جامعة فرحات عباس - سطيف01 –

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم علوم التسيير

محاضرات وتطبيقات في مقياس رياضيات المؤسسة

موجهة لطلبة السنة الثانية علوم التسيير

	c_j	1	5	0	0	-M	
c_B	Basic variables B	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	Solution values $b\ (= X_B)$
0	x_3	3	4	1	0	0	6
-M	A_1	1	3	0	-1	1	2
$z_j - c_j$		-M-1	-3M-5	0	M	0	

من إعداد: د. مصطفاي ياسين

2020/2019

مقدمة

تهدف هذه المطبوعة من خلال أجزائها الثلاثة إلى تعريف الطالب ببعض المفاهيم الأساسية حول مقياس رياضيات المؤسسة، وتطوير قدراته في تطبيق الأسس النظرية والتطبيقية للأساليب الكمية اللازمة لاتخاذ القرارات المناسبة لمختلف المشكلات الاقتصادية، حيث تستعرض هذه المطبوعة مجموعة من المحاضرات تتوزع على ثلاثة أجزاء، ففي جزئها الأول يتناول البرمجة الخطية انطلاقا من صياغة النموذج الخطي للمسالة وصولا إلى طرق حله، كما يتناول كذلك هذا الجزء محاضرات حول المسالة الثنوية وطرق حلها، وكذا تحليل الحساسية التي تهتم بتغّير بعض المعطيات الخاصة بالنموذج الخطي الذي تم صياغته، بينما الجزء الثاني خصص لمسائل النقل التي تهتم بتدنية تكاليف النقل إلى أدنى حد ممكن، في حين الجزء الأخير تطرق إلى للبرمجة غير الخطية من خلال دراسة أمثلية هذه البرامج في حالة قيود أو بدونها.

هذه المطبوعة تم تحريرها وفقا للبرنامج الوزاري لمقياس "**رياضيات المؤسسة**"، والذي تمت المصادقة عليه من قبل اللجنة الوطنية للتكوين في ميدان علوم التسيير.

كما تجدر الإشارة إلى اعتمادنا في تحرير هذه المطبوعة على كتاب أستاذنا الفاضل "**حاج صحراوي حمودي**" بشكل خاص من خلال اعتماد طريقة السمبلكس المختصرة (استبعاد المصفوفة الأحادية)، طريقة السمبلكس في حال وجود متغيرات وهمية وكذا طريقة السمبلكس على مرحلتين.

في الختام فإننا نضع بين أيدي طلبتنا الأعزاء في مختلف تخصصاتهم (طلبة علوم التسيير، علوم التجارة، والاقتصاد) هذا الجهد المتواضع، والذي يمثل محاولة بسيطة من قبلنا للإسهام في تزويد مكتبة الكلية بمطبوعة في مقياس "**رياضيات المؤسسة**". كما نرجو من أساتذتنا الأفاضل إفادتنا بالتصحيحات اللازمة من أجل إخراج المطبوعة في صورتها النهائية.

الجزء الأول

البرمجة الخطية (المسالة الأصلية)

- ☑ صياغة المسالة (المشكلة)
- ☑ طرق حل مسائل البرمجة الخطية
- ☑ حالات خاصة في البرمجة الخطية
- ☑ سلسلة تمارين مقترحة

تمهيد

يعتبر موضوع البرمجة الخطية من أهم المواضيع المعروفة في مجال بحوث العمليات، حيث تعد إحدى الأساليب واسعة الانتشار والاستخدام للوصول إلى تحقيق الأمثلية، والتي تهتم ببناء النماذج الرياضية لحل المشاكل الاقتصادية سواء كانت إنتاجية أم تمويلية أم إدارية، فهي تساعد في تخصيص الموارد والإمكانيات المتاحة على الاستخدامات المختلفة من أجل تحقيق الأمثلية في التوزيع، كما تستخدم في جدولة الإنتاج لتحديد كميات الإنتاج المثلى، بالإضافة إلى ذلك إمكانية استخدامها في حل مسائل النقل بغية تحديد أفضل شبكة للتوزيع بأقل تكلفة ممكنة.

1.مفهوم البرمجة الخطية

استخدم مفهوم البرمجة الخطية لأول مرة إبان الحرب العالمية الثانية، كأحد الأساليب المساعدة في إيجاد الحلول الممكنة لمشكلات النقل والتوزيع في عمليات الإمداد للوازم الحرب، وكما عالجت مشكلات الإنتاج والعمليات. ويعود الفضل في ذلك إلى الفريق الأمريكي لبحوث العمليات الطريقة المبسطة (السمبلكس) بقيادة جورج دانتزغ (Dantzig) خلال سنة 1947، حيث يعتبر هذا الأخير أول من وضع الصياغة الرياضية لأسلوب البرمجة الخطية. كما أن مصطلح "البرمجة الخطية" مكون من كلمتين: فالأولى"البرمجة" تعني تخطيط الأنشطة أو استخدام الأساليب الرياضية للوصول إلى أفضل الحلول، أما الثانية "الخطية" فتعني أن جميع الدوال في النموذج أو العلاقات تكون خطية.

وتعرّف البرمجة الخطية على أنها:"نموذج رياضي يهدف إلى تحقيق أقصى (Maximum) أو أدنى (Minimum) قيمة لدالة خطية تعرف باسم دالة الهدف (Objective Function)، وهذه الدالة مقيدة بمعادلات أو متراجحات تسمى قيودا (Constraints)."

وتعرف أيضا: "بأنها أسلوب رياضي يهتم بحل المشكلات التي تواجه الإدارة لوضع الخطط، واتخاذ القرارات المتعلقة بتوزيع الموارد المتاحة بين الاستخدامات المتنافسة، بحيث تحقق أعلى مستوى من الأرباح (أو الفوائد)، أو تقليل التكاليف إلى أدنى مستوى ممكن".

2.فرضيات النموذج الخطي

تعتمد نماذج البرمجة الخطية على مجموعة من الفرضيات، وهي:

1.2.الخطية (Linearity): يقصد بها أن تكون العلاقة بين المتغيرات في دالة الهدف والقيود خطية؛

2.2.التناسبية (Proportionatily): يقصد بها أن تكون مساهمة كل متغير في دالة الهدف، فإذا كان الربح الوحدوي للمنتج (A) هو 1 ون، فإن ربح وحدتين من هذا المنتج هو 2 ون؛

2.3.قابلية القسمة (Divisibility): أي يمكن الحصول على أعداد غير صحيحة كحل للمشكلة، أي كسور كقيم لمتغيرات القرار.

2.4.حالة التأكد (certainty): أن تكون كافة معاملات دالة الهدف، ومعلمات القيود محددة ومعروفة بشكل مؤكد، أي أنها تبقى ثابتة أثناء معالجة المشكلة.

2.5.عدم السلبية (non-negative): ويراد بها أن تكون قيم متغيرات القرار غير سالبة، أي: $X_i \geq 0$

2.6.الإضافة (Additivety): بمعنى أن إضافة أي نشاط سوف يتحدد مع مجموعة القيود في النموذج المدروس.

3.شروط استخدام البرمجة الخطية

لكي يمكن استخدام البرمجة الخطية فان هناك شروط يجب توفرها في المشكلة المراد علاجها:

- محدودية الموارد: ينبغي استخدامها في حالة الندرة، فلو كانت المواد متوفرة لما كانت هناك مشكلة؛
- يجب أن يكون هناك هدف محدد ومعين ومعبر عنه بطريقة كمية كما يجب أن يكون الهدف واضحا ودقيقا بحيث يمكن أن يتخذ شكل معادلة رياضية؛
- وجود علاقة خطية: يفترض أن تكون العلاقة بين متغيرات المسالة خطية؛
- لابد من وجود بدائل مختلفة لتحقيق الهدف؛
- إمكانية التعبير الكمي للمتغيرات.

4.بناء (صياغة) نموذج البرمجة الخطية

لتوضيح كيفية بناء نموذج خطي يمكن إتباع الخطوات التالية:

4.1.متغيرات القرار: هي حلول المسالة (الكميات المثلى) التي يتوجب البحث عن قيمها في ظل محدودية الموارد، كما أنها ترتبط فيما بينها بعلاقة خطية ضمن البرنامج الخطي للمسالة، ونرمز لها بالرمز (X_i).

4.2.صياغة دالة الهدف: تعبر دالة الهدف لبرنامج خطي عادة عن هدف اقتصادي كتعظيم الأرباح، تعظيم الإنتاج، أو تخفيض التكاليف، تخفيض الطاقة العاطلة.....الخ، حيث نرمز لهذه الدالة بالرمز (Z).

4.3.تشكيل القيود: تعبر عن محدودية الموارد كالطاقة الإنتاجية، القوى العاملة، الوقت، الآلات، المواد الأولية، .....الخ، والتي يتم تخصيصها على حسب قيم متغيرات القرار، وهذه القيود يمكن أن تكون على شكل (= أو $\leq$ أو $\geq$).

وتنقسم القيود إلى نوعين:

1.3.4.القيود الداخلية: وهي كل عناصر الإنتاج التي تدخل في تركيبة المنتج؛

2.3.4.القيود الخارجية: هي كل الالتزامات التي تتعلق بالسوق من إنتاج وتسويق؛

4.4.إضافة لقيود اللاسلبية: والتي تشترط أن متغيرات القرار تكون موجبة أو معدومة.

بناء على ما سبق فإن الصيغة العامة للبرنامج الخطي سواء كان على شكل تعظيم (Max) أم تصغير (Min) تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} \text{Max or Min}(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n \\ \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n(\leq, \geq, \text{or} =)b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n(\leq, \geq, \text{or} =)b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n(\leq, \geq, \text{or} =)b_m \end{cases} \\ X_1, X_2, \ldots, X_n \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن القيود قد تكون على شكل متراجحات أو معادلات، كذلك لابد أن تكون قيم متغيرات القرار غير سالبة.

تمثل $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ متغيرات القرار التي يجب البحث عن قيمها المثلى، وتعبر $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ عن معاملات دالة الهدف قد تكون أرباح وحدوية أو تكاليف وحدوية، وتعبر $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ عن الموارد المتاحة، أما $(a_{ij}(i = 1, \ldots n; j = 1, \ldots m))$ فهي معلمات فنية (معاملات القيود).

مثال(1):

تقوم شركة الكرة الفضية بتصنيع ثلاث أنواع من آلات كرة الإبرة "فليبرز"، إذ يتطلب كل نوع تقنية تصنيع مختلفة، وتتطلب آلة من نوع (super ball deluxe) 2 ساعة عمل و3 ساعات اختبار، وتحقق هذه الآلة ربحا قدره 300 دولارا؛ في حين تطلب الة من نوع (ball deluxe) ساعة عمل، و4 ساعات اختبار وهي تحقق ربحا قدره 200 دولارا، وتحتاج آلة من نوع (bumper king) إلى 2 ساعة عمل وساعتي اختبار، وتحقق ربحا قدره 100 دولارا، ويفترض توافر 1000 ساعة عمل و30000 دقيقة اختبار.

بالإضافة إلى ذلك قد أظهرت دراسة تنبؤ بالسوق أن الطلب على النوع (super ball deluxe) لن يزيد عن 50 آلة، في حين أن الطلب على(ball deluxe) و(bumper king) سيبلغ 200 آلة بالضبط.

المطلوب: صغ هذه المسألة في شكل برنامج خطي؟.

الحل:

للحصول على البرنامج الخطي لهذه المسالة(المشكلة) وجب إتباع الخطوات التالية:

- **تحديد متغيرات القرار:**

X_1: عدد الآلات من نوع (super ball deluxe)؛

X_2: عدد الآلات من نوع (ball deluxe)؛

X_3: عدد الآلات من نوع (bumper king).

- **تشكيل دالة الهدف:**

وحدة واحدة مباعة من نوع (super ball deluxe)، ينتج عنها ربحا قدره 300×1 ون.

2 وحدة مباعة من نوع (super ball deluxe)، ينتج عنها ربحا قدره 300×2 ون.

فإذا كان X_1 وحدة مباعة من نوع (super ball deluxe)، فإن الربح المتوقع هو $300 \times X_1$ ون.

كذلك عند بيع كمية قدرها X_2 ، فإن الربح هو $200\times X_2$ ون.

نفس الشيء عند بيع المنتوج الثالث، فمثلا عند بيع كمية قدرها X_3 ، فإن الربح هو $100\times X_3$ ون.

بما أن المؤسسة تهدف إلى تعظيم الربح من خلال بيع كميات معينة من المنتوجات الثلاثة، فإن شكل الدالة (Z) تأخذ (Max) وبالتالي تصبح كالأتي:

$$Max(Z) = 300X_1 + 200\,X_2 + 100\,X_3$$

- **تشكيل القيود**: هنا نلاحظ وجود ثلاث أنواع من القيود.

– **القيود الداخلية**: يتم تشكيل القيود كما يلي:

وحدة واحدة من المنتوج الأول تستغرق 2 سا×1.

وحدتين من المنتوج الأول تستغرق 2 سا×2.

⋮ ⋮ ⋮

فإذا كان X_1 وحدة من المنتوج الأول فإنها تستغرق 2 سا × X_1 .

وحدة واحدة من المنتوج الثاني تستغرق 1 سا×1.

وحدتين من المنتوج الثاني تستغرق 1 سا×2.

⋮ ⋮ ⋮

فإذا كان X_2 وحدة من المنتوج الثاني فإنها تستغرق 1 سا × X_2 .

وحدة واحدة من المنتوج الثالث تستغرق 2 سا×1.

وحدتين من المنتوج الثالث تستغرق 2 سا×2.

⋮ ⋮ ⋮

فإذا كان X_3 وحدة من المنتوج الثالث فإنها تستغرق 2 سا × X_3 .

مع العلم أن الوقت المستغرق في إنتاج المنتجات الثلاثة الخاص بساعات العمل يجب أن لا يتعدى 1000 ساعة، وعليه يصبح القيد الأول كالأتي:

$2X_1 + 1X_2 + 2X_3 \leq 1000$

لتشكيل القيد الثاني الخاص بساعات الاختبار نتبع نفس العملية، وعليه نحصل على:

$3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 500$

– **القيود الخارجية:**

حسب دراسة السوق فان الطلب على النوع الأول على الأكثر 50 آلة، وبالتالي هذا القيد يكتب على الشكل الأتي:

$X_1 \leq 50$

الكمية المباعة من المنتجين الثاني والثالث 200 وحدة بالضبط، هذا القيد يكتب على النحو التالي:

$X_2 + X_3 = 200$

– **قيود اللاسلبية:**

لا يمكن إنتاج كميات سالبة من كل الأنواع الثلاثة، أي: X_1، X_2 و X_3 على الأقل تأخذ قيمة معدومة، ومنه نكتب القيود على الشكل التالي:

$X_1 \geq 0 , X_2 \geq 0, X_3 \geq 0.$

إذن البرنامج الخطي لهذه المسالة هو كالتالي:

$$\begin{cases} Max(Z) = 300X_1 + 200X_2 + 100X_3 \\ 2X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 1000 \\ 3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 500 \\ X_1 \leq 50 \\ X_2 + X_3 = 200 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0. \end{cases}$$

مثال (2):

تقوم شركة (MY) بإنتاج مشروبات غازية من مصنعين مختلفين في منطقتين (T1) و (T2)، حيث كل مصنع ينتج ثلاث منتجات مختلفة هي (A، B، C)، والجدول الموالي يوضح الطاقة الإنتاجية لكل مصنع خلال اليوم:

المنتجات	المصنع الأول (قارورة)	المصنع الثاني (قارورة)
A	6000	2000
B	1000	2500
C	3000	3000

حسب قسم التسويق فإن الطلب المتوقع على المنتج (A) يجب أن لا يقل عن 80000 قارورة، والمنتج (B) هو 22000 قارورة، والمنتج (C) هو 40000 قارورة خلال شهر جوان القادم، مع العلم أن تكلفة الإنتاج اليومية في المصنعين هي 6000، 4000 ون على التوالي.

المطلوب:استخدم طريقة البرمجة الخطية لصياغة المسالة من أجل تخفيض التكاليف؟

الحل:

- **تحديد متغيرات القرار**

X_1: عدد أيام العمل في المصنع الأول؛

X_2: عدد أيام العمل في المصنع الثاني.

- **تشكيل دالة الهدف**

يوم عمل في المصنع الأول يكلف 6000 ون.

فإذا كان X_1 يوم عمل في المصنع الأول يكلف $6000 \times X_1$ ون.

نفس الشيء للمصنع الثاني، فمثلا X_2 أيام عمل في المصنع الثاني تكلف $4000 \times X_2$ ون.

بما أن الشركة تهدف إلى تخفيض التكاليف، فإن شكل الدالة (Z) تأخذ (Min)، وبالتالي تصبح كالأتي:

$$Min(Z) = 6000X_1 + 4000\,X_2$$

- **تشكيل القيود**: في هذه الحالة لا وجود للقيود الداخلية.

– **القيود الخارجية**: لدينا ثلاثة قيود خارجية خاصة بمنتجات الشركة.

قيد خاص بالمنتج (A):

يوم عمل في المصنع الأول ينتج 6000 قارورة من نوع (A)

فإذا كان X_1 يوم عمل في المصنع الأول فإن الإنتاج يقدر بـ $6000 \times X_1$.

يوم عمل في المصنع الثاني ينتج 2000 قارورة من نوع (A)

فإذا كان X_1 يوم عمل في المصنع الثاني فان الإنتاج يقدر بـ $2000 \times X_1$.

مع العلم ان الطلب المتوقع من هذا المنتج هو 80000 قارورة، وعليه يصبح القيد الأول كالأتي:

$6000X_1 + 2000X_2 \geq 80000$

$3X_1 + X_2 \geq 40$ أو

قيد خاص بالمنتج (B):

نتبع نفس الخطوات من اجل تشكيل القيد الثاني الخاص المنتوج (B)، وعليه نحصل على:

$1000X_1 + 2500X_2 \geq 22000$

$X_1 + 5/2X_2 \geq 22$ أو

قيد خاص بالمنتج (C):

نتبع نفس الخطوات من اجل تشكيل القيد الثاني الخاص المنتوج (C)، وعليه نحصل على:

$3000X_1 + 3000X_2 \geq 40000$

$X_1 + X_2 \geq 40/3$ أو

- **قيود اللاسلبية:**

بما أن عدد الأيام لا يمكن أن تكون سالبة، لابد أن تكون (X_1، X_2) على الأقل قيمهما معدومة، ومنه نكتب القيود على الشكل التالي:

$X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$

إذن البرنامج الخطي لهذه المسالة هو كالتالي:

$$\begin{cases} \text{Max}(Z) = 6000X_1 + 4000\,X_2 \\ 3X_1 + X_2 \geq 40 \\ X_1 + 5/2X_2 \geq 22 \\ X_2 + X_3 \geq 40/3 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0. \end{cases}$$

5.طرق حل مسائل البرمجة الخطية

هناك عدة طرق يتم بواسطتها حل البرامج الخطية منها: طريقة الرسم البياني وطريقة السمبلكس.

1.5.الطريقة البيانية (Graphical Method)

تعد هذه الطريقة من أسهل الطرق المستعملة في حل مسائل البرمجة الخطية، ولا تحتاج إلى خلفية علمية متقدمة في الرياضيات، بل معلومات أساسية عن قواعد حل المعادلات ورسم الدوال، إلا أن استخدامها يقتصر على حالات خاصة لا يزيد عدد المتغيرات عن ثلاثة، وذلك بسبب استحالة التمثيل بالرسم البياني في حالة ازدياد المتغيرات عن ثلاث.

ونظرا لصعوبة التمثيل للمسائل ذات ثلاثة متغيرات، فإننا نقتصر على استخدام هذه الطريقة لحل المسائل ذات متغيرين فقط. وبموجب هذه الطريقة نقوم بتمثيل دالة الهدف والقيود على شكل خط مستقيم في معلم متعامد متجانس، وبعد ذلك يتم تحديد منطقة الحلول الممكنة (المنطقة غير المشطبة). ولحل نموذج البرمجة الخطية ذات متغيرين نتبع الخطوات التالية:

- تحويل القيود (المتراجحات فقط) إلى معادلات؛
- استخراج النقاط المساعدة في عملية رسم كل مستقيم؛
- رسم المعادلات، ثم تشطيب المجالات المرفوضة بناءً على اتجاه المتراجحة؛
- تحديد نقاط تقاطع القيود لمعرفة منطقة الحلول الممكنة (المنطقة غير المشطبة)؛
- تحديد إحداثيات نقاط (زوايا) منطقة الحلول الممكنة، وتعويضها في دالة الهدف؛
- اختيار النقطة التي تعظم أو تقلل دالة الهدف، والتي تمثل إحدى رؤوس منطقة الحلول الممكنة.

مثال(3):

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Min(Z) = 3X_1 + 5X_2 \\ \begin{cases} 2X_1 + 3X_2 \leq 30 \\ 5X_1 + 4X_2 \leq 60 \\ X_1 \geq 5 \end{cases} \\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: حل المسالة الآتية باستخدام طريقة الرسم البياني؟

الحل:

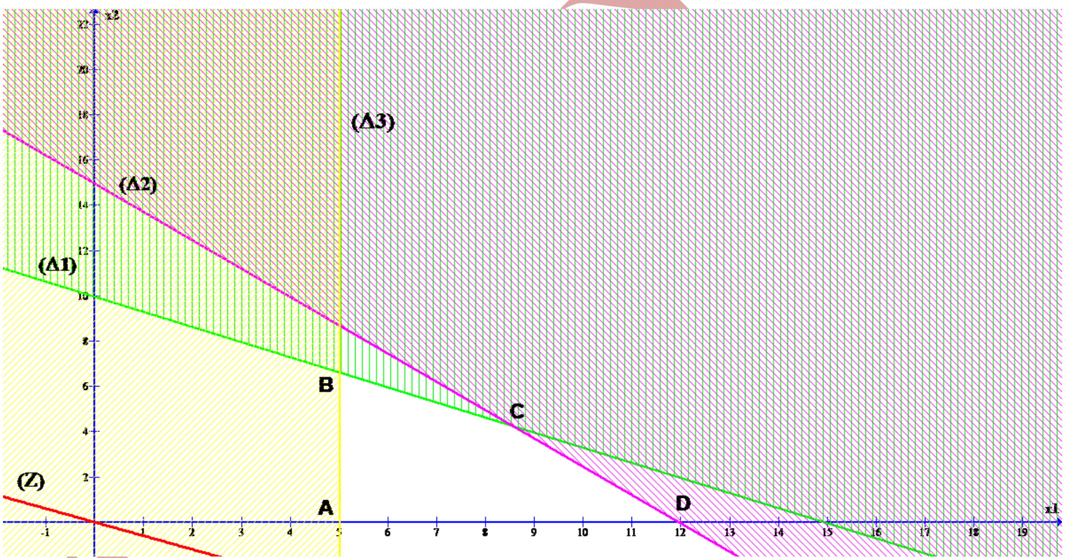
يتم تحويل القيود إلى معادلات وفق الشكل الآتي:

$$\begin{cases} 2\,X_1 + 3\,X_2 = 30 \ldots\ldots\ldots(\Delta 1) \\ 5\,X_1 + 4\,X_2 = 60 \ldots\ldots\ldots(\Delta 2) \\ X_1 = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\Delta 3) \end{cases}$$

ثم نقوم بتحديد النقاط المساعدة في عملية الرسم، وهي مبينة في الجدول الأتي:

	X_1	X_2
(Δ1)	0	10
	15	0
(Δ2)	0	15
	12	0
(Δ3)	5	0

بعد تحديد النقاط المساعدة في الرسم البياني، نستعين ببرنامج (Graph) للحصول على الرسم.



من الشكل البياني، يتضح بأن منطقة الحلول الممكنة محدودة بالنقاط (A، B، C، D)، إذ أن:

- النقطة (A) إحداثياتها (5، 0)، نعوضها في دالة الهدف نجدها تساوي: Z(A)=3(5)+5(0) =15
- أما النقطة (B) إحداثياتها (4، ؟)، ولإيجاد ترتيبة هذه النقطة نتبع ما يلي:

بالنسبة لهذه النقطة نحصل عليها من تقاطع المستقيمين (Δ1) و(Δ3) أي أن:

$$\begin{cases} 2\,X_1 + 3\,X_2 = 30 \ldots\ldots\ldots(1) \\ X_1 = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

من المعادلة (2) نحصل على ما يلي:

$X_1 = 5$......................(2)

نقوم بتعويض قيمة (X_1) في المعادلة (2) نحصل على:

$2(5) + 3X_2 = 30$.........(1)
$X_2 = 20/3$
$B(5, 20/3) \rightarrow Z(B)=3(5)+5(20/3) = 145/3$

– النقطة (C) مجهولة الإحداثيات، وبالتالي يجب البحث عن فاصلة وترتيبة هذه النقطة.

بالنسبة لهذه النقطة نحصل عليها من تقاطع المستقيمين ($\Delta1$) و($\Delta2$) أي أن:

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 = 30 \text{.........(1)} \\ 5X_1 + 4X_2 = 60 \text{.........(2)} \end{cases}$$

من المعادلة (1) نحصل على ما يلي:

$X_1 = -3/2\, X_2 + 15$.........(3)

نقوم بتعويض قيمة (X_1) في المعادلة (2)، نحصل على:

$5(-3/2\, X_2 + 15) + 4X_2 = 60$.........(2)
$X_2 = 30/7$

نقوم بتعويض قيمة (X_2) في المعادلة (3)، فنحصل على:

$X_1 = 120/14$
$C(120/14, 30/7) \rightarrow Z(C)=3(120/14)+5(30/7) = 660/14$

– النقطة (D) إحداثياتها (12، 0) نعوضها في دالة الهدف فنجدها تساوي:

$Z(D)=3(12)+5(0) = 36$

بما أن دالة الهدف هي من الشكل (Min)، فإن الحل الأمثل[*] هو النقطة $A(5,0)$، أي أن:

$X_1 = 5, X_2 = 0, Min(Z) = 15$

ملاحظة:

في حالة كون عدد نقاط (زوايا) منطقة الحلول الممكنة كثير، نلجأ إلى رسم مستقيم معادلة دالة الهدف، ونزيحها نحو الأعلى فإذا كانت دالة الهدف تعظيم، فإن آخر نقطة يمسها مستقيم (Z) تكون هي الحل الأمثل، أما إذا كانت مسألة تخفيض، فإن أول نقطة يمسها مستقيم دالة الهدف تعتبر حلا أمثلا.

[*] – **الحل الأمثل**: هو الحل المقبول (أي الحل الذي يحقق كافة القيود)، فضلا عن جعله قيمة الهدف في نهايتها العظمى أو الصغرى.

