الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République algérienne démocratique et populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

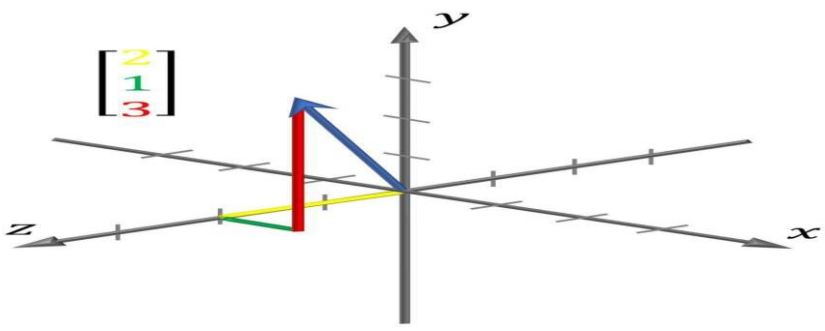
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

جامعة فرحات عباس – سطيف 1

مقياس رياضيات المؤسسة

من إعداد:

الدكتورة قرفي شافية



السنة الجامعية 2021/2020

فهرس المحتويات

العنوان	الصفحة
مقدمة	5
I. **البرمجة الخطية وتطبيقاتها The Linear Progaming and Application**	6
تمهيد	6
I.1.صياغة نموذج البرمجة الخطية	6
I.1.1.تعريف البرمجة الخطية	6
I.1.2.مكونات نموذج البرمجة الخطية	7
I.1.3.البرنامج الخطي	8
I.1.4.مراحل صياغة مشكلة البرمجة الخطية	9
I.1.5.الصياغة الرياضية لمشكلة البرمجة الخطية أو بناء النموذج الخطي	9
سلسة (I.1)	13
I .2.طرق حل نموذج البرمجة الخطية- الطريقة البيانية – The Graphical Method	16
تمهيد	16
I .2.1.مفهوم الطريقة البيانية	16
I .2.2.خطوات حل مشكلة البرمجة الخطية بالطريقة البيانية	16
I .2.3.ملاحظات	22
I .2.4.حالات خاصة	22
I.2.4.1.حالة تعدد الحلول	22
I .2 .4 .2حالة استحالة الحل	24
I.2.4.3. حالة حياد أحد القيود	24
I .2.4.3حالة منطقة الحلول المجدية غير محدودة	25
سلسلة (I.2)	27
I .3.طرق حل مشكلة البرمجة الخطية- الطريقة البسيطة (The Simple Method)	29
تمهيد	29
I.3.1. الشكل المعياري أو القياسي	30
I.3.2.خطوات حل النموذج	30
I.4. الطريقة العادية المبسطة	33

I.1.4.الشكل المعياري للنموذج 33
سلسلة (I.4). 37
I.5. طريقة السمبلكس مع إدخال متغير وهمي. 39
تمهيد. 39
I .1.5.خطوات طريقة السمبلكس مع إدخال متغير وهمي 39
سلسله(I.5) 44
I .6.طريقة السمبلكس على مرحلتين 45
تمهيد 45
1.6.1خطوات طريقة السمبلكس على مرحليتين. 45
2.6.1. ملاحظة 46
سلسلة (I.6) 49
II. المسألة الثنائية في البرمجة الخطيةDual 50
تمهيد 50
II.1. صياغة مشكلة البرمجة الخطية الثنائية 50
II .2.خطوات بناء المسألة الثنائية من المسألة الأصلية 51
II .3.الشكل المعياري للمسألة الثنائية 53
II .4.شروط بناء المسألة الثنائية من المسألة الأصلية 53
II. 5.ملخص 54
II .6.طرق حل المسألة الثنائية 55
II .1.6.طريقة التكامل 55
II.2.6.طريقة السمبلكس لحل المسألة الثنائية 56
II.7.المعنى الاقتصادي للمسألة الثنائية 57
II.8.فوائد استخدام المسألة الثنائية 58
سلسلة II 64
III. تحليل الحساسية Sensitivity Anaysis 66
تمهيد 66
III.1.أثر التغير في معاملات دالة الهدف 66
III.1.1 تغير في معامل متغير غير أساسي 68
III.1.2 .تغيير في معامل المتغير الأساسي 70

2.III .تغيير في قيمة الجانب الأيمن 71
3.III.إضافة قيد للمشكلة 72
4.III.العلاقة بالثنائية 73
سلسلة III 74
IV.مسائل النقل Transportation Problems 76
تمهيد 76
1.IV. شروط استخدام مسائل النقل 76
2.IV.عناصر مسألة النقل 76
3.I.V.صياغة المسألة 77
4.IV.أنواع مسائل النقل 78
1.4.IV.مسائل النقل المغلق(Closed Transportation Problems) 78
2.4.IV.مسائل النقل المفتوح (Opened Tranportation Problems) 78
5.IV.طرق حل مسألة النقل 80
1.5.IV.طريقة تحديد الحل الأساسي الممكن 81
2.5.IV.طريقة إيجاد الحل الأفضل 83
3.5.IV.طريقة اختبار وتحسين الحل الأمثل 85
سلسلة(IV) 91
V. مشاكل التخصيص 93
تمهيد 93
1.V.شروط مشكلة التخصيص 93
2.V.صياغة مشكلة التخصيص 93
3. V.الطرق المستخدمة في حل مشكلة التخصيص 94
1.3.V. طريقة العد الكامل 94
2.3.V.خطوات الطريقة المجرية مشكلة التخصيص 96
سلسلة (V) 99
VI.البرمجة غير الخطية Non-linear programing 101
تمهيد 101
1.VI. مفاهيم تمهيدية للبرمجة غير الخطية 101
1.1.VI.تعريف البرمجة غير الخطية 101

VI .2.1. اشكال البرمجة غير الخطية **101**

VI.3.1. الصياغة العامة للبرمجة غير الخطية **101**

VI.2. الدوال المحدبة والمقعرة **102**

VI .1.2. بعض الخواص على الدوال المحدبة والمقعرة **105**

VI.2.2. نظريات على الدوال المحدبة والمقعرة **106**

VI.3. حل البرمجة غير الخطية بمتغير واحد **110**

VI .1.3. النقاط حيث $a<x<b$ و $f'(x)$ موجودة **111**

VI.2.3. النقاط التي لا توجد فيها $f(x)$ **112**

VI.3.3. النقاط a وb,خلال الفترة [a,b] **114**

VI .4. أمثلية برمجة غير خطية غير مقيدة بعدة متغيرات **116**

VI. مضاعف لاغرانج **117**

سلسلة (VI) **121**

قائمة المراجع **122**

مقدمة

تنشط المؤسسات في بيئة معقدة وغير مستقرة تسودها المنافسة الحادة، ما دفعها إلى البحث والتطوير والابتكار والتحسين باعتباره السبيل الوحيد لبقائها ونموها، فبقاء المؤسسة في هده المحيط والذي يعتبر التغيير هو الثابت الوحيد، يعتمد على قدرتها في التقييم الفعال لأدائها وفي تحديد الاستراتيجيات التي تمكنها من اتخاذ قرارات جيدة وبلوغ أهدافها،

يعتمد تقييم الأداء على مؤشرات كمية تقيس الحصة السوقية، الإنتاج الربح، والتكلفة وغيرها. وهي من الأساليب الكمية والتي تعتبر أهم مدخل في إدارة الأعمال، وتساعد المؤسسة على ترشيد استخدام مواردها وعوامل انتاجها خصوصا في ظل الفجوة بين ندرة الموارد وزيادة الحاجات، وصولا الى مساعدتها في صناعة قرارها، لذا جاءت مادة رياضيات مؤسسة باعتبارها تعتمد على هاته الأساليب من المواد المهمة التي يجب اعتمادها تدريسها للطلاب حيث نهدف من خلال هذه الدروس إلى تعريف الطلاب بعملية" النمذجة " التي تتمثل في إضفاء الطابع الرسمي على مشكلة ملموسة مقدمة في شكل خام ، واستكشاف طرق مختلفة للدراسة من خلال مقارنة النتائج النظرية أو العددية بشكل منهجي بالواقع .هذه الوحدة مخصصة لي طلاب سنة ثانية علوم تسيير، بما في ذلك أولئك الذين لا يخططون للانتقال إلى عالم الأعمال أو الذين قد يجدون صعوبة في تصور أن خلفيتهم يمكن أن تسمح لهم بتوفير عناصر استجابة لمشكلة في مجال الأعمال.

I. البرمجة الخطية وتطبيقاتها

تمهيد:

في عام 1947، طور جورج دانتنج طريقة فعالة وهي الخوارزمية البسيطة. لحل مشاكل المعالجة الخطية (LP) ، ليتم استخدامها لحل مشكلات التحسين في صناعات متنوعة مثل البنوك والتعليم والغابات والبترول وغيرها . ففي دراسة استقصائية شملت 500 شركة عالمية، تبين أن 85% من أصحاب الشركات استخدموا البرمجة الخطية في حل مشاكلهم .[1] ونظر لأهمية البرمجة الخطية في بحوث العمليات. سيخصص حوالي 70 %من هذه المطبوعة للبرمجة الخطية وتقنيات التحسين ذات الصلة. بدءا من التعريف بمشاكل البرمجة الخطية عامة. وصولا الى كيفية حل مشاكل البرمجة الخطية التي تتضمن طرق مختلفة انطلاقا من الحل البياني البسيط الذي يشمل متغيرين فقط الى حل نموذج البرمجة الخطية (LP_S) الأكثر تعقيدًا. ومن ذلك يسهل توضيح كيفية صياغة نموذج البرمجة الخطية لمشكلة ما في الحياة الواقعية.

I.1.صياغة نموذج البرمجة الخطية

I.1.1.تعريف البرمجة الخطية

مصطلح البرمجة الخطية هو مزيج متكون من مصطلحين "خطي" و "برمجة" اذ يشير مصطلح "خطي" على أن جميع العلاقات في المشكلة المعينة خطية بين متغيرات دالة الهدف، أي تتغير قيم المخرجات تبعا لتغير قيمة المدخلات بنفس النسبة أو في نفس الاتجاه زيادة أو نقصاً.[2] ويشير مصطلح "برمجة" إلى العملية التي تحدد برنامجًا أو خطة عمل معينة، لذلك تعتبر طريقة البرمجة الخطية تقنية تسمح باختيار أفضل بديل من بين مجموعة البدائل الممكنة في المواقف التي يمكن فيها التعبير عن دالة الهدف، والقيود وذلك في شكل دالة رياضية خطية. تسمى الدالة الخطية التي يجب تحسينها إلى دالة الهدف، وتسمى ظروف المشكلة المعبر عنها بمعادلات خطية أو متباينات قيودًا. وعليه فيمكن تعريف البرمجة الخطية عمومًا على أنها: "عملية تحويل مشكلة من واقع الحياة إلى نموذج رياضي يحتوي على متغيرات تمثل القرارات التي يمكن فحصها وحلها للوصول إلى حل أمثل باستخدام الخوارزميات".

---

[1]Wayne L. Winston, Operations Research :Applications And Algorithms, FOURTH EDITION , Brooks/Cole—Thomson Learning , USA, 2004.p.49.

2 مصطفى أبو بكر، مصطفى مظهر، **بحوث العمليات و فاعلية القرارات**، مكتبة عين شمس، القاهرة، مصر، 1997، ص 311.

2.1.I.مكونات نموذج البرمجة الخطية

النماذج الوصفية أو نماذج التحسين هي عبارة عن نماذج توجيهية أو نماذج تحسين. نموذج توجيهي "يصف" سلوكًا لمؤسسة تمكنها من تحقيق هدفها (أهدافها) على أفضل وجه، وتتضمن مكوناته قيود متغيرات القرار لدالة الهدف، في حين يسعى نموذج التحسين إلى إيجاد قيم متغيرات القرار التي تحدد (تعظيم أو تصغير) دالة الهدف بين مجموعة جميع القيم لمتغيرات القرار التي تفي بالقيود المحددة. ومما سبق يمكن تحديد مكونات نموذج البرمجة الخطية على النحو التالي:[3]

☑ **متغيرات القرار:** هي المجاهيل التي نبحث عن قيمتها وتؤثر على أداء النظام، قد يحددها السؤال المطروح الذي نريد الإجابة عليه عند حل المسألة وتأخذ الصياغة الرياضية التالية:

$$X_1, X_2, \ldots X_n$$

- **القيود:** هي الالتزامات والعوامل الواجب على المؤسسة التقيد بها وأخذها بعين الاعتبار لبلوغها الهدف المسطر، ويمكن تقسيم هذه القيود إلى قيود داخلية وأخرى خارجية. فالأولى تتضمن الكميات المتاح من المدخلات بمختلف أنواعها (المواد الأولية، المنتجات النصف مصنعة، الطاقة المتاحة الخاصة بالآلات، اليد العاملة، الميزانية المخصصة...إلخ). أما الثانية فتتعلق بالسوق بصفة خاصة وبمحيط المؤسسة بصفة عامة وتشمل الكميات المطلوبة في السوق، الكميات التي يمكن توزيعها فعلا، الالات الالتزامات الخاصة بالتشريعات البيئية.وتأخذ القيود الصياغة الرياضية التالية:

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mi}x_j+\ldots a_{mn}x_n(\leq=\geq)b_n$$

- **دالة الهدف:** في معظم النماذج، ستكون هناك دالة ترغب وتسعى المؤسسة في تعظيمها أو تصغيرها تسمى هذه الدالة بدالة الهدف للنموذج، وبطبيعة الحال، لزيادة عائد العملية إلى الحد الأقصى، نحتاج إلى إيجاد قيمX_1وX_2وX_3و...وX_n التي تجعل الدالة أكبر ما يمكن، وفي كثير من الحالات، قد يكون للمؤسسه أكثر من هدف واحد تسعى الوصول إليه من خلال عملياتها، هذه الدالة تكون وحيدة دائمًا عند تشكيلها. وتصاغ على النحول التالي:

$$f(x_1.....X_n) = C_1X_1+C_2X_2+.....+C_nX_n$$

[3] Wayne L. Winston,opcit ,p.p:49-52.

I.3.1.البرنامج الخطي

إن أهم مرحلة في البرمجة الخطية هي مرحلة إنشاء نموذج البرمجة الخطية أي التعبير عن علاقات واقعية بعلاقات رياضية مفترضة ومبنية على دراسة الواقع وتحليله، من أجل صياغة نموذج البرمجة الخطية يجب توافر مجموعة من الشروط الأساسية وهي:[4]

- ☑ **شرط وجود هدف محدد**: وذلك بعد تحديد الهدف تحديدا رياضيا دقيقا بمتغيرات القرار يعبر عنه بدالة الهدف، والذي يطلب فيه إيجاد القيمة العظمى أو الصغرى له، ويمكن التعبير عنه كميا بتحقيق أكبر قدر من الربح أو تامين أصغر ما يمكن من الكلفة أو وتوفير أقصى ما يمكن من الوقت أو الجهد.
- ☑ **شرط الخطية:** أي وجود علاقة خطية بين المتغيرات ودرجة تحقق الأهداف، تكون دالة الهدف والقيود عبارة عن معادلات ومتباينات خطية لمتغيرات القرار (معاملاتها ثابتة)؛
- ☑ **شرط الاستمرارية:** يمكن أن تأخذ المتغيرات أي قيمة حقيقية فيما يتعلق بالقيود الخطية؛
- ☑ **شرط توفر عدد من المتغيرات:** أن يكون لدينا عدد من المتغيرات التي تؤثر في تغيرها على القرارات المتخذة سواءٌ بالزيادة أو النقصان حسب البرنامج المقترح، وتؤثر هذه الزيادة أو النقصان على الهدف المطلوب تحقيقه؛
- ☑ **شرط توفر عدد من القيود والمحددات أو العوامل**: يجب أن تكون الموارد المتاحة محددة كما يجب أن تكون تلك الموارد قابلة للقياس، فمحدودية الموارد تستلزم الاستخدام الأمثل لها مراعاة للظروف البيئية المحيطة بالمؤسسة؛
- ☑ **شرط عدم السلبية:** لابد أن تكون متغيرات القرار أكبر أو يساوي الصفر؛
- ☑ **شرط توفر بدائل:** يشير هذا العنصر بوجوب توفر أكثر من حل حتى يمكن تطبيق البرمجة الخطية إذ لو كان للمشكلة حل واحد لما كانت هناك ضرورة لاستخدام البرمجة الخطية، فائدتها تتركز في المساعدة على اختيار أفضل حل من بين الحلول المختلفة.

---

[4] إبراهيم وصيف غدير إبراهيم، عبد الرزاق حواس، **محاضرات مقياس رياضيات المؤسسة**، كلية العلوم الاقتصادية، التجارية و علوم التسيير،جامعة الشهيد حمة لخضر ،الواد، 2020،2021، ض.4.

I.4.1.مراحل صياغة مشكلة البرمجة الخطية

تأخذ الخطوات التالية :[5]

- ☒ الخطوةالأولى: تدوين متغيرات القرار السائدة الخاصة بالمشكلة أو العناصر الأساسية للمشكلة في شكل متغيرات قرار غير سالبة وان وجدت سالبة لابد من تحويلها إلى متغيرات غير سالبة la non négativité؛
- ☒ الخطوة الثانية: صياغة الهدف المطلوب للمشكلة المراد تحسينها في صورة دالة خطية لمتغير القرار مع إمكانية إيجاد نهاية كبرى(Point maximum) أو نهاية صغرى (Point minimum) لهذه الدالة ؛
- ☒ الخطوة الثالثة: صياغة شروط أو قيود المشكلة مثل: الموارد، قيود السوق، العلاقات المتبادلة بين المتغيرات ...الخ، تكون في شكل معادلات خطية أو متباينات خطية أو خليط بينهما، وتسمى هذه القيود بالقيود الهيكلية (contraintes structurelles)؛
- ☒ الخطوة الرابعة: يجب أن تكون متغيرات القرار موجبة أو معدومة أو ممكن تحويلها إلى متغيرات غير سالبة وتضاف إلى القيود الهيكلية وتسمي بقيود عدم السلبية (Non-Négativité des variables)؛

إن دالة الهدف ومجموعة القيود والقيود غير السالبة يشكلون معًا مشكلة برمجة خطية تصوغ المشكلة في شكل نموذج مناسب. وتتطلب جملة المعلومات من (صانع القرار، الهدف، العوامل القابلة للتحكم (المتغيرات)، عوامل لا يمكن السيطرة عليها (متغيرة) أو ما يعرف بالقيود والتي قد تكون ذات طبيعة وظيفية كما هو الحال في البرمجة الخطية أو لها بنية منطقية كما في المحاكاة والخوارزميات).

I.5.1.الصياغة الرياضية لمشكلة البرمجة الخطية أو بناء النموذج الخطي

يمكن تحديد الصياغة الرياضية لمشكلة البرمجة الخطية العامة لـ(LPPA)على النحو التالي؛

- إيجادX_n، ، ...، X_1,X_2 التي تعمل على تحسين دالة الهدف .

$$Opt\ f(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j\, x_j$$

أو نكتب

$$Z = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_nX_n$$

[5] Lyeme muslim and abdallah Selemani, Introduction to Operations Research: Theory and Applications, lap lambert academic publishing, september 2012, p .16.

تخضع للقيود

$$a_{11}X_1+a_{12}X_2+\ldots+a_{1j}X_j+\ldots a_{1n}X_n(\leq=\geq)b_1$$

$$a_{21}X_1+a_{22}X_2+\ldots+a_{2j}X_j+\ldots a_{2n}X_n(\leq=\geq)b_2$$

,,

$$a_{i1}X_1+a_{i2}X_2+\ldots+a_{ij}X_j+\ldots a_{in}X_n(\leq=\geq)b_i$$

,,

$$a_{m1}X_1+a_{m2}X_2+\ldots+a_{mi}X_j+\ldots a_{mn}X_n(\leq=\geq)b_n$$

مع عدم سلبية القيود

$$X_j \geq 0,1,2,3,\ldots,n$$

جيث تمثل كل من: $X_j \geq 0, \quad j=1,2,3,\ldots,n$

- *Opt*:تعني الأمثلية (*Optimalité*)، أي إما التعظيم (*Max*) أو التخفيض (*Min*)
- Cj: تمثال ثوابت وهي معاملات دالة الهدف، أي إما العائد الوحدوي أو التكلفة الوحدوية لكل منتج
- xi: متغيرات القرار هي رموز للكميات (عدد الوحدات) المنتجة لكل منتج، و هي ايضا المجاهيل التي نبحث عنها؛
- a_{ij}: تمثل ثوابت أي الكميات المستهلكة من الموارد (الطاقات الإنتاجية) للإنتاج الوحدوي من المنتجات؛
- b_i:تمثل ثوابت وهي الكميات المتاحة من الموارد؛
- *i* : عدد الأسطر، و هي بعدد القيود (*m*)؛
- *j* : عدد الأعمدة، و هي بعدد المتغيرات أي المجاهيل (*n*).

وباختصار يكتب البرنامج في شكله القانوني او النظامي (***FormeCanonique***) كالاتي :

في حالة التعظيم	في حالة التدنئة
$Max\ Z = CX$ S/c $\begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$	$Min\ Z=CX$ S/c $\begin{cases} AX \geq b \\ X \geq 0 \end{cases}$

في حالة التعظيم أو التدنئة حيث تكون

دالة الهدف ⟵ $Z = CX$

القيود ⟵ $AX(\leq=\geq)b$

مع شرط عدم السلبية ← $X \geq 0$

أين $X=(X_1,X_2, \ldots, Xn)$و$C=(C_1,C_2, \ldots, Cn)$

ملاحظة I/1

عادة ما تكتب البرامج الخطية في بداية وضعها على شكل صيغة عامة (***FormeMixte***)تحتوي على كل الإشارات ($\leq$ ، = ، $\geq$).

يمكن التعبير عن LPP في شكل مصفوفة على النحو التالي؛

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال1/I :

يريد تاجر أثاث أن يستثمر أمواله في شراء كراسي أو طاولات أو مزيج منهما بقيمة 50000 وجدة نقدية وبمساحة تخزين تقدر بـ 60 قطعة كحد أقصى مع العلم أن تكلفة شراء طاولة واحدة تقدر بـ 2500 وحدة نقدية مقابل 500 وحدة نقدية للكرسي الواحد.

الربح المحقق من بيع طاولة هو 250 وحدة نقدية و75 وحدة نقدية من الكرسي الواحد.

التاجر يرغب في معرفة عدد الطاولات والكراسي التي يجب شراءها من حجم استثماراته المتاحة وذلك لزيادة ربحه الإجمالي إلى أقصى حد ممكن.

الحل1/I :

مشكلةالبرمجة الخطية وصياغتها الرياضية نبدأ مناقشتنا بالمثال أعلاه لتاجر الأثاث والذي سيزيد من ذلك يؤدي إلى صياغة رياضية للمشكلة في متغيرين. في هذا المثال، نحن بصدد معرفة ما يمكن التاجر استثماره من أمواله في شراء طاولات أو كراسي أو مزيج منها. علاوة على ذلك، معرفة ما سيكسبه من أرباحً من خلال إتباع استراتيجيات مختلفة.

ثانيا هناك بعض الشروط أو القيود المهيمنة، أي استثماره يقتصر على50000وحدةنقدية كحد أقصى وكذلك مساحة التخزين الخاصة به المخصصة لـ 60 قطعة كحد أقصى لنفترض أنه قرر شراء 20 طاولة ربحه هو (250 × 20)،أي أن الربح يساوي 5000 وحدة نقدية. أو لنفترض أنه اختار شراء الكراسي فقط دون طاولات. برأس ماله 50000 وحدة نقدية، يمكنه شراء 500/50000، أي 100 كرسي. لكن يمكنه تخزين 60 قطعة فقط. لذلك، هو يضطر إلى شراء 60كرسيًا فقط مما يمنحه ربحًا إجماليًا قدره 60 × 75ون، أي 4500

ون والعديد من الاحتمالات الأخرى، على سبيل المثال، قد يختار شراء 10 طاولات و50 كرسى اذ يمكنه تخزين 60 قطعة فقط. إجمالي الربح في هذه الحالة سيكون (10 × 250 + 50 × 75) ون، أي 6250 ون وما إلى ذلك. وبالتالي، نجد أن التاجر يمكنه استثمار أمواله بطرق مختلفة وهو سيفعل ذلك لكسب أرباح مختلفة بإتباع استراتيجيات الاستثمار المختلفة المشكلة الآن هي: كيف يستثمر ماله ليحصل على أقصى ربح؟ للإجابة على هذا السؤال، دعونا نحاول صياغة المسألة رياضياً

✓ **الصياغة الرياضية للمشكلة البرنامج الخطي:**

لنفترض أنX_1 : هو عدد الطاولات المشتراة

X_2 : هو عدد الكراسي المشتراة.

شرط أن تكون كل من X_1و X_2غير سالبتين، معناه رياضيا:

$$X_1, X_2 \geq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

التاجر مقيد بأقصى مبلغ يمكن أن يستثمره وهو 50000 ون وبأقصى عدد من العناصر التي يمكنه تخزينها (60 قطعة).

معناه رياضيا: $2500\,X_1 + 500\,X_2 \leq 50000$ (قيد الاستثمار)

أو $5X_1 + X_2 \leq 100$ .....(2)

$X_1 + X_2 \leq 60$ .....(3) (قيد التخزين)

يريد التاجر الاستثمار بهذه الطريقة لتحقيق أقصى قدر من ربحه، على سبيل المثال Zالتي تم ذكرها كدالة لـ X1وX_2 معطاة بواسطة العلاقة التالية:

$$Z = 250X_1 + 75X_2$$

المشكلة المعطاة تعمل على تعظيم دالة الهدف وهذا معناها رياضيا:

$MAX\ Z = 250X_1 + 75X_2$ .....(4) (تسمى دالة الهدف)

وعليه يكون النموذج الرياضي بالشكل التالي:

$$(PL) \qquad MAX\ Z = 250X_1 + 75X_2$$

$$s/c \begin{cases} 5X_1 + X_2 \leq 100 \\ X1+X2 \leq 60 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

خلاصة:

إن مشكلة البرمجة الخطية هي مشكلة تتعلق بإيجاد القيمة المثلى (القيمة القصوى أو الدنيا) لدالة خطية (دالة الهدف) للعديد من المتغيرات مثل (X_1 وX_2)، مع مراعاة الشروط التي تكون المتغيرات فيها غير سالبة و تخضع لمجموعة من المتباينات الخطية (القيود الخطية). يشير المصطلح الخطي إلى أن جميع العلاقات الرياضية المستخدمة في المشكلة هي علاقات خطية بينما يشير مصطلح البرمجة إلى طريقة تحديد برنامج أو خطة عمل معينة. بعض المصطلحات التي تم استخدامها أعلاه والتي سنستخدمها في مشكلة البرمجة الخطية ممثلة بدالة خطية للهدف معبر عنها بـ: $\mathbf{Z = C_1 + C_2}$ ، حيث(**b,a**)هي ثوابت ، والتي يجب تعظيم قيمتها أو تصغيرها في المثال أعلاه عبر عليها بـ $\mathbf{Z = 250X_1 + 75X_2}$. متغيراتX1$X_2$,تسمى متغيرات القرار. القيود تسمى المتغيرات الخطية أو المعادلات أو القيود المفروضة على متغيرات مشكلة البرمجة الخطية بالقيود. الشروط$\mathbf{X_2 \geq 0}$ ، $\mathbf{X_1 \geq 0}$تسمى قيود اللاسلبية. في المثال أعلاه، مجموعة المتباينات (1) إلى (3) هي قيود. أما مشكلة التحسين هي مشكلة تسعى إلى تعظيم أو تقليل دالة خطية. تعد مشكلات البرمجة الخطية نوعًا خاصًا من مشكلات التحسين.

سلسة (1.I)

تمرين 1:

تريد شركة علاقات عامة إجراء استطلاع رأي. بشترط فيه قيام كل موظف بإجراء 80 مقابلة هاتفية يوميًا أو 40 مقابلة مباشرة مع امكانية إجراء نوع واحد فقط من المقابلات في اليوم.

من أجل الحصول على عينة تمثيلية، عليه استيفاء المعايير الثلاثة التالية:

- على الأقل 3000 مقابلة.
- على الأقل 1000 مقابلة عبر الهاتف.
- على الأقل 800 مقابلة مباشرة.

أجر الموظف الذي يجري مقابلة هاتفية في اليوم ب 50 وجدة نقدية مقابل 70 وحدة نقدية لليوم بالنسبة الموظف الذي يجري المقابلة المباشرة.

تمرين 2:

يرغب مزارع في زراعة كامل أرضه بنوعين من الخضروات" الجزر" و"الكوسة، استخدم فيها نوعين من السماد(A)و (B) ونوع واحد من مضاد الطفيليات. محصول الجزر والكوسة هما على التوالي 4 كغ / م^2 و 5 كغ / م^2. يقدر مخزون السماد بـ8 لتر.(A) ، 7 لتر لb، و3 لتر من مضاد الطفيليات. احتياجات الخضروات من المواد يتطلب 2 لتر / م ^{2} من السماد(A)، 1 لتر / م^2 من السماد (B)للجزر مقابل 1 لتر من السماد(A) ، و 2 لتر / م2 من السماد(B) للكوسة، يستخدم المزارع مضاد الطفيليات فقط في الكوسة بمعدل 1 لتر / م 2

المطلوب: كيف يمكنك مساعدة المزارع حتى يتمكن من إنتاج أقصى كمية من للخضروات؟

تمرين 3: يريد صنع مكيفات الهواء والمراوح معرفة العدد الأمثل من المنتجات النهائية المصنعة لتعظيم أرباحه الأسبوعية، وطلب منك مساعدته مزودك بالمعطيات حول ساعات عمل الآلات وساعات العمل اليد العاملة كما هو موضح في الجدول التالي:

	عمل ساعات الآلات	ساعات عمل اليد العاملة	الربح بالوحدة النقدية
المكيفات	2	2	25
المراوح	3	1	15
المجموع	140	240	

تمرين 4:

تقوم شركة تصنيع بإنتاج نموذجين "A" و "B" للمنتج، تتطلب كل قطعة من النموذج أ(A) 9 ساعات عمل للتصنيع وساعة عمل واحدة للتشطيب تتطلب كل قطعة من النموذج (B)12 ساعة عمل للتصنيع و3 ساعات عمل للتشطيب. بالنسبة للتصنيع والتشطيب، فإن الحد الأقصى لساعات العمل المتاحة هو 180 و30 على التوالي. تحقق الشركة ربحًا قدره 8000 وحدة نقدية على كل قطعة من الطراز A و12000 وحدة

نقدية على كل قطعة من النموذج .B كم عدد قطع النموذج A والنموذج B التي يجب تصنيعها في الأسبوع لتحقيق أقصى ربح؟ ما هو الحد الأقصى للربح في الأسبوع؟

I .2.طرق حل نموذج البرمجة الخطية- الطريقة البيانية -

تمهيد

بعدما تم صياغة نموذج البرمجة الخطية رياضيا سنشرع في استخدام طرق للبحث عن الحل الأمثل سواء كانت المشكلة المطروحة هي بتعظيم العائد أو بتقليل التكاليف وذلك من خلال التعرف على فيم التغيرات التي تحدد أعلى ربح أو اقل تكلفة من خلالها.

