080$

وباستخدام المعادلة (14) يمكن إيجاد قيمة X_i^* كما يأتي:

$$Y_i = a + BX_i^* + U_i$$

$$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{B}X_i^* \dots\dots (20)$$

كذلك $\hat{B}X_i^* = Y_i - \hat{a}$

وبقسمة طرفي المعادلة على $\hat{B}$ نحصل على:

$$X_i^* = \frac{Y_i - \hat{a}}{\hat{B}}$$

وبتعويض نحصل على بقية قيم Y_i الواردة في الجدول نحصل على:

$$X_1^* = \frac{30.6 - 4.87951}{0.2008} = 128.1$$

$$X_2^* = \frac{31.6 - 4.87951}{0.2008} = 133.1$$

$$X_3^* = \frac{31.3 - 4.87951}{0.2008} = 131.6$$

وهكذا نحصل على بقية قيم X_i^* من الجدول السابق.

4-3-نموذج التعديل الجزئي لـ نيرلوف Nerlov's:

يفترض نيرلوف أن هناك مستوى مرغوب به من المتغير Y التابع في المدة tوالذي يرمز له بالرمز Y ويعتمد على القيمة X_t، وقد افترض في نموذجه للاستثمار على وجود مستوى معين مرغوب من رأس المال الكافي لإنجاز العملية الإنتاجية بكل إمكانياتها التصميمية وعليه فإن صيغته الرياضية أخذت الشكل التالي:

$$Y_t^* = B_0 + B_1 X_t + U_t \dots\dots (21)$$

حيث أن:

Y_t^*: تمثل الرصيد الأمثل أو المخطط لرأس المال.

X_t: يمثل الناتج.

U_t: يمثل المتغير العشوائي.

t: الفترة الزمنية.

وبموجب نموذج التعديل الجزئي لنيرلوف أو ما يسمى بنموذج تعديل الرصيد فإن التغير في مخزون رأس المال، إلى المستوى الأمثل(Y_t^*) يمثل في حقيقته التغير المتحقق في مخزون رأس المال في كل فترة، لذلك من الطبيعي أن Y_tو(Y_t^*) ليست نفسها بمعنى آخر فإن تعديل (Y)الحقيقية إلى التغير في (X)لا يحصل بشكل فوري بل ربما يكون حصيلة التقدم التكنولوجي والقرارات الإدارية والمالية التي تقدم عليها المنشأة أو الدولة في مجال الاستثمار، وعليه فإن معادلة التعديل تأخذ الصيغة الرياضية الآتية:

$$Y_t - Y_{t-1} = \lambda(Y_t^* - Y_{t-1}) + V_t \dots\dots (22)$$

$$0 < \lambda < 1$$

λ: تمثل معامل التعديل وتقيس مدى اقتراب أو ابتعاد Y_tالحالية عن السابقةY_{t-1}، وتتراوح قيمتها بين الصفر والواحد الصحيح.

$Y_t - Y_{t-1}$: يمثل التغير الفعلي؛

$Y_t^* - Y_{t-1}$: يمثل التغير المرغوب فيه.

V_t: يمثل حد الخطأ.

وبطرح المعادلة (21) من المعادلة (22) نحصل على:

$$Y_t - Y_{t-1} = \lambda[(B_0 + B_1 X_t + U_t) - Y_{t-1}] + V_t \dots\dots (23)$$

وبفك الأقواس والترتيب نحصل على:

$$Y_t - Y_{t-1} = \lambda B_0 + \lambda B_1 X_t - \lambda Y_{t-1} + \lambda U_t + V_t$$

$$Y_t = \lambda B_0 + \lambda B_1 X_t + Y_{t-1} - \lambda Y_{t-1} + \lambda U_t + V_t$$

$$Y_t = \lambda B_0 + \lambda B_1 X_t + (1-\lambda) Y_{t-1} + (\lambda U_t + V_t) \dots\dots (24)$$

وبالتالي فإن مخزون رأس المال في كل مدة tيعتمد على جزأين أولهما الإنتاج في تلك المدة tوالجزء الخر على التوسع في مخزون رأس المال في بداية تلك المدة وأن λمعامل التغير المستقل المتخلف زمنيا Y_{t-1} يتراوح قيمتها بين الواحد الصحيح والصفر، فكلما اقتربت قيمتها من الصفر كلما كان التعديل في المدة t صغيرا وبالتالي اقتراب رأس المال الحالي مع رأس المال السابق، وكلما كانت قريبة من الواحد الصحيح كان التعديل كبيرا في المدة t ، أي ان رأس المال الحالي يتساوى مع رأس المال المرغوب فيه.

إن الصيغة السابقة لنيرلوف ما هي إلا نموذج استثمار إجمالي ونيرلوف يبحث عن الاستثمار النقي (الصافي) والذي يمكن ان يصل إليه عن:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

$$I_t = \Delta Y_t$$

$$I_t = \lambda B_0 + \lambda B_1 X_t + (1-\lambda) Y_{t-1} + (\lambda U_t + V_t)$$

ويعتقد نيرلوف بعد أن تم تقديره بطريقة المربعات الصغرى بعد اعتراء النموذج بالمشاكل القياسية بسبب طبيعة النموذج المقدر.

مثال رقم(05): لتكن البيانات التالية:

الفترة i	المبيعات X_i	الانفاق الاستثماري Y_i
1	20	10
2	19	9
3	21	10
4	23	11
5	25	13
6	27	20
7	30	24
8	32	19
9	34	24
10	40	26

المطلوب: تقدير معلمات نموذج التعديل الجزئي قصيرة وطويلة الأجل لدالة الطلب على الانفاق الاستثماري.

