MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS - SETIF

MÉMOIRE

Présenté à la faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de

MAGISTÈRE

Option: Mathématiques Appliquées

Par

Mr: Dechoucha Noureddine

THÈME

Etude Mathématique d'un problèmes de contact en mécanique du contact.

soutenu le: 28/11/2011

devant le jury:

Président	**Mr Djabi Seddik**	**Pr.**	**Université de Sétif**
Encadreur	**Mme Selmani Lynda**	**Pr.**	**Université de Sétif**
Examinateur	**Mr Selmani Mohamed**	**M.C.A.**	**Université de Sétif**
Examinateur	**Mme Boutchbak Soraya**	**M.C.A.**	**Université de Sétif**

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et mes remerciements les plus profonds à Mme Selmani Lynda, professeur à l'université Ferhat Abbas Sétif, pour m'avoir proposé ce passionnant sujet, m'avoir aiguillé dans ma recherche, pour sa patience, son encouragement et sa disponibilité ainsi que le soutien très précieux tout au long de cette étude.

Comme je tiens à remercier vivement, Monsieur Djabi Seddik, professeur à l'université Ferhat Abbas Sétif pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à Monsieur Selmani Mohamed et à Mme Boutchbak Soraya, maîtres de conférences à l'université Ferhat Abbas Sétif, d'avoir accepter de juger mon travail.

Enfin, mes remerciements aussi à toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Table des matières

Introduction

Les problèmes de contact avec ou sans frottement impliquant des corps déformables ou non interviennent de multiples façons aussi bien dans le domaine industriel que dans la vie de tous les jours. Compte tenu de l'importance et de la multitude de ces phénomènes, de vastes études ont été entreprises, aussi la littérature concernant la mécanique du contact est vaste et aborde autant de sujets différents que sont la modélisation, l'analyse mathématique ou l'approximation numérique des problèmes de contact, voir les ouvrages [5, 6, 8, 18, 19, 31]. Il existe ainsi de multiples références, citons ici quelques classiques. Une des première référence portant sur l'étude des problèmes de contact avec frottement via les inéquations variationnelles est surement [1]. En ce qui concerne l'analyse appliquée, le lecteur est invité à se reporter aux ouvrages [32]. Pour de plus amples détails sur l'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles, il conviendra de consulter les ouvrages[30, 17].

Outre les problèmes cités ci-dessus, il y a d'autres phénomènes réels et qui sont très importants tels que l'endommagement du matériau et l'adhésion des corps. L'endommagement est un phénomène très important en ingénierie, car il affecte directement la structure des machines. Il existe une littérature abondante sur ce sujet. Des modèles introduisant l'influence de l'endommagement interne du matériau ont été investi mathématiquement. Des modèles de l'endommagement ont été développés dans [10, 13] à partir du principe de la puissance virtuelle. L'analyse mathématique des problèmes en dimension un peut être trouvée dans [14, 15]. La fonction d'endommagement β varie entre 0 et1. Quand $\beta = 1$ il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, quand $\beta = 0$ le matériau est complètement endommagé, quand $0 < \beta < 1$ l'endommagement est partiel[16, 32].

L'usure est un problème majeur pour les matériaux. Lorsque deux corps entrent en contact avec frottement et glissement, les surfaces en contact s'en retrouvent usées, la plus rigide des surfaces usant de manière plus significative l'autre surface. Les particules ainsi perdues des surfaces en contact forment alors une fine couche entre les deux corps. Des expériences ont montré qu' une telle couche ainsi formée pouvait avoir une action bénéfique sur les phénomènes de contact dans le sens où elle pouvait améliorer le glissement. Il peut même y avoir enfoncement de l'un des corps dans l'autre et apparition d'aspérités. Evidemment la modélisation de l'usure devrait faire intervenir de nombreux paramètres comme en autre les propriétés et la rugosite des corps via les lois de constitution, la température, les vitesses des corps ou encore de nombreux autres paramètres. Les premières modélisation avec des lois de frottement et d'usure prenant en compte la thermodynamique peuvent être trouvés dans [20] , [21] , ainsi que dans [4] .

Les matériaux piézoélectriques ont été découverts au début du siècle par les époux Curie. Ce sont des diélectriques particuliers qui permettent de transformer l'énergie de déformation élastique en énergie électrique, et inversement. Plus précisément, la piézoélectricité est la capacité de certains matériaux à se polariser lorsqu'ils sont contraints mécaniquement, la charge apparaissant à leur surface étant proportionnelle à la déformation engendrée. L'effet piézoélectrique inverse est l'obtention d'une déformation par application d'un champ électrique.

Les matériaux piézoélectriques sont très nombreux. Le plus connu est sans doute le quartz, toujours utilisé dans les montres pour générer des impulsions d'horloge. Mais ce sont des céramiques synthétiques, les PZT qui sont le plus largement utilisées aujourdhui dans l'industrie.

De manière plus générale, l'effet direct peut être mis à profit dans la réalisation de capteurs (capteur de pression etc.) tandis que l'effet inverse permet de réaliser des actionneurs (injecteurs à commande piézoélectrique en automobile, nanomanipulateur).

L'utilisation de la piézoélectricité a explosé ces dernières années et est en pleine expansion. La capacité de ces matériaux à convertir l'énergie mécanique en énergie électrique et vice versa est une valeur inestimable pour les transducteurs acoustiques, l'échographie médicale, et pour, la haute précision des pompes et des moteurs. Des performances piézoélectriques élevées ont également ouvert de nouvelles possibilités de "récupération d'énergie", en utilisant le mouvement ambiant et les vibrations pour produire de l'électricité où les piles ou autres sources d'énergie sont impraticables ou indisponibles[1, 23, 24].

Le manuscrit comporte trois chapitres :

Le premier chapitre comporte la formulation mathématique des problèmes étudiés ainsi que les outils Mathématiques que nous utilisons pour la réalisation de ce travail. Nous présentons ici la loi de comportement des matériaux électro- viscoélastiques avec endommagement, le cadre physique des problèmes de contact ainsi que les différents types de conditions aux limites avec réponse normale instantanée associée à une loi locale de frottement et un contact bilatéral avec frottement avec une base rigide et mobile où l'usure des surfaces de contact est prise en considération. Nous passons en revue quelques rappels d'analyse, notamment des résultats sur les espaces fonctionnels, les équations et les inéquations variationnelles, les lemmes de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

Le second chapitre est consacré à l'étude mathématique d'un problème de contact avec frottement pour des matériaux électro- viscoélastiques où l'endommagement interne du matériau est pris en considération, dans un processus quasi-statique. Le contact avec une base rigide est modélisé par une réponse normale instantanée associée à une loi locale de frottement. Le problème se formule comme un système qui comporte une équation variationnelle par rapport au champ de déplacement, une inéquation variationnelle du type parabolique par rapport au champ d'endommagement et une équation variationnelle par rapport au champ électrique[1, 9, 19].

Pour ce problème, des résultats d'existence et d'unicité de la solution ont été considérés en considérant la théorie des équations variationnelles, des inéquations variationnelles du type parabolique et des arguments de point fixe.

Le troisième chapitre du mémoire est consacré à l'étude mathématique d'un problème de contact avec frottement pour des matériaux électro-viscoélastiques avec endommagement dans un processus quasi-statique. Le contact bilatéral avec frottement avec une base rigide et mobile se fait avec usure des surfaces de contact. Le problème se formule comme un système formé par une inéquation variationnelle elliptique par rapport au champ de déplacement, une inéquation variationnelle du type parabolique par rapport au champ d'endommagement, une équation variationnelle par rapport au champ électrique. Des résultats d'existence et d'unicité de la solution ont été considérés en utilisant la théorie des inéquations elliptiques, des inéquations du type parabolique, et des arguments de point fixe.

Notations

Si Ω est un domaine de $IR^d (d = 1, 2, 3)$, on note par.

$\bar{\Omega}$	l'adhérence de Ω
Γ	la frontière de Ω supposée régulière.
$\Gamma_i \quad (i = 1.2.3)$	une partie mesurable de la frontière Γ
$mes\ \Gamma_1$	la mesure de Lebesgue $(d = 1)$ dimensionnelle de Γ_1
ν	la normale unitare sortante à Γ
υ_ν,υ_τ	les composantes normal et angentiel du champ vectoriel υ defini sur $\overline{\Omega}$
$C\left(\overline{\Omega}\right)$	l'espace desfonctions réelles continument différenciables sur $\overline{\Omega}$
$D\left(\overline{\Omega}\right)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différenciables et à support compact contenu dans Ω
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$
H_1	l'espace $H_1(\Omega)^d$
	l'espace $L^2(\Omega)^{d\times d}$
	l'espace $\{\tau \in L^2(\Omega)\}$
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$sur Γ
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$
H'_Γ	l'espace dual de H_Γ
$\gamma : H_1 \to H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles

si H est un espace de Hilbert réel et $d \in \mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes

H^d	l'espace $\{x - (x_i)\,/x_i \in H\}$
$H^{d\times d}$	l'espace $\{x_i = (x_{ij})\,/x_{ij} = x_{ij} \in H\}$
$(.,.)_H$	le produits calaire de H
$\|.\|_H$	la norme de H
H'	l'espace dual de H
$(.,.)_{H'\times H}$	le produit dualité entre $H' \times H$
ψ_K	la fonction indicatrice de $k \subset H$
2^K	l'ensemble de toutes les parties de$k$
$x_n \to x$	la convergentefortedelasuite (x_n) versl'élémentxdansH
$x_n \rightharpoonup x$	la convergente faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H
$\pounds\,(H)$	l'espace des applications linéaires et continues de H dans H

Si de plus $[0;T]$ est un intervalle de temps $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$ on note par:

$C\,(\,[0;T]\,,\,H\,)$	l'espace des fonctions continues de $[0;T]$ dans H
$\|\cdot\|_{0,H}$	la norme de $C\,(\,[0;T]\,,\,H\,)$
$C^1\,(\,[0;T]\,,\,H\,)$	l'espace des fonctions continument dérivable de $[0;T]$ dans H.
$\|\cdot\|_{1,H}$	la norme de $C^1([0;T],H)$
$L^p\,(0,T,H)$	l'espace des fonctions mesurables de $[0;T]$ dans H
$\|\cdot\|_{0,\,p,\,H}$	la norme de $L^p\,(0,T,H)$, telles que $\int_0^T \mid f\ (t)\|_H^p\,dt \prec +\infty$
	avec les modifications usuelles si $p = +\infty$
$W^{\,k,\,p}\,(0,T,H)$	l'espace de Sobolev de paramètres k *et* p.
$\|\cdot\|_{k,\,p,\,H}$	la norme de $W^{\,k,\,p}\,(0,T,H)$

Pour une fonctions f, on note

$domf$	le domaine de f.
$\sup pf$	le support de f.
$\dot{f}\,,\,\ddot{f}$	les dérivés premiére et seconde de f par rapport au temps.
$\partial_i f$	la dérivée partielle de f par rapport à laième composante x_i.
∇f	le gradient de f.
$\varepsilon\,(f)$	la partie symétrique du gradient de f qui vaut$\frac{1}{2}\left(\nabla f + \nabla^T f\right)$
$Divf$	la divergence de f
∂f	le sousdifférentiel (classique)de f.

Si H^1et H^2 sont deux espaces de Hilbert réels, on note par

$\pounds\left(H^1, H^2\right)$	l'espace des applications linéaires et continues de H^1 dans H^2.
$\Vert \cdot \Vert_{\pounds(H^1,H^2)}$	la norme de $\pounds\left(H^1, H^2\right)$.

Chapitre 1

Requis et préliminaires

Afin de faciliter la lecture de ce manuscrit, il nous est paru utile de présenter dans cette première partie le cadre physique et fonctionnel dans lequel nous allons travailler. Nous allons commencer par une description de la loi constitutive des matériaux électro- viscoélastiques avec endommagement, ensuite nous présentons les différents types de conditions aux limites avec réponse normale instantanée associée à une loi locale de frottement et un contact bilatéral avec frottement avec une base rigide et mobile où l'usure des surfaces de contact est prise en considération. Nous continuons avec la formulation mathématique des problèmes étudiés. A la fin de ce chapitre nous passons en revue quelques rappels d'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de Hilbert ainsi que les outils mathématiques que nous utilisons pour la réalisation de ce travail, notamment des résultats sur les espaces fonctionnels, les équations et les inéquations variationnelles elliptiques et paraboliques, les lemmes de Gronwall qui seront utiles dans les démonstrations et quelques théorèmes classiques qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

1.1 FORMULATION DES PROBLEMES ELECTRO-VISCOELASTIQUES

Dans cette partie on commence par décrire la loi de comportement électro-viscoélastique, puis on s'intéresse aux différentes conditions aux limites de frottement ou usure. Au début, on considère la loi de contact avec réponse normale instantanée et frottement puis la condition de contact avec frottement et usure. Finalement, on donne la formulation mathématique des problèmes qui seront étudiés dans ce mémoire.

1.1.1 lois de comportement

L'objet de la mécanique des milieux continus est l'étude du mouvement des corps si les distances relatives entre ses pionts sont variables.

Le principe fondamentale de la mécanique est

$$Div\sigma + f = \rho\ddot{u}.$$

Cette équation s'appelle équation du mouvement, où ρ représente la densité de masse et $\ddot{u}$ représente l'accélération. Si u varie lentement avec le temps alors $\rho\ddot{u}$ sera négligeable ce qui nous conduit à léquilibre

$$Div\sigma + f = 0,$$

où $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ représente la densité des volumiques sur Ω et $Div\ \sigma$ est la divergence du tenseur σ. L'équation équivaut à d relation scalaires, et mathématique cette équation ne suffit par à modèliser le problème d'équilibre du corps car, par exemple les d composantes u_i du champ de déplacement ne figurent pas dans cette équation.

Du piont de vue physique par ailleurs, il faut remarquer que l'équation exprime une loi universelle valable pour tous les matériaux. Si donc cette équation suffisait à déterminer tous les parametres, cela signifierait que, soumis à des conditions identiques, les divers milieux contiuns auraient des comportements identiques. Ceci est naturellement absurde.

L'équation est donc insuffisaite, à elle seule, à décrire l'équilibre des corps matériels, elle doit être complétée par d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de matériau et que l'on désigne sous le vocable général la loi de comportement qui est une relation reliant le tenseur de contrainte σ, le tenseur de déformation ε et leur dérivées.

On présente dans cette thése, les lios de comportement de deux categories de matériau électro-viscoélastique.

1.1.2 loi de comportement électro-viscoélastique avec endommagement

La loi de comportement d'un matériau électro-viscoélastique avec endommagement est donnée par

$$\begin{cases} \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}(\varepsilon(u), \beta) - \mathcal{E}^* E(\varphi) \\ D = \mathcal{E}\varepsilon(u) + BE(\varphi) \end{cases}$$

où $\mathcal{A}$ est la fonction de viscosité non linéaire, $\mathcal{G}$ représente le tenseur d'élasticité où β est une variable interne représentant l'endommagement du matériau causé par des déformations élastiques. Comme le matériau comporte les propriétés électriques, la loi de comportement consiste aussi en $E(\varphi) = -\nabla\varphi$ le champ électrique, D le champ de déplacement électrique, $\mathcal{E} = (e_{ijk})$ représente le tenseur piézoélectrique d'ordre trois et $\mathcal{E}^*$ son transposé. B représente le tenseur de perméabilité électrique.

L'inclusion différentielle suivante sera utilisée pour décrire l'évolution du champ d'endommagement

$$\dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial\varphi_K(\beta) \ni S(\varepsilon(u), \beta)$$

L'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles K défini par

$$K = \{\xi \in H_1(\Omega) \quad / \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad \text{dans} \quad \Omega\},$$

k est un coefficient positif, $\partial\varphi_K$ représente le sous-différentiel de la fonction indicatrice φ_K. S est une fonction constitutive donnée qui représente la source d'endommagement dans le système.