I .1.2.مفهوم الطريقة البيانية

طريقة الرسم البياني تستخدم في حل مسائل البرمجة الخطية (LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS) المتكونة من متغيرين، تعد من أسهل الطرق إلا أنها غير كفؤة في معالجة مشاكل البرمجة الخطية في الحياة العملية التي تحوي عددا كبير امن المتغيرات، تكمن فائدتها في إعطاء الدارس معلومات تساعده على إدراك خصائص البرمجة الخطية ما يسهل عليه فهم بقية الطرق ومن ثم الوقوف على تفاصيل الحل وكيفية معالجة وتطوير الحل لمسائل البرمجة الخطية التي تتكون من أكثر من متغيرين.

I .2.2.خطوات حل مشكلة البرمجة الخطية بالطريقة البيانية

تتبع الطريقة البيانية الخطوات التالية:

- **الخطوة الأولى:** يتم التعبير عن المشكلة في شكل نموذج رياضي أين يتم تدوين دالة الهدف والقيود:
- **الخطوة الثانية:** يتم فيها تحويل كل قيود من متراجحات إلى معادلات؛
- **الخطوة الثالثة:** نرسم كل معادلة على الرسم البياني حيث تمثل كل معادلة هندسيًا خطًا مستقيمًا ثم نحدد أي جهة من المستقيم تحقق المتراجحة فتكون هي نصف المستوي المعرف بالمتراجحة القيد:
- **الخطوة الرابعة:** تظليل المنطقة المجدية ومن ثم تحديد منطقة الحلول الممكنة أين تقع القيود التي تكون من شكل متراجحات في أسفل خط المعادلة أو أعلاه أما القيود التي تكون على شكل معادلات فتقع على خط المعادلة وتقاطع كل هذه المناطق يعطينا منطقة يطلق عليها **منطقة الحلول الممكنة** وهي المنطقة المشتركة التي ستلبي نقاطها جميع القيود في وقت واحد هذه المنطقة هي الحل العملي للمشكلة؛
- **الخطوة الخامسة:** يتم فيها إيجاد الحلول المثلى وذلك باحتساب قيمة الرؤوس المختلفة لمنطقة الحل الممكن ;تعويضها في دالة الهدف فنحصل على الحل الأمثل والذي يأخذ أكبر قيمةفي حالة تعظيم دالة الهدف وأصغر قيمة عند تدنئة دالة الهدف في المسألة.

مثال1/2.أ:

نتتبع الخطوات الواردة أعلاه في مثالنا السابق أين يكون الحل كمايلي:

✓ الصياغة الرياضية للبرنامج الخطي

$$Max(Z)=250X_1+75X_2$$

$$S/c \begin{cases} 5X_1 + X_2 \leq 100 \\ X_1+X_2 \leq 60 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

✓ تحويل القيود إلى معادلات وإيجاد نقاط التقاطع مع المحاور

- متراجحة القيد الأول ⟵ $5X_1 + X_2 \leq 100$
- المعادلة المكافئة لها ⟵ $5X_1+X_2=100$

نرسم المستقيم (Δ_1) الممثل للمعادلة $5X_1+X_2=100$ وذلك بتحديد نقطتين منه تقطعان المحاور ليصبح

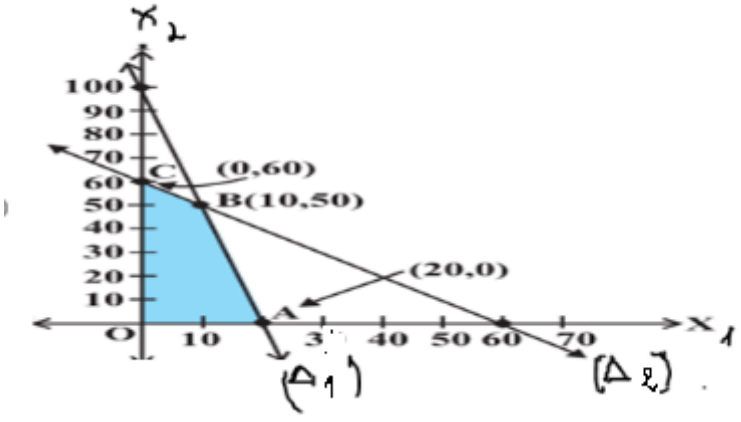
$5X_1 + X_2=100$ $(X_1=0 \Rightarrow X_2=100),(X_1=20 \Rightarrow X_2=0)$

- متراجحة القيد الثاني ⟵ $X_1+X_2 \leq 60$
- المعادلة المكافئة لها ⟵ $X_1+X_2=60$

نرسم مستقيم (Δ_2) الممثل للمعادلة $X_1+X_2=60$ وذلك بتحديد مقطتين منه تقطعان المحاور

$X_1+X_2=60$ $(X_1=0 \Rightarrow X_2=60),(X_1=60 \Rightarrow X_2=0)$

✓ التمثيل البياني:



كل نقطة داخل وعلى حدود منطقة الحلول الممكنة OABC تمثل حلًا عمليًا للمشكلة، على سبيل المثال، النقطة (10، 50) هي حل ممكن للمشكلة وكذلك النقاط،(0،60)،(0.20) .....إلخ . وأي نقطة خارج المنطقة المجدية نسمى حلا غير قابل للتنفيذ أو حل غير ممكن فمثلا، النقطة (25، 40) هي حل غير عملي لـ المشكلة.

✓ حساب قيمة دالة الهدف عند النقاط المتطرفة من منطقة الحلول الممكنة

في المثال أعلاه، نجد ان منطقة الحلول الممكنة الرؤوس OABCإحداثياتهابالترتيب على النحو التالي (0، 0) ، (20 ، 0) ، (10 ، 50).(0،60).

الحل الأمثل يوجد على أحد رؤوسها وعليه نقوم بحساب احداثيات هذه الرؤوس والتي تعظم من قيمة دالة الهدف.

نحسب قيمZ في كل منها فنجد:

$$Z_0=250\ (0)+75(0)=O$$

$$Z_C=250\ (0)+75\ (60)=4500$$

$$Z_B=250\ (10)+75\ (50)=\mathbf{6250}$$

$$Z_A=250\ (20)+75\ (0)=5000$$

لإيجاد إحداثيات النقطة Bنقوم بحل جملة معادلتي القيدين المتقاطعين عندها، أيحل جملة معادلتين (1) و(2)

$$5X_1+X_2=100\ .....(1)$$

$$X_1+X_2=60\ .....\ (2)$$

نضرب المعادلة (2) في 5 فتحصل على المعادلة

$$5X_1+5X_2=300\ .....\ (3)$$

نقوم بطرح المعادلة (3) من المعادلة (1) نحصل على:

$$4X_2=200\Rightarrow X_2=200/4\Rightarrow X_2=50$$

نعوض قيمة X_2في المعادلة (1) أو (3) نحصل على:

$$5X_1+50=100\Rightarrow 5X_1=50\Rightarrow X_1=10$$

ومنه إحداثيات Bهي:(10,50)Bيمكن تعين إحداثيات Bبالعين المجردة .

✓ **الحل الأمثل:**

أية نقطة في المنطقة المجدية تعطينا قيمة قصوى أو دنيا تسمى بالحل الأمثل لدالة الهدف، من خلال مثالنا أعلاه نرى أن كل نقطة في المنطقة الممكنة OABCتفي بجميع القيود على النحو الوارد في (1) إلى (3)، وبما أن هناك العديد من النقاط اللانهائية، فسنضطر ان نبدأ بالبحث في إيجاد نقطة تعطي قيمة قصوى لدالة الهدف

وبالعودة للمثال أعلاه وبما أن التاجر يسعى إلى تعظيم الربح لأقصى حد ممكن، فان أكبر قيمة لدالة الهدف هي Z= 6250تبلغها في النقطةB1(0,50)، بمعنى يتم بيع 10 وحدات من X_1و 50 وحدة من X_2لتحقيق أقصى عائد والمقدر بـ6250وحدة نقدية

مثال .I/2ب:

حل المسألة التالية بيانيا

$$Max\ Z = 4X_1 + X_2 \dots (1)$$

$$S/c$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 50 \dots (2 \\ 3X_1 + X_2 \leq 90 \dots (3) \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

حل مثال .I/2ب:

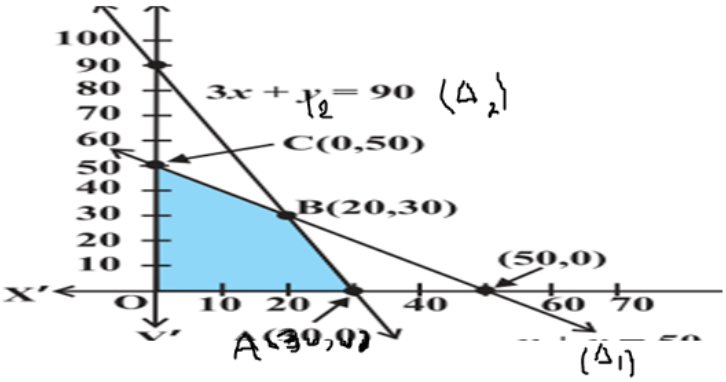
نتبع نفس الطريقة المتبعة في المثال 1

✓ تحويل القيود إلى معادلات وإيجاد نقاط التقاطع مع المحاور

$$X_1 + X_2 = 50 \dots (\Delta_1) \dots \quad (X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 50), (X_1 = 50 \Rightarrow X_2 = 0)$$

$$3X_1 + X_2 = 90 \dots\dots\dots\dots (\Delta_2) \quad (X_1 = 30 \Rightarrow X_2 = 0), (X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 90)$$

✓ **التمثيل البياني**



✓ حساب قيمة دالة الهدف عند رؤوس منطقة الحلول الممكنة

إحداثيات رؤوس الركن	القيمة المقابلة لZ
O (0,0)	0
A (30,0)	120
B (20,30)	110
C(0,50	50

Maximum ← 120

✓ الحل الأمثل يقع عند النقطة A (30،0) حيث X_1, X_2تساوي على الترتيب 30، 0 اللذان يحققان أكبر قدر من الربح والمقدر ب 120 وحدة نقدية.

مثال .I/2ج:

حل المسألة التالية بيانيا

$$\text{Min } Z = 200X_1 + 500X_2 \dots (1)$$

S/c

$$X_1 + 2X_2 \geq 10 \dots (2)$$

$$3X_1 + 4X_2 \leq 24 \dots (3)$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \dots\dots(4)$$

حل مثال .I/2ب:

نتبع نفس الطريقة المتبعة في المثال 1

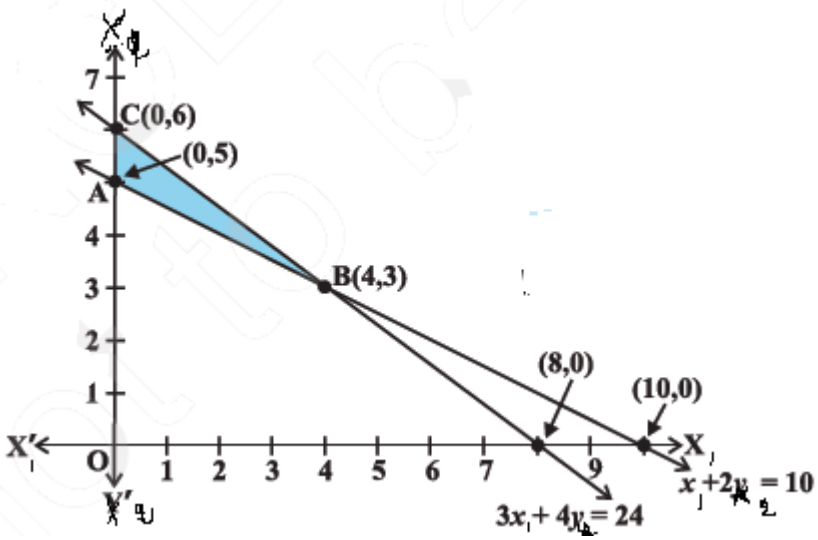
✓ تحويل القيود إلى معادلات وإيجاد نقاط التقاطع مع المحاور

$X_1 + 2X_2=10....(\Delta_1)....$ $(X_1=0\Rightarrow X_2=10)$,$(X_1=10\Rightarrow X_2=0)$

$3X_1+4X_2=24.....(\Delta_2)$ $(X_1=8\Rightarrow X_2=0)$,$(X_1=0\Rightarrow X_2=6)$

✓ **التمثيل البياني**

المنطقة المظللة في الشكل أدناه هي المنطقة المجدية أو منطقة الحلول الممكنة ABC التي يحددها نظام القيود من (2) إلى (4) المحدد بإحداثيات نقاط الزاوية أو الرؤوس،



✓ حساب قيمة دالة الهدف عند رؤوس منطقة الحلول الممكنة

إحداثيات رؤوس الركن	القيمة المقابلة لـ (Z)
A (0,5)	2500
B (4,3)	2300
C (0, 6)	3000

Minimum

إذن الحل الأمثل يقع عند الرأس B (4,3) أين حققت Z أدنى قيمة لها وباعتبار أن دالة الهدف هي من شكل Min.

I .3.2.ملاحظات

* بعد تحديد منطقة الحلول الممكنة فإنه يمكن أن نحدد الحل الأمثل لمسألة برمجة خطية وذلك بحساب قيمة دالة الهدف في رؤوس منطقة الحلول الممكنة ثم نعتبر الزوايا أو الأركان التي تعطي لدالة الهدف أكبر قيمة أو اصغر قيمة كنقطة حل أمثل، غير أن هذه الطريقة ليست سهلة التطبيق عندما يكون عدد رؤوس منطقة الحلول الممكنة كبير جدا.[6]
* إن وجود شرط عدم السلبية في البرنامج الخطي يعني أن منطقة الحلول الممكنة موجودة حصرا في الربع الأول من مستوى الإحداثيات؛
* عندما تكون جميع القيود من الشكل أصغر أو يساوي فإن منطقة الحلول الممكنة تكون محصورة بين المحورين وأقرب من معادلات القيود بين المحورين وذلك في المسائل التي يطلب فيها تعظيم دالة الهدف بينما يحدث العكس في المسائل التي يطلب فيها تدنئة التكلفة حيث تقع منطقة الحلول الممكنة فوق أبعد معادلات القيود.

I .4.2.حالات خاصة:

أثناء القيام بإجراءات الحل قد نصادف حالات خاصة منها:

I.4.2.1حالة تعدد الحلول

في هذه الحالة يمكن أن نحصل على أكثر من حل أين نجد على الأقل ركنين يعطيان نفس القيمة من منطقة الحلول الممكنة وهما على تماس واحد مع المستقيم الذي يقطع Z بحيث يكون أخر ركنين يصلهما في حالة تعظيم، أو أول رأسين يصلهما في حالة التدنئة.

[6] محمد دباس الحميد، **البرمجة الخطية**، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية . حلب، سوريا، 2010، ص.52-53.

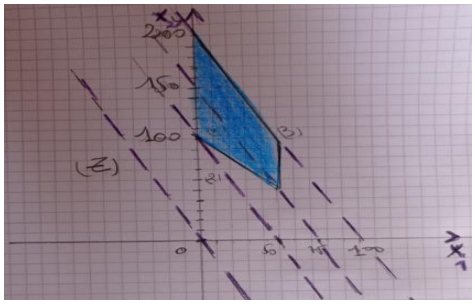
مثال I.1.4.2

لتكن المسألة التالية:

$$\text{Max } Z = 10X_1 + 5X_2$$

$$\text{S/C} \begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 200 \dots (1) \\ X_1 + X_2 \geq 100 \dots (2) \\ X_1 \leq 50 \dots (3) \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

✓ التمثيل البياني



من خلال الشكل أعلاه نلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة تتمثل في شبه المنحرف ABCD كما نلاحظ أن ميل القيد (1) يساوي ميل دالة الهدف ولهذا لو يتم رسم دالة الهدف، لوجدنا خطا من الخطوط الموازية لها يطابق القيد (1)

$$Z=10X_1+5X_2 \Rightarrow 5X_2=-10X_1 \Rightarrow X_2=-2X_1$$

وعليه تمثل كل من النقطتين D,Cحلا امثلا ، حتى وان كل النقط الموجودة على [CD]تعطينا حلا أمثلا بديلا حيث أن قيم X1,X2 تختلف من نقطة إلى أخرى على [CD] بينما قيمة دالة الهدف تبقى ثابتة ، لذا نقول ان المسألة لها حلول مثلى بديلة

وللتأكد نحسب قيمة كل من C,Dونعوض في قيمة الهدف

$$D(0,200) \Rightarrow Z=(0)10+(200)5=1000$$

$$C(50,100) \Rightarrow Z=(50)10+(10)5=1000$$

I. 2. 4. 2حالة استحالة الحل: في هذه الحالة تكون القيود متناقضة حيث لا تتحقق لنا أية منطقة للحل كما في المثال التالي :

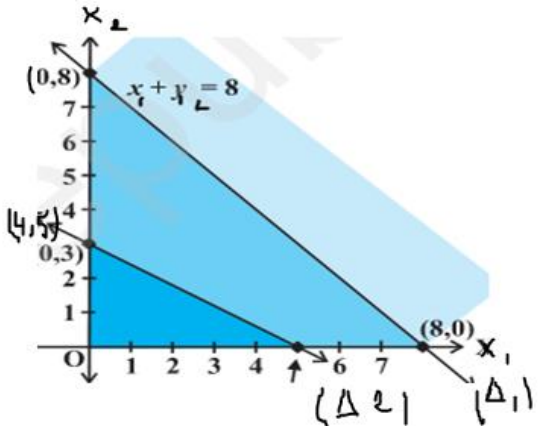
مثالI .2.4.2:

لتكن المسالة التالية:

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 2X_2$$

$$\text{S/c} \begin{cases} X_1 + X_2 \geq 8 \ldots (\Delta_1) \\ 3X_1 + 5X_2 \leq 15 \ldots (\Delta_2) \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

✓ التمثيل البياني



من الشكل أعلاه يلاحظ أنه لا توجد نقطة تلبي جميع القيود في وقت واحد. وبالتالي، فإن المشكلة هي عدم وجود منطقة مجدية وبالتالي لا يوجد حل ممكن

I.3.4.2. حالة حياد أحد القيود

نصادف هذه الحالة في حالة وجود قيود مختلفة حيث قيد من هذه القيود لا يلمس منطقة الحلول الممكنة ولا في أية نقطة، بمعنى بعيد عن المنطقة حيث يمكن حذفه من البرنامج دون أن يكون له تأثير على النظام.

I.5.4.2.حالة منطقة الحلول المجدية غير محدودة

في هذه الحالةتظهر المنطقة المجدية (المظللة) غير محدودة. وفيها تكون

Min f(x) $-\infty \longrightarrow$ Maxf(x) $\longrightarrow +\infty$

مثال.I .3. 4.3.

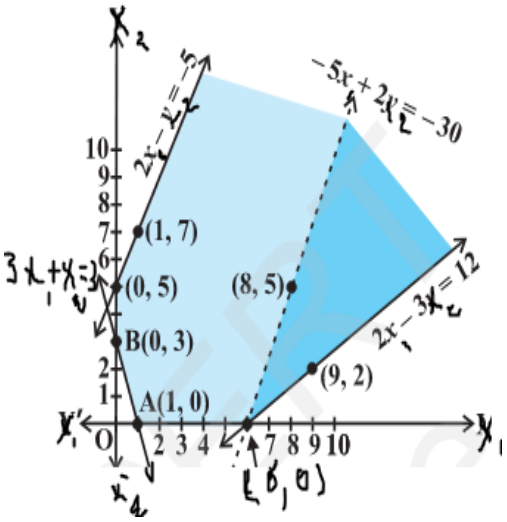
حل بيانيا المسألة التالية

$$\text{Min}(Z) = -50X_1+20X_2$$

$$\text{S/C} \begin{cases} 2x_1-X_2\geq -5 \ldots\ldots (1) \\ 3X_1+X_2\geq 3 \ldots\ldots (2) \\ 2X_1-3X_2\leq 12 \ldots (3) \\ X_1\geq 0, X_2\geq 0 \end{cases}$$

الحل:

نتبع نفس طريقة الحل البياني ونرسم المستقيمات قيود المترجحات ثم نحدد المنطقة المجدية لنظام المتباينات من (1) إلى (3)



تظهر المنطقة المجدية (المظللة) في الشكل أعلاه أن المنطقة غير محدودة، نقوم بالبحث عن إيجاد قيمة Z عند نقاط الزاوية

الرؤوس أو نقاط الزوايا	دالة الهدف $Z=-50x_1+20X_2$
(0,5)	100
(0,3)	60
(1,0)	-50
(6,0)	-300

من الجدول أعلاه نلاحظ أن (300–) هي أصغر قيمة لـ Z عند نقطة الزاوية (0، 6) هل يمكننا القول أن الحد الأدنى لقيمة Z هو (300-) ؟ لاحظ أنه إذا تم تحديد المنطقة، فإن أصغر قيمة لـ Z هي الحد الأدنى لقيمة Z ، ولكن هنا نرى أن المنطقة المجدية غير محدودة، لذلك القيمة (- 300) قد تكون أو لا تكون الحد الأدنى لقيمة .Z لتحديد هذه المشكلة ، نقوم برسم المتباينة:

$$-50X_1 + 20X_2 \leq -300$$

أو

$$-5X_1+2X_2 \leq 30$$

ونتحقق ما إن كان نصف المستوى المفتوح الناتج له نقاط مشتركة مع المنطقة المجدية أم لا. إذا كانت تحتوي على نقاط مشتركة تكون (300-) ليست هي الحد الأدنى لقيمة Z ، كما هو موضح في الشكل، توجد نقاط مشتركة أخرى تعطينا قيم أصغر منها .لذلك، $Z = -50\ X_1 + 20\ X_2$ ليس لها قيمة دنيا تخضع للقيود المحددة.في المثال أعلاه، هل يمكنك القول ما إذا كانت

$$Z = -\ 50\ x_1 + 20X_2$$

لها قيمة قصوى هي القيمة 100 عند (0،5)؟ بنفس الطريقة نتحقق ما إن كان التمثيل البياني عند:

$$-50X_1 + 20\ X_2 \geq 100$$

له نقاط مشتركة أم لا. من الشكل أعلاه نلاحظ أن هناك نقاط مشتركةتعطينا قيم أكبر منها، لذلك، – $Z = 50\ X_1 + 20\ X_2$ ليس لها قيمة قصوى تخضع للقيود المحددة.

سلسلة 2.I

تمرين 1: أوجد الحل البياني للمسألة البرمجة الخطية الآتية

$$\text{Min } (Z) = 2X_1+4X_1$$

$$S/_C \quad \begin{cases} X_1+2X_2\geq 2 \\ 3X_1+2X_2\geq 12 \\ X_1+X_2\geq 6 \\ X_1, X_2\geq 0 \end{cases}$$

تمرين 2

يعمل اختصاصي التغذية على تطوير نظام غذائي خاص باستخدام نوعين من الأطعمة P و Q تحتوي كل عبوة من هذا النظام ذات الحجم الغذائي 30غرام من كمية الغذاء Pعلى 12 وحدة من الكالسيوم و 4 وحدات من الحديد و 6 وحدات من الكولسترول و 6 وحدات من فيتامين أ. كل عبوة من نفس الكمية من الغذاء Q تحتوي على 3 وحدات من الكالسيوم، 20 وحدة من الحديد، 4 وحدات من الكولسترول و 3 وحدات من فيتامين أ. يتطلب النظام الغذائي على الأقل 240 وحدة من الكالسيوم، على الأقل 460 وحدة من الحديد وأكثر من 300 وحدة من الكولسترول

المطلوب: كم عدد عبوات كل طعام يجب استخدامها لتقليل كمية فيتامين أ في النظام الغذائي؟ وما هي أدنى كمية له؟

تمرين 3

حل المسألة التالية بيانياً:

$$\text{Max}(Z) = 3X_1 + 9X_2$$

مع مراعاة القيود

$$\begin{cases} X_1 + 3X_2\leq 60 \dots (1) \\ X_1 + X_2\geq 10 \dots (2) \\ X_1\leq X_2 \dots [3) \\ X_1\geq 0 \text{ ،} X_2\geq 0 \end{cases}$$

تمرين 4

تعاونية فلاحية تملك 50 هكتارًا من الأراضي لزراعة محصولين X و Y . يقدر الربح من المحاصيل X و Y لكل هكتار بـ 10500 وحدة نقدية،9000 وحدة نقدية على التوالي، يتقوم هذه التعاونية باستخدام مبيدات الأعشاب السائلة للمحاصيل X و Y بمعدلات 20 لترًا و 10 لترات لكل هكتار وذلك لمكافحة الحشائش الضارة، مع شرط أن لا ينبغي استخدام أكثر من 800 لتر من مبيدات الأعشاب لحماية الأسماك والحياة البرية كما تستخدم التعاونية بركة تجمع فيها مياه الصرف من هذه الأرض.

المطلوب: ما هي مساحة الأرض التي يجب تخصيصها لكل محصول؟

I.3.طرق حل مشكلة البرمجة الخطية

الطريقة البسيطة (La méthode de simplex)

تمهيد

لقد تناولنا في المحور السابق كيفية حل مسألة البرمجة الخطية وقلنا عن حل مسألة البرمجة الخطية LPP بالطريقة البيانية لا يكون إلا بتوفر متغيرين اثنين حيث يصعب ويتعقد الحل إن وجدت مسألة بمتغيرات ثلاثة أو أكثر أي بعدد(m)من القيود و(n) من المتغيرات في مثل هذه الحالة تم اعتماد الطريقة المبسطة التي تم تطويرها من قبل Dantzig ، G.Bفي عام 1947.[7] توفر هذه الطريقة خوارزمية تستند إلى النظرية الأساسية لـ البرمجة الخطية تظهر من خلا لنموذج القياس الجدولي الذي يعتمد على أسلوب اختياري تكراري حيث يعتمد على اختيار المتغيرات ذات التأثير الأساسي في كل من دالة الهدف والقيود ويهمل المتغيرات الأخرى التي لا تؤثر فيهما بالانتقال من جدول إلى جدول أخر ومع كل انتقال تحسن دالة الهدف إلى غاية الوصول إلى أخر جدول الذي يعطينا الحل الأمثل.

رقم (1): هيكل الخوارزميات

الشكل القياسي لـ LPP يحوي الخصائص التالية :

- ✓ يجب التعبير عن جميع القيود كمعادلات بإضافة أوطرح متغيرات الفرق ومتغيرات اصطناعية

[7]Thomas Edgar and david M himmelblau, optimisation of chemical processes, McGraw-Hill Science/Engineering/Math; 2nd edition (January 12, 2001), p.15.

- ✓ يجب جعل الجانب الأيمن من كل قيد غير سالب إذا كان كذلك فيجب أن نضرب جانبي القيود الناتجة بقيمة -1
- ✓ يجب أن تكون دالة الهدف من نوع Max

1.3.I. الشكل المعياري أو القياسي يكون كالاتي :

- ✓ **تحسين دالة الهدف Z**

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + \dots + 0S_m$$

Sous les contraintes :

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1j}x_j+\dots a_{1n}x_n+ S_1\leq b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2j}x_j+\dots a_{2n}x_n+ S_2\leq b_2$$

...

...

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{ij}x_j+\dots a_{in}x_n+ S_n\leq b_i$$

...

...

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mi}x_j+\dots a_{mn}x_n+ S_m\leq b_n$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n, S_1, S_2, \dots, S_m\geq 0$$

2.3.I.خطوات حل النموذج

يتبع لحل نموذج البرمجة الخطية الخطوات الآتية :[8]

- الخطوة الأولى: التعبير عن المشكلة في شكل قياسي من خلال التحقق ما إن كانت دالة الهدف في لـ LPPالمصاغة هي من شكل تعظيم قيمة دالة الهدف(Max) أو من شكل تصغير (Min)، حيث انه وفي حالة كانت دالة الهدف من شكل تصغير، تحول العلاقة بالشكل التالي:

Minimiser Z ➡ Maximiser (- Z) * où Z * ➡ −Z

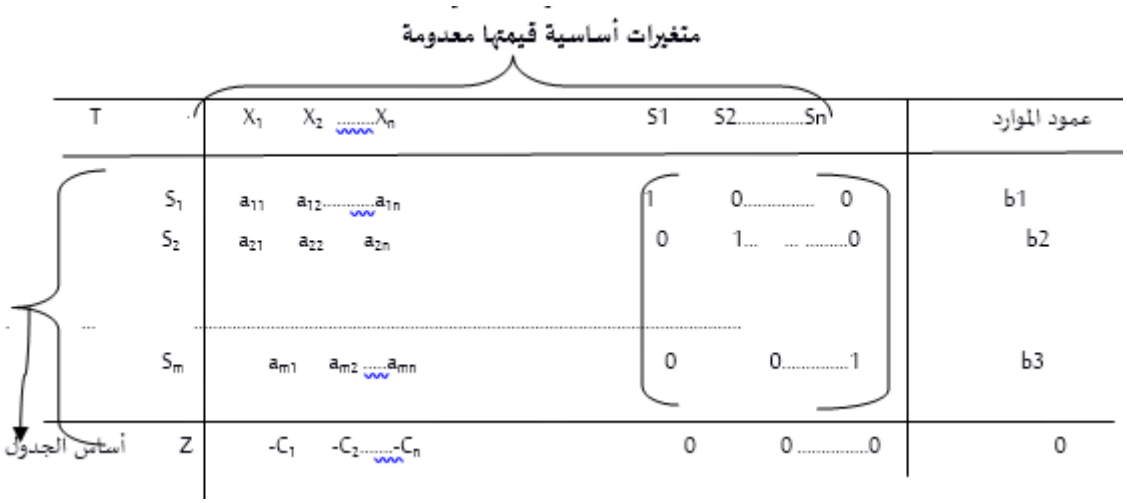
[8] حمودي حاج صحراوي، **رياضيات مؤسسة: كمدخل إلى التقنيات الكمية**، دون طبعة، دار النشر جيطلي، الجزائر، 2008، ص.32.

