Université Sétif 1 Ferhat Abbas
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Dr. Nadjet Bensebaa

Analyse 3

Notes de cours et exercices

destinées aux étudiants de
2ème année de Licence en Mathématiques,
et 2ème année Physique et Technologie

Mars 2024

Table des matières

Introduction

Ce polycopié couvre le programme d'analyse 3 généralement enseigné au troisième semestre de la deuxième année universitaire. Son contenu est destiné plus particulièrement aux étudiants de la deuxième année licence mathématique, ainsi qu'aux étudiants de la deuxième année physique et technologie. Il a pour objectif d'étudier les différents types de convergence des séries : séries numériques, séries de fonctions, différents critères de convergence, développements en séries entières et en séries de Fourier, la convergence sur différents intervalles (ouvert, semi-ouvert, fermé) pour les intégrales impropres.

Ce cours est assez détaillé et comporte cinq chapitres :

1) Séries numériques ;
2) Suites et séries de fonctions ;
3) Séries entières ;
4) Séries de Fourier ;
5) Intégrales impropres.

Chaque chapitre comprend un énoncé clair de définitions, quelques démonstrations de théorèmes, des exemples explicatifs et des exercices résolus.

Chapitre 1

Séries numériques

1.1 Définitions

Définition 1.1

Soit (u_n) une suite de nombres réels (complexes).

L'expression $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots.$

est appelée série numérique de terme général u_n et les nombres $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ sont les termes de la série.

Définition 1.2

La somme des n premiers termes de la série est appelée somme partielle :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

► On note par s la limite de (s_n) lorsque n tend vers l'infini où $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots + u_n$.

Si (s_n) est convergente, (s_n) admet une limite finie s, on dit que la série $\sum u_n$ est convergente et dans ce cas le nombre s s'appelle la somme de la série $\sum u_n$ et on écrit $s = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ n'existe pas ou (s_n) tend vers une limite infinie, on dit que la série $\sum u_n$ est divergente et qu'elle n'a pas de somme.

Pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n = s_n - s_{n-1}$ et $u_0 = s_0$.

Exemple 1

1) Trouver le terme géneral de la série $\sum u_n$ si la suite de la somme partielle (s_n) est définie par

a) $s_n = \frac{2^n-1}{2^n}$

On a $u_0 = s_0 = 0$ et $u_n = s_n - s_{n-1}$ pour $\forall n \geqslant 1$

donc $u_n = \frac{2^n-1}{2^n} - \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} = \frac{2^n+1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2^n}$.

b) $s_n = \frac{(-1)^n}{n}$

On a $u_1 = s_1 = -1$ et $u_n = s_n - s_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} = (-1)^n \frac{2n-1}{n(n-1)}$.

Exemple 2

Calculer les sommes suivantes

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

On décompose le terme général de la série, on trouve

$$u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

alors

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots + u_n \\ &= (1 - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{9}) + \ldots.. + (\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}) \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

d'où

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)} = 1$$

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

On a

$$u_n = \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$$

alors

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots + u_n \\ &= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \ldots + \frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2n+1}) \end{aligned}$$

d'où

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

► Si la série $\sum_{n=k}^{\infty} u_n$ converge alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge également.

Réciproquement, si la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge alors la série $\sum_{n=k}^{\infty} u_n$ converge également.

Théorème 1.1

Si la série $\sum u_n$ converge et $\sum u_n = s$ alors la série $\sum \lambda u_n$, où λ est une constante, converge. De plus, $\sum \lambda u_n = \lambda \sum u_n = \lambda s$.

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, $\sum u_n = s$ et $\sum v_n = s'$ alors les séries $\sum(u_n+v_n)$ et $\sum(u_n-v_n)$ convergent et ont pour somme $\sum(u_n+v_n) = s+s'$ et $\sum(u_n-v_n) = s-s'$.

1.2 Condition nécessaire de convergence d'une série

Théorème 1.2

Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Démonstration

On considère la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$

Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge alors $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = s$, et on a $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$ comme $u_n = s_n - s_{n-1}$, donc $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = 0$.

Corollaire 1.1

Si $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Exemple 3

Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^n}$, cette série diverge car

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2^n}\right) = 1 \neq 0.$

Exemple 4

Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$

On a $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$.

Donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ diverge.

► Soulignons que cette condition n'est pas suffisante, par exemple on considère la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, cette série est divergente mais $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

En effet, on a $s_{2n} - s_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots.. + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$.

On utilise le critère de Cauchy concernant les suites, la suite $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p > q > n_0 \Rightarrow |s_p - s_q| < \varepsilon.$$

et on a $s_{2n} - s_n > \frac{1}{2}$.

Donc le critère de Cauchy n'est pas satisfait, d'où la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

1.3 Série géométrique

On appelle série géométrique, la série de la forme $\sum aq^n$, où $a \neq 0$.

Soit $s_n = \sum_{k=0}^{n} aq^k = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots.. + aq^n$...................... (1)

d'où $qs_n = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots. + aq^{n+1}$.................................. (2)

on soustrait (2) de (1) on obtient

$s_n(1-q) = a(1-q^{n+1})$.

Pour $q \neq 1$, on obtient $s_n = a\frac{(1-q^{n+1})}{1-q}$. De plus,

pour $|q| < 1$, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, (s_n) admet une limite s tel que

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q},$$

d'où $\sum aq^n$ est convergente.

Pour $|q| > 1$, $\lim_{n\to\infty} |q|^{n+1} = \infty$ et par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty,$$

d'où la série $\sum aq^n$ est divergente.

Si $q = 1$, la série $\sum aq^n = \sum a$ est une série de termes constants et est divergente car le terme général ne tend pas vers zéro.

Si $q = -1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a = a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ est divergente car la suite $((-1)^n)_n$ n'a pas de limite.

1.4 Séries à termes positifs

Soient $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ deux séries à termes positifs.

1.4.1 Critère de comparaison

Théorème 1.3

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries qui vérifient l'inégalité $u_n \leqslant v_n$:

1) Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

2) Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration

Supposons qu'il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$ on a $u_n \leqslant v_n$ avec

$\sum_{k=0}^{n} u_k = s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots. + u_n$

$\sum_{k=0}^{n} v_k = s'_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots. + v_n$

Nous avons $s_n \leqslant s'_n$.

1) Comme $\sum v_n$ converge, alors (s'_n) coverge vers une limite s' $\left(\lim\limits_{n\to\infty} s'_n = s'\right)$, ce qui nous donne $s_n \leqslant s'$.

La suite (s_n) est croissante (notons que, lorsque n croit, la somme partielle (s_n) croit), et bornée supérieurement par s' donc elle est convergente, d'où $\sum u_n$ converge.

2) Supposons que $\sum u_n$ diverge.

On a $u_n \geqslant 0$ et $\sum u_n$ diverge, donc $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.

Comme $s_n \leqslant s'_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} s'_n = \infty$,

d'où la série $\sum v_n$ diverge.

Exemple 5

Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$.

On a $u_n = \frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente car la raison $q = \frac{1}{2} < 1$, donc d'après le critère de comparition, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ converge.

Exemple 6

Soit la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

On a $n \geqslant \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), alors d'après le critère de comparition, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

1.4.2 Critère d'équivalence

Théorème 1.4

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ C'est-à-dire $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exemple 7

Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2^n+n}$.

On a $\frac{2}{2^n+n} \underset{\infty}{\sim} \frac{2}{2^n} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

Comme $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique convergente car la raison $q = \frac{1}{2} < 1$, alors d'après le critère d'équivalence, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2^n+n}$ est convergente.

Exemple 8

Soit la série $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$.

On a $\sin\frac{\pi}{n} \underset{\infty}{\sim} \frac{\pi}{n}$, et comme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n}$ diverge, alors d'après le critère d'équivalence, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}$ diverge.

1.4.3 Règle de Cauchy

Théorème 1.5

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Si la limite $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ (finie ou non) existe, alors

1) La série $\sum u_n$ converge si $l < 1$.

2) La série $\sum u_n$ diverge si $l > 1$.

3) Si $l = 1$, on ne peut rien conclure.

Démonstration

Soit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l < 1$ et soit k un nombre tel que $l < k < 1$, à partir d'un certain rang n_0, on a

$\left| \sqrt[n]{u_n} - l \right| < k - l$

d'où $\sqrt[n]{u_n} < k \Rightarrow u_n < k^n$,

comme $\sum k^n$ est une série géométrique de raison $k < 1$, donc elle coverge et d'après le critère de comparaison, la série $\sum u_n$ converge.

Si $l > 1$, à partir d'un certain rang, on a

$\sqrt[n]{u_n} > 1 \Rightarrow u_n > 1$,

d'où $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, donc la série $\sum u_n$ diverge.

Remarque 1.1

Le critère de Cauchy est souvent utilisé lorsque le terme général u_n contient des puissances $n^{ièmes}$.

Exemple 9

Etudier la nature des séries suivantes :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n \ln n}$

On a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n} = 0 < 1$, donc d'après le critère de Cauchy, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n \ln n}$ converge.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{n^k}$, $k \in \mathbb{R}_+$.

Comme $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{k^n}{n^k}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^k} = k$, alors d'après le critère de Cauchy, on a

Si $k < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{n^k}$ converge.

Si $k > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{n^k}$ diverge.

Mais pour $k = 1$, cas de doute, et on a $u_n = \frac{1}{n}$ c'est le terme général de la série harmonique, donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{n^k}$ diverge.

1.4.4 Règle de D′Alembert

Théorème 1.6

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Si la limite $l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ (finie ou non) existe, alors

1) La série $\sum u_n$ converge si $l < 1$.

2) La série $\sum u_n$ diverge si $l > 1$.

3) Si $l = 1$, on ne peut rien conclure.

Démonstration

On considère le nombre r tel que $l < r < 1$, il existe une valeur n_0 de n telle que $n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < r - l$,

il en résulte que $\frac{u_{n+1}}{u_n} < r \Rightarrow u_{n+1} < ru_n$

Or $u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} . \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} . \frac{u_{n-2}}{u_{n-3}} \ldots\ldots \frac{u_2}{u_1} . u_1 < r.r \ldots ru_1$.

d'où $u_n < r^{n-1}u_1$.

Comme $r < 1$, la série géométrique $\sum r^{n-1}u_1$ est convergente, d'après le critère de comparaison, la série $\sum u_n$ est convergente.

Si $l > 1$

Il résulte de $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{un} = l \ \ (l > 1)$, qu'à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{un} > 1$ ou $u_{n+1} > u_n$,

d'où $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Si $l = 1$, on ne peut pas conclure la nature, la série peut alors converger ou diverger et pour déterminer la nature on peut utiliser un autre critère.

Remarque 1.2

1) Le critère de D'Alembert est souvent utilisé lorsque le terme général u_n contient des factorielles.

2) Si le critère de D'Alembert donne un cas de doute, il en est de même pour le critère de Cauchy.

3) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ existe et de plus $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{un} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$, mais

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ existe $\nRightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{un}$ existe.

Exemple 10

Etudier la nature des séries suivantes :

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

On a

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{un} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2(n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{1}{4} < 1.$

Donc la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ converge

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$.

On a

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{un} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!}{3^n.3} \cdot \frac{3^n}{n!} = +\infty.$

Donc la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$ diverge.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

On a

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{un} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1$ (cas de doute).

On a $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,

et $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots\ldots\ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

d'où $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$, donc la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge.

1.4.5 Comparaison avec une intégrale

Théorème 1.7

Soit la série à termes positifs décroissants

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

c'est-à-dire

$$u_i \geqslant u_{i+1} \qquad \forall i \geqslant 1$$

et soit f une fonction continue décroissante telle que

$$f(1) = u_1, f(2) = u_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, f(n) = u_n$$

Alors

la série (1) et l'intégrale $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ sont de même nature.

Exemple 11

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

On pose $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$, on a f continue, positive et décroissante $\left(f'(x) = -\frac{1}{2(2x+1)^{\frac{3}{2}}} < 0\right)$,

d'où $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx = \lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_1^{t} \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx = \lim\limits_{t\to\infty} \left[\sqrt{2x+1}\right]_1^t = +\infty$.

Comme $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ diverge, alors d'après le critère de comparaison avec une intégrale, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ diverge.

Exemple 12

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi}{n}$.

On pose $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{\pi}{x}$, on a f continue, positive (pour $x \geqslant 2$) et décroissante.

d'où $\int\limits_2^{\infty} f(x)dx = \int\limits_2^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{\pi}{x}dx = \lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_2^{t} \frac{1}{x^2} \sin \frac{\pi}{x}dx = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{\pi} \left[\cos \frac{\pi}{x}\right]_2^t = \frac{1}{\pi}$.

Comme $\int\limits_2^{\infty} f(x)dx$ converge, alors d'après le critère de comparaison avec une intégrale, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi}{n}$ converge.

1.4.6 Critère de Riemann

Théorème 1.8

Soit $\sum u_n$ une série à terme positifs.

Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} u_n = l.$$

Alors

1) Si $\alpha > 1$ et l fini (éventuellement $l = 0$), la série $\sum u_n$ converge,

2) Si $\alpha \leqslant 1$ et $l \neq 0$ (éventuellement $l = +\infty$), la série $\sum u_n$ diverge.

Exemple 13

Soit la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

On a $u_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

Comme il existe $\alpha = 1$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right) = 1$, alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ diverge.

Exemple 14

Soit la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$.

On a $u_n = \frac{1}{e^{\sqrt{n}\ln 2}}$

Comme il existe $\alpha = 2$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \left(\frac{1}{e^{\sqrt{n}\ln 2}}\right) = 0$, alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$ converge.

1.4.7 Série de Riemann

Toute série de terme général $u_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$ tel que $n \in \mathbb{N}^*$ est appelée série de Riemann.

Si $\alpha > 1$: $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge.

Si $\alpha \leqslant 1$: $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ diverge.

En effet,

Pour $\alpha = 0, u_n = 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ alors la série $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ diverge.

Pour $\alpha < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty \neq 0$ alors la série $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ diverge.

Pour $\alpha > 0$, on utilise le critère de comparaison avec une intégrale.

On pose $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, f continue et décroissante.

On a

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx &= \frac{1}{1-\alpha}\left[x^{1-\alpha}\right]_1^{\infty}, \qquad \alpha \neq 1. \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left[x^{1-\alpha}\right]_1^{t}
\end{aligned}$$

Donc

1) SI $1-\alpha > 0$, alors $\alpha < 1$ et

$\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left[x^{1-\alpha}\right]_1^{t} = \infty$, d'où la série $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ diverge.

