



Université Sétif 1 Ferhat Abbas
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة سطيف 1 فرحات عباس
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Thèse

présentée pour l'obtention du grade de Docteur
en Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Theme :

**SUR LES ONDETTES DE LEGENDRE POUR
L'EQUATION DE POISSON DANS LE CADRE
D'UNE SOLUTION COMPLEXE**

Présentée par

Mr. KERROUCHE Nacereddine

Directeur de thèse : **Pr. Abdelouahab KADEM**

Thèse soutenue le 12 Décembre 2024, devant un jury composé de :

Mr. Salim MESBAHI	Prof. Université Sétif 1 Ferhat Abbas	Président
Mr. Abdelouahab KADEM	Prof. Université Sétif 1 Ferhat Abbas	Rapporteur
Mr. Said GUEDJIBA	Prof. Université Batna 2 Mustapha Ben Boulaid	Examineur
Mr. Ali BOUSSAYOUD	Prof. Université Jijel Mohamed Seddik Ben Yahia	Examineur
Mr. Ahcen MERAD	Prof. Université Oum El-Bouaghi Larbi Ben m'hidi	Examineur

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer mes vifs remerciements et ma profonde gratitude à mon dieu le tout puissant de m'avoir donné l'aide, la patience et la volonté durant toutes les étapes de ce travail.

Mes sincères remerciements s'adressent à mon encadreur Mr. Abdelouhab Kadem, professeur à l'université Ferhat Abbas-Sétif1, qui m'a fait l'honneur de m'encadrer et d'avoir dirigé ce mémoire. Un grand merci pour votre disponibilité, votre implication et vos judicieux conseils.

Je voudrais remercier les membres du jury, Mr. Salim Mesbahi, professeur à l'université Ferhat Abbas-Sétif1 d'avoir bien voulu présider le jury, malgré toutes ses responsabilités et ses occupations. Mr. Saïd Guedjiba professeur à l'université de Batna 2 et Mr. Ali Bousayoud professeur à l'université de Jijel d'avoir fait partis de ces membres.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance à Mr. Omar behemiti professeur à l'Université de Mostaganem, pour son aide et pour ses conseils et ses orientations.

J'aimerais aussi exprimer ma gratitude aux maitres de conférence Mohamed Ourabeh Benmedour, A. Rachid Benssaadi et Nassim Ferahtia de l'université de Msila qui m'ont aidés à réaliser ce travail et surtout Mr. Abdelmoumene Djabi, maitre de conférence classe A, à l'université Ferhat Abbas-Sétif1.

Enfin un grand merci à ma famille de m'avoir donné le courage pour mener à terme ce travail.

Table des matières

Introduction	1
1 Rappels sur les notions de base	4
1.1 Ondelettes de Legendre	4
1.1.1 Introduction	4
1.1.2 Ondelettes	5
1.1.3 Polynômes de Legendre et leurs propriétés	6
1.1.4 Ondelettes de Legendre unidimensionnelle	9
1.1.5 Le produit de deux vecteurs d'ondelettes de Legendre	10
1.1.6 Ondelettes de Legendre bidimensionnelles	13
1.2 développement en serie d'ondelettes de Legendre et approximation	16
1.2.1 Fonction à une variable	16
1.2.2 Fonction à deux variables	22
1.3 Convergence du développement des OLS	29
1.3.1 Fonction à une variable	29
1.3.2 Fonction à deux variables	31
2 Matrices opérationnelles des ondelettes de Legendre	33
2.1 Introduction	33
2.2 Matrice opérationnelle d'intégration	34

2.2.1	Matrice opérationnelle d'intégration le cas d'une variable	34
2.2.2	Matrice opérationnelle d'intégration le cas de deux variables	38
2.3	Matrice opérationnelle de dérivation	45
2.3.1	Dérivé d'un polynôme de Legendre	45
2.3.2	Matrice opérationnelle de dérivation	46
3	Méthode des ondelettes de Legendre (MOL)	50
3.1	Introduction	50
3.2	Description de la méthode en 1D	51
3.2.1	Application de la (MOL) par la matrice opérationnelle d'itégration	51
3.2.2	Applications de la matrice opérationnelle de dérivation	61
3.3	Description de la méthode en 2D	66
3.3.1	Application de la matrice opérationnelle d'intégration	66
3.3.2	Tests numériques	70
4	Résolution de l'équation de Poisson Bidimensionnelle dans \mathbb{C}	74
4.1	Introduction	74
4.2	Description de la méthode	75
4.3	Test numérique	81
4.4	Algorithme	86
	Conclusion générale	88

Introduction

La compréhension de l'évolution des processus fondamentaux de l'univers se base en grande partie sur les équations de la physique mathématique notamment les équations aux dérivées partielles (EDPs) et les équations aux dérivées fractionnaires (EDFs). Les exemples les plus connus sont les vibrations des solides (cordes, membranes, plaques), l'écoulement des fluides (eau, pétrole), la diffusion des produits chimiques, la propagation de la chaleur, la structure des molécules, les interactions des photons et des électrons et le rayonnement des ondes électromagnétiques.

Les EDPs et les EDFs jouent également un rôle important dans les mathématiques modernes, notamment en géométrie et en analyse. Donc, beaucoup de travaux sont basés sur la recherche d'outils et de techniques efficaces pour obtenir des résultats d'existence (et souvent d'unicité) pour des équations aux dérivées partielles (EDPs) linéaires de nature physique (elliptique, parabolique ou hyperbolique) et en générale pour les équations de la physique mathématique. Cependant il n'est pas toujours possible d'obtenir des solutions exactes à toutes les équations de la physique mathématique, c'est pour cela que les chercheurs ont été obligés de concentrer leurs efforts sur la recherche de solutions approximatives à ces problèmes. Dans ce contexte, il est apparu la transformée de Jean Baptiste Joseph Fourier au XIXe siècle comme le premier et seul outil puissant pour analyser les composantes d'un signal stationnaire. Mais elle est insuffisante pour analyser les signaux non stationnaires, En conséquence, les efforts se sont orientés vers la recherche de nouveaux outils pour résoudre ce genre de problème. Par la suite en 1909 et ce pour la première fois Haar s'est penché sur la définition des ondelettes qui était la version améliorée de la transformée de Fourier.

La théorie des ondelettes est un domaine relativement nouveau et émergent dans la recherche mathématique. Elle a été appliquée à un large spectre de disciplines d'ingénierie, en particulier, les ondelettes sont utilisées avec beaucoup de succès dans l'analyse du signal pour la représentation et la segmentation des formes d'onde, l'analyse temps-fréquence et les algorithmes rapides pour une mise en œuvre facile. Les ondelettes permettent la représentation précise d'une variété de fonctions et d'opérateurs. De plus, elles établissent une connexion avec des algorithmes numériques rapides et pourrait être un outil possible pour résoudre les difficultés en physique, en communication et en traitement d'images (Chen et Hsian 1997). Durant les 20 dernières années, une attention particulière a été accordée aux applications des fonctions d'impulsion de bloc, des polynômes de Legendre, des polynômes de Tchebychev, des ondelettes de Haar (voir [12]), des ondelettes de Legendre (Hamideh Ebrahimi 2017) et des ondelettes de Tchebychev (M. Tavassoli Kajani 2009).

Parallèlement au développement du concept des ondelettes notamment les ondelettes orthogonales tels que les ondelettes orthogonales de Legendre ou de Tchebychev etc..., sont apparues les matrices d'intégration et de dérivation, qui sont respectivement l'intégration et la dérivation des ondelettes. Ces matrices permettent l'approximation de fonctions analytiques, $C^\infty([a, b])$, où l'erreur de troncature se rapproche de zéro plus rapidement que toute puissance du nombre de fonctions de base utilisées dans l'approximation, car ce nombre (ordre de troncature N) tend vers l'infini. Ce phénomène est généralement appelé « précision spectrale » M.M. Hosseini (2002), C. Canuto (1988). La principale caractéristique de cette technique est qu'elle réduit ces problèmes à ceux de la résolution d'un système d'équations algébriques, ainsi simplifiant grandement le problème. Dans cette méthode, une série orthogonale tronquée est utilisée pour l'intégration ou la dérivation numérique d'équations différentielles, dans le but d'obtenir des solutions numériques efficaces. Pour cela, il existe deux approches.

La première approche est basée sur la conversion des équations différentielles sous-jacentes en équations intégrales par intégration, en approximant divers signaux impliqués dans l'équation par des séries orthogonales tronquées et en utilisant la matrice opérationnelle d'intégration, pour éliminer les opérations intégrales. La deuxième approche est

basée sur l'utilisation d'une matrice opérationnelle de dérivation afin de réduire le problème sous-jacent à la résolution d'un système d'équations algébriques. Dans ce travail et contrairement à ce qui est habituel, les deux matrices opérationnelles d'intégration et de dérivation sont introduites mutuellement pour obtenir une approximation de la solution complexe de l'équation de Poisson bidimensionnelle.

Cette thèse est constituée d'une introduction générale présentant l'importance du thème et les objectifs de la recherche ; quatre chapitres principaux, une conclusion, des perspectives et en dernier lieu un algorithme. Dans le premier chapitre, nous présentons brièvement les principes fondamentaux de la théorie des ondelettes et leurs outils principaux tels que les ondelettes, les polynômes de Legendre, les ondelettes de Legendre, le développement d'une fonction en une série infinie d'ondelettes de Legendre ainsi que l'approximation d'une fonction et sa convergence. Dans le deuxième chapitre, nous présentons la matrice opérationnelle d'intégration, la matrice opérationnelle de dérivation et leurs rôles dans la transformation des EDOs et les EDPs en un système d'équations algébriques ainsi que l'approximation d'une fonction et sa convergence. Le troisième chapitre est dédié à la méthode des ondelettes de Legendre (MOL) et son application pour trouver des solutions des EDOs et des EDPs linéaires et non linéaires. Quelques exemples sont donnés pour illustrer l'efficacité de la méthode. Enfin, dans le quatrième chapitre, on applique la méthode à l'équation de Poisson bidimensionnelle pour obtenir une solution approximative dans \mathbb{C} moyennant les deux matrices opérationnelles ensemble, appuyée avec un exemple.

Rappels sur les notions de base

1.1 Ondelettes de Legendre

1.1.1 Introduction

Les ondelettes ont vu le jour lorsque certains sujets d'études ont nécessité une analyse en fréquence et en temps. Au XIXe siècle, l'analyse de Fourier était la seule technique permettant la décomposition d'un signal et sa reconstruction sans perte d'information ; malheureusement elle fournit une analyse en fréquence mais ne permet pas la localisation temporelle de changements abrupts. En 1909, Alfréd Haar définit une fonction composée d'une courte impulsion négative suivie d'une courte impulsion positive, connue pour être la première ondelette (Ondelette de Haar). En 1946, Dennis Gabor, mathématicien hongrois, inventa une transformation de fonction analogue à celle de Joseph Fourier, appliquée sur une fenêtre temporelle exprimée par une fonction Gaussienne. Cependant, le concept d'ondelette n'existait pas à cette époque. Jusqu'en 1981 où le concept a été proposé par le géophysicien Jean Morlet. Par la suite, Morlet et le physicien Alex Grossman a inventé le terme ondelette en 1984.

Beaucoup de chercheurs pensaient même qu'il n'y avait pas d'ondelettes orthogonales à l'exception des ondelettes de Haar. Heureusement, le mathématicien Yves Meyer avait

construit la deuxième ondelette orthogonale appelée ondelette Meyer en 1985. Comme plus en plus de chercheurs se sont joints à ce domaine, la 1ère conférence internationale a eu lieu en France en 1987. En 1988, Stéphane Mallat et Meyer ont proposé le concept de multi résolution. La même année, Ingrid Daubechies retrouve une méthode systématique pour construire l'ondelette orthogonale à support compact. En 1989, Mallat proposa la transformée en ondelettes. Avec l'apparition de cet algorithme rapide, la transformée en ondelettes eut de nombreuses applications dans le domaine du traitement du signal.

Ces derniers temps, les ondelettes de Legendre ont été appliquées dans différents problèmes comme les problèmes vibrationnels, le calcul de la diffusion, la physique mathématique et intégrales. La caractéristique principale des ondelettes de Legendre dans les problèmes variationnelles est qu'elles réduisent ces derniers à un système d'équation algébrique.

1.1.2 Ondelettes

Définition 1.1.1 *Les ondelettes sont une famille de fonctions formées à partir de la dilatation et de la translation d'une même fonction $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, appelée ondelette mère. Lorsque le paramètre de dilatation a et le paramètre de la translation b varient continûment, on obtient la famille d'ondelettes continues suivante (voir [20] et [7])*

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right); \quad a, b \in \mathbb{R}; \quad a \neq 0$$

Pour une restriction des paramètres a et b à des valeurs discrètes comme $a = a_1^{-k}$, $b = nb_1 a_1^{-k}$, où $a_1 > 1$ et $b_1 > 0$, on obtient la famille d'ondelettes discrètes suivantes :

$$\psi_{k,n}(t) = |a_1|^{\frac{k}{2}} \psi(a_1^k t - nb_1),$$

Ces fonctions de base sont appelées ondelettes. Cette famille $\psi_{k,n}(t) \triangleq \psi_{kn}(t)$ constitue une base d'ondelettes pour $L^2(\mathbb{R})$.

Remarque 1.1.1 *Pour $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, n, k des entiers positifs, la famille des ondelettes devient orthonormée (c.a.d $\langle \psi_{k,n}(t), \psi_{l,m}(t) \rangle = \delta_{kl} \delta_{nm}$).*

1.1.3 Polynômes de Legendre et leurs propriétés

Les polynômes de Legendre ont été utilisés pour avoir une solution approximative des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre. Cette approche consiste à réduire le problème à un ensemble d'équations linéaires en développant la solution approchée en termes de polynômes de Legendre décalés à coefficients inconnus. La performance de cette méthode a été comparée à d'autres méthodes, à savoir Sinc-Galerkin [29], ondelettes de Haar [12, 13], la collocation de splines quadratiques [14], Legendre tau [26], et la méthode de Liu Lin, et elle a montré une meilleure précision en utilisant des exemples numériques que les autres méthodes proposées. De plus, le coût de calcul diminue beaucoup.

Polynômes de Legendre

Définition 1.1.2 *Le polynôme de Legendre est un polynôme défini sur l'intervalle $[-1, 1]$, noté $L_m(t)$ qui est la dérivée $m^{\text{ième}}$ du polynôme $(t^2 - 1)^m$, $m \in \mathbb{N}^*$. Le polynôme de Legendre est un polynôme de degré m de coefficient dominant $\frac{(2m)!}{m}$ qui peut être calculer par l'expression générale de Rodriguès (1794 - 1851) suivante:*

$$\begin{cases} L_0(t) = 1 \\ L_m(t) = \frac{1}{m!2^m} \frac{d^m}{dz^m} (t^2 - 1)^m, \quad m \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Remarque 1.1.2 *Nous retrouverons ces polynômes dans la résolution approximative des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre et les équations différentielles en physique (propagation de la chaleur, physique quantique, chimie quantique, etc).*

Propriétés 1.1.1 *Le polynôme de Legendre vérifie les propriétés suivantes :*

1- $\forall m, n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\int_{-1}^1 L_m(t)L_n(t)dt = 0, \quad \text{pour } m \neq n$$

2- $\forall m \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-1}^1 L_m^2(t)dt = \frac{2}{2m + 1}$$

3- Les polynômes de Legendre vérifient la formule de récurrence suivante [7] et [1]:

$$\begin{aligned}(m+1)L_{m+1}(t) &= (2m+1)tL_m(t) - mL_{m-1}(t), & m \in \mathbb{N}^* \\ L_0(t) &= 1 \\ L_1(t) &= t\end{aligned}$$

4- Relations de récurrence en présence des dérivées de L_m :

$$\begin{aligned}L'_m(t) &= tL'_{m-1}(t) + mL_{m-1}(t) \\ mL_m(t) &= tL'_m(t) - L'_{m-1}(t), \quad m \in \mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

5- Les polynômes de Legendre sont les solutions de l'équation différentielle :

$$(t^2 - 1)y'' + 2ty' - m(m+1)y = 0, \quad m \in \mathbb{N}^*$$

preuve: voir [12] .

Exemple 1 Les six premiers polynômes de Legendre décalés définis sur l'intervalle $[-1, 1]$ et leurs racines

$$\begin{aligned}L_0(t) &= 1, & S &= \emptyset \\ L_1(t) &= t, & S &= \{0\} \\ L_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1), & S &= \left\{-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right\} \\ L_3(t) &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), & S &= \left\{-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right\} \\ L_4(t) &= \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3), & S &= \left\{\pm\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}}, \pm\sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}}\right\} \\ L_5(t) &= \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15), & & \text{en utilisant les méthodes numériques, on peut trouver} \\ & & & \text{des racines approximatives } \{-1.1297, 0.77744, 0.85266\}.\end{aligned}$$

polynômes de Legendre décalés (ou modifiés)

Pour une utilisation pratique des polynômes de Legendre sur l'intervalle qui nous intéresse $[0, 1]$, il est nécessaire de faire un changement de variable z du domaine de définition : $t = 2x - 1$, $0 \leq x \leq 1$. Donc on obtient de nouveaux polynômes de Legendre.

Définition 1.1.3 Les polynômes de Legendre dits décalés (ou modifiés) notés $P_m(x)$ sont des polynômes définis sur l'intervalle $[0, 1]$ comme suit:

$$P_m(x) = L_m(2x - 1), \quad m \in \mathbb{N}^*$$

tel que

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = 2x - 1 \\ P_{m+1}(x) = \frac{(2m+1)}{(m+1)}(2x - 1)P_m(x) - \frac{m}{(m+1)}P_{m-1}(x), \quad m \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (1.1)$$

Propriétés 1.1.2 1- Les polynômes de Legendre décalés sont des polynômes orthogonaux et leurs condition d'orthogonalité est:

$$\int_0^1 P_m(x)P_n(x)dx = \frac{1}{2m+1}\delta_{mn} \quad (1.2)$$

où $m, n \in \mathbb{N}^*$ et δ_{mn} indique le symbole de Kronecker.

2- La forme analytique de polynôme $P_m(x)$ de degré m est donnée par:

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^m b_{mi}x^i \quad (1.3)$$

avec

$$b_{mi} = (-1)^{m+i} \frac{(m+i)!}{(m-i)!(i!)^2} \quad ; i = 1, 2, 3, \dots, m$$

Exemple 2 Les six premiers polynômes de Legendre décalés définis sur l'intervalle $[0, 1]$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 2x - 1$$

$$P_2(x) = 6x^2 - 6x + 1$$

$$P_3(x) = 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1$$

$$P_4(x) = 70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x - 1$$

$$P_5(x) = 252x^5 - 360x^4 + 560x^3 - 210x^2 + 30x - 1$$

1.1.4 Ondelettes de Legendre unidimensionnelle

Définition 1.1.4 Les ondelettes de Legendre $\psi(k, n, m, x) \triangleq \psi_{nm}(x)$ sont des fonctions construites à partir des polynômes de Legendre et forment une base pour $L^2([0, 1])$, et elles ont quatre arguments : n argument, $k \in \mathbb{N}^*$, m est l'ordre des polynômes de Legendre et $x \in [0, 1]$. Elles sont définies sur l'intervalle $[0, 1]$:

$$\psi_{nm}(x) = \begin{cases} \sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}} L_m(2^k x - 2n + 1), & \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq x < \frac{n}{2^{k-1}} \\ 0, & \text{Sinon.} \end{cases} \quad (1.4)$$

ou [7]

$$\psi_{nm}(x) = \begin{cases} \sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}} P_m(2^k x - n + 1), & \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq x < \frac{n}{2^{k-1}} \\ 0, & \text{Sinon.} \end{cases}$$

où $m = 0, 1, \dots, M - 1$, $M \in \mathbb{N}^*$, $n = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$.

Remarques 1.1.1 1-Dans l'écriture de $\psi_{nm}(x)$, le terme (x) sera annulé pour commodité. Donc on pose $\psi_{nm}(x) = \psi_{nm}$.

2-Le coefficient $\sqrt{m + \frac{1}{2}}$ dans (1-4) est pour assurer l'orthonormalité, $a = 2^{\frac{k}{2}}$ est le paramètre de dilatation et $b = n2^{\frac{k}{2}}$ est le paramètre de translation.

Définition 1.1.5 On appelle vecteur des ondelettes de Legendre, le vecteur colonne $\Psi(x)$ de dimension $2^{k-1}M$ donné par:

$$\Psi(x) = [\psi_{10}, \dots, \psi_{1(M-1)}, \psi_{20}, \dots, \psi_{2(M-1)}, \dots, \psi_{2^{k-1}0}, \dots, \psi_{2^{k-1}(M-1)}]^T \quad (1.5)$$

Remarque 1.1.3 Le vecteur des ondelettes de Legendre a le rôle le plus important dans l'approximation des fonctions de $L^2([0, 1])$, Comme on va le voir dans la section 1.2.