* التحقق ما إذا كانت جميع قيم(b_i (i = 1,2.....m) موجبة فإذا كان أحد هذه القيم سالبًا، نضرب القيمة المقابلة في -1 للحصول على$b_i \geq 0$؛
* التحقق من نوع القيد؛

- فإذا كان القيد من الشكل أقل أو يساوي (≤) نقوم بإدخال متغيرات الفرق (Margin variables) إلى الطرف الأيسر للقيد والذي يرمز له بالرمز (S_i ; =1,2,.....m)؛
- إذا كان القيد من شكل أكبر أو يساوي (≥) نقوم بطرح متغير الفرق من الطرف الأيسر للمتباينة؛
- إذا كانت إشارة القيد مساواة نضيف متغير اصطناعي وهمي إلى الطرف الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز (A_i ;=1,2,.....m).

▪ **الخطوة الثانية**: البحث عن الحل الأساسي الأولي من خلال تكوين الجدول الأولي الأساسي

الجدول الأولي (الأساسي)



ملاحظة.I.1.2.3:[9]

من خلال الجدول أعلاه يلاحظ أن المتغيرات المحدد عليها بحاضنتين والتي تظهر في نفس الجدول مرة بداخله ومرة أخرى خارجه ما هي إلا مصفوفة أحادية لا تؤثر على عملية الضرب عند الانتقال من جدول إلى أخر وعليه يمكن الاستغناء عنها لتسهيل عملية الحساب وعليه سنعتمد المتغيرات التي تظهر في الأساس ولا تطهر مرة أخرى خارجه كما هو موضح في الجدول التالي:

[9] حاج صحراوي حمودي، نفس المرجع،ص 32

T_1	X_1	X_2	X_n	عمود الموارد
S_1	a_{11}	a_{12}	a_{1n}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	a_{2n}	b_2
.....	.....			
S_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{mn}	b_m
Z	$-C_1$	$-C_2$	$-C_n$	0

C_j : معامل المتغير في دالة الهدف يظهر بقيم سالبة في الجدول

b_m :عمود الموارد

S_m :متغيرات الفرق (slack variable) والتي تعتبر متغيرات أساسية في الجدول الأساسي وهي تمثل مصادر غير مستخدمة أو غير مستغلة

Z: تشير إلى قيمة الربح أو التكلفة

- **الخطوة الثالثة: إجراء اختبار الأمثلية**

التحقق من أمثلية الحل من خلال سطر التقييم أو سطر دالة الهدف

- إذا كانت دالة الهدف من الشكل تعظيم فان الحل الأمثل يتحقق إذا كانت جميع قيم Z موجبة أو معدومة
- إذا كانت دالة الهدف من شكل تدنئة فإن الحل الأمثل يتحقق إذا كانت جميع قيم Zسالبة أو معدومة
- إذا لم يتحقق هذا الشرط يتم الانتقال إلى الخطوة الرابعة

- **الخطوة الرابعة: الوصول إلى الجداول**

هنا يتم العمل على كيفية الانتقال من جدول إلى أخر **كالأتي:**

- ✓ تحديد عمود الارتكاز بتحديد المتغير الداخل إلى الأساس وهو المتغير الذي يقابل أعلى قيمة بالقيمة المطلقة في سطر دالة الهدف؛
- ✓ تحديد سطر الارتكاز بتحديد المتغير الخارج من الأساس والذي يقابل اقل حاصل قسمة بين عناصر الطرف الأيمن للموارد وعناصر عمود الارتكاز (العناصر السالبة والعناصر المعدومة لا تأخذ في الحسبان)؛
- ✓ يعين عنصر الارتكاز عند النقطة التي يتقاطع فيها سطر الارتكاز وعمود الارتكاز ويحسب على شكل مقلوب؛
- ✓ العناصر المتبقية في عمود الارتكاز تقسم على سالب عنصر الارتكاز؛
- ✓ العناصر المتبقية في سطر الارتكاز تقسم على عنصر الارتكاز؛

✓ تحسب باقي العناصر الأخرى باستعمال طريقة (Z) حسب القاعدة كما يلي:

العنصر الجديد = العنصر القديم - (العنصر الذي يقابله في نفس السطر وموجود في عمود الارتكاز X العنصر الموجود في نفس العمود ويقابل عنصر الارتكاز في نفس السطر /عنصر الارتكاز

ملاحظة2.23.I.:

* تسمى المتغيرات المكونة للحل أي المتواجدة داخل الجدول الأساسي بالمتغيرات الأساسية أو متغيرات القاعدة وتسمى المتغيرات الخارجة عن الجدول بالمتغيرات غير الأساسية أو خارج القاعدة.
* نصل إلى الحل الأمثل عندما تكون جميع عناصر دالة الهدف موجبة أو مساوية للصفر.

I.4. الطريقة العادية المبسطة

تستخدم هذه الطريقة في حالة توفر الشرطين التاليين :[10]

✓ أن تكون كل القيود على شكل اقل أو يساوي؛

✓ كل قيم الطرف الأيمن موجبة.

I.1.4.الشكل المعياري للنموذج

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_NX_N + 0S_1 + 0S_2 + \dots + 0S_m$$

$$S/c$$

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1j}X_j + \dots a_{1n}X_n + S_1 = b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2j}X_j + \dots a_{2n}X_n + S_2 = b_2$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \dots + a_{ij}X_j + \dots a_{in}X_n + S_n = b_i$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mi}X_j + \dots a_{mn}X_n + S_m = b_n$$

$$X_1, X_2, \dots, X_n, S_1, S_2, \dots, S_m \geq 0$$

[10] حمودي حاج صحراوي، مرجع سبق ذكره، ص34,

الصيغة المعيارية أعلاه يتم فيها تحويل المتراجحات إلى معادلات بمساواة طرفي كل متراجحة وذلك بإدخال متغيرات جديدة والتي نعتبرها متغيرات أساسية حيث تتميز بخاصيتين:

* الخاصية الأولى: تكون معاملاتها مساوية للواحد بالموجب
* الخاصية الثانية: تظهر قيمتها مرة واحدة في كل معادلة تشكل أساس الجدول لأن قيمتها تساوي قيمة الموارد إذ أننا ننطلق من النقطة (0,0) كنقطة الحل الأولي والذي تكون فيه كل المجاهيل الحقيقة مساوية للصفر $X_1=,X_2=,.. X_n=0$

مثال1.1.4.I:

حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس العادية

$$MaX\ Z = 6X_1 + 4X_2$$

$$S/C \begin{cases} X_1 + 2X_2 \leq 720 \\ 2X_1 + X_2 \leq 780 \\ X_1 \leq 320 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

حل مثال1 .1.4.I:

- **الخطوة الأولى:** تحويل النموذج إلى الشكل المعياري أو القياسي

$$MaX\ Z = 6X_1 + 4X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 720$$

$$2X_1 + X_2 + S_2 = 780$$

$$X_1 + S_3 = 320$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

- **الخطوة الثانية:** إعداد جدول الحل الأولي

T_1	X_1	X_2	b	
S_1	1	2	720	720/1=720
S_2	2	1	780	780/2=390
S_3	1	0	320	320/1=320
Z	-6	-4	/	

عنصر الارتكاز — عمود الارتكاز — سطر الارتكاز

- **الخطوة الثالثة**: الحل الأولي الأساسي العملي

$X_1=0$ و $x_2=0$ في المعادلة أعلاه و لدينا $S_1=720$ ، $S_2=780$ و $S_3=320$ أي أن هناك 3 متغيرات أساسية أي كل متغير لكل قيد وهي عناصر موجبة تحقق شرط العملية.

- **الخطوة الرابعة** : إجراء اختبار الأمثلية

شرط الأمثلية غير محقق لأن العناصر الموجودة في سطر Z تستوجب أن تكون موجبة أو معدومة في البرامج الخطية التي هدفها التعظيم وعليه سننتقل إلى جدول جديد بعد تحديد عمود الارتكاز الداخل والذي يوافق المتغير المرتبط بأكبر قيمة بالقيمة المطلقة في السطر Z. وفي مثالنا هذا نجد القيمة (-6) والتي ترتبط بالمتغير X_1، ثم نحدد سطر المتغير الخارج، والذي يوافق اقل قيمة من حاصل قسمة كل عنصر من عناصر عمود الموارد على العنصر الذي يقابله من عمود المتغير الداخل والتي توافق القيمة 320، وعليه نجد المتغير الخارج هو S_3 وبذلك يصبح الجدول كما يلي

الوصول إلى الجدول 1:

T_1	S_3	X_2	b	
S_1	-1	2	400	400/2=200
S_2	-2	1	140	140/1=140
X_1	1	0	320	/
Z	6	-4	1920	

عنصر الارتكاز — عمود الارتكاز — سطر الارتكاز

بالرغم من تحسين قيمة دالة الهدف،إلا أننا لم نحصل بعد على الحل الأمثل حيث لا تزال هناك قيمة سالبة وعليه سننتقل إلى الجدول الثالث بإتباع نفس الخطوات السابقة.

الوصول إلى الجدول الثالث:

T_3	S_3	S_2	b	
S_1	3	-2	120	120/3=40
X_2	-2	1	140	/
X_1	1	0	320	320/1=320
Z	-2	4	2480	

سطر الارتكاز — عنصر الارتكاز — عمود الارتكاز

بالرغم من تحسين قيمة دالة الهدف، إلا أننا لم نحصل بعد على الحل الأمثل حيث لا تزال هناك قيمة سالبة وعليه سننتقل إلى جدول الرابع وبنفس الخطوات السابقة.

الوصول إلى الجدول الرابع:

T_4	S_1	S_2	b
S_3	1/3	-2/3	40
X_2	2/3	-1/3	220
X_1	-1/3	2/3	280
Z	2/3	8/3	2560

من خلال الجدول أعلاه نلاحظ بأنه لم يبق أي قيمة سالبة في سطر دالة الهدف ما يعني بأننا حصلنا على الحل الأمثل وهو:

X_1= 280, X_2=220, S_1=0, S_2=0=, S_3=40, Z=2560.

سلسلة 4.I

تمرين 1:

أوجد الحل الأمثل لمسألة البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } (Z)=3X_1+2X_2+5X_3$$

$$\text{S/C} \begin{cases} X_1+2X_2+X_3\leq 430 \\ 3X_1 \quad +2X_3\leq 460 \\ X_1+4X_2 \quad \leq 420 \\ X_1, X_2, X_3\geq 0 \end{cases}$$

تمرين 2:

أوجد الحل الأمثل لمسألة البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } (Z)=4X_1+3X_2$$

$$\text{S/C} \begin{cases} 2X_1+3X_2\leq 6 \\ -3X_1+2X_2\leq 3 \\ 2X_2 \leq 5 \\ 2X_1+X_2\leq 4 \\ X_1, X_2\geq 0 \end{cases}$$

تمرين 3:

أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Min } (Z)= X_1-3X_2-X_3$$

$$\text{S/C} \begin{cases} 3X_1-X_2+2X_3\leq 7 \\ -2X_1+4X_2\leq 12 \\ -4X_1+ 3X_2 +8X_3\leq 10 \\ X_1, X_2\geq 0 \end{cases}$$

تمرين 4

تصنع شركة (Ω)نموذجين من أجهزة التلفاز (A) و (B)، حيث يحقق النموذج(A) ربحًا قدره 20000 وحدة نقدية بينما يحقق النموذج (B)ربحًا قدره 10000 وحدة نقدية.يستخدم المصنع أنابيب الصور في

تصنيعه أين يتم توريد 400 أنبوب صور شهريًا، يتطلب النموذج (A) 8 ساعات من العمل و 5 ساعات للنموذج(B).إجمالي العمالة المتاحة شهريًا هو 2600 ساعة.

المطلوب: أوجد الإنتاج الأمثل للنموذج A و.B

تمرين5

استخدم طريقة السمبلكس العادي لحل مسألة البرنامج الخطي التالي

$$Max(Z)=6X_1+17X_2+10X_3$$

$$S/C \begin{cases} X_1+X_2+4X_3 \leq 2000 \\ 2X_1+X_2+X_3 \leq 3600 \\ X_1 \leq 30 \quad X_1+2X_2+2X_3 \leq 2400 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

تمرين 6

مصنع للأحزمة الجلدية ينتج ثلاثة أنواع من الأحزمة A و Bو Cالتي تتم معالجتها على ثلاث آلات M1 وM2وM3 تتطلب الأحزمة(A)ساعتين على الآلة M1و3 ساعات على الآلة M2،2 ساعة على الآلة M3. تتطلب ال أحزمة3 (B)ساعات على الآلة M1، ساعتان

على الآلة M2و 2 ساعة على الآلة M3، وتتطلب الأحزمة (C)5ساعات على الآلة M2و 4 ساعات على الآلة M3، هناك 8 ساعات من الوقت يوميًا متاحة على الآلة M1، 10 ساعات من الوقت يوميًا متاحة على الماكينة، M2 و 15 ساعة من الوقت يوميًا متوفرة على الآلةM3 . الربح المكتسب من الحزام A هو 3 وحدات نقدية، 5 وحدات نقدية من الحزام b، و4 وحدات نقدية من الحزام ج.

السؤال: كم يجب أن يكون الإنتاج اليومي لكل نوع من الأحزمة لتحقيق أقصى ربح؟

I.5. طريقة السمبلكس مع إدخال متغير وهمي

تمهيد:

في الطريقة السابقة لحل مشكلة البرمجة الخطية تعرضنا لحل المسائل ذات هدف التعظيم ومكتوبة بشكلها النظامي أين كانت كل قيودها على شكل أقل أو يساوي الصفر حيث يتطلب إدخال متغيرات الفجوة كمتغيرات أساسية على الطرف الأيسر للقيد في شكلها القياسي غير أننا لم نتعرض لحل مسائل البرمجة الخطية بأشكالها الأخرى أين تظهر قيود ها بصيغة أكبر أو يساوي(≥)أو يساوي (=)، وهنا يكمن الإشكال حيث يتطلب صياغة شكلها المعياري إلى إدخال متغيرات الفرق بمعاملات سالبة (S_i-)و بذلك تصبح متغيرات غير أساسية، فنقوم بإضافة متغيرات وهمية(A_i)تلعب دور المتغيرات الأساسية شكليا فقط لكن واقعيا ليس لها معنى اقتصادي، وتظهر هذه المتغيرات في القيود التي من الشكل أكير أو يساوي (≥) أو القيود التي من الشكل(=)، لنسعى بذلك إلى جعل قيمة هذه المتغيرات الوهمية معدومة وهي ظاهرة في المسائل ذات هدف التدنئة(Mln) ،و المسائل ذات هدف التعظيم(Max) التي لم ترد على شكلها النظامي .

I.5.1.خطوات طريقة السمبلكس مع إدخال متغير وهمي

تتبع الخطوات الآتية:

- **الخطوة 1:** نعدل القيود بحيث يكون الجانب الأيمن من كل قيد غير سالب، ما يتطلب ضرب كل قيد له جانب أيمن سالب في رقم سالب. على سبيل المثال، ستحول طريقتنا عدم المساواة-$X_1+X_2\geq$ 1إلى $1\leq X_1-X_2$-و$2\leq$-$X1-X_2$إلى$2\geq X_1+X_2$-؛
- **الخطوة 2 :** نحول كل قيد متباينة إلى الصيغة القياسية، نضيف متغير الفجوة أو متغير الفائض (Si)لكل قيد(i) من الشكل (≤)، ونطرح متغير الفائض ((S_i)من كل قيد(i) من الشكل (≥)؛
- **الخطوة 3 :** إذا كان القيد من الشكل (=)، نضيف متغيرًا اصطناعيًا(Ai) بحيث $Ai \geq 0$
- **الخطوة 4** : اخراج جميع المتغيرات الاصطناعية من داخل أساس الجدول قبل البدء في الخطوة الأولى من الحل لنضمن البدء بشكل أساسي.

ملاحظات I.5.1:

* وجود قيمة المتغير الاصطناعي موجب في الحل الامثل يعبر عن عدم واقعية المشكلة الاصلية أي انها غير قابلة للتطبيق؛
* نقول ان للمشكلة الاصلية حل أمثل إذا كانت جميع متغيراتها الاصطناعية تساوي صفرًا بعد حل المشكلة المحولة عن طريق السمبلكس؛

* عندما يترك متغير اصطناعي في الأساس، يتم إسقاطه عمديا ونحن نجري العمليات لأن الغرض من المتغير الاصطناعي هو فقط الحصول على حل عملي أساسي.لأننا لم نعد بحاجة إليه.

مثال 1.1.5.I:

مصنع ينتج نوعين من المنتجات (N، M) لدى هذا المصنع ثلاث ماكينات I و II و III، طاقة عمل الماكينتان الأولى والثانية على 12 ساعة على الأكثر بينما تقدر طاقة عمل الماكينة الثالثة 5 ساعات على الاقل في اليوم.

لإنتاج هذين المنتجين يتطلب استخدام جميع الآلات الثلاثة. عدد الساعات المطلوبة لإنتاج وحدة واحدة من كل من M و Nللآلات الثلاثة موضح في الجدول التالي:

العناصر	عدد ساعات عمل الآلات المطلوبة		
	I	II	III
M	1	2	1
N	2	1	1,25

✓ المصنع حقق ربحا قدره 600 وحدة نقدية من المنتج M، و400 وحدة نقدية من المنتجN

السؤال: كم من كل عنصر من Mو Nيجب على المصنع إنتاجه للحصول على أقصى ربح بافتراض أن صاحب المصنع يستطيع أن يبيع كل العناصر المنتجة من النوعين؟

حلI .1.5. :

ما يلاحظ في هذا المثال وجود قيود باتجاهات مختلفة وهو ما يتطلب حل المسألة بطريقة السمبلكس مع إدخال المتغيرات الوهمية وعليه سيتم إتباع الخطوات التالية:

- **الخطوة 1**: صياغة البرنامج في شكله الرياضي

لنفترض أنX_2, X_1 هما عدد العناصر المنتجة من Mو N على التوالي،

دالة الهدف هنا تكون من الشكل ⟵ $Max\ (Z) = 600X_1+400X_2$

القيود هي:

$X_1+2X_2\leq 12$.....(1).....الآلة الأولى

$2X_1+X_2\leq 12$.....(2)..... الآلة الثانية

$X_1+5/4\ X_2\geq 5$..... (3)..... الآلة الثالثة

$X_1\geq 0, X_2\geq 0$..... (4)

- **الخطوة 2:** صياغة البرنامج على الشكل المعياري

$$MaxZ= 600X_1+400X_2$$

$$X_1+2X_2+S_1=12$$

$$2X_1+X_2+S_2=12$$

$$X_1+5/4X_2-S_3=5$$

$$X_1, X_2, S_1 ; S_2 ; S_3\geq 0$$

من خلال الشكل المعياري نلاحظ أن القيد الثالث يختلف عن القيدين الأولين حيث لا يتوفر على متغير أساسي كون معامل متغير الفرق سالب هذا ما يصعب علينا الحل للحصول على جدول أولي أساسي بمتغير أساسي ناقص وعليه سوف نضطر لإدخال متغير وهمي يلعب دور المتغير الأساسي إلا أننا سوف نسعى لجعل قيمته معدومة أي لا معنى له اقتصادي ويصبح بذلك الشكل المعياري على نحوه التالي:

$$Max(z)= 600X_1+400X_2$$

$$X_1+2X_2+S_1=12$$

$$2X_1+X_2+S_2=12$$

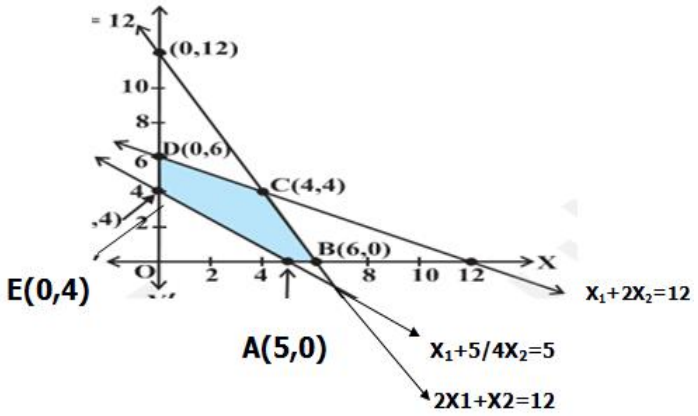
$$X_1+5/4X_2-S_3+a_3=5$$

$$X_1, X_2, S_1; S_2; S_3\geq 0, a_3=0$$

- **الخطوة 3:** الحصول على الجدول الأولي

	T_1	X_1	X_2	s 3	b
(0)	S_1	1	2	0	12
(0)	S_2	2	1	0	12
(-1)	a_3	1	5/4	-1	5
	Z^A	-1	-5/4	1	

الشكل البياني للنموذج



من خلال المقارنة بين الشكل البياني والجدول الأولي يلاحظ تطابق تام عند نقطة المبدأ أين تتواجد كل من X_1,X_2خارج منطقة الحلول الممكنة حيث $X_1=0$; $X_2=0$ وعليه فالجدول الأولي لا يعتبر جدولا عمليا لأن هناك قيمة سالبة في عمود الموارد وكذلك لأنه لا يمكن الحصول على الحل الأمثل إلا بدخول منطقة الحلول الممكنة والتي تقع على رؤوس كل زاوية من هذه المنطقة ولا يتم ذلك إلا بالتخلص من إي متغير وهمي يوجد في الأساس و سوف نقوم كذلك بتشكيل داله هدف وهمية نرمز لها بالرمز (Z^A) وللحصول على قيم سطر دالة الهدف قمنا بضرب كل سطر فيه متغير وهمي في القيمة (1-) بينما ضربت باقي الأسطر في القيمة (0) ونجمع في الأخير عناصر كل عمود على حدة في سطر Z^A وباقي الحل سيكون وفق الخطوات التالية:

- **الخطوة4 :** الانتقال إلى جدول سمبلكس جديد يكون بإتباع نفس خطوات الطريقة العادية

T_2	X_1	a3	s 3	b
S_1	-3/4	8/5	8/5	4
S_2	6/5	-4/5	4/5	8
x2	4/5	4/5	-4/5	4
Z^A	0	1	0	5

من خلال الجدول أعلاه نلاحظ أن كل قيم سطر دالة الهدف موجبة أو معدومة وعليه فان شرط الأمثلية قد استوفى كما أننا قد تخلصنا من المتغير الوهمي.a_3 والملاحظ أيضا انو الجدول T_2يطابق النقطة E(0,4) حيث$X_1=0,X_2=4$وهي واحدة من نقاط الزوايا وعليه سندخل قيم دالة الهدف الأصلية للبحث عن الحل الأمثل وذلك باتباع القانون الاتي:

ليصبح الجدول الثاني كالأتي:

		600 ↓			
T2		x1	a_3	s_3	b
(0)	S_1	-3/5	- 8/5	8/5	4
(0)	S_2	6/5	-4/5	4/5	8
400 →	x2	4/5	4/5	-4/5	4
	Z	3400/5	1600 /5	-1600/5	1600

يلاحظ من خلال الجدول أعلاه أن سطر دالة الهدف به قيمة سالبة وعليه نكمل الحل، بالانتقال إلى الجدول الثالث:

T2		x1	a_3	s_3	b
	S_1	-3/5	1	5/8	20/8
	S_2	3/2	0	-1/2	10
	x2	1/2	0	1/2	6
	Z	5	0	200	1600

سلسله(5.I)

استخدم طريقة إدخال متغير وهمي لحل مسائل البرامج الخطية التالية؟

تمرين 1

$$\text{Min}(Z)=X_1+4X_2$$

$$\text{S/C}\begin{cases} X_1+X_2=1000 \\ X_1\leq 300 \\ X_2\geq 320 \\ X_1\geq 0 \text{ مع} \end{cases}$$

تمرين 2

$$\text{Min }(Z)=4X2X_1+X_2+3X_3\leq 22$$

$$\text{S/C}\begin{cases} X_1+X_2\geq 32 \\ X_1+X_2+3X_3\geq 3 \\ X_1, X_2, X_3\geq 0 \\ 1+4X2+X3 \end{cases}$$

تمرين 3

$$\text{Max }(Z)=3X_1+X_2$$

$$\begin{cases} X_1+X_2\geq 3 \\ 2X_1+X_2\leq 4 \\ X_1+X_2=3 \\ X_1, X_2\geq 0 \end{cases}$$

I .6.طريقة السمبلكس على مرحلتين

تمهيد

في بعض الحالات نجد أن مشكلة البرمجة الخطية يكون فيها الحل الأساسي المقبول ليس معروفًا دائمًا بشكل مسبقا أو لا تقبل حلاً مقبولاً، لذلك من المستحيل العثور على قاعدة انطلاق. –لذا ستسمح الطريقة ذات المرحلتين بتحديد أساس مقبول أو إثبات أن المشكلة ممكنة. ينطلق حل (LPP) **LINEAR PROGRAMMING PROBLEM** على مرحلتين:[11]

- المرحلة الأولى : يتم تقليل مجموع جميع المتغيرات الاصطناعية إلى الحد الأدنى وفقًا للقيود المحددة للحصول على حل عملي أساسي لمشكلة البرمجة الخطية (LPP) ،
- المرحلة الثانية : نصغر من قيمة دالة الهدف الأصلية بدءًا من الحل الأساسي القابل للتطبيق الذي تم الحصول عليه في نهاية المرحلة الأولى.؛
- **1.6.1. خطوات طريقة السمبلكس على مرحليتين**

يتم إعطاء خطوات الخوارزمية أدناه **كالاتي:**

- **الخطوة1 :**

✓ إذا كانت جميع القيود (المتباينات) في مشكلة البرمجة الخطية (LPP)المعطاة من الشكل أصغر أو يساوي (≤)، ننتقل إلى المرحلة الثانية بخلاف ذلك نضف بعض المتغيرات الفائضة والاصطناعية للحصول على متباينات من شكل (=)؛

✓ إذا كانت مشكلة البرنامج الخطي (LPP)المعطاة من شكل التصغير(Min) نحولها إلى شكل (Max)؛

✓ بتسجيل معاملات صفرية لكل معادلة تتكون من متغيرات القرارX_j والمتغيرات الزائدة ونقم بتعيين معامل -1 لكل معادلة تتكون من متغيرات القرار x_jو المتغيرات الاصطناعية ومنه تصاغ المشكلة البرمجة الخطية الجديدة (LPP) على النحو التالي:

$$Max \;\; Z^* = \sum_{i=1}^{m} (-1) A_i$$

[11]Wayne L. Winston ,Operations Research: applications and algorithms,op cit ,p.179.

تخضع للقيود:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + A_i = b_i, x_j, A_i \geq 0, i = 1, 2, 3, ..., m$$

بتطبيق الخوارزمية البسيطة لحل LPP الإضافي قد تنشأ الحالات الثلاث التالية على النحو الأمثل

- MaxZ * = 0 ومتغير اصطناعي واحد على الأقل موجود في الأساس بقيمة موجبة، ثم لا يوجد حل عملي لـ LPP الأصلي؛
- MaxZ * =0مع عدم وجود متغير اصطناعي في الأساس، جدول الاساس يتكون من متغيرات القرار فقط، هنا ننتقل إلى المرحلة الثانية للحصول على حل عملي أساسي أمثل في LP الأصلي؛
- MaxZ * = 0مع وجود متغير اصطناعي واحد على الأقل في أساس القيمة الصفرية إذن، الحل المجدي لـ LPP أعلاه هو أيضًا حل عملي لـ LPP الأصلي، وعليه ننتقل مباشرة إلى الخطوة الثانية.

- **الخطوة 2:**

ندخل معاملات فعلية للمتغيرات في دالة الهدف ونصفر المتغيرات الاصطناعية التي تظهر بقيمة صفرية في الأساس في نهاية الخطوة الأولى، أي عندما نحصل على قيمة الطرف الأيمن موجب مع خروج المتغيرات الأصلية من الأساس. ثم نطبق الخوارزمية البسيطة المعتادة على الجدول البسيط المعدل للحصول على الحل الأمثل للمشكلة الأصلية، نكون بذلك قد أزلنا المتغير الاصطناعي من أساس الجدول.

ملاحظة I.2.6: نضرب طرفي القيود التي تكون من الشكل أكبر أو يساوي(≥)في (-1)

قبل تحويلها إلى الشكل المعياري أو القياسي وهنا تصبح قيم العمود الاخير للجدول سالبة ونقع في مشكلة أننا نكون بعيدين عن منطقة الحلول الممكنة، وحتى نتمكن من الدخول في المنطقة ننتقل الى الخطوة الثانية حيث نسجل معاملاتها بالواحد موجب (+1) في الجدول الأولي وتجمع مع القيود السالفة ذكر لتشكيل دالة هدف جديدة .

