



THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en-Sciences

Option : Mathématiques Fondamentale

Par

Mr. BOUKHETOUTA Mohamed Nadir

Thème :

Prolongement d'applications holomorphes

Thèse soutenue le : 16 Janvier 2025 devant le jury composé de :

Président	Mr. Saad AGGOUN	MCA	Université Sétif 1 Ferhat Abbas
Rapporteur	Mr. Mostafa KRACHNI	MCA	Université Sétif 1 Ferhat Abbas
Examineurs	Mr. Abdelaziz RAHMOUNE	MCA	Université Laghouat Amar Teldji
	Mr. Kamel TAHRI	MCA	Ecole supérieur de Management Tlemcen

Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier Allah de m'avoir accordé du temps, de la force et de la patience pour terminer ce travail.

Ensuite, je dois exprimer mes sincères remerciements à mon encadrant Docteur Krachni Mostafa, qui a dirigé ce travail, et je lui exprime ma profonde gratitude pour les conseils et les encouragements qu'il m'a donnés.

Profonde gratitude et reconnaissance exprimées au président du jury, docteur Aggoun Saad, et examinateurs : Docteur Tahri Kamel, et Docteur Rahmoune Abdelaziz pour avoir accepté de rendre compte de cette thèse.

ملخص

في هذه الأطروحة، سوف نتناول موضوع تمديد التوابع الهولومورفية المعرفة على مفتوح هارطوكس ذات قيم في المتنوعات المعقدة.

نبدأ بتعريف مجموعة هارطوكس المفتوحة بالإضافة إلى نظرية هارطوكس. أين نصل بعدها إلى وضع تعريف للمتنوعات القابلة للتمديد هولومورفيا دائماً (القابلة للتمديد ميرومورفيا دائماً).

ثم نتوصل إلى تقديم بعض النتائج والأمثلة حول المتنوعات القابلة للتمديد هولومورفيا دائماً. وكمثال عن ذلك متنوعات هوبف وكذا الأسطح المتجانسة تقريبا.

نختتم الأطروحة بمعالجة مسألة تمديد التوابع الهولومورفية المعرفة على مفتوح هارطوكس ذات قيم في الأسطح البيضوية، بعدها نقوم بتعميم هذه النتيجة على متنوعات تحقق فرضيات معينة.

كلمات مفتاحية : ظاهرة هارطوكس، تمديد، المتنوعات العقدية، ألياف متوازية.

Résumé

Dans cette thèse, nous aborderons le sujet de prolongement d'applications holomorphes définies sur l'ouvert de Hartogs à valeurs dans des variétés complexes.

Nous commençons par la définition de l'ouvert de Hartogs, et le théorème de Hartogs. Nous arrivons à une définition pour les variétés holomorphiquement extensifères (méromorphiquement extensifères).

Ensuite nous donnons quelques résultats et exemples connus de sujet pour les variétés holomorphiquement extensifères, comme les variétés de Hopf et les surfaces presque homogènes.

Nous concluons la thèse en abordant la question de l'extension des applications holomorphes à valeurs dans des surfaces elliptiques, après nous généralisons ce résultat à des variétés vérifiant certaines hypothèses.

Mots clés : Le phénomène de Hartogs, prolongement, variétés complexes, fibres parallélisables.

Abstract

In this thesis, we will approach the subject of extension of holomorphic maps defined on the Hartogs open set taking values in complex.

We start with the definition of the open set of Hartogs, and the theorem of Hartogs. We arrive at a definition for holomorphically extensifer (meromorphically extensifer) manifolds.

Then we give some known results and examples of holomorphically extensifer manifolds, for example a Hopf manifolds and almost homogeneous surfaces.

We conclude the thesis by addressing the question of the extension of holomorphic maps with values in elliptical surfaces, after we generalize this result to manifolds verifying some assumptions.

Key words : Hartogs phenomenon, extension, complex manifolds, parallelizable fibers.

Table des matières

Table des matières	i
Introduction générale	1
1 Notions de base en analyse complexe de plusieurs variables et en géométrie	6
1.1 Définitions et préliminaires	7
1.2 Définitions et exemples de variétés complexes	10
2 Le phénomène de Hartogs	15
2.1 Figures de Hartogs	16
2.2 Théorèmes d'extension de Hartogs	18
3 Rappel de quelques résultats récents	23
3.1 Définitions et préliminaires	24
3.2 Variétés extensifères	25
4 Exemples de variétés holomorphiquement extensifères	38
4.1 Variétés de Hopf et Tores	39
4.2 Surfaces presque homogènes compactes	39
4.3 Variétés parallélisables	43
4.4 Variétés homogènes	44
5 Résultats obtenus	46
5.1 Surfaces elliptiques	47
5.2 Généralisation	51

Conclusion	55
Bibliographie	56

Notation

- \mathbb{C} : Le plan complexe
- \mathbb{C}^n : L'espace complexe de dimension n
- Ω : Un domaine de l'espace complexe (Un ouvert connexe)
- $\mathcal{O}(\Omega)$: L'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω
- $D(a, R)$: Un polydisque de centre a et de rayon R
- $\bar{D}, \partial D$: Le bord du disque D
- $T_{p,r}$: L'ouvert de Hartogs dans \mathbb{C}^n
- $H_{p,r}$: L'ouvert de Hartogs dans \mathbb{C}^2
- \tilde{T} : L'enveloppe d'holomorphic de l'ouvert de Hartogs dans \mathbb{C}^n
- \tilde{H} : L'enveloppe d'holomorphic de l'ouvert de Hartogs dans \mathbb{C}^2
- Δ^n : Le polydisque dans \mathbb{C}^n
- Δ^2 : Le polydisque dans \mathbb{C}^2
- G_f, Γ_f : Le graphe d'une fonction f
- $\overline{G_f}$: La fermeture du graphe d'une fonction f
- \tilde{f} : Le prolongement d'une fonction f
- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$: L'espace projectif complexe de dimension n
- Z : Un sous-ensemble analytique
- $\text{Codim}Z$: La codimension de Z
- $\Delta^n \setminus Z$: Le complémentaire de Z dans Δ^n

- T_n : Le tore complexe de dimension n
- τ_a : Une carte locale de centre a
- C_{a_p} : Une fibre singulière
- H^0 : La section globale
- \cong : Isomorphe

Introduction générale

Le sujet de l'extension des applications holomorphes est un domaine vaste qui joue un rôle central en analyse complexe, éclairant la manière dont les fonctions holomorphes se comportent et se propagent sur différents ensembles dans l'espace complexe, a des implications profondes dans divers domaines des mathématiques, de la physique théorique, et de l'ingénierie.

Par exemple, dans le cas de \mathbb{C} (c'est-à-dire en dimension 1), il existe une théorie complète des singularités pour les fonctions holomorphes définies dans un voisinage $V^* = V \setminus \{0\}$ épointé de l'origine ($0 \in V$ un ouvert de \mathbb{C}).

Friedrich Moritz Hartogs (1874-1943) était un mathématicien allemand dont les recherches comprenait la théorie des ensembles et la théorie des fonctions à plusieurs variables complexes (dans \mathbb{C}^n avec $n \geq 2$). Hartogs a découvert un phénomène d'extension forcé des applications holomorphes de plusieurs variables. L'histoire de ce phénomène commence lorsque Hurwitz a montré en 1897 que toutes les fonctions holomorphes définies sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, ou même dans un voisinage $V^* = V \setminus \{0\}$ (où $0 \in V$ est un ouvert de \mathbb{C}^n) épointé de l'origine, se prolongent holomorphiquement à travers l'origine. Cependant ce n'est qu'en 1906 que Hartogs a décrit le phénomène général et en a fourni une démonstration rigoureuse pour des "marmites" [13]. La publication de sa thèse (sous la direction de Hurwitz) a révélé ce qui est maintenant considéré comme l'un des résultats les plus marquants de l'analyse complexe de plusieurs variables, il établit un théorème fondamental pour cette théorie, connu aujourd'hui sous le nom de "*Théorème d'extension de Hartogs*".

Ce théorème représente la première propriété propre aux fonctions holomorphes à plusieurs variables, mettant en lumière la différence entre la théorie des fonctions d'une variable complexe et celle de plusieurs variables.

D'une part, le théorème de Hartogs assure que si f est une fonction complexe à plusieurs variables qui est holomorphe par rapport à chaque variable séparément, alors f est également holomorphe en tant que fonction de toutes ses variables. Notons qu'aucune hypothèse n'est faite sur f , à part de son holomorphie par rapport à chaque variable. Notamment, on ne suppose pas que la fonction f soit continue, ce qui simplifierait le problème considérablement. Donc, le théorème dit que pour qu'une fonction complexe f soit holomorphe, il faut et il suffit qu'elle soit holomorphe par rapport à chaque variable séparément. Ceci est déjà un résultat fort, car dans le cas réel, cette propriété n'est pas satisfaite; c'est-à-dire, si f est une fonction réelle à plusieurs variables et différentiable par rapport à chaque variable séparément alors f n'est pas nécessairement continue en tant que fonction de toutes ses variables.

D'autre part le théorème d'extension de Hartogs dit peut être vu comme une description des singularités d'une fonction holomorphe. De façon plus simple, une singularité d'une fonction holomorphe est un point où la fonction n'est plus holomorphe. Ainsi, le théorème assure que l'ensemble des singularités d'une fonction holomorphe ne peut pas être un compact. Plus précisément, si f est une fonction complexe sur un ouvert V de \mathbb{C}^n et holomorphe sur le complémentaire d'un compact dans V , alors f peut être étendue de manière unique comme fonction holomorphe à tout V . Notons que ce résultat est vrai uniquement si $n > 1$, puisque pour le cas d'une variable complexe, cette affirmation n'est pas aussi satisfaisante. En effet, considérons par exemple la fonction complexe définie sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ par $f(z) = 1/z$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mais ne peut pas être prolongée holomorphiquement à tout \mathbb{C} .

Plusieurs études et recherches ont été menées sur le problème de l'existence d'applications holomorphes sur les ouverts de \mathbb{C}^n . Poincaré a donné en 1907 une autre démonstration pour les fonctions holomorphes au voisinage de la sphère unité dans \mathbb{C}^2 . Dans [23] Levi a produit en 1910 une version du théorème de Hartogs pour les fonctions

méromorphes (invalidant ainsi l'affirmation faite par Weierstrass en 1879 selon laquelle tout domaine de \mathbb{C}^n , était un domaine de méromorphie). Levi a appliqué l'argument basé sur Hurwitz-Hartogs de l'intégration de Cauchy sur des cercles se déplaçant dans le domaine (découvert pour la première fois dans [16]), afin d'effectuer des extensions holomorphes à travers des frontières strictement pseudo-concaves. Hirschowitz a prouvé que toute application méromorphe d'un ouvert U de \mathbb{C}^n dans une variété complexe X se prolonge méromorphiquement à l'enveloppe d'holomorphie de U , comme le lieu singulier d'une telle application méromorphe est de codimension au moins 2, (c'est-à-dire dans ce cas un ensemble de points isolés), cela signifie que toute application analytique de U dans une variété sous-algébrique compacte se prolonge au complémentaire dans l'enveloppe d'holomorphie de U d'un ensemble de points isolés.

Plus tard dans [28], et exactement en 1924 Osgood a énoncé et démontré partiellement le théorème sous sa forme classique (qui donne la référence à Hartogs). La démonstration d'Osgood achoppait rencontré en effet un problème de monodromie et ce n'est qu'en 1936 que le théorème fut entièrement justifié par Brown grâce à des considérations topologiques. En 1936, bien avant que Milnor [27] ait popularisé la théorie de Morse, en utilisant des concepts topologiques et un langage aujourd'hui difficile à appréhender, Brown [4] a fixé en quelque sorte l'unicité de l'extension. En 1939 Fueter a donné une autre démonstration lorsque $n = 2$ puis dans le cas général en 1942, ses arguments, très différents de ceux de Brown, étaient fondés sur une formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes d'une variable hypercomplexe, formule obtenue en 1931 par Moisil redécouverte en 1935. C'est à partir de celle-ci que Martinelli [25, 26] a écrit sa formule et simplifia la démonstration de Fueter [12]. Dans la même période, Bochner a également proposé dans [3] une autre démonstration du théorème de Hartogs, allant même jusqu'à généraliser celui-ci aux fonctions continues sur lesquelles on pourrait qualifier comme "holomorphes par morceaux". Ehrenpreis [10] a trouvé ce qui est comme étant la preuve la plus concise, basée sur la disparition de la cohomologie à support compact. Cette preuve a été transmise à des générations d'analystes complexes, grâce à la théorie d'Hormander [15]. Depuis les années 1960, plusieurs techniques et méthodes ont été développées dans un vaste domaine de recherche sur l'analyse de plusieurs variables complexes.

L'objectif de cette thèse est d'apporter une contribution à l'étude du problème de l'extension des fonctions holomorphes sous certaines hypothèses, afin d'obtenir un nouveau résultat.

Cette thèse se compose de deux parties :

La première partie comprend les chapitres 1 et 2, sert d'introduction de notre sujet. Le matériel présenté ici a été sélectionné en mettant l'accent sur les outils mathématiques utiles nécessaires à l'étude du prolongement des applications holomorphes.

Dans le premier chapitre, nous commençons par un bref résumé de l'analyse complexe de plusieurs variables, suivi d'un rappel sur la définition des variétés complexes, illustré par quelques exemples.

Le second chapitre consacré au phénomène de Hartogs. Nous débutons par la définition de l'ouvert de Hartogs, puis nous examinons certaines structures géométriques associées à cet ouvert dans \mathbb{C}^2 . Nous présentons également deux versions des théorèmes de Hartogs [13]

La deuxième partie comprend les chapitres 3 ; 4 et 5, représente la partie principale de cette thèse.

Le troisième consacré à des résultats connus sur le sujet, en plus certaines propriétés concernant les variétés holomorphiquement extensifères, nous soutenons ces résultats par quelques études et recherches menées sur le sujet de prolongement des applications holomorphes et méromorphes.

Le quatrième porte sur l'étude de prolongement des applications holomorphes définies sur l'ouvert de Hartogs à valeurs dans des variétés complexes, comme les variétés de Hopf, le tore complexe, ainsi le cas de prolongement des applications holomorphes à valeurs dans des surfaces presque homogènes compactes, ce dernier a été prouvé par M. Krachni [21].

Le cinquième chapitre présente la contribution essentielle de ce travail, où nous abordons le cas du prolongement des applications holomorphes à valeurs dans des surfaces elliptiques. Nous traiterons ensuite le problème suivant : soit X une variété complexe, et Δ une courbe algébrique non singulière. S'il existe $\varphi : X \rightarrow \Delta$ une application holomorphe, propre, et surjective, tel que pour tout $z \in \Delta$ sauf un nombre fini, $\varphi^{-1}(z)$ est une courbe parallélisable. Alors X est holomorphiquement extensifère en dehors de la codimension au moins 2.

Ce problème peut être considéré comme une généralisation du cas des surfaces elliptiques.

Chapitre 1

Notions de base en analyse complexe de plusieurs variables et en géométrie

Dans ce chapitre, nous rassemblons plusieurs résultats et notions fondamentales en analyse complexe et en géométrie. Ce chapitre se compose de deux parties.

Dans la première partie, nous abordons de l'analyse complexe de plusieurs variables. Nous introduisons la définition des fonctions holomorphes de plusieurs variables ainsi que leurs propriétés essentielles.

Par ailleurs, nous présentons également la définition des fonctions analytiques complexes de plusieurs variables.

Dans la deuxième partie, nous définissons les variétés complexes et illustrons cette notion à travers divers exemples, comme les variétés de Stein et les surfaces de Hopf, etc.