Propriétés 1.1.3 Pour $m = 0, 1, \dots, M - 1$, $M \in \mathbb{N}^*$, $n = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ on a les propriétés suivantes:

1. $\psi_{nm}(x)\psi_{n'm'} = 0$ si $n \neq n'$.
2. $\psi_{n0}(x)\psi_{nm}(x) = \sqrt{2}\psi_{nm}(x)$.
3. $\psi_{n1}(x)\psi_{n1}(x) = \frac{4}{\sqrt{10}}\psi_{n2}(x) + \sqrt{2}\psi_{n0}(x)$.

Exemple 3 Expressions des ondelettes de Legendre de $L^2([0, 1])$. D'après(1-4) et en prenant $K = 2$ et $M = 3$ on obtient

$$\left. \begin{aligned} \psi_{10}(x) &= \sqrt{2} \\ \psi_{11}(x) &= \sqrt{6}(4x-1) \\ \psi_{12}(x) &= \sqrt{10}\left[\frac{3}{2}(4x-1)^2 - \frac{1}{2}\right] \end{aligned} \right\} 0 \leq x < \frac{1}{2},$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_{20}(x) &= \sqrt{2} \\ \psi_{21}(x) &= \sqrt{6}(4x-3) \\ \psi_{22}(x) &= \sqrt{10}\left[\frac{3}{2}(4x-3)^2 - \frac{1}{2}\right] \end{aligned} \right\} \frac{1}{2} \leq x < 1,$$

où $\{\psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{20}, \psi_{21}, \psi_{22}\}$ est une base d'ondelettes pour $L^2([0, 1])$, donc le vecteur des ondelettes de Legendre s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= [\psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{20}, \psi_{21}, \psi_{22}]^T \\ &= \left[\sqrt{2}, \sqrt{6}(4x-1), \sqrt{10}\left(\frac{3}{2}(4x-1)^2 - \frac{1}{2}\right), \sqrt{2}, \sqrt{6}(4x-3), \sqrt{10}\left(\frac{3}{2}(4x-3)^2 - \frac{1}{2}\right) \right]^T \end{aligned} \quad (1.6)$$

1.1.5 Le produit de deux vecteurs d'ondelettes de Legendre

La matrice du produit

D'après [22], le produit de deux vecteurs d'ondelettes de Legendre $\Psi(x), \Psi^T(x)$ peut être développé en une expression simple comme suit:

$$\Psi(x)\Psi^T(x) = \begin{pmatrix} \psi_{10}\psi_{10} & \cdots & \psi_{1(M-1)}\psi_{10} & \cdots & \psi_{10}\psi_{2^{K-1}0} & \cdots & \psi_{10}\psi_{2^{K-1}(M-1)} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \psi_{1(M-1)}\psi_{10} & \cdots & \psi_{1(M-1)}\psi_{1(M-1)} & \cdots & \psi_{1(M-1)}\psi_{2^{K-1}0} & \cdots & \psi_{1(M-1)}\psi_{2^{K-1}(M-1)} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \psi_{2^{K-1}0}\psi_{10} & \cdots & \psi_{2^{K-1}0}\psi_{1(M-1)} & \cdots & \psi_{2^{K-1}0}\psi_{2^{K-1}0} & \cdots & \psi_{2^{K-1}0}\psi_{2^{K-1}(M-1)} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \psi_{2^{K-1}(M-1)}\psi_{10} & \cdots & \psi_{2^{K-1}(M-1)}\psi_{1(M-1)} & \cdots & \psi_{2^{K-1}(M-1)}\psi_{2^{K-1}0} & \cdots & \psi_{2^{K-1}(M-1)}\psi_{2^{K-1}(M-1)} \end{pmatrix}$$

En utilisant la propriété d'orthonormalité suivante

$$\psi_{nm}(x)\psi_{n'm'} = 0 \text{ si } n \neq n'$$

on obtient :

$$\Psi(x)\Psi^T(x) = A \quad (1.7)$$

où A est une matrice de dimension $2^{K-1}M$ appelée la matrice du produit, définie par [22] :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & O & \cdots & O \\ O & A_2 & O & \cdots & O \\ O & O & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & O \\ O & O & \cdot & O & A_{2^{K-1}} \end{pmatrix}$$

où A_i , $i = 1, 2, \dots, 2^{K-1}$ sont des matrices de dimension M données par:

$$A_i = \begin{pmatrix} \psi_{i0}\psi_{i0} & \cdots & \psi_{i(M-1)}\psi_{i0} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \psi_{i0}\psi_{i(M-1)} & \cdots & \psi_{i(M-1)}\psi_{i(M-1)} \end{pmatrix}$$

et O est la matrice nulle de dimension M .

Exemple 4 Pour $M = 3$, $k = 2$ et en utilisant les propriétés suivantes

$$\begin{cases} \psi_{n0}(x)\psi_{nm}(x) = \sqrt{2}\psi_{nm}(x) \\ \psi_{n1}(x)\psi_{n1}(x) = \frac{4}{\sqrt{10}}\psi_{n2}(x) + \sqrt{2}\psi_{n0}(x). \end{cases}$$

on obtient

$$\Psi(x)\Psi^T(x) = A = \begin{pmatrix} A_1 & O_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & A_2 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

où A_1, A_2 et $O_{3 \times 3}$ sont des matrices 3×3 données par:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\psi_{10} & \sqrt{2}\psi_{11} & \sqrt{2}\psi_{12} \\ \sqrt{2}\psi_{11} & \frac{4}{\sqrt{10}}\psi_{12} + \sqrt{2}\psi_{10} & \frac{4}{\sqrt{10}}\psi_{11} \\ \sqrt{2}\psi_{12} & \frac{4}{\sqrt{10}}\psi_{11} & \frac{20}{7\sqrt{10}}\psi_{12} + \sqrt{2}\psi_{10} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\psi_{20} & \sqrt{2}\psi_{21} & \sqrt{2}\psi_{22} \\ \sqrt{2}\psi_{21} & \frac{4}{\sqrt{10}}\psi_{22} + \sqrt{2}\psi_{20} & \frac{4}{\sqrt{10}}\psi_{21} \\ \sqrt{2}\psi_{22} & \frac{4}{\sqrt{10}}\psi_{21} & \frac{20}{7\sqrt{10}}\psi_{22} + \sqrt{2}\psi_{20} \end{pmatrix}$$

et

$$O_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice opérationnelle du produit

Pour tout vecteur donné e de dimension $2^{k-1}M$, le produit de deux fonctions vectorielles d'ondelettes de Legendre a la propriété suivante:

$$e^T \Psi \Psi^T = \Psi^T \tilde{E}, \quad (1.9)$$

où \tilde{E} est une matrice $(2^{k-1}M) \times (2^{k-1}M)$ dépendant du vecteur e , qui est appelée la matrice opérationnelle du produit des fonctions vectorielles d'ondelettes de Legendre. (voir [23])

Exemple 5 Pour $M = 3$, $k = 2$, on peut écrire pour un vecteur e de dimension 6,

$$e^T = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$$

on a

$$e^T \Psi \Psi^T = \Psi^T \tilde{E},$$

où \tilde{E} la matrice d'opération produit des fonctions vectorielles d'ondelettes de Legendre est de dimension 6 qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}e_1 & \sqrt{2}e_2 & \sqrt{2}e_3 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}e_2 & \frac{4}{\sqrt{10}}e_3 + \sqrt{2}e_1 & \frac{4}{\sqrt{10}}e_2 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}e_3 & \frac{4}{\sqrt{10}}e_2 & \frac{20}{7\sqrt{10}}e_3 + \sqrt{2}e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}e_4 & \sqrt{2}e_5 & \sqrt{2}e_6 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}e_5 & \frac{4}{\sqrt{10}}e_6 + \sqrt{2}e_4 & \frac{4}{\sqrt{10}}e_5 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}e_6 & \frac{4}{\sqrt{10}}e_5 & \frac{20}{7\sqrt{10}}e_6 + \sqrt{2}e_4 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

1.1.6 Ondelettes de Legendre bidimensionnelles

Définition et propriété

Définition 1.1.6 Les ondelettes de Legendre bidimensionnelles dans $L^2([0, 1] \times [0, 1])$ sont les ondelettes définies sous la forme suivante :

$$\psi_{n,m,n',m'}(x, y) = \begin{cases} A_{m,m'} L_m(2^k x - 2n + 1) L_{m'}(2^{k'} y - 2n' + 1), & \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq x \leq \frac{n}{2^{k-1}}, \\ & \frac{n'-1}{2^{k'-1}} \leq y \leq \frac{n'}{2^{k'-1}}, \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

où $A_{m,m'} = \sqrt{(m + \frac{1}{2})(m' + \frac{1}{2})} 2^{\frac{k+k'}{2}}$ et $n = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}$, $n' = 1, 2, 3, \dots, 2^{k'-1}$, $m = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ et $m' = 0, 1, 2, \dots, M' - 1$.

Remarques 1.1.2 1- Les ondelettes de Legendre bidimensionnelles forment une base d'ondelettes pour $L^2([0, 1] \times [0, 1])$. Elles sont des outils appropriés pour résoudre des problèmes bidimensionnelles.

2- Par définition, la région $[0, 1] \times [0, 1]$ est divisée en $2^{k-1} \times 2^{k'-1}$ sous-régions. Les paramètres M et M' désignent le nombre de polynômes de Legendre $P_m, P_{m'}$ aux variables x et y , respectivement. Donc, sur chacune des sous-régions, $M \times M'$ ondelettes sont construits.

3-Par commodité, en considérant $\{\psi_{nm}(x)\}$ et $\{\psi_{n'm'}(y)\}$, comme deux ensembles d'ondelettes de Legendre unidimensionnelles des variables x et y , respectivement, alors $\{\psi_{n,m,n',m'}(x,y)\}$ est l'ensemble d'ondelettes de Legendre bidimensionnelles sur le domaine $[0,1] \times [0,1]$, et qui peuvent être écrites comme suit:

$$\psi_{n,m,n',m'}(x,y) \stackrel{\Delta}{=} \psi_{nmn'm'}(x,y) = \psi_{nm}(x) \psi_{n'm'}(y) \quad (1.11)$$

Propriété 1.1.1 *Les OLs bidimensionnelles sont orthonormales sur $[0,1] \times [0,1]$ et leur condition d'orthonormalité est*

$$\int_0^1 \int_0^1 \psi_{n,m,n',m'}(x,y) \psi_{n_1,m_1,n'_1,m'_1}(x,y) dx dy = \delta_{n,n_1} \delta_{m,m_1} \delta_{n',n'_1} \delta_{m',m'_1}$$

Définition 1.1.7 *On appelle vecteur des OLs bidimensionnelles, le vecteur colonne $\Psi(x,y)$ de dimension $(2^{k-1}2^{k'-1}MM') \times 1$ donné par:*

$$\Psi(x,y) = [\psi_{1010}, \dots, \psi_{101(M'-1)}, \psi_{1020}, \dots, \psi_{102(M'-1)}, \dots, \psi_{2^{K-1}(M-1)2^{K'-1}(M'-1)}]^T$$

La matrice opérationnelle du produit (voir [10])

Pour tout vecteur donné e de dimension $2^{K-1}2^{K'-1}MM'$, la matrice opérationnelle du produit \tilde{E} est une matrice de dimension $(2^{K-1}2^{K'-1}MM') \times (2^{K-1}2^{K'-1}MM')$ définie sous la forme suivante :

$$\Psi(x,y) \Psi^T(x,y) e = \tilde{E} \Psi(x,y) \quad (1.12)$$

où \tilde{E} donnée par:

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_1 & O & O & \dots & O \\ O & \tilde{E}_2 & O & \dots & O \\ O & O & \tilde{E}_3 & \dots & O \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ O & O & O & \dots & \tilde{E}_{2^{K-1}} \end{pmatrix}$$

où O est la matrice nulle de dimension $(2^{K'-1}MM')$ et \tilde{E}_i , $i = 1, 2, \dots, 2^{K'-1}$ sont des matrices symétriques de dimension $(2^{K'-1}MM')$ donnée par:

$$\tilde{E}_i = \begin{pmatrix} S_{11}^{(i)} & S_{12}^{(i)} & \dots & S_{1M}^{(i)} \\ S_{21}^{(i)} & S_{22}^{(i)} & \dots & S_{2M}^{(i)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{M1}^{(i)} & S_{M2}^{(i)} & \dots & S_{MM}^{(i)} \end{pmatrix}$$

et $S_{tj}^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, 2^{K'-1}$, $t, j = 1, 2, \dots, M$ sont des matrices diagonales de dimension $2^{K'-1}M'$ donnée par:

$$S_{tj}^{(i)} = \begin{pmatrix} \tilde{S}_1^{(itj)} & O' & \dots & O' \\ O' & \tilde{S}_2^{(itj)} & \dots & O' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ O' & O' & \dots & \tilde{S}_{2^{K'-1}}^{(itj)} \end{pmatrix}$$

où O' est la matrice nulle de dimension M' et $\tilde{S}_r^{(itj)}$, $r = 1, 2, \dots, 2^{K'-1}$, $i = 1, 2, \dots, 2^{K'-1}$, $t, j = 1, 2, \dots, M$ sont des matrices symétriques de dimension M' données par:

$$\left(\tilde{S}_r^{(itj)} \right)_{s,w} = ((\Psi \Psi^T e)_n, \Psi_m)$$

où $r = 1, 2, \dots, 2^{K'-1}$, $i = 1, 2, \dots, 2^{K'-1}$, $t, j = 1, 2, \dots, M$, $s, w = 1, 2, \dots, M'$, $n = (i-1)2^{K'-1}MM' + (t-1)2^{K'-1}M' + (r-1)M' + s$

et $m = (i-1)2^{K'-1}MM' + (j-1)2^{K'-1}M' + (r-1)M' + w$.

Exemple 6 Pour $k = k' = M = M' = 2$ et pour tout vecteur donné e de dimension 16 c.a.d $e^T = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_{16})$, la matrice opérationnelle du produit $\tilde{E}_{16 \times 16}$ est de la forme suivante

$$\tilde{E}_{16 \times 16} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_1 & O \\ O & \tilde{E}_2 \end{pmatrix},$$

où

$$\tilde{E}_1 = \begin{pmatrix} 2e_1 & 2e_2 & 0 & 0 & 2e_5 & 2e_6 & 0 & 0 \\ 2e_2 & 2e_1 & 0 & 0 & 2e_6 & 2e_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e_3 & 2e_4 & 0 & 0 & 2e_7 & 2e_8 \\ 0 & 0 & 2e_4 & 2e_3 & 0 & 0 & 2e_8 & 2e_7 \\ 2e_5 & 2e_6 & 0 & 0 & 2e_1 & 2e_2 & 0 & 0 \\ 2e_6 & 2e_5 & 0 & 0 & 2e_2 & 2e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e_7 & 2e_8 & 0 & 0 & 2e_3 & 2e_4 \\ 0 & 0 & 2e_8 & 2e_7 & 0 & 0 & 2e_4 & 2e_3 \end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{E}_2 = \begin{pmatrix} 2e_9 & 2e_{10} & 0 & 0 & 2e_{13} & 2e_{14} & 0 & 0 \\ 2e_{10} & 2e_9 & 0 & 0 & 2e_{14} & 2e_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e_{11} & 2e_{12} & 0 & 0 & 2e_{15} & 2e_{16} \\ 0 & 0 & 2e_{12} & 2e_{11} & 0 & 0 & 2e_{16} & 2e_{15} \\ 2e_{13} & 2e_{14} & 0 & 0 & 2e_9 & 2e_{10} & 0 & 0 \\ 2e_{14} & 2e_{13} & 0 & 0 & 2e_{10} & 2e_9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e_{15} & 2e_{16} & 0 & 0 & 2e_{11} & 2e_{12} \\ 0 & 0 & 2e_{16} & 2e_{15} & 0 & 0 & 2e_{12} & 2e_{11} \end{pmatrix}.$$

1.2 développement en serie d'ondelettes de Legendre et approximation

1.2.1 Fonction à une variable

Développement en serie d'ondelettes de Legendre

Proposition 1.2.1 *Toute fonction $f(x)$ définie sur $[0, 1)$ peut être exprimée par une serie d'ondelettes de Legendre sous la forme:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(x) , \quad (1.13)$$

avec $c_{nm} = \langle f(x), \psi_{nm}(x) \rangle$ et \langle, \rangle indique le produit scalaire dans $L^2([0, 1])$ défini par

$$c_{nm} = \int_0^1 f(x) \psi_{nm}(x) dx.$$

Approximation

En tronquant la série infinie en (1.13), on peut obtenir une approximation de $f(x)$ comme suit :

$$f(x) \simeq \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{nm}(x) = C^T \Psi(x), \quad (1.14)$$

où C^T indique la transposée de C tel que C est un $\hat{m} = 2^{k-1}M$ vecteur colonne donné par:

$$C = [c_{10}, \dots, c_{1(M-1)}, c_{20}, \dots, c_{2(M-1)}, \dots, c_{2^{k-1}0}, \dots, c_{2^{k-1}(M-1)}]^T, \quad (1.15)$$

et $\Psi(x)$ est le vecteur des ondelettes de Legendre défini en (1 – 5)

$$\Psi(x) = [\psi_{10}, \dots, \psi_{1(M-1)}, \psi_{20}, \dots, \psi_{2(M-1)}, \dots, \psi_{2^{k-1}0}, \dots, \psi_{2^{k-1}(M-1)}]^T$$

Remarques 1.2.1 1-Pour simplifier, l'équation (1.14) peut s'écrire :

$$f(x) \simeq \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_i \psi_i(x) = C^T \Psi(x), \quad (1.16)$$

où $c_i = c_{nm}$ et $\psi_i(x) = \psi_{nm}(x)$ et l'indice i est défini par la relation suivante: $i = M(n-1) + m + 1$. Donc

$$C \triangleq [c_1, c_2, c_3, \dots, c_{\hat{m}}]^T,$$

et

$$\Psi(x) \triangleq [\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots, \psi_{\hat{m}}(x)]^T. \quad (1.17)$$

2-En insérant les points de collocation $x_i = \frac{2i-1}{2\hat{m}}$, ($i = 1, 2, \dots, \hat{m}$) et $\hat{m} = 2^{k-1}M$ dans

(1.17), nous définissons la matrice

$$\phi_{\hat{m} \times \hat{m}} \triangleq \left[\Psi\left(\frac{1}{2\hat{m}}\right), \Psi\left(\frac{3}{2\hat{m}}\right), \dots, \Psi\left(\frac{2\hat{m}-1}{2\hat{m}}\right) \right] = \phi \quad (1.18)$$

dite matrice d'ondelettes de Legendre.

Exemple 7 1- En prenant $K = 2$ et $M = 3$, on peut écrire la fonction $f(x) = 1$ dans la base des ondelettes de Legendre de $L^2([0, 1])$.

