وزارة التعليــم العالــي والبحــث العلمــي

Sétif 1 University-Ferhat ABBAS
Faculty of Sciences
Department of mathematics

Setif 1 University - Ferhat ABBAS

FACULTY OF SCIENCES

Dr. Fouzia BOUZEGHAYA

Mathématiques pour Chimistes et Physiciens

Cours de Mathématiques Appliquées

Deuxième année licence LMD

Campus El Bez

Mai 2024

Mathématiques pour Chimistes et Physiciens

Cours de Mathématiques Appliquées

Deuxième année licence LMD

Dr. Fouzia BOUZEGHAYA

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences

Université Setif 1- Ferhat Abbas

Campus El Bez, Sétif

Mai 2024

Introduction

L'esprit de ce cours peut s'inscrit devant la nécessité de fournir, dans un langage simple, les Outils Mathématiques exigés par les différentes disciplines (Technologie, Chimie, Biologie, Econométrie, ...) pour décrire et contrôler les phénomènes réels, que nous avons décidé de présenter ces notes de cours. Ils résultent d'un enseignement de dix années à l'université Farhat Abass, Sétif 1-Algérie.

Ce polycopie est conçu pour être un support utile pour les étudiants de la deuxième années physique et chimie, troncs communs d'ingéniorat et licence Mathématiques. Ce polycopie est composé de cinq chapitres.

Chaque chapitre commence par un exposé des définitions, principes et théorèmes est illustré par de nombreux exemples et des applications.

Le premier chapitre est consacré aux intégrales, le second aux équations différentielles, le troisième aux séries numériques, de fonctions et séries entières. Le quatrième chapitre aux séries de Fourier. Enfin, le dernier chapitre est consacré à la transformation de Laplace et ces applications. On espère que nos chers étudiants sauront en tirer un meilleur profit.

Contenu du Cours

CHAPITRE V : Transformations de Laplace

Chapitre 1

Les Intégrales

1.1 Les intégrales définies

1.1.1 Quelques définitions

1. Somme intégrale :

Soit $f(x)$ une fonction définie et bornée sur $[a,\ b]$ avec :

$$a = x_0 < x_1 < \ \dots \ < x_n < x_{n+1} = b$$

une partition arbitraire en n parties (Fig1). On appelle somme intégrale de la fonction $f(x)$ du $[a,\ b]$ toute somme de la forme :

$$S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{1}$$

oũ $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$, et $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $0 \leq i \leq n$.

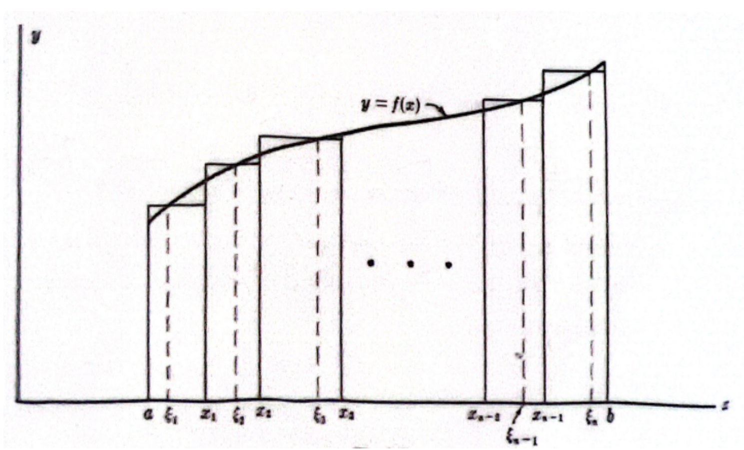


Figure 1

Géométriquement, S_n représente l'aire de toute les réctangles de la figure ci- dessues (S_n est la sommes des surfaces de n réctangle).

2. Intégrale définie (Intégrale au sens de Riemann) :

La limite de la somme S_n quand le nombre de partitions $n \to +\infty$ et $\Delta x_i \to 0$ s'appele **intégral définie** de $f(x)$ entre a et b, nous noterons cette limite

$$\lim_{n\to\infty} S_n = I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

La limite (2) existe quand $f(x)$ est continue sur $[a,\ b]$, on dit que $f(x)$ est intégrable au sens de Riemann. Géométriquement la valeur de cette intégrale représente l'aire limitée par la courbe $y = f(x)$, l'axe des x et les droites verticales $x = a$ et $x = b$.

3. Propriétés :

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions intégrables sur $[a,\ b]$, alors :

1. $\int_a^a f(x)dx = 0.$
2. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,\ c \in [a,\ b]$.
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$
4. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$
5. $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx,\ \lambda \in \mathbb{R}.$
6. Si $a \leq x \leq b$ et $m \leq f(x) \leq M$, où $m,\ M$ sont deux constantes, on a

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

7. Si $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq g(x)$, on a $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.On dit que l'application $f \to I(f)$ est croissante.

8. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$

1.2 Les intégrales indéfinies

1.2.1 Primitive d'une fonction

Théorème 1 : Soit $f(x)$ une fonction continue de $[a,\ b]$. On dit qu'une fonction dérivable $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ si

$$\forall x \in [a,\ b], \quad F'(x) = f(x).$$

Théorème 2 : $F(x)$ étant une primitive de la fonction continue $f(x)$ sur $[a,\ b]$, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

1.2.2 Intégrale indéfinie

Définition : on appelle intégrale **indéfinie** de la fonction $f(x)$ et on note $\int f(x)dx$, toute expression de la forme $F(x) + c$ où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ et c est une constante arbitraire.
Ainsi, par définition $\int f(x)dx = F(x)+c$, si $F'(x) = f(x)$.
plus, l'intégrale indéfinie représente une famille de fonctions $y = F(x) + c$.

Remarque

Toutes les propriètés de l'intégrale définie restent vraies pour les intégrales indéfinie.

1.2.3 Méthodes d'intégrations

1. **Changement de variable :** Soit à calculer l'intégrale $\int f(x)dx$.

En posant $x = \varphi(t)$, où $\varphi(t)$ est une fonction continue dérivable inversible, on a :

$$\int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right].\varphi'(t)dt$$

Exemple : Calculer $\int x\sqrt{1-x}dx$.

sons $t = \sqrt{1-x}$; on a $t^2 = x - 1$ et $x = t^2 + 1 \Longrightarrow dx = 2t\ dt$.

Alors

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1-x}dx &= \int (t^2+1)t^2 2dt = 2\int (t^4+t^2)dt = 2/5t^5 + 2/3t^3 + c \\ &= 2/5(x-1)^{5/2} + 2/3(x-1)^{3/2} + c.\end{aligned}$$

Remarque 2 : Dans certains cas il n'est même pas necessaire d'expliquer le changement de variable. Par exemple

$$\begin{cases} \int \tan dx = \int \dfrac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \dfrac{d(\cos x)}{\sin x} = -\ln|\cos x| + c. \\ \int \cot x dx = \int \dfrac{\cos x}{\sin x}dx = \int \dfrac{d(\sin x)}{\cos x} = \ln|\sin x| + c. \end{cases}$$

2. Intégrales de quelques fonctions élémentaires

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c.$
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$
3. $\int \cos x dx = \sin x + c.$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + c.$
5. $\int \dfrac{dx}{(\cos x)^2} = \tan x + c.$
6. $\int \dfrac{dx}{(\sin x)^2} = -\cot x + c.$
7. $\int \tan dx = -\ln|\cos x| + c.$
8. $\int \cot dx = \ln|\sin x| + c.$

9. $\int e^x dx = e^x + c$.

10. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln|a|} + c$, $a \neq 1$.

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$.

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$.

13. $\int sh\,(x)\,dx = ch\,(x) + c$.

14. $\int ch\,(x)\,dx = sh\,(x) + c$.

3. Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables, on a :

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Exemples

1- $I = \int x \sin x dx$

On pose $u = x$ et $dv = \sin x$, on a $du = dx$ et $v = -\cos x$. Alors,

$$\begin{aligned} I &= \int x \sin x dx = -x\cos x + \int \cos x dx. \\ &= -x\cos x - \sin x + c. \end{aligned}$$

2- $J = \int \arctan dx$

On pose $u = \arctan x$ et $dv = dx$, on a $du = \dfrac{1}{1+x^2}dx$, et $v = x$. Alors,

$$\begin{aligned} J &= \int \arctan dx = x\arctan x - 1/2 \int \frac{2x}{1+x^2}dx \\ &= x\arctan x - 1/2\ln(1+x^2) + c \end{aligned}$$

4. Fractions rationnelles :

-Si $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est une fraction rationnelle, oũ $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes, dont le degré de $P(x)$ est plus petit que celui de $Q(x)$. En décomposant les fractions élémentaires nous devons avoir :

$$\frac{A}{(ax+b)^r}, \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^r}, \text{ où } r = 1, 2, ...,$$

qui peuvent toujours être intégrées au moyen des fonction élémentaires :

Exemple

$$I = \int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} dx.$$

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

$$A = \lim_{x\to 1}(x-1)\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = 1/4.$$

$$C = \lim_{x\to -1}(x+1)^2\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = 1/2.$$

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1/4}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{1/2}{(x+1)^2}$$

Pour $x = 0$, on a $0 = -1/4 + B + 1/2$, donc $B = -1/4$. Enfin

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} dx = 1/4 \int \frac{dx}{x-1} - 1/4 \int \frac{dx}{x+1} + 1/2 \int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= 1/4 \ln|x-1| - 1/4 \ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + c \\ &= 1/4 \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2(x+1)} + c. \end{aligned}$$

5. Les fonctions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$

Posons $tg\dfrac{x}{2} = t$, ona

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}. \end{cases}$$

Exemple :

$$I = \int \frac{dx}{1+\cos x + \sin x}$$

Posons $tg\dfrac{x}{2} = t$, alors

$$I = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + c = \ln\left|1 + tg\frac{x}{2}\right| + c.$$

6. Les fonctions rationnelles en e^x

Posons

$$t = e^x \Longrightarrow dt = e^x dx.$$

Exemple :

Pour $t = e^x$, on a $dt = e^x dx$, et par conséquent

$$I = \int \frac{dx}{1+e^x}.$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dt}{t(1+t)} \\ &= \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{(1+t)} \\ &= \ln\left|\frac{t}{1+t}\right| + c \\ &= \ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| + c. \end{aligned}$$

7. Les intégrales de la forme $\int \cos^{(2n+1)} x dx,\ \int \sin^{(2n+1)} x dx,\ n \in \mathbb{Z}^+$.

- Il est commode d'introduire la fonction auxiliaire de $\sin x$ dans le premier cas et $\cos x$ dans le second.

Exemples :

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}.\quad \int \cos^3 x dx &= \int (1-\sin^2 x) d(\sin x) \\
&= \int d(\sin x) - \int \sin^2 x d(\sin x) \\
&= \sin x - 1/3 \sin^3 x + c.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{2}.\quad \int \sin^5 x dx &= \int \sin^4 \sin x dx \\
&= -\int (1-\cos^2 x)^2 d(\cos x) \\
&= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) d(\cos x) \\
&= -\cos x + 2/3 \cos^3 x - 1/5 \cos^5 x + c.
\end{aligned}$$

8. Les intégrales de la forme $\int \cos^{2n} x dx,\ \int \sin^{2n} x dx,\ n \in \mathbb{Z}^+$.

- Il est commode d'utiliser les formules :

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\ \ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$

et introduire la fonction auxiliaire de $\cos 2x$.

Exemple

$$\mathbf{1}. \int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c.$$

$$\mathbf{2}.\ \int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \int \frac{1}{4}dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx$$
$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)dx$$
$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c.$$

1.2.4 Applications des intégrales définies

Calcul d'Aire

Exemple 1 :

Calculer l'aire délimitée par les courbes (Fig 2), $y=\sqrt{x}$ et $y = x^2$.

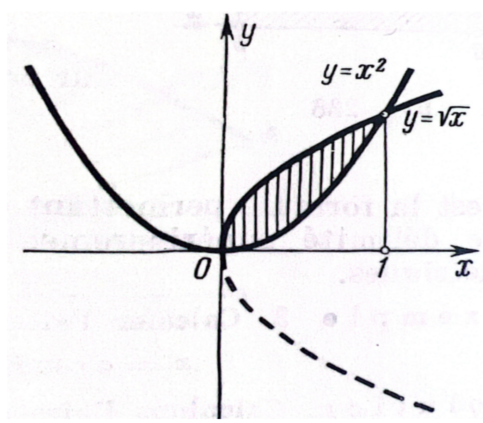


Figure 2

Solution :

Trouvons les points d'intersection des courbes : $\sqrt{x} = x^2$, $x = x^4$, d'où $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Par conséquent l'aire cherchée est la partie hachée de Fig 2, donner par l'integrale définie :

$$A=\int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \text{ unité de surface.}$$

Exemple 2 :

Trouver la plus petite surface comprise entre le cercle $x^2 + y^2 = 25$ et la droite $x = 3$.

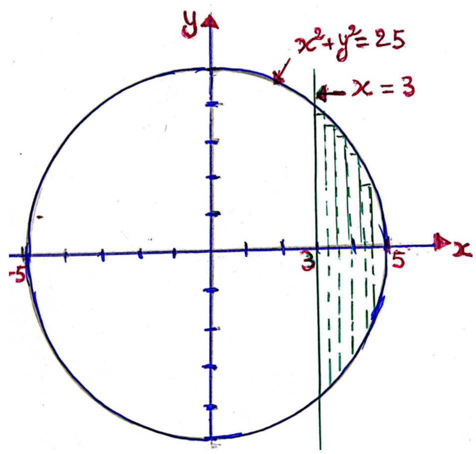


Figure 3

La surface cherchée est la partie hachée de Fig 3, donner par l'intégrale définie :

$$S = 2\int_3^5 ydx = 2\int_3^5 \sqrt{25 - x^2}dx.$$

Cas général :

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c.$$

Alors :

$$\begin{aligned} S &= 2\left[\frac{25}{2}\arcsin\frac{x}{5}+\frac{x}{2}\sqrt{25-x^2}\right]_3^5 \\ &= 2\left[\frac{25}{4}\pi-\frac{12}{2}\right]=\frac{25}{2}\pi-12 \text{ unité de surface.} \end{aligned}$$

Calcul de longueur d'un arc de courbe

Exemple :

Trouver la longueur de l'arc de la parabole $y = x^2$ de $x = 0$ à $x = 1$.

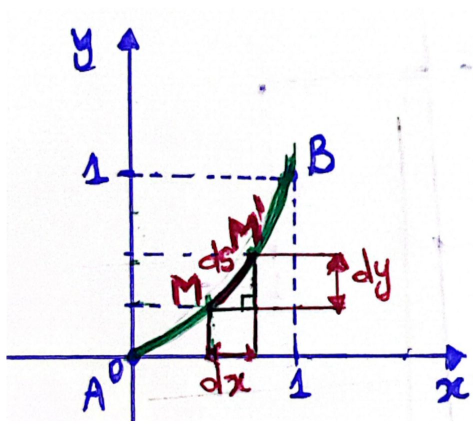


Figure 4

La longueur cherchée est donnée par l'intégrale définie :

$$s = \int_{\widehat{AB}} ds.$$

Soient les points : $M(x, f(x))$, $M'(x + dx, f(x + dx))$; d'aprés Fig 4, on a $\widehat{MM'} = [MM']$, alors :

$$\begin{aligned} ds &= l(\widehat{MM'}) = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}} \\ ds &= dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + f'^2}dx. \end{aligned}$$

La longueur demandée est donc :

$$\begin{aligned} s &= \int_B^A ds = \int_B^A \sqrt{1 + f'^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}dx. \end{aligned}$$

Pour calculer l'intégrale, on pose $t = 2x$, donc $dt = 2dx$, alors $\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow t = 0, \\ x = 1 \Longrightarrow t = 2, \end{cases}$

par suite, en utilisant

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c,$$

on en déduit

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1 + t^2}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t(\sqrt{1 + t^2}) + \frac{1}{2}\ln(t + \sqrt{1 + t^2})\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln(2 + \sqrt{5}) \text{ Unité de longueur.} \end{aligned}$$

Calcul de Volume

Exemple :

Soit la surface limitée par la parabole $y^2 = 8x$, par la droite $x = 2$ et par l'axe des x. Calculer le volume engendré par la rotation de cette surface autoure de l'axe des x.

Solution :

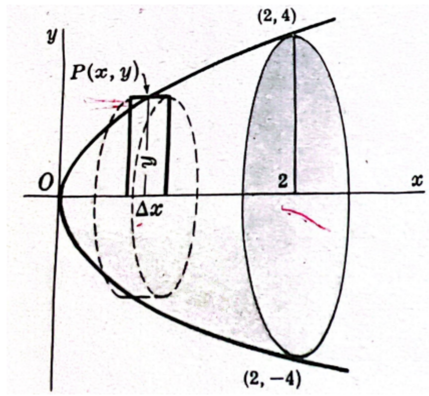


Figure 5

On utilise un découpage en bandes verticales, comme dans la figure 5. Quand le rectangle d'approxiation de la figure 5 tourne autour de l'axe de x, il engendre un disque, dont le rayon est y, la hauteur Δx, et le volume $\pi y^2 \Delta x$, la somme des volume des n disque, correspondant aux n réctangles d'approximation, est $\sum \pi y^2 \Delta x$ et le volume cherché est donné par :

$$V = \int dV = \int_0^2 \pi y^2 dx = \pi \int_0^2 8x dx = 4\pi x^2 \Big|_0^2 = 16\pi \text{ unité de volume.}$$

1.3 Intégrale Multiple

1.3.1 Intégrale double :

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables x et y supposée continue sur D sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ (Figure 6). On distingue trois cas :

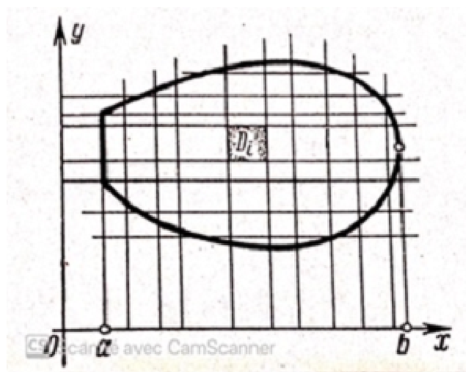


Figure 6

a) Si $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b,\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ .On a

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \right) dx. \tag{3}$$

b) Si $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d,\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$ .On a

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx \right) dy. \tag{4}$$

Si $D = [a,\ b] \times [c,\ d]$ (Pavé réctangle). On a

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_b^a \left(\int_c^d f(x,y)y \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \qquad (5)$$

Remarque :

1- Si $f(x) = F(x) \times G(y)$ et $D = [a,\ b] \times [c,\ d]$, on a

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \left(\int_b^a F(x)dx \right) \left(\int_c^d G(y)dy \right).$$

2- Si $f(x,y) = 1$ sur D, on a

$$I(f) = \int \int_D dxdy = \int_D dA = \text{Aire de } D.$$

3- Si $f(x,y) \neq 1$, alors l'intégrale double de f est la mesure de volume limité par la surface (S) representant de $f(x,y)$ dans $\mathbb{R}^2$, le plan xoy et le cylindre de section droite D.(voir figure 7).