مثال(4):

تنتج شركة الواحة الصناعية نوعان من الدهانات (A) و(B)، وذلك باستخدام نوعين من المواد الخام (M1) و (M2) ويصور الجدول التالي البيانات الأساسية الخاصة بالمشكلة:

	الدهان (A)	الدهان (B)	الطاقة المتاحة في اليوم (طن)
المادة الخام (M1)	6	4	24
المادة الخام (M2)	1	2	6
الربح لكل طن (ون)	5	4	

تشير دراسة السوق إلى أن الطلب اليومي على الدهان (B) لا يمكن أن يتجاوز الطلب على الدهان (A) بأكثر من طن واحد، كما أن أقصى كمية للطلب اليومي من الدهان (B) تبلغ 2 طن. وترغب الشركة في تحديد المزيج الأمثل من المنتجات (A) و(B)، والذي يؤدي إلى تعظيم الربح الإجمالي اليومي للشركة.

الحل:

متغيرات القرار

X_1: عدد الأطنان التي يتم إنتاجها يوميا من الدهانات (A)؛

X_2: عدد الأطنان التي يتم إنتاجها يوميا من الدهانات (B).

البرنامج الخطي لهذه المسالة هو كالتالي:

$$\begin{cases} Max(Z) = 5X_1 + 4X_2 \\ \begin{cases} 6X_1 + 4X_2 \le 24 \\ X_1 + 2X_2 \le 6 \\ X_2 - X_1 \le 1 \end{cases} \\ X_2 \le 2 \\ X_1 \ge 0 , X_2 \ge 0 \end{cases}$$

لرسم البرنامج الخطي المتحصل يتوجب إتباع الخطوات التالية:

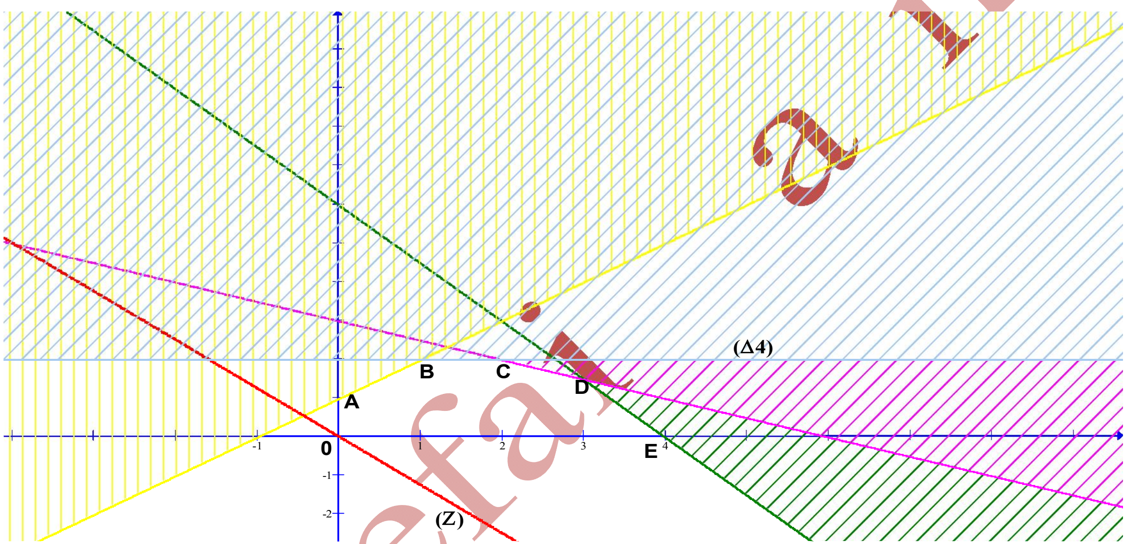
- تحويل القيود إلى معادلات وفق ما يلي:

$$\begin{cases} 6X_1 + 4X_2 = 24 \ldots\ldots\ldots(\Delta 1) \\ X_1 + 2X_2 = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots(\Delta 2) \\ X_2 - X_1 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\Delta 3) \\ X_2 = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\Delta 4) \end{cases}$$

- تحديد النقاط المساعدة في عملية الرسم، وهي مدونة في الجدول الموالي:

	X_1	X_2
(Δ1)	0	6
	4	0
(Δ2)	0	3
	6	0
(Δ3)	0	1
	-1	0
(Δ4)	0	2

- الرسم البياني: بعد تحديد النقاط المساعدة، نستعين ببرنامج (Graph) للحصول على الرسم.



إن المساحة المتمثلة بالشكل سداسي الأضلاع (A، B، C، D، E،O)، والتي تحددت أسفل المستقيمات التي تمثل القيود، تمثل منطقة الحلول الممكنة، إن كل النقاط التي هي داخل هذه المنطقة او على حدودها تمثل حلولا للمسالة، والحل الأمثل هو أحد رؤوسها. لذا وجب تحديد إحداثيات كل نقطة وتعويضها في دالة الهدف.

- **النقطة (A)** إحداثياتها (0، 1)، نعوضها في دالة الهدف نجدها تساوي: $Z(A)=5(0)+4(1)=4$
- **النقطة (B)** إحداثياتها (؟، 2)، ولإيجاد فاصلة هذه النقطة نتبع ما يلي:

بالنسبة لهذه النقطة نحصل عليها من تقاطع المستقيمين (Δ3) و(Δ4) أي أن:

$$\begin{cases} X_2 - X_1 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ X_2 = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

نقوم بتعويض قيمة (X_2) في المعادلة (1)، فنحصل على:

$X_1 = 1$.......................(1)
$B(1\ ,2) \rightarrow Z(B)=5(1)+4(2)=13$

– **النقطة (C)** إحداثياتها (؟، 2)، بالتالي يجب البحث عن فاصلة هذه النقطة.

بالنسبة لهذه النقطة نحصل على إحداثياتها من تقاطع المستقيمين ($\Delta 2$) و($\Delta 4$)، أي:

$$\begin{cases} X_2 + 2X_1 = 6 \text{..........(1)} \\ X_2 = 2 \text{.................(2)} \end{cases}$$

نقوم بتعويض قيمة (X_2) في المعادلة (1)، نحصل على:

$X_1 = 2$.........(1)
$C(2\ ,2) \rightarrow Z(C)=5(2)+4(2)=18$

– **النقطة (D)** مجهولة الإحداثيات وهي تنتمي إلى تقاطع المستقيمين ($\Delta 1$) و($\Delta 2$) أي أن:

$$\begin{cases} 6\ X_1 + 4\ X_2 = 24 \text{.........(1)} \\ X_1 + 2X_2 = 6 \text{..............(2)} \end{cases}$$

نضرب المعادلة (2) في 2 ونطرح المعادلة الأولى من الثانية، فنحصل على ما يلي:

$X_1 = 3$.....................(3)

نقوم بتعويض قيمة (X_1) في المعادلة (2) نحصل على:

$X_2 = 3/2$
$C(3\ ,3/2) \rightarrow Z(C) = 3(3)+ 5(3/2) = 21$

– **النقطة (E)** إحداثياتها (4، 0) نعوضها في دالة الهدف فنجدها تساوي:

$Z(D)=5(4)+4(0) =20$

بما أن دالة الهدف هي من الشكل (Max)، فإن الحل الأمثل هو النقطة D(3, 3/2)، أي أن:

$X_1 = 3,\ X_2 = 3/2,\ Max(Z)=21$

2.5.طريقة السمبلكس (Simplex Method)

تناولنا فيما سبق الطريقة البيانية في حل مشكلة البرمجة الخطية، ولكن هناك قصورا واضحا في هذه الطريقة لكونها لا تستخدم إلا في حالة وجود متغيرين أو أقل، ولمعالجة ذلك طور العالم الأمريكي "جورج دانتزيغ" (Dantzig) طريقة تسمى "**بالسمبلكس**"، والتي تبنى على مجموعة من الخطوات تؤدي إلى الوصول للحل الأمثل. ومع ظهور البرمجيات الحاسوبية عرفت هذه الطريقة استخداما واسعا ونجاحا كبيرا في معالجة المشاكل الكبيرة والمعقدة، ومن بينها: (Tora, Storm, Lindo, Lingo, QM, WinQnsb,).

1.2.5.طريقة السمبلكس العادية (حالة تعظيم)

في هذا النوع من السمبلكس، يشترط أن تكون دالة الهدف على شكل (Max)، وكل القيود أقل أو يساوي، كما أن الطرف الأيمن من القيود يكون موجبا، وفي حالة تحقق هذه الشروط مجتمعة نكون في سمبلكس عادي.

وحتى نتمكن من استعمال هذه الطريقة يمكن إتباع المراحل التالية:

أ.**المرحلة الأولى:** تكوين النموذج القياسي أو المعياري (Standard Model)، حيث يتم تحويل النموذج الأصلي لمشكلة البرمجة الخطية (المسالة الأصلية Primal) إلى النموذج القياسي، وتتلخص هذه الخطوة فيما يلي:

- صياغة المسالة الأصلية (تكوين البرنامج الخطي)؛
- نقل المجاهيل (المتغيرات) في دالة الهدف من الطرف الأيمن إلى الطرف الأيسر، أي تصبح معادلة صفرية؛
- إذا كانت إشارة القيد أقل أو يساوي، يتم إضافة مكمل (متغير) إلى الجانب الأيسر للقيد، ويسمى بمتغير الفرق،[*] ونرمز له بالرمز (Si)، حيث يظهر هذا المتغير بمعامل 0 في دالة الهدف.

وعليه فإذا كان الشكل العام للبرنامج الخطي لدالة الهدف (Max) قانوني[**] معطى بالشكل الآتي:

$$\begin{cases} Max(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n \\ \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \le b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \le b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \le b_m \end{cases} \\ X_1, X_2, \dots, X_n \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Max\ Z = \sum C_jXj \\ \sum A_{ij}\ Xj \le b_i \\ X_j \ge 0 \end{cases}$$

---

[*] – في حالة القيد الداخلي يسمى بمتغير الطاقة العاطلة، أما إذا كان القيد (≤) يسمى بمتغير الفائض.

[**] – يعني شكل الدالة (Max) وكل القيود اقل أو يساوي، مع الطرف الأيمن من القيود موجب.

فإن الصيغة القياسية لهذا البرنامج نحصل عليها بإضافة متغيرات الفجوة (الطاقة العاطلة)(S_i) إلى الطرف الأيسر من القيود لتتحول بذلك إلى معادلات، وفق ما يلي:

$$\begin{cases} (Z) - C_1X_1 - C_2X_2 - \cdots - C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + \cdots + 0S_m = 0 \\ a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n + 1S_1 + 0S_2 + \cdots + 0S_m = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n + 0S_1 + 1S_2 + \cdots + 0S_m = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n + 0S_1 + 0S_2 + \cdots + 1S_m = b_m \\ S_1, S_2, \ldots, S_m \geq 0; X_1, X_2, \ldots, X_n \geq 0 \end{cases}$$

بهذه الصورة نكون قد تحصلنا على الشكل المعياري للبرنامج الخطي، أما بالنسبة للمتغيرات الجديدة (S_i) تعتبر متغيرات أساسية في المرحلة الموالية (إنشاء جدول الحل الأساسي)، وتتميز عن باقي المتغيرات بما يلي:

- تظهر مرة واحدة في كل معادلة؛
- معاملها (+1) في حالة القيد أقل أو يساوي، لأن الطرف الأيسر أقل من الطرق الأيمن، لذا وجب إضافة كمية قدرها (S_i)؛
- تشكل هذه المتغيرات أساس الجدول في حالة تحقيق الشرطين اعلاه، وقيمها في الجدول الأساسي هي قيم الطرف الأيمن من القيود (يمكن اعتبارها قيم الموارد المتاحة مادام لم ينطلق النشاط).

ب.المرحلة الثانية: إيجاد جدول الحل الأساسي (Initial tableau) للحصول على حل أولي ممكن، والذي يناظر الحل الأولي عند نقطة الأصل في طريقة الرسم البياني. يتم التوصل إليه بفرض قيم كل متغير من المتغيرات الأصلية (X_j) في المشكلة المدروسة مساوية للصفر، وهو حل مقبول رياضيا ومرفوض اقتصاديا.

بصفة عامة يتم إدراج مصفوفة الأحادية في جدول الحل الأساسي(الجدول الموسع)، إلا أنه سيتم إهمال مصفوفة الأحادية (هذه المصفوفة لا تأثير لها في عمليات الضرب عند الانتقال من جدول إلى آخر) في هذا الجدول، وبالتالي نحصل على الجدول المختصر كما يلي:

الجدول الأول		متغيرات خارج الأساس				قيمة الطرف الأيمن من القيود
		X_1	X_2	...	X_n	
متغيرات أساسية	S_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
	S_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
	S_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
(Z)		$-C_1$	$-C_2$	...	$-C_n$	0

نلاحظ في جدول الحل الأساسي أن هناك نوعين من المتغيرات، متغيرات الفرق (S_i) تكون داخل الأساس، وقيمها عند بداية الحل هي قيم العمود الأخير(b_i)، بينما متغيرات القرار (X_j) تكون خارج الأساس وقيمها معدومة، وعليه دالة الهدف كذلك مساوية للصفر.

ج.**المرحلة الثالثة**: تحسين الحل الأساسي إلى حين بلوغ الحل الأمثل (تحسين قيمة دالة الهدف) وفق الخطوات التالية:

- **تحديد المتغير الداخل**: هو العمود الموافق لأكبر قيمة بالقيمة المطلقة في سطر دالة الهدف (Z). ويسمى العمود الذي تنتمي إليه المتغيرة التي تدخل إلى الأساس **بعمود الارتكاز**؛
- **تحديد المتغير الخارج**: نحصل عليه بقسمة عناصر العمود الأخير (قيم الطرف الأيمن من القيود) على العناصر الموجبة المقابلة لها في عمود الارتكاز، والمتغير الذي يقابل أقل حاصل قسمة موجب يعد هو المتغير الذي يخرج من الأساس، وهذا ما يعطينا **سطر الارتكاز**؛
- **تحديد عنصر الارتكاز**: العنصر الناتج من تقاطع عمود الارتكاز مع سطر الارتكاز يسمى بعنصر الارتكاز (Pivot).

إن استخلاص الجدول الموالي يكون وفق ما يلي:

- استبدال المتغير الذي سيخرج من الأساس بالمتغير الذي ستدخل إلى الأساس؛
- يتم استبدال عنصر الارتكاز بمقلوبه؛
- باقي عناصر سطر الارتكاز تقسم على موجب عنصر الارتكاز؛
- باقي عناصر عمود الارتكاز تقسم على سالب عنصر الارتكاز؛
- أما العناصر المتبقية فهي تحسب وفق المعادلة التالية:

العنصر الجديد = العنصر القديم – (المقابل له في سطر الارتكاز* المقابل له في عمود الارتكاز) / عنصر الارتكاز

يمكن الحصول على الحل الأمثل (Optimal Solution) لمشكلة التعظيم، وذلك عندما تكون جميع عناصر سطر دالة الهدف موجبة أو معدومة. أما في حالة وجود عناصر سالبة، فهذا يعني عدم التوصل إلى الحل الأمثل، ونعيد الخطوات السابقة (طريقة تكرارية Iterative methode).

مثال (5):

ليكن لديك البرنامج الخطي لشركة مختصة في صناعة ثلاثة أنواع من الطاولات (C,B,A).

$$\begin{cases} \text{Max } Z = 50X_1 + 40X_2 + 35X_3 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 \leq 1000 & \text{قيد الحديد (متر)} \\ X_1 + X_3 \leq 2000 & \text{قيد الخشب (متر)} \\ X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 800 & \text{قيد ساعات العمل (ساعة)} \end{cases}$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

المطلوب: حل المسألة الآتية بطريقة السمبلكس المناسبة؟

الحل:

نقوم بتكوين الشكل القياسي انطلاقا من البرنامج الخطي للمسالة، وذلك بإضافة متغير الطاقة العاطلة على النحو الآتي:

$$Z - 50X_1 - 40X_2 - 35X_3 = 0$$
$$2X_1 + X_2 + X_3 + S_1 = 1000$$
$$X_1 + X_3 \qquad + S_2 = 2000$$
$$X_1 + 2X_2 + X_3 + S_3 = 800$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

بعد ذلك نحصل على جدول الحل الأساسي كما يلي:

T1	X_1	X_2	X_3	b_i	النسبة
S_1	2	1	1	1000	500
S_2	1	0	1	2000	2000
S_3	1	2	1	800	800
Z	-50	-40	-35	0	

T2	S_1	X_2	X_3	
X_1	1/2	1/2	1/2	500
S_2	-1/2	-1/2	1/2	1500
S_3	-1/2	3/2	1/2	300
Z	25	-15	-10	25000

بالنسبة لجدول الحل الأساسي (T1)، فإن المتغير الداخل هو (X_1)، كونه موجود في عمود الارتكاز (أكبر عائد لدالة الهدف) في سطر دالة الهدف (Z). أما المتغير الخارج هو (S_1) كونه يقابل أقل حاصل قسمة موجب (قسمة قيم العمود الأخير على عناصر عمود الارتكاز)، ويسمى سطر (S_1) بسطر الارتكاز. بينما تقاطع سطر الارتكاز مع عمود الارتكاز يعطي عنصر الارتكاز، وهو (2).

للحصول على الجدول الثاني (T2) يجب إتباع خطوات تحسين الحل المذكورة سابقا، وهي:

- في مكان عنصر الارتكاز يصبح مقلوب عنصر الارتكاز، أي نحصل على (1/2)؛
- بقية عناصر سطر الارتكاز تقسم على عنصر الارتكاز، فنحصل على (1/2، 1/2، 500) بالترتيب؛
- بقية عناصر عمود الارتكاز تقسم على سالب عنصر الارتكاز، أي نحصل على(-1/2، -1/2، 25)؛
- العناصر المتبقية في الجدول تحسب بالقاعدة المذكورة سابقا.

نلاحظ من الجدول (T2) أن دالة الهدف ارتفعت إلى حدود 25000ون، وهذا راجع لإنتاج 500 طاولة من النوع الأول. إلا أن التمّعن في السطر الأخير بجدول السمبلكس لهذا الحل، يُظهر وجود قيم سالبة في سطر دالة الهدف، مما يعني أن هناك حلا آخر أفضل من هذا الحل، ويعطي ربحا إضافيا في حالة الانتقال إليه (أي الحل المتحصل عليه ليس حلا امثلا)، وبالتالي فهو قابل للتحسين. بنفس الخطوات المطبقة في الجدول الأول، حيث نختار عمود الارتكاز ثم سطر الارتكاز في الجدول الثاني للمرور إلى الجدول الثالث.

T3	S_1	S_3	X_3	
X_1	2/3	-1/3	1/3	400
S_2	-2/3	1/3	2/3	1600
X_2	-1/3	2/3	1/3	200
Z	20	10	-5	28000

T4	S_1	S_3	X_2	
X_1	1	-1	-1	200
S_2	0	-1	-2	1200
X_3	-1	2	3	600
Z	15	20	15	31000

من خلال الجدول الثالث يتبين أنه ليس حلا امثلا، لذا فهو قابل كذلك للتحسين، وبالتالي نختار سطر الارتكاز وعمود الارتكاز ونكمل الخطوات الأخرى. أما بالنسبة للجدول الرابع، فنلاحظ أن جميع قيم سطر دالة الهدف غير سالبة، وعليه يكون هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل، وبالتالي الحل الأمثل لهذه المسالة هو:

$X_1=200, X_2=0, X_3=600, S_1=0, S_2=1200, S_3=0, Z=31000$.

يتضح من هذه النتائج أن إدارة الشركة ستتخذ قرارا بإنتاج 200 طاولة من النوع الأول، و600 طاولة من النوع الثالث، وعدم إنتاج النوع الثاني، لتحقيق أعظم ربح قدره 31000 ون، مع بقاء طاقة عاطلة في القيد الثاني قدرها 1200 متر من الخشب.

2.2.5.السبملاكس على مرحلتين (Two-Phase Method)

من خلال المثال الذي تطرقنا إليه في السمبلكس العادية، يلاحظ أن كل القيود كانت على شكل أقل من أو يساوي والطرف الأيمن موجب، لهذا تم الحصول على المتغيرات الأساسية لكل قيد بسهولة، غير أنه في الواقع قد تواجهنا بعض المسائل لا تكون فيها كل القيود في شكل أقل من أو يساوي، والطرف الأيمن من القيود قد لا يكون موجبا.

ولحل مثل هذه المسائل نلجأ إلى طريقة السمبلكس على مرحلتين، حيث في المرحلة الأولى نحاول الدخول إلى منطقة الحلول الممكنة، بينما في المرحلة الثانية يتم البحث فيها عن الحل الأمثل.

في هذه الحالة لابد من إجراء التحويلات التالية:

- إذا كانت دالة الهدف على شكل (Min) تضرب في (1-)، لتتحول إلى Max(-Z)
- إذا كانت صيغة القيد أكبر من أو يساوي، في هذه الحالة يتم ضرب المتراجحة في (1-) لتتحول إلى متراجحة من الشكل أقل أو يساوي؛
- إذا القيد في شكل مساواة، نضيف متغير اصطناعي (وهمي) للطرف الأيسر، نرمز له بالرمز (a_i)، ويضاف إلى دالة الهدف بمعامل (0). مهمته المساعدة في الحل، وتعطى له الأولوية في الخروج من الأساس، فإذا أصبح متغير خارج الأساس لا يمكن رجوعه إلى داخل الأساس.

بهذه الطريقة نواجه مشكلة أخرى هي وجود قيم سالبة في الطرف الأيمن من القيد (العمود الأخير) في هذه الحالة سوف نكون خارج منطقة الحل، لذا نستعين بدالة وهمية (Z^I) تحسب عناصرها في الجدول كما يلي:

- نضرب السطر الذي فيه متغير وهمي في (1-)؛
- تضرب عناصر السطر الذي فيه قيمة سالبة في العمود الأخير في (1+)؛
- بينما تضرب عناصر الأسطر الباقية في الصفر.

بعد كل هذه العمليات نجمع كل عمود على حدا، لنحصل على قيم سطر دالة الهدف الجديدة (Z^I)، فإذا لم نجد أي عنصر سالب في السطر نتوقف لأن المسالة ليس لها حل. لأنه لا نستطيع الدخول إلى منطقة الحلول الممكنة، وبالتالي لا يمكن البحث عن الحل الأمثل.

مثال (6):

حل المسألة الآتية بطريقة السمبلكس على مرحلتين؟

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 5X_2$$
$$X_1 + X_2 = 10$$
$$X_1 + 3X_2 \leq 20$$
$$2X_1 - X_2 \geq 14$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

الشكل القياسي:

$$Z = 4X_1 + 5X_2$$
$$X_1 + X_2 + a_1 = 10$$
$$X_1 + 3X_2 + S_2 = 20$$
$$-2X_1 + X_2 + S_3 = -14$$
$$X_1, X_2 \geq 0,\ S_2, S_3 \geq 0,\ a_1 = 0$$

انطلاقا من الشكل القياسي يمكن إنشاء جدول الحل الأساسي كما يلي:

	(0)	(0)	
T1	X_1	X_2	
(-1) a_1	1	1	10
(0) S_2	1	3	20
(1) S_3	-2	1	-14
Z^I	-3	0	x

	(0)	(5)	
	a_1	X_2	
(4) X_1	1	1	10
(0) S_2	-1	2	10
(0) S_3	2	3	6
(Z)	4	-1	40

نلاحظ من حلول الجدول الأول وجود متغير وهمي داخل الأساس، وكذا قيمة (S_3) سالبة، مما يدل على أن دالة الهدف في هذا الجدول هي دالة وهمية (Z^I)، وبالتالي ندخل معاملاتها (0، 1، 1−). أما بالنسبة للجدول الثاني نلاحظ عدم وجود قيم سالبة في العمود الأخير مع خروج المتغير الوهمي من الأساس، مما يدل على دخولنا إلى منطقة الحلول الممكنة، لذا ندخل معاملات دالة الهدف الحقيقة (4، 5) في هذا الجدول بغية الحصول على سطر دالة الهدف الحقيقة (Z).

T3	a_1	S_3	
X_1	1/3	-1/3	8
S_2	-7/3	-2/3	6
X_2	2/3	1/3	2
(Z)	14/3	1/3	42

نلاحظ من الجدول الثالث أن جميع قيم سطر دالة الهدف هي أكبر أو تساوي الصفر، وعليه الحل الأمثل لهذه المسالة هو كالآتي:

$X_1=8$, $X_2=2$, $a_1=0$, $S_2=6$, $S_3=0$, $Z=42$.

3.2.5.السمبلكس بإدخال متغير وهمي (Artificial Variable simplex)

يكمن الاختلاف بين طريقة السمبلكس على مرحلتين والسمبلكس العادية في بإدخال متغير وهمي في كيفية معالجة القيد على شكل أكبر أو يساوي، حيث يبقى القيد كما هو، إلا أننا نضيف له متغير وهمي إلى شكله القياسي، لأن متغير الفرق تكون إشارته سالبة، وبالتالي هذا الأخير لا يدخل إلى الأساس، فالمتغير الوهمي هو الذي يدخل إلى الأساس في جدول الحل الأساسي.

مثال(7): حل البرنامج الخطي التالي بطريقة السمبلكس على مرحلتين؟

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } Z = 2X_1 + 4X_2\\
&X_1 + 2X_2 = 26\\
&2X_1 + X_2 \leq 18\\
&3X_1 + 2X_2 \geq 30\\
&X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

الحل:

الشكل القياسي لهذا البرنامج هو كالأتي:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } Z = 2X_1 + 4X_2\\
&X_1 + 2X_2 + a_1 = 26\\
&2X_1 + X_2 + S_2 = 18\\
&3X_1 + 2X_2 - S_3 + a_3 = 30\\
&X_1, X_2 \geq 0,\ \ S_2, S_3 \geq 0,\ \ a_1, a_3 = 0
\end{aligned}
$$

جداول السمبلكس:

	(0)	(0)	(0)	
T1	X_1	X_2	S_3	
(-1) a_1	1	2	0	26
(0) S_2	2	1	0	18
(-1) a_3	3	2	-1	30
Z^I	-4	-4	1	x

	(0)	(0)	(0)	
T2	X_1	a_1	S_3	
(0) X_2	1/2	1/2	0	13
(0) S_2	3/2	-1/2	0	5
(-1) a_3	2	-1	-1	4
(Z^I)	-2	1	1	x

جدول الحل الأمثل:

T3	a_3	a_1	S_3	
(4)X_2	-1/4	3/4	1/4	12
(0)S_2	-3/4	1/4	3/4	2
(2)X_1	1/2	-1/2	-1/2	2
(Z)	0	2	0	32

نلاحظ أن الجدول الثالث هو عبارة عن جدول الحل الأمثل لأن جميع قيم سطر دالة الهدف أصبحت أكبر أو تساوي الصفر، وبالتالي حل هذه المسالة هو كالآتي:

$X_1=2,\ X_2=12,\ a_1=0,\ a_3=0,\ S_2=2,\ S_3=0,\ Z=32.$

6.الحالات الخاصة في البرمجة الخطية

يمكن أن نصادف عدة حالات خاصة أثناء البحث عن الحل الأمثل سواء باستخدام الطريقة البيانية أم السمبلكس، ومنها يلي:

1.6.حالة تعدد الحلول المثلى (Alternate Optimal Solution)

تظهر هذه الحالة عندما يكون أكثر من حل واحد يعطي نفس القيمة المثلى لدالة الهدف، ويحدث عندما يكون الخط البياني الذي يمثل دالة الهدف موازيا تماما لأحد القيود، ويشكل أحد حدود منطقة الحل الممكنة، أي بصيغة أخرى أن الحل الأمثل يقع على عدة نقاط تؤدي جميعها إلى نفس القيمة المثلى لدالة الهدف. وفي حالة استعمال السمبلكس يتم تشخيص هذه الحالة بوجود الصفر في سطر دالة الهدف في جدول الحل الأمثل.