En effet,

$$1 \simeq \sum_{n=1}^2 \sum_{m=0}^2 c_{nm} \psi_{nm}(x) = C^T \Psi(x),$$

où,

$$\begin{aligned} c_{nm} &= \langle 1, \psi_{nm}(x) \rangle \\ &= \int_0^1 1 \times \psi_{nm}(x) dx. \quad n = 1, 2 \text{ et } m = 0, 1, 2 \end{aligned}$$

Pour les valeurs $k = 2$ et $M = 3$ et d'après (1.6), on a:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{10}(x) &= \sqrt{2} \\ \psi_{11}(x) &= \sqrt{6}(4x - 1) \\ \psi_{12}(x) &= \sqrt{10} \left[\frac{3}{2}(4x - 1)^2 - \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \right\} 0 \leq x < \frac{1}{2},$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_{20}(x) &= \sqrt{2} \\ \psi_{21}(x) &= \sqrt{6}(4x - 3) \\ \psi_{22}(x) &= \sqrt{10} \left[\frac{3}{2}(4x - 3)^2 - \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \right\} \frac{1}{2} \leq x < 1,$$

donc, on obtient

$$\begin{cases} c_{10} = \int_0^1 \psi_{10}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c_{11} = \int_0^1 \psi_{11}(x) dx = 0 \\ c_{12} = \int_0^1 \psi_{12}(x) dx = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} c_{20} = \int_0^1 \psi_{20}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c_{21} = \int_0^1 \psi_{21}(x) dx = 0 \\ c_{22} = \int_0^1 \psi_{22}(x) dx = 0 \end{cases}$$

d'où

$$1 \approx \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right]^T \Psi(x) = d^T \Psi(x). \quad (1.19)$$

et d'après [5] et en suivant le même procédé, on obtient

$$x \approx X_1^T \Psi(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{6}}{24}, 0, \frac{3\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{6}}{24}, 0 \right) \Psi(x)$$

$$\text{et } x^2 \approx X_2^T \Psi(x) = \left(\frac{1}{48}\sqrt{2}, \frac{1}{96}\sqrt{6}, \frac{1}{480}\sqrt{10}, \frac{7}{48}\sqrt{2}, \frac{1}{32}\sqrt{6}, \frac{1}{480}\sqrt{10} \right) \Psi(x)$$

2-De la même manière et pour les valeurs $k = 3$ et $M = 3$, on obtient le vecteur $\Psi(x)$:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3}(8x-1) \\ \sqrt{5}[3(8x-1)^2-1] \\ 2 \\ 2\sqrt{3}(8x-3) \\ \sqrt{5}[3(8x-3)^2-1] \\ 2 \\ 2\sqrt{3}(8x-5) \\ \sqrt{5}[3(8x-5)^2-1] \\ 2 \\ 2\sqrt{3}(8x-7) \\ \sqrt{5}[3(8x-7)^2-1] \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

l'écriture de $\sin x$ dans la base des ondelettes de Legendre est comme suit:

$$\sin x \approx V^T \Psi(x) = \begin{pmatrix} 3.1088 \times 10^{-2} \\ 1.7873 \times 10^{-2} \\ -7.2518 \times 10^{-5} \\ 9.1330 \times 10^{-2} \\ 1.6762 \times 10^{-2} \\ -2.1305 \times 10^{-4} \\ 0.14589 \\ 1.4609 \times 10^{-2} \\ -3.4033 \times 10^{-4} \\ 0.19139 \\ 1.1547 \times 10^{-2} \\ -4.4645 \times 10^{-4} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3}(8x-1) \\ \sqrt{5}[3(8x-1)^2-1] \\ 2 \\ 2\sqrt{3}(8x-3) \\ \sqrt{5}[3(8x-3)^2-1] \\ 2 \\ 2\sqrt{3}(8x-5) \\ \sqrt{5}[3(8x-5)^2-1] \\ 2 \\ 2\sqrt{3}(8x-7) \\ \sqrt{5}[3(8x-7)^2-1] \end{pmatrix}$$

d'où

$$\sin x \approx -0.23019x^2 + 1.1396x - 3.2262 \times 10^{-2} = k(x)$$

Représentation graphique :

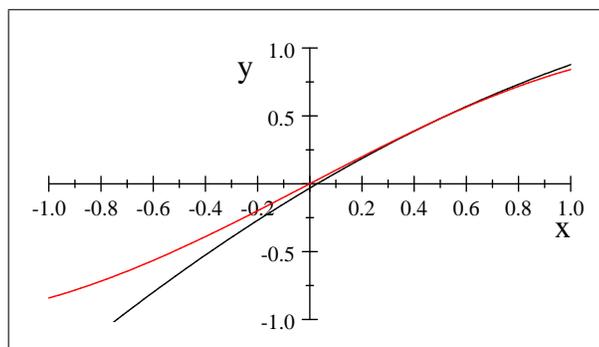


Figure 1: Représentation de $\sin x$ et $k(x)$.

3-On obtient l'écriture de e^x dans la base des ondelettes de Legendre comme suit

$$e^x \approx \begin{pmatrix} 0.56805 \\ 4.0953 \times 10^{-2} \\ 1.3212 \times 10^{-3} \\ 0.72939 \\ 5.2585 \times 10^{-2} \\ 1.6964 \times 10^{-3} \\ 0.93656 \\ 6.7520 \times 10^{-2} \\ 2.1782 \times 10^{-3} \\ 1.2026 \\ 8.6697 \times 10^{-2} \\ 2.7969 \times 10^{-3} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3}(8x-1) \\ \sqrt{5}(3(8x-1)^2-1) \\ 2 \\ 2\sqrt{3}(8x-3) \\ \sqrt{5}(3(8x-3)^2-1) \\ 2 \\ 2\sqrt{3}(8x-5) \\ \sqrt{5}(3(8x-5)^2-1) \\ 2 \\ 2\sqrt{3}(8x-7) \\ \sqrt{5}(3(8x-7)^2-1) \end{pmatrix}$$

d'où

$$e^x \approx 0.85788x^2 + 0.7269x + 1.0728 = h(x)$$

Représentation graphique :

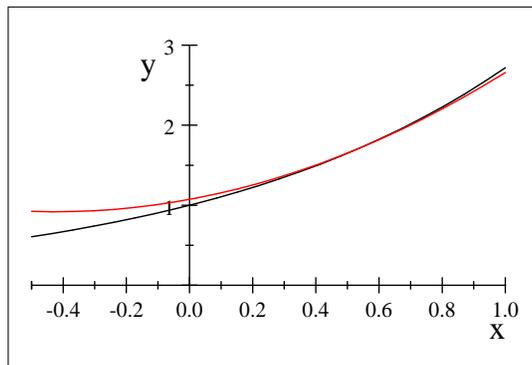


Figure 2: Représentation de e^x et $h(x)$.

1.2.2 Fonction à deux variables

Développement en serie d'ondelettes de Legendre

Proposition 1.2.2 *Toute fonction $f(x, y) \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$ peut-être exprimée sous la forme[18] :*

$$f(x, y) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} c_{nmn'm'} \psi_{nmn'm'}(x, y) \quad (1.21)$$

avec

$$c_{nmn'm'} = \langle f(x, y), \psi_{nmn'm'}(x, y) \rangle \quad (1.22)$$

et \langle, \rangle indique le produit intérieur dans $L^2([0, 1] \times [0, 1])$ défini par

$$c_{nmn'm'} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \psi_{nmn'm'}(x, y) dx dy \quad (1.23)$$

Approximation

L'approximation de la fonction $f(x, y)$ est obtenue en tronquant la série infinie donnée en (1.21), comme suit :

$$f(x, y) \simeq \sum_{n=1}^{2^k-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n'=1}^{2^{k'}-1} \sum_{m'=0}^{M'-1} c_{nmn'm'} \psi_{nmn'm'}(x, y) \quad (1.24)$$

d'où

$$f(x, y) \simeq C^T \Psi(x, y) \quad (1.25)$$

où C et $\Psi(x, y)$ sont respectivement la matrice des coefficients et la matrice vectorielle des ondelettes, qui sont de type $2^{k-1}2^{k'-1}MM' \times 1$ et données sous la forme:

$$\begin{aligned}
 C = & \left[c_{1010}, \dots, c_{101(M'-1)}, c_{1020}, \dots, c_{102(M'-1)}, c_{1030}, \dots, c_{103(M'-1)}, \dots, \right. \\
 & c_{102^{K'-1}0}, \dots, c_{102^{K'-1}(M'-1)}, \dots, c_{1110}, \dots, c_{111(M'-1)}, c_{1120}, \dots, c_{112(M'-1)}, \\
 & c_{1130}, \dots, c_{113(M'-1)}, \dots, c_{112^{K'-1}0}, \dots, c_{112^{K'-1}(M'-1)}, \dots, c_{1(M-1)2^{K'-1}0}, \dots, \\
 & c_{1(M-1)2^{K'-1}(M'-1)}, c_{2010}, \dots, c_{201(M'-1)}, c_{2020}, \dots, c_{202(M'-1)}, c_{2030}, \dots, c_{203(M'-1)} \\
 & , \dots, c_{202^{K'-1}0}, c_{202^{K'-1}1}, \dots, c_{202^{K'-1}(M'-1)}, \dots, c_{2110}, \dots, c_{211(M'-1)}, \\
 & c_{2120}, \dots, c_{212(M'-1)}, c_{2130}, \dots, c_{213(M'-1)}, \dots, c_{212^{K'-1}0}, c_{212^{K'-1}1}, \dots, \\
 & c_{212^{K'-1}(M'-1)}, \dots, c_{2^{K-1}010}, \dots, c_{2^{K-1}11(M'-1)}, \dots, c_{2^{K-1}020}, \dots, c_{2^{K-1}02(M'-1)}, \dots, \\
 & \left. c_{2^{K-1}02^{K'-1}0}, c_{2^{K-1}02^{K'-1}(M'-1)}, \dots, c_{2^{K-1}(M-1)2^{K'-1}0}, \dots, c_{2^{K-1}(M-1)2^{K'-1}(M'-1)} \right]^T
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

de la même manière, on trouve $\Psi(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 \Psi(x, y) = & \left[\psi_{1010}, \dots, \psi_{101(M'-1)}, \psi_{1020}, \dots, \psi_{102(M'-1)}, \psi_{1030}, \dots, \right. \\
 & \psi_{103(M'-1)}, \dots, \psi_{102^{K'-1}0}, \dots, \psi_{102^{K'-1}(M'-1)}, \dots, \psi_{1110}, \dots, \\
 & \psi_{111(M'-1)}, \psi_{1120}, \dots, \psi_{112(M'-1)}, \psi_{1130}, \dots, \psi_{113(M'-1)}, \\
 & \dots, \psi_{112^{K'-1}0}, \dots, \psi_{112^{K'-1}(M'-1)}, \dots, \psi_{1(M-1)2^{K'-1}0}, \dots, \\
 & \psi_{1(M-1)2^{K'-1}(M'-1)}, \psi_{2010}, \dots, \psi_{201(M'-1)}, \psi_{2020}, \dots, \\
 & \psi_{202(M'-1)}, \psi_{2030}, \dots, \psi_{203(M'-1)}, \dots, \psi_{202^{K'-1}0}, \psi_{202^{K'-1}1}, \dots, \\
 & \psi_{202^{K'-1}(M'-1)}, \dots, \psi_{2110}, \dots, \psi_{211(M'-1)}, \psi_{2120}, \dots, \\
 & \psi_{212(M'-1)}, \psi_{2130}, \dots, \psi_{213(M'-1)}, \dots, \psi_{212^{K'-1}0}, \psi_{212^{K'-1}1}, \dots, \\
 & \psi_{212^{K'-1}(M'-1)}, \dots, \psi_{2^{K-1}010}, \dots, \psi_{2^{K-1}11(M'-1)}, \dots, \psi_{2^{K-1}020}, \\
 & \dots, \psi_{2^{K-1}02(M'-1)}, \dots, \psi_{2^{K-1}02^{K'-1}0}, \psi_{2^{K-1}02^{K'-1}(M'-1)}, \dots, \\
 & \left. \psi_{2^{K-1}(M-1)2^{K'-1}0}, \dots, \psi_{2^{K-1}(M-1)2^{K'-1}(M'-1)} \right]^T.
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Remarques 1.2.2 1. En utilisant la relation (1.11), on peut transformer l'écriture dans (1.25) a la forme suivante:

$$f(x, y) \simeq C^T \Psi(x, y) = \Psi^T(x) C' \Psi(y) \tag{1.28}$$

où C' est la matrice des coefficients de dimension $2^{k-1}M \times 2^{k'-1}M'$ telle que:

$$C' = \begin{pmatrix} c_{1010} & \dots & c_{101(M'-1)} & c_{1020} \dots c_{102(M'-1)} \dots c_{102^{K'-1}(M'-1)} \\ c_{1110} & \dots & c_{111(M'-1)} & c_{1120} \dots c_{112(M'-1)} \dots c_{112^{K'-1}(M'-1)} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2^{K-1}(M-1)10} \dots c_{2^{K-1}(M-1)1(M'-1)} \dots c_{2^{K-1}(M-1)2^{K'-1}0} \dots c_{2^{K-1}(M-1)2^{K'-1}(M'-1)} \end{pmatrix}$$

2. Pour plus de simplification de l'écriture de $\Psi(x, y)$, on pose

$$\Psi_{nn'}(x, y) = [\psi_{n0n'0}, \psi_{n0n'1}, \dots, \psi_{n0n'(M'-1)}, \psi_{n1n'0}, \psi_{n1n'1}, \dots, \psi_{n1n'(M'-1)}, \dots, \psi_{n(M-1)n'0}, \psi_{n(M-1)n'1}, \dots, \psi_{n(M-1)n'(M'-1)}]^T$$

qui est un vecteur de dimension MM' , en substituant dans (1.27) on obtient:

$$\Psi(x, y) = [\Psi_{11}^T, \Psi_{12}^T, \dots, \Psi_{12^{K'-1}}^T, \Psi_{21}^T, \Psi_{22}^T, \dots, \Psi_{22^{K'-1}}^T, \dots, \Psi_{2^{K-1}1}^T, \Psi_{2^{K-1}2}^T, \dots, \Psi_{2^{K-1}2^{K'-1}}^T]^T \quad (1.29)$$

3. Dans l'écriture de $\Psi_{ij}^T(x, y)$, le terme (x, y) est annulé pour commodité. La fonction $\psi_{nmm'}(x, y)$ est attachée à la $k^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\Psi(x, y)$ où

$$k = \left[\left[(n-1)2^{k'-1} + (n'-1) \right] M + m \right] M' + (m'+1).$$

Produit de deux vecteurs

On peut clairement conclure de la propriété (1.7) et (1.29) que

$$\Psi(x, y) \cdot \Psi^T(x, y) = \begin{bmatrix} \Psi_{11} \\ \Psi_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi_{2^{K-1}2^{K'-1}} \end{bmatrix} \cdot [\Psi_{11}^T, \Psi_{12}^T, \dots, \Psi_{2^{K-1}2^{K'-1}}^T]$$

Donc

$$\Psi(x, y) \cdot \Psi^T(x, y) = \begin{pmatrix} \Psi_{11} \cdot \Psi_{11}^T & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \Psi_{22} \cdot \Psi_{22}^T & 0 \dots & 0 \\ \cdot & 0 & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 \dots & 0 & \Psi_{2^{k-1}2^{k'-1}} \cdot \Psi_{2^{k-1}2^{k'-1}}^T \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

Donc, d'après (1.11) l'intégrale du produit de deux vecteurs des ondelettes de Legendre est:

$$\int_0^1 \int_0^1 \Psi(x, y) \cdot \Psi^T(x, y) dx dy = I \quad (1.31)$$

où I est la matrice d'identité de dimension $2^{k-1}2^{k'-1}MM'$.

Exemple 8 1. Dans cet exemple, on va approximer la fonction $f(x; y) = 1$ dans la base d'ondelettes de Legendre pour $k = k' = 2$ et $M = M' = 2$. On pose

$$1 \simeq \sum_{n=1}^2 \sum_{m=0}^1 \sum_{n'=1}^2 \sum_{m'=0}^1 c_{nmn'm'} \psi_{nmn'm'}(x, y) = C^T \Psi(x, y).$$

Calculons les 16 Composantes du vecteur $\Psi(x, y)$. D'après (1.10), on obtient

$$\left. \begin{array}{l} \psi_{1010} = 2 \\ \psi_{1011} = 2\sqrt{3}(4y - 1) \\ \psi_{1110} = 2\sqrt{3}(4x - 1) \\ \psi_{1111} = 6(4x - 1)(4y - 1) \end{array} \right\} \text{pour } 0 \leq x < \frac{1}{2}, 0 \leq y < \frac{1}{2} \quad (1.32)$$

$$\left. \begin{array}{l} \psi_{1020} = 2 \\ \psi_{1021} = 2\sqrt{3}(4y - 3) \\ \psi_{1120} = 2\sqrt{3}(4x - 1) \\ \psi_{1121} = 6(4x - 1)(4y - 3) \end{array} \right\} \text{pour } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq y \leq 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \psi_{2010} = 2 \\ \psi_{2011} = 2\sqrt{3}(4y - 1) \\ \psi_{2110} = 2\sqrt{3}(4x - 3) \\ \psi_{2111} = 6(4x - 3)(4y - 1) \end{array} \right\} \text{pour } \frac{1}{2} \leq x < 1, 0 \leq y < \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \psi_{2020} = 2 \\ \psi_{2021} = 2\sqrt{3}(4y - 3) \\ \psi_{2120} = 2\sqrt{3}(4x - 3) \\ \psi_{2121} = 6(4x - 3)(4y - 3) \end{array} \right\} \text{pour } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \frac{1}{2} \leq y \leq 1$$

Donc

$$\Psi(x, y) = \begin{pmatrix} \Psi_{11}(x, y) \\ \Psi_{12}(x, y) \\ \Psi_{21}(x, y) \\ \Psi_{22}(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{où } \Psi_{11}(x, y) &= \left(2, 2\sqrt{3}(4y - 1), 2\sqrt{3}(4x - 1), 6(4x - 1)(4y - 1) \right)^T, \\ \Psi_{12}(x, y) &= \left(2, 2\sqrt{3}(4y - 3), 2\sqrt{3}(4x - 1), 6(4x - 1)(4y - 3) \right)^T, \\ \Psi_{21}(x, y) &= \left(2, 2\sqrt{3}(4y - 1), 2\sqrt{3}(4x - 3), 6(4x - 3)(4y - 1) \right)^T, \\ \Psi_{22}(x, y) &= \left(2, 2\sqrt{3}(4y - 3), 2\sqrt{3}(4x - 3), 6(4x - 3)(4y - 3) \right)^T. \end{aligned}$$

Maintenant on va calculer $c_{nmn'm'}$ les 16 coefficients du vecteur C . D'après (1.23)

on a:

$$c_{nmn'm'} = \langle 1, \psi_{nmn'm'}(x, y) \rangle_{L^2([0;1] \times [0;1])} = \int_0^1 \int_0^1 1 \times \psi_{nmn'm'}(x, y) dx dy, \text{ donc}$$

$$c_{1010} = \int_0^1 \int_0^1 \psi_{1010}(x, y) dx dy = \frac{1}{2}$$

et

$$c_{1011} = \int_0^1 \int_0^1 \psi_{1011}(x, y) dx dy = 0$$

de la même manière, on trouve les 16 Composantes du vecteur C

$$\begin{aligned} c_{1010} &= \frac{1}{2}, & c_{1011} &= 0, & c_{1020} &= \frac{1}{2}, & c_{1021} &= 0 \\ c_{1110} &= 0, & c_{1111} &= 0, & c_{1120} &= 0, & c_{1121} &= 0 \\ c_{2010} &= \frac{1}{2}, & c_{2011} &= 0, & c_{2020} &= \frac{1}{2}, & c_{2021} &= 0 \\ c_{2110} &= 0, & c_{2111} &= 0, & c_{2120} &= 0, & c_{2121} &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$C^T = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0 \right), \quad (1.33)$$

donc

$$1 \approx \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0 \right) \Psi(x, y). \quad (1.34)$$

D'autre part et d'après (1.28), on peut écrire

$$1 \approx \Psi^T(x) C' \Psi(y)$$

avec

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= [\psi_{10}(x), \psi_{11}(x), \psi_{20}(x), \psi_{21}(x)]^T \\ &= [\sqrt{2}, \sqrt{6}(4x-1), \sqrt{2}, \sqrt{6}(4x-3)]^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(y) &= [\psi_{10}(y), \psi_{11}(y), \psi_{20}(y), \psi_{21}(y)]^T \\ &= [\sqrt{2}, \sqrt{6}(4y-1), \sqrt{2}, \sqrt{6}(4y-3)]^T \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} C' &= \begin{pmatrix} c_{1010} & c_{1011} & c_{1020} & c_{1021} \\ c_{1110} & c_{1111} & c_{1120} & c_{1121} \\ c_{2010} & c_{2011} & c_{2020} & c_{2021} \\ c_{2110} & c_{2111} & c_{2120} & c_{2121} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. De la même manière, on trouve le développement des ondelettes de Legendre de la fonction $f(x; y) = x^2 + y^2$ pour $k = k' = 2$ et $M = M' = 3$. On pose:

$f(x; y) \approx \Psi^T(x)C'\Psi(y)$ où

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{6}(4x-1) \\ \frac{\sqrt{10}}{2}(3(4x-1)^2-1) \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{6}(4x-3) \\ \frac{\sqrt{10}}{2}(3(4x-3)^2-1) \end{pmatrix}, \quad \Psi(y) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{6}(4y-1) \\ \frac{\sqrt{10}}{2}(3(4y-1)^2-1) \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{6}(4y-3) \\ \frac{\sqrt{10}}{2}(3(4y-3)^2-1) \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

et

$$C' = \begin{pmatrix} \frac{1}{48} & \frac{1}{192}\sqrt{3} & \frac{1}{960}\sqrt{5} & \frac{1}{12} & \frac{35}{192}\sqrt{3} & \frac{571}{960}\sqrt{5} \\ \frac{1}{192}\sqrt{3} & 0 & 0 & \frac{1}{192}\sqrt{3} & \frac{1}{32} & \frac{1}{32}\sqrt{15} \\ \frac{91}{960}\sqrt{5} & \frac{1}{32}\sqrt{15} & \frac{1}{32} & \frac{451}{960}\sqrt{5} & \frac{31}{30}\sqrt{15} & \frac{271}{16} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{192}\sqrt{3} & \frac{1}{960}\sqrt{5} & \frac{7}{48} & \frac{59}{192}\sqrt{3} & \frac{931}{960}\sqrt{5} \\ \frac{35}{192}\sqrt{3} & \frac{1}{32} & \frac{1}{480}\sqrt{15} & \frac{59}{192}\sqrt{3} & \frac{31}{16} & \frac{61}{30}\sqrt{15} \\ \frac{1}{960}\sqrt{5} & 0 & 0 & \frac{1}{960}\sqrt{5} & \frac{1}{480}\sqrt{15} & \frac{1}{32} \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

Donc, on obtient:

$$f(x; y) \approx 24480.0x^2y^2 - 35907.x^2y + 12707.x^2 - 10797.xy^2 + 15837.xy - 5604.1x + 31.75y^2 - 46.625y + 0.000013 = k(x, y)$$

Représentation graphique:

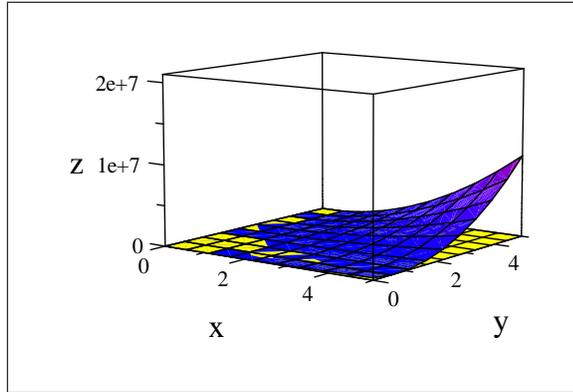


Figure 3: Représentation de $f(x; y)$ et $k(x, y)$

3. Pour $k = k' = 2$ et $M = M' = 3$ et par les calculs on obtient l'approximation de la fonction $g(x; y) = e^{x+y}$ suivante:

$$g(x; y) \approx 89572.x^2y^2 - 1.3317 \times 10^5 x^2y + 47855.x^2 - 39183.xy^2 + 58366.xy - 20845.x - 72.281y^2 + 31.653y + 1.0012 = h(x, y)$$

Représentation graphique:

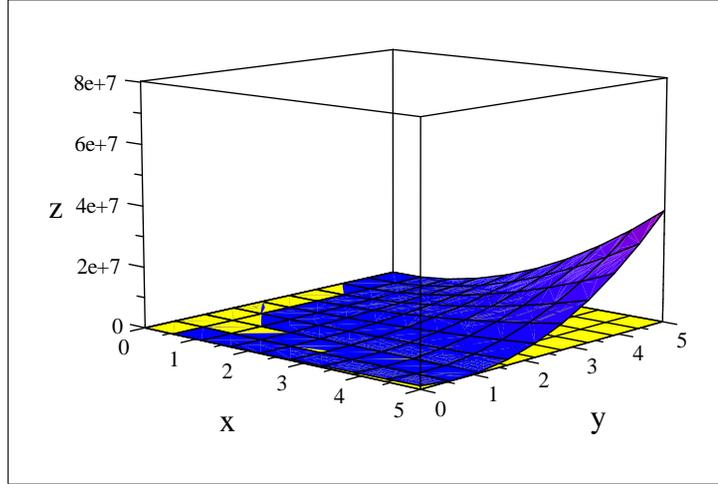


Figure 4 : Représentation de $g(x; y)$ et $h(x, y)$

1.3 Convergence du développement des OLs

Dans cette section, la borne d'erreur de la solution approximative via la série d'ondelettes de Legendre est illustrée par les théorèmes suivants.