مثال I .3.6:

$$\text{Min } Z = X_1 - 2X_2 - 3X_3$$

$$S/C \begin{cases} 2X_1 + X_2 - 6X_3 = 20 \\ 6X_1 + 5X_2 + 10X_3 \leq 76 \\ 8X_1 - 3X_2 + 6X_3 \leq 50 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

✓ الشكل المعياري

$$Max(-Z) = -X_1+2X_2+3X_3$$

$$2X_1+X_2-6X_3+a_1=20$$

$$6X_1+5X_2+10X_3+S_2=76$$

$$8X_1-3X_2+6X_3+S_3=50$$

$$X_1, X_2, X_3, S_2, S_3, a_1 \geq 0$$

✓ الحصول على الجدول الأول:

	T_1	X_1	X_2	X_3	b	
(-1)	a_1	2	1	6	20	← سطر الارتكاز
(0)	S_2	6	5	10	76	
(0)	S_3	8	3	6	50	
	Z^*	-2	-1	-6		

عنصر الارتكاز

عمود الارتكاز

ندخل معاملات دالة الهدف الأصلية لأن الطرف الثاني للقيود أصبح موجب مع خروج المتغير الاصطناعي من داخل الأساس وبما أن هناك عناصر في سطر دالة الهدف لاتزال سالبة ننتقل إلى إنشاء الجدول الثاني ونتبع نفس خطوات السمبلكس العادي ليصبح الجدول كالآتي:

		-1	2			
	T_2	X_1	X_2	a_1	b	
-3	X_3	1/3	1/6	1/ 6	20/6	
	S_2	8/3	10/3	-5/3	256/6	
	S_3	6	2	-1	100/6	← سطر الارتكاز
	-Z	-2/3	-8/6	6	100	

عمود الارتكاز

نكمل البحث عن الحل الأمثل بعدما تمكنا من دخول منطقة الحلول الممكنة ونتبع نفس طريقة السمبلكس العادية حتى نتخلص من القيم السالبة في سطر دالة الهدف لننشأ جدول ثالث كما هو موضح أدناه

T_3	X_1	S_3	a_1	b
X_3	-1/6	-1/12	1/ 6	1525/9
S_2	-20/3	- 10/3	-5/3	1027/9
X_2	3	-1/2	-1/2	100/12
-Z	10/3	2/3	16/3	1000/9

نلاحظ أن كل قيم سطر دالة الهدف أصبحت موجبة ومنه فقد تحصلنا على الحل الأمثل وهو:

$X_1=0, X_2=100/12, X_3=1525/9, S_2=1027/9, X_3=0, a_3=0, Z=1000/9$

سلسلة 6.I

تمرين 1

استخدم طريقة السمبلكس على مرحلتين لحل مسالة البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min } (Z)=X_1-2X_2-3X_3$$

$$\text{S/C} \begin{cases} -2X_1+X_2+2X_3=22 \\ X_1+3X_2+2X_3=1 \\ X_1, X_2X_3\geq 0 \end{cases}$$

تمرين 2

بطريقة السمبلكس على مرحلتين حل مسالة البرنامج التالي:

$$\text{Min}(Z)=2X_1+X_2+X_3$$

$$\text{S/C} \begin{cases} 4X_1+6X_2+3X_3=8 \\ 3X_1-6X_2-4X_3=12 \\ X_1+3X_2-5X_3=4 \\ X_1, X_2,X_3\geq 0 \end{cases}$$

تمرين 3

حل مسألة البرمجة الخطية الآتية باستعمال طريقة السمبلكس على مرحلتين

$$\text{Min}(Z)= X_1+X_2$$

$$\text{S/C} \begin{cases} X_1+2X_2\geq 8 \\ 2X_1+X_2\geq 7 \\ X_1, X_2\geq 0 \end{cases}$$

II. المسألة الثنائية في البرمجة الخطية

Dual

تمهيد

بالمعنى العام مصطلح ثنائي يعني اثنين أو مزدوج، في السياق الخطي تعني كلمة ثنائي في البرمجة الخطية على أنه يمكن معالجة مشكلة للبرنامج الخطي بطريقتين مختلفين وكلتا الطريقتين تعطينا حل مكافئ، كما يمكن من جهة أخرى تحويل وحل مشكلة البرمجة الخطية إلى مسألة ثنائية في حالة احتواؤها على عدد كبير من القيود وعلى عدد أقل من المتغيرات وكل (LPP)مرتبط بـ LPP آخر يعتمد على نفس البيانات ويسمى ثنائي القاعدة، ويطلق على المشكلة الأولى بالمسألة الأصلية.

1.II. صياغة مشكلة البرمجة الخطية الثنائية

لتكن المسالة ا لأصلية للبرمجة الخطية كألتي:

$$MAXZ = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$$

تخضع للقيود:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_n \leq b_2$$

$$\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1 \dots\dots x_n \geq 0$$

يتم تعريف المسألة الثنائية الموافقة لهذه المسألة الأصلية على النحو التالي:

$$Min\ w = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$$

تخضع للقيود:

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1m}y_m \geq C_1$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2m}y_m \geq C_2$$

$$\dots\dots$$

$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq C_n$$

$$y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0$$

2.II .خطوات بناء المسألة الثنائية من المسألة الاصلية

لبناء المسألة الثنائية من المسألة الاصلية نتبع الخطوات التالية :[12]

☒ **خطوة 1:** نغير دالة الهدف من شكل تعظيم في المسألة الاصلية الى شكل تصغير في المسألة الثنائية؛

☒ **خطوة 2:** يجب أن تكون جميع قيود المسألة الاصلية بداله الهدف (Max) من نوع أصغر أو يساوي (≤) بينما تكون في المسألة الثنائية بدالة الهدف ((Minمن نوع أكبر أو يساوي (≥)؛

☒ **خطوة 3:** عدد المتغيرات في المسألة الاصلية هو عدد القيود في المسألة الثنائية والعكس صحيح؛

☒ **خطوة 4:** المعاملات $C_1,C_2.....Cn$ في دالة الهدف الاصلية ستكون ثوابت للقيود في المسألة الثنائية والعكس صحيح؛

☒ **خطوة 5 :** للحصول على قيود المسألة الثنائية نقوم بنقل مصفوفة المسألة الاصلية؛ لنسبة للقيود المزدوجة، قم بنقل مصفوفة الجسم للمسألة الأولية.

☒ **خطوة 6 :** إذا كان المتغير (i)في الاصلية غير مقيد في الإشارة، فإن القيد (j) في الثنائية هو من النوع = والعكس صحيح.

مثال 1.1.II:

. أكتب المسألة الثنائية للبرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = 3X_1 + X_2 + X_3$$

$$\text{S/c} \begin{cases} 4X_1 - X_2 \leq 8 \\ 8X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 12 \\ 5X_1 - 6X_3 \leq 13 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

حل مثال1.1.II:

لنفترض أنy_1 وy_2 وy_3 هي متغيرات المسألة الثنائية، وعليه يكون الشكل الثنائي المقابل للمسألة الأصلية كما يلي؛

$$\text{Min } w = 8y_1 - 12y_2 + 13y_3$$

$$\text{S/c} \begin{cases} 4y_1 - 8y_2 + 5y_3 \geq 3 \\ -y_1 - y_2 \geq +1 \\ -3y_2 - 6y_3 \geq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

[12] Halidi Lyeme and al , Introduction to Operations Research: Theory and Applications, op .cit , p.72

مثال .2.1.II: صغ المسألة الثنائية للبرنامج الخطي التالي

$$\text{Max } (-Z) = -3X_1 + 2X_2 - 4X_3$$

S/c

$$\begin{cases} -3X_1 - 5X_2 - 4X_3 \leq -7 \\ -6X_1 - X_2 - 3X_3 \leq -4 \\ 7X_1 - 2X_2 - X_3 \leq 10 \\ -X_1 + 2X_2 - 5X_3 \leq -3 \\ -4X_1 - 7X_2 + 2X_3 \leq -2 \end{cases}$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

حل مثال 2.1.II:

لنفترض أن y_1 وy_2 وy_3 وy_4 وy_5 متغيرات للمسألة الثنائية يقابلان خمسة قيود للمسألة الأصلية، وبالتالي الحل الثنائي لمسألة البرمجة الخطية هو:

$$\text{Min}(-w) = -7y_1 - 4y_2 + 10y_3 - 3y_4 - 2y_5$$

تخضع إلى: S/c

$$\begin{cases} -3y_1 - 6y_2 + 7y_3 - y_4 - 4y_5 \geq -3 \\ -5y_1 - y_2 - 2y_3 + 2y_4 + 7y_5 \geq 2 \\ -4y_1 - 3y_2 - y_3 - 5y_4 + 2y_5 \geq 4 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

وتصبح بذلك الصياغة كا لاتي:

$$\text{Max}(w) = 7y_1 + 4y_2 - 10y_3 + 3y_4 + 2y_5$$

تخضع إلى: S/c

$$\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 - 7y_3 + y_4 + 4y_5 \geq 3 \\ 5y_1 + y_2 + 2y_3 - 2y_4 - 7y_5 \geq -2 \\ 4y_1 + 3y_2 + y_3 + 5y_4 - 2y_5 \geq 4 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \leq 0 \end{cases}$$

II .3.الشكل المعياري للمسألة الثنائية

يتم إدخال متغيرات الفرق في الطرفين حيث نرمز له بالرمز Tj كما يلي:

$$a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_m-t_1=C_1$$

$$a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_m-t_2=C_2$$

.....

$$a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\ldots+a_{mn}y_m-t_n=C_n$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_m, t_1, t_2, \ldots t_n \geq 0$$

II .4.شروط بناء المسألة الثنائية من المسألة الأصلية

- **شرط أول:** تحول دالة الهدف من شكل تعظيم (Max)في المسألة الأصلية إلى تصغير(Min)في المسألة الثنائية والعكس صحيح.
- **شرط ثاني:** جميع القيود في المسألة الأصلية ذات الشكل (Max) والتي تكون متراجحاتها من نوع أصغر أو يساوي (≤) تحول في المسألة الثنائية ذات الشكل (Min)إلى متراجحات من النوع أكبر أو يساوي(≥) مع عدم تغير شرط عدم السلبية.
- **شرط ثالث:** عدد المتغيرات في المسالة الأصلية يساوي عدد القيود في المسالة الثنائية والعكس صحيح.
- **شرط رابع:** معامِلات($C_1, C_2 \ldots C_n$) لدالة الهدف ستكون هي موارد للقيود في المسألة الثنائية والعكس صحيح.
- **شرط خامس:** القيود في المسألة الثنائية تنتج من مقلوب مصفوفة المسألة الأصلية.
- **شرط سادس:** إذا(i) المتغير الأولي غير مقيد في الإشارة، فإن القيد الثنائي (j)هو = النوع والعكس صحيح.

مثال4.II:

أوجد الشكل الثنائي للمسألة الأصلية التالية

$$\text{Max } Z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

$$\text{S/C} \begin{cases} -2X_1 + X_2 + 3X_3 = 2 \\ 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 = 1 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

حل مثال 4.II:

بما أن كل القيود المسألة الأصلية من النوع (=)، فإن قيمة المتغيرات الثنائية المقابلة للمسألة الأصلية تكون y2،y1 غير مقيدة في تسجيل الدخول، أي أنه من الممكن أن تكون موجبة كما يمكن أن تكون سالبة، وصيغة النموذج هي:

$$\text{Min } w = 2y_1 + y_2$$

تخضع إلى:

$$s/c \begin{cases} -2y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ y_1 + 3y_2 \geq -2 \\ 3y_1 + 4y_2 \geq 3 \\ y1 \neq 0,\ y2 \neq 0 \end{cases}$$

مع:

y_1، y_2غير مقيدة عند تسجيل الدخول

5.II.ملخص

يمكن تلخيص العلاقة بين المسألتين في الجدول أدناه

المسألة الأصلية	المسألة الثنائية
– دالة الهدف من شكل Max(Z)	– دالة الهدف من شكل Min(w)
– دالة الهدف من الشكل Min (Z)	– دالة الهدف من الشكل Max (W)
– عدد القيود تساوي	– عدد المتغيرات y_i
– عدد المتغيرات X_j تساوي	– عدد القيود j
– $0 \leq xj$	– القيد أكبر أو يساوي
– القيد مساواة	– المتغير $0 \neq y$
– القيد أكبر أو يساوي	– المتغير $0 \geq y$
– القيد أصغر أو يساوي	– المتغير $0 \leq y$

II .6.طرق حل المسألة الثنائية

سيتم عرض مجموعة من الطرق المستخدمة في حل المسألة الثنائية ومنها على سبيل الحصر

II .1.6.طريقة التكامل

تعتبر من أبسط الطرق استعمالا وأسرعهما حيث يمكن إيجاد الحل الأمثل باستغلال قيم متغيرات المسألتين بمعنى إذا توفرت معطيات قيم الأصلية نستخرج قيم الثنائية والعكس حسب الصيغة الآتية:[13]

$$\sum X_j \; \chi \; T_j = 0 \begin{cases} x_j > 0 \rightarrow T_j = 0 \\ x_j = O \rightarrow . T_j > 0 \end{cases} \qquad \sum S_i y_i = 0 \qquad \begin{cases} S_i > 0 \rightarrow y_i = 0 \\ S_i = 0 \rightarrow Y_I > 0 \end{cases}$$

مثال II.1.6

لتكن المسألة الأصلية الآتية:

$$Max(Z) = 14X_1 + 120X_2 + 110X_3$$

$$S/c \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 \leq 1500 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 2200 \\ X_1 + X_3 = 900 \\ X_2 \geq 500 \end{cases}$$

$$X_2, X_3 \geq 0$$

والحل الأمثل للأصلية معطى كما يلي:

$$X_1=0, X_2=500, X_3=900, S_1=100, S_2=2000, a_3=0, S_4=0$$

حل مثال II .1.6

نكتب نموذج البرنامج الخطي للمسألة الأصلية بالشكل المعياري

$$X_1 + X_2 + X_3 + S_1 = 1500$$

$$X_1 + 2X_2 + X_3 + S_2 = 2200$$

$$X_1 + X_3 + a_3 = 900$$

$$-X_2 + S_4 = -500$$

حسب الصيغة الرياضية للتكامل نستخلص ما يلي:

---

[13] حاج صحراوي حمودي، رياضيات مؤسسة ، مرجع سبق ذكره، ص,64.

$$\sum X_j \times T_j = 0 \begin{cases} X_1 = 0 \Rightarrow T_1 = 0 \\ X_2 = 500 \Rightarrow T_2 = 0 \\ X_3 = 300 \Rightarrow T_3 = 0 \end{cases} \qquad \sum S_i Y_i = 0 \begin{cases} S_1 = 100 \Rightarrow y_1 > 0 \\ S_2 = 200 \Rightarrow y_2 > 0 \\ S_4 = 0 \Rightarrow y_4 = 0 \\ a_3 = 0 \Rightarrow y_3 \neq 0 \end{cases}$$

الشكل المعياري لنموذج المسألة الثنائية هو:

$$\text{Min } w = 1500y_1 + 2200y_2 + 900y_3 - 500y_4$$

$$Y_1 + y_2 + Y_3 - T_1 = 140$$

$$Y_1 + 2y_2 - y_4 - T_2 = 120$$

$$1/2y_1 + Y_2 + y_3 - T_3 = 110$$

نقوم بشطب المتغيرات التي تساوي قيمها الصفر ونعتمد على حل جملة معادلات لنحصل على الحل الأمثل هو: $y_1 = 60, y_2 = 30, Y_3 = 50$

من عيوب هذه الطريقة هو عدم التمكن من استخدامها في كل الحالات الى جانب اعتمادها على الحل الأصلي وما يترتب عليه من استغراق وقت أطول للوصول إلى الحل الأمثل لهذه الأسباب سننتقل إلى طريقة أدق وهي:

II.2.6. طريقة السمبلكس لحل المسألة الثنائية

نستخدم طريقة السمبلكس بنفس الطريقة المشروحة في طرق حل البرمجة الخطية شريطة فقط أن تحول الدالة الثنائية إلى MAXوتحول القيود إلى الشكل اصغر أو يساوي وعند اعتماد الجدول يعين سطر الارتكاز انطلاقا من العمود الأيمن حيث تأخذ اكبر قيمة بالقيمة المطلقة بينما يعين عمود الارتكاز من تقسيم سطر دالة الهدف على عناصر سطر الارتكاز وتأخذ اصغر قيمة سالبة بالقيمة المطلقة وتقاطع سطر الارتكاز مع عمود الارتكاز يعطي عنصر الارتكاز بينما تحسب باقي القيم كما في طريقة السمبلكس للمسألة الأصلية وهكذا حتى نتحصل على جميع عناصر العمود الأخير الأيمن تصبح موجبة، وكذا عناصر سطر دالة الهدف فنقول بأننا وصلنا للحل الأمثل.

II. 7.المعنى الاقتصادي للمسألة الثنائية

$$\max \quad = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

S/c

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i = 1,\mathrm{K}\ ,m$$

$$x_j \geq 0$$

أنx_j هي الكمية من المنتج J وbiهي الكمية المتوفرة من المادة الخا م iإماa_{ij} فهي الكمية التي نحتاجها منا لمادة الخام i لصنع وحدة من المنتج j وتعنيC_jالربح في وحدة المنتج j. إن الشروط في المسألة الثنائية والتي هي:

$$\text{Min(W)} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

تدلنا على أنy_j تعني سعر الوحدة من المادة الخام i، وبالتالي فإن البرنامج الأصلي يبحث في إيجاد أكبر ربح ممكن بينما البرنامج الثنائي يبحث في أقل تكلفة للإنتاج. كما يعتبر البرنامج الخطي للمسألة الثنائية أمن حيث المعلومات التي توفرها حول قيمة الموارد. إذ يهتم التحليل الاقتصادي بتحديد ما إذا كان سيتم تأمين المزيد من الموارد أم لا وكم يجب دفعه مقابل هذه الموارد الإضافية وتكمن أهمية دراسة المعنى الاقتصادي للمسالة الثنائية في:[14]

- ✓ توفر متغيرات المسألة الثنائية معلومات لصانع القرار مقدار المبلغ الذي يجب دفعه مقابل وحدات إضافية من الموارد؛
- ✓ يطلق على أقصى مبلغ يدفع مقابل وحدة إضافية واحدة من المورد بسعر الظل (يُسمى أيضًا المضاعف البسيط)؛
- ✓ القيمة الحدية الإجمالية للموارد تساوي القيمة المثالية لدالة الهدف ومتغيرات المسألة الثنائية تساوي القيمة الهامشية للموارد.

[14]Halidi Lyemeand Mohamed abdallah Selemani, Introduction to Operations Research: Theory and Applications lap lambert academic publishing, 2012, p.74

II .8.فوائد استخدام المسألة الثنائية

من فوائد استخدام المسألة الثنائية نذكر:[15]

- من المفيد حل المسألة الثنائية من الأصلية التي لها قيود أقل، لأن عدد القيود يساوي بشكل عام عدد التكرارات اللازمة لحل المشكلة؛
- تجنب إضافة متغيرات الفائض أو الاصطناعية وتحل المشكلة بسرعة (تُعرف التقنية بالطريقة الأولية؛ المزدوجة). في علم الاقتصاد تكون الثنائية مفيدة في صياغة المدخلات والمخرجات؛
- توفر متغيرات المسالة الثنائية تفسيرًا اقتصاديًا مهمًا للحل النهائي لLP ؛
- مفيدة جدًا عند دراسة التغييرات في المعلمات لLPP وتعرف التقنية باسم تحليل الحساسية؛
- تستخدم المسألة الثنائية الطريقة البسيطة في الحالة التي يكون فيها الحل الأصلي غير ممكن (تُعرف التقنية باسم طريقة السمبلكس الثنائية).

مثال II.6.1

مشكلة مصنع داكوتا مصاغة رياضيا كالأتي:

X_1: عدد المكاتب المصنعة، X_2: عدد الطاولات المصنعة ، X_3 :عدد الكراسي المصنعة

$$Max(Z)= 60X_1+30X_2+20X_3$$

تخضع للقيود:

$$8X_1+6X_2+X_3\leq 48 \text{ ..... قيد الخشب}$$

$$4X_1+2X_2+1{,}5X_3\leq 20 \text{ ..... قيد عملية التشطيب}$$

$$2X_1+5X_2+5X_3\leq 8 \text{ .....قيد النجارة.}$$

$$X_1, X_2, X_3\geq 0$$

المسألة الثنائية للمشكلة تصاغ كالأتي:

$$Min(W)= 48y_1+20y_2+8y_3$$

$$8y_1+4y_2+2y_3\geq 60 \quad \text{قيد المكتب}$$

$$6y_1+2y_2+1.5y_3\geq 30 \quad \text{قيد الطاولات}$$

$$y_1+1.5y_2+0.5y_3\geq 20 \quad \text{قيد الكراسي}$$

$$y_1, y_2, y_3\geq 0$$

[15] Halidi Lyemeand Mohamed abdallah Selemani ,op cit,p.74.

يرتبط القيد المزدوج الأول بالمكاتب، الثاني بالطاولات، والثالث بالكراسي. أيضًا ترتبط y_1بالخشب المعروض،y_2 ساعات التشطيب، y_3ساعات النجارة. المعلومات ذات الصلة بمشكلة مصنع موضحة في الجدول الموالي:

الموارد / الانتاج				
الموارد	المكتب	الطاولة	الكرسي	كمية الموارد المتاحة
الخشب (لوح قدم)	8	6	1	48
التشطيب(ساعات)	4	2	1,5	20
النجارة (ساعات)	2	1,5	0,5	8
سعر البيع	60	30	20	

نحاول تفسير المشكلة الثنائية للمصنع. لنفترض أن مقاول يريد شراء جميع موارد داكوتا. أين يجب عليه تحديد السعر الذي يرغب في دفعه مقابل وحدة من كل من مورد من موارد المصنع، يؤخذ في الاعتبار:

- ✓ Y_1: السعر المدفوع لكل لوحة خشبية
- ✓ Y_2: السعر المدفوع لكل ساعة عمل تشطيب
- ✓ Y_3: السعر المدفوع لساعة نجارة واحدة

حل المشكلة الثنائية للمصنع مع تحديد أسعار المواردy_1، y_2، y_3

مع العلم أن السعر الإجمالي الذي يجب دفعه مقابل هذه الموارد هو$48y_1+20y_2+8y_3$لأن تكلفة شراء الموارد سيتم تقليلها إلى الحد الأدنى وتصبح المعادلة من الشكل:

$$Min(w)=48y1+20\,y2+8y3$$

هي دالة الهدف للمصنع داكوتا. عند تحديد أسعار الموارد، ما هي القيود التي يواجهها مدير المصنع؟

هنا يجب عليه تعيين أسعار الموارد مرتفعة السعر بما يكفي لحث المصنع على البيع. على سبيل المثال، يجب على المدير أن يعرض على المصنع 60 وحدة نقدية على الأقل لمجموعة من الموارد التي تشمل 8 لوحات من الخشب، 4 ساعات تشطيب العمل، وساعتين نجارة، لأن المصنع يمكنه، إذا رغب من استخدام هذه الموارد لإنتاج مكتب يمكن بيعه مقابل 60وحدة نقدية. يقترح المدير استخدام $8y_1+ 4y_2+ 2y_3$ا لإنتاج مكتب، لذلك يجب عليه اختيارy_1، y_2، y_3لتحقيق الهدف.

$$8y_1+4y_2+2y_3\geq 60$$

كان هذا خاص بالقيد الأول (أو المكتبي) للمسالة الثنائية لمصنع داكوتا. يُظهر المنطق أنه يجب دفع 30 وحدة نقدية على الأقل مقابل الموارد المستخدمة لإنتاج طاولة (6 لوحات من الخشب، وساعتان لتشطيب العمل، 1 ساعة و50دقيقة للنجارة)، هذا يعني أن y_1 ،y_2 ،y_3 يجب أن تحقق المطلوب.

$$6y_1+2y_2+1.5y_3\geq 30$$

قيد الثنائية الثالث المتعلق بالكراسي

$$y_1+1.5y_2+0.5y_3\geq 20$$

هذا القيد يشير على أنه يجب دفع 20 وحدة نقدية مقابل الموارد اللازمة لصنع كرسي (لوحة من الخشب، ساعة و50 دقيقة من عمل التشطيب ونصف ساعة للنجارة، وأن تظل قيود التصميم $y_1\geq 0$ ، $y_2\geq$ 0، $y_3\geq 0$ سارية أيضًا.بتجميع كل شيء معًا، نرى أن حل مشكلة مصنع داكوتا للمسألة الثنائية ينتج عنه أسعار للأخشاب وساعات شطب العمليات، وساعات النجارة.توضح المسالة أيضًا أن المتغير المسألة الثنائية يتوافق بالفعل بطريقة طبيعية مع القيد الأول، باختصار، عندما يكون العنصر الأول مشكلة من نوع التعظيم ، ترتبط المتغيرات المسألة الثنائية بقيمة الموارد المتاحة لصانع القرار.لهذا السبب، غالبًا ما يشار إلى المتغيرات المسالة الثنائية باسم أسعار ظل الموارد.

مثال 2.6.II :

قامت تعاونية فلاحيه بغرس بثلاثة أنواع من النباتات (A ,B,C) .على مساحات من الأرض مقدرة بالهكتارات (X_i) والجدول أدناه يوضح الوضعية

الأرض (هكتار)	العمل (ساعات)	الآلات (ساعات)	المردود (الدخل)
A	2	1	1100
B	3	2	1400
C	1	3	1500
340	2400	560	

تريد هذه التعاونية تحديد المساحات بالهكتار(XI) من الأرض المزروعة بالنباتات (A,B,C)وذلك لتحقيق أقصى ربح.

- حل النموذج المسألة الثنائية واشرح المعنى الاقتصادي لمتغيراته؟

حل مثالII .6.ب :

على سبيل المثال ومن خلال الجدول أعلاه، سوف يستغرق غرس(B)3 ساعات من العمل لكل هكتار وساعتين من عمل الآلات. المساحة الإجمالية للأرض 340 هكتار ولدينا 2400 ساعة عمل ،560 ساعة عمل للآلات. 1 هكتار من(A)يحقق ربحًا قدره 1100

الصياغة الرياضية للمسألة

دالة الهدف هي:

$$MAXZ=1100X_1+1400X_2+1500X_3$$

قيد1: مساحة الأرض

$$X_1+X_2+X_3\leq 340$$

قيد2: الزمن المستغرق للعمل

$$2X_1+3X_2+X_3\leq 2400$$

قيد3: الزمن المستغرق لعمل الآلات

$$X_1+2X_2+3X_3\leq 560$$

✓ نضيف متغيرات الفرق (S_1,S_2,S_3) لهذه المسألة ونطبق طريقة .simplex لإيجاد الحل الأمثل الجدول النهائي المعطى كمايلي:

T_4	S_1	X_3	S_3	b
X_1	1	-1	0	120
S_2	-1	-3	-1	1500
X_2	-1	2	1	220
Z	800	200	300	440.000

الحل الأمثل يكون عند:

$$X_1=120,\ X_2=220,\ X_3=0,\ S_1=0,\ S_2=1500\ S_3=0.$$

الربح يقدر بـ $Z=440.000$

نلاحظ أن موارد الأرض والآلات تم االستخدامها بالكامل حيث أن $(S_1=0,S_3=0$من ناحية أخرى، لم يتم استخدام مورد وقت العمل بالكامل حيث $e_2=1500$وهو يختلف عن الصفر.

- إذا كان لدينا هكتار إضافي أو ساعة عمل أو آلات إضافية.

- ما هو أقصى ربح يمكن تحقيقه؟

هذا هو مفهوم التكلفة الحدية وعليه سنعرف بالمتغيرات

- y_1: تكلفة الحدية ل1 هكتار من الأرض
- y_2: تكلفة الحدية لساعة عمل واحدة
- y_3: التكلفة الحدية لساعة عمل الآلات

يجب أن نحصل على =(y_2=0) وذلك لأن مورد عمل الآلات لم يستغل كاملة

- نحاول هنا أن نعرف وجهة نظر المشتري اتجاه نشاطات المؤسسة وعليه سنحاول تفسير التكاليف الهامشية والتي تكون على النحو الآتي:

- y_1:السعر المطلوب عرضه لشراء هكتار واحد من الأرض
- y_2: السعر المعروض لشراء ساعة عمل واحدة
- y_3: السعر المعروض لشراء ساعة واحدة من عمل الآلة

السؤال المراد الإجابة عليه هو أي مسألة ينبغي حلها لتحديد المتغيرات؟ وماهي دالة الهدف التي تتوافق مع تكلفة الشراء لكي تشتري المؤسسة

$$z= 340y_1+ 2400y_2+ 560y_3=b_1y_1+b_2y_2+b_3y_3=b^ty$$

يجب تصغير ثمن الدفع أو الشراء بحيث$MInz=b^ty$

- سيتم قبول عرضه إذا كان عرضه يوافق الاستفادة من كل نشاط من الأنشطة

- النشاط A: الربح المرتبط بغرس النبات A هو

$$y_1+ 2y_2+y_3\geq1100$$

- النشاطB : الربح المرتبط بغرس النبات B هو

$$y_1+ 3y_2+ 2y_3\geq1400$$

- النشاط C: الربح المرتبط بغرس النبات Cهو

$$y_1+y_2+ 3y_3\geq1500$$

باختصار يصاغ المشكل كما يلي:

$$\text{Min}(W) = 340y_1 + 2400y_2 + 560y_3$$

$$S/C \begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1100, \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 1400 \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1500 \\ ,y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

يمكن أن نعبر على مبدأ الثنائية على أنه المبدأ الذي يجب أن يتساوى فيه أدنى سعر إجمالي يتم دفعه للمشتري مع أقصى ربح للبائع،

سلسلة II

تمرين 1

يجري المختبر اختبارات حول مكونات التربة. حيث يمكن للمختبر معالجة ما يصل إلى 1200 عينة من التربة يوميًا. وقد أجرى المختبر عقد مع التعاونية الزراعية الإقليمية لمعالجة 400 عينة يوميا. يقوم المختبر أيضًا بمعالجة عينات التربة من الحدائق الخاصة ولمتنزهات البلدية. الأرباح المحققة هي 0.18 وحدة نقدية لكل عينة من التعاونية الزراعية، و0.23 وحدة نقدية لكل عينة من الحدائق الخاصة، 0.21 وحدة نقدية لكل عينة من حدائق البلدية. يحتوي هذا المختبر على 1400 وحدة فقط من وقت المعالجة يوميًا، وتستغرق العينات من التعاونية الزراعية ضعف المدة التي تستغرقها العينات المأخوذة من حدائق البلدية، والتي تستغرق وحدة واحدة من وقت المعالجة. تتطلب عينات الحدائق الخاصة 1.5 وحدة من وقت المعالجة. يجب أن يحافظ المختبر على حسن حظ مجلس المدينة، وبالتالي، لا يمكنه معالجة عينات من الحدائق الخاصة أكثر من العينات المأخوذة من حدائق البلدية. هدف المختبر هو تعظيم الأرباح.