2) S $1-\alpha<0$, alors $\alpha>1$ et
$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left[x^{1-\alpha}\right]_1^t=-\frac{1}{1-\alpha}$ d'où la série $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ converge.
3) Si $1-\alpha=0$, alors $\alpha=1$ et
$\int\limits_1^\infty\frac{1}{x}dx=\lim\limits_{t\to\infty}\left[\ln x\right]_1^t=\infty$ d'où la série $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
Alors
Si $\alpha>1$: $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ converge.
Si $\alpha\leqslant 1$: $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Exemple 15

Soit la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$.
Au voisinage de $(+\infty)$, on a
$$\frac{1}{n^2+n}\sim\frac{1}{n^2}$$
Comme $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car $\alpha=2>1$, alors d'après le critère d'équivalence, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$ est convergente.

Exemple 16

Soit la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n+1}$
On a $\arctan x\underset{0}{\sim}x$ d'où $\arctan\frac{1}{n+1}\underset{\infty}{\sim}\frac{1}{n}$.
Puisque $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ série harmonique diverge, donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n+1}$ diverge.

1.4.8 Série de Bertrand

Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, on appelle série de Bertrand toute série de terme général $u_n=\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$
Si $\alpha>1$: la série $\sum\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ coverge $\forall\beta$.
Si $\alpha<1$: la série $\sum\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ diverge $\forall\beta$.
Si $\alpha=1$:$\begin{cases}\text{la série}\sum\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}\text{ converge pour }\beta>1\\ \text{la série}\sum\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}\text{ diverge pour }\beta\leqslant 1\end{cases}$
En effet, On pose
$$u_n=\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$$

1) Pour $\alpha > 1$,

Soit $\alpha^{'}$ où $1 < \alpha^{'} < \alpha$, on a

$$\alpha^{'} u_n = \frac{1}{n^{\alpha-\alpha^{'}} (\ln n)^{\beta}}$$

La limite de $\alpha^{'} u_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ pour tout β, d'où d'après le critère de Riemann $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{'} u_n = 0 \text{ et } \alpha^{'} > 1\right)$, la série $\sum \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ est convergente.

2) Pour $\alpha < 1$,

Soit $\alpha^{'}$ où $\alpha < \alpha^{'} < 1$, on a

$$\alpha^{'} u_n = \frac{n^{\alpha^{'}-\alpha}}{(\ln n)^{\beta}}$$

La limite de $\alpha^{'} u_n$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ pour tout β, d'où d'après le critère de Riemann $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{'} u_n = +\infty \text{ et } \alpha^{'} < 1\right)$, la série $\sum \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ est divergente.

3) Pour $\alpha = 1$ et $\beta > 0$, on a

$$u_n = \frac{1}{n (\ln n)^{\beta}}$$

la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x (\ln x)^{\beta}}$$

est positive, continue et décroissante, on compare la série numérique avec l'integrale $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\beta}}$,

on fait le changement de variable $\ln x = t$, on trouve

$$\int\limits_{\ln 2}^{\infty} \frac{dx}{t^{\beta}} = \left[\frac{1}{(1-\beta) t^{\beta-1}}\right]_{\ln 2}^{\infty}$$

On sait alors que,

1) Si $0 < \beta \leqslant 1$, la série est divergente.

2) Si $\beta > 1$, la série est convergente.

4) Pour $\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 0$, on a $\frac{1}{n} < \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$ et la série $\sum \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ est divergente.

En concluant

La série de Bertrand est convergente pour $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ avec $\beta > 1$ et elle est divergente pour $\alpha < 1$ ou $\alpha = 1$ avec $\beta \leqslant 1$.

Exemple 17

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$. On a $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2} = \frac{1}{n^2(\ln n)^{-1}}$. Cette série est une série de Bertrand avec $\alpha = 2 > 1$, donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge.

2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ est une série de Bertrand avec $\alpha = 0 < 1$, donc elle diverge.

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ est une série de Bertrand $\alpha = 1$ et $\beta = 2 > 1$, donc elle converge.

1.5 Séries à termes de signes quelconques

Une série est dite à termes de signes quelconques si l'on trouve parmi ses termes des termes positifs et négatifs.

1.5.1 Série alternée

Une série alternée est une série dans laquelle le terme général est alternativement positif et négatif, c'est-à-dire, elle est de forme $\sum (-1)^n u_n$,

où $u_0, u_1, u_2, \ldots.., u_n, \ldots$ sont positifs.

Pour étudier la convergence d'une série alternée, on utilise le théorème suivant :

Théorème 1.9 (de Leibniz)

Si dans une série alternée

$$\sum (-1)^n u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

1)$u_n > 0$,

2) (u_n) est décroissante

$$u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

La série (1) converge, sa somme s est positive et n'est pas supérieure au premier terme.

Démonstration

On pose $\sum v_n = \sum (-1)^n u_n$

Nous avons

$\sum v_n$ converge $\Leftrightarrow (s_n)$ converge.

On montre que les suites des sommes partielles (s_{2n}) et (s_{2n+1}) sont adjacentes.

On a

$$\begin{aligned} s_{2n+1} - s_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+1} v_k - \sum_{k=0}^{2n} v_k \\ &= \sum_{k=0}^{2n} v_k + v_{2n+1} - \sum_{k=0}^{2n} v_k \\ &= (-1)^{2n+1} u_{2n+1} \\ &= -u_{2n+1} \end{aligned}$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim\limits_{n\to\infty} (-u_{2n+1}) = 0$, d'après la condition 3.

D'autre part ; on a

$$s_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} v_k = \sum_{k=0}^{2n-1} v_k + v_{2n} + v_{2n+1} \Rightarrow s_{2n+1} = s_{2n-1} + v_{2n} + v_{2n+1}$$

$$\Rightarrow s_{2n+1} - s_{2n-1} = v_{2n} + v_{2n+1}$$

$$\Rightarrow s_{2n+1} - s_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n+1} > 0$$

car (u_n) est décroissante.

Donc (s_{2n+1}) est croissante.

Et on a

$$s_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} v_k = \sum_{k=0}^{2n-2} v_k + v_{2n-1} + v_{2n} \Rightarrow s_{2n} = s_{2n-2} + v_{2n-1} + v_{2n}$$

$$\Rightarrow s_{2n} - s_{2n-2} = v_{2n-1} + v_{2n}$$

$$\Rightarrow s_{2n} - s_{2n-2} = -u_{2n-1} + u_{2n} < 0$$

car (u_n) est décroissante.

Donc (s_{2n}) est décroissante.

Alors $\begin{cases} (s_{2n+1}) \text{ est croissante.} \\ (s_{2n}) \text{ est décroissante.} \\ \lim\limits_{n\to\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = 0 \end{cases}$ ce qui implique que (s_{2n+1}) et (s_{2n}) sont adjacentes, donc elles sont convergentes vers la même limite et

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

D'où (s_n) converge et
(s_n) converge $\Leftrightarrow \sum v_n = \sum (-1)^n u_n$ converge.

Exemple 18

Etudier la nature des séries suivantes :

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$.

On pose $u_n = \frac{1}{n^2}$. On a

$a)$ $u_n > 0$,

$b)$ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$,

$c)$ La suite $(u_n)_n$ est décroissante car $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n^2} = u_n$.

Alors, d'après le théorème de Leibniz, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$ converge.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan \frac{1}{n}$

On pose $u_n = \tan \frac{1}{n}$. On a

$a)$ $u_n > 0$,

$b)$ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \tan \frac{1}{n} = 0$,

$c)$ La suite $(u_n)_n$ est décroissante car $u_{n+1} = \tan \frac{1}{n+1} \leqslant \tan \frac{1}{n}$.

Alors, d'après le théorème de Leibniz, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan \frac{1}{n}$ converge.

1.6 Convergence absolue

Définition 1.3

On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente, si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 1.10

$\sum u_n$ est absolument convergente $\Rightarrow \sum u_n$ converge.

Démonstration

Soient s_n et p_n les sommes des n premiers termes des séries $\sum u_n$ et $\sum |u_n|$, respectivement.

Soit s'_n la somme de tous les termes positifs et soit s''_n la somme des valeurs absolues de tous les termes négatifs de la somme des n premiers termes de la série $\sum u_n$, donc $s_n = s'_n - s''_n$ et $p_n = s'_n + s''_n$.

Soit $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$.

Si $\sum |u_n|$ converge, les suites (s'_n) et (s''_n) sont croissantes et sont bornées par p, donc elles ont des limites

$\lim\limits_{n\to\infty} s'_n = s'$ et $\lim\limits_{n\to\infty} s''_n = s''$.

D'après la relation $s_n = s'_n - s''_n$, (s_n) admet une limite

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} (s'_n - s''_n) = s' - s''$.

D'où $\sum u_n$ converge.

Exemple 19

Etdier la convergence absolue des séries suivantes :

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n \ln n}$

On a $\cos n\pi = (-1)^n$.

D'où $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n \ln n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ et

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n \ln n} \right| = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$,

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ est une série de Bertrand avec $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, donc elle diverge, d'où $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ ne converge pas absolument, alors $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n \ln n}$ ne converge pas absolument.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin an}{n^2}$, $a \in \mathbb{R}$.

On a $|u_n| = \frac{|\sin an|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$.

Comme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$, alors d'après le critère de comparaison, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ est convergente, d'où $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin an}{n^2}$ est absolument convergente.

1.7 Semi-convergence

Définition 1.4
On dit que $\sum u_n$ est semi-convergente si $\sum u_n$ converge et $\sum |u_n|$ diverge.
Exemple 20
Soit la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.
La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ est une série alternée telle que $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.
Comme
1) $u_n > 0$,
2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$,
3) la suite $(u_n)_n$ est décroissante car :
$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ et on calcule f'
$f'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$,
Si $1 - x < 0$ alors $x > 1$ et
$f'(x) < 0$ car $2\sqrt{x}\,(x+1)^2 > 0$ pour tout $x \geqslant 1$.

D'où f est décroissante pour $x > 1$, et par conséquent, la suite $(u_n)_n$ est décroissante pour $n \geqslant 1$.

D'après le Théorème de Liebniz, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ est convergente.

Etudions maintenant la convergence absolue, on a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ et $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ est une série de Riemann divergente car $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ est divergente, d'où $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ ne converge pas absolument.

Donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ est semi-convergente.

1.8 Exercices

Exercice 1

Calculer les sommes des séries convergentes suivantes :

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$, 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$, 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{n!}$.

Exercice 2

Montrer que les séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$ sont conergentes et calculer leurs sommes.

Exercice 3

Etudier la nature des séries de termes généraux :

1)$u_n = \frac{n}{e^n}$. 2)$u_n = \frac{(n!)^\alpha}{n^n}$ $n \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}$.

3) $u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ $n \in \mathbb{N}^*$. 4) $u_n = \frac{2^n}{n(n+2)}$ $n \in \mathbb{N}^*$.

5)$u_n = \frac{2+\cos n}{n^p}$ $n \geqslant 1, p \in \mathbb{R}$. 6) $u_n = \frac{2^n}{n^2} \sin^{2n} \alpha$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4

Etudier les séries alternées suivantes :

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$, 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$, 4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-n)^n}{n^{3n}}$.

1.9 Solutions des exercices

Exercice 1

1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$

On décompose le terme général de la série, on trouve

$$u_n = -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n}$$

alors

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \dots\dots\dots + u_n \\ &= (-\frac{1}{2}+1) + (-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}) + \dots\dots + (-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

donc

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+3n+2} = 1$$

2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$

On a

$$\frac{n^2}{n!} = \frac{n}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

et on a $e = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 2e$$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$

On a

$$\frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n\,(n+1)}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} - \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

donc

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots\ldots\ldots + u_n \\ &= \sqrt{\frac{n}{n+1}} \end{aligned}$$

d'où

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n\,(n+1)}} = 1$$

4) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$, $\quad \left(s_n = \frac{1}{12} - \frac{1}{3(3n+4)},\quad s = \frac{1}{12}\right)$

5) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n-1}{n!}$, $\quad \left(\frac{n^2+n-1}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!} - \frac{1}{n!},\ s = 4\,(e-1)\right)$

Exercice 2

1) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-n}$

Nous avons $\frac{1}{n^2-n} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$,

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$, d'après le critère d'équivalence, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$ est convergente.

On va calculer la somme

On a $\frac{1}{n^2-n} = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{-1}{n} + \frac{1}{n-1}$ donc

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=2}^{n} u_k = (-\frac{1}{2}+1) + (-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}) + ... + (-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}) \\ &= 1 + \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

d'où

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-n} = 1$$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$

On a $\arctan x \underset{0}{\sim} x$ d'où $\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$ est convergente.

On va calculer la somme

Nous avons

$$\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{1}{1+n(n+1)} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n+1}\right)}.$$

Sachant que $\arctan x - \arctan y = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$ (où $xy \neq -1$), on trouve

$$\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= \left(\arctan 1 - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) + ... \\ &\qquad .... + \left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) \\ &= \arctan 1 - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

donc

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 3

1) $u_n = \frac{n}{e^n}$.

On a

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{e^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{e} < 1 \quad / \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$

donc, d'après le critére de Cauchy, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ converge.

2) $u_n = \frac{(n!)^\alpha}{n^n} \quad n \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}$.

On a

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{un} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^\alpha}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n!)^\alpha} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)^{\alpha-1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

Pour $\alpha = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{un} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)^{\alpha-1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$.

donc, d'après le critére de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^\alpha}{n^n}$ converge.

Pour $\alpha > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{un} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)^{\alpha-1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = +\infty$.

donc, d'après le critére de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^\alpha}{n^n}$ diverge.

Pour $\alpha < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{un} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)^{\alpha-1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 0 < 1$.

donc, d'après le critére de d'Alembert, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^\alpha}{n^n}$ converge.

$$\text{Alors} \begin{cases} \alpha \leqslant 1 : & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^\alpha}{n^n} \; \textit{converge.} \\ \alpha > 1 : & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^\alpha}{n^n} \; \textit{diverge.} \end{cases}$$

3) $u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \qquad n \in \mathbb{N}^*$.

On a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ est une série de Bertrand de la forme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}} (\ln n)^{-1}}$, elle diverge car $\alpha = \frac{1}{2}$.

4) $u_n = \frac{2^n}{n(n+2)} \qquad n \in \mathbb{N}^*$.