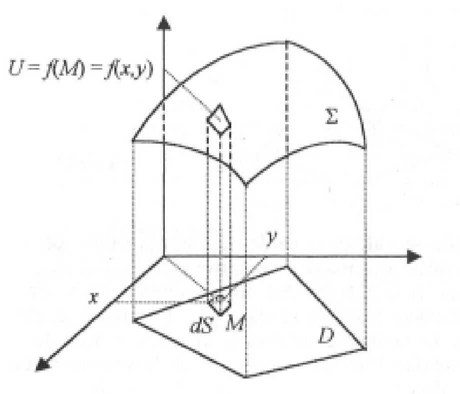


Figure 7

Exemple :

Calculer

$$I = \iint_D (x+y)dxdy,$$

où

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\right\}.$$

On a

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 \int_{x^2}^x (x+y)dxdy \\
&= \int_0^1 \left[\int_{x^2}^x (x+y)dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \left(\left(xy + 1/2y^2\right)\right]_{x^2}^x\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(3/2x^2 - x^3 - x^4/2\right) dx \\
&= x^3/2 - x^4/4 - x^5/10\Big]_0^1 = 3/20.
\end{aligned}$$

1.3.2 Passage en coordonées polaires

En posant

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ dxdy = rdrd\theta \end{cases} .\ r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

on a

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_\triangle f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta,$$

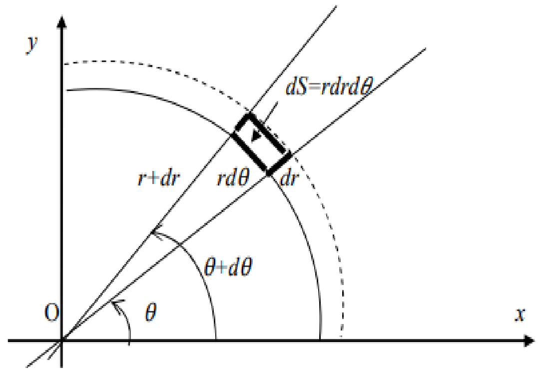


Figure 8 : Elément de surface ds en coordonnées polaires

Exemple :

Calculer $I = \iint_D (x^2+y^2)dxdy$, avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/,\ x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$.

Pour cela, on considère le demi-disque D de centre $(0,0)$ et de rayon $r = 1$,et on passe en coordonnées polaires (θ, r) en posant

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ dxdy = rdrd\theta \end{cases}.$$

On a

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \Longrightarrow\ (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq r \leq 1. \\ y \geq 0 \Longrightarrow r\sin\theta \geq 0 \Longrightarrow \sin\theta \geq 0 \Longrightarrow \theta \in [0.\ \pi]. \end{cases}$$

On obtient, par conséquent

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 \int_0^\pi ((r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2) rdrd\theta. \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi r^3 d\theta dr = \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 \theta|_0^\pi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

1.3.3 Application des intégrales doubles au calcul d'aires et de volumes

Exemple 1 : Calculer l'aire de la région du plan xOy délimitée par les courbes : $2y = 16 - x^2$ et $x + 2y = 4$.

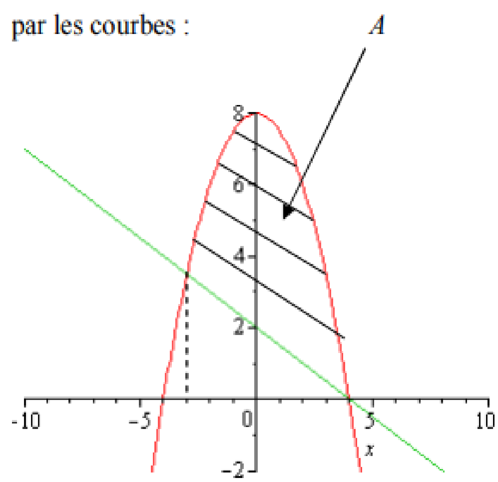


Figure 9

Solution :

Lorsque x varie entre -4 et 4, y varie entre $y_{\min} = \dfrac{1}{2}(4 - x)$ et $y_{\max} = \dfrac{1}{2}(16 - x^2)$.

Alors l'aire cherchée est la partie hachée de la figure 3 donnée par l'intégrale double suivant :

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^{4} \left[\int_{\frac{1}{2}(4-x)}^{\frac{1}{2}(16-x^2)} dy \right] dx = \int_{-4}^{4} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 6 \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 6x \right]_{-4}^{4} = \frac{80}{3} \text{Unité de surface.} \end{aligned}$$

Exemple 2 : Calculer l'aire du domaine limité par les courbes

$$y = 2 - x^2, y = x.$$

Solution :

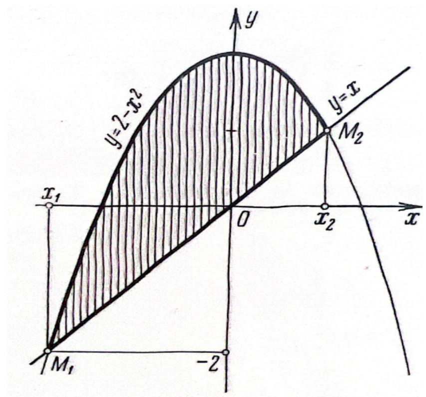


Figure 10

Déterminons les points d'intersection des courbe données (Fig 10). Les ordonnées des deux courbes sont égales en un point d'intersection :

$$\begin{aligned} x &= 2 - x^2 \\ &\Longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \\ &\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Nous avons obtenu deux points d'intersection : $M_1(-2, -2)$, $M_1(1, 1)$. L'aire cherchée est donc

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{1} \left(\int_{x}^{2-x^2} dy \right) dx \\ &= \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x) dx \\ &= [2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Exemple 3 :

Calculer le volume du corps limité par les surfaces $x = 0$, $y = 0$, $x + y + z = 1$, $z = 0$.

Solution :

$$V = \iint_D (1 - x - y)dydx,$$

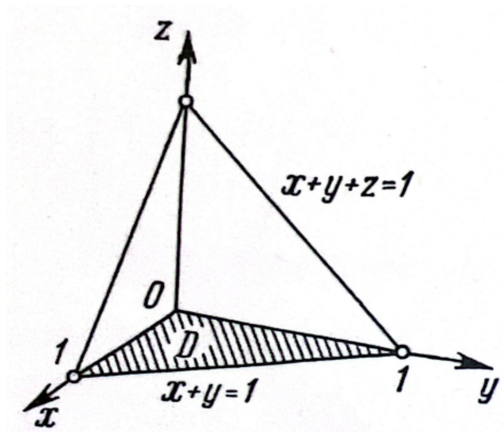


Figure 11

où D est le domaine triangulaire du plan Oxy limité par les droites $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$; c'est le domaine hachuré de la figure 11. On a :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)dydx \\ &= \int_0^1 \left[(1 - x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - x)^2 dx = \frac{1}{6} \text{ unité de volume.} \end{aligned}$$

1.3.4 Intégrale Triple

Soit $f(x, y, z)$ une fonction de trois variables x, y et z supposée continue sur D sous ensemble de $\mathbb{R}^3$.

On distingue trois cas :

a) Si $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x,\ y) \in \triangle,\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$, on a

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_\triangle \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy. \tag{5}$$

b) Si $D = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 / e \leq z \leq f,\ \ (x,\ y) \in \triangle_z\}$, on a

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_e^f \left(\iint_{\triangle_z} f(x,y,z)dxdy \right) dz. \tag{6}$$

c) Si $D = [a,\ b] \times [c,\ d] \times [e,\ f]$ (Parallélépipède), on a

$$\begin{cases} \iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx \\ \qquad\qquad\qquad\quad = \int_a^b \left(\int_e^f \left(\int_c^d f(x,y,z)dy \right) dz \right) dx \\ \qquad\qquad\qquad\quad = \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)dx \right) dy \right) dz. \end{cases} \tag{7}$$

Remarques

1- Si $f(x,\ y,\ z) = F(x) \times G(y) \times H(z)$ et $D = [a,\ b] \times [c,\ d] \times [e,\ f]$, on a

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \left(\int_b^a F(x)dx \right) \left(\int_c^d G(y)dy \right) \left(\int_e^f H(z)dz \right).$$

2 - Si $f(x, y, z) = 1$, on a

$$\iiint_D dxdydz = \int_D dV = \text{volume de } D.$$

3 - Si $f(x, y, z) \neq 1$, on a

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \text{Le quadri-volume sous le graphe de } f(x,y,z).$$

Comme l'intégrale triple d'une fonction continue est la mesure en 4 dimension d'un objet dans $\mathbb{R}^4$, on ne peut pas donner une illustration.

Cependant, de nombreuses interprétations physiques sont possibles, le tout dépendant des interprétations de la fonction $f(x,y,z)$, Par exemple, si $f(x,y,z)$ est la **densité** du corps au points (x,y,z), l'intégrale triple sur D donne sa masse totale

$$m=\iiint_D \rho(x,y,z)dxdydz.$$

Exemple

Calculer $I=\iiint_D xyzdxdydz$, avec $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1,\ 0\leq x\leq 1\right\}.$

Solution

la fonction $f(x,y,z)=xyz$ est à variables séparables, alors

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D xyzdxdydz=\int_0^1 xdx\times\int_0^1 ydy\times\int_0^1 zdz \\ &= \left.\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\left.\frac{1}{2}y^2\right]_0^1\left.\frac{1}{2}z^2\right]_0^1=\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Passage en coordonnées cylindriques

En posant

$$\left\{\begin{array}{c} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \\ dxdydz=rdrd\theta dz \end{array}\right. \quad r\geqslant 0,\ 0\leq\theta\leq 2\pi,$$

on a,

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\triangle f(r\cos\theta,r\sin\theta,\ z)rdrd\theta dz$$

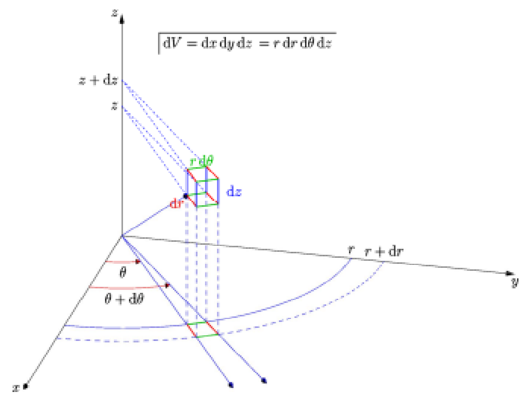


Figure 12 : Elément de volume dV en coordonnées cylindriques

Exemple Calculer le volume

$$V = \iiint_D dxdydz, \text{ avec } D = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 /\ 4z = x^2 + y^2,\ z = 4\}.$$

Solution

Le domaine D représenté par la figure 13.

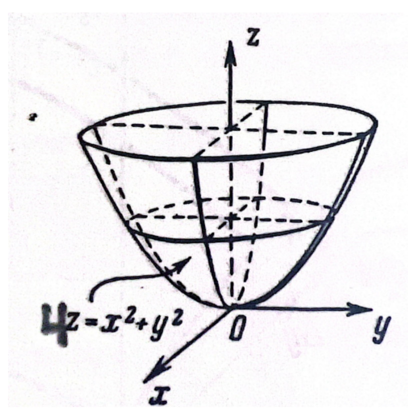


Figure 13

On utilise les coordonnées cylindriques.

En posant

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \\ dxdydz = rdrd\theta dz, \end{cases}$$

on a

$$\begin{cases} 4z = x^2 + y^2 \Longrightarrow z = \dfrac{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}{4} = \dfrac{r^2}{4} \Longrightarrow \dfrac{r^2}{4} \le z \le 4 \\ 0 \le \theta \le 2\pi, \text{ et } 0 \le r \le 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^4 \left(\int_{\frac{r^2}{4}}^4 rdz\right) drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^4 \left(rz]_{\frac{r^2}{4}}^4\right) drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \left(4r - \frac{r3}{4}\right) dr = (\theta]_0^{2\pi}) \left(2r^2 - \frac{r^4}{16}\Big]_0^4\right) = 32\pi. \end{aligned}$$

1.3.5 Passage en coordonnées sphériques

En posant

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = z\cos\theta \\ dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \end{cases} \quad r \geqslant 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,$$

on aura

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\triangle f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, z\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

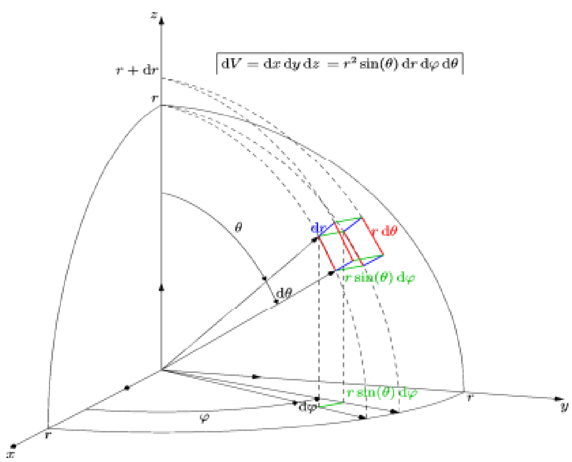


Figure 14 : Elément de volume dV en coordonnées sphériques

Exemple :

Calculer l'intégrale triple

$$I = \int\int\int_V z dx dy dz,$$

avec

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \ z \geq 0\right\}.$$

En coordonnées sphériques, l'intégrale I devient :

$$I = \int\int\int_\triangle r^3 \sin\theta \cos\theta dr d\theta d\varphi.$$

où

$$\triangle(r, \theta, \varphi) = [0, R] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi],$$

on a donc

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int\int\int_{\triangle} r^3 \sin 2\theta dr d\theta d\varphi \\
I &= \frac{1}{2}\int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\
I &= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R \times \left[\frac{-1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \times [\varphi]_0^{2\pi}\right) = \frac{\pi R^4}{4}.
\end{aligned}
$$

Exemple : Application

Chercher le volume et la masse totale du domaine limité par le cylindre parabolique $z = 4 - x^2$ et les plans $x = 0$, $y = 0$, $y = 6$ et $z = 0$, en supposant la densité constante et égale à σ.

Solution : Le domaine D est représenté par la fugure 15.

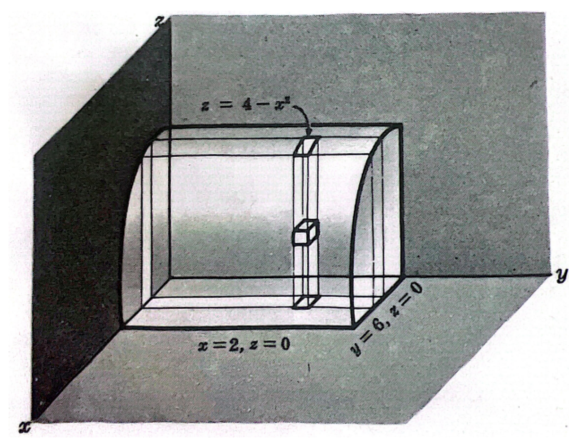


Figure 15

1) Le volume cherché est

$$\begin{aligned}
V &= \int\int\int_D dxdydz = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=0}^{4-x^2} dzdydx \\
&= \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}(4-x^2)dydx = \int_{x=0}^{2} (4-x^2)y\Big|_{y=0}^{6} dx \\
&= \int_{x=0}^{2}(24-6x^2)dx = 32 \text{ unité de volume.}
\end{aligned}$$

2) La masse totale est

$$\begin{aligned}
m &= \int\int\int_D \sigma dxdydz \\
&= \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=0}^{4-x^2} \sigma dzdydx \\
&= 32\sigma \text{ unité de masse.}
\end{aligned}$$

1.4 Intégrales Impropres

Définition : L'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ est dite **Intégrale Impropre** si :

a) La fonction $f(x)$ possède un où plusieurs points de discontinuité sur $[a,\ b]$.

b) L'une au moins des bornes d'intégration est infinie $(\pm\infty)$.

1.4.1 Intégrale d'une fonction discontinue

a) Si $f(x)$ est continue sur $[a,\ b[$, mais discontinue en $x = b$.

On définit :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt.$$

b) Si $f(x)$ est continue sur $]a,\ b]$, mais discontinue en $x = a$.

On définit :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)dt.$$

c) Si $f(x)$ est continue sur $[a,\ b]$, sauf au point $c \in]a,\ b[$.

On définit

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ &= \lim_{x\to c^+} \int_a^x f(t)dt + \lim_{x\to c^-} \int_x^b f(t)dt. \end{aligned}$$

1.4.2 Intégrale d'une fonction à bornes infinie

a) Si $f(x)$ est une fonction continue sur $[a,\ +\infty[$,

on définit :

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt.$$

b) Si $f(x)$ est une fonction continue sur $]-\infty,\ b]$,

on définit :

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{b} f(t)dt.$$

c) Si $f(x)$ est continue sur $]-\infty,\ +\infty[$,

on définit :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx \\ &= \lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{a} f(t)dt + \lim_{x\to+\infty}\int_{a}^{x} f(t)dt.\end{aligned}$$

Remarque Dans le cas où la limite existe (i.e. cette limite vaut un nombre réel unique), l'intégrale est dite **convergente.** Dans le cas contraire, l'intégrale est dite **divergente.**

Exemple 1 : Calculer $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx.$

fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ étant discontinue en $x = 0$, alors

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt \\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}(2\sqrt{t}\Big]_0^1) \\ &= \lim_{x\longrightarrow 0} 2(1-\sqrt{x}) = 2.\end{aligned}$$

Donc I_1 **converge** vers 2.