مثال (8):

استخدم الطريقة البيانية لحل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Min(Z) = 5X_1 + 5X_2 \\ \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \le 30 \\ X_1 + 2X_2 \ge 15 \\ X_1 + X_2 = 10 \end{cases} \\ X_1 \ge 0,\ X_2 \ge 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستخدام بالطريقة البيانية وطريقة السمبلكس؟

1.1.6.الحل بالطريقة البيانية

تحويل القيود إلى معادلات وفق ما يلي:

$$\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 = 30 \ldots\ldots\ldots(\Delta 1) \\ X_1 + 2X_2 = 15 \ldots\ldots\ldots(\Delta 2) \\ X_1 + X_2 = 10 \ldots\ldots\ldots\ldots(\Delta 3) \end{cases}$$

تحديد النقاط المساعدة في عملية الرسم

	(Δ1)		(Δ2)		(Δ3)	
X_1	0	10	0	15	0	10
X_2	15	0	7.5	0	10	0

بعد استخراج النقاط المساعدة نستعين ببرنامج (Graph) للحصول على الرسم الموالي:

من خلال الشكل يظهر أن المستقيم (Z) يوازي المستقيم (Δ3)، وبالتالي عند تحريكه نحو الأعلى فإنه ينطبق على النقطتين (A,B) في نفس الوقت، وعليه فإن الحل الأمثل يتمثل في القطعة المستقيم [AB]، وأي نقطة تنتمي لها تعطي أدنى قيمة لدالة الهدف بـ 50 ون، وهذا راجع لكون المستقيم الثالث له نفس ميل خط دالة الهدف.

2.1.6.الحل باستعمال السمبلكس

تظهر هذه الحالة من الحالات الخاصة باستعمال طريقة السمبلكس، إذا كان وجد صفر في سطر دالة الهدف في جدول الحل الأمثل (يستثنى عمود المتغير الوهمي).

للشروع في الحل بطريقة السمبلكس لابد من الشكل القياسي:

$Max(-Z)= -5X_1 - 5X_2$

$3X_1 + 2X_2+ S_1 = 30$

$-X_1- 2X_2 + S_2 = -15$

$X_1 + X_2+ a_3 = 10$

$X_1, X_2\geq 0, S_1, S_2\geq 0, a_3=0$

جداول السمبلكس لهذا البرنامج الخطي:

	(0)	(0)	
T1	X_1	X_2	
(0) S_1	3	2	30
(1) S_2	-1	-2	-15
(-1) a_3	1	1	10
Z^a	-2	-3	x

	(-5)	0	
T2	X_1	a_3	
(0) S_1	1	-2	10
(0) S_2	1	2	5
(-5)X_2	1	1	10
(-Z)	0	-5	-50

رغم وجود قيمة سالبة (−5) في سطر دالة الهدف ضمن الجدول الثاني، إلا أنه يعتبر حلا أمثلا لأنها تقابل متغير وهمي، وبالتالي الحل الأمثل يقتضي إنتاج 10 وحدات من المنتوج الثاني لتحقيق أدنى تكلفة قدرها 50 ون، مع بقاء فرق في القيد الأول قدره 10 وفرق في القيد الثاني قدره 5 وحدات.

كما نلاحظ وجود الصفر في سطر دالة الهدف (القيمة المقابلة لـ X_1) يدل على حالة حلول مثلى بديلة، ولإيجاد الحل البديل نعتبر أن عمود (X_1) هو عمود الارتكاز، ونكمل الخطوات المتبقية.

	(-5)	(0)	
T2	X_1	a_3	
(0) S_1	1	-2	10
(0) S_2	1	2	5
(-5) X_2	1	1	10
(-Z)	0	-50	-50

T3	S_2	a_3	
S_1	-1	-4	5
X_1	1	2	5
X_2	-1	-1	5
(-Z)	0	-5	-50

$X_1=5, X_2= 5, S_1=5, S_2= 0, a_3=0, Z=50$

أما الجدول الثالث فيدل على أن الحل الأمثل يقتضي إنتاج 5 وحدات من كلا المنتجين، مع بقاء فرق في القيد الأول قدره 5 وحدات، لتحقق نفس التكلفة 50ون، أما في حالة اختيار عمود المتغير (S_2) كعمود ارتكاز فإننا نرجع للجدول الثاني، وبالتالي نلاحظ أن طريقة السمبلكس في حالة الحلول المثلى البديلة تعطي فقط حلين أمثلين، على عكس الطريقة البيانية التي تعطي عدة حلول مثلى بديلة (كل النقاط المتواجدة على القطعة المستقيمة).

2.6.حالة عدم توفر حدود لمنطقة الحل (Unbounded Solution)

يعني ذلك عدم وجود حدود على الحل، وتحدث هذه الحالة عندما تكون منطقة الحلول الممكنة مفتوحة من إحدى الجهات، يعني أن تغير قيمة متغير أو أكثر في المسألة يؤدي إلى زيادة قيمة دالة الهدف.

مثال (9):

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Max(Z) = 13\,X_1 + 8\,X_2 \\ \begin{cases} 3\,X_1 + X_2 \geq 15 \\ X_1 + X_2 \geq 9 \\ X_2 \geq 4 \end{cases} \\ X_1 \geq 0. \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستخدام بالطريقة البيانية وطريقة السمبلكس؟

1.2.6.الحل باستعمال الطريقة البيانية:

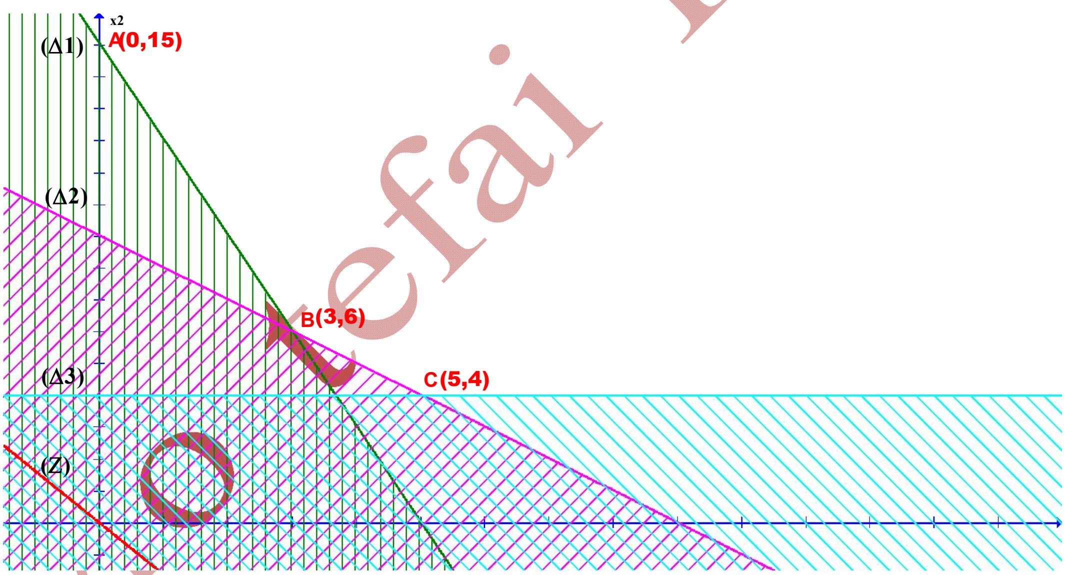
تحويل القيود إلى معادلات وفق الآتي:

$$\begin{cases} 3X_1 + X_2 = 15 \ldots\ldots\ldots (\Delta 1) \\ X_1 + X_2 = 9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta 2) \\ X_2 = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta 3) \end{cases}$$

تحديد النقاط المساعدة في عملية الرسم

	X_1	X_2
(Δ1)	0	15
	5	0
(Δ2)	0	9
	9	0
(Δ3)	0	4

الرسم البياني: تم الاستعانة ببرنامج (Graph) للحصول على الرسم الموالي:



من الشكل نلاحظ، أنه لو يتم إزاحة خط المستقيم لدالة الهدف نحو الأعلى، فإن أول نقطة يمسها هي النقطة (B) ثم النقطة (C)، وأخيرا النقطة (A) التي تعطي أعلى قيمة لدالة الهدف بـ 120 ون، وبما أن منطقة الحلول الممكنة مفتوحة من الأعلى، فإنه كلما زادت قيم (X_1) أو (X_2) أدى ذلك إلى زيادة دالة الهدف، وعليه يمكن القول أن قيمة دالة الهدف لانهاية لها.

2.2.6.الحل باستعمال طريقة السمبلكس

للشروع في إيجاد الحل الأساسي لابد من الشكل القياسي:

$Max(Z)= 13X_1 +8X_2$
$-3X_1 - X_2+ S_1 = -15$
$-X_1- X_2 + S_2 = -9$
$- X_2 + S_3 = -4$
$X_1, X_2\geq 0, S_1, S_2\geq 0.$

جداول السمبلكس لهذا البرنامج الخطي:

	(0)	(0)	
T1	X_1	X_2	
(1) S_1	-3	-1	-15
(1) S_2	-1	-1	-9
(1) S_3	0	-1	-4
Z^I	-4	-3	x

	(0)	0	
T2	S_2	X_2	
(0) S_1	-3	2	12
(0) X_1	-1	1	9
(1)S_3	0	-1	-4
Z^I	0	-1	x

نلاحظ من الجدولين الأول والثاني أن دالة تكون وهمية بسبب وجود قيم سالبة في العمود الأخير، غير أن في الجدول الثالث والرابع تصبح دالة الهدف حقيقية.

	(0)	(0)	
T3	S_2	S_1	
(8) X_2	-3/2	1/2	6
(13) X_1	1/2	-1/2	3
(0) S_3	-3/2	1/2	2
Z	-5.5	-2.5	87

T4	X_1	S_1	
X_2	3	-1	15
S_2	2	-1	6
S_3	3	-1	11
Z	11	-8	120

من الجدول الرابع نلاحظ وجود قيمة سالبة في سطر دالة الهدف، مما يعني ليس حلا أمثلا، وفي حالة تعيين عمود (S_1) كعمود ارتكاز فإننا لا نستطيع تحديد سطر الارتكاز، لأن حاصل قسمة كل عناصر العمود الأخير على عناصر عمود الارتكاز يكون سالبا.

3.6.حالة استحالة الحل (**Infeasibility**)

ويعني هذه عدم وجود حل يفي باحتياجات كافة القيود، وتظهر هذه الحالة عندما تحتوي المسألة على بعض القيود المتعارضة وفي مثل هذه الحالة يكون من المستحيل تحديد منطقة الحلول الممكنة.

مثال(10):

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Max(Z) = 10X_1 + 15X_2 \\ \begin{cases} 3X_1 + 6X_2 \leq 15 \\ 2X_1 + 2X_2 \geq 15 \end{cases} \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستخدام بالطريقة البيانية وطريقة السمبلكس؟

1.3.6.الحل باستخدام الطريقة البيانية

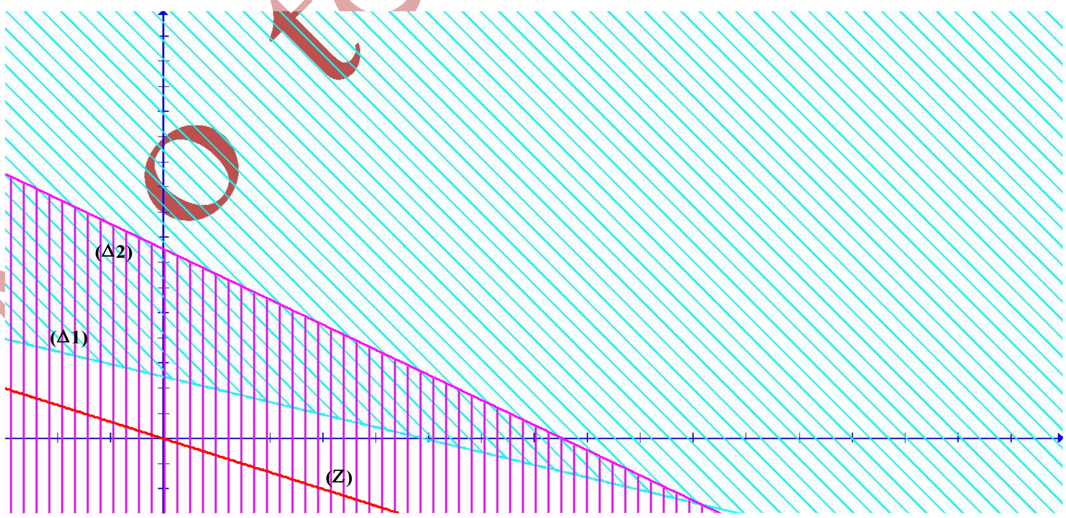
تحويل القيود إلى معادلات وفق الآتي:

$$\begin{cases} 3X_1 + 6X_2 = 15 \ldots\ldots\ldots\ldots(\Delta 1) \\ 2X_1 + 2X_2 = 15 \ldots\ldots\ldots\ldots(\Delta 2) \end{cases}$$

تحديد النقاط المساعدة في عملية الرسم

	X_1	X_2
(Δ1)	0	15/6
	5	0
(Δ2)	0	7.5
	7.5	0

الرسم البياني: تم الاستعانة ببرنامج (Graph) للحصول على الرسم الموالي:



نلاحظ من خلال الشكل أن كل المنطقة مشطبة لتعارض القيدين، وبالتالي نستنتج أن المسألة ليس لها حل.

2.3.6.الحل باستخدام السمبلكس

$$\begin{cases} Max(Z) = 10X_1 + 15X_2 \\ 3X_1 + 6X_2 \leq 15 \\ 2X_1 + 2X_2 \geq 15 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

للشروع في إيجاد الحل الأساسي لابد من الشكل القياسي:

$$Max(Z) = 10X_1 + 15X_2$$
$$3X_1 + 6X_2 + S_1 = 15$$
$$-2X_1 - 2X_2 + S_2 = -15$$
$$X_1, X_2 \geq 0, S_1, S_2 \geq 0.$$

جدول الحل الأساسي

	(0)	(0)	
T1	X_1	X_2	
(0) S_1	3	6	15
(1) S_2	-2	-2	-15
Z^a	-2	-2	x

T2	S_1	X_2	
(0) X_1	1/3	2	5
(1) S_2	2/3	2	-5
(Z^a)	2/3	2	x

بما أن قيم سطر دالة الهدف الوهمية كلها موجبة، والعمود الأخير فيه قيمة سالبة، هذا يعني أنه لا يمكننا المرور إلى المرحلة الموالية، أي لا نستطيع الدخول إلى منطقة الحلول الممكنة (لأن هذه المنطقة أصلا غير موجودة).

4.6.حالة عدم الانتظام (الانحلال) Degenerate Solution

تظهر هذه الحالة عندما يكون أحد أو أكثر من متغيرات التي داخل الأساس قيمتها تساوي الصفر، وعند استخدام طريقة السمبلكس قد تظهر خلال مراحل الحل أو في جدول الحل الأمثل.

مثال(11):

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Max(Z) = 3X_1 + 2X_2 \\ \begin{cases} X_1 \leq 3 \\ 2X_1 + X_2 \leq 6 \\ X_2 \leq 2 \\ X_1 + X_2 \leq 3 \end{cases} \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستخدام بالطريقة البيانية وطريقة السمبلكس؟

1.4.6.الحل باستخدام الطريقة البيانية

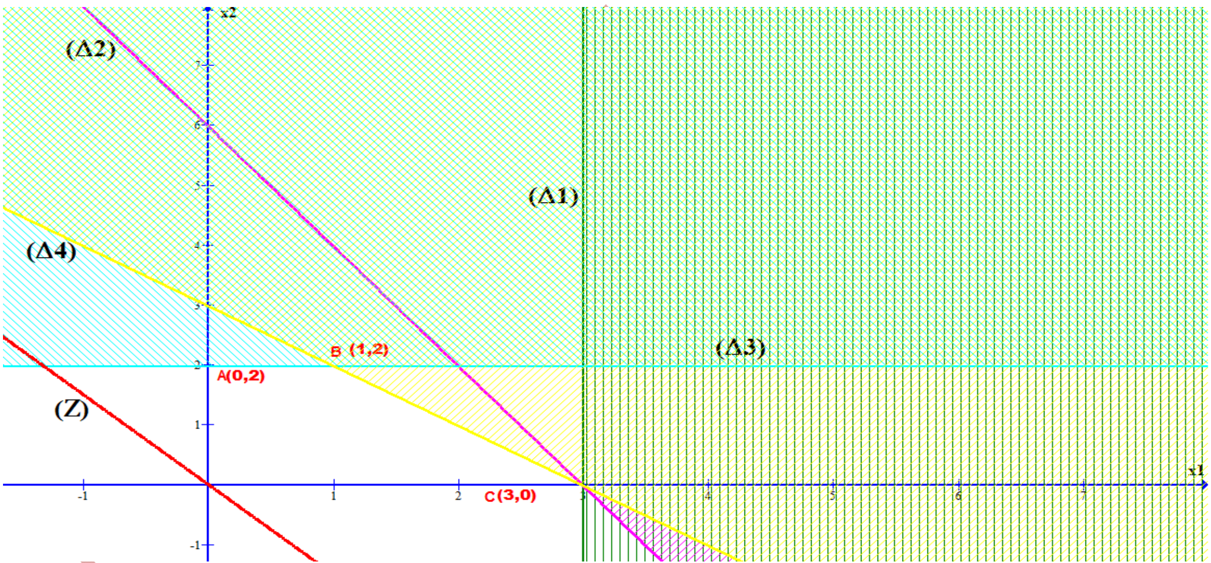
تحويل القيود إلى معادلات وفق الآتي:

$X_1 = 3$....................($\Delta1$)
$2X_1 + X_2 = 6$..............($\Delta2$)
$X_2 = 2$......................($\Delta3$)
$X_1 + X_2 = 3$................($\Delta4$)

تحديد النقاط المساعدة في عملية الرسم

	X_1	X_2
(Δ1)	3	0
(Δ2)	0	6
	3	0
(Δ3)	0	2
(Δ4)	0	3
	3	0

الرسم البياني: تم الاستعانة ببرنامج (Graph) للحصول على الرسم الموالي:



نلاحظ من الشكل أن منطقة الحلول الممكنة تتمثل شبه المنحرف (A، B، C، O) والحل الأمثل هو النقطة (C) ذات الإحداثيات ($X_1=3,\ X_2=0$) التي تعطي أقصى قيمة لـ(Z) وهي 9ون، كما أن المستقيم الثاني لم يغير في هذه المنطقة، وبالتالي هذا المستقيم حيادي.

2.4.6.الحل باستخدام السمبلكس

الشكل القياسي للبرنامج هو كالتالي:

$$\begin{cases} Max(Z) = 3X_1 + 2X_2 \\ \begin{cases} X_1 + S_1 = 3 \\ 2X_1 + X_2 + S_2 = 6 \\ X_2 + S_3 = 2 \\ X_1 + X_2 + S_4 = 3 \end{cases} \\ X_1, X_2 \geq 0, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0. \end{cases}$$

جدول الحل الأساسي

T1	X_1	X_2	
S_1	1	0	3
S_2	2	1	6
S_3	0	1	2
S_4	1	1	3
Z	-3	-2	0

T2	S_1	X_2	
X_1	1	0	3
S_2	-2	1	0
S_3	0	1	2
S_4	-1	1	0
Z	3	-2	9

نلاحظ أن الجدول الثاني لا يعتبر حل أمثلا، لأن هناك قيمة سالبة في سطر دالة الهدف، وبالتالي نمر للجدول الثالث.

T3	S_1	S_4	
X_1	1	0	3
S_2	-1	-1	0
S_3	1	-1	2
X_2	-1	1	0
Z	1	2	9

يعتبر الجدول الثالث حلا أمثلا، لكن ما يمكن ملاحظته أن هناك متغيرات داخل الأساس وقيمتها صفر، مما يدل على حالة الانحلال.

يمكن تلخيص ما سبق دراسته من الحالات الخاصة في الجدول الموالي:

الحالات الخاصة	طريقة الحل البياني	طريقة السمبلكس
تعدد الحلول المثلى البديلة	مستقيم دالة الهدف يوازي أحد القيود	وجود الصفر في سطر دالة الهدف في جدول الحل الأمثل
عدم توفر حدود لمنطقة الحل	منطقة الحل مفتوحة من إحدى الجهات	لا نستطيع تحديد سطر الارتكاز
استحالة الحل	عدم وجود منطقة الحلول الممكنة	بقاء دالة هدف وهمية مع عدم إمكانية إكمال المرحلة الثانية
عدم الانتظام (الانحلال)	وجود قيد معني بتحديد منطقة الحلول الممكنة إلا أنه لا يؤثر	وجود الصفر في العمود الأخير في جدول من جداول الحل

7. تمارين مقترحة

تمرين (1):

مصنع ينتج ثلاثة منتجات غذائية (A، B، C) وكل منتج يمر بثلاث عمليات مختلفة، الزمن المستغرق (دقيقة) لإنتاج وحدة واحدة من كل منتج والطاقة المتاحة لكل عملية (دقيقة /يوم) وربح الوحدة الواحدة لكل منتج (ون) كانت كالآتي:

العملية	الزمن المستغرق (دقيقة)			الطاقة المتاحة
	المنتج (A)	المنتج (B)	المنتج (C)	
الخلط	1	2	1	430 د
الطهي	3	0	2	460 د
التغليف	1	4	0	7سا
الربح	3	2	5	

إن دراسات السوق أشارت إلى أن عدد الوحدات المباعة من المنتج الأول تمثل ضعف عدد الوحدات المباعة من الثاني والثالث معا.

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لتعظيم الربح مع مراعاة أن مجموع الطاقات المتاحة غير المستغلة (العاطلة) للعمليات الثلاثة يجب أن لا تزيد عن 10 دقائق /يوم.

تمرين (2):

مزارع لديه ارض مساحتها 150 هكتار، وفي إطار الاستفادة من مياه السد المجاور له، تمنحه الدولة ما قدره 500 م^3، فيها من العمال ما يكفي لتغطية 480 ساعة عمل، يمكن زراعة هذه الأرض بالعدس والفاصوليا، على أن لا تتجاوز في كل الظروف المساحة المخصصة للعدس 90 هكتار. مع العلم أن سقي هكتار واحد من العدس يتطلب 4 م^3 والفاصوليا 2 م^3، بينما يحتاج هكتار واحد من العدس إلى ساعة عمل، في حين الفاصوليا أربع ساعات عمل. إذا كان الربح المتوقع للهكتار الواحد من العدس هو 100ون والفاصوليا 200 ون، فما هو أفضل استخدام لهذه الأرض.

تمرين(3):

مصنع يقوم بصنع نوعين من السيارات (A، B) ، وكل نوع يمر بورشتين: ورشة التجميع، ورشة الطلاء، لنفرض أن إجمالي ساعات العمل في كلا الورشتين يجب أن لا تقل عن 720، 480 ساعة على التوالي، وأن صنع سيارة واحدة من النوع (A) يحتاج إلى 4 ساعات عمل في ورشة التجميع، 6 ساعات في ورشة الطلاء، بينما صنع سيارة واحدة من النوع (B) يحتاج إلى 6 ساعات عمل في ورشة التجميع، و3 ساعات في ورشة الطلاء.

يقدر الطلب المتوقع على النوعين من السيارات بـ 20 سيارة على الأقل من النوع (A)، و30سيارة على الأقل من نوع (B). فإذا علمت أن الربح الوحدوي الناجم عن بيع السيارتين (A، B) هو على التوالي: 400، 300ون، وضح كيف يمكن صياغة مشكلة البرمجة الخطية لهذه المعطيات؟

تمرين (4):

تنتج شركة (Chiken) نوعين من غذاء الدواجن، حيث يحتوي النوع الأول على 2.5 كغ من الذرة، 125 غ صوجا، 175 كغ من الشعير، في حين النوع الثاني يحتوي على 7.5 كغ ذرة، 125 غ صوجا، و10كغ شعير، فإذا علمت أن الطاقة المتاحة من الذرة والصوجا والشعير هي: 240 كغ، 5كغ، 595 كغ على التوالي. كما أن ربح الوحدة الواحدة من النوع الأول من الغذاء هو 65 ون والنوع الثاني 115 ون، فما هو عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من كلا النوعين لتحقيق أقصى ربح ممكن؟

تمرين (5):

إليك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Max(Z) = 10X_1 + 3X_2 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 30 \\ X_1 + 2X_2 \geq 15 \\ X_1 = 9 \\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: ايجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بيانيا؟

تمرين (6):

إليك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Max(Z) = 6X_1 + 4X_2 \\ -3X_1 + 2X_2 \leq 4 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 16 \\ X_1 \leq 3 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بيانيا؟

تمرين (7):

إليك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Max(Z) = 2X_1 + 3X_2 + 3X_3 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 60 \\ -X_1 + X_2 + 4X_3 \leq 10 \\ 2X_1 - 2X_2 + 5X_3 \leq 50 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس المناسبة؟

تمرين (8):

إليك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Max(Z) = 4X_1 + 5X_2 + 3X_3 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 50 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 \geq 10 \\ X_1 + X_2 = 40 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس على مرحلتين؟

تمرين (9):

إليك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Min(Z) = 5X_1 - 2X_2 + 3X_3 \\ 2X_1 + 2X_2 - X_3 \geq 2 \\ 3X_1 - 4X_2 \leq 3 \\ X_2 + 3X_3 \leq 5 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس على مرحلتين؟

تمرين (10):

إليك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Min(Z) = 5X_1 + 15X_2 + 20X_3 \\ 2X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 500 \\ 2X_2 \leq 200 \\ X_2 + 2X_3 \leq 400 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس بإدخال متغير وهمي؟

الجزء الأول

البرمجة الخطية (المسالة الثنوية)

- ☑ **صياغة المسالة الثنوية**
- ☑ **طرق حل المسالة الثنوية**
- ☑ **تحليل الحساسية**
- ☑ **سلسلة تمارين مقترحة**

1.المسألة الثنوية (Dual Problem)

تمهيد

إن مسائل البرمجة الخطية موجودة دائما على شكل زوجي، وبالتالي كل مسالة برمجة خطية مرفقة ببرنامج خطي مقترن معها يدعى بالمسألة الثنوية، فالمسألة الأصلية التي تتمثل في تعظيم الربح على سبيل المثال لها مسالة ثنوية تتمثل في تخفيض التكاليف، والعكس بالعكس، وينتج عن المسألة الثنوية ما يسمى بأسعار الظل، وهي تمثل التغير في قيمة دالة الهدف لكل تغير قدره وحدة واحدة من كل قيد في المسألة الأصلية (الطرف الأيمن من القيد). ويتم تكوين المسألة الثنوية مباشرة من المسألة الأصلية المناظرة لها، وطبقا للنظرية الثنوية هذه فإن القيمة المثلى لدالة الهدف هي نفس القيمة الموجودة في الأصلية.