1.1.3 Condition de contact avec réponse normale instantanée et frottement

La condition dite de réponse normale instantanée sur la surface potentiel de contact $\Gamma_3 \times (0, T)$ s'écrit

$$-\sigma_\nu = p_\nu(\dot{u}_\nu) \tag{I.1.1}$$

où $\dot{u}_\nu$ désigne la vitesse normal et p_ν est une fonction donnée telle que $p_\tau(r) = 0$ pour $r \leq 0$. Cette égalité traduit une dépendance générale de la contrainte normale par rapport à la vitesse normale, elle peut representer le comportement d'une couche de lubrifiant sur la surface de contact. De tels exemples de contact à réponse normale instantanée sous la forme $(I.1.1)$ peuvent être trouvés dans [20] . Dans le cas où

$$p_\nu(r) = kr_+ \quad \forall r \in \mathbb{R}, \tag{I.1.2}$$

avec $k \geq 0$ la résistance de la fondation à la pénétration est proportionnelle à la vitesse normale. Ce type de comportement a été considéré dans [11] modélisant le mouvement d'un corps déformable sur le sable où sur un matériau granulaire. La loi de frottement associée est donnée par:

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\dot{u}_\tau) \tag{I.1.3}$$

où $\dot{u}_\tau$ répresente la vitesse tangentielle sur la surface de contact. Cette seconde égalite dans $(I.1.3)$ est sans seuil et dit que le cisaillement tangentiel sur la surface de contact est une certaine fonction de la vitesse tangentielle. Dans le cas où

$$p_\tau(r) = \mu r \quad \forall r \in \mathbb{R}^d \tag{I.1.4}$$

montre que le cisaillement tangentiel est proportionnel à la vitesse tangentielle. Tel est le cas quand la surface de contact est lubrifiée par une fine couche de fluide non newtonien, voir par exemple [20]. Dans $(I.1.3)$, μ répresente le coefficient de frottement, supposé positif. Nous pouvous également envisager d'autres exemples de fonctions de contact données par

$$p_\nu(r) = k(r_+)^m + p_0 \tag{I.1.5}$$

$$p_\tau(r) = \mu|r|^{m-1} r \tag{I.1.6}$$

où $0 < m \leq 1$ est un coefficient fixe et p_0 peut jouer le rôle de la pression de l'huile qui est donnée et positive.

1.1.4 Condition de contact avec frottement et usure

Le corps est supposé rentrer en contact avec une fondation rigide, se déplacant à la vitesse v^*. Ce contact sera supposé toujours maintenu au cours de l'étude du phénomène. Décrivons à présent la condition de contact entre la partie de la frontiére Γ_3 du corps et la fondation rigide. Ici, la relation

$$u_\nu = -\omega \tag{I.1.7}$$

reste valide afin de représenter l'effet de l'usure sur la surface de contact Γ_3. Cette dernière égalite indique alors que la position de contact dépend de l'usure. Pour les fonctions assez régulières, on a

$$\dot{u}_\nu = -\dot{\omega} \qquad (I.1.8)$$

L'usure étant toujours croissante, la fonction $\dot{\omega}$ est positive et ainsi:

$$\dot{u}_\nu \leq 0 \qquad (I.1.9)$$

Supposons de plus que pendant l'évolution du phénomène, la surface de contact Γ_3 se réarrange de sorte que la vitesse tangentielle soit négligeable. La vitesse de glissement ne sera ainsi plus que la vitesse $v^* =\mid v^* \mid$, qui sera bien entendu supposée positive. La version simplifiée de la loi d'Archard peut ainsi être utilisée. Les relation $(I.1.8)$ et $(I.1.9)$ entrainent

$$\sigma_\nu = -\alpha \mid \dot{u}_\nu \mid \text{ où } \alpha = \frac{1}{k_\omega \mid v^* \mid} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times]0, T[\qquad (I.1.10)$$

Le frottement suit la loi donnée par:

$$\sigma_\tau = -\lambda\,(\dot{u}_\nu - v^*) \qquad \lambda \geq 0 \text{ sur } \Gamma_3 \times]0, T[\qquad (I.1.11)$$

Compte tenu de l'interprétation du problème physique et ayant glissement et frottement, on a la relation:

$$|\sigma_\tau| = -\mu\sigma_\nu \text{ sur } \Gamma_3 \times]0, T[\qquad (I.1.12)$$

Des précédentes relations, la condition de contact est donnée par:

$$\sigma_\nu = -\alpha\,|\dot{u}_\nu|\,,\ |\sigma_\tau| = -\mu\sigma_\tau \text{ sur } \Gamma_3 \times]0, T[\qquad (I.1.13)$$

$$\sigma_\tau = -\lambda\,(\dot{u}_\tau - v^*)\,, \quad \lambda \geq 0 \text{ sur } \Gamma_3 \times]0, T[\qquad (I.1.14)$$

1.1.5 Formulation mathématique des problèmes électro-viscoélastiques

Nous considérons un corps électro-viscoélastique qui occupe un domaine borné $\Omega \subset IR^d$ $(d = 2, 3)$ avec une surface frontière régulière et de Lipschitz Γ partitionnée d'une part en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3, telles que $mes\ \Gamma_1 > 0$ et d'autre part en deux parties mesurables Γ_a et Γ_b correspondant aux conditions aux limites électriques, telles que *mes* $\Gamma_1 \succ 0$, *mes* $\Gamma_a \succ 0$ et $\Gamma_3 \subseteq \Gamma_b$. On note par ν la normale unitaire sortante à Γ. Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité f_2 et dans Ω agissent des forces volumiques de densité f_0 et des charges électriques de densité volumique q. On suppose que f_2 et f_0 varient très lentement par rapport au temps. Le corps est soumis à l'action de potentiel fixé φ_0 sur la partie Γ_a de la frontière ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique q_2, agissant sur la partie Γ_b.

Soit $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Nous étudions dans l'intervalle de temps $[0, T]$ l'évolution du corps matériel dûe à l'application de forces de volume et des tractions de surface.

Nous notons par $u : \Omega \times [0, T] \to IR^d$ le champ de déplacements, $\sigma : \Omega \times [0, T] \to S_d$ le champ des contraintes et $\varepsilon(u)$ représente le tenseur des déformations et $\beta : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ le champ d'endommagement. Le corps est fixé sur $\Gamma_1 \times (0, T)$, le champ des déplacements y est par conséquent nul. Une traction surfacique de densité f_2 agit sur $\Gamma_2 \times (0, T)$. Le corps est éventuellement en contact avec une fondation rigide sur $\Gamma_3 \times (0, T)$. Les conditions sur la surface potentielle de contact Γ_3 peuvent être diverses et donner lieu à une variété de modèles de contact avec frottement.

Notre objectif est l'étude de deux problèmes quasistatiques pour les matériaux électro-viscoélastiques. Le premier problème est un problème de contact avec réponse normale instantanée et frottement, le second est un problème de contact avec frottement et usure.

L'étude variationnelle de ces problèmes se fera dans le cadre physique défini ci-dessus. Sous ces hypothèses, en notant par u_0 le déplacement initial et par β_0 l'endommagement initial nous arrivons à formuler les différents problèmes de la manière suivante:

Problème P_1: (matériau électro-viscoélastique, loi de frottement avec réponse normale instantanée)

Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$, le champ du tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \to S_d$ et le champ d'endommagement $\beta : \Omega\, [0, T] \to \mathbb{R}$ tels que.

$$
\begin{array}{ll}
\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}(\varepsilon(u), \beta) + \mathcal{E}^{*}\nabla\varphi & \text{dans} \quad \Omega \times (0,T) \\
D = \mathcal{E}\varepsilon(u) - B\nabla\varphi & \text{dans} \quad \Omega \times (0,T) \\
\dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial\varphi_{K}(\beta) \ni \mathcal{S}(\varepsilon(u), \beta) & \text{dans} \quad \Omega \times (0,T) \\
Div\sigma + f_0 = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times (0,T) \\
divD = q_0 & \text{dans} \quad \Omega \times (0,T) \\
u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0,T) \\
\sigma\nu = f_2 & \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0,T) \\
-\sigma_{\nu} = p_{\nu}\left(\dot{u}_{\nu}\right), \ -\sigma_{\tau} = p_{\tau}\left(\dot{u}_{\tau}\right) & \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0,T) \\
\frac{\partial\beta}{\partial\nu} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times (0,T) \\
\varphi = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_a \times (0,T) \\
D\,.\nu = q_2 & \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0,T) \\
u(0) = u_0, \quad \beta(0) = \beta_0 & \text{dans} \quad \Omega
\end{array}
$$

Problème P_2: (matériau électro-viscoélastique, condition de contact avec frottement et usure)

Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, le champ du tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0,T] \to S_d$ et le champ d'endommagement $\beta : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tels que.

$$
\begin{array}{lll}
\sigma = \mathcal{A}\varepsilon\left(\dot{u}\right) + \mathcal{G}\left(\varepsilon\left(u\right),\beta\right) + \mathcal{E}^{*}\nabla\varphi & \text{dans} & \Omega\times(0,T) \\
D = \mathcal{E}\varepsilon\left(u\right) - B\nabla\varphi & \text{dans} & \Omega\times(0,T) \\
\dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial\varphi_{K}\left(\beta\right) \ni \mathcal{S}\left(\varepsilon\left(u\right),\beta\right) & \text{dans} & \Omega\times(0,T) \\
Div\sigma + f_{0} = 0 & \text{dans} & \Omega\times(0,T) \\
divD = q_{0} & \text{dans} & \Omega\times(0,T) \\
u = 0 & \text{sur} & \Gamma_{1}\times(0,T) \\
\sigma\nu = f_{\ 2} & \text{sur} & \Gamma_{2}\times(0,T) \\
\left\{\begin{array}{l} \sigma_{\nu} = -\alpha\left|\dot{u}_{\nu}\right|, \ \left|\sigma_{\tau}\right| = -\mu\sigma_{\tau} \\ \sigma_{\tau} = -\lambda\left(\dot{u}_{\tau} - \upsilon^{*}\right) \ , \quad \lambda\geq 0 \end{array}\right. & \text{sur} & \Gamma_{3}\times(0,T) \\
\frac{\partial\beta}{\partial\nu} = 0 & \text{sur} & \Gamma\times(0,T) \\
\varphi = 0 & \text{sur} & \Gamma_{a}\times(0,T) \\
D\ .\nu = q_{2} & \text{sur} & \Gamma_{b}\times(0,T) \\
u\left(0\right) = u_{0}, \quad \beta\left(0\right) = \beta_{0} & \text{dans} & \Omega
\end{array}
$$

Les problèmes que nous avons formulés ci-dessus seront étudiés aux deux chapitres de ce mémoire. Nous utilisons des méthodes différentes. Pour le problème P_1 nous utilisons des arguments de la théorie des opérateurs monotones et une version du théorème de Cauchy-Lipschitz. Pour le second problème nous utilisons des résultats classiques d'inéquations variationnelles elliptiques et des arguments de point fixe.

1.2 RAPPELS D'ANALYSE

1.2.1 Espaces fonctionnels

On introduit dans cette section des espaces du type Sobolev utilisés en mécanique du contact, à savoir les espaces de Hilbert associés aux opérateurs divergence et déformation, ainsi que les espaces de fonctions à valeurs vectorielles. On présente en plus leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. On adopte ici la convention de l'indice muet et on précise aussi que toutes les notations ainsi que les espaces fonctionnels utilisés dans mémoire sont introduits dans cette section. En outre, dans la rédaction de cette section nous avons utilisé [2, 25]. Pour plus de détails sur les espaces de Sobolev et les espaces de distributions, on renvoit par exemple à [6], [9].

1.2.2 Espaces de Hilbert associés aux opérateurs divergence et déformation

Nous désignons par S_d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur IR^d $(d = 2, 3)$, "." et $|\ .\ |$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur IR^d et S^d. Ainsi,

$$\begin{aligned} u.v &= u_i v_i\ , \qquad |v| = (v.v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d \\ \sigma.\tau &= \sigma_{ij}\tau_{ij}\ , \qquad |\sigma| = (\sigma.\sigma)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \sigma, \tau \in S^d \end{aligned}$$

Dans toute la suite, $\Omega \subset IR^d$ est un domaine borné avec une surface frontière régulière de Lipschitz notée Γ.

Nous utilisons les espaces suivants.

$$\begin{aligned} &H = \left\{ \quad u = (u_i) \quad / \ u_i \in \ L^2(\Omega) \diagup i = \overline{1, d} \ \right\} = L^2(\Omega)^d \\ &\mathcal{H} = \left\{\sigma = (\sigma_{ij}) \quad / \ \sigma_{ij} = \ \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \diagup i, j = \overline{1, d} \quad \right\} = L^2(\Omega)^{d\times d} \\ &H_1 = \{u \in H \ \ / \ \varepsilon(u) \in \mathcal{H} \ \ \} = \left\{u = (u_i) \quad / \quad u_i \in \ H^1(\Omega) \diagup i = \overline{1, d} \ \right\} = H^1(\Omega)^d \\ &\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} \ \ / \ \sigma_{ij} \in H \ \ \} \end{aligned}$$

où $\varepsilon : H_1 \to H$ et $Div : H_1 \to H$ sont les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad Div\,\sigma = (\sigma_{i\,j,\,j}) \ \ 1 \leq i, j \leq d$$

où la virgule représente la dérivée par rapport à la variable spatiale, c'est àdire que

$$u_{i,\,j} = \frac{\partial\ u_i}{\partial\ x_j}$$

Ces espaces respectifs sont des espaces de Hilbert réels munis de leurs produits scalaires suivants:

$$\begin{aligned} &(u, v)_H = \textstyle\int_\Omega u_i v_i dx \quad \forall u, v \in H \\ &(\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} = \textstyle\int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij} dx \qquad \forall \sigma, \tau \in \ \mathcal{H} \\ &(u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in H_1 \\ &(\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} = (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (Div\ \sigma, Div\ \tau)_H \quad \forall \sigma, \tau \in \ \mathcal{H}_1 \end{aligned}$$

Les normes sur les espaces H, $\mathcal{H}$, H_1 et $\mathcal{H}_1$ sont notées respectivement par $|\ .\ |_H$, $|\ .\ |_{\mathcal{H}}$, $|\ .\ |_{H_1}$ et $|\ .\ |_{\mathcal{H}_1}$.

Comme la frontière Γ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur u à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs $u \in H_1$ nous utilisons la notation u pour désigner la trace γ_u de u sur Γ et nous notons par u_ν et u_τ les composantes normale et tangentielle de u sur la frontière données par

$$u_\nu = u.\nu, \qquad u_\tau = u - u_\nu \nu \tag{I.2.1}$$

Pour le champ des contraintes σ nous notons par σ_ν et σ_τ les composantes normale et tangentielle à la frontière, à savoir :

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu)\,.\nu, \qquad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \nu \tag{I.2.2}$$

Nous rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \to L^2(\Gamma)^d$ est linéaire continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par H_Γ, ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Désignons par H_Γ' le dual de H_Γ, et $(.,.)_{H_\Gamma' \times H_\Gamma}$ le produit de dualité entre H_Γ' et H_Γ.

Pour tout $\sigma \in H_1$, il existe un élément noté $\sigma\nu \in H_\Gamma'$ tel que

$$(\sigma\nu, \gamma\upsilon)_{H_\Gamma' \times H_\Gamma} = (\sigma, \varepsilon(\upsilon))_{\mathcal{H}} + (Div\ \sigma, \upsilon)_H \quad \forall \upsilon \in H_1$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(\sigma\nu, \gamma\upsilon) = \int_\Gamma \sigma\nu.\upsilon da \qquad \forall \upsilon \in H_1$$

donc, si σ est assez régulier nous avons la formule suivante:

$$(\sigma, \varepsilon(\upsilon))_{\mathcal{H}} + (Div\ \sigma, \upsilon)_H = \int_\Gamma \sigma\nu.\upsilon da \qquad \forall \upsilon \in H_1(\Omega) \tag{I.2.3}$$

$$(D, \nabla\phi)_H + (Div\ D, \phi)_{L^2(\Omega)} = \int_\Gamma D.\nu.\upsilon da \qquad \forall \upsilon \in H_1(\Omega) \tag{I.2.4}$$

Nous introduisons à présent un sous espace fermé de H_1, dont la définition est donnée ci-après

$$V = \left\{ \upsilon \in H_1 (\Omega)^d \quad / \quad \upsilon = 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_1 \right\}$$

puisque $mes\ \Gamma_1 \succ 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V : il existe une constante $C_k \succ 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$|\varepsilon (\upsilon)|_{\mathcal{H}} \geq C_k |\upsilon|_{H_1(\Omega)^d} \qquad \forall \upsilon \in V$$

une preuve de cette inégalité peut être trouvée dans[12, p.79].

Sur V nous considérons le produit scalaire donné par

$$(u, \upsilon)_V = (\varepsilon (u), \varepsilon (\upsilon))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, \upsilon \in V \qquad (I.2.5)$$

et soit $|.|_V$ la norme associée, c'est à dire

$$|\upsilon|_V = |\varepsilon (\upsilon)|_{\mathcal{H}} \qquad \forall \upsilon \in V$$

par l'inégalité de korn, il vient que $|.|_{H_1}$ et $|.|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, |.|_V)$ est un espace de Hilbert.