الحل:

لتقدير معلمات نموذج التعديل الجزئي قصيرة وطويلة الأجل لدالة الطلب على الانفاق الاستثماري، نتبع الخطوات التالية:

-صياغة نموذج التعديل الجزئي كما جاء في المعادلة (24) كما يلي:

$$Y_t = \lambda B_0 + \lambda B_1 X_t + (1-\lambda) Y_{t-1} + (\lambda U_t + V_t)$$

-تقدير معادلة الانحدار الخطي باستخدام طريقة المربعات الصغرى على بيانات الجدول أعلاه فنحصل على ما يلي:

$$\hat{Y}_t = -7.33 + 0.095X_t + 0.83X_{t-1}$$

حيث تمثل هذه المعادلة دالة الطلب قصيرة الأجل.

ولإيجاد قيمB_0، B_1نتبع ما يلي:

$$\hat{\lambda} = 1 - 0.83 = 0.17 \text{ ومنه } (1 - \hat{\lambda}) = 0.83$$

$$\hat{B}_0 = \frac{-7.33}{0.17} = -43.12 \text{ أي أن } \lambda\hat{B}_0 = -7.33$$

$$\hat{B}_1 = \frac{0.095}{0.17} = 0.5588 \text{ ومنه } \lambda\hat{B}_1 = 0.095$$

ومن ثم يمكن تقدير دالة الطلب في الأجل الطويل هي كما يلي:

$$Y_t^* = -43.12 + 0.5588X_t$$

3-5-نموذج الارتداد الزمني متعدد الحدود لـ ألمون Almon

يفترض ألمون أن معلمات النموذج المقدرة B_iتأخذ شكل التوزيع متعدد الحدود، فقد افترض ألمون أن أقصى ارتداد زمني هو (m)أي:

$$Y_t = a + B_0X_t + B_1X_{t-1} + B_2X_{t-2} + \cdots + B_mX_{t-m} + U_t \dots\dots (25)$$

$$Y_t = a + \sum_{i=0}^{m} B_iX_{t-i} + U_t$$

وأن B_iتتوقف على درجة الحدود، فمثلا بافتراض أربع فترات ارتداد، فإن الصياغة تكون:

$$Y_t = a + B_0X_t + B_1X_{t-1} + B_2X_{t-2} + B_3X_{t-3} + B_4X_{t-4} + U_t \dots\dots (26)$$

$$B_i = C_0 + C_{1i} + C_{2i}^2 + C_{3i}^3$$

حيث أن: $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$

وبالتعويض في المعادلة (25) نحصل على:

$$Y_t = a + C_0X_t + (C_0 + C_1 + C_2 + C_3)X_{t-1} + (C_0 + 2C_1 + 4C_2 + 8C_3)X_{t-2} + (C_0 + 3C_1 + 9C_2 + 27C_3)X_{t-3} + (C_0 + 4C_1 + 16C_2 + 64C_3)X_{t-4} + U_t$$

وبإعادة ترتيب الحدود نحصل على:

$$Y_t = a + C_0\left(\sum_{i=0}^{4} X_{t-1}\right) + C_1\left(\sum_{i=0}^{4} iX_{t-i}\right) + C_2\left(\sum_{i=0}^{4} i^2X_{t-i}\right) + C_3\left(\sum_{i=0}^{4} i^3X_{t-i}\right) + U_t$$

وإذا رمزنا للمتغيرات المستقلة الجديدة بالرموز الآتية:

Z_{4t} ،Z_{3t} ،Z_{2t} ،Z_{1t} على الترتيب:

$$Y_t = a + C_0 Z_{1t} + C_1 Z_{2t} + C_2 Z_{3t} + C_3 Z_{4t} + U_t \dots\dots\dots (27)$$

وتعد المعادلة (27) انحدار متعدد منظم، وأن التقديرات التي نحصل عليها لقيمC_0، C_1، C_2 ، C_3 ، تكتسب خصائص التقدير الجيد.

ويجب هنا ملاحظة تحديد كل من درجة الحدود وطول فترة الارتداد الزمني قبل البدء بتطبيق طريقة ألمون ويلاحظ هنا أن المعادلة (26) تستخدم فقط لتحديد المعلمات للنموذج لقيم (i)من الصفر إلى (m)، أي أن $(i = 0, 1,2,3, \dots, m)$.

إن معلمات نموذج الارتداد الزمني خارج هذا المجال يمكن تحديدها بأن تساوي الصفر، وعند مقارنة نموذج ألمون للارتداد الزمني مع نموذج كويك للارتداد الزمني للارتداد الزمني نحصل على ميزتان هامتان:

الأولى: أن لنموذج ألمون هيكل ارتدادي زمني مرن على عكس هيكل الارتداد الزمني الجامد لنموذج كويك.

الثانية: أن نموذج ألمون لا يستبدل متغيرا مرتدا زمنيا بالمتغيرات المستقلة المرتدة زمنيا، فإنه لا يخرق أيا من فروض طريقة المربعات الصغرى كما يفعل نموذج كويك.

أما عيوب نموذج ألمون، فهي:

-أن عدد المعلمات الازم تقديرها لا ينخفض كثيرا كما يحدث في نموذج كويك.

-أنه في الواقع العملي قد لا تستطيع تحديد فترة الارتداد الزمني عن طريق النظرية أو بمعلومات مسبقة.