1.1 Définitions et préliminaires

L'espace de coordonnées complexes \mathbb{C}^n est défini comme le produit de n copies de \mathbb{C} , lorsqu'il est considéré comme un domaine d'holomorphic, \mathbb{C}^n peut être interprété comme une variété de Stein et un espace de Stein généralisé. En tant qu'espace vectoriel de dimension n sur les nombres complexes, sa dimension est de $2n$ sur \mathbb{R} . Par conséquent, en tant qu'ensemble et en tant qu'espace topologique, \mathbb{C}^n peut être identifié à l'espace de coordonnées réel \mathbb{R}^{2n} , ce qui lui confère une dimension topologique de $2n$.

Définition 1.1.1. (Applications holomorphes) Une fonction f définie sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ avec des valeurs dans \mathbb{C} est dite holomorphe en un point $z \in \Omega$ si elle est différentiable au sens complexe. Cela signifie qu'il existe une application linéaire complexe $L : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

$$f(z + h) = f(z) + L(h) + o(\|h\|)$$

La fonction f est considéré comme holomorphe si elle l'est en tout point de son domaine de définition Ω .

Si f est holomorphe, toutes ses dérivées partielles sont également holomorphes par rapport à chaque variable complexe.

En revanche si f est holomorphe pour chaque variable séparément, alors f est en fait holomorphe dans son domaine, ce qui est énoncé dans le théorème de Hartogs (ou le lemme d'Osgood), sous l'hypothèse supplémentaire que f est continue.

Définition 1.1.2. (Equations de Cauchy-Riemann)

Pour une fonction a une seule variable complexe $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur le plan, elle est holomorphe en un point $p \in \mathbb{C}$ si et seulement si sa partie réelle u et sa partie imaginaire v de f vérifient les équations de Cauchy-Riemann en ce point p :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(p) = \frac{\partial v}{\partial y}(p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(p) = -\frac{\partial v}{\partial x}(p)$$

Pour une fonction a plusieurs variables complexes $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, elle est holomorphe si et seulement si elle l'est pour chaque variable séparément, ce qui implique que les parties réelle u et imaginaire v de f vérifient également les équations de Cauchy-Riemann, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}; \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial v}{\partial y_i}(p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y_i}(p) = -\frac{\partial v}{\partial x_i}(p)$$

En utilisant le formalisme des dérivées de Wirtinger, cela peut être exprimé comme suit :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}; \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 0,$$

ou encore plus succinctement en utilisant le formalisme des formes différentielles complexes :

$$\bar{\partial}f = 0$$

Notation : L'ensemble des applications holomorphes sur un domaine Ω est noté $\mathcal{O}(\Omega)$.

Théorème 1.1.1. (Formule intégrale de Cauchy)

Soit un polydisque $D(a, R)$ tel que la fermeture du polydisque $\bar{D}(a, r) \subset \Omega$, avec $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $R = (R_1, R_2, \dots, R_n) \in \mathbb{R}^n$. Si f est une application continue et séparément holomorphe sur le domaine Ω , alors en utilisant la formule intégrale de Cauchy pour une seule variable à plusieurs reprises, on obtient :

$$\begin{aligned} f(z_1, \dots, z_n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{f(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\partial D_2} d\zeta_2 \int_{\partial D_1} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, z_3, \dots, z_n)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_1 \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D_n} d\zeta_n \dots \int_{\partial D_2} d\zeta_2 \int_{\partial D_1} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2) \dots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \end{aligned}$$

Et comme ∂D est une courbe fermée et que f est continue, l'ordre des produits et des sommes peut donc être échangé afin que l'intégrale itérée puisse être calculée comme une intégrale multiple. Donc :

$$f(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D_n} \dots \int_{\partial D_1} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \dots d\zeta_n$$

Définition 1.1.3. L'application complexe $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dite analytique sur Ω si f coïncide localement avec la somme d'une série entière convergente, c'est-à-dire pour tout $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \Omega$, il existe $R = (R_1, R_2, \dots, R_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et des nombres complexes $a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ tels que pour tout $z \in D(a, R)$:

$$f(z) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} (z_1 - a_1)^{\alpha_1} \dots (z_n - a_n)^{\alpha_n}$$

Nous appelons cette expression ci-dessus le développement en série entière de f au voisinage de a .

Proposition 1.1.1. Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, alors f est analytique sur Ω .

Proposition 1.1.2.

- i)* L'ensemble $\mathcal{O}(\Omega)$ est un \mathbb{C} -algèbre par l'addition, la multiplication des fonctions et la multiplication par les constantes complexes.
- ii)* Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, et si pour tout $z \in \Omega$, $f(z) \neq 0$, alors $1/f \in \mathcal{O}(\Omega)$.
- iii)* Si Ω est connexe et si f est à valeurs réelle ou si $|f|$ est constante, alors f est constante.

Théorème 1.1.2. (Théorème d'unicité)

Les fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes satisfont le théorème d'identité, comme dans le cas d'une seule variable complexe. Cela signifie que si deux fonctions holomorphes définies sur le même ouvert connexe Ω coïncident sur un ouvert D de Ω , elles sont égales sur tout l'ouvert Ω , c'est-à-dire :

$$\forall f, g \in \mathcal{O}(\Omega), \exists D \subset \Omega, f|_D = g|_D \implies f = g \text{ sur } \Omega$$

Ce résultat peut être prouvé en montrant que les fonctions holomorphes admettent des extensions en séries entières, et il peut également être dérivé du cas à une variable. Pour deux ouverts $V \subset U \subset \mathbb{C}^n$ avec $n \geq 2$, on notera la propriété d'un prolongement holomorphe unique de l'ouvert plus petit V vers l'ouvert plus grand U par :

$$\forall g \in \mathcal{O}(V), \exists! f \in \mathcal{O}(U), \text{ tel que } f|_V = g$$

ou de manière équivalente par $\mathcal{O}(U)|_V = \mathcal{O}(V)$.

Définition 1.1.4. Soit les ouverts $U_1 \subset \mathbb{C}^n$ et $U_2 \subset \mathbb{C}^n$ avec une intersection non vide $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. On dit que $\mathcal{O}(U_1)$ se prolonge holomorphiquement sur l'union $U_1 \cup U_2$ si :

1. L'intersection $U_1 \cap U_2$ est connexe.
2. Il existe un ensemble ouvert non vide $V \subset U_1 \cap U_2$ tel que :

$$\forall f_1 \in \mathcal{O}(U_1), \exists f_2 \in \mathcal{O}(U_2) \text{ tel que } f_1|_V = f_2|_V.$$

Définition 1.1.5. (Domaine d'holomorphic)

Un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ (c'est-à-dire un ouvert connexe) est qualifié de domaine d'holomorphic, s'il existe une fonction analytique dans Ω qui ne peut pas être prolongée en dehors

de cet ensemble.

Dans le cas particulier des domaines dans le plan, cette propriété est triviale. Cependant, cela n'est pas nécessairement vrai en général, comme l'explique le théorème de Hartogs : par exemple, pour un domaine comme $\Omega \subset \mathbb{C}^n (n > 1)$, toute fonction analytique se prolonge nécessairement à tout l'espace \mathbb{C}^n .

Un domaine Ω qui n'est pas un domaine d'holomorphie admet un prolongement holomorphe de Ω . Si de plus une fonction dans Ω admet un tel prolongement, alors son prolongement n'est pas unique en général et peut prendre des valeurs différentes sur U .

Définition 1.1.6. Un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est considéré comme un domaine d'holomorphie s'il n'existe aucun couple d'ouverts Ω_1, Ω_2 satisfaisant les conditions suivantes :

1. Il existe un ensemble non vide tel que :

$$\emptyset \neq \Omega_1 \subset \Omega_2 \cap \Omega$$

2. L'ensemble Ω_2 est connexe et n'est pas contenu dans Ω .
3. Pour toute fonction holomorphe f dans Ω , il existe une fonction f_2 holomorphe dans Ω (pas nécessairement unique) telle que $f = f_2$ sur Ω_1 .

Définition 1.1.7. L'enveloppe holomorphiquement convexe \tilde{M} d'un ensemble M dans un domaine Ω de \mathbb{C}^n (c'est-à-dire un ouvert connexe), ou plus généralement d'une variété complexe M , est définie par :

$$\tilde{M} = \{z \in \Omega : |f(z)| \leq \sup_M |f|; \forall f \in \mathcal{O}(\Omega)\}$$

1.2 Définitions et exemples de variétés complexes

Grosso modo, une variété complexe est un espace topologique qui ressemble localement à un sous-ensemble de \mathbb{C}^n . Plus précisément, nous avons la définition suivante :

Définition 1.2.1. Soit M un espace topologique connexe, séparé, et possédant une base dénombrable. On dit que M est une variété complexe de dimension n , s'il existe :

- i) un recouvrement $\{U_a\}$ indexé par un ensemble A .

- ii) pour chaque $a \in A$, un homéomorphisme f_a de U_a sur un ouvert $D_a \subset \mathbb{C}^n$, tel que pour tout couple (a, b) dans A avec $U_{a,b} = U_a \cap U_b \neq \emptyset$, le changement de carte $f_b \circ f_a$ soit biholomorphe (c'est-à-dire homéomorphisme dont l'inverse est holomorphe) entre $f_a(U_{a,b})$ et $f_b(U_{a,b})$.

Définition 1.2.2. (Applications holomorphes entre deux variétés complexes)

Une application $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^m$ entre deux variétés complexes est holomorphe (ou analytique complexe) au point $p \in M_1$, s'il existe un voisinage holomorphe (U_a, f_a) de p dans M_1 et (V_b, g_b) de $\varphi(p)$ dans M_2 , telle que l'application $g_b \circ \varphi \circ f_a^{-1}$ à partir d'un sous-ensemble ouvert de \mathbb{C}^n dans un sous-ensemble de \mathbb{C}^m est holomorphe à $f_a(p)$. φ est dite holomorphe sur M_1 si elle l'est en tout point de M_1 .

Définition 1.2.3. [32] Soit X et Y deux variétés complexes. On définit une application méromorphe $f : X \rightarrow Y$ comme une application holomorphe $f : A \rightarrow Y$ définie sur un ouvert A de X tel que :

- i) Le complémentaire de A dans X , noté $X \setminus A$, est mince.
- ii) La fermeture $\overline{G_f}$ du graphe de f dans l'espace produit $X \times Y$ soit un sous-ensemble analytique de $X \times Y$ et la projection canonique $\Pi : G_f \rightarrow X$ soit une application propre.

Il découle immédiatement de cette définition que la projection π est surjective. Un point $x \in X$ est dit régulier, s'il existe un voisinage U de x dans X tel que l'intersection entre la fermeture $\overline{G_f}$ et $(U \times Y)$ soit le graphe d'une application holomorphe.

Exemples de variétés complexes

Dans cette section, nous présentons quelques exemples notables de variétés complexes.

Exemple 1.2.1. (Surface de Riemann)

Une surface de Riemann est une variété complexe de dimension 1, également appelée courbe complexe. Une surface de Riemann est donc un espace topologique séparé M , admettant un atlas modelé sur le plan complexe \mathbb{C} , dont les changements de cartes sont des applications biholomorphes.

La plus simple des surfaces de Riemann compactes est la sphère de Riemann, conformément

équivalente à la droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, obtenue comme quotient $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par l'action du groupe multiplicatif \mathbb{C}^* par multiplication.

Exemple 1.2.2. (Domaine dans \mathbb{C}^n)

L'espace euclidien complexe \mathbb{C}^n est une variété complexe de dimension n . De même, tout sous-ensemble ouvert connexe $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ est aussi une variété complexe non compacte de dimension n .

Un exemple important est la boule unité :

$$B^n = \{(z_1, \dots, z_n) \mid |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1\}$$

Exemple 1.2.3. (L'espace projectif complexe)

L'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des droites complexes passant par l'origine dans \mathbb{C}^{n+1} . Ce qui est l'ensemble de tous les sous-ensembles de 1-dimensionnels complexes linéaires de \mathbb{C}^{n+1} .

Il est également l'espace quotient de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence :

$$(z_0, \dots, z_n) \sim (\lambda z_0, \dots, \lambda z_n) \quad / \quad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

La classe d'équivalence (z_0, z_1, \dots, z_n) sera notée $[z_0; z_1; \dots; z_n]$ ce qui est appelé coordonnées homogènes de \mathbb{P}^n .

Afin de voir la structure complexe, définir les sous-ensembles U_0, \dots, U_n de \mathbb{P}^n par :

$$U_i = \{[z_0; \dots; z_n] \mid z_i \neq 0\}$$

Géométriquement, U_i est l'ensemble des droites complexes dans \mathbb{C}^{n+1} qui passent par l'origine et sauf $\{z \in \mathbb{C}^n : z_i = 0\}$.

On définit $\varphi_i : \mathbb{C}^n \rightarrow U_i \subset \mathbb{P}^n$ bijective par :

$$\varphi_i(U_1, \dots, U_n) = [U_0 : \dots : U_{i-1} : 1 : U_{i+1} : \dots : U_n]$$

alors il est facile de voir que cela donne une structure complexe sur \mathbb{P}^n .

Exemple 1.2.4. (Le tore complexe)

On considère l'espace Euclidien complexe \mathbb{C}^n . Si $\{v_1, \dots, v_{2n}\}$ l'ensemble des vecteurs dans $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ linéairement indépendant sur \mathbb{R} , et notons par $\Lambda = \mathbb{Z}\{v_1, \dots, v_{2n}\}$ le réseaux.

Les éléments de Λ agissent sur \mathbb{C}^n par translation, biholomorphe sur \mathbb{C}^n . Le quotient $T_\Lambda^n := \mathbb{C}^n/\Lambda$ est une variété complexe compacte de dimension n , qui s'appelle le Tore complexe.

Notons que pour un tel réseau Λ , la variété lisse sous-jacente de T_Λ^n est la même ; c'est le tore réel $T_{\mathbb{R}}^{2n}$, qui est le produit de $2n$ exemplaires de cercle S^1 . Cependant, les structures complexes de T_Λ^n dépendent du choix de Λ , et pourraient être tout à fait différentes.

Exemple 1.2.5. (Variété de Stein)

Une variété de Stein est une sous-variété complexe fermée de \mathbb{C}^n , ce qui est équivalent à M , est une variété de Stein si M est une variété complexe analytique qui possède les propriétés suivantes :

- a) Si pour tout compact $K \subset M$, on désigne par \hat{K} l'ensemble des points $z \in M$ tels que :

$$|f(z)| \leq \sup_{t \in K} |f(t)|.$$

Pour toute fonction f holomorphe sur M , alors \hat{K} est compact.

- b) Si x et y sont deux points distincts de M . Il existe une fonction f holomorphe sur M qui sépare x et y , c'est-à-dire : $f(x) \neq f(y)$.
- c) Pour tout point $z_0 \in M$, il existe des coordonnées locales données par des fonctions holomorphes dans M , tout entier, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage de z_0 et des fonctions f_1, f_2, \dots, f_n holomorphes dans M tel que $z \mapsto (f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z))$ soit un isomorphisme analytique de ce voisinage sur un ouvert de l'espace \mathbb{C}^n .

Exemple 1.2.6. (Variété de Hopf)

Soit $W = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ (avec $n \geq 2$). Pour des nombres complexes α_i ou $i = 1, \dots, n$ tels que $0 < |\alpha_i| < 1$, nous définissons l'automorphisme de W noté g_m (avec $m \in \mathbb{Z}$) par :

$$g_m : W \rightarrow W$$

$$(W_1, W_2, \dots, W_n) \mapsto (\alpha_1^m W_1, \alpha_2^m W_2, \dots, \alpha_n^m W_n)$$

Le groupe $G = \{g_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ agit proprement discontinument sur W sans point fixe. Cela permet de considérer la variété quotient W/G , qui est compacte et de dimension n . Une telle variété est appelée une variété de Hopf.

Exemple 1.2.7. (Variété parallélisable)

Une variété complexe X est dite parallélisable si son fibré tangent holomorphe est trivial. Cela signifie qu'il existe sur X , n champs de vecteurs holomorphes qui sont linéairement indépendants en tout point de X , ou $\dim X = n$.