Nous avons

$$\frac{2^n}{n\,(n+2)} \underset{\infty}{\sim} \frac{2^n}{n^2}$$

D'après le critére de Cauchy, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ diverge et donc d'après le critére d'équivalence $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+2)}$ diverge .

5) $u_n = \frac{2+\cos n}{n^p} \qquad n \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{R}$.

On a $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$ d'où $\frac{-1}{n^p} \leqslant \frac{2+\cos n}{n^p} \leqslant \frac{1}{n^p}$

Pour $p > 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n^p}$ converge d'après le critère de comparaison $\left(\text{car } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge} \right)$.

Pour $p \leqslant 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n^p}$ diverge d'après le critère de comparaison $\left(\text{car } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ diverge} \right)$.

6) $u_n = \frac{2^n}{n^2} \sin^{2n} \alpha$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

On utilise le critére de Cauchy

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2^n}{n^2} \sin^{2n} \alpha \right)^{\frac{1}{n}} = 2\sin^2 \alpha$

Alors

Si $2\sin^2 \alpha < 1 \Rightarrow \alpha < \frac{\pi}{4}$ $\left(0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \sin^{2n} \alpha$ est convergente.

Si $2\sin^2 \alpha > 1 \Rightarrow \alpha > \frac{\pi}{4}$ $\left(\frac{\pi}{4} < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \sin^{2n} \alpha$ est divergente.

Si $2\sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

Cas de doute, et dans ce cas $u_n = \frac{1}{n^2}$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.

$$\text{Alors} \begin{cases} 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4} : & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \sin^{2n} \alpha \textit{ converge.} \\ \frac{\pi}{4} < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} : & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \sin^{2n} \alpha \textit{ diverge.} \end{cases}$$

Exercice 4

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est une série alternée de forme $\sum (-1)^n u_n$.

On a

a) $u_n > 0$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$

c) La suite $(u_n)_n$ est décroissante car $u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = u_n$.

Alors, d'après le théorème de Leibniz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge.

Et on a $\left|(-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right| = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ est une série harmonique divergente, d'où $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est semi-convergente.

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$ est une série semi-convergente (converge d'après le théorème de Leibniz et elle n'est pas convergente absolument).

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

On a $\left|(-1)^n\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|=\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)\underset{\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann conergente, donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente, d'où elle est convergente.

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-n)^n}{n^{3n}}$,

Nous avons $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-n)^n}{n^{3n}}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n^2}\right)^n$ et $\left|(-1)^n\left(\frac{1}{n^2}\right)^n\right|=\left(\frac{1}{n^2}\right)^n$

On a

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n^2}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}=0<1,$

donc, d'après le critére de Cauchy, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^n$ converge.

Alors, la série $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-n)^n}{n^{3n}}$ est absolument convergente d'où elle est convergente.

Chapitre 2

Suites et séries de fonctions

2.1 Suites des fonctions

Définition 2.1

Soient $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ et $I \neq \emptyset$ tel que $I \subset K$.

La suite de fonctions $(f_n)_n$ de I dans K est une application de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des fonctions de I dans K qui pour tout entier naturel n, lui associe la fonction f_n.

Exemple 21

Soit $f_n : \underset{x \mapsto x^n}{[0,1] \to \mathbb{R}}$

$f_n(x) = x^n, f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2.$

2.1.1 Convergence simple

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans K. Pour tout $x \in I$ fixé, la suite $(f_n(x))$ est une suite numérique.

Définition 2.2

La suite de fonctions (f_n) est simplement convergente vers la fonction f si pour tout x de I, la suite numérique $(f_n(x))$ est convergente vers $f(x)$ et on note $f_n \to f$.

Aussi, la convergence simple $f_n \to f$ est définie par la relation

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \Longleftrightarrow \forall x \in I, \forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : [n \geqslant N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]\,.$

On note que l'entier N dépend de ε et aussi de x.

Exemple 22

1) Soit la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$ où $x \in [0, 1]$.

Pour $x = 0$: $f_n(0) = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Pour $x > 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx}{nx+1} = 1$.

Donc $f_n(x)$ converge simplement vers $f(x)$ telle que $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } x \in]0, 1] \end{cases}$

.

Exemple 23

Soit la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{x}{x+n}, x \in [0, 1]$.

On a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{x+n} = 0$, donc $f_n(x)$ converge simplement vers $f(x) = 0$ sur $x \in [0, 1]$.

2.1.2 Convergence uniforme

Définition 2.3

Soit la suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$ et f_n converge simplement vers f.

La suite $f_n(x)$ est dite uniformément convergente sur I vers la fonction $f(x)$ si

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow (\forall x \in I, \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$.

L'entier N_ε est indépendant de x, ou encore, si $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ tel que $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$.

Exemple 24

1) La suite $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ converge simplement vers $f(x) = 0$ où $x \in [0, 1]$.

Pour la convergence uniforme,

on calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty$.

On a $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|\frac{x}{x+n}\right|$ et $\left|\frac{x}{x+n}\right| = \frac{x}{x+n} = f_n(x)$.

Nous avons $f_n'(x) = \frac{n}{(x+n)^2}$, donc f_n est croissante et $\sup\limits_{x\in[0,1]} \left|\frac{x}{x+n}\right| = \frac{1}{n+1}$.

Par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|\frac{x}{x+n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

D'où la suite $f_n(x)$ converge uniformément vers $f(x) = 0$.

Exemple 25

Soit la suite $f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx^2}}, x \in [0, 1]$.

Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0 = f(0)$.

Pour $x \in]0, 1]$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx}{e^{nx^2}} = 0$.

Donc $f_n(x)$ converge simplement vers $f(x) = 0$.

Pour la convergence uniforme, on calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty$.

On a $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|\frac{nx}{e^{nx^2}}\right|$.

Comme $x \in [0,1]$ et la fonction exponentielle positive, on a $\left|\frac{nx}{e^{nx^2}}\right| = \frac{nx}{e^{nx^2}} = f_n(x)$ et

$f_n'(x) = \frac{-n^2x+n}{e^{nx}}$.

Nous avons $f_n'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{n}$ et

	$-\infty$		$1/n$		$+\infty$
$fn'(x)$		+		-	
$fn(x)$	0	↗	$1/e$	↘	n/e^n

d'où $\sup\limits_{x\in[0,1]} \left|\frac{nx}{e^{nx}}\right| = \frac{1}{e}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty \neq 0$.

Donc $(f_n(x))$ ne converge pas uniformément vers $f(x) = 0$ sur $[0,1]$.

Critère de la convergence uniforme de Cauchy

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions sur $I \subset \mathbb{R}$. La suite $(f_n)_n$ converge uniformément (vers une fonction f) sur I, si est seulement si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}\ : p, q \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow (\forall x \in I,\ \ |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon) \tag{1}$$

En effet, supposons que $(f_n)_n$ est uniformément convergente vers f,

$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$ tel que

$$n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad\qquad \forall x \in I.$$

Alors pour $p\ et\ q \geqslant N_\varepsilon$:

$$|f_p(x) - f_q(x)| = |f_p(x) - f(x)| + |f_q(x) - f(x)| < \varepsilon$$

D'où la condition nécessaire.

Pour la condition suffissante, supposons que la suite $(f_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme (1). La suite $\{f_n(x)\}_n$ est une suite de Cauchy, pour tout $x \in I$, donc elle converge vers $f(x)$.

Alors lorsque $q \to +\infty$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N} \ : p \geqslant N_\varepsilon \ \Rightarrow (\forall x \in I \ , \ \ |f_p(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

ce qui signifie que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

Proposition 2.1

La convergence uniforme implique la convergence simple.

Remarque 2.1

La réciproque est fausse.

Exemple 26

Soit la suite de fonctions $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$.

On a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) = 0$, pour tous $x \in \mathbb{R}$.

d'où (f_n) converge simplement vers $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Pour la convergence uniforme,

On calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$.

On a $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| = 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty \neq 0$.

D'où la convergence n'est pas uniforme.

Théorème 2.1 (continuité)

Soit (f_n) une suite convergeant uniformément vers f.

Si toutes les fonctions f_n sont continues en $x_0 \in I$, alors f est continue en x_0.

Corollaire 2.1

Si les fonctions $f_n(x)$ sont continues sur I et si la suite des fonctions $(f_n(x))_n$ converge uniformément vers $f(x)$ sur I, alors $f(x)$ continue sur I.

Le théorème de Dini suivant permet d'établir une condition nécessaire de convergence uniforme.

Théorème 2.2 (Dini)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions réelles continues convergeant simplement vers une fonction continue f sur $[a, b]$. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, c'est-à-dire si

$\forall x \in [a, b] \ \forall n : f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.

Alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f(x)$.

Théorème 2.3 (intégration)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrables sur $[a, b]$ convergeant uniformément vers f, alors

1) f est intégrable sur $[a,b]$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \int\limits_a^b f(x)dx.$

Execice 2.1

Etudier la convergence de la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$.

1) La convergence est-elle simple ?

2) la convergence est-elle uniforme ?

3) Déduire la nature de la suite numérique $(u_n)_n$ telle que $u_n = \int\limits_0^1 \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}dx.$

Solution

1) On a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x} = \frac{1}{e^x} \quad \forall x \in [0,1].$

Donc f_n converge simplement vers $f(x) = \frac{1}{e^x}$.

2) Convergence uniforme

On a $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{ne^{-x}+x^2}{n+x} - \frac{1}{e^x}\right| = \left|\frac{x}{e^x}\left(\frac{xe^x-1}{n+x}\right)\right| = \left|\frac{x}{e^x}\right| . \left|\frac{xe^x-1}{n+x}\right| \leqslant 1. \left|\frac{xe^x}{n}\right| \leqslant \frac{e}{n}$,

ce qui implique que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{e}{n}$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{e}{n} = 0,$$

on déduit que la suite f_n converge uniformément vers $f(x) = \frac{1}{e^x}$.

3) la nature de la suite (u_n)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}dx = \int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty}\frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}dx \\
&= \int\limits_0^1 \frac{1}{e^x}dx \text{ car } f \text{ converge uniformément vers } \frac{1}{e^x} \text{ sur } [0,1]. \\
&= \left[\frac{1}{e^x}\right]_0^1 = \frac{1}{e} - 1.
\end{aligned}$$

d'où la convergence de (u_n).

Théorème 2.4 (Dérivation)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continûment dérivables sur $[a,b]$ vérifiant les propriétés suivantes :

1) La suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers g sur $[a,b]$.

2) Il existe un point $x_0 \in [a,b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ soit convergente.

Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction continûment dérivable f et l'on a $f' = g$, autrement dit $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n)'$.

2.2 Les séries de fonctions

On appelle série de fonctions toute série dans laquelle le terme général est une fonction d'une variable x.

On note

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots\ldots + f_n(x) + \ldots.$$

$f_n(x)$ est le terme général.

Définition 2.4

La suite de fonctions $(s_n)_n$ définie par $s_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$

est appelée la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

Définition 2.5

La série $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ est appelée reste d'ordre n de la série $\sum f_n(x)$.

2.2.1 Convergence simple

Soit $\sum f_n(x)$ une série de fonctions et $s_n(x)$ la suite des sommes partielles telle que : $f_n : I \to \mathbb{R}$.

Définition 2.6

On dit que $\sum f_n(x)$ est convergente sur I si la série $\sum f_n(x)$ est convergente en tout point $x \in I$ et on dit, dans ce cas, que $\sum f_n(x)$ est simplement convergente sur I .

Définition 2.7

On dit que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ qui converge simplement sur I si et seulement si la suite de ses sommes partielles $s_n(x)$ converge simplement sur I.

On appelle la fonction s définie par $s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$, la somme d'une série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, et on note $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

Remarque 2.2

Pour étudier la convergence simple d'une série de fonctions, on utilise les mêmes critères concernant les séries numériques.

Exemple 27

1) Soit la série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$.

On a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n(x)} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x^n}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{x}{2}$

d'après le critère de Cauchy, nous avons

1) Si $\frac{x}{2} < 1 \Rightarrow x < 2$: la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ converge simplement.

2) Si $\frac{x}{2} > 1 \Rightarrow x > 2$: la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ diverge.

3) Si $\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 2$: cas de doute, et on a $f_n(2) = 1$.

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(2) = 1 \neq 0$, donc $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ div.

$$\text{Alors} \begin{cases} \text{Si } x < 2 : \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \text{ converge simplement.} \\ \text{Si } x \geqslant 2 : \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \text{ diverge.} \end{cases}$$

Exemple 28

Soit la série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$

On a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = x^2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{1+x^2} < 1$, alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ converge simplement.

Exemple 29

Soit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ une série alternée telle que $u_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$.

On a

(a) $u_n(x) > 0$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x^2+n} = 0$.

(c) On a $u_{n+1}(x) - u_n(x) = \frac{1}{x^2+n+1} - \frac{1}{x^2+n} = \frac{-1}{(x^2+n+1)(x^2+n)} < 0$, donc la suite $(u_n(x))_n$ est décroissante.

d'où, d'après le Théorème de Leibniz, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ converge simplement.

2.2.2 Convergence absolue

Définition 2.8

On dit que $\sum_n f_n(x)$ est absolument convergente sur I si la série $\sum_n |f_n(x)|$ est convergente sur I.

Proposition 2.2

Toute série de fonctions absolument convergente est convergente et de plus $\left|\sum_n f_n(x)\right| \leqslant \sum_n |f_n(x)|$.

Remarque 2.3

La réciproque est fausse.

Exemple 30

Etudier la convergence absolue de la série suivante :

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

On a

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}.\frac{n}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{xn}{n+1}\right| = |x|$.

D'après le critère de D'Alembert :

(1) Si $|x| < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ est absolument convergente.

(2) Si $|x| > 1$,la série $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x^n}{n}\right|$ diverge, d'où la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ n'est pas absolument convergente.

(3) Si $|x| = 1$,cas de doute et $|f_n(x)| = \frac{1}{n}$.

$\sum \frac{1}{n}$ est une série harmonique divergente donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ n'est pas absolument convergente .

2.2.3 Convergence uniforme

Soit $\sum_n f_n(x)$ une série de fonctions et f_n définie de I dans K.

Définitions 2.9

On dit que la série de fonctions $\sum_n f_n$ est uniformément convergente sur I si la suite des sommes partielles (s_n) est uniformément convergente sur I.

Définition 2.10

La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément sur I si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ , \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow (\forall x \in I,\ \ |R_n(x)| < \varepsilon)\ .$

On note que $R_n(x) = s_n(x) - s(x)$.