En outre, par le théoème de trace de Sobolev, il existe constante $C_0 \succ 0$ dépendant uniquement de Ω , $\Gamma_1$et Γ_2 telle que

$$|\upsilon|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 |\upsilon|_V \qquad \forall \upsilon \in V \qquad (I.2.6)$$

On introduit également les espaces suivants:

$$W = \{\phi \in H^1 (\Omega) \qquad / \qquad \phi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a\}$$
$$\mathcal{W} = \{D = (D_i) \quad / \quad D_i \in L^2 (\Omega) \ , \ div\ D \in L^2 (\Omega)\}$$

où $div\ D = (D_{i\ ,\ i})$. W et $\mathcal{W}$ sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$(\varphi\ ,\ \phi)_W = (\nabla\varphi\ ,\ \nabla\phi)_{L^2(\Omega)^d}$$
$$(D\ ,\ E)_{\mathcal{W}} = (D, E)_{L^2(\Omega)^d} + (divD.divE)_{L^2(\Omega)^d}$$

On note par $|\ .\ |_W$ et $|\ .\ |_{\mathcal{W}}$ les normes associées respectivement. Puisque la partie Γ_a a été supposée de mesure non nulle, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est vérifiée ainsi il existe une constante C_1 strictement positive ne dépendant que du domaine Ω et de la partie de la frontière Γ_a telle que:

$$\mid \nabla\phi \mid_H \geq C_{\ F} \mid \phi \mid_{H^1(\Omega)} \quad \forall \phi \in W. \tag{I.2.7}$$

Une démonstration de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré peut être trouvée dans [9].

Pour des détails sur les résultats de ce paragraphe nous renvoyons par exemple aux références [24].

1.2.3 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Soit H un espace de Hilbert. Soient $k \in IN$ et $1 \leq p \leq +\infty$ et $T > 0$. On rappelle que $W^{k,p}(0,T;H)$ est l'espace des distributions vectorielles $u \in D'(0,T;H)$ telles que $D_j u \in L^p(0,T;H)$ pour $j = \overline{0,k}$, D_j désignant la dérivée d'ordre j au sens des distributions.

Si $1 \leq p < +\infty$, $W^{k,p}(0,T;H)$ est un espace de Banach réel pour la norme définie par

$$\mid u \mid_{W^{k,p}(0,T;H)} = (\sum_{j=0}^{k} \int_0^T \mid D_j u(x) \mid^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

$$\forall\, u \in W^{k,p}(0,T;H).$$

En particulier, $W^{k,2}(0,T;H)$ est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire défini par

$$(u,v)_{W^{k,2}(0,T;H)} = \sum_{j=0}^{k} \int_0^T (D_j u(t), D_j v(t))_H \, dt$$

$$\forall\, u,v \in W^{k,2}(0,T;H)$$

D'autre part, $W^{k,\infty}(0,T;H)$ est un espace de Banach pour la norme définie par

$$\mid u \mid_{W^{k,\infty}(0,T;H)} = \sum_{j=0}^{k} \sup_{[0,T]} ess \mid D_j(u(t)) \mid_H$$

$$\forall\, u \in W^{k,\infty}(0,T;H)$$

Pour le cas particulier $k = 0$, on remarque que

$$W^{0,p}(0,T;H) = L^p(0,T;H)$$

et on note alors la norme $L^p(0,T;H)$ par $\mid . \mid_{L^p(0,T;H)}$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.On définit aussi, pour tout $k \in IN$, l'espace$C^k(0,T;H)$ des fonctions $u : [0,T] \rightarrow H$ telles que pour tout $j=\overline{0,k}$ les dérivées $\dfrac{d^j\,u}{dt^j}$ existent et sont continues sur $[0,T]$. On note, en particulier, $C^0(0,T;H)$ par $C(0,T;H)$. L'espace $C^k(0,T;H)$ est un espace de Banach pour la norme définie par

$$\mid u \mid_{C^k(0,T;H)} = \sum_{j=0}^{k} \max_{t\in[0,T]} \mid \frac{d^j\,u}{dt^j}(t) \mid_H$$

$$\forall\, u \in C^k(0,T,H).$$

En particulier, les normes sur les espaces $C(0,T;H)$ et $C^1(0,T;H)$ sont données par

$$\mid u \mid_{C(0,T;H)} = \max_{t\in[0,T]} \mid u(t) \mid_H \qquad \forall\, u \in C(0,T,H)$$

$$\mid u \mid_{C^1(0,T;H)} = \mid u \mid_{C(0,T;H)} + \mid \dot{u} \mid_{C(0,T;H)}$$

$$\forall\; u \in C^1(0,T;H)$$

On précise que le point au dessus d'une expression désigne la dérivée de cette expression par rapport au temps, représentée par la variable $t\in[0,T]$.

1.2.4 Fonctions convexes

On considère une fonction φ définie sur un espace vectoriel réel X et à valeurs dans $]-\infty,+\infty]$. Une telle fonction est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$, c'est à dire s'il existe $u_0\in X$ tel que $\varphi(u_0)<+\infty$. La fonction φ est dite convexe si

$$\varphi(tu+(1-t)v) \le t\varphi(u)+(1-t)\varphi(v) \qquad \forall\, u,v\in X, t\in\,]0,1[$$

.La fonction φ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u,v\in X$ tels que $u\neq v$. Pour toute fonction $\varphi: X\to\,]-\infty,+\infty]$, on définit le domaine et l'épigraphe de φ respectivement par

$$dom(\varphi)=\{u\in X \;/\; \varphi(u)<+\infty\}$$

$$epi\,\varphi=\{(u,\alpha)\in X\times IR \;/\; \varphi(u)\le\alpha\}\,.$$

Il est clair qu'on peut établir les résultats suivants

1) φ est propre si et seulement $dom(\varphi)\neq\emptyset$.

2) Le domaine de φ est un ensemble convexe de X si φ est convexe.

3) φ est convexe si et seulement si $epi\,\varphi$ est un ensemble convexe dans $X \times IR$.

Soit maintenant H un espace de Hilbert. Une fonction $\varphi : H \to \left]-\infty, +\infty\right]$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) en $u_0 \in H$ si

$$\lim_{u \to u_0} \inf \varphi(u) \geq \varphi(u_0)$$

Une fonction est s.c.i. sur $K \subset H$ si elle est s.c.i. en tout point de K et elle est dite s.c.i. si elle est s.c.i. sur tout H.

La propriété de semi-continuité peut être caractérisée de la façon suivante:

Lemme. Soit $\varphi : H \to \left]-\infty, +\infty\right]$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes

1) φ est semi-continue inférieurement.

2) L'épigraphe de φ est fermé dans $H \times IR$.

Puisque dans un espace vectoriel normé tout ensemble convexe est simultanément fermé pour la topologie forte et la topologie faible, le lemme précédent conduit au résultat suivant:

Théorème. Soit $\varphi : H \to \left]-\infty, +\infty\right]$ une fonction convexe et propre. Alors φ est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est semi-continue inférieurement par rapport à la topologie faible de H.

Soit maintenant K un sous-ensemble de H. On appelle fonction indicatrice de K, la fonction $\Psi_K : H \to \left]-\infty, +\infty\right[$ définie par

$$\Psi_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant cette définition, on peut facilement prouver le résultat suivant:

Lemme. K est un ensemble convexe, fermé et non vide de H si et seulement si la fonction indicatrice Ψ_K est convexe, semi-continue inférieurement et propre.

On note à présent par 2^H l'ensemble de toutes les parties de H. Une fonction $\varphi : H \to$

$]-\infty,+\infty]$ est dite Gâteaux-différentiable au point $u \in H$ s'il existe un élément $\nabla\varphi(u) \in H$ tel que

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(u+tv)-\varphi(u)}{t} = (\nabla\varphi(u), v)_H$$

$\forall\, v \in H$. L'élément $\nabla\varphi(u)$ s'appelle la différentielle au sens de Gâteaux de φ en u.

La fonction φ est dite Gâteaux-différentiable si elle est Gâteaux-différentiable en tout point de H. Dans ce cas l'opérateur $u \in H \longmapsto \nabla\varphi(u) \in H$ s'appelle le gradient de φ.

La convexité des fonctions Gâteaux-différentiables peut être caractérisée de la façon suivante:

Lemme. Soit $\varphi : H \to IR$ une fonction Gâteaux-différentiable. Alors φ est une fonction convexe si et seulement si

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (\nabla\varphi(u), v-u)_H \qquad \forall\, u, v \in H.$$

L'inégalité précédente suggère une généralisation de la notion de gradient aux fonctions convexes. On dit que la fonction $\varphi : H \to]-\infty,+\infty]$ est sous-différentiable en un point $u \in H$ s'il existe $f \in H$ tel que

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v-u)_H \qquad \forall\, v \in H.$$

L'élément f est alors appelé un sous-gradient de φ en u et l'ensemble des sous-gradients de φ en u est appelé le sous-différentel de φ en u et est noté $\partial\varphi(u)$:

$$\partial\varphi(u) = \{f \in H \ / \ \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v-u)_H \ \ \forall\, v \in H\}$$

On note par $dom(\partial\varphi)$ l'ensemble défini par

$$dom(\partial\varphi) = \{u \in H \ / \ \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}$$

En utilisant définis l'ensembles $\partial\varphi(u)$ et $dom(\partial\varphi)$ ainsi que la définition du domaine d'une fonction, il résulte

$$dom(\partial\varphi) \subset dom\,\varphi.$$

L'opérateur multivoque $u \longmapsto \partial\varphi(u) : H \to 2^H$ s'appelle le sous-différentiel de φ. La fonction φ est dite sous-différentiable si elle est sous-différentiable en tout point de H, c'est à dire si $dom(\partial\varphi) = H$.

En utilisant l'inégalité, on obtient:

Lemme. Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction sous-différentiable. Alors φ est convexe, propre et semi-continue inférieurement.

Lemme. Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe, propre et semi-continue inférieurement. Alors φ est sous-différentiable en tout point intérieur de son domaine $dom\, \varphi$.

Dans le cas d'une fonction convexe, le lien entre l'opérateur gradient et le sous-différentiel est donné par

Lemme. Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et Gâteaux-différentiable. Alors φ est sous-différentiable et $\partial\varphi(u) = \{\nabla\varphi(u)\}$ pour tout $u \in H$.

1.2.5 Inéquations variationnelles

Soient $A : H \to H$ un opérateur non linéaire, $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre et $f \in H$. Un bon nombre de problèmes aux limites en équations aux dérivées partielles ainsi qu'en mécanique des milieux continus ont un rapport avec des problèmes mathématiques de la forme suivante:

Trouver u tel que $u \in H$,

$$(Au, v-u)_H + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v-u)_H \quad \forall\, v \in H. \qquad (I.2.8)$$

Le problème $(I.2.8)$ est appelé inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce sur H.

On dit que l'opérateur A est:

a) fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_H \geq m \mid u - v \mid^2 \forall u, v \in H \qquad (I.2.9)$$

b) de Lipschitz s'il existe $L > 0$ tel que

$$\mid Au - Av \mid_H \leq L \mid u - v \mid \quad \forall u, v \in H. \qquad (I.2.10)$$

On peut démontrer que si A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz alors A est inversible et A^{-1} est fortement monotone et de Lipschitz.

En ce qui concerne le problème $(I.2.8)$, on a le résultat d'existence et d'unicité suivant:

Théorème. Si A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et φ est une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement alors l'inéquation variationnelle elliptique $(I.2.8)$ admet une solution unique.
Le théorème précédent représente un résultat d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles de seconde espèce. La démonstration de ce théorème peut être trouvée par exemple dans [32].Ce théorème sera utilisé au troisième chapitre.

1.2.6 Compléments divers

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de majoration, en particulier pour établir l'unicité de la solution. Nous citons certains théorèmes utilisés dans ce mémoire. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans cette section, nous proposons par exemple [4].

Lemmes de Gronwall

Lemme. Soient m, $n \in C(0,T;IR)$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\varphi \in C(0,T;IR)$ est une fonction telle que

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\varphi(s)ds \qquad \forall\, t \in [0,T]$$

alors

$$\varphi(t) \leq (a + \int_0^t m(s)ds) \exp(\int_0^t n(s)ds) \qquad \forall\, t \in [0,T]$$

Pour le cas particulier $m = 0$, ce lemme devient:

Corollaire. Soit $n \in C(0,T;IR)$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\varphi \in C(0,T;IR)$ est une fonction telle que

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\varphi(s)ds \quad \forall\, t \in [0,T]$$

alors

$$\varphi(t) \leq a \exp(\int_0^t n(s)ds) \qquad \forall\, t \in [0,T]$$

Lemme. Soient m, $n \in C(0,T;IR)$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\varphi \in C(0,T;IR)$ est une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\varphi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\varphi(s)ds + \int_0^t n(s)\varphi^2(s)ds \qquad \forall\, t \in [0,T]$$

alors

$$\mid \varphi(t) \mid \leq (a + \int_0^t m(s)ds) \exp(\int_0^t n(s)ds) \qquad \forall\, t \in [0,T]$$

1.2.7 Enoncés de certains théorèmes

Nous considèrons maintenant quelques théorèmes importants qui sont utilisés le long de ce mémoire.

Définition. On dit qui une forme bilinéaire $a\,(u,v) : H \times H \to \mathbb{R}$ est

1) Continue s'il existe une constante C telle que

$$|a\,(u,v)| \leq C\,|u|_H\,|v|_H \quad \forall u,v \in H \qquad (I.2.11)$$

2) Coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a\,(v,v) \geq \alpha\,|v|_H^2 \qquad \forall u,v \in H \qquad (I.2.12)$$

Théorème$I.2.1.$ $(Lax - Milgram)$. Soit V un espace de Hilbert, soit $a\,(.,.)$ $V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive. Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue.

Alors, il existe une solution unique $u \in V$ qui satisfait

$$a\,(u,v) = f\,(v) \qquad \forall v \in V$$

Théorème$I.2.2.$ (conséquence de $Minty - Browder$). Soit $A : H \to H$ une application non linéaire, fortement monotone et de Lipschitz.

Alors pour tout $f \in H$ il existe $u \in H$ unique solution de l'équation $Au = f$.
Théorème$I$.2.3.Soit $V \subset H \subset V\,'$ un triplet de Gelfand. Soit K un fermé non vide, et convexe de V.

Supposons que $a\,(.\,,\,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et symétrique satisfaisant pour toutes constantes $\zeta \succ 0$ et c_0, la condition de coercivite:

$$a\,(v\,,\,v) + c_0\,|v|_H^2 \geq \zeta\,|v|_V^2 \qquad \forall v \in V$$

Pour chaque $u_0 \in K$ et $f \in L^2\,(0,T\,;H)$, il existe une fonction unique $u \in H^1\,(0,T\,;H) \cap L^2\,(0,T\,;V)$ tels que $u\,(0) = u_0$, $u\,(t) \in K$ pour tout $t \in [\,0,T\,]$,

$$(\dot{u}\,(t)\,, v - u\,(t))_{V\,'\times V} + a\,(u\,(t)\,, v - u\,(t)) \geq (f\,(t)\,, v - u\,(t))_H \qquad \forall v \in K$$

Chapitre 2

Problème électro-viscoélastique avec réponse normale instantanée et frottement

Le second chapitre est consacré à l'étude mathématique d'un problème de contact avec frottement pour des matériaux électro- viscoélastiques où l'endommagement interne du matériau est pris en considération, dans un processus quasi-statique. Le contact avec une base rigide est modélisé par une réponse normale instantanée associée à une loi locale de frottement. Le problème se formule comme un système qui comporte une équation variationnelle par rapport au champ de déplacement, une inéquation variationnelle du type parabolique par rapport au champ d'endommagement et une équation variationnelle par rapport au champ électrique.

Pour ce problème, des résultats d'existence et d'unicité de la solution ont été considérés en utilisant la théorie des équations variationnelles, des inéquations variationnelles du type parabolique et des arguments de point fixe.