المطلوب: حل المسألة الثنائية واشرح المعنى الاقتصادي لمتغيراتها؟

تمرين 2

يقوم مصنع للألعاب بتصنيع 3 أنواع من الألعاب: سيارات الشرطة، وشاحنة الإطفاء، والطائرات النفاثة.ولهذا الغرض يستخدم المصنع الخشب والبلاستيك كمواد خام تدخل في صناعة الألعاب بطاقة استيعابية تقدر بـ 2500 و3500 وحدة على التوالي، مع العلم أن كمية المواد الخام بالوحدة اللازمة لتصنيع لعبة هي كالتالي: سيارة (3 خشب و 5 بلاستيك)، شاحنة (5 خشب و 3 بلاستيك) الطائرة النفاثة (7 خشب و 4 بلاستيك).كما أن وقت العمل المطلوب لإنتاج طائرة هو ضعف الوقت المطلوب لإنتاج شاحنة وثلاثة أضعاف ما هو مطلوب لإنتاج سيارة، وتبلغ الطاقة الإنتاجية للمصنع 600 طائرة.تشير أبحاث السوق إلى أن الحد الأدنى للطلب على كل لعبة هو 125 وحدة.ومع ذلك، على المصنع أن ينتج ضعف عدد السيارات ومثل الطائرات.تبلغ الأرباح 20 وحدة نقدية و 25 وحدة نقدية و 50 وحدة نقدية على التوالي، للسيارات، الشاحنات، والطائرات. الهدف هو تعظيم الربح.

المطلوب: صغ المسألة الثنائية واستخرج الحل الأمثل لها؟

تمرين 3

حل المسألة الثنائية للمسألة الآتية باستعمال طريقة التكامل بين متغيرات الأصلية ومتغيرات الثنائية

$$Max(Z)=4X_1+3X_2+2X_3$$

$$S/c \begin{cases} 2X_1+X_2+2X_3 \leq 10 \\ X_1+X_2+X_3 \geq 6 \\ X_1+X_2+2X_3=8 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

اذا علمت ان الحل الأمثل للمسألة هو: $(X_1=2, X_2=6, X_3=0)$

تمرين4

$$Max\ Z=500X_1+350X_2+400X_3$$

النوع الأول : المواد الأولية (كغ) $X_1+X_2+1/2X_3 \leq 1200$

النوع الثاني : الجلود (متر) $2X_1+2X_2+X_3 \leq 800$

كمية الإنتاج من النوعين $X_2+X_3=500$

كمية الإنتاج من النوع الثالث $X_3 \geq 0$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

المطلوب: حل المسألة الثنائية واشرح المعنى الاقتصادي لمتغيراتها علما أن الحل الأمثل للمسألة الأصلية هو:

$$X_1=150\ , X_2=0, X3=500$$

تمرين 5:

في مصنع لتركيب التلفاز وآلات الغسيل، حيث قطع الغيار تمول من قبل تاجر الجملة، وعدد عمال المصنع يقدر بـ 10 حيث يزاول كل واحد منهم عمله بدوام 7 ساعات في اليوم. يتطلب تركيب تلفاز واحد من قبل عامل واحد 1,20سا مقابل ساعة واحدة لتركيب آلة غسيل.

ومن أجل التمكن من تلبية الطلبان الغير متوقعة، يجب على الأقل تركيب 20 تلفاز و10 آلات غسيل في اليوم، تكلف عملية تركيب تلفاز واحد من قطع الغيار الضرورية 120 وحدة نقدية، 60 وحدة نقدية لكل آلة غسيل. والمصلحة المالية لا تسمح يتجاوز مصاريف قطع الغيار عن 6500 وحدة نقدية يوميا.

المصنع يعيد بيع التلفاز وآلات الغسيل بعائد صافي يقدر بـ 100 وجدة نقدية للتلفزيون، و700 وحدة نقدية لآلة الغسيل.

يرغب المصنع قي تعظيم ربحه بعد إنتاج يومي من التلفاز وآلات الغسيل.

المطلوب: صياغة المسألة الثنائية للبرنامج الخطي؟

III. تحليل الحساسية (Sensitivity Analysis)

تمهيد:

لا تحل معظم الحزم المتاحة لحل البرمجة الخطية مشكلة البرمجة الخطية فحسب، بل توفر أيضًا خيار طلب معلومات عن حساسية الحل لتغييرات معينة في البيانات. يشار إلى هذا باسم تحليل الحساسية أو تحليل ما بعد الأمثل Post- Optimality Sensitivity Analysis. يمكن أن تكون هذه المعلومات ذات أهمية كبيرة في الممارسة العملية، حيث قد تكون قيم المعلمات تقديرات. السؤال المتبادر إلى الذهن والذي يتم مواجهته بشكل متكرر هو "ماذا لو " أين يتم إيجاد حل معين لأمرًا صعبًا. يدرس تحليل الحساسية أثر التغيرات في بعض عناصر البرنامج الخطي على الحل الأمثل حالي .من ذلك مثلا [Gould et al, 1991] معرفة أثر التغير في دالة الهدف أو معاملات المتغيرات في القيود أو أثر التغير في قيمة الجانب الأيمن للقيود أو إضافة متغير جديد أو حذف متغير قديم على الحل الأمثل ويمكن للدارس معرفة اثر هذه التغيرات باستخدام الرسم أو باستخدام السمبلكس أو باستخدام مخرجات بعض البرامج الحسابية مثل LINDO, Win QSB, QM fo Windows, Solver by Excelفتحليل الحساسية مهما جدا لمتخذ القرار وذلك لأنه يساعد على سرعة اتخاذ القرارات الإدارية بالحصول على معلومات حول الاختناقات والفجوات في المشكلة. على سبيل المثال، عندما يتم تغيير تكلفة النشاط أو المقدار المتاح من الموارد، غالبًا ما نحتاج إلى معلومات حول كيفية تغيير التكلفة الإجمالية للقرار الحالي، من أجل الحصول على قرار أمثل جديد للوضع الجديد. في هذه الحالة، يمكن تطبيق تحليل الحساسية وهو ما سنعرضه في موضوعنا هذا

ملاحظة: يفترض بالنسبة لتحليل الحساسية حدوث تغير في جانبا واحدًا فقط في النتيجة، بمعنى يحدث أثر نوعًا ما عندما يتغير معيار واحد فقط من المشكلة مع ثبات بقية العناصر. [16]

1.III.أثر التغير في معاملات دالة الهدف

فمثلا إذا افترضنا أنك قمت بحلLP مسألة برنامج خطي ثم رغبت في حل مسألة أخر يلها نفس القيود ولكن مع تغير طفيف في دالة الهدف. حتما هنا ستقوم دائمًا بإجراء تغيير واحد فقط في المسألة في كل مرة. مع الحفاظ على بقية القيود الأخرى ثابتة أين ستقوم بتغيير معاملًا واحدًا فقط في دالة الهدف، إذا افترضنا أن ربح أو تكلفة منتوج قد تغير بمقدار معين ω حيث$(\omega \neq 0)$، فما أثر هذا التغير على أساس الحل

[16]https://econweb.ucsd.edu/~jsobel/172aw02/notes7.pdf,p.1.

الأمثل المتحصل عليه ، وبعبارة أخرى ماهي حساسية الحل الأمثل المتحصل عليه لكل تغير في معامل من معاملات دالة الهدف.

بهدف توضيح الحالة الاولى المتعلقة بالمتغيرات في الموارد المتاحة نورد المثال التالي بعد الحصول على الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الآني:

مثال III .1:

يقوم مصنع بصناعة الطاولات والكراسي، أين يتطلب صناعة طاولة 40 قدمًا من الخشب و30 قدمًا للكرسي الواحد، يستغرق تصنيع طاولة نصف مصنعة ساعتين من العمالة الماهرة الأمر نفسه بالنسبة لكرسي نصف مصنع. بينما يستغرق تصنيع طاولة تامة الصنع ساعة إضافية أخرى من العمل، وساعتان إضافيتان من العمالة الماهرة لصناعة كرسي تام الصنع. الطاقة الاستيعابية المتاحة للمصنع من العمالة الماهرة تقدر بـ 6000 ساعة، المؤسسة تتوفر على 40 ألف قدم من الخشب، كما تبلغ تكلفة القدم الواحد من الخشب بـ1 وحدة نقدية. أسعار الإنتاج موضحة في الجدول أدناه:

المنتج	السعر (وحدة نقدية)
طاولة نصف مصنعة	70
طاولة تامة الصنع	140
كرسي نصف مصنع	60
كرسي تام الصنع	110

يذكر أن هذا المثال يتضمن تحديد خطط الإنتاج التي تمكن المصنع من استخدامها لزيادة أرباحه إلى الحد الأقصى. خطة التصنيع لنوعين من الأثاث)، هذا معناه أن أي انخفاض وأي زيادة في ربح المنتج الأول يقل عن 90ون سيبقي X_1خارج الأساس، أي أن الكمية المنتجة من هذا النوع تساوي للصفر، والعكس صحيح إذا زاد الربح عن القيمة 90 حيث ستصبح X_1 داخل الأساس وبذلك من المفيد إنتاج هذا النوع لأنه سيغطي التكلفة البديلة والمقدرة بـ 90ون,

مع مراعاة القيود المفروضة، حيث يمثل القيد (1) كمية الخشب المستخدم ، بينما يمثل القيد (2) الوقت المستغرق من العمالة المستخدمة.

حل مثال1.III

X_1: عدد الطاولات نصف مصنعة

X_2: عدد الطاولات تامة الصنع

X_3: عدد الكراسي نصف مصنع

X_4: عدد الكراسي تامة الصنع

الصياغة الرياضة للنموذج هي

$$Max(Z)=70X_1+ 140X_2+ 60X_3+ 110X_4$$

$$S/c \begin{cases} 40X_1+ 40X_2+ 30X_3+ 30X_4 \leq 40000 \\ 2X_1+ 5X_2+ 2X_3+ 4X_4 \leq 6000 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{cases}$$

1.1.III تغير في معامل متغير غير أساسي

عندما نقوم بتغيير دالة الهدف من خلال تغيير في معامل غير أساسي (متغير يأخذ القيمة صفر في الحل). في المثال، المتغيرات غير الأساسية ذات الصلة هي X_3،X_2،X_1 ماذا يحدث للحل الخاص إذا خفضنا مثلا من معامل المتغير غير الأساسي ؟ على سبيل المثال، إذا افترضنا أن معامل x_1 في دالة الهدف أعلاه قد تم تخفيضه من 70 إلى 30 فتصبح دالة الهدف كالآتي:

$$Max(Z) =30X_1 +140\ X_2 + 60X_3 +110\ X_4.$$

ما حدث هنا: هو أننا قد اتخذنا متغيرًا ما زلنا لن تستخدمه في أساس الجدول فهو خارج الأساس (حيث قمنا بتعيينه 1 = 0) ثم جعلناه أقل ربحية (بمعنى أنقصنا معامله في دالة الهدف).. هنا الحل لا يتغير.

ملاحظة: لا يكون تغير في الحل الخاص بالنسبة للمتغير غير الأساسي، في حالة زيادة من قيمة المعامل بقيمة صغيرة، أي فارق خفيف والعكس صحيح في حالة ما إن كان الرفع من قيمة المعامل بفارق كبير ما يدفعك إلى تغيير قيمة القيمة بطريقة تجعل $X_1 > 0$ لذلك، بالنسبة للمتغير غير الأساسي، يجب أن تتوقع استمرار صلاحية الحل لمجموعة من القيم لمعاملات المتغيرات غير الأساسية. بحيث يجب أن يشمل النطاق جميع القيم الأدنى للمعامل وبعض القيم الأعلى. إذا زاد المعامل بشكل كافٍ، فإن الحل يتغير

يمكن أن نعبر عن ذلك رياضيا كمايلي:

لنفترض أن التغير الذي سيطرق على X_2 يقدر بـ ωونريد أن نعرف مقدار التغيير الذي لا يؤثر على الحل الأمثل المتحصل عليه، في المثال أعلاه، والذي يمكن التعبير عنه رياضيا بـ:

$$MaxZ^*=(\omega+70)\ x_1+ 140x_2 + 60x_3 + 110x_4$$

الحل الأمثل حسب جدول السمبلكس هو:

T_4	X_1	S_1	X_3	X_2	b
X_4	4/3	1/3	1	4/3	4000/3
S_2	-10/3	-4/3	-2	-1/3	2000/3
Z*	230/3	110/3	50	20/3	620000/3

يتم إدخال دالة الهدف في الجدول الأمثل بنفس الطريقة التي المستخدمة في إدخال معاملات الدالة الأصلية بعد التخلص من المتغيرات الوهمية في الأساس وبعد المرحلة الأولى في طريقة سمبلكس على مرحلتين ليصبح الجدول كالأتي:[17]

		(70+ω)		(60)	(140)	
	T_4	X_1	S_1	X_3	X_2	b
(110)	X_4	4/3	1/3	1	4/3	4000/3
	S_2	-10/3	-4/3	-2	-1/3	2000/3
	Z*	(90-ω)	110/3	50	20/3	620000/3

يجب أن تكون جميع عناصر دالة الهدف موجبة تماما في الجدول أعلاه حتى لا يتغير أساسه.

بإجراء عملية النشر بقيم دالة الهدف الأصلية في الجدول أعلاه وذلك بطرح القيم الموجودة داخل الأساس على القيم الموجودة خارج الأساس، فنحصل على:

$$90-\omega>0 \Rightarrow \omega<90$$

حتى لا يتغير أساس الحل يجب أن تنتمي

$$\omega \epsilon]-\infty,0[u]0,90[$$

حتى يتغير أساس الحل الأمثل يجب أن يكون هناك 0 أو إشارة سالبة في سطر Z

$$90-\omega<0 \Rightarrow \omega>90$$

[17] حاج صحراوي حمودي، مرجع سابق، ص.84.

هذا معناه أن أي انخفاض وأي زيادة في ربح المنتج الأول يقل عن 90ون سيبقيX_1خارج الأساس، أي أن الكمية المنتجة من هذا النوع تساوي للصفر، والعكس صحيح إذا زاد الربح عن القيمة 90 حيث ستصبح X_1 داخل الأساس وبذلك من المفيد إنتاج هذا النوع لأنه سيغطي التكلفة البديلة والمقدرة بـ 90ون,

2.1.III .تغيير في معامل المتغير الأساسي

ما ذا يحدث للحل الخاص إذا تغير معامل **المتغير الأساسي** يختلف هنا الموقف عن الحالة السابقة، حيث أننا تستخدم متغير الأساس في المقام الأول. في حالة تخفيض معامل المتغير الأساسي، هذا التغيير يجعل المتغير مساهمته أقل في الربح كما يجب أن تتوقع أن التخفيض الكبير بما يكفي يجعلنا نقوم بتغيير الحل على سبيل المثال السابق، إذا كان معامل X4في دالة الهدف في المثال السابق هو 55 بدلاً من 110 (بحيث يكون الهدف هو تحقيق الحد الأقصى)، تصبح دالة الهدف من الشكل:

$$Z' = 70X_1 + 140X_2 + 60X_3 + 55X_4$$

معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف:بالنسبة لمتغيرات القرار الأساسية هوX4، فإن هذا المدى سيظهر كالتالي :لو أضفنا إلى معامل X4قيمة تساوي ωحيث $(\omega>0)$باعتبار أن دالة الهدف من شكل تعظيم ، ومع بقاء كل المعطيات الأخرى ثابتة فإن جدول السمبلكس النهائي سيظهر كالتالي : (لاحظ أن التأثير سيقع في صف Cj-Zjللمتغيرات غير الأساسية و دالة الهدف فقط)

$$Z' = 70X_1 + 140X_2 + 60X_3 + (110+\omega)X_4$$

		(70)	(60)	(140)		
	T_4	X_1	S_1	X_3	X_2	b
(110+ω)	X_4	4/3	1/3	1	4/3	4000/3
	S_2	-10/3	-4/3	-2	-1/3	2000/3
	Z*	440+4ω/3	110+ω/3	110+ω	440+4ω/3	620000/3

حتى لا يتغير أساس الحل

Z* 440+4ω/3 110+ω/3 110+ω 440+4ω/3

يجب أن يكون

$$440+4\omega/3>0$$

$$110+\omega>0$$

$$\omega>-110$$

هذا معناه أن أي انخفاض في ربح المنتوج الرابع يقل عن 110 سوف يبقى الأساس بدون تغيير،

2.III .تغيير في قيمة الجانب الأيمن

لقد تناولنا في المسألة الثنائية بأن الأسعار تتأثر بالتغيير في كميات الموارد المتاحة، إذا تم التغير في كمية الموارد لقيد غير ملزم، فالحل هنا لن يغير أبدًااي إذاقمنا تقليل الكية الموارد المتاحة لجعل القيد غير ملزم، فالتغير لا يحدث أي شيء في الحل الأمثل، ولكن إذا قمنا بتقليل كمية الموارد الكافية لجعل القيد ملزمًا، فقد يتغير الحل الخاص) .لاحظ التشابه بين هذا التحليل وحالة تغيير معامل متغير غير أساسي في دالة الهدف. التغييرات في الجانب الأيمن من قيود الربط دائمًا ما تغير الحل (قيمة x يجب أن تتكيف مع القيود الجديدة). لنعود الى **المثال السابق** ونفرض ان هناك تغير سيطرأ على كمية المورد من القيد 1 بمقدار (ω)

مثال2.III.

يصبح القيد الأول رياضيا من الشكل:

$$40X_1+ 40X_2+ 30X_3+ 30X_4\leq 40000$$

ويصبح حل جدول الحل الأمثل كالاتي:

(40000+ω)

	T4	X1	S1	X3	X2	b	
	X4	4/3	1/3	1	4/3	4000/3	(40000/3+ ω)
(6000)	S2	-10/3	-4/3	-2	-1/3	2000/3	(2000/3-4ω/3)
		230/3	110/3	50	20/3		

يحسب كل سطر بضرب معامل كل عنصر موجود خارج الأساس في القيمة المقابلة له داخل الأساس ونقوم بجمع كل العناصر ذات المعامل مع معامل العنصر الموجود خارج الأساس.

ونعلم أن الحل الأمثل لا يكون الا بشرط أن تكون كل قيم الطرف الأيمن موجبة ولايهم سلبية او إيجابية دالة الهدف لأنها ستكون بقيم جديدة، وعليه وحتى يكون نفس الحل لابد أن تكون

$(40000/3+\omega/3), (2000/3-4\omega/3)\geq 0 \rightarrow 2000-4\omega\geq 0 \rightarrow 2000\geq 4\omega \rightarrow \omega\leq 500$

$40000+\omega\geq 0 \rightarrow \omega\geq -4000$

$\rightarrow \omega\in [-40000, 0[\cup]0,500]$

بمعنى أن أي قيمة ترتفع عن القيمة 500 وأي انخفاض يزيد عن 40000 من قدم الخشب المستخدم لإنتاج الطاولات والكراسي سوف لن يغير من الحل الأمثل

3.III .إضافة قيد للمشكلة

إذا أضفت قيدًا إلى المشكلة، يمكن أن يحدث شيئين. الأصل الخاص بكل حل يلبي القيد أو لا يستوفي.

- إذا كان الأمر كذلك، فأنت على وشك الانتهاء؛
- إذا كان لديك حل من قبل ولا يزال الحل ممكنًا للمشكلة الجديدة، إذًا يجب أن يكون لديك دائمًا حل؛
- إذا كان الحل الأصلي لا يرضي قيد جديد، فربما تكون المشكلة الجديدة غير قابلة للتنفيذ. إذا لم يكن كذلك، فهناك حل آخر. يجب أن نخفض من قيمة القيد الجديد بحيث حتى يبقى الحل المتحصل عليه حلا امثلا؛
- . إذا كان الحل الأصلي يلبي قيدك الجديد، فيمكنك القيام بالحل كما كان من قبل.
- إذا لم يكن الأمر كذلك، فستكون المسألة صعبة الحل.

نرجع للمثال السابق ونفترض اننا اضفنا قيد جديد من المدخلات الممثلة بالبراغي وان كان في الأصل الكميات متوفرة بقدر معين واعتقدنا انها غير مؤثرة على الحل النهائي في المسألة، وبعد دلك تبين لنا أنها نؤثر على الحل النهائي فنود بدلك معرفة ما هي الكمية التي يجب توفيرها حتى يبقى الحل المتحصل عليه حلا امثلا

الكميات من هذه المدخلات بالوحدات تتطلب على التوالي:4،4،2،2

الحل:

يصبح لدينا القيد التالي:

$$2X_1+2X_2+4X_3+4X_4 \leq \omega$$

لإيجاد قيمة ω ندخل القيد أعلاه في جدول الحل الأمثل

		2		4		2	
	T_4	X_1	S_1	X_3	X_2	b	
L	X_4	4/3	1/3	1	4/3	4000/3	
	S_2	-10/3	-4/3	-2	-1/3	2000/3	
	Z*	230/3	110/3	50	20/3	620000/3	
	S_3	- 8/3	-4/3	0	-8/3	ω-8000/3	

حتى يبقى الجدول أعلاه أمثلا يكفي ان تكون $b_3 \geq 0$ بمعنى $\omega - 8000/3 \geq 0$

$$\omega \geq 8000/3 \Leftarrow$$

وهذا معناه ان ادنى كمية يجب توفيرها من النوع الجديد من المدخلات تساوي او تكبر القيمة 8000/3 وحدة.

4.III. العلاقة بالثنائية

تتوافق معاملات دالة الهدف مع ثوابت الجانب الأيمن من قيود الموارد في الثنائية. ثوابت الجانب الأيمن للأصلية تتوافق مع الثنائية معاملات دالة الهدف في الثنائية. ومن ثم ممارسة أي تغيير في معاملات دالة الهدف هو في الحقيقة نفس تغيير قيود موارد الثنائية ما يسهل عملية التغير ذهابًا وإيابًا بين العلاقة بين الاصلية والثنائية.

سلسة III

تمرين شامل

يقوم مصنع Sugarco بتصنيع ثلاثة أنواع من قطع حلوى الشوكولاطا. يتكون كل قالب منها من السكر والشوكولاطا. التراكيب من كل نوع من أنواع الحلوى والربح المكتسب من كل قطعة حلوى شوكولاطا موضحة في الجدول أدناه. خمسون سعة من السكر و100 من الشوكولاطا متوفرة.

جدول التراكيب والربح

قالب الشكولاطا	مقدار السكر بالسعة	مقدار الشكولاطا بالسعة	الربح
1	1	2	3
2	1	3	7
3	1	1	5

بعد التعريف

X_1 هو عدد قطع حلوى الشكولاطا من النوع الأول المصنعة ،

X_2 هو عدد قطع حلوى الشكولاطا من النوع الأول المصنعة

X_3 هو عدد قطع حلوى الشكولاطا من النوع الأول المصنعة

$$\text{Max } (Z) = 3X_1 + 7X_2 + 5X_3$$

$$s/c \quad \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 \le 50 \text{ (قيد السكر)} \\ 2X_1 + 3X_2 + X_3 \le 100 \text{ (قيد الشكولاطا)} \\ X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{cases}$$

الجدول المرتبط بالحل الأمثل هو:

T_3	X_1	S_2	X_2	b
S_1	1/3	-1/3	2/3	50/3
X_3	5/6	3/6	-1/2	25
Z	1/3	1	4	300

بعد إضافة متغيرات الفائض S_1 و S_2، اللوحة المثلى كما هو مبين في الجدول 11. باستخدام هذه اللوحة المثلى، أجب عن الأسئلة التالية:

- ما هي قيم ربح قالب من الشكولاطا من النوع الأول ليبقى الحل المتحصل عليه او الاساسي أمثلا؟ إذا كان الربح النوع 1لقالب الشكولاطا هو 7 وحدات نقدية فما هو الحل الأمثل الجديد للمشكلة؟
- ما هي قيم ربح الشكولاطا من النوع 2 التي تمكن من ابقاء الحل الأساسي أمثلا؟ إذا كان الربح من النوع 2 لقالب الشكولاطا هو 13 وحدة نقدية، فما هو الخيار الأمثل الجديد لحل لمشكلةSugarco
- ما هي كمية السكر المتاحة حاليا ليبقى الحل الاساسي أمثلا؟
- إذا توفرت 60 سعة من السكر، فماذا سيكون عائد Sugarco's'؟ كم من كل قطعة حلوى شكولاطا يجب أن يكون ملف جعل الشركة؟ هل يمكن الإجابة على هذه الأسئلة إذا كانت 30 سعة فقط من السكر كانت متوفرة؟

نفترض أن قطعة حلوى من النوع 1 تستخدم 0.5 سعة من سكر و0.5 سعة شوكولاطا، كم يجب على Sugarco آن تصنع من قطع الحلوى من النوع 1؟

IV. مسائل النقل

تمهيد

تعد مشكلة النقل واحدة من أهم مواضيع بحوث العمليات التي تدخل ضمن مشاكل التخصيص التي تتضمن تخصيص عدد معين من موارد المؤسسة وتوزيعها إلى وجهات مختلفة بهدف تحسين الفعالية الكلية.[18] أي تقليل التكلفة الإجمالية أو تعظيم العائد الإجمالي بشكل عاما فمشكلة النقل تبحث على طرق تحسين نقل المنتجات بين المصادر ووجهاتها من أجل تعظيم الأرباح وتقليل الضرر وعليه فهي دعامة في عملية اتخاذ القرارات من أجل حل المشاكل الاقتصادية في قطاع النقل والمواصلات.

1.IV. شروط استخدام مسائل النقل

تخضع مسائل النقل لجملة من الشروط نذكرها في:[19]

- ✓ وجود مجموعة من مراكز التوزيع تسمى المنابع تمثل جانب العرض؛
- ✓ وجود مجموعة منا لوجهات أو مراكز الاستلام تسمى المصبات تمثل جانب الطلب؛
- ✓ توفر مجموعة من بدائل النقل لكل منها تكلفة وطاقة استيعاب معينة؛
- ✓ وجود هدف يسعى صناع القرار تحقيقه يكون في الأغلب تدنئتها لتكلفة؛
- ✓ أن يكون إجمالي العرض يساوي إجمالي الطلب؛
- ✓ تجانس الوحدات بمعنى استخدام نفس وحدة القياس.

2.IV.عناصر مسألة النقل :

تتكون مسألة النقل من العناصر التالية :[20]

- التعريف بالمتغيرات: تحديد كمية المنتج التي يجب نقلها من المصادر إلى الوجهات
- الهدف: تحديد الكميات x_{ij} المرسلة من كل مصدر كل وجهة $i\in I$ حيث :$i=\{\{1,2,...m\}$، إلى كل وجهة $j\in J$ بحيث $j=\{1,2,...n\}$ ،مع تقليل التكلفة الإجمالية للنقل.
- القيود :

– العرض محدود من حيث التكاليف.

– الالتزام بتلبية طلبات الوجهة.

---

[18] اليامين فالتة، **بحوث العمليات**، ايتراك للنشر و التوزيع، الطبعة الأولى، القاهرة، مصر، 2006، ص 27.

[19] ابراهيم وصيف غدير ابراهيم،علد الرزاق حواس،محاضرات في رياضيات مؤسسة : مطبوعة جامعية ، جامعة الشهيد حمة لخضر الوادي، الجوائر ،السنة الجامعية 2021/2020.ض.53.

[20] .:·Abdelkader Benaissat, Problème de Transpor, lap lambert academic publishing, Article October 2019, p.11.