Théorème 2.5 (Critère de Cauchy pour la convergence uniforme)

La série de fonctions de terme general f_n converge uniformément sur I si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy suivant :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon (x) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^* : \left[n \geqslant N_\varepsilon (x) \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k (x) \right| < \varepsilon,\ \forall x \in I \right].$$

Démonstration

Elle est évidente si l'on applique le critère de la convergence uniforme de Cauchy pour les suites de fonctions.

2.2.4 Convergence normale

Définition 2.11

Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions f_n définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on dit que la série $\sum_n f_n$ est normalement convergente sur I si la série numérique $\sum_n \|f_n\|$ converge, où $\|f_n\| = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$.

Théorème 2.6

Si la série $\sum_n f_n$ est normalement convergente sur I, alors elle est uniformément convergente sur I.

Démonstration

On a $\forall n\ \ \forall p \geqslant 1 : \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|$, puisque $\sum\limits_{n} \|f_n\|$ converge, d'aprés le critère de Cauchy, la série $\sum\limits_{n} f_n(x)$ converge uniformément.

Corollaire 2.2

Soit $\sum\limits_{n} f_n(x)$ une série de fonction où f_n est définie de I dans $\mathbb{R}$, on dit que $\sum\limits_{n} f_n(x)$ est normalement convergente, s'il existe une série numérique à termes positifs convergente $\sum\limits_{n} v_n$, telle que $\forall n \quad \forall x \in I : |f_n(x)| \leqslant v_n$.

Remarque 2.4

La convergence normale est plus forte que toutes les convergences.

Exemple 31

1) Soit la série de fonctions $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2n^2}$.

(a) Pour $x = 0$: $f_n(0) = 0$, d'où $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(0)$ converge.

Pour $x \neq 0$: $\frac{x^2}{1+x^2n^2} \sim \frac{1}{n^2}$.

$\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc d'après le critère d'équivalence, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2n^2}$ est convergente.

D'où $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2n^2}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour la convergence normale

On a $|f_n(x)| = \left|\frac{x^2}{1+x^2n^2}\right| = \frac{x^2}{1+x^2n^2} = f_n(x)$ et $f_n'(x) = \frac{2x}{(1+x^2n^2)^2}$.

$f_n'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

	$-\infty$		0		$+\infty$
$fn'(x)$		$-$	0	$+$	
$fn(x)$	$1/n^2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1/n^2$

Donc $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{n^2}$,

et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$, alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Exemple 32

Soit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ une série alternée convergente.

Converge normale. On a $|f_n(x)| = \left|\frac{(-1)^n}{n+x}\right| = \frac{1}{n+x} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

$\sum \frac{1}{n}$ est une série harmonique divergente, donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ n'est pas absolument convergente, alors elle n'est pas normalement convergente.

Exercice 2.2

1) Soit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-nx}, x \in \mathbb{R}^+$.

(a) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.

Solution

(a) Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$, d'où $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(0)$ converge.

Pour $x > 0$, On a

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{xe^{-(n+1)x}}{n+1} \cdot \frac{n}{xe^{-nx}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{ne^{-x}}{n+1} = \frac{1}{e^x} < 1$, donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-nx}$ converge simplement pour $x > 0$.

Alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-nx}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Convergence normale sur $\mathbb{R}^+$

On calcule $\|f_n\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)|$.

On a $|f_n(x)| = \left|\frac{x}{n} e^{-nx}\right| = \frac{x}{n} e^{-nx} = f_n(x)$, car $x \in \mathbb{R}^+$, et $f_n'(x) = \frac{1-nx}{ne^{nx}}$.

Nous avons $f_n'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{n}$,

	-∞		1/n		+∞
fn'(x)		+	0	-	
fn(x)	0	$\nearrow$	$1/n^2 e$	$\searrow$	0

Donc $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \frac{1}{n^2 e}$, et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$, alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-nx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.

2.2.5 Propriété des sommes des séries de fonctions

Continuité

Théorème 2.7

Soit $\sum\limits_{n} f_n$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{C}$ une série de fonctions uniformément convergente sur $[a, b]$. Si toutes les fonctions f_n sont continues en $x_0 \in [a, b]$, la somme s de la série est continue en x_0.

Corollaire 2.3

Si toutes les fonctions f_n sont continues sur $[a, b]$ et si la série $\sum\limits_{n} f_n(x)$ est uniformément convergente sur $[a, b]$, alors la somme s est continue sur $[a, b]$.

Exemple 33

Soit la série de fonctions $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}$.

On a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}$ est une série alternée convergente (d'après le théorème de Leibniz), on cherche la convergence uniforme.

On a

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= |s_n(x) - s(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| \\ &\leqslant \frac{e^{-x\sqrt{n+1}}}{n+1} = g_n(x) \end{aligned}$$

et $g_n'(x) = -\frac{e^{-x\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}}$, donc $g_n(x)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, d'où $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^+} |R_n(x)| = \frac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^+} |R_n(x)| = 0$.

Alors, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Comme f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ alors $s(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Remarque 2.5

Dans les conditions du théorème précédent, on a :

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n}^{\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \sum_{n}^{\infty} f_n(x_0).$$

Généralisation

Si la série $\sum\limits_{n} f_n(x)$ est uniformément convergente sur $[a,b]$ et si la limite finie $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$ $(x_0 \in [a,b])$ existe quel que soit n, alors la série $\sum\limits_{n} a_n$ est convergente et l'on a $\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{n}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n}^{\infty}\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \sum\limits_{n}^{\infty} a_n.$

Intégration

Théorème 2.8

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrable sur $[a,b]$, si la série $\sum\limits_{n} f_n(x)$ est uniformément convergente sur $[a,b]$ vers une fonction f. Alors la fonction f est intégrable sur $[a,b]$ et on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

En outre, la série $\sum\limits_{n}^{\infty}\left(\int\limits_a^x f_n(t)dt\right)$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers $\int\limits_a^x f(t)dt$.

Exemple 34

1) Soit $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ \ x \in \left]-1,1\right[.$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ est absolument convergente sur $\left]-1,1\right[$, donc elle est simplement convergente sur $\left]-1,1\right[$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ converge uniformément sur $[a,b] \subset \left]-1,1\right[$

Donc

$$\int_0^x \tfrac{1}{1+t}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^n dt \qquad \Rightarrow \ln(1+t)]_0^x = \left.\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \tfrac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \tfrac{x^{n+1}}{n+1}$$

2) On a $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$
donc

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt \quad \Rightarrow \arctan t]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Bigg]_0^x$$

$$\Rightarrow \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Dérivation

Théorème 2.9

Soit $\sum_n^{\infty} f_n(x),\ f_n : [a, b] \to \mathbb{C}$ une série de fonctions dont les termes f_n sont continûment dérivables sur $[a, b]$, c'est-à-dire $f_n \in C^1([a, b])$. Si

1) $\sum_n^{\infty} f_n(x)$ est convergente au moins en un point $x_0 \in [a, b]$.

2) $\sum_n^{\infty} f_n'(x)$ est uniformément convergente sur $[a, b]$.

Alors, la série $\sum_n^{\infty} f_n(x)$ est uniformément convergente sur $[a, b]$, et sa somme $s(x) = \sum_n^{\infty} f_n(x)$ est continûment dérivable sur $[a, b]$, et l'on a

$s'(x) = (\sum_n^{\infty} f_n(x))' = \sum_n^{\infty} f_n'(x)$.

Généralisation

Soit $\sum_n^{\infty} f_n(x),\ f_n : [a, b] \to \mathbb{C}$, une série de fonctions dont les termes sont dérivables sur $[a, b]$.

Si la série $\sum_n^{\infty} f_n(x)$ converge au moins en un point $x_0 \in [a, b]$ et si la série $\sum_n^{\infty} f_n'(x)$ est uniformément convergente sur $[a, b]$, alors

- La série $\sum_n^{\infty} f_n(x)$ est uniformément convergente sur $[a, b]$.

- Sa somme s est dérivable sur $[a, b]$ et $s'(x) = (\sum_n^{\infty} f_n(x))' = \sum_n^{\infty} f_n'(x)$.

Exercice 2.3

Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ lorsque la série est convergente.

Montrer que la fonction f est définie continue et dérivable dans l'intervalle $]1, +\infty[$.

Solution

1) On a $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ est une série de Riemann convergente si $x > 1$, donc f est définie sur $]1, +\infty[$.

2) On pose $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

Pour tout $a > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$ car :

$|f_n(x)| = \left|\frac{1}{n^x}\right| \leqslant \frac{1}{n^a}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ est une série de Riemann convergente $a > 1$, donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ est uniformément convergente sur $[a, +\infty[$ et comme $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ est continue, donc f est continue sur $[a, +\infty[$.

3) On a, f_n est dérivable : $f_n' = (\frac{1}{n^x})' = (\frac{1}{e^{x \ln n}})' = -\frac{\ln n}{e^{x \ln n}} = -\frac{\ln n}{n^x}$

et on a pour tout $a > 1$, $\frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^a}$, d'où $\left|\frac{\ln n}{n^x}\right| \leqslant \frac{\ln n}{n^a} = \frac{1}{n^a (\ln n)^{-1}}$

$\sum \frac{1}{n^a (\ln n)^{-1}}$ est une série de Bertrand convergente $a > 1$, donc f_n' est uniformément convergente sur $[a, +\infty[$.

Alors f est dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$ et $f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$.

2.3 Exercices

Exercice 1

Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions

1) $f_n(x) = e^{\frac{n+1}{n} x}$ $\quad x \in \mathbb{R}$, $\quad$ 2) $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ $\quad x \in \mathbb{R}$.

Exercice2

Etudier la convergence simple, uniforme et normale des séries de fonctions suivantes

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$, $\quad$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$, $\quad$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$,

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$, $\quad$ 5) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x) x^n$.

Exercice 3

1) Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n^2}{e^{nx}}\right)$

2) Montrer qu'elle converge uniformément sur $[a,+\infty[$, $a>0$.

3) Calculer sa somme $s(x)$.

Exercice 4

Soit la fonction $f(x):\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$.

1) Trouver le domaine de définition de f puis étudier la continuité et la dérivabilité de f.

2.4 Solutions des exercices

Exercice 1

Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions

1) On a $f_n(x)=e^{\frac{n+1}{n}x}$ $\quad x\in\mathbb{R}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{n+1}{n}x}=e^x$.

Donc $f_n(x)$ converge simplement vers $f(x)=e^x$.

Pour la convergence uniforme

On calcule $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|$.

On a $|f_n(x)-f(x)|=\left|e^{\frac{n+1}{n}x}-e^x\right|=e^x\left|e^{\frac{1}{n}x}-1\right|=g_n(x)$.

$$g_n(x)=\begin{cases} e^x\left(e^{\frac{1}{n}x}-1\right) & x\geqslant 0\\ e^x\left(1-e^{\frac{1}{n}x}\right) & x\leqslant 0\end{cases}$$

$$g_n'(x)=\begin{cases} e^x\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{1}{n}x}-1\right) & x>0\\ e^x\left(1-\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{1}{n}x}\right) & x<0\end{cases}$$

$g_n'(x)=0 \Rightarrow x=n\ln\frac{n}{n+1}$ et

	-∞		n ln(n/n+1)		0		+∞
gn'(x)		+		-		+	
gn(x)	-∞	↗	(n/n+1)^n(1/n+1)	↘	0	↗	+∞

donc $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|e^{\frac{n+1}{n}x}-e^x\right|=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{1}{n+1}\right)$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_\infty=0$.

D'où la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

2) $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} \qquad x \in \mathbb{R},$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n = 0.$

Donc $f_n(x)$ converge simplement vers $f(x) = 0$.

Pour la convergence uniforme

On calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{\substack{x\in[0,1]\\ x\in\mathbb{R}}} |f_n(x) - f(x)|$.

On a $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{(1+x^2)^n}\right| = \frac{1}{(1+x^2)^n} = f_n(x)$ et

$f_n'(x) = \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}}$

Nous avons $f_n'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

	$-\infty$		0		$+\infty$
$fn'(x)$		+	0	-	
$fn(x)$	0	↗	1	↘	0

d'où $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{(1+x^2)^n}\right| = 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty \neq 0$.

Donc la convergence n' est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exercice2

Etudier la convergence simple, uniforme et normale, sur $[0,1]$, des séries de fonctions suivantes :

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$

On calcule $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$.

On a $|f_n(x)| = \left|\frac{n!x^n}{n^n}\right| = \frac{n!x^n}{n^n} = f_n(x)$, car $x \in [0,1]$ et

$f_n'(x) = \frac{n!nx^{n-1}}{n^n} = \frac{n!x^{n-1}}{n^{n-1}}$.

$f_n'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

	0		1
$fn'(x)$		+	
$fn(x)$	0	↗	$n!/n^n$

donc $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \frac{n!}{n^n}$,

et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ est une série convergente (d'après le critère de d'Alembert), alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$ converge normalement sur $[0,1]$, d'où il y a toutes les convergences.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$

Pour $x=0$, $f_n(0)=1$

donc $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ diverge pour $x=0$, alors elle diverge sur $[0,1]$, d'où il n'y a pas de convergence uniforme et de convergence normale.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n(1+x)}\right)$ est une série alternée tel que $u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n(1+x)}\right)$, on a

(a) $u_n(x) > 0$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n(1+x)}\right) = 0$.

(c) On a $u_{n+1}(x) - u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{(n+1)(1+x)}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n(1+x)}\right)$

$$= \ln\left(1-\frac{x}{(n+1)(n(1+x)+x)}\right) < 0,$$

donc la suite $(u_n(x))_n$ est décroissante.

d'où, d'après le théorème de Leibniz, la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n(1+x)}\right)$ converge simplement.

On étudie la convergence uniforme.

On a

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= |s_n(x) - s(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| \\ &\leqslant \ln\left(1+\frac{x}{(n+1)(1+x)}\right) = g_n(x) \end{aligned}$$

$g_n'(x) = \frac{1}{(1+x)[(n+1)(1+x)+x]}$, donc $g_n(x)$ est croissante sur $[0,1]$, d'où $\sup_{x\in[0,1]} |R_n(x)| = \ln\left(1+\frac{1}{2(n+1)}\right)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |R_n(x)| = 0$.

Alors, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n(1+x)}\right)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Comme $f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ alors $s(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Pour la convergence normale

On a $|f_n(x)| = \left|(-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n(1+x)}\right)\right| = \ln\left(1+\frac{x}{n(1+x)}\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{x}{n(1+x)}$.