Exemple 2 : Calculer $I_2 = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx.$

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ est discontinue en $x = 3$, alors

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = \lim_{x \to 3} \frac{1}{3} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{t}{3})^2}} dt \\ &= \lim_{x \to 3} \left[\arcsin \frac{t}{3} \right]_0^x = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Donc I_2 converge vers $\dfrac{\pi}{2}$.

Exemple 3 : Calculer $I_3 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ n'est pas bornée, alors :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \arctan t]_0^x \\ &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} [\arctan x - \arctan 0] = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Donc I_3 converge vers $\dfrac{\pi}{2}$.

Exemple 4 : Calculer $I_4 = \displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2} dx$.

La fonction $f(x)$ est discontinue en $x = 0 \in [-1, \ +1]$, alors on peut écrire I_4 sous la forme :

$$I_4 = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} dx + \int_{0}^{+1} \frac{1}{x^2} dx.$$

On obtient, par conséquent

$$\begin{aligned}
I_4 &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \int_{-1}^{x} \frac{1}{t^2} dt + \lim_{x \longrightarrow 0^-} \int_{x}^{1} \frac{1}{t^2} dt \\
&= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \left[\frac{-1}{t}\right]_{-1}^{x} + \lim_{x \longrightarrow 0^-} \left[\frac{-1}{t}\right]_{x}^{1} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \left[\frac{-1}{x} + 1\right] + \lim_{x \longrightarrow 0^-} \left[1 + \frac{1}{x}\right] \\
&= -\infty + \infty
\end{aligned}$$

Donc nous avons deux intégrales divergentes, par conséquent l'intégrale I_4 diverge.

Remarque : Ils existent des critères similaires quand une borne d'intégration est $(-\infty)$, (un changement de variable $x = -y$ change la borne d'intégration en $+\infty$).

1.4.3 Critères de convergence dans le cas des fonctions positives

1. La convergence des intégrales des fonctions particulières

1. l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.
2. l'intégrale $\displaystyle\int_a^{b} \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$.
3. l'intégrale $\displaystyle\int_a^{b} \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$.
4. l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ converge si $\alpha > 0$ et diverge si $\alpha \leq 0$.

2. Critères de comparaison

Theorème :

Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions continues positives sur $[a, +\infty[$ verifiant :

$$0 < f(x) \leq g(x).$$

Alors :

- Si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.
- Si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge.

Exemple 1 : Etudier la convergence de l'intégrale

$$I = \int_a^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Pour $x > 1$, on a $e^{-x^2} < e^{-x}$,
l'intégrale $I = \int_a^{+\infty} e^{-x} dx$ converge donc $I = \int_a^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge.

Exemple 2 : Etudier la convergence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}.$$

Soit $f(x) = \frac{1}{x^2(1+e^x)}$, pour $x \geq 1$, on a $1 + e^x > 1 \Longrightarrow x^2(1+e^x) > x^2 \Longrightarrow$

$$f(x) = \frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2} = g(x),$$

alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)} < \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$converge car $\alpha = 2 > 1$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ converge également.

Théorème : Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions continues positives sur $[a, b[$,verifiant :

$$0 < f(x) \leq g(x)$$

Alors :

- Si $\int_a^b g(x)dx$ converge $\Longrightarrow \int_a^b f(x)dx$ converge.

- Si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge.

Exemple 3 : Etudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^4}.$$

On a : $1 - x^4 = (1-x^2)(1+x^2) = (1-x)(1+x)(1+x^2)$.

Pour $0 \leq x \leq 1$, on a $1 \leq 1+x < 2$ et $1 \leq 1+x^2 < 2$, on fait le produit des deux inégalités, on a

$1 \leq (1+x)(1+x^2) < 4$, d'ou

$$\begin{aligned} (1-x) &\leq (1-x)(1+x)(1+x^2) < 4(1-x) \Longrightarrow \\ f(x) &= \frac{1}{1-x^4} \geq \frac{1}{4(1-x)} = g(x), \end{aligned}$$

alors

$$\int_0^1 \frac{dx}{4(1-x)} \leq \int_0^1 \frac{dx}{1-x^4}.$$

Comme l'intégrale $\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)}$diverge car $\alpha = 1$, on en déduit que $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^4}$ diverge.

Remarque : Les résultats obtenus précedemment pour $[a,\, b[$ restent vrais pour $]a,\, b]$, avec des modifications évidentes.

3. Critère d'équivalence

Théorème :

Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions positives continues sur $[a, +\infty[$ verifiant :

$$f(x) \overset{+\infty}{\sim} g(x), \text{ (i-e } \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1),$$

alors, les intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ sont de même nature.

Remarque : Même résultat pour l'intervalle $]-\infty, b[$.

Exemple 1 : Etudier la convergence de

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}dx.$$

On a :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x} = g(x).$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge car $\alpha = 1$, donc l'intégrale I diverge aussi.

Théorème :

Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions positives continues sur $[a, b[$, verifiant :

$$f(x) \overset{b}{\sim} g(x),\ (\text{i-e } \lim_{x \longrightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1),$$

alors les intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ sont de même nature.

Remarque : Même résultat pour $]a, b]$.

Exemple 2 : Etudier la convergence de

$$I = \int_a^b \frac{x}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}dx.$$

Pour $x \longrightarrow b$, on a

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} \overset{b}{\sim} \frac{\frac{b}{\sqrt{(b-a)}}}{\sqrt{(x-b)}} = \frac{k}{\sqrt{(x-b)}},$$

où $k = \frac{b}{\sqrt{(b-a)}}$.

Comme l'intégrale $\int_a^b \frac{k}{\sqrt{(x-b)}}dx$ converge car $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, alors I converge également.
Remarque : Les critères de comparaison étudiés pour les fonctions positives s'appliquent également pour les fonctions négatives, il suffit de considérer l'intégrale $\int_a^b (-f(x))dx = -\int_a^b f(x)dx$.

1.4.4 Intégrales absolument convergentes et semi convergentes

Soit $f(x)$ une fonction à signe variable continue sur $[a, +\infty[$. On dit que

1- $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est absolument convergente si $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ est convergente et on a :

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx \text{ converge } \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ converge.}$$

2- Si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge mais $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est dite semi-convergente.

Remarques :

1. Même résultat pour les autres cas d'intervalle $[a, b[$, $]a, b]$ et $]-\infty, b]$.

2. Tous les critères utilisés pour les intégrales avec des intégrandes non négatifs (fonctions positives) peuvent être utilisés comme critères de convergence absolue.

Exemple 1 : Etudier la convergence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}dx.$$

La fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x^3}$ est à signe variable, on a

$$\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leq \frac{1}{x^3},$$

mais $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ converge car $\alpha = 3 > 1$, par conséquent l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^3} \right| dx$ converge, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$ converge absolument par suite converge.

Exemple 2 :

Etudier la convergence de l'intégrale

$$\int_\pi^{4\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}} dx.$$

La fonction $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}}$ n'est pas continue en $x = \pi$,
on a

$$\left| \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}.$$

Or l'intégrale $\int_\pi^{4\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}} dx = \int_\pi^{4\pi} \frac{1}{(x-\pi)^{\frac{1}{3}}} dx$ converge car $\alpha = \frac{1}{3} < 1$. D'après le théorème de comparaison, on conclue que $\int_\pi^{4\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}} dx$ converge.

1.5 Exercices

Exercice 1

1. Calculer au moyen d'un changement de variable les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} \qquad I_2 = \int x\sqrt{1 + x^2}dx, \qquad I_3 = \int \frac{\cos x}{1 + \sin x}dx.$$

2. Calculer au moyen d'une intégration par parties les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^e x^n \ln x dx,\ n \geq 1 \qquad I_2 = \int_0^1 x^2 \arctan x dx,$$

$$I_3 = \int_{-1}^{1} (\arccos x)^2 dx, \qquad I_4 = \int e^x \cos x dx.$$

Exercice 2

1. Intégrer les fractions rationnelles suivantes :

$$I = \int \frac{x}{x^2 - x - 2}dx, \qquad J = \int \frac{dx}{x^4 - x^2}.$$

2. Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}dx, \qquad J = \int \frac{dx}{\sin x}, \qquad K = \int (\cos x)^4 dx.$$

3. Calculer les intégrales abéliennes suivantes :

$$I = \int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}dx, \qquad J = \int \frac{\sqrt{x}}{(x + 1)^2}dx.$$

Exercice 3 :

Calculer l'intégrale double :

$$I = \iint_D xy dx dy,$$

dans les deux cas

a/ $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ x - y \geq 0\}$.
b/ $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$.

Exercice 4 :

Calculer l'intégrale double suivante :

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{x} x \sin y dy dx.$$

Exercice 5 :

Calculer au moyen d'un passage aux coordonnées polaires les intégrales :

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{1 + x^2 + y^2}, \qquad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$J = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy, \qquad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}.$$

Exercice 6 : Calculer l'intégrale triple suivante :

$$I = \iint_D z dx dy dz,$$

avec $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$.

Exercice 7. Applications

1. Calculer l'aire limitée par la parabole $y = \frac{x^2}{2}$, les droites $x = 1$ et $x = 3$ et l'axe des abscisses.

2. Trouver la plus petite surface comprise entre le cercle $x^2 + y^2 = 25$ et la droite $x = 3$.

3. Calculer le volume d'un tétraèdre plein d'une base triangulaire limité par $x+y+z = 1$, $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

4. Trouver le volume délimité par le cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et les plans $z = 4 - y$ et $z = 4$.(En utilisant les coordonnées cylindriques).

5. Déterminer la masse d'un parallélépipède réctangle avec : $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$, si la densité au point (x, y, z) est $\delta\ (x, y, z) = x + y + z$.

Exercice 8 :

Déterminer la nature des intégrales **Impropres** suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx,$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx, \qquad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}.$$

Exercice 9 :

Etudier la nature des intégrale suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$,
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$,
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x+2)\sqrt[3]{x}}$,
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^3}$,
5. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2(4-x^2)}$,
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^x}$,
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$,
8. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x}}{x} dx$.

Exercice 10 : Etudier suivant les valeurs des paramètres réels α et β $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, la nature de l'intégrale de Bertrand :

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}.$$

Chapitre 2

Les Equations Différentielles

2.1 Les équations différentielles ordinaires

2.1.1 Notions fondamentales

1- On appelle **équation différentielle** une équation établissente une relation entre la variable indépendante x, la fonction $y = f(x)$ et ses dérivées y', y'', $...y^n$.

On note :

$$F(x, y, y', y'', ...y^n) = 0,$$

où

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ...\frac{d^ny}{dx^n}) = 0.$$

2- Si l'équation est d'une seule variable, elle est dite **ordinaire**, at dans le cas de deux où plusieurs variables, l'équation est appelée équation différentielle **aux dérivées partielles**.

3- On appelle **ordre** d'une équation différentielle, l'ordre de la dérivée la plus élevée contenue dans cette équation. Par exemple

- $x^2y' + 5xy = y^2$. Une équation diff ordinaire du premier ordre.
- $\frac{d^2y}{dx^2} - 4xy\frac{dy}{dx} = x$. Une équation diff du seconde ordre.

4- On appelle **solution** ou **intégrale** d'une équation différentielle, toute fonction $y = f(x)$ vérifiant identiquement cette équation.

2.2 Equations différentielles du premier ordre

2.2.1 Définitions

1. Une équation différentielle du premier ordre toute équation de la forme $F(x,\ y,\ y') = 0$; ou $F(x\ , y\ , \frac{dy}{dx},) = 0$.

2. On appelle **solution générale** d'une équation diff du premier ordre, toute fonction $\varphi(x,c)$ dérivable dépendant d'une constante arbitraire c et qui vérifie l'équation diff. $F(x,\varphi,\varphi')=0$.
3. Toute solution $y=\varphi(x,c_0)$ tirée de la solution générale $\varphi(x,c)$ est appelée **solution particulière.**

2.2.2 Intégration des équations différentielles du premier ordre

Equations différentielles à variables séparable

Toute équation différentielle de la forme :

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}.$$

Or :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \Longrightarrow g(y)dy = f(x)dx,$$

d'où

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

ce qui implique que

$$G(y) = F(x) + c, c = cte \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1 : Trouver l'intégrale générale de

$$y' + y = 1.$$

En posant $y' = \dfrac{dy}{dx}$, on obtient $\dfrac{dy}{dx} + y = 1.$

Séparons les variables :

$$\frac{dy}{1-y} = dx.$$

On trouve par intégration

$$\int \frac{dy}{1-y} = \int dx \Longrightarrow -\ln|1-y| = x + c,$$

donc

$$\ln\left|\frac{1}{1-y}\right| = x + c \Longrightarrow \frac{1}{1-y} = e^{x+c}.$$

On en déduit la solution générale

$$y = ke^{-x} + 1,\ \ k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2 : Trouver la solution particulière de l'équation

$$(1+x^2)dy + ydx = 0,$$

verifiant la condition initiale $y(0) = 1$.

Séparons les variables

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2},$$

on trouve par intégration

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{1+x^2} \Longrightarrow \ln|y| = -arctgx + c,$$

d'où l'en déduit la solution générale

$$y = ke^{-\arctan x},\ \ k \in \mathbb{R}.$$

On a $y(0) = 1$, donc $1 = ke^{-arctg0}$, d'où $k = 1$, substituant la valeur de k dans y, on obtient la solution cherchée

$$y = e^{-\arctan x}.$$

Equations différentielles Homogènes

Une équation différentielle de la forme :

$$F(x, y, y') = 0;\ y' = f(\frac{x}{y})$$

dans laquelle le changement de x en λx et y en λy, laisse y' invariante.

Par exemple : Les équations différentielles suivantes sont de type homogène :
1. $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$, (Eq-Diff- Homogène, car $y' = \dfrac{\lambda x - \lambda y}{\lambda x + \lambda y} = \dfrac{\lambda(x-y)}{\lambda(x+y)} = \dfrac{x-y}{x+y}$).
2. $y' = \dfrac{y^2-x^2}{2xy}$, (Eq-Diff- Homogène, car $y' = \dfrac{\lambda^2 y^2 - \lambda^2 x^2}{2\lambda^2 xy} = \dfrac{y^2-x^2}{2xy}$).

Pour intégrer un telle équation, on fait le changement de variable $t = \dfrac{y}{x}$. Soit $y = tx$, on obtient $dy = tdx + xdt$ et

$$\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx} = f(t).$$

La nouvelle équations différentielle obtennue est à variable séparables par rapport à la nouvelle fonction t.

Exemple : Trouver la solution particulière de l'équation

$$y' = \frac{x-y}{x+y}.$$

On pose $y = tx$, d'où $y' = t + x\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{x - xt}{x + xt}$, on obtient :

$$\frac{dx}{x} = \frac{1+t}{1-2t-t^2}dt,$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x} &= \int \frac{1+t}{1-2t-t^2}dt\\ \ln x + c &= \frac{-1}{2}\ln\left|1-2t-t^2\right| = \ln\frac{1}{\sqrt{1-2t-t^2}}.\end{aligned}$$

On trouve la solution

$$x = \frac{k}{\sqrt{1-2t-t^2}},$$

en passant au variable $t = \dfrac{y}{x}$, on aura donc

$$k = \sqrt{x^2 - 2yx - y^2}.$$

Equations différentielles linéaires

Toute équation différentielle de la forme :

$$a(x)y' + b(x)y = f(x), \tag{E}$$

avec $\{a(x),\ b(x),\ f(x)\}$ des fonctions continues sur $I \subset \mathbb{R}$, appellées **les coéfficients** de l'équation différentielle (E).

Lorsque $f(x) = 0$, l'équation est dite **linéaire homogène** (EH) **:**

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{EH}$$

Exemple : les équations diff suivantes sont de type linéaire :

- $xy' - 2y = 0$.
- $y' + 3xy = e^{-x}$.
- $m\dfrac{dv}{dt} + cv = F_0 \sin wt$, équation de mouvement vibrant.

- $L\dfrac{di}{dt}+Ri=E_0\sin wt$, les circuits éléctriques [**Lois de Kirchhoff** au circuits : la somme algébrique de toutes les tensions à travers un circuit fermé quelconque est nulle].

Théorème fondamental

La solution générale de (E) est **la somme** d'une solution **générale** $\mathbf{y}_H$ de l'équation homogène (EH) et d'une solution **particulière** $\mathbf{y}_P$ de l'équation non homogène (E) :

$$\mathbf{y}_G=\mathbf{y}_H+\mathbf{y}_P.$$

Méthode d'intégration :

1^{ere} Etape : Intégration de l'équation homogène (EH)

$$a(x)y'+b(x)y=0.$$

Nous avons une équation différentielle à variables séparables, alors :

$$\begin{aligned}
a(x)y'+b(x)y &= 0 \Longrightarrow a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=0\\
&\Longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{b(x)}{a(x)}y \Longrightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{b(x)}{a(x)}dx\\
&\Longrightarrow \int\frac{dy}{y}=\int-\frac{b(x)}{a(x)}dx\\
&\Longrightarrow \ln|y|=\varphi(x)+c \Longrightarrow y=ke^{\varphi(x)}, k\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Posons $e^{\varphi(x)}=y_1(x)$, on a

$$y_H=ky_1(x).$$

2$^{\text{éme}}$Etape : Intégration de l'équation non homogène (E)

$$a(x)y'+b(x)y=f(x)$$

La méthode de variation de la constante. Posons

$y = k(x)y_1(x)$, où $y_1(x)$ est la solution de l'équation (EH).

Alors : $y' = k'(x)y_1(x) + k(x)y_1'(x)$.