Chapitre 2

Le phénomène de Hartogs

Dans ce chapitre, nous abordons le phénomène de Hartogs, qui concerne l'extension des applications holomorphes.

Au début nous commençons par la définition de l'ouvert de Hartogs dans \mathbb{C}^n . Ensuite nous examinons la structure géométrique de cet ouvert (Figures de l'ouvert de Hartogs), à titre d'exemple la structure de l'ouvert de Hartogs dans \mathbb{C}^2 .

Dans la section suivante, nous rappelons certains théorèmes fondamentaux qui ont posé la base de cette étude, en mettant en lumière deux versions du théorème de Hartogs [13].

2.1 Figures de Hartogs

Nous appelons l'ouvert de Hartogs l'ensemble T de \mathbb{C}^n défini par :

$$T = T_{\rho,r} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_i| < 1, i = 1, \dots, n-1; |z_n| < r\} \\ \cup \{z \in \mathbb{C}^n : \rho < |z_i| < 1; i = 1, \dots, n-1; |z_n| < 1\}$$

avec $0 < \rho < 1$ et $0 < r < 1$.

Géométriquement, l'ouvert de Hartogs est difficile de représenter et encore plus difficile de le dessiner, nous prenons à titre d'exemple l'ouvert de Hartogs dans \mathbb{C}^2 qui est défini par :

Définition 2.1.1. Soit H_1 et H_2 deux ouverts de \mathbb{C}^2 définis par :

$$H_1 = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < r\} \\ H_2 = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \rho < |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$$

avec $0 < \rho < 1$ et $0 < r < 1$.

L'ouvert de Hartogs dans \mathbb{C}^2 est le sous-ouvert du polydisque unité Δ^2 défini par :

$$H = H_{\rho,r} = H_1 \cup H_2$$

- **Figure 2.1** : Dans la quatrième dimension $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$, ces deux parties H_1 et H_2 d'intersection non vide, peuvent être dessinées en coordonnées $(|z_1|, |z_2|)$, c'est-à-dire une représentation où l'axe des z_1 et l'axe des z_2 sont de dimension 1, comme la figure suivante :

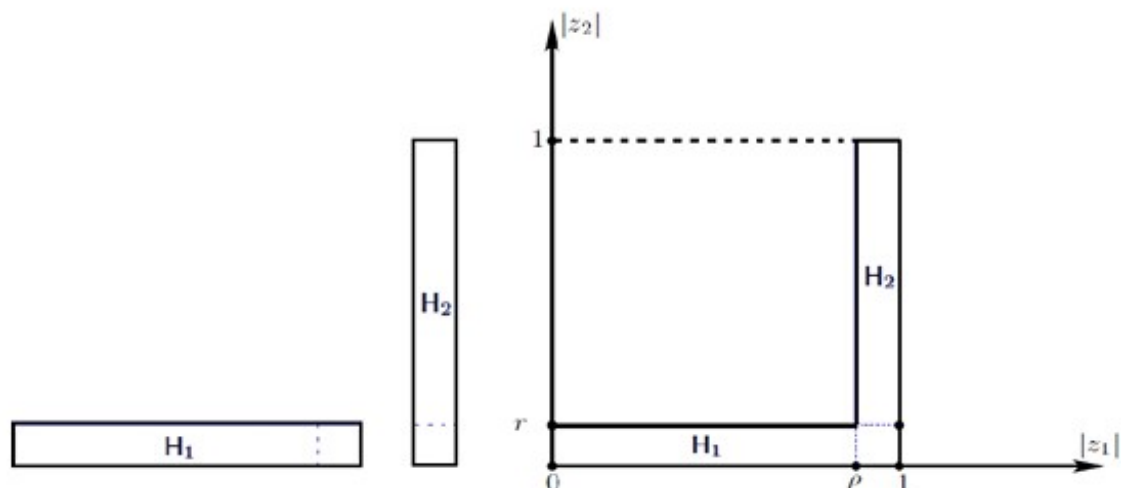


FIGURE 2.1 –

- **Figure 2.2** : Nous pouvons aussi présenter l’ouvert de Hartogs dans \mathbb{R}^3 par la figure suivante, où l’axe des $z_1 = x_1 + iy_1$ est de dimension réelle 2, tandis que l’axe des z_2 est de dimension 1.

Dans ce cas, nous appelons le domaine $H_{p,r}$ de \mathbb{C}^2 une marmite de Hartogs, à cause de sa forme dans l’espace \mathbb{R}^3 des points $(z_1, |z_2|)$.

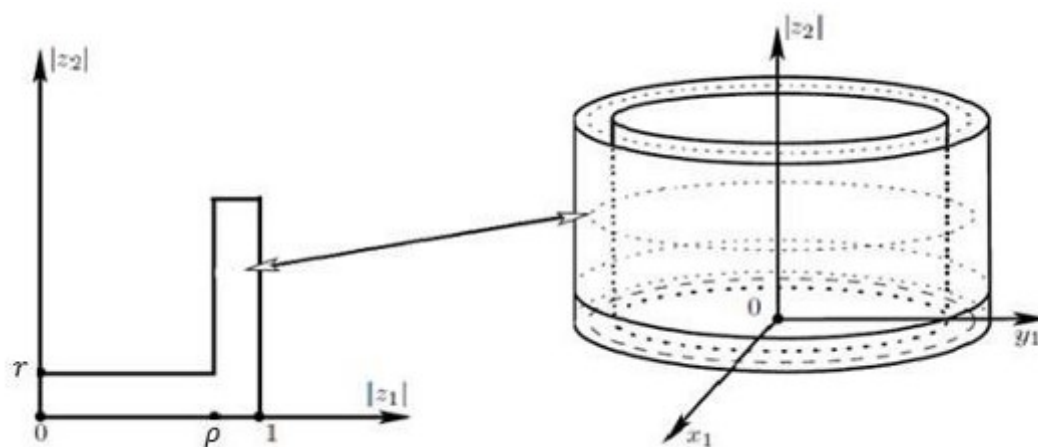


FIGURE 2.2 –

- **Figure 2.3** : Une autre représentation de la figure de Hartogs encore plus parlante consiste à travailler en coordonnées z_1 , symbolisées comme coordonnées réelles négatives et positives, et en coordonnées $|z_2|$.

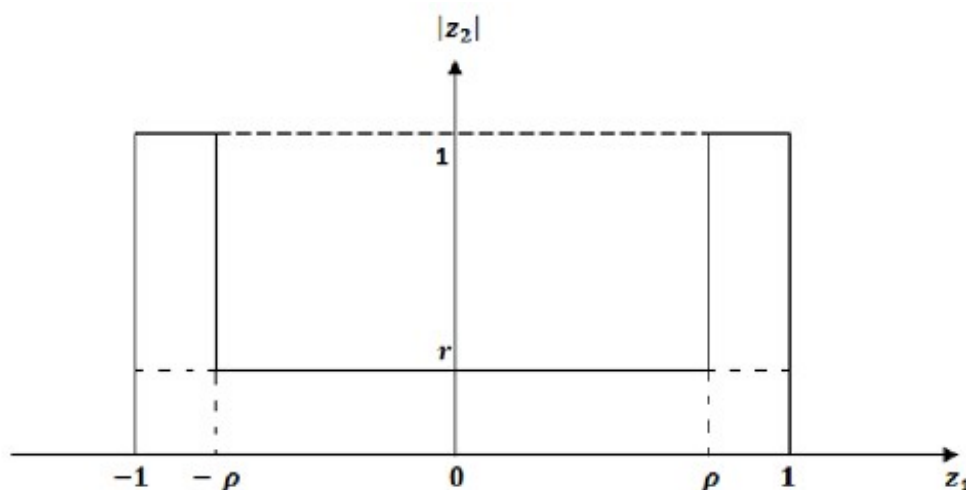


FIGURE 2.3 –

- **Figure 2.4** : Une autre représentation de la figure de Hartogs, dans cette l'axe des $z_2 = x_2 + iy_2$ est de dimension réelle 2, tandis que l'axe des z_1 est de dimension 1.

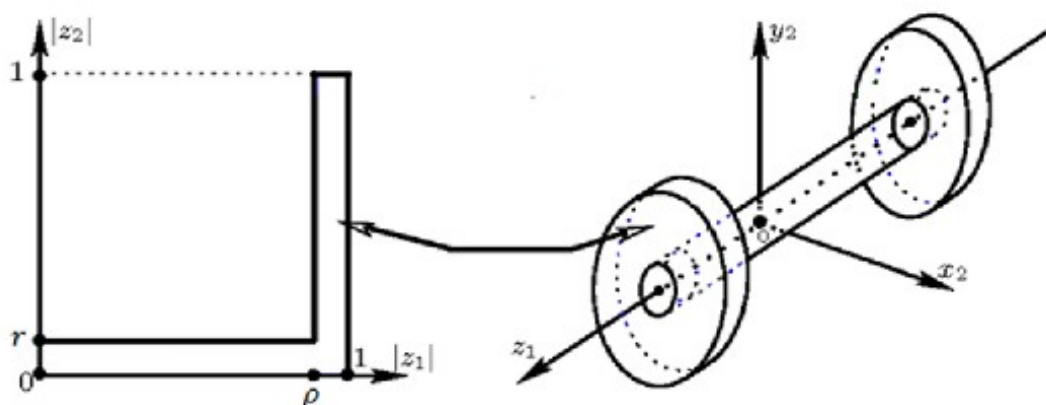


FIGURE 2.4 –

2.2 Théorèmes d'extension de Hartogs

Dans cette section, nous revenons sur certains théorèmes fondamentaux qui ont posé les bases de notre étude.

Théorème 2.2.1. (Extension de Hartogs)

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C}^n et K un compact contenu dans Ω tel que $\Omega \setminus K$ soit connexe.

Toute fonction holomorphe définie sur $\Omega \setminus K$ peut être prolongée holomorphiquement de manière unique à Ω .

Démonstration.

Soit f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus K$. Étant donné K est un compact dans Ω , il existe une fonction complexe h qui est différentiable dans Ω et qui satisfait les conditions suivantes :

- (i) Le support de h est contenu dans Ω .
- (ii) Sur le compact K , on a $h|_K = 1$.

Nous définissons alors la fonction $g = (1 - h)f$, qui est initialement définie sur $\Omega \setminus K$, mais nous pouvons l'étendre par zéro sur Ω grâce à la construction de h .

Ainsi, la fonction g est bien définie et différentiable sur tout Ω .

Nous considérons la $(0, 1)$ -forme différentiable de ω obtenue après application de $\bar{\partial}$ à g , c'est-à-dire :

$$\omega = \bar{\partial}g = -\bar{\partial}(hf) = -f\bar{\partial}h$$

qui est définie sur $\Omega \setminus K$ et prolongée par zéro sur K et en dehors de Ω .

La forme ω a un support compact dans \mathbb{C}^n et est clairement $\bar{\partial}$ -fermée, alors il existe donc une fonction différentielle φ telle que :

$$\bar{\partial}\varphi = \omega$$

et ayant un support compact dans \mathbb{C}^n .

Soit S le support de ω , alors la fonction φ est holomorphe dans $\mathbb{C}^n \setminus S$.

Notons que la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}^n \setminus S$ est désignée par \mathcal{C} . Comme la fonction φ a un support compact dans \mathbb{C}^n , elle doit être nulle au voisinage de l'infini, ce qui implique que : $\varphi = 0$ dans la composante connexe non bornée \mathcal{C} .

En conclusion, la fonction f se prolonge en unique fonction \tilde{f} qui définit par :

$$\tilde{f} = g - \varphi$$

qui est définie sur tout l'ouvert Ω .

On a alors :

$$\bar{\partial}\tilde{f} = \omega - \bar{\partial}\varphi = 0$$

ce qui montre que la fonction \tilde{f} est holomorphe dans tout l'ouvert Ω . De plus, comme $\varphi = 0$ dans \mathcal{C} et $h = 0$ dans $\Omega \setminus K$, donc on obtient :

$$\tilde{f} = g - \varphi = (1 - h)f - \varphi = f$$

dans $\mathcal{C} \cap (\Omega \setminus K)$.

Ainsi, les fonctions f et \tilde{f} coïncident dans un ouvert non vide de $\Omega \setminus K$ qui est connexe, ce qui implique par le principe d'unicité que $\tilde{f} = f$ dans $\Omega \setminus K$.

Théorème 2.2.2. (Hartogs 1906)

Toute fonction holomorphe définie sur l'ouvert de Hartogs $H_{\rho,r}$ se prolonge holomorphiquement et de manière unique au polydisque unité Δ^n qui constitue l'enveloppe d'holomorphie de $H_{\rho,r}$. Cela signifie que :

$$\forall f \in \mathcal{O}(H_{\rho,r}), \exists! F \in \mathcal{O}(\Delta^2) : F|_{H_{\rho,r}} = f$$

Ce théorème indique que le domaine de définition de f peut être étendu à la marmite remplie.

Démonstration :

On considère des disques appropriés pour un choix quelconque d'un rayon intermédiaire avec $\rho < \sigma < 1$:

$$A_{z_2}(z) := (\sigma z, z_2), \quad (z \in \mathbb{D})$$

Lorsque $|z_2| < r$, le disque fermé entier est contenu dans le domaine de Hartogs $H_{\rho,r}$, c'est-à-dire $A_{z_2}(\bar{\mathbb{D}}) \subset H_{\rho,r}$. Ainsi, la fonction f est complètement holomorphe au voisinage de ce disque, et la formule intégrale de Cauchy pour une variable fournit la valeur de f en un point quelconque (z_1, z_2) avec $|z_1| < \sigma$:

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi_1|=\sigma} \frac{f(\xi_1, z_2)}{\xi_1 - z_1} d\xi_1$$

De plus, lorsque le disque commence à s'élever, son bord reste toujours à l'intérieur du domaine :

$$A_{z_2}(\partial\mathbb{D}) \subset H_{\rho,r}, \quad (\forall |z_2| < 1)$$

tandis que son intérieur s'en échappe. Cependant, comme la formule de Cauchy reste valide en intégrant uniquement les valeurs de la fonction f sur la partie verticale de

$H_{\rho,r}$ où f est définie, on peut prolonger les valeurs de f simplement à l'aide de cette formule :

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi_1|=\sigma} \frac{f(\xi_1, z_2)}{\xi_1 - z_1} d\xi_1, \quad \forall |z_1| < \sigma, \forall |z_2| < 1$$

Les théorèmes standards concernant la différentiation sous le signe intégral garantissent maintenant que la fonction F ainsi définie est holomorphe par rapport à toutes ses variables (z_1, z_2) dans le polydisque $D_\sigma \times \mathbb{D}$.

En résumé, nous avons :

- i) $f \in \mathcal{O}(H_{\rho,r})$.
- ii) $F \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_\sigma \times \mathbb{D})$.
- iii) $F = f$ dans $\{|z_1| < \rho, |z_2| < r\}$ selon la formule de Cauchy.

Définition 2.2.1. Une variété complexe X est dite holomorphiquement (resp. méromorphiquement) extensifère, si toute application holomorphe (resp. méromorphe) $f : T \rightarrow X$ se prolonge holomorphiquement (resp. méromorphiquement) à l'enveloppe d'holomorphic Δ^n .

Définition 2.2.2. Une variété complexe X est dite holomorphiquement (resp. méromorphiquement) extensifère en dehors de la codimension au moins 2, si toute application holomorphe (resp. méromorphe) de T dans X se prolonge holomorphiquement (resp. méromorphiquement) au complémentaire dans Δ^n d'un sous-ensemble analytique de Δ^n de codimension au moins 2.

Exemple 2.2.1.

1. Toute variété de Stein est holomorphiquement extensifère.
2. Si X est une variété algébrique, alors toute application méromorphe de T dans X se prolonge holomorphiquement au complémentaire dans Δ^n d'un sous-ensemble analytique de codimension au moins 2.
3. Toute courbe (une variété de dimension pure égale à 1) est holomorphiquement extensifère, en effet, une courbe algébrique soit compacte (projective), soit non compacte (de Stein).
4. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est méromorphiquement extensifère [11].