ندعو البرنامج الخطي الأولي بالبرنامج الأصلي (P.L.Primal)، أما البرنامج الخطي المتحصل عليه في المسألة المناظرة ببرنامج الثنوي (P.L.Dual).

1.1.أهمية النماذج الثنوية: تتمثل هذه الأهداف فيما يلي:

- تستخدم في إجراء اختبارات تحليل حساسية الحل الأمثل للتغيرات الحاصلة في مدخلات النموذج؛
- توفير كثير من المعلومات التي قد تعتمد عليها الإدارة في اتخاذ العديد من القرارات؛

2.1.صياغة المسألة الثنوية

لنفترض أن لدينا البرنامج الخطي العام للمسالة الأصلية على شكل تعظيم ب (n) متغير و(m) قيد، كما يلي:

$$
\begin{cases}
\text{Max}(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n \\
\begin{cases}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \leq b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \leq b_2 \\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \leq b_m
\end{cases} \\
X_1, X_2, \ldots, X_n \geq 0
\end{cases}
$$

فإن الصياغة الرياضية لنموذج المسألة الثنوية يكون كالآتي:

$$
\begin{cases}
\text{Min}(W) = b_1Y_1 + b_2Y_2 + \cdots + b_mY_m \\
\begin{cases}
a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + \cdots + a_{m1}Y_m \geq C_1 \\
a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 + \cdots + a_{m2}Y_m \geq C_2 \\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
a_{1n}Y_1 + a_{2n}Y_2 + \cdots + a_{mn}Y_m \geq C_n
\end{cases} \\
Y_1, Y_2, \ldots, Y_m \geq 0
\end{cases}
$$

نلاحظ أن هناك علاقة بين المسألتين، إذ يعتمدان على نفس المعطيات.كما أن متغيرات النموذج الأصلي (X_j) تصبح (Y_i).

3.1. خطوات اشتقاق المسألة الثنوية من المسألة الأصلية

للحصول على المسألة الثنوية انطلاقا من المسألة الأصلية يجب إتباع الخطوات الآتية:

- دالة الهدف في المسألة الأصلية تعظيم (Max)، تصبح تخفيض (Min) في المسألة الثنوية؛
- كل متغير (X_j) في الأصلية يوافق قيد في المسألة الثنوية، فإذا كان المتغير ($X_j \geq 0$) فإن القيد يكون على شكل أكبر أو يساوي؛
- كل قيد في الأصلية يوافق متغير (Y_i) في المسألة الثنوية، فإذا كان القيد أقل أو يساوي فإن المتغير ($y_i \geq 0$)، وإذا كان القيد مساواة فإن المتغير لا يساوي الصفر؛
- قيم الطرف الأيمن من قيود المسألة الأصلية (b_i)، هي معاملات لدالة الهدف (W) في المسألة الثنوية؛
- معاملات دالة الهدف للمسالة الأصلية (C_j) تصبح قيما للطرف الأيمن في قيود المسألة الثنوية؛
- مصفوفة المعاملات في المسألة الثنوية هي عبارة عن منقول مصفوفة المعاملات في المسألة الأصلية؛ أي تحويل الأسطر إلى أعمدة.

ملاحظة

قبل صياغة المسألة الثنوية لابد من إجراء التحويلات التالية على المسألة الأصلية:

- إذا كان شكل دالة الهدف تخفيض Min(Z) تحول إلى تعظيم Max(-Z)
- إذا كان القيد اكبر أو يساوي يحول إلى أقل أو يساوي؛
- القيود على شكل معادلات لا تحول.

يمكن تلخيص الخطوات السابقة في الجدول الموالي:

المسألة الأصلية	المسألة الثنوية
دالة الهدف Max(Z) دالة الهدف Min(Z) تحول إلى Max(−Z)	دالة الهدف Min(W) دالة الهدف Min(−w)
عدد القيود يساوي	عدد المتغيرات (Y_i)
عدد المتغيرات (X_j) يساوي	عدد القيود
القيد على شكل أقل أو يساوي (≤)	$Y_i \geq 0$
القيد أكبر أو يساوي (≥) يضرب في (−1) ، أي يصبح أقل أو يساوي	$Y_i \geq 0$
القيد على شكل مساواة (=)	$Y_i \neq 0$

ونظرا لشرط اللاسلبية في المسالة الأصلية، فإن كل القيود في الثنوية تكون على شكل أكبر أو يساوي.

مثال (12):

على ضوء الخطوات السابقة يمكن إيضاح كيفية اشتقاق النموذج الثنائي من الأصلي كما يلي:

المسألة الأصلية	المسألة الثنوية
$Max(Z)= 3X_1+2X_2+4X_3$	$Min(W)= 25Y_1+50Y_2$
$5X_1+2X_2-1X_3 \leq 25$	$5Y_1+2Y_1 \geq 3$
$2X_1-4X_2+6X_3 \leq 50$	$2Y_1-4Y_1 \geq 2$
	$-1Y_1+6Y_1 \geq 4$
$X_1\geq0,\ X_2\geq0,\ X_3\geq0$	$Y_1\geq0,\ Y_2\geq0$

مثال (13):

المسألة الثنوية	المسألة الأصلية
$Min(W) = 900Y_1 +500Y_2+50Y_3+200Y_3$	$Max(Z) = 300X_1 +200\,X_2+100\,X_3$
$2Y_1 +3Y_2 +1Y_3 +0Y_4 \geq 300$	$2X_1 +X_2 + 2X_3 \leq 900$
$1Y_1 +4Y_2 + 0Y_3 +1Y_4 \geq 200$	$3X_1 +4X_2 + 2X_3 \leq 500$
$2Y_1+2Y_2 +0Y_3 + 1Y_4 \geq 100$	$X_1 \leq 50$
$Y_1 \geq0,\ Y_2 \geq0,\ Y_3 \geq0.Y_4 \neq0$	$X_2 +X_3 = 200$
	$X_1 \geq0,\ X_2\geq0,\ X_3\geq0.$

4.1.طرق حل المسألة الثنوية

لحل المسألة الثنوية يمكننا استعمال خمسة طرق، وهي: طريقة التكامل بين متغيرات المسألة الأصلية والمسألة الثنوية، طريقة الاستنتاج(الحل من الجدول الأمثل للمسالة الأصلية)، طريقة السمبلاكس الخاصة بالمسألة الثنوية، وطريقة اعتبار المسألة الثنوية كمسالة أصلية يتم حلها بالسمبلاكس على مرحلتين، بالإضافة إلى طريقة الرسم البياني(في حالة وجود متغيرين).

1.4.1.طريقة التكامل بين متغيرات المسألة الأصلية والمسألة الثنوية:

هذه الطريقة تعتمد على العلاقات التي تربط بين المسالتين وبالتالي يمكن استنتاج علاقات بين المتغيرات كما يلي:

المسالة الثنوية	المسالة الأصلية
$Min(W) = \sum b_i Y_i$	$Max(Z) = \sum C_j X_j$
$\sum a_{ij} Y_i \geq C_j$	$\sum a_{ij} X_j \leq b_i$
$\sum a_{ij} Y_i - t_j = C_j$	$\sum a_{ij} X_j + S_i = b_i$
$Y_i \geq 0,\ t_j \geq 0$	$X_i \geq 0,\ S_i \geq 0$

عند الحل الأمثل نجد أن:

$$(Z) = (W) \Leftrightarrow \sum C_j X_j = \sum b_i Y_i$$

وبتعويض (C_j) و (b_i) بما ويساويهما يصبح لدينا:

$$\sum (\sum a_{ij} Y_i - t_j) X_j = \sum (\sum a_{ij} X_j + S_i) Y_i$$
$$\Rightarrow -\sum t_j X_j = \sum S_i Y_i$$
$$\Rightarrow \sum t_j X_j + \sum S_i Y_i = 0$$

بما أن كل من $(S_i، X_j، Y_i، t_j)$ أكبر من أو تساوي الصفر، فإن:

$$\sum t_j X_j = 0\,;\sum S_i Y_i = 0$$

أي معناه:

$$\sum S_i Y_i = 0 \quad \begin{cases} S_i = 0 \Rightarrow Y_i > 0 \\ S_i > 0 \Rightarrow Y_i = 0 \end{cases}$$
$$\sum t_j X_j = 0 \quad \begin{cases} X_j = 0 \Rightarrow t_j > 0 \\ X_j > 0 \Rightarrow t_j = 0 \end{cases}$$

من خلال ما سبق يمكننا إيجاد قيم $(Y_i، t_j)$ من خلال الحل الأمثل للمسالة الأصلية إن وجدت قيم $(S_i، X_j)$.

ملاحظة

لا يمكن استعمال هذه الطريقة في حالة وجود حلول مثلى بديلة أو حالة عدم الانتظام (حالة التحلل).

مثال (14):ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{gathered} Max(Z) = 4X_1 + 3X_2 + 2X_3 \\ 2X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 10 \\ X_1 + X_2 + X_3 \geq 6 \\ X_1 + X_2 + 2X_3 = 8 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0. \end{gathered}$$

إذا علمت أن الحل الأمثل لهذه المسألة هو: $(X_1=2, X_2=6\ , X_3=0)$

المطلوب: أوجد حلول المسألة الثنوية؟.

الحل:

- يجب إيجاد قيم (S_1، S_2، a_3) من الشكل القياسي للبرنامج الأصلي، وفق ما يلي:

$Max(Z) = 4X_1 +3X_2+2X_3$
$2X_1 +X_2 + 2X_3+ S_1= 10$
$-X_1 -X_2- X_3+ S_2= - 6$
$X_1+X_2 +2X_3 + a_3= 8$
$X_1, X_2, X_3\geq0, S_1, S_2\geq0, a_3=0.$

بتعويض قيم ($X_1=2, X_2=6 , X_3=0$) في معادلات الشكل القياسي نحصل على ما يلي:

$S_1 =0, S_2=2, a_3=0.$

وباستغلال العلاقة التي بين متغيرات المسألة الأصلية والمسألة الثنوية نحصل على:

$t_1 =0, t_2=0, t_3= ?, Y_1 = ?, Y_2=0, Y_3= ?.$

- بعد إيجاد كل قيم متغيرات المسألة الأصلية نمر إلى صياغة المسألة الثنوية:

$$
\begin{gathered}
Min(W) = 10Y_1 -6Y_2+8Y_3 \\
2Y_1 -Y_2 + Y_3\geq 4 \\
Y_1 -Y_2 + Y_3 \geq 3 \\
2Y_1-Y_2 +2Y_3 \geq 2 \\
Y_1 \geq0, Y_2\geq0, Y_3\neq0.
\end{gathered}
$$

الشكل القياسي للمسالة الثنوية:

$$
\begin{gathered}
2Y_1 -Y_2 + Y_3 - t_1= 4 \\
Y_1 -Y_2 + Y_3 -t_2= 3 \\
2Y_1-Y_2 +2Y_3 - t_3= 2 \\
Y_1 \geq0, Y_2\geq0, Y_3\neq0, t_1 \geq0, t_2\geq0, t_3\geq0.
\end{gathered}
$$

بما أن ($t_1=0, Y_2=0 , t_2=0$)، فإن المعادلات تصبح كالآتي:

$2Y_1 + Y_3= 4$..............(1)
$Y_1 + Y_3= 3$................(2)
$2Y_1+2Y_3 - t_3= 2$.........(3)

بطرح المعادلة الأولى من الثانية نجد أن: ($Y_1=1$)

وبتعويض قيمة ($Y_1=1$) في المعادلة الثانية نحصل على ($Y_3=2$)

كذلك بتعويض كل من (Y_1، Y_2) في المعادلة الثالثة نجد أن قيمة ($t_3=4$)

وعليه تصبح حلول المسألة الثنوية هي: **$Y_1 =1, Y_2=0, Y_3=2, t_1 =0, t_2=0, t_3=4, W=26.$**

2.4.1.طريقة الاستنتاج

يمكن استعمال هذه الطريقة في حالة وجود جدول الحل الأمثل للمسالة الأصلية، وباستغلال العلاقات التناظرية بين المتغيرات المسألة الأصلية ومتغيرات المسألة الثنوية يمكننا الحصول على جدول الحل الأمثل للمسألة الأصلية.

مثال (15):

ليكن لديك جدول الحل الأمثل الآتي:

Op T	a_1	S_3		
X_1	1/3	-1/3	8	$t_1=0$
S_2	-7/3	-2/3	6	$Y_2=0$
X_2	2/3	1/3	2	$t_2=0$
(Z)	14/3	1/3	42	W
	Y_1	Y_3		

نستنتج من جدول الحل الأمثل للمسالة الأصلية ما يلي:

متغيرات المسألة الأصلية	متغيرات المسألة الثنوية
$X_1 = 8$	$t_1 = 0$
$X_2 = 2$	$t_2 = 0$
$S_2 = 6$	$Y_2 = 0$
$S_3 = 0$	$Y_3 = 1/3$
$a_1 = 0$	$Y_1 = 14/3$
$Z = 42$	$W = 42$

3.4.1.طريقة السمبلاكس الخاصة بالثنوية

تعمل طريقة السمبلاكس للمسالة الثنوية بأسلوب مشابه لطريقة السمبلاكس الخاصة بالمسألة الأصلية، إلا أن القواعد التي يتم بموجبها اختيار عمود الارتكاز(المتغير الداخل) وسطر الارتكاز(المتغير الخارج) وشرط الأمثلية بالنسبة لطريقة السمبلاكس الثنوية تصبح كما يلي:

- تحويل أي قيد على شكل أكبر أو يساوي إلى قيد أقل أو يساوي (عدى قيود اللاسلبية)، ونضيف متغيرات الفرق التي نرمز لها بالرمز (t)؛
- تحديد المتغير الخارج أولا، وذلك بأخذ أكبر قيمة بالقيمة المطلقة في العمود الأخير، وبالتالي نحصل على سطر الارتكاز؛

– تحديد المتغير الداخل إلى الأساس، وذلك بقسمة قيم سطر دالة الهدف (-W) على مقابلاتها في سطر الارتكاز، ونختار العمود الذي يعطينا أقل قيمة بالقيمة المطلقة، وبالتالي نحصل على عمود الارتكاز؛

– تقاطع سطر الارتكاز مع عمود يعطي عنصر الارتكاز؛

– نحصل على جدول الحل الأمثل للمسألة الثنوية إذاكان العمود الأخير غير سالب.

ولتوضيح ذلك نستعين بالمثال الموالي.

مثال (16):

$$\text{Max}(Z) = 4X_1 + 3X_2 + X_3$$
$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 + X_3 \leq 28 \\ X_1 + X_2 + X_3 \leq 21 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 29 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0. \end{cases}$$

الشكل الثنوي للبرنامج الخطي:

$$\text{Min}(W) = 28Y_1 + 21Y_2 + 29Y_3$$
$$\begin{cases} 2Y_1 + Y_2 + Y_3 \geq 4 \\ Y_1 + Y_2 + 2Y_3 \geq 3 \\ Y_1 + Y_2 + Y_3 \geq 1 \\ Y_1 \geq 0,\ Y_2 \geq 0,\ Y_3 \geq 0. \end{cases}$$

نلاحظ أن القيود على شكل أكبر أو يساوي، لذا وجب ضربها في (1–) لتتحول إلى قيود على صورة أقل أو يساوي، ومن ثم نضيف متغير جديد للطرف الأيسر من القيد يسمى **بتكلفة الفرصة البديلة**، حيث نرمز له بالرمز (t)، إضافة إلى ذلك يتم تحويل الدالة من الشكل (Min(W)) إلى الشكل (Max(-W))، وبالتالي يصبح الشكل القياسي للمسالة الثنوية:

$$\text{Max}(-W) = -28Y_1 - 21Y_2 - 29Y_3$$
$$-2Y_1 - Y_2 - Y_3 + t_1 = -4$$
$$-Y_1 - Y_2 - 2Y_3 + t_2 = -3$$
$$-Y_1 - Y_2 - Y_3 + t_3 = -1$$
$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0.\ t_1, t_2, t_3 \geq 0$$

جداول السمبلاكس

T1	X_1	X_2	X_3	b_i
S_1	2	1	1	28
S_2	1	1	1	21
S_3	1	2	1	29
Z	-4	-3	-1	0

T1	Y_1	Y_2	Y_3		
t_1	-2	-1	-1	-4	نختار السطر أولا
t_2	-1	-1	-2	-3	
t_3	-1	-1	-1	-1	
-W	28	21	29	0	

نلاحظ من جدول الحل الأساسي (T1) للمسالة الثنوية خروج (t_1)، أي دخول (X_1) في الأصلية، بينما المتغير الداخل إلى منطقة الأساس هو (Y_1)، أي خروج المتغير (S_1).

T2	S_1	X_2	X_3	b_i	النسبة
X_1	1/2	1/2	1/2	14	28
S_2	-1/2	1/2	1/2	7	14
S_3	-1/2	3/2	1/2	15	10
Z	2	-1	1	56	

T2	t_1	Y_2	Y_3	
Y_1	-1/2	1/2	1/2	2
t_2	-1/2	-1/2	-3/2	-1
t_3	-1/2	-1/2	-1/2	1
-W	14	7	15	-56

T3	S_1	S_3	X_3	b_i
X_1	2/3	-1/3	1/3	9
S_2	-1/3	-1/3	1/3	2
X_2	-1/3	2/3	1/3	10
Z	5/3	2/3	4/3	66

T3	t_1	Y_2	t_2	
Y_1	-2/3	1/3	1/3	5/3
Y_3	1/3	1/3	-2/3	2/3
t_3	-1/3	-1/3	-1/3	4/3
-W	9	7	10	-66

بما أن العمود الأخير من الجدول الثالث للمسالة الثنوية موجب فإنه يعتبر حل أمثلا، وعليه يكون الحل كما يلي:

$\mathbf{Y_1 = 5/3, Y_2 = 0, Y_3 = 2/3. \; t_1 = 0, t_2 = 0, t_3 = 4/3, W = 66.}$

نلاحظ أن جدول الحل الأمثل للمسالة الثنوية هو عبارة عن مقلوب جدول الحل الأمثل للمسالة الأصلية (كل سطر يصبح عمود)، مع استبدال (Y_i) بالمتغير (S_i) ، وكذا استبدال المتغير (t_j) بالمتغير (X_j)، مع ضرب ما بداخل الجدول (المصفوفة) في (-1).

4.4.1. طريقة السمبلكس على مرحلتين

في هذه الحالة يتم اعتبار المسألة الثنوية كمسألة أصلية، ومنه يمكن حلها بطريقة السمبلكس على مرحلتين أو السملكس بإدخال متغير وهمي.

لنطبق طريقة السمبلكس على مرحلتين على المثال السابق ونقارن النتائج:

الحل:

الشكل القياسي للمسالة الثنوية:

$$\begin{gathered} \mathrm{Max}(-W) = -28Y_1 - 21Y_2 - 29Y_3 \\ -2Y_1 - Y_2 - Y_3 + t_1 = -4 \\ -Y_1 - Y_2 - 2Y_3 + t_2 = -3 \\ -Y_1 - Y_2 - Y_3 + t_3 = -1 \end{gathered}$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0.\ t_1, t_2, t_3 \geq 0$$

جداول السمبلاكس

	(0)	(0)	(0)	
T1	Y_1	Y_2	Y_3	C_i
$(1)t_1$	-2	-1	-1	-4
$(1)t_2$	-1	-1	-2	-2
$(1)t_3$	-1	-1	-1	-1
$-W^I$	-4	-3	-4	x

	(-28)	(-21)		
T2	Y_1	Y_2	t_1	
$(-29)Y_3$	2	1	-1	4
t_2	3	1	-2	5
t_3	1	0	-1	3
$-W$	-30	-8	29	-116

نختار من جدول الحل الأساسي (T1) أكبر قيمة بالقيمة المطلقة في سطر دالة الهدف، ثم نختار أكبر حاصل قسمة موجب (لأن العناصر المرشحة للعب دور عنصر الارتكاز سالبة وحاصل قسمة كل عناصر العمود الأخير على عمود الارتكاز موجبة)، وبالتالي خروج (t_1) من الأساس، ودخول (Y_3) إلى منطقة الأساس. أما في الجدول الثاني فيكون العمود الأول هو عمود الارتكاز فحين السطر الثاني هو سطر الارتكاز(اختيار أقل حاصل قسمة عناصر العمود الأخير على عناصر عمود الارتكاز).

T3	t_2	Y_2	t_1	
Y_3	-2/3	1/3	1/3	2/3
Y_1	1/3	1/3	-2/3	5/3
t_3	-1/3	-1/3	-1/3	4/3
$-W$	10	2	9	-66

بما أن سطر دالة الهدف في الجدول الثالث للمسالة الثنوية موجب فإنه يعتبر حلا أمثلا، وعليه يكون الحل كما يلي:

$$\mathbf{Y_1 = 5/3,\ Y_2 = 0,\ Y_3 = 2/3.\ t_1 = 0,\ t_2 = 0,\ t_3 = 4/3,\ W = 66.}$$

2.المعنى الاقتصادي لمتغيرات المسألة الثنوية

1.2.تكلفة الفرصة البديلة (t_j): تسمى أيضا بالتكلفة المخفضة (Reduced Cost)، وهي القيمة اللازمة لتحسين (بالزيادة أو النقصان) معامل المتغير في دالة الهدف حتى يمكن للمتغير أخذ قيمة أكبر من الصفر في الحل الأمثل.

2.2.سعر الظل (Shadow Price):(Y_i) يقصد به مقدار التغير (زيادة أو نقصان) في قيمة دالة الهدف نتيجة تغير الطرف الأيمن من القيود بوحدة واحدة. شريطة أن لا تتغير المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل وأن لا تتغير عناصر المسألة الأخرى.

2.3.علاقة سعر الظل بدالة الهدف

تبين لنا مما سبق أنه هناك علاقة بين سعر الظل (Y_i) ومتغير الطاقة العاطلة (S_i)، كما أن هذا الأخير هو حصيلة الفرق بين قيمة الطرف الأيمن (الطاقة المتاحة) والطرف الأيسر (الطاقة المستعملة) من القيد* ، وبالتالي أي تغيير يطرأ على الطرف الأيمن سيؤثر على متغير الطاقة العاطلة هذا من جهة، ومن جهة أخرى سيؤثر على دالة الهدف من جهة أخرى، يمكن توضيح هذه العلاقة بينهما من خلال الجدول التالي:

الطرف الأيمن من القيد	قيمة سعر الظل	قيمة دالة الهدف
إضافة وحدة واحدة	موجبة	زيادة دالة الهدف بقيمة سعر الظل
إضافة وحدة واحدة	سالبة	انخفاض دالة الهدف بقيمة سعر الظل
إضافة وحدة واحدة	معدومة	لا يحدث تغيير
إنقاص وحدة واحدة	موجبة	انخفاض دالة الهدف بقيمة سعر الظل
إنقاص وحدة واحدة	سالبة	زيادة دالة الهدف بقيمة سعر الظل
إنقاص وحدة واحدة	معدومة	لا يحدث تغيير

Source : Ruhul A.Sarker,Charles S.Newton, « Optimization Modelling Approach »,CRC press, New york,2008,p330.

مثال (17):

ليكن لديك البرنامج الخطي لمؤسسة تنتج ثلاث منتجات (A، B، C) على النحو التالي:

$$Max(Z) = 650X_1 +500 X_2+100 X_3$$ دالة الربح

$$2X_1 +X_2 + 2X_3\leq 1000$$ قيد ساعات العمل

$$3X_1 +4X_2 + 2X_3\leq 500$$ قيد ساعات اختبار

$$X_1 \leq 60$$ قيد تسويقي

$$X_2 +X_3 = 200$$ قيد تسويقي

$$X_1, X_2, X_3\geq 0.$$

والحل الأمثل لهذه المسألة هو كالآتي:

opt	X_2	S_2	a_4	
S_1	-3	-1	0	500
X_1	1	1/2	-1	50
S_3	-1	-1/2	1	10
X_3	1	0	1	200
(Z)	250	325	-550	52500

المطلوب:استنتج حل المسألة الثنوية مع الشرح الاقتصادي لمتغيراتها؟

* – القيد هنا هو قيد داخلي.

الحل:

حسب جدول الحل الأمثل فإن الحل الأمثل يتطلب بإنتاج 50 وحدة من المنتج (B) و 200 وحدة من (C)، مع بقاء طاقة عاطلة في القيد الأول قدرها 500 ساعة عمل، وفرق في الإنتاج في القيد الثالث قدرها S_3=10 وحدة؛ لتحقيق أقصى ربح قدره 52500 ون.

- **الحل الأمثل للمسالة الثنوية**: نستنتج من جدول الحل الأمثل ما يلي:

$t_1= 0,$ $t_2= 250,$ $t_3= 0,$ $y_1= 0,$

$y_2= 325,$ $y_3= 0,$ $y_4= -550$ $W= 52500$

- **شرح المعنى الاقتصادي:**

$y_1=0$: الحل الأمثل يتطلب عدم استغلال كل ساعات العمل (S_1=500)، وكل ساعة إضافية لا تؤثر على دالة الهدف.

$y_2=325$: الحل الأمثل يتطلب استغلال كل ساعات الإختبار (S_2=0)، وكل ساعة إضافية ترفع قيمة دالة الهدف بمقدار 325 ون.

$y_3=0$: الحل الأمثل يتطلب إنتاج كمية دنيا قدرها 50 وحدة من المنتوج الأول، وكل وحدة منتجة إضافية لا تغير قيمة دالة الهدف.

$y_4=-550$: الحل الأمثل يتطلب إنتاج 200 وحدة بالضبط من المنتجين الثاني والثالث، وكل وحدة منتجة إضافية سوف ينجم عنها انخفاض في الربح قدره 550 ون.

$t_1=0$: الحل الأمثل يقضي بإنتاج كمية قدرها 50 وحدة من (A)، وبالتالي لا يتأثر الحل الأمثل إذا قررت المؤسسة إنتاج هذا النوع بهذه الكمية.

$t_2=0$: حسب الحل الأمثل فإنه لا يجب إنتاج المنتج الثاني، بالتالي إذا قررت المؤسسة العكس فإنها تتحمل انخفاضا في الأرباح قدره 250 ون لكل وحدة منتجة من هذا النوع.

$t_3=0$: الحل الأمثل يقضي بإنتاج كمية قدرها 200 وحدة من (C)، وبالتالي لا يتأثر الحل الأمثل إذا قررت المؤسسة إنتاج هذا النوع بهذه الكمية.