3.IV. صياغة المسألة

تعرض مسائل النقل في حالة التدنئة وهي الحالة الشائعة في جدول يحوي المكونات المذكورة أدناه، حيث نفترض وجود (a_i) مصدر من مصادر التوزيع و(b_j) مركز من مراكز الطلب يتم تصميم مسألة النقل على النحو التالي:

المصادر / المراكز	D_1	D_2	.....	Dn	العرض
S_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	.....	C_{1n} X_{1n}	a_1
S_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	.....	C_{2n} X_{2n}	a_1
....	.....	.....	.....	.....	.....
S_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	.....	C_{mn} X_{mn}	a_m
الطلب	b_1	b_2	.....	b_n	$\sum a_i$ / $\sum b_j$

$$minZ = \sum_{i \in I} \sum_{i \in J} c_{ij} x_{ij}$$

S/C

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \forall i \in I \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j, \forall j \in J \\ x_{ij} \geqslant 0, \forall (i,j) \in I \times J \end{cases}$$

SI: يمثل مركز توزيع السلع والبضائع أي المنبع من رقم (i) ؛

Di: يمثل مركز الطلب للسلع والبضائع أو الوجهة من رقم (j)؛

Cij: نمثل تكاليف نقل وتسويق السلع والبضائع من المصادر (i)إلى الوجهات (j)؛

Xij: كمية السلع والبضائع المسوقة من مراكز التوزيع إلى مراكز الطلب؛؛

Ai: كمية البضاعة المعروضة من المصدر التوزيع؛

Bj: كمية البضاعة المطلوبة من مركز الاساس؛

4.IV.أنواع مسائل النقل

تنقسم مسائل النقل من حيث توازن جدول النقل او عدم توازنه الى مايأتي:[21]

1.4.IV.مسائل النقل المغلق (Closed Transportation Problems)

يكون فيها إجمالي العرض مساويا إجمالي الطلب وهذا يعني أن المسألة متوازنة أو نظامية

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

2 .4.IV.مسائل النقل المفتوح (Opened Tranportation Problems)

أي هناك عدم مساواة بين العرض والطلب فإما أن يكون العرض أكبر من الطلب أو العكس وهنا نقول أن المسألة غير متوازنة.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

وتكون العلاقة أعلاه على حالتين:

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} a_{\mathrm{i}} > \sum_{j=1}^{m} b_j$$

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{m} \mathrm{a_i} < \sum_{j=1}^{m} b_j$$

إذا كانت مسألة النقل غير متوازنة حيث العرض يفوق الطلب، نضطر إلى إنشاء مركز طلب وهمي وتحويلها إلى حالة التوازن على النحو الاتي،

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j + \mathrm{D_0}$$

D_0: يمثل مركز طلب وهمي تكلفته تساوي الصفر

[21] جسين ياسين طعمة وآخرون ، **بحوث العمليات نماذج وتطبيقات**، دار صفاء للنشر والتوزيع ،عمان الأردن، ط1،2009 ص,ص.154-155

إذا كانت مسألة النقل هنا غير متوازنة حيث الطلب يفوق العرض، نضطر إلى إنشاء توزيع وهمي وتحويلها الى حالة التوازن على النحو الاتي:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i + S_0 = \sum_{j=1}^{m} b_j$$

S_0: يمثل مركز توزيع وهمي تكلفته تساوي الصفر

مثال IV:

شركة تقوم بتصنيع دواء معين في ثلاثة مختبرات L_1؛L_2؛ L_3 ، يتم شحن هذا الدواء بعد ذلك إلى مراكز التوزيع C_1؛C_2؛C_3؛C_4؛C_5 ، يحتوي كل مختبر L_i على كمية a_i ، ويتطلب كل مركز طلبًا للكمية b_j. يتم تسجيل تكلفة الوحدة للنقل من كل مختبر إلى كل مركز. الهدف هو توصيل هذا الدواء بأقل تكلفة من المعامل الثلاثة إلى المراكز الخمسة

يوضح الجداول أدناه الكميات المتوفرة(a_i) في كل مختبر (L_i) ، حيث $i \in \{1,2,3\}$

بالإضافة إلى الطلبات b_j المطلوبة في كل مركز C_j مع $j \in \{1,2,3,4,5\}$

جدول الكميات

المخبر	L_1	L_2	L_3
الكميه	240	160	260

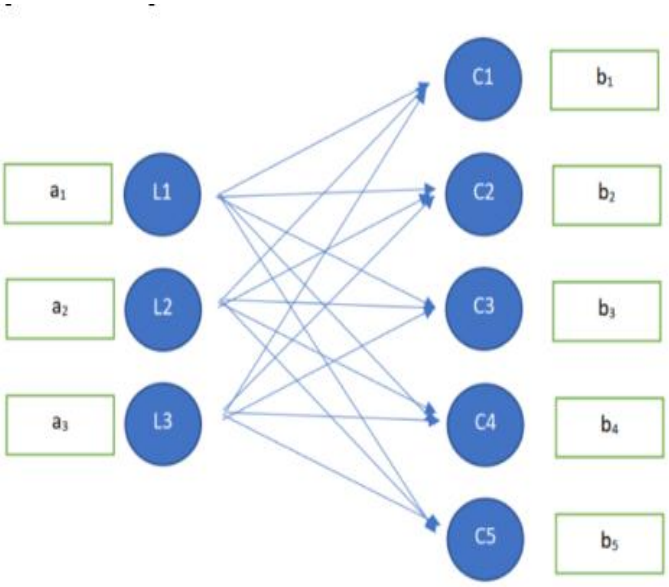
جدول الطلب

المركز	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
الطلب C_i	120	130	145	125	140

جدول تكاليف الوحدة للنقل من كل معمل إلى كل مركز ج

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
L_1	1	8	1	5	4
L_2	5	5	3	6	7
L_3	2	9	5	9	8

تمثيل الشبكة:



المطلوب: هو تموين المراكز الخمسة بكل احتياجاتها من خلال المخابر الثلاث، على أن تتحمل المصنع اقل تكلفة ممكنة وفي حدود طاقات العرض لكل وحدة من المختبرات.

الحل:

صياغة المسألة

$$minZ = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij}$$

$$s/c\begin{cases} \sum_{j=1}^{5} x_{ij} \leqslant a_i, \forall i \in I = \{1,2,3\} \\ \sum_{i=1}^{3} x_{ij} \geqslant b_j, \forall j \in J = \{1,2,3,4,5\} \\ x_{ij} \geqslant 0, \forall (i,j) \in I \times J \end{cases}$$

5.IV.طرق حل مسألة النقل:

يمكن استخدام طريقة simplex لحل مشكلة النقل، ولكن في دراستنا لنستخدمها فتطبيق simplex لحل مشكلة النقل أمر معقد نوعا ما حيث يجب علينا في كل مرة استخدام المزيد من المصفوفات الكبيرة والتي تتطلب عددا كبير من الأعمدة ومن الصفوف، وهو أمر يصعب التعامل معه بعض الشيء. لهذا سنلجأ إلى اعتماد الخوارزمية بسيطة لحل مشكلة النقل مع مراعاة بنية المشكلة من خلال تحديد التكلفة الإجمالية الحدية للنقل وتحديد متغيرات المدخلات والمخرجات حيث تقوم خوارزمية النقل إلى إنشاء تكلفة النقل تعمل على تخفيض التكاليف الكلية بشكل متزايد، وبعد عدد معين من التكرارات، حتى تصل إلى الحل

الأمثل، يتم بناء كل حل من الحل السابق عن طريق تعديل الكمية المعروضة في كل خانة وإجراء التعديلات اللازمة للحفاظ على جدوى (أهلية) الحل ومن ثم الحاجة إلى الحصول على تكلفة النقل الأولي. التكاليف المتعلقة بحل مشكلة النقل يتم حسابها يدويا، وضعها في جداول النقل.

1.5.IV.طريقة تحديد الحل الأساسي الممكن

لتحديد الحل الأساسي أو الأولي نعتمد الطرق التالية:

أ) طريقة الركن الشمالي North-west Corner Method

ب) طريقة التوزيع الشمالي Random Distribution Method

سنتناول طريقة من بين الطريقتين بشرح مفصل وهي:

أ) طريقة الركن الشمالي الغربي(CNO)

هي طريقة تعتمد في إيجاد الحل الأساسي بالانطلاق من الخلية الموجودة في الزاوية العليا إلى اليسار وفيها نتبع الخطوات الآتية :[22]

- **الخطوة 1:** نشبع الخلية الأولى بأكبر كمية ممكنة من المنتج وهي الخلية العلوية اليسرى، ثم نقوم بتعديل العرض والطلب.
- **الخطوة 2:** ننتقل إلى خلية أخرى وإلى اليمين إذا لم يتم استنفاذ العرض ثم ننتقل إلى خلية أخرى نحو القاعدة إذا لم يتم تلبية الطلب.
- **الخطوة 3:** نكرر حتى يتم تخصيص العرض بالكامل.

مثال1.5.IV.أ

حل مسألة النقل باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	العرض
L_1	1	8	1	5	4	240
L_2	5	5	3	6	7	160
L_3	2	9	5	9	8	260
الطلب	120	130	145	125	140	660

[22] Abdelkader Benaissat, Problème de Transpor, op.cit. , p.14.

أول عملية نقوم بها هي التأكد من العرض يساوي الطلب ثم توزيع الكميات من مختلف المخابر(المنبع) إلى مختلف المراكز (المصب)

– نبدأ بأول خلية العلوية اليسرى أين نجد أن احتياجات المركز 1 هي 120، بيتما حجم ما يعرض المخبر 1هو 240، لذلك يمكن لهذا المركز أن يتحصل على كامل احتياجاته المقدرة بـ 120 من المخبر 1 ويتشبع بذلك العمود الأول كلية، بينما يبقى للمخبر 1 كمية تقدر بـ 120

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	العرض	باقي1	باقي 2
L_1	1 120	8 120	1	5	4	240	120	0
L_2	5	5 10	3 145	6 5	7	160		
L_3	2	9	5	9 120	8 140	260		
الطلب	120	130	145	125	140	660		
باقي1		10		120				
باقي2		0		0				

- ننتقل إلى الخلية الموالية على اليمين وفق الخطوات المتبعة وهي الخلية للمخبر L1 والمركز C_2 حيث نجد كمية عرض متبقية تقدر بـ 120 بينما احتياجات المركز C_2تقدر بـ130وحدة، لذلك فأكبر كمية عرض نوجهها من المخبر L1إلى المركزC_2 هي 120وحدة، وحينها تبقى احتياجات المركز2 تقدر بـ10وحدة ينبغي على هذا الأخير أن يتحصل عليها من منبع أخر وفي نفس الوقت يستنفذ المخبر 1 كامل الكميات المعروضة ولا يمكن الانتقال إلى خلية أخرى من اليمين

- ننتقل إلى أخرى من القاعدة المقابلة للمركز 3 والمخبر 2 أين نجد قيمة العرض المتبقية تقدر بـ 150 بينما احتياجات الطلب للمركزC_3 تقدر بـ145وجدة، وبدلك يتم تلبية كل احتياجات المركز C_3 ويبقى للمخبر L2 كمية من العرض تقدر بـ5 وحدة.

- ننتقل إلى خلية من اليمين المقابلة للمخبر 2L، والمركز C_4 حيث قيمة العرض المتبقي في المخبر L_2تقدر بـ5 وحدات وهي أكبر كمية يمكن توزيعها وتبقى قيمة الطلب تقدر بـ120 وحدة في حين يكون المخبر L2 قد استنفذ كل طاقته للتوزيع.

- ننتقل الخلية الموالية نحو القاعدة والمقابلة للمخبر L_3 والمركز C_4أين نجد قيمة العرض تقدر بـ 260 بينما احتياجات المركز C_4 تقدر بـ 120 وهي كمية يمكن الحصول عليها من المخبر L_3 ويتبقى ل هـ140وحدة، ويتشبع بذلك المركز C_4 كلية،

- ننتقل إلى الخلية الموالية على اليمين وهي المقابلة للمخبر L_3 والمركز C_5، حيث قيمة العرض المتبقية تساوي 140وحدة بينما قيمة الطلب 140 وحدة أين يتم تلبية كل احتياجات المركز C_5 ونكون بذلك قد استوفينا كل احتياجات المراكز الخمس بالكميات المعروضة وتحصلنا على الحل الأساسي الأول حسب ما هو موضح في الجدول الموالي:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	العرض
L_1	1 120	8 120	1	5	4	**240**
L_2	5	5 10	3 145	6 5	7	**160**
L_3	2	9	5	9 120	8 140	**260**
الطلب	**120**	**130**	**145**	**125**	**140**	**660**

بعد ذلك يتم حساب تكلفة هذا التوزيع كما يلي:

Zc= (1x120) + (8x120) + (3x145) + (6x5) + (9x120) + (8x140)=3795UM

2.5.IV.طريقة إيجاد الحل الأفضل

وفيها نذكر

أ) طريقة ذات الأقل تكلفة (Least Cost Methode) بشرح مفصل

ب) طريقة فوجل (Vogel's Method)إلا أننا لن نتطرق إليها في هذه المطبوعة

أ) طريقة التكلفة الدنيا

هي طريقة تعتمد في إيجاد الحل الأساسي انطلاقh من الخلية التي تحوي أصغر تكلفة وفيها نتبع الخطوات الآتية :[23]

☒ **الخطوة الأولى:** نشبع هذه الخلية بأقصى كمية ممكنة مع مراعاة كمية العرض والطلب.

☒ **الخطوة الثانية :** نحدد الخلية التي تحوي أصغر تكلفة والتي يكون فيها العرض والطلب غير مساويان للصفر.

[23] محمد راتول ، **بحوث العمليات**، مرجع سبق ذكره، ص. 125,

مثال2.5.IV. أ.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	العرض
L_1	1	8	1	5	4	240
L_2	5	5	3	6	7	160
L_3	2	9	5	9	8	260
الطلب	120	130	145	125	140	660

– نبدأ بتتبع الخطوات المذكورة أعلاه حيث نجد أن الخلية (1.1) هي التي تحوي أقل تكلفة مع عرض يقدر بـ 240 وطلب بـ 120، نشبع هذه الخلية بأقصى كمية يمكن نقلها من المخبر L_1 وهي 95 وعليه فقد لبى المخبر L_1 احتياجات المركز C_1, الذي مازال يحتاج لـ 25وحدة.

– نحدد الخلية التي تحوي أقل تكلفة وفق الخطوة الثانية المذكورة أعلاه نجد بأنها الخلية (3,1)، حيث الباقي من العرض يساوي 145بينما يقدر الطلب بـ 145 لذلك فأقصى قيمة نشبع بها الخلية هي 145 وعليه فقد استنفذ المخبر L1كامل طاقاته ولبى بذلك احتياجات المركزC_3 .

– نذهب للخلية التي تحمل أقل تكلفة من الخلايا المتبقية مع العرض والطلب لا يساوي الصفر فنجد الخلية (3،2) حيث العرض يقدر بـ 160 والطلب بـ 130 نشبع هذه الخلية بأقصى كمية تلبي الطلب ا وهي 130 ومنه فإن المركزC_2 قد تم تلبية احتياجاته وبقي من العرض 30.

– ننتقل الى الخلية الموالية بأقل تكلفة مع استيفاء الشرط العرض والطلب فتجد الخلية (2،4) حيث الباقي من العرض يساوي 30 بينما يقدر الطلب 125، نشبع الخلية بأقصى كمية وهي 30 وبذلك تم استيفاء العرض L_2 وبقية لتلبية طلب المركزC_4 95.

– ننتقل إلى الخلية التي تحوي أقل تكلفة من الخلايا المتبقية والتي تستوفي الشرط فتجد أنها الخلية (1،3) حيث العرض يساوي 260 بينما الباقي من الطلب يساوي 25، نشبع الخلية بأقصى كمية وهي 25 وبذلك يكون المركز C_1 قد استوفى احتياجاته وبقي للمخبر L3 ما يقدر بـ 235 .

– ننتقل إلى الخلية (3.4) حيث العرض الباقي يساوي 235بينما الباقي من الطلب يقدر بـ 95 ونشبع الخلية بأكبر كمية وهي 95 وبذلك يكون المركز C_4استوفى كل احتياجاته وبقي للعرض L_3 ما يقدر بـ140.

– ننتقل إلى الخلية (5.5) حيث العرض الباقي يساوي 140بينما الباقي من الطلب يقدر بـ 140 ونشبع الخلية بأكبر كمية وهي 140 وبذلك يكون المركز L_3قد سوق كل الكمية واستوفى المركز C_4 كل احتياجاته

ليصبح الجدول كما هو موضح أدناه:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	العرض
L_1	1 (95)	8	1 (145)	5	4	240
L_2	5	5 (130)	3	6 (30)	7	160
L_3	2 (25)	9	5	9 (95)	8 (140)	260
الطلب	120	130	145	125	140	660

X_{11}= 120, X_{13}= 120, X_{22}= 130, X_{23}= 25, X_{24}= 5, X_{34}= 120, X_{35}= 140.

Z_m= (1X95) +(1X145) +(5X130) +(6X30) +(2X25) +(9X95) +(8X140)

Z_m= 3095

IV.3.5.طريقة اختبار وتحسين الحل الأمثل

لاختبار الحل وتحسينه نعتمد أحد الطرق التالية

a) طريقة التوزيع المعدل

ب) طريقة المسار المنعرجStepping Stone Methodإ لان أننا لن نتطرق إليها في هذه المطبوعة

a) **طريقة التوزيع المعدل** : هذه الطريقة تفترض وجود مضاعفين مجهولين U_i,V_j

نربط مضاعفاتU_i وV_j بكل صف i وكل عمودj ، بحيث حاصل جمعهما في الخلايا الداخلة في الحل يجب أن يساوي تكلفة الوحدة الواحدة عبر تلك الخلايا.[24]

- **خطوة 1**: بالنسبة للمتغيرات الأساسية، نحدد قيمة مجاهيل،V_j ,ui على النحو التالي

$U_i+V_j=C_{ij}$

$$C_{ij}-U_i-V_j=0$$

- لحل هذا النظام، يكفي تحديد قيمة متغير واحد لاستنتاج المتغيرات الأخرى
- **خطوة 2:** حساب التكاليف النسبية للمتغيرات غير الأساسيةالموجودة في الخلايا الشاغرة:
- اختبار الأمثلية: - الحل الحالي هو الأمثل إذا وفقط إذا $\forall(i,j)$ Fij≥0؛

[24] Abdelkader Benaissat, Problème de Transpor, op.cit. , p.16.

- إذا كان هناك (i,j) بحيث Fij <0 ، فإن الحل الحالي ليس هو الأمثل ، ونذهب الى تطبيق الخطوة الرابعة.

- **خطوة 3:** تحسين الحل

المتغير الداخل: نحسب الكمية(fi ,fij≥0) Fsr= Min متغير الداخل هو المتغير غير الأساسي المرتبط بالتكلفة النسبيةF_{sr} إذا تم الوصول إلىF_{sr} في عدة متغيرات، وبعدها نأخذ الحد الأدنى للتكلفة. ونقم بتعيين $x_{sr} = w$ثم نضبط المتغيرات الأساسية دون لمس متغيرات خارج الأساس.

المتغير الخارج: نحسب، ثم نخصص أكبر قيمة صغرى لـ w ثم نقوم بتحديث الجدول ونحسب التكلفة الإجمالية الجديدة والتي تزداد بواسطةF_{Sr}

Fsr تمثل تكلفة الوحدة الواحدة أو النسبية في الخلايا الشاغرة

مثال IV.3.5.أ.

بعد توزيع الكميات من المنبع إلى المصب وباعتماد طريقة التكلفة الدنيا نقوم بما يلي:

- **الخطوة الأولى:** نحسب قيمة المجاهيل ui,vj

$$\begin{cases} 0 = c_{11} - U_1 - V_1 = 1 - U_1 - V_1 \\ 0 = c_{13} - U_1 - V_3 = 1 - U_1 - V_3 \\ 0 = c_{22} - U_2 - V_2 = 5 - U_2 - V_2 \\ 0 = c_{23} - U_2 - V_3 = 3 - U_2 - V_3 \\ 0 = c_{24} - U_2 - V_4 = 5 - U_2 - V_4 \\ 0 = c_{34} - U_3 - V_4 = 9 - U_3 - V_4 \\ 0 = c_{35} - U_3 - V_5 = 8 - U_3 - V_5 \end{cases}$$

نضبط; $u_1=0$ وهي أصغر مؤشر معطى مقارنة بالآخرين

$U_1= 0 \Rightarrow V_1= 1 \Rightarrow V_3= 1$وهكذا نكمل العملية حتى نحصل على كل القيم

$U_1= 0, U2= 0, U_3= 0. V_1= 1, V_2= 3, V_3= 1, V_4= 4, V_5= 3.$

- **الخطوة الثانية:** نحسب التكاليف النسبية للمتغيرات غير الاساسية أي الموجودة بالخلايا الشاغرة

$$\begin{cases} F_{12} = c_{12} - U_1 - V_2 = 8 - 0 - 3 = 5 \\ F_{14} = c_{14} - U_1 - V_4 = 5 - 0 - 4 = 1 \\ F_{15} = c_{15} - U_1 - V_5 = 4 - 0 - 3 = 1 \\ F_{21} = c_{21} - U_2 - V_1 = 5 - 2 - 1 = 2 \\ F_{25} = c_{25} - U_2 - V_5 = 7 - 2 - 2 = 2 \\ F_{31} = c_{31} - U_3 - V_1 = 2 - 5 - 1 = -4 < 0 \\ F_{32} = c_{32} - U_3 - V_2 = 9 - 5 - 3 = 1 \\ F_{33} = c_{33} - U_3 - V_3 = 5 - 5 - 1 = -1 < 0 \end{cases}$$

إذن s=3و r=1، ومنه فالمتغير الداخل هو X31 ويصبح الجدول كالأتي

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	العرض
L_1	1 120-ω	8	1 120+ω	5	4	240
L_2	5	5 130	3 25-ω	6 5+ω	7	160
L_3	2 +ω	9	5	9 120-ω	8 140	260
الطلب	120	130	145	125	140	660

نحدد قيمة(ω)إنها أصغر قيمة لـ X_{ij} للمسار الذي نطرح منه (ω)فيصبح الجدول بذلك كما هو موضح أدناه

$$\omega \in \{120,25\} \Rightarrow \omega = 25$$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	العرض
L_1	1 95	8	1 145	5	4	240
L_2	5	5 130	3	6 30	7	160
L_3	2 25	9	5	9 95	8 140	260
الطلب	120	130	145	125	140	660

$$Z'=Z+F_{31}-\omega$$

$$Z'=Z+(-4)25 =3195-100= 3095$$ إذن

التحقق من أمثلية الجدول:

- حالة المتغيرات الأساسية:

$$\begin{cases} 0 = c_{11} - U_1 - V_1 = 1 - 0 - V_1 \\ 0 = c_{18} - U_1 - V_8 = 1 - 0 - V_8 \\ 0 = c_{22} - U_2 - V_2 = 5 - U_2 - V_2 \\ 0 = c_{24} - U_2 - V_4 = 6 - U_2 - V_4 \\ 0 = c_{81} - U_2 - V_8 = 2 - U_2 - V_8 \\ 0 = c_{84} - U_8 - V_4 = 9 - U_8 - V_4 \\ 0 = c_{85} - U_8 - V_5 = 8 - U_8 - V_5 \end{cases}$$

تصبح قيم المجاهيل كالأتي:

$U_1=0, U_2=2 , U_3=_1, V1=_1, V_2=7, V_3=1, V^4=8, V_5=7$

- حالة المتغيرات الأساسية

$$\begin{cases} F_{12} = c_{12} - U_1 - V_2 = 8 - 0 - 7 = 1 \\ F_{14} = c_{14} - U_1 - V_4 = 5 - 0 - 8 = -3 < 0 \\ F_{15} = c_{15} - U_1 - V_5 = 4 - 0 - 7 = -3 < \\ F_{21} = c_{21} - U_2 - V_1 = 5 + 2 - 1 = 6 \\ F_{28} = c_{28} - U_2 - V_8 = 3 + 2 - 1 = 4 \\ F_{31} = c_{31} - U_8 - V_1 = 7 + 2 - 7 = 2 \\ F_{32} = c_{32} - U_8 - V_2 = 9 - 1 - 7 = 1 \\ F_{88} = c_{88} - U_8 - V_8 = 5 - 1 - 1 = 3 \end{cases}$$

المتغير الداخل هو X_{15}وبذلك يصبح الجدول كما هو موضح أدناه

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	العرض
L_1	1 **95-ω**	8	1 **145**	5	4 **+ω**	240
L_2	5	5 **130**	3	6 **30**	7	160
L_3	2 **25+ω**	9	5	9 **95**	8 **140-ω**	260
الطلب	120	130	145	125	140	660

$\omega \in \{95,140\} \Rightarrow \omega = 95$

بتعويض قيمة ω في الجدول يصبح كالآتي:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	العرض
L_1	1	8	1 **145**	5	4 **95**	240
L_2	5	5 **130**	3	6 **30**	7	160
L_3	2 **120**	9	5	9 **95**	8 **45**	260
الطلب	120	130	145	125	140	660

نعيد إتباع الخطوات السابقة ونحسب المجاهيل أين نجد:

$$U_1=0\ ,\ U_2=1,\ U_3=4,\ V_1=-2,\ V_2=4,\ V_3=1,\ V_4=5,\ V_5=4,$$

بعدها نحسب F_{ij} فتجده $\forall ij\ F_{ij}\geq 0$ ومنه فالحل الحالي هو الحل الأمثل

$$Z"=3095+(-3)\ 95=2810$$

الحل الأمثل هو

$$X_{13}=145,\ X_{15}=95,\ X_{22}=130,\ X_{24}=30,\ X_{31}=120,\ X_{33}=95,\ X_{35}=45.$$

باقي المتغيرات تساوي الصفر هي متغيرات خارج القاعدة $Xij=0$

سلسلة(IV)

تمرين 1

مصنعان يقع أحدهما في مكان P والآخر في المكان Q من هذه المواقع، يتم تسليم سلعة معينة إلى كل من المستودعات الثلاثة الموجودة في A و B و .C المتطلبات الأسبوعية للمستودعات هي على التوالي 5، 5و 4 وحدات من السلعة بينما الطاقة الإنتاجية للمصانع في P و Q هي على التوالي 8 و 6 وحدات.

تكلفة النقل لكل وحدة مذكورة في الجدول أدناه:

من /الى	تكلفة الوحدة		
	A	B	C
P	160	100	150
Q	100	120	100

كم عدد الوحدات التي يجب نقلها من كل مصنع إلى كل مستودع حتى تكون تكلفة النقل في الحد الأدنى؟

وكم ستكون التكلفة؟

تمرين 2

تمتلك شركة كهرباء(X) ثلاث محطات طاقة كهربائية، توفر احتياجات أربع مدن يمكن لكل محطة توليد وتزويد هذه المدن بالكيلوواط / ساعة (كيلووات ساعة) من الكهرباء: محطة 1 بـ 35 مليون، محطة 2 بـ 50 مليون؛ محطة 3 بـ 40 مليون (انظر الجدول 1 .(تكون ذروة الطاقة في هذه المدن والتي تحدث في نفس الوقت (2 مساءً)، على النحو التالي (بالكيلووات ساعة) : المدينة تزود 1 بـ 45 مليون ؛ المدينة 2تزود بـ20 مليون وتزود المدينة 3 بـ30 مليون، بينما المدينة 4 فتزود بـ30 مليون. تعتمد تكاليف إرسال مليون كيلووات ساعة من الكهرباء من محطةإلى مدينة على المسافة التي يجب أن تقطعها الكهرباء .

المطلوب: قم بصياغة البرنامج الخطي الذي يقلل تكلفة تلبية كل مدينة بأقصى قدر من الكهرباء؟

- جدول تكاليف الشحن والتوريد والطلب على شركة (X)

	مدينة 1	مدينة 2	مدينة 3	مدينة 4	العرض(مليون كيلوواط)
محطة 1	8	6	10	9	35
محطة 2	9	12	13	7	50
محطة 3	14	9	16	5	40
الطلب(مليون كيلوواط)	45	20	30	30	

تمرين3

مصنعان يزودان ثلاثة عملاء بالمستلزمات الطبية. يتم توضيح تكاليف وحدة الشحن من المصانع إلى العملاء، إلى جانب المستلزمات والطلبات حسب الجدول أدناه:

	زبون 1	زبون 2	زبون 3	العرض
- **مصنع 1**	55	65	80	35
مصنع 2	10	15	25	50
الطلب	10	10	10	

المصنعين هو تقليل تكلفة تلبية طلبات العملاء. أوجد الحل الأمثل لمشكلة النقل؟

- نفترض أن طلب الزبون 2 زاد بمقدار وحدة واحدة بكم ستزيد التكاليف؟

تمرين 4

فلاحين AوB يمتلكان مخزونين من القمح بسعة 100 و50 قنطارًا على التوالي وهم يزودون 3 محلات تموينية D و E و Fبمتطلبات 60 و 50 و 40 قنطارًا على التوالي. تكلفة النقل لكل قنطار من الفلاحين إلى المحلات مبينة في الجدول التالي:

من / إلى	A	B
D	6	4
E	3	2
F	2/5	3

المطلوب: كيف يتم نقل الإمدادات بحيث تكون تكلفة النقل في حدها الأدنى؟ ما هو الحد الأدنى للتكلفة؟

V. مشاكل التخصيص

تمهيد:

وهي مشكلة تتضمن تخصيص عدد معين من موارد مؤسسة إنتاجية كانت أو خدمية على مختلف نشاطاتها بأقل تكلفة ممكنة أو بتعظيم الربح، وتستخدم الموارد استخداما عقلانيا كما تعتبر مشكلة التخصيص هي حالة خاصة لمشكلة النقل، وهي في الواقع أبسط البرامج الخطية.[25]

V .1.شروط مشكلة التخصيص

من شروطها نذكر:[26]

- يجب أن يتساوى عدد الأنشطة مع عدد عوامل الإنتاج التي نخصص لهابمعنى عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة؛
- كل عامل من عوامل الإنتاج يمكنه أن يقوم بأي نشاط من الأنشطة وإن اختلف تكلفة القيام بنشاط ما من عامل أخر غير أنه يكلف بنشاط واحد ومن ثم فإن كل نشاط سوف يخصص له عامل واحد من عوامل الإنتاج يعبر عنه One to One بمعنى وجود عدد n من العمال يتم تعيينهم في n من الوظائف، فإن العامل الذي أنجزه j بتكلفةC_{ij} ويمكنه فقط إنجاز واحد في الصف i وفي العمود j من الجدول، حيث يكون مجموع الصفوف والأعمدة 1 و تحتوي على أرقام فقط O ، 1 المشكلة تتمثل في تقليل مجموع جميع المنتجاتX_{ij} ، C_{ij}؛
- يمكن ان ينظر لمسألة التخصيص على أنها حالة خاصة من مسائل النقل حيث يمكن أن نمثل مجموعة النشاطات بمراكز الطلب أو المصب ونمثل الأفراد بمراكز المنبع أو الوجهة، بشرط أن يتواجد في كل مركز من المصب فرد واحد ومثله في كل مركز المنبع، نرمز الى كلفة نقل الفرد iللعمل في jبC_{ij}.

V .2.صياغة مشكلة التخصيص

مسألة التخصيص هي نموذج من نماذج البرمجة الخطية، تصاغ وفق الاتي:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} Cij\ Xij$$

[25] Arnold kaufmani, Méthode et modeles de la recherche opérationnelle, 2emmes édition , dunod paris , 1972,P.65.