Proposition 2.2.1. Soit X une variété complexe, si toute application holomorphe de T dans X se prolonge holomorphiquement à Δ^n , alors toute application méromorphe de T dans X se prolonge holomorphiquement à Δ^n .

Exemple 2.2.2. Une variété complexe X est dite localement biholomorphiquement extensifère, si toute application localement biholomorphe $f : T \rightarrow X$ se prolonge biholomorphiquement à l'enveloppe d'holomorphie Δ^n dans X .

Les domaines d'existences localement biholomorphes d'applications localement biholomorphes sont définis de la même façon que les domaines d'existences holomorphes et méromorphes.

Exemple 2.2.3.

1. Toute variété de Stein est localement biholomorphiquement extensifère.
2. Les variétés parallélisables compactes sont localement biholomorphiquement extensifères.
3. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est localement biholomorphiquement extensifère.

Chapitre 3

Rappel de quelques résultats récents

Dans ce chapitre, nous passerons en revue des résultats connus concernant les variétés holomorphiquement (méromorphiquement) extensifières.

Notre but est d'étudier le prolongement d'applications holomorphes définies sur l'ouvert de Hartogs à valeurs dans une variété complexe.

Il existe des résultats très importants mentionnés dans ce chapitre, et qui nous avons largement utilisés dans ce travail.

3.1 Définitions et préliminaires

Définition 3.1.1. Soit Ω et M deux variétés complexes, et soit $\pi : \Omega \rightarrow M$ une application holomorphe. On dit que le couple (Ω, π) constitue un domaine étalé au-dessus de M , si Ω est connexe et π est une application localement biholomorphe de Ω dans M .

Définition 3.1.2. Considérons une variété complexe X et une variété de Stein M , pour un domaine étalé (Ω, π) au-dessus de M et une application $f : X \rightarrow M$, nous appelons le triplet (Ω, π, f) un élément de carte à X au-dessus de M .

Définition 3.1.3. Soit (Ω, π) et (Ω', π') deux domaines étalés au-dessus d'une variété M . Un morphisme de domaines étalés est défini comme une application holomorphe $\lambda : \Omega \rightarrow \Omega'$ telle que

$$\pi' \circ \lambda = \pi$$

.

Définition 3.1.4. Soit les deux domaines étalés (Ω, π) et (Ω', π') au-dessus d'une variété M , avec un morphisme de domaines étalés $\lambda : \Omega \rightarrow \Omega'$. Soit également f une application holomorphe (resp. méromorphe) de Ω dans une variété complexe X , et soit f' une application holomorphe (resp. méromorphe) de Ω' dans X . On dit que $(\lambda, \Omega', \pi', f')$ est un prolongement holomorphe (resp. méromorphe) de f si l'on a $f' \circ \lambda = f$.

De plus, on appelle $(\lambda, \Omega'', \pi'', f'')$ un prolongement maximal holomorphe (resp. méromorphe) de f si les conditions suivantes sont satisfaites :

- i)* $(\lambda, \Omega', \pi', f')$ est un prolongement holomorphe (resp. méromorphe) de f .
- ii)* Si $(\lambda', \Omega'', \pi'', f'')$ est un autre prolongement holomorphe (resp. méromorphe) de l'application f , il existe un unique morphisme de domaines étalés $\varphi : \Omega'' \rightarrow \Omega'$ tel que :

$$f' \circ \varphi = f'' \quad \text{et} \quad \varphi \circ \lambda'' = \lambda$$

Dans ce cas, on appelle (Ω', π') le domaine d'existence holomorphe (resp. méromorphe) de f .

Notons que dans [24] Malgrange a démontré que pour deux variétés complexes X et M , et (Ω, π) un domaine étalé au-dessus de M , le domaine d'existence holomorphe (resp. méromorphe) d'une application f holomorphe (resp. méromorphe) de Ω dans X est unique.

3.2 Variétés extensifères

Théorème 3.2.1. [22] Soit X une variété complexe et (Ω, π) un domaine étalé au-dessus d'une variété de Stein M , alors les relations suivantes sont équivalentes :

- i)* Toute application holomorphe de T dans X se prolonge méromorphiquement à Δ^n .
- ii)* X est méromorphiquement extensifère.
- iii)* Toute application holomorphe de Ω dans X se prolonge méromorphiquement à l'enveloppe d'holomorphie $(\bar{\lambda}, \bar{\Omega}, \bar{\pi})$ de (Ω, π) .
- iv)* Toute application méromorphe de Ω dans X se prolonge méromorphiquement à l'enveloppe d'holomorphie $(\bar{\lambda}, \bar{\Omega}, \bar{\pi})$ de (Ω, π) .
- v)* Le domaine d'existence méromorphe de toute application holomorphe de Ω dans X est de Stein.
- vi)* Le domaine d'existence méromorphe de toute application méromorphe de Ω dans X est de Stein.

Démonstration.

Les implications $(ii) \Rightarrow (i)$, $(iv) \Rightarrow (iii)$ et $(vi) \Rightarrow (v)$ sont évidentes.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Soit $f : T \rightarrow X$ une application méromorphe, et soit $A := \text{sing}(f)$ un sous-ensemble analytique avec $\text{codim} A \geq 2$.

Comme l'application $f : T \setminus A \rightarrow X$ est holomorphe, alors elle se prolonge méromorphiquement à $\widetilde{T \setminus A} = \Delta^n$.

$v) \Rightarrow iv)$ Soit $f : \Omega \rightarrow X$ une application méromorphe, f est holomorphe en dehors d'un sous-ensemble analytique A avec $\text{codim} A \geq 2$, et par hypothèse le domaine d'existence méromorphe que l'on note $(\lambda, \Omega', \pi', f')$ de $f : \Omega \setminus A \rightarrow X$ est de Stein.

L'application λ est à valeurs dans Ω' elle se prolonge holomorphiquement en $\tilde{\lambda}'$ à $\widetilde{\Omega \setminus A} = \tilde{\Omega}$ et $f' \circ \tilde{\lambda}'$ est un prolongement méromorphe de f à $(\tilde{\lambda}, \tilde{\Omega}, \tilde{\pi})$.

$ii) \Rightarrow vi)$ Soit $f : \Omega \rightarrow X$ une application méromorphe, on peut supposer que le domaine d'existence méromorphe de f au dessus de M est (Ω, π) .

D'après le théorème de Docquier-Grauert [9], il suffit de montrer que (Ω, π) est localement pseudo-convexe au dessus de M .

Soit $\varphi : T \rightarrow \Omega$ une T -application, notons \tilde{k} le prolongement biholomorphe de $\pi \circ \varphi$ à Δ^n , par hypothèse $f \circ \varphi$ se prolonge à une application méromorphe qu'on la note \tilde{F} .

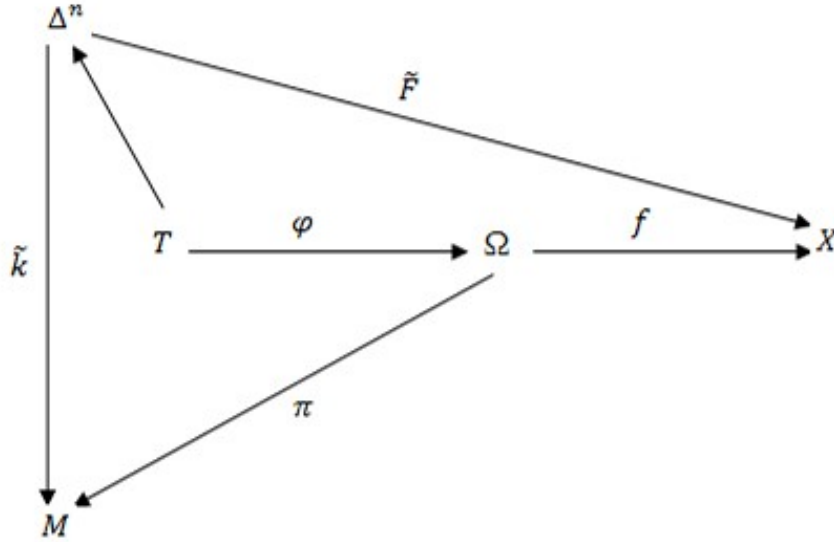


FIGURE 3.1 –

On recolle Ω et Δ^n de la façon suivant :

Soit U la composante connexe de $\pi^{-1}(\tilde{k}(\Delta^n))$ contenant $\varphi(T)$ et $U' := \tilde{k}^{-1}(\pi(U))$, l'application $\pi|_{\varphi(T)}$ étant injective, $\pi|_U$ reste injective et $\tilde{k}^{-1} \circ \pi : U \rightarrow U'$ est un isomorphisme, ce qui permet de recoller Ω et Δ^n le long de U et U' .

Soit V la variété obtenue munie de la topologie quotient, par construction V est munie d'un homéomorphisme local :

$$\pi' : V \rightarrow M \text{ tel que } \pi'|_{\Omega} = \pi \text{ et } \pi'|_{\Delta^n} = \tilde{k}$$

De plus V est séparé.

En effet, soient $x_1, x_2 \in V$.

- Le seul cas non évident est celui ou x_1 est dans l'adhérence de U dans Ω et x_2 est dans l'adhérence de $U' = U$ dans Δ^n .
- Si x_1 et x_2 ne peuvent être séparés, il existe une suite (Z_n) dans $U = U'$ tel que (Z_n) converge vers x_1 dans Ω et vers x_2 dans Δ^n . Mais alors :

$$\pi(x_1) = \lim(\pi|_U(Z_n)) = \lim(\tilde{k}|_{U'})(Z_n) = \tilde{k}(x_2)$$

donc $x_1 \in \bar{U} \cap \pi^{-1}(\tilde{k}(\Delta^n))$, c'est-à-dire $x_1 \in U$ mais alors puisque x_1 et x_2 sont dans Δ^n , alors $x_1 = x_2$.

Soit g l'application méromorphe de V dans X définie par :

$$g(x) = f(x) \text{ pour } x \in \Omega$$

$$g(x) = \tilde{F}(x) \text{ pour } x \in \Delta^n$$

g est bien définie sur $\varphi(T)$ et puisque U est connexe alors g est bien définie sur V .

L'injection de Ω dans $\Omega \cup \Delta^n$ induit une application $i : \Omega \rightarrow V$ biholomorphe sur son image.

On a $g \circ i = f$ et donc (i, V, π', g) est un prolongement méromorphe de f et comme (Ω, π) est le domaine d'existence méromorphe de f , il existe un morphisme de domaine étalé $j : V \rightarrow \Omega$ tel que :

$$j \circ i = Id_{\Omega}, \quad \pi \circ j = \pi', \quad f \circ j = g$$

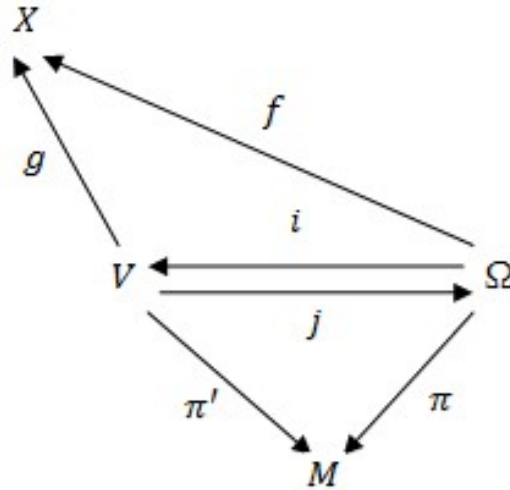


FIGURE 3.2 –

D'autre part si $x = i(y) \in i(\Omega) \subset V$ alors :

$$i \circ j(x) = i \circ j(i(y)) = i(y) = x$$

on a $i \circ j|_{i(\Omega)} = (Id_V)|_{i(\Omega)}$ et d'après le théorème d'identité $i \circ j = Id_V$.

finalement $V \cong \Omega$ et donc φ se prolonge biholomorphiquement a Δ^n , d'où Ω est T -convexe, donc p_7 -convexe, et d'après [9] (Ω, π) est localement pseudo-convexe au-dessus de M .

$i) \Rightarrow v)$ Soit (Ω, π) un domaine étalé au-dessus d'une variété de Stein M et $f : \Omega \rightarrow X$ une application holomorphe.

On suppose que (Ω, π) est le domaine d'existence holomorphe de f .

Notons $(\lambda, \Omega', \pi', f')$ le domaine d'existence méromorphe de f , il s'agit de montrer que Ω' est de Stein.

Posons $A' := \text{sing} f'$, on a $\Omega' \setminus A' \cong \Omega$. En effet : $\lambda^{-1}(A') = \emptyset$ (car si $x \in \lambda^{-1}(A')$, et $\lambda(x) \in A'$ et donc $f'(\lambda(x))$ est de dimension positive, or f est holomorphe et donc $f'(\lambda(x)) = f(x)$ est de dimension nulle).

$f' : \Omega' \setminus A' \rightarrow X$ étant holomorphe et comme (Ω, π) le domaine d'existence holomorphe de f , il existe un morphisme de domaine étalé $\lambda' : \Omega' \setminus A' \rightarrow \Omega$, tel que

$$\lambda' \circ \lambda = \text{Id}_{\Omega}$$

On a $\lambda \circ \lambda'|_{\lambda(\Omega)} = \text{Id}_{\Omega' \setminus A'}|_{\lambda(\Omega)}$ et donc $\lambda \circ \lambda' = \text{Id}_{\Omega' \setminus A'}$, d'où $\Omega \cong \Omega' \setminus A'$.

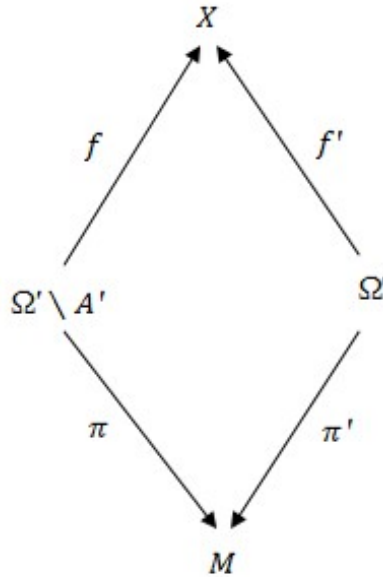


FIGURE 3.3 –

Supposons qu'il existe un point frontière $z \in \partial\Omega'$ au dessus de M ou Ω' ne soit pas pseudoconvexe. Ce point est défini par une base de filtre μ d'ouverts connexes tel que $\nu = \{\pi(U)\}_{U \in \mu}$ converge dans M vers un point $\pi'(z)$.

Comme A' ne disconnexe pas un ouvert connexe défini par restriction un point frontière

de $\Omega' \setminus A'$ encore noté $z \in \partial(\Omega' \setminus A')$.

Le domaine $\Omega' \setminus A'$ n'est pas pseudoconvexe au point z , en effet pour toute boule $B := B(\pi'(z), r)$ centrée en $\pi'(z)$, $\pi'^{-1}(B)$ n'est pas pseudo-convexe d'après l'hypothèse faite sur z , donc $V := (\pi'|_{\Omega' \setminus A'})^{-1}(B) = \pi'^{-1}(B) \setminus A'$ n'est a fortiori pas pseudoconvexe.

Soit $\varphi : T \rightarrow V$ une T -application qui ne se prolonge pas a Δ^n , par définition, $\varphi' := \pi' \circ \varphi$ se prolonge a Δ^n .

