



Université Sétif 1 Ferhat Abbas
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Thèse de Doctorat

présentée en vue de l'obtention du diplôme
de Docteur en Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées aux Sciences Biologiques et Médicales

Thème :

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES À FRONTIÈRE MOBILE ISSUS DE LA BIOLOGIE

Présentée par

Mlle. **BELABBES Soumaya**

Directeur de thèse : **Professeur Abdellatif BOUREGHDA**

Thèse soutenue le 31 mai 2025, devant le jury composé de :

Mr. Lakhdar CHITER	Prof.	Université Setif 1 Ferhat Abbas	Président
Mr. Abdellatif BOUREGHDA	Prof.	Université Setif 1 Ferhat Abbas	Rapporteur
Mr. Salim MESBAHI	Prof.	Université Setif 1 Ferhat Abbas	Examineur
Mr. Ahcene MERAD	Prof.	Université Oum El-Bouaghi Larbi Ben M'hidi	Examineur
Mr. Rabah KHEMIS	Prof.	Université Skikda 20 Août 1955	Examineur
Mr. Zoheir CHEBEL	MCA	Centre Universitaire de Barika Si El-Haouès	Examineur
Mme. Ahlème BOUAKKAZ	MCA	Université Skikda 20 Août 1955	Invitée

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Je remercie Dieu, le Tout-Puissant, de m'avoir donné assez de courage pour accomplir ce travail. Je tiens à remercier tout d'abord mon directeur de thèse, **Bouregghda Abdellatif**, professeur de mathématiques à l'Université Ferhat ABBAS Sétif 1, pour sa confiance son aide, ses remarques et ses conseils.

Je voudrais également remercier les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer ce travail.

Mes remerciements s'adressent également à toute l'équipe professorale de la faculté des sciences pour la qualité de leur enseignement.

Dédicace

Toute ma reconnaissance va à ma famille et à mes amis, qui ont été une agréable source d'encouragement, en particulier à mes parents.

Je saisis cette occasion pour exprimer à nouveau mon appréciation à mon encadrant, **Pr. Abdellatif Boureghda**, qui a toujours fait preuve de compréhension et de motivation tout au long de mon cycle doctoral. Tous les mots que l'on pourrait dire ne suffiraient pas à exprimer pleinement ma reconnaissance.

C'est également l'occasion de remercier **Abdelaziz Choutri**, professeur à l'École Normale Supérieure de Kouba, qui m'a continuellement orientée.

Je tiens aussi à mentionner l'ensemble de mes collègues, pour les échanges scientifiques et l'atmosphère amicale qu'ils ont su créer.

À toutes ces personnes, je dédie ce modeste travail, ainsi qu'à toute personne m'ayant soutenue de près ou de loin.

Table des Matières

Table des Matières	v
Liste des Illustrations	vi
Liste des Tableaux	vii
Présentation	1
1 Notions fondamentales et outils préliminaires	4
1.1 Introduction générale	4
1.2 Fondements théoriques des PFM:	5
1.3 Approches analytiques :	6
1.4 Dynamique des frontières :	7
1.5 Méthodes numériques :	9
1.6 Applications et études de cas	14
1.7 Défis et perspectives	16
2 Sur la solution numérique de la solidification de l'eau	18
2.1 Introduction	18
2.2 Modèle Physique et Conditions aux Limites	19
2.3 Méthode de résolution	21
2.4 Conclusions	22
3 Solution numérique du problème de diffusion de l'oxygène dans une cellule sphérique	28
3.1 Introduction	28
3.2 Formulation mathématique(en forme non dimensionnelle)	31
3.3 Solutions analytiques à court terme	34
3.4 Analyse critique de l'article d'Ahmed Said	37
3.5 Méthodologie de la solution proposée	38
3.6 Analyse et Interprétation des Résultats Numériques	42
3.7 Conclusions	45
Bibliographie	48

Liste des Illustrations

2.1	Représentation de la température initiale dans la région eau-glace . .	20
2.2	Position de la frontière mobile par rapport au temps.	24
2.3	Distributions de température dans la glace à différents moments. . . .	25
3.1	Diffusion de l'oxygène dans le milieu.	32
3.2	Coupure de l'alimentation en oxygène.	33
3.3	Distributions de la concentration pour $t = 0.00, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04$. . .	35
3.4	Positions des frontières mobiles par rapport au temps, calculées par la méthode actuelle.	44
3.5	Distributions des concentrations pour la surface fixe ($x = 1$) et pour $t = 0.060$, calculées la par la méthode actuelle.	45

Liste des Tableaux

2.1	Positions de l'interface $10^4 s(t)$ et températures $10^4 u(x, s)$ dans la glace (avec les signes négatifs supprimés), avec les temps correspondants calculés respectivement à partir de (2.10) et (2.13); pour chaque position de l'interface	26
2.2	Comparaison de la position de la frontière mobile $s(t)$ à différents instants entre la méthode actuelle et d'autres méthodes numériques	27
3.1	Valeurs de $10^6 c$ calculées à partir de l'équation (3.7) pour divers petits intervalles de temps.	36
3.2	Comparaison de la position de la frontière mobile $s(t)$ à différents instants à partir de la méthode actuelle (utilisant quatre systèmes) avec la méthode numérique [29]	46
3.3	Figures comparatives pour la concentration à la surface scellée $u(1, t)$ à différents instants à partir de la méthode présente avec la méthode numérique [29]	47

Présentation

Les problèmes à frontière mobile (PFM) concernent l'évolution dynamique des interfaces ou frontières dans divers systèmes physiques, chimiques ou biologiques. Leur étude est cruciale pour comprendre des phénomènes tels que la solidification, la croissance cristalline ou encore les interactions fluides-structures. Ces frontières en mouvement sont influencées par des forces ou des flux, rendant leur analyse particulièrement complexe et essentielle pour de nombreuses applications [15].

Dans la physique et l'ingénierie des matériaux, les PFM jouent un rôle clé dans la croissance cristalline et la solidification, des processus essentiels pour le développement de matériaux avancés [41]. En dynamique des fluides, les PFM permettent de modéliser les interfaces entre fluides et les flux multiphasiques, avec des implications dans l'industrie pétrolière et chimique. En géophysique, ces problèmes aident à étudier les mouvements tectoniques et les glaciers, contribuant ainsi à la prévision des séismes et au suivi des changements climatiques. En biologie, les PFM permettent de modéliser des processus tels que la cicatrisation des plaies et la morphogenèse, des phénomènes cruciaux pour la médecine et la recherche sur le cancer. Enfin, dans les sciences de l'environnement, les PFM contribuent à la compréhension de l'érosion côtière et des interfaces écosystémiques, offrant des outils pour la conservation et la gestion des ressources naturelles.

Pour résoudre ces problèmes complexes, diverses approches théoriques, analytiques et numériques sont utilisées. La modélisation repose souvent sur des équations aux dérivées partielles (EDP), qui décrivent l'évolution des interfaces et les conditions aux limites évolutives. Ces outils mathématiques permettent de représenter des phénomènes complexes comme les transitions de phase ou les interactions multiphysiques.

Les approches analytiques incluent des techniques telles que la séparation des variables, les transformées de Fourier et de Laplace, ainsi que les méthodes variationnelles, fournissant des solutions exactes ou approchées pour certains problèmes spécifiques. Cependant, leur application est parfois limitée par la complexité des systèmes. Les méthodes numériques, quant à elles, sont particulièrement adaptées pour traiter la complexité des PFM. Par exemple, la méthode des éléments finis (MEF) et celle des volumes finis (MVF) sont largement utilisées pour discrétiser les domaines d'étude

et résoudre les équations. La méthode de niveau-set, combinée avec des techniques d'adaptation de maillage, offre une capacité puissante pour suivre l'évolution des frontières, même en cas de changements topologiques tels que la fusion ou la fragmentation.

Un aspect clé des PFM réside dans les **simulations multiphysiques**, qui permettent d'intégrer plusieurs phénomènes simultanément. Ces simulations, par exemple, peuvent combiner les interactions thermiques et mécaniques dans les matériaux ou les interactions fluides-structures dans les systèmes biologiques, offrant une vision plus complète des phénomènes étudiés.

Les défis dans ce domaine sont nombreux : les phénomènes non linéaires, les interactions multiphysiques complexes, les instabilités des frontières, et la validation expérimentale des modèles. Cependant, les avancées technologiques, notamment en intelligence artificielle et en apprentissage automatique, promettent d'améliorer considérablement la modélisation et les simulations des PFM, renforçant leur rôle dans des applications variées allant de l'ingénierie à la biologie [36, 37].

Division de la thèse

La thèse est structurée en trois chapitres :

1. Chapitre 1 : Notions fondamentales et outils préliminaires

Ce premier chapitre pose les bases nécessaires pour les études ultérieures. Nous y présentons des notions fondamentales, comme les définitions des PFM, l'analyse de la stabilité et de la convergence des méthodes numériques, ainsi que des fondements théoriques relatifs aux dynamiques des frontières. Une attention particulière est accordée aux approches analytiques et numériques, illustrées par des exemples concrets. Ce chapitre introduit également les outils essentiels pour la simulation, mettant en avant les techniques modernes comme la méthode de niveau-set et l'adaptation de maillage, ainsi que des applications pratiques et des études de cas.

2. Chapitre 2 : Sur la solution numérique de la solidification de l'eau

Dans ce chapitre, nous développons et analysons un algorithme économique basé sur un polynôme de troisième degré pour résoudre un problème de frontière libre spécifique au changement de phase. Ce travail inclut des simulations numériques détaillées pour illustrer la précision et l'efficacité de l'algorithme, en le comparant avec des méthodes classiques. Une étude approfondie des résultats obtenus et des défis associés à la simulation est également menée.

3. Chapitre 3 : Solution numérique du problème de diffusion de l'oxygène dans une cellule sphérique

Ce dernier chapitre est consacré à l'étude analytique et numérique d'un problème de diffusion de l'oxygène dans une géométrie sphérique avec absorption simultanée à un taux constant. Une représentation polynomiale est utilisée pour approximer le profil de concentration d'oxygène, conduisant à un système d'équations différentielles traité par des méthodes analytiques et numériques. Des simulations sont réalisées pour valider la méthode proposée et explorer l'impact des paramètres du modèle sur les résultats obtenus.

Chapitre 1

Notions fondamentales et outils préliminaires

1.1 Introduction générale

Les Problèmes à Frontière Mobile (PFM) sont une classe de problèmes mathématiques et physiques qui se distinguent par la présence de frontières ou d'interfaces en mouvement dans un système dynamique. Contrairement aux problèmes à frontière fixe, où les conditions aux limites restent constantes dans le temps, les PFM impliquent des frontières qui évoluent au fil du temps, ce qui rend leur analyse plus complexe et souvent plus fascinante. Le concept de PFM trouve des applications dans divers domaines scientifiques et techniques, notamment en physique, en ingénierie, en biologie et en économie. Par exemple, dans la mécanique des fluides, les PFM peuvent modéliser la propagation des vagues le long d'une plage, où la frontière entre l'eau et le sable change continuellement. Dans la thermodynamique, les PFM peuvent décrire la croissance d'un cristal à partir d'un liquide, où la frontière entre les deux phases évolue au fur et à mesure que le cristal se forme. Comprendre et maîtriser les PFM est donc essentiel pour de nombreux domaines d'ingénierie et de recherche scientifique [15, 16, 21, 24, 23].

Un exemple classique de PFM est le problème de Stefan, qui traite de la solidification d'un liquide en un solide. Dans ce cas, la frontière entre le liquide et le solide se déplace au fil du temps à mesure que le processus de solidification progresse. La compréhension de la dynamique de cette frontière mobile est essentielle pour prédire le comportement global du système. La résolution des PFM implique souvent l'utilisation d'outils mathématiques avancés tels que les équations aux dérivées partielles, les méthodes numériques et les techniques d'analyse asymptotique. En raison de leur nature complexe, la résolution analytique exacte des PFM est souvent difficile, voire impossible, ce qui conduit généralement à l'utilisation de méthodes numériques

pour obtenir des solutions approximatives. En conclusion, les Problèmes à Frontière Mobile représentent un domaine d'étude riche et multidisciplinaire, où la physique, les mathématiques et l'ingénierie se rejoignent pour étudier des phénomènes complexes et dynamiques. Leur compréhension et leur résolution présentent des défis stimulants et offrent des perspectives importantes pour de nombreuses applications pratiques [46, 26].

1.2 Fondements théoriques des PFM:

Dans cette section, nous examinerons les bases théoriques des Problèmes à Frontière Mobile (PFM), en nous concentrant sur les concepts fondamentaux et les outils mathématiques indispensables à leur compréhension et à leur résolution. Les principaux aspects abordés incluront une présentation claire des notions clés, accompagnée d'une analyse approfondie des méthodes et techniques pertinentes. Ces aspects nous fourniront une base solide pour aborder plus en détail la modélisation et la résolution de problèmes spécifiques dans ce domaine.

1.2.1 *Équations aux Dérivées Partielles (EDP) :*

Nous commencerons par introduire les équations aux dérivées partielles (EDP) couramment utilisées pour modéliser les phénomènes physiques et mécaniques (PFM). Parmi celles-ci figurent l'équation de la chaleur, l'équation de diffusion, et l'équation de Navier-Stokes, ainsi que d'autres équations adaptées aux systèmes physiques spécifiques étudiés. Ces outils mathématiques constituent une base essentielle pour analyser et comprendre le comportement des systèmes dans divers contextes scientifiques et techniques.

1.2.2 *Conditions aux Limites Évolutives:*

Nous analyserons ensuite les conditions aux limites propres aux PFM, en soulignant leur évolution dynamique au fil du temps. Contrairement aux problèmes à frontière fixe, où les conditions aux limites demeurent inchangées, les PFM se distinguent par des conditions aux limites intrinsèquement liées à la mobilité des frontières ou des interfaces.

1.2.3 *Méthodes de Résolution:*

Nous explorerons diverses méthodes de résolution appliquées aux PFM, incluant à la fois des approches analytiques et numériques. Parmi les techniques analytiques,

nous aborderons les séries de Fourier, les transformations de Laplace et les méthodes asymptotiques, qui permettent une compréhension approfondie des solutions. Du côté des approches numériques, nous mettrons en avant des méthodes robustes telles que les différences finies, les éléments finis et les méthodes de frontière, qui sont particulièrement adaptées aux cas où les solutions analytiques sont inaccessibles.

1.3 Approches analytiques :

Dans le cadre des Problèmes à Frontière Mobile (PFM), les approches analytiques désignent des méthodes de résolution visant à obtenir des solutions exactes ou des approximations de haute précision, en s'appuyant sur des techniques et outils mathématiques rigoureux. Voici quelques-unes des méthodes analytiques les plus couramment utilisées pour traiter les PFM :

1.3.1 Méthodes de Séparation des Variables :

Cette approche repose sur l'idée que la solution du problème peut être exprimée comme un produit de fonctions simples, chacune dépendant d'une seule variable. En postulant la séparation des variables, il devient souvent possible de transformer les équations aux dérivées partielles en un système d'équations différentielles ordinaires, qui sont généralement plus faciles à résoudre.