2.1 Problème mécanique et formulation variationnelle

Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$, le champ du tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \to S_d$ et le champ d'endommagement $\beta : \Omega\, [0, T] \to \mathbb{R}$ tels que.

$$
\begin{array}{llll}
\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}(\varepsilon(u), \beta) + \mathcal{E}^* \nabla\varphi & \text{dans} & \Omega \times (0, T) & (II.1.1) \\
D = \mathcal{E}\varepsilon(u) - B\nabla\varphi & \text{dans} & \Omega \times (0, T) & (II.1.2) \\
\dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial\varphi_K(\beta) \ni \mathcal{S}(\varepsilon(u), \beta) & \text{dans} & \Omega \times (0, T) & (II.1.3) \\
Div\sigma + f_0 = 0 & \text{dans} & \Omega \times (0, T) & (II.1.4) \\
divD = q_0 & \text{dans} & \Omega \times (0, T) & (II.1.5) \\
u = 0 & \text{sur} & \Gamma_1 \times (0, T) & (II.1.6) \\
\sigma\nu = f_2 & \text{sur} & \Gamma_2 \times (0, T) & (II.1.7) \\
-\sigma_\nu = p_\nu(\dot{u}_\nu), \quad -\sigma_\tau = p_\tau(\dot{u}_\tau) & \text{sur} & \Gamma_3 \times (0, T) & (II.1.8) \\
\frac{\partial\beta}{\partial\nu} = 0 & \text{sur} & \Gamma \times (0, T) & (II.1.9) \\
\varphi = 0 & \text{sur} & \Gamma_a \times (0, T) & (II.1.10) \\
D\,.\nu = q_2 & \text{sur} & \Gamma_b \times (0, T) & (II.1.11) \\
u(0) = u_0, \quad \beta(0) = \beta_0 & \text{dans} & \Omega & (II.1.12)
\end{array}
$$

Ici, les relations $(II.1.1)$ et $(II.1.2)$ représentent la loi de comportement d'un matériau électro-viscoélastique avec endommagement, $(II.1.3)$ représente une inclusion differentalle décrivant l'évolution du champ d'endommagement où S est la fonction source d'endommagement, $\partial\varphi_K$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles K. Les relations $(II.1.4)$ et $(II.1.5)$ représentent les équations d'équilibres pour le champ de déplacement et le champ éléctrique, respectivement. Les relations $(II.1.6)$-$(II.1.7)$ sont les conditions de déplacement-traction. $(II.1.8)$ représente les conditions de contact aux réponse normale instantanée et frottement. $(II.1.9)$ représente la condition au limite de Neumann où $\frac{\partial\beta}{\partial\nu}$ est la dérivée normale β. La relation $(II.1.12)$ représente les conditions initiales du champ de déplacement u_0 et du champ d'endommagement β_0.

- Pour obtenir la formulation variationnelle du problème $(II.1.1)$-$(II.1.12)$, nous avons le sous-espace fermé de $H^1(\Omega)^d$:

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega)^d \quad / \quad v = 0 \quad sur \quad \Gamma_1 \right\}$$

Comme $mes\ (\Gamma_1) \succ 0$, l'inégalité de Korn est verifiée, donc il existe une constante $C_k \succ 0$, qui dépend uniquement de Ω et Γ_1, telle que:

$$|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \geq C_k |v|_{H(\Omega)^d} \qquad \forall v \in V.$$

La démonstration de l'inégalité de Korn peut être trouvée dans [4] . L'espace V muni du produit scalaire et de la norme associée donnée par:

$$(u, v)_V = (\varepsilon(v), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad , \quad |v|_V = |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \ \forall u, v \in V \qquad (II.1.13)$$

Il vient que $|\ .\ |_{H^1(\Omega)^d}$ et $|\ .\ |_V$ sont des normes équivalentes sur V et par conséquent, $(V\ ,\ |\ .\ |_V)$ est un espace de Hilbert réel.

pour l'étude du problème $(II.2.1)$-$(II.2.12)$, on considére les hypothèses suivantes.

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A}: \ \Omega \times S^d \longrightarrow \ S^d$ satisfait

$$\left\{\begin{array}{l}
(a)\ \text{Il existe une constante } L_{\mathcal{A}} \succ 0 \text{ tel que} \\
\quad |\ \mathcal{A}(x,\varepsilon_1) - \mathcal{A}(x,\varepsilon_2)\ | \leq \ L_{\mathcal{A}}\ |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \qquad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d \qquad p.p\ x \in \Omega. \\
(b)\ \text{Il existe une constante } m_{\mathcal{A}} \succ 0 \text{ tel que} \\
\quad (\mathcal{A}(x,\varepsilon_1) - \mathcal{A}(x,\varepsilon_2)).(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq \ L_{\mathcal{A}}\ |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \qquad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d \quad p.p\ x \in \Omega. \\
(c)\ x \longrightarrow \mathcal{A}(x,\varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\
(d)\ \text{L'application } x \longrightarrow \mathcal{A}(x,0) \text{ appartient à } \mathcal{H}.
\end{array}\right. \qquad (II.1.14)$$

L'opérateur d'élasticite $\mathcal{G}: \ \Omega \times S^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \ S^d$ satisfait $(II.2.15)$

$$\left\{\begin{array}{l}
(a)\ \text{Il existe une constante } L_{\mathcal{G}} \succ 0 \text{ tel que} \\
\quad |\ \mathcal{G}(x,\varepsilon_1,\alpha_1) - \mathcal{G}(x,\varepsilon_2,\alpha_2)\ | \leq \ L_{\mathcal{G}}(|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\alpha_1 - \alpha_2|),\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d \\
\qquad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\ p.p\ x \in \Omega. \\
(b)\ \text{Pour tout } \varepsilon \in S^d \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}\ , \\
\qquad x \longrightarrow \mathcal{G}(x,\varepsilon,\alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\
(c)\ \text{L'application } x \longrightarrow \mathcal{G}(x,0,0) \text{ appartient à } \mathcal{H}.
\end{array}\right. \qquad (II.2.15)$$

La fonction source d'endommagement $\mathcal{S}: \ \Omega \times S^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \ \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{S}} \succ 0 \text{ tel que} \\ \mid \mathcal{S}(x, \varepsilon_1, \alpha_1) - \mathcal{S}(x, \varepsilon_2, \alpha_2) \ \mid \leq \ L_{\mathcal{S}}(|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\alpha_1 - \alpha_2|) \\ \qquad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d \ \alpha_1 \ , \alpha_2 \in \mathbb{R} \ \ p.p \ x \in \Omega. \\ (b) \quad \text{Pour tout } \varepsilon \in S^d \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}, \\ \qquad x \longrightarrow \mathcal{S}(x, \varepsilon, \alpha) \ \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ (c) \ \text{ L'application } x \longrightarrow S(x, 0, 0) \ \text{ appartient à } L^2(\Omega). \end{array} \right. \tag{$II.2.16$}$$

L'opérateur électrique satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \ \ B(x, E) = (b_{ij} \ , E_j), \ \forall E = (E_j) \in \mathbb{R}^d, \ p.p \quad x \in \Omega \\ (b) \quad b_{ij} = b_{ji} \quad b_{ij} \in L^\infty(\Omega) \\ (c) \ \text{ Il existe une constante } m_B \succ 0 \text{ tel que:} \\ \quad BE.E \geq m_B \mid E \mid^2_{H^1(\Omega)^d} \quad \forall E = (E_j) \in \mathbb{R}^d \ , \ p.p \ x \in \Omega \end{array} \right. \tag{$II.1.17$}$$

L'opérateur piézoélectrique $\mathcal{E}: \ \Omega \times S^d \longrightarrow \ \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \mathcal{E}(x; \tau) = (e_{ijk}(x) \tau_{jk}) \ \forall \tau = (\tau_{ij}) \in S^d \ \ p, p \quad x \in \Omega. \\ (b) \quad e_{ijk} = e_{ikj}, \qquad e_{ijk} \in L^\infty(\Omega) \qquad , \ 1 \ \leq i, j, k \leq d. \end{array} \right. \tag{$II.1.18$}$$

La fonction de contact normal $P_\nu: \ \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \ \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \ \text{ Il existe une constante } C_1^\nu, C_2^\nu \succ 0 \text{ tel que} \\ \quad |p_\nu(x, d)| \leq C_1^\nu \mid d \mid + C_2^\nu \quad \forall d \in \mathbb{R} \ \ p.p \ x \in \Gamma_3. \\ \quad (b) \ \ (p_\nu(x, d_1) - p_\nu(x, d_2))(d_1 - d_2) \geq 0 \qquad \forall d_1, d_2 \in \mathbb{R} \ \ p.p \ x \in \Gamma_3. \\ (c) \quad \text{L'application } x \longrightarrow p_\nu(x, d) \quad \text{est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \forall d \in \mathbb{R}. \\ (d) \quad \text{L'application } d \longrightarrow p_\nu(x, d) \quad \text{est continue sur } \mathbb{R}, \ p.p \ x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \tag{$II.1.19$}$$

La fonction de contact tangentiel $P_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\begin{cases} \quad (a)\ \text{Il existe une constante } C_1^\tau, C_2^\tau \succ 0 \text{ tel que} \\ \quad |p_\tau(x,r)| \leq C_1^\tau \mid r| + C_2^\tau \quad \forall r \in \mathbb{R}^d \quad p.p\ x \in \Gamma_3. \\ (b) \\ \quad (p_\tau(x,r_1) - p_\tau(x,r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \qquad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}^d \quad p.p\ x \in \Gamma_3. \\ \quad (c)\ \text{L'application } x \longrightarrow p_\tau(x,r) \text{ est Lebesgue mesurable sur} \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}. \\ \quad (d)\ \text{L'application } r \longrightarrow p_\tau(x,r) \text{ est continue sur } \mathbb{R}^d,\ p.p\ x \in \Gamma_3. \\ (e) \\ \quad p_\tau(x,r).\nu(x) = 0\ \forall r \in \mathbb{R} \text{ tel que } \quad r.\nu(x) = 0 \quad p.p\ x \in \Gamma_3. \end{cases} \qquad (II.2.20)$$

Nous supposons aussi que les forces volumiques et surfaciques satisfont la régularité

$$f_0 \in C(0,T\ ;H), \qquad f_2 \in C\left(0,T\ ;L^2(\Gamma_2)^d\right) \qquad (II.1.21)$$

$$q_0 \in C\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \qquad q_2 \in C\left(0,T;L^2(\Gamma_b)\right) \qquad (II.1.22)$$

$$q_2(t) = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \quad \forall t \in [0,T]. \qquad (II.1.23)$$

On remarque que nous avons besoin d'imposer l'hypothèse $(II.1.21)$ pour des raisons physiques (pour avoir une base isolatrice).

Le champ de déplacement initial satisfait

$$u_0 \in V. \qquad (II.1.24)$$

Le champ d'endommagement initial satisfait

$$\beta_0 \in K. \qquad (II.1.25)$$

Nous définissons la forme bilinéaire $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ par

$$a(\zeta,\varphi) = k \int_\Omega \nabla\zeta.\nabla\varphi dx. \qquad (II.1.26)$$

Ensuite, on note par $f : [0,T] \to V$ la fonction définie par

$$(f(t), v)_V = \int_\Omega f_0(t).v\ dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t).v\ da \quad \forall v \in V, t \in [0,T]. \qquad (II.1.27)$$

Et nous notons par $q : [0,T] \rightarrow W$ la fonction définie par

$$(q(t), \phi)_W = \int_\Omega q_0(t) .\phi \, dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) .\phi \, da \quad \forall \phi \in W, t \in [0,T]. \qquad (II.1.28)$$

Puis, la fonction de frottement $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$j \ (u \ , \ v) = \int\limits_{\Gamma_3} (p_\nu(u_\nu) v_\nu + p_\tau(u_\tau)) .v_\tau da \quad , \quad \forall u, v \in V \ . \qquad (II.1.29)$$

De $(II.1.19)$ et $(II.1.20)$, on remarque que les intégrales $(II.1.29)$ sont bien définies et nous notons que les conditions $(II.1.21)$ et $(II.1.22)$ indiquent

$$f \in C(0,T;V), \ q \in C(0,T;W). \qquad (II.1.30)$$

En utilisant des arguments standards nous obtenons la formulation variationnelle du problème mécanique $(II.2.1)$-$(II.2.12)$

problème PV: Trouver le champ de déplacement $u : [\ 0,T\ ] \longrightarrow V$, le champ potentiel $\varphi \ : [\ 0,T\ ] \longrightarrow W$ et le champ d'endommagement $\beta : [\ 0,T\ ] \longrightarrow H^1(\Omega)$ tels que:

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}(\varepsilon(u(t)), \beta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\ +j \ (\dot{u}, v) = (f(t), v)_V \quad , \forall v \in V \quad , \forall t \in [\ 0,T\ ].\end{aligned} \qquad (II.1.31)$$

$$\beta(t) \in K, \ \text{pour tout } t \in [0,T]$$

$$\left(\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t)\right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \geq (S(\varepsilon(u(t)), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \ \forall \xi \in K. \qquad (II.1.32)$$

$$(B \ \nabla\varphi(t), \nabla\phi)_H \ - (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\phi)_H = (q(t), \phi)_W \ \ \forall \phi \in W \ , \quad t \in [\ 0,T\ ]. \qquad (II.1.33)$$

$$u(0) = u_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \qquad (II.1.34)$$

Nous notons que le problème variationnel PV est formulé en termes de champ de déplacement, champ potentiel électrique et champ d'endommagement.

2.2 Existence et unicité de la solution

Théorème $II.2.1$. Nous supposons que les hypothèses $(II.1.12)-(II.1.25)$ sont satisfaites .

Alors, il existe une solution unique du problème qui satisfait

$$u \in C^1(0,T\,;V), \tag{II.2.1}$$
$$\varphi \in C(0,T\,;W), \tag{II.2.2}$$
$$\beta \in W^{1,2}\left(0,T\,;L^2(\Gamma_2)\right)\cap L^2\left(0,T\,;H^1(\Omega)\right). \tag{II.2.3}$$

Les fonctions u, φ, σ, D et β qui satisfont $(II.1.1)$-$(II.1.2)$ et $(II.1.31)$-$(II.1.34)$ s'appellent une solution faible du problème de contact. Nous concluons que sous les hypothèses $(II.1.12)$-$(II.1.25)$, le problème mécanique $(II.1.1)$-$(II.1.12)$ a une solution faible unique de régularité donnée par $(II.2.1)$-$(II.2.3)$, et en terme de contrainte par

$$\sigma \in C(0,T\,;\mathcal{H}_1), \tag{II.2.4}$$
$$D \in C(0,T\,;\mathcal{W}). \tag{II.2.5}$$

En effet, il vient de $(II.1.31)$ et$(II.1.33)$ que $Div\,\sigma(t)+f_0(t)=0$ et $div\,D=q_0(t)$ pour tout $t\in[\,0,T\,]$, et par conséquent les régularités $(II.2.1)$ et $(II.2.2)$ de u et φ combinées avec $(II.1.14)$-$(II.1.22)$ impliquent $(II.2.4)$ et $(II.2.5)$.

la démonstration du théorème $II.2.1$ se fait en plusieurs étapes. Nous supposons que les hypothèses du théorème $II.2.1$ sont verifiées C est une constante positive qui dépend de Ω , Γ_1 , Γ_3 , p_ν et p_τ dont le valeur varie d'une place a l'autre.

Soit $\eta\in C(0.T,V)$. Dans la première étape, on considère le problème variationnel suivant.

Problème PV_η. Trouver le champ de déplacement $u_\eta:[0,T\,]\longrightarrow V$ tel que :

$$\left(\mathcal{A}\varepsilon\left(\dot{u}_\eta(t)\right),\varepsilon(v)\right)_{\mathcal{H}}+j\left(\dot{u}_\eta(t),v\right)\;+\left(\eta(t),v\right)_V=\left(f(t),v\right)_V \quad \forall v\in V, t\in[0,T\,]. \tag{II.2.6}$$

$$u_\eta(0)=u_0. \tag{II.2.7}$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme $II.2.1$. Il existe une solution unique du problème PV_η qui satisfait la régularité $(II.2.1)$.