مثال رقم(06): البيانات التالية تمثل الانفاق الحكومي X_tوالناتج المحلي الإجمالي الخام Y_tلإحدى الدول خلال الفترة (2000 -2022).

السنوات	الانفاق الحكومي X_t	الناتج المحلي الإجمالي الخام Y_t
2000	650	1500
2001	760	2060
2002	870	2180
2003	720	2004
2004	1020	2260
2005	1070	2380
2006	1080	2490
2007	1300	2820
2008	1490	2000
2009	1720	2330
2010	2090	2820
2011	2470	3790
2012	2630	4460
2013	3020	5080
2014	3280	5700
2015	3340	6160

6240	4190	2016
6720	5130	2017
8080	5460	2018
8200	5700	2019
8350	5960	2020
8460	6120	2021
8700	6200	2022

المطلوب: استخدام أسلوب ألمون في تقدير المعادلة.

الحل:

-استخدام أسلوب ألمون في تقدير المعادلة:

$$Y_t = a + B_0X_t + B_1X_{t-1} + B_2X_{t-2} + B_3X_{t-3} + U_t$$

-إيجاد قيم: C_0، C_1، C_2

لدينا:

$$Y_t = a + C_0Z_{0t} + C_1Z_{1t} + C_2Z_{2t} + C_3Z_{3t} + U_t$$

علما أن:

$$Z_{0t} = \sum_{i=0}^{3} X_{t-i} = X_{t-1} + X_{t-2} + X_{t-3} + U_t$$

$$Z_{1t} = \sum_{i=0}^{3} X_{t-i} = X_{t-1} + 2X_{t-2} + 3X_{t-3} + U_t$$

$$Z_{2t} = \sum_{i=0}^{3} X_{t-i} = X_{t-1} + 4X_{t-2} + 9X_{t-3} + U_t$$

وبالتالي تصبح معطيات الجدول كالآتي:

$$Z_{0(2003)} = X_{2003} + X_{2002} + X_{2001} + X_{2000} = 3000$$

$$Z_{1(2003)} = X_{2002} + 2X_{2001} + 3X_{2000} = 4340$$

$$Z_{2(2003} = X_{2002} + 4X_{2001} + 9X_{2000} = 9760$$

وبالتالي تصبح معطيات الجدول كما يلي:

Z_2	Z_1	Z_0	الناتج المحلي الإجمالي الخام Y_t	الانفاق الحكومي X_t	السنوات
			1500	650	2000
			2060	760	2001
			2180	870	2002
9760	4340	3000	2004	720	2003
11040	4740	3370	2260	1020	2004
11730	5070	3680	2380	1070	2005
11630	5270	3890	2490	1080	2006
14540	6280	4470	2820	1300	2007
15250	6670	4940	2000	1490	2008
16410	7330	5590	2330	1720	2009
19380	8600	6600	2820	2090	2010
22380	10000	7770	3790	2470	2011
26310	11810	8910	4460	2630	2012
31320	13840	10210	5080	3020	2013
35770	15690	11400	5700	3280	2014
39030	17210	12270	6160	3340	2015
43640	18960	13830	6240	4190	2016
47070	20710	15940	6720	5130	2017
51950	23530	18120	8080	5460	2018
63690	28290	20480	8200	5700	2019
73710	32010	22250	8350	5960	2020
77900	33740	23240	8460	6120	2021
81260	35140	23980	8700	6200	2022

-إجراء معادلة الانحدار الخطي على بيانات الجدول والخاصة بـ Z_0 ، Z_1 ، Z_2 نجد:

Sample: 2003 2022
Included observations : 20

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	970.9400	210.5927	4.610511	0.0003
Z0	0.549329	0.343172	1.600740	0.1290
Z1	0.456607	0.906910	0.503475	0.6215
Z2	-0.262284	0.305259	-0.859218	0.4029

R-squared	0.971740	Mean dependent var	4952.200
Adjusted R-squared	0.966442	S.D. dependent var	2512.498
S.E. of regression	460.2625	Akaike info criterion	15.27833
Sum squared resid	3389466.	Schwarz criterion	15.47747
Log likelihood	-148.7833	Hannan-Quinn criter.	15.31720
F-statistic	183.3931	Durbin-Watson stat	0.706821
Prob (F-statistic)	0.000000		

فنجد قيم B_i كما يلي:

$$\hat{B}_0 = f(0) = 0.549$$

$$\hat{B}_1 = f(1) = \hat{C}_0 + \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 0.745$$

$$\hat{B}_2 = f(2) = \hat{C}_0 + 2\hat{C}_1 + 4\hat{C}_2 = 0.413$$

$$\hat{B}_3 = f(3) = \hat{C}_0 + 3\hat{C}_1 + 9\hat{C}_2 = -0.441$$

ومنه تصبح المعادلة التقديرية كما يلي:

$$\hat{Y}_t = 970.94 + 0.549X_t + 0.745X_{t-1} + 0.413X_{t-2} - 0.441X_{t-3}$$

قائمة المراجع

باللغة العربية

1) أموري هادي كاظم الحسناوي، **طرق القياس الاقتصادي**، دار وائل للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2002.
2) تومي صالح، **مدخل لنظرية القياس الاقتصادي**، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2001.
3) سمير محمد عبد العزيز، **الاقتصاد القياسي**، مكتبة الإشعاع للطباعة والنشر والتوزيع، الإسكندرية، مصر، 1997.
4) صالح تومي، **مدخل لنظرية القياس الاقتصادي**، الجزء الثاني، ديوان المطبوعات الجامعية، بن عكنون، الجزائر.
5) عبد العزيز شرابي، **طرق توقعية للإحصاء الاقتصادي**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2000.
6) عبد المحمود محمد عبد الرحمن، **مقدمة في الاقتصاد القياسي**، عمادة شؤون المكتبات، الرياض، المملكة العربية السعودية، 1995.
7) مكيد علي، **الاقتصاد القياسي**، ديوان المطبوعات الجامعية، بن عكنون، الجزائر، 2007.
8) -أموري هادي كاظم، عصام خضير محمود، **طبيعة البيانات الإحصائية وبناء النماذج القياسية**، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، 1999،
9) -حسين علي بخيت، سحر فتح الله، **الاقتصاد القياسي**، دار اليازوري، عمان، الأردن، 2007.
10) -دومنيك سالفتور، **الإحصاء والاقتصاد القياسي**، الطبعة الخامسة، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، القاهرة، مصر، 2001.
11) -عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، الإحصاء **للعلوم الإدارية والتطبيقية**، عمان، دار الشروق للنشر والتوزيع، 1997.
12) -عبد القادر محمد عبد القادر عطيه ، **الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق** ، الدار الجامعية ، إسكندرية ، مصر ، 2005.
13) -عصام عزيز شريف، **مقدمة في القياس الاقتصادي**، طبعة ثانية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1981.
14) -محمد لطفي فرحات، **مبادئ الاقتصاد القياسي**، الطبعة الثانية، الدار الجماهيرية للنشر والتوزيع، الجماهيرية العربية الليبية الشعبية الاشتراكية العظمى، 2004.
15) مها محمد زكي، الاقتصاد القياسي بالأمثلة، الطبعة الأولى، دار حميثر للنشر والتوزيع، جمهورية مصر العربية، القاهرة، 2010
16) -نعمة الله نجيب إبراهيم، **مبادئ الاقتصاد القياسي**، مؤسسة شباب الجامعة، الإسكندرية، مصر، 2005.
17) -هاري كليجان، والاتس، **مقدمة في الاقتصاد القياسي المبادئ والتطبيقات**، عن ترجمة المرسي السيد حجازي، عبد القادر محمد عطيه، دار النشر العلمي والمطابع، الرياض، المملكة العربية السعودية، 1995.
18) -وليد إسماعيل السيفو وآخرون، **مشاكل الاقتصاد القياسي التحليلي**، الطبعة الأولى، الأهلية للنشر والتوزيع، المملكة الأردنية، عمان، 2006.
19) -وليد إسماعيل السيفو، أحمد محمد مشعل، **الاقتصاد القياسي التحليلي بين النظرية والتطبيق**، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2003.

-أطروحات:

1) حمودي حاج صحراوي، **قياس أثر الإصلاحات الاقتصادية على المؤسسة العمومية الاقتصادية باستعمال النماذج القياسية الاقتصادية دراسة ميدانية لبعض المؤسسات العمومية الاقتصادية**، رسالة دكتوراه دولة غير منشورة، جامعة فرحات عباس، سطيف، 2007-2008.

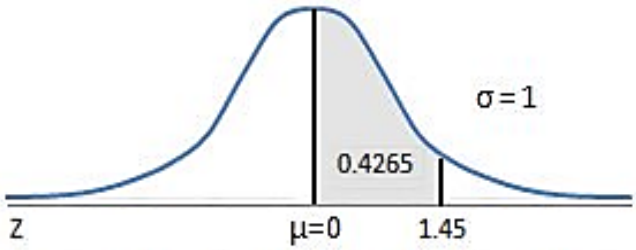
-باللغة الأجنبية:

1) -A.S. Gold Berger, **Econometrics Methods International**, Student edition Me grow hill international book company, London, 3ed, 1984.
2) -AC Harvey، **the Econometric analysis of time series**, Philip allan, Great Britain, 1981.
3) -Christopher Dougherty, **Introduction to Econometrics**, Third edition, Oxford, 2007.
4) -Damodar N Gujarati, **Econométrie**, Traduction de la 4e édition Américaine par Bernard Bernier, de Bœck &Lancier S.A, Paris, 2004.
5) G.S.Maddala,**Introduction to econometrics**, second edition, Macmillan Publishing company, the United states America, 1992.
6) -Isabelle Cadoret et Autres, **Econométrie appliquée**, de Bœck & Lancier s.a, Paris, 2004.
7) -Jack Johnston, John Dinardo**, Méthodes économetriques**, 4e Edition, Economica, New york, 1997.
8) James H.Stock, Mark W. Watson, Introduction to Econometrics, Fourth edition, Pearson, the united kingdom, 2020.
9) Jeffry M. Wooldridge, **Introductory Econometrics A Modern Approach**, 5th Edition, USA, 2013.
10) -Kibala Kuma Jonas. Économétrie Appliquée : Manuel des cas pratiques sur EViews et Stata. Licence. Com Kinshasa. 2018.
11) R.Carter Hill, and others, **Principles of Econometrics**, Fourth Edition, Wiley, the United States of America, 2011.
12) -Rachid Ben Dib, **Econométrie**, OPU, Alger, 2001.
13) -Régis Bourbonnais**, Econométrie**, 5e Edition, Dunod, Paris, 2004.
14) -Sami Khedhiri, **Cour d'introduction à l'économétrie**, Centre de publication universitaire, Tunisie, 2005.
15) -William Greenes , **Econometrie** , 5e edition , Pearson , France , 2005.
16) -Zellner Arnold & Theil.H, **Three-Stage Least Squares: Simultaneous Estimation of Simultaneous Equations,** Econometrica, January 1962, Vol. 30, No. 1.