1.3.2 Méthodes Asymptotiques :

Les méthodes asymptotiques permettent d'obtenir des solutions sous forme de séries ou de développements perturbatifs, offrant ainsi une approximation précise du comportement d'un système. Elles sont particulièrement adaptées pour analyser des situations où certains paramètres sont soit très petits, soit très grands. Par exemple, dans le cadre des PFM (problèmes aux frontières mobiles), ces méthodes peuvent être appliquées pour examiner le comportement des solutions à proximité des frontières en mouvement ou dans des zones où les gradients sont fortement accentués.

1.3.3 Transformées Intégrales :

Les transformées intégrales, comme la transformée de Fourier ou la transformée de Laplace, sont des outils puissants qui permettent de convertir des équations différentielles en équations algébriques. Cette transformation simplifie souvent la résolution des équations en réduisant leur complexité. De plus, ces méthodes sont particulièrement

efficaces pour aborder des problèmes impliquant des conditions aux limites non homogènes ou des conditions initiales complexes, en facilitant leur analyse et leur résolution.

1.3.4 Méthodes Variationnelles :

Les méthodes variationnelles sont fondées sur le calcul des variations et permettent de reformuler un problème en termes de minimisation ou de maximisation d'une fonctionnelle spécifique. Elles sont couramment employées dans le cadre de la méthode des éléments finis, une technique numérique largement utilisée pour résoudre des problèmes aux dérivées partielles (EDP). Ces méthodes jouent un rôle clé dans l'approximation de solutions numériques, notamment dans des domaines comme la mécanique, la physique, et l'ingénierie.

1.3.5 Calcul Symbolique :

Les outils de calcul symbolique, comme Mathematica ou Maple, permettent d'effectuer des calculs mathématiques complexes de manière exacte, en travaillant directement avec des symboles et des expressions algébriques. Contrairement aux méthodes numériques, qui approximeraient les résultats, ces logiciels offrent la possibilité de manipuler des formules symboliques et d'obtenir des solutions analytiques précises. Ils sont particulièrement adaptés pour traiter des équations ou des systèmes d'expressions qui ne peuvent pas être résolus numériquement ou qui nécessitent une approche rigoureuse et détaillée.

En combinant ces diverses méthodes analytiques, il est souvent possible d'obtenir des solutions précises ainsi que des éclairages approfondis sur le comportement des systèmes modélisés par les PFM. Toutefois, il est essentiel de souligner que, dans de nombreux cas, il n'est pas possible d'obtenir des solutions exactes. Dans ces situations, il est nécessaire de recourir à des méthodes numériques pour obtenir des solutions approximatives.

1.4 Dynamique des frontières :

La dynamique des frontières, parfois désignée sous le terme de dynamique des interfaces, étudie le comportement et l'évolution des limites séparant différentes phases ou régions au sein d'un système physique. Ce domaine revêt une importance particulière dans l'étude des Problèmes à Frontière Mobile (PFM), où il joue un rôle central en décrivant les mécanismes qui régissent le déplacement et la transformation des frontières mobiles au fil du temps.

1.4.1 Mouvement des Frontières :

La dynamique des frontières analyse les mécanismes par lesquels les frontières, ou interfaces, entre différentes phases se déplacent et se transforment au fil du temps. Ces déplacements résultent de divers facteurs, tels que l'application de forces externes, la présence de gradients de propriétés physiques ou chimiques, ou encore les interactions complexes entre les différentes composantes du système.

1.4.2 Instabilités Frontalières :

Les frontières entre deux milieux peuvent engendrer des instabilités, donnant lieu à des formes complexes et des dynamiques non linéaires. Par exemple, les instabilités de Rayleigh-Taylor apparaissent lorsque deux fluides de densités différentes sont soumis à une accélération gravitationnelle, le fluide plus dense ayant tendance à s'écouler vers le bas, tandis que le fluide moins dense remonte. En revanche, les instabilités de Kelvin-Helmholtz se manifestent lorsque deux fluides se déplacent à des vitesses différentes, provoquant la formation de structures ondulatoires à leur interface.

1.4.3 Interaction avec les Forces Externes :

Les frontières mobiles sont susceptibles d'interagir avec diverses forces externes, telles que la gravité, les forces de tension de surface, ainsi que les forces électriques ou magnétiques. Ces interactions jouent un rôle déterminant en modifiant à la fois le déplacement et la configuration de ces frontières, engendrant ainsi des dynamiques souvent complexes et difficiles à prédire.

1.4.4 Modélisation Mathématique :

La dynamique des frontières est fréquemment analysée à l'aide de modèles mathématiques reposant sur des équations aux dérivées partielles et des principes de conservation. Ces outils décrivent avec précision l'évolution des propriétés physiques ou chimiques à travers les frontières. En offrant une représentation rigoureuse de ces phénomènes, ces modèles permettent de prévoir le comportement des frontières dans une large gamme de contextes et d'applications.

La compréhension des dynamiques des frontières est cruciale pour de nombreuses disciplines et applications pratiques, notamment la croissance des cristaux, la solidification des métaux, la formation des bulles dans les fluides ou encore la propagation des vagues. Une étude approfondie de ces phénomènes ne se limite pas à l'exploration des processus naturels : elle ouvre également la voie au développement de technologies innovantes et à la résolution de défis complexes en ingénierie.

1.5 Méthodes numériques :

Pour aborder les problèmes liés aux frontières mobiles, il est possible de recourir à diverses méthodes numériques. Ces approches, bien établies, offrent des outils efficaces pour modéliser et résoudre ces problématiques complexes. Voici un aperçu des principales techniques généralement employées :

1.5.1 Méthode des Différences Finies (MDF) :

La méthode des différences finies est largement reconnue comme un outil incontournable pour la résolution numérique des équations différentielles partielles (EDP), qui modélisent de nombreux phénomènes physiques et scientifiques. Cette méthode repose sur l'approximation des dérivées en remplaçant leurs expressions continues par des différences discrètes, ce qui permet de transformer les EDP en systèmes d'équations algébriques résolubles par des ordinateurs. Cependant, lorsqu'elle est appliquée à des problèmes à frontière mobile, la méthode des différences finies exige des adaptations spécifiques et des techniques supplémentaires, car ces problèmes présentent des défis uniques.

Les problèmes à frontière mobile se distinguent par une caractéristique fondamentale: la frontière du domaine de calcul, ou une partie de celui-ci, évolue dynamiquement dans le temps. Cette évolution est souvent dictée par des phénomènes physiques complexes tels que la propagation de la chaleur, les mouvements de fluides, les écoulements multiphasiques, ou encore la croissance et l'érosion de matériaux. Contrairement aux problèmes classiques où le domaine est fixe et bien défini, les problèmes à frontière mobile nécessitent une prise en compte explicite de la dynamique de cette frontière, ce qui introduit une couche supplémentaire de complexité dans le processus de modélisation et de calcul.

L'un des principaux défis de l'application des différences finies à ces problèmes réside dans la gestion de la géométrie changeante du domaine. En effet, les schémas classiques de différences finies sont généralement conçus pour des maillages réguliers, où les points de calcul sont fixés dans le temps. Lorsqu'une frontière mobile est introduite, il devient nécessaire de redéfinir dynamiquement le maillage pour suivre l'évolution de cette frontière. Une méthode couramment utilisée pour surmonter ce problème consiste à adopter des techniques de remaillage adaptatif, où le maillage est mis à jour en temps réel pour s'adapter à la nouvelle position de la frontière. Cette approche garantit une résolution précise des phénomènes locaux, mais elle nécessite une gestion minutieuse pour éviter des problèmes tels que la distorsion du maillage ou l'instabilité numérique.

Une autre difficulté réside dans la formulation des conditions aux limites sur une frontière qui se déplace. Dans les problèmes classiques, ces conditions sont spécifiées

sur des limites fixes du domaine. En revanche, dans les problèmes à frontière mobile, les conditions aux limites doivent être reformulées à chaque instant pour refléter la position actuelle de la frontière. Par exemple, dans le cas d'un problème de diffusion de chaleur avec fusion, la température à la surface mobile peut être imposée comme une contrainte, tandis que le flux de chaleur à travers cette surface est ajusté en fonction de la vitesse de déplacement de la frontière. Cela nécessite souvent l'intégration de relations couplées entre l'équation gouvernante dans le domaine et les équations décrivant l'évolution de la frontière.

Pour garantir la stabilité et la précision des calculs, des techniques spécifiques doivent être intégrées aux schémas de différences finies. Parmi elles, les méthodes implicites sont particulièrement utiles dans les problèmes à frontière mobile, car elles offrent généralement une meilleure stabilité pour des pas de temps plus importants. Cependant, leur mise en œuvre peut être plus complexe, nécessitant la résolution de systèmes non linéaires couplés. De plus, les techniques d'interpolation jouent un rôle clé, en particulier lorsque des quantités physiques doivent être évaluées sur une frontière située entre des points de calcul définis par le maillage [2, 42, 40, 35].

Outre les approches traditionnelles, des méthodes hybrides combinant les différences finies avec d'autres techniques numériques, telles que les méthodes des éléments finis ou des volumes finis, sont souvent employées pour traiter efficacement les problèmes à frontière mobile. Ces méthodes permettent de tirer parti des forces de chaque approche, comme la flexibilité géométrique des éléments finis et la simplicité des différences finies, pour s'adapter aux exigences complexes de ces problèmes. Par exemple, une méthode mixte peut utiliser un maillage mobile pour suivre la frontière tout en conservant un schéma de différences finies dans les régions internes du domaine.

En définitive, l'application de la méthode des différences finies aux problèmes à frontière mobile est un domaine en constante évolution, porté par les besoins croissants de modéliser des phénomènes de plus en plus complexes. Les défis liés à la gestion des frontières mobiles, à l'adaptation du maillage, à la formulation des conditions aux limites et à la stabilité des calculs nécessitent une recherche continue et le développement de techniques novatrices. Ces efforts permettent non seulement d'améliorer la compréhension des phénomènes dynamiques dans des domaines tels que la physique, la biologie et l'ingénierie, mais également de développer des outils numériques performants, capables de relever les défis des applications réelles.

Ainsi, en explorant les différentes approches et en perfectionnant les techniques existantes, la méthode des différences finies continue de s'imposer comme un pilier essentiel pour la résolution des EDP dans les problèmes à frontière mobile. Sa flexibilité et son efficacité en font un choix privilégié pour répondre aux exigences complexes de ces problématiques, tout en ouvrant la voie à de nouvelles perspectives scientifiques

et technologiques.

1.5.2 *Méthode des Éléments Finis (MEF) :*

La méthode des éléments finis constitue un outil performant pour résoudre les équations aux dérivées partielles. Lorsqu'il s'agit de modéliser des frontières mobiles, cette méthode peut être enrichie par l'emploi de techniques de remaillage adaptatif. Ces techniques reposent sur une adaptation dynamique du maillage afin de suivre avec précision les déplacements de la frontière mobile. En redistribuant les nœuds du maillage autour de cette frontière, les algorithmes de remaillage adaptatif permettent de préserver la qualité géométrique du maillage tout en garantissant une précision numérique optimale.

1.5.3 *Méthode des Volumes Finis (MVF):*

La méthode des volumes finis est une technique numérique largement utilisée pour résoudre les équations de conservation régissant le mouvement et la dynamique des frontières mobiles. Cette méthode repose sur la subdivision du domaine en petits volumes finis, dans lesquels les équations de conservation sont formulées de manière locale. Les flux aux interfaces entre ces volumes sont ensuite calculés, permettant de résoudre les équations de manière numérique sur l'ensemble du domaine tout en préservant les principes fondamentaux de conservation.

1.5.4 *Méthode des Équations Intégrales:*

La méthode des équations intégrales constitue une approche élégante et efficace pour traiter un large éventail de problèmes de frontière. Elle repose sur une reformulation des équations différentielles gouvernant le phénomène étudié en équations intégrales, qui sont définies uniquement sur les frontières du domaine d'intérêt. Cette transformation permet de réduire significativement la dimensionnalité du problème, offrant ainsi des avantages à la fois théoriques et pratiques dans les domaines de la physique, de l'ingénierie et des mathématiques appliquées.

Le principe fondamental de la méthode des équations intégrales repose sur l'utilisation des fonctions de Green ou des noyaux intégraux adaptés pour reformuler les équations différentielles partielles (EDP) en des équations intégrales. Supposons, par exemple, qu'un problème soit gouverné par l'équation de Laplace ou de Poisson dans un domaine Ω , avec des conditions aux frontières spécifiées sur $\partial\Omega$. Plutôt que de résoudre directement l'EDP dans tout le domaine Ω , on reformule le problème en une intégrale

de surface qui exprime la solution à l'intérieur du domaine en fonction des conditions de frontière.

1.5.5 Méthode de Level-Set :

La méthode de level-set est une technique de suivi de frontière qui modélise celle-ci comme un ensemble de points correspondant à un niveau constant d'une fonction appelée fonction de niveau-set. Cette approche permet de représenter la frontière de manière implicite, ce qui facilite le suivi de son évolution, même lorsqu'elle subit des changements topologiques. Elle est particulièrement adaptée à la modélisation de frontières dynamiques dans des environnements complexes, où celles-ci peuvent fusionner, se fragmenter ou prendre des formes variées de manière imprévisible.

1.5.6 Méthode de Frontière Immobile (IB) :

La méthode de frontière immobile est une technique de suivi de frontière qui repose sur l'utilisation d'une grille fixe pour représenter le domaine physique. Elle emploie une approche de pénalisation pour imposer les conditions aux limites sur la frontière mobile. Cette méthode s'avère particulièrement efficace pour résoudre des problèmes où les frontières sont en mouvement, notamment dans des écoulements fluides, les interactions fluide-structure, ou les phénomènes de mouillage, où la frontière subit des forces ou contraintes externes.

1.5.7 Méthodes de Réseaux de Neurones :

Les réseaux de neurones et les méthodes d'apprentissage automatique offrent des outils puissants pour modéliser et prédire le comportement des frontières mobiles, en se basant sur des données expérimentales ou des simulations numériques. Ces techniques sont particulièrement adaptées aux problèmes complexes où les méthodes numériques classiques rencontrent des limitations, ainsi qu'aux situations où des données sont disponibles mais où les modèles analytiques existants ne permettent pas de représenter adéquatement le phénomène étudié.

Ces méthodes numériques proposent diverses stratégies pour modéliser et résoudre des problèmes impliquant des frontières mobiles. Le choix de la méthode appropriée dépend généralement de la spécificité du problème à traiter, de la complexité de la frontière mobile, ainsi que des ressources disponibles pour la résolution numérique. En associant ces approches à des techniques avancées de maillage, d'interpolation et de calcul, il devient possible d'obtenir des solutions à la fois précises et fiables pour une large gamme de problèmes comportant des frontières mobiles.