Notons Ω'' le domaine étalé au dessus de M obtenu en recollant $\Omega' \setminus A'$ avec Δ^n le long de la composante connexe de $\pi'^{-1}(\varphi'(T))$ qui rencontre $\varphi(T)$, et notons $\pi'' : \Omega'' \rightarrow M$ l'étalement correspondant, par lequel on a un diagramme commutatif :

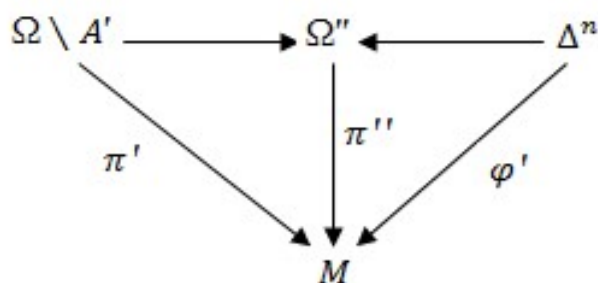


FIGURE 3.4 –

D'après la condition *i*) f se prolonge méromorphiquement a Ω'' en $f'' : \Omega'' \rightarrow X$ de sorte que le diagramme suivant :

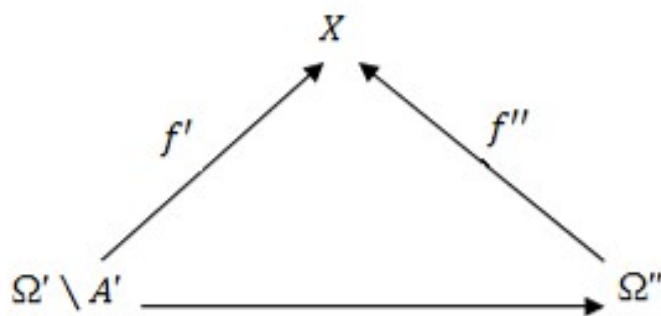


FIGURE 3.5 –

Soit commutatif.

(Ω', π, λ) est le domaine d'existence méromorphe de f , il existe donc un morphisme de

domaines étalés $\lambda'' : \Omega'' \rightarrow \Omega'$ qui rend le diagramme suivant commutatif

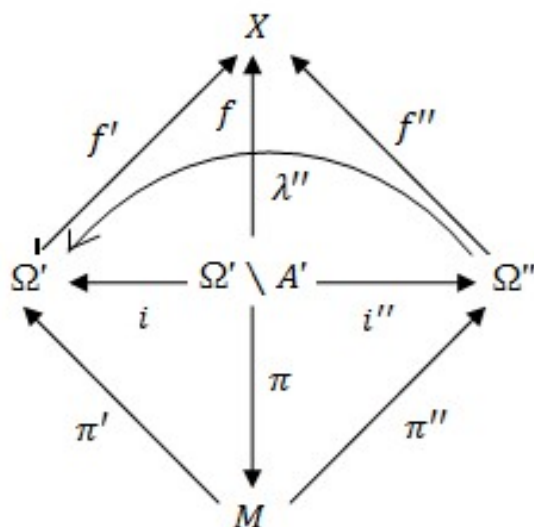


FIGURE 3.6 –

L'application $i'' : \Omega' \setminus A' \rightarrow \Omega''$ se prolonge continûment à la frontière de $\Omega' \setminus A'$ en

$$i'' : (\Omega' \setminus A') \cup \partial(\Omega' \setminus A') \rightarrow \Omega'' \cup \partial\Omega''$$

De plus par construction $i''(z) \in \Omega''$ puisque $\pi'(z) \in \varphi'(\Delta^n)$, le diagramme commutatif

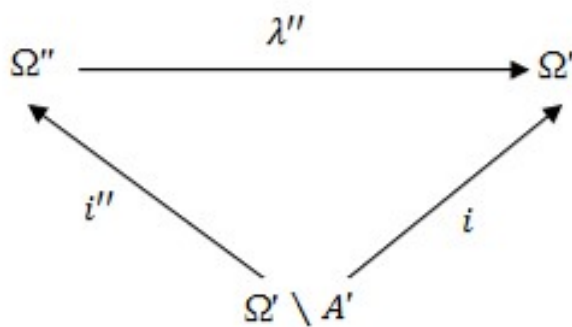


FIGURE 3.7 –

se prolonge continûment en un diagramme commutatif :

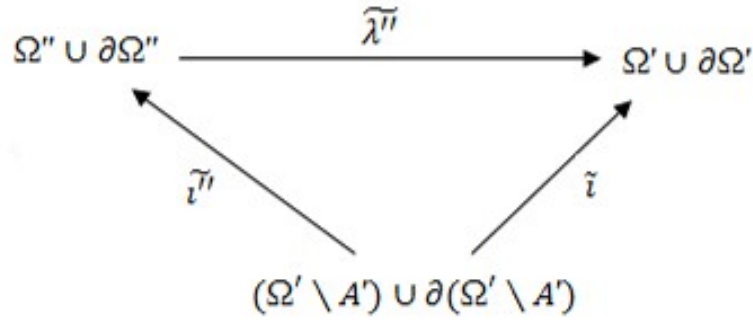


FIGURE 3.8 –

mais alors $z = \tilde{i}(z) = \tilde{\lambda}'' \circ \tilde{i}''(z) \in \Omega'$, donc $z \in A'$ ce qui est impossible.

Proposition 3.2.1. Soit X une variété complexe et (Ω, π) un domaine étalé au-dessus d'une variété de Stein M , alors les relations suivantes sont équivalentes :

- i) X est holomorphiquement extensifère.
- ii) Toute application holomorphe de Ω dans X se prolonge holomorphiquement à l'enveloppe d'holomorphie $(\tilde{\lambda}, \tilde{\Omega}, \tilde{\pi})$ de (Ω, π) .
- iii) Le domaine d'existence holomorphe de toute application holomorphe de Ω dans X est de Stein.

Lemme 3.2.1. [8] Soit X et Y deux variétés complexes et Φ une application holomorphe de X dans Y . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) Il existe un recouvrement $U = (U_i)_{i \in I}$ de Y tel que pour tout $i \in I$, $\Phi^{-1}(U_i)$ est holomorphiquement extensifère.
- ii) Pour tout $y \in Y$, il existe un système fondamental de voisinage $\vartheta(y)$ de y tel que, pour tout $V \in \vartheta(y)$, $\Phi^{-1}(V)$ est holomorphiquement extensifère.

Démonstration.

L'implication ii) \Rightarrow i) est évidente.

Pour l'implication i) \Rightarrow ii), soit $V \subset U_i$ un ouvert de Stein et soit $f : T \rightarrow \Phi^{-1}(V)$ une application holomorphe, l'application f se prolonge holomorphiquement en une application \tilde{f} dans le disque unité Δ^n à valeurs dans $\Phi^{-1}(U_i)$.

D'autre part, comme V est un ouvert de Stein, alors la composition $\Phi \circ f : T \rightarrow V$ se

prolonge holomorphiquement en une application $\tilde{g} : \Delta^n \rightarrow V$.

On a alors :

$$\Phi \circ \tilde{f}|_T = \tilde{g}|_T$$

et par le théorème d'identité, on en déduit que :

$$\Phi \circ \tilde{f} = \tilde{g}$$

ce qui signifie que \tilde{f} est à valeurs dans $\Phi^{-1}(V)$.

Lemme 3.2.2. [8] Soit X et Y deux variétés complexes et soit $\Phi : X \rightarrow Y$ une application holomorphe. On a l'équivalence des relations suivantes :

- i) Il existe un recouvrement $U = (U_i)_{i \in I}$ de Y tel que pour tout $i \in I$, $\Phi^{-1}(U_i)$ est méromorphiquement extensifère.
- ii) Pour tout $y \in Y$, il existe un système fondamental de voisinage $\vartheta(y)$ de y tel que, pour tout $V \in \vartheta(y)$, $\Phi^{-1}(V)$ est méromorphiquement extensifère.

Démonstration.

L'implication (ii) \Rightarrow (i) est évidente.

Pour l'implication (i) \Rightarrow (ii), considérons un ouvert de Stein $V \subset U_i$ et une application méromorphe $f : T \rightarrow \Phi^{-1}(V)$.

L'application f se prolonge méromorphiquement en une application \tilde{f} dans le disque unité Δ^n , et à valeurs dans $\Phi^{-1}(U_i)$.

Etant donné que V est de Stein, la composition $\Phi \circ f : T \rightarrow V$ se prolonge holomorphiquement en $\tilde{g} : \Delta^n \rightarrow V$ (D'après la proposition ??).

Notons $\Gamma_{\tilde{g}} \subset \Delta^n \times V$ le graphe de \tilde{g} et $\Gamma_{\Phi \circ f} \subset \Delta^n \times U_i$ le graphe de $\Phi \circ f$.

On a alors :

$$\tilde{g}|_T = \Phi \circ \tilde{f}|_T,$$

ce qui implique que

$$\Gamma_{\tilde{g}}|_T = \Gamma_{\Phi \circ \tilde{f}}|_T.$$

Ces graphes étant irréductibles, on obtient que $\Gamma_{\tilde{g}} = \Gamma_{\Phi \circ \tilde{f}}$, d'où $\Phi \circ \tilde{f}$ est à valeurs dans V et donc \tilde{f} est à valeurs dans $\Phi^{-1}(V)$.

Théorème 3.2.2. [7] Soit H une hypersurface de T . S'il existe une application holomorphe φ de $T \setminus H$, tel que H soit singularité, alors il existe une hypersurface \tilde{H} de \tilde{T} pour laquelle $H = \tilde{H} \cap T$, et l'enveloppe holomorphe de $T \setminus H$ est isomorphe à $\tilde{T} \setminus \tilde{H}$. Notons que Grauert et Remmert ont prouvé que si (π, G) est un domaine étale sur \mathbb{C}^n et \tilde{H} une hypersurface de G , alors l'enveloppe holomorphe de $G \setminus \lambda^{-1}(\tilde{H})$ est isomorphe à $\tilde{G} \setminus \tilde{H}$.

Théorème 3.2.3. [22] Soient X et Y deux variétés complexes, et soit $\varphi : X \rightarrow Y$ une application holomorphe, s'il existe un recouvrement $U = (\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ de Y tel que $\varphi^{-1}(\mathcal{U}_i)$ est holomorphiquement (resp. méromorphiquement) extensifère, et Y est holomorphiquement extensifère, alors X est holomorphiquement (resp. méromorphiquement) extensifère.

Démonstration.

Considérons un domaine étalé (Ω, π) au-dessus d'une variété de Stein M , et soit $f : \Omega \rightarrow X$ une application holomorphe (resp méromorphe).

Posons $g := \varphi \circ f$. Étant donné que g est à valeurs dans Y , elle se prolonge holomorphiquement en une application \tilde{g} à l'enveloppe d'holomorphie $(\tilde{\lambda}, \tilde{\Omega}, \tilde{\pi})$ de (Ω, π) .

Le morphisme de domaine étalé $\tilde{\lambda} \square$ permet de considérer Ω comme un domaine étalé au-dessus de la variété de Stein $\tilde{\Omega}$.

L'application f possède alors un domaine d'existence holomorphe (resp. méromorphe) au-dessus de $\tilde{\Omega}$.

Il suffit maintenant de prouver que ce domaine est de Stein et donc $\tilde{\Omega} \cong \Omega$.

En appliquant le théorème de Docquier-Grauert [9], il suffit de montrer que $(\Omega, \tilde{\lambda} \square)$ est localement pseudoconvexe au-dessus de $\tilde{\Omega}$.

Soit $z \in \tilde{\Omega}$; par hypothèse, il existe un voisinage U de $\tilde{g}(z)$ tel que $\varphi^{-1}(U)$ soit holomorphiquement (resp. méromorphiquement) extensifère.

Considérons $B(z)$ une boule centrée en z telle que $\tilde{g}(B(z)) \subseteq U$, il suffit alors de montrer que $\tilde{\lambda}^{-1}(B(z))$ est de Stein.

On a : $f(\tilde{\lambda}^{-1}(B(z))) \subseteq \varphi^{-1}(U)$.

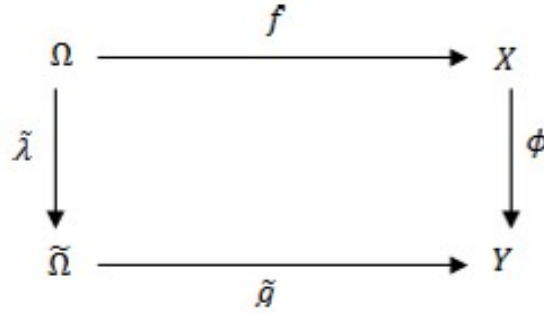


FIGURE 3.9 –

Si $\tilde{\lambda}^{-1}(B(z)) \neq \emptyset$, on se restreint a $\tilde{\lambda}^{-1}(B(z))$, on a le diagramme :

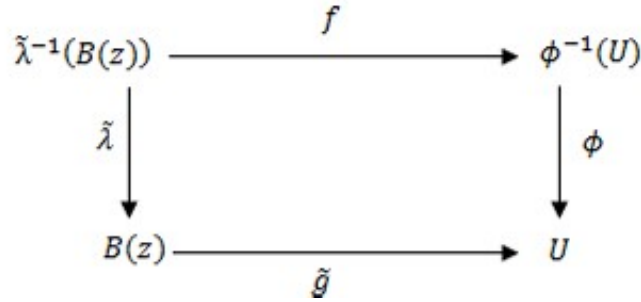


FIGURE 3.10 –

$\tilde{\lambda}^{-1}(B(z))$ est étalé au-dessus de $B(z)$, et comme $\phi^{-1}(U)$ est holomorphiquement extensifère (resp., méromorphiquement extensifère), donc d'après la proposition 3.2.1 (resp., th 3.2.1) le domaine d'existence holomorphe (resp, méromorphe) de $f|_{\tilde{\lambda}^{-1}(B(z))}$ au-dessus de $B(z)$ est de Stein, notons ce domaine $(\psi, \Omega', \pi', f')$.

On a $\Omega' \cong \tilde{\lambda}^{-1}(B(z))$, ce qui donne que Ω' est étalé au-dessus de $\tilde{\Omega}$ par π' et comme le domaine d'existence holomorphe (resp, méromorphe) au-dessus de $\tilde{\Omega}$ de $f|_{\tilde{\lambda}^{-1}(B(z))}$ est $(i, \Omega, \tilde{\lambda}, f)$ où i est l'injection $i : \tilde{\lambda}^{-1}(B(z)) \rightarrow \Omega$.

Il existe un morphisme de domaine étalé $\tau : \Omega' \rightarrow \Omega$ tel que $\tau \circ \psi = i$, et comme τ est un morphisme de domaine étalé on a :

$$\tilde{\lambda} \circ \tau = \pi' \text{ et donc } \tilde{\lambda} \circ \tau(\Omega') = \pi'(\Omega') \subseteq B(z)$$

tel que τ est a valeurs dans $\tilde{\lambda}^{-1}(B(z))$.

Si $x \in \psi(\tilde{\lambda}^{-1}(B(z)))$, on a :

$$(\psi \circ \tau)(x) = x \text{ car } \psi \circ \tau \circ \psi = \psi$$

donc $\psi \circ \tau : \Omega' \rightarrow \Omega$ est l'identité sur l'ouvert $\psi(\tilde{\lambda}^{-1}(B(z)))$, et par le théorème de l'identité $\psi \circ \tau = Id_{\Omega'}$ et donc $\tilde{\lambda}^{-1}(B(z)) \cong \Omega'$ d'où $\tilde{\lambda}^{-1}(B(z))$ est de Stein.

Et finalement Ω est localement pseudoconvexe au-dessus de $\tilde{\Omega}$.

Théorème 3.2.4. [22] Soit X et Y deux variétés complexes, et soit $\varphi : X \rightarrow Y$ une application holomorphe, s'il existe un recouvrement $U = (U_i)_{i \in I}$ de Y tel que $\varphi^{-1}(U_i)$ soit holomorphiquement (resp, méromorphiquement) extensifère, et Y est projective, alors toute application holomorphe de T dans X se prolonge holomorphiquement (resp, méromorphiquement) au complémentaire dans Δ^n d'un sous-ensemble analytique Z de Δ^n tel que $\text{codim} Z \geq 2$.

Démonstration.

Soit n le plus petit entier m pour lequel il existe un plongement

$$Y \rightarrow \mathbb{P}^m$$

Considérons l'hyperplan :

$$H_i = \{[Z_0 : \dots : Z_n], Z_i = 0\}$$

Le complémentaire dans Y de H_i est un ouvert de Stein.