Substituons y et y' dans l'équation (E), soit :

$$\begin{aligned} a(x)y' + b(x)y &= f(x) \\ &\Longrightarrow a(x)[k'(x)y_1(x) + k(x)y_1'(x)] + b(x)k(x)y_1(x) = f(x) \\ &\Longrightarrow a(x)k'y_1(x) + k(x)[\underbrace{a(x)y_1' + b(x)y_1}_{\mathbf{0}}] = f(x) \\ &\Longrightarrow a(x)k'y_1(x) = f(x) \Longrightarrow k' = \frac{f(x)}{a(x)y_1(x)}. \end{aligned}$$

On obtient :

$$k'(x) = \int \frac{f(x)}{a(x)y_1(x)}dx \Longrightarrow k(x) = \varphi(x) + c.$$

Finalement :

$$\mathbf{y} = \underbrace{cy_1(x)}_{\mathbf{y}_H} + \underbrace{\varphi(x)y_1(x)}_{\mathbf{y}_P}.$$

Exemple 1 : Intégrer l'équation différentielle suivante :

$$y' \cos x + y \sin x = x. \tag{E}$$

Equation différentielle linéaire du premier ordre, la solution générale de (E) est :

$$y_G = y_H + y_P.$$

1) On cherche $\mathbf{y}_H$:

$$y' \cos x + y \sin x = 0, \tag{EH}$$

Equation différentielle à variable séparable. Séparons les variables

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}\cos x + y\sin x &= 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx}\cos x = -y\sin x \\
&\Longrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{\sin x}{\cos x}dx \Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -\frac{\sin x}{\cos x}dx \\
&\Longrightarrow \ln|y| = \ln|\cos x| + c \Longrightarrow y_H{=}k\cos x.
\end{aligned}$$

On cherche $\mathbf{y}_P$

$$y'\cos x + y\sin x = x. \tag{E}$$

On utilise **la méthode de variation de la constante.** Posons :

$$y = k(x)\cos x \Longrightarrow y' = k'(x)\cos x - k(x)\sin x,$$

substituant y et $y\prime$ dans l'équation (E) :

$$\begin{aligned}
y'\cos x + y\sin x &= x \Longrightarrow [k'(x)\cos x - k(x)\sin x]\cos x + k(x)\cos x\sin x = x \\
&\Longrightarrow k'(x)\cos^2 x = x \Longrightarrow k'(x) = \frac{x}{\cos^2 x} \\
&\Longrightarrow k(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x}dx.
\end{aligned}$$

Intégrant par parties :

$$\begin{cases} u = x \to du = dx \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx \to v = tgx, \end{cases}$$

on obtient

$$k(x) = xtgx - \int \frac{\sin x}{\cos x}dx \Longrightarrow k(x) = xtgx + \ln|\cos x| + c.$$

Donc :

$$\mathbf{y}_G = \underbrace{c\cos x}_{\mathbf{y}_H} + \underbrace{x\sin x + \cos x \ln|\cos x|}_{\mathbf{y}_P}.$$

Exemple 2 : Intégrer l'équation différentielle suivante :

$$xy' - y = \ln x \tag{E}$$

Equation différentielle de premier ordre linéaire non homogène.

La solution générale est donnée par **:** $y_G = y_h + y_p$.

a) On cherche y_h (Intégration de l'équation homogène (EH))

$$xy' - y = 0, \tag{EH}$$

$$\begin{aligned} xy' - y &= 0 \Longrightarrow x\frac{dy}{dx} - y = 0 \\ &\Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\ &\Longrightarrow \ln|y| = \ln|x| + c, \end{aligned}$$

d'où

$$y_h = kx,\ \ k \in \mathbb{R}.$$

b) On cherche y_p (Intégration de l'équation non homogène (E))

On utilise **la méthode de variation de la constante**. Posons :

$$y = k(x)x \Longrightarrow y' = k'(x)x + k(x).$$

En substituant y, y' dans l'équation (E)

$$\begin{cases} x(k'(x)x + k(x)) - k(x)x = \ln x \Longrightarrow \\ k'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2} \Longrightarrow k(x) = \displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2} dx. \end{cases}$$

A l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{cases} u = \ln x \to du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} \to v = -\dfrac{1}{x}, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} k(x) &= -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2} dx \\ &\Longrightarrow k(x) = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c. \end{aligned}$$

Donc

$$y_G = \underbrace{cx}_{\mathbf{y}_H} \underbrace{- (\ln x + 1)}_{\mathbf{y}_P}$$

Exemple 3 : Application en éléctricité

circuit en série comportant un resistance R et une inductance L est régi par l'équation différentielle :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E_0 \sin wt.$$

et le schéma suivant (fig 16) :

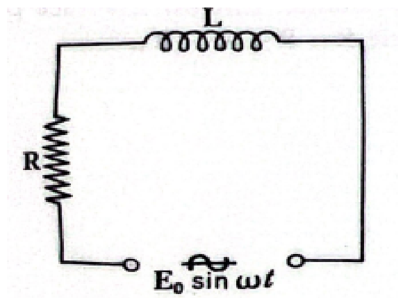


Figure 16

La variable est le temps t et i est l'intensité observée en fonction du t (R, L, E_0, w, fixées).

Solution :

Soit l'équation différentielle linéaire non homogène

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E_0 \sin wt. \tag{E}$$

solution générale est donnée par **:** $y_G = y_h + y_p$.

a) On cherche y_h (Intégration de l'équation homogène (EH)) **:**

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0, \tag{EH}$$

Equation différentielle à variable séparable, alors en séparant les variable on obtient :

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt.$$

En intégrant

$$\ln|i| = -\frac{R}{L}t + c,$$

d'où

$$i = ke^{-\frac{R}{L}t}$$

b) On cherche y_p (Intégration de l'équation non homogène (E)) **:**

On utilise **la méthode de variation de constante** Posons :

$$i = k(t)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

On dérive i par rapport à t, on obtient

$$i' = k'(t)e^{-\frac{R}{L}t} - k(t)\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}.$$

En substituant i, i' dans l'équation (1), on trouve :

$$k'(t) = \frac{E_0}{L}\sin wte^{\frac{R}{L}t},$$

d'où

$$k(t) = \int \frac{E_0}{L}\sin wte^{\frac{R}{L}t}dt.$$

Aprés une intégration par parties, on obtient l'expression cherchée

$$k(t) = \frac{E_0}{L}\left[\frac{1}{1+(\frac{Lw}{R})^2}\right] + \frac{E_0}{R}e^{\frac{R}{L}t}\left[\sin wt - \frac{wL}{R}\cos wt\right] + c.$$

On déduit l'intensité observée

$$i = \frac{E_0}{L}\left[\frac{1}{1+(\frac{Lw}{R})^2}\right]e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R}\left[\sin wt - \frac{wL}{R}\cos wt\right] + ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Exemple 3 : La cinétique chimique

La cinétique chimique procure de nombreuses équations à variables séparables.

On considère la réaction chimique (fig 17)

	$2A$	$\longrightarrow C$	$+D$
temps 0	$[A]=a$	$[C]=0$	$[D]=0$
temps t	$[A]=a-x$	$[C]=x$	$[D]=x$

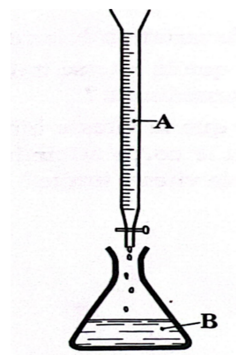


Figure 17

La vitesse de réaction est (d'aprés la loi de Gulberg et Waage (1867)) :

$$v=\frac{1}{2}\frac{dx}{dt}=K(a-x)^2.$$

où $[A]$, $[C]$ et $[D]$ sont ici les concentrations, la constante K dépend de la réaction considérée et de la température. Calculer x à chaque instant t, chercher l'instant pour laquel $x=\dfrac{a}{2}$.

Solution

L'équation $v=\dfrac{1}{2}\dfrac{dx}{dt}=K(a-x)^2$, est une équation différentielle de premier ordre à variables séparables, en intégrant :

$$\begin{aligned}
v &= \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} = K(a-x)^2, \\
&\Longrightarrow -\int \frac{dx}{(a-x)^2} = 2K\int dt, \\
&\Longrightarrow \frac{1}{a-x} = 2Kt + c, \\
&\Longrightarrow a - x = \frac{1}{2Kt+c}, \\
&\Longrightarrow x(t) = a - \frac{1}{2Kt+c}.
\end{aligned}$$

Pour $x(0) = 0$, on obtient $c = \frac{1}{a}$, d'où

$$x(t) = a - \frac{1}{2Kt+c}.$$

On cherche l'instant t pour lequel $x = \frac{a}{2}$:

$$\begin{aligned}
x(t) &= a - \frac{1}{2Kt+c} \\
&\Longrightarrow \frac{a}{2} = a - \frac{1}{2Kt+c} \\
&\Longrightarrow t = \frac{1}{2Ka}.
\end{aligned}$$

2.3 Equations différentielles du seconde ordre

2.3.1 Définitions :

1. Une équation différentielle de second ordre, toute équation de la forme :

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

2. La foction $\varphi(x)$ deux fois dérivable est dite solution de l'équation si

$$F(x, \varphi, \varphi', \varphi'') = 0.$$

Par exemple :

- $y'' + 4y^2 - y = 0$,
- $F = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$, équation de mouvement d'un système dynamique vibrant.
- $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{g}{l}\sin\theta$, équation de mouvement d'un pendule.

3. On admetra que sous certaines hypothèses, une équation différentielle de second ordre admet une infinité de solutions dépendant de deux constantes arbitraires c_1, c_2 :

$$y = \varphi(x,\ c_1,\ c_2).$$

4. L'ensemble de ces solutions constitue l'intégrale générale de l'équation différentielle.

2.3.2 Solutions d'équations différentielles du seconde ordre se ramenant au premier ordre

Equation ne contenant pas y

Soit une équation différentielle de second ordre $F(x,\ y', y'') = 0$. Pour intégrer cette équation, on fait le changement de fonction suivant, en posant : $z = y'$, l'équation devient :

$$F(x, z, z') = 0.$$

C'est une équation différentielle du premier ordre qui se résout aisément.

Exemple : Résoudre l'équation

$$y'' + y'^2 = 0.$$

En posant $z = y'$, l'équation devient :

$$z' + z^2 = 0.$$

Séparons les variables :

$$\frac{dz}{z^2} = -dx.$$

On obtient en intégrant :

$$z(x) = \frac{1}{x - c_1},$$

puis

$$y(x) = \ln|x - c_1| + c_2.$$

Equation ne contenant pas x

Soit une équation différentielle de second ordre

$$F(y, y', y'') = 0. \tag{1}$$

Si l'on considère y' comme fonction de y, alors en posant $z(y) = y'$, on a

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}y'.$$

Or $\dfrac{dz}{dy} = z'$, d'où

$$y'' = z'z,$$

y est la variable de l'équation différentiable de premier ordre suivante :

$$F(y, z, z'z) = 0. \tag{2}$$

Soit $z = \varphi(y, c_1)$ solution générale de l'équation (2), on a $z = \dfrac{dy}{dx} = \varphi(y, c_1)$, d'où

$$\frac{dy}{\varphi(y, c_1)} = dx.$$

L'intégration de cette équation permet de trouver la solution générale de l'équation (1).

Exemple : Résoudre l'équation

$$y^2 y'' + y' = 0.$$

En posant $z(y) = y'$ et $y'' = z'z$, l'équation devient :

$$y^2 z'z + z = 0.$$

En prenant z comme un facteur commun, on a

$$z(y^2 z'z + 1) = 0.$$

d'où

$$\begin{cases} z = 0, \\ y^2 z'z + 1 = 0, \end{cases}$$

on obtient en intégrant :

$$\begin{cases} y = kx, \\ z = \dfrac{1}{y} + c_1. \end{cases}$$

On intégre encore une fois l'équation $z = \dfrac{1}{y} + c_1$, il vient

$$x + c_2 = \frac{y}{c_1} - \frac{1}{c_1^2} \ln |1 + c_1 y| .$$

Donc les solutions sont :

$$\begin{cases} x = \dfrac{y}{c_1} - \dfrac{1}{c_1^2} \ln|1 + c_1 y| - c_2 \\ y = kx \end{cases}.$$

2.3.3 Equations différentielles linéaires du seconde ordre

2.3.4 Equations différentielles linéaires du second ordre à coéfficients variables

Toute équation de la forme :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) \tag{E}$$

avec $\{a(x),\ b(x),\ c(x),\ f(x)\}$ des fonctions continues sur $I \subset \mathbb{R}$, appellées **les coefficients** de l'équation différentielle (E).
Lorsque $f(x) = 0$ l'équation est dite **linéaire homogène :**

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \tag{EH}$$

Théorème fondamental :
La solution générale de (E) est **la somme** d'une solution **générale** y_H de l'équation homogène (EH) et d'une solution **particulière** y_P de l'équation non homogène (E) :

$$y_G = y_H + y_P.$$

Méthode d'intégration

1^{ere} Etape : Intégration de l'équation (EH)

Nous avons deux cas :

1) Cas où l'on connait deux solutions particulières $y_1(x)$, $y_2(x)$

- Si $y_1(x)$, $y_2(x)$ deux solutions de (EH), alors $y_1(x) + y_2(x)$ et $cy_1(x), cy_2(x)$ sont aussi des solutions de cette équation (EH).

Définition :

$y_1(x)$, $y_2(x)$ étant deux fonctions, le déterminant :

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'.$$

est appelé le déterminant de **Wronskien** des fonctions données.

- Si $W \neq 0 \Longrightarrow y_1(x)$, $y_2(x)$ sont linéairements indépendantes.
- Si $W = 0 \Longrightarrow y_1(x)$, $y_2(x)$ sont linéairements dépendantes.

Théorème :

Si $y_1(x)$, $y_2(x)$ deux solutions linéairements indépendantes de l'équation (EH), alors la solution générale de (EH) s'écrit :

$$y_H = c_1y_1 + c_2y_2,\ (c_1, c_2) \in \mathbb{R}.$$

Exemple : Soit l'équation diff :

$$y'' + w^2y = 0, \quad w \neq 0. \tag{EH}$$

Equation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène, et soit :

$$y_1(x) = \cos wx,\ y_2(x) = \sin wx,$$

solutions de l'équation (EH), cherchons une solution homogène de (EH).

Soit :

$$W = \begin{vmatrix} \mathbf{y}_1(x) & \mathbf{y}_2(x) \\ \mathbf{y}_1'(x) & \mathbf{y}_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos wx & \sin wx \\ -w\sin wx & w\cos wx \end{vmatrix} = w \neq 0.$$

$\mathbf{y}_1(x)$ et $\mathbf{y}_2(x)$ sont linéairements indépendantes, donc : $y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2$

$$y_H = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx,\ c_1,\ c_2 = ctes \in \mathbb{R}$$

2) Cas où l'on ne connait qu'une solution particulière de l'équation (EH)

Soit y_1 solution particulière de (EH).

En posant :

$$\begin{aligned} y &= y_1 z \Longrightarrow y' = y_1' z + y_1 z' \\ &\Longrightarrow y'' = (y_1' z + y_1 z')' \\ &\Longrightarrow y'' = y_1'' z + y_1' z' + y_1' z' + y_1 z'' \\ &\Longrightarrow y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''. \end{aligned}$$

Portant y, y' et y'' dans l'équation (EH) :

$$a(x)(y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'') + b(x)(y_1' z + y_1 z') + c(x) y_1 z = 0.$$

Comme

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0,$$

on obtient :

$$a(x) y_1 z'' + (2a(x) y_1' + b(x) y_1) z' = 0.$$

C'est une équation incomplète facile à intégrer.

Exemple : Intégrer l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' - y = 0, \tag{EH}$$

$y_1 = x$, est une solution particulière de (EH).

On pose :

$$y = xz \Longrightarrow y' = z + xz' \Longrightarrow y'' = 2z' + xz''.$$

Alors :

$$\begin{cases} x^2(2z' + xz'') + x(z + xz') - xz = 0 \\ \quad \Longrightarrow 2x^2z' + x^3z'' + xz + x^2z' - xz = 0 \Longrightarrow x^3z'' + 3x^2z' = 0 \\ \quad \Longrightarrow \dfrac{z''}{z'} = \dfrac{-3}{x} \Longrightarrow \int \dfrac{z''}{z'} = \int \dfrac{-3}{x} \Longrightarrow \ln|z'| = -3\ln|x| + c_1 \\ \Longrightarrow z' = \dfrac{k_1}{x^3}, k_1 = e^{c_1} = cte \in \mathbb{R}. \\ \Longrightarrow z = \int \dfrac{k_1}{x^3}dx \Longrightarrow z(x) = -\dfrac{k_1}{2x^2} + c_2. \end{cases}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{k_1}{2x} + c_2x \\ &= \frac{c_1}{x} + c_2x,\ c_1,\ c_2 = ctes \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$2^{éme}$Etape : Intégration de l'équation (E) :

Nous avons deux cas :

a) Dans le cas où l'on connait une solution particulière de l'équation (E), il suffit d'appliquer le théorème :

$$\mathbf{y}_G = \mathbf{y}_H + \mathbf{y}_P$$

Exemple : Intégrer l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' - y = x^3, \tag{E}$$

1) Intégration de l'équation homogène :

$$x^2y'' + xy' - y = 0, \tag{EH}$$

D'aprés le paragraphe précédent :

$$y_H(x) = \frac{\mathbf{c}_1}{x} + \mathbf{c}_2 x.$$

On cherche une solution particulière sous la forme d'un plynôme d'ordre 3 :

$$y_P = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\Longrightarrow y_P' = 3ax^2 + 2bx + d \text{ et } y_P'' = 6ax + 2b.$$

En substituant y_P, $y_P^{'}$ et y_P'' dans l'équation (E) et en comparant les coefficients de l'équation, on trouve :
$(a = \frac{1}{8}$, $b = c = d = 0) \Longrightarrow y_P = \frac{1}{8}x^3$. Donc

$$\mathbf{y}_G = \underbrace{\frac{\mathbf{c}_1}{x} + \mathbf{c}_2 x}_{\mathbf{y}_H} + \underbrace{\frac{1}{8}x^3}_{\mathbf{y}_P}.$$

b) Le cas où l'on ne connait pas une solution particulière :

On applique **la théorie de la variation des constantes** :

Soit :

$$y_H(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

solution homogène (générale) de l'équation homogène (EH) :

Posons :

$$y(x) = \mathbf{c}_1(x)y_1(x) + \mathbf{c}_2(x)y_2(x).$$

Substituant y_P, $y_P^{'}$, et y_P'' dans l'équation complete (E), on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1' y_1(x) + \mathbf{c}_2' y_2(x) = 0 \\ \mathbf{c}_1' y_1'(x) + \mathbf{c}_2' y_2' \ (x) = \dfrac{f(x)}{a(x)}. \end{cases}$$

Ce système d'équations avec pour inconnues $\mathbf{c}_1'(x)$, $\mathbf{c}_2'(x)$ a une solution bien déterminée. Intégrons les une fois trouvées :

$$\mathbf{c}_1(x) = \int_1' \mathbf{c}(x)dx + k_1, \ \mathbf{c}_2(x) = \int_2' \mathbf{c}(x)dx + k_2,$$

avec k_1, $k_2 = cte \in \mathbb{R}$.