1.5.8 Analyse de la stabilité et de la convergence des solutions :

Lorsqu'il s'agit de résoudre des problèmes physiques complexes, tels que les problèmes à frontière mobile (PFM), l'analyse de la stabilité et de la convergence des méthodes numériques revêt une importance cruciale. Ces deux concepts constituent des piliers fondamentaux pour garantir que les solutions numériques obtenues reflètent fidèlement les phénomènes physiques sous-jacents. La stabilité assure que le comportement du schéma numérique reste maîtrisé et réaliste à mesure que les calculs avancent, tandis que la convergence garantit que les solutions numériques se rapprochent de la solution exacte lorsque le maillage spatial et/ou la discrétisation temporelle deviennent plus fins.

Dans cette optique, diverses techniques mathématiques et outils numériques sont mobilisés pour analyser la stabilité et la convergence des méthodes utilisées. L'analyse de von Neumann, les tests de convergence, les études d'erreur et les simulations numériques sur des plages variées de paramètres sont autant d'approches qui permettent de mieux comprendre et d'évaluer la performance des schémas numériques. Ces outils, chacun avec ses spécificités, jouent un rôle complémentaire dans la validation et l'amélioration des modèles numériques appliqués à des problèmes physiques complexes.

Dans ce qui suit, nous examinerons en détail les concepts de stabilité et de convergence, leurs implications dans la résolution des problèmes à frontière mobile, et les outils mathématiques et numériques mobilisés pour les analyser. Nous explorerons également les défis spécifiques liés à ces problématiques, ainsi que les approches développées pour surmonter ces difficultés dans des contextes variés [40].

- La stabilité

La stabilité d'un schéma numérique décrit sa capacité à contrôler les erreurs introduites au cours des calculs. En pratique, un schéma est dit stable si, pour une condition initiale donnée, les erreurs numériques ne croissent pas de manière incontrôlée au fil des itérations. Cette notion est cruciale dans le contexte des PFM, où les frontières dynamiques introduisent des perturbations qui peuvent amplifier les erreurs si le schéma utilisé n'est pas correctement conçu.

- La convergence

La convergence, quant à elle, se réfère à la tendance des solutions numériques à se rapprocher de la solution exacte du problème lorsque la taille des éléments de maillage ou le pas de temps diminuent. Un schéma convergent garantit que les résultats obtenus sont non seulement stables, mais aussi précis par rapport à la réalité physique modélisée. Pour les PFM, où des gradients élevés ou des

changements de phase se produisent à la frontière mobile, la convergence est essentielle pour capturer ces phénomènes avec fidélité.

- **Critère CFL**

Le critère CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) est un critère de stabilité couramment utilisé pour les schémas numériques en différences finies appliqués aux équations aux dérivées partielles. Ce critère impose une relation entre la taille du pas de temps, la vitesse des phénomènes physiques étudiés, et la taille du pas d'espace pour garantir la stabilité numérique.

- **Ordre de Convergence**

L'ordre de convergence d'une méthode numérique mesure comment l'erreur entre la solution numérique et la solution exacte diminue avec la réduction des pas de discrétisation. Une méthode est dite d'ordre p si l'erreur diminue proportionnellement à h^p , où h est la taille du pas de discrétisation.

1.6 Applications et études de cas

Les méthodes de résolution des problèmes à frontière mobile trouvent des applications dans de nombreux domaines, offrant des solutions efficaces à des défis complexes. Ces techniques sont utilisées dans des secteurs variés, où la gestion des interfaces dynamiques et des changements de forme est essentielle. Voici quelques exemples concrets d'applications et d'études de cas :

1.6.1 *Dynamique des Fluides* :

- **Simulation de l'écoulement multiphase** : Les méthodes de résolution des problèmes à frontière mobile sont couramment employées pour modéliser les écoulements multiphasiques. Ces méthodes trouvent des applications dans des domaines variés, comme les écoulements air-eau utilisés dans les simulations météorologiques, le comportement des bulles dans les réacteurs chimiques, ou encore l'écoulement sanguin dans les vaisseaux. Grâce à leur capacité à gérer les interfaces complexes entre les phases, elles offrent une approche efficace pour simuler ces phénomènes physiques variés.

1.6.2 *Mécanique des Matériaux* :

- **Modélisation de la croissance cristalline** : Les méthodes de résolution des problèmes à frontière mobile sont couramment utilisées pour modéliser des phénomènes

liés à la croissance des matériaux. Elles permettent de décrire des processus tels que la formation de cristaux lors de la solidification, l'évolution des grains dans les matériaux polycristallins, ainsi que la croissance de films minces dans les procédés de dépôt. Ces méthodes permettent de simuler avec précision les interfaces en mouvement, qui sont cruciales pour comprendre et prédire le comportement des matériaux dans ces différents contextes.

1.6.3 *Biologie et Médecine :*

- **Modélisation de la migration cellulaire :** Les méthodes de résolution des problèmes à frontière mobile sont couramment employées pour modéliser la migration des cellules dans divers processus biologiques. Elles permettent notamment de simuler des phénomènes tels que la cicatrisation des plaies, la formation de tissus ou encore la propagation des métastases dans le cancer. Ces approches sont essentielles pour comprendre et prédire les dynamiques cellulaires dans ces contextes biologiques complexes [36, 37].

1.6.4 *Génie Civil et Environnemental :*

- **Simulation de l'érosion et de la sédimentation :** Les méthodes de résolution des problèmes à frontière mobile sont employées pour modéliser les phénomènes d'érosion et de sédimentation qui se produisent dans les cours d'eau, les rivières et les zones littorales. Ces techniques permettent de prédire l'évolution des formes du paysage au fil du temps et de concevoir des infrastructures capables de résister aux modifications morphologiques de ces environnements naturels [31].

1.6.5 *Sciences de la Terre :*

- **Modélisation des interfaces air-sol :** Les méthodes de résolution des problèmes à frontière mobile sont appliquées pour analyser les interactions entre l'atmosphère et la surface terrestre. Elles permettent d'étudier des phénomènes variés, comme le déplacement des dunes de sable, l'évolution des glaciers, ou encore la propagation des incendies de forêt, en tenant compte de l'évolution dynamique des limites entre les différentes phases ou milieux.

1.7 Défis et perspectives

Malgré les avancées significatives dans les méthodes de résolution des problèmes à frontière mobile, plusieurs défis demeurent, et de nouvelles pistes de recherche se dessinent pour affiner et renforcer ces approches. Voici quelques-uns de ces défis ainsi que les perspectives qui en découlent:

Défis :

1. **Changement de Topologie:** Les variations de la topologie des frontières mobiles, telles que la fusion, la fragmentation ou la formation de nouvelles interfaces, représentent des défis spécifiques pour la modélisation et la résolution numérique. Ces phénomènes exigent des méthodes adaptées pour assurer une représentation précise et un traitement efficace des transitions complexes entre différentes configurations de l'espace.
2. **Instabilités et Non-linéarités:** Les frontières mobiles peuvent engendrer des instabilités et des comportements non linéaires, nécessitant ainsi l'utilisation de méthodes numériques performantes et fiables pour modéliser et analyser ces phénomènes de façon précise et détaillée.
3. La résolution des problèmes à frontière mobile peut s'avérer extrêmement gourmande en ressources computationnelles, notamment pour les problèmes en trois dimensions ou lorsqu'il s'agit de configurations complexes. Ces situations exigent souvent une gestion sophistiquée des calculs et une optimisation des algorithmes afin de traiter efficacement la grande quantité de données et les interactions complexes entre les différentes variables.
4. **Complexité des Interactions:** Les frontières mobiles interagissent fréquemment de manière complexe avec d'autres éléments du système, ce qui rend leur modélisation et la résolution des problèmes associés particulièrement délicates.

Perspectives :

1. **Amélioration des Méthodes Numériques:** Amélioration des méthodes numériques pour résoudre les problèmes à frontière mobile, en mettant l'accent sur leur robustesse, leur stabilité et leur efficacité. L'objectif est d'optimiser la précision des solutions tout en réduisant les coûts de calcul.

2. **Optimisation des Algorithmes:** Améliorer les algorithmes de résolution numérique afin d'accroître à la fois l'efficacité et la précision des simulations, tout en minimisant les coûts computationnels liés à la gestion des problèmes à frontière mobile.
3. **Intégration de Modèles Multiphysiques:** L'intégration de modèles multiphysiques permet de capturer de manière cohérente les interactions entre divers phénomènes physiques dans les systèmes comportant des frontières mobiles. Cette approche offre une modélisation plus réaliste et précise en prenant en compte l'effet mutuel des différents phénomènes, ce qui améliore la compréhension globale du comportement du système étudié.
4. **Validation Expérimentale et Applications Pratiques:** La validation expérimentale des modèles développés est cruciale pour garantir leur validité et leur pertinence dans des contextes réels. Elle permet de vérifier leur capacité à reproduire des comportements observés et à répondre aux exigences spécifiques des situations pratiques.
5. **Utilisation de l'Apprentissage Automatique:** L'utilisation de techniques d'apprentissage automatique, telles que les réseaux de neurones, permet de modéliser et de prévoir le comportement des frontières mobiles en se basant sur des données expérimentales ou des simulations numériques. Cette approche offre la possibilité d'analyser des phénomènes complexes et d'améliorer la précision des prédictions en tirant parti des relations subtiles présentes dans les données.
6. **Prise en Compte de l'Incertitude:** Intégration de l'incertitude dans les modèles numériques afin d'évaluer et de gérer les incertitudes liées aux paramètres du modèle, aux conditions aux limites et aux données expérimentales. Cette approche permet de mieux comprendre l'impact des variations et des erreurs potentielles sur les résultats obtenus, en fournissant une estimation plus fiable de la performance du modèle dans des situations réelles.

En surmontant ces défis et en explorant ces nouvelles pistes, il devient possible de progresser dans la modélisation et la résolution des problèmes à frontière mobile. Cela ouvre ainsi la voie à de nouvelles opportunités pour des avancées scientifiques et technologiques, avec des applications potentielles dans de nombreux domaines.

Chapitre 2

Sur la solution numérique de la solidification de l'eau

L'objectif de ce chapitre est de trouver un algorithme informatique économique utilisant un polynôme de troisième degré pour le problème de frontière libre correspondant au problème de changement de phase. Nous résolvons le problème afin d'obtenir l'expression analytique approximative de la distribution de température et du mouvement de l'interface en utilisant la méthode intégrale contrainte. Les résultats sont comparés aux études précédentes et semblent être en très bon accord avec ceux obtenus par des méthodes numériques utilisant d'autres techniques.

2.1 Introduction

De nombreux phénomènes peuvent être décrits par un problème de Stefan, par exemple la diminution de l'oxygène dans un muscle à proximité d'un vaisseau sanguin obstrué, la congélation des aliments, la lubrification, la diffusion de gaz, de liquide ou de liquide-gaz. Les problèmes à frontière mobile (PFM) de type Stefan apparaissent dans une gamme d'applications physiques, notamment dans l'analyse des processus de fusion et de solidification dans les solides [17, 34, 44].

Ces problèmes, dans lesquels la solution d'une équation différentielle doit satisfaire certaines conditions aux limites, sont appelés problèmes aux limites. La frontière est une fonction inconnue du temps, qui doit être déterminée avec la solution de l'équation différentielle. Dans ces cas, nous avons besoin de deux conditions aux limites : l'une pour déterminer la position de la frontière mobile et l'autre pour compléter la solution de l'équation différentielle.

Nous savons que ce type de problèmes est appelé problèmes de Stefan, en référence aux travaux de J. Stefan qui s'intéressait, vers 1889, à la fonte de la calotte glaciaire polaire [43].

Nous remarquons que la seule différence entre les divers problèmes de Stefan réside dans les équations régissant le phénomène, bien que l'idée des méthodes soit la même. Les problèmes à frontière mobile ont attiré beaucoup d'attention ces dernières années en raison de leur importance pratique en ingénierie et en sciences, comme le montrent J.R. Ockendon et W.R. Hodgkins [38], ainsi que [18, 30, 34]. Ces problèmes deviennent non linéaires en raison de la présence de la frontière mobile, voir Crank [15] et Boureghda [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. Pour cette raison, leurs solutions analytiques sont différentes. De nombreux autres auteurs ont traité les problèmes à frontière mobile en utilisant diverses méthodes [14, 33, 45].

Plusieurs références concernant le problème de changement de phase impliquant une frontière mobile peuvent être trouvées dans le problème de solidification populaire, initialement discuté par Rubinstein [41], qui est sélectionné pour l'analyse. L'une des plus anciennes méthodes à pas de temps variable est due à Douglas et Gallie [20]. Le même problème a été résolu par George et Damle [25] en utilisant la méthode des "lignes", par Finn et Varoglu [22] en utilisant les "éléments finis" basés sur des formulations variationnelles, et par Gupta et Banik [28] en utilisant la "méthode intégrale contrainte". Mener une recherche exhaustive sur les frontières mobiles dans plusieurs domaines a souvent rencontré des problèmes d'interdisciplinarité entre les mathématiques et d'autres disciplines. Pour plus de détails, voir [7, 17, 19, 27].

Notre objectif dans ce travail est d'étudier en détail la résolution d'un problème à frontière mobile par la méthode intégrale conventionnelle, où deux équations différentielles simulées du premier ordre sont obtenues, donnant la position de la frontière mobile et la valeur du paramètre additionnel inconnu de manière implicite. Les valeurs calculées à partir des expressions semblent être en très bon accord avec celles obtenues par des auteurs précédents ayant résolu le problème en utilisant d'autres techniques de méthodes numériques.

2.2 Modèle Physique et Conditions aux Limites

L'objectif de ce travail est d'étudier un problème de transfert de chaleur dans un milieu glace-eau occupant la région $0 \leq x \leq 1.0$. Pour simplifier, à tout instant t , l'eau, subissant un changement de phase, est contenue dans la région $s_1(t) \leq x \leq s_2(t)$, et le reste de la région est occupé par la glace. Nous supposons que $s_1(0) = 0.25$ et $s_2(0) = 0.75$, et que la température de la glace est linéaire dans chacune des deux régions où elle se trouve. La température de l'eau est supposée égale à la température critique de changement de phase, qui est nulle. La Figure 2.1 montre l'état temporel à température zéro des régions glace-eau ainsi que les positions des interfaces glace/eau. Aux Frontières $x = 0$ et $x = 1$, la température est maintenue à

une température négative unitaire en permanence. En raison de la symétrie autour de $x = 0.5$, le problème se réduit à trouver sa solution dans la région $0 \leq x \leq 0.5$ uniquement.