$\sum \frac{1}{n}$ est une série harmonique divergente, donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n(1+x)}\right)$ n'est pas absolument convergente, alors elle n'est pas normalement convergente.

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$

On a $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$ est une série géomètrique convergente$\left(\frac{x}{3} < 1\right)$

On calcule $\|f_n\|_{\infty} = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$.

On a $|f_n(x)| = \left|\frac{x^n}{3^n}\right| = \frac{x^n}{3^n} = f_n(x)$, car $x \in [0,1]$ et

$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{3^n}$ et

Nous avons $f_n'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$,

	0		1
$fn'(x)$		+	
$fn(x)$	0	$\nearrow$	$1/3^n$

donc $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \frac{1}{3^n}$,

et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ est une série géomètrique convergente, alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ converge normalement sur $[0,1]$, d'où elle converge uniformément.

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x)\, x^n$

La série converge simplement puisqu'elle converge absolument (série géométrique).

La série converge uniformément car :

$$|R_n(x)| = |s_n(x) - s(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = (1-x)\, x^{n+1}$$

et $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |R_n(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+2}\right) \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = 0$

La série ne converge pas normalement : $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{ne}$ ($\sum \frac{1}{n}$ série harmonique diverge).

Exercice 3

1) Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{e^{nx}}$

Soit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{e^{nx}}$

(a) Pour $x = 0$, $f_n(0) = n^2$, d'où $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(0)$ diverge.

(b) Pour $x > 0$, On utilise le critère de D'Alembert

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{e^{(n+1)x}} \cdot \frac{e^{nx}}{n^2} = \frac{1}{e^x} < 1$, donc $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{e^{nx}}$ converge simplement.

Alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{e^{nx}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Montrer qu'elle converge uniformément sur $[a, +\infty[$, $a > 0$.

On a $|f_n(x)| = \left|\frac{n^2}{e^{nx}}\right| = n^2 e^{-nx}$

Pour $x \in [a, +\infty[$ et $a > 0$, nous avons

$$n^2 e^{-nx} \leqslant n^2 e^{-na}$$

et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-na}$ est une série numérique convergente (d'après le critère de Cauchy ou de d'Alembert), donc $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{e^{nx}}$ conerge normalement sur $[a, +\infty[$ d'où la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.

3) Calculer sa somme $s(x)$.

Comme $f_n(x)$ est continue et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$, alors $s(x)$ est continue et

$$s(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}\right] = \frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{1}{1-e^{-x}}\right] = \frac{e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)}{\left(1-e^{-x}\right)^2}$$

Exercice 4

Soit la fonction $f(x) : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1) Le domaine de définition

On a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ est une série alternée convergente pour $x > 0$ car

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+x} = 0$
b) la suite $(f_n)_n$ est décroissante
$f_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1+x} \leqslant \frac{1}{n+x} = f_n(x)$
Donc f est définie sur $]0, +\infty[$.

2) La continuité

Nous étudions la convergence uniforme pour tout $a > 0$,

On a

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= |s_n(x) - s(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| \\ &\leqslant \frac{1}{n+1+x} \end{aligned}$$

donc $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+^*} |R_n(x)| = \frac{1}{n+1+a}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+^*} |R_n(x)| = 0$.

Alors, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Les f_n sont continues et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$, donc f est continue sur $[a, +\infty[$.

3) La dérivabilité

On a f_n est dérivable : $f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$
et on a pour tout $a > 0$, $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc f_n' conerge normalement sur $[a, +\infty[$, d'où f_n' est uniformément convergente sur $[a, +\infty[$.

Alors f est dérivable sur $[a, +\infty[$ et $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$.

Chapitre 3

Séries entières

Définition 3.1

On appelle série entière toute série de fonctions de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + ... + a_n (x-x_0)^n + ... (1),$$

où $x \in \mathbb{R}$, x_0 est un nombre réel fixé et a_n sont des coefficients réels.

La série (1) peut être ramenée à la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ par le changement de variable $y = x - x_0$ et puis changer y en x.

Exemple 35

1) $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + ... + n!x^n + ...$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x-3)^n = (x-3) + 2^2 (x-3)^2 + 3^2 (x-3)^3 + ... + n^2 (x-3)^n + ...$

Lemme 3.1 (d'Abel)

Si une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en un point $x_1 \neq 0$, alors elle est absolument convergente en tout point x tel que $|x| < |x_1|$, c'est –à-dire sur $]-|x_1|, |x_1|[$.

Preuve

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ conv $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0 \Rightarrow \exists M > 0 : |a_n x_1^n| \leqslant M.$

On a alors pour tout $x \in]-|x_1|, |x_1|[$:

$|a_n x^n| = \left|a_n x_1^n . \frac{x^n}{x_1^n}\right| \leqslant M. \left|\frac{x^n}{x_1^n}\right| = M \left|\frac{x}{x_1}\right|^n.$

Donc $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ et comme $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ converge (série géométrique de raison $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$), d'où$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est absolument convergente.

Corollaire 3.1

Si la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge en $x_1 \neq 0$, alors elle est divergente pour tout x tel que $|x| > |x_1|$.

Corollaire 3.2

Si la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est convergente dans $]-a, a[$, $a > 0$, alors elle est normalement convergente dans chaque intervalle $[-r, r]$, $r < a$.

3.1 Rayon de convergence

Le domaine de convergence D d'une série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est l'ensemble de tous les points où elle converge et il n'est jamais vide car il contient au moins le point $x = 0$.

Définition 3.2

Soit D le domaine de convergence de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Le nombre $R = sup\left\{|x|, x \in D\right\}$ s'appelle rayon de convergence.

On note que $0 \leqslant R \leqslant \infty$.

Pour calculer le rayon de convergence, on a deux méthodes.

1) Méthode de d'Alembert.

Soit la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

On a $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|$, d'après le critère de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est convergente si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| < 1$.

d'où $|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \Rightarrow |x| < \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right|$

et on pose $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right|$.

Exemple 36

Calculer le rayon de convercence des séries entières suivantes :

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ où $a_n = n^2$.

On a $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| = 1$.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$

Le rayon de convergence est $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = 0$

2) Méthode de Cauchy

Soit la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

On a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.\sqrt[n]{|x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.|x|$,

d'après le critère de Cauchy, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.|x| < 1$,

d'où $|x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

et on pose $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Exemple 37

Calculer le rayon de convercence des séries entières suivantes :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^n$ où $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

On a $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)} = 1.$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ où $a_n = \frac{1}{n}$.

On a $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|}} = 1.$

Théorème 3.1

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière, R son rayon de convergence. Alors :

1) $R = 0 \Longleftrightarrow D = \{0\}$.

2) $R = +\infty \Longleftrightarrow D = \mathbb{R}$.

3) Si $0 < R < +\infty$, on a : $\begin{cases} |x| < R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \text{ est convergente.} \\ |x| > R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ est divergente.} \end{cases}$

Démonstration

1) L'équivalence (1) est évidente.

2) $R = +\infty \Rightarrow D = \mathbb{R}$

Si $R = +\infty$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est convergente, d'où $D = \mathbb{R}$, l'implication inverse

$D = \mathbb{R} \Rightarrow R = +\infty$ est évidente.

3) Si $0 < R < +\infty$,

Pour $|x| < R$, il existe $r \in D$ tel que $|x| < r < R$ et que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge, il résulte d'après le lemme d'Abel que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est absolument convergente.

Pour $|x| > R$, on a $x \notin D$,donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge.

Remarque 3.1

Le domaine de convergence d'une série entière est donné par $D_c = \left]-R, R\right[$.

Théorème 3.2

Soit $\left]-R, R\right[$ l'intervalle de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Alors la série converge normalement (donc uniformément) dans chaque intervalle $[a, b] \subset \left]-R, R\right[$.

Démonstration

Elle découle immédiatement du corollaire 2 du lemme d'Abel.

▶ Dans le cas des séries de forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, le domaine de convergence est donné par $\left]x_0 - R, x_0 + R\right[$ et nous avons :

1) $|x - x_0| < R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x - x_0)^n|$ converge.

2) $|x - x_0| > R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ diverge.

3) Sur tout intervalle $[a, b] \subset \left]x_0 - R, x_0 + R\right[$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ est normalement convergente.

▶ Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\right)$ admet un intervalle de convergence $\left]-R, R\right[$ ($\left]x_0 - R, x_0 + R\right[$), on étudie aussi la convergence aux bornes de l'intervalle $x = \pm R$ ($x = x_0 \pm R$).

Exemple 38

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x - 3)^n$ où $a_n = n^2$, $x_0 = 3$.

On a $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|n^2|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n^2)^{\frac{1}{n}}} = 1.$

Pour $x = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (-1)^n$ diverge.

Pour $x = 4$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2$ diverge.

donc $D_c =]2, 4[$.

Exemple 39

Soit la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ où $a_n = \frac{1}{n^2}$.

On a $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_n+1} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n^2} \right| = 1$.

Pour $x = 1$, on obtient la série $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ qui est une série de Riemann convergente.

Pour $x = -1$, on obtient la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ qui est une série alternée convergente.

donc $D_c = [-1, 1]$.

Exemple 40

Soit la série $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} x^n$ où $a_n = \frac{n}{n^2-1}$.

On a $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_n+1} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n^2-1} . \frac{(n+1)^2-1}{n+1} \right| = 1$.

Pour $x = 1$, on obtient la série $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1}$ qui est une série divergente ($\frac{n}{n^2-1} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ série harmonique divergente).

Pour $x = -1$, on obtient la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} (-1)^n$ qui est une série alternée convergente.

donc $D_c = [-1, 1[$.

3.2 Opération linéaire

1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, les séries $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n$ ont le même domaine de convergence D et on a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n = \lambda \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

2) Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence R et $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ de rayon de convergence R'.

Il vient que pour $|x| < \inf(R, R') : f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\, x^n$.

3.3 Propriétés des séries entières

La somme $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est continue dans $]-R, R[$ ($|x| < R$) et on a

$$\begin{aligned} s'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, && \text{pour tout } x \in\,]-R, R[\,. \\ \int_{x_0}^{x} s(t)dt &= \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{x^{n+1} - x_0^{n+1}}{n+1}\right) && \text{pour tout } [x_0, x] \subset\,]-R, R[\,. \end{aligned}$$

Exemple 41

Déterminer la somme des séries entières suivantes :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad D_c = [-1, 1[\,.$

On pose $\quad s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$

alors $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{p=0}^{\infty} x^p \quad / \; p = n-1,$

d'où, $\forall x \in [-1, 1[$:

$$s'(x) = \tfrac{1}{1-x} \Rightarrow \int_0^x s'(t)dt = \int_0^x \tfrac{1}{1-t} dt$$

$$\Rightarrow s(x) = -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{x^n}{n}.$$

2) $\sum_{n=2}^{\infty} (n+1)\, x^n, \quad D_c =]-1, 1[\,.$

On pose $\quad s(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)\, x^n.$

donc $\int_0^x s(t)dt = \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^x (n+1)\, t^n dt$

alors

$$\int_0^x s(t)dt = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n+1} \Rightarrow \int_0^x s(t)dt = \sum_{p=3}^{\infty} x^p = \tfrac{x^3}{1-x},$$

d'où $s(x) = \left(\frac{x^3}{1-x}\right)' = \frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}$.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$, $\quad D_c = [-1, 1]$.

On pose $\quad s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$.

$$
\begin{aligned}
s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} &\Rightarrow xs(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\
&\Rightarrow xs(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^p}{p!} \\
&\Rightarrow xs(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!} - 1 \\
&\Rightarrow s(x) = \frac{e^x-1}{x}
\end{aligned}
$$

Remarque 3.2

La somme d'une série entière est indéfiniment dérivable (c'est-à-dire de classe C^∞) dans l'intervalle de convergence.

3.4 Séries de Taylor.

Définition 3.2

Soit f une fonction de classe C^∞ dans un voisinage du point x_0. La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

s'appelle série de Taylor de f au voisinage de x_0.

Lorsque $x_0 = 0$, on obtient la série de Maclaurin.

Proposition 3.1

Toute série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ est la série de Taylor de sa somme au voisinage de x_0.

Définition 3.3

On dit qu'une fonction f, définie dans un voisinage de x_0, admet un développement en série de Taylor au voisinage de x_0, s'il existe $R > 0$ tel que

$\forall x,\ |x - x_0| < R,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$.

Exercice 3.4

Développer en série entière les fonctions suivantes au voisinage du point indiqué.

1) $f(x) = a^x \qquad (a > 0)\,, \qquad x_0 = 0.$

2) $f(x) = \ln x\,, \qquad x_0 = 1.$

Solution

1) On a $f(x) = a^x = e^{x\ln a}$

et on a le développement de Maclaurin

$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}x + \frac{f''(x_0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}x^3 + \ldots.. + \frac{f^n(x_0)}{n!}x^n + \ldots.$

donc

$f(x) = e^{x\ln a} \Rightarrow f(0) = 1.$

$f'(x) = (\ln a)\, e^{x\ln a} \Rightarrow f'(0) = \ln a.$

$f''(x) = (\ln a)^2\, e^{x\ln a} \Rightarrow f''(0) = (\ln a)^2\,.$

......

$f^n(x) = (\ln a)^n\, e^{x\ln a} \Rightarrow f^n(0) = (\ln a)^n\,.$

Alors

$$f(x) = 1 + x\frac{\ln a}{1!} + x^2\frac{(\ln a)^2}{2!} + \ldots\ldots. + x^n\frac{(\ln a)^n}{n!} + \ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n.$$

2) $f(x) = \ln x\,, \qquad x_0 = 1.$

On pose $y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1$

donc $f(x) = \ln(y+1)$

nous avons $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$

d'où $\ln(y+1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{y^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$

Théorème 3.3

Soit f une fonction de classe C^∞ dans l'intervalle $D = \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[$.

Pour que l'on ait $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\,.$

dans D il faut, et il suffit, que

$$\forall x \in D : \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

où $R_n(x)$ est le reste dans la formule de Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)\,.$$

3.5 Développements en séries entières usuels en $x_0 = 0$

Rayon de convergence $R = +\infty$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$$

Rayon de convergence $R = 1$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ..$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + ..$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha.x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}.x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n+1)}{n!}.x^n + ...$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n+1)}{n!}.x^n$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - .... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + ...$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - .... - \frac{x^n}{n} - ....$$

3.6 Exercices

Exercice 1.

1) Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$, 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2 2^{n-1}} (x-2)^n$, 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{chn} x^{2n}$,

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! x^n$, 5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} (2x-1)^n$.

2) Faire l'étude aux bornes de l'intervalle de convergence pour chaque série.

Exercice 2.

1) Calculer les sommes des séries entières suivantes :

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{n!} x^n$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1}$,

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n$, 4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{shn}{(2n)!} x^{2n}$.

Exercice 3.

Soit la série entière :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = S(x)$$

1) Trouver son domaine de convergence.

2) Calculer S(x).

3) Calculer la somme de la série entière : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{n-1}$.

4) Déduire la somme de la série numérique : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

3.7 Solutions des exercices

Exercice 1

1) Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes, puis faire l'étude aux bornes de l'intervalle de convergence pour chaque série.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \ln n$

On a
$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\ln n}{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}}\right| = 1.$$

Pour $x = 1$, on obtient la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln n$ qui est une série divergente car le terme général ne tend pas vers zéro lorsque n tend vers ∞.

Pour $x = -1$, on obtient la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln n$ qui est une série divergente.

donc $D_c =]-1, 1[$.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n x^n$

On a $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$

Pour $x = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ diverge car $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \neq 0.$

Pour $x = -1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n (-1)^n$ diverge car $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (-1)^n \neq 0.$

donc $D_c =]-1, 1[$.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2 2^{n-1}} (x-2)^n$, $R = 2$

Pour $x = 0$, on obtient $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(n+1)^2}$ converge (série alternée convergente)

Pour $x = 4$, on obtient $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)^2}$ converge (car $\frac{2}{(n+1)^2} \underset{\infty}{\backsim} \frac{2}{n^2}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ est une série de Riemann convergente)

Donc $D_c = [0, 4]$

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{chn} x^{2n}$, $R = \sqrt{e}$

Pour $x = \sqrt{e}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{chn} (\sqrt{e})^{2n}$ diverge ($\lim_{n\to\infty} \frac{1}{chn} (\sqrt{e})^{2n} = 2 \neq 0$)

Pour $x = -\sqrt{e}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{chn} (\sqrt{e})^{2n}$ diverge ($\lim_{n\to\infty} \frac{1}{chn} (-\sqrt{e})^{2n} = 2 \neq 0$)

Donc $D_c =]-\sqrt{e}, \sqrt{e}[$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$, $R = \infty$, $D_c =]-\infty, \infty[$.

Exercice 2

1) Calculer les sommes des séries entières suivantes :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1}$, $D_c =]-1, 1[$

On pose $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1}$.

d'où $s'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{2n-2} = \sum_{p=1}^{\infty} x^{2p}$ $/ \ p = n-1,$

$s'(x) = \sum_{p=1}^{\infty} (x^2)^p$

alors

$s'(x)=\frac{1}{1-x^2}-1\Rightarrow\int\limits_0^x s'(t)dt=\int\limits_0^x\left(\frac{1}{1-t^2}-1\right)dt$

$$\Rightarrow s(x)=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)-x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}.$$

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+4n+1}{n!}x^n$, $D_c=\left]-\infty,\infty+\right[$

On a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+4n+1}{n!}x^n=x^2\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}x^{n-2}+5x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=\left(x^2+5x+1\right)e^x.$

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^n,\quad D_c=\left]-\infty,\infty+\right[$

On a $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^n=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n}}{(2n)!}=ch\left(\sqrt{x}\right)-1-\frac{x}{2}$.

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{shn}{(2n)!}x^{2n}$, $D_c=\left]-\infty,\infty+\right[$

On a $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{shn}{(2n)!}x^{2n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{e^n-e^{-n}}{2}.\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x\sqrt{e}\right)^{2n}}{(2n)!}-1-\frac{ex^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{x}{\sqrt{e}}\right)^{2n}-1-\frac{x^2}{2e}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(x\sqrt{e}\right)^{2n}}{(2n)!}-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{x}{\sqrt{e}}\right)^{2n}-\left(\frac{e^2-1}{4e}\right)x^2$$

$$=\frac{1}{2}ch\left(e\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2}ch\left(\frac{x}{\sqrt{e}}\right)-\left(\frac{e^2-1}{4e}\right)x^2$$

Exercice 3

Soit la série entière :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}=S(x)$$

1) Trouver son domaine de convergence.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ est une série entière $a_n=\frac{1}{2^n}$

On a $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}\right|}}=2.$

Pour $x=2$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}2^n$ diverge.

Pour $x=-2$, on obtient la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(-2\right)^n$ qui est une série divergente.

donc le domaine de convergence est $D_c=\left]-2,2\right[$.

2) Calculer $S(x)$.

On a $\quad s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \Rightarrow s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$

$$\Rightarrow s(x) = \frac{2}{2-x}$$

3) Calculer la somme de la série entière : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{n-1}$.

On a pose $\quad h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{n-1}$.

d'où $\int_0^x h(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{n}{2^n} x^{n-1} dt$

alors

$\int_0^x h(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n \Rightarrow \int_0^x h(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{2}{2-x}$

donc $h(x) = \left(\frac{2}{2-x}\right)' = \frac{2}{(2-x)^2}$.

4) Déduire la somme de la série numérique : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Pour $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$.

Chapitre 4

Séries de Fourier

Définition 4.1

On appelle série de Fourier toute série trigonométrique de la forme

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+........+a_n\cos nx+b_n\sin nx+.....$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

où a_0, a_n et b_n sont les coefficients de la série.

Dans le cas de la convergence, la somme d'une série de Fourier est une fonction périodique de période 2π, c'est-à-dire $f(x)=f(x+2\pi)$ et

$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$ où $\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)=f(x)$.

Remarque 4.1

On a

$$\left|\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\right|\leqslant\left|\frac{a_0}{2}\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+|b_n|\right).$$

Si la série numérique des valeurs absolues des coefficients de Fourier $\left|\frac{a_0}{2}\right|+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+|b_n|\right)$ est convergente, alors la série de Fourier est absolument convergente et même uniformément convergente car majorée par une série numérique convergente, elle est dans ce cas dérivable et intégrable terme à terme.

4.1 Calcul des coefficients

Soit une série de Fourier convergente dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$, de somme $f(x)$ où

$$f(x)=\tfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

On suppose la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ intégrable terme à terme sur $[-\pi,\pi]$, on obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\tfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right)dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\tfrac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,dx\right)$$

car $\int\limits_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,dx=\left[a_n\frac{\sin nx}{n}-b_n\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$

d'où la première formule de Fourier

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx.$$

On calcule les coefficients a_n et b_n à partir des intégrales $\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos pxdx$ et $\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin pxdx$.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos pxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\tfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right)\cos pxdx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\tfrac{a_0}{2}\cos pxdx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx\cos px+b_n\sin nx\cos px)\,dx\right)$$

Sachant que

$\cos nx\cos px=\frac{1}{2}\left(\cos(n+p)x+\cos(n-p)x\right).$

$\sin nx\cos px=\frac{1}{2}\left(\sin(n+p)x+\sin(n-p)x\right).$

on trouve.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos pxdx=\frac{a_0}{2}\left[\frac{-\sin px}{p}\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$$

Si $n \neq p$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx \cos px)\, dx = \tfrac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos{(n+p)}\, x + \cos(n-p)x)\, dx$$
$$= \tfrac{a_n}{2} \left[\tfrac{\sin(n+p)x}{n+p} + \tfrac{\sin(n-p)x}{n-p}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

et

$$\int_{-\pi}^{\pi} (b_n \sin nx \cos px)\, dx = \tfrac{b_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin{(n+p)}\, x + \sin(n-p)x)\, dx$$
$$= \tfrac{b_n}{2} \left[\tfrac{-\cos(n+p)x}{n+p} - \tfrac{\cos(n-p)x}{n-p}\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \tfrac{b_n}{2} \left[\tfrac{1}{n+p} + \tfrac{1}{n-p} - \left(\tfrac{1}{n+p} + \tfrac{1}{n-p}\right)\right] = 0.$$

Si $n = p$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx \cos px)\, dx = \tfrac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos{(n+p)}\, x + 1)\, dx$$
$$= \tfrac{a_n}{2} \left[\tfrac{\sin(2n)x}{2n} + x\right]_{-\pi}^{\pi} = 2a_n.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (b_n \sin nx \cos px)\, dx = \tfrac{b_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin{(n+p)}\, x + \sin(n-p)x)\, dx$$
$$= \tfrac{b_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2nx dx$$
$$= \tfrac{b_n}{2} \left[\tfrac{-\cos 2nx}{2n}\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \tfrac{b_n}{2} \left[\tfrac{-1}{2n} + \tfrac{1}{2n}\right] = 0.$$

On déduit que (en choisissant $p = n$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos pxdx = \pi a_n \Rightarrow a_n = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

De la même façon

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin pxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\tfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right) \sin pxdx$$

Un calcul analogue conduit, en choisissant $n = p$, à

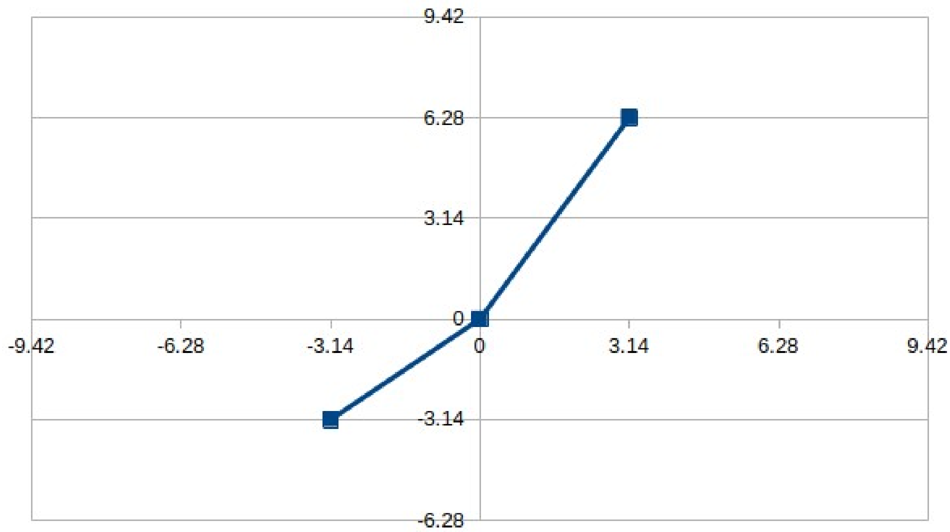
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx = \pi b_n$$

d'où $b_n = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx.$

Exemple 42

Développer en série de Fourier dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pour } -\pi \leqslant x < 0 \\ 2x & \text{pour } \quad 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$$



On a $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

On cherche les coefficients a_0, a_n et b_n.

1) $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} xdx + \int_{0}^{\pi} 2xdx \right) = \frac{\pi}{2}.$

2) $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} x \cos nxdx + \int_{0}^{\pi} 2x \cos nxdx \right)$

On utilise l'intégration par parties, on trouve

$a_n = \frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1)$.

3) $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} x \sin nxdx + \int_{0}^{\pi} 2x \sin nxdx \right)$

On utilise l'intégration par parties, on trouve

$b_n = \frac{3}{n} (-1)^{n+1}$.

d'où $f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \cos nx + \frac{3}{n} (-1)^{n+1} \sin nx \right)$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots.. \right) + 3 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots.. \right)$$

4.2 Fonction monotone par morceaux

Définition 4.2

Une fonction f est dite monotone par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$, si l'on peut découper $[a, b]$ par des points $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ en un nombre fini d'intervalles $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots\ldots [x_{n-1}, b]$ de sorte que la fonction soit monotone dans chaque intervalle.

Théorème 4.1

Si la fonction périodique f de période 2π est monotone par morceaux et bornée sur l'intervalle $[-a, a]$, sa série de Fourier converge en tous les points. La somme de la série obtenue $s(x)$ est égale à la valeur de la fonction $f(x)$ aux points de continuité.

Aux points de discontinuité de f, la somme de la série est égale à la moyenne arithmétique des limites de la fonction à gauche et à droite, c'est-à-dire si $x = x_0$ est un point de discontinuité de f, $s(x_0) = \frac{\lim\limits_{x \overset{\geq}{\to} x_0} f(x) + \lim\limits_{x \overset{\leq}{\to} x_0} f(x)}{2}$.

4.3 Série de Fourier des fonctions paires et impaires

Si f est une fonction paire, alors

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx \\
&= -\int_{0}^{-\pi} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx \\
&= \int_{0}^{\pi} f(-x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx \\
&= 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx
\end{aligned}$$

Donc les coefficients de Fourier d'une fonction paire sont

$$b_n = 0, \quad a_0 = \tfrac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \tfrac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx.$$

et on a une série de cosinus.

Si f est une fonction impaire alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx$$
$$= -\int_{0}^{-\pi} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx$$
$$= \int_{0}^{\pi} f(-x)dt + \int_{0}^{\pi} f(x)dx$$
$$= -\int_{0}^{\pi} f(x)dt + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = 0.$$

Donc les coefficients de Fourier d'une fonction impaire sont

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \tfrac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

et on a une série de sinus.

Exercice 4.5

1) Développer la fonction $f(x) = x^2$ dans l'intervalle $[0, \pi]$ en série de Fourier et calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solution

f est une fonction paire donc $b_n = 0$.

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}.$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x^2 \cos x dx$

On utilise l'intégration par parties, on trouve $a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n$.

La fonction $f(x) = x^2$ est monotone par morceaux, bornée et continue, elle admet donc un développement en série de Fourier

$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos nx.$

Pour $x = \pi$: $\quad \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos n\pi \Rightarrow \frac{2\pi^2}{3} = 4\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 4.6

Soit f la fonction impaire de période 2π, où $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ sur $[0, \pi]$.