Exemple : Intégrer l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y = tgx, \tag{E}$$

Equation différentielle linéaire de second ordre.

On cherche la solution générale sous la forme : $\mathbf{y}_G = \mathbf{y}_H + \mathbf{y}_P$.

1) On cherche $\mathbf{y}_H$ (Intégration de l'équation homogène (EH),

$$y'' + y = 0, \tag{EH}$$

On a :

$$\mathbf{y}_H = \mathbf{c}_1 y_1(x) + \mathbf{c}_2 y_2(x) = \mathbf{c}_1 \cos x + \mathbf{c}_2 \sin x.$$

2) On cherche $\mathbf{y}_P$ (Intégration de l'équation complet (E)) :

Par la méthode de la variation des constantes

Posons :

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}_1(x)\cos x + \mathbf{c}_2(x)\sin x.$$

Formons le système d'équations :

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1' y_1(x) + \mathbf{c}_2' y_2(x) = 0, \\ \mathbf{c}_1' y_1'(x) + \mathbf{c}_2' y_2' \ (x) = \dfrac{f(x)}{a(x)}, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1' \cos x + \mathbf{c}_2' \sin x = 0, \\ \mathbf{c}_1'(-\sin x) + \mathbf{c}_2' \cos x = tgx, \end{cases} \tag{S}$$

Multuplions la première équation de (S) par $\sin x$ et la seconde par $\cos x$, puis on fait la somme des deux équations,

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1' \cos x \sin x + \mathbf{c}_2' \sin^2 x - \mathbf{c}_1' \sin x \cos x + \mathbf{c}_2' \cos^2 x = tgx \cos x \\ \Longrightarrow \mathbf{c}_2' = \sin x \Longrightarrow \mathbf{c}_2(x) = \int \sin x dx \Longrightarrow \mathbf{c}_2(x) = -\cos x + k_2. \end{cases}$$

Portant $\mathbf{c}_2' = \sin x$ dans la première équation de (S), on a

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1' \cos x = -\sin^2 x \Longrightarrow \mathbf{c}_1' = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x} \Longrightarrow \\ \mathbf{c}_1(x) = \int -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \dfrac{(\cos^2 x - 1)}{\cos x} dx \\ = \sin x - \ln\left| tg\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} \right| + k_1. \end{cases}$$

On déduit, alors la solution générale de (E) :

$$\begin{cases} \mathbf{y}_G = \mathbf{c}_1(x)\cos x + \mathbf{c}_2(x)\sin x \\ \quad = \left(\sin x - \ln\left|tg\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right| + k_1\right)\cos x + (-\cos x + k_2)\sin x \\ \quad = \underbrace{k_1\cos x + k_2\sin x}_{\mathbf{y}_H} \underbrace{- \cos x \ln\left|tg\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right|}_{\mathbf{y}_P} \end{cases}$$

2.3.5 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On appelle ainsi toute équation de la forme suivante :

$$ay'' + by' + cy = f(x). \tag{E}$$

avec a, b, et c des constantes réelles.
Si $f(x) = 0$, l'équation est dite Homogène :

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{EH}$$

Théorème fondamental :

La solution générale $\mathbf{y}_G$ de (E) est **la somme** d'une solution **générale** $\mathbf{y}_H$ de l'équation homogène (EH) et d'une solution **particlière** $\mathbf{y}_P$ de l'équation non homogène (E) :

$$\mathbf{y}_G = \mathbf{y}_H + \mathbf{y}_P$$

Méthode d'intégration :

1^{ere} Etape : Intégration de l'équation (EH)

La solution générale de l'équation diff (EH) est donnée en fonction des racines r_1 et r_2 de **l'équation caractéristique** $ar^2 + br + c = 0$. Par le tableau suivant

$r_1,\, r_2$	La solution $\mathbf{y}_H$
r_1 et r_2 réelles distinctes	$\mathbf{y}_H = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x},\; c_1,\, c_2 = ctes \in \mathbb{R}.$
$r_1 = \alpha + i\beta$ $r_2 = \alpha - i\beta$	$\mathbf{y}_H = e^{\alpha x}\left[c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x\right],\; c_1,\, c_2 = ctes \in \mathbb{R}$
$r_1 = r_2 = \alpha$	$\mathbf{y}_H = e^{\alpha x}\left[c_1 x + c_2\right],\; c_1,\, c_2 = ctes \in \mathbb{R}$

2$^{\text{éme}}$Etape : Intégration de l'équation (E)

La détermination de la solution particulière $\mathbf{y}_P$.

On cherche la solution particulière $\mathbf{y}_P$ par la **méthode de la variations des constantes** où par **la méthode de coéfficients indéterminés :**

-Lorsque $f(x)$ appartient à certaines classe des fonctions on a :

1) Si

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x),$$

où $P_n(x)$ est un polynôme d'ordre n. Nous avons deux cas :

a) Si α n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on pose :

$$\mathbf{y}_P = e^{\alpha x} Q_n(x),$$

où $Q_n(x)$ est un polynôme d'ordre n des coefficients indéterminés.

b) Si α est racine de l'équation caractéristique, alors on pose :

$$\mathbf{y}_P = x^k e^{\alpha x} Q_n(x),\;\; [k \text{ est l'ordre de } \alpha,\;\; k = 1, 2]\,.$$

2) Si

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right],$$

où $P_n(x)$, $Q_m(x)$ deux polynômes d'ordre n, m. Nous avons deux cas

a) Si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on pose :

$$\mathbf{y}_P = e^{\alpha x}\left[S_N(x)\cos\beta x + T_N(x)\sin\beta x\right],$$

où $S_n(x)$ et $T_m(x)$ sont des polynômes de degré $N = \max\{n,\ m\}$.

b) Si $\alpha + i\beta$ est racine de l'équation caractéristique, alors on pose :

$$\mathbf{y}_P = xe^{\alpha x}\left[S_N(x)\cos\beta x + T_N(x)\sin\beta x\right],$$

où $S_n(x)$ et $T_m(x)$ sont des polynômes de degré $N = \max\{n,\ m\}$.

Exemple : Intégrer l'équation différentielle

$$y'' + y = x\sin x. \tag{E}$$

La solution générale (E) est : $y_G = y_H + y_P$

1) Intégration de l'équation homogène (EH), on cherche $\mathbf{y}_H$:

$$y'' + y = 0. \tag{EH}$$

Equation différentielle linéaire de second ordre à coéfficients constants.

L'équation caractéristique :

$$r^2 + 1 = 0 \Longrightarrow r = \pm i, (\alpha = 0, \beta = 1),$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_H &= e^{\alpha x}\left[c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x\right] \\ &= c_1 \cos x + c_2 \sin x, c_1, c_2 = ctes \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) Intégration de l'équation complet (E), on cherche $\mathbf{y}_P$:

Le second membre de l'équation (E) est de la forme :

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x\right] = x \sin x,$$

avec : $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_n(x) = 0$, $Q_m(x) = x$.

On a : $\alpha \pm i\beta = \pm i$ est racine de l'équation caractéristique, alors on pose :

$$\mathbf{y}_P = x e^{\alpha x}\left[S_N(x) \cos \beta x + T_N(x) \sin \beta x\right],$$

où $S_n(x)$ et $T_m(x)$ sont des polynômes d'ordre $N = \max\{n,\ m\} = 1$.

Alors :

$$\mathbf{y}_P = x\left[(ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x\right],$$

les coefficients indéterminés étant $\{a, b, c, d\}$. En dérivant $\mathbf{y}_P$ deux fois puis, en substituant dans l'équation (E) et en identifiant les coefficients de $\cos x$, $x \cos x$, $\sin x$ et $x \sin x$, dans les deux membres de l'égalité, on trouve quatre équations :

$$\begin{cases} 2a + 2d = 0 \\ 2c = 0 \\ -2b + 2c = 0 \\ 4a = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-1}{4} \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = \dfrac{1}{4} \end{cases},$$

donc

$$\mathbf{y}_P = \frac{-x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x.$$

Finallement la solution générale de l'equation (E) est :

$$\mathbf{y}_G = \underbrace{c_1 \cos x + c_2 \sin x}_{\mathbf{y}_H} \underbrace{- \frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x}_{\mathbf{y}_P}.$$

2.4 Exercices

Exercice 1 : Intégrer les équations différentielles suivantes ;

1. $y'\sqrt{1-x^2}+y^2=0,$ **2**. $y'\cos x=\dfrac{y}{\ln y}$, avec $y\,(0)=1.$

3. $y'=\tan x\tan y,$ **4.** $\left(x^2+2xy\right)dx+xydy=0.$

5. $y'=\dfrac{y}{x}+\sin\dfrac{y}{x}$, avec $y\,(1)=\dfrac{\pi}{2}.$

Exercice 2 : Trouver les solutions générales des équations différentielles suivantes :

1. $y'+y=x^2,$ **2.** $xy'-y=\ln x,$

3. $y'+\dfrac{xy}{1-x^2}=\arcsin x+x,$ **4.** $y'-3y=e^{2x},$

5. $y'\cos x+y\sin x=1+x,$ **6.** $y'+xy=x^3y^3.$

Exercice 3 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $xy''=y'.$ **2.** $y''+yy'=0.$

3. $y''-4y=0.$ **4.** $y''+y'-2y=0.$

Exercice 4 :

Trouver les solutions générales des équations différentielles suivantes :

1. $y''-2y'+2y=x^2.$

2. $y''-2y'+y=xe^x.$

Exercice 5 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $xy''-y'=0,$

2. $y''+yy'=0,$

3. $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+2y=0$, l'équation admet $y(x)=x$ solution particulière.

4. $y''+y'-2y=0.$

Exercice 6 : Intégrer par la méthode de variations des constantes les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - \frac{1}{x}y' = x$,

2. $y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = x^2$, l'équation homogène associée à cette équation admet les solutions particulières $y_1(x) = \frac{1}{x}, y_2(x) = x$.

3. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

Exercice 3 : Intégrer par la méthode de coefficients indéterminés, les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 4y = \cos 2x$,

2. $y'' + 9y = \sin 3x$,

3. $y'' - y = 3e^{2x} \cos x$,

4. $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$.

Chapitre 3

Les Séries

3.1 Les Séries Numérique

3.1.1 Définitions

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 + u_1 + ...u_n + u_{n+1} + ...$$

est appelée Série numérique, notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, $\sum u_n$.

- Le nombre u_n est appelé **terme général** de la série

- Soit :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ...u_n.$$

La **somme partielle** d'ordre n de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

- Considérons les sommes partielles :

$$S_0 = u_0, S_1 = u_0 + u_1, S_2 = u_0 + u_1 + u_3, ...S_n = u_0 + ... + u_n.$$

- On définit une nouvelle suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dite **la suite des sommes partielles**, où leur terme général est définit par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

- Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est à dire s'il existe un nombre S tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, la série est dite **convergente** vers sa somme $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

- Lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ n'existe pas, la série est dite **divergente.**

Exemple

Soient les séries des termes générale suivantes :

1) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$,

2) $v_n = n$.

Solution :

1)

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow \\ S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}. \end{aligned}$$

Ecrivons :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

d'où

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Alors

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Donc la série $\sum u_n$ est convergente vers $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$.

2) $v_n = n \Rightarrow S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k = \sum\limits_{k=0}^{n} k = 1 + 2 + ... + n$.

On peut écrire

$$\begin{cases} S_n = 1 + 2 + ... + (n-1) + n, \\ S_n = n + (n-1) + ... + 2 + 1. \end{cases} . \tag{S}$$

On fait la somme des deux équations de (S), on obtient :

$$\begin{aligned} 2S_n &= (1+n) + (1+n) + ...(1+n) \\ &= n(1+n) \Longrightarrow \\ S_n &= \frac{n(1+n)}{2}, \end{aligned}$$

par suite on a,

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(1+n)}{2} = +\infty.$$

Donc la série $\sum u_n$ est divergente.

3.1.2 Propriétés fondamentales des séries

1. Condition nécessaire de convergence

$$\text{Si la série } \sum u_n \text{ converge} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Toute fois, l'inverse n'est pas nécessairement vrai, c'est à dire si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, la série $\sum u_n$ peut être aussi bien convergente que divergente. Il s'ensuit que si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, la série est divergente.

2. La multiplication de la série $\sum u_n$ par une constante non nulle n'affecte ni la convergence ni la divergence.

3. La supression (où l'addition) d'un nombre finie de termes dans une série ne change pas la nature de cette série.

3.1.3 Série Géométrique

La série

$$\sum_{n\geq 0} r^n = 1 + r + r^2 + ... + r^n + ..,$$

avec $r \in \mathbb{R}$, est dite **géométrique** de raison r est :

- Convergente vers sa somme $S = \dfrac{1}{1-r}$ si $|r| < 1$.

- Divergente si $|r| \geq 1$.

Exemples :

1) Soit la série

$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$$

Série géométrique de raison $r = \dfrac{1}{2}$ et $|r| = \dfrac{1}{2} < 1$, convergente vers la somme $S = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2$.

2) $\sum\limits_{n\geq 0} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$, série géométrique de raison $r = -\dfrac{1}{3}$ et $|r| = \dfrac{1}{3} < 1$, convergente vers la somme $S = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}} = \dfrac{3}{4}$.

3.1.4 Série de Riemann

Soit la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Série de **Riemann**

- Convergente si $\alpha > 1$.

- Divergente si $\alpha \leq 1$.

- Pour $\alpha = 1$, on a la série **harmonique** $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$, divergente.

3.1.5 Série de Bertrand

Soit la série de **Bertrand**

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}, \ \alpha > 0, \ \beta > 0;$$

alors :

$$\begin{cases} 1) \text{ Si } \alpha > 1 \Longrightarrow \text{ La série convergente,} \\ 2) \text{ Si } \alpha < 1 \Longrightarrow \text{ La série divergente,} \\ 3) \text{ Si } \alpha = 1 \Longrightarrow \begin{cases} a) \text{ Si } \beta\rangle 1 \Longrightarrow \text{ La série convergente,} \\ b) \text{ Si } \beta\langle 1 \Longrightarrow \text{ La série divergente.} \end{cases} \end{cases}$$

Exemple : La série

$$\sum_{n\geq 2} u_n = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}},$$

est de Bertrand avec $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{1}{2} < 1$. Cette série est divergente.

3.1.6 Critère de convergence des Séries à termes positifs

La série $\sum u_n$ est dite à termes positifs si $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 0$.

1) Critère de comparaison

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Alors :

a) Si $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge.

b) Si $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge.

Exemples

1) Soit la série $\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+1}$.

On a :

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} = v_n.$$

La série $\sum v_n = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$, est de Riemann convergente, car $\alpha = 2 > 1$, donc $\sum u_n$ convergente.

2) Soit la série $\sum\limits_{n\geq 2} u_n = \sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{\ln n}$; on a :

$$\ln n < n \Longrightarrow u_n = \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} = v_n.$$

La série $\sum v_n = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$, est Harmonique divergente, donc $\sum u_n$ divergente.

2) Critère d'équivalence

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, telles que :

$$u_n \overset{+\infty}{\sim} v_n, \quad (\text{c'est à dire } \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \neq 0, +\infty).$$

Alors les deux séries sont de même nature.

Exemples :

1) Soit la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum \dfrac{1}{2^n - n}$.

On a :

$$u_n = \frac{1}{2^n - n} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n} = v_n,$$

car

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2^n - n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^n(1 - \frac{n}{2^n})} = 1.$$

Comme la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n}$ est géométrique de raison $r = \dfrac{1}{2} < 1$ convergente, donc $\sum u_n$ convergente.

2) Soit la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n = \sum\limits_{n\geq 1} \sin\frac{1}{n}$.

On a :

$$u_n = \sin\frac{1}{n} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} = v_n,$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$. Comme la série $\sum v_n = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, est harmonique divergente alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ divergente.

3) Critère de Cauchy

Soit la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ à termes positifs, on considère

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = l,$$

alors :

1) Si $l < 1 \Longrightarrow$ la série convergente.

2) Si $l > 1 \Longrightarrow$ la série divergente.

3) Si $l = 1 \Longrightarrow$ on ne peut pas conclure.

Exemple : Soit la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n}.$$

En utilisant le critère de Cauchy, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim{}_{n\longrightarrow+\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^2 = 4\rangle 1,$$

donc $\sum u_n$ divergente.

4) Critère de d'Alembert

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ série à termes positifs telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

Alors :

1) Si $l < 1 \Longrightarrow$ la série convergente.

2) Si $l > 1 \Longrightarrow$ la série divergente.

3) Si $l = 1 \Longrightarrow$ On ne peut pas conclure.

Exemple : Soit la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n}.$$

En utilisant le critère de d'Alembert, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}}, \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n^3} \right) = \frac{1}{3} < 1. \end{aligned}$$

Donc la série $\sum u_n$ est convergente.

4) Critère d'Intégrale

Soit $f(x)$ une fonction positive, continue et décroissante sur $]0, +\infty[$ telle que :

$$u_n = f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ et la série $\sum u_n$ sont de même nature.

Exemple : Soit la série
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}.$$

Posons $f(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, cette fonction est positive, décroissante et continue vu que $f'(x) = -e^x < 0$, $\forall x \in]0, +\infty[$. Alors, on a l'intégrale impropre suivante :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{n\to+\infty} \int_1^x f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_1^x e^{-t}dt \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left[-e^{-t}\Big|_1^x\right] = \lim_{n\to+\infty} \left[-e^{-x} + e^{-1}\right] = \frac{1}{e} < \infty.\end{aligned}$$

L'intégrale est convergente, donc la série $\sum u_n$ est donc convergente.

3.1.7 Séries à termes quelconques (La convergence absolue)

Soit $\sum u_n$ une série numérique qui peut prendre des valeurs positives et des valeurs négatives.

Si la série $\sum |u_n|$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ est convergente, et on dit dans ce cas qu'elle est **absolument convergente.**

Exemples :

1) Soit la série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2}.$$

On a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |\sin n| \leq 1 \Longrightarrow \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, est de Riemann convergente (car $\alpha = 2 > 1$). par suite la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n u_n$ absolument convergente donc elle est convergente.