Démonstration. En utilisant le théorème de représentation de Riez, nous définissons l'opérateur $A : V \longrightarrow V$ et l'élément $f_\eta(t) \in V$ par

$$\begin{aligned} (Au, v)_V &= (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u, v), \\ (f_\eta(t), v)_V &= (f(t), v)_V - (\eta(t), v)_V, \end{aligned} \tag{II.2.8}$$

Pour tous $u, v \in V$, $t \in [0, T]$. Soient $u_1, u_2 \in V$. En utilisant $(II.2.8)$ et la définition de j donnée par $(II.1.29)$, nous trouvons:

$$\begin{aligned} (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_V &= (\mathcal{A}\varepsilon(u_1) - \mathcal{A}\varepsilon(u_1), \varepsilon(u_1 - u_2))_{\mathcal{H}} \\ &+ \int_{\Gamma_3} (p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu}))(u_{1\nu} - u_{2\nu})\, da \\ &+ \int_{\Gamma_3} (p_\tau(u_{1\tau}) - p_\tau(u_{2\tau})).(u_{1\tau} - u_{2\tau})\, da, \end{aligned}$$

D'après $(II.1.13), (II.1.14), (II.1.19)$ et $(II.1.20)$, nous obtenons

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_V \geq m_{\mathcal{A}} |u_1 - u_2|_V^2 \tag{II.2.9}$$

En utilisant $(II.2.8)$ et $(II.1.29)$, il vient que

$$\begin{aligned} (Au_1 - Au_2, v)_V &= (\mathcal{A}\varepsilon(u_1) - \mathcal{A}\varepsilon(u_2), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\ &+ \int_{\Gamma_3} (p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu}))\, v_\nu da \\ &+ \int_{\Gamma_3} (p_\tau(u_{1\tau}) - p_\tau(u_{2\tau})).v_\tau da, \end{aligned}$$

Pour tout $v \in V$, par $(II.1.14)$ et $(I.2.6)$, nous déduisons que

$$\begin{aligned} |Au_1 - Au_2|_V \leq L_A |u_1 - u_2|_V &+ C_0 |p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu})|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &+ C_0 |p_\tau(u_{1\tau}) - p_\tau(u_{2\tau})|_{L^2(\Gamma_3)^d} \end{aligned} \tag{II.2.10}$$

L'inégalité $(II.2.9)$ indique que l'opérateur A est fortement monotone sur V. De plus, l'inégalité $(II.2.10)$ et les hypothèses $(II.1.19)$, $(II.1.20)$ impliquent que $A : V \longrightarrow V$ est continu. Par conséquent, en utilisant un résultat standard pour les équations non linéaire, il existe un élément $v_\eta(t) \in V$ unique tel que

$$A v_\eta(t) = f_\eta(t) \quad \forall t \in [\,0, T\,] \tag{II.2.11}$$

Soit $u_\eta : [0, T\,] \longrightarrow V$ la fonction définie par

$$u_\eta(t) = \int_0^t v_\eta(s)\, ds \ + u_0 \quad \forall t \in [\,0, T\,]\,. \tag{II.2.12}$$

Il vient de $(II.2.8) - (II.2.12)$ que u_η est une solution du problème variationnel PV_η et elle satisfait la régularité exprimée dans $(II.2.1)$. ce qui conclut la partie existence du lemme $II.2.1$. L'unicité de la solution vient de l'unicité de la solution du problème $(II.2.13)$.

Deuxième étape, soit $\eta \in C\ (0, T\ ; V)$, nous utilisons le champ de déplacement obtenu dans Lemme $II.2.1$ et nous considérons le problème variationnel suivant.

problème QV_η. Trouver le champ de potentiel électrique $\varphi_\eta : [\,0, T\,] \longrightarrow W$ tel que

$$\begin{gathered}\left(B\ \nabla\varphi_\eta(t), \nabla\phi\right)_H - \left(\mathcal{E}\varepsilon\left(u_\eta(t)\right), \nabla\phi\right)_H = \left(q(t), \phi\right)_W \\ \forall \phi \in W\ ,\quad t \in (\,0, T\,)\,,\end{gathered} \tag{II.2.13}$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme $II.2.2$. QV_η admet une solution unique φ_η qui satisfait la régularité $(II.2.2)$.

Démonstration. Il vient de l'hypothèse $(II.1.17)$ du tenseur de perméabilité constante électrique que la forme bilinéaire $b : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$b(\varphi, \phi) = \left(B\ \nabla\varphi(t), \nabla\phi\right)_H \quad \forall \varphi, \phi \in W\ , \tag{II.2.14}$$

est continue, symétrique et cœrcive sur W. L'hypothèse $(II.1.18)$ du tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}$, la régularité $u_\eta \in C^{\,1}(0, T\ ; V)$ et $q \in C\,(0, T\ ; W)$ dans $(II.1.30)$, nous obtenons que la fonction $q_\eta : [\,0, T\,] \longrightarrow W$ donnée par:

$$\left(q_\eta(t), \phi\right)_W = \left(q(t), \phi\right)_W + \left(\mathcal{E}\varepsilon\left(u_\eta(t)\right), \nabla\phi\right)_H \quad \forall \phi \in W\ ,\quad t \in [\,0, T\,]\,,$$

satisfait $q_\eta \in C\,(0,T\;;W)$. On applique le théorème de Lax - Milgram pour déduire qu'il existe un élément unique $\varphi_\eta\,(t) \in W$ tel que

$$b\left(\varphi_\eta\,(t)\,,\phi\right) = (q_\eta\,(t)\,,\phi)_W \quad \forall \phi \in W\ . \tag{$II.2.15$}$$

Nous concluons que $\varphi_\eta\,(t)$ est une solution du QV_η, soient $t_1, t_2 \in [\,0,T\,]$, il vient de $(II.1.17)$,$(II.1.18)$ et $(II.2.13)$ que

$$\left|\varphi_\eta\,(t_1) - \varphi_\eta\,(t_2)\right|_W \leq C\left(|u_\eta\,(t_1) - u_\eta\,(t_1)\ |_V + |q\,(t_1) - q\,(t_1)\ |_{W}\,,\right)$$

L'inégalité précédente et la régularité de u_η et q impliquent que $\varphi_\eta \in C\,(0,T\;;W)$.

Dans la troisième étape, soit $\theta \in C\ \left(0,T\;;L^2\,(\Omega)\right)$ donne, on considére le problème variationnel pour le champ d'endommagement suivant.

problème PV_θ. Trouver le champ d'endommagement $\beta_\theta : [\,0,T\,] \longrightarrow H^1\,(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} \beta_\theta\,(t) \in K,\ \left(\dot{\beta}_\theta\,(t)\,,\xi - \beta_\theta\,(t)\right)_{L^2(\Omega)} + a\,(\beta_\theta\,(t)\,,\xi - \beta_\theta\,(t)) \\ \geq (\theta\,(t)\,,\xi - \beta_\theta\,(t))_{L^2(\Omega)}\,\forall \xi \in K\ p.p \quad t \in [\,0,T\,]\,, \end{aligned} \tag{$II.2.16$}$$

$$\beta_\theta\,(0) = \beta_0. \tag{$II.4.17$}$$

Pour résoudre le problème PV_θ, on utilise un résultat standard sur les inégalités variationnelles paraboliques $[1, p.47]$.

Lemme $II.2.3$. Le problème PV_θ a une solution unique tel que

$$\beta_\theta \in W^{1,2}\left(0,T\;;L^2\,(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T\;;H^1\,(\Omega)\right). \tag{$II.2.18$}$$

Démonstration. L'inclusion de $\left(H^1\,(\Omega)\,,|\ .|_{H^1(\Omega)}\right)$ dans $\left(L^2\,(\Omega)\,,|\ .|_{L^2(\Omega)}\right)$ est continue et $H^1\,(\Omega)$ est dense dans $L^2\,(\Omega)$. Nous notons par $(H^1\,(\Omega))'$ l'espace de duel de $H^1\,(\Omega)$. $H^1\,(\Omega)$ est identifié avec $L^2\,(\Omega)$ et avec son propre dual, nous pouvons écrire le triple de Gelfand

$$H^1\,(\Omega) \subset L^2\,(\Omega) \subset \left(H^1\,(\Omega)\right)'.$$

Nous utilisons la notation $(.,.)_{(H^1(\Omega))'\times H^1(\Omega)}$ pour représenter le crochet de dualité entre $(H^1(\Omega))'$ et $H^1(\Omega)$. Nous avons :

$$(\beta,\xi)_{(H^1(\Omega))'\times H^1(\Omega)} = (\beta,\xi)_{L^2(\Omega)} \quad \forall\beta \in L^2(\Omega)\ ,\ \xi \in H^1(\Omega).$$

Nous notons que K est un ensemble fermé, convexe dans $H^1(\Omega)$. Puis, en utilisant la définition $(II.1.26)$ de la forme bilinéaire et $\beta_0 \in K$ dans $(II.1.25)$, il est facile de voir que le lemme $II.2.3$ est une conséquence du théorème $II.2.1$.

En considérant les propriétés de l'opérateur $\mathcal{G}$, l'opérateur $\mathcal{E}$ et la fonction $\mathcal{S}$, $t \in [0,T]$, nous considérons l'élément

$$\Lambda(\eta,\theta)(t) = \left(\Lambda^1(\eta,\theta)(t), \Lambda^2(\eta,\theta)(t)\right) \in V \times L^2(\Omega), \tag{II.2.19}$$

Défini par les égalités

$$(\Lambda^1(\eta,\theta)(t), \upsilon)_V = (\mathcal{G}\ (\varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\theta(t)), \varepsilon(\upsilon))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi, \varepsilon(\upsilon))_{\mathcal{H}} \quad \forall\upsilon \in V, t \in [0,T], \tag{II.2.20}$$

$$\Lambda^2(\eta,\theta)(t) = \mathcal{S}(\varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\theta(t)),\ t \in [\ 0,T\ ]. \tag{II.2.21}$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme $II.2.4$.Pour $(\eta,\theta) \in C\ (0,T\ ;V \times L^2(\Omega))$, la fonction $\Lambda(\eta,\theta) : [\ 0,T\ ] \longrightarrow V \times L^2(\Omega)$ est continue et le esciste un élément unique $(\eta^*,\theta^*) \in C\ (0,T\ ;V \times L^2(\Omega))$ tels que $\Lambda(\eta^*,\theta^*) = (\eta^*,\theta^*)$

Démonstration. Soit $(\eta,\theta) \in C\ (0,T\ ;V \times L^2(\Omega))$, et $t_1,t_2 \in [\ 0,T\ ]$ en utilisant $(I.2.6), (II.2.15)$ et $(II.1.18)$, nous avons

$$\begin{aligned}|\Lambda^1(\eta,\theta)(t_1) - \Lambda^1(\eta,\theta)(t_2)|_V \leq\ & |\mathcal{G}\ (\varepsilon(u_\eta(t_1)), \beta_\theta(t_1)) - \mathcal{G}\ (\varepsilon(u_\eta(t_2)), \beta_\theta(t_2))|_{\mathcal{H}} \\ & + \left|\mathcal{E}^*\nabla\varphi_\eta(t_1) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_\eta(t_2)\right|\end{aligned}$$

$$\leq\ C\left(|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)|_V + |\beta_\theta(t_1) - \beta_\theta(t_2)|_{L^2(\Omega)} + \left|\varphi_\eta(t_1) - \varphi_\eta(t_2)\right|_W\right). \tag{II.2.22}$$

Après, en raison de la régularité de u_η et φ_η exprimée dedans $(II.2.1)$,$(II.2.2)$ et $(II.2.3)$ respectivement, nous déduisons $(II.2.22)$ d'où $\Lambda^1(\eta,\theta) \in C\ (0,T\ ;V)$.

De la même maniére, de $(II.2.21)$ et $(II.2.16)$ il vient que

$$\begin{aligned} &\left|\Lambda^2(\eta,\theta)(t_1) - \Lambda^2(\eta,\theta)(t_2)\right|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad\leq C\left(\left|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)\right|_V + \left|\beta_\theta(t_1) - \beta_\theta(t_2)\right|_{L^2(\Omega)}\right) \end{aligned} \tag{II.2.23}$$

Par conséquent $\Lambda^2(\eta,\theta) \in C\left(0,T\ ; L^2(\Omega)\right)$ et $\Lambda\ (\eta,\theta) \in C\left(0,T\ ; V \times L^2(\Omega)\right)$ nous laissons $(\eta_1,\theta_1), (\eta_2,\theta_2) \in C\ \left(0,T\ ; V \times L^2(\Omega)\right)$

Maintenant on utilise la notation $u_{\eta_i} = u_i$, $\dot{u}_{\eta_i} = \upsilon_i$, $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$ et $\beta_{\theta_i} = \beta_i \quad i = 1,2$

En procédant de la même façon que pour établir $(II.2.22)$ et $(II.2.23)$ on obtient

$$\begin{aligned} &\left|\Lambda(\eta_1,\theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2,\theta_2)(t)\right|^2_{V\times L^2(\Omega)} \\ \leq\ \ & C\left(\left|u_1(t) - u_2(t)\right|^2_V + \left|\beta_1(t) - \beta_2(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} + \left|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\right|^2_W\right). \end{aligned} \tag{II.2.24}$$

Depuis

$$u_i(t) = \int_0^t \upsilon_i(s)\, ds + \ u_0,\ \ \forall t \in [\ 0,T\ ].$$

Nous avons

$$\left|u_1(t) - u_2(t)\right|^2_V \leq C \int_0^t \left|\upsilon_1(s) - \upsilon_2(s)\right|^2_V ds \quad \forall t \in [\ 0,T\ ]. \tag{II.2.25}$$

D'aprés $(II.2.6)$ nous obtenons

$$\begin{aligned} &\left(\mathrm{A}\varepsilon(\upsilon_1) - \mathrm{A}\varepsilon(\upsilon_2), \varepsilon(\upsilon_1 - \upsilon_2)\right)_{\mathcal{H}} + j\left(\upsilon_1\ ,\upsilon_1 - \upsilon_2\right) - j\left(\upsilon_2\ ,\upsilon_1 - \upsilon_2\right) \\ &\qquad = \left(\eta_1 - \eta_2, \upsilon_1 - \upsilon_2\right)_V\ . \end{aligned}$$

De $(II.1.14)$ et $(II.1.13)$ nous trouvons

$$\left(\mathrm{A}\varepsilon(\upsilon_1) - \mathrm{A}\varepsilon(\upsilon_2), \varepsilon(\upsilon_1 - \upsilon_2)\right)_{\mathcal{H}} \geq m_{\mathrm{A}} \left|\upsilon_1 - \upsilon_2\right|^2_V \qquad \forall t \in [\ 0,T\ ].$$

Et de $(II.1.29), (II.1.19)$ et $(II.1.20)$ nous obtenons

$$j\left(\upsilon_1\ ,\upsilon_1 - \upsilon_2\right) - j\left(\upsilon_2\ ,\upsilon_1 - \upsilon_2\right) \geq 0 \quad \forall t \in [\ 0,T\ ].$$

Nous utilisous les trois inégalités précédentes pour trouver

$$\left|\upsilon_1(t) - \upsilon_2(t)\right|^2_V \leq C\ \ \left|\eta_1(t) - \eta_2(t)\right|^2_V. \tag{II.2.26}$$

Nous utilisons maintenant $(II.2.13)$, $(II.1.17)$ et $(II.1.18)$ pour obtenir:

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W^2 \leq C\, |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 . \qquad (II.2.27)$$

D'autre part, de $(II.2.16)$ nous déduisons:

$$\begin{aligned}&\left(\dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_2, \beta_1 - \beta_2\right)_{L^2(\Omega)} + a\,(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2)\\ &\qquad \leq (\theta_1 - \theta_2, \beta_1 - \beta_2)_{L^2(\Omega)} \text{ p.p } t \in [\ 0, T\ ]\end{aligned}$$

En intégrant l'inégalité précédente par rapport au temps, en utilisant les conditions $\beta_1(0) = \beta_2(0) = \beta_0$ initiales et l'inégalité $a\ (\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2) \geq 0$ pour trouver:

$$\frac{1}{2}\,|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t (\theta_1(s) - \theta_2(s)\,, \beta_1(s) - \beta_2(s))_{L^2(\Omega)}\, ds\ .$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \ \leq\ & \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2\, ds\\ & + \int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2\, ds,\end{aligned}$$

cette inégalité combinée avec l'inégalité de Gronwall nous donne

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2\, ds \quad \forall t \in [\ 0, T\ ] \qquad (II.2.28)$$

nous substituons $(II.2.27)$ dans $(II.2.24)$ et nous utilisons $(II.2.25)$ pour obtenir:

$$\begin{aligned}&|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)|_{V\times L^2(\Omega)}^2\\ &\qquad \leq C\left(|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2\right)\\ &\qquad \leq C\left(\textstyle\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2\, ds\ + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2\right).\end{aligned}$$

Il vient donc de l'inégalité précédente, des évaluations $(II.2.26)$ et $(II.2.28)$:

$$|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)|_{V\times L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t |(\eta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \theta_2)(s)|_{V\times L^2(\Omega)}^2\, ds$$

En réitérant cette inégalité m fois on obtient:

$$\begin{aligned}&\left|\Lambda^m(\eta_1,\theta_1)-\Lambda^m(\eta_2,\theta_2)\right|^2_{C(0,T\;;V\times L^2(\Omega))}\\&\qquad\le\tfrac{C^mT^m}{m!}\left|(\eta_1,\theta_1)-(\eta_2,\theta_2)\right|^2_{C(0,T\;;V\times L^2(\Omega))}ds\end{aligned}$$

pour m suffisant grand Λ^m est une contraction sur l'espace de Banach $C\left(0,T\;;V\times L^2(\Omega)\right)$, et donc Λ a un point fixe unique.