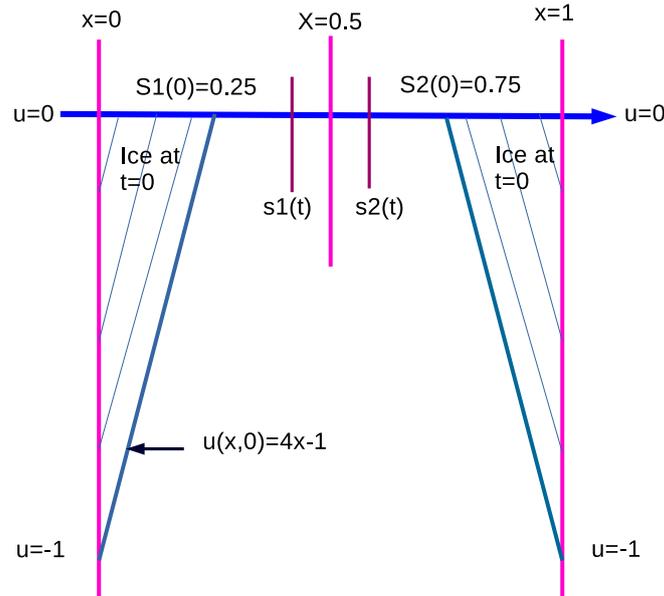


Figure 2.1: Représentation de la température initiale dans la région eau-glace

Nous exprimons le problème sous une forme non-dimensionnelle, qui peut être défini mathématiquement par l'équation différentielle suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (2.1)$$

avec les conditions aux limites

$$u = 0, \quad x \geq s(t), \quad t > 0, \quad (2.2)$$

$$u = -1 \quad \text{à la surface } x = s(t) \quad t > 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{à la frontière mobile } x = s(t) \quad t > 0, \quad (2.4)$$

et les conditions initiales à $t = 0$ sont

$$s(0) = 0.25, \quad (2.5)$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 4x - 1, & 0 \leq x \leq 0.25 \\ 0, & 0.25 \leq x \leq 0.50 \end{cases} \quad (2.6)$$

Nous notons que $u(x, t)$ est la température à une distance x de la surface fixe $x = 0$, à l'instant t , et que la position de la frontière mobile est $s(t)$.

2.3 Méthode de résolution

Dans ce travail, supposons que le profil de température de l'eau satisfaisant la condition (2.2) soit donné par un nouveau polynôme du troisième degré comme suit.

2.3.1 Profil polynomial de troisième degré pour les températures dans la glace

En choisissant un profil polynomial de troisième degré dans la variable spatiale x contenant quatre paramètres inconnus, qui sont en général des fonctions du temps, comme suit :

$$u(x, t) = \alpha_1 \left(\frac{s-x}{s} \right)^3 + \alpha_2 \left(\frac{s-x}{s} \right)^2 + \alpha_3 \left(\frac{s-x}{s} \right) + \alpha_4, \quad 0 < x < s(t) \quad (2.7)$$

Ces paramètres sont déterminés à l'aide des équations (2.2) et (2.3). Afin de déterminer les inconnues, dérivons une condition supplémentaire à l'interface en différenciant (2.2) par rapport à t . En utilisant (2.1) et (2.4), cela donne :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(s, t) \right)^2 = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s, t), \quad (2.8)$$

Dans ce problème, le gradient de surface est inconnu et, puisque la température est prescrite à la surface fixe conformément à (2.3).

Nous imposons une contrainte sur le gradient à la surface. Après avoir substitué les valeurs des dérivées de (2.7), nous obtenons α_1 et α_2 exprimés en fonction de α_3 . Ainsi, en utilisant les conditions (2.3) et (2.8) dans (2.7), nous obtenons : $\alpha_1 = \frac{\alpha_3^2 - 2\alpha_3 - 2}{2}$, $\alpha_2 = \frac{-\alpha_3^2}{2}$ et $\alpha_4 = 0$.

De plus, à partir de (2.7) nous observons que :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{1}{2s} (-\alpha_3^2 + 4\alpha_3 + 6) \quad (2.9)$$

et en utilisant (2.6) nous obtenons $\alpha_3 = -0.8284$ puisque $\frac{\partial u}{\partial x}$ reste positif à $x = s$ et le profil de température (2.7) peut maintenant s'écrire comme

$$u(x, s) = \left(-1 + \frac{\alpha_3^2}{2} - \alpha_3\right) \left(\frac{s-x}{s}\right)^3 - \frac{\alpha_3^2}{2} \left(\frac{s-x}{s}\right)^2 + \alpha_3 \left(\frac{s-x}{s}\right), \quad 0 < x < s(t) \quad (2.10)$$

En différenciant (2.10) par rapport à x pour $x = s$ et en utilisant (2.4), nous obtenons :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-\alpha_3}{s} \quad (2.11)$$

qui, après intégration et utilisation de (2.5) donne

$$t = 0.0377 (16s^2 - 1) \quad (2.12)$$

Nous choisissons un facteur approprié de 0.04 à la place de 0.0377 dans le membre de droite de (2.12) et la relation correspondante entre s et t devient:

$$s(t) = \sqrt{\frac{t + 0.04}{0.64}} \quad (2.13)$$

et la valeur correspondante de α_3 devient alors -0.78125 , obtenant ainsi une relation empirique pour le mouvement de l'interface.

2.4 Conclusions

Il est connu que les problèmes à frontière mobile de type Stefan apparaissent dans une gamme d'applications physiques dans l'analyse des processus de fusion et de solidification dans les solides [15, 39, 41, 44]. Beaucoup de ces problèmes présentent des difficultés analytiques et numériques, notamment la détermination d'une frontière mobile. Leur complexité provient, en particulier, de l'équation de bilan thermique à l'interface mobile qui sépare les phases et qui aboutit à une condition aux limites non linéaire.

Dans ce travail, nous observons que des expressions analytiques approximatives ont également été obtenues pour la distribution de température ainsi que pour le mouvement de l'interface en utilisant la méthode intégrale et en choisissant le polynôme de troisième degré.

Selon la position initiale de la frontière mobile $s(0) = 0.25$, la condition (2.5) et les conditions (2.12) et (2.13), nous avons calculé la distribution de température $u(x, s)$ (2.10) au temps t , et des valeurs numériques de s et u ont été calculées pour $\delta t = 0.001$.

Le tableau 2.1 donne les résultats obtenus par la méthode actuelle pour les températures dans la glace ainsi que pour le temps nécessaire à l'interface glace/eau $s(t)$ pour se déplacer à une position particulière. Un graphique a été tracé dans la Figure 2.2, montrant la position de la frontière mobile telle que calculée par la méthode actuelle. De plus, les distributions de température en fonction de la variable spatiale ont été calculées, et les résultats à cinq instants sont présentés dans la Figure 2.3.

Les résultats sont en assez bon accord avec ceux trouvés par [22], [25], [28], [39] et [41], comme indiqué dans le tableau 2.2. Les résultats calculés à partir de diverses méthodes montrent la supériorité de la méthode actuelle par rapport aux autres. De toute évidence, la méthode actuelle peut traiter efficacement de tels problèmes.

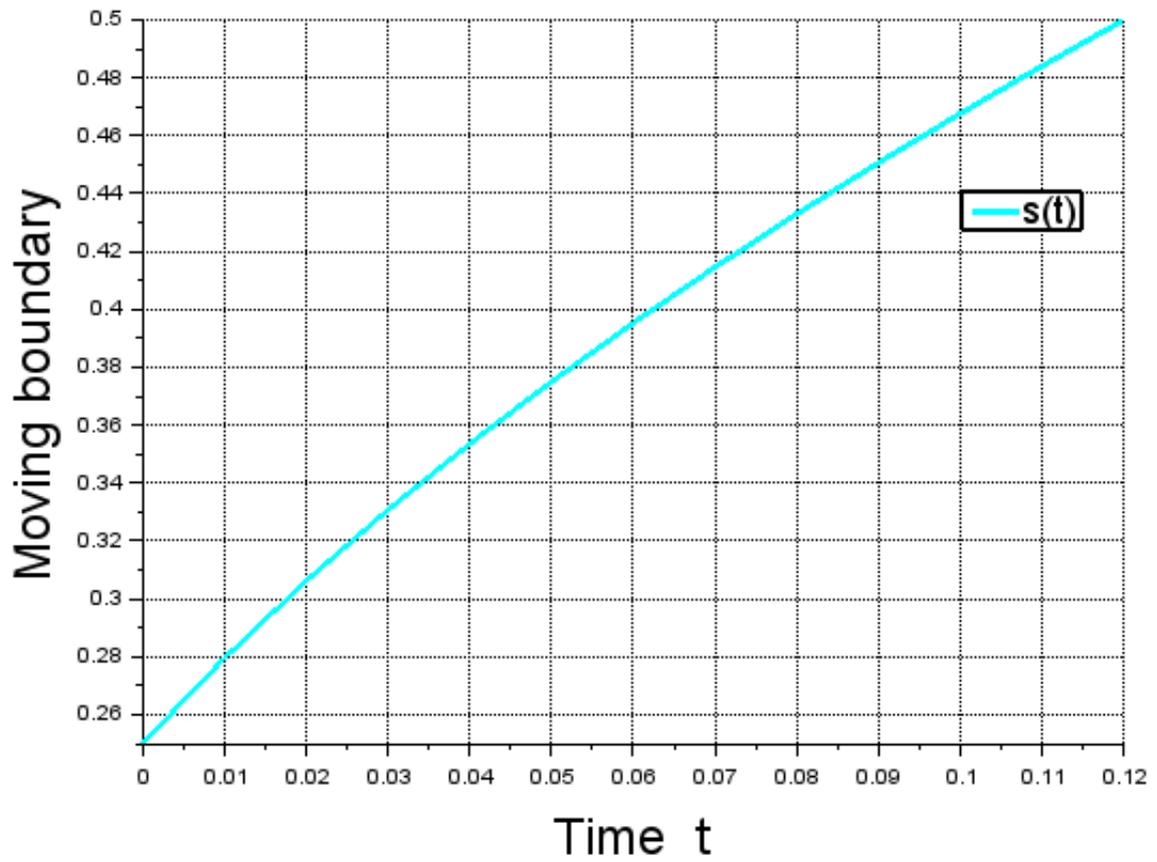


Figure 2.2: Position de la frontière mobile par rapport au temps.

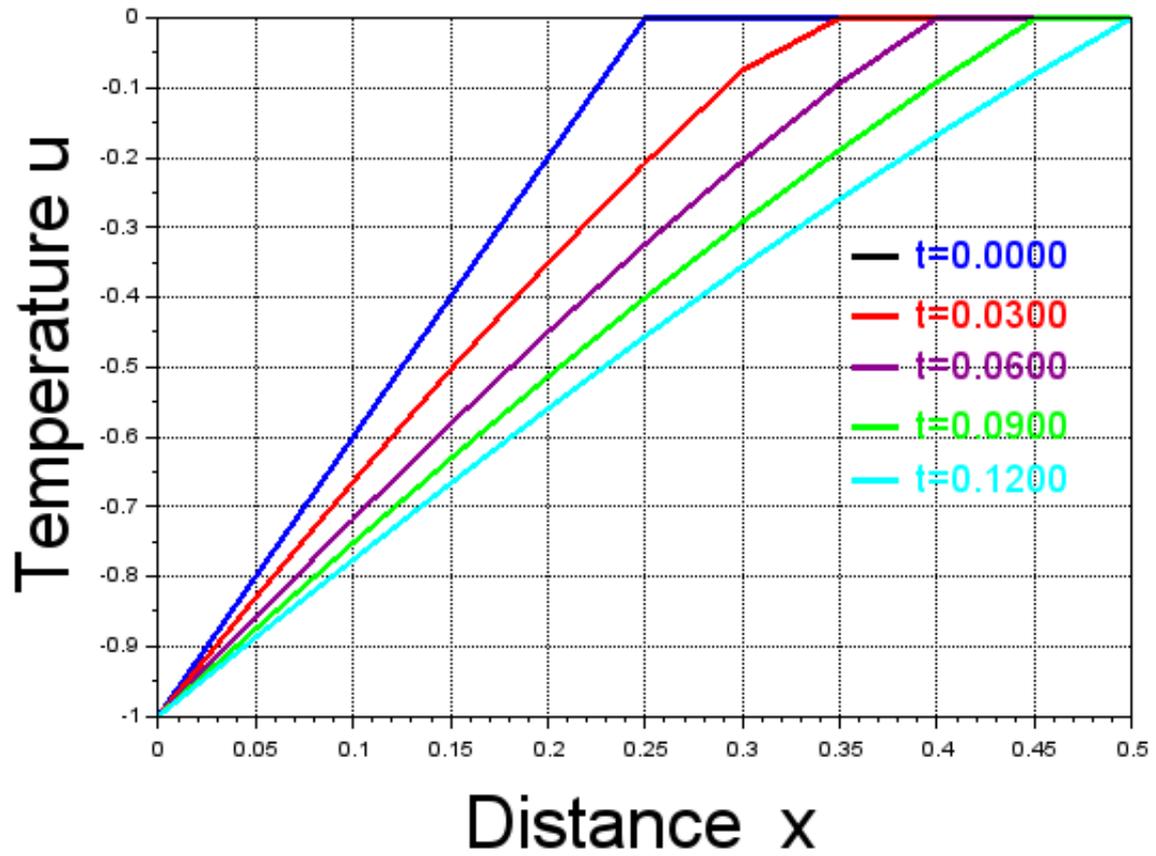


Figure 2.3: Distributions de température dans la glace à différents moments.

Table 2.1: Positions de l'interface $10^4 s(t)$ et températures $10^4 u(x, s)$ dans la glace (avec les signes négatifs supprimés), avec les temps correspondants calculés respectivement à partir de (2.10) et (2.13); pour chaque position de l'interface

X \ Time	0.05	0.1	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	S(t)
0.00	8000	6000	4000	2000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	2500
0.01	7994	6047	4189	2449	0857	0000	0000	0000	0000	0000	2795
0.02	8167	6380	4664	3040	1531	0159	0000	0000	0000	0000	3061
0.03	8301	6642	5039	3511	2076	0751	0000	0000	0000	0000	3307
0.04	8410	6853	5344	3897	2528	1250	0078	0000	0000	0000	3535
0.05	8500	7029	5599	4222	2911	1677	0534	0000	0000	0000	3750
0.06	8576	7178	5816	4500	3240	2048	0933	0000	0000	0000	3952
0.07	8642	7307	6004	4741	3528	2374	1287	0278	0000	0000	4145
0.08	8699	7420	6168	4953	3781	2662	1603	0612	0000	0000	4330
0.09	8750	7519	6314	5141	4007	2921	1888	0916	0012	0000	4506
0.10	8795	7608	6444	5309	4210	3153	2145	1192	0300	0000	4677
0.11	8836	7688	6561	5461	4394	3365	2380	1445	0565	0000	4841
0.12	8873	7760	6667	5599	4561	3557	2595	1677	0810	0000	5000

Table 2.2: Comparaison de la position de la frontière mobile $s(t)$ à différents instants entre la méthode actuelle et d'autres méthodes numériques

Time	Rubinstein [41]	George and Damle[25]	Finn and Varaglu[22]	Rasmussen [39]	Gupta and Banik[28]	Present 3rd degree
0.01	0.2813	0.2807	0.2806	0.2754	0.2800	0.2795
0.02	0.3079	0.3071	0.3072	0.2986	0.3063	0.3062
0.03	0.3321	0.3312	0.3315	0.3202	0.3304	0.3307
0.04	0.3545	0.3536	0.3541	0.3403	0.3529	0.3535
0.06	0.3955	0.3945	0.3956	0.3775	0.3940	0.3952
0.08	0.4326	0.4316	0.4333	0.4113	0.4312	0.4330
0.10	0.4668	0.4657	0.4682	0.4425	0.4648	0.4677

Chapitre 3

Solution numérique du problème de diffusion de l'oxygène dans une cellule sphérique

Ce chapitre, constitue une étude de traitement de la diffusion de l'oxygène dans une géométrie sphérique avec une absorption simultanée à un taux constant. La méthode analytique suppose une représentation polynomiale du profil de concentration en oxygène, conduisant à un système d'équations différentielles par manipulation mathématique. Un schéma numérique est ensuite employé pour résoudre ce système, reliant la frontière mobile et sa vitesse afin de déterminer les fonctions inconnues dans le polynôme supposé. Une solution analytique approximative est obtenue et comparée à d'autres méthodes, démontrant une très bonne concordance. Cette approche propose une méthode novatrice pour traiter la diffusion de l'oxygène dans des géométries sphériques, en combinant des techniques analytiques et des calculs numériques pour résoudre efficacement les profils de concentration d'oxygène et les dynamiques de frontière mobile.