On démontre le résultat par récurrence sur la dimension de Y .

Selon Bertini [1, pages 45], on peut choisir le système de coordonnées (Z_0, \dots, Z_n) tel que $Y \cap H_i$ soit lisse.

Si on remplace Y par $Y' := Y \cap H_i$, on peut supposer par l'hypothèse de récurrence que $\varphi(X) \not\subset Y \cap H_i$.

Soit $f : T \rightarrow X$ une application holomorphe. Par le même argument on peut supposer que $f(T) \not\subset \varphi^{-1}(H_i \cap y)$.

On peut supposer que la codimension de l'ensemble $f^{-1}(\varphi^{-1}(H_i))$ est supérieur ou égal à 1.

D'après le théorème 3.2.2 et le lemme 3.2.1 (resp. lemme 3.2.2), on a :

$$f : T \setminus f^{-1}(\varphi^{-1}(H_i)) \rightarrow X \setminus \varphi^{-1}(H_i)$$

se prolonge holomorphiquement (resp, méromorphiquement) à l'enveloppe d'holomorphie $\widetilde{T \setminus f^{-1}(\varphi^{-1}(H_i))}$ de $T \setminus f^{-1}(\varphi^{-1}(H_i))$.

Soit maintenant les ensembles E_i et F_i définis comme les parties de $f^{-1}(\varphi^{-1}(H_i))$ où E_i est de codimension pure 1 et $\text{codim} F_i \geq 2$.

On a :

$$\widetilde{T \setminus f^{-1}(\varphi^{-1}(H_i))} = (T \setminus \widetilde{E_i}) \setminus F_i = \widetilde{T \setminus E_i}$$

Comme E_i est une hypersurface de T , et d'après [7]; $\widetilde{T \setminus E_i}$ est isomorphe à $\Delta^n \setminus \widetilde{E_i}$, où $\widetilde{E_i}$ est une hypersurface de Δ^n telle que $E_i = \widetilde{E_i} \cap T$.

Posons $Z = \bigcap \widetilde{E_i}$ on a alors :

$$\begin{aligned} Z \cap T &= \bigcap_{i=0}^n (\widetilde{E_i} \cap T) \\ &= \bigcap_{i=0}^n \widetilde{E_i} \subset \bigcap_{i=0}^n f^{-1}(\varphi^{-1}(H_i)) \\ &\subset f^{-1}\left(\varphi^{-1}\left(\bigcap_{i=0}^n H_i\right)\right) = \emptyset \end{aligned}$$

En conclusion l'application f se prolonge holomorphiquement (resp, méromorphiquement) à $\Delta^n \setminus Z$, où Z est un sous-ensemble analytique de Codimension au moins 2.

Proposition 3.2.2. Soit X et Y deux variétés complexes, et soit $\varphi : X \rightarrow Y$ un revêtement non ramifié, alors X est holomorphiquement (resp, méromorphiquement) extensifère si et seulement si Y est holomorphiquement (resp, méromorphiquement) extensifère.

Démonstration.

a) Si φ est holomorphe :

\Rightarrow) Soit $f : T \rightarrow Y$ une application holomorphe, alors il existe une application holomorphe $g : T \rightarrow X$ tel que $\varphi \circ g = f$ (car T est simplement connexe).

Puisque X est holomorphiquement extensifère donc g se prolonge holomorphiquement à Δ^n en \tilde{g} , ainsi f se prolonge holomorphiquement à Δ^n en $\tilde{f} = \varphi \circ \tilde{g}$.

\Leftarrow) Soit $f : T \rightarrow Y$ une application holomorphe, on a $\varphi \circ f$ se prolonge holomorphiquement en \tilde{g} de Δ^n dans Y et comme Δ^n est simplement connexe, il s'ensuit que f se prolonge holomorphiquement à Δ^n en \tilde{f} .

b) Si φ est méromorphe :

\Rightarrow) Supposons que X est méromorphiquement extensifère. Soit $f : T \rightarrow Y$ une application méromorphe et considérons $\Gamma_f \subset T \times Y$ le graphe de f .

La projection canonique $p : \Gamma_f \rightarrow T$ est propre, et on a :

$$\Gamma_f|_{p^{-1}(\text{sing}(f))} \cong T_{\text{sing}(f)}$$

D'après Remmert [34], Γ_f est simplement connexe, on a :

$$p' = f \circ p : \Gamma_f \rightarrow T$$

La seconde projection canonique étant holomorphe, elle peut être relevée par une application holomorphe $\mu : \Gamma_f \rightarrow X$. Etant donné que $p^{-1} : T \rightarrow \Gamma_f$ est méromorphe, il existe alors une application méromorphe $g = \mu \circ p^{-1} : T \rightarrow X$ qui se prolonge méromorphiquement en $\tilde{g} : \Delta^n \rightarrow X$, ce qui fait que $\varphi \circ \tilde{g}$ constitue un prolongement méromorphe pour f à Δ^n .

\Leftarrow) Supposons maintenant que Y soit méromorphiquement extensifère, soit $f : T \rightarrow X$ une application méromorphe, alors $\varphi \circ f : T \rightarrow Y$ se prolonge méromorphiquement en $g : \Delta^n \rightarrow Y$.

Notons $\Gamma_g \subset \Delta^n \times Y$ le graphe de g et considérons la projection canonique $\mu : \Gamma_g \rightarrow \Delta^n$ et la projection inverse définie par :

$$p^{-1} = g \circ \mu : \Gamma_g \rightarrow Y$$

et également holomorphe, et puisque Γ_g est simplement connexe, il existe alors une application holomorphe $\Theta : \Gamma_g \rightarrow X$ ce qui conduit à l'existence d'une application méromorphe $\tilde{f} : \Delta^n \rightarrow X$ qui prolonge f .

Exemples de variétés holomorphiquement extensifères

Dans ce chapitre, nous nous pencherons sur le problème de prolongement d'applications holomorphes dans des cas particuliers. Dans [8], Dloussky a prouvé que toute variété de Hopf est holomorphiquement extensifère.

De plus, dans [22], M. Krachni a utilisé la classification de Potters [28] pour les surfaces presque homogènes, afin de démontrer que toute application holomorphe de T à valeurs dans une surface presque homogène compacte se prolonge méromorphiquement à $\Delta^n \setminus Z$ ou Z est un sous-ensemble analytique de Δ^n de codimension 2.

4.1 Variétés de Hopf et Tores

Proposition 4.1.1. [8] Soient X , X_1 et X_2 des Variétés complexes :

- (i) X_1 et X_2 sont holomorphiquement extensifères si et seulement si $X_1 \times X_2$ est holomorphiquement extensifère.
- (ii) Si Y est une sous-variété de X , et que X est holomorphiquement extensifère, alors Y et son complémentaire $X \setminus Y$ le sont aussi.
- (iii) X est holomorphiquement extensifère si et seulement si chacune de ses composantes irréductibles l'est également.

Corollaire 4.1.1. [8] Toute variété de Hopf est holomorphiquement extensifère.

Démonstration.

Il suffit de noter que l'application canonique :

$$\pi : W \rightarrow W/G$$

définir un revêtement non ramifié de W/G , on peut alors appliquer les propositions 4.1.1 et 2.2.7.

Proposition 4.1.2. [8] Tous les tores complexes sont holomorphiquement extensifères.

Démonstration.

Le revêtement d'un tore de dimension n est \mathbb{C}^n . Par conséquent, d'après la proposition 2.2.7, on conclut qu'un tore complexe est holomorphiquement extensifère.

4.2 Surfaces presque homogènes compactes

Nous commençons cette partie par un théorème de Potters [29], ou il à donné une classification pour les surfaces presque homogènes :

Théorème 4.2.1. [28] (*Classification de Potters*)

Soit X une surface presque homogène compacte. Alors, X est isomorphe à l'un des cas suivants :

- (i) X est une surface rationnelle.
- (ii) X est isomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ou X est obtenu par une fibration à fibre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ au-dessus de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
- (iii) X est topologiquement isomorphe au fibré trivial à fibre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ au-dessus de T_1 .
- (iv) X est isomorphe à une surface de Hopf.
- (v) X est isomorphe à T_2 .

Il rest a examiner chaque cas de la classification de Potters pour parvenir au résultat concernant les surfaces presque homogènes compactes

Proposition 4.2.1. Soit X une fibration à fibre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ au-dessus de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Alors, toute application holomorphe définie sur T à valeurs dans X se prolonge méromorphiquement à $\Delta^n \setminus Z$, où Z est un sous-ensemble analytique de Δ^n de codimension au moins 2.

Démonstration.

Posons :

$$H_1 = \{[z_1 : z_2] \mid z_1 = 0\} \quad \text{et} \quad H_2 = \{[z_1 : z_2] \mid z_2 = 0\}$$

Nous avons que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus H_1$ est isomorphe à \mathbb{C} par :

$$[z_1 : z_2] \mapsto \frac{z_2}{z_1}$$

et que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus H_2$ est également isomorphe à \mathbb{C} par :

$$[z_1 : z_2] \mapsto \frac{z_1}{z_2}$$

Notons par $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la projection canonique de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Soit maintenant $f : T \rightarrow X$ une application holomorphe. Comme $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus H_i$ ($i = 1, 2$) est holomorphiquement extensifère et la fibre de X est $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, alors :

$$f : T \setminus f^{-1}(\varphi^{-1}(H_i)) \longrightarrow X \setminus \varphi^{-1}(H_i)$$

se prolonge méromorphiquement à $T \setminus \widetilde{f^{-1}(\varphi^{-1}(H_i))}$, l'enveloppe d'holomorphie de $T \setminus f^{-1}(\varphi^{-1}(H_i))$.

Soit E_i et F_i les parties de $f^{-1}(\varphi^{-1}(H_i))$, avec $\text{codim}E_i = 1$ et $\text{codim}F \geq 2$.

On a :

$$T \setminus \widetilde{f^{-1}(\varphi^{-1}(H_i))} \cong \widetilde{T \setminus E_i}$$

E_i est une hypersurface de Δ^n , et d'après [7] on a $\widetilde{T \setminus E_i} = \Delta^n \setminus \widetilde{E_i}$, tel que $E_i = \widetilde{E_i} \cap T$.

On pose $Z = E_1 \cap E_2$. f se prolonge méromorphiquement à $\Delta^n \setminus Z$.

On a :

$$Z \cap T = E_1 \cap E_2 \subset f^{-1}(\varphi^{-1}(H_1 \cap H_2))$$

et comme $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, donc $T \cap Z = \emptyset$, ce qui donne que Z est un sous-ensemble analytique de codimension au moins 2.

Proposition 4.2.2. [21] Soit X une surface de Hopf, alors toute application holomorphe de T dans X se prolonge holomorphiquement au complémentaire d'un sous-ensemble analytique de Δ^n de codimension au moins 2 à valeurs dans X .

Démonstration.

Soit $f : T \rightarrow X$ une application holomorphe, le revêtement universel de X est $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$.

Notons $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow X$ la projection canonique. Comme T est simplement connexe, donc il existe une application holomorphe :

$$g : T \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \quad \text{telle que} \quad \pi \circ g = f$$

L'application g se prolonge à une application holomorphe $\tilde{g} : \Delta^n \rightarrow \mathbb{C}^n$.

On pose $Z = \widetilde{g^{-1}(0)}$, Z est un sous-ensemble analytique de Δ^n . Mais $T \cap \tilde{g}^{-1}(0) = \emptyset$, donc $\text{codim} Z \geq 2$ et l'application holomorphe $\pi \circ (\tilde{g}/\Delta^n \setminus Z)$ est un prolongement de f à $\Delta^n \setminus Z$.

Proposition 4.2.3. [21] Si X est une fibration à fibre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et à base T_1 , alors toute application holomorphe de T dans X se prolonge holomorphiquement à Δ^n à valeurs dans X .

Démonstration.

La base T_1 est holomorphiquement extensifère alors la fibre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est méromorphiquement extensifère.

Définition 4.2.1. Une application rationnelle d'une variété X complexe vers un espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, et l'application :

$$\varphi : Z \longrightarrow [1 : \varphi_1(z) : \dots : \varphi_n(z)]$$

donnée par n fonctions méromorphes sur X , et on dit que l'application rationnelle

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

est birationnelle s'il existe une application rationnelle

$$\psi : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \longrightarrow X$$

telle que $\varphi \circ \psi$ est l'identité.

Les surfaces rationnelles sont des surfaces algébriques birationnelles isomorphes à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Proposition 4.2.4. [21] Si X est une surface rationnelle alors toute application holomorphe de T dans X se prolonge méromorphiquement à Δ^n à valeurs dans X .

Démonstration.

Soit $f : T \rightarrow X$ une application holomorphe, il existe deux fonctions méromorphes φ_1 et φ_2 sur X telles que :

$$g : z \rightarrow [1 : \varphi_1 \circ f(z) : \varphi_2 \circ f(z)]$$

Comme $T \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est méromorphe, alors il existe un sous-ensemble analytique Z de T de codimension 2 telle que $g : T \setminus Z \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est holomorphe.

g se prolonge à une application méromorphe \tilde{g} de Δ^n à valeurs dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (car $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est méromorphiquement extensifère et $\widetilde{T \setminus Z} = \Delta^n$).

De plus, il existe $\psi : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow X$ tel que $\varphi \circ \psi$ est l'identité.

Soit $\Gamma_{\psi \circ \tilde{g}} \subset \Delta^n \times X$ le graphe de $\psi \circ \tilde{g}$ et soit $\Gamma \subset T \times X$ le graphe de f , par définition des applications rationnelles, il existe un sous-ensemble analytique S de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tel que :

$$\varphi : X \setminus \varphi^{-1}(S) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus S$$

est biholomorphe.

On suppose $U = \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus S$, on a :

$$\Gamma_{\psi \circ \tilde{g}|_{g^{-1}(U)}} = \Gamma_{f|_{g^{-1}(U)}}$$

mais ces graphes sont irréductibles, alors $\Gamma_{\psi \circ \tilde{g}} = \Gamma_f$, enfin l'application $\psi \circ \tilde{g}$ est le prolongement méromorphe de f à partir Δ^n en X .

Proposition 4.2.5. Un tore T_2 est holomorphiquement extensifère.

Démonstration.

Le revêtement universel de T_2 est \mathbb{C}^2 .

Corollaire 4.2.1. Toute application holomorphe de T dans une surface presque homogène se prolonge méromorphiquement à $\Delta^n \setminus Z$ ou Z est un sous-ensemble analytique de Δ^n de codimension 2 à valeurs dans X .

4.3 Variétés parallélisables

Proposition 4.3.1. [40] Soit M une variété complexe parallélisable compacte. Alors, M est isomorphe au quotient d'un groupe de Lie par un sous-groupe discret D .

Il est évident qu'un quotient d'un groupe de Lie complexe par un sous-groupe discret est parallélisable.

Proposition 4.3.2. [8] Un groupe de Lie connexe et simplement connexe est une variété de Stein.

Démonstration.

Soit G un groupe de Lie complexe connexe et simplement connexe, et soit \mathfrak{g} son algèbre de Lie. Cette dernière se décompose en un produit semi-discret :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{R} \times \delta$$

où \mathfrak{R} est le radical de \mathfrak{g} et δ est un sous-algèbre de Lie semi-simple de \mathfrak{g} .

Soit R le sous-groupe associé à \mathfrak{R} et S le sous-groupe fermé associé à δ . Étant donné que G est simplement connexe et que R est un sous-groupe distingué (puisque \mathfrak{R} est un idéal de \mathfrak{g}), alors R est fermé et simplement connexe et est de même pour S . comme R est de

Stein, c'est-à-dire R est un groupe résoluble simplement connexe, alors il existe une base $\{X_1, \dots, X_m\}$ (où $m = \dim R$) de \mathfrak{R} telle que l'application :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{C}^m &\rightarrow R \\ (t_1, \dots, t_m) &\mapsto \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_m X_m) \end{aligned}$$

est un isomorphisme, ce qui implique que R est une variété de Stein.