1.3.1 Fonction à une variable

Théorème 1 [10].

Toute fonction $f(x) \in L^2[0, 1]$, deux fois dérivable dont la dérivée seconde est bornée $|f''(x)| \leq M$, peut être développée comme une série infinie des ondelettes de Legendre qui converge uniformément vers la fonction $f(x)$, c'est-à-dire

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(x),$$

où les coefficients c_{nm} sont bornés par

$$|c_{nm}| \leq \frac{\sqrt{12\widehat{M}}}{(2n)^{\frac{5}{2}} (2m-3)^2}. \quad (1.37)$$

Preuve: on peut voir [10].

Théorème 2 Supposons que la fonction $f(x) \in L^2[0,1]$ possède une dérivée seconde bornée $|f''(x)| \leq \widehat{M}$ et $C^T \Psi(x)$ est son approximation par les ondelettes de Legendre.

Alors pour la borne d'erreur nous avons :

$$\epsilon_{\widehat{m}}(f) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} c_{nm}^2 + \sum_{n=2^k+1}^{\infty} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.38)$$

$$\text{où } \epsilon_{\widehat{m}}(f) = \left(\int_0^1 (f(t) - C^T \Psi(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Preuve:

En considérant la définition de $\epsilon_{\widehat{m}}(f)$, on a :

$$(\epsilon_{\widehat{m}}(f))^2 = \int_0^1 (f(t) - C^T \Psi(t))^2 dt$$

d'où

$$(\epsilon_{\widehat{m}}(f))^2 = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(t) - \sum_{n=1}^{2^k} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{nm}(t) \right)^2 dt$$

donc

$$\begin{aligned} (\epsilon_{\widehat{m}}(f))^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} c_{nm}^2 \int_0^1 \psi_{nm}^2(t) dt + \sum_{n=2^k+1}^{\infty} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm}^2 \int_0^1 \psi_{nm}^2(t) dt \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} c_{nm}^2 + \sum_{n=2^k+1}^{\infty} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm}^2 \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

1.3.2 Fonction à deux variables

Théorème 3 *Si la somme de la valeur absolue des coefficients des ondelettes de Legendre d'une fonction $f(x, y)$ forme une série convergente, alors le développement des ondelettes de Legendre est absolument et uniformément convergent vers la fonction $f(x, y)$. (voir [21])*

Théorème 4 *.Si la dérivée d'ordre quatre de la fonction continue $f(x, y) \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$ est bornée $\left| \frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} \right| \leq \widehat{M}$, alors le développement des ondelettes de Legendre converge uniformément vers la fonction $f(x, y)$ et en plus*

$$|c_{ij}| \leq \frac{12\widehat{M}}{(2n_1)^{\frac{5}{2}}(2n_2)^{\frac{5}{2}}(2m_1 - 3)^2(2m_2 - 3)^2} \quad (1.39)$$

où $i = M(n_1 - 1) + m_1 + 1$ et $j = M(n_2 - 1) + m_2 + 1$.

Preuve: on peut voir [21].

Théorème 5 *Supposons que la fonction $f(x, y) \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$. Si f possède une dérivée seconde bornée, et $\Psi^T(x)C\Psi(y)$ est son approximation des ondelettes de Legendre. Alors pour la borne d'erreur nous avons :*

$$\epsilon_{\widehat{m} \times \widehat{m}}(f) \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=\widehat{m}+1}^{\infty} c_{ij}^2 + \sum_{i=\widehat{m}+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{M-1} c_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.40)$$

où

$$\epsilon_{\widehat{m} \times \widehat{m}}(f) = \left(\int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - \Psi^T(x)C\Psi(y))^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve:

En considérant la définition de $\epsilon_{\widehat{m} \times \widehat{m}}(f)$, on a :

$$\begin{aligned} (\epsilon_{\widehat{m} \times \widehat{m}}(f))^2 &= \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - \Psi^T(x)C\Psi(y))^2 dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} \psi_i(x) \psi_j(y) - \sum_{i=1}^{\widehat{m}} \sum_{j=1}^{\widehat{m}} c_{ij} \psi_i(x) \psi_j(y) \right)^2 dx dy \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
(\epsilon_{\hat{m} \times \hat{m}}(f))^2 &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=\hat{m}+1}^{\infty} c_{ij}^2 \int_0^1 \int_0^1 \psi_i^2(x) \psi_j^2(y) dx dy + \sum_{i=\hat{m}+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\hat{m}} c_{ij}^2 \int_0^1 \psi_i^2(x) \psi_j^2(y) dx dy \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=\hat{m}+1}^{\infty} c_{ij}^2 + \sum_{i=\hat{m}+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{M-1} c_{ij}^2
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

Matrices opérationnelles des ondelettes de Legendre

2.1 Introduction

Dans cette partie, on applique la méthode des ondelettes de Legendre pour la solution numérique des équations différentielles ordinaires avec des conditions aux limites dans la dimension 1 et puis les équations différentielles partielles avec les mêmes conditions dans la dimension 2, en utilisant les ondelettes de Legendre bidimensionnelles. Dans cette direction, les matrices appelées matrice opérationnelle de dérivation et matrice opérationnelle d'intégration sont utiles pour obtenir une solution numérique au problème mentionné ci-dessus. Ces matrices nous permettent de réduire la solution numérique des équations différentielles à ceux de la résolution d'un système d'équations algébriques simple.

2.2 Matrice opérationnelle d'intégration

2.2.1 Matrice opérationnelle d'intégration le cas d'une variable

La matrice opérationnelle d'intégration est une matrice définie par:

$$\int_0^x \Psi(t) dt = P.\Psi(x) \quad (2.1)$$

où $\Psi(x)$ est donnée par (1 – 5), et P est une matrice de type $2^{k-1}M$ définie dans par:

$$P = \frac{1}{2^k} \begin{pmatrix} L & F & F & F & \dots & F \\ O & L & F & F & \dots & F \\ O & O & L & F & \dots & F \\ O & O & O & L & \dots & F \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ O & O & O & O & \dots & L \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

O , F et L sont des matrices de dimension M avec O est la matrice nulle,

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

et

$$L = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2M-1}\sqrt{2M-3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{\sqrt{2M-1}\sqrt{2M-3}} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Exemple 9 Trouvons la matrice P qu'on notera $P_{6 \times 6}$ pour $M = 3$ et $k = 2$, telle que

$$\int_0^x \Psi_{6 \times 1}(t) dt = P_{6 \times 6} \Psi_{6 \times 1}(x). \quad (2.5)$$

Alors les six fonctions de base de $\Psi_{6 \times 1}(x) \triangleq \Psi_6(x)$ sont données par (1 – 6):

$$\left. \begin{array}{l} \psi_{10}(x) = \sqrt{2} \\ \psi_{11}(x) = \sqrt{6}(4x - 1) \\ \psi_{12}(x) = \sqrt{10} \left[\frac{3}{2}(4x - 1)^2 - \frac{1}{2} \right] \end{array} \right\} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2},$$

$$\left. \begin{array}{l} \psi_{20}(x) = \sqrt{2} \\ \psi_{21}(x) = \sqrt{6}(4x - 3) \\ \psi_{22}(x) = \sqrt{10} \left[\frac{3}{2}(4x - 3)^2 - \frac{1}{2} \right] \end{array} \right\} \quad \frac{1}{2} \leq x < 1,$$

En intégrant (1 – 6) de 0 à x et en utilisant $c_{nm} = \langle f(x), \psi_{nm}(x) \rangle$, on obtient

$$\int_0^x \psi_{10}(t) dt = \begin{cases} \sqrt{2}x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_0^x \psi_{10}(t) dt &= \frac{1}{4} \psi_{10}(x) + \frac{\sqrt{2}}{4 \times \sqrt{6}} \psi_{11}(x) + \frac{1}{2} \psi_{20}(x) \\ &= \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0 \right]^T \Psi_6(x). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \psi_{11}(t)dt &= \begin{cases} 2\sqrt{6}x^2 - \sqrt{6}x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases} \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{12}\psi_{10}(x) + \frac{\sqrt{3}}{12 \times \sqrt{5}}\psi_{12}(x) \\
 &= \left[-\frac{\sqrt{3}}{12}, 0, \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{5}}, 0, 0, 0 \right]^T \Psi_6(x).
 \end{aligned}$$

de la même manière, on obtient:

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \psi_{12}(t)dt &= -\frac{\sqrt{5}}{20\sqrt{3}}\psi_{11}(x) \\
 &= \frac{1}{4} \left(0 \quad -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right) \Psi_6(x),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \psi_{20}(t)dt &= \frac{1}{4}\psi_{20}(x) + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{6}}\psi_{21}(x) \\
 &= \frac{1}{4} \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 0 \right) \Psi_6(x),
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \psi_{21}(t)dt &= -\frac{\sqrt{3}}{12}\psi_{20}(x) + \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{5}}\psi_{22}(x) \\
 &= \frac{1}{4} \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} \right) \Psi_6(x),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \psi_{22}(t)dt &= -\frac{\sqrt{5}}{20\sqrt{3}}\psi_{21}(x) \\
 &= \frac{1}{4} \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} \quad 0 \right) \Psi_6(x).
 \end{aligned}$$

Donc

$$P_{6 \times 6} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Dans (2.5) les indices de $P_{6 \times 6}$ et $\Psi_6(x)$ désignent les dimensions et $P_{6 \times 6}$ est définie comme suit:

$$P_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} L_{3 \times 3} & F_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & L_{3 \times 3} \end{pmatrix},$$

où

$$L_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$F_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 2.2.1 D'une manière générale, l'intégration n -fois du vecteur $\Psi(x)$ peut s'exprimer par [11] comme suit:

$$\underbrace{\int_0^x \dots \int_0^x}_{n \text{ fois}} \Psi(t) dt \dots dt \simeq P^n \Psi(x)$$

Il est également montré dans [25] que la matrice P^n peut être approchée comme suit :

$$P^n \simeq \phi_{\hat{m} \times \hat{m}} \hat{P}^n \phi_{\hat{m} \times \hat{m}},$$

où $\phi_{\hat{m} \times \hat{m}}$ est la matrice des OLs définie en (1.18) et \hat{P}^n est une matrice dite la matrice opérationnelle d'intégration généralisée, qui a la forme suivante:

$$\hat{P}^n = \left(\frac{1}{\hat{m}} \right)^n \frac{1}{(n+1)!} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{\hat{m}-1} \\ 0 & 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{\hat{m}-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \alpha_{\hat{m}-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\alpha_i = (i+1)^{n+1} - 2i^{n+1} + (i-1)^{n+1}$.

2.2.2 Matrice opérationnelle d'intégration le cas de deux variables

Matrice opérationnelle d'intégration pour la variable y

La matrice opérationnelle d'intégration pour la variable y est définie par:

$$\int_0^y \Psi(x, t) dt = P_y \cdot \Psi(x, y) \quad (2.8)$$

où P_y est la matrice de dimension $(2^{k-1}2^{k'-1}MM')$ donnée par

$$P_y = \frac{1}{2^{k'}} \begin{pmatrix} P' & O & O & \dots & O \\ O & P' & O & \dots & O \\ O & O & P' & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \dots & P' \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

O et P' sont des matrices de dimension $(2^{k'-1}M')$ où O est la matrice nulle et P' est définie par (2.2), (2.3), (2.4) par

$$P' = \begin{pmatrix} L & F & F & \dots & F \\ O' & L & F & \dots & F \\ O' & O' & L & F & \dots & F \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & L & F \\ O' & O' & O' & \dots & O' & L \end{pmatrix}$$

F, L et O' sont des matrices de dimension M' où O' est la matrice nulle et F, L sont définies par (2.3), (2.4) successivement.

Exemple 10 1- On prend $M = M' = 3$, $k = k' = 2$ pour le calcul des coefficients de la matrice P_y qu'on va noter P_{y36} telle que

$$\int_0^y \Psi_{36}(t, y) dt = P_{y36} \cdot \Psi_{36}(x, y)$$

Pour $m' = 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^y \psi_{1110}(x, t) dt &= \begin{cases} \frac{1}{2^2} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{1111}(x, y) + \psi_{1110}(x, y) \right], & y \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & \text{ailleurs} \\ \frac{1}{2} \psi_{1120}(x, y), & y \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases} \\ &= \frac{1}{4} \left(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0 \right)^T \Psi(x, t) \end{aligned}$$

Pour $m' \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^y \psi_{1211}(x, t) dt &= \begin{cases} \frac{1}{2^2 \sqrt{3}} \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \psi_{1212}(x, y) - \psi_{1210}(x, y) \right], & y \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \\ &= \frac{1}{2^2} \left(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}, 0, 0, \dots, 0 \right)^T \Psi(x, t) \end{aligned}$$

d'où on obtient P_{y36}

$$P_{y36} = \frac{1}{2^2} \begin{pmatrix} P' & O & O & O & O & O \\ O & P' & O & O & O & O \\ O & O & P' & O & O & O \\ O & O & O & P' & O & O \\ O & O & O & O & P' & O \\ O & O & O & O & O & P' \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

où $P' = P_{6 \times 6}$ est la matrice de dimension 6 définie par (2-7).

2- Si on prend $M = M' = k = k' = 2$ la matrice P_y qu'on va noter P_{y16} telle que

$$\int_0^y \Psi_{16}(t, y) dt = P_{y16} \cdot \Psi_{16}(x, y)$$

est donnée par

$$\begin{aligned} P_{y16} &= \frac{1}{2^2} \begin{pmatrix} P_{4 \times 4} & O & O & O \\ O & P_{4 \times 4} & O & O \\ O & O & P_{4 \times 4} & O \\ O & O & O & P_{4 \times 4} \end{pmatrix} \text{ où } P_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} L_{2 \times 2} & F_{2 \times 2} \\ O'_{2 \times 2} & L_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \\ L_{2 \times 2} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}, F_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } O'_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Matrice opérationnelle d'intégration pour la variable x

La matrice opérationnelle d'intégration pour la variable x est une matrice définie par [4]:

$$\int_0^x \Psi(t, y) dt = P_x \cdot \Psi(x, y) \quad (2.11)$$

où P_x est une matrice de dimension $(2^{k-1}2^{k'-1}MM')$, sous la forme

$$P_x = \frac{1}{2^k} \begin{pmatrix} L & F & F & F & \dots & F \\ O & L & F & F & \dots & F \\ O & O & L & F & \dots & F \\ O & O & O & L & \dots & F \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & F \\ O & O & O & O & \dots & O & L \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

et L , F et O sont des matrices de dimension $(2^{k-1}MM')$ définies par :

$$F = \begin{pmatrix} 2D' & O' & O' & \dots & O' \\ O' & O' & O' & \dots & O' \\ O' & O' & O' & \dots & O' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ O' & O' & O' & \dots & O' \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

et

$$L = \begin{pmatrix} D' & \frac{1}{\sqrt{3}}D' & O' & \dots & O' \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}D' & O' & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}D' & \dots & O' \\ O' & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}D' & O' & \dots & O' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2M-1}\sqrt{2M-3}}D' \\ O' & O' & O' & \dots & \frac{1}{\sqrt{2M-1}\sqrt{2M-3}}D' & O' \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

et

$$O = \begin{pmatrix} O' & O' & O' & \dots & O' \\ O' & O' & O' & \dots & O' \\ O' & O' & O' & \dots & O' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ O' & O' & O' & \dots & O' \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

D' est la matrice d'identité de dimension $(2^{k'-1}M')$.

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

et O' est la matrice nulle de dimension $(2^{k'-1}M')$.

Preuve:

Dans l'écriture de $\psi_{nmn'm'}(x, y)$, le terme (x, y) sera annulé pour commodité.

A partir de l'intégrale $\int_0^x \Psi(t, y)dt = P_x \cdot \Psi$, on a

Pour $m = 0$

$$\int_0^x \psi_{n0n'm'}(t, y)dt = \begin{cases} \frac{1}{2^K} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{n1n'm'} + \psi_{n0n'm'} \right], & \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq x \leq \frac{n}{2^{k-1}}, \\ 0, & \frac{\hat{n}-1}{2^{k-1}} \leq x \leq \frac{\hat{n}}{2^{k-1}}, \\ \frac{1}{2^{K-1}} \psi_{\hat{n}0n'm'}, & \frac{\hat{n}-1}{2^{k-1}} \leq x \leq \frac{\hat{n}}{2^{k-1}}, \\ & \hat{n} = n + 1, \dots, 2^{K-1} \end{cases} \quad (2.17)$$

Pour $m \neq 0$

$$\int_0^x \psi_{nmn'm'}(t, y)dt = \begin{cases} \frac{1}{2^K \sqrt{2m+1}} \left[\frac{1}{\sqrt{2m+3}} \psi_{n(m+1)n'm'} - \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \psi_{n(m-1)n'm'} \right], & \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq x \leq \frac{n}{2^{k-1}}, \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.18)$$

Exemple 11 Pour $M = M' = k = k' = 2$ calculant les coefficients de la matrice P_x que on notera $(P_x)_{16}$ telle que

$$\int_0^x \Psi_{16}(t, y)dt = (P_x)_{16} \cdot \Psi_{16}(x, y)$$

où les composantes du vecteur $\Psi_{16}(x, y)$ sont définis par (1 - 32), donc La matrice $(P_x)_{16}$ peut être réécrite comme suit,

$$(P_x)_{16} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} L_8 & F_8 \\ O_8 & L_8 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

où

$$L_8 = \begin{pmatrix} D'_4 & \frac{\sqrt{3}}{3} D'_4 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} D'_4 & O'_4 \end{pmatrix}$$

donc

$$L_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$F_8 = \begin{pmatrix} 2D'_4 & O'_4 \\ O'_4 & O'_4 \end{pmatrix}, D'_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I est la matrice identité, O_8 et O'_4 sont les matrices nulles de dimensions 8, 4 successivement.

Proposition 2.2.1 *Les matrices opérationnelles d'intégration P_x , P_y définies par (2.12), (2.9) successivement sont des matrices inversibles.*

Preuve:

Comme P_x est une matrice triangulaire par blocs, son déterminant est le produit des déterminants des blocs diagonaux, alors il suffit que le déterminant de la matrice L soit non nul. En effet,

$$\det(L) = (-1)^{2^{k'}-1} M' \prod_{m=1}^M \left(\frac{1}{2m-1} \right)^{2^{k'}-1} \neq 0.$$

mais

$$\det(P_x) = 2^{k-1} \det(L)$$

d'où le déterminant de la matrice P_x est non nul.