Maintenant on peut démontrer le Théorème $II.2.1$.

Démonstration. De l'existence. Soit $(\eta^*,\theta^*)\in C\left(0,T\;;V\times L^2(\Omega)\right)$ est un point fixe de Λ défini par $(II.2.19)-(II.2.21)$ et u, φ et β sont des solutions du problèmes PV_η, QV_η et PV_θ pour $\eta=\eta^*$et $\theta=\theta^*$ i.e $u=u_{\eta^*},\varphi=\varphi_{\eta^*}$ et $\beta=\beta_{\theta^*}$.les équations $\Lambda^1(\eta^*,\theta^*)(t)=\eta^*$et $\Lambda^2(\eta^*,\theta^*)(t)=\theta^*$ se combinent avec $(II.2.20)-(II.2.21)$ voir $(II.1.38)-(II.1.40)$ qui sont satisfait. Aprés $(II.1.41)$ et les régularités $(II.2.1)-(II.2.3)$ suivent les lemmes et

Unicité. la solution unique est la conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par $(II.2.19)-(II.2.21)$ et l'unicité de la solution des problème PV_η, QV_η et PV_θ.

Chapitre 3

Problème électro-viscoélastique avec frottement et usure

Le troisième chapitre du mémoire est consacré à l'étude mathématique d'un problème de contact avec frottement pour des matériaux électro-viscoélastiques avec endommagement dans un processus quasi-statique. Le contact bilatéral avec frottement avec une base rigide et mobile se fait avec usure des surfaces de contact. Le problème se formule comme un système formé par une inéquation variationnelle elliptique par rapport au champ de déplacement, une inéquation variationnelle du type parabolique par rapport au champ d'endommagement, une équation variationnelle par rapport au champ électrique. Des résultats d'existence et d'unicité de la solution ont été considérés en utilisant la théorie des inéquations elliptiques, des inéquations du type parabolique, et des arguments de point fixe.

3.1 Problème mécanique et formulation variationnelle

Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times [0,T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0,T] \rightarrow S_d$ et le champ d'endommagement $\beta : \Omega\,[0,T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que.

$$
\begin{array}{lll}
\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}(\varepsilon(u), \beta) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi & \text{dans} \quad \Omega \times (0,T) & (III.1.1) \\
D = \mathcal{E}\varepsilon(u) - B\nabla\varphi & \text{dans} \quad \Omega \times (0,T) & (III.1.2) \\
\dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial\varphi_K(\beta) \ni \mathcal{S}(\varepsilon(u), \beta) & \text{dans} \quad \Omega \times (0,T) & (III.1.3) \\
Div\sigma + f_0 = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times (0,T) & (III.1.4) \\
divD = q_0 & \text{dans} \quad \Omega \times (0,T) & (III.1.5) \\
u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0,T) & (III.1.6) \\
\sigma\nu = f_2 & \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0,T) & (III.1.7) \\
\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\nu = -\alpha\,|\dot{u}_\nu|\,, \ |\sigma_\tau| = -\mu\sigma_\tau \\ \sigma_\tau = -\lambda(\dot{u}_\tau - \upsilon^*) \ , \quad \lambda \geq 0 \end{array} \right. & \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0,T) & (III.1.8) \\
\frac{\partial\beta}{\partial\nu} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times (0,T) & (III.1.9) \\
\varphi = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_a \times (0,T) & (III.1.10) \\
D\ .\nu = q_2 & \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0,T) & (III.1.11) \\
u(0) = u_0, \quad \beta(0) = \beta_0 & \text{dans} \quad \Omega & (III.1.12)
\end{array}
$$

Ici, les relations $(III.1.1)$ et $(III.1.2)$ représentent la loi de comportement d'un matériau électro-viscoélastique avec endommagement, $(III.1.3)$ représente l'équation d'évolution du champ d'endommagement qui est gouvernée par la fonction source d'endommagement S, $\partial\varphi_K$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles K, les relations $(III.1.4)$ et $(III.1.5)$ représentent les équations d'équilibres pour le champ de déplacement et le champ électrique, respectivement. Les relations $(III.1.6)$-$(III.1.7)$ sont les conditions de déplacement-traction. $(II.1.8)$ représente les conditions de contact avec frottement et usure. $(III.1.9)$ représente la condition aux limites de Neumann où $\frac{\partial\beta}{\partial\nu}$ est la dérivée normale de β. La relation $(III.1.12)$ représente les conditions initiales du champ de déplacement u_0 et du champ d'endommagement β_0.

Pour obtenir la formulation variationnelle du problème $(III.1.1)$-$(III.1.12)$, nous avons le sous-espace fermé défini par:

$$V = \left\{ \upsilon \in H^1(\Omega)^d \quad / \quad \upsilon = 0 \ \ sur \ \ \Gamma_1 \right\},$$

Comme $mes\ (\Gamma_1) \succ 0$, l'inégalité de Korn est verifiée, donc il existe une constante $C_k \succ 0$, qui dépend uniquement de Ω et Γ_1, telle que:

$$|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \geq C_k |v|_{H^1(\Omega)^d} \qquad \forall v \in V.$$

La démonstration de l'inégalité de Korn peut être trouvée dans[4] . L'espace V muni du produit scalaire et de la norme associée donnée par:

$$(u\ ,v)_V = (\varepsilon(v)\ \ ,\ \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad , \quad |v|_V = |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}}\ \forall u, v \in V \tag{$III.1.13$}$$

Il vient que $|\ .\ |_{H^1(\Omega)^d}$ et $|\ .\ |_V$ sont des normes équivalentes sur V et par conséquent, $(V\ \ ,\ \ |\ .\ |_V\ )$ est un espace de Hilbert réel.

Dans l'étude du problème $(III.1.1)$-$(III.1.12)$, on considére les hypothèses suivantes.

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A}:\ \Omega \times S^d \longrightarrow\ \ S^d$ satisfait

$$\begin{cases} (a)\ \text{Il existe une constante } L_{\mathcal{A}} \succ 0 \text{ tel que} \\ |\ \mathcal{A}(x,\varepsilon_1) - \mathcal{A}(x,\varepsilon_2)\ | \leq\ L_{\mathcal{A}}\ |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \qquad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d \qquad p.p\ x \in \Omega. \\ (b)\ \text{Il existe une constante } m_{\mathcal{A}} \succ 0 \text{ tel que} \\ (\mathcal{A}(x,\varepsilon_1) - \mathcal{A}(x,\varepsilon_2)) . (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq\ m_{\mathcal{A}}\ |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \qquad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d \quad p.p\ x \in \Omega. \\ (c)\ x \longrightarrow \mathcal{A}(x,\varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ (d)\ \text{L'application } x \longrightarrow \mathcal{A}(x,0) \text{ appartient à } \mathcal{H}. \end{cases} \tag{$III.1.14$}$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{G}:\ \Omega \times S^d \times \mathbb{R} \longrightarrow\ \ S^d$ satisfait

$$\begin{cases} (a)\ \text{Il existe une constante } L_{\mathcal{G}} \succ 0 \text{ tel que} \\ |\ \mathcal{G}(x,\varepsilon_1,\alpha_1) - \mathcal{G}(x,\varepsilon_2,\alpha_2)\ | \leq\ L_{\mathcal{G}}\left(|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\alpha_1 - \alpha_2|\right),\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d \\ \qquad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\ p.p\ x \in \Omega. \\ (b)\ \text{Pour tout } \varepsilon \in S^d \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}\ , \\ \qquad x \longrightarrow \mathcal{G}(x,\varepsilon,\alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ (c)\ \text{L'application } x \longrightarrow \mathcal{G}(x,0,0) \text{ appartientà } \mathcal{H}. \end{cases} \tag{$III.1.15$}$$

La fonction source d'endommagement $\mathcal{S}: \ \Omega \times S^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \ \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{S}} \succ 0 \text{ tel que} \\ \mid \mathcal{S}(x, \varepsilon_1, \alpha_1) - \mathcal{S}(x, \varepsilon_2, \alpha_2) \ \mid \leq \ L_{\mathcal{S}} (|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\alpha_1 - \alpha_2|) \\ \qquad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d \ \alpha_1 \ , \alpha_2 \in \mathbb{R} \ \ p.p \ x \in \Omega. \\ (b) \quad \text{Pour tout } \varepsilon \in S^d \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}, \\ \qquad x \longrightarrow \mathcal{S}(x, \varepsilon, \alpha) \ \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ (c) \ \text{ L'application } x \longrightarrow S(x, 0, 0) \ \text{ appartient à } L^2(\Omega). \end{array} \right. \tag{III.1.16}$$

L'opérateur électrique satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \ \ B(x, E) = (b_{ij} \ , E_j), \ \forall E = (E_j) \in \mathbb{R}^d, \ p.p \quad x \in \Omega \\ (b) \quad b_{ij} = b_{ji} \quad b_{ij} \in L^\infty(\Omega) \\ (c) \text{ Il existeune constante } m_B \succ 0 \text{ tel que:} \\ BE \cdot E \geq m_B \mid E \mid^2_{H^1(\Omega)^d} \quad \forall E{=}(E_j) \in \mathbb{R}^d \ , \ p.p \ x \in \Omega \end{array} \right. \tag{III.1.17}$$

L'opérateur piézoélectrique $\mathcal{E}: \ \Omega \times S^d \longrightarrow \ \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{lll} (a) \quad \mathcal{E}(x; \tau) = (e_{ijk}(x) \, \tau_{jk}) & \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in S^d \ \ p, p \quad x \in \Omega. \\ (b) \quad e_{ijk} = e_{ikj} \ \ , & \quad e_{ijk} \in L^\infty(\Omega) \qquad , \ 1 \ \leq i, j, k \leq d. \end{array} \right. \tag{III.1.18}$$

Nous supposons aussi que les forces volumiques et surfaciques satisfont la régularité

$$f_0 \ \in \ C(0, T \ ; H), \ f_2 \in C\left(0, T \ ; L^2(\Gamma_2)^d\right). \tag{III.1.19}$$

$$q_0 \ \in \ C\left(0, T; L^2(\Omega)\right), \ q_2 \in C\left(0, T \ ; L^2(\Gamma_b)\right). \tag{III.1.20}$$

$$q_2(t) \ = \ 0 \text{ sur } \Gamma_3 \quad \forall t \in [0, T]. \tag{III.1.21}$$

Les fonctions α et μ vérifient les propriétes suivantes

$$\alpha \ \in \ L^\infty(\Gamma_3), \alpha(x) \geq \alpha^* > 0 \text{ p.p.sur } \Gamma_3. \tag{III.1.22}$$

$$\mu \ \in \ L^\infty(\Gamma_3), \mu > 0 \quad \text{p.p.sur } \Gamma_3. \tag{III.1.23}$$

On remarque que nous avons besoin d'imposer l'hypothèse $(III.1.21)$ pour des raisons physiques.

Le champ de déplacement initial satisfait

$$u_0 \in V. \tag{$III.1.24$}$$

Le champ d'endommagement initial satisfait

$$\beta_0 \in K. \tag{$III.1.25$}$$

Nous définissons la forme bilinéaire $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ par

$$a(\zeta, \varphi) = k \int_\Omega \nabla\zeta.\nabla\varphi dx. \tag{$III.1.26$}$$

Ensuite, on note par $f : [0, T] \to V$ la fonction définie par

$$(f(t), \upsilon)_V = \int_\Omega f_0(t).\upsilon\ dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t).\upsilon\ da \quad \forall\upsilon \in V, t \in [0, T]. \tag{$III.1.27$}$$

Et nous notons par $q : [0, T] \to W$ la fonction définie par

$$(q(t), \phi)_W = \int_\Omega q_0(t).\phi\ dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t).\phi\ da \quad \forall\phi \in W, t \in [0, T]. \tag{$III.1.28$}$$

Puis, la fonction de frottement $j : V \times V \to \mathbb{R}$ est définie par

$$j\ (u\ ,\ \upsilon) = \int_{\Gamma_3} \alpha|u_\nu|(\mu|\upsilon_\nu - \upsilon^*| + \upsilon_\nu)\, da\ \ ,\ \ \forall u, \upsilon \in V\ . \tag{$III.1.29$}$$

De $(II.1.19)$ et $(II.1.20)$, on remarque que les intégrales $(II.1.29)$ sont bien définies et nous notons que les conditions $(II.1.21)$ et $(II.1.22)$ inpliquent

$$f \in C(0, T; V),\ q \in C(0, T; W). \tag{$III.1.30$}$$

En utilisant des arguments standards, nous obtenons la formulation variationnelle du problème mécanique $(III.2.1)$-$(III.2.12)$

Problème PV: Trouvrer le champ de déplacement $u : [\ 0, T\ ] \longrightarrow V$, le champ de contrainte $\sigma : [\ 0, T\ ] \longrightarrow \mathcal{H}_1$, le champ potentiel de électrique $\varphi : [\ 0, T\ ] \longrightarrow W$, le champ de déplacement électrique $D : [\ 0, T\ ] \longrightarrow H$ et le champ d'endommagement $\beta : [\ 0, T\ ] \longrightarrow H^1(\Omega)$ tels que:

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}(\varepsilon(u(t)), \beta(t)) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi(t)\ \ ,\ t \in (0, T\ ). \tag{$III.1.31$}$$

$$
\begin{aligned}
&(\sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}(t), v) - j(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) \qquad (III.1.32)\\
\geq \; &(f(t), v - \dot{u}(t)), \forall \in V \; t \in (0, T\ ).
\end{aligned}
$$

$$
\beta(t) \in K, \text{ pour tout } t \in [0, T],
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t)\right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \qquad (III.1.33)\\
&\geq (S(\varepsilon(u(t)), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \;\; \forall \xi \in K, p.p.t \in (0, T).
\end{aligned}
$$

$$
D(t) = \mathcal{E}\varepsilon(u(t)) - B\ \nabla\varphi(t), t \in (0, T\ ). \qquad (III.1.34)
$$

$$
(D(t), \nabla\phi)_H = (q(t), \phi)_W \;\; \forall \phi \in W, t \in (0, T\ ). \qquad (III.1.35)
$$

$$
u(0) = u_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \qquad (III.1.36)
$$

Nous notons que le problème variationnel PV est formulé en termes de champ de déplacement, champ de contrainte, champ potentiel électrique, champ déplacement électrique et champ d'endommagement.

3.2 L'existence et l'unicité de la solution

Théorème $III.2.1$. Nous supposons que les hypothèses $(III.1.14)$-$(III.1.25)$ sont satisfaites. Alors, il existe une constante α_0 qui est dépend uniquement sur $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2$ et $\mathcal{A}$ tels que, si

$$
|\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left(|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1\right) < \alpha_0, \qquad (III.2.1)
$$

Alors, il existe une solution unique $\{u, \sigma, \varphi, D\ , \beta\}$ du problème PV. De plus, la solution satisfait

$$u \in C^1(0, T\ ; V). \qquad (III.2.2)$$

$$\sigma \in C(0, T\ ; \mathcal{H}_1). \qquad (III.2.3)$$

$$\varphi \in C(0, T\ ; W). \qquad (III.2.4)$$

$$D \in C(0, T\ ; \mathcal{W}). \qquad (III.2.5)$$

$$\beta \in W^{1,2}\left(0, T\ ; L^2(\Gamma_2)\right) \cap L^2\left(0, T\ ; H^1(\Omega)\right). \qquad (III.2.6)$$

Les fonctions u, σ, φ, D et β qui satisfont $(III.1.31)$-$(III.1.36)$ s'appellent une solution faible du problème de contact. Nous concluons que sous les hypothèses $(III.1.14)$-$(III.1.25)$, le problème mécanique $(III.1.1)$-$(III.1.12)$ a une solution faible unique de la régularité donnée par $(III.2.2)$-$(III.2.6)$. La démonstration du théorème se fait en plusieurs étapes. Dans tout ce qui suit, nous supposons que les hypothèses du théorème $III.2.1$ sont satisfaites et nous considérons que C est une constante positive qui dépend de Ω , Γ_1 et Γ_3 dont la valeur neut changer d'une place à l'autre.