Le groupe S est également de Stein. En effet, considérons $\text{Ad} : S \rightarrow \text{Gl}(\delta)$, la représentation adjointe de S , et comme S est semi-simple, alors $\text{Ad}(S) = \text{Aut}(\delta)^\circ$, la composante connexe de 1 dans $\text{Aut}(\delta)$.

L'application dérivée de Ad notée ad , est fidèle (car δ est semi-simple) et définit un isomorphisme entre δ et $\mathcal{L}(\text{Aut}(\delta)^\circ)$, l'algèbre de Lie associée à $\text{Aut}(\delta)^\circ$. Ainsi, la représentation adjointe fait de S le revêtement universel de $\text{Aut}(\delta)^\circ$, et comme $\text{Aut}(\delta)$ est un sous-groupe Fermé de $\text{Gl}(\delta)$, qui est une variété de Stein, il s'ensuit que S est également une variété de Stein. Par conséquent, le produit direct $G = R \times S$ est aussi une variété de Stein.

Corollaire 4.3.1. Une variété parallélisable compacte est holomorphiquement extensifère.

Démonstration.

Ce résultat découle des propositions 4.3.1, 4.3.2 et 3.2.2.

4.4 Variétés homogènes

Définition 4.4.1. Soit X une variété complexe et G un groupe de Lie complexe agissant holomorphiquement sur X . On dit que X est presque homogène sous le groupe de Lie G , si G possède une orbite ouverte.

Cette définition est équivalente à dire que :

- X est presque homogène sous le groupe de Lie complexe G , si G agit de manière transitive sur X en dehors d'un sous-ensemble analytique S .

— Si S est vide, on dit que X est homogène sous le groupe de Lie G .

Si X est une variété complexe compacte, alors selon le théorème de Bochner et Montgomery [3], l'automorphisme de la variété, noté $\text{Aut}(X)$, est un groupe de Lie complexe agissant holomorphiquement sur X .

Considérons une variété complexe X et un groupe de Lie complexe G agissant holomorphiquement et de manière transitive sur X . Soit $x \in X$ et notons H_x le sous-groupe d'isotropie défini par :

$$H_x = \{g \in G; g(x) = x\}$$

qui est un sous-groupe fermé de G .

Proposition 4.4.1. [4] Toute variété homogène peut être considérée comme une fibration localement triviale avec une base projective et des fibres parallélisables.

Théorème 4.4.1. [22] Soit X une variété homogène compacte. Alors, toute application holomorphe de T à valeurs dans X se prolonge holomorphiquement au complémentaire d'un sous-ensemble analytique Z de Δ^n tel que $\text{codim}Z \geq 2$.

Démonstration.

D'après la proposition 4.4.1, la variété X est un fibré localement trivial (X, π, B) avec une base projective et des fibres connexes parallélisables, notées F .

La base B peut-être recouverte par des ouverts de Stein U_i tels que :

$$\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times F$$

Ainsi, d'après le corollaire 4.3.1, chaque fibre $\pi^{-1}(U_i)$ est holomorphiquement extensifère, ce qui nous permet d'en conclure par le Théorème 3.2.3.

Chapitre 5

Résultats obtenus

Dans ce chapitre, nous examinerons la question du prolongement d'applications holomorphes dans des situations spécifiques. Initialement, nous présentons une démonstration pour le cas d'une surface elliptique V au-dessus d'une courbe algébrique non singulière Δ , qui est méromorphiquement extensifère à $\Delta \setminus Z$, où Z est un sous-ensemble analytique de codimension au moins 2.

Ensuite, dans la deuxième section, nous proposons une généralisation de cette étude.

5.1 Surfaces elliptiques

Dans cette section, nous recourons à une définition ainsi qu'à un résultat fournis par K. Kodaira [20], et à un lemme de G. Dloussky [8], afin de démontrer que toute surface elliptique V au-dessus d'une courbe algébrique non singulière Δ peut être prolongée méromorphiquement à $\Delta \setminus Z$, où Z est un sous-ensemble analytique de codimension au moins 2.

Définition 5.1.1. [20] Soit $\varphi: V \rightarrow \Delta$ une application holomorphe, propre, et surjective avec Δ une courbe algébrique non singulière (une surface de Riemann compacte ou ouverte), et V une surface analytique. On dit que (V, φ, Δ) est une surface elliptique si pour tout $x \in \Delta$, sauf un nombre fini, $\varphi^{-1}(x)$ est une courbe elliptique non singulière (un tore de dimension 1).

On appelle φ la projection canonique de V sur Δ .

Soit V une surface elliptique au-dessus d'une courbe algébrique non singulière Δ . De plus, soit φ la projection canonique de V sur Δ . Pour un point quelconque $a \in \Delta$, soit τ_a une carte locale sur Δ centrée en a , et $\tau_a(u)$ la valeur de τ_a en un point u d'un voisinage de a .

Notons (z_1, z_2) les coordonnées locales d'un point z sur V . Si :

$$\left| \frac{\partial \tau_a}{\partial z_1}(\varphi(z)) \right| + \left| \frac{\partial \tau_a}{\partial z_2}(\varphi(z)) \right| > 0, \quad \forall z \in \varphi^{-1}(u)$$

en chaque point z sur $\varphi^{-1}(u)$, on appelle $C_u := \varphi^{-1}(u)$ une fibre régulière de V .

Il est clair que chaque fibre régulière C_u est une courbe non singulière elliptique. Il existe un ensemble fini $\{a_p\}$ de points a_p , $p = 1, 2, 3, \dots$, sur Δ tel que $C_u := \varphi^{-1}(u)$ est une fibre régulière pour tout point $u \in \Delta \setminus \{a_p\}$.

Si $C_u = \varphi^{-1}(u)$ est une fibre régulière, pour tout point $z \in \varphi^{-1}(u)$, φ est une submersion en z et donc $\varphi^{-1}(u)$ est une courbe elliptique non singulière.

On note a_ρ les points de Δ tels que $\varphi^{-1}(a_\rho)$ n'est pas une fibre régulière.

On appelle *fibre singulière* C_{a_ρ} de V au-dessus de a_ρ le diviseur de la fonction $\tau_{a_\rho}(\varphi)$:

$$C_{a_\rho} = \sum n_{p_s} \otimes_{p_s}$$

ou \otimes_{p_s} sont des courbes irréductibles et n_{p_s} des entiers positifs.

Posons : $m_\rho = \text{pgcd}(n_{p_s})$

m_ρ est la multiplicité de C_{a_ρ} .

Si $m_\rho = 1$, C_{a_ρ} est dite fibre singulière simple.

Si $m_\rho \geq 2$, C_{a_ρ} est dite fibre singulière multiple.

Proposition 5.1.1. [20] Soit (V, φ, Δ) une surface elliptique au-dessus d'une courbe algébrique non singulière Δ , avec des fibres singulières multiples C_{a_ρ} , $\rho = 1, \dots, s$ et $a_0 \in \Delta \setminus \{a_1, \dots, a_s\}$. Alors, il existe un revêtement ramifié $(\tilde{\Delta}, \omega, \Delta)$ de Δ et il existe une surface elliptique $(\tilde{V}, \tilde{\varphi}, \hat{\Delta})$ sans fibres singulières multiples, munie d'une application $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ qui rend le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{V} & \xrightarrow{\pi} & V \\
 \tilde{\varphi} \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 \tilde{\Delta} & \xrightarrow{\omega} & \Delta
 \end{array}$$

FIGURE 5.1 –

commutatif et fasse de $\tilde{V} \setminus \tilde{\varphi}^{-1}(a_0)$ un revêtement non ramifié au-dessus de $V \setminus \varphi^{-1}(a_0)$.

Démonstration.

Notons m_p la multiplicité de C_{a_p} et $\varphi : V \rightarrow \Delta$ la projection canonique.

Soit $m_0 = \text{ppcm}(m_1, \dots, m_s)$ et $d = m_1 \cdot m_2 \dots m_s$.

En fixant un point arbitraire $a_0 \in \Delta \setminus \{a_p\}$, nous allons construire un revêtement à d -feuillet, noté $\tilde{\Delta}$ au-dessus de Δ , qui est non ramifié au-dessus de $\Delta \setminus \{a_b, a_1, \dots, a_s\}$ et possède d/m_p points de branchement b_{p_k} , (pour $k = 1, \dots, d/m_\varphi$), d'ordre $(m_p - 1)$ au-dessus de a_p .

Soit ω la projection canonique de $\tilde{\Delta}$ dans Δ . Nous avons alors une surjection :

$$\rho : \pi_1(\Delta \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_s\}) \rightarrow H_1(\Delta \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_s\})/[m_1\gamma_1, \dots, m_s\gamma_s]$$

où chaque γ_i est un chemin centré en a_i d'indice 1.

Posons $\gamma_0 = \gamma_1 + \dots + \gamma_s$. On a alors que $m_0\gamma_0 \in [m_1\gamma_1, \dots, m_s\gamma_s]$ et donc $\rho(m_0\gamma_0) = 0$.

Notons $H = \ker \rho$. Soit $\tilde{\Delta}_H$ le revêtement associé à H sur $\Delta \setminus \{\gamma_0, \dots, \gamma_s\}$. Ce revêtement est un revêtement à d -feuillet non ramifié au-dessus de $\Delta \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_s\}$.

Considérons maintenant le disque centré en a_p , noté \tilde{D}_p , et le revêtement donné par la fonction $z \mapsto z^{m_p}$.

La variété $\tilde{\Delta}$ est obtenue en recollant $\tilde{\Delta}_H$ avec d/m_p exemplaires de \tilde{D}_p .

Soit :

$$W := \{(z, v) \in V \times \tilde{\Delta} : \varphi(z) = \omega(v)\}$$

un sous ensemble analytique de $V \times \tilde{\Delta}$, qui ne présente pas de points singuliers en dehors des courbes $\varphi^{-1}(a_p) \times b_{p_k}$, pour lesquelles $1 \leq k \leq d/m_p$ et $1 \leq \rho \leq s$, au voisinage de tout point de $\varphi^{-1}(a_p) \times b_{p_k}$, W se compose de m_p feuillet non singuliers passant par $\varphi^{-1}(a_p) \times b_{p_k}$.

En séparant ces feuillet, nous construisons une surface elliptique \tilde{V} au-dessus de $\tilde{\Delta}$. La projection canonique $\tilde{\varphi} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{\Delta}$ est induite par la projection $V \times \tilde{\Delta} \rightarrow \tilde{\Delta}$, et la projection $V \times \tilde{\Delta} \rightarrow V$ induit une application holomorphe $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ telle que (\tilde{V}, π, V) forme un revêtement ramifié à d -feuillet au-dessus de V , qui est non ramifié au-dessus de $V \setminus \varphi^{-1}(a_0)$, et nous avons $\varphi \circ \pi = \omega \circ \tilde{\varphi}$.

Pour $v \neq b_{p_k}$, avec $1 \leq k \leq d/m_p$ et $1 \leq \rho \leq s$, la fonction π envoie biholomorphiquement un voisinage de $\tilde{\varphi}^{-1}(v)$ dans \tilde{V} dans un voisinage de $\varphi^{-1}(\omega(v))$, ce qui implique que \tilde{C}_v est une fibre régulière.

La multiplicité de chaque composante de $\tilde{C}_{b_{p_k}}$ est égale à 1 et $\tilde{C}_{b_{p_k}}$ est régulière.

Pour $\rho \geq 1$, on constate que $\tilde{\varphi}^{-1}(b_{p_k})$ constitue un revêtement non ramifié à m_p feuillet sur $\varphi^{-1}(a_p)$, ainsi il s'ensuit que $\tilde{C}_{b_{p_k}}$ n'est pas une fibre singulière simple.

Lemme 5.1.1. [8] Soit φ une submersion de V dans Δ avec V une surface complexe, et Δ une courbe algébrique non singulière. Si $\forall x \in \Delta$, $\varphi^{-1}(x)$ est une courbe elliptique, alors :

- i)* V est holomorphiquement extensifère, si Δ non compacte (de Stein).
- ii)* Toute application holomorphe de T dans V se prolonge holomorphiquement à $\Delta^n \setminus Z$ ou Z est un sous-ensemble analytique de codimension au moins 2, si Δ compacte et projective (i.e : $\Delta = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$).

Proposition 5.1.2. Soit V une surface elliptique à fibres singulières simples au-dessus

d'une courbe algébrique non singulière Δ , et $\varphi : V \rightarrow \Delta$ la projection canonique, alors tout point $z \in \Delta$ admet un voisinage U tel que $\varphi^{-1}(U)$ est méromorphiquement extensifère.

Démonstration.

Il existe un nombre fini de points $\{a_1, \dots, a_s\}$ de Δ tel que : $\forall u \in \Delta \setminus \{a_1, \dots, a_s\}$, $\varphi^{-1}(u)$ est une courbe elliptique non singulière et

$$\varphi : V \setminus \bigcup_{i=1}^s \varphi^{-1}(a_i) \rightarrow \Delta \setminus \bigcup_{i=1}^s a_i$$

est une submersion. D'après le lemme 3.3.3, $V \setminus \bigcup \varphi^{-1}(a_i)$ est holomorphiquement extensifère (car Δ est compact et donc $\Delta \setminus \bigcup a_i \neq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) d'où pour tout $z \in \Delta \setminus \bigcup a_i$, il existe un voisinage U de z tel que $\varphi^{-1}(U)$ est holomorphiquement extensifère.

Soit E_i un disque centré en $a_i \in \{a_1, \dots, a_s\}$, d'après [20] th.10.1 il existe une surface elliptique algébrique projective (B, φ, Δ) tel que $\phi^{-1}(E_i) \cong \varphi^{-1}(E_i)$, or $\varphi^{-1}(E_i)$ est méromorphiquement extensifère en effet : Soit $f : T \rightarrow \varphi^{-1}(E_i)$ une application méromorphe, f se prolonge méromorphiquement en $\tilde{f} : \Delta^n \rightarrow B$; d'autre part, $\varphi \circ f : T \rightarrow E_i$ se prolonge holomorphiquement en $\tilde{g} : \Delta^n \rightarrow E_i$ d'après proposition 1.1.1.

Notons $\Gamma_{\tilde{g}} \subset \Delta^n \times \Delta$ le graphe de \tilde{g} et $\Gamma_{\varphi \circ \tilde{f}} \subset \Delta^n \times \Delta$ le graphe de $\varphi \circ \tilde{f}$.

On a $\tilde{g}|_T = \varphi \circ \tilde{f}|_T$ et donc $\Gamma_{\tilde{g}|_T} = \Gamma_{\varphi \circ \tilde{f}|_T}$; or ces graphes sont irréductibles et donc $\Gamma_{\tilde{g}} = \Gamma_{\varphi \circ \tilde{f}}$ d'où $\varphi \circ \tilde{f}$ est à valeurs dans E_i et donc \tilde{f} est à valeurs dans $\varphi^{-1}(E_i)$.

En conclusion tout point $z \in \Delta$ admet un voisinage U tel que $\phi^{-1}(U)$ est méromorphiquement extensifère.

Théorème 5.1.1. Soit V une surface elliptique au-dessus d'une courbe algébrique non singulière et $\varphi : V \rightarrow \Delta$ la projection canonique, alors toute application holomorphe de T dans V se prolonge méromorphiquement à $\Delta^n \setminus Z$ où Z est un sous-ensemble analytique de codimension au moins 2.

Démonstration.

Si V est à fibres simples :

- i) Si $\Delta \neq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ alors V est holomorphiquement extensifère d'après proposition 5.1.2, et théorème 3.2.3,
- ii) Si $\Delta = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ le résultat est obtenu par le théorème 3.2.4 et proposition 5.1.2.