La matrice P_y est une matrice diagonale, Il suffit de vérifier que le déterminant de la matrice P' est non nul. Or la matrice P' est triangulaire par blocs avec le bloc L sur sa diagonale. Alors

$$\det(L) = \prod_{m=1}^{M'} \left(\frac{1}{2m-1} \right) \neq 0.$$

cela implique que $\det(P') \neq 0$ par conséquent $\det(P_y) \neq 0$.

Exemple 12 Calculons le déterminant de L_{18} pour $M = M' = 3$ et $k = k' = 2$. Donc $(P_x)_{36}$ s'écrit

$$(P_x)_{36} = \frac{1}{2^2} \begin{pmatrix} L_{18} & F_{18} \\ O_{18} & L_{18} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(L_{18}) &= \det \begin{pmatrix} D'_6 & \frac{1}{\sqrt{3}}D'_6 & O'_6 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}D'_6 & O'_6 & \frac{1}{\sqrt{15}}D'_6 \\ O'_6 & -\frac{1}{\sqrt{15}}D'_6 & O'_6 \end{pmatrix} \\ &= \det \left(-\frac{1}{\sqrt{15}}D'_6 \right) \left[\det(D'_6) \det \left(\frac{1}{\sqrt{15}}D'_6 \right) \right] \\ &= (-1)^6 \left(\frac{1}{3} \right)^6 \left(\frac{1}{5} \right)^6 \\ &= \left(\frac{1}{15} \right)^6. \end{aligned}$$

Remarque 2.2.2 On utilise les matrices opérationnelles P_x, P_y si l'écriture de la fonction $f(x, y)$ est sous la forme $f(x, y) = C^T \Psi(x, y)$. Mais dans le cas où $f(x, y)$ s'écrit sous la forme $f(x, y) = \Psi^T(x) C \Psi(y)$, les matrices P_x, P_y vérifient $P_x = P_y = P$ avec P est la matrice opérationnelle définie en (2-2) (c.a.d $\int_0^y f(x, t) dt = \Psi^T(x) C P \Psi(y)$ et $\int_0^x f(t, y) dt = \Psi^T(x) P^T C \Psi(y)$).

2.3 Matrice opérationnelle de dérivation

2.3.1 Dérivé d'un polynôme de Legendre

Dans le théorème suivant [7], on donne une relation entre les ondelettes de Legendre et leur dérivées, ce qui est très important pour dériver la matrice opérationnelle des ondelettes de Legendre

Théorème 6 Soit $P_m(x)$ les polynômes de Legendre définis sur $[0, 1]$, alors on a:

$$P'_m(x) = 2 \sum_{\substack{i=0 \\ i+m \text{ impair}}}^{m-1} (2i+1) P_i(x) \quad (2.20)$$

Preuve:

Soit $u(x)$ une fonction. Supposons que le développement de Legendre de $u(x)$ est donné par:

$$u(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{u}_i L_i(x) \quad (2.21)$$

alors $u(x)$ peut être écrite comme

$$u'(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{u}_i^{(1)} L_i(x), \quad (2.22)$$

où

$$\tilde{u}_i^{(1)} = (2i+1) \sum_{\substack{j=i+1 \\ j+i \text{ odd}}}^{m-1} \tilde{u}_j, \quad i \geq 0. \quad (2.23)$$

Maintenant en prenant $u(x) = L_m(x)$ dans (2.21), on a $\tilde{u}_m = 1$ et $\tilde{u}_k = 0$ pour $k \neq m$, par conséquent

$$\tilde{u}_i^{(1)} = \begin{cases} 2i+1, & m+i \text{ est impair, } i \leq m-1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.24)$$

En conséquence l'éq. (2.22) devient

$$L'(x) = \sum_{\substack{i=0 \\ m+i \text{ impair}}}^{m-1} (2i+1) L_i(x), \quad (2.25)$$

En remplaçant $x = 2t - 1$ dans (2.25), on obtient (2.20)

$$P'_m(t) = 2 \sum_{\substack{i=0 \\ i+m \text{ impair}}}^{m-1} (2i+1) P_i(t)$$

2.3.2 Matrice opérationnelle de dérivation

Dans ce qui suit, nous introduirons la matrice opérationnelle des ondelettes de Legendre de dérivation

Théorème 7 *Soit $\Psi(x)$ le vecteur d'ondelettes de Legendre défini par (1.14). La dérivée du vecteur $\Psi(x)$ peut être exprimée par*

$$\frac{d\Psi(x)}{dx} = D\Psi(x) \quad (2.26)$$

où D est une matrice de dimensions $2^k(M+1)$ appelée la matrice opérationnelle de dérivation et elle est définie comme suit

$$D = \begin{pmatrix} \check{D} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \check{D} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \check{D} & \dots & . \\ . & . & . & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \check{D} \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

dans laquelle \check{D} est la matrice de dimensions $(M+1)(M+1)$ et son (r, s) ième élément est défini comme suit

$$\check{D}_{r,s} = \begin{cases} 2^k \sqrt{(2r-1)(2s-1)}, & r = 2, 3, \dots, (M+1), \\ & s = 1, \dots, r-1 \text{ et } (r+s \text{ impair}) \\ 0, & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.28)$$

Preuve: (voir [7])

En utilisant le polynôme de Legendre défini sur $[0, 1]$, le rième élément du vecteur $\Psi(x)$ dans (1.14) peut s'écrire

$$\psi_r(x) = \psi_{nm}(x) = 2^{\frac{k}{2}} \sqrt{m + \frac{1}{2}} P_m(2^{k-1}x - n) \chi_{[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}]}, \quad n = 1, 2, \dots, 2^{k-1}(M+1),$$

où $r = n(M+1) + (m+1)$, $m = 0, 1, 2, \dots, 2^k$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $\chi_{[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}]}$ est la fonction caractéristique définie par

$$\chi_{[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}] \\ 0, & \text{autrement} \end{cases},$$

Par différentiation de $\psi_r(x)$ par rapport à x on a

$$\frac{d\psi_r(x)}{dx} = 2^{\frac{k}{2}} \sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{k-1} P'_m(2^{k-1}x - n) \chi_{[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}]}. \quad (2.29)$$

Cette fonction est nulle en dehors de l'intervalle $[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}]$, donc son développement en ondelettes de Legendre n'a que les éléments d'ondelettes de Legendre de base de $\Psi(x)$ qui sont non nuls dans l'intervalle $[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}]$, c.a.d $\psi_i(x)$, $i = n(M+1) + 1, n(M+1) + 2, \dots, n(M+1) + (M+1)$. Alors son développement en ondelettes de Legendre a la forme suivante :

$$\frac{d\psi_r(x)}{dx} = \sum_{i=n(M+1)+1}^{(n+1)(M+1)} a_i \psi_i(x) \quad (2.30)$$

De plus, nous avons $\frac{dP_0(x)}{dx} = 0$. Cela implique que $\frac{d\psi_r(x)}{dx} = 0$ pour $i = 1, (M+1) + 1, 2(M+1) + 1, 3(M+1) + 1, \dots, (2^{k-1} - 1)(M+1) + 1$.

Par conséquent, la première ligne de la matrice \check{D} définie en (2.27) est nulle. Maintenant en remplaçant $P'_m(2^{k-1}x - n)$ de l'éq. (2.20) dans (2.29) on obtient:

$$\frac{d\psi_r(x)}{dx} = 2^{\frac{k}{2}} \sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{k-1} \sum_{\substack{i=0 \\ i+m \text{ odd}}}^{m-1} 2(2i+1) P_i(2^{k-1}x - n) \chi_{[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}]} \quad (2.31)$$

En développant cette équation en base d'ondelettes de Legendre on obtient:

$$\frac{d\psi_r(x)}{dx} = 2^k \sum_{\substack{s=1 \\ s+r \text{ impair}}}^{r-1} \sqrt{(2r-1)(2s-1)} \psi_{n(M+1)+s}(x). \quad (2.32)$$

Donc si on choisi $\check{D}_{r,s}$ comme:

$$\check{D}_{r,s} = \begin{cases} 2^k \sqrt{(2r-1)(2s-1)}, & r = 2; \dots, (M+1), s = 1, \dots, r-1 \text{ et } (r+s \text{ impair}) \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

alors $\frac{d\psi_r(x)}{dx} = \sum_{\substack{s=1 \\ s+r \text{ impair}}}^{r-1} \check{D}_{r,s} \psi_{n(M+1)+s}(x)$. Cela conduit au résultat souhaité $\frac{d\Psi(x)}{dx} = D\Psi(x)$.

Exemple 13 Pour $M = 2, K = 0$ et on utilisant (2.27) et (2.28), on trouve

$$D_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{15} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

par conséquent

$$D_{3 \times 3}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12\sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Corollaire 2.3.1 En utilisant l'éq. (2.26), la nième dérivée de la matrice opérationnelle peut être écrite par

$$\frac{d^n \Psi(x)}{dx^n} = D^n \Psi(x), \quad (2.35)$$

où D^n est la nième puissance de la matrice D .

Exemple 14 Pour $M = 2, K = 1$ et de l'équation (1.6) on a

$$\Psi(x) = [\sqrt{2}, \sqrt{6}(4x-1), \sqrt{10} \left(\frac{3}{2}(4x-1)^2 - \frac{1}{2} \right), \sqrt{2}, \sqrt{6}(4x-3), \sqrt{10} \left(\frac{3}{2}(4x-3)^2 - \frac{1}{2} \right)]^T$$

donc $\frac{d\Psi(x)}{dx} = D\Psi(x)$ où

$$D_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{7} & 0 & 2\sqrt{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{27} & 0 & 2\sqrt{63} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{11} & 0 & 2\sqrt{55} & 0 & 2\sqrt{99} & 0 \end{pmatrix},$$

par conséquent, on trouve

$$D_{6 \times 6}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20\sqrt{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 40\sqrt{9} & 0 & 28\sqrt{45} & 0 & 0 & 0 \\ 36\sqrt{77} & 56\sqrt{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} &= D^2\Psi(x) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12\sqrt{10} \\ \sqrt{14}(240x - 60) \\ \sqrt{2}(10\,080x^2 - 5040x + 540) \\ 36\sqrt{154} - 168\sqrt{22} + 672\sqrt{22}x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarque 2.3.1 Dans le cas de dimension 2, la matrice opérationnelle des ondelettes de Legendre de dérivation pour la variable x est la même pour celle de y (c.a.d $D_x = D_y = D$).

Méthode des ondelettes de Legendre (MOL)

3.1 Introduction

La méthode des ondelettes de Legendre (MOL) est basée sur la substitution de la fonction inconnue f de l'EDO, l'EDP ou l'EDF par son approximation $C^T\Psi \simeq f$, ainsi que les coefficients de l'équation pour laquelle on veut trouver une solution. On substitue également les dérivées partielles de cette équation par les matrices opérationnelles P et/ou D et les vecteurs des ondelettes de Legendre Ψ , puis on transforme l'équation en un système d'équations algébriques dont l'inconnue est la matrice C en utilisant les propriétés de Ψ , P et D . Une fois qu'on a trouvé C , on définit l'approximation de la fonction f .

Pour contrôler l'erreur, on choisit des valeurs appropriées pour les deux nombres naturels K et M qui conviennent à l'approximation qu'on veut obtenir.

3.2 Description de la méthode en 1D

3.2.1 Application de la (MOL) par la matrice opérationnelle d'intégration

Résolution d'une EDO linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

Description: On considère l'équation suivante

$$af'(x) + bf(x) = g(x), \quad x \in [0, 1], \quad (3.1)$$

avec la condition

$$f(0) = y_0 \quad (3.2)$$

où $a, b \in \mathbb{R}^*$, $g(x)$ une fonction connue et $f(x)$ est la fonction inconnue.

En utilisant la décomposition en base d'ondelettes de Legendre (1.12), on pose:

$$\begin{cases} f'(x) = C^T \Psi(x) \\ g(x) = G^T \Psi(x). \end{cases} \quad (3.3)$$

En intégrant $f'(x)$ de 0 à x on obtient:

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= C^T P \Psi(x) \\ f(x) &= C^T P \Psi(x) + f(0) \end{aligned}$$

avec

$$f(0) = y_0 d^T \Psi(x)$$

d'où

$$f(x) = (C^T P + y_0 d^T) \Psi(x) \quad (3.4)$$

alors, en utilisant (3.2) en substituant les équations (3.3), (3.4) dans l'équation (3.1), on obtient

$$aC^T \Psi(x) + b(C^T P + y_0 d^T) \Psi(x) = G^T \Psi(x). \quad (3.5)$$

d'où

$$C^T (aI + bP) = G^T - by_0 d^T$$

et cette dernière équation peut être écrite sous la forme:

$$(aI + bP)^T C = G - by_0 d \quad (3.6)$$

Celle-ci est un système d'équations algébriques qui peut être résolu pour C .

Exemple 15 *On considère l'équation*

$$\frac{1}{4}f'(x) + f(x) = u(x), \quad (3.7)$$

avec la condition

$$f(0) = 0$$

où $u(x)$ est la fonction de l'unité ($u(x) = 1$). La solution analytique de cette équation est $f(x) = 1 - \exp(-4x)$. Gu et Jiang (1996) ont traités ce problème et ont donné une solution approchée en utilisant les ondelettes de Haar à six et dix fonctions de base. Ici, le même problème est résolu en utilisant les ondelettes de Legendre, avec $M = 3$ et $k = 2$. on suppose que la fonction inconnue $f(x)$ est donnée par

$$f(x) = C^T \Psi(x),$$

où

$$C = [c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{20}, c_{21}, c_{22}]^T,$$

$$\Psi(t) = [\psi_{10}(x), \psi_{11}(x), \psi_{12}(x), \psi_{20}(x), \psi_{21}(x), \psi_{22}(x)]^T,$$

et les éléments de $\Psi(x)$ sont donnés dans (1 – 19). On peut donner l'expression de $u(x)$ comme suit:

$$u(x) = 1 = d^T \Psi(x)$$

Alors l'équation (3.7) peut être écrite sous la forme:

$$\frac{1}{4}C^T \Psi(x) + C^T P \Psi(x) = d^T P \Psi(x). \quad (3.8)$$

L'expression ci-dessus est satisfaite pour tout x dans $[0, 1]$. Donc

$$\frac{1}{4}C^T + C^T P = d^T P. \quad (3.9)$$

et cette dernière peut être écrite comme suit:

$$AC = B,$$

où $A = \frac{1}{4}I + P^T$, $B = P^T d$ avec I est la matrice d'identité. Cette dernière équation est un ensemble d'équations algébriques qui peut être résolu pour C comme suivant:

on a

$$P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$B = P^T d = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{12}\sqrt{6} \\ 0 \\ \frac{3}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{12}\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

d'autre part

$$A = \frac{1}{4}I + P^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{12}\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12}\sqrt{3} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{60}\sqrt{3}\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{60}\sqrt{3}\sqrt{5} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{12}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12}\sqrt{3} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{60}\sqrt{3}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{60}\sqrt{3}\sqrt{5} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

d'où

$$C = A^{-1}B \quad (3.11)$$

$$= \begin{pmatrix} 0.20067 \\ 8.2753 \times 10^{-2} \\ -2.1367 \times 10^{-2} \\ 0.33289 \\ 1.1183 \times 10^{-2} \\ -2.8874 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

finale^{ment}, on obtient la solution approximative de $f(x)$ (c.a.d)

$$f(x) \simeq C^T \Psi(x)$$

$$\simeq -\frac{2520}{1369}x^2 + \frac{2820}{1369}x + \frac{388}{1369}$$

Dans le tableau 1, une comparaison est faite entre les valeurs approximatives en utilisant la présente approche avec les solutions exactes.

Tableau 1: Valeurs estimées et exactes de $f(x)$

x	Ondelettes de Legendre	Exacte
0	0.0002	0
0.1	0.3284	0.3286
0.2	0.5523	0.5521
0.3	0.6980	0.6984
0.4	0.7987	0.7986
0.5	0.8653	0.8650
0.6	0.9091	0.9091
0.7	0.9394	0.9393
0.8	0.9591	0.9591
0.9	0.9727	0.9726
1	0.9816	0.9817

Résolution d'une EDO linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants

Description: On considère l'équation suivante

$$\begin{cases} a(x) f'(x) + b(x) f(x) = g(x), & x \in [0, 1], \\ f(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

où $a(x)$, $b(x)$, $g(x)$ trois fonctions connues et $f(x)$ est la fonction inconnue.

On peut résoudre le problème (3.12), en utilisant la décomposition en base d'ondelettes de Legendre (1.12) et la supposition (3.3)

En effet,

$$\begin{cases} f'(x) = C^T \Psi(x). \\ g(x) = G^T \Psi(x). \end{cases}$$

Si on intègre les expressions ci-dessus sur le domaine $[0; x]$ et d'après (3.4) on trouve

$$f(x) = (C^T P + y_0 d^T) \Psi(x)$$

avec,

$$f(0) = y_0 d^T \Psi(x)$$

si on considère

$$\begin{cases} a(x) = A^T \Psi(x). \\ b(x) = B^T \Psi(x). \\ g(x) = G^T \Psi(x). \end{cases} \quad (3.13)$$

alors, en substituant les équations (3.4) et (3.13) dans l'équation (3.12), on obtient

$$A^T \Psi(x) \Psi^T(x) C + B^T \Psi(x) \Psi^T(x) (C^T P + y_0 d^T)^T = G^T \Psi(x). \quad (3.14)$$

En utilisant l'équation (1.9), on obtient

$$\Psi^T(x) \tilde{A} C + \Psi^T(x) \tilde{B} (P^T C + dy_0) = \Psi^T(x) G.$$

Par conséquent, on obtient un système d'équations algébriques linéaire

$$\tilde{A} C + \tilde{B} (P^T C + dy_0) = G.$$

d'où

$$\left(\tilde{A} + \tilde{B}P^T\right)C = G - y_0\tilde{B}d \quad (3.15)$$

On obtient la solution $f(x)$ du problème (3.12) par la substitution de C la solution du système (3.15) dans l'équation (3.4).

Exemple 16 On considère l'équation suivante

$$\begin{cases} xf'(x) - 2f(x) = -2x, & x \in [0, 1], \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

La solution exacte de (3.3) est $f(x) = x^2 + 2x$. Pour $M = 3$ et $k = 2$, on suppose que la fonction inconnue $f'(x)$ et les fonctions $a(x) = x$, $b(x) = -2$, $g(x) = -2a(x)$ sont données successivement par (3.3) et (1.19).

$$\begin{aligned} f'(x) &= C^T\Psi(x), \\ x &= X^T\Psi(x) \\ 2 &= 2d^T\Psi(x) \end{aligned}$$

où X^T et $\Psi(x)$ sont définies par (1.6) donc, on obtient :

$$X^T\Psi(x)\Psi^T(x)C - 2C^T P\Psi(x) = -2\Psi^T(x)X$$

d'où

$$\Psi^T(x)\tilde{X}C - 2\Psi^T(x)P^T C = -2\Psi^T(x)X \quad (3.17)$$

finalement, on trouve le système d'équations algébriques

$$\left(\tilde{X} - 2P^T\right)C = -2X \quad (3.18)$$

qui peut être résolu pour $C = -2\left(\tilde{X} - 2P^T\right)^{-1}X$, d'où

$$C^T = \left(-\frac{3}{8}\sqrt{2} \quad \frac{1}{24}\sqrt{6} \quad 0 \quad -\frac{1}{8}\sqrt{2} \quad \frac{1}{24}\sqrt{6} \quad 0 \right)$$

donc, $f(x) = C^T P\Psi(x) = x^2 + 2x$

avec

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{12}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{60}\sqrt{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{60}\sqrt{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{12}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{60}\sqrt{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{60}\sqrt{15} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{6}(4x-1) \\ \sqrt{10}\left(\frac{3}{2}(4x-1)^2 - \frac{1}{2}\right) \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{6}(4x-3) \\ \sqrt{10}\left(\frac{3}{2}(4x-3)^2 - \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Résolution d'une EDO linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants

Description: On considère l'équation suivante

$$a(x) f''(x) + b(x) f'(x) + c(x) f(x) = g(x), \quad x \in [0, 1], \quad (3.19)$$

avec les conditions

$$f(0) = y_0, \quad f'(0) = y_1 \quad (3.20)$$

où $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, et $g(x)$ des fonctions connus et $f(x)$ est la fonction inconnue.