2) Soit la série

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

on a

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n\geq 1} u_n\right| &= \left|\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}\right| \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}, \text{série convergente} \\
&\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} u_n \text{ absolument convergente,} \\
&\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} u_n \text{ convergente.}
\end{aligned}$$

3) Soit la série

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}.$$

On a, $|u_n| = \dfrac{1}{n}$, série harmonique divergente donc $\sum\limits_{n\geq 1} |u_n|$ divergente. On ne peut pas conclure pour la série $\sum u_n$. On doit utiliser une autre critère.

3.1.8 Séries Alternées

Soit la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n v_n,$$

avec $v_n \geq 0$. Série Alternée convergente si est seulement si :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

2) La suite (v_n) est décroissante $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple : Soit $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$;

Cette série est alternée avec $v_n = \dfrac{1}{\ln n}$, alors

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0.$
2) La suite (v_n) est décroissante $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, car en posant $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, on a bien $v_n = f(n)$ et

$$f'(x) = (\frac{1}{\ln x})' = \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x(\ln x)^2} < 0,\ \forall x > 1,$$

donc (v_n) est décroissante pour $n \geq 2$
Les deux conditions sont verifiées, on en déduit que la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n$ est convergente.

3.2 Suites et Séries de Fonctions

Dans les applications, on recontre souvent des fonctions définies ainsi comme sommes de séries à termes variable. Il est donc important d'étudier les propriétés de ces séries, par exemple savoir si elle sont convergentes ou non pour toutes les valeures de x, ou selement pour certaines valeurs (domaine de convergence).

3.2.1 Suites de fonctions

Soit une suite de fonctions $u_n : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ telle que $x \longmapsto u_n(x)$, eventuellement $a = -\infty$, ou $b = +\infty$.

Définition 1 : La convergence simple

Soit $\{u_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles définie sur $I = [a,\ b] \subseteq \mathbb{R}$.
- On dit que la suite $\{u_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers la fonction $u(x)$ sur $[a,\ b]$ et on écrit :

$$u_n(x) \overset{\textbf{cv. Simp}}{\underset{[a,\ b]}{\longrightarrow}} u(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n(x) = u(x),\ \forall\ x \in [a,\ b].$$

- Ce qui équivaut à :

$$\forall\ x \in [a,\ b],\ \forall \varepsilon \rangle 0,\ \exists\ N(x,\ \varepsilon) \in \mathbb{N}\ : n \geq N \Longrightarrow |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon.$$

Définition 2 : La convergence uniforme

- On dit que la suite $\{u_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément vers** la fonction $u(x)$ sur $[a,\ b]$ et on écrit :

$$u_n(x)\xrightarrow[{[a,\ b]}]{\textbf{cv. Unif}} u(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\sup_{[a,\ b]}|u_n(x)-u(x)|=0,\ \forall\ x\in[a,\ b].$$

Ce qui équivaut à :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\ N(x,\ \varepsilon)\in\mathbb{N},\ \forall x\in[a,\ b]: n\geq N(\varepsilon)\Longrightarrow|u_n(x)-u(x)|<\varepsilon.$$

Cette fois-ci $N(\varepsilon)$ ne dépend que de ε et ne dépend pas de x.

- Il est clair que

$\{u_n(x)\}$ **CV-uniformément** sur $[a,\ b] \Longrightarrow \{u_n(x)\}$ **CV-simplement** sur $[a,\ b]$

Exemple : Soit la suite de fonctions définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\forall n\in\mathbb{N}: u_n(x)=\frac{n^2x}{1+n^3x^2}.$$

Etudier la convergence simple et uniforme.

1) La convergence simple :

- Si $x=0$, $u_n(0)=0\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}u_n(0)=0$.
- Si $x\in\mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{n\to+\infty}u_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2x}{1+n^3x^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2x}{n^3(\frac{1}{n^3}+x^2)}=0.$$

On déduit alors que $\{u_n(x)\}$ converge simplement vers $u(x)=0$ sur $[0,\ +\infty[$.

2) la convergence uniforme : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{[a,\ b]}|u_n(x)-u(x)|=0.$

$$\begin{aligned}|u_n(x)-u(x)| &= \left|\frac{n^2x}{1+n^3x^2}-0\right| \\ &= \left|\frac{n^2x}{1+n^3x^2}\right| \\ &= \frac{n^2x}{1+n^3x^2}=u_n(x)\ \forall x\in[0,\ +\infty[\,.\end{aligned}$$

alors

$$u_n^{'}(x)=\frac{n^2(1+n^3x^2)-n^2x(2xn^3)}{(1+n^3x^2)^2}=\frac{n^2(1-n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^2}.$$

Le signe de $u_n^{'}(x)$ est dépend du signe de $(1-n^3x^2)$

$$u_n^{'}(x)=0\Longrightarrow 1-n^3x^2=0\Longrightarrow x=\frac{1}{n^{3/2}}.$$

Tableau de variations :

x	0		$\frac{1}{n^{3/2}}$		$+\infty$
$u_n'(x)$		$+$	$\vert 0$	$-$	
$u_n(x)$	0	$\nearrow$	$u_n(\frac{1}{n^{3/2}})$	$\searrow$	0

Du tableau de variations, on a : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\forall n\geq 1$:

$$\sup_{[0,\ +\infty[}|u_n(x)-u(x)|=u_n(\frac{1}{n^{3/2}})=\frac{1}{2}n^{1/2}.$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{[0,\ +\infty[}|u_n(x)-u(x)|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{2}=+\infty\neq 0.$$

On déduit alors que $\{u_n(x)\}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0,\ +\infty[$.

3.3 Séries de fonctions

3.3.1 Définition

Considérons une suite de fonctions réelles $\{u_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[a,\ b] \subseteq \mathbb{R}$.

- La série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0(x) + u_1(x) + ...u_n(x) + u_{n+1}(x) + ...$$

est appelée **série de fonctions**.

- $u_n(x)$ est le terme général de la série.

- Soit $S_n(x)$ la **somme partielle** de la série définie par :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

- L'ensemble des valeurs de x pour lesquelle la série de fonctions converge appelé le domaine de convergence de la série.

- La somme de la série est la fonction $S(x)$ telle que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = S(x)$, et

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x).$$

Exemples :

1) La série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n,\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

Série géométrique de raison $r = x$.

-converge vers sa somme $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$, si $|x| < 1$.

-et diverge si $|x| \geq 1$.

Donc la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \text{ converge vers } S(x) = \frac{1}{1-x}, \text{ sur }]-1,\ 1[\,.$$

2) Soit la série de fonctions

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

On calcule la somme partielle : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1} \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + \ldots \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= x - \frac{x^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Alors, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x) \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right].$$

Pour calculer cette limite, on doit faire une discussion selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$:

1) si $x \in]-1, +1[\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = x.$

2) si $x = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = 1.$

3) si $x = -1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = -1.$

4) si $x < \langle -1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1}$ n'a pas de limite $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) \nexists.$

5) si $x > 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1} = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = +\infty.$

On peut conclure que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ converge vers $S(x) = x$ sur $[-1, +1]$.

3.3.2 Propriétés de convergence d'une série de fonctions

a) La convergence simple :

$$\text{La série de fonctions} \sum_{n\geq 0} u_n(x) \xrightarrow[{[a,\ b]}]{\textbf{cv. Sim}} S(x) \Longleftrightarrow \text{La suite } \{S_n(x)\} \xrightarrow[{[a,\ b]}]{\textbf{cv. Sim}} S(x).$$

b) La convergence uniforme :

$$\text{La série} \sum_{n\geq 0} u_n(x) \xrightarrow[{[a,\ b]}]{\textbf{cv.Unif}} S(x) \quad \Longleftrightarrow$$
$$\text{La suite } \{S_n(x)\} \xrightarrow[{[a,\ b]}]{\textbf{cv.Unif}} S(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \sup_{[a,\ b]} |S_n(x) - S(x)| = 0.$$

Il est clair que

$$\sum_{n\geq 0} u_n(x) \ \textbf{cv-uniformément} \text{ sur } [a,\ b] \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n(x) \ \textbf{cv-uimplement} \text{ sur } [a,\ b]$$

- La réciproque est fausse.

Exemple : Etudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 0} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

1) La convergence simple :

$\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$. Série géométrique de raison $r = x$.

- Converge vers sa somme $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$, si $|x| \langle 1$.

- Et diverge si $|x| \geq 1$.

Donc la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge simplement vers $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$, sur $]-1,\ 1[$.

En effet :

$$S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[]-1,\ 1[]{\textbf{cv. Sim}} S(x) = \frac{1}{1-x}.$$

car pour :

$$\forall x \in]-1,\ 1[\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0.$$

2) La convergence uniforme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{]-1,\ 1[} |S_n(x) - S(x)| = 0$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| \leq \frac{|x^{n+1}|}{1+|-x|} \leq \frac{1}{2}.$$

D'où,

$$\sup_{]-1,\ 1[} |S_n(x) - S(x)| \leq \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\nrightarrow} 0,$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{]-1,\ 1[} |S_n(x) - S(x)| \neq 0,$$

en déduit que $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$ ne converge pas uniforme sur $]-1,\ 1[$.

c) La convergence normale (critère de Weirstrass) :

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$ une série de fonctions définie sur $[a,\ b]$, s'il existe une **série numérique** $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ **convergente**, telle que :

$$\forall x \in [a,\ b], \forall n \in \mathbb{N} : |u_n(x)| \leq a_n.$$

Alors on dit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$ **converge normalement sur** $[a,\ b]$.

Théorème :

$$\sum_{n\geq 0} u_n(x) \text{ converge } \textbf{normalement} \text{ sur } [a,\ b] \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n(x) \text{ converge } \textbf{uniformément} \text{ sur } [a,\ b]\,.$$

Exemples :

1) Soit la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n^2}$, $x \in \left]-1,\ 1\right[$. Etudier la convergence uniforme.

On utilise la convergence normale

On a :

$$\forall x \in \left]-1,\ 1\right[, \left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} = a_n.$$

Comme la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} a_n = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$, est de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$.

Donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ **converge normalement** sur $\left]-1,\ 1\right[$, par conséquent elle **converge uniformément** sur $\left]-1,\ 1\right[$.

2) Soit la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^3},\ x \in \left[0,\ +\infty\right[.$$

Etudier sa convergence uniforme.

On a :

$$\forall x \in \left[0,\ +\infty\right[, \forall n \in \mathbb{N}^* : \left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3} = a_n.$$

La série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} a_n = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^3}$, est de Riemann convergente car $\alpha = 3 > 1$. Donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\cos nx}{n^3}$, **converge normalement** sur $\left[0,\ +\infty\right[$, par conséquent elle **converge uniformément** sur $\left[0,\ +\infty\right[$.

3.3.3 Théorème fondamentaux sur les séries de fonctions

Théorème 1 : La continuité de la somme d'une Série de fonctions

Si la série de foctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$ converge uniformément vers la somme $S(x)$ sur $[a,\ b]$, et si de plus toutes les fonctions $u_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sont continues, alors $S(x)$ est une fonction **continue** sur $[a,\ b]$.

Théorème 2. Intégration :

Soit la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$ qui converge uniformément sur $[a,\ b]$ vers sa somme $S(x)$, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $u_n(x)$ sont intégrables sur $[a,\ b]$, alors :

i) La fonction $S(x)$ est intégrable sur $[a,\ b]$.

ii) La série numérique de terme général $v_n = \int_a^b u_n(x)dx$ est convergente, de plus on a :

$$\forall x \in [a,\ b],\ \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)dx.$$

Théorème 3. Dérivation :

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$ une série de fonctions telle que :

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, les fonctions $u_n(x)$ sont de classe C^1 sur $[a,\ b]$ (des fonctions continues et leurs premières dérivées sont continues).

b) La série dérivée $\sum\limits_{n\geq 0} u_n'(x)$ converge uniformément sur $[a,\ b]$ vers une fonction $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n'(x)$.

c) $\exists\ x_0 \in [a,\ b]$, tel que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x_0)$ est convergente.

Alors on a :

i) $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$ converge uniforme sur $[a,\ b]$ vers sa somme $S(x)$.

ii) La fonction $S(x)$ est dérivable sur $[a,\ b]$ et on a :

$$S'(x) = g(x) \Longleftrightarrow \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x).$$

Exemple : On considère la série de fonctions définie par son terme géneral :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n^3(1+x^n)},\ \text{sur } I = [0,\ 1] \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

1- Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur I.

2- Montrer que la fonction $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est dérivable sur I.

Solution :

1- Pour étudier la convergence uniforme, on utilise la convergence normale :

On a : Ainsi, $\forall x \in [0,\ 1]\,, \forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$|f_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n^3(1+x^n)}\right| = \frac{x^n}{n^3(1+x^n)} \leq \frac{1}{n^3(1+x^n)},$$

avec $0 \leq x^n \leq 1$.

De plus,

$$\forall x \in [0,\ 1]\,, \forall n \in \mathbb{N}^* : x^n + 1 \geq 1 \Longrightarrow n^3(1+x^n) \geq n^3.$$

D'où :

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}.$$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^3}$, série de Riemann convergente car $\alpha = 3 > 1$. Donc la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge normalement par suite elle converge uniformément sur I.

2- On utilise le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions :

i) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) \in C^1([0,\ 1]\,, \mathbb{R})$, et

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \left(\frac{x^n}{n^3(1+x^n)}\right)' \\ &= \frac{1}{n^3}\left(\frac{nx^{n-1}(1+x^n) - nx^{n-1}x^n}{(1+x^n)^2}\right) \\ &= \frac{x^{n-1}}{n^2(1+x^n)^2}. \end{aligned}$$

ii) La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge au moins en un point $x_0 \in [0,\ 1]$, puisque cette série converge uniforme sur I.

iii) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ converge uniforme sur $I = [0, 1]$

On utilise la cv normale, alors : $\forall x \in [0,\ 1]\,, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} |f_n'(x)| &= \left|\frac{x^{n-1}}{n^2(1+x^n)^2}\right| \\ &= \frac{x^{n-1}}{n^2(1+x^n)^2} \\ &\leq \frac{1}{n^2(1+x^n)^2}, \end{aligned}$$

avec : $0 \leq x^{n-1} \leq 1$.

De plus, $\forall x \in [0,\ 1]\,, \forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq x^n \leq 1 \Longrightarrow 1 + x^n \geq 1 \ \Longrightarrow n^2(1+x^n)^2 \geq n^2 \Longrightarrow \frac{1}{n^2(1+x^n)^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

D'où,

$$|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ série de Riemann cv car $\alpha = 2 > 1$. Donc la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ converge uniforme sur I.

On conclut que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = S(x)$ est dérivable sur $[0,\ 1]$, et $\forall x \in [0,\ 1]$ on a :

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)' \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^2(1+x^n)^2}. \end{aligned}$$

3.4 Séries Entières

3.4.1 Définitions

1) On appele série **Entière** où série de puissance, toute série de fonctions de la forme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{a}_n \mathbf{x}^n,$$

où les $\mathbf{a}_n$ sont appellés **les coefficients** de la série.
2) Il existe $\mathbf{R} \in [0, \ +\infty[$ tel que la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbf{a}_n \mathbf{x}^n$ converge et même absolument si $|x| < \mathbf{R}$ et diverge si $|x| > \mathbf{R}$. L'intervalle $]-\mathbf{R}, +\mathbf{R}[$, s'appelle **le domaine de convergence.**
3) $\mathbf{R}$ s'appelle **le rayon** de convergence de la série. Il est donné par l'une des deux formules :

$$\mathbf{R} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\mathbf{a}_n}{\mathbf{a}_{n+1}}\right|, \text{ ou bien } \mathbf{R} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|\mathbf{a}_n|}}.$$

Théorème :
Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbf{a}_n \mathbf{x}^n$ série entière. Il lui est associé un rayon de convergence $\mathbf{R}$ tel que :
a) Si $|x| < \mathbf{R} \Longrightarrow x \in \left]-\mathbf{R}, +\mathbf{R}\right[\Longrightarrow$ la série converge.
b) Si $|x| > \mathbf{R} \Longrightarrow x \in \left]-\infty, \ -\mathbf{R}\right[\cup \left]+\mathbf{R}, \ +\infty\right[\Rightarrow$ la série diverge.
Remarque :
1) Aux extrémités de l'intervalle, càd pour $x = \pm\mathbf{R}$, la question de convergence où de divergence de la série proposée doit faire l'objet d'une étude spéciale.
2) Si $\mathbf{R} = +\infty$, la série est converge partout $\forall x \in \left]-\infty, \ +\infty\right[$.
3) Si $\mathbf{R} = 0$, ce cas ne présente aucun intérêt pratique.

Exemple : Déterminer l'intervalle de convergence des séries entières suivantes :

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+n^2}, \qquad \text{c) } \sum_{n=0}^{+\infty} e^n x^n.$$

Solution :

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, série entière avec $\mathbf{a}_n = \frac{1}{n!}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\mathbf{a}_n}{\mathbf{a}_{n+1}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)n!}{n!} = +\infty \end{aligned}$$

$\mathbf{R} = +\infty$, donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge partout, $\forall x \in \left]-\infty, \ +\infty\right[$.

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+n^2}$, série entière avec $\mathbf{a}_n = \frac{1}{1+n^2}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\mathbf{a}_n}{\mathbf{a}_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{1}{1+n^2}}{\frac{1}{1+(1+n)^2}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+(1+n)^2}{(1+n)^2} = 1. \end{aligned}$$

$\mathbf{R} = 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+n^2}$ converge sur $\left]-1, \ +1\right[\Longrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{1) Si } x = 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} \text{ (série numérique) : } \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2} \\ \left[\begin{array}{c} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{Série de Riemann cv car } \alpha = 2 > 1, \text{ d'aprés le critère} \\ \text{de comparaison, la série } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} \text{ cv.} \end{array} \right] \\ \text{2) Si } x = -1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}, \text{ série alternée cv} \end{array} \right.$$

On déduire donc que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1+n^2}$ converge sur $[-1, \ +1]$.

c) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^n x^n$, $\mathbf{a}_n = e^n \Longrightarrow$

$$\mathbf{R} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|\mathbf{a}_n|}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{e^n}} = \frac{1}{e}.$$

$\mathbf{R} = \dfrac{1}{e} \Longrightarrow$ la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^n x^n$ converge sur $\left]-\dfrac{1}{e}, \ +\dfrac{1}{e}\right[$, alors on a

$$\begin{cases} \text{1) Si } x = +\dfrac{1}{e} \Longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 1 \text{ (série numérique div car la condition} \\ \text{nécessaire de convergence n'est pas verifiée } \lim\limits_{n\to+\infty} 1 \neq 0.) \\ \text{2) Si } x = -\dfrac{1}{e} \Longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n, \text{ divergente (même argument) .} \end{cases}$$

En conclusion, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^n x^n$ converge sur $\left]-\dfrac{1}{e}, \ +\dfrac{1}{e}\right[$.