الجداول الإحصائية

Areas Under the One-Tailed Standard Normal Curve

This table provides the area between the mean and some Z score.
For example, when Z score = 1.45 the area = 0.4265.

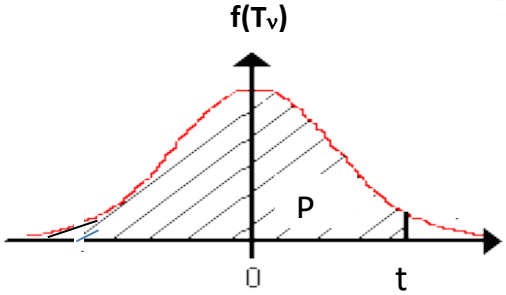


Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

Table de la Loi de Student

Fractiles de la loi de Student à ν degrés de liberté. Probabilité P de trouver une valeur inférieure ou égale à t

$P = F(t) = P(T_\nu \leq t)$



ν P	0,9250	0,9300	0,9350	0,9400	0,9450	0,9500	0,9550	0,9600	0,9650	0,9700	0,9750	0,9900	0,9950
1	4,1653	4,4737	4,8288	5,2422	5,7297	6,3138	7,0264	7,9158	9,0579	10,5789	12,7062	31,8205	63,6567
2	2,2819	2,3834	2,4954	2,6202	2,7604	2,9200	3,1040	3,3198	3,5782	3,8964	4,3027	6,9646	9,9248
3	1,9243	1,9950	2,0719	2,1562	2,2494	2,3534	2,4708	2,6054	2,7626	2,9505	3,1824	4,5407	5,8409
4	1,7782	1,8375	1,9016	1,9712	2,0475	2,1318	2,2261	2,3329	2,4559	2,6008	2,7764	3,7469	4,6041
5	1,6994	1,7529	1,8104	1,8727	1,9405	2,0150	2,0978	2,1910	2,2974	2,4216	2,5706	3,3649	4,0321
6	1,6502	1,7002	1,7538	1,8117	1,8744	1,9432	2,0192	2,1043	2,2011	2,3133	2,4469	3,1427	3,7074
7	1,6166	1,6643	1,7153	1,7702	1,8297	1,8946	1,9662	2,0460	2,1365	2,2409	2,3646	2,9980	3,4995
8	1,5922	1,6383	1,6874	1,7402	1,7973	1,8595	1,9280	2,0042	2,0902	2,1892	2,3060	2,8965	3,3554
9	1,5737	1,6185	1,6663	1,7176	1,7729	1,8331	1,8992	1,9727	2,0554	2,1504	2,2622	2,8214	3,2498
10	1,5592	1,6031	1,6498	1,6998	1,7538	1,8125	1,8768	1,9481	2,0283	2,1202	**2,2281**	2,7638	3,1693
11	1,5476	1,5906	1,6365	1,6856	1,7385	1,7959	1,8588	1,9284	2,0067	2,0961	2,2010	2,7181	3,1058
12	1,5380	1,5804	1,6256	1,6739	1,7259	1,7823	1,8440	1,9123	1,9889	2,0764	2,1788	2,6810	3,0545
13	1,5299	1,5718	1,6164	1,6641	1,7154	1,7709	1,8317	1,8989	1,9742	2,0600	2,1604	2,6503	3,0123
14	1,5231	1,5646	1,6087	1,6558	1,7064	1,7613	1,8213	1,8875	1,9617	2,0462	2,1448	2,6245	2,9768
15	1,5172	1,5583	1,6020	1,6487	1,6988	1,7531	1,8123	1,8777	1,9509	2,0343	2,1314	2,6025	2,9467
16	1,5121	1,5529	1,5962	1,6425	1,6921	1,7459	1,8046	1,8693	1,9417	2,0240	2,1199	2,5835	2,9208
17	1,5077	1,5482	1,5911	1,6370	1,6863	1,7396	1,7978	1,8619	1,9335	2,0150	2,1098	2,5669	2,8982
18	1,5037	1,5439	1,5867	1,6322	1,6812	1,7341	1,7918	1,8553	1,9264	2,0071	2,1009	2,5524	2,8784
19	1,5002	1,5402	1,5827	1,6280	1,6766	1,7291	1,7864	1,8495	1,9200	2,0000	2,0930	2,5395	2,8609
20	1,4970	1,5369	1,5791	1,6242	1,6725	1,7247	1,7816	1,8443	1,9143	1,9937	2,0860	2,5280	2,8453
21	1,4942	1,5338	1,5759	1,6207	1,6688	1,7207	1,7773	1,8397	1,9092	1,9880	2,0796	2,5176	2,8314
22	1,4916	1,5311	1,5730	1,6176	1,6655	1,7171	1,7734	1,8354	1,9045	1,9829	2,0739	2,5083	2,8188
23	1,4893	1,5286	1,5703	1,6148	1,6624	1,7139	1,7699	1,8316	1,9003	1,9782	2,0687	2,4999	2,8073
24	1,4871	1,5263	1,5679	1,6122	1,6596	1,7109	1,7667	1,8281	1,8965	1,9740	2,0639	2,4922	2,7969
25	1,4852	1,5242	1,5657	1,6098	1,6571	1,7081	1,7637	1,8248	1,8929	1,9701	2,0595	2,4851	2,7874
26	1,4834	1,5223	1,5636	1,6076	1,6547	1,7056	1,7610	1,8219	1,8897	1,9665	2,0555	2,4786	2,7787
27	1,4817	1,5205	1,5617	1,6056	1,6526	1,7033	1,7585	1,8191	1,8867	1,9632	2,0518	2,4727	2,7707
28	1,4801	1,5189	1,5600	1,6037	1,6506	1,7011	1,7561	1,8166	1,8839	1,9601	2,0484	2,4671	2,7633
29	1,4787	1,5174	1,5583	1,6020	1,6487	1,6991	1,7540	1,8142	1,8813	1,9573	2,0452	2,4620	2,7564
30	1,4774	1,5159	1,5568	1,6004	1,6470	1,6973	1,7520	1,8120	1,8789	1,9546	2,0423	2,4573	2,7500
50	1,4620	1,4996	1,5394	1,5818	1,6271	1,6759	1,7289	1,7870	1,8516	1,9244	2,0086	2,4033	2,6778
60	1,4582	1,4956	1,5352	1,5772	1,6222	1,6706	1,7232	1,7808	1,8448	1,9170	2,0003	2,3901	2,6603
70	1,4555	1,4927	1,5321	1,5740	1,6187	1,6669	1,7192	1,7765	1,8401	1,9118	1,9944	2,3808	2,6479
100	1,4507	1,4876	1,5267	1,5682	1,6125	1,6602	1,7120	1,7687	1,8315	1,9024	1,9840	2,3642	2,6259
5000	1,4398	1,4760	1,5144	1,5550	1,5985	1,6452	1,6957	1,7510	1,8123	1,8812	**1,9604**	2,3271	2,5768