3.1 Introduction

L'étude des problèmes à frontière mobile (PFM) joue un rôle crucial en physique mathématique, en particulier dans la modélisation de processus complexes tels que la diffusion de la chaleur, les transitions de phase et le transport de substances dans les tissus biologiques. Dans les PFM, la frontière du domaine n'est pas fixe mais évolue au fil du temps, influencée par les processus physiques se produisant à l'intérieur du domaine lui-même. Un domaine important où les PFM apparaissent est la diffusion de gaz, comme l'oxygène, dans des milieux absorbants, tels que les tissus biologiques, où la frontière se déplace en fonction des dynamiques de concentration plutôt que

des transitions de phase. Ces problèmes revêtent une grande importance dans la recherche médicale et biologique, notamment dans le contexte de l'apport en oxygène aux tissus, qui est essentiel pour comprendre des conditions comme l'hypoxie tumorale, la cicatrisation des plaies et l'ingénierie tissulaire.

Un exemple canonique de cette classe de problèmes est la diffusion de l'oxygène dans les tissus biologiques. Dans de tels systèmes, l'oxygène est absorbé à des taux variables, ce qui provoque le déplacement de la frontière où la concentration d'oxygène tombe à zéro, au fil du temps. Modéliser et prédire avec précision à la fois le profil de concentration d'oxygène et le mouvement de cette frontière est essentiel pour mieux comprendre le transport de l'oxygène, en particulier dans les applications médicales où l'oxygène joue un rôle dans l'efficacité thérapeutique, comme dans le traitement des tumeurs hypoxiques.

Mathématiquement, la modélisation de la diffusion de l'oxygène dans les tissus implique des équations aux dérivées partielles (EDP) couplées à des conditions aux limites, qui évoluent dans le temps.

Les méthodes traditionnelles pour résoudre ces problèmes, telles que les schémas de différences finies, les méthodes d'interpolation et les techniques numériques, ont fourni des aperçus précieux. Crank et Gupta [17] ont été parmi les premiers à analyser rigoureusement ce problème en développant un schéma de différences finies explicite. Cette méthode combinait l'interpolation de Lagrange et les séries de Taylor pour approximativement calculer le profil de la concentration en oxygène et la position de la frontière mobile. Cependant, les méthodes explicites souffrent souvent d'instabilité numérique, en particulier lorsque des pas de temps petits sont nécessaires à mesure que la frontière mobile approche de la surface scellée, ce qui entraîne des inefficacités et des inexactitudes potentielles dans les simulations à long terme.

En réponse aux limitations des schémas explicites, plusieurs méthodes alternatives ont été proposées. Hansen et Hougaard [30] ont introduit une approche par équation intégrale, tandis que Berger et al. [5] ont utilisé des méthodes de troncature. Miller et al. [34] ainsi que Liapis et al. [32] ont fait progresser le domaine en appliquant des techniques d'éléments finis et des méthodes de collocation orthogonale pour traiter la diffusion de l'oxygène avec des conditions aux limites plus complexes. Les inégalités variationnelles, introduites par Baiocchi et Pozzi [3], ont fourni un autre cadre analytique permettant de mieux traiter certaines conditions aux limites. Malgré ces avancées, des défis computationnels demeurent, en particulier pour résoudre avec précision la dynamique de la frontière mobile près de la surface scellée.

Pour relever ces défis, Gupta et Banik [27] ont introduit la méthode intégrale contrainte (CIM), qui propose une approche semi-analytique pour résoudre les problèmes de frontière mobile (PFM) avec des conditions aux limites implicites. L'idée fondamentale

de la CIM consiste à approximer le profil de concentration en utilisant des polynômes avec des coefficients indéterminés et en appliquant des contraintes intégrales pour réduire la complexité du problème. Cette approche évite la nécessité de calculer explicitement les dérivées spatiales, ce qui conduit souvent à des instabilités numériques dans les méthodes traditionnelles. En réduisant le problème à un système d'équations linéaires à travers des équations basées sur les moments, la CIM offre une solution plus stable et efficace aux PFM, en particulier dans les cas impliquant des frontières mobiles implicites, comme la diffusion de l'oxygène dans les tissus biologiques.

Le cadre CIM a prouvé être un outil robuste et efficace pour traiter les problèmes de frontière mobile. Il permet non seulement de contourner l'instabilité numérique inhérente aux schémas explicites, mais offre également une plus grande flexibilité pour traiter les conditions aux limites évolutives. Cependant, il reste nécessaire de raffiner davantage cette méthode, notamment en améliorant la précision près de la frontière mobile et en étendant son applicabilité à un éventail plus large de problèmes de diffusion. En particulier, le problème de la diffusion de l'oxygène avec absorption simultanée dans les tissus biologiques présente un ensemble unique de défis en raison de la nature dynamique de la frontière, ce qui en fait un candidat idéal pour l'application de la CIM. Ce chapitre se concentre sur la diffusion de l'oxygène dans un domaine sphérique unidimensionnel avec absorption simultanée, où la frontière se déplace vers l'intérieur à mesure que l'oxygène est absorbé par le tissu.

L'objectif est d'appliquer la méthode intégrale contrainte pour résoudre ce problème de manière plus précise et efficace que les approches traditionnelles. Nous nous appuyons sur le cadre CIM fondamental en introduisant des raffinements qui permettent de mieux gérer les conditions aux limites évolutives et d'obtenir des solutions plus précises. Plus précisément, nous modélisons la concentration en oxygène sous la condition que la surface en $x = 1$ est scellée à $t = 0$, la frontière mobile étant notée $s(t)$. L'équation gouvernant ce processus de diffusion peut être décrite comme dans la section 3.2 par les équations (3.1)–(3.5).

Notre objectif est de déterminer à la fois le profil de concentration en oxygène $c(x, t)$ et la position de la frontière mobile $s(t)$ au fil du temps. En appliquant la CIM, nous dérivons une solution semi-analytique qui contourne les contraintes computationnelles des méthodes traditionnelles, en particulier les problèmes d'instabilité associés aux schémas explicites.

L'approche proposée basée sur la CIM (méthode d'intégrales contraignantes) présente des avantages significatifs par rapport aux méthodes existantes. Tout d'abord, elle offre une représentation plus précise de la frontière mobile, en particulier dans les dernières étapes du processus de diffusion lorsque la frontière est proche de la surface scellée. Ensuite, les contraintes intégrales utilisées par la CIM éliminent la nécessité

de pas de temps petits et de maillages spatiaux affinés, améliorant ainsi l'efficacité computationnelle. Enfin, la nature semi-analytiques de la CIM permet d'obtenir des perspectives plus profondes sur la dynamique de l'absorption de l'oxygène, offrant un outil puissant pour comprendre le transport de l'oxygène dans les systèmes biologiques.

Cette recherche contribue au développement continu de méthodes robustes et efficaces pour résoudre les problèmes de frontières mobiles (PFMs), en mettant particulièrement l'accent sur la diffusion de l'oxygène dans les tissus absorbants. En affinant l'approche CIM, nous visons à offrir une solution améliorée qui non seulement améliore la précision du suivi de la frontière mobile, mais étend également son applicabilité à une classe plus large de problèmes de diffusion avec des frontières absorbantes. Ce travail présente des applications potentielles en recherche médicale, notamment dans la compréhension de la dynamique de l'oxygène dans des tissus comme les tumeurs hypoxiques, où une délivrance précise d'oxygène est cruciale pour les interventions thérapeutiques.

En résumé, la méthode intégrale contraignante représente une avancée importante dans la modélisation des processus de diffusion avec des frontières mobiles. En affinant la CIM et en l'appliquant au problème de la diffusion de l'oxygène dans les tissus absorbants, ce travail vise à fournir une solution plus précise, stable et efficace, ouvrant ainsi la voie à de futures études sur les processus de diffusion biologiques et industriels. La réalisation de recherches approfondies sur les problèmes de frontières mobiles dans diverses disciplines a historiquement rencontré des difficultés en raison de la nécessité d'une collaboration efficace entre les mathématiques et d'autres domaines. Pour une exploration détaillée de ces défis, consultez les travaux de Crank [15], et Gupta et Crank [27], Boureghda [4, 6, 7, 12, 13] et Djellab et Boureghda [19], qui offrent des perspectives précieuses sur la nature interdisciplinaire de ces problèmes et leurs solutions mathématiques.

3.2 Formulation mathématique(en forme non dimensionnelle)

Le problème de diffusion de l'oxygène dans un milieu qui consomme simultanément de l'oxygène est généralement divisé en deux phases :

3.2.1 Phase 1 : Diffusion de l'oxygène dans le milieu

Initialement, l'oxygène diffuse dans un milieu qui l'absorbe et l'immobilise à un taux constant. La concentration d'oxygène à la surface ($x = 1$) est maintenue

constante. Cette phase continue jusqu'à ce qu'un état stable soit atteint, où l'oxygène ne pénètre plus davantage dans le milieu (voir Figure (see Figure 3.1)).

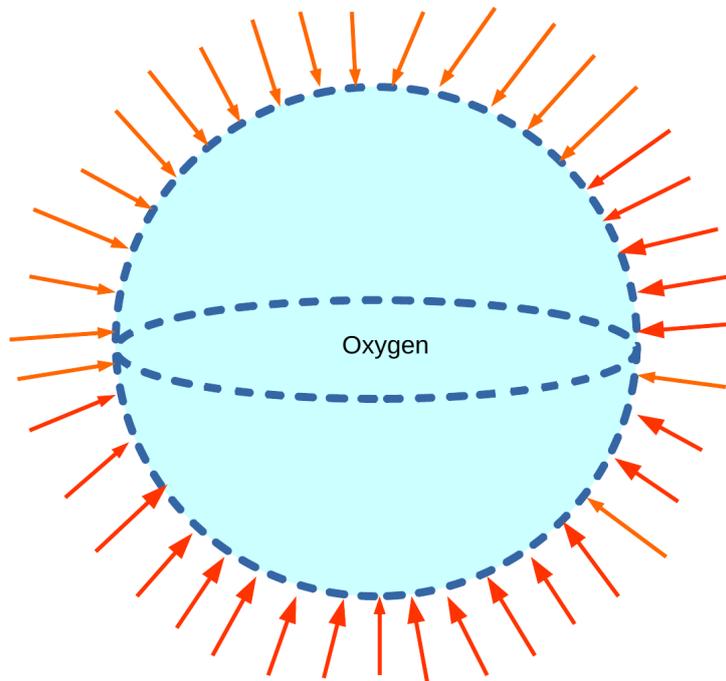


Figure 3.1: Diffusion de l'oxygène dans le milieu.

3.2.2 Phase 2 : Coupure de l'alimentation en oxygène

Dans la deuxième phase, l'alimentation en oxygène est coupée et la surface est scellée pour empêcher l'entrée ou la sortie d'oxygène. Le milieu continue à absorber l'oxygène déjà présent, ce qui entraîne un recul de la limite marquant la profondeur de pénétration de l'oxygène vers la surface scellée (voir Figure 3.2).

Cette phase nécessite de suivre le déplacement de cette frontière au fil du temps et de déterminer comment la concentration en oxygène dans le milieu change en fonction du temps.

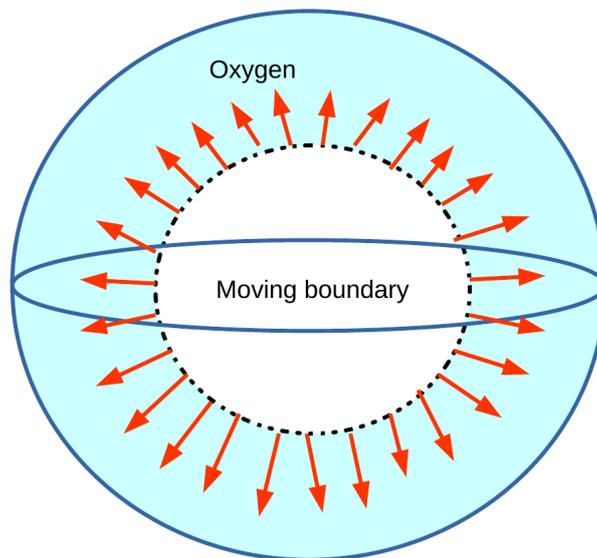


Figure 3.2: Coupure de l'alimentation en oxygène.

Sous forme sans dimension, le problème peut être décrit par les équations suivantes :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + x = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad s(t) \leq x \leq 1 \quad t > 0 \quad (3.1)$$

Conditions aux limites :

À la surface scellée ($x = 1$),

$$\frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad \text{at} \quad x = 1 \quad t > 0 \quad (3.2)$$

À la frontière mobile ($x = s(t)$),

$$c = \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad \text{at} \quad x = s(t) \quad t > 0 \quad (3.3)$$

Conditions initiales à $t = 0$:

$$c = \frac{x^3}{6} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{at} \quad t = 0 \quad (3.4)$$

La position initiale de la frontière mobile est la suivante:

$$s(0) = 0 \quad (3.5)$$

Dans cette formulation, $c(x, t)$ représente la concentration en oxygène à la position x et au temps t . $s(t)$ désigne l'emplacement de la frontière mobile, qui évolue à mesure que l'oxygène est absorbé au fil du temps.