3.5 Exercices

Exercice 1 : On considère la série numérique définie par son terme général :

$$u_n = \ln\sqrt{\frac{n+1}{n}},\ n \geq 1.$$

1. Calculer la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

2. Calculer S, on déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 2 : Etudier la convergence des séries de terme général :

1. $U_n = \dfrac{\ln n}{2n^3+1}$, **2.** $U_n = \dfrac{4n^2-n+3}{n^3+2n}$, **3.** $U_n = \dfrac{n+\sqrt{n}}{2n^3+1}$

4. $U_n = \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$ **5.** $U_n = n\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ **6.** $U_n = \dfrac{n^3}{n!}$

7. $U_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ **8.** $U_n = ne^{-n^2}$ **9.** $U_n = \sin\dfrac{a}{n}$

10. $U_n = \dfrac{1}{n+\ln n}$ **11.** $U_n = \sin(\sqrt{\pi 4n^2+1})$ **12.** $U_n = 1-\cos\dfrac{1}{n}$

13. $U_n = \dfrac{a^n}{n^\alpha}$, $a > 0$ **14.** $U_n = \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ **15.** $U_n = \dfrac{a^{2n}}{1+a^{4n}}$, $a \geqslant 0$.

16. $U_n = \dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ **17.** $U_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$ **18.** $U_n = \dfrac{(-1)^n}{3^n}$.

Exercice 3 : Etudier la convergence simple et uniforme des séries de fonctions suivantes :

1) $\sum_{n\geq 0} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 : On considère la série numérique définie par son terme général :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N} : u_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^3 x^2}.$$

Etudier la convergence simple et uniforme.

Exercice 5 :

1) Etudier la convergence uniforme des séries de fonctions suivantes :

a) La série $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{x^n}{n^2}$, $x \in]-1,\ 1[$.

b) La série $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{\cos nx}{n^3}$, $x \in [0,\ +\infty[$.

2) On considère la série de fonctions définie par son terme général **:**

$$\forall x \in I = [1, +\infty[\,, \quad f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

Montrer qu'elle converge uniformément sur I.

Exercice 6 :

On considère la série de fonctions définie par son terme géneral :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n^3(1 + x^n)}, \text{ sur } I = [0,\ 1] \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

1- Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur I.

2- Montrer que la fonction $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est dérivable sur I.

Exercice 7 : Soit

$$f_n(x) = e^{-xn},\ \forall n \in \mathbb{N}; \forall x \in \mathbb{R};$$

1. Soit $a > 0$. Montrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ sur $[a, +\infty[$**.** Cette série est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$?

2. Soit f sa somme. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

3. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R};\ \forall n \in \mathbb{N};\quad f'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-xn}.$$

4. Que se passe-t-il si $x < 0$.

Exercice 8 : Calculer le rayon de convergence et domaine de convergence des deux séries entières suivantes :

1- $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{1+n^2}$, 2- $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{5^n+n}$. 3- $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{\lambda^n}$, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 9 : Déterminer le rayon et le domaine ouvert de convergence des séries entières suivantes :

1- $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n(\ln n)^2}$. 2- $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(x+3)^n}{n3^n}$. 3- $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^{2n}}{2^n+1}$. 4- $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(x-2)^n}{n5^n}$.

Chapitre 4

Séries de Fourier

La physique et la mécanique (vibrations) font souvent apparaître des fonction périodiques. Rappelons qu'une fonction f périodique et de période T si

$$f(x+T) = f(x).$$

Il est bien connu que les fonctions trigonométriques $\sin x$ et $\cos x$ sont périodiques et de période 2π. Les phénomènes périodiques se rencontrent notamment en Acoustique, en Mécanique, en Optique et en Electrotechnique. La variable est souvent le temps t.

4.1 Définitions

1) On appele série de **Fourier** une série de la forme :

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + ... \; = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (1)$$

où les constantes a_n, b_n, $(n = 1,\, 2,\, ...)$ sont appelés les coefficients de la série.

2) Si la série de Fourier converge pour toute $x \in \mathbb{R}$, sa somme $S(x)$ est alors une fonction périodique de période 2π.

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Exemples :

1) $3 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cos(nx) + 18 \sin(nx)$, $a_0 = 3$, $a_n = (-1)^n$, $b_n = 18$.

2) $\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx)$, $a_0 = \frac{\pi}{2}$, $a_n = 0$, $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n + 3}{n+6} \cos(nx)$, $a_0 = 0$, $a_n = \frac{5^n + 3}{n+6}$, $b_n = 0$.

Remarque

On a la majoration

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| .$$

Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ sont absolument convergentes, alors la serie de Fourier est absolument convergente et unifomément sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue et dérivable et intégrable terme à terme.

Exemple :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \Longrightarrow \left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} = a_n.$$

La série numérique $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ étant absolument convergente, alors la série de Fourier $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ est absolument et uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, donc elle est continue et dérivable et intégrable terme à terme.

4.2 Determination des coefficients de Fourier

Supposons que la fonction $f(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ périodique de période 2π et intégrable sur tout intervalle de longeur 2π soit représentée par une série de Fourier convergente dans $[-\pi, \pi]$.

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + ...a_n \cos nx + b_n \sin nx + ... \tag{2}$$

Alors on a :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \tag{3}$$

$$\forall n > 0, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \tag{4}$$

$$\forall n > 0, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \tag{5}$$

A toute fonction f intégrable de période 2π, en peut associer une série de fonction dont les coefficients sont donnés par les formules d'intégrales (3), (4) et (5).

4.3 Séries de Fourier des fonctions paires et impaires

1- Si la fonction $f(x)$ est paire, on trouve :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$\forall n > 0, \; a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$\forall n > 0, \quad b_n = 0.$$

2- Si $f(x)$ est impaire on obtient :

$$\forall n > 0, \; a_n = 0,$$

$$\forall n > 0, \; b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

4.4 Les conditions de Dirichlet

Le problème posé est : quelles sont les propriétés que doit posséder la fonction $f(x)$ pour que sa série de Fourier converge et que sa somme soit égale aux valeurs de $f(x)$.

Nous allons énoncer un théorème donnant les conditions suffisantes pour que la fonction $f(x)$ soit représentable par une série de Fourier.

4.4.1 Théorème de Dirichlet

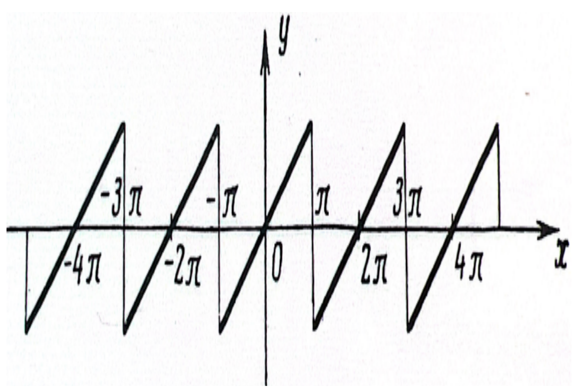
Si la fonction périodique $f(x)$, de période 2π, monotone par morceaux et bornée sur $[-\pi, \pi]$, alors :
sa série de Fourier converge partout et la somme $S(x)$ est égale à la valeur de $f(x)$ aux points de discontinuité. La somme de la série de Fourier est égale : (moyenne arithmétique)

$$S(x) = \frac{L_g + L_d}{2} = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}.$$

Exemple 1 :

Donner un dévelopement des fonctions suivantes en série de Fourier :

1) Soit $f(x)$ une fonction périodique de période 2π définit par $f(x) = x$, $-\pi \leq x \leq \pi$.



Cette fonction est monotone par tranches et bornée. Elle admet donc un développement en série de Fourier

- Calcul des coefficients de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = \frac{1}{4\pi}\left[x^2\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx\right] = \left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\left[-\frac{x\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{n}\left[\pi\cos n\pi + \pi\cos n\pi\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n^2}\left[\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}\right] = \left[-\frac{2\cos n\pi}{n}\right] = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

D'aprés le théorème de Dirichlet, vu que $f(x)$ est continue et monotone par morceaux, on obtient la série :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\ \forall x\in\,]-\pi,\pi[\,.$$

On a $f(x) = 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx = x \Longrightarrow$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx = \frac{x}{2}.$$

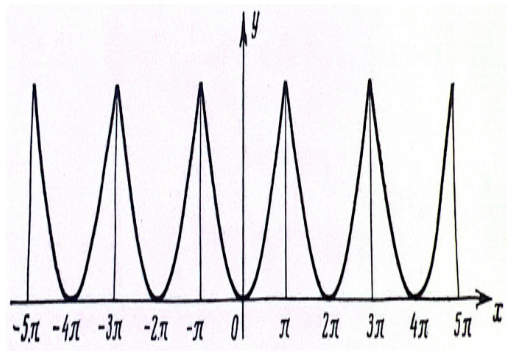
Cette egalité a lieu partout sauf aux points de discontinuités :

$$S(\pi) = \frac{f(-\pi-0)+f(\pi+0)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0.$$

$$S(-\pi) = \frac{f(-\pi-0)+f(-\pi+0)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0.$$

Exemple 2 :

Soit $f(x) = x^2$, une fonction périodique de période 2π.



La fonction $f(x)$ est monotone par tranches, bornée et continue. Elle admet donc un développement en série de Fourier :

Calcul des coefficients de Fourier :

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \dfrac{\pi^2}{3}, \\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \dfrac{4\pi\cos n\pi}{\pi n^2} = \dfrac{4(-1)^n}{n^2} = \begin{cases} \dfrac{4}{n^2}, \ k \text{ pair} \\ \dfrac{-4}{n^2}, \ k \text{ impair} \end{cases}, \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx = 0. \end{cases}$$

Comme $f(x)$ est continue dans $[-\pi, \pi]$ et monotone par morceau, donc $f(x)$ est égale à sa série de Fourier

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^2}, \forall x \in \left]-\pi, \pi\right[.$$

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2}.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}.$$

L'égalité à lieu partout :

Si $x = \pi$:

$$\begin{aligned} \pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cos n\pi}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n^2} \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n^2} \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

on en déduit la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Si $x = 0$:

$$0 = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2},$$

on en déduit la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

4.5 Série de Fourier des fonctions de période quelconque

Soit f une fonction périodique de période$w$ avec le changement de variable $x = \frac{Wt}{\pi}$, la nouvelle fonction $f(\frac{Wt}{\pi})$ est alors de periode 2π. En série Fourier, elle se developpe ainsi :

$$f(\frac{Wt}{\pi}) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + ... + a_n \cos nt + b_n \sin nt + ...,$$

avec $a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt$ et $b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt$.
En retournant à la variable x, on a :

$t = \frac{\pi x}{W} \Longrightarrow dt = \frac{\pi}{W} dx$, alors

$$a_n = \frac{1}{w} \int\limits_{-W}^{W} f(x) \cos \left(\frac{nWx}{\pi} \right) dx \text{ et } b_n = \frac{1}{W} \int\limits_{-W}^{W} f(x) \sin \left(\frac{nWx}{\pi} \right) dx,$$

et donc

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{nWx}{\pi} + b_n \sin \frac{nWx}{\pi} \right). \tag{6}$$

4.6 Série de Fourier sous forme complexe

Soit f périodique de période 2π representée par sa serie de Fourier :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Puisque $\cos nx = \dfrac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$ et $\sin nx = \dfrac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$, alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx}. \end{aligned}$$

En posant $c_0 = \dfrac{a_0}{2}, c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$ et $c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$, la série de Fourier de f s'écrit :

$$f(x) \quad = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx},$$

ou sous forme plus compacte :

$$f(x) \quad = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{7}$$

c'est la **forme complexe** de la série de Fourier avec

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \;\; n \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

4.7 Exercices

Excercice 1

Développer en série de Fourier (en série de cosinus et sinus) des fonctions suivantes :

1) La fonction périodique de période (2π), définie comme suit :

$$f(x) = x, \text{ pour } -\pi \leq x \leq \pi.$$

2) La fonction de période 2π, définie :

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{ pour } -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, \text{ pour } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

3) La fonction périodique de période $L > 0$ définie comme suit :

$$f(x) = |x|, \text{ si } x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right].$$

Excercice 2

Soit la fonction périodique de période 2π, définie par :

$$\forall x \in [0, 2\pi], \ f(x) = x^2.$$

1) Développer cette fonction en série de Fourier.

2) Calculer les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Excercice 3

Dévelooper en série de Fourier la fonction périodique de période 2π, définie par :

$$\forall x \in [-\pi,\ \pi]\,,\ f(x) = |x|\,.$$

Déduire la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Excercice 4

Soit la fonction périodique de période 2π,

$$\forall x \in [-\pi,\ \pi]\,,\ f(x) = e^x.$$

1) Développer en série de Fourier la fonction f.

2) En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

Chapitre 5

Transformation de Laplace

5.1 Introduction

En mathématiques, **la transformation de Laplace** est une transformation intégrale, c'est-à-dire une opération associant à une fonction $f(t)$ (à valeur dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$) une nouvelle fonction dite transformée de Laplace de $f(t)$, notée traditionnellement $F(p)$, via une intégrale.

La transformation de Laplace est injective et par usage de tables, il est possible d'inverser la transformation. Le grand avantage de la transformation de Laplace est que la plupart des opérations courantes sur la fonction originale $f(t)$, telle que la dérivation, ou un décalage sur la variable t, ont une traduction (plus) simple sur la transformée $F(p)$.

Cette transformation fut introduite pour la première fois sous une forme proche de celle utilisée par Laplace en 1774, dans le cadre de la théorie des probabilités.

La transformation de Laplace généralise **la transformation de Fourier** qui est également utilisée pour résoudre les équations différentielles : contrairement à cette dernière, elle tient compte des conditions initiales et peut ainsi être utilisée en théorie des vibrations mécaniques ou en électricité dans l'étude des régimes forcés sans négliger le régime transitoire. Elle converge pour toutes les fonctions qui, pondérées par une exponentielle, admettent une transformée de Fourier ; par conséquent les fonctions admettant une transformée de Fourier admettent toutes une **transformée de Laplace**, mais la réciproque n'est pas vraie. De manière générale, ses propriétés vis-à-vis de la dérivée permettent un traitement plus simple de certaines équations différentielles, et est de ce fait très utilisée en automatique.

5.2 Définition

Soit donnée une fonction de la variable réelle t définie pour $t \geq 0$ (parfois nous estimerons que la fonction $f(t)$ est définie dans l'intervalle infini $-\infty < t < \infty$, mais $f(t) = 0$ quand $t < 0$). Nous supposons que la fonction $f(t)$ continue par morceaux, c'est -à-dire telle que, dans chaque intervalle fini, elle possède un nombre fini de discontinuités de $1^{\text{ère}}$ espèce.

5.3 Existence et unicité

Pour assurer l'existence de certaines intégrales dans l'intervalle infini $0 \leq t < \infty$, nous imposerons à la fontion $f(t)$ des restrictions complémentaires. Nous supposons précisément qu'il existe des nombres positifs constants M et s_0 tels que

$$|f(t)| \leq Me^{-s_0 t} \tag{1}$$

pour tout valeur de t prise dans l'intervalle $0 \leq t < \infty$.
Considérons le produit de la fonction $f(t)$ par la fonction complexe de la variable réelle t, où $p = a + ib$ $(a > 0$) est un nombre complexe :

$$e^{-pt} f(t) \tag{2}$$

la fonction (2) est aussi une fonction complexe de la variable réelle t :

$$e^{-at}\ f(t) = e^{-(a+ib)t} f(t) = e^{-at} f(t) e^{-ibt} = e^{-at} f(t) \cos bt - ie^{-at}\ f(t) \sin bt.$$

Considérons ensuite l'intégrale impropre

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\ dt = \int_0^\infty e^{-at} f(t) \cos bt\ dt - i \int_0^\infty e^{-at} f(t) \sin bt\ dt. \tag{3}$$

Montrons que si la fonction $f\ (t)$ vérifie la condition (1) et $a > s_0$, alors les intégrales du second membre de l'égalité (3) existent et la convergence des ces intégrales est absolue. Estimons d'abord la première de ces intégrales :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty e^{-at} f\ (t) \cos bt\ dt \right| &\leq \int_0^\infty \left| e^{-at} f(t) \cos bt \right| dt \\ &< M \int_0^\infty e^{-at} e^{s_0 t} dt = M \int_0^\infty e^{-(a-s_0)t}\ dt = \frac{M}{a - s_0}. \end{aligned}$$

On estime de même la seconde intégrale. Ainsi, L'intégrale $\int_0^\infty e^{-pt} f\ (t) dt$ existe. Elle définit une certaine fonction de p, que nous désignerons par $F(p)$:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\ f(t)\ dt. \tag{4}$$

La fonction $F\ (p)$ est appelée transformée de Laplace ou image L ou simplement image de $f(t)$. La fonction $f(t)$ est appelée original ou fonction objet. Le fait que $F\ (p)$ est l'image de la fonction $f\ (t)$ est noté de manière suivante :

$$F(p) \longrightarrow\ f(t), \tag{5}$$

ou

$$f(t)\ \longleftarrow\ F(p), \tag{6}$$

soit encore

$$L\ \{f\ (t)\}\ =\ F(p). \tag{7}$$

Comme nous le verrons par la suite, Le sens de l'introduction des images réside dans le fait qu'elles permettent de simplifier la résolution de nombreux problèmes, en particulier, de ramener la résolution des équations différentielles ordinaires à certaines opérations algébriques simples permettant de trouver la fonction image. Connaissant l'image on peut trouver l'original soit au moyen des tables préalablement composées $\ll$ original-image $\gg$ (dictionnaire d'images), soit par les méthodes que nous exposerons plus bas. Des questions se posent alors naturellement.