3.تحليل الحساسية (Sensitivity Analysis)

يقصد بتحليل الحساسية: "القيام بعملية تحليل كمي بهدف البحث عن إجابة لسؤال يدور مضمونه حول: ماذا يحدث لو حدث تغير في قيمة كل أو بعض البيانات الداخلة في صياغة المسألة".

ويهدف تحليل الحساسية إلى تحديد مدى استجابة الحل الأمثل الذي تم التوصل إليه للتغيرات التي قد تطرأ على قيمة معاملات دالة الهدف أو الجانب الأيمن من قيود المسألة الأصلية، حيث يسمح بمعرفة الحد المسموح به للزيادة أو النقصان في الحل الأمثل دون إعادة حل للمسألة من جديد، مع فرضية بقاء جميع المعلمات الأخرى ثابتة.

ويعالج تحليل الحساسية التغيرات في المدخلات الآتية:

- التغير في معاملات دالة الهدف؛
- التغير في الطرف الأيمن من القيود؛
- التغير في مصفوفة القيود؛
- إضافة متغير إلى البرنامج الأصلي؛
- إضافة قيد للبرنامج الأصلي؛
- حذف متغير من البرنامج الأصلي؛
- حذف قيد من البرنامج الأصلي.

1.3. التغير في معامل دالة الهدف (Changes in the Coefficients the Objective Function)

من المعروف أن دالة الهدف تنطوي على حالتين: الأولى التعظيم وتكون فيها المعاملات ممثلة للأرباح على سبيل المثال والثانية التدنية، وتكون فيها المعاملات ممثلة للتكاليف على سبيل المثال، ويوضح تحليل الحساسية مجالات التغير في هذه المعاملات، والتي تحافظ على الحل الأمثل دون تغيير.

سنقوم باستخدام طريقة السمبلاكس للتعرف على درجة حساسية الحل الأمثل المتحصل عليه للتغيرات في معاملات متغيرات دالة الهدف (X_i) من ناحيتين: الأولى لما يكون المتغير أساسي والثانية عندما يكون المتغير خارج الأساس.

مثال (18): ليكن لديك البرنامج الخطي لشركة تنتج ثلاث مشروبات (A، B، C) على النحو التالي:

$$Max(Z) = 105\ X_1 + 150\ X_2 + 100\ X_3$$ دالة الربح

$$X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 800$$ قيد المشمش (كغ)

$$X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 700$$ قيد الفراولة (كغ)

$$X_1 + X_2 \leq 400$$ قيد تسويقي

$$X_2 + X_3 = 200$$ قيد تسويقي

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0.$$

والحل الأمثل لهذه المسألة هو كالآتي:

opt	X_2	S_2	a_4	
S_1	-2	A	0	100
X_1	1	1	-2	300
S_3	0	-1	2	100
X_3	C	0	1	200
(Z)	55	B	-110	51500

المطلوب:

- أكمل الفراغات التالية؟
- ما هو مقدار التغير في ربح المنتج الأول الذي يبقي الحل الأمثل كما هو؟
- ما هو مقدار ربح المنتوج الثاني الذي يجعل الشركة تنتجه؟

الحل:

للحصول على الناقصة في الجدول وجب الاستعانة بإحدى الطرق التالية:

- **الطريقة الأفقية:** نستخدم حلول الجدول الأساسي ($X_1=X_2=X_3=0$)، $S_1=80$، $S_2=700$، $S_3=400$، $a_4=200$)، وبالتالي يصبح الجدول كالتالي:

		(0)	(700)	(200)	
	opt	X_2	S_2	a_4	
(800)	S_1	-2	A	0	100
(0)	X_1	1	1	-2	300
(400)	S_3	0	-1	2	100
(0)	X_3	C	0	1	200
(0)	(Z)	55	B	-110	51500

$[0(2) + 700\,(A) + 200(0)] + 800 = 100$
$700(A) = -700 \Rightarrow A=-1$
$[0(55) + 700\,(B) + 200(-110)] + 0 = 51500$
$700\,(B) = 73500 \Rightarrow B=105$

بالنسبة للنقطة (C) لا نستطيع إيجادها بالطريقة الأفقية، وإنما نستعين بالطريقة العمودية، والتي يتم فيها استعمال معاملات دالة الهدف (100، 150، 105).

		(150)	(0)	(0)	
	opt	X_2	S_2	a_4	
(0)	S_1	-2	A	0	100
(105)	X_1	1	1	-2	300
(0)	S_3	0	-1	2	100
(100)	X_3	C	0	1	200
(0)	(Z)	55	B	-110	51500

$[0(-2) + 105(1) + 0(0) + 100\,(C)] - 150 = 55$

$100(C) = 100 \Rightarrow C=1$

– مقدار التغير في ربح المنتج الأول الذي يبقي الحل كما هو:

تصبح دالة الهدف:

$$Max(Z) = (105+\alpha)\, X_1 + 150\, X_2 + 100\, X_3$$

		(150)	(0)	(0)	
	opt	X_2	S_2	a_4	
(0)	S_1	-2	-1	0	100
(105+α)	X_1	1	1	-2	300
(0)	S_3	0	-1	2	100
(100)	X_3	1	0	1	200
(0)	(Z)	55	105	-110	51500
	(Z)	55+α	105+α	-110+α	

حتى لا يتغير الحل الأمثل، لابد أن تكون قيم السطر الجديد في دالة الهدف موجبة تماما، وعليه:

$55+\alpha > 0 \;\Rightarrow \alpha > -55$

$105+\alpha > 0 \;\Rightarrow \alpha > -105$

$\alpha \in]-55, 0[\; \cup\;]0, +\infty[$

هذه النتيجة تعني أن الحل الأمثل سيبقى كما هو ما لم يخفض هامش ربح المنتج الأول بمقدار يزيد عن 55 ون.

– مقدار التغير في ربح المنتج الثاني الذي يجعله يدخل للأساس.

تصبح دالة الهدف:

$$Max(Z) = 105\, X_1 + (150+\alpha)\, X_2 + 100\, X_3$$

		(150+α)	(0)	(0)	
	opt	X_2	S_2	a_4	
(0)	S_1	-2	-1	0	100
(105)	X_1	1	1	-2	300
(0)	S_3	0	-1	2	100
(100)	X_3	1	0	1	200
(0)	(Z)	55	105	-110	51500
	(Z)	55-α	105	-110	

حتى لا يتغير الحل الأمثل، لابد أن تكون قيم السطر الجديد في دالة الهدف سالبة، وعليه:

$55-\alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 55$

$\alpha \in]55, +\infty[$

نستنتج أنه أذا أرادت الشركة إنتاج المنتج الثاني يجب عليها زيادة هامش الربح لهذا المنتج بمقدار يفوق 55 ون.

2.3.التغير في الطرف الأيمن من القيود (Changes in the right Side of the Constraints)

قد يحصل تغير للموارد المتوفرة في المسألة في لحظة ما، وبالتالي من المهم معرفة المدى الذي يمكن أن تتغير فيه هذه المصادر دون أن يتغير الحل الأمثل.

ولتوضيح هذا الأثر يمكننا الاستعانة بالمثال السابق، بافتراض أن كمية الفراولة تغيرت بمقدار معين (α)، ومنه السؤال الذي يطرح نفسه الآن هو: إلى أي مدى يمكن أن تتغير كمية الفراولة دون يتغير الحل الأمثل؟

الحل:

وعليه يصبح القيد الثاني كما يلي:

$X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 700 + \alpha$

		(0)	(700+α)	(200)		
	opt	X_2	S_2	a_4		
(800)	S_1	-2	-1	0	100	100-α
(0)	X_1	1	1	-2	300	300+α
(400)	S_3	0	-1	2	100	100-α
(0)	X_3	1	0	1	200	200
(0)	(Z)	55	105	-110	51500	51500+105α

حتى لا يتغير الحل الأمثل، لابد أن تكون قيم العمود الأخير في جدول الحل الأمثل غير سالبة، وعليه:

$100 - \alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha \leq 100$

$300 + \alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq -300$

$\alpha \in [-300, 0[\cup]0, 100]$

إذن يمكننا تخفيض كمية الفراولة إلى حدود 400 كغ، وإضافة كمية تصل إلى 100كغ دون أن يتغير الحل الأمثل. إلا أن دالة الهدف سوف تتغير بمقدار (150α).

3.3.التغير في معاملات القيود (Changes in the Technological Coefficients)

ترتبط المعاملات (a_{ij}) في القيود عادة بالمتغيرات (X_i) واختبار مدى التغير في تلك المعاملات على الحل الأمثل سوف يختلف ما إذا كانت هذه المعاملات تتعلق بمتغير أساسي أو غير أساسي في جدول الحل الأمثل.

مثال(20):

نرجع للمثال السابق، ولنفترض أن معامل (X_2) في القيد الثاني قد تغير بمقدار (α)، فما هو أثر ذلك على الحل الأمثل؟

بما أن القيد الثاني يرتبط بالمتغير (S_2) فإن أي تغير في معامل (X_2) **في هذا القيد** سوف يوثر على عمود (X_2) في جدول الحل الأمثل، وعليه فإن عمود معاملات المتغير (X_2) بعد التعديل هو عبارة عن نفس العمود في جدول الحل الأمثل مضافا إليه حاصل ضرب مقدار التغير في عمود (S_2)، والنتائج كانت كالآتي:

					حاصل ضرب	عمود (X_2) الجديد
opt	X_2	S_2	a_4		$S_2(\alpha)$	$S_2(\alpha)+X_2$
S_1	-2	-1	0	100	-1α	$-1\alpha-2$
X_1	1	1	-2	300	1α	$1\alpha+1$
S_3	0	-1	2	100	-1α	-1α
X_3	1	0	1	200	0	1
(Z)	55	105	-110	51500	105α	$105\alpha+55$

حتى يبقى الحل الأمثل دون تغيير لابد أن تكون القيمة $(105\alpha+55)$ موجبة، ومنه:

وهذا معناه أن التغير في معامله يجب أن ينتمي إلى $105\alpha+55 \geq 0 \;\Rightarrow\; \alpha \geq -55/105$

4.3.إضافة متغير جديد في المسألة (Addition of a New Variable)

بعد التوصل إلى الحل الأمثل للمسالة قد يتبين لصاحب القرار أن أحد متغيرات القرار لم تؤخذ بعين الاعتبار، ويتعين عليه إضافتها، لذا يتوجب عليه إدراجها ضمن البرنامج الخطي، وبالتالي التفكير فيما سيحدث من أثر على الحل الأمثل.

ولتوضيح ذلك نفترض في المثال السابق أن الشركة ترغب في إضافة إنتاج منتج رابع (D) باعتباره لم يؤخذ بعين الاعتبار أثناء صياغة البرنامج الخطي، فما هو أدنى ربح لهذا المنتج الذي يجعل الشركة تُقبل على إنتاجه؟ علما أن كل وحدة من هذا المنتج تتطلب 2 كغ من المشمش، و1كغ من الفراولة.

الحل:

نحن نعلم أن إضافة متغير في المسألة الأصلية يعني إضافة قيد في المسألة الثنوية، وبالتالي نرمز لكمية المنتج الرابع بالرمز (X_4)، وعليه يصبح القيد الجديد في المسألة الثنوية كالآتي:

$$2Y_1 + Y_2 \geq \alpha$$

حيث (α) يمثل المعامل(C_4) في دالة الهدف الجديدة، وبالتالي يتعين علينا أولا إدخال هذا القيد في الجدول الأمثل للمسالة الثنوية بعد تحويله إلى شكل أقل أو يساوي، ففي حالة ما إذا كان الحل الأمثل الأولي يستوفي هذا القيد الجديد في المسألة الثنوية فيظل الحل الأولي للمسالة الأصلية حلا أمثلا.

$-2Y_1-Y_2 \leq -\alpha \quad \Rightarrow -2Y_1 -Y_2 + t_3 = -\alpha$

وبذلك يصبح جدول الحل الأمثل للنموذج الثنوي كالآتي:

		(-2)	(0)	(0)	(0)	(-α)
	opt	Y_1	t_1	Y_3	t_3	
(0)	t_2	2	-1	0	-1	55
(-1)	Y_2	1	-1	1	0	105
(0)	Y_4	0	2	-2	-1	110
(0)	t_4	a_{14}	a_{24}	a_{34}	a_{44}	C_4
(0)	(-W)	100	300	100	200	-51500

يتم حساب سطر (t_3) وفق الطريقة التالية:

$a_{14}= -2 - [(-1)(1)] = -1$
$a_{24}=0 - [(-1)(-1)] = -1$
$a_{34}= 0 - [(-1)(1)] = 1$
$a_{44}= 0 - [(-1)(0)] = 0$
$C_4= -\alpha -[(-1)(105)] \Rightarrow C_4= -\alpha +105$

حتى يتم إنتاج المنتج (D) لابد أن يكون (t_3) خارج الأساس، وهذا لا يتم إلا إذا كانت القيمة ($-\alpha +105$) أقل من أو تساوي الصفر، أي:

$-\alpha + 105 \leq 0 \Rightarrow \alpha \geq 105$

هذا معناه أنه لكي يتم إنتاج المنتج (D) لابد أن تضمن تسويقه بربح لا يقل عن 105 ون.

5.3.إضافة قيد جديد في المسألة (Addition of a New Constraint)

قد يحدث في بعض مسائل البرمجة الخطية أن يتم إضافة قيد جديد لقيود المسألة الأصلية بعد الحصول على الحل الأمثل، وبالتالي يمكن أن يكون الحل الأمثل الذي تم الحصول عليه من قبل يستوفي هذا القيد الجديد.فإذا كان كذلك فإنه يمكن توسيع البرنامج الخطي بإضافة هذا القيد، ومن ناحية أخرى، إذا كان الحل الأمثل السابق يتغير بإضافة القيد الجديد، فيجب علينا البحث عن الحل الأمثل الجديد.

ولتوضيح ذلك نفترض في المثال السابق أن الشركة ترغب في إضافة قيد خاص بالبرتقال، حيث كل وحدة من المنتجات الثلاثة (A، B، C) تتطلب 2، 2، 1 كغ من البرتقال على التوالي. فالمطلوب اختبار حساسية الحل الأمثل لهذا التعديل في البرنامج الخطي للمسالة الأصلية؟

الحل:

بناءا على المعطيات الجديدة يتم صياغة القيد الجديد على النحو التالي:

$2X_1 + 2X_2 + 1X_3 \leq \alpha$ قيد البرتقال (كغ)

ثم بعد ذلك استخراج الشكل القياسي بإضافة (S_5) للطرف الأيسر من القيد الجديد، وبذلك يصبح جدول الحل الأمثل كما يلي:

		(2)	(0)	(0)	**α**
	opt	X_2	S_2	a_4	
(0)	S_1	-2	-1	0	100
(2)	X_1	1	1	-2	300
(0)	S_3	0	-1	2	100
(1)	X_3	1	0	1	200
(0)	S_5	a_{41}	a_{42}	a_{43}	b_4
(0)	(Z)	55	105	-110	51500

يتم حساب سطر (S_5) وفق الآتي:

$a_{41} = 2 - [2(1) + 1(1)] = -1$

$a_{41} = 0 - [2(1) + 1(0)] = -2$

$a_{41} = 0 - [2(-2) + 1(1)] = 3$

$b_4 = \alpha - [2(300) + 1(200)] \Rightarrow b_4 = \alpha - 800$

حتى يبقى الحل الأمثل المتحصل عليه حلا أمثلا لابد أن تكون القيمة $(\alpha - 800)$ اكبر أو تساوي الصفر، أي:

$\alpha - 800 \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq 800$

هذا معناه أن أدنى كمية يجب توفيرها من البرتقال يجب أن لا تقل عتبة 800 كغ.

6.3.حذف متغير من المسألة (Deletion of Variable)

في بعض الظروف قد تلجأ المؤسسة إلى التخلي على منتج ما نظرا لعدم ربحيته، أو نقص الطلب عليه في السوق، وبالتالي ما هو أثر ذلك على الحل الأمثل المتحصل عليه؟

للإجابة عن هذا السؤال قد نواجه حالتين:

1.6.3.المتغير (X) خارج الأساس:

إن وجود هذا المتغير خارج الأساس يدل على أن الحل الأمثل يتطلب عدم إنتاجه، وعليه فإن التخلي عنه أمر مرغوب فيه، ويتم ذلك رياضيا بشطب العمود الحامل لهذا المتغير دون أن يتغير الحل الامثل.

مثال (19): لنفترض أن الشركة قررت التخلي عن إنتاج المنتج الثاني، فما أثر ذلك على الحل الأمثل المتحصل عليه؟

opt	S_2	a_4	
S_1	-1	0	100
X_1	1	-2	300
S_3	-1	2	100
X_3	0	1	200
(Z)	105	-110	51500

opt	~~X_2~~	S_2	a_4	
S_1	~~-2~~	-1	0	100
X_1	~~1~~	1	-2	300
S_3	~~0~~	-1	2	100
X_3	~~1~~	0	1	200
(Z)	~~55~~	105	-110	51500

2.6.3. المتغير (X) داخل الأساس

إن وجود هذا المتغير داخل الأساس يدل على أن الحل الأمثل يتطلب إنتاجه بكمية قدرها (X_i)، وعليه فإذا قررت المؤسسة التخلي عن إنتاجه لظروف معينة، فإن ذلك سوف يؤثر على دالة الهدف والحل الأمثل ككل. ولإزالة هذا المتغير من البرنامج الخطي دون إعادة الحل نتبع الخطوات التالية:

- استخراج الحل الأمثل للمسالة الثنوية، ونختار المرافق الخاص بهذا المتغير (t) كعمود ارتكاز؛
- نختار سطر الارتكاز ثم نمر للجدول الموالي، ونكمل الخطوات المتبعة في طريقة السمبلاكس الخاصة بالمسألة الأصلية؛
- عند الحصول على الجدول الموالي يتم حذف سطر المرافق (t)، وبالتالي تم حذف عمود المتغير (X) (المنتوج المراد التخلي عنه)؛
- مواصلة البحث عن الحل الأمثل الجديد للمسالة الثنوية، ثم بعد ذلك استنتاج الحل الأمثل للمسالة الأصلية.

مثال (20): لنفترض أن الشركة قررت التخلي عن إنتاج المشروبات (C) نظرا لتناقص الطلب عليها، فما اثر ذلك على الحل الامثل؟

الحل:

T3	Y_1	t_1	Y_3	t_3	
t_2	2	-1	0	-1	55
Y_2	1	-1	1	0	105
Y_4	0	2	-2	-1	-110
(-W)	100	300	100	200	-51500

T3	X_2	S_2	a_4	
S_1	-2	-1	0	100
X_1	1	1	-2	300
S_3	0	-1	2	100
X_3	1	0	1	200
(Z)	55	105	-110	51500

نلاحظ المتغير (t_3) موجود خارج الأساس في جدول الحل الأمثل للمسالة الثنوية، لذا نحاول إدخاله باختياره كعمود الارتكاز، ثم نحدد سطر الارتكاز (أقل حاصل قسمة بالقيمة المطلقة).

T4	Y_1	t_1	Y_3	t_2	
~~t_3~~	~~-2~~	~~1~~	~~0~~	~~-1~~	~~-55~~
Y_2	1	-1	1	0	105
Y_4	-2	3	-2	-1	-165
(-W)	500	100	100	200	-40500

T4	~~X_3~~	S_2	a_4	
S_1	~~2~~	-1	2	500
X_1	~~-1~~	1	-3	100
S_3	~~0~~	-1	2	100
X_2	~~1~~	0	1	200
(Z)	~~-55~~	105	-165	40500

نقوم بتشطيب سطر المتغيرة (t_3) (تم حذف عمود X_3 في الأصلية) فنحصل جدول الحل الأمثل للمسالة الثنوية، ومنه نستخرج جدول الحل الأمثل للمسالة الأصلية كما يلي:

opt	Y_1	t_1	Y_3	t_2	
Y_2	1	-1	1	0	105
Y_4	-2	3	-2	-1	-165
(-W)	500	100	100	200	-40500

opt	S_2	a_4	
S_1	-1	2	500
X_1	1	-3	100
S_3	-1	2	100
X_2	0	1	200
(Z)	105	-165	40500

من جدول الحل الأمثل يتبن أن برنامج الإنتاج المتحصل عليه لأول مرة، قد تغير حيث أصبحت الشركة تنتج 100 من النوع الأول و200 من النوع الثاني لتحقيق أعظم ربح قدره 40500 ون.مع وجود طاقة عاطلة القيد الأول تقدر بـ 500 كغ، وفرق في الإنتاج قدره 100 قارورة.

7.3.حذف قيد من المسألة (Deletion of Constraint)

في هذه الحالة نحاول معرفة أثر إخراج قيد من المسألة (يعني التخلي على S) على الحل الأمثل وهذا معناه أن الشركة تصبح غير مقيدة باستعمال كمية محدودة من نوع معين في المدخلات على سبيل المثال، غير أننا قد نصادف الحالتين التاليتين:

1.7.3.حالة وجود متغير الفرق داخل الأساس

إن وجود المتغير (S) في الأساس في جدول الحل الأمثل، يدل على بقاء جزء من نوع معين من المدخلات لم يتم استغلاله في ذلك القيد، وعليه فإن إزالة هذا القيد لن يكون له أي أثر على الحل الأمثل، بمعنى أننا لو قمنا بإعادة الحل للبرنامج دون هذا القيد فإن الحل الأمثل سيبقى كما هو. وعليه يمكن تشطيب السطر الخاص بهذا القيد في جدول الحل الأمثل دون أن يطرأ أي تغيير على الحل الامثل.

مثال (21): نبقى دائما في نفس المثال، ولنفترض أن الشركة قررت التخلي عن أحد مكونات المشروبات التي تدخل في تركيبته وليكن المشمش أو أن نفس النوع أصبح متوفرا بكميات كبيرة نسبيا. فما أثر ذلك على الحل الأمثل؟

الحل:

opt	X_2	S_2	a_4	
~~S_1~~	~~-2~~	~~-1~~	~~0~~	~~100~~
X_1	1	1	-2	300
S_3	0	-1	2	100
X_3	1	0	1	200
(Z)	55	105	-110	51500

opt	X_2	S_2	a_4	
X_1	1	1	-2	300
S_3	0	-1	2	100
X_3	1	0	1	200
(Z)	55	105	-110	51500

2.7.3.حالة وجود متغير الفرق خارج الأساس

في هذه الحالة يكون المتغير (S) خارج الأساس، وهذا يدل على استهلاك كلي للطاقة المتاحة في ظل البرنامج الأمثل للإنتاج، بالتالي فإن إزالة هذا القيد سوف يؤثر على الحل الأمثل. ولإزالة هذا القيد دون إعادة حل المسألة من جديد نتبع الخطوات التالية:

- اختيار عمود (S) الخاص بهذا القيد كعمود الارتكاز؛
- ثم اختيار سطر الارتكاز وذلك بقسمة العمود الأخير على عمود الارتكاز ثم أخذ أقل حاصل قسمة؛
- في الجدول الموالي نقوم بحذف سطر (S)، ثم نواصل البحث عن الحل الأمثل الجديد، وذلك بإتباع الخطوات المعمول بها في طريقة لسمبلاكس.

مثال (22): لنفترض أن الشركة تفكر حاليا في التخلي عن الفراولة. فما أثر ذلك على الحل الأمثل؟

الحل:

نختار العمود الثاني (S_2) كعمود ارتكاز في جدول الحل الأمثل القديم (T3)، ثم نقوم باختيار سطر الارتكاز الذي هو عبارة عن السطر الثاني الموافق للمتغير (X_1).

T3	X_2	S_2	a_4	
S_1	-2	-1	0	100
X_1	1	1	-2	300
S_3	0	-1	2	100
X_3	1	0	1	200
(Z)	55	105	-110	51500

T4	X_2	X_1	a_4	
S_1	-1	1	-2	400
~~S_2~~	~~1~~	~~1~~	~~-2~~	~~300~~
S_3	1	1	0	400
X_3	1	0	1	200
(Z)	-50	-105	100	20000

في الجدول الموالي نحذف سطر المتغير (S_2)، ونحاول البحث عن الحل الأمثل الجديد، حيث يصبح (S_3) عمود ارتكاز والمتغير (X_1) سطر الارتكاز.

opt	X_2	S_3	a_4	
S_1	-2	-1	-2	0
X_1	1	1	0	400
X_3	1	0	1	200
(Z)	55	105	100	62000

بذلك نلاحظ أن أثر إزالة القيد الثاني من المسألة أدى إلى ارتفاع قيمة دالة الهدف لتصل إلى حدود 62000 ون، وكذا ارتفاع الكمية المنتجة من المنتج الأول بـ 100 قارورة.

4.تمارين مقترحة

تمرين (**1**): صغ البرنامج الخطي التالي على شكل مسالة ثنوية؟

$$\begin{gathered} Min(Z) = 8X_1 + 5X_2 + 4X_3 \\ 4X_1 + 2X_2 + 8X_3 = 120 \\ 7X_1 + 5X_2 + 6X_3 \geq 90 \\ 8X_1 + 5X_2 + 4X_3 \leq 100 \\ 3X_1 + 7X_2 + 9X_3 \geq 70 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0. \end{gathered}$$

تمرين (**2**): صغ البرنامج الخطي التالي على شكل مسالة ثنوية؟

$$\begin{gathered} Max(Z) = 6X_1 + 5X_2 + 2X_3 + X_4 \\ 2X_1 + 3X_2 + X_3 + 4X_4 \leq 10 \\ 3X_1 + X_2 + 4X_3 \leq 8 \\ 2X_1 + 4X_2 + X_3 + 6X_4 \leq 14 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{gathered}$$

تمرين (**3**): أكتب البرنامج الخطي الثنوي للبرنامج الأصلي التالي؟

$$\begin{gathered} Max(Z) = 2X_1 - X_2 + X_3 \\ X_1 + X_{-3} + X_3 \leq 8 \\ 4X_1 - X_2 + X_3 \geq 2 \\ 2X_1 + 3X_2 - X_3 \geq 4 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{gathered}$$

تمرين (**4**): أليك البرنامج الخطي الآتي:

$$\begin{gathered} Max(Z) = 6X_1\ 6 + X_2 + X_3 + 7X_4 + 5X_5 \\ 3X_1 + 7X_2 + 8X_3 + 5X_4 + X_5 = 2 \\ 2X_1 + X_2 + 3\ X_4 + X_5 = 6 \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0 \end{gathered}$$

المطلوب: أوجد حل الأمثل لهذا البرنامج دون استعمال طريقة السمبلاكس؟

تمرين (5): ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{gathered} Min(Z) = 4X_1 + X_2 + X_3 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 23 \\ X_1 + X_3 \leq 10 \\ 8X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 40 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0. \end{gathered}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستخدام السمبلاكس الخاص بالثنوية؟

تمرين (6): إليك البرنامج الخطي الآتي:

$$\begin{gathered} Max(Z) = 4X_1 - 3X_2 + 2X_3 - X_4 \\ 2X_1 + X_2 + 3X_3 + X_4 \leq 3 \\ X_1 - X_2 + 2X_3 - 3X_4 \leq 7 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{gathered}$$

المطلوب:

- أوجد الحل الأمثل بطريقة السمبلاكس؟
- في حالة إضافة القيد التالي: $(X_1+X_2+X_3+X_4 \leq 2)$، فما أثر ذلك على الحل الأمثل؟

تمرين (7): ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{gathered} Max(Z) = 10X_1 + 3X_2 + 8X_3 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 21 \\ 4X_1 + 2X_2 + 5X_3 \leq 20 \\ 2X_1 + 5X_2 + X_3 \leq 12 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0. \end{gathered}$$

المطلوب:

1- إيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة؟

2- اختبار حساسية الحل الأمثل إذا حدثت التغيرات التالية في معاملات دالة الهدف:

- نقص معامل (X_1) بدالة الهدف بمقدار 3 ون
- زيادة معامل (X_2) بدالة الهدف بمقدار 2 ون
- تحديد مجال تغير معامل كل من (X_1) و (X_3) بدالة الهدف والذي يبقى معه الحل الأمثل دون تغيير؟
- زيادة الطاقة المتاحة في القيد الثاني من 20 إلى 26.
- نقص الطاقة المتاحة في القيد الثالث من 12 إلى 10.
- تحديد مجال تغير الطاقة المتاحة في القيد الأول الذي يسمح ببقاء الحل كما هو.
- تحديد مدى صلاحية الحل الأمثل في حالة تغير معامل (X_3) في القيد الثاني بـ 1.