Remarque 2.1. On remarque que si ν^* est assez grand, alors $\alpha = \frac{1}{k_1 \nu^*}$ est suffisamment petit et, par conséquent, la condition $(III.2.1)$ pour la solution unique du problème PV est satisfaite. Nous concluons que le problème mécanique $(III.1.1) - (III.1.12)$ a une faible solution unique si la vitesse tangentielle de la fondation est assez grande. De plus, la résolution du problème $(III.1.1) - (III.1.12)$, nous permet de trouver la fonction de l'usure par intégration de $(I.1.10)$ et on utilise la condition initiale $w(0) = 0$ qui indique que le corps à l'instant initial n'est pas soumis à une usure.

Soient $\eta \in C\ (0, T\ ; \mathcal{H})$ et $g \in C\ (0, T\ ; V)$.

Dans la première étape, nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème $PV_{\eta g}$. Trouver le champ de déplacement $u_{\eta g} : [0, T] \longrightarrow V$ et le champ de contrainte $\sigma_{\eta g} : [0, T] \longrightarrow \mathcal{H}$ tels que

$$\sigma_{\eta g}(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\upsilon_{\eta g}(t))) + \eta(t), \ \forall t \in [0, T]. \qquad (III.2.7)$$

$$\begin{aligned}(\sigma_{\eta g}(t), \varepsilon(\upsilon - \upsilon_{\eta g}(t)))_{\mathcal{H}} + j(g(t), \upsilon) - j(g(t), \upsilon_{\eta g}(t)) \\ \geq (f(t), \upsilon - \upsilon_{\eta g}(t))_V, \forall \upsilon \in V, t \in [0, T].\end{aligned} \qquad (III.2.8)$$

Dans l'étude du problème $PV_{\eta g}$, nous avons le résultat suivant.

Lemme $III.2.1$. Le problème $PV_{\eta g}$ a une solution faible unique, telle que

$$\upsilon_{\eta g} \in C(0, T; V), \ \sigma_{\eta g} \in C(0, T; \mathcal{H}_1). \qquad (III.2.9)$$

Démonstration. Nous définissons l'opérateur $A : V \longrightarrow V$ tel que

$$(Au, \upsilon)_V = (\mathcal{A}(\varepsilon(u)), \varepsilon(\upsilon))_{\mathcal{H}}, \quad \forall u, \upsilon \in V. \qquad (III.2.10)$$

Il résulte de $(III.2.10)$ et $(III.1.14)$ que

$$|Au - A\upsilon|_V \leq L_{\mathcal{A}} |u - \upsilon|_V, \quad \forall u, \upsilon \in V, \qquad (III.2.11)$$

Ce qui indique que $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$ est de Lipschitz. maintenant, par $(III.2.10)$ et $(III.1.14)(b)$, nous trouvons

$$(Au - A\upsilon, u - \upsilon)_V \geq m_{\mathcal{A}} |u - \upsilon|_V^2, \quad \forall u, \upsilon \in V, \qquad (III.2.12)$$

i,e., que $A : V \longrightarrow V$ est un opérateur fortement monotone dans V. De plus, l'utilisation du théorème de représentation de Riesz, nous pouvons définir un élément $F \in C(0, T; V)$ par

$$(F(t), \upsilon)_V = (f(t), \upsilon)_V - (\eta(t), \varepsilon(\upsilon))_{\mathcal{H}}.$$

Comme A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz sur V et comme j une fonction convexe, proper et semi-continue, il vient du résultat classique sur les inégalites elliptiques qu'il existe une fonction unique $\upsilon_{\eta g}(t) \in V$ qui satisfait

$$\begin{aligned}(A\upsilon_{\eta g}(t), \upsilon - \upsilon_{\eta g}(t))_{\mathcal{H}} + j(g(t), \upsilon) - j(g(t), \upsilon_{\eta g}(t)) \\ \geq (F(t), \upsilon - \upsilon_{\eta g}(t))_V, \forall \upsilon \in V.\end{aligned} \qquad (III.2.13)$$

on utilise la relation $(III.2.7)$, l'hypothèse $(III.1.14)$ et les propriétés du tenseur de déformation pour obtenir $\sigma_{\eta g}(t) \in \mathcal{H}$. Prenant $\upsilon = \upsilon_{\eta g}(t) \pm \psi$ et satisfait $(III.2.8)$, où $\psi \in \ D(\Omega)^d$ est arbitraire, et en utilisant la définition $(III.1.27)$ pour $f(t)$, nous trouvons

$$Div\ \sigma_{\eta g}(t) + f_0(t) = 0,\ t \in (0,T). \qquad (III.2.14)$$

avec la régularité $(III.1.19)$ sur f_0, nous remarquons que $Div\ \sigma_{\eta g}(t) \in H$. Par conséquent, $\sigma_{\eta g}(t) \in \mathcal{H}$. Soient $t_1, t_2 \in [\ 0, T\ ]$ et on note $\eta(t_i) = \eta_i$, $f(t_i) = f_i$, $g(t_i) = g_i$, $\upsilon_{\eta g}(t_i) = \upsilon_i$ et $\sigma_{\eta g}(t_i) = \sigma_i$ pour $i = 1, 2$. En utilisant la relation $(III.2.8)$, nous trouvons

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}\varepsilon(\upsilon_1) - \mathcal{A}\varepsilon(\upsilon_2), \varepsilon(\upsilon_1 - \upsilon_2))_{\mathcal{H}} \\ &\quad\le (f_1 - f_2\ , \upsilon_1 - \upsilon_2)_V + (\eta_1 - \eta_2, \varepsilon(\upsilon_1 - \upsilon_2))_{\mathcal{H}} \\ &\quad+ j(g_1\ , \upsilon_2) - j(g_1\ , \upsilon_1) + j(g_2\ , \upsilon_1) - j(g_2\ , \upsilon_2).\end{aligned} \qquad (III.2.15)$$

de la définition de la fonctionnelle j donnée par $(III.1.29)$ Nous avons

$$\begin{aligned}&j(g_1\ , \upsilon_2) - j(g_1\ , \upsilon_1) + j(g_2\ , \upsilon_1) - j(g_2\ , \upsilon_2) \\ &= \int_{\Gamma_3} (\alpha|g_{1\nu}| - \alpha|g_{2\nu}|)(\mu|\upsilon_{2\tau} - \upsilon^*| - \mu|\upsilon_{1\tau} - \upsilon^*| + \upsilon_{2\nu} - \upsilon_{1\nu})\,da.\end{aligned}$$

La relation $(I.2.6)$, l'hypothèse $(III.1.22)$ et $(III.1.23)$ implique

$$\begin{aligned}&|j(g_1\ , \upsilon_2) - j(g_1\ , \upsilon_1) + j(g_2\ , \upsilon_1) - j(g_2\ , \upsilon_2)| \\ &\le C_0^2\, |\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left(|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1\right) |g_1 - g_2|_V\, |\upsilon_1 - \upsilon_2|_V\,.\end{aligned} \qquad (III.2.16)$$

La relation $(III.1.13)$, l'hypothèse $(III.1.14)$ et l'inégalité $(III.2.16)$ combinées avec $(III.2.15)$ nous donne

$$\begin{aligned}m_{\mathcal{A}}\, |\upsilon_1 - \upsilon_2|_V \le\ & C_0^2\, |\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left(|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1\right) |g_1 - g_2|_V \\ & + |f_1 - f_2|_V + |\eta_1 - \eta_2|_{\mathcal{H}}\,.\end{aligned} \qquad (III.2.17)$$

l'inégalité $(III.2.17)$ et la régularité des fonctions f , g et η montrent que

$$\upsilon_{\eta g} \in C(0, T\ ; V).$$

l'hypothèse $(III.1.14)$ et la relation $(III.2.7)$ on obtient

$$|\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}} \le L_{\mathcal{A}}\, |\upsilon_1 - \upsilon_2|_V + |\eta_1 - \eta_2|_{\mathcal{H}}\,. \qquad (III.2.18)$$

et d'aprés $(III.2.14)$ on a

$$Div\sigma_{\eta g}(t_i) + f_0(t_i) = 0,\ i = 1, 2. \tag{$III.2.19$}$$

la régularité des fonctions η, υ, f_0 et des relations $(III.2.18) - (III.2.19)$ montrent que

$$\sigma_{\eta g} \in C(0, T\ ; \mathcal{H}_1).$$

Soient $g \in C(0, T\ ; V)$ et $\eta \in C(0, T\ ; \mathcal{H})$. Nous considérons l'opérateur suivant

$$\Lambda_\eta : C(0, T\ ; V) \to C(0, T\ ; V)$$

définie par

$$\Lambda_\eta g = \upsilon_{\eta g},\ \forall g \in C(0, T\ ; V). \tag{$III.2.20$}$$

Lemme $III.2.2$. Supposons que les hypothéses $(III.1.14) - (III.1.25)$ est satisfaites. Alors il existe un réel $\alpha_0 \succ 0$, qui ne dépend que de Ω , Γ_1,Γ_3 et $\mathcal{A}$ telle que si $(III.2.1)$ est vérifiée, l'opérateur Λ_η a un point fixe unique $g_\eta^* \in C(0, T\ ; V)$.

Démonstration. Soient $g_1, g_2 \in C(0, T\ ; V)$ et $\eta \in C(0, T\ ; \mathcal{H})$. Nous utilisons la notation $\upsilon_i = \upsilon_{\eta g_i}$ et $\sigma_i = \sigma_{\eta g_i}$ pour $i = 1, 2$.

Nous utilisons les mêmes arguments que ceux utilisés dans $(III.2.17)$ on trouve

$$\begin{aligned} & m_{\mathcal{A}} \left|\upsilon_1(t) - \upsilon_2(t)\right|_V \\ \leq\ & C_0^2 \left|\alpha\right|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left(\left|\mu\right|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1\right) \left|g_1(t) - g_2(t)\right|_V, \quad \forall t \in [\ 0, T\ ]. \end{aligned} \tag{$III.2.21$}$$

de $(III.2.20)$ et $(III.2.21)$ nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left|\Lambda_\eta g_1(t) - \Lambda_\eta g_2(t)\right|_V \\ \leq\ & \tfrac{C_0^2}{m_{\mathcal{A}}} \left|\alpha\right|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left(\left|\mu\right|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1\right) \left|g_1(t) - g_2(t)\right|_V,\ \forall t \in [\ 0, T\ ]. \end{aligned} \tag{$III.2.22$}$$

Soit

$$\alpha_0 = \frac{m_{\mathcal{A}}}{C_0^2}$$

α_0 est une constante positive qui dépend de Ω . $\Gamma_1.\Gamma_3$ et de l'opérateur $\mathcal{A}$. Si $(III.2.1)$ est satisfait, nous déduissons de $(III.2.22)$ que l'opérateur Λ_η est une contraction. Du théorème du point fixe de Banach, nous concluons que l'opérateur Λ_η a un point fixe unique $g_\eta^* \in C(0,T\,;V)$.

On désigne par

$$\upsilon_\eta = \upsilon_{\eta g_\eta^*}, \quad \sigma_\eta = \sigma_{\eta g_\eta^*}, \tag{III.2.23}$$

et soit $u_\eta : [\,0,T\,] \to V$ la fonction définie par

$$u_\eta(t) = \int_0^t \upsilon_\eta(s)\,ds + u_0, \ \forall t \in [0,T] \tag{III.2.24}$$

En utilisant $(III.2.9)$, nous trouvons que u_η satisfait la régularité exprimée dans $(III.2.2)$.

Dans la deuxième étape, soit $\eta \in C(0,T\,;\mathcal{H})$, nous utilisons le champ de déplacement u_η obtenu dans $(III.2.24)$ et on considère le problème variationnel suivant.

problème QV_η**.** Trouver le champ de potentiel électrique $\varphi_\eta : [\,0,T\,] \longrightarrow W$ tel que

$$\begin{aligned}\left(B\ \nabla\varphi_\eta(t), \nabla\phi\right)_H &- \left(\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\phi\right)_H \\ &= (q(t), \phi)_W \ , \ \forall\phi \in W \ , \ \ t \in [\,0,T\,]\,.\end{aligned} \tag{III.2.25}$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme $III.2.3$. QV_η admet une solution unique φ_η qui satisfait la régularité $(III.2.4)$.

Démonstration. Nous définissons la forme bilinéaire $b : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$b(\varphi,\phi) = (B\ \nabla\varphi(t), \nabla\phi)_H \ , \quad \forall\varphi,\phi \in W\ . \tag{III.2.26}$$

Nous utilisons $(III.1.17)$ pour indiquer que la forme b est continue, symétrique et cœrcive sur W, de plus, en utilisant le théorème de représentation de Riesz, nous pouvons definir un élément $q_\eta : [\,0,T\,] \longrightarrow W$ tel que

$$(q_\eta(t), \phi)_W = (q(t), \phi)_W + (\mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \nabla\phi)_H \quad \forall\phi \in W\ , t \in [0,T]\,.$$

On applique le théorème de Lax - Milgram pour déduire qu'il existe un élément unique $\varphi_\eta(t)$ $\in W$ tel que

$$b\left(\varphi_\eta(t), \phi\right) = (q_\eta(t), \phi)_W \ , \quad \forall\phi \in W. \tag{III.2.27}$$

Nous concluons que $\varphi_\eta(t)$ est une solution de QV_η . Soient $t_1, t_2 \in [\,0, T\,]$, il vient de $(III.1.17)$,$(III.1.18)$ et $(III.2.13)$ que

$$\left|\varphi_\eta(t_1) - \varphi_\eta(t_2)\right|_W \leq C\left(|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_1)\ |_V + |q(t_1) - q(t_2)\ |_W\right),$$

l'inégalité précédente et la régularité de u_η et q impliquent que $\varphi_\eta(t) \in C\ (0, T\ ; W)$.

Dans la troisième étape, nous avons $\theta \in C\ (0, T\ ; L^2(\Omega))$ donnée et on considère le problème variationnel suivant.

problème PV_θ. Trouver le champ d'endommagement $\beta_\theta : [\,0, T\,] \longrightarrow H^1(\Omega)$ tels que

$$\begin{aligned}\left(\dot{\beta}_\theta(t), \xi - \beta_\theta(t)\right)_{L^2(\Omega)} &+ a\left(\beta_\theta(t), \xi - \beta_\theta(t)\right) \\ &\geq \left(\theta(t), \xi - \beta_\theta(t)\right)_{L^2(\Omega)}\ \forall \xi \in K\ p.p \quad t \in [\,0, T\,].\end{aligned} \tag{$III.2.28$}$$

$$\beta(0) = \beta_0. \tag{$III.2.29$}$$

Pour résoudre PV_θ , on utilise le résultat standard sur les inégalités variationnelles paraboliques.

Lemme $III.2.4$. le problème PV_θ a une solution unique tel que

$$\beta_\theta \in W^{1,2}\left(0, T\ ; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0, T\ ; H^1(\Omega)\right). \tag{$III.2.30$}$$

Démonstration. L'ingéction de$\left(H^1(\Omega), |\ .|_{H^1(\Omega)}\right)$ dans $\left(L^2(\Omega), |\ .|_{L^2(\Omega)}\right)$ est continue et $H^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$. Nous dénotons par $(H^1(\Omega))'$ l'espace duel de $H^1(\Omega)$. $L^2(\Omega)$ est identifié a son propre duel, nous pouvons écrire le triple de $L^2(\Omega)$ Gelfand

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset \left(H^1(\Omega)\right)'.$$

Nous utilisons la notation $(.,.)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)}$ pour représenter le couchet de dualité entre $(H^1(\Omega))'$ et $H^1(\Omega)$, nous avons

$$(\beta, \xi)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} = (\beta, \xi)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \beta \in L^2(\Omega)\ ,\ \xi \in H^1(\Omega)$$

et nous notons que K est un ensemble convexe fermé dans $H^1(\Omega)$, en utilisant la définition $(III.1.26)$ de la forme bilinéaire et du fait $\beta_0 \in K$ dedans $(III.1.25)$, il est facile de voir que le lemme $III.2.4$ est une conséquence du théorème $III.2.2$.