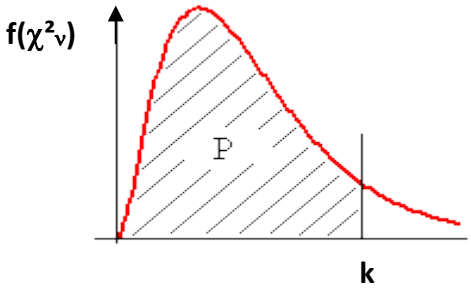
Exemples : $\nu = 10$ d.d.l. $P(T_{10} \leq t) = 0.975 \Rightarrow t = +2.2281$ et $P(T_{10} \leq -t) = 0.025 \Rightarrow t = -2.2281$

Approximation par une loi normale : pour $n = \nu \approx 5000$ d.l.l. on a $P(T_{5000} \leq t) = 0.975 \Rightarrow t = +1.9604$

Table de la loi du χ^2_ν

Fractiles F_P de la loi de khi-deux à ν degrés de liberté

$P = F(k) = P(\chi^2_\nu \leq k)$

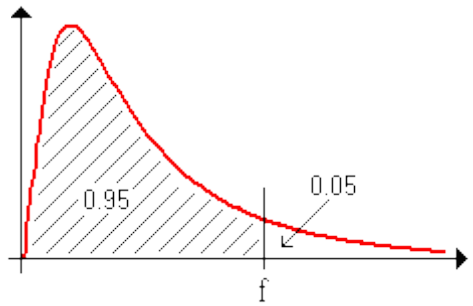


ν P	*0.010*	*0.020*	*0.025*	*0.050*	*0.100*	*0.150*	*0.200*	*0.800*	*0.900*	*0.950*	*0.975*	*0.980*	*0.990*
1	0.000	0.001	0.001	0.004	0.016	0.036	0.064	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.64
2	0.020	0.040	0.051	0.103	0.211	0.325	0.446	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.21
3	0.115	0.185	0.216	0.352	0.584	0.798	1.005	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.35
4	0.297	0.429	0.484	0.711	1.064	1.366	1.649	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.28
5	0.554	0.752	0.831	1.145	1.610	1.994	2.343	7.289	9.236	11.070	12.833	13.388	15.09
6	0.872	1.134	1.237	1.635	2.204	2.661	3.070	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.81
7	1.239	1.564	1.690	2.167	2.833	3.358	3.822	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.48
8	1.646	2.032	2.180	2.733	3.490	4.078	4.594	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168	20.09
9	2.088	2.532	2.700	3.325	4.168	4.817	5.380	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.67
10	2.558	3.059	3.247	3.940	4.865	5.570	6.179	13.442	15.987	**18.307**	20.483	21.161	23.21
11	3.053	3.609	3.816	4.575	5.578	6.336	6.989	14.631	17.275	19.675	21.920	22.618	24.73
12	3.571	4.178	4.404	5.226	6.304	7.114	7.807	15.812	18.549	21.026	23.337	24.054	26.22
13	4.107	4.765	5.009	5.892	7.042	7.901	8.634	16.985	19.812	22.362	24.736	25.472	27.69
14	4.660	5.368	5.629	6.571	7.790	8.696	9.467	18.151	21.064	23.685	26.119	26.873	29.14
15	5.229	5.985	6.262	7.261	8.547	9.499	10.307	19.311	22.307	24.996	27.488	28.259	30.58
16	5.812	6.614	6.908	7.962	9.312	10.309	11.152	20.465	23.542	26.296	28.845	29.633	32.00
17	6.408	7.255	7.564	8.672	10.085	11.125	12.002	21.615	24.769	27.587	30.191	30.995	33.41
18	7.015	7.906	8.231	9.390	10.865	11.946	12.857	22.760	25.989	28.869	31.526	32.346	34.81
19	7.633	8.567	8.907	10.117	11.651	12.773	13.716	23.900	27.204	30.144	32.852	33.687	36.19
20	8.260	9.237	9.591	10.851	12.443	13.604	14.578	25.038	28.412	31.410	34.170	35.020	37.57
21	8.897	9.915	10.283	11.591	13.240	14.439	15.445	26.171	29.615	32.671	35.479	36.343	38.93
22	9.542	10.600	10.982	12.338	14.041	15.279	16.314	27.301	30.813	33.924	36.781	37.659	40.29
23	10.196	11.293	11.689	13.091	14.848	16.122	17.187	28.429	32.007	35.172	38.076	38.968	41.64
24	10.856	11.992	12.401	13.848	15.659	16.969	18.062	29.553	33.196	36.415	39.364	40.270	42.98
25	11.524	12.697	13.120	14.611	16.473	17.818	18.940	30.675	34.382	37.652	40.646	41.566	44.31
26	12.198	13.409	13.844	15.379	17.292	18.671	19.820	31.795	35.563	38.885	41.923	42.856	45.64
27	12.879	14.125	14.573	16.151	18.114	19.527	20.703	32.912	36.741	40.113	43.195	44.140	46.96
28	13.565	14.847	15.308	16.928	18.939	20.386	21.588	34.027	37.916	41.337	44.461	45.419	48.28
29	14.256	15.574	16.047	17.708	19.768	21.247	22.475	35.139	39.087	42.557	45.722	46.693	49.59
30	14.953	16.306	16.791	18.493	20.599	22.110	23.364	36.250	40.256	43.773	46.979	47.962	50.89
40	22.164	23.838	24.433	26.509	29.051	30.856	32.345	47.269	51.805	55.758	59.342	60.436	63.69
50	29.707	31.664	32.357	34.764	37.689	39.754	41.449	58.164	63.167	67.505	71.420	72.613	76.15
60	37.485	39.699	40.482	43.188	46.459	48.759	50.641	68.972	74.397	79.082	83.298	84.580	88.38
80	53.540	56.213	57.153	60.391	64.278	66.994	69.207	90.405	96.578	101.88	106.63	108.07	112.33

Exemple : $\nu = 10$ d.d.l. $P = P(\chi^2_{10} \leq F_P) = 0.95 \Rightarrow F_P = 18.307$

Approximation : Pour $\nu > 100$ d.l.l. $\chi^2(\nu) \cong N(\nu ; \sqrt{2\nu})$ ou $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1} \cong N(0,1)$