الجزء الثانـي

مسائل النقل

- ☑ صياغة المسالة (المشكلة)
- ☑ طرق الحصول على التوزيع الأولي
- ☑ البحث عن التوزيع الأمثل
- ☑ حالات خاصة في مسائل النقل
- ☑ سلسلة تمارين مقترحة

تمهيد

تعود الجذور التاريخية لتقنيات حل مسائل النقل إلى عام 1941، عندما قدم (Frank L.Hitchcock) بحثه حول تخفيض تكلفة النقل الإجمالية لعملية الشحن، ثم تناولها بشكل أوسع (T.C.Koopmans). وجدير بالذكر أن مسائل النقل تعتبر إحدى تطبيقات البرمجة الخطية، حيث تهدف إلى تقليل تكاليف نقل السلع من مصادر العرض (مراكز إنتاج، مصانع، موانئ) إلى مواقع الطلب (مراكز استهلاك، مراكز تسويق)، أو تخفيض الوقت المستغرق لعملية التوزيع، ولا يقتصر تطبيق هذه النماذج على إيجاد الطرق ذات الأقل تكلفة، بل يمكن تطبيقها على حالات يكون الهدف تعظيم العوائد الربحية إلى أقصى حد ممكن.

1.صياغة النموذج الرياضي لمشكلة النقل

قبل البدء بصياغة النموذج الرياضي لمشكلة النقل، لابد من توضيح مكونات جدول النقل، وهو موضح فيما يلي:

		مراكز الطلب						العرض
		D_1	**D_2**	**...**	**D_j**	**...**	**D_n**	**a_i**
مراكز العرض	**S_1**	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	…	C_{1j} X_{1j}	…	C_{1n} X_{1n}	**a_1**
	S_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	…	C_{2j} X_{2j}	…	C_{2n} X_{2n}	**a_2**
	…	…	…	…	…	…	…	**…**
	S_i	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}	…	C_{ij} X_{ij}	…	C_{in} X_{in}	**a_i**
	…	…	…	…	…	…	…	**…**
	S_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	…	C_{mj} X_{mj}	…	C_{mn} X_{mn}	**a_m**
الطلب **b_j**		**b_1**	**b_2**	**...**	**b_j**	**...**	**b_n**	$\sum_j^n b_j$

حيث أن:

(S_i): يمثل مركز توزيع السلع والبضائع رقم (i).

(D_j): يمثل مركز استلام السلع والبضائع رقم (j).

(C_{ij}): يمثل تكلفة نقل وحدة واحدة من مركز توزيع رقم (i) إلى مركز الاستلام رقم (j).

(X_{ij}): يمثل كمية السلع والبضائع التي ستنقل من مركز توزيع رقم (i) إلى مركز الاستلام رقم (j).

(a_i): تمثل كمية السلع و البضائع المعروضة في مركز التوزيع رقم (i).

(b_j): يمثل كمية السلع و البضائع المطلوبة في مركز الاستلام رقم (j).

وبناءا على ما تقدم، واعتمادا على معلومات الجدول السابق، يمكن صياغة النموذج الرياضي لمشكلة النقل باستخدام الطريقة التالية:

1.1 تشكيل دالة الهدف

$$Min. Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

2.1.تشكيل القيود

- قيود مراكز التوزيع:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \qquad ,i=1,2,3,............n$$

- قيود مراكز الاستلام:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \qquad ,j=1,2,3,............m$$

3.1.قيود اللااسلبية

$$X_{ij} \geq 0, \qquad (i = 1,2,3 \ldots\ldots, n; j = 1,2,3 \ldots \ldots . m)$$

2.مراحل حل مشاكل النقل

تتمثل هذه المراحل فيما يلي:

1.2.إعداد الحل الأساسي: ويكون هذا الحل على أساس تلبية احتياجات نقاط الطلب في حدود الكميات المعروضة، ويمكن إعداد جدول الحل الأساسي وفق ثلاثة طرق هي: طريقة الأقل تكلفة (Least Cost method)، طريقة الركن الشمالي الغربي (North Corner Method)، وطريقة فوجل (Vogel's Aproximation Method)؛

2.2.تحسين الحل إلى أن نصل للحل الأمثل: بعد إعداد الحل الأساسي، يمكن اختبار أمثلية الحل لتحديد إمكانية تخفيض تكلفة النقل بتغير الحل، وإذا اتضح أنه يمكن تخفيض التكلفة إلى غاية الحصول على الحل الأمثل، ففي هذه الحالة نستخدم إحدى الطريقتين : طريقة الحجر المتنقل، وطرقة التوزيع المعدل.

3.الطرق المعتمدة لإيجاد الحل الأولي

رأينا فيما سبق أنه توجد ثلاثة طرق للحصول على الحل الأولي، إلا أننا سوف نقتصر على طريقتي الركن الشمالي الغربي والخلية ذات الأقل تكلفة.

1.3.طريقة الركن الشمالي الغربي (North Corner Method)

هذه الطريقة تستعمل للحصول على حل أولي، وهي من أسهل وأبسط الطرق مقارنة الطرق الأخرى لإيجاد الحلول الأولية.

1.1.3.خطوات الحل الأولي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي

تتمثل فيما يلي:

- التحقق من توازن الجدول، أي العرض يساوي الطلب؛
- نبدأ بالتوزيع لأول خلية في شمال غرب الجدول بأقصى كمية ممكنة (تبعا لكمية السطر الأول والعمود الأول)، ثم نتجه التالية لها سواءا كانت في صفها أو عمودها؛
- حساب التكلفة الكلية، وذلك بضرب الكميات الموزعة ضمن الخلايا المملوءة في تكاليفها الوحدوية.

مثال (23):

تمتلك شركة أربع مزارع تقوم بتسويق البطاطس إلى أربعة مدن رئيسية، حيث أن الكميات المنتجة للمزارع وطلب المدن مبينة في الجدول الآتي:

المزرعة	الإنتاج(طن)	المدينة	الطلب(طن)
W	30	**A**	20
X	40	**B**	35
Y	25	**C**	50
Z	45	**D**	35

بينما تكلفة نقل الطن الواحد من البطاطس من كل مزرعة إلى كل مدينة موضحة في الجدول التالي:

الوحدة (ون)	A	B	C	D
W	7	7	10	8
X	6	6	9	6
Y	8	7	9	5
Z	11	10	12	8

المطلوب: إعداد جدول التوزيع الأولي وفق طريقة الركن الشمالي الغربي؟

الحل:

نحصل على جدول الحل الأولي كما يلي:

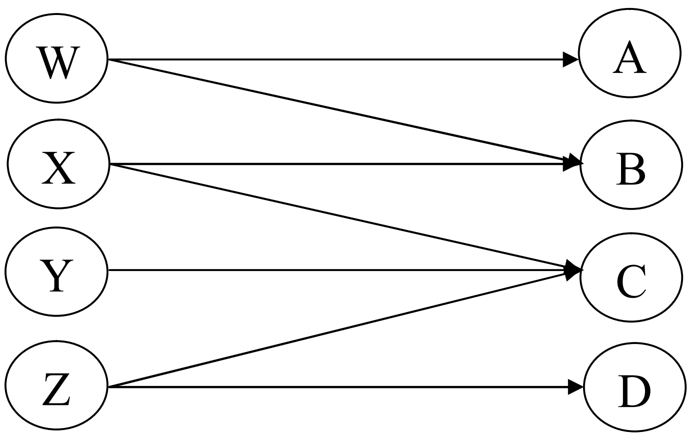
	A	B	C	D	
W	7 20	7 10	10	8	**30**
X	6	6 25	9 15	6	**40**
Y	8	7	9 25	5	**25**
Z	11	10	12 10	8 35	**45**
	20	**35**	**50**	**35**	

لحساب تكلفة النقل للحل الأولي، نقوم بضرب الكميات الموجودة في الخلايا المملوءة في تكلفة النقل الوحدوية الموجودة في ذات الخلية، وبالتالي يكون مجموع ما نحصل عليه هو عبارة عن تكلفة الحل المبدئي، ويكون ذلك كما يلي:

$TC_1=(20\times7)+(10\times7)+(25\times6)+(15\times9)+(25\times9)+(10\times12)+(35\times8)$

$TC_1=1120$ ون

كما يمكن تمثيل شبكة التوزيع الأولي وفق الشكل الآتي:



2.3. طريقة الخلية ذات الأقل تكلفة (Least Cost method)

طبقا لهذه الطريقة تعطى الأولوية للخلية التي بها أقل تكلفة، ويتطلب ذلك البحث عن الخلية ذات التكلفة الأقل في الجدول والخلية التي تليها، إلى أن يتم تخصيص كل الكميات المتاحة حسب طلبيات نقاط التوزيع، وبالتالي ننقل إليها أكبر كمية ممكنة من المصدر الذي يحقق أقل تكلفة، وهكذا.

1.2.3. خطوات الحل الأولي باستخدام طريقة الأقل تكلفة

تتمثل فيما يلي:

- التحقق من توازن الجدول العرض يساوي الطلب؛
- اختيار الخلية ذات أقل تكلفة ونلبي احتياجاتها بأكبر كمية ممكنة، وذلك تبعا للكمية المعروضة في السطر والكمية المطلوبة في العمود؛
- عند وجود تكلفتين مساويتين، ففي هذه الحالة يتم اختيار التكلفة التي على أساسها توزيع أكبر كمية ممكنة من المصدر إلى مركز الاستلام؛
- نحدد الخلية التالية ذات أقل تكلفة، ونكرر ما سبق في الخطوة الثانية؛
- نحسب تكلفة النقل المترتبة على الحل الأولي.

مثال (24):

تدير شركة الإنتاج الألبان ثلاث وحدات إنتاجية موزعة في الشرق الجزائري، وذلك بطاقات إنتاجية محددة كما يلي:

- الوحدة الإنتاجية الأولى (W) طاقتها الإنتاجية تقدر بـ 30 ألف لتر من الحليب؛
- الوحدة الإنتاجية الثانية (X) طاقتها الإنتاجية تقدر بـ 60 ألف لتر من الحليب؛
- الوحدة الإنتاجية الثالثة (Y) طاقتها الإنتاجية تقدر بـ 80 ألف لتر من الحليب.

وتمتلك هذه الشركة أربعة مراكز تسويقية في الشرق الجزائري طلباتها كما يلي:

- مركز التسويق الأول (A) طلبه قدر بـ 75 ألف لتر من الحليب؛
- مركز التسويق الثاني (B) طلبه قدر بـ 35 ألف لتر من الحليب؛
- مركز التسويق الثالث (C) طلبه قدر بـ 40 ألف لتر من الحليب؛
- مركز التسويق الرابع (D) طلبه قدر بـ 20 ألف لتر من الحليب.

وبفرض أن تكاليف النقل بين كل وحدة إنتاجية ومركز التسويق بالنسبة للتر الواحد من الحليب هي كما يلي:

الوحدة (ون)		مراكز التسويق			
		A	B	C	D
الوحدات الإنتاجية	W	9	7	6	5
	X	2	8	9	12
	Y	4	3	10	8

المطلوب: إيجاد التوزيع الأولي لمشكلة النقل من وحدات الإنتاج نحو مراكز التسويق باستخدام طريقة الخلية ذات الأقل تكلفة؟

الحل:

نلاحظ أن الخلية (XA) تحوي على أدنى تكلفة في مصفوفة التكاليف، وبالتالي يتم تشغيل تلك الخلية بكمية قدرها 60000 وحدة، ثم البحث بعد ذلك عن خلية ذات أقل تكلفة نقل للوحدة للمصفوفة كلها، ويتم الاستمرار في هذا العمل حتى يتم استفاء كامل الأسطر والأعمدة، وبهذه الطريقة نكون قد حصلنا على جدول الحل الأساسي كالآتي:

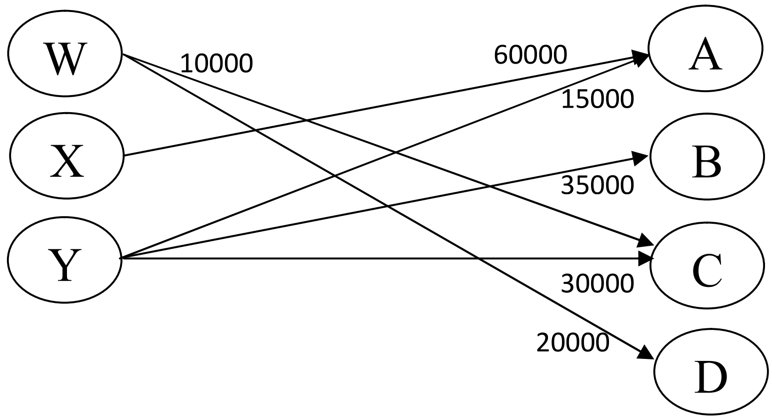
	A	B	C	D	
W	9	7	6 10000	5 20000	**30000**
X	2 60000	8	9	12	**60000**
Y	4 15000	3 35000	10 30000	8	**80000**
	75000	**35000**	**40000**	**20000**	**170000**

لحساب تكلفة النقل للحل الأولي، نقوم بضرب الكميات الموجودة في الخلايا المملوءة في تكلفة النقل الوحدوية الموجودة في ذات الخلية، وبالتالي يكون مجموع ما نحصل عليه هو عبارة عن تكلفة الحل المبدئي، ويكون ذلك كما يلي:

$$TC_1=(10000\times6)+(20000\times5)+(60000\times2)+(15000\times4)+(35000\times3)+(30000\times10)$$

$\mathbf{TC_1=745000}$ ون

يمكن تمثيل شبكة التوزيع الأولي وفق الشكل الآتي:



4.التأكد من الوصول إلى الحل الأمثل

لإيجاد الحل الأمثل لمشكلة النقل يجب الانطلاق من الجدول العملي الأولي وفق الطريقة المختارة في عملية التوزيع الأولي، ثم نحاول تحسين الحل باستخدام إحدى الطرق التالية: طريقة التوزيع المعدلة (MODI)، طريقة الحجر المتنقل (Stepping Stone Method)، إلا أننا سنقتصر على دراسة طريقة التوزيع المعدلة والتي تبنى على المراحل التالية:

1.4.مرحلة تقييم الخلايا المملوءة: نقوم بتجزئة التكلفة الحقيقية للخلية المملوءة إلى جزئين قيمة خاصة بالسطر، وأخرى خاصة بالعمود، مع افتراض دائما أن تكلفة الشحن بالنسبة للسطر الأول تساوي الصفر.

2.4.مرحلة تقييم الخلايا الشاغرة: نقوم بحساب التكلفة الوهمية للخلايا الفارغة، وذلك بجمع قيمة السطر مع العمود لكل خلية فارغة.

3.4.مرحلة حساب تكلفة الفرصة البديلة: تظهر هذه التكلفة فقط في الخلايا الفارغة، ويتم احتسابها انطلاقا من طرح التكلفة الحقيقية من التكلفة الوهمية. وهنا يمكننا الحصول على الحالات الآتية:

1.3.4.تكلفة الفرصة البديلة تساوي الصفر: تعني أنه لو يتم تشغيل هذه الخلية الفارغة، فإن التكلفة الكلية (TC) لن يطرأ عليها أي تغيير.

2.3.4.تكلفة الفرصة البديلة أقل من الصفر: تدل على أنه لو يتم تشغيل هذه الخلية الفارغة، فإن التكلفة الكلية (TC) ستنخفض بقيمة تكلفة الفرصة البديلة مضروبة في الكمية التي سيتم توزيعها لهذه الخلية، وبالتالي الحل الأولي قابل للتحسين. بينما في حالة وجود أكثر من قيمة سالبة واحدة لتكلفة الفرصة البديلة فيتم اختيار أكبر قيمة بالقيمة المطلقة.

3.3.4.تكاليف الفرص البديلة كلها موجبة: هذا يعني أنه تم التوصل إلى الحل الأمثل للمشكلة، وفي حالة تشغيل لأي خلية فارغة فإن التكلفة الكلية (TC) سترتفع بقيمة تكلفة الفرصة البديلة مضروبة في الكمية التي سيتم توزيعها لهذه الخلية.

وعليه نحصل على الحل الأمثل عندما تكون كل تكاليف الفرص البديلة موجبة أو معدومة.

ملاحظة:

قبل عملية التقييم ينبغي تحقيق الشرط التالي:

عدد الخلايا المملوءة = عدد الأعمدة + عدد الأسطر − 1

عدد الخلايا المملوءة = m + n − 1

مثال (25):

شركة لديها ثلاث مصادر هي (W, X, Y) وأربعة منافذ هي: (A, B, C, D) والكميات المعروضة من المصادر على الترتيب 15000وحدة، 16000وحدة، 9500وحدة. بينما الكميات المطلوبة للمنافذ كانت على الترتيب 18000وحدة، 12000وحدة، 6000وحدة، 4500وحدة. أما تكلفة النقل من المصدر الأول للمنافذ الأربعة 3، 2، 7، 6 ون، وتكلفة النقل من المصدر الثاني 7، 5، 2، 3ون، وتكلفة النقل من المصدر الثالث 2، 5، 4، 5 ون.

المطلوب: إيجاد خطة النقل المثلى بحيث تكون التكاليف النهائية أقل ما يمكن، مستخدما في ذلك طريقة الركن الشمالي الغربي؟

الحل:

T1	A	B	C	D	
W	6 15000	7	2	3	**15000**
X	3 3000	2 12000	5 1000	7	**16000**
Y	5	4	5 5000	2 4500	**9500**
	18000	**12000**	**6000**	**4500**	**40500**

$TC_1=(1500\times6)+(3000\times3)+(12000\times2)+(1000\times5)+(5000\times5)+(4500\times2)$

TC_1= 162000 ون

حسب طريقة الركن الشمالي الغربي فإن تكلفة التوزيع الأولي تقدر بـ 162000ون

من خلال جدول التوزيع الأولي نلاحظ أن عدد الخلايا المملوءة تساوي 6، وكذا (m+n-1) تساوي 6.

في هذه الحالة يمكننا المرور إلى مراحل تحسين الحل:

- مرحلة تقييم الخلايا المملوءة:

الخلية المملوءة	تجزئة التكلفة الحقيقية	تكلفة السطر (L)	تكلفة العمود (C)
WA	6 = L(W)+C(A)	L(W)=0	C(A)=6
XA	3 = L(X)+C(A)	L(X)=-3	C(A)=6
XB	2 = L(X)+C(B)	L(X)=-3	C(B)=5
XC	5 = L(X)+C(C)	L(X)=-3	C(C)=8
YC	5 = L(Y)+C(C)	L(W)=-3	C(C)=8
YD	2 = L(Y)+C(D)	L(W)=-3	C(D)=5

- مرحلة تقييم الخلايا الفارغة:

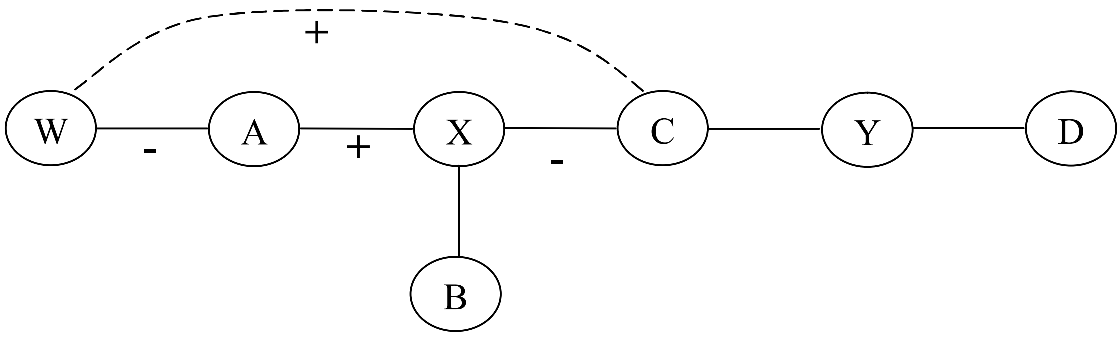
الخلية الفارغة	تكلفة السطر (L)	تكلفة العمود (C)	التكلفة الوهمية
WB	L(W)=0	C(B)=5	L(W)+C(B)=5
WC	L(W)=0	C(C)=8	L(W)+C(C)=8
WD	L(W)=0	C(D)=5	L(W)+C(D)=5
XD	L(X)=-3	C(D)=5	L(X)+C(D)=2
YA	L(Y)=-3	C(A)=6	L(Y)+C(A)=3
YB	L(Y)=-3	C(B)=5	L(Y)+C(B)=2

- حساب تكلفة الفرصة البديلة

الخلية الفارغة	التكلفة الحقيقة	التكلفة الوهمية	تكلفة الفرصة البديلة
WB	7	5	2
WC	2	8	-6
WD	3	5	-2
XD	7	2	5
YA	5	3	2
YB	4	2	2

من خلال المرحلة الأخيرة يتبين لنا أن الحل الأولي ليس حلا أمثلا، لأن هناك خلايا فارغة لها تكلفة فرصة بديلة سالبة، وبالتالي نقوم بتشغيل الخلية (WC) لأنها تحوي أكبر تكلفة فرصة بديلة بالقيمة المطلقة، وعليه في حالة تشغيل هذه الخلية فإن التكلفة الكلية (TC_1) ستنخفض بـ 6 ون لكل وحدة موزعة من (W) نحو (C). وهنا سوف نواجه مشكلتين المشكلة الأولى ما هي الخلايا التي تتأثر جراء تشغيل هذه الخلية؟، والمشكلة الثانية ما هي الكمية الموزعة؟. ولحل المشكلة الأولى نستعين بالشكل الموالي، الذي يوضح العلاقات الموجودة بين الخلايا المشغولة حسب طريقة الركن الشمالي الغربي.

شكل (1): مخطط التوزيع الأولي



يتبن من الشكل رقم (1) أن هناك خلايا تتأثر بالزيادة (إشارة موجبة)، وأخرى بالنقصان (إشارة سالبة) كما هو موضح في الجدول الموالي:

تكلفة السطر — تكلفة العمود

T1		6	5	8	5	
		A	**B**	**C**	**D**	
0	**W**	6 **15000** -	7 5 2	2 8 -6 +	3 5 -2	**15000**
-3	**X**	3 **3000** +	2 **12000**	5 **1000** -	7 2 5	**16000**
-3	**Y**	5 3 2	4 2 2	5 **5000**	2 **4500**	**9500**
		18000	**12000**	**6000**	**4500**	**40500**

التكلفة الوهمية — تكلفة الفرصة البديلة

وتتحدد الكمية التي ستنقل إلى الخلية (WC) من الخلايا المملوءة على أساس أقل مقدار في الخلايا المملوءة التي تحمل الإشارات السالبة في المسار المغلق، ونلاحظ من جدول الحل الأساسي أن هذه الكمية تقع في الخلية (XC)، أي 1000 وحدة. وعليه فإن كل خلية فيها إشارة موجبة سوف تزيد 1000 وحدة، وكل خلية فيها إشارة سالبة سوف تنخفض بنفس الكمية، وبالتالي عند تشغيل الخلية (WC)، فإن التكلفة الكلية للجدول الموالي (TC_2) ستنخفض بمقدار 6000 ون، كما يلي:

$TC_2 = TC_1 -$ (الكمية الموزعة × تكلفة الفرصة البديلة)

$TC_2 = TC_1 - (6\times1000) = \mathbf{156000}$ ون

بعد إجراء هذه التغييرات نحصل على الجدول الثاني الذي يحوي الكميات الجديدة المعدلة، وللتأكد هل هو توزيع أمثل أم لا، وجب علينا كذلك تطبيق الخطوات أو المراحل السابقة.

T2		6	5	2	-1	
		A	B	C	D	
0	W	(6) 14000 -	(7) 5 / 2	(2) 1000 +	(3) -1 / 4	15000
-3	X	(3) 4000	(2) 12000	(5) -1 / 6	(7) -4 / 11	16000
3	Y	(5) 9 / -4 +	(4) 8 / -4	(5) 5000 -	(2) 4500	9500
		18000	12000	6000	4500	40500

نلاحظ من الجدول الثاني وجود خلايا فارغة فيها تكاليف فرص بديلة سالبة، مما يعني أن هذا الحل كذلك ليس حلا أمثلا. لذلك يتعين علينا مواصلة العمل بنفس المراحل السابقة التي استخدمت في الجدول الأول.

كذلك، نلاحظ وجود قيمتين سالبتين متساويتين لتكلفة البديلة، مما يعني وجب المفاضلة بين تشغيل الخليتين (YA) و(YB)، وأخذ أكبر كمية ممكنة، لكن في هذه الحالة نجد أن الكمية متساوية في كلتا الحالتين، وبالتالي سنشغل واحدة منهما، ولتكن (YA)، ومنه فإن الخلايا المتأثرة ضمن المسار المغلق هي:(WA، WC، YC، YA)، يتم تحديد الكمية انطلاقا من الخلايا التي تحمل إشارة ناقص وأخذ أقل كمية، أي 5000 وحدة.