Si V est a fibres multiples :

Soit (V, φ, Δ) une surface elliptique a fibres singulières multiples, notons C_{a_ρ} , $\rho = 1, \dots, s$ tels que les fibres singulières multiples, d'après la proposition 5.1.1, il existe une surface elliptique sans fibres singulières multiples $(\tilde{V}, \tilde{\varphi}, \tilde{\Delta})$ tel que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{V} & \xrightarrow{f} & V \\
 \tilde{\varphi} \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 \tilde{\Delta} & \xrightarrow{\omega} & \Delta
 \end{array}$$

FIGURE 5.2 –

Soit commutatif. (\tilde{V}, π, V) est un revêtement non ramifié au dessus de $V \setminus \varphi^{-1}(a_0)$ ou $a_0 \in \Delta \setminus \cup(a_i)$.

D'après le lemme 5.1.1, $V \setminus \cup \varphi^{-1}(a_i)$ pour $1 \leq i \leq s$, est holomorphiquement extensifère. Pour $i \neq 0$, soit E_i un disque centré en a_i ne contenant pas a_0 , et puisque $(\tilde{V}, \tilde{\varphi}, \tilde{\Delta})$ n'est pas a fibres singulières multiples, d'après la proposition 5.1.2, en restreignant au besoin E_i , on a $\tilde{\varphi}^{-1}(\omega^{-1}(E_i))$ est méromorphiquement extensifère.

Or $\tilde{\varphi}^{-1}(\omega^{-1}(E_i)), \pi, \varphi^{-1}(E_i)$ est un revêtement non ramifié, et après la proposition 5.1.2, $\varphi^{-1}(E_i)$ est méromorphiquement extensifère.

Finalement :

- i) si $\Delta \neq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, alors V est méromorphiquement extensifère, d'après le théorème 2.2.6.
- ii) si $\Delta = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, toute application holomorphe de T dans V se prolonge méromorphiquement a $\Delta^n \setminus V$ ou est un sous-ensemble analytique de codimension au moins, d'après le théorème 3.2.4.

5.2 Généralisation

Soit X une variété complexe et $\varphi : X \rightarrow \Delta$ une application holomorphe, propre et surjective tels que Δ est une courbe algébrique non singulière.

Pour un point quelconque $a \in \Delta$, soit τ_a une carte locale sur Δ de centre a , et $\tau_a(u)$ la valeur de τ_a en un point u d'un voisinage de a . Notons $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ les coordonnées locales d'un point z sur X . Si :

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \tau_a}{\partial z_i} (\varphi(z)) \right| > 0$$

en chaque point z sur $\varphi^{-1}(u)$, on dit que $C_u := \varphi^{-1}(u)$ est une fibre régulière de X .

Dans le cas où $C_u := \varphi^{-1}(u)$ est une fibre régulière de X , on dit que φ est une submersion en z .

Lemme 5.2.1. [6] Soit X une variété complexe, et Δ une courbe algébrique non singulière. Soit $\pi : X \rightarrow \Delta$ une submersion, tels que pour tout $z \in \Delta$, la fibre $\pi^{-1}(z)$ est une courbe parallélisable, alors :

- i) X est holomorphiquement extensifère, si Δ non compacte ($\Delta \neq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$).
- ii) Toute application holomorphe de T dans X se prolonge holomorphiquement à $\Delta^n \setminus Z$ ou Z est un sous-ensemble analytique de codimension au moins 2, si Δ compacte ($\Delta = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$).

Démonstration.

Soit Θ le faisceau localement libre de rang 1 sur X des champs de vecteurs tangents aux fibres de π .

Pour $z \in \Delta$, notons Θ_z , la restriction de Θ à $\pi^{-1}(z)$.

π est une submersion, donc $\forall z \in \Delta, \pi^{-1}(z)$ est une courbe parallélisable, ce qui nous donnons que :

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(\pi^{-1}(z), \theta_z) = 1$$

Après [16], le faisceau image direct $\pi_*\theta$ est un faisceau localement libre de rang 1 sur Δ . Soit z_0 un point quelconque de Δ , il existe un disque ouvert D_0 centré en z_0 sur lequel $\pi_*\theta|_{D_0}$ est isomorphe à $\mathcal{O}|_{D_0}$, donc il existe un champ de vecteur $\theta \in \pi_*\theta(D_0)$ qui ne s'annule en aucun point de $\pi^{-1}(D_0)$.

Comme π est une submersion, en restreignant au besoin D_0 , nous pouvons supposer que π admet une section σ au dessus de D_0 .

Soit l'application holomorphe :

$$\begin{aligned}\phi : D_0 \times \mathbb{C} &\rightarrow \pi^{-1}(D_0) \\ (z, \omega) &\mapsto \exp(\omega\theta)(\sigma(z))\end{aligned}$$

Pour $z \in D_0$ fixé, \mathbb{C} est le revêtement universel de $\pi^{-1}(z)$ et $(D_0 \times \mathbb{C}, \phi, \pi^{-1}(D_0))$ est un revêtement de $\pi^{-1}(D_0)$.

Comme $D_0 \times \mathbb{C}$ est holomorphiquement extensifière, et d'après la proposition 3.2.2, alors $\pi^{-1}(D_0)$ est holomorphiquement extensifière.

En conclusion si :

- i) $\Delta \neq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ alors X est holomorphiquement extensifière d'après le théorème 3.2.3.
- ii) $\Delta = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ alors toute application holomorphe de T dans X se prolonge holomorphiquement (resp. méromorphiquement) au complémentaire dans Δ^n d'un sous-ensemble analytique $Z \subset \Delta^n$ tel que $\text{codim } Z \geq 2$, d'après le théorème 3.2.4.

Théorème 5.2.1. [6] Soit X une variété complexe, et Δ une courbe algébrique non singulière. Soit $\varphi : X \rightarrow \Delta$ une application holomorphe, propre et surjective, tels que pour tout $z \in \Delta$ sauf un nombre fini, $\varphi^{-1}(z)$ est une courbe parallélisable. Alors X est holomorphiquement extensifière à $\Delta^n \setminus Z$ ou Z est un sous-ensemble analytique de codimension au moins 2.

Avant d'obtenir le résultat final, on a le lemme 5.2.2 suivant qui prouve qu'une hypersurface de Δ^n rencontre l'ouvert T .

Lemme 5.2.2. [6] Soit H un sous-ensemble analytique de Δ^n , si H est une hypersurface de Δ^n (c'est-à-dire un sous-ensemble analytique de codimension pure égale à 1), alors : $T \cap H \neq \emptyset$.

Démonstration.

Soit H un sous-ensemble analytique de codimension pure égale à 1 de Δ^n , donc par définition

$$H = \{z \mid f_i(z) = 0\}$$

tel que f est une application holomorphe de T ($f|_H = 0$).

Nous supposons $H \cap T = \emptyset$.

Comme f est holomorphe sur Δ^n , alors $1/f$ est holomorphe sur T . $1/f$ est une application holomorphe sur T , donc elle se prolonge holomorphiquement à Δ^n , ce qui est impossible. Donc on conclut que $H \cap T \neq \emptyset$.

Démonstration. (Théorème 5.2.1)

Soit a_ρ l'ensemble des points de Δ tels que $\varphi^{-1}(a_\rho)$ n'est pas régulière.

Notons $H_i = \varphi^{-1}(a_\rho)$ le fibre singulière au dessus de $\{a_\rho\}$.

D'après le lemme 5.2.2 pour tout $z \in \Delta \setminus \{a_\rho\}$, $\varphi^{-1}(z)$ est une fibre parallélisable donc $\varphi(z)$ est une submersion et alors $V \setminus H_i$ est holomorphiquement extensifère, c'est-à-dire pour toute application holomorphe $f : T \rightarrow V$, la restriction :

$$f : T \setminus f^{-1}(H_i) \rightarrow V \setminus H_i$$

se prolonge holomorphiquement à $T \setminus \widetilde{f^{-1}(H_i)}$ à l'enveloppe d'holomorphie de $T \setminus f^{-1}(H_i)$.

Soient E_i et F_i des sous-ensembles analytiques de Δ^n tels que :

$$f^{-1}(H_i) = E_i \cup F_i$$

avec $\text{codim} E_i = 1$ et $\text{codim} F_i \geq 2$.

On a :

$$\widetilde{T \setminus f^{-1}(H_i)} = T \setminus \widetilde{(E_i \cup F_i)} = \widetilde{T \setminus E_i} \cup \widetilde{T \setminus F_i} \cong \widetilde{T \setminus E_i}$$

. Comme $\text{codim} E_i = 1$ donc E_i est une hypersurface de Δ^n .

D'après [théorème 3.2.2] on obtient $\widetilde{T \setminus E_i} \cong \Delta^n \setminus \tilde{E}_i$ tels que E_i est une hypersurface de Δ^n avec $E_i = \tilde{E}_i \cap T$.

On suppose $Z = \bigcap \tilde{E}_i$. On a :

$$\begin{aligned} Z \cap T &= \bigcap_{i=1}^s (\tilde{E}_i \cap T) \\ &= \bigcap_{i=1}^s E_i \subseteq \bigcap_{i=1}^s f^{-1}(H_i) \\ &= f^{-1} \left(\bigcap_{i=1}^s H_i \right) = \emptyset \end{aligned}$$

Donc $Z \cap T = \emptyset$ alors Z est un sous-ensemble analytique de Δ^n avec $\text{codim} Z \geq 2$.

Conclusion

L'étude du domaine d'existence des applications holomorphes dans un ouvert de \mathbb{C}^n a fait l'objet de nombreuses recherches en raison de son importance dans plusieurs domaines.

Dans cette thèse, nous proposons une contribution à l'étude du problème de prolongement des applications holomorphes sous certaines hypothèses, afin d'obtenir de nouveaux résultats.

En utilisant des résultats connus sur les variétés extensifères, nous avons prouvé que toute surface elliptique est méromorphiquement extensifère en dehors de la codimension au moins 2. Ensuite, nous avons établi un théorème qui généralise ce résultat, en prenant X comme une variété complexe à la place de V , une surface elliptique, et en considérant les fibres comme des courbes parallélisables au lieu des courbes elliptiques.

Il serait intéressant d'obtenir des résultats pour des hypothèses plus faibles et plus générales.

Bibliographie

- [1] W. Barth, G. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, Tokyo, (1984).
- [2] A. Blanchard, Sur les variétés analytiques complexes, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup*, 73, (1956), 157-202.
- [3] S. Bochner, D. Montgomery, Groups on analytic manifolds, *Ann. Math*, 48, (1947), 659-669.
- [4] A. Borel, R. Remmert, Über kompakte homogene Kahlerische Mannigfaltigkeiten, *Math. Annal* 145, (1962), 429-439.
- [5] A.B. Brown, On certain analytic continuations and analytic homeomorphisms, *Duke Math. J.* 2 (1936), no. 1, 20-28.
- [6] M.N. Boukhetouta, M. Krachni, F. Yazid, F. Djeradi, "Holomorphic extension", *Advances in Mathematics : Scientific Journal* 12 (2023), no.1, 217-224.
- [7] G. Dloussky Loussky, Enveloppes d'holomorphie et prolongement d'hypersurfaces, *Séminaire Pierre Lelong, Lecture notes in Math*, Springer, (1977), 215-235.
- [8] G. Dloussky, Prolongement d'applications holomorphes, *Séminaire P. Lelong, H. Skoda, Lectures notes in Math*, Springer, (1978), 42-95.
- [9] F. Docquier, H. Grauert, Levinsches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten, *Math. Annal* 140, (1960), 94-123.
- [10] L. Ehrenpreis, A new proof and an extension of Hartogs' theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.* 67, (1961), 507-509.

-
- [11] G. Fichera, Caratterizzazione della traccia, sulla frontiera di un campo, di un funzione analitica di più variabili complesse, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) 22 (1957), 706–715.
- [12] R. Fueter, Uber einen Hartogs'schen Satz, *Comm. Math. Helv.* 12 (1939), 75–80.
- [13] F. Hartogs, Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen, *Bayerische Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-Physikalisch Klasse* **36** (1906), 223–292.
- [14] A. Huckelberry, E. Oeljeklauss, Classification theorems for Almost Homogeneous spaces, *Institut Elie Carton*, (1984).
- [15] L. Hormander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Van Nostrand, Princeton 1966. 3rd ed. North Holland Publ. Co., Amsterdam–New York (1990).
- [16] A. Hurwitz, Uber die Entwicklung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit, in :*Proc. 1st International Congress of Mathematicians, Zurich, 1897, 1898*, pp. 91–112.
- [17] S.M. Ivashkovich, Extension of locally biholomorphic mappings into product of complex manifolds, *Math. USSR Izvestiya* Vol 27 n°1 (1986), 193-199.
- [18] S.M. Ivashkovich, Extension of locally biholomorphic mappings of domains into complex projective space, *Math. USSR Izvestiya* Vol 22 n°1 (1984), 181-189.
- [19] S.M. Ivashkovich, The Hartogs phenomen for holomorphically convex Kähler manifolds, *Math. USSR Izvestiya*, Vol 29 n°1 (1987), 225-232.
- [20] K. Kodaira, On compact analytic surfaces , *Annals of mathematics* 77,n°3 (1963), 563-624.
- [21] M. Krachni, Hartogs Extension. *International journal of contemporary mathematical sciences*.Vol.3(2008),no.11,545-550.
- [22] M. Krachni, Prolongement d'applications holomorphes, *Bull. Soc. Math. France* 118(1990), 229-240.
- [23] E.E. Levi, Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frontier del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse, *Annali diMat.* (3) 18 (1911), 69–79.

-
- [24] B. Malgrange, Lectures on the theory of function of several complex variables, Tata Institute of fundamental Research Bombay (1958).
- [25] E. Martinelli, Alcuni teoremi integrali per le funzioni per le funzioni analitiche di piu variabili complesse, Mem. della R. Accad. d'Italia 9 (1938), 269–283.
- [26] E. Martinelli, Sopra una dimostrazione di R. Fueter per un teorema di Hartogs, Comm. Math. Helv. 15 (1942/43), 340–349.
- [27] J. Milnor, Morse Theory, Based on lectures notes by M. Spivak and R. Wells, Annals of mathematical Studies, No. 51, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1963, vi+153 pp.
- [28] W.F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd II, B.G. Teubner, Leipzig, 1929.
- [29] J. Potters, On almost homogeneous compact complex surfaces, Invent. Math 8 (1969), 244-266.
- [30] M. Range, Extension phenomena in multidimensional complex analysis : correction of the historical record, Math. Intelligencer **24** (2002), no. 2, 4–12.
- [31] D. Riemenschneider, Über die Anwendung algebraischer methoden in der deformations theorie komplexen Raume. Math. Ann 187 (1970), 40-55.
- [32] R. Remmert, Holomorphe und meromorphe abbildungen komplexer Raume, Math. Annalen, 133 (1957), 328-370.
- [33] R. Remmert, T. Van de ven, Über holomorphe Abbildungen projectiv algebraische-raisher mannigfaltigkeiten komplexe Raume, Math. Ann 142 (1961), 453-486.
- [34] B. Shiffman, Extension of holomorphic maps into hermitien manifolds. Math. Ann 194 (1971), 249-258.
- [35] Y.T. Siu, Techniques of extensions of analytiques objects, Dekker, New York (1974).
- [36] Y.T. Siu, Some recent developpements in complex differential geometry, Proc. International Congr. Math (Warsaw, 1983), Vol 1, PWN, Warswa, and North-Holland, Amesterdam (1984), 287-297.
- [37] Y.T. Siu, Every Stein subvariety admits Stein neighborhood. Invent. Math. 38, (1976-77), 89-100.
- [38] K. Stein, Überlagerungen holomorph vollstandiger komplexe Raume, Arch. Math. VII (1956), 354-361.

- [39] D. Struppa, The first eighty years of Hartogs' theorem, Geometry Seminars, 1987-1988, Bologna 1987–1988, 127–209. Univ. Stud. Bologna, Bologna, 1988.
- [40] H.C. Wang, Complex parallelisable manifolds. Proceedings of the A.M.S. 5 (1954), 771-776.