Utilisons la décomposition en base d'ondelettes de Legendre (1.12) et supposons que

$$f''(x) = C^T \Psi(x). \quad (3.21)$$

Si on intègre (3.21) sur le domaine $[0; x]$; on trouve

$$f'(x) - f'(0) = C^T P \Psi(x)$$

par conséquent, on obtient

$$f'(x) = (C^T P + y_1 d^T) \Psi(x) \quad (3.22)$$

où

$$f'(0) = y_1 = y_1 d^T \Psi(x) \quad (3.23)$$

Si on intègre (3.22) sur le domaine $[0; x]$, on trouve

$$f(x) - f(0) = (C^T P + y_1 d^T) P \Psi(x)$$

si on pose

$$f(0) = y_0 = y_0 d^T \Psi(x) \quad (3.24)$$

on obtient

$$f(x) = (C^T P + y_1 d^T) P \Psi(x) + y_0 d^T \Psi(x)$$

d'où

$$f(x) = (C^T P^2 + y_1 d^T P + y_0 d^T) \Psi(x) \quad (3.25)$$

si on considère

$$\begin{cases} a(x) = A^T \Psi(x). \\ b(x) = B^T \Psi(x). \\ e(x) = E^T \Psi(x). \\ g(x) = G^T \Psi(x). \end{cases} \quad (3.26)$$

alors, en substituant les équations (3.21), (3.22), (3.25) et (3.26) dans (3.19), on obtient

$$\begin{aligned} G^T \Psi(x) &= A^T \Psi(x) \Psi(x)^T C + B^T \Psi(x) \Psi^T(x) (P^T C + y_1 d) \\ &\quad + E^T \Psi(x) \Psi^T(x) \left((P^2)^T C + y_1 P^T d + y_0 d \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

En utilisant l'équation (1.9), on aura

$$\begin{aligned} \Psi^T(x) G &= \Psi^T(x) \tilde{A} C + \Psi^T(x) \tilde{B} (P^T C + y_1 d) \\ &\quad + \Psi^T(x) \tilde{E} \left((P^2)^T C + y_1 P^T d + y_0 d \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

L'expression (3.27) ci-dessus est satisfaite pour tout x dans $[0, 1]$. Donc

$$\tilde{A} C + \tilde{B} (P^T C + y_1 d) + \tilde{E} \left((P^2)^T C + y_1 P^T d + y_0 d \right) = G. \quad (3.29)$$

Finalement, on obtient le système d'équations algébriques linéaire suivant:

$$\left[\tilde{A} + \tilde{B}P^T + \tilde{E} (P^2)^T \right] C = G - \left(y_1 \tilde{B} + y_1 \tilde{E}P^T + y_0 \tilde{E} \right) d. \quad (3.30)$$

La solution $f(x)$ du problème (3.19) est donnée par la substitution de C la solution du système (3.30) dans l'expression de $f(x)$ donnée en (3.25).

Exemple 17 *Considérons l'équation différentielle de Bessel d'ordre zéro suivante (O'Neil 1987) :*

$$x f''(x) + f'(x) + x f(x) = 0 \quad (3.31)$$

avec les conditions

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0 \quad (3.32)$$

Une solution connue sous le nom de fonction de Bessel du premier type noté $J_0(x)$ est donnée par O'Neil en 1987 sous la forme

$$J_0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(i!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2i}. \quad (3.33)$$

Ici, nous résolvons le même problème en utilisant des ondelettes de Legendre, avec $M = 3$ et $k = 2$. Nous supposons d'abord que la fonction inconnue $f''(x)$ est donnée par (3.21)

$$f''(x) = C^T \Psi(x).$$

En utilisant (3.22),(3.25) et les conditions aux limites dans (3.32), on obtient

$$f'(x) = C^T P \Psi(x), \quad f(x) = C^T P^2 \Psi(x) + d^T \Psi(x),$$

où d est donné par (1.19)

$$d = \left(\frac{1}{\sqrt{8}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{8}}, 0, 0 \right)^T.$$

et x est donné par

$$x = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{6}}{24}, 0, \frac{3\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{6}}{24}, 0 \right) \Psi(x) \triangleq X^T \Psi(x).$$

alors, en substituant les expressions de $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$ et x dans l'équation (3.31), on obtient

$$X^T \Psi(x) \Psi^T(x) C + C^T P \Psi(x) + X^T \Psi(x) \Psi^T(x) (P^2)^T C + X^T \Psi(x) \Psi^T(x) d = 0. \quad (3.34)$$

On utilise également La propriété (1.9) du produit de deux vecteurs fonctions ondelettes de Legendre

$$e^T \Psi(x) \Psi^T(x) = \Psi^T(x) \tilde{E},$$

Donc

$$X^T \Psi(x) \Psi^T(x) = \Psi^T(x) \tilde{X}, \quad (3.35)$$

en substituant (3.35) dans (3.34), on aura

$$\Psi^T(x) \tilde{X} C + \Psi^T(x) P^T C + \Psi^T(x) \tilde{X} (P^2)^T C + \Psi^T(x) \tilde{X} d = 0, \quad (3.36)$$

et par conséquent, on obtient le système algébrique suivant

$$\left[\tilde{X} + P^T + \tilde{X} (P^2)^T \right] C + \tilde{X} d = 0 \quad (3.37)$$

où \tilde{X} peut être calculé de la même manière que (1.10). Le système (3.37) est un ensemble d'équations algébriques qui peuvent être résolues pour C . Dans le tableau suivant, une comparaison est effectuée entre les valeurs approximatives en utilisant la présente approche avec la solution de $J_0(x)$.

Tableau 2:

x	Ondelettes de Legendre	$J_0(x)$
0	1.000000	1.000000
0.1	0.997502	0.997501
0.2	0.990024	0.990024
0.3	0.977625	0.977626
0.4	0.960396	0.960398
0.5	0.938468	0.938469
0.6	0.912004	0.912004
0.7	0.881200	0.881200
0.8	0.846285	0.846287
0.9	0.807524	0.807523
1	0.765197	0.765197

Remarque 3.2.1 On remarque que seul un petit nombre d'ondelettes de Legendre sont nécessaires pour obtenir un résultat satisfaisant. L'exemple numérique donné confirme cette affirmation.

3.2.2 Applications de la matrice opérationnelle de dérivation

Résolution d'une EDO linéaire du second ordre

Discription: Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante

$$f''(x) + k(x)f'(x) + h(x)f(x) = g(x), \quad (3.38)$$

avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} f(0) &= \alpha, \\ f'(0) &= \beta, \end{aligned} \quad (3.39)$$

où les conditions aux limites

$$\begin{aligned} y(0) &= \alpha, \\ y(1) &= \beta, \end{aligned} \quad (3.40)$$

Pour résoudre le problème (3.38) on approxime $f(x), k(x), h(x)$ et $g(x)$ par les ondelettes de Legendre comme suivant:

$$\begin{aligned} y(x) &= C^T \Psi(x), \\ k(x) &= K^T \Psi(x), \\ h(x) &= H^T \Psi(x), \\ g(x) &= G^T \Psi(x), \end{aligned} \quad (3.41)$$

En utilisant l'Eqs (3.38) et (3.41), on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= C^T D \Psi(x), \\ f''(x) &= C^T D^2 \Psi(x), \end{aligned} \quad (3.42)$$

moyennant les équations (3.41) et (3.42), le résidu $R(x)$ pour l'Eq. (3.38) peut s'écrire sous la forme

$$R(x) = (C^T D^2 \Psi(x) + K^T \Psi(x) \Psi^T(x) D^T C + H^T \Psi(x) \Psi^T(x) D^T C - G^T \Psi(x)).$$

En utilisant le produit de la matrice opérationnelle de dérivation des ondelettes de Legendre, nous trouvons:

$$R(x) = \left(\Psi^T(x) (D^2)^T C + \Psi^T(x) \tilde{K} D^T C + \Psi^T(x) \tilde{H} D^T C - \Psi^T(x) G \right). \quad (3.43)$$

Comme dans la méthode typique de Tau [22], nous générons $2^k(M+1) - 2$ équations linéaires en appliquant

$$\int_0^1 \psi_i(x) R(x) dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, 2^k(M+1) - 2, \quad (3.44)$$

De plus, en remplaçant les conditions initiales dans les équations (3.41) et (3.42), nous avons

$$\begin{aligned} f(0) &= C^T \Psi(0) = \alpha, \\ f'(0) &= C^T D \Psi(0) = \beta. \end{aligned} \quad (3.45)$$

et pour les conditions au limite

$$\begin{aligned} f(0) &= C^T \Psi(0) = \alpha, \\ f(1) &= C^T \Psi(1) = \beta. \end{aligned}$$

Les éqs. (3.44), (3.46) génèrent un ensemble de $2^k(M+1)$ équations linéaires. Ces équations linéaires peuvent être résolus pour avoir les coefficients inconnus du vecteur C . Par conséquent, $f(x)$ la fonction donnée dans l'Eq. (3.41) peut être calculée.

Exemple 18 Dans cet exemple, nous considérons un problème avec des conditions initiales dans lequel ses fonctions coefficients sont : $g(x) = h(x) = -x$ et $k(x) = x - 1$.

Considérons le problème suivant

$$\begin{aligned} f''(x) + (x-1)f'(x) - xf(x) &= -x, & x \in [0, 1], \\ f(0) &= 2, & f'(0) = 1, \end{aligned}$$

où La fonction $g(x) = -x$ est compatible avec la solution exacte $f(x) = e^x + 1$. Ici, nous résolvons ce problème en utilisant les ondelettes de Legendre avec $M = 3, k = 2$.

On pose $f(x) = C^T \Psi(x)$, $x-1 = K^T \Psi(x)$, $x = X^T \Psi(x) = H^T \Psi(x) = G^T \Psi(x)$
où $X^T = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{6}}{24}, 0, \frac{3\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{6}}{24}, 0 \right)$, $K^T = \left(0, \frac{\sqrt{6}}{12}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{6}}, 0 \right)$.

En substituant les expressions de $f''(x), f'(x), f(x), x-1$ et x dans l'équation, on obtient

$$C^T D^2 \Psi(x) + K^T \Psi(x) \Psi^T(x) D^T C - X^T \Psi(x) \Psi^T(x) C = X^T \Psi(x)$$

Finalement, on obtient le système suivant:

$$\left((D^2)^T + \tilde{K} D^T - \tilde{X} \right) C = X$$

Ce système est un ensemble d'équations algébriques qui peuvent être résolues pour C , tel que

$$f(x) = e^x + 1 \approx 0.86090x^2 + 0.7301x + 2.0728 = A(x)$$

Représentation graphique des solutions:

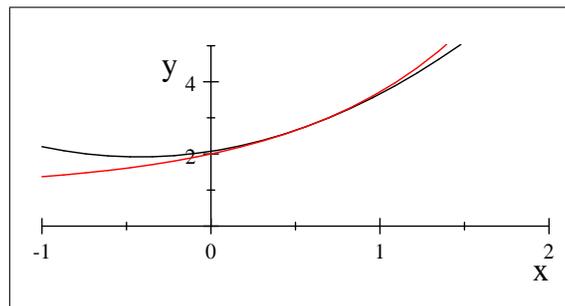


Figure 5 : Représentation de $f(x)$ et $A(x)$

Résolution d'une EDO non linéaire du second ordre

Description: Considérons l'équation non linéaire suivante:

$$f''(x) = F(x, f'(x), f(x)), \quad (3.46)$$

avec les conditions initiales

$$f(0) = \alpha, \quad (3.47)$$

$$f'(0) = \beta,$$

et les conditions aux limites

$$f(1) = \alpha, \quad 3.48$$

$$f'(1) = \beta.$$

Afin d'utiliser des polynômes Legendre pour ce problème, on supposera que

$$f(x) = C^T \Psi(x). \quad (3.49)$$

En utilisant l'Eq. (3.42) et (3.46), on obtient:

$$C^T D^2 \Psi(x) = F(x, C^T D \Psi(x), C^T \Psi(x)). \quad (3.50)$$

les conditions au limite et les conditions initiales deviennent:

$$f(0) = C^T \Psi(0) = \alpha, \quad (3.51)$$

$$f'(0) = C^T D \Psi(0) = \beta.$$

et

$$f(1) = C^T \Psi(1) = \alpha, \quad (3.52)$$

$$f'(1) = C^T D \Psi(1) = \beta.$$

Pour trouver la solution $f(x)$, nous calculons d'abord l'équation (3.50) à $2^k(M+1) - 2$ points. Pour un meilleur résultat, on utilisera les $2^k(M+1) - 2$ premières racines du polynôme Legendre $P_{2K(M+1)}(x)$. Les équations proviennent de (3.51) ou (3.52) génèrent $2^k(M+1)$ équations non linéaires qui peuvent être résolues à l'aide de la méthode itérative de Newton. Par conséquent $f(x)$ donnée par l'équation (3.49) peut être calculée. Les applications pour les équations différentielles linéaires et non linéaires mentionnées ci-dessus peuvent être appliquées facilement pour des équations différentielles d'ordre supérieur.

Exemple 19 Dans cet exemple, on considère le problème non linéaire suivant

$$f''(x) + 2(f'(x))^2 + 8f(x) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (3.53)$$

avec des conditions aux limites

$$f(0) = f(1) = 0 \quad (3.54)$$

la solution exacte de ce problème est $f(x) = x - x^2$. On va résoudre le problème ci-dessus en appliquant la technique décrite auparavant avec $M = 3$ et $k = 1$. On suppose que $f(x) = C^T \Psi(x)$. Donc

$f'(x) = C^T D \Psi(x)$, $f''(x) = C^T D^2 \Psi(x)$. L'équation (3.53) devient

$$C^T D^2 \Psi(x) + 2(C^T D \Psi(x))^2 + 8C^T \Psi(x) = 0. \quad (3.55)$$

où

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= (\psi_{10}(x), \psi_{11}(x), \psi_{12}(x)) \\ &= (1, \sqrt{3}P_1(x), \sqrt{5}P_2(x)) \\ &= (1, 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}, \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)) \end{aligned}$$

et $D = \check{D}$ est une matrice 3×3 dont les éléments sont donnés par:

$$\check{D}_{r,s} = \begin{cases} 2^{k+1} \sqrt{(2r-1)(2s-1)}, & r = 2; \dots, M+1. \quad s = 1, \dots, r-1 \text{ et } (r+s \text{ impair}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{15} & 0 \end{pmatrix}, \quad D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12\sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

Pour avoir C , calculons l'éq.(3.55) pour la première racine de $P_3(x) = 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1$ (c.a.d $x_0 = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$) et en considérant les conditions aux limites (3.54), on obtient le système suivant

$$\begin{cases} c_{10} - \sqrt{3}c_{11} + \sqrt{5}c_{12} = 0 \\ c_{10} + \sqrt{3}c_{11} + \sqrt{5}c_{12} = 0 \end{cases} \quad (3.57)$$

d'où

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \\ -\frac{1}{30}\sqrt{5} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.58)$$

et par suite, on obtient la solution $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= C^T \Psi(x) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{30}\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{3}x - \sqrt{3} \\ \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1) \end{pmatrix} \\ &= x - x^2. \end{aligned} \quad (3.59)$$

3.3 Description de la méthode en 2D

3.3.1 Application de la matrice opérationnelle d'intégration

Comme illustration de cette méthode, on va l'appliquer à une EDP d'ordre 2 à coefficients constants de la forme suivante [8] :

$$g(x, y) = F \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) \quad (3.60)$$

avec des conditions aux limites de Dirichlet ou des conditions mixtes.

Pour raison de commodité, on pose $\frac{\partial g}{\partial x} = \dot{g}$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = g'$.

En général, d'après la méthode des ondelettes de Legendre, on suppose que \ddot{g}'' est développé en termes d'ondelettes de Legendre comme suit

$$\ddot{g}'' = C^T \Psi(x, y) \quad (3.61)$$

En intégrant (3.61) deux fois par rapport à x de 0 à x et une fois par rapport à y de 0 à y on obtient :

$$\dot{g}''(x, y) = C^T P_x \Psi(x, y) + \dot{g}''(0, y), \quad (3.62)$$

$$g''(x, y) = C^T P_x^2 \Psi(x, y) + x \dot{g}''(0, y) + g''(0, y), \quad (3.63)$$

$$g'(x, y) = C^T P_x^2 P_y \Psi(x, y) + x [\dot{g}'(0, y) - \dot{g}'(0, 0)] + g'(0, y) - g'(0, 0) + g'(x, 0), \quad (3.64)$$

en substituant $x = 1$ dans les équations (3.63) et (3.64), on obtient:

$$\dot{g}''(0, y) = -C^T P_x^2 \Psi(1, y) + g''(1, y) - g''(0, y), \quad (3.65)$$

$$\dot{g}'(0, y) - \dot{g}'(0, 0) = -C^T P_x^2 P_y \Psi(1, y) + h(x, y), \quad (3.66)$$

où

$$h(x, y) = g'(1, y) - g'(0, y) + g'(0, 0) - g'(1, 0).$$

Substituant l'équation (3.65) dans (3.63) et l'équation (3.66) dans (3.64) on aura:

$$g''(x, y) = C^T P_x^2 [\Psi(x, y) - x \Psi(1, y)] + x [g''(1, y) - g''(0, y)] + g''(0, y). \quad (3.67)$$

En intégrant (3.67) une fois par rapport à y de 0 à y , on obtient:

$$g'(x, y) = C^T P_x^2 P_y [\Psi(x, y) - x \Psi(1, y)] + k(x, y) - g'(0, 0) + g'(x, 0), \quad (3.68)$$

où

$$k(x, y) = x [g'(1, y) - g'(0, y) + g'(0, 0) - g'(1, 0)] + g'(0, y).$$

En intégrant (3.68) une fois par rapport à x de 0 à x , on obtient:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= C^T P_x^2 P_y^2 [\Psi(x, y) - x \Psi(1, y)] + l(x, y) \\ &+ y [g'(x, 0) - g'(0, 0)] + g(x, 0), \end{aligned} \quad (3.69)$$

où

$$\begin{aligned} l(x, y) = & x [g(1, y) - g(0, 1) - g(0, y) + g(0, 0)] \\ & + x [yg'(0, 0) - yg'(1, 0)] + g(0, y) - g(0, 0). \end{aligned}$$

Remplaçant y par 1 dans l'équation (3.69)

$$\begin{aligned} g'(x, 0) - g'(0, 0) = & -C^T P_x^2 P_y^2 [\Psi(x, 1) - x\Psi(1, 1)] \\ & -l(x, 1) + g(x, 1) - g(x, 0), \end{aligned} \quad (3.70)$$

Substituant l'équation (3.70) dans les équations (3.68) et (3.69), on obtient:

$$\begin{aligned} g'(x, y) = & C^T P_x^2 P_y [\Psi(x, y) - x\Psi(1, y)] \\ & + C^T P_x^2 P_y^2 [-\Psi(x, 1) + x\Psi(1, 1)] \\ & + k(x, y) - l(x, 1) + g(x, 1) - g(x, 0), \end{aligned} \quad (3.71)$$

et

$$\begin{aligned} g(x, y) = & C^T P_x^2 P_y^2 [\Psi(x, y) - x\Psi(1, y)] \\ & - C^T P_x^2 P_y^2 [y\Psi(x, 1) + xy\Psi(1, 1)] \\ & + l(x, y) - yl(x, 1) + v(x, y) \end{aligned} \quad (3.72)$$

où

$$v(x, y) = y [g(x, 1) - g(x, 0)] + g(x, 0).$$

En intégrant (3.61) une fois par rapport à x de 0 à x et deux fois par rapport à y de 0 à y , on obtient :

$$\ddot{g}'(x, y) = C^T P_y \Psi(x, y) + \ddot{g}'(x, 0), \quad (3.73)$$

$$\ddot{g}(x, y) = C^T P_y^2 \Psi(x, y) + y\ddot{g}'(x, 0) + \ddot{g}(x, 0), \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \dot{g}(x, y) = & C^T P_y^2 P_x \Psi(x, y) + y [\dot{g}'(x, 0) - \dot{g}'(0, 0)] \\ & + \dot{g}(x, 0) - \dot{g}(0, 0) + g'(0, y), \end{aligned} \quad (3.75)$$

Remplacant y par 1 dans les équations (3.74) et (3.75), on obtient :

$$\ddot{g}'(x, 0) = -C^T P_y^2 \Psi(x, 1) + \dot{g}(x, 1) - \dot{g}(x, 0), \quad (3.76)$$

et

$$\dot{g}'(x, 0) - \dot{g}'(0, 0) = -C^T P_y^2 P_x \Psi(x, 1) + u(x), \quad (3.77)$$

où

$$u(x) = \dot{g}(x, 1) - \dot{g}(x, 0) + \dot{g}(0, 0) - \dot{g}(0, 1).$$

D'autre part, si on remplace l'équation (3.76) dans (3.74) et l'équation (3.77) dans (3.75), on obtient:

$$\ddot{g}(x, y) = C^T P_y^2 [\Psi(x, y) - y\Psi(x, 1)] + y[\ddot{g}(x, 1) - \ddot{g}(x, 0)] + \ddot{g}(x, 0), \quad (3.78)$$

et

$$\begin{aligned} \dot{g}(x, y) &= C^T P_y^2 P_x [\Psi(x, y) - y\Psi(x, 1)] + yu(x, y) \\ &\quad + \dot{g}(x, 0) - \dot{g}(0, 0) + \dot{g}(0, y) \end{aligned} \quad (3.79)$$

En intégrant (3.79) une fois par rapport à x de 0 à x , on obtient

$$\begin{aligned} g(x, y) &= C^T P_y^2 P_x^2 [\Psi(x, y) - y\Psi(x, 1)] + w(x, y) \\ &\quad + x[\dot{g}(0, y) - \dot{g}(0, 0)] + g(0, y), \end{aligned} \quad (3.80)$$

où

$$\begin{aligned} w(x, y) &= y[g(x, 1) - g(0, 1) - g(x, 0) + g(0, 0)] \\ &\quad + xy[g'(0, 0) - g'(1, 0)] + g(x, 0) - g(0, 0). \end{aligned}$$

Remplacant x par 1 dans l'équation (3.80), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{g}(x, 0) - \dot{g}(0, 0) &= -C^T P_y^2 P_x^2 [\Psi(1, y) - y\Psi(1, 1)] \\ &\quad - w(1, y) + g(1, y) - g(0, y), \end{aligned} \quad (3.81)$$

en substituant l'équation (3.81) dans l'équation (3.79), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{g}(x, y) &= C^T P_y^2 P_x [\Psi(x, y) - y\Psi(x, 1)] \\ &+ C^T P_y^2 P_x^2 [-\Psi(1, y) + y\Psi(1, 1)] + \dot{g}(x, 0) \\ &+ yu(x, y) - w(x, 1) + g(1, y) - g(0, y), \end{aligned} \quad (3.82)$$

en remplaçant les équations (3.67), (3.71), (3.72), (3.78) et (3.82) dans l'équation (3.60), on obtient le système suivant:

$$C^T A = G(x, y) \quad (3.83)$$

où

$$\begin{aligned} A &= P_y^2 [\Psi(x, y) - y\Psi(x, 1)] + P_x^2 [\Psi(x, y) - x\Psi(1, y)] \\ &+ 2P_x^2 P_y^2 [\Psi(x, y) - x\Psi(1, y) - y\Psi(x, 1) - xy\Psi(1, 1)] \end{aligned} \quad (3.84)$$

et

$$\begin{aligned} G(x, y) &= -x [g''(1, y) - g''(0, y)] - g''(0, y) \\ &- y [\ddot{g}(x, 1) - \ddot{g}(x, 0)] - \ddot{g}(x, 0) \\ &- 2 [l(x, y) - yl(x, 1) + v(x, y)], \end{aligned} \quad (3.85)$$

en colocalisant l'équation (3.60) en $(2^{k-1}2^{k'-1}MM')$ points, nous pouvons obtenir un ensemble d'équations algébriques qui peuvent être résolues pour C .