Table : Loi de Fisher-Snedecor



Valeur f de la variable de Fisher-Snedecor $F_{(\nu 1\ ;\ \nu 2)}$ ayant la probabilité 0.05 d'être dépassée.

ν_1 : degrés de liberté du numérateur

ν_2 : degrés de liberté du dénominateur

$$F(f) = P\ (\ F_{(\nu 1\ .\ \nu 2)}\ \leq\ f\ ) = 95\%$$

ν_2 ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	242.98	243.90	244.69	245.36	245.95	246.47
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.40	19.41	19.42	19.42	19.43	19.43
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71	8.70	8.69
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.89	5.87	5.86	5.84
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	**4.74**	4.70	4.68	4.66	4.64	4.62	4.60
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98	3.96	3.94	3.92
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.55	3.53	3.51	3.49
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.20
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.05	3.03	3.01	2.99
10	4.96	4.10	3.71	3.48	**3.33**	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86	2.85	2.83
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74	2.72	2.70
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.66	2.64	2.62	2.60
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60	2.58	2.55	2.53	2.51
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.48	2.46	2.44
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45	2.42	2.40	2.38
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.40	2.37	2.35	2.33
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.35	2.33	2.31	2.29
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.29	2.27	2.25
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23	2.21
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18	2.16
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23	2.20	2.17	2.15	2.13
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.24	2.20	2.18	2.15	2.13	2.11
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.22	2.18	2.15	2.13	2.11	2.09
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16	2.14	2.11	2.09	2.07
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15	2.12	2.09	2.07	2.05
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.17	2.13	2.10	2.08	2.06	2.04
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12	2.09	2.06	2.04	2.02
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.14	2.10	2.08	2.05	2.03	2.01
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	2.06	2.04	2.01	1.99
32	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19	2.14	2.10	2.07	2.04	2.01	1.99	1.97
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17	2.12	2.08	2.05	2.02	1.99	1.97	1.95
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.95	1.93
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	2.05	2.02	1.99	1.96	1.94	1.92
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.97	1.95	1.92	1.90

Exemple : $\nu_1 =$ 5 d.d.l. et $\nu_2 =$ 10 d.d.l. $P\ (\ F_{5\ .\ 10}\ \leq\ f\ )\ =\ 0.95\ \Rightarrow\ f = 3.33$

SPS Home > Stats Tables > Durbin Watson 0.05 Table

Critical Values for the Durbin-Watson Statistic (d)										
Level of Significance α = .05										
n	***k* = l**		***k* = 2**		***k* = 3**		***k* = 4**		***k* = 5**	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
6	0.61	1.40								
7	0.70	1.36	0.47	1.90						
8	0.76	1.33	0.56	1.78	0.37	2.29				
9	0.82	1.32	0.63	1.70	0.46	2.13	0.30	2.59		
10	0.88	1.32	0.70	1.64	0.53	2.02	0.38	2.41	0.24	2.82
11	0.93	1.32	0.66	1.60	0.60	1.93	0.44	2.28	0.32	2.65
12	0.97	1.33	0.81	1.58	0.66	1.86	0.51	2.18	0.38	2.51
13	1.01	1.34	0.86	1.56	0.72	1.82	0.57	2.09	0.45	2.39
14	1.05	1.35	0.91	1.55	0.77	1.78	0.63	2.03	0.51	2.30
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
16	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	0.92	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.4	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.96	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83