Enfin par suite de ces résultats, on utilise les propriétés de l'opérateur $\mathcal{G}$, l'opérateur $\mathcal{E}$ et la fonction $\mathcal{S}$, pour tout $t \in [\,0, T\,]$, nous considérons l'élément

$$\Lambda(\eta,\theta)(t) = \left(\Lambda^1(\eta,\theta)(t), \Lambda^2(\eta,\theta)(t)\right) \in \mathcal{H} \times L^2(\Omega), \qquad (III.2.31)$$

défini par les égalités

$$\Lambda^1(\eta,\theta)(t) = \mathcal{G}\ (\varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\theta(t)) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi_\eta\ (t), t \in [\,0, T\,], \qquad (III.2.32)$$

$$\Lambda^2(\eta,\theta)(t) = \mathcal{S}(\varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\theta(t)),\ t \in [\,0, T\,]. \qquad (III.2.33)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme $III.2.5$. Pour $(\eta,\theta) \in C\ (0, T\ ; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$, la fonction $\Lambda(\eta,\theta) : [\,0, T\,] \longrightarrow \mathcal{H} \times L^2(\Omega)$ est continue et un élément unique $(\eta^*, \theta^*) \in C\ (0, T\ ; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$ tel que

$$\Lambda(\eta^*, \theta^*) = (\eta^*, \theta^*).$$

Démonstration. Soient $(\eta,\theta) \in C\ (0, T\ ; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$. et $t_1, t_2 \in [\,0, T\,]$, en utilisant $(I.2.6), (III.1.15)$ et $(III.1.18)$, nous avons

$$\begin{aligned} &|\Lambda_1(\eta,\theta)(t_1) - \Lambda_1(\eta,\theta)(t_2)|_{\mathcal{H}} \qquad (III.2.34) \\ &\qquad \le |\mathcal{G}(\varepsilon(u_\eta(t_1)), \beta_\theta(t_1)) - \mathcal{G}(\varepsilon(u_\eta(t_2)), \beta_\theta(t_2))|_{\mathcal{H}} \\ &\qquad\qquad + \left|\mathcal{E}^*\nabla\varphi_\eta(t_1) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_\eta(t_2)\right|_{\mathcal{H}} \\ &\le C\left(|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)|_V + \left|\varphi_\eta(t_1) - \varphi_\eta(t_2)\right|_W + |\beta_\theta(t_1) - \beta_\theta(t_2)|_{L^2(\Omega)}\right). \end{aligned}$$

Après, en raison de la régularité de u_η et φ_η exprimée dedans $(III.2.1)$, $(III.2.2)$ et $(III.2.3)$ respectivement, nous déduisons de $(III.2.22)$ que $\Lambda_1(\eta,\theta) \in C\ (0, T\ ; V)$ du même argument, de $(III.2.21)$ et $(III.1.15)$ vient que

$$\begin{aligned} &|\Lambda_2(\eta,\theta)(t_1) - \Lambda_2(\eta,\theta)(t_2)|_{L^2(\Omega)} \qquad (III.2.35) \\ &\le C\left(|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)|_V + |\beta_\theta(t_1) - \beta_\theta(t_2)|_{L^2(\Omega)}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent $\Lambda_2(\eta,\theta) \in C\ (0,T\ ; L^2(\Omega))$ et $\Lambda\ (\eta,\theta) \in C\ (0,T\ ;\mathcal{H} \times L^2(\Omega))$. Soient $(\eta_1,\theta_1),(\eta_2,\theta_2) \in C\ (0,T\ ;\mathcal{H} \times L^2(\Omega))$.

On utilise la notation $g^*_{\eta_i} = g_i,\ \sigma_{\eta_i} = \sigma_i,\ u_{\eta_i} = u_i,\ \dot{u}_{\eta_i} = \upsilon_{\eta_i} = \upsilon_i,\ \varphi_{\eta_i} = \varphi_i$ et $\beta_{\theta_i} = \beta_i$, $i = 1,2$

De la même manié que pour établir $(III.2.20)$ et $(III.2.23)$ on trouve

$$\begin{aligned} &|\Lambda(\eta_1,\theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2,\theta_2)(t)|^2_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)} \\ \leq C&\left(|u_1(t) - u_2(t)|^2_V + |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|^2_W + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)}\right) \end{aligned} \tag{III.2.36}$$

soit

$$u_i(t) = \int_0^t \upsilon_i(s)\,ds + u_0.$$

Nous avons

$$|u_1(t) - u_2(t)|^2_V \leq C\int_0^t |\upsilon_1(s) - \upsilon_2(s)|^2_V\,ds, \forall t \in [0,T]. \tag{III.2.37}$$

il vient de $PV_{\eta g}$ pour $\eta = \eta_i$, $i = 1,2$ que

$$\sigma_i(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\upsilon_i(t))) + \eta_i(t) \qquad \forall t \in [0,T], \tag{III.2.38}$$

$$\begin{aligned} (\sigma_i(t),\varepsilon(\upsilon - \upsilon_i(t)))_{\mathcal{H}} + j(g_i(t),\upsilon) - j(g_i(t),\upsilon_i(t)) \\ \geq (f(t),\upsilon - \upsilon_i(t))_V \quad , \quad \forall t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{III.2.39}$$

En utilisant $(III.2.39)$ nous trouvons que

$$\begin{aligned} (\sigma_1(t) - \sigma_2(t),\varepsilon(\upsilon_1(t) - \upsilon_2(t)))_{\mathcal{H}} \leq j(g_1(t),\upsilon_2(t)) - j(g_1(t),\upsilon_1(t)) \\ +j(g_2(t),\upsilon_1(t)) - j(g_2(t),\upsilon_2(t)) \quad \forall t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{III.2.39}$$

On utilise $(III.2.16)$ et fonction j, on obtient

$$\begin{aligned}&(\sigma_1(t)-\sigma_2(t),\varepsilon(v_1(t)-v_2(t)))_{\mathcal{H}}\\ &\le C_0^2\,|\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)}\left(|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)}+1\right)|g_1(t)-g_2(t)|_V\,|v_1(t)-v_2(t)|_V\,.\end{aligned}$$

On utilise la notation $v_i=g_i$ pour $i=1,2$, on trouve

$$\begin{aligned}&(\sigma_1(t)-\sigma_2(t),\varepsilon(v_1(t)-v_2(t)))_{\mathcal{H}}\\ &\le C_0^2\,|\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)}\left(|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)}+1\right)|v_1(t)-v_2(t)|_V^2\quad \forall t\in[0,T]\,.\end{aligned}$$

on utilise dans $(III.2.38)$,$(III.1.13)$ et $(III.1.14)$, on obtient

$$\begin{aligned}&\left(m_{\mathcal{A}}-C_0^2\,|\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)}\left(|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)}+1\right)\right)|v_1(t)-v_2(t)|_V\\ &\qquad\le|\eta_1(t)-\eta_2(t)|_{\mathcal{H}}\quad\forall t\in[0,T]\,.\end{aligned}$$

Nous utilisons les trois inégalités précédentes pour trouver

$$|v_1(t)-v_2(t)|_V^2\le C\ \ |\eta_1(t)-\eta_2(t)|_V^2\,. \qquad (III.2.40)$$

Nous utilisons maintenant $(III.2.25)$,$(I.2.7)$,$(III.1.17)$ et$(III.1.18)$ pour obtenir:

$$|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|_W^2\le C\,|u_1(t)-u_2(t)|_V^2\,. \qquad (III.2.41)$$

D'autre part, de $(III.2.16)$ nous déduisons que

$$\begin{aligned}&\left(\dot\beta_1-\dot\beta_2,\beta_1-\beta_2\right)_{L^2(\Omega)}+a\,(\beta_1-\beta_2,\beta_1-\beta_2)\\ &\qquad\le(\theta_1-\theta_2,\beta_1-\beta_2)_{L^2(\Omega)}\;p.p\;.t\in[\,0,T\,]\,.\end{aligned}$$

En intégrant l'inégalité précédente par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\beta_1(0)=\beta_2(0)=\beta_0$ et l'inégalité $a\ (\beta_1-\beta_2,\beta_1-\beta_2)\ge 0$ on obtient

$$\frac{1}{2}\,|\beta_1(t)-\beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2\le\int_0^t(\theta_1(s)-\theta_2(s)\,,\beta_1(s)-\beta_2(s))_{L^2(\Omega)}\,ds\ .$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}|\beta_1(t)-\beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2\quad&\le\textstyle\int_0^t|\theta_1(s)-\theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2\,ds\\ &\quad+\textstyle\int_0^t|\beta_1(s)-\beta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2\,ds.\end{aligned}$$

Cette inégalité combinée avec l'inégalité de Gronwall nous donne

$$|\beta_1(t)-\beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\int_0^t |\theta_1(s)-\theta_2(s)|^2_{L^2(\Omega)}\,ds \quad \forall t\in[\,0,T\,]. \tag{III.2.42}$$

nous substituons $(III.2.27)$ dans $(III.2.24)$ et nous utilisons $(III.2.25)$ pour obtenir:

$$\begin{aligned}&|\Lambda(\eta_1,\theta_1)(t)-\Lambda(\eta_2,\theta_2)(t)|^2_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)}\\ &\leq C\left(\int_0^t |v_1(s)-v_2(s)|^2_V\,ds \;+|\beta_1(t)-\beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Il vient de l'inégalité précédente, des estimations $(III.2.40)$ et $(III.2.42)$ que

$$\begin{aligned}&|\Lambda(\eta_1,\theta_1)(t)-\Lambda(\eta_2,\theta_2)(t)|^2_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)}\\ &\leq C\int_0^t |(\eta_1,\theta_1)(s)-(\eta_2,\theta_2)(s)|^2_{\mathcal{H}\times L^2(\Omega)}\,ds.\end{aligned}$$

En réitérant cette inégalité m fois on obtient:

$$|\Lambda^m(\eta_1,\theta_1)-\Lambda^m(\eta_2,\theta_2)|^2_{C(0,T\,;\mathcal{H}\times L^2(\Omega))} \leq \frac{C^mT^m}{m!}\,|(\eta_1,\theta_1)-(\eta_2,\theta_2)|^2_{C(0,T\,;\mathcal{H}\times L^2(\Omega))}\,ds,$$

ainsi, pour m suffisant grand Λ^m est une contraction sur l'espace de Banach $C\left(0,T\,;\mathcal{H}\times L^2(\Omega)\right)$, donc Λ a un point fixe unique.

Maintenant on peut démontrer le Théorème $III.2.1$.

Démonstration. de l'existence. Soit $(\eta^*,\theta^*)\in C\left(0,T\,;\mathcal{H}\times L^2(\Omega)\right)$ est un point fixe de Λ défini par $(III.2.31)-(III.2.32)$ et (υ,σ) sont des solutions du problèmes $PV_{\eta g}$ pour $\eta=\eta^*$et $g=g^*_{\eta^*}$ i.e(2.24) $u=u_{\eta^*}$.Soit $\varphi=\varphi_{\eta^*}$ et $\beta=\beta_{\theta^*}$des solutions du problèmes QV_η et PV_θ pour $\eta=\eta^*$et $\theta=\theta^*$. Les équations $\Lambda^1(\eta^*,\theta^*)(t)=\eta^*$et $\Lambda^2(\eta^*,\theta^*)(t)=\theta^*$ se combinent avec $(III.2.32)-(III.2.33)$ voir $(III.1.38)-(III.1.42)$ qui sont satisfait. Aprés $(III.1.43)$ et les régularités $(III.2.2)-(III.2.6)$ suivent les lemmes et $(III.1.42)$.

Unicité. la solution unique est la conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par $(III.2.31)-(III.2.32)$ et l'unicité de la solution des problème $PV_{\eta g}$, QV_η et PV_θ., QV_η et $PV_\theta\theta=\theta^*$,

Bibliographie

[1] G. Duvaut and J.L. Lions, Les Inéquations en Mécanique et en Physique, Springer-Verlag, Berlin (1976).

[2] H. Brézis, Equations et Inequations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier, 18 (1968), 115-175.

[3] J. L. Lions, Quelques Méthodes de résolutions des Problemes aux Limites Non Linéaires, Dunod et Gauthier-Villars (1969).

[4] J.R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, Analysis and Numerical Simulations of A Dynamic Contact Problem with Adhesion, Math. Comput Modelling 37 (2003), 1317-1333.

[5] K.T. Andrews and M. Shillor, Dynamic Contact of the Membrane, Adv. Math. Sci. Appl. 13(2003), 343-356.

[6] K.T. Andrews, L. Chapman. J.R. Fisackerly, M. Shillor, L. Vanerian and T.Van.

[7] L. jiani, M. Shillor and M. Sofonea, A Viscoelastic Bilateral Frictionless Contact Problem with Adhesion, Applic. Anal 80 (2001), 233-255.

[8] N. Cristescu, Drawing through canonical dies, An Analysis Compared with Experiments, Int. Mech. Sci. Vol.18, No.1, (1976), 45-49.

[9] M. Dalah and M. Sofonea Antiplane frictional contact of electro-viscoelasticity cylinders, EDJE, Vol. 2007 (2007), No. 161, 1-14.

[10] M. Frémond, Adhérencec des Solides, J. Mécanique Théorique et Appliquée (1987),383-407.

[11] M. Frémond and B. Nedjar, Damage, gradient of damage and principle of virtual work, KL. Solides Structures, 33 (8), (1996), 1083-1103.

[12] M. Frémond and B. Nedjar, Damage in concrete: The Unilateral Phenomenon, Nuclear Engng. Design, 156, (1995), 323-335.

[13] M. Frémond, Equilibre des Structures Qui Adhèrent à leur Support, C. R. Acad. Sci. Paris, Série II 295 (1982), 913-916.

[14] M. Frémond, KL. Kuttler and M. Shillor, One Dimensional Models of Damage, Adv. Math. Sci. Appl.(1998).

[15] M. Frémond, KL. Kuttler, B. Shillor, Existence And Uniqueness of solutions For a One Dimensional Model,J. Math. Anal. Appl.(1999).

[16] M. Raous, Gangémi and M. Cocu, A Consistent Model Coupling Adhesion, Friction and Unilateral Contact, Comput. Meth. Engn. 177(1999), 83-399

[17] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, Quasistatic Nonlinear Viscoelastic Contact with Normal Compliance and Friction, Journal of Elastcity, 51(1998), 105-126.

[18] N. Cristescu, Drawing through canonical dies, An Analysis Compared with Experiments, Int. Mech. Sci. Vol.18, No.1, (1976), 45-49.

[19] N. Cristescu et I. Suliciu, Viscoplasticity, Martinus Nirjhoff, Editura Technica, Bucharest(1982).

[20] N.Stromberg, Continuum thermodynamics of contact, friiction and wear, Thesis No. 491, Department of Mechanical Engineering, Linkoping Institute of Technology, Linkoping, Sweden(1995).

[21] N. Stromberg, L. Johansson and A. Klarbring, Derivation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear Int. J.Solids Solids Structures(1996).

[22] O. Chau, M. Shillor and M. Sofonea, Dynamic Frictionless Contact with Adhesion, J. Appl.Math. Phys. (ZAMP) 55 (2004), 32-47.

[23] P. Bisenga, F. Lebon and F. Maceri, The unilateral frictional contact of piezoelectric body with a rigid support, in Contact Mechanics, J.A.C. Martins and Manuel D. P. Monteiro Marques (Eds), Kluwer, Dordrecht, (2002),347-354.

[24] R. C. Batra and J. S. Yang, Saint venant's principle in linear piesoelectricity, Journal of Elasticity 38 (1995), 209-218.

[25] R.S.Adams, Sobolev espace, Academic Press, London (1975).

[26] Selmani Lynda, An electro-viscoelastic Contact Problem with normal damped reponse, friction and damage, 18 (2008), pag 307-226.

[27] Selmani Lynda, Thése de doctoral d'état, étude variationnelle de quelques problèmes aux Limites en viscoélasticité et viscoplasticité, Unuversité F. Abbas de Sétif, (2002).

[28] Selmani Mohamed, B. Merouani, Lynda Selmani, Analysis of Class of Frictional Contact Problems for the Bingham Fluid, Mediterr.j. 2 (2005), 113-124.

[29] Selmani Mohamed, Selmani Lynda, Analysis of a frictional Contact Problem with wear and damage for electro-viscoelastic materails, Applications of Mathematics, 55 (2010), 289-109.

[30] V. Barbu and Th Precupanu, Convexity and Optimisation in Banach Spaces, Sijthoff and Noordhoff (1978).

[31] W. Han, K.L. Kuttler, M. Sillor and M. Sofonea, Elasti Beam in Adhésive Contact, Int. J. Solides Structures 39 (2002), 1145-1164.

[32] W. Han, M. Shillor and M. Sofonea, Variational and Numerical Analysis of A Quasistic Viscoelastic Problem with Normal Compliance, Friction and Damage, J. Comput. Appl. Math(2001).