[26] حاج صحراوي حمود ي ، مرجع سبق ذكره ص,129,

تخضع للقيود

$$\sum_{j=0}^{m} X\,ij = 1 \quad ; \quad j= 1,2,.....m$$

$$\sum_{i=0}^{n} X\,ij = 1 \; ; \quad i=1,2,.....n$$

قبل البحث عن الحل الأمثل لمسألة التخصيص، فإنه من الضروري التأكد من شرط التوازن أي ان تتساوى عدد عوامل الإنتاج مع عدد النشاطات، فإذا كان عدد الصفوف والأعمدة في مصفوفة التكلفة غير متساوٍ ، فإن مشكلة التخصيص تكون غير متوازنة، قد تسفر الطريقة المجرية عن حل غير صحيح إذا كانت المشكلة غير متوازنة ، وبالتالي، يجب موازنة أي مشكلة بتعيين أو بإضافة نقطة وهمية واحدة أو أكثر قبل حلها

V .3.الطرق المستخدمة في حل مشكلة التخصيص

هناك عدة طرق يمكن اعتمادها للوصول إلى الحل الأمثل وهي:

V .1.3طريقة العد الكامل

تعد أبسط الطرق في عملية حل نموذج التخصيص وذلك عندما لا يتجاوز عدد عوامل الإنتاج و النشاطات آو المهام ثلاثة لكل منهما، إذ ينم بموجبها تحديد البدائل لعملية التوزيع أي حساب جميع الاحتمالات الممكنة لعملية التخصيص، ويتم ظلك وفق قاعدة المفكوك Factorial على سبيل المثال إذا كانت رتبة المصفوفة تكاليف mxn فإن:[27]

$$n !=n(n-1)(n-2)..... 3(2)(1)$$

مثال V .1.3 :

مصنع يرغب في تعين 3 عمال (C,B,A) لإنجاز مهام هي (1،2،3) ، تكاليف انجاز هذه النشاطات موضحة في الجدول الموضح أدناه:

العمال /النشاط	x	y	w
A	15	14	8
B	4	9	7
C	7	2	9

[27] حسين ياسين طعمة، مروان محمد النسور، **بحوث العمليات**، مرجع سبق ذكره، ص، ص,218-220,

المطلوب : باستخدام طريقة العد الكامل أوجد الحل الأمثل لمسألة التخصيص العمال على المهام بحيث تكون التكاليف الكلية اقل ما يمكن

الحل:

- تحديد عدد البدائل الممكنة لعملية التخصيص كالأتي:

n=m=3

n != 3(2)(1)=6

عدد البدائل

X	Y	W
Y	W	X
Y	X	W
W	Y	X
X	W	Y
W	X	Y

نقوم بوضع البدائل الستة امام النشاطات الثلاثة كما هو موضح في الجدول الموالي، وتحسب التكاليف TCكالأتي:

البدائل	النشاط			مجموع تكاليف البدائل	التكلفة الكلية(TC)
	A	B	C		
1	X	Y	W	15+9+9	33
2	Y	w	x	14+7+7	28
3	y	x	w	14+4+9	27
4	w	y	x	8+9+7	24
5	x	w	y	15+7+2	24
6	w	x	y	8+4+2	14

من الجدول أعلاه نلاحظ أن البديل السادس هو البديل الافضل، كونه حقق أقل تكلفة وقدرها 14 وعليه فإن أفضل تخصيص هو:

- تعين العامل W للقيام بالنشاطA
- تعين العامل X للقيام بالنشاط B
- تعين العامل Yللقيام بالنشاط C

والتكاليف المحققة بموجب هذا التخصيص هي:

- TC= 8+4+2+14 UM

V .2.3.خطوات الطريقة المجرية مشكلة التخصيص

تتبع التقنية الخطوات التالية:[28]

- **خطوة 1:** نبحث عن أصغر قيمة للعنصر في كل صف من مصفوفة ذات تكلفةmxm ثم ننشئ مصفوفة جديدة بطرح أقل تكلفة في صفها من كل تكلفة ننتقل إلى إنشاء مصفوفة جديدة، حيث نبحث عن الحد الأدنى للتكلفة في كل عمود. وننشئ مصفوفة جديدة (تسمى مصفوفة التكلفة المخفضة) عن طريق طرح أقل تكلفة في عمودها من كل تكلفة؛
- **خطوة 2:** نقوم بشطب جميع الاصفار في مصفوفة التكلفة المخفضة بالحد الأدنى لعدد الخطوط (الأفقية أو الرأسية أو كليهما) إذا كان العدد المطلوب من الخطوط مساوي لعدد الأسطر، فسيكون الحل الأمثل متاحًا بين الاصفار المشطوبة في المصفوفة، إذا كان عدد الخطوط ا أقل من عدد الأسطر، فننتقل إلى الخطوة 3؛
- **خطوة 3:** نبحث عن أصغر عنصر غير صفري نعطيه اسم (k) في مصفوفة التكلفة المخفضة التي تكشفها الخطوط المرسومة في الخطوة 2. نطرح (k) من كل عنصر غير مشطب من مصفوفة التكلفة المخفضة ونضف(k) إلى كل عنصر شطب مرتين فنحصل على مصفوفة جديدة فإذا كان عدد الخطوط يساوي عدد الأسطر نكون قد تحصلنا على الحل الأمثل وإلا ترجع إلى الخطوة 2.

ملاحظات:

* لحل مشكلة التخصيص التي تكون دالة الهدف فيها من الشكل تعظيم، نقوم بضرب مصفوفة الأرباح في 1 ونحل المشكلة كمشكلة تدنئه التكاليف.

[28] علّي قاسم شتوان ,واخون، التخصّص الأمثل للمهام على الموارد المتاحة، المجلة الدولية المحكمة للعلوم الهندسية وتقنية المعلومات المجلد 4،العدد 1، ديسمبر 2017،ص.20.

مثال.V.2.3.أ : لدى شركة Machineco أربع آلات وأربع مهام يتعين انجازها مع شرط أن تكون لكل آلة مهمة واحدة.يظهر الوقت اللازم لإعداد كل آلة لإكمال كل مهمة في الجدول الموالي . تريد شركة Machineco تقليل وقت الإعداد الإجمالي اللازم لإكمال الوظائف الأربع. استخدم مسألة التخصيص لحل هذه المشكلة.

الآلات	المهام			
	T1	T2	T3	T4
A	14	5	8	7
B	2	12	6	5
C	7	8	3	9
D	2	4	6	10

حل المثال V .2.3.أ:

بتتبع خطوات طريقة المجرية

جدول رقم (1): مصفوفة التكلفة لشركة MACHINECO

الحد الأدنى للصف

14	5	8	7
2	12	6	5
7	8	3	9
2	4	6	10

جدول رقم (2): مصفوفة التكلفة بعد ما تم طرح من الصفوف الحد الأدنى منها

9	0	3	2
0	10	4	3
4	5	0	6
0	2	4	8

الحد الأدنى من تكلفة الأعمدة

جدول رقم (3): مصفوفة التكلفة بعدما تم طرح الحد الأدنى منها في كل عمود

9	0	3	0
0	10	4	1
4	5	0	4
0	2	4	6

الخطوة 3: نقوم بعملية الشطب وذلك بأقل عدد من الأسطر لتغطية جميع الأصفار وبالتالي، نتحصل على ثلاثة أسطر وهنا الشرط غير مكتمل، لنواصل البحث عن الحل الأمثل، أصغر عنصر غير مشطب يساوي نقوم بطرحه من كل عنصر غير مشطب في مصفوفة التكلفة المخفضة ونضيف 1 لكل عنصر مشطب مرتين، نشكل مصفوفة جديدة هي الموضحة في الجدول 4 ونقوم بتتبع نفس الخطوات السالفة

جدول رقم (4): أ ربعة خطوط مطلوبة؛ الحل الأمثل متاح

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

الحل الأمثل للتخصيص يكون عند: $X_{12}=1$و$X_{24}=1$و$X_{33}=1$و$X_{41}=1$

سلسلة V

تمرين 1:

يقومأربع مسافرين عبر الدراجات (X,Y,Z ;W) بزيارة أربعة مدن (W1، Z1 ، y1 ،)x1شرط عدم المكوث في المدينة مرتين في نفس ؛ يحدد الجدول تكلفة التوصيلات

	X	Y	Z	W
X1	0	12	25	23
Y1	12	0	17	14
Z1	25	17	0	30
W1	25	14	30	0

المطلوب اوجد مسار المسافرين الذي يحقق أقل تكلفة؟

تمرين 2

شركة صناعية ترغب في تخصيص أربعة A,B C,D تقنين على أربع آلات إنتاجية x,y,w,z ، الأرباح المحققة عن انجاز التقنين لأنشطتهم مدونة في الجدول الأتي:

	X	Y	W	Z
A	5	14	3	4
B	8	6	17	0
C	4	10	0	6
D	13	5	8	9

تمرين 3

مصنع لتصنيع السيارات طلب منه تسليم سيارات من طراز AA إلى 4 وكلاء من ثلاثة فروع إنتاجية، يتوفر المصنع على 80، 40 ،100 وحدة على التوالي بينما تبلغ طلبات الزبائن على: 40، 75، 25، 60 الوكيل الأول، الثاني، والثالث، والرابع على التوالي، تكاليف توصيل السيارات، بمئات الدينار، معطاة حسب الجدول الموالي:

	I	II	III	V
1	4	2	6	4
2	8	6	10	8
3	6	4	8	6

المطلوب هو: البحث عن خطة التسليم المثلى؟

VI. البرمجة غير الخطية

Non-Linear Programming

تمهيد

تعد البرمجة الرياضية اللاخطية أكثر شمولية من البرمجة الخطية، إذ لا تشترط أن يكون تابع الهدف خطياً (من المرتبة الأولى)، كما أنها تكوّن أيضاً جزءاً هاماً واساسياً من بحوث العمليات، وانتشرت تطبيقات هذه البرمجة في كل فروع العلم من هندسة وفيزياء وكيمياء وجيوفيزياء...الخ. يمكن الاستفادة من البرمجة اللاخطية أيضاً في مواضيع التنبؤ والتقدير في الإحصاء التطبيقي.

إن مسائل البرمجة غير الخطية تتألف أيضاً، كما هو الحال في مسائل البرمجة الخطية، من تابع الهدف؛ الذي ربما يكون خطياً أو لا خطياً وتوابع قيود رياضية، ربما تكون خطية أو لا خطية أيضاً.

1.VI مفاهيم عن البرمجة غير الخطية

1.1.VI تعريف البرمجة غير الخطية

يقال أن الدالة $f(X_1, ..., X_n)$ دالة غير خطية إذا لا يمكن تمثيلها على الصورة:

$$f(X_1, ..., X_n) = C_1 X_1 + C_2 X_2 + ... + C_n X_n$$

بحيث أن $C_1, C_2, ... C_n$ هي ثوابت

لأي دالة غير خطية $f(X_1, ..., X_n)$ وثابت b فإن:

$$F(X_1, ..., X_n) \geq b \text{ أو } f(X_1, ..., X_n) \leq b$$

تسمى متراجحة غير خطية،

و $f(X_1, ..., X_n) = b$ تسمى معادلة غير خطية.

2.1.VI أشكال البرامج غير الخطية

هناك أشكال كثيرة من البرامج غير الخطية، مثل:

- إذا كانت دالة الهدف غير خطية و /أو يوجد قيد غير خطي فإنه لدينا برنامج غير خطي؛
- إذا كان لدينا برنامج غير خطي بحيث أن دالة الهدف دالة تربيعية والقيود خطية فإنه يسمى برنامج تربيعي(**Quadratic Programming**)
- عندما لا يوجد قيود في البرنامج الرياضي فإنه لدينا برنامج غير خطي وغير مقيد؛
- مهم جدا نوع الدوال في البرامج غير الخطية، مثل التحدب والتقعر والاتصال والقابلية للاشتقاق..

3.1.VI الصياغة العامة للبرمجة غير الخطية

يمكن التعبير عن مشكلة البرمجة غير الخطية العامة ((NLPعلى النحو التالي:

أوجد قيم متغيرات القرار

$$X_1, X_2, . . , X_N$$

بحيث:

$$\text{Max (Min) } z = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

$$\text{قيد1} \quad . \; g_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) \; (\leq, =, \text{أو} \geq) \; b_1$$

$$\text{2 قيد} \quad . \; g_2(X_1, X_2, \ldots, X_N) \; (\leq, =, \text{أو} \geq) \; b_2 \; \textbf{()}$$

—

$$g_m(X_1, X_2, \ldots, X_N) \; (\leq, = , \text{ أو } \geq) \; b_m$$

كما هو الحال في البرمجة الخطية، $f(X_1,X_2,.....X_3)$، هي دالة الهدف في البرمجة غير الخطية، ويعتبر البرنامج غير خطي بقيود والمعرفة ب:

$$g_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) \; (\leq, =, \text{أو} \geq) \; b_1$$

$$g_m(X_1, X_2, \ldots, X_n) \; (\leq, =, \text{أوr} \geq) \; b_m$$

بينما بدون قيود تعتبر معالجة غير مقيدة

مجموعة كل النقاط $(X_1,X_2.....,X_n)$بحيث تكون xi عددًا حقيقيًا من المجموعة R^n وبالتالي ، R^1 هي مجموع جميع الأعداد الحقيقية. تسمى المجموعات الفرعية لـ R^1 بالفواصل الزمنية ذات أهمية

$[a, b]$ من أجل x تحقق $a \leq x \leq b$

$[a, b)$من أحل x تحقق $a \leq x \leq b$

$(a, b]$ من أجل x تحقق $a \leq x \leq b$

(a, b)من أجل x تحقق $a \leq x \leq b$

$[a, \infty)$من أجل x تحقق $a \leq x$

$(\_\text{-}\infty, b]$ من أجلxتحقق $x \leq b$

2.VI الدوال المحدبة والمقعرة

الدوال المحدبة والمقعرة دورًا مهمًا للغاية في الدراسة غير الخطية لمشاكل البرمجة.

نفترض أن $f(X_1,X_2,.....,X_n)$، هي دالة معرّفة لجميع النقاط $(X_1,X_2...X_n)$ في مجموعة محدبة S^t

تعريف 1: الدالة $f(X_1,X_2,.....,X_n)$هي دالة **محدبة** على مجموعة المحدبة S إن وجدت

بحيث : $X'' \epsilon S$ و $X' \epsilon S$

$$f[cx' \_ (1 \_ c)\, x''] \geq cf(x') + (1 - c) f(x'')$$

بحيث:

$$0 \leq C \leq 1.$$

تعريف 1: الدالة $f(x1,x2,.....,Xn)$هي دالة **مقعرة** على مجموعة المحدبة S إن وجدت

بحيث : $X'' \epsilon S$ و $X' \epsilon S$

$$f[cx' \_ (1 \_ c)\, x''] \leq cf(x') + (1 - c) f(x'')$$

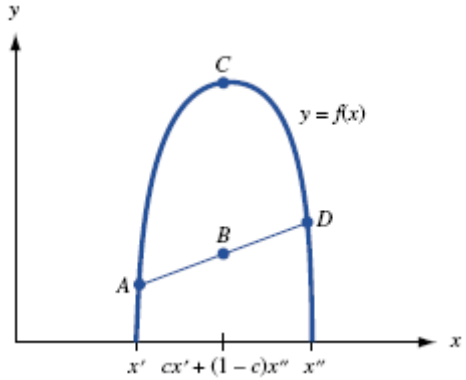
بحيث:

$$0 \le c \le 1$$

من (3) و (4)، نرى أن $f(x_1, X2, \ldots X_n)$ هي دالة محدبة فقط إذا وفقط إذا كانت $-f(x1, X_2 \ldots, X_n)$ دالة مقعرة، والعكس بالعكس.

لفهم أكثر هذه التعريفات، نفترض $f(x)$ تكون دالة لمتغير واحد. من الشكل1 والمتباينة (2)، نجد أن $f(x)$ محدبة (Convex) اذا وافقط إذا كان الخط المستقيم الرابط بين أي نقطتين على رسم الدالة أو المنحنى يقع فوق الرسم.

شكل (1): الدوال المحدبة



النقطة A هي: $A = (x', f(x'))$

النقطة D هي: $D = (x'', f(x''))$

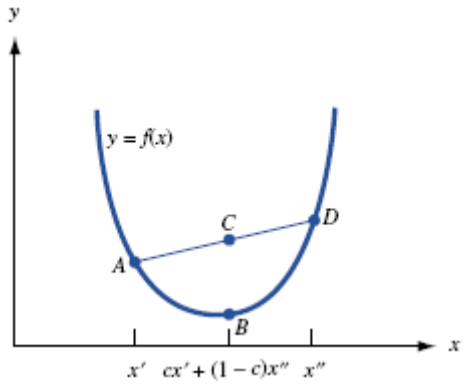
النقطة C هي: $C = (cx' + (1-c)\,x,\ cf(x') + (1-c)f(x''))$

النقطة B هي: $B = (cx' + (1-c)\,x'',\ f(cx' + (1-c)\,x''))$

الدالة من الشكل: $f(cx' + (1-c)\,x'') \le cf(x') + (1-c)f(x'')$

وبالمثل، يوضح الشكل 2 والمتباينة (3) أن $f(x)$ دالة مقعرة (Concave) إذا وفقط إذا كان الخط المستقيم الذي يربط أي نقطتين على المنحنى تقع تحت الرسم أو المنحنى

شكل (2): الدوال المقعرة



النقطة Aهي: $A=(x', f(x'))$

النقطة D هي: $D=(x'', f(x''))$

النقطة C هي: $C=(cx'+(1-c)x,\ cf(x')+(1-c)f(x''))$

النقطة B هي: $B=(cx'+(1-c)x'',\ f(cx'+(1-c)x''))$

من الشكل: $f(cx'+(1-c)x'')\le cf(x')+(1-c)f(x'')$

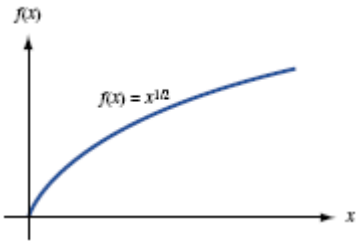
مثال2.VI

لتكن الدوال التالية:

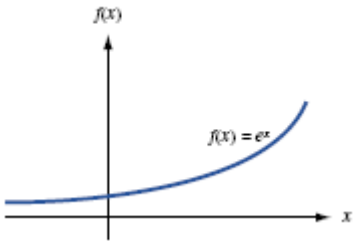
من أجل $x\ge 0$، $f(x)=x2$ و $f(x)=e^x$ و $f(x)=x^{1/2}$

حل لثال2.VI

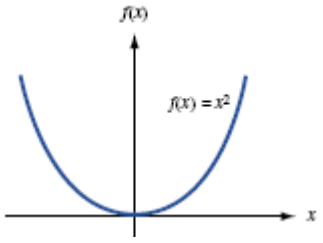
نرسم اشكال الدوال الثلاثة فيتبين لدينا نوع الدوال



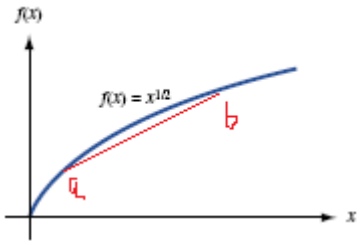
دالة مقعرة

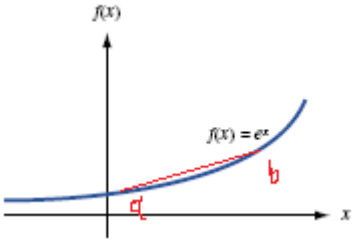


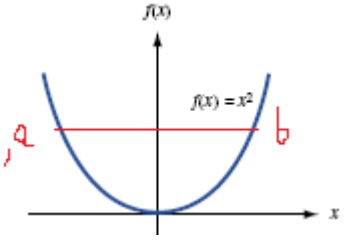
دالة محدبة



دالة محدبة







VI.1.2.بعض الخواص

VI.1.1.2مجموع دوال محدبة

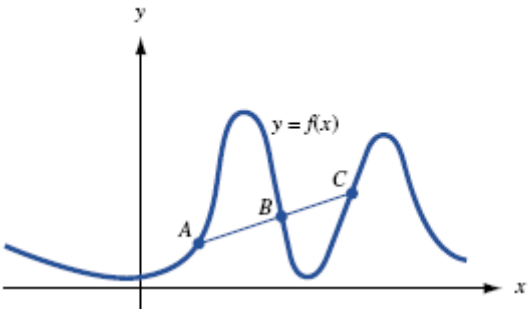
من المثال السابق يمكن أن نستنتج أن مجموع دالتين محدبتين يعطينا دوال محدبة، ومجموع دالتين مقعرتين يعطينا دالة مقعرة. وهكذا،

$f(x)=e^{x}+f(x)=x^{2}$ ← دالة محدبة

VI.1.2. 2.دوال ليست بمحدبة ولا بمقعرة

من الشكل أسفله نلاحظ أن القطعة المستقيمة [AB] تقع أسفل $y=f(x)$، والقطعة المستقيمة [BC] تقع فوق $y=f(x)$، وبالتالي $f(x)$ليست بدالة محدبة أو مقعرة

شكل رقم(3) :دوال ليست بمحدبة ولا بمقعرة



VI.1.2.3.دوال محدبة ومقعرة

لتكن الدالة الخطية من الشكل $f(x)=ax+b$ يمكن القول أن هذه الدالة هي دالة محدبة ودالة مقعرة. هذا يتبع من

$$f[cx'+(1-c)x''] = a[cx'+(1-c)x''] + b$$
$$= c(ax'+b) + (1-c)(ax''+b)$$
$$= cf(x)+(1-c)f(x'')$$

من التعريفين (1)، (2) نجد ان المعادلتين متساويتين ومنه $f(x)=ax+b$ هي دالة محدبة

VI.2.2.نظريات على الدوال المحدبة والمقعرة

قبل مناقشة كيفية تحديد ما إذا كانت دالة معينة محدبة أم مقعرة، لابد من إثبات نتيجة توضح أهمية نظريات على الدوال المحدبة والمقعرة:[29]

- ☒ **نظرية 1:** بافتراض البرنامج الخطي NPL_2 يأخذ شكل مسألة تعظيم ونفترض ان منطقة الحلول الممكنة التي تنتمي الى المجموعة Sهي مجموعة محدبة، إذا كانت f (x) دالة محدبة في المجموعة Sفإن كل قيمة عظمى من المنطقة في NPL_2هي الحل الأمثل له.
- ☒ **نظرية 2:** بافتراض البرنامج الخطي NPL_2 يأخذ شكل مسألة تصغير، ومع افتراض منطقة الحلول الممكنة في المجموعة S لـ (2) NLPهي مجموعة محدبة، إذا كانت f (x) محدبة على S، إذن أي حد أدنى محلي لـ (2) NLPهو الحل الأمثل لهذه البرمجة غير الخطية.
- ☒ **نظرية 3:** نفترض أن $f''(x)$ موجودة لكل X في مجموعة محدبة S . نقول أن f (x) هي دالة محدبة في S. إذا وفقط إذا كانت $f''(x) \geq 0$ لكل X في S
- ☒ **نظرية 4 :** نفترض أن $f''(x)$ موجودة لكل X في مجموعة محدبة S . نقول أن f (x) هي دالة مقعرة في S. إذا وفقط إذا كانت $f''(x) \leq 0$ لكل X في S

مثال2.2.VI.

حدد ما إذا كانت الدوال المدونة أدناه محدبة أم مقعرة

$f(x) = x^2$ هي دالة محدبة عند S=R1

$f(x) = e^x$ هي دالة محدبة عند S=R1

$f(x) = x^{1/2}$ هي دالة مقعرة عند S=(0,∞)

$f(x) = ax + b$ هي دالة محدبة ومقعرة في نفس الوقت في S=R1

حل مثال.2.2.VI:

$f(x) = x^2$ إذن f (x) هي دالة محدبة عند $S=R^1$ ← $f''(x) = 2 > 0$

$f(x) = e^x$ إذن f (x) هي دالة محدبة عند $S=R^1$ ← $f''(x) = e^x > 0$

$f(x) = x^{1/2}$ أذن f (x) هي دالة مقعرة عند S=(0,∞) ← $f''(x) = -x^{-3/2}/4 \leq 0,$

$f(x) = ax+b$ إذن f (x) دالة مقعرة ومحدبة عند $S=R^1$ ← $f''(x) = 0,$

[29]Sonia Radjef, Optimisation : Cours et exercices, polycopié,Universit_e des Sciences et de la Technologie d'Oran.Mohamed Boudiaf.Facult_e des Math_ematiques et InformatiqueD_epartement des Math_ematiques,2019,p.p.13-17.

VI.3.2.الدوال المحدبة والمقعرة لـ n متغير

كيف يمكننا تحديد ما إذا كانت الدالة $f(X_1,X_2,.....X_n)$، لمتغيرات n محدبة أم مقعرة على مجموعة $S=R^n$؟ نفترض أن $f(X_1,X_2,.... ,X_n)$ لها رتبة ثانية مستمرة المشتقات الجزئية. قبل ذكر المعيار المستخدم لتحديد ما إذا كانت $f(X_1,X_2,.....X_n)$ محدبة أو مقعرة، نحتاج إلى ثلاثة نظريات

☒ **نظرية 1:** حسب Hessian فإن $f(X_1,X_2,..... Xn)$ هي مصفوفة n x n التي تأخذ مدخلاتها ij فيه العلاقة التالية :

$$\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$$

الشكل العام لمصفوفة Hessian يأخذ الشكل التالي:

Hessian Matrix $(\nabla^2 f(x)$ - Symmetric)

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Note:} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

لنفترض $H(x_1,X_2,....,X_n)$، تشير إلى قيمة Hessian عند $(X_1,X_2,.....,X_n)$فمثلا،

$$f(X_1, X_2) = X_1^{\,3} - 2X_1X_2 + X_2^{\,2}$$

إذن

$$H(X_1, X_2) = \begin{bmatrix} 6X_1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

☒ **نظرية 2 :** المختصر الأساسي الرئيسي لمصفوفة nxn هو محدد لمصفوفه nxn،

لنفرض Aمصفوفة $m \times n$ وkعدد صحيح موجب لا يكبر m و n.المختصر $k \times k$ لـ Aهو محدد لمصفوفة $k \times k$مشتقة من Aعن طريق حذف $m - k$ صف و $n - k$عمود,

المختصر الأساسي الرئيسي لمصفوفة Hessian Hk $(X_1,X_2,.....Xn)$ التي يتم تقييمها عند نقطة $(X_1,X_2,....X_n)$.

وبالتالي، إذا كانت $f(X_1,X_2) = X_1^{\,3}+2X_1X_2+2X_2^{\,2}$

إذن:

$H_1(X_1, X_2) = 6X_1$

$H_2(X_1 ،X_2) = 6X_1(2) - 2(2) = 12X_1 - 4$

☒ **نظرية3:** نفترض أن $(X_1, X_2, \ldots X_n)$لها مشتقات جزئية مستمرة من الدرجة الثانية لكل منها النقطة $X = (X_1, X_2, \ldots X_n) \in S$ إذن$f(X_1, X_2, \ldots X_n)$، هي دالة محدبة على S إذا وفقط إذا كان كل مختصر أساسي لـ H لكل $X \in S$ غير سالب.

☒ **نظرية 4:** نفترض أن $f(X_1, X_2, \ldots X_n)$لها مشتقات جزئية مستمرة من الدرجة الثانية لكل منها النقطة $X = (X_1, X_2, \ldots X_n) \in S$دالة مقعرة على S إذا وفقط إذا كانت لكل $X \in S$ و $k = 1,2,3,\ldots n$، جميع المختصرات الأساسيه غير صفرية لديهم نفس علامة $(-1)^k$

من خلال تطبيق النظريات الثلاثة المذكورة أعلاه، يمكن لمصفوفة Hessian أن تُستخدم لتحديد ما إذا كانت $f(X_1, X_2, \ldots X_n)$دالة محدبة أو مقعرة من اجل $S \in R^2$

مثال 1.3.2.VI

بيّن أن $f(X) = X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2$دالة محدبة من أجل $S \in R^2$

حل مثال 1.3.2.VI

شكل مصفوفة Hessian هي:

$$H(x1, x2) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

أول مختصر رئيسي من Hessian هي المدخلات القطرية (كلاهما يساوي $2 \geq 0$)، المختصر الأساسي الثاني هو $2(2) - 2(2) = 0 \leq 0$. لأي نقطة نجد أن جميع المختصرين الأساسيين من H غير سالبة، لذا وكما توضح النظرية 3 فإن $f(x_1, X_2)$ هي دالة محدبة في R^2

مثال 2.3.2.VI

بيّن أن $f(X) = -X_1^2 - 2X_1X_2 - 2X_2^2$دالة مقعرة من أجل $S \in R^2$

حل مثال 2.3.2.VI

شكل مصفوفة Hessian

$$H(X_1, X_2) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

أول مختصر رئيسي من Hessian هي المدخلات القطرية (2-و4 -) كلاهما غير إيجابي. المختصر الرئيسي الثاني هو محدد $H(X_1, X_2)$، ويساوي0<7= (-1) (-1) – (-4)2-. بالتالي $f(X_1,X_2)$ هي دالة مقعرة في R^2

مثال 3.3.2.VI

بيّن من أجل $S=R^3$ أن الدالة $f(X_1,X_2,X_3)$ هي دالة مقعرة؟

$$f(X_1,X_2,X_3)= X_1^2+X_2^2+ 2X_3^2-X_1X_2-X_2X_3- X_1X_3$$

حل مثال 3.3.2.VI

نشكل مصفوفة Hessian

$$H(X_1, X_2,X_3)=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

2

-

بحذف الصف والعمود 1 و 2 من Hessian، نحصل على المختصر الرئيسي من الرتبة الأولى (4 >0)؛

بحذف الصف والعمود 1 و3من Hessian، نحصل على المختصر الرئيسي من الرتبة الأولى (2> 0)؛

بحذف الصف والعمود 2 و3 من Hessian نحصل على المختصر الرئيسي من الدرجة الأولى (2> 0)؛

بحذف الصف 1 والعمود 1 من Hessian، نحصل على المختصر الرئيسي من الدرجة الثانية.

* بحذف الصف 1 والعمود 1 من Hessian، نحصل على المختصر الرئيسي من الدرجة الثانيةالتالي:

$$\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = 7 > 0.$$

* بحذف الصف 2 والعمود 2 من Hessian، نحصل على المختصر الرئيسي من الدرجة الثانية

$$\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = 7 > 0.$$

* بحذف الصف 3 والعمود 3 من Hessian، نحصل على المختصر الرئيسي من الدرجة الثانية

$$\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 > 0.$$

المختصر الرئيسي من الدرجة الثالثة هو نفسه_مصفوفة Hessian توسع بواسطة العوامل المساعدة للصف 1، نجد المحتصر الرئيسي من الرتبة الثالثة

$2[(2)(4) - (-1)(-1)] - (\_1)[(\_1)(4) - (-1)(-1)] + (-1)[(-1)(-1) - (-1)(2)] = 14 - 5 - 3 = 6 > 0.$

من أجل كل قيم (X_1, X_2, X_3) نجد أن كل المختصرين الرئيسيين في Hessian غير سالبين ، هذا ما يجعل الدالة $f(X_1,X_2,X_3)$ دالة محدبة في R^3

3.VI.حل البرمجة غير الخطية NLPs بمتغير واحد

في هذا القسم، سنشرح كيفية حل البرمجة غير الخطية من شكل:[30]

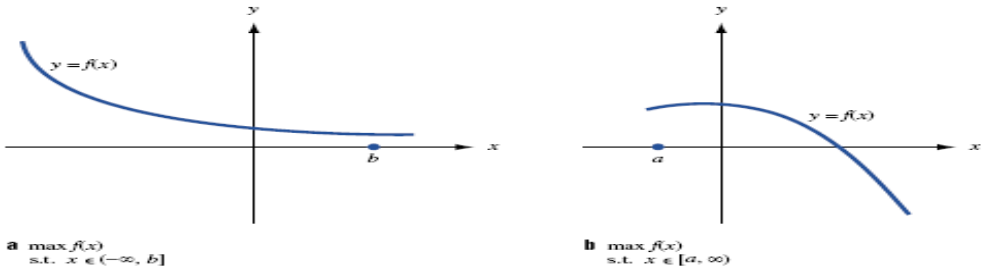
$$\max \text{ (or min) } f(x)$$

$$\text{s.t. } x \in [a, b]$$

إذا كانت $b=\infty$، فإن منطقةالحلول الممكنة لـ NLP_1هي$a \leq X$، وإذا كانت $a=\infty$، إذن منطقة الحلول الممكنة لـ (1) هي$a\ x \leq b$.