3.3.2 Tests numériques

Equation de Poisson avec conditions de Dirichlet

Soit l'équation de Poisson suivante (voir [8]):

$$\frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial y^2} = -2g(x, y) \quad (3.86)$$

avec des conditions aux limites de type Dirichlet suivantes:

$$\begin{aligned} g(x, 0) &= 0, & g(1, y) &= \sin(1) \sin(y), \\ g(0, y) &= 0, & g(x, 1) &= \sin(x) \sin(1). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Cette équation admet comme solution exacte :

$$g(x, y) = \sin(x) \sin(y).$$

En utilisant les équations (3.67), (3.69) et (3.78) on obtient:

$$\begin{aligned} \ddot{g}(x, y) &= C^T P_y^2 [\Psi(x, y) - y\Psi(x, 1)] - y \sin(x) \sin(1), \\ g''(x, y) &= C^T P_x^2 [\Psi(x, y) - x\Psi(1, y)] - x \sin(y) \sin(1), \end{aligned} \quad (3.88)$$

et

$$\begin{aligned} g(x, y) &= C^T P_x^2 P_y^2 [\Psi(x, y) - x\Psi(1, y) - y\Psi(x, 1)] - xy C^T P_x^2 P_y^2 \Psi(1, 1) + \\ & x \sin(y) \sin(1) - xy \sin^2(1) + y \sin(x) \sin(1). \end{aligned} \quad (3.89)$$

En utilisant les équations (3.71), (3.72) et en remplaçant les équations (3.87), (3.88) dans l'équation (3.86), on obtient:

$$\begin{aligned} &C^T [P_y^2 [\Psi(x, y) - y\Psi(x, 1)] + P_x^2 [\Psi(x, y) - x\Psi(1, y)] + \\ &2P_x^2 P_y^2 [\Psi(x, y) - x\Psi(1, y) - y\Psi(x, 1) - xy C^T \Psi(1, 1)]] \\ &= -x \sin(1) \sin(y) - y \sin(1) \sin(x) + 2xy \sin^2(1). \end{aligned} \quad (3.90)$$

où

$$G(x, y) = -x \sin(1) \sin(y) - y \sin(1) \sin(x) + 2xy \sin^2(1) \quad (3.91)$$

et

$$\begin{aligned} A &= P_y^2 [\Psi(x, y) - y\Psi(x, 1)] + P_x^2 [\Psi(x, y) - x\Psi(1, y)] + \\ &2P_x^2 P_y^2 [\Psi(x, y) - x\Psi(1, y) - y\Psi(x, 1) - xy\Psi(1, 1)]. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Tableau 3: éreurs $Err = \|g_{ex} - g_{app}\|_2$ où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne.

	$M = M' = 2$	$M = M' = 3$	$M = M' = 5$	$M = M' = 6$	$M = M' = 8$
$k = k' = 1$	$3.3456e - 002$	$8.7652e - 003$	$1.0085e - 004$	$4.7398e - 006$	$1.4745e - 008$
$k = k' = 2$	$2.1711e - 002$	$1.8977e - 003$	$5.3338e - 006$	$1.9506e - 007$	$1.5504e - 010$
$k = k' = 3$	$1.1934e - 002$	$4.2563e - 004$	$2.9644e - 007$	$6.7233e - 009$	$3.1655e - 012$

Représentation graphique des solutions

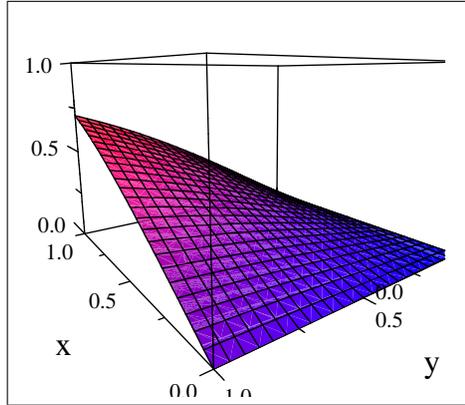


Figure 6: Solution exacte

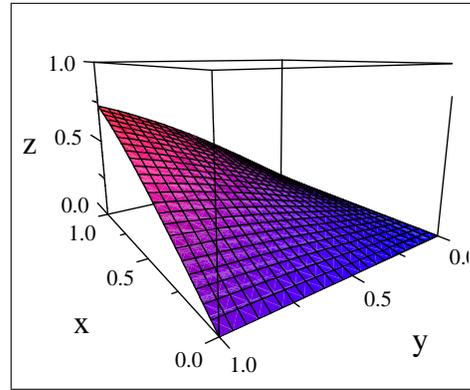


Figure 7: Solution approximative

Equation de Poisson avec des conditions mixtes

Soit l'équation de Poisson donnée par (3.86) suivante (voir [8]) :

$$\frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial y^2} = -2g(x, y) \quad (3.93)$$

avec les conditions aux limites de type mixte suivantes:

$$\begin{aligned} g(x, 0) &= 0, & \frac{\partial g(x, 0)}{\partial x} &= \sin(x), \\ g(0, y) &= 0, & \frac{\partial g(0, y)}{\partial x} &= \sin(y). \end{aligned} \quad (3.94)$$

Cette équation admet comme solution exacte :

$$g(x, y) = \sin(x) \sin(y).$$

En utilisant les équations (3.67), (3.69) et (3.78) on obtient:

$$\begin{aligned} \ddot{g}(x, y) &= C^T P_y^2 \Psi(x, y) - y \sin(x), \\ g''(x, y) &= C^T P_x^2 \Psi(x, y) - x \sin(y), \end{aligned} \quad (3.95)$$

et

$$g(x, y) = C^T P_x^2 P_y^2 \Psi(x, y) - xy + x \sin(y) + y \sin(x). \quad (3.96)$$

Le système (3.83) devient

$$C^T [P_y^2 + P_x^2 + 2P_x^2 P_y^2] \Psi(x, y) = 2xy - x \sin(y) - y \sin(x). \quad (3.97)$$

où

$$G(x, y) = 2xy - x \sin(y) - y \sin(x). \quad (3.98)$$

et

$$A = [P_y^2 + P_x^2 + 2P_x^2 P_y^2] \Psi(x, y) \quad (3.99)$$

Tableau 4: erreurs $Err = \|g_{ex} - g_{app}\|_2$ où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne.

	$M = M' = 2$	$M = M' = 3$	$M = M' = 4$	$M = M' = 7$	$M = M' = 10$
$k = k' = 1$	$1.1624e - 003$	$1.6192e - 003$	$6.4599e - 005$	$2.7542e - 007$	$1.3569e - 008$
$k = k' = 2$	$6.0021e - 004$	$4.0452e - 001$	$5.1789e - 004$	$6.2592e - 005$	$3.1469e - 005$

4 Résolution de l'équation de Poisson Bidimensionnelle dans \mathbb{C}

4.1 Introduction

Dans cette partie, nous allons résoudre l'équation de Poisson avec une solution complexe F_0 en utilisant une méthode de calcul basée sur les ondelettes de Legendre (OLs) et les matrices opérationnelles d'intégration et de dérivation des OLs.

Considérons l'équation suivante (voir [27]) :

$$\Delta F_0(x, y) = \Gamma(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \quad (4.1)$$

avec les conditions aux limites de type mixte suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} F_0(0, 0) = 0 & \\ F_0(x, 0) = h(x), & x \in [0, 1], \\ F_0(0, y) = k(y), & y \in [0, 1], \\ \frac{\partial F_0(x, 1)}{\partial x} = \alpha & x \in [0, 1], \\ \frac{\partial F_0(1, y)}{\partial y} = \beta & y \in [0, 1], \end{array} \right. \quad (4.2)$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ désigne l'opérateur Laplacien. $F_0(x, y)$ est une fonction complexe inconnue à déterminer, $\Gamma(x, y)$ est une fonction complexe donnée, $h(x)$ et $k(y)$ sont des fonctions

complexes données deux fois continûment différentiables sur l'intervalle $[0, 1]$ et $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ sont deux constantes complexes connues.

4.2 Description de la méthode

Pour résoudre l'équation (4 – 1), supposons :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_0(x, y) = f(x, y) + ig(x, y), \\ \Gamma(x, y) = \gamma_1(x, y) + i\gamma_2(x, y), \\ h(x) = h_1(x) + ih_2(x), \\ k(y) = k_1(y) + ik_2(y). \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Par conséquent, on peut réécrire l'équation (4.1) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta f(x, y) = \gamma_1(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \\ \Delta g(x, y) = \gamma_2(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \end{array} \right. \quad (4.4)$$

et réécrire les conditions (4.2) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0, 0) = g(0, 0) = 0 \\ f(x, 0) = h_1(x), \quad g(x, 0) = h_2(x), \quad x \in [0, 1], \\ f(0, y) = k_1(y), \quad g(0, y) = k_2(y), \quad y \in [0, 1], \\ \frac{\partial f(x, 1)}{\partial x} = \alpha_1, \quad x \in [0, 1], \\ \frac{\partial g(x, 1)}{\partial x} = \alpha_2, \quad x \in [0, 1], \\ \frac{\partial f(1, y)}{\partial y} = \beta_1, \quad y \in [0, 1], \\ \frac{\partial g(1, y)}{\partial y} = \beta_2, \quad y \in [0, 1], \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Maintenant on suppose :

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = \Psi^T(x) F \Psi(y) \\ \frac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2} = \Psi^T(x) G \Psi(y) \end{cases} \quad (4.6)$$

où $F = [f_{ij}]_{\hat{m} \times \hat{m}}$ et $G = [g_{ij}]_{\hat{m} \times \hat{m}}$ sont les matrices que nous recherchons, et $\Psi(x)$ est le vecteur d'ondelettes de Legendre défini en (1.5).

Supposons:

$$\begin{cases} f(x, 0) = h_1(x) \triangleq \Psi^T(x) H_1, \\ g(x, 0) = h_2(x) \triangleq \Psi^T(x) H_2, \\ f(0, y) = k_1(y) \triangleq K_1^T \Psi(y), \\ g(0, y) = k_2(y) \triangleq K_2^T \Psi(y). \end{cases} \quad (4.7)$$

En intégrant (4.6) par rapport à y de 0 à y , on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{y=0} = \Psi^T(x) F P_y \Psi(y), \\ \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)_{y=0} = \Psi^T(x) G P_y \Psi(y). \end{cases} \quad (4.8)$$

En intégrant (4.8) par rapport à y de 0 à y , on obtient :

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{y=0} \right]_0^y = \Psi^T(x) F P_y^2 \Psi(y), \\ \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)_{y=0} \right]_0^y = \Psi^T(x) G P_y^2 \Psi(y), \end{cases} \quad (4.9)$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{y=0} \right] - \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{y=0} - 0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{y=0} \right] = \Psi^T(x) F P_y^2 \Psi(y), \\ \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)_{y=0} \right] - \left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)_{y=0} - 0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)_{y=0} \right] = \Psi^T(x) G P_y^2 \Psi(y), \end{array} \right. \quad (4.10)$$

mais d'après (4.7), on a $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{y=0} = h_1''(x) = \Psi(x)^T (D^2)^T H_1$, donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{y=0} - \Psi(x)^T (D^2)^T H_1 = \Psi^T(x) F P_y^2 \Psi(y), \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)_{y=0} - \Psi(x)^T (D^2)^T H_2 = \Psi^T(x) G P_y^2 \Psi(y), \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Si on remplace $y = 1$ dans (4.8), on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{y=0} = \frac{\partial^2 f(x,1)}{\partial x^2} - \Psi^T(x) \left[(D^2)^T H_1 + F P_y^2 \Psi(1) \right], \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)_{y=0} = \frac{\partial^2 g(x,1)}{\partial x^2} - \Psi^T(x) \left[(D^2)^T H_2 + G P_y^2 \Psi(1) \right], \end{array} \right. \quad (4.12)$$

où H_1 et H_2 sont les vecteurs des coefficients d'ondelettes de Legendre pour $h_1(x)$ et $h_2(x)$, respectivement.

De plus, on a $\frac{\partial^2 f(x,1)}{\partial x^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 g(x,1)}{\partial x^2} = 0$, donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{y=0} = \Psi^T(x) \left[-(D^2)^T H_1 - F P_y^2 \Psi(1) \right] \triangleq \Psi^T(x) \wedge_1, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)_{y=0} = \Psi^T(x) \left[-(D^2)^T H_2 - G P_y^2 \Psi(1) \right] \triangleq \Psi^T(x) \wedge_2, \end{array} \right. \quad (4.13)$$

et en substituant (4.13) dans (4.11), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \Psi^T(x) (D^2)^T H_1 + y \Psi^T(x) \wedge_1 + \Psi^T(x) F P_y^2 \Psi(y), \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \Psi^T(x) (D^2)^T H_2 + y \Psi^T(x) \wedge_2 + \Psi^T(x) G P_y^2 \Psi(y). \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Supposons que les vecteurs de coefficients (OLs) des fonctions unitaire et y soient d et Y respectivement (c.a.d $1 = d^T \Psi(y)$ et $y = Y^T \Psi(y)$), alors (4.14) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \Psi^T(x) \left[(D^2)^T H_1 d^T + \wedge_1 Y^T + F P_y^2 \right] \Psi(y) \triangleq \Psi^T(x) A_1 \Psi(y), \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \Psi^T(x) \left[(D^2)^T H_2 d^T + \wedge_2 Y^T + G P_y^2 \right] \Psi(y) \triangleq \Psi^T(x) A_2 \Psi(y). \end{cases} \quad (4.15)$$

De plus, en intégrant (4.6) par rapport à x de 0 à x et en considérant (4.7), on obtient

:

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{x=0} = \Psi^T(x) P_x^T F \Psi(y), \\ \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)_{x=0} = \Psi^T(x) P_x^T G \Psi(y), \end{cases} \quad (4.16)$$

en intégrant (4.16) encore par rapport à x , on obtient :

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{x=0} \right]_0^x = \Psi^T(x) (P_x^T)^2 F \Psi(y), \\ \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)_{x=0} \right]_0^x = \Psi^T(x) (P_x^T)^2 G \Psi(y), \end{cases} \quad (4.17)$$

d'où

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{x=0} \right] - \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{x=0} - 0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{x=0} \right] = \Psi^T(x) (P_x^T)^2 F \Psi(y), \\ \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)_{x=0} \right] - \left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)_{x=0} - 0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)_{x=0} \right] = \Psi^T(x) (P_x^T)^2 G \Psi(y), \end{cases} \quad (4.18)$$

mais d'après (4.5), on a

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k_1''(y) + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{x=0} + \Psi^T(x) (P_x^T)^2 F \Psi(y), \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = k_2''(y) + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)_{x=0} + \Psi^T(x) (P_x^T)^2 G \Psi(y), \end{cases} \quad (4.19)$$

en considérant (4.7) (c.a.d $k_1''(y) = K_1^T D^2 \Psi(y)$ et $k_2''(y) = K_2^T D^2 \Psi(y)$) et en remplaçant x par 1 dans (4.19), on obtient:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{x=1} = K_1^T D^2 \Psi(y) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{x=0} + \Psi^T(1) (P_x^T)^2 F \Psi(y), \\ \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)_{x=1} = K_2^T D^2 \Psi(y) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)_{x=0} + \Psi^T(1) (P_x^T)^2 G W(y), \end{cases} \quad (4.20)$$

en considérant (4.5) et sachant que $\frac{\partial^2 f(1,y)}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 g(1,y)}{\partial y^2} = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{x=0} = \left[-K_1^T D^2 - \Psi^T(1) (P_x^T)^2 F \right] \Psi(y) \triangleq \sum_1^T \Psi(y), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)_{x=0} = \left[-K_2^T D^2 - \Psi^T(1) (P_x^T)^2 G \right] \Psi(y) \triangleq \sum_2^T \Psi(y), \end{cases} \quad (4.21)$$

Supposons que les vecteurs des coefficients (OLs) des fonctions unitaires et x soient respectivement d et X (c.a.d $1 = \Psi^T(x)d$ et $x = \Psi^T(x)X$). En considérant (4.7) et en substituant (4.21) dans (4.19), on peut écrire (4.19) comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Psi^T(x) \left[dK_1^T D^2 + X \sum_1^T + (P_x^T)^2 F \right] \Psi(y) \triangleq \Psi^T(x) B_1 \Psi(y), \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \Psi^T(x) \left[dK_2^T D^2 + X \sum_2^T + (P_x^T)^2 G \right] \Psi(y) \triangleq \Psi^T(x) B_2 \Psi(y), \end{cases} \quad (4.22)$$

Alors, en substituant (4.15), (4.22) dans (4.4), on obtient :

$$\begin{cases} A_1 + B_1 - \Gamma_1 = 0 \\ A_2 + B_2 - \Gamma_2 = 0 \end{cases}, \quad (4.23)$$

où Γ_1 et Γ_2 sont les matrices des coefficients OLs pour les fonctions $\gamma_1(x, y)$ et $\gamma_2(x, y)$, respectivement.

En résolvant le système (4.23) nous obtenons les matrices inconnues F , G et par la suite, nous obtenons les fonctions $f(x, y)$, $g(x, y)$ comme suit.

En intégrant (4.15) par rapport à x on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0} + \Psi^T(x) P_x^T A_1 \Psi(y), \\ \frac{\partial g}{\partial x} = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{x=0} + \Psi^T(x) P_x^T A_2 \Psi(y), \end{cases} \quad (4.24)$$

en intégrant (4.24) par rapport à x , on obtient :

$$\begin{cases} f(x, y) = f(0, y) + x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0} + \Psi^T(x) (P_x^T)^2 A_1 \Psi(y), \\ g(x, y) = g(0, y) + x \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{x=0} + \Psi^T(x) (P_x^T)^2 A_2 \Psi(y), \end{cases} \quad (4.25)$$

en considérant (4.7) et en substituant dans(4.25), on a :

$$\begin{cases} f(x, y) = K_1^T \Psi(y) + x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0} + \Psi^T(x) (P_x^T)^2 A_1 \Psi(y), \\ g(x, y) = K_2^T \Psi(y) + x \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{x=0} + \Psi^T(x) (P_x^T)^2 A_2 \Psi(y), \end{cases} \quad (4.26)$$

si on remplace $x = 1$ dans (4.26) on obtient :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0} = f(1, y) - K_1^T \Psi(y) - \Psi^T(1) (P_x^T)^2 A_1 \Psi(y) \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{x=0} = g(1, y) - K_2^T \Psi(y) - \Psi^T(1) (P_x^T)^2 A_2 \Psi(y) \end{cases} \quad (4.27)$$

En considérant (4.5) et en intégrant par rapport à y de 0 à y , on obtient :

$$\begin{cases} f(1, y) = f(1, 0) + \beta_1 y = h_1(1) + \beta_1 y \triangleq \omega_1^T \Psi(y), \\ g(1, y) = g(1, 0) + \beta_2 y = h_2(1) + \beta_2 y \triangleq \omega_2^T \Psi(y), \end{cases} \quad (4.28)$$

en substituant (4.28) dans (4.27), on aura:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0} = \left[\omega_1^T - K_1^T - \Psi(1)^T (P_x^T)^2 A_1 \right] \Psi(y) \triangleq \Omega_1^T \Psi(y), \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{x=0} = \left[\omega_2^T - K_2^T - \Psi(1)^T (P_x^T)^2 A_2 \right] \Psi(y) \triangleq \Omega_2^T \Psi(y), \end{cases} \quad (4.29)$$

en considérant (4.7) et en substituant (4.29) dans (4.26), on obtient:

$$\begin{cases} f(x, y) = \Psi^T(x) \left[EK_1^T + X\Omega_1^T + (P_x^T)^2 A_1 \right] \Psi(y), \\ g(x, y) = \Psi^T(x) \left[EK_2^T + X\Omega_2^T + (P_x^T)^2 A_2 \right] \Psi(y). \end{cases} \quad (4.30)$$

En conséquence, nous trouvons la solution approximative du problème proposé en (4.1), d'où $F_0(x, y) = f(x, y) + ig(x, y)$.