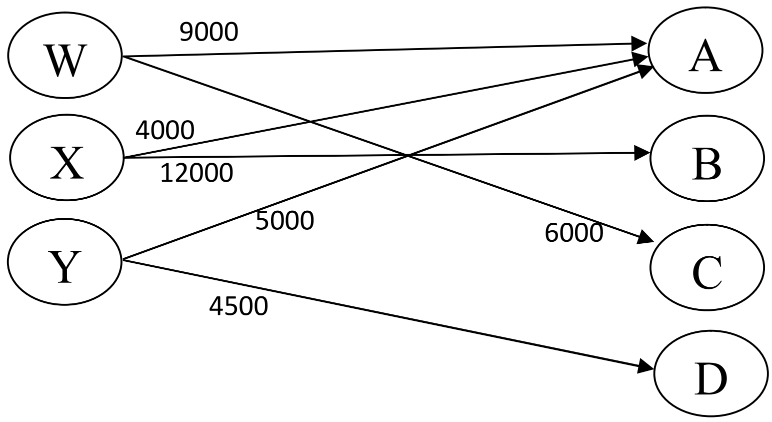
وعليه عند تشغيل الخلية (YA)، فإن التكلفة الكلية للجدول الثالث (TC_3) ستنخفض بمقدار 20000 ون كما الآتي:

$TC_3 = TC_2 - (4 \times 5000) = \mathbf{136000}$ ون

T3		6	5	2	3	
		A	B	C	D	
0	W	(6) 9000	(7) 5 / 2	(2) 6000	(3) 3 / 0	15000
-3	X	(3) 4000	(2) 12000	(5) -1 / 6	(7) 0 / 7	16000
-1	Y	(5) 5000	(4) 4 / 0	(5) 1 / 4	(2) 4500	9500
		18000	12000	6000	4500	40500

من خلال الجدول الثالث نلاحظ عدم وجود أي خلية بها تكلفة فرصة بديلة سالبة، وعليه فإن الحل غير قابل للتحسين ويعتبر حلا أمثلا، لكن وجود قيم صفرية تدل على وجود توزيع أخر ما عدى هذا التوزيع بشرط بقاء قيمة التكلفة الكلية ثابتة في القيمة 136000 ون، وإذا أردنا الحصول على الحل البديل ما علينا إلا تشغيل الخلية التي بها تكلفة فرصة بديلة معدومة.

وعليه فإن شبكة التوزيع المثلى تكون وفق الشكل الآتي:



5.الحالات الخاصة في مسائل النقل

توجد ثلاث حالات خاصة نفصلها فيما يلي:

1.5.حالة عدم التوازن

تظهر هذه الحالة عندما يكون العرض أكبر من الطلب أو العكس، وبالتالي إذا كان إجمالي الكميات المعروضة أكبر من إجمالي الكميات المطلوبة نضيف عمود وهمي (Dummy Column) يحتوي على كمية طلب مساوية للفرق بين العرض والطلب بتكلفة نقل تساوي الصفر. أما إذا كان إجمالي الكميات المعروضة أقل من إجمالي الكميات المطلوبة نضيف سطر وهمي (Dummy Row) يحتوي على كمية عرض تساوي الفرق الطلب والعرض بتكلفة نقل تساوي الصفر.

مثال(26):

شركة لديها ثلاث مصانع (C,B,A)، حيث أنها توفر الإمدادات لخمسة مراكز للتسوق (G,F,E ,D,H)، إذا علمت أن الطاقة الإنتاجية الشهرية للمصانع هي على التوالي: 800، 500، 900 وحدة، بينما متطلبات مراكز التسوق الشهرية هي: 400،400، 500، 400، و800 وحدة على التوالي، والجدول الموالي يوضح تكاليف النقل الوحدوية من مكان تواجد المصانع إلى مراكز التسوق.

	D	E	F	D	H
A	5	8	6	6	3
B	4	7	7	6	4
C	8	4	6	6	5

المطلوب: أوجد جدول التوزيع الأولي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي؟

الحل:

في هذا المثال يتبن لنا أن مجموع كميات العرض (2200 وحدة) أقل من مجموع الكميات المطلوبة (2500 وحدة)، مما يستدعي إضافة سطر وهمي (Dummy) بتكاليف صفرية وبمقدار 300 وحدة، وبالتالي يصبح الجدول كما يلي:

	D	E	F	D	H	
A	5 400	8 400	6	6	3	**800**
B	4	7	7 500	6	4	**500**
C	8	4	6	6 400	5 500	**900**
Dummy	0	0	0	0	0 300	**300**
	400	**400**	**500**	**400**	**800**	**2500**

ولإيجاد الحل الأمثل لهذه المسالة يتم استخدام طريقة التوزيع المعدل، وذلك بإتباع خطوات تحسين الحل.

مثال(27): لتكن لديك المسالة التالية:

		مراكز الاستلام					العرض
		A	**B**	**C**	**D**	**E**	
المصادر	**V**	13	10	22	29	18	**500**
	W	14	13	16	21	M	**600**
	X	3	0	M	11	6	**700**
	Y	18	9	19	23	11	**400**
	Z	30	24	34	36	28	**300**
الطلب		**300**	**500**	**400**	**500**	**600**	

المطلوب: أوجد جدول التوزيع الأولي باستخدام طريقة الخلية ذات الأقل تكلفة؟

الحل:

نلاحظ أن الكمية المعروضة تفوق الكمية المطلوبة، لذا وجب إضافة عمود وهمي بكمية قدرها 2 لزيادة الكمية المطلوبة حتى تتساوى مع الكمية المعروضة.

		مراكز الاستلام						العرض
		A	B	C	D	E	Dummy	
المصادر	V	13 1	10	22	29 2	18 2	0	**500**
	W	14	13	16 4	21 2	M	0	**600**
	X	3 2	0 5	M	11	6	0	**700**
	Y	18	9	19	23	11 4	0	**400**
	Z	30	24	34	36 1	28	0 2	**300**
الطلب		**300**	**500**	**400**	**500**	**600**	**200**	**2500**

ولإيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة يتم استخدام طريقة التوزيع المعدل، وذلك بإتباع خطوات تحسين الحل.

2.5.حالة التحلل (Degeneracy)

تسمى أيضا بحالة عدم الانتظام، تظهر هذه الحالة إما في الجدول الأول أو الجداول الأخرى عندما لا يتحقق الشرط التالي:

عدد الخلايا المملوءة = عدد الأعمدة + عدد الأسطر – 1

ولحل هذه المشكلة نقوم بتخصيص كمية صغيرة جدا (Ɛ) (تؤول إلى الصفر) لواحدة أو أكثر من الخلايا الفارغة، بحيث يصبح عدد الخلايا المملوءة مساويا لـ ($m+n-1$).

مثال (28):

لتكن لديك المسألة الآتية:

	D1	D2	D3	العرض(طن)
S1	8	7	4	**60**
S2	3	8	9	**70**
S3	11	3	5	**80**
الطلب(طن)	**50**	**80**	**80**	**210**

المطلوب: حل هذه المسألة باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي؟

الحل:

نقوم باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي بإعداد جدول التوزيع الأولي فنحصل على ما يلي:

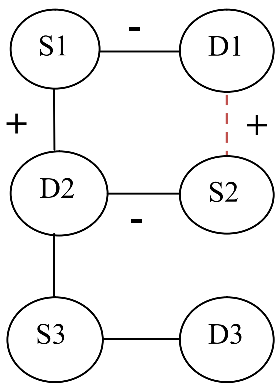
T1		8	7	....	العرض
		D1	D2	D3	(طن)
0	S1	8 **50**	7 **10**	4	**60**
1	S2	3	8 **70**	9	**70**
....	S3	11	3	5 **80**	**80**
الطلب(طن)		**50**	**80**	**80**	

من خلال التوزيع الأولي يتضح أن عدد الخلايا المملوءة هو 4 والمطلوب 5 خلايا (m+n-1=5)، لذا لا نستطيع تقييم كل الخلايا المملوءة، ونتوقف في حساب تكلفة السطر لـ(S2) وتكلفة العمود لـ(D2)، وبهذا نكون في حالة عدم الانتظام. ولتجاوز ذلك نعمد لتشغيل خلية فارغة بكمية صغيرة جدا ($\varepsilon \simeq 0$) حتى نتمكن من تقييم باقي الخلايا المملوءة، لكن مع مراعاة الشروط التالية:

- إكمال المرحلة الأولى، وهي مرحلة تقييم الخلايا المملوءة؛
- اختيار الخلية تكون على أساس أقل تكلفة حقيقية ممكنة؛
- إذا وقعت خلية (ε) ضمن المسار المغلق(الخلايا المتأثرة)، لابد أن لا تأخذ إشارة سالبة وإلا إعادة نقلها إلى خلية أخرى.

فيصبح الجدول كما يلي:

T1		8	7	1	العرض
		D1	D2	D3	(طن)
0	S1	8 **50** -	7 **10** +	1 4 3	**60**
1	S2	9 3 -6 +	8 **70** -	2 9 7	**70**
4	S3	12 11 -1	3 ε	5 **80**	**80**
الطلب (طن)		**50**	**80**	**80**	



TC_1=**1430** ون

نكمل خطوات الحل بحساب التكلفة الكلية الأولية مع إهمال الخلية التي تحوي (Ɛ). ثم نبحث عن الخلايا التي سوف تتأثر باعتبار أن الخلية التي سيتم تشغيلها هي (S2,D1)، وعليه فإن الكمية التي يمكن وضعها في هذه الخلية ضمن الجدول الثاني هي 50 طن.

3.5.حالة تجنب التوزيع من مصدر معين إلى منفذ ما

كل الحالات السابقة عالجت المشكلة على أساس أن المصادر (نقاط العرض) تقوم بالتوزيع للمنافذ (نقاط الطلب) بشكل عادي، أي بدون قيود، لكن في الواقع قد يتطلب الأمر حظر نقل كميات من مصدر معين إلى منفذ ما أو أكثر لأي سبب فني كان، وفي هذه الحالة وترجمة لهذا القيد يمكننا افتراض تكلفة عالية جدا لتلك الخلية، التي تربط المصدر وهذا المنفذ، وهو الأمر الذي يضمن عدم شحن أية كمية. ونقوم بحل المسالة بالطريقة المعتادة.

مثال (29):

شركة لديها ثلاث مناجم (M1، M2، M3)، وخمسة مصانع (F1، F2، F3، F4 ، F5)، والكميات المعروضة من المناجم هي: 80، 100، 140 طن يوميا على التوالي، في حين الكميات المطلوبة من المصانع هي: 40، 60، 70، 70، 80 طن يوميا على التوالي، أما تكلفة النقل الوحدوية فهي معطاة في الجدول الموالي:

F5	F4	F3	F2	F1	
6	2	3	2	4	M1
1	2	5	4	5	M2
3	7	4	5	6	M3

نفترض أن هذه الشركة لا ترغب في التوزيع من المنجم الثاني نحو المصنع الخامس، ولتحقيق ذلك نعمد إلى وضع تكلفة كبيرة جدا(m) في الخلية (M2 ;F5) عوض القيمة (1).

المطلوب: اوجد أفضل توزيع باستخدام طريقة الخلية ذات الأقل تكلفة؟

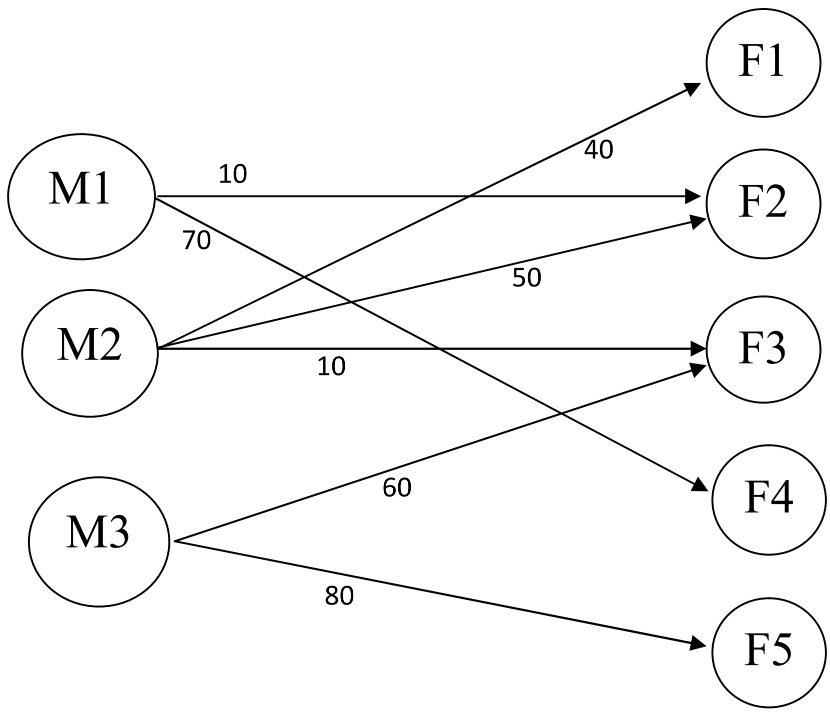
الحل:

نقوم بتغيير تكلفة الخلية (M2 ;F5) من 1 إلى (m)، ثم نستخدم طريقة الأقل تكلفة لإيجاد جدول عملي أول كما يلي:

T1		3 F1	2 F2	3 F3	2 F4	2 F5	العرض
0	M1	3 4 1	2 10	3 3 0	2 70	2 6 4	**80**
2	M2	5 40	4 50	5 10	4 9 5	4 m m-4	**100**
1	M3	4 6 2	3 5 2	4 60	3 7 4	3 80	**140**
الطلب		**40**	**60**	**70**	**70**	**80**	**320**

بما أنه لا توجد أية تكلفة فرصة بديلة سالبة، فإن هذا التوزيع يعتبر توزيعا أمثلا.

وعليه فإن شبكة التوزيع المثلى تكون وفق الشكل الآتي:



6.تمارين مقترحة

المطلوب: باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي أوجد الحل الأمثل لهذه المسائل؟

التمرين(1):

	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	6	8	8	5	30
S2	5	11	9	7	40
S3	8	9	7	13	50
الطلب	35	28	32	25	

التمرين (2):

	D1	D2	D3	العرض
Q1	2	7	4	40
Q2	3	3	1	10
Q3	5	4	7	70
Q4	1	6	2	140
الطلب	70	90	180	

التمرين (3):

	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	6	4	1	5	140
S2	8	9	2	7	160
S3	4	3	6	2	50
الطلب	60	100	150	40	

التمرين (4):

	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	11	13	17	14	250
S2	16	18	14	10	300
S3	21	24	13	10	400
الطلب	200	225	275	250	

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لهذه المسائل وفق طريقة الخلية ذات الأقل تكلفة؟

التمرين (1):

	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	6	8	8	5	30
S2	5	11	9	7	40
S3	8	9	7	13	50
الطلب	35	28	32	25	

التمرين (2):

	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	2	3	11	7	60
S2	1	0	6	1	10
S3	5	8	5	9	100
الطلب	70	50	30	20	

التمرين (3):

	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	7	8	4	5	500
S2	8	10	2	3	700
S3	7	6	17	8	800
الطلب	900	50	900	50	

التمرين (4):

	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	10	7	12	5	425
S2	4	8	9	8	500
S3	2	5	4	3	475
S4	2	6	4	1	200
الطلب	300	600	150	450	

الجزء الثالث

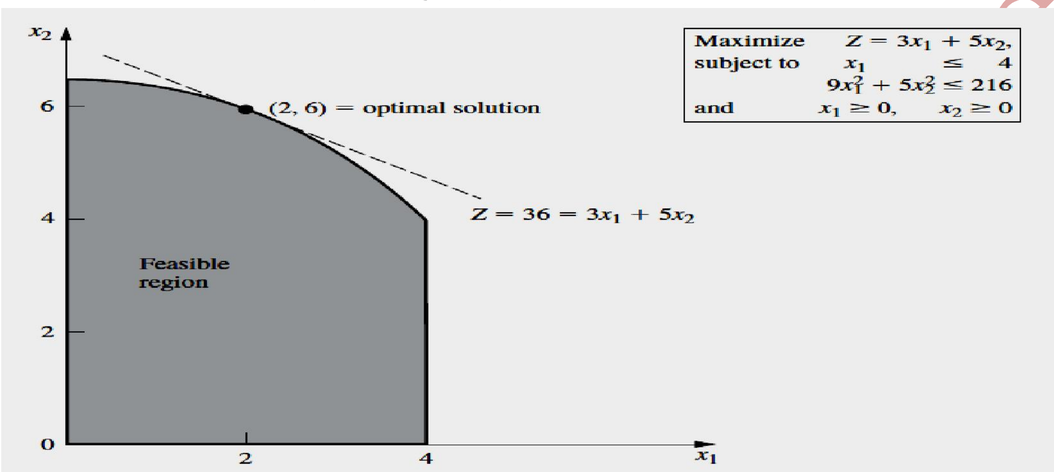
البرمجة غير الخطية

- ☑ الدوال المحدبة والمقعرة
- ☑ أمثلية دالة أحادية المتغير
- ☑ أمثلية دالة ذات عدة متغيرات
- ☑ الأمثلية غير الخطية المقيدة
- ☑ سلسلة تمارين مقترحة

تمهيد

رأينا في الفصل الأول أن البرنامج الخطي تكون فيها دالة الهدف وجميع القيود في صورة خطية، بينما البرنامج غير الخطي (Non Linear Programming)، ويسمى اختصارا (NLP)، تكون فيه بعض العلاقات أو دالة الهدف غير خطية. كما هو موضح في الشكلين التاليين:

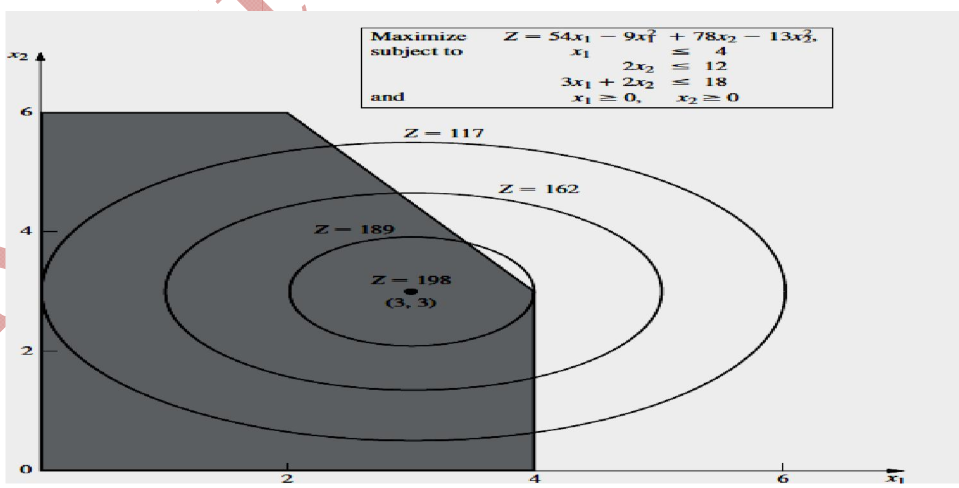
الشكل(2): الرسم البياني لبرنامج غير خطي



Source : Frederick S.hillier & Gerald J.Lieberman, « Introduction to Operations Research »,10th edition, Mc Graw Hill education, USA, 2015, p553

نلاحظ من الشكل (2) أن هذا البرنامج غير خطي لأنه يحتوي على قيد غير خطي(القيد الثاني).

الشكل(3): الرسم البياني لبرنامج غير خطي



Source : Frederick S.hillier & Gerald J.Lieberman, « Introduction to Operations Research »,10th edition, Mc Graw Hill education, USA, 2015, p554

نلاحظ من الشكل (3) أن هذا البرنامج غير خطي لأنه يحتوي على دالة هدف غير خطية.

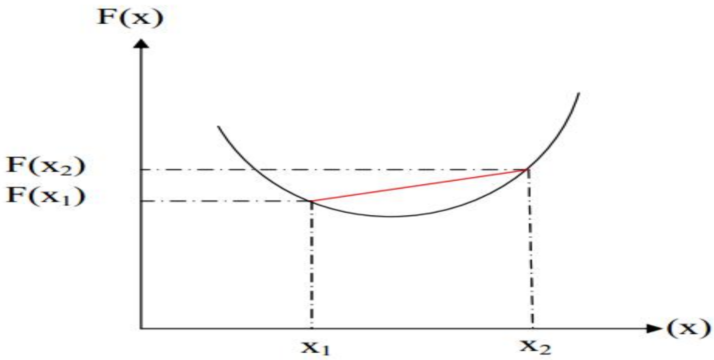
في كلتا الحالتين تظهر لنا صعوبة البحث عن الحل الأمثل نظرا لعناصر البرنامج غير الخطي(دالة هدف أو أحد قيد)، وبالتالي هذه البرمجة تعد أكثر صعوبة مقارنة بالبرمجة الخطية.

كمدخل لدراسة هذا النوع من البرمجة ستناول النقاط التالية:

1.الدوال المقعرة والمحدبة (Concave & Convex Functions)

لنفترض بأنه لدينا دالة $f(x)$، وتم أخذ قيمة الدالة عند نقطتين (X_1,X_2)، كما هو موضح في الشكل التالي:

الشكل (4): دالة غير خطية محدبة



الآن لو نأخذ معامل قدره (α)، حيث قيمته تكون ما بين الصفر والواحد $\propto\in[0,1]$ ، عندها نستطيع اختبار الدالة إذاكانت محدبة أم لا من خلال تطبيق العلاقة التالية:

$$f[\propto x_1+(1-\propto)x_2]\leq\propto f(x_1)+(1-\propto)f(x_2)$$

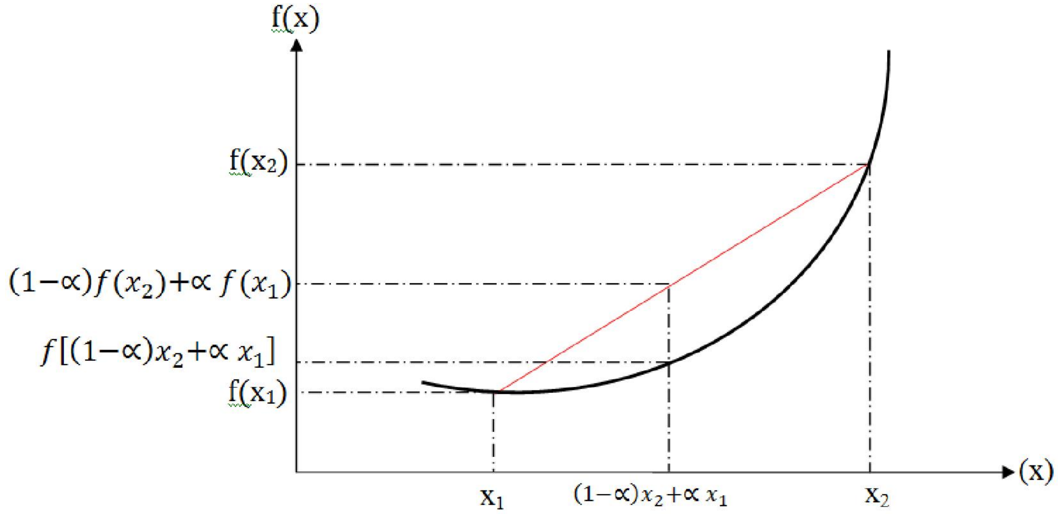
فإذا تحققت هذه المتراجحة عند أي زوجين من نقاط (X_1,X_2) هذا الفضاء R نقول أن الدالة محدبة.

وتكون الدالة $f(x)$ مقعرة إذا وجدت نقطتين في فضاء بعده n بشرط أن يكون:

$$f[\propto x_1+(1-\propto)x_2]\geq\propto f(x_1)+(1-\propto)f(x_2)$$

ومن الناحية الهندسية تعتبر الدالة ذات متغير واحد محدبة إذا كان الخط المستقيم الرابط بين أي نقطتين (الوتر) على رسم الدالة يقع فوق الرسم البياني للدالة نفسها.

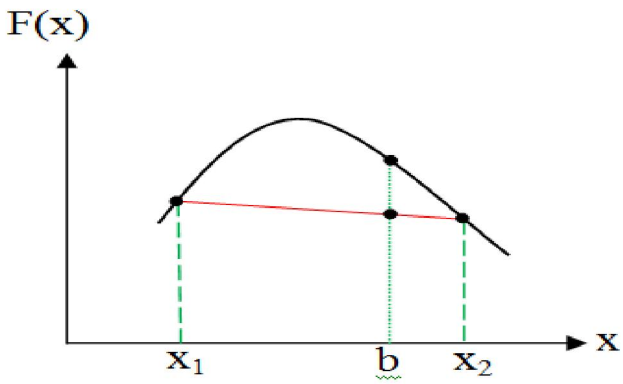
الشكل (5): دالة غير خطية محدبة



المصدر: ريتشارد برونسون، ترجمة حسن حسني الغبارى، "بحوث العمليات"، ط2، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2002، ص138.

أما إذا كان شكل الدالة منحنى ذو قمة ومفتوح من الأسفل يشبه الجرس، فإن الخط الرابط بين أي نقطتين من هذا المنحنى يقع أسفله وبالتالي دالة مقعرة، كما هو موضح في الشكل الموالي:

الشكل (6): دالة غير خطية مقعرة



Source : Michael W.Carter& other, « Operations Research a Pratical Introduction »,2nd edition, CRC press, 2019, USA, p220.

نظرية:

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة على الفترة [a,b]، والنقطة x_0 تنتمي لهذا المجال، فإنه يكون لدينا:

- نقطة صغرى محلية **يجب** أن يتحقق ما يلي:

المشتقة الأولى تساوي الصفر($\frac{\delta f}{\delta x}=0$) عند $x = x^*$ ، والمشتقة الثانية $\frac{\delta^2 f}{\delta^2 x} \geq 0$

- نقطة عظمى محلية **يجب** أن يتحقق ما يلي:

المشتقة الأولى تساوي الصفر ($\frac{\delta f}{\delta x} = 0$) عند $x = x^*$ ، المشتقة الثانية موجبة $0 \leq \frac{\delta^2 f}{\delta^2 x}$

- نقطة صغرى محلية **يكفي** أن يتحقق ما يلي:

المشتقة الأولى تساوي الصفر ($\frac{\delta f}{\delta x} = 0$) عند $x = x^*$ ، المشتقة الثانية موجبة $0 < \frac{\delta^2 f}{\delta^2 x}$

- نقطة عظمى محلية **يكفي** أن يتحقق ما يلي:

المشتقة الأولى تساوي الصفر ($\frac{\delta f}{\delta x} = 0$) عند $x = x^*$ ، المشتقة الثانية موجبة $0 > \frac{\delta^2 f}{\delta^2 x}$

مثال(30): لتكن لديك الدالة الآتية:

$$Min\ \mathrm{f(x)} = 2x^3 - 6x + 12$$

المطلوب: أوجد النهايات العظمى والصغرى، ثم حدد شكل الدالة؟

الحل:

نقوم بحساب المشتقة الأولى ثم نساويها بالصفر.

$$\mathrm{f'(x)} = 6x^2 - 6$$

$$6x^2 - 6 = 0 \leftrightarrow x^2 = 1$$

بالتالي نحصل على حلين هما (1) و(-1)، أما المشتقة الثانية لهذه الدالة هي كما يلي:

$$\mathrm{f''(x)} = 12x$$

عند تعويض القيمة (1) في المشتقة الثانية تكون قيمتها موجبة، وبالتالي هذه النقطة تمثل نهاية صغرى (الدالة محدبة)، بينما عند تعويض القيمة (-1) في المشتقة الثانية تكون قيمتها سالبة، وبالتالي هذه النقطة تمثل نهاية عظمى (الدالة مقعرة).