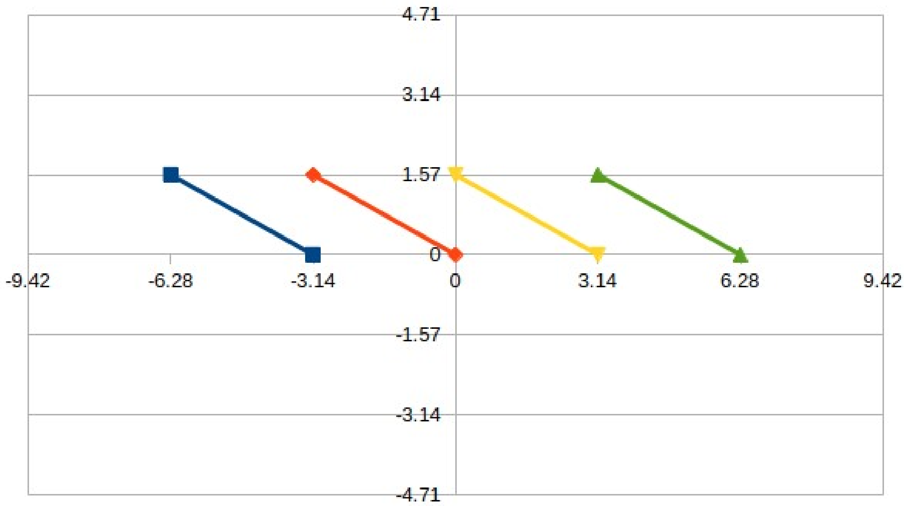
a) Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Développer la fonction f en série de Fourier.

c) Déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n}$

Solution

1) Le graphe $y = \frac{\pi - x}{2}$



2) La fonction f est impaire donc $a_0 = a_n = 0$ c'est-à-dire la fonction est développable en série de sinus.

Calcul b_n.

$b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right) \sin x dx$

On utilise l'intégration par parties, on trouve $b_n = \frac{1}{n}$.

f est monotone par morceaux, bornée et continue donc elle admet le développement en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx, \qquad x \in [0, \pi].$$

Pour $x = 1$: $\qquad \frac{\pi - 1}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n.$

4.4 Forme complexe d'une série de Fourier.

Soit f une fonction périodique de période 2π définie sur $[-\pi,\pi]$,sa série de Fourier est donnée par

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

Nous avons $\cos nx=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$ et $\sin nx=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}$.

Alors $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}\right)$

$=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{a_n-ib_n}{2}\right)e^{inx}+\left(\frac{a_n+ib_n}{2}\right)e^{-inx}\right)$

On pose $C_0=\frac{a_0}{2}$, $\quad C_n=\frac{a_n-ib_n}{2}$, $\quad C_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}$.

On obtient $f(x)=C_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(C_ne^{inx}+C_{-n}e^{-inx})=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{inx}$.

Donc la forme complexe de la série de Fourier est donnés par $f(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{inx}$

avec $C_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx,\ \ n\in\mathbb{Z}$.

Exemple 43

Soit f la fonction périodique de période 2π définie par

$$f(x)=x,\qquad -\pi<x<\pi$$

Les coefficients complexes de Fourier sont donnés par

$$\begin{aligned}C_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}xe^{-inx}dx\\&=\frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{-x}{in}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{in}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-inx}dx\right)\\&=\frac{(-1)^{n+1}}{in}.\end{aligned}$$

pour $n=0$, $C_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}xdx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-\pi}^{\pi}=0$.

D'où $f(x)=\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{inx}}{in}$.

4.5 Approximation en moyenne des séries de Fourier et égalité de Parseval.

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a,b]$. On essaie d'évaluer l'erreur commise lorsqu'on remplace cette fonction par une autre fonction g en considérant que l'erreur est donnée par l'expression $\max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$.

Cette expression est appelée l'écart maximum entre f et g. Mais on utilise beaucoup plus l'écart quadratique moyen δ défini par

$$\delta^2 = \frac{1}{a-b}\int_a^b (f(x)-g(x))^2\,dx.$$

Soit f une fonction périodique de période 2π et T_n les polynômes trigonométriques d'ordre n

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

Théorème 4.2

Parmi tous les polynômes trigonométriques d'ordre n, c'est le polynôme dont les coefficients sont les coefficients de Fourier de la fonction f qui donne la meilleure approximation quadratique moyenne de cette fonction.

L'écart quadratique moyen minimum est

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right).$$

Comme $\delta_n^2 \geqslant 0$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geqslant \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right).$$

Il result que la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)$ converge lorsque $n\to\infty$ et on déduit l'inégalité de **Bessel**

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geqslant \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n^2+\beta_n^2\right).$$

Et si on fait tendre n vers l'infini, l'écart quadratique moyen δ_n^2 est nul et on obtient l'égalité de **Liapounov-Parseval**

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n^2 + \beta_n^2\right),$$

pour une fonction bornée, monotone par morceaux.

Exercice 4.7

Soit f la fonction périodique de période 2π, définie par $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|, x \in [-\pi, \pi]$.

1) Développer en série de Fourier f.

2) Calculer, en utilisant la formule de Liapounov-Perseval, la somme de la série numérique $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Solution

f est une fonction paire $\Rightarrow b_n = 0$.

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi} = 0.$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos x dx$

On utilise l'intégration par parties, on trouve $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ \frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$ $k \in \mathbb{N}$.

D'où

$f(x) = \frac{\pi}{2} - x = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{\pi n^2}\cos nx = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$

On utilise la formule de Liapounov-Parseval

$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right),$

d'où $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2n+1)^4} \Rightarrow \frac{2}{\pi}\left[\frac{-1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^3\right]_0^{\pi} = \frac{16}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi^3}{12}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

4.6 Exercices

Exercice 1

Développer en série de Fourier dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ la fonction $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$.

Exercice 2

Soit f la fonction de période 2π, égale à :

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

1) Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.

2) Calculer les coefficients de Fourier et donner le dévelopement de f en série de Fourier.

Exercice 3

Développer en série de Fourier, la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \frac{x^3 - \pi^2 x}{12}$, pour $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

Etudier le cas où $x = \frac{\pi}{2}$.

En utilisant l'égalité le Liapounov-Parseval, calculer la somme de la série numérique $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

Exercice 4

Soit la fonction f périodique de période 2π définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2 - \pi^2$.

1) Calculer sa série de Fourier. Etudier sa convergence.

2) Déduire les valeurs des sommes des séries convergentes $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

4.7 Solutions des exercices

Exercice 1

Développer en série de Fourier dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ la fonction $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$.

On a $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

f est une fonction paire donc $b_n = 0$ et

$a_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{12} x - \frac{x^3}{12} \right]_0^{\pi} = 0.$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \frac{\pi^2}{12}\cos nx dx - \int_0^{\pi} \frac{x^3}{12}\cos nx dx\right)$

On utilise l'intégration par parties 2 fois, on trouve

$a_n = \frac{-\pi}{n}(-1)^n$.

d'où $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\pi}{n}\right)(-1)^n \cos nx$

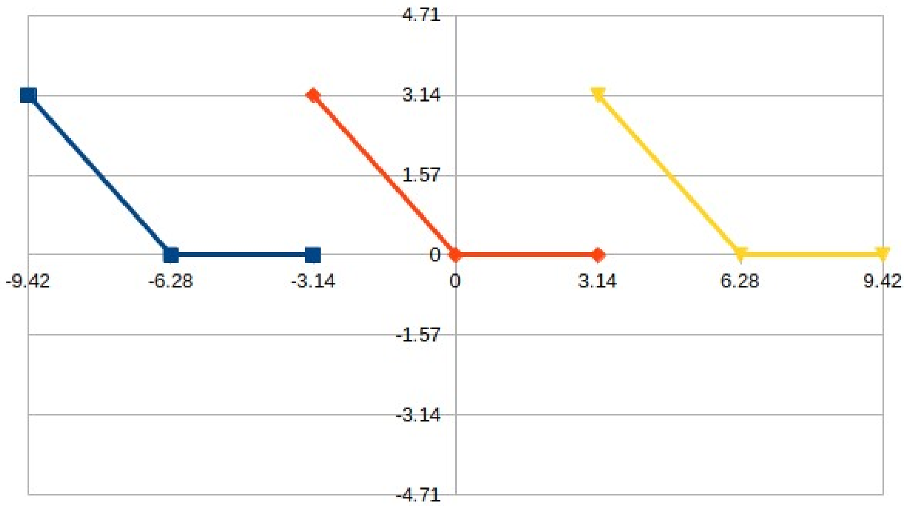
$= -\pi\left(-\cos x + \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 3x}{3} + ...\right)$

Exercice 2

Soit f la fonction de période 2π, égale à :

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

1) Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.



2) Calculer les coefficients de Fourier et donner le développement de f en série de Fourier.

On cherche les coefficients a_0, a_n et b_n.

1) $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_0^{\pi} f(x)dx\right) = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{\pi}{2}$.

2) $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{-1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx dx$

On utilise l'intégration par parties, on trouve

$a_n = \frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)$

3) $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{-1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} x\sin nx dx$

On utilise l'intégration par parties, on trouve

$b_n = \frac{1}{n}(-1)^n$.

d'où $f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos nx + \frac{1}{n}(-1)^n \sin nx\right)$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + ...\right) + \left(-\sin x + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} + ...\right)$

Exercice 3

Développer en série de Fourier, la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \frac{x^3 - \pi^2 x}{12}$, pour $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

On a $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

f est une fonction impaire donc $a_n = a_0 = 0$ et

$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_{0}^{\pi}\frac{x^3}{12}\sin nx dx - \int\limits_{0}^{\pi}\frac{\pi^2}{12}x\sin nx dx\right)$

On utilise l'intégration par parties 3 fois, on trouve

$\int\limits_{0}^{\pi}\frac{x^3}{12}\sin nx dx = \frac{-\pi^3}{12n}(-1)^n + \frac{\pi}{2n^3}(-1)^n$

et l'intégration par parties, nons donne aussi

$\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\pi^2}{12}x\sin nx dx = \frac{-\pi^3}{12n}(-1)^n$,

d'où $b_n = \frac{1}{n^3}(-1)^n$

et $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(-1)^n \sin nx$

$= -\sin x + \frac{\sin 2x}{2^3} - \frac{\sin 3x}{3^3} + ...$

2) Pour $x = \frac{\pi}{2}$

$f(\frac{\pi}{2}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + ... = \frac{\pi^3}{32}$

En utilisant l'égalité le Liapounov-Parseval, calculer la somme de la série numérique $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$.

On a

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n^2 + \beta_n^2\right) \Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x^3-\pi^2 x}{12}\right)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{1}{144\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^6 - 2\pi^2x^4 + \pi^4x^2\right)dx$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{1}{144\pi}\left[\frac{1}{7}x^7 - \frac{2\pi^2}{5}x^5 + \frac{\pi^4}{3}x^3\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Exercice 4

Soit la fonction f périodique deperiode 2π définie sur $[-\pi,\pi]$ par $f(x) = x^2 - \pi^2$.

1) Calculer sa série de Fourier. Etudier la convergence.

On a $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

f est une fonction paire donc $b_n = 0$ et

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2-\pi^2)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3 - \pi^2 x\right]_0^{\pi} = \frac{-4}{3}\pi^2.$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x^2-\pi^2)\cos nx dx$

On utilise l'intégration par parties 2 fois, on trouve

$a_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)\frac{2\pi}{n^2}(-1)^n = \frac{4}{n^2}(-1)^n$

d'où $f(x) = \frac{-2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$

La série de Fourier converge normalement ($\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$) donc elle converge uniformément.

2) En déduire les valeurs des sommes des séries convergentes $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Pour $x = \pi$: $f(\pi) = \frac{-2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 0$

d'où $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Pour $x = 0$: $f(0) = \frac{-2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\pi^2$, d'où $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Chapitre 5

Intégrales impropres

Localement intégrable :

Soit l'intervalle $[a, b]$, on dit que la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est localement intégrable sur $[a, b]$ si elle est Riemann intégrable sur $[\alpha, \beta]$, $\forall \alpha, \beta \in [a, b]$ et on écrit $f \in R_{loc}([a, b])$.

5.1 Définition

Soit $f \in R_{loc}([a, b[)$. Si $\lim\limits_{t \to b} \int\limits_a^t f(x)dx$ existe, on dit que f est intégrable (au sens généralisé) sur $[a, b[$ et l'on pose

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b} \int\limits_a^t f(x)dx$$

Dans ce cas, on dit aussi que l'intégrale généralisée ou intégrale impropre $\int\limits_a^b f(x)dx$ existe ou est convergente.

Si $\lim\limits_{t \to b} \int\limits_a^t f(x)dx$ n'est pas finie où n'existe pas on dit que l'intégrale impropre $\int\limits_a^b f(x)dx$ est divergente.

Exemple 44

Les intégrales suivantes sont convergentes,

1) $\int\limits_0^\infty e^{-x}dx = \lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_0^t e^{-x}dx = \lim\limits_{t\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^t = 1.$

Donc $\int\limits_0^\infty e^{-x}dx$ converge.

2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{t\to1} \int\limits_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{t\to1} \left[arc\sin x\right]_0^t = \frac{\pi}{2}.$

Donc $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ converge.

Exemple 45

Nous avons

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim\limits_{t\to1} \int\limits_0^t \frac{dx}{1-x} = \lim\limits_{t\to1} \left[-\ln(1-x)\right]_0^t = +\infty$, donc $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x}$ diverge.

2) $\int\limits_0^\infty \cos x\; dx = \lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_0^t \cos x dx = \lim\limits_{t\to\infty} \left[\sin x\right]_0^t = \lim\limits_{t\to\infty} \sin t$ n'existe pas, donc $\int\limits_0^\infty \cos x\; dx$ diverge.

5.2 Critères gènéraux de convergence

Théorème 5.1

Soit $f \in R_{Loc}([a,b[)\,, f \geqslant 0$. Pour que l'intégrale $\int\limits_a^b f(t)dt$ soit convergente, il faut et il suffit, que la fonction

$$x \to F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

soit majorée, autrement dit, si

$$\exists M > 0, \qquad \forall x \in [a,b[\;: \qquad \int\limits_a^x f(t)dt \leqslant M.$$

5.2.1 Critère de comparaision

Thèoréme 5.2

Soit $f, g \in R_{Loc}([a,b[)$, vérifiant sur cet intervalle $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

- $\int_a^b g(x)dx$ converge $\Longrightarrow \int_a^b f(x)dx$ converge.

- $\int_a^b f(x)dx$ diverge $\Longrightarrow \int_a^b g(x)dx$ diverge.

Démonstration

Soit $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ et $G(t) = \int_a^t g(x)dx$.

Pour tout $x \in [a,b[$ on a $F(t) \leqslant G(t)$, F et G sont croissantes car $F'(x) = f(x) \geqslant 0$, $G'(x) = g(x) \geqslant 0$.

1) $\int_a^b g(x)dx$ converge$\Leftrightarrow$ $G(t)$ majorée$\Longrightarrow$ $F(t)$ majorée $\Leftrightarrow$ $\int_a^b f(x)dx$ converge.