31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1,43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78
150	1.72	1.75	1.71	1.76	1.69	1.77	1.68	1.79	1.66	1.80
200	1.76	1.78	1.75	1.79	1.74	1.80	1.73	1.81	1.72	1.82

Where ***n*** = number of observations and ***k*** = number of independent variables

Critical Values for the Durbin-Watson Statistic (d)										
Level of Significance α = .05										
n	***k* = 6**		***k* = 7**		***k* = 8**		***k* = 9**		***k* = 10**	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U

11	0.20	3.01								
12	0.27	2.83	0.17	3.15						
13	0.33	2.70	0.23	2.99	0.15	3.27				
14	0.39	2.57	0.29	2.85	0.20	3.11	0.13	3.36		
15	0.45	2.47	0.34	2.73	0.25	2.98	0.18	3.22	0.11	3.44
16	0.50	2.39	0.40	2.62	0.30	2.86	0.22	3.09	0.16	3.30
17	0.55	2.32	0.45	2.54	0.36	2.76	0.27	2.98	0.20	3.18
18	0.60	2.26	0.50	2.47	0.41	2.67	0.32	2.87	0.24	3.07
19	0.65	2.21	0.55	2.40	0.46	2.59	0.37	2.78	0.29	2.97
20	0.69	2.16	0.60	2.34	0.50	2.52	0.42	2.70	0.34	2.89
21	0.73	2.12	0.64	2.30	0.55	2.46	0.46	2.63	0.38	2.81
22	0.77	2.09	0.68	2.25	0.59	2.41	0.51	2.57	0.42	2.73
23	0.80	2.06	0.72	2.21	0.63	2.36	0.55	2.51	0.47	2.67
24	0.84	2.04	0.75	2.17	0.67	2.32	0.58	2.46	0.51	2.61
25	0.87	2.01	0.78	2.14	0.70	2.28	0.62	2.42	0.54	2.56
26	0.90	1.99	0.82	2.12	0.74	2.24	0.66	2.38	0.58	2.51
27	0.93	1.97	0.85	2.09	0.77	2.22	0.69	2.34	0.62	2.47
28	0.95	1.96	0.87	2.07	0.80	2.19	0.72	2.31	0.65	2.43
29	0.98	1.94	0.90	2.05	0.83	2.16	0.75	2.28	0.68	2.40
30	1.00	1.93	0.93	2.03	0.85	2.14	0.78	2.25	0.71	2.36
31	1.02	1.92	0.95	2.02	0.88	2.12	0.81	2.23	074	2.33
32	1.04	1.91	0.97	2.00	0.90	2.10	0.84	2.20	0.77	2.31
33	1.06	1.90	0.99	1.99	0.93	2.09	0.86	2.18	0.80	2.28
34	1.08	1.89	1.02	1.98	0.95	2.07	0.89	2.16	0.82	2.26
35	1.10	1.88	1.03	1.97	0.97	2.05	0.91	2.14	0.85	2.24
36	1.11	1.88	1.05	1.96	0.99	2.04	0.93	2.13	0.87	2.22
37	1.13	1.87	1.07	1.95	1.01	2.03	0.95	2.11	0.89	2.20
38	1.50	1.86	1.09	1.94	1.03	2.02	0.97	2.10	0.91	2.18
39	1.16	1.86	1.10	1.93	1.05	2.01	0.99	2.09	0.93	2.16
40	1.18	1.85	1.12	1.92	1.06	2.00	1.01	2.07	0.95	2.15

45	1.24	1.84	1.19	1.90	1.14	1.96	1.09	2.02	1.04	2.09
50	1.29	1.82	1.25	1.88	1.20	1.93	1.16	1.99	1.11	2.04
55	1.33	1.81	1.29	1.86	1.25	1.91	1.21	1.96	1.17	2.01
60	1.37	1.81	1.34	1.85	1.30	1.89	1.26	1.94	1.22	1.98
65	1.40	1.81	1.37	1.84	1.34	1.88	1.30	1.92	1.27	1.96
70	1.43	1.80	1.40	1.84	1.37	1.87	1.34	1.91	1.31	1.95
75	1.46	1.80	1.43	1.83	1.40	1.87	1.37	1.90	1.34	1.94
80	1.48	1.80	1.45	1.83	1.43	1.86	1.40	1.89	1.37	1.93
85	1.50	1.80	1.47	1.83	1.49	1.86	1.42	1.89	1.40	1.92
90	1.52	1.80	1.49	1.83	1.47	1.85	1.45	1.88	1.42	1.91
95	1.54	1.80	1.51	1.83	1.49	1.85	1.46	1.88	1.44	1.90
100	1.55	1.80	1.53	1.83	1.50	1.85	1.48	1.87	1.46	1.90
150	1.65	1.82	1.64	1.83	1.62	1.85	1.60	1.86	1.59	1.88
200	1.71	1.83	1.70	1.84	1.69	1.85	1.68	1.86	1.67	1.87

Where ***n*** = number of observations and ***k*** = number of independent variables

تم بحمد الله