3.3 Solutions analytiques à court terme

Les solutions analytiques à court terme pour le problème impliquant la diffusion de l'oxygène avec une frontière mobile sont cruciales pour comprendre la distribution de la concentration à de petits instants. Mathématiquement, le problème est régi par une équation différentielle partielle du second ordre avec des conditions aux limites, y compris une surface scellée $x = 1$ et une frontière mobile $x = s(t)$ où $s(0) = 0$. Crank et Gupta [17] et Boureghda [7, 10] discutent du fait qu'au départ, le mouvement de la frontière peut être négligé, ce qui permet d'obtenir une solution approximative qui simplifie le problème en supposant que la frontière reste stationnaire. Pendant cette phase précoce, les séries de Fourier ou les méthodes de séparation des variables offrent des solutions analytiques précises, voir Boureghda [7, 10]. Par conséquent, la première pour le problème sphérique donne

$$c(x, t) = \frac{1}{3\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} [-n^2\pi^2 \exp(-n^2\pi^2 t) + 6] \sin(n\pi x) \quad (3.6)$$

tandis que la seconde donne

$$c(x, t) = \frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2} \exp\left[-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \pi^2 t\right] \sin\left[\left(\frac{2n+1}{2}\right) \pi x\right] \quad (3.7)$$

Nous calculons $c(x, t)$ à partir de l'équation (3.7) pour diverses petites valeurs de temps, comme indiqué dans le tableau 3.1. Les résultats montrent une convergence rapide de la série infinie. La Figure 3.3 présente l'approximation dérivée de l'équation (3.7), avec des courbes représentatives illustrant la forme générale et confirmant que la concentration reste inchangée, dans la limite de la précision du graphique, près de la frontière à $x = 0$.

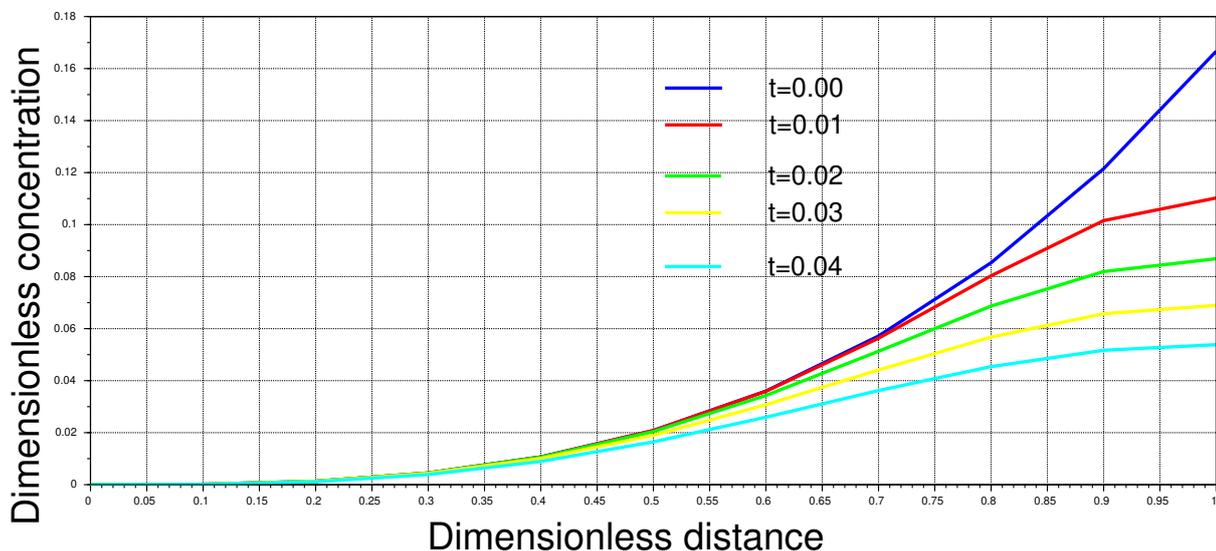


Figure 3.3: Distributions de la concentration pour $t = 0.00, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04$.

CHAPITRE 3. SOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME DE DIFFUSION DE
L'OXYGÈNE DANS UNE CELLULE SPHÉRIQUE

36

Table 3.1: Valeurs de $10^6 c$ calculées à partir de l'équation (3.7) pour divers petits intervalles de temps.

X Time	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0.000	0	167	1333	4500	10667	20833	36000	57167	85333	121500	166667
0.001	0	167	1333	4500	10667	20833	36000	57167	85333	121303	148825
0.002	0	167	1333	4500	10667	20833	36000	57167	85320	119963	141435
0.003	0	167	1333	4500	10667	20833	36000	57166	85213	117905	135765
0.004	0	167	1333	4500	10667	20833	36000	57157	84939	115578	130984
0.005	0	167	1333	4500	10667	20833	35999	57129	84484	113169	126772
0.010	0	167	1333	4500	10666	20826	35902	56304	80308	101536	110248
0.015	0	167	1333	4499	10655	20735	35383	54238	74678	91194	97568
0.020	0	167	1332	4488	10590	20433	34302	51305	68670	81941	86878
0.025	0	165	1324	4447	10416	19848	32717	47855	62646	73519	77461
0.030	0	160	1298	4347	10093	18972	30735	44108	56735	65747	68946
0.035	0	145	1241	4166	9603	17830	28453	40196	50984	58499	61117
0.040	0	114	1138	3888	8942	16456	25949	36200	45405	51682	53829

Ces solutions révèlent que, pour les courts temps, la perturbation à la surface a peu d'effet sur le profil de concentration près de la frontière mobile. Cette approximation permet d'éviter les inexactitudes numériques près de la surface scellée, où le gradient de la concentration change brusquement. Crank et Gupta [17] et Boureghda [7, 10] mettent en garde contre le fait que les méthodes des différences finies peuvent avoir des difficultés avec cette discontinuité, ce qui entraîne des erreurs. Cependant, en supposant que la frontière ne bouge pas, la solution analytique offre une représentation plus fiable de la distribution de la concentration. Les solutions en séries infinies dérivées de ces méthodes présentent une convergence rapide, offrant des prévisions fiables pour la concentration jusqu'à ce que la frontière mobile se déplace significativement. À mesure que le temps passe et que la frontière commence à évoluer, des techniques plus avancées, telles que la méthode de la grille mobile, deviennent nécessaires pour maintenir la précision du modèle dans la simulation de la diffusion de l'oxygène.

3.4 Analyse critique de l'article d'Ahmed Said

Ahmed propose une solution analytique approximative du système (3.1)–(3.5). Il suppose un polynôme de degré pair dans la variable spatiale x pour la concentration c dans la région $s(t) < x < 1, t > 0$, à savoir,

$$c(x, t) = \alpha(t) + \beta(t) \left(\frac{1-x}{1-s(t)} \right)^2 + \gamma(t) \left(\frac{1-x}{1-s(t)} \right)^4 + \delta(t) \left(\frac{1-x}{1-s(t)} \right)^6 \quad (3.8)$$

où $\alpha = \alpha(t), \beta = \beta(t), \gamma = \gamma(t)$, et $\delta = \delta(t)$ sont quatre paramètres inconnus à déterminer en fonction du temps t .

Il préconise l'utilisation du premier moment de l'Équation de base (3.1), qui est donné par l'expression

$$\int_{s(t)}^1 (1-x) \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) dx = \int_{s(t)}^1 (1-x) \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x, t) - x \right) dx \quad (3.9)$$

En intégrant le côté droit et en appliquant la règle de Leibniz au côté gauche, nous pouvons écrire l'Équation (3.9) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{s(t)}^1 (1-x)c(x, t) dx \right) + (1-s(t))c(s(t), t) \frac{ds(t)}{dt} &= (1-x) \left(\frac{\partial c}{\partial x}(x, t) - \frac{x^2}{2} \right)_{s(t)}^1 \\ &+ \int_{s(t)}^1 \left(\frac{\partial c}{\partial x}(x, t) - \frac{x^2}{2} \right) dx \quad (3.10) \end{aligned}$$

Après avoir substitué les Équations (3.2), (3.3), et (3.8), et effectué quelques manipulations, nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{(1-s(t))^2}{2} \left(\frac{d\alpha(t)}{dt} + \frac{d\beta(t)}{2dt} + \frac{d\gamma(t)}{3dt} + \frac{d\delta(t)}{4dt} \right) + \left(\frac{(1-s(t))}{2} \frac{ds}{dt} - 1 \right) \beta(t) \\ & + \left(\frac{2(1-s(t))}{3} \frac{ds}{dt} - 3 \right) \gamma(t) + \left(\frac{3(1-s(t))}{4} \frac{ds}{dt} - 5 \right) \delta(t) = \frac{s^2(t)(1-s(t))}{2} - \frac{(1-s^3(t))}{6} \end{aligned} \quad (3.11)$$

C'est-à-dire que les Équations (22) and (23) dans l'article d'Ahmed Said [1] sont incorrectes. Des erreurs similaires peuvent également être trouvées dans l'utilisation des autres moments.

En utilisant (3.3) et (3.8), nous dérivons que $\alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t) + \delta(t) = 0$. Par conséquent, les Équations (24)–(26) dans l'article d'Ahmed Said [1] sont également incorrectes car elles impliquent que $s(t) = 0$ pour $t > 0$.

3.5 Méthodologie de la solution proposée

La méthodologie de ce travail aborde un problème de diffusion d'oxygène en une dimension dans une géométrie sphérique. Étendre cette approche à des dimensions supérieures est théoriquement possible mais nécessite des ajustements : en 2D ou 3D, les équations gouvernantes impliquent des composants supplémentaires dans l'opérateur Laplacien (termes radiaux et angulaires). L'adaptation de la Méthode Intégrale Contraignante (CIM) nécessiterait de redéfinir le profil de concentration polynomiale et de traiter les intégrales multidimensionnelles.

La méthodologie de la solution est basée sur la modélisation de la diffusion d'oxygène dans une sphère, en supposant que le profil de concentration suit une forme polynomiale dans $(1-x)$. Les étapes sont les suivantes :

3.5.1 Hypothèse sur un profil de concentration

Étant donné que le gradient est nul à la surface externe de la sphère (c'est-à-dire, $x = 1$), nous supposons que le profil de concentration peut être exprimé sous la forme d'un polynôme de degré pair dans $(1-x)$. Suivant l'approche de Gupta et Banik [29], Ahmed [1], et Djellab et Boureghda [19], la concentration $c(x, t)$ pour la région $s(t) < x < 1$ est modélisée comme dans (3.8), où $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ et $\delta(t)$ sont des paramètres inconnus dépendants du temps, tandis que $s(t)$ représente une frontière mobile qui doit également être déterminée.

3.5.2 Utilisation de la méthode des moments

Pour déterminer les paramètres inconnus, nous appliquons la méthode des moments. Cette approche, introduite à l'origine par Gupta et Banik [29], Ahmed [1], et Djellab et Boureghda [19], consiste à intégrer le profil de concentration sur le domaine. La formule générale pour les moments d'ordre n est donnée par :

$$\int_{s(t)}^1 (1-x)^n \frac{\partial c}{\partial t}(x,t) dx = \int_{s(t)}^1 \left[(1-x)^n \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t) - x \right) \right] dx \quad (3.12)$$

Dans ce travail, nous utilisons tous les moments de zéro à quatre pour dériver des relations entre les inconnues.

3.5.3 Conditions aux limites

Étant donné que le flux est prescrit à la surface fixe ($x = 1$), les paramètres $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ et $\delta(t)$ sont exprimés en termes de la concentration à ($x = 1$), notée $c(1, t) = c_1(t)$. En utilisant les conditions aux limites pour la concentration et le flux à la surface, nous dérivons une expression pour le profil de concentration comme suit:

$$\begin{aligned} c(x,t) = & c_1(t) + \left(-3c_1(t) + \frac{s(t)(1-s(t))^2}{8} \right) \left(\frac{1-x}{1-s(t)} \right)^2 \\ & + \left(3c_1(t) - \frac{s(t)(1-s(t))^2}{4} \right) \left(\frac{1-x}{1-s(t)} \right)^4 + \left(-c_1(t) + \frac{s(t)(1-s(t))^2}{8} \right) \left(\frac{1-x}{1-s(t)} \right)^6 \end{aligned} \quad (3.13)$$

où $c_1(t)$ et $s(t)$ restent inconnus et doivent être déterminés.

3.5.4 Calcul des moments et équations différentielles simultanées

Nous avons utilisé quatre moments car ils étaient suffisants pour obtenir des résultats précis tout en gardant les calculs efficaces. Ajouter plus de moments compliquerait beaucoup le problème et pourrait entraîner des problèmes numériques sans améliorer significativement la précision. Nos résultats, vérifiés par rapport à d'autres méthodes telles que la méthode de la grille mobile (MG)

Nous calculons les moments de zéro, un, deux, trois et quatre de l'équation fondamentale (3.1), qui sont exprimés comme suit :

Moment zéro :

$$\int_{s(t)}^1 \frac{\partial c}{\partial t}(x,t) dx = \int_{s(t)}^1 \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t) - x \right) dx \quad (3.14)$$

Nous pouvons écrire (3.14) comme

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{s(t)}^1 c(s, t) dx \right) - c(s, t) \frac{ds}{dt} = \left[\frac{\partial c}{\partial x} \right]_s^1 - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_s^1 \quad (3.15)$$

qui, après substitution des équations (3.2), (3.3), et (3.13), et quelques manipulations, donne

$$96(1-s) \frac{dc_1}{dt} + 2 \left[-48c_1 + (1-s)^3 - 3s(1-s)^2 \right] \frac{ds}{dt} = 105(s^2 - 1) \quad (3.16)$$

Premier moment :

$$\int_{s(t)}^1 (1-x) \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) dx = \int_{s(t)}^1 (1-x) \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x, t) - x \right) dx \quad (3.17)$$

Encore une fois, à partir de (3.17), nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{s(t)}^1 (1-x)c(s, t) dx \right) - (1-s)c(s, t) \frac{ds}{dt} = c_1 - \frac{1}{2}(1-s^2) + \frac{1}{3}(-s^3) \quad (3.18)$$

qui, après substitution des équations (3.2), (3.3), and (3.13), et quelques manipulations, donne

$$24(1-s)^2 \frac{dc_1}{dt} + (1-s) \left[-48c_1 - 4s(1-s)^2 + (1-s)^3 \right] \frac{ds}{dt} = 32(6c_1 - 1 + 3s^2 - 2s^3) \quad (3.19)$$

Second moment:

$$\int_{s(t)}^1 (1-x)^2 \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) dx = \int_{s(t)}^1 \left[(1-x)^2 \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x, t) - x \right) \right] dx \quad (3.20)$$

De manière similaire, à partir de l'équation (3.20), nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{s(t)}^1 (1-x)^2 c(x, t) dx \right) - (1-s)^2 c(s, t) \frac{ds}{dt} = \frac{(s-1) [(s-1)^2(97s+35) - 384c_1]}{420} \quad (3.21)$$

qui, après substitution des équations (3.2), (3.3), et (3.13) et quelques manipulations, donne

$$64(1-s)^2 \frac{dc_1}{dt} + 4(1-s) \left[-48c_1 - (s-1)^2(6s-1) \right] \frac{ds}{dt} = -3 \left[(s-1)^2(97s+35) - 384c_1 \right] \quad (3.22)$$

En suivant la même procédure pour le troisième moment, nous obtenons l'équation suivante :

$$12(1-s)^2 \frac{dc_1}{dt} + (1-s) \left[-48c_1 + (1-s)^3 - 6s(1-s)^2 \right] \frac{ds}{dt} = 3 \left[-(1-s)^2(27s+8) + 120c_1 \right] \quad (3.23)$$