2) $\int_a^b f(x)dx$ diverge$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{t\to b} F(t) = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{t\to b} G(t) = +\infty \Leftrightarrow \int_a^b g(x)dx$ diverge.

Exemple 46

Soit l'intégrale $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$.

On a $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$ et

$\lim\limits_{t\to\infty} \int_1^t e^{-x}dx = \lim\limits_{t\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_1^t = 1.$

D'où $\int_1^\infty e^{-x}dx$ converge $\Longrightarrow \int_1^\infty e^{-x^2}dx$ converge.

Exemple 47

Soit l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$

On a $\ln x \leqslant x \Longrightarrow \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{\ln x}$ d'où $\int_0^1 \frac{dx}{x} \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ et on a

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0}\int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0}[\ln x]_t^1 = +\infty.$$

Donc $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ diverge $\Longrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ diverge.

5.2.2 Critère d'équivalence

Théorème 5.3

Soit $f, g \in R_{Loc}([a,b[)$, $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$, vérifiant $\lim\limits_{t\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Alors les intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ sont de même nature (toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes).

Exemple 48

$\int_0^\pi \frac{1-\cos x}{x^2}dx$ est convergente car :

On a $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ et

$\int_0^\pi \frac{x^2}{2x^2}dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}dx$ converge.

Donc, d'après le critère d'équivalence $\int_0^\pi \frac{1-\cos x}{x^2}dx$ converge.

Exemple 49

$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^3}dx$ est divergente car :

On a $\sin x \underset{0}{\sim} x$, d'où $\frac{\sin x}{x^3} \sim \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$.

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to 0}\int_t^\pi \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to 0}\left[\frac{-1}{x}\right]_t^\pi = \lim_{t\to 0}\left[\frac{-1}{\pi} + \frac{1}{t}\right] = +\infty.$$

Donc $\int_0^\pi \frac{1}{x^2}dx$ diverge, d'après le critère d'équivalence $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^3}dx$ diverge.

5.3 Etude de l'intégrale $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, α réel donné

On pose $F(t) = \int\limits_a^t \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, t \in [a, b[$,

d'où $F(t) = \int\limits_a^t (b-x)^{-\alpha}\, dx = \left[\frac{-1}{-\alpha+1}(b-x)^{-\alpha+1}\right]_a^t$

$= \left(\frac{-1}{-\alpha+1}\right)\left[(b-t)^{-\alpha+1} - (b-a)^{-\alpha+1}\right]_a^t.$

Alors :

Pour $\alpha \neq 1$, on a deux cas :

Si $\alpha < 1$: $\lim\limits_{t \to b} F(t) = \lim\limits_{t \to b}\left(\frac{-1}{-\alpha+1}\right)\left[(b-t)^{-\alpha+1} - (b-a)^{-\alpha+1}\right]_a^t = \frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$,

donc $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ converge.

Si $\alpha > 1$: $\lim\limits_{t \to b} F(t) = \lim\limits_{t \to b}\left(\frac{-1}{-\alpha+1}\right)\left[(b-t)^{-\alpha+1} - (b-a)^{-\alpha+1}\right]_a^t = \pm\infty.$

donc $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ diverge.

Pour $\alpha = 1$, on a $F(t) = \int\limits_a^t \frac{dx}{(b-x)}$.

$\lim\limits_{t \to b} F(t) = \lim\limits_{t \to b} \int\limits_a^t \frac{dx}{(b-x)} = \lim\limits_{t \to b} \left[-\ln(b-x)\right]_a^t$

$= \lim\limits_{t \to b} \left[-\ln(b-t) + \ln(b-a)\right]$

$= \pm\infty,$

d'où $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)}$ diverge.

Donc $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \begin{cases} \text{converge pour } \alpha < 1. \\ \text{diverge pour } \alpha \geqslant 1. \end{cases}$

La règle reste la même pour $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$.

Exemple 50

$\int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^3}$ converge car $\alpha = 3$.

5.4 Etude de l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $a > 0$, α réel donné

On pose $F(t) = \int_a^t \frac{dx}{x^\alpha}$

d'où $F(t) = \int_a^t x^{-\alpha} dx = \begin{cases} [\ln t]_a^t & \text{si } \alpha = 1 \\ \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^t & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$

Alors :

Pour $\alpha = 1$, on a $F(t) = \int_a^t \frac{dx}{x}$.

$$\lim_{t \to b} F(t) = \lim_{t \to +\infty} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t \to +\infty} [\ln x]_a^t = +\infty,$$

d'où $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge.

Pour $\alpha \neq 1$, on a deux cas :

Si $\alpha < 1$: $\lim_{t \to +\infty} F(t) = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^t = +\infty$

d'où $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge.

Si $\alpha > 1$: $\lim_{t \to +\infty} F(t) = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^t = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{-1}{-\alpha+1}\right) \left[t^{-\alpha+1} - a^{-\alpha+1}\right] = 0,$

d'où $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge.

Donc $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{converge pour } \alpha > 1. \\ \text{diverge pour } \alpha \leqslant 1. \end{cases}$ où $a > 0$.

Exemple 51

1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge car $\alpha = 2$.

2) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge car $\alpha = 1$.

5.5 Convergence absolue

Définition 5.2

Soit $f \in R_{Loc}([a, b[)$, on dit que l'intégrale $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ est absolument convergente si l'intégrale $\int\limits_{a}^{b} |f(x)|\, dx$ est convergente.

Théorème 5.4

$\int\limits_{a}^{b} |f(x)|\, dx$ converge $\Longrightarrow \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ converge.

Autrement dit, une intégrale absolument convergente est convergente.

Exemple 52

Soit $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx$ où $\alpha > 0$.

On a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |e^{-\alpha x} \sin x| \leqslant e^{-\alpha x}$ et

$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \lim\limits_{t \to +\infty} \left[\frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha x}\right]_0^t = \frac{1}{\alpha}$,

donc $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ est convergente, d'après le critère de comparaison $\int\limits_{0}^{+\infty} |e^{-\alpha x} \sin x|\, dx$ est convergente, d'où $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx$ est absolument convergente.

Remarque 5.1

Si $\int\limits_{a}^{b} |f(x)|\, dx$ est divvergente et $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ est convergente, alors $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ est semi convergente.

5.6 Règle d'Abel

Théorème 5.5

Soient deux fonctions $f, g \in R_{Loc}([a, b[)$ vérifiant les conditions :

1) f est monotone et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = 0$.

2) Il existe $k > 0$ tel que $\forall x \in [a, b[$: $\left| \int\limits_a^x g(t)dt \right| \leqslant k$.

Alors l'intégrale $\int\limits_a^b f(t)\, g(t)\, dt$ est convergente.

Exemple 53

Soit $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx, \quad \alpha > 0$.

On pose $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ et $g(t) = \cos t$.

On a :

1) f est monotone.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0 \quad / \ \alpha > 0$.

3) $\forall x \in [1, +\infty[$: $\left| \int\limits_1^x g(t)dt \right| = \left| \int\limits_1^x \cos t dt \right| = |\sin 1 + \sin x| \leqslant 2$,

dnc $\forall x \in [1, +\infty[$: $\left| \int\limits_1^x g(t)dt \right| \leqslant 2$.

D'après le Théorème d'Abel $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ est convergente.

5.7 Intégrale sur les intervalles $]a, b]$ et $]a, b[$

Définitions 5.3

Si la limite $\lim\limits_{t \to a} \int\limits_t^b f(x)dx$ existe (finie) , on dira que f est intégrable (au sens généralisé) sur $]a, b]$ et l'on pose

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a} \int\limits_t^b f(x)dx$$

Dans ce cas, on dit aussi que l'intégrale (impropre) $\int_a^b f(x)dx$ est convergente.

Les résultats précédents pour l'intervalle $[a,b[$ restent valables pour l'intervalle $]a,b]$.

Définitions 5.4

On dit que f est intégrable sur $]a,b[$ s'il existe un point $c_0 \in]a,b[$ tel que f soit intégrable sur $]a,c_0]$ et sur $[c_0,b[$, c'est-à-dire si les deux intégrables $\int_a^{c_0} f(x)dx$ et $\int_{c_0}^b f(x)dx$ sont convergentes.

Dans ce cas, on dit que l'intégrale (impropre) $\int_a^b f(x)dx$ est convergente et on a

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a}\int_t^{c_0} f(x)dx + \lim_{t\to b}\int_{c_0}^t f(x)dx.$$

5.8 Exercices

Exercice 1

Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes

1) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$, 2) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x^2+1}dx$.

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}dx$, 4) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^4+2x^2+1}dx$.

Exercice 2

Etudier la nature des intégrales suivantes

1) $\int_{-\infty}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$, 2) $\int_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$.

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$, 4) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$.

Exercice 3

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx,$ 2) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}dx$,

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x}{(1-x)^2}dx,$ 4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx.$

5.9 Solutions des exercices

Exercice 1

Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes

1) $\int\limits_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int\limits_{0}^{3} \frac{1}{3\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}dx = \lim\limits_{t\to 3}\int\limits_{0}^{t} \frac{1}{3\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}dx = \lim\limits_{t\to 3}\left[\arcsin \frac{x}{3}\right]_0^t = \frac{\pi}{2}.$

Donc $\int\limits_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$ converge.

2) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x^2+1}dx$.

On a $\left|\frac{\cos x^2}{x^2+1}\right| \leqslant \frac{1}{x^2+1}$ et

$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_{0}^{t} \frac{1}{x^2+1}dx = \lim\limits_{t\to+\infty} [\arctan x]_0^t = \frac{\pi}{2}$ converge.

Donc, d'après le critère de comparaison $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x^2+1}dx$ converge.

3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}dx = \lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{t} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}dx = \lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}} \left[-2\sqrt{1-\sin x}\right]_0^t = 2$ converge.

4) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x}{x^4+2x^2+1}dx$

On a $\frac{x}{x^4+2x^2+1} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$ et $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$ converge $\alpha = 1 > 1$, donc,d'après le critère d'équivalence $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x}{x^4+2x^2+1} dx$ converge.

Exercice 2

Etudier la nature des intégrales suivantes :

1) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx + \int\limits_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

On a $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \lim\limits_{t \to -\infty} \int\limits_{t}^{-1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \lim\limits_{t \to -\infty} \left[-e^{\frac{1}{x}} \right]_t^{-1} = -e^{-1} + 1$ d'où $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ converge.

et $\int\limits_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \lim\limits_{t \to 0} \int\limits_{-1}^{t} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \lim\limits_{t \to 0} \left[-e^{\frac{1}{x}} \right]_{-1}^{t} = e^{-1}$ d'où $\int\limits_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ converge.

Alors $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ converge et $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \lim\limits_{t \to -\infty} \int\limits_{t}^{-1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx + \lim\limits_{t \to 0} \int\limits_{-1}^{t} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = -e^{-1} + 1 + e^{-1} = 1.$

2) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ converge (car $\left| \frac{1-\cos x}{x^2} \right| \leqslant \frac{2}{x^2}$ et $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{x^2} dx$ converge $\alpha = 2 > 1$)

3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$

On a $\sin x \underset{0}{\sim} x$ d'où $\ln \sin x \underset{0}{\sim} \ln x$ et

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln x dx = \lim_{t \to 0} [x \ln x - x]_t^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \left(\ln \frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

Donc $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$ converge.

4) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx$

Nons avons $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$ et $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ converge $\alpha = 3 > 1$

donc $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx$ converge.

Exercice 3

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

On a $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim\limits_{t \to -\infty} \int\limits_{t}^{0} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim\limits_{t \to -\infty} [\arctan x]_t^0 = \frac{\pi}{2}$, donc $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx$ converge.

$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim\limits_{t \to +\infty} \int\limits_{0}^{t} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim\limits_{t \to +\infty} [\arctan x]_0^t = \frac{\pi}{2}$, donc $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ converge.

D'où $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ converge et $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim\limits_{t \to -\infty} \int\limits_{t}^{0} \frac{1}{x^2+1} dx + \lim\limits_{t \to +\infty} \int\limits_{0}^{t} \frac{1}{x^2+1} dx = \pi$

2) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx = \int\limits_{0}^{1} \frac{\sin x}{x^3} dx + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$

$\int\limits_{0}^{1} \frac{\sin x}{x^3} dx$ coverge car $\frac{\sin x}{x^3} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^2}$ ($\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^2} dx$ converge $\alpha = 2 > 1$)

$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$, on pose $f(x) = \frac{1}{x^3}$ et $g(x) = \sin x$, on a

$*$ f est monotone (décroissante) et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

$**$ $\forall t : \left| \int\limits_{1}^{t} \sin x dx \right| = |-\cos t + \cos 1| \leqslant 2.$

Alors, d'après la régle d'Abel $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$ converge.

Donc $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$ converge.

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{(1-x)^2} dx$ diverge (de la forme $\int\limits_{a}^{b} \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$ $\alpha = 2 > 1$)

ou bien $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{(1-x)^2} dx = \lim\limits_{t \to 1} \int\limits_{0}^{t} \frac{1}{(1-x)^2} dx = \lim\limits_{t \to 1} \left[\frac{1}{1-x} \right]_0^t = +\infty$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \int_0^t \tan x dx = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \left[-\ln\left(\cos x\right)\right]_0^t = +\infty$

Donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$ diverge.

Bibliographie

[1] K, Allab. Eléments d'analyse, Fonction d'une variable réele, Tome 2, Office des publications universitaires 01-2008, 1, Place centrale de Ben-Aknoun (Alger).

[2] F, Ayres Jr. Série schaum, Théorie et applications du calcul différentiel et intégral, McGAW-HILL, 28 Rue Beaunier, 75014 Paris 1992.

[3] E, Azoulay, J. Avignant. Mathématiques cours et exercices résolus 3, DEUG A, 1936-La Bayeusaine Graphique, 6-12, rue Royal, 14401, Bayeuse, Dépôt légal : 7778-Septembre 1990-Imprimé en France.

[4] M, Grazem. Cours du module : Analyse 3, Pour la Licence en Mathématique, 2 ème année, Année universitaire 2020-2021.

[5] M, Hannachi. Exercices d'analyse Mathématiques, 2 ème année d'université, Office des publications universitaires : 02-2000, 1, Place centrale de Ben - Aknoun (Alger).

[6] N. Piskonov, Calcul différentiel et intégral, Tome 2, 9^e édition, Traduction française Editions Mir, Moscou, 1980.