4.3 Test numérique

Considérons l'équation de Poisson sur le carré unitaire $[0, 1] \times [0, 1]$ qui se formule comme suit (voir [27]) :

$$\Delta F_0(x, y) = 2x - 2 + i(2y - 2), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad (4.31)$$

sous les conditions aux limites de type mixte suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_0(0, 0) = 0 \\ F_0(x, 0) = -x - ix^2, \quad x \in [0, 1], \\ F_0(0, y) = -y^2 - iy, \quad y \in [0, 1], \\ \frac{\partial F_0(x, 1)}{\partial x} = 0 \quad x \in [0, 1], \\ \frac{\partial F_0(1, y)}{\partial y} = 0 \quad y \in [0, 1], \end{array} \right. \quad (4.32)$$

de sorte que la solution exacte soit donnée :

$$F_0(x, y) = xy^2 - x - y^2 + i(x^2y - x^2 - y) \triangleq f(x, y) + ig(x, y). \quad (4.33)$$

les conditions (4.32) peuvent s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0,0) = g(0,0) = 0 \\ f(x,0) = h_1(x) = -x \triangleq \Psi^T(x)H_1, \quad x \in [0,1], \\ g(x,0) = h_2(x) = -x^2 \triangleq \Psi^T(x)H_2, \quad x \in [0,1], \\ f(0,y) = k_1(y) = -y^2 \triangleq K_1^T \Psi(y), \quad y \in [0,1], \\ g(0,y) = k_2(y) = -y \triangleq K_2^T \Psi(y), \quad y \in [0,1], \\ \frac{\partial f(x,1)}{\partial x} = \alpha_1 = 0, \frac{\partial g(x,1)}{\partial x} = \alpha_2 = 0, \quad x \in [0,1], \\ \frac{\partial f(1,y)}{\partial y} = \beta_1 = 0, \frac{\partial g(1,y)}{\partial y} = \beta_2 = 0, \quad y \in [0,1], \end{array} \right. , \quad (4.34)$$

pour $k = 1$, $M = 3$, on obtient:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{15} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

$$P = P_y = P_x = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}.$$

et on remplaçant dans (4.7), on obtient:

$$H_1 = K_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, H_2 = K_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{6\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_1 = \Gamma_2^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de (4.13), (4.15), (2.22), on obtient:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= F \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{15}\sqrt{5} \\ \frac{1}{30}\sqrt{3} & -\frac{1}{30} & 0 \\ \frac{1}{15}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{15} \end{pmatrix} \\
 A_2 &= \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + G \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{15}\sqrt{5} \\ \frac{1}{30}\sqrt{3} & -\frac{1}{30} & 0 \\ \frac{1}{15}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{15} \end{pmatrix} \\
 B_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{30}\sqrt{3} & \frac{1}{15}\sqrt{5} \\ 0 & -\frac{1}{30} & 0 \\ \frac{1}{15}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{15} \end{pmatrix} F, \\
 B_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{30}\sqrt{3} & \frac{1}{15}\sqrt{5} \\ 0 & -\frac{1}{30} & 0 \\ \frac{1}{15}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{15} \end{pmatrix} G.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

en substituant $A_1, A_2, B_1, B_2, \Gamma_1$ et Γ_2 dans le système (4.23), on obtient:

$$\left\{ \begin{aligned}
 &F \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{15}\sqrt{5} \\ \frac{1}{30}\sqrt{3} & -\frac{1}{30} & 0 \\ \frac{1}{15}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{15} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{30}\sqrt{3} & \frac{1}{15}\sqrt{5} \\ 0 & -\frac{1}{30} & 0 \\ \frac{1}{15}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{15} \end{pmatrix} F = 0_{3 \times 3}, \\
 &G \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{15}\sqrt{5} \\ \frac{1}{30}\sqrt{3} & -\frac{1}{30} & 0 \\ \frac{1}{15}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{15} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{30}\sqrt{3} & \frac{1}{15}\sqrt{5} \\ 0 & -\frac{1}{30} & 0 \\ \frac{1}{15}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{15} \end{pmatrix} G = 0_{3 \times 3},
 \end{aligned} \right. \tag{4.38}$$

d'où

$$F = G = 0_{3 \times 3}, \tag{4.39}$$

par conséquent, on peut calculer les matrices suivantes :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= B_2 = 0_{3 \times 3}, \\
 A_2 &= B_1^T = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

substituons (4.36), (4.39) et (4.40) dans le système (4.30):

$$\begin{cases} f(x, y) \simeq \Psi^T(x) \left[dK_1^T + X \left[\omega_1^T - K_1^T - \Psi^T(1) \left(\tilde{I}^T \right)^2 A_1 \right] + (P_x^T)^2 A_1 \right] \Psi(y), \\ g(x, y) \simeq \Psi^T(x) \left[dK_2^T + X \left[\omega_2^T - K_2^T - \Psi^T(1) \left(\tilde{I}^T \right)^2 A_2 \right] + (P_x^T)^2 A_2 \right] \Psi(y), \end{cases} \quad (4.41)$$

on obtient les composantes de la solution approximative de la solution F_0 :

$$\begin{cases} f(x, y) \simeq 0.99997xy^2 + 4.7255 \times 10^{-5}xy - 1.001x - 0.99998y^2 \\ \quad - 2.4161 \times 10^{-5}y + 2.3128 \times 10^{-5}, \\ g(x, y) \simeq 0.99997x^2y - 0.99998x^2 + 4.7255 \times 10^{-5}xy \\ \quad - 2.4161 \times 10^{-5}x - 1.001y + 2.3128 \times 10^{-5}. \end{cases}$$

Représentation de $f(x, y)$ et la solution approximative:

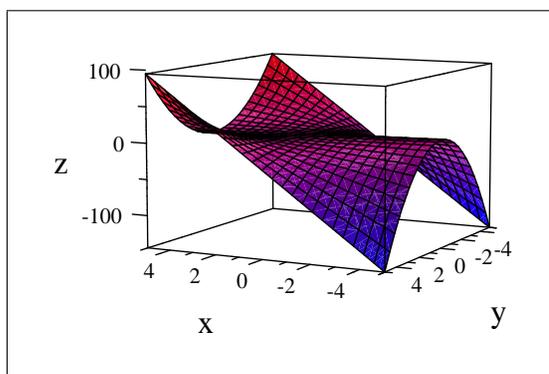


Figure 8 : La solution approximative

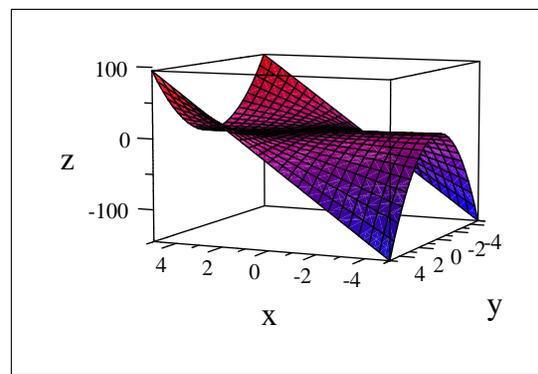


Figure 9: La solution exacte f

Dans ce qui suit, nous ferons une comparaison entre la solution exacte et approchée et déterminerons les erreurs pour quelques points.

Représentation de $g(x, y)$ et la solution approximative:

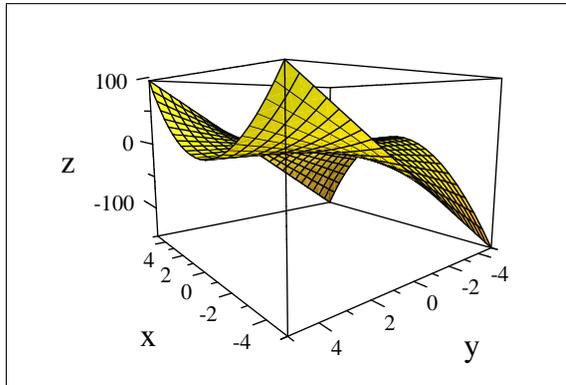


Figure10: La solution approximative

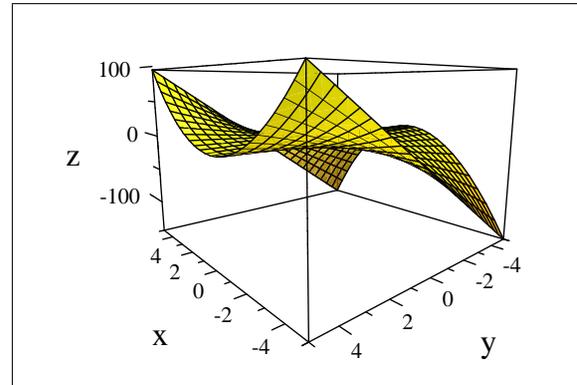
Figure11: La solution exacte g

Tableau 5:

Les erreurs absolues de la méthode proposée pour $k = 1$, $M = 3$ pour la solution $f(x, y)$:

x_i	y_i	e_i
0.1	0.1	2.13545E-05
0.2	0.2	2.0746E-05
0.3	0.3	2.11226E-05
0.4	0.4	2.23044E-05
0.5	0.5	2.41113E-05
0.6	0.6	2.63632E-05
0.7	0.7	2.88803E-05
0.8	0.8	3.14824E-05
0.9	0.9	3.39897E-05

Tableau 6:

Les erreurs absolues de la méthode proposée pour $k = 1$, $M = 3$ pour la solution $g(x, y)$:

x_i	y_i	e_i
0.1	0.1	2.13545E-05
0.2	0.2	2.0746E-05
0.3	0.3	2.11226E-05
0.4	0.4	2.23044E-05
0.5	0.5	2.41113E-05
0.6	0.6	2.63632E-05
0.7	0.7	2.88803E-05
0.8	0.8	3.14824E-05
0.9	0.9	3.39897E-05

4.4 Algorithmme

L'algorithme de cette méthode peut être présenté dans les étapes suivantes :

Entrée : $M \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$; les constantes réelles $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ et β_2 ; les fonctions $h_1(x), h_2(x), k_1(y)$ et $k_2(y) \in L^2[0, 1]$; les fonctions $\gamma_1(x, y), \gamma_2(x, y) \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$.

Étape 1 : Définir les ondelettes de Légendre $\psi_{nm}(x, y)$ par (1.4).

Étape 2 : Préparer le vecteur d'ondelettes de Légendre $\Psi(x, y)$ à partir de (1.5).

Étape 3 : Calculer la matrice d'ondelettes de Légendre $\phi_{\widehat{m} \times \widehat{m}} \triangleq [\Psi(\frac{1}{2\widehat{m}}), \Psi(\frac{3}{2\widehat{m}}), \dots, \Psi(\frac{2\widehat{m}-1}{2\widehat{m}})]$ de (1.18).

Étape 4 : Calculer les matrices opérationnelles d'ondelettes de Légendre P^n et D^n à l'aide de (2.2) et (2.27), (2.28).

Étape 5 : Calculer les vecteurs de coefficients d, X, Y, H_1, H_2, K_1 et K_2 en utilisant (1.13), (1.14) et (1.15).

Étape 6 : Définir les matrices inconnues $F = [f_{ij}]_{\widehat{m} \times \widehat{m}}$ et $G = [g_{ij}]_{\widehat{m} \times \widehat{m}}$.

Étape 7 : Calculer les vecteurs Λ_1, Λ_2 et par conséquent A_1, A_2 à l'aide de (4.13) et (4.15).

Étape 8 : Calculer les vecteurs Σ_1, Σ_2 et par conséquent B_1, B_2 à l'aide de (4.21) et (4.22).

Étape 9 : mettre
$$\begin{cases} A_1 + B_1 - \Gamma_1 = 0 \\ A_2 + B_2 - \Gamma_2 = 0 \end{cases} .$$

Étape 10 : Trouver les matrices inconnues F et G les solution du système d'équations algébriques défini à l'étape 9.

Étape 11 : Calculer les vecteurs ω_1, ω_2 et par conséquent $\Omega_1; \Omega_2$ à l'aide de (4.28) et (4.29).

Sortie : Trouver $f(x, y)$ et $g(x, y)$ à partir de (4.30) et par conséquent trouver $F(x, y)$.

Conclusion générale

Dans ce travail, on a présenté une méthode numérique combinée aux ondelettes de Legendre avec leur matrice opérationnelle d'intégration ou avec leur matrice opérationnelle de dérivation dite «Méthode des Ondelettes» afin d'approximer les solutions numériques des équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles dans \mathbb{R} et on a pu l'appliquer à l'équation de Poisson bidimensionnelle dans \mathbb{C} en utilisant les deux matrices opérationnelles en même temps pour la première fois. Les performances de la méthode appliquée pour l'équation donnée sont efficaces et ont un niveau remarquable et impressionnant. La méthode détermine les solutions mentionnées de manière efficace, rapide et précise. Dans le futur, nous avons l'intention d'étudier un autre type d'équations aux dérivées partielles non linéaires et les équations aux dérivées fractionnaires dans un domaine plus complexe en utilisant la même méthode.

Bibliographie

- [1] Abbas Saadatmandia, Mehdi Dehghan, A new operational matrix for solving fractional-order differential equations, *Computers and Mathematics with Applications* 59 (2010) 1326-1336.
- [2] Ali Davari, Abozar Ahmadi, New implementation of Legendre polynomials for solving partial differential equations. *Applied Mathematics*, 2013, 4, 1647-1650.
- [3] Amanuel Hossiso Gatiso, Melisew Tefera Belachew, Getinet Alemayehu Wolle, Sixth-order compact finite difference scheme with discrete sine transform for solving Poisson equations with Dirichlet boundary conditions, *Applied Mathematics* 10 (2021) 100148.
- [4] Benkahla Fatiha, Chabouni Acia, Résolution des EDPs par la Méthode des Ondelettes de Legendre en deux dimension. *Université Abdelhamid Ibn Babis Mostaganem. Année Universitaire 2015/2016.*
- [5] Bouzid Leila, Belhamiti Omar, La Modélisation Mathématique et Simulation numérique de transmission de l'épidémie de Dengue. DOI: 10.13140/RG.2.1.4827.9124(2015).
- [6] E. Banifatemi, M. Razzaghi and S. Yousefi, Two-dimensional Legendre Wavelets Method for the Mixed Volterra Fredholm Integral Equations. *Journal of Vibration and Control* 2007 13: 1667. DOI: 10.1177/1077546307078751.
- [7] F. Mohammadi and M. M. Hosseini, A new Legendre wavelet operational matrix of derivative and its applications in solving the singular ordinary differential equations, *Franklin Inst* 348(2011), 1787-1796.

-
- [8] Fukang Yin, Junqiang Song, Solving Linear PDEs with the Aid of Two Dimensional Legendre Wavelets. National Conference on Information Technology and Computer Science (CITCS 2012). DOI: 10.2991/citcs.2012.181.
- [9] Goedecker S. Wavelets and their application for the solution of Poisson's and Schrödinger's equation. *Multiscale Simulation Methods Mol Sci* 2009;42:507–34.
- [10] Hamideh Ebrahimi, Two dimensional Legendre wavelets: A powerful approach for a variety of systems of integral equations. *Sohag Journal of Mathematics*. 4, No. 3, 87-94 (2017). <http://dx.doi.org/10.18576/sjm/040304>.
- [11] H. Parsian, "two dimension Legendre wavelets and operational matrices of integration", *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis* 21 (2005), 101–106.
- [12] I. K. Youssef, M. H. El Dewaik. Haar Wavelet Solution of Poisson's Equation and Their Block Structures. *American Journal of Mathematical and Computer Modelling*. Vol. 2, No. 3, 2017, pp. 88-94. doi: 10.11648/j.ajmcm.20170203.13.
- [13] I. K. Youssef, M. H. El Dewaik. Solving Poisson's Equations with fractional order using Haarwavelet. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences* 2(1) (2017) 271–284. doi:10.21042/AMNS.2017.1.00023.
- [14] Imran Aziz, Siraj-ul-Islam, Bozidar Sarler, Wavelets collocation methods for the numerical solution of elliptic BV problems. *Applied Mathematical Modelling* 37 (2013) 676–694.
- [15] L. Nanshan and E. Lin, Legendre wavelet method for numerical solutions of partial differential equations, *Numer Methods Partial Differ Equ* 26 (2010), 81–94.
- [16] Masood Roodaki, Zahra JafariBehbahani, Two-Dimensional Legendre wavelets and their applications to integral equations. *Indian Journal of Science and Technology*, Vol 8(2), 157–164, January 2015. DOI :10.17485/ijst/2015/v8i2/58075

-
- [17] M. H. Heydari, M. R. Hooshmandasl, C. Cattani, and M. Li, Legendre wavelets method for solving fractional population growth model in a closed system, *Math Probl Eng* 2013 (2013), 1–8.
- [18] M. H. Heydari, M. R. Hooshmandasl, F. M. Maalek Ghaini, M. Fatehi Marji, R. Dehghan, M. H. Memarian, A new wavelet method for solving the Helmholtz equation with complex solution, *Numer Methods Partial Differ Equ* (2016), DOI 10.1002/num.22022.
- [19] M. H. Heydaria, F. M. Maalek Ghainia, M. R. Hooshmandasla, Legendre wavelets method for numerical solution of time-fractional heat equation, *Wavelets and Linear Algebra* 1 (2014) 19-31.
- [20] M. H. Heydari, M. R. Hooshmandasl, F. M. M. Ghaini, and F. Fereidouni, Two-dimensional Legendre wavelets for solving fractional Poisson equation with Dirichlet boundary conditions, *Eng Anal Bound Elem* 37 (2013), 1331–1338.
- [21] M. H. Heydari, M. R. Hooshmandasl, and F. Mohammadi, Legendre wavelets method for solving fractional partial differential equations with Dirichlet boundary conditions, *Appl Math Comput* 234 (2014), 267–276.
- [22] M. Razzaghi and S. Yousefi, Legendre wavelets operational matrix of integration, *Int J Syst Sci* 32 (2001), 495–502.
- [23] M. Razzaghi and S. Yousefi, Legendre Wavelets Method for the Solution of Nonlinear Problems in the Calculus of Variations. *Mathematical and Computer Modelling* 34 (2001) 45-54 .
- [24] M. U. Rehman and R. A. Khan, The legendre wavelet method for solving fractional differential equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 227(2)(2009), 234–244.
- [25] M.H. Heydari, M.R. Hooshmandasl, F.M.M. Ghaini, F. Mohammadi, Wavelet collocation method for solving multi order fractional differential equations, *J. Appl. Math.* 2012 (2012). Article ID 542401, 19 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2012/542401>.

-
- [26] Muhammadi Syam, An accurate solution of the Poisson equation by the Legendre tau method. *Internat. J. Math. & Math. Sci.* Vol. 20 NO. 4 (1997) 713-718.
- [27] Nacereddine Kerrouche, A.Kadem, On Legendre wavelets for Poisson equation in the frame of complex solution. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*. Volume 48, Special Issue, 2022, Pages 153–167. <https://doi.org/10.30546/2409-4994.48.2022.153167>.
- [28] Naima Abblaoui-Lahmar, Omar Belhamiti, and Sidi Mohammed Bahri, A New Legendre Wavelets Decomposition Method for Solving PDEs. *Malaya Journal of Matematik* 1(1)(2014) 72–81.
- [29] Nicomedes Alonso III, Kenneth L. Bowers, An Alternating-Direction Sinc–Galerkin method for elliptic problems. *Journal of Complexity* 25 (2009) 237–252.
- [30] S.G. Venkatesh, S.K. Ayyaswamy, S. Raja Balachandar, The Legendre wavelet method for solving initial value problems of Bratu-type. *Computers and Mathematics with Applications* 63(2012) 1287-1295.
- [31] S.G. Venkatesh, S.K. Ayyaswamy, S. Raja Balachandar, Legendre wavelets based approximation method for solving advection problems. *Ain Shams Engineering Journal* (2013) 4, 925–932.
- [32] S. U. Islam, I. Aziz, A. Fhaid, and A. Shah, A numerical assessment of parabolic partial differential equations using Haar and Legendre wavelets, *Appl Math Model* 37 (2013), 9455–9481.