Et enfin, pour le quatrième moment,

$$96(1-s)^2 \frac{dc_1}{dt} + (1-s) \left[-480c_1 + 10(1-s)^3 - 70s(1-s)^2 \right] \frac{ds}{dt} = 33 \left[-(1-s)^2(27s+7) + 128c_1 \right] \quad (3.24)$$

Nous résolvons (3.16) et (3.19). Nous aurons le système suivant d'équations différentielles:

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{dt} = & \frac{-13s^6 - 240s^5 + 1131s^4 - 432s^3c_1 - 1864s^3 - 720s^2c_1 + 1401s^2 + 2736sc_1 - 456s}{288s^5 - 1200s^4 + 1920s^3 + 2304s^2c_1 - 1440s^2 - 4608sc_1 + 480s + 2304c_1 - 48} \\ & + \frac{-18432c_1^2 - 1584c_1 + 41}{288s^5 - 1200s^4 + 1920s^3 + 2304s^2c_1 - 1440s^2 - 4608sc_1 + 480s + 2304c_1 - 48} \end{aligned} \quad (3.25)$$

et

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-151s^3 + 279s^2 - 105s + 768c_1 - 23}{12s^4 - 38s^3 + 42s^2 + 96sc_1 - 18s - 96c_1 + 2} \quad (3.26)$$

En résolvant les équations (3.16) and (3.22), nous obtenons le système suivant d'équations différentielles:

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{dt} = & \frac{-96s^6 - 537s^5 + 3213s^4 - 720s^3c_1 - 5562s^3 - 2448s^2c_1 + 4218s^2 + 7056sc_1 - 1341s}{896s^5 - 3712s^4 + 5888s^3 + 6144s^2c_1 - 14352s^2 - 12288sc_1 + 1408s + 6144c_1 - 128} \\ & + \frac{-55296c_1^2 - 3888c_1 + 105}{896s^5 - 3712s^4 + 5888s^3 + 6144s^2c_1 - 14352s^2 - 12288sc_1 + 1408s + 6144c_1 - 128} \end{aligned} \quad (3.27)$$

et

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-663s^3 + 1221s^2 - 453s + 3456c_1 - 105}{56s^4 - 176s^3 + 192s^2 + 384sc_1 - 80s - 384c_1 + 8} \quad (3.28)$$

En résolvant les équations (3.16) and (3.23), nous arrivons au système suivant d'équations différentielles simultanées:

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{dt} = & \frac{-29s^6 - 84s^5 + 645s^4 - 48s^3c_1 - 1160s^3 - 576s^2c_1 + 885s^2 + 1296sc_1 - 276s - 11520c_1^2}{192s^5 - 792s^4 + 1248s^3 + 1152s^2c_1 - 912s^2 - 2304sc_1 + 288s + 1152c_1 - 24} \\ & + \frac{-672c_1 + 19}{192s^5 - 792s^4 + 1248s^3 + 1152s^2c_1 - 912s^2 - 2304sc_1 + 288s + 1152c_1 - 24} \end{aligned} \quad (3.29)$$

42
et

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-181s^3 + 333s^2 - 123s + 960c_1 - 29}{16s^4 - 50s^3 + 54s^2 + 96sc_1 - 22s - 96c_1 + 2} \quad (3.30)$$

En résolvant les équations (3.16) and (3.24), nous obtenons enfin les équations différentielles simultanées suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{dt} = & \frac{-106s^6 - 183s^5 + 1841s^4 + 112s^3c_1 - 3414s^3 - 1872s^2c_1 + 2616s^2 + 3408sc_1 - 803s}{576s^5 - 2368s^4 + 3712s^3 + 3072s^2c_1 - 2688s^2 - 6144sc_1 + 832s + 3072c_1 - 64} \\ & + \frac{-33792c_1^2 - 1648c_1 + 49}{576s^5 - 2368s^4 + 3712s^3 + 3072s^2c_1 - 2688s^2 - 6144sc_1 + 832s + 3072c_1 - 64} \end{aligned} \quad (3.31)$$

et

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-393s^3 + 723s^2 - 267s + 2112c_1 - 63}{36s^4 - 112s^3 + 120s^2 + 192c_1 - 48s - 192c_1 + 4} \quad (3.32)$$

Enfin, avec c_1 and $s(0)$ connus, nous pouvons obtenir les solutions numériques pour tous les quatre systèmes :

[(3.25)–(3.26)], [(3.27)–(3.28)], [(3.29)–(3.30)] et [(3.31)–(3.32)].

3.6 Analyse et Interprétation des Résultats Numériques

Sur la base des principes physiques du problème, nous savons que $\frac{ds}{dt}$ ne peut pas être négatif. Par conséquent, en se basant sur les équations (3.26), (3.28), (3.30), et (3.32), les inégalités suivantes doivent être vérifiées :

$$(-151s^3 + 279s^2 - 105s + 768c_1 - 23) \geq 0 \quad (3.33)$$

$$(-663s^3 + 1221s^2 - 453s + 3456c_1 - 105) \geq 0 \quad (3.34)$$

$$(-181s^3 + 333s^2 - 123s + 960c_1 - 29) \geq 0 \quad (3.35)$$

$$(-393s^3 + 723s^2 - 267s + 2112c_1 - 63) \geq 0 \quad (3.36)$$

Nous avons testé différentes valeurs de c_1 et s pour un t donné, en utilisant les résultats obtenus par la méthode MG. Nous avons trouvé que les conditions (3.33)–(3.36) ne sont satisfaites que lorsque $t \simeq 0.06$. Par conséquent, pour initier les calculs, nous avons adopté les valeurs de la méthode MG à $t = 0.06$, spécifiquement $c_1 = 0.029397$ and $s = 0.135851$; voir [29]. Les systèmes simultanés [(3.25)–(3.26)], [(3.27)–(3.28)], [(3.29)–(3.30)] et [(3.31)–(3.32)] ont ensuite été résolus à l'aide de méthodes connues avec un pas de temps $\Delta = 0.001$. Nous avons utilisé Scilab 2024.1.0, un logiciel open-source pour tous les calculs numériques de notre travail.

C'est un outil fiable pour résoudre des équations différentielles et simuler des systèmes complexes. Pour garantir la précision, nous avons utilisé des pas de temps petits et vérifié les résultats par des tests de convergence. Nous avons également trouvé des solutions analytiques pour de courts intervalles de temps (comme détaillé dans la table 3.1). Les frontières mobiles $s(t)$ et les variations de concentration $c_1(t)$ à la surface fixe, présentées dans les 3.2 et 3.3, sont montrées sous forme de profils dans les Figures 3.4 et 3.5. Enfin, cette méthode garantit une précision fiable lorsqu'elle est appliquée avec un polynôme de degré pair dans $(1 - x)$, spécifiquement de degré 6, dans la région $s(t) < x < 1$.

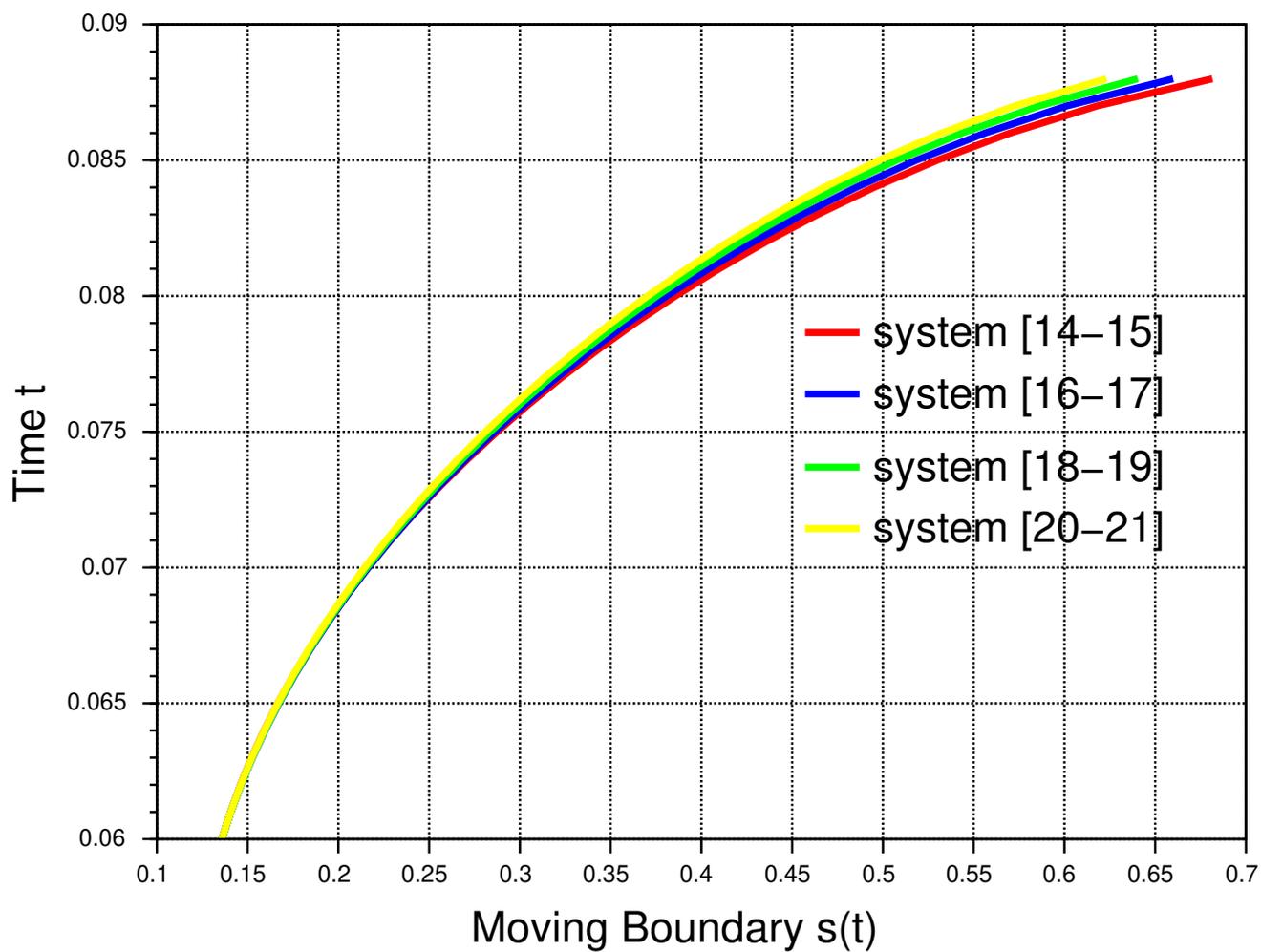


Figure 3.4: Positions des frontières mobiles par rapport au temps, calculées par la méthode actuelle.

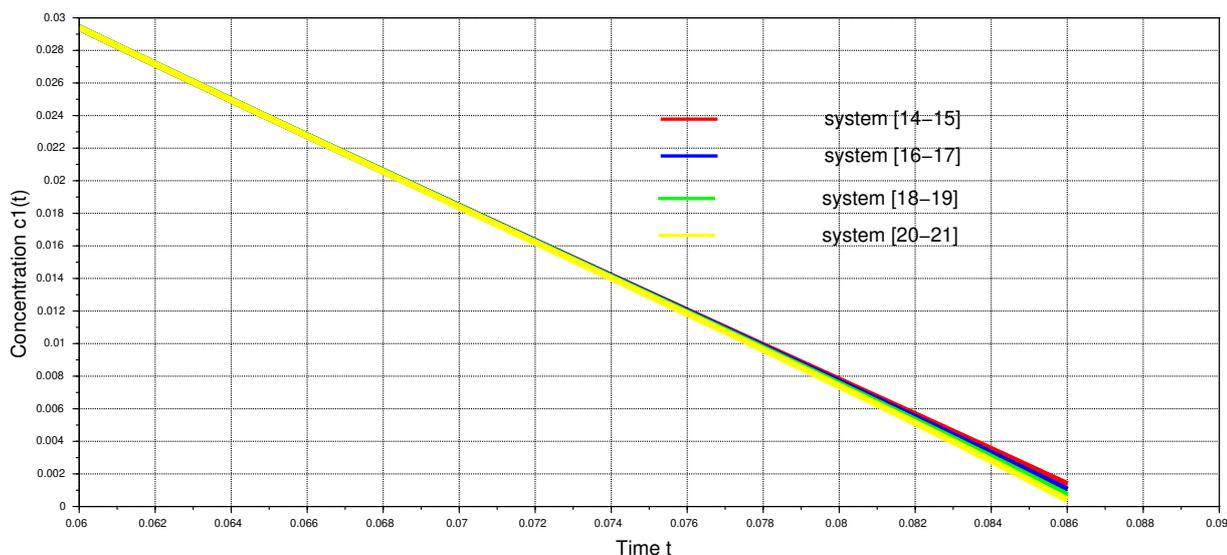


Figure 3.5: Distributions des concentrations pour la surface fixe ($x = 1$) et pour $t = 0.060$, calculées la par la méthode actuelle.

3.7 Conclusions

En conclusion, cette étude fait progresser la modélisation de la diffusion de l'oxygène dans des géométries sphériques tout en abordant des problèmes clés dans les solutions analytiques précédentes. Plus précisément, nous identifions plusieurs erreurs dans la solution fournie par [1] et présentons de nouvelles solutions corrigées pour les moments discutés dans les équations (3.16), (3.19), et (3.22)–(3.24). Ces améliorations augmentent la précision et la stabilité du modèle, en particulier près de la frontière mobile, où les méthodes traditionnelles échouent souvent, car les schémas d'ordre quatrième peuvent rencontrer des problèmes de stabilité près de la frontière mobile, où des gradients de concentration abrupts se produisent. Leur application pourrait poser problème sans adaptations significatives pour les frontières dynamiques. Les solutions semi-analytiques du CIM bénéficient de l'analyse de stabilité et de la précision des méthodes d'ordre quatrième. L'intégration de techniques d'ordre élevé, notamment près des gradients marqués, pourrait améliorer la performance du CIM. Bien que ce travail se concentre sur le CIM, le comparer aux méthodes d'ordre quatrième dans des études futures, en particulier pour les frontières mobiles, pourrait fournir des informations précieuses. Ce travail ouvre la voie à des applications plus larges dans les problèmes de diffusion biologiques et industriels, contribuant au développement continu d'approches plus robustes et efficaces pour les problèmes complexes de frontières mobiles (PFM).