لإيجاد الحل الأمثل لـ NLP_1، نبحث عن كل القيم العظمى المحلية أو الصغرى. النقطة التي تمثل الحد الأقصى المحلي أو الحد الأدنى المحلي لـ(NLP_1) يسمى الحد الأعظمي المحلي. لذا فإن الحل الأمثل لـNLP_1 هو الحد الأقصى أو الأدنى المحلي الذي له أكبر أو أصغر قيمةللدالة f(X). بالطبع، إذا كان ($a=-\infty$)أو ($b=\infty$)، إذن(NLP_1) قد لا يكون لديه الحل الأمثل انظر الشكل أدناه

شكل (4): البرمجة غير الخطية (NLPs) مع عدم وجود حل



هناك ثلاثة أنواع من النقاط لـ(NLP1) يمكن أن يكون لها حد أعلى أو أدنى محلي غالبًا ما تسمى هذه النقاط بالمرشحين النهائيين

* حالة 1: النقاط حيث $a< x< b$ و $f'(x) = 0$[تسمى نقطة ثابتة من $f(x)$]
* حالة 2: النقاط حيث لا توجد $f(x)$

[30] Wayne L. Winston ,Operations Wayne L. Winston ,Operations Research: applications and algorithms,op cit,p. p.637-641.

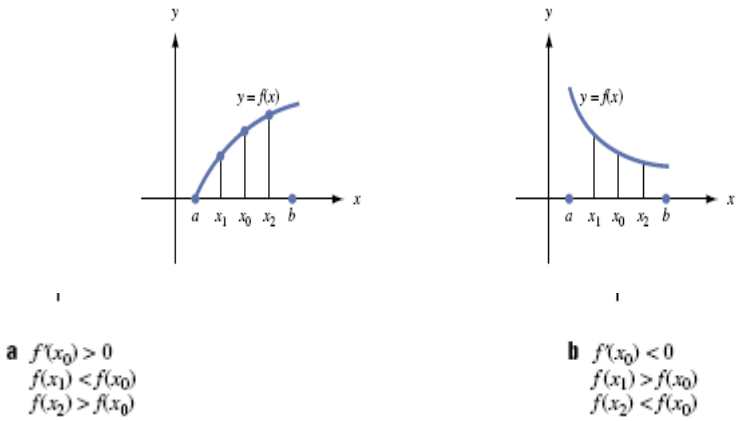
* حالة 3: a و b من الفترة [a ، b].

1.3.VI.النقاط حيث a< x< b و f′ (x) =0

افترض أن a< x< b، و $f'(x_0)$موجود

- إذا كانت X_0 هي قيمة عظمى محلية أو قيمة دنيا محلية، إذن$f'(X_0) = 0$ هو ما يوضحه الشكل5(a,b) أدناه
- من الشكل (a) نلاحظ أنه إذا كانت$f'(X_0) > 0$ يعني هناك نقطتان X_1 و X_2 بالقرب من X_0 حيث $f(X_1) < f(X_2)$ $f(X_0).(X_0) < f$ فإذا كانت $f'(x0) > 0$ ، لا يمكن أن تكون X_0 قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية وبالمثل ومن الشكل (b) إذا كانت $f'(x0) < 0$، فلا يمكن أن تكون X_0 قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية.

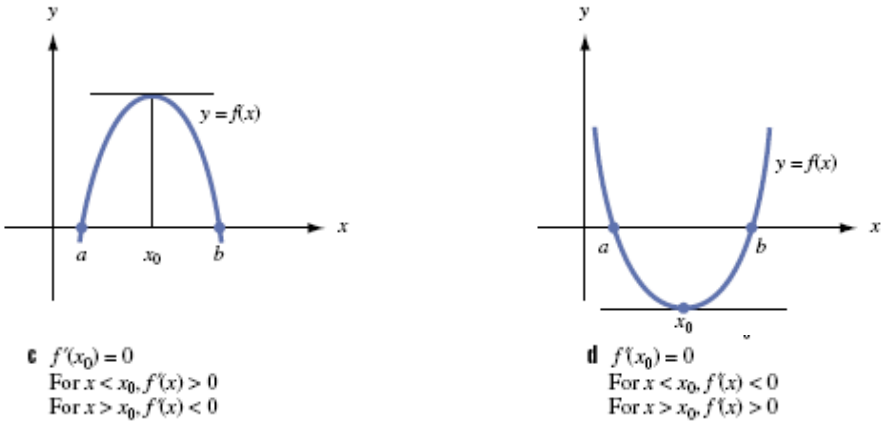
شكل (5): حل البرمجة غير الخطية (NLPs) بمتغير واحد



X_0 ليست حدًا أقصى محلي

- من الشكل6 (c,d) نلاحظ أن $f'(X_0) = 0$، وعليه يمكن أن تكون X_0 قيمة قصوى محلية أو قيمة صغرى محلية. من الشكل(c)، نلاحظ أنه إذا تغيرت f′ (x) من الموجب إلى السالب عندما نمر عبر X_0، فإن X_0 هي قيمة عظمى محلية. وهكذا، إذا كانت $f''(X_0) < 0$، X_0 قيمة عظمى محلية. وبالمثل، من الشكل(d) نلاحظ أنه إذا تغيرت f′ (X) من سالب إلى موجب عندما نمر عبر X_0، فإن X_0 هي قيمة صغرى محلية. وبالتالي، إذا كانت $f''(X_0)>0$، X_0 هو الحد الأدنى المحلي؛

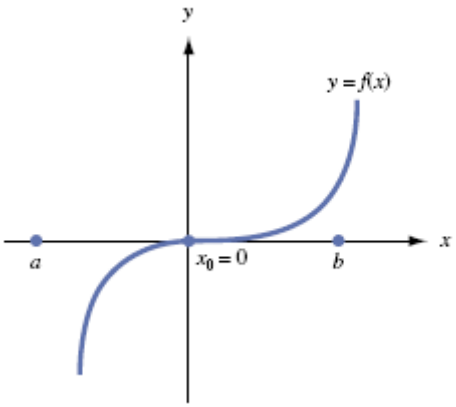
شكل (6): حل البرمجة غير الخطية (NLPs) بمتغير واحد



X_0 هي قيمة قصوى محلية أو قيمة صغرى محلية

يوضح الشكل الموالي أن $f'(X_0)$ يمكن أن تساوي صفرًا دون أن تكون X_0 حد أقصى محلي أو حد أدنى محلي .

شكل (7): حل البرمجة غير الخطية (NLPs) بمتغير واحد



خلاصة

☑ إ ذا كانت $f'(X_0) = 0$ و $f''(X_0) < 0$، فإن x_0 هي قيمة عظمى محلية. إذا كانت $f'(X_0) = 0$ و $f''(X_0) > 0$

إذن x_0 هو قيمة صغرى محلية

☑ إذا كانت $f'(X_0) = 0$

- ✓ إذا كان أول مشتق غير صفري عند x_0 هو مشتق بترتيب فردي [$f^3(X_0)$، $f^5(X_0)$، وهكذا]، فإن X_0 ليست قيمة عظمى محلية أو قيمة دنيا محلية؛
- ✓ إذا كان أول مشتق غير صفري عند X_0 موجبًا ومشتقًا ذو ترتيب زوجي، فإن X_0 هي القيمة الدنيا المحلية؛
- ✓ إذا كان أول مشتق غير صفري عند X_0 سالبًا ومشتقًا زوجيًا، فإن X_0 هو القيمة العظمى المحلية.

VI.2.3.حالة النقاط التي لا توجد فيها f (x)

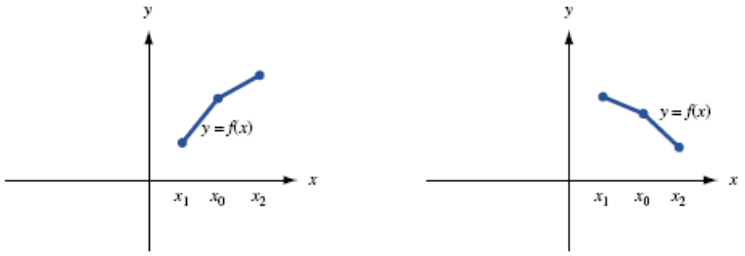
إذا لم يكن لـ f(x) مشتق عند X_0، فيمكن أن تكون X_0 قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو

لا تكون (انظر الشكل أدناه. في هذه الحالة، نحدد ما إذا كانت X_0 هي قيمة عظمى محلية أم قيمة a الحد الأدنى المحلي عن طريق التحقق من قيم f (X) عند النقطتين $X_1 < X_0$ و $X_2 > X_0$ بالقرب من X_0

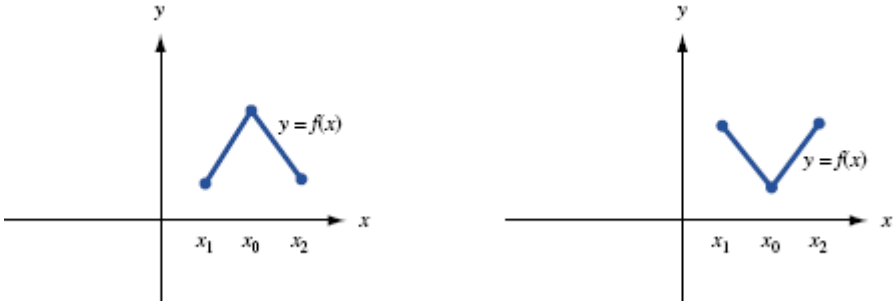
هناك أربع حالات محتملة نلخصها في الجدول(1) أدناه,

شكل (8) يوضح كيف نحدد ما إذا كان X_0 يشكل القيمة العظمى المحلية أو القيمة الصغرى المحلية مع عدم وجود $f(X_0)$

شكل (8): تحديد X_0 بدون وجود $f(X_0)$



X_0 ليست نهاية قصوى محلية



X_0 هي القيمة الصغرى المحلية

X_0 هي القيمة العظمى المحلية

<u>جدول(1):</u> تحديد ما إذا كانت النقطة التي لا توجد فيها f (x) هي قيمة قصوى محلية أو حد أدنى محل

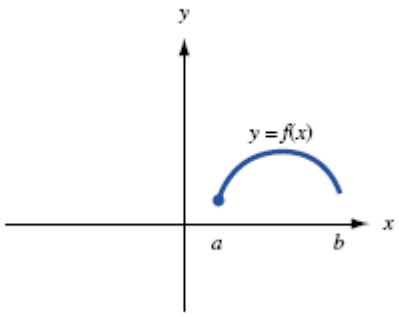
كيفية تحديد ما إذا كانت النقطة التي لا توجد فيها f (x) هي قيمة قصوى محلية أو حد أدنى محلي	
ليست نهاية قصوى محلية	$f(x_0) > f(x_1); f(x_0) < f(x_2)$
ليست نهاية قصوى محلية	$f(x_0) < f(x_1); f(x_0) > f(x_2)$
نهاية قصوى محلية	$f(x_0) \geq f(x_1); f(x_0) \geq f(x_2)$
نهاية قصوى محلية	$f(x_0) \leq f(x_1); f(x_0) \leq f(x_2)$

VI.3.3.حالة النقطتين "a" و "b" من [a ، b]

من الشكل () أدناه نستخلص ما يلي:

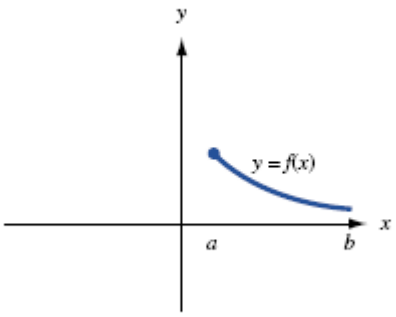
- ✓ إذا كانت $f'(a)>0$ ، فإن a هي قيمة صغرى محلية.
- ✓ إذا كانت $f'(a)<0$ ، فإن a هي قيمة عظمى محلية.
- ✓ إذا كانت $f'(b)>0$ ، فإن b هي قيمة عظمى محلية.
- ✓ إذا كانت $f'(b)<0$ ، فإن b هي قيمة صغرى محلية.

شكل (9):



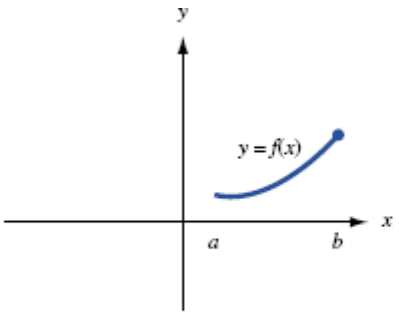
a $f'(a) > 0$

a نهاية صغرى محلية



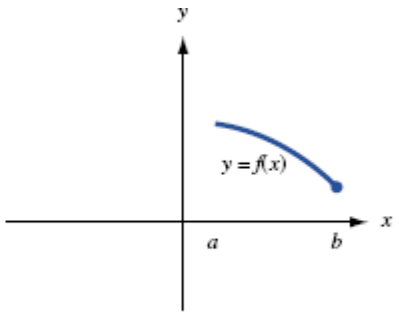
b $f'(a) < 0$

a نهاية عظمى محلية



c $f'(b) > 0$

b نهاية صغرى محلية



d $f'(b) < 0$

b نهاية عظمى محلية

مثال VI.3.3. 1

يكلف منتج 5 وحدات نقدية لإنتاج وحدة واحدة من المنتج، إذا أنتج هذا المنتج X وحدة من المنتج، وتمكن من بيع كل منها مقابل10 - Xوحدات نقدية $(0 \le X \le 10)$

لتعظيم الربح، كم يجب أن ينتج المنتج؟

حل مثال VI. 3.3.1.

لنفرض أن P (x) هي ربح المنتج إذا كان ينتج x من الوحدات. ثم

$$P(x) = x(10 - x) - 5x = 5x - x^2 \qquad (0 \le x \le 10)$$

وبالتالي، يريد الممنتج حل البرمجة غير الخطية التالية:

$$\text{Max } P(x)$$

$$\text{s./c. } 0 \le x \le 10$$

نقوم الآن بتصنيف جميع النقاط الممكنة

حالة 1:

$$P'(x) = 5 - 2x$$

$$P'(2.5) = 0 \qquad \text{لذلك}$$

$$P''(x) = -2 \qquad \text{لأن} \quad ،$$

إذن X= 2.5 هي قيمة قصوى محلية تحقق ربحًا قدره P (2.5) = 6.25

- ✓ **حالة 2:** P′ (x) موجودة لجميع النقاط في [0، 10]، لذلك لا توجد نقاط مرشحة.
- ✓ **حالة 3:** a=0، ومنه P′ (0)= 5> 0 ، لذا فإن a= 0 هي قيمة صغرى محلية

b=10، ومنه p′(10)=-15<0 إذن b 10 هو قيمة صغرى محلية

وبالتالي، فإن X= 2.5 هو الحد الأقصى المحلي الوحيد. هذا يعني أن ربح المنتج تم تعظيمه باختيار x= 2.5.

لاحظ أن P"(x)=- 2 لجميع قيم Xمايوضح أن P (x) دالة مقعرة. ومنه فالحد الأقصى محلي لـ P (x) هو الحل الأمثل لـ NLP

مثال VI.3.3.2

لتكن:

$$f(x) = 2 - (x - 1)^2 \qquad 0 \le x < 3$$

$$f(x) = -3 + (x\_4)^2 \qquad 3 \le x \le 6$$

نعطي:

$$\text{Max } f(x)$$

$$\text{s.c. } 0 \le x \le 6$$

المطلوب: حل البرنامج غير الخطي بإيجاد النقاط الصغرى والعظمى المحلية؟

حل مثال VI.3.3.2

✓ **حالة 1 :**

من أجل $0 \le x < 3$ ← $f'(x) = -2(x-1)$ و $f''(x) = -2$،

من أجل $3 \le x \le 6$ ← $f'(x) = 2(x-4)$ و $f''(x) = 2$

نجد أن: $f'(1) = f'(4) = 0$

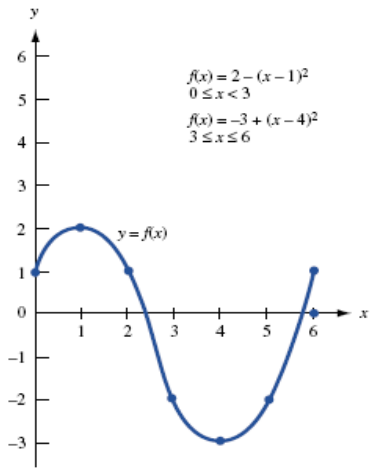
$f''(1) < 0$ ومنه $x = 1$ هي قيمة قصوى محلية

ولأن $f''(4) > 0$، فإن $x = 4$ هي قيمة صغرى محلية.

✓ **حالة 2:**

نلاحظ من الشكل أدناه أن $f(X)$ ليس لها مشتق عند $X=3$ لأن x أقل قليلاً من 3، $f'(X)$ قريبة من -4، وبالنسبة إلى X أكبر قليلاً من 3، تكون $f'(x)$ قريبة من -2. لأن

$f(2.9) = -1.61$، و $f(3) = -2$ ، و $f(3.1) = -2.19$ ، $X = 3$ ليست قيمة عظمى محلية.



حالة 3: لأن $f'(0) = 2 > 0$، $x = 0$ هي قيمة صغرى محلية. لأن $f'(6) = 4 > 0$ ، و $x = 6$ هي القيمة الصغرى المحلية. وبالتالي، في المجال [0، 6] ، $f(x)$ لها حد أقصى محلي عند $X = 1$ و $X = 6$. لأن $f(1) = 2$ و $f(6) = 1$ ، نجد أن الحل الأمثل لـ NLP يحدث لـ $X = 1$

VI.4. أمثلية برنامج غير خطي غير مقيد مع عدة متغيرات

نناقش الآن كيفية العثور على حل أمثل (إن وجد) أو حد أقصى محلي لاتباع البرمجة غير الخطية غير المقيدة:[31]

[31] Wayne L. Winston, Operations Research :Applications And Algorithms,opcit, p.655.

$$\text{NLP (w)} \quad \text{Max (min)} \ f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

$$\text{،S.C. } (X_1, X_2, \ldots, X_n) \in R^n$$

نفترض أن المشتقات الجزئية الأولى والثانية لـ $f(X_1,X_2,\ldots X_n)$ موجودة وهي مستمر في جميع النقاط. يترك

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_t}$$

يكون المشتق الجزئي لـ $f(X_1,X_2,\ldots. X_n)$ بالنسبة إلى xi ، مقدرة عند X^-

الشرط ضروري من أجل $(X^-_1, X^-_2,\ldots X^-_n)$ كي تكون أقصى حد محلي لـ NLP (W) معطى في النظرية الاتية

نظرية أ: إذا كانت X^- هي أقصى حد محلي لـ (أ) ، إذن

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_t} = 0$$

تعريف: وجود النقطة X^- $\partial f(X^-)/\partial X_i=0$ من أجل i=1,2,.... n تسمى بالنقطة الثابتة لـ f

نظرية ب:

* إذا كان $H_k= (X^-)> 0$ ، $k =1,2,\ldots n$ ، فإن النقطة الثابتة X^- هي الحد الأدنى المحلي لـ لبرمجة غير الخطية NLP (W).
* إذا كانت $k= 1,2,\ldots.n$ ، و $H_k (X^-)$ ليست صفرية ولها نفس علامة $(-1)^k$ ، النقطة الثابتة X^- هي الحد الأقصى المحلي لـ NLP(w)

نظرية ج: إذا كانت $Hn (X^-) \neq 0$ النظريتين أوب لا توفي بالشروط، فعندئذٍ تكون النقطة الثابتة X^- ليست حدًا أقصى محلي.

5.VI.مضاعف لاغرانج

يمكن استخدام مضاعف لاغرانج لحل البرمجة غير الخطية حيث تكون جميع القيود متساوية القيود.

نحن نعتبر البرمجة غير الخطية NLP من النوع التالي:[32]

$$\begin{aligned} &\text{Max (Min) } z\_ f(x1, x2, \ldots, xn) \\ &\text{s.t. } g1(x1, x2, \ldots, xn) \_ b1 \\ &g2(x1, x2, \ldots, xn) \_ b2 \\ &\quad\vdots \\ &gm(x1, x2, \ldots, xn) \_ bm \end{aligned} \qquad (1)$$

[32] A. McCarl and Thomas H. Spreen, APPLIED MATHEMATICAL PROGRAMMING USING ALGEBRAIC SYSTEMS, copyright 1997 Bruce,p.p:4- 14

لحل (1)، نربط المضاعف i بالقيود i في (1) ونشكل لاغرانج

$$L(X_1, X_2, \ldots, X_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \_ f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i [b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \qquad \underline{(2)}$$

ثم نحاول إيجاد نقطة $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$تعظم أو تصغر $L(X_1, X_2, \ldots, X_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$، في كثير من الحالات ، $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ تحل البرنامج(1).

نفترض أن (1) مشكلة تعظيم إذا كان $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$يعظم، ثم في $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, .., \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, .., \bar{\lambda}_m)$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$\partial L/\partial \lambda_1$ هو المشتق الجزئي لـL بالنسبة λ وهذا يبين أن$(X^-_1, X^-_2, .., X^-_n)$ سوف تفي بالقيود في(1) لتوضيح أن $(X^-_1, X^-_2, .., X^-_n)$تحل (1) ، نعتبر $(X'_1, X'_2, \ldots, X'_n)$ نقاط تقع في المنطقة المجدية لـ (1)'.

ولأن $(X^-_1, X^-_2, \ldots, X^-_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ **تعظم** L عند أية رقم موجود من $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$,

$$L(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m) \geq L(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots \lambda'_m) \qquad \textit{(3)}$$

ولان $(X^-_1, X^-_2, .., X^-_n)$ و$(X'_1, X'_2, .., X'_n)$ نقاط تقع في منطقة الحلول الممكنة في (1) فإن المصطلحات في (3)التي تتضمن قيمًا كلها صفر، و تصبح (3)$f(X^-_1, X^-_2, .., X^-_n) \geq f(X'_1, X'_2, \ldots, X'_n)$وعليه (X^-_1, X^-_2, X^-_n).

وهكذا فإن $(x^-_1, x^-_2, .., x^-_n)$ يحل (1). باختصار، إذا كانت $(X^-_1, X^-_2, \ldots, X^-_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ يحل مشكلة التعظيم غير المقيد

$$\max L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \qquad \textbf{(4)}$$

نعلم انه من الضروري لحل الدالة (4) حساب $X^-_1, X^-_2, \ldots, X^-_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \cdots = \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

نظرية: بافتراض أن برنامج (1) بأخذ في شكله مشكلة تصغير(Min). إذا كانت $f(X_1,X_2,...X_n)$)دالة محدبة، وكل gi (x1,X2,Xn)، هي دالة خطية، ثم أي نقطة من $(X^-_1, X^-_2, \ldots, X^-_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ ممكنة لـ(5)ومنه ستنتج الحل الأمثل ل (1)هي: $(X^-_1, X^-_2, .., X^-_n)$

مثال.VI.4.

تخطط شركة خدمية تقوم بعملية الاشهار إنفاق 10,000 وحدة نقدية على الاشهار، حيث القيام بالإشهار الواحد في التلفاز بـ 3000 ون في الدقيقة مقابل 1000 ون للدقيقة على الراديو، إذا كانت الشركة ترغب في شراء x دقيقة من الاشهار في التلفاز، وY دقيقة من الاشهار في الإذاعة.

مع العلم يبلغ حجم رقم أعمالها بالآلاف الوحدات النقدية من خلال $f(x)= -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y$، كيف يمكن للشركة تعظيم دخلها؟

حل مثال VI. 4

حل البرمجة غير الخطية التالية:

$$\text{Max } z = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y$$
$$\text{s.c. } 3x + y = 10$$

$$L(x, y, \lambda) = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y + \lambda\,(10 \_ 3x \_ y).$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

سوف تسفر مايلي:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -4x + y + 8 - 3\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2y + x + 3 - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 - 3x - y = 0$$

نلاحظ أن $3x - y = 10$ يختصر من القيد $3x - y - 10 = 0$

المعادلة (1) هي $y = 3\lambda - 8 + 4x$

المعادلة (2) هي $x = \lambda - 3 + 2y$

نعوض قيمة x في المعادلة (1) نحصل على قيمة Y ونعوض قيمة y في المعادلة 2 لنحصل على قيمة X

$$y=3\lambda - 8 + 4(\lambda -3 + 2y) = 7\lambda - 20 + 8y,$$

$$y = \frac{20}{7} - \lambda \qquad (4)$$
$$x = \lambda - 3 + 2(\frac{20}{7} - \lambda) = \frac{19}{7} - \lambda \qquad (5)$$

نعوض المعادلتين (4) و(5) في (3) ونحصل على قيمة λ

$$10 - 3(17/9- \lambda) - (20/7- \lambda) = 0, \text{ or } 4\lambda - 1 = 0, \text{ or } \lambda = 1/4$$

$$\bar{y} = \frac{20}{7} - \frac{1}{4} = \frac{73}{28}$$
$$\bar{x} = \frac{19}{7} - \frac{1}{4} = \frac{69}{28}$$

مصفوفة Hessian لـf(X,Y)

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

يلاحظ أن كل مختصر رئيسي من الدرجة الأولى سالب (H (x ,Y> 7 (y ، x) f، مقعرة.
القيد خطي، لذا فإن نظرية لاغرانج توضح أن طريقة مضاعف لاغرانج لا تسفر عن الحل الأمثل

سلسلةVI

تمرين1:

في المجموعة S المحددة، حدد ما إذا كانت كل دالة محدبة أو مقعرة ام لا؟

1) $f(x) = x^3; S = [0, \infty)$
2) $f(x) = x^3; S = R^1$
3) $f(x) = 1/X; S = (0, \infty)$
4) $f(x) = x^a \ (0 \le a \le 1); S = (0, \infty)$
5) $f(x) = \ln x; S = (0, \infty)$
6) $f(x_1, x_2) = x^3 + 3x1x2 + x_2^2; S = R^2$
7) $f(x_1, x_2) \_ x^2_1 \_ x^2_2; S = R^2$
8) $f(x_1, x_2) = -x^2 1 \_ x_1 x_2 \_ 2x_2^2; S = R^2$
9) $f(x1, x2, x3) = \_x^2_1 \_ x_2^2 \_ 2x^2_3 + .5x1x2; S = R^3$

تمرين 2

أوجد الحل الأمثل لـ

$$\text{Max} = x^3$$

$$\text{s.c.} \quad -1 \le x \le 1$$

تمرين 3

أوجد الحل الأمثل لـ

$$\text{Min}x = x^3 - 3x2 + 2x - 1$$

$$\text{s. c.} \quad -2 \le x \le 4$$

قائمة المراجع:

باللغة العربية:

1. إبراهيم وصيف غدير إبراهيم، عبد الرزاق حواس، **محاضرات مقياس رياضيات المؤسسة**، كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير جامعة الشهيد حمة لخضر، الواد، 2020،2021.
2. جسين ياسين طعمة وآخرون، **بحوث العمليات نماذج وتطبيقات**، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان الأردن، ط1،2009.
3. حمودي حاج صحراوي، **رياضيات مؤسسة: كمدخل إلى التقنيات الكمية**، دون طبعة، دار النشر جيطلي ، الجزائر، 2008.
4. محمد دباس الحميد، **البرمجة الخطية**، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية . حلب، سوريا، 2010.
5. محمد راتول، **بحوث العمليات**، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الرابعة، الجزائر، 2011
6. مصطفى أبو بكر، مصطفى مظهر، **بحوث العمليات وفاعلية القرارات**، مكتبة عين شمس، القاهرة، مصر، 1997.
7. اليامين فالتة، **بحوث العمليات**، ايتراك للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، القاهرة، مصر، 2006.
8. علّي قاسم شتوان، **التخصُّص الأمثل للمهام على الموارد المتاحة**، المجلة الدولية المحكمة للعلوم الهندسية وتقنية المعلومات المجلد 4، العدد 1، ديسمبر 2017.

باللغة الأجنبية:

1. Abdelkader Benaissat, Problème de Transpor, lap lambert academic publishing, Article October 2019 .
2. Arnold kaufmani, Méthode et modeles de la recherche opérationnelle, 2emmes édition , dunod paris , 1972.
3. A. McCarl and Thomas H. Spreen, APPLIED MATHEMATICAL PROGRAMMING USING ALGEBRAIC SYSTEMS, copyright 1997 Bruce.
4. Lyeme muslim and abdallah Selemani, Introduction to Operations Research: Theory and Applications, lap lambert academic publishing, september 2012.
5. Sonia Radjef, Optimisation : Cours et exercices, polycopié,Universit_e des Sciences et de la Technologie d'Oran.Mohamed Boudiaf.Facult_e des Math_ematiques et InformatiqueD_epartement des Math_ematiques,2019.
6. Thomas Edgar and david M himmelblau, optimisation of chemical processes, McGraw-Hill Science/Engineering/Math; 2nd edition (January 12, 2001),
7. Wayne L. Winston, Operations Research :Applications And Algorithms, fourth edition , Brooks/Cole—Thomson Learning , USA, 2004.
8. https://econweb.ucsd.edu/~jsobel/172aw02/notes7.pdf.