1.1.تأثير التقعر والتحدب في البحث عن الحلول المثلى

إن شكل الدالة (محدبة أم مقعرة) له تأثير على الحل الأمثل، لذا سنصادف الحالات التالية:

1.1.1.حد أعظمي أو أصغري-غير مقيد

إذا كان برنامج غير خطي غير مقيد يتألف من دالة هدف بمتغير واحد $f(x)$، وكانت هذه الدالة محدبة أو مقعرة، فإنه يوجد حل أمثل وحيد عند نقطة تقع أولا داخل المنطقة المقبولة، حيث تنعدم جميع المشتقات وثانيا عند نقطة حدية.

2.1.1.قيمة أعظمية – مقيد

إذا كان برنامج غير خطي يتألف من دالة هدف وقيود، فإن كون الحل الأمثل وحيد يتوقف على طبيعة شكل دالة الهدف ومجموعة القيود، تشكل منطقة محدبة عندها يوجد حل أعظمي وحيد للمسالة (لذا يجب أن تكون أي نقطة مستقرة حلا أعظميا شموليا).

3.1.1.قيمة أصغرية – مقيد

إذا كان برنامج غير خطي يتألف من دالة هدف وقيود، وكانت دالة الهدف محدبة وكذلك مجموعة القيود تشكل منطقة محدبة، فإن أي نقطة مستقرة ستكون حلا أصغريا شموليا.

2.أمثلية دالة ذات المتغير المفرد بدون قيود (Single-Variable Optimization)

سندرس كيفية حل البرامج غير الخطية غير المقيدة والتي تحتوي على متغير واحد فقط، حيث تأخذ الصيغة العامة التالية:

$$\mathrm{Opt}: Z = f(x)$$

حيث أن:

Opt: تمثل الأمثلية (Optimization) قد تكون تعظيم (Maximize) أو تصغير (Minimize).

$f(x)$: تمثل الدالة غير الخطية ذات المتغير الوحيد (x).

ويكون البحث عن الأمثلية (تعظيم أو تصغير) في الفترة غير المحدودة $]-\infty,+\infty[$ ، أما إذا كان البحث في مجال محدود بـ [a,b]، فإن البرنامج السابق يصبح كالأتي:

$$\mathrm{Opt}: Z = f(x)$$
$$\text{subject to}: a \le x_0 \le b$$

مثال(31):

لتكن لديك الدالة التالية:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$$

أوجد النقاط العظمى والصغرى لهذه الدالة؟

الحل:

أولا نقوم باستخراج المشتقة الأولى ونساويها بالصفر من اجل استخراج النقاط الحرجة:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$
$$3x^2 - 18x + 24 = 0 \leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0$$
$$x = 2, x = 4$$

تسمى هذه النقاط بالنقاط الحرجة (2، 4).

ثانيا نحسب المشتقة الثانية ونساويها بالصفر

$$f''(x) = 6x - 18$$
$$6x - 18 = 0 \leftrightarrow x = 3$$

نعوض القيمتين (2، 4) في المشتقة الثانية فنحصل على:

$$f''(2) = 6(2) - 18 = -6 < 0$$
$$f''(4) = 6(4) - 18 = 6 > 0$$

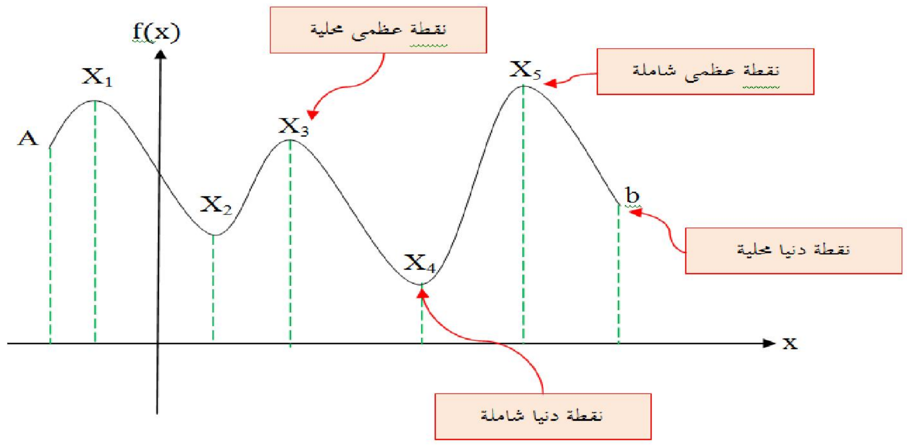
انطلاقا من النتائج نستنتج أن القيمة 2 هي قيمة عظمى محلية، بينما القيمة 4 هي قيمة صغرى محلية.

2.1.الأمثلية المحلية والشاملة (Local & Global Optimum)

إذا كانت لدينا دالة $f(x)$ المعرفة والمستمرة في المجال $]-\infty, +\infty[$ ، فإن للدالة حد أدنى عند X_0 وجد مجال محدود ذو مركز x_0 بحيث يحقق $f(x) \geq f(x_0)$ لكل قيم x في هذا المجال الذي تتحدد فيه الدالة، وعليه إذا تحقق هذا الشرط فإن الحد الأدنى عند x_0 يكون حد أدنى شاملا.

مثال: لتكن لدينا الدالة $f(x)$ المعرفة بالمجال [A,b].

الشكل (7): الدالة اللاخطية غير المقعرة وغير المحدبة



المصدر: ريتشارد برونسون، ترجمة حسن حسني الغبارى،" بحوث العمليات"، ط2، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2002، ص135.

نلاحظ من الشكل أن منحنى الدالة محدود بثلاث نقاط عظمى محلية هي: X_1، X_3، X_5، إلا أن النقطة X_5 تعتبر نقطة عظمى شاملة، لأنها تمثل أعلى قيمة للدالة المدروسة في المجال [A,b]. كما أن هذا المنحنى محدود بنقاط دنيا محلية هي: A، X_2، X_4، b، إلا أن النقطة X_4 تعتبر نقطة دنيا شاملة كونها تمثل أدنى قيمة للدالة في المجال المدروس.

3.أمثلية متعددة المتغيرات بدون قيود Multivariable Optimization Without constraints

يأخذ البرنامج غير الخطي غير المقيد لأكثر من متغير الصيغة العامة التالية:

$$\text{Opt}: Z = f(x) \qquad x = (x_1, x_2, x_3 \ldots \ldots . x_n)^T$$

حيث أن:

Opt: تمثل الأمثلية (Optimization) في شكل تعظيم (Maximize)؛

$f(x)$: تمثل الدالة ذات عدة متغيرات (x)، حيث تكون غير خطية.

ويكون البحث عن الأمثلية (تعظيم Max) في الفترة غير المحدودة $]-\infty, +\infty[$ ، أما إذا كانت البرامج في صورة تصغير(Min) فنقوم باستبدال $f(x)$ بالدالة $-f(x)$

1.3.الحدود العظمى المحلية والشاملة

الجوار (∈) حول هو مجموعة كل المتجهات x ، بحيث أن:

$$(x - \hat{x})^T(x - \hat{x}) = (x_1 - \hat{x}_1)^2 + (x_2 - \hat{x}_2)^2 + \ldots \ldots . (x_n - \hat{x}_n)^2 \leq \epsilon^2$$

ومن الناحية الهندسية يكون الجوار (∈) حول $\hat{}$ هو المداخل، والحدود لكرة متعددة الأبعاد نصف قطرها (∈) ومركزها $\hat{x}$. والدالة الهدفية $f(x)$ لها حد أعلى محلي عند $\hat{x}$ إذا وجد جوار (∈) حول $\hat{x}$، بحيث أن:

$$f(x) \leq f(\hat{x})$$

لكل قيم x في هذا الجوار (∈) الذي تتحدد فيه الدالة، وإذا تحقق الشرط لكل قيمة موجبة (∈) (ليس المهم القيمة نفسها)، فإن $f(x)$ يكون لها حد أعلى شامل عند $\hat{x}$.

2.3.شعاع المشتقات الجزئية والمصفوفة الهيسية (Gradient & Hessian Matrix)

إذا كانت الدالة غير خطية متعددة المتغيرات$f(x_1, x_2, x_3 \dots \dots . x_n)$ ، فإن شعاع المشتقات الجزئية الأولى المرتبط بهذه الدالة يرمز له ب $\nabla f(x_i)$ ، والذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3 \dots \dots . x_n) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$$

وتعرّف المصفوفة الهيسية (مصفوفة المشتقات الجزئية الثانية) للتابع $f(x_1, x_2, x_3 \dots \dots . x_n)$، والتي نرمز لها ب $H(x_1, x_2, x_3 \dots \dots . x_n)$ بالعلاقة التالية:

$$H_{ij} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]$$

وهي مصفوفة مربعة متناظرة ذات الأبعاد n×n.

بينما الشكل العام للمصفوفة الهيسية يأخذ الصيغة التالية:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

يمكن تشكيل عدة محددات انطلاقا من العنصر الموجود في الزاوية اليسارية العليا ثم بالتتابع عبر كامل المصفوفة من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين. نرمز لهذه المحددات $(D_1, D_2, D_3 \dots \dots . D_n)$، وتكون الاختبارات التالية صالحة للاستخدام:

- تكون نقطة صغرى إذا كانت المحددات $(D_1, D_2, D_3 \dots \dots . D \quad)$ جميعها موجبة.

- تكون نقطة عظمى إذا كانت المحددات الزوجية موجبة($D_j > 0 \;\; j = 1,3, \dots$)، والفردية سالبة ($D_j < 0 \;\; j = 2,4, \dots$).

ملاحظة:

إذا كانت الدالة غير خطية تتألف من متغيرين $f(\;\;_1, x_2)$ يمكننا الاستعانة بالجدول التالي لمعرفة ما إذا كانت الدالة محدبة أم مقعرة.

	محدبة	التحدب الكامل(التام)	مقعرة	التقعر الكامل(التام)
المشتقة الثانية $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$	**0≤**	**0<**	**0≥**	**0>**
المشتقة الثانية $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$	**0≤**	**0<**	**0≥**	**0>**
المحدد $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$	**0≤**	**0<**	**0≤**	**0<**

مثال(32):

لتكن لدينا الدالة التالية:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة متناظرة ذات الرتبة 2×2 وجميع عناصر القطر موجبة.

نحسب محدد المصفوفة الهيسية:

$$|H| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

بما أن محدد المصفوفة الهيسية معدوم والمشتق الثاني لكلا المتغيرين أكبر من الصفر، فإن الدالة $f(x_1, x_2)$ محدبة.

4.الأمثلية غير الخطية المقيدة (Non Linear Constrained Optimization)

توجد طرق كثيرة لحل البرامج غير الخطية المقيدة من بينها: طريقة فيبوناشي Fibonacci، نيوتن رافسون Newton Raphson ، وطريقة كون توكر Kuhn Tuker...الخ، إلا أن أبرز الأساليب المستخدمة في حل هذا النوع من البرامج غير الخطية ما يعرف بـ "مضاعف لاغرانج Lagrange Multiplier".

1.4.طريقة مضاعف لاغرانج (Lagrange Multiplier)

تعود هذه الطريقة إلى الفرنسي Joseph Louis Lagrange ، حيث تطبق على البرامج غير الخطية المقيدة بقيود مساواة وفق الصيغة التالية:

$$\text{Maximize } f(x) \qquad \text{where } x = x_1, x_2, x_3 \ldots \ldots . x_n$$

$$\text{subject to: } g_i(x) = b_i \qquad \text{for } i = 1,2,3 \ldots \ldots \ldots m$$

حيث أن:

$f(x)$: دالة الهدف مستمرة وقابلة للتفاضل.

$g(x)$: قيود المسألة.

يتم استعمال هذه وفق الخطوات التالية:

- تكوين دالة لاغرانج على النحو التالي:

$$L(x,\lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [g_i(x) - b_i]$$

حيث أن: λ_i تمثل ثوابت مجهولة تسمى بمضاعفات لاغرانج.

- إيجاد المشتقات الجزئية لدالة لاغرانج بالنسبة لكل متغير (X، λ)؛
- مساواة المشتقات الجزئية بالصفر، ثم نقوم بحل جملة المعادلات المتحصل عليها جملة واحدة.

مثال(33):

نفترض أن شركة (Kloster) تقوم بإنتاج نوعين من السلع، وأن إجمالي تكلفتها:

$$TC = 4Q_1^2 + 5Q_2^2 - Q_1Q_2$$

حيث أن:

Q_1 : تمثل الكمية المنتجة من السلعة الأولى.

Q_2: تمثل الكمية المنتجة من السلعة الثانية.

ونتيجة لالتزامات الشركة اتجاه عمالها، فإنه يتحتم على الشركة إنتاج 30 وحدة بالضبط في الساعة من السلعتين معا.

المطلوب: إيجاد الكميات المثلى التي تخفض التكلفة إلى أدنى حد ممكن؟

الحل:

يمكن كتابة البرنامج غير الخطي للمسالة كما يلي:

$$\begin{cases} TC = 4Q_1^2 + 5Q_2^2 - Q_1Q_2 \\ Q_1 + Q_2 = 30 \\ Q_1 \geq 0, Q_2 \geq 0 \end{cases}$$

لحل البرنامج نشكل دالة لاغرانج بعد تحويل القيد كما يلي:

$$Q_1 + Q_2 - 30 = 0$$

ثم نكوّن دالة لاغرانج L_{TC}:

$$L_{TC} = 4Q_1^2 + 5Q_2^2 - Q_1Q_2 - \lambda(Q_1 + Q_2 - 30)$$

نشتق الدالة L_{TC} بالنسبة إلى كل من هذه المتغيرات الثلاثة Q_1، Q_2، و λ :

$$\frac{\partial L_{TC}}{\partial Q_1} = 8Q_1 - Q_2 - \lambda$$

$$\frac{\partial L_{TC}}{\partial Q_2} = 10Q_2 - Q_1 - \lambda$$

$$\frac{\partial L_{TC}}{\partial \lambda} = -Q_1 - Q_2 + 30$$

ثم نجعل هذه المشتقات الثلاثة مساوية للصفر حتى نتمكن من الحصول على أدنى قيمة لـ TC وعليه:

$8Q_1 - Q_2 - \lambda = 0$ ……………………………….(1)

$10Q_2 - Q_1 - \lambda = 0$ ……………………………….(2)

$-Q_1 - Q_2 + 30 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

بطرح المعادلة (2) من (1) نحصل على:

$11Q_2 - 9Q_1 = 0 \rightarrow Q_2 = 9/11 Q_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$

بتعويض قيمة Q_2 في المعادلة (3) نجد:

$Q_1 = 16.5$

وعليه:

$Q_2 = 13.5$

$\lambda = 118.5$

$TC = 1777.5$

أي أن الحل الأمثل يتطلب إنتاج 16.5 وحدة من السلعة الأولى، و13.5 وحدة من السلعة الثانية لتحقيق أدنى تكلفة ممكنة تقدر بـ 1777.5 ون.

2.تمارين مقترحة

تمرين (1):

اختبر هذه الدوال من حيث التقعر والتحدب؟

$\mathrm{f(x)} = 10x - x^2$

$\mathrm{f(x)} = x^4 + 6x^2 + 12x$

$\mathrm{f(x)} = 3x_1 + 2x_1^2 + 4x_2 + x_1^2 - 2x_1x_2$

$\mathrm{f(x)} = -2x_1^2 - x_1^2 + x_1x_2$

تمرين(2):

لتكن لديك الدالة التالية:

$\mathrm{f(x)} = x^4 - 3x^3 - 2x + 2x^2 + 7$

$1 \leq x \leq 10$

المطلوب: اختبر تحدب الدالة في هذا المجال؟

تمرين(3):

إذا كانت دالة الإنتاج لشركة ما هي: Q=7XY

حيث :

X: عدد ساعات العمل؛

Y: الكمية اللازمة من المواد.

وبافتراض أجرة ساعة العمل 10 ون وتكلفة الكيلو من المواد الأولية 2 ون، وأن الحد الأقصى لتكاليف الشركة 1000ون، فما هو أكبر إنتاج ممكن لهذه الشركة؟

تمرين (**4**):

ليكن لديك البرنامج غير الخطي التالي:

$$\begin{cases} \max f(x) = 4x_1^2 + 2_2^2 + 3_3^2 - 4x_1x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 20 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستعمال أسلوب لاغرانج؟

الكتب العربية:

1. إبراهيم محمد مهدي،"مقدمة في بحوث العمليات"، مكتبة الجلاء الجديدة، العراق، 2007.
2. إبراهيم موسى عبد الفتاح" مقدمة في بحوث العمليات نماذج وتطبيقات"، المكتبة العلمية، مصر، 2006.
3. أسماء باهرمز،" مقدمة في بحوث العمليات"، دار سيبويه للطبع والنشر، السعودية، 2012.
4. حامد الشمرتي، علي الزبيدي،"مدخل إلى بحوث العمليات"، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، الأردن، 2007.
5. حسام مراد ، محمد نوار العوا، حسام مراد، محمد نايفة،" بحوث العمليات"، المركز العربي للتعريب والترجمة والنشر، دمشق، 1998.
6. حسن ياسين طعمة، "نماذج وأساليب كمية في الإدارة والتخطيط"، دار صفاء للنشر والتوزيع، الأردن، 2018.
7. حمودي حاج صحراوي،"رياضيات المؤسسة كمدخل للتقنيات الكمية"، دار النشر جيطلي، الجزائر، 2014.
8. دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال،" بحوث العمليات"، اليازوري، الأردن، 2008.
9. رائد محمد عب ربه، "الاقتصاد الإداري "، الجنادرية، الأردن، 2012.
10. ريتشارد برونسون، ترجمة حسن حسني الغبارى،" بحوث العمليات"، ط2، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2002.
11. زيد تميم البلخي،" بحوث العمليات"، دار حافظ للنشر والتوزيع، الأردن، 1998.
12. السعدي رجال،" بحوث العمليات البرمجة الخطية"، دار رجزو، الجزائر، 2004.
13. عبد المنعم فليح عبد الله وآخرون،"بحوث العمليات في المحاسبة"، جهاز الكتب، مصر، 2018.
14. علاء محمد البتانوني،" بحوث العمليات ودورها في اتخاذ القرارات"، دار التعليم الجامعي، مصر، 2016.
15. فتحي رزق السوافيري ،"بحوث العمليات تطبيقات باستخدام الحاسب"، الدار الجامعية، مصر، 2004.
16. كامل علاوي كاظم، عاطف لافي مرزوق،" الرياضيات الاقتصادية أسس وتطبيقات"، دار المناهج، الأردن، 2010.
17. مجيد الكرخي،"تخطيط وتقويم البرامج"، دار المناهج، الأردن، 2014.
18. محمد الطراونة، سليمان عبيدات،"مقدمة في بحوث العمليات"، دار المسيرة، الأردن، 2009.

19. محمد العزاوي، محمد دباس الحميد، "الأساليب الكمية في العلوم الإدارية"، دار اليازوري، الأردن، 2006.
20. محمد الفاتح محمود بشير المغربي ،" بحوث العمليات في المحاسبة "، الأكاديمية الحديثة للكتاب الجامعي، مصر، 2018.
21. محمد راتول،" بحوث العمليات"، ديوان مطبوعات الجامعية، الجزائر، 2011.
22. محمد مفيد القوصي،"الرياضيات الإدارية"، مركز الكتاب الاكاديمي، مصر، 2015.
23. محمود العبيدي، مؤيد عبد الحسين الفضل،"بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة المبيعات"، الوراق للنشر والتوزيع، الأردن، 2004.
24. مؤيد الحسين الفضل،" المنهج الكمي في اتخاذ القرارات الإدارية المثلى"، دار اليازوري، الأردن، 2010.
25. هبال عبد النور،" رياضيات المؤسسة"، دار الهدى للطباعة والنشر والتوزيع، 2018.

الكتب الأجنبية:

26. A.M.Natarajan , P.Balasibramani, A.Tamilarasi, « Operations Research », 4th edtition, Pearson education, india, 2009.
27. Camille.C.Price, Michael Carter, Ghaith Rabadi, « Operations Research A.Practical Introduction », 2nd edition, CRC press, USA, 2018.
28. Frederick S.hillier & Gerald J.Lieberman, « Introduction to Operations Research »,10th edition, Mc Graw Hill education, USA, 2015.
29. G.Srinivasan, « Operations Research : Principles and Applications », 3rd edition, PHI Learning, Newdelhi, 2017.
30. L.R.Foulds, « Optimisation Techniques :An Introdution », Springer Verlag,1st edition, USA, 1981.
31. N.K.Tiwari Shishir K. Shandilya, « Operations Research », Eastern Economy edition, New delhi, 2006.
32. Natarajan .P.Balasubramani A.Tamilarsi, « Operations Research », Pearson education, fourth impression, New delhi, 2009.
33. Paul .R.Thie, G.E.Keouph, « An Introduction To Linear Programming an Game Theory », Wiley, 3rd edition, US, 2008.
34. Rathindra P.Sen, « Opeartions Research Algorithms and Applications », Eastern economy edition, New delhi, 2012.
35. Ruhul A.Sarker,Charles S.Newton, « Optimization Modelling Approach »,CRC press, New york, 2008.
36. Yadolah Dodge, « Optimisation Appliquée », Springer Verlag, France, 2005.

الملحق (1)

المقرر المعتمد من قبل اللجنة الوطنية للتكوين في ميدان علوم التسيير

توصيف المقياس

الميدان: العلوم الاقتصادية والتسيير والعلوم التجارية

قسم: علوم التسيير

تخصص: جذع المشترك

السداسي: الثالث

الوحدة: المنهجية

الرصيد: 3.00

المعامل: 02

اسم ورمز المقياس : رياضيات المؤسسة ãÒ3

اسم هيئة التدريس المسؤول على المقياس: أ.د.حاج صحراوي حمودي، د.مصطفاي ياسين

الهدف الأساسي من هذا المقياس : تطوير قدرة الطالب في تطبيق الأسس النظرية والتطبيقية للأساليب الكمية.

الموضوعات التي ينبغي تغطيتها:

- البرمجة الخطية
- المشكلة الثنوية
- تحليل الحساسية
- نماذج النقل
- البرمجة غير الخطية

الملحق (1)

المقرر المعتمد من قبل اللجنة الوطنية للتكوين في ميدان علوم التسيير

توصيف المقياس

الميدان: العلوم الاقتصادية والتسيير والعلوم التجارية

قسم: علوم التسيير

تخصص: جذع المشترك

السداسي: الثالث

الوحدة: المنهجية

الرصيد: 3.00

المعامل: 02

اسم ورمز المقياس : رياضيات المؤسسة ãÒ3

اسم هيئة التدريس المسؤول على المقياس: أ.د.حاج صحراوي حمودي، د.مصطفاي ياسين

الهدف الأساسي من هذا المقياس : تطوير قدرة الطالب في تطبيق الأسس النظرية والتطبيقية للأساليب الكمية.

الموضوعات التي ينبغي تغطيتها:

- البرمجة الخطية
- المشكلة الثنوية
- تحليل الحساسية
- نماذج النقل
- البرمجة غير الخطية

الجزء الأول: البرمجة الخطية (المسالة الأصلية)...1
تمهيد...2
1.مفهوم البرمجة الخطية...2
2.فرضيات النموذج الخطي..2
1.2.الخطية..2
2.2.التناسبية...2
3.2.قابلية القسمة...3
4.2.حالة التأكد...3
5.2.عدم السلبية..3
6.2.الإضافة...3
3.شروط استخدام البرمجة الخطية...3
4.بناء(صياغة) نموذج البرمجة الخطية...3
1.4.متغيرات القرار...3
2.4.صياغة دالة الهدف..3
3.4.تشكيل القيود...3
5.طرق حل مسائل البرمجة الخطية 9
1.5.الطريقة البيانية...9
2.5.طريقة السملكس...15
6.الحالات الخاصة..22
1.6.حالة تعدد الحلول المثلى..22
2.6.حالة عدم توفر حدود لمنطقة الحل 24
3.6.حالة استحالة الحل...26
4.6.حالة عدم الانتظار (الانحلال)...28
7.تمارين مقترحة...32
الجزء الأول: المسالة الثنوية وتحليل الحساسية.......................................35
1.المسألة الثنوية..36
تمهيد...36
1.1.أهمية النماذج الثنوية..36

2.1.صياغة المسالة الثنوية.. 36
3.1.خطوات اشتقاق المسالة الثنوية من المسالة الأصلية............................. 37
4.1.طرق حل المسالة الثنوية.. 38
2.المعنى الاقتصادي لمتغيرات المسالة الثنوية.................................... 44
1.2.تكلفة الفرصة البديلة... 44
2.2.سعر الظل... 44
3.2.علاقة سعر الظل بدالة الهدف.. 45
3.تحليل الحساسية 47
1.3.التغير في معامل دالة الهدف.. 47
2.3.التغير في الطرف الأيمن من القيود.. 50
3.3.التغير في معاملات القيود... 50
4.3.إضافة متغير جديد في المسالة... 51
5.3.إضافة قيد جديد في المسالة... 52
6.3.حذف متغير من المسالة.. 53
7.3.حذف قيد من المسالة.. 55
4.تمارين مقترحة.. 57
الجزء الثاني: مسائل النقل.. 59
تمهيد.. 60
1.صياغة النموذج الرياضي لمشكلة النقل... 60
1.1.تشكيل دالة الهدف.. 61
2.1.تشكيل القيود... 61
3.1.قيد اللاسلبية.. 61
2.مراحل حل مشاكل النقل... 61
1.2.إعداد الحل الأساسي.. 61
2.2.تحسين الحل إلى إن نصل للحل الأمثل.. 61
3.الطرق المتعمدة لإيجاد الحل الأولي... 62
1.3.طريقة الركن الشمالي الغربي 62
2.3.طريقة الخلية ذات الأقل تكلفة.. 64

4.التأكد من الوصول إلى الحل الأمثل...66
1.4.مرحلة تقييم الخلايا المملوءة...66
2.4.مرحلة تقييم الخلايا الشاغرة...66
3.4.مرحلة حساب تكلفة الفرصة البديلة...66
5.الحالات الخاصة في مسائل النقل...71
1.5.حالة عدم تساوي في العرض والطلب...71
2.5.حالة التفكك (أو الانحلال)...73
3.5.حالة تجنب التوزيع م مصدر معين إلى منفذ ما...75
6.تمارين مقترحة...77
الجزء الثالث: البرمجة غير الخطية...78
تمهيد...79
1.الدوال المقعرة والمحدبة...80
1.1.تأثير التقعر والتحدب في البحث عن الحلول المثلى...82
2.أمثلة دالة ذات المتغير المفرد بدون قيد...83
1.2.الأمثلة المحلية والشاملة...84
3.أمثلة متعددة بدون قيود...85
1.3.الحدود العظمى المحلية والشاملة...85
2.3.شعاع المشتقات الجزئية والمصفوفة الهيسية...85
4.الأمثلة غير الخطية المقيدة...87
1.4.طريقة مضاعف لاغرانج...87
5.تمارين مقترحة...90