Table 3.2: Comparaison de la position de la frontière mobile $s(t)$ à différents instants à partir de la méthode actuelle (utilisant quatre systèmes) avec la méthode numérique [29]

Time	CIM with system [(5.14) – (5.15)]	CIM with system [(5.16) – (5.17)]	CIM with system [(5.18) – (5.19)]	CIM with system [(5.20) – (5.21)]	GM [29]
0.060	0.135851	0.135851	0.135851	0.135851	0.135851
0.065	0.166645	0.1671802	0.1670279	0.166616	0.145384
0.070	0.2161892	0.2164797	0.2156609	0.2144737	0.235460
0.075	0.2874408	0.286061	0.2836392	0.2809958	0.247719
0.080	0.3857251	0.3808079	0.3754727	0.3703594	0.395903
0.085	0.5299257	0.5183531	0.5076058	0.4979049	0.534410
0.086	0.5699483	0.5561881	0.5436047	0.5323162	0.571291
0.087	0.6179952	0.6012805	0.5861539	0.5726457	0.64630

Table 3.3: Figures comparatives pour la concentration à la surface scellée $u(1, t)$ à différents instants à partir de la méthode présente avec la méthode numérique[29]

Time	CIM with system [(5.14) – (5.15)]	CIM with system [(5.16) – (5.17)]	CIM with system [(5.18) – (5.19)]	CIM with system [(5.20) – (5.21)]	GM [29]
0.060	0.029397	0.029397	0.029397	0.029397	0.029397
0.065	0.0238493	0.0238621	0.0238585	0.0238487	0.028497
0.070	0.0184287	0.0184368	0.0184181	0.0183906	0.018252
0.075	0.0130822	0.0130544	0.0129979	0.0129353	0.017414
0.080	0.0077672	0.0076546	0.0075235	0.0073969	0.007804
0.085	0.002438	0.0021511	0.0018754	0.0016293	0.002744
0.086	0.0013602	0.0010169	0.0006953	0.0004121	0.001739
0.087	0.0002692	— — —	— — —	— — —	0.00073

Bibliographie

- [1] Ahmed, S.G. An approximate method for oxygen diffusion in a sphere with simultaneous absorption. *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow* 1999, 9(6), 631–642. <https://doi.org/10.1108/09615539910276115>.
- [2] Ames, W.F. Numerical Methods for Partial Differential Equations. *ACADEMIC PRESS, INC*, Tomas Nelson & Sons, 1977.
- [3] Baiocchi, C.; Pozzi, G. A. An Evolution Variational Inequality Related to a Diffusion-Absorption Problem. *Appl. Math. Optim.* 1975, 2, 304–314. <https://doi.org/10.1007/BF01448174>.
- [4] Belabbes, S.; Boureghda, A. Numerical Solution of Oxygen Diffusion Problem in Spherical Cell. *Axioms*. 2025, 14(4), 1–13. <https://doi.org/10.3390/axioms14010004>.
- [5] Berger, A.E.; Ciment, M.; Rogers, J. C. W. Numerical solution of a diffusion consumption problem with a free boundary. *SIAM J. Numer. Anal.* 1975, 12(4), 646–672. <https://doi.org/10.1137/0712049>.
- [6] Boureghda, A. A modified variable time step method for solving ice melting problem. *J. Differ. Equ. Appl.* 2012, 18(9), 1443–1455. <https://doi.org/10.1080/10236198.2011.561797>.
- [7] Boureghda, A.; Djellab, N. Du Fort-Frankel Finite Difference Scheme for Solving of Oxygen Diffusion Problem Inside One Cell. *J. Comput. Theor. Transp.* 2023, 52(5), 363–373. <https://doi.org/10.1080/23324309.2023.2271229>.
- [8] Boureghda, A. Moving boundary value problems. *Doctorat en Sciences Mathématiques. Ferhat ABBAS University Sétif 1, Algeria and LMIA Haute Alsace University, Mulhouse, France, 2008*.
- [9] Boureghda, A. Numerical methods for solving one-dimensional problems with a moving boundary. MA thesis. Glasgow University, Scotland, United Kingdom, 1988.

- [10] Boureghda, A. Numerical solution of the oxygen diffusion in absorbing tissue with a moving boundary. *Commun. Numer. Methods Eng.* 2006, 22(9), 933–942. <https://doi.org/10.1002/cnm.857>.
- [11] Boureghda, A. Numerical solution of the oxygen diffusion problem in cylindrically shaped sections of tissue. *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 2008, 56(10), 1945–1960. <https://doi.org/10.1002/flid.1591>.
- [12] Boureghda, A.; Belabbes, S. On the numerical solution of solidification of water. *J. Nonl. Model. Anal.* <http://jnma.ca>; <http://jnma.ijournal.cn>. (Accepted on May 30, 2025).
- [13] Boureghda, A. Solution of an ice melting problem using a fixed domain method with a moving boundary. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie.* 2019, 62(110), N°4, 341–353. <https://www.jstor.org/stable/e26865965>.
- [14] Boureghda, A. Solution to an ice melting cylindrical problem. *J. Nonlinear Sci. Appl.* 2016, 9(4), 1440–1452. <https://dx.doi.org/10.22436/jnsa.009.04.04>.
- [15] Casabán, M.C.; Company, R.; Egorova, V.N.; Jódar, L. A random free-boundary diffusive logistic differential model: Numerical analysis, computing and simulation. *Math. Comput. Simu.* 2024, 221, 55–78. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2024.02.016>.
- [16] Crank, J. *Free and Moving Boundary Problems*. Clarendon Press: Oxford, United Kingdom, 1984.
- [17] Crank, J. In *Numerical Methods in Heat Transfer*. In: Lewis, R.W.; Morgan, K.; Zienkiewicz, O.C. Wiley New York, 1981.
- [18] Crank, J.; Gupta, R.S. A moving boundary problem arising from the diffusion of oxygen in absorbing tissue. *IMA. J. Appl. Math.* 1972, 10(1), 19–33. <https://doi.org/10.1093/imamat/10.1.19>.
- [19] Dahmardah, H.O.; Mayers, D.F. A Fourier-series solution of the Crank-Gupta equation. *IMA J. Numer. Anal.* 1983, 3(1), 81–86. <https://doi.org/10.1093/imanum/3.1.81>.
- [20] Djellab, N.; Boureghda, A. A moving boundary model for oxygen diffusion in a sick cell. *Comput. Methods Biomech. Biomed. Eng.* 2022, 25(12), 1402–1408. <https://doi.org/10.1080/10255842.2021.2024168>.

- [21] Douglas, J.; Gallie, T.M. On the Numerical Integration of a Parabolic Differential Equation Subject to a Moving Boundary Condition. *Duke. Math. J.* 1955, 22(4), 557–571. <https://doi.org/10.1215S0012-7094-55-02262-6>.
- [22] Fasano, A.; Premicerio, M. Free Boundary Problems Theory and Applications. *Pitam London* 1983, Vols I & II.
- [23] Finn, W.D.L.; Voroglu, E. Finite element solution of the Stefan problem. In: Whiteman, J.R., ed, *The Mathematics of Finite Elements and Applications. MAFELAP 1978*. Academic Press: New York, 1979.
- [24] Friedman, A. *Variational Principles and Free-boundary Problems*. John Wiley & Sons Inc, New York, 1982.
- [25] Furzeland, R.M. A SURVEY OF THE FORMULATION AND SOLUTION OF FREE AND MOVING BOUNDARY (STEFAN) PROBLEMS. Brunel University, 1977a, Mat. Report TR/76.
- [26] George, J.; Damle, P.S. On the numerical solution of free boundary problems. *Int. J. Numer. Methods. Eng.* 1975 9(1), 239–245. <https://doi.org/10.1002/nme.1620090118>
- [27] Gupta, S.C. The Classical Stefan Problem: Basic Concepts, Modelling and Analysis (Volume 45). *North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics*, 1982.
- [28] Gupta, R.S.; Banik, N.C. Approximate method for the oxygen diffusion problem. *Int. J. Heat Mass Transf.* 1989, 32(4), 781–783. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(89\)90227-5](https://doi.org/10.1016/0017-9310(89)90227-5).
- [29] Gupta, R.S.; Banik, N.C. Constrained integral method for solving moving boundary problems. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 1988, 67(2), 211–221. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(88\)90126-0](https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90126-0).
- [30] Gupta, R.S.; Banik, N.C. Diffusion of oxygen in a sphere with simultaneous absorption. *Appl. Math. Model.* 1990, 14(3), 114–121. [https://doi.org/10.1016/0307-904X\(90\)90044-6](https://doi.org/10.1016/0307-904X(90)90044-6).
- [31] Hansen, E.; Hougaard, P. On a moving boundary problem from biomechanics. *IMA J. Appl. Math.* 1974, 13(3), 385–398. <https://doi.org/10.1093/imamat/13.3.385>.
- [32] Kot, M. *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. <https://doi.org/10.1017/CB09780511608520>

- [33] Liapis, A.I.; Lipscomb, G.G.; Crosser, O.K.; Tsiroyianni-Liapis, E. A model of oxygen diffusion in absorbing tissue. *Mathematical Modelling* 1982, 3(1), 83–92. [https://doi.org/10.1016/0270-0255\(82\)90014-8](https://doi.org/10.1016/0270-0255(82)90014-8).
- [34] Miklavčič, M. Analytic and numeric solutions of moving boundary problems. *J. Comput. Appl. Math.* 2023 431, <https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115270>.
- [35] Miller, J.V.; Morton, K.W.; Baines, M.J. A finite element moving boundary computation with an adaptive mesh. *IMA. J. Math. Appl.* 1978, 22(4), 467–478. <https://doi.org/10.1093/imamat/22.4.467>.
- [36] Mitchell, A.R.; Griffiths, D.F. The Finite Difference Method in Partial Differential Equations. *John Wiley & Sons*, 1980.
- [37] Murray, J.D. Mathematical Biology I: An Introduction. *Interdisciplinary Applied Mathematics, 17, 3rd Edition, Springer-Verlag*, New York, 2002.
- [38] Murray, J.D. Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications. *Interdisciplinary Applied Mathematics, 18, 3rd Edition, Springer-Verlag*, New York, 2002.
- [39] Ockendon, J.R.; Hodgkins, W.R. (Eds.). Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion. *Proc. Oxford Conf. March 1974*, Clarendon Press: Oxford, United Kingdom, 1975. <https://catalogue.nla.gov.au/catalog/160591>
- [40] Rasmussen, H. An approximate method for solving two-dimensional Stefan problems. *Lett. Heat Mass Transf.* 1977, 4(4), 273–277. [https://doi.org/10.1016/0094-4548\(77\)90115-1](https://doi.org/10.1016/0094-4548(77)90115-1).
- [41] Richtmyer, R.D.; Morton, K.M. Difference Methods for Initial Value Problems. *John Wiley & Sons*, 1967.
- [42] Rubinstein, L.I. The Stefan problem, *Trans. Math. Monographs* 27. (AMS, Providence, RI, 1971), 1971. <https://doi.org/10.1090/mmono/027>.
- [43] Smith, G.D. Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, Third Edition. *Oxford University Press*: Oxford, United Kingdom, 1978.
- [44] Stefan, J. Über einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung, *Sitzungsber, Wien, Akad. Mat. Natur.* 1889, 98, 473–484. https://www.zobodat.at/pdf/SBAWW_98_2a_0471-0484.pdf.

- [45] Tarzia, D.A. A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. *The Stefan and Related Problems, MAT Ser A 2*, 1–297. (Departamento de Matemática - CONICET, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, ARGENTINA.), 2000. <https://doi.org/10.26422/mat.a.2000.2.tar>.
- [46] Vynnycky, M. On boundary immobilization for one-dimensional Stefan-type problems with a moving boundary having initially parabolic-logarithmic behavior. *Appl. Math. Comput* 2023, 444, <https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127803>.
- [47] Wilson, D.G; Slomon, A.D.; Boggs, P.T. *Moving Boundary Problems*. Academic Press: inc. New York, 1978.

العنوان: الحل العددي لمسائل الحدود المتحركة الناتجة عن علم الأحياء.

ملخص : تظهر المسائل ذات الحدود المتحركة في سياقات بيولوجية وصناعية متنوعة، ولا سيما في تغيرات الطور أو انتشار المواد مثل الأكسجين. تتميز هذه المسائل بتعقيدها نتيجة لعدم خطية المعادلات التفاضلية الجزئية والصعوبة الإضافية المرتبطة بتحديد الحدود المتحركة ذاتها. تستكشف هذه الأطروحة الحلول الرقمية والتحليلية لهذه المسائل. تم استخدام طريقة تكاملية مقيدة لنمذجة درجة الحرارة وموقع الواجهة في الأنظمة التي تشهد تغيرات في الطور، وأيضًا لوصف انتشار الأكسجين في هندسة كروية مع الامتصاص. توفر كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة والسادسة تمثيلًا تقريبياً فعالاً، وتظهر النتائج توافقاً جيداً مع النتائج المستخلصة باستخدام تقنيات عديدة أخرى. يبرز هذا العمل الحاجة إلى أدوات متقدمة لنمذجة وحل هذه الظواهر المعقدة بدقة.

كلمات مفتاحية: طريقة التكامل المقيدة، الانصهار والتصلب، مسألة الحدود المتحركة، مسألة ستيفان، تغير الطور، بنك الجليد، انتشار الأكسجين، الامتصاص، المعادلات التفاضلية الجزئية، شروط الحدود.

Title: NUMERICAL RESOLUTION OF MOVING BOUNDARY PROBLEMS ARISING FROM BIOLOGY.

Abstract

Moving boundary problems arise in various biological and industrial contexts, particularly in phase changes or the diffusion of substances like oxygen. These problems are complex due to the nonlinearities of partial differential equations and the additional challenge of determining the moving boundary itself. This thesis explores numerical and analytical solutions for these problems. A constrained integral method is used to model the temperature and interface position in phase change systems, as well as to describe oxygen diffusion in a spherical geometry with absorption. Third and sixth-degree polynomials provide an efficient approximate representation, and the results obtained align well with those from other numerical techniques. This work highlights the need for advanced tools to accurately model and solve these complex phenomena.

Keywords: constrained integral method, melting and solidification, moving boundary problem, Stefan problem, phase change, ice bank, oxygen diffusion, absorption, partial differential equations, boundary conditions.

Titre : RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES À FRONTIÈRE MOBILE ISSUS DE LA BIOLOGIE.

Résumé : Les problèmes à frontière mobile apparaissent dans divers contextes biologiques et industriels, notamment dans les changements de phase ou la diffusion de substances comme l'oxygène. Ces problèmes sont complexes en raison des non-linéarités des équations aux dérivées partielles et de la difficulté supplémentaire liée à la détermination de la frontière mobile elle-même. Cette thèse explore des solutions numériques et analytiques pour ces problèmes. Une méthode intégrale contrainte est utilisée pour modéliser la température et la position de l'interface dans des systèmes en changement de phase, ou encore pour décrire la diffusion de l'oxygène dans une géométrie sphérique avec absorption. Des polynômes de degré trois et six permettent une représentation approximative efficace, et les résultats obtenus s'accordent bien avec ceux issus d'autres techniques numériques. Ce travail illustre la nécessité d'outils avancés pour modéliser et résoudre ces phénomènes complexes avec précision.

Mots-clés: méthode intégrale contrainte, fusion et solidification, problème à frontière mobile, problème de Stefan, changement de phase, banc de glace, diffusion de l'oxygène, absorption, équations aux dérivées partielles, conditions aux limites.