Soit donnée une certaine fonction $F\ (p)$. Existe-t-il une fonction $f\ (t)$ dont $F(p)$ est l'image ? Si elle existe, est-elle unique ? Les deux questions reçoivent une réponse positive si $F\ (p)$ et $f\ (t)$ satisfont à certaines conditions. En particulier l'unicité de l'image est établie par le théorème suivant que nous énoncerons sans démonstration :

Théorème d'unicité. Si deux fonctions continues $\varphi(t)$ et $\psi\,(t)$ possèdent une même image $L\ F\,(p)$, ces fonctions sont identiquement égales. Ce théorème sera d'une grande utilité pour tout ce qui suivra.

5.4 La transformtion des fonctions $\sigma_0(t), \sin t\ , \cos t$

I. La fonction $f\ (t)$ ainsi définie

$$\begin{aligned} f\,(t) &= 1 \text{ pour } t \geq 0, \\ f\,(t) &= 0 \text{ pour } t < 0, \end{aligned}$$

est appelée fonction unité de Heaviside et notée $\sigma_0\,(t)$.

Trouvons l'image L de la fonction de Heaviside :

$$L\,\{\sigma_0\,(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt}dt = -\frac{e^{-pt}}{p}\ |_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

Ainsi,

$$1 \longleftarrow \frac{1}{p}, \tag{8}$$

ou, plus exactement

$$\sigma_0\left(t\right) \longleftarrow \frac{1}{p}.$$

Dans certains traités de calcul opérationnel, on appelle image de la fonction $f\left(t\right)$ l'expression

$$F^{\ *}\left(p\right) = p\int_0^{\infty} e^{-pt} f\left(t\right)\ dt.$$

Dans ce cas on a : $\sigma_0\left(t\right) \longleftarrow 1$ et, par conséquent, $C \longleftarrow C$, plus exactement $C\,\sigma_0\left(t\right) \longleftarrow C$.

II. Soit $f\ \ (t) = \sin\, t$; alors

$$L\left\{\sin t\right\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin t\ dt = \frac{e^{-pt}\left(-p\sin t - \cos t\right)}{p^2+1}\ |_0^{\infty} = \frac{1}{p^2+1}.$$

Ainsi,

$$\sin t \longleftarrow \frac{1}{p^2+1}. \tag{9}$$

III. Soit $f\ \ (t) = \cos t$; alors

$$L\left\{\cos t\right\} = \int_0^{\infty} e^{-pt}\ \cos t\ dt = \frac{\exp^{-pt}\ \ \left(\sin t - p\cos t\right)}{p^2+1}\ |_0^{\infty} = \frac{p}{p^2+1}.$$

Ainsi,

$$\cos t \longleftarrow \frac{p}{p^2+1}. \tag{10}$$

5.5 La transformtion des fonctions à échelle modifiée de la variable indépendante $\sin at$, $\cos at$

Considérons l'image de la fonction $f(at)$,où $a > 0$:

$$L\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-pt}\ f(at)\ dt.$$

Effectuons un changement de variable dans la seconde intégrale, posant $z = at$; par conséquent, $dz = a\ dt$; nous obtenons alors :

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{p}{a}z}\ f(z)\ dz$$

ou

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\ \left(\frac{p}{a}\right).$$

Ainsi, si

$$F(p) \longrightarrow f(t),$$

alors

$$\frac{1}{a}\ F\left(\frac{p}{a}\right) \longrightarrow f(at). \tag{11}$$

Exemple 1. Nous obtenons immédiatement de la formule (9) en vertu de (11) :

$$\sin at \longleftarrow \frac{1}{a}\ \frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1}$$

ou

$$\sin at \longleftarrow \frac{a}{p^2 + a^2} \tag{12}$$

Exemple 2. Nous obtenons de la formule (10) en vertu de (11) :

$$\cos at \longleftarrow \frac{1}{a}\,\frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1}$$

c'est à dire

$$\cos at \longleftarrow \frac{p}{p^2+a^2}. \tag{13}$$

5.6 Linéarité

Théorème. L'image de la somme de plusieurs fonctions, multipliées par des constantes, est égale à la somme des images de ces fonctions multipliées par les constantes correspondantes, autrement dit si

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, f_i(t) \tag{14}$$

(C_i sont des constantes) et

$$F(p) \longrightarrow f(t)\,, \quad F_i(p) \longrightarrow f_i(t)\,,$$

alors

$$F(p) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, F_i(p)\,. \tag{14'}$$

Exemple 1. Trouver l'image de la fonction

$$f(t) = 3\sin 4t - 2\cos 5t.$$

Solution. En vertu des formules (12), (13) et (14') nous obtenons

$$L\{f(t)\} = 3\frac{4}{p^2+16} - 2\frac{p}{p^2+25} = \frac{12}{p^2+16} - \frac{2p}{p^2+25}.$$

Exemple 2. Trouver l'original dont l'image est donnée par l'expression

$$F\left(p\right)=\frac{5}{p^{2}+4}+\frac{20p}{p^{2}+9}.$$

Solution. Représentons $F\left(p\right)$ de la manière suivante :

$$F\left(p\right)=\frac{5}{2}\frac{2}{p^{2}+\left(2\right)^{2}}+20\frac{p}{p^{2}+\left(3\right)^{2}}.$$

Par conséquent, en vertu des formules (12), (13) et (14') nous obtenons :

$$f\left(t\right)=\frac{5}{2}\sin 2t+20\cos 3t.$$

Il découle du théorème d'unicité du **1** que c'est l'unique original qui correspond à la fonction donnée $F\left(p\right)$.

5.7 Théorème de déplacement

Théorème. Si $F\left(p\right)$ est l'image de la fonction $f\left(t\right)$, alors $F\left(p+\alpha\right)$ est l'image de la fonction $\exp^{-\alpha t}\ f\left(t\right)$, autrement dit

$$\text{si } F\left(p\right)\longrightarrow f\ \ \left(t\right),$$

alors

$$F\left(p+\alpha\right)\longrightarrow e^{\alpha t}\ f\left(t\right). \tag{15}$$

(Nous supposons ici que Re $\left(p+\alpha\right)>s_{0}$).

5.8 La transformtion des fonctions $\exp(-\alpha t)$, $\sinh \alpha t$, $\cosh \alpha t$, $\exp(-\alpha t)\sin at$, $\exp(-\alpha t)\cos at$

Il découle immédiatement de la formule (8), en vertu de la formule (15), que

$$\frac{1}{p+\alpha} \longrightarrow e^{\alpha t}. \tag{16}$$

D'une manière analogue

$$\frac{1}{p-\alpha} \longrightarrow e^{-\alpha t}. \tag{16'}$$

Retranchant des termes de la relation (16') les termes correspondants de la relation (16) et divisant les différences obtenues par 2, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{p+\alpha}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}\left(e^{-\alpha t} - e^{\alpha t}\right)$$

c'est à dire

$$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2} \longrightarrow \sinh \alpha t. \tag{17}$$

De même, en faisant la somme de (16) et de (16'), on a :

$$\frac{p}{p^2-\alpha^2} \longrightarrow \cosh \alpha t. \tag{18}$$

Il découle de la formule (12) en vertu des formules (15) :

$$\frac{a}{(p+\alpha)^2 + a^2} \longrightarrow e^{-\alpha t} \sin at. \tag{19}$$

De la formule (13), en vertu des formules (15), il découle :

$$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2} \longrightarrow e^{-at}\cos at \tag{20}$$

Exemple 1. Trouver l'original si l'image est donnée par la formule

$$F(p) = \frac{7}{p^2+10p+41}.$$

Solution. Transformons $F(p)$ de façon à lui donner la forme de l'expression du premier membre de la relation (19) :

$$\frac{7}{p^2+10p+41} = \frac{7}{(p+5)^2+16} = \frac{7}{4}\frac{4}{(p+5)^2+4^2}.$$

Ainsi,

$$F(p) = \frac{7}{4}\frac{4}{(p+5)^2+4^2}.$$

Par conséquent, en vertu de la formule (19), nous aurons :

$$F(p) \longrightarrow \frac{7}{4}e^{-5t}\sin 4t.$$

Exemple 2. Trouver l'original si l'image est donnée par la formule

$$F(p) = \frac{p+3}{p^2+2p+10}.$$

Solution. Transformons la fonction $F(p)$:

$$\begin{aligned}\frac{p+3}{p^2+2p+10} &= \frac{(p+1)+2}{(p+1)^2+9} = \frac{p+1}{(p+1)^2+3^2} + \frac{2}{(p+1)^2+3^2}\\ &= \frac{p+1}{(p+1)^2+3^2} + \frac{2}{3}\frac{3}{(p+1)^2+3^2}.\end{aligned}$$

en vertu des formules (19) et (20) nous trouvons l'original

$$F\ (p) \longrightarrow e^{-t}\ \cos 3t + \frac{2}{3}e^{-t}\sin 3t.$$

5.9 Dérivation

5.9.1 La dérivation de la transformée

Théorème. Si $F\ (p) \longrightarrow f\ (t)$, alors

$$(-1)^n \frac{d^{\ n}}{d\ p^n} F\ (p) \longrightarrow t^{\ n} f\ (t)\,. \tag{21}$$

Exemple 1. Nous tirons de la formule (cf. (12))

$$\frac{a}{p^2+a^2} = \int_0^{\infty} \exp^{-pt} \sin atdt.$$

En dérivant les premier et second membres par rapport au paramètra p :

$$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2} \longrightarrow t\sin at. \tag{22}$$

Exemple 2. Nous obtenons de la formule (13) en vertu de la formule (21) :

$$-\frac{a^2-p^2}{(p^2+a^2)^2} \longrightarrow t\cos at \tag{23}$$

Exemple 3. Nous obtenons de la formule (16) on vertu de la formule (21) :

$$\frac{1}{(p+\alpha)^2} \longrightarrow t\ e^{-at}.$$

La transformation des dérivées

Théorème. Si

$$\pounds\left\{f(t)\right\} = F(p),$$

alors

$$\pounds\left\{f'(t)\right\} = pF(p) - f(0). \tag{24}$$

Considérons ensuite la transformée des dérivées d'ordre quelconque .

Portant dans la formule (24) l'expression $pF(p) - f(0)$ au lieu de $F(p)$ et remplaçant $f(t)$ par $f'(t)$. Nous obtenons

$$\pounds\left\{f''(t)\right\} = p[pF(p) - f(0)] - f'(0),$$

ou en ouvrant les parenthèses :

$$\pounds\left\{f''(t)\right\} = p^2F(p) - pf(0) - f'(0). \tag{25}$$

L'image de la dérivée d'ordre n sera :

$$\pounds\left\{f^n(t)\right\} = p^nF(p) - [p^{n-1}f(0) + p^{n-2}f'(0) + ... + pf^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)] \tag{26}$$

Les formules $(24), (25)$ et (26) se simplifient si $f(0) = f'(o) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0$ et dans ce cas on aura :

$$\begin{cases} \pounds\left\{f(t)\right\} = F(p), \\ \pounds\left\{f'(t)\right\} = p^1 F(p), \\ ... \\ ... \\ ... \\ \pounds\left\{f^n(t)\right\} = p^n F(p). \end{cases}$$

Proposition. (le produit de convolution)

Soient f_1 et $f_2$deux fonctions définies, continues et intégrables sur $t \geqslant 0$; si $\pounds\left\{f_1(t)\right\} = F_1(p)$ et $\pounds\left\{f_2(t)\right\} = F_2(p)$ alors

$$\pounds\left\{(f_1 * f_2)(t)\right\} = F_1(p)F_2(p), \mathrm{Re}(p) > \max\left\{s_0, d_0\right\}$$

oú s_0 et d_0 sont deux nombres positifs vérifiant :

$$|f_1(t)| < Me^{-s_0 t} \text{ et } |f_2(t)| < Me^{-d_0 t}.$$

5.10 Tableau résumé de quelques transformées usuelles

Pour faciliter l'utilisation des transformée de Laplace des fonctions obtenues, nous les groupons dans un tableau ci-dessous.

N°	$F(p)=\int_{0^-}^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt.$	$f(t)$
1	$\frac{1}{P}$	1
2	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\sin at$
3	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
4	$\frac{1}{p+\alpha}$	e^{-at}
5	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$\operatorname{sh} \alpha t$
6	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$\operatorname{ch} \alpha t$
7	$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-at}\sin at$
8	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-at}\cos at$
9	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	t^n
10	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$	$t\sin at$
11	$\frac{p^2+a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t\cos\ at$
12	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	te^{-at}
13	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$
14	$(-1)^n\, F^{(n)}(p)$	$t^n f(t)$
15	$F_1(p)F_2(p)$	$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

5.11 Inversion de la transformée de Laplace

Pour inverser la transformée de Laplace, on utilise en général les tables et les règles précédentes, Soit $F(p)$ une transformée de Laplace, dont l'original est donné par :

$$f(t) = \pounds^{-1}\left\{F(p)\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp^{pt} F(p)dp \quad a > s_0\ . \tag{1}$$

Cette dernière intégrale se calcule souvent en utilisant le théorème des résidus.

5.11.1 Exemples

Exemple 1 Trouvons l'original dont l'image est donnée par l'expression

$$F(p) = \frac{5}{p^2+4} + \frac{20p}{p^2+9}.$$

Représentons $F(p)$ de la manière suivante :

$$F(p) = \frac{5}{2}\frac{2}{p^2+(2)^2} + 20\frac{p}{p^2+(3)^2}.$$

Par conséquent, en vertu des formules (12), (13) et (14'), nous obtenons :

$$f\ (t) = \frac{5}{2}\sin 2t + 20\cos 3t.$$

Exemple 2 Trouvons l'original si transformée de Laplace est donnée par la formule

$$F\ (p) = \frac{p+3}{p^2+2p+10}.$$

Transformons la fonction $F\ (p)$:

$$\begin{aligned}
\frac{p+3}{p^2+2p+10} &= \frac{(p+1)+2}{(p+1)^2+9} = \frac{p+1}{(p+1)^2+3^2} + \frac{2}{(p+1)^2+3^2} \\
&= \frac{p+1}{(p+1)^2+3^2} + \frac{2}{3}\frac{3}{(p+1)^2+3^2}.
\end{aligned}$$

En vertu des formules (19) et (20), nous trouvons l'original

$$F(p) \longrightarrow e^{-t}\cos 3t + \frac{2}{3}e^{-t}\sin 3t.$$

5.12 Applications de la transformation de Laplace

La transformation de Laplace constitue une méthode puissante pour résoudre certaines équations différentielles, certains systèmes différentiels, et équations aux dérivées partielles. Elle réduit le problème de résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants à un problème algébrique. Dans ce chapitre, nous allons voir comment on utilise la transformation de Laplace pour résoudre certaines équations différentielles.

5.12.1 Applications de la transformée sur les équations différentielles

La résolution des équations différentielles linéaires par la méthode de Laplace se fait en quatre étapes comme suit :

1) on établit l'équation différentielle à résoudre,

2) on applique les propriétés de dérivation et autres de la transformation de Laplace à l'équation considérée,

3) on détermine la solution $\overline{x}(p)$ de **l'équation auxiliaire** que l'on développe en termes simples,

4) il reste à déterminer la solution $x(t)$.

Soit donnée une équation différentielle linéaire du n-ième ordre à coefficients constants $a_0, a_1, .., a_{n-1}, a_n$

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+...+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx(t)=f(t), \tag{27}$$

on demande de trouver la solution $x=x(t)$ de cette équation pour $t\geq 0$, vérifiant les conditions initiales :

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x'_0,\ ...,\ x^{(n-1)} = x_0^{(n-1)}. \tag{28}$$

On rappelle que problème à déjà été résolu de la manière suivante :

Nous cherchons d'abord la solution générale de l'equation (27) contenant n constantes arbitraires ; ensuite nous déterminons les constantes de manière que les conditions initiales (28) soient vérifiées.

Nous exposerons maintenant une méthode plus simple de résolution de ce problème, la méthode du calcul opérationnel. Nous cherchons la transformée de Laplace de la solution $x(t)$ de l'équation (27) vérifiant les conditions (28). Désignons cette transformée L par $x(p)$ ainsi $x(p) \rightarrow x(t)$.

Supposons que la transformée de la solution de l'équation (27), ainsi que de ses dérivées jusqu'à l'ordre n existe (une fois la solution trouvée, nous pouvons vérifier la validité de cette supposition).

Multiplions les deux membres de l'égalité (27) par $\exp^{-pt}$, oú $p = a + ib$ et intégrons en t entre les limites 0 et ∞ :

$$a_0 \int_0^{\infty} e^{-pt}\frac{d^n x}{dt^n}dt + a_1 \int_0^{\infty} e^{-pt}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}dt + ... + a_n \int_0^{\infty} e^{-pt}x(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-pt}f(t)dt. \tag{29}$$

Dans le premier membre de l'égalité nous avons la transformée L de la fonction $x(t)$ et de ses dérivées, dans le second membre la transformée de la fonction $f(t)$ que nous désignerons par $F(p)$. Par conséquent l'égalité (29) peut être mise sous la forme

$$a_0 L\{\frac{d^n x}{dt^n}\} + a_1 L\{\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\} + ... + a_n L\{x(t)\} = L\{f(t)\}.$$

Remplaçant dans cette égalité les transformées de la fonction et de ses dérivées par les expressions (23), (25), (26), nous obtenons

$$\begin{cases} a_0\{p^n\overline{x}(p) - [p^{n-1}x_0 + P^{n-2}x'_0 + P^{n-3}x''_0 + ... + x_0^{(n-1)}]\} \\ \quad +a_1\{p^{n-1}\overline{x}(p) - [p^{n-2}x_0 + P^{n-3}x'_0 + ... + \ x_0^{(n-2)}]\} \\ \qquad +... + \ a_{n-1}\{p\overline{x}(p) - x_0\} + a_n\overline{x}(p) = F(p). \end{cases} \tag{30}$$

L'équation (30) est appelée **équation auxiliaire** ou équation image. Dans cette équation l'inconnue est la transformée de Laplace $\overline{x}(p)$, que nous déterminons à partir de cette équation. Transformons cette équation en laissant dans le premier membre les termes contenant $\overline{x}(p)$:

$$\begin{aligned} &\overline{x}(p)[a_0p^n + a_1p^{n-1} + ... + \ a_{n-1}p + a_n] = \qquad (30') \\ &a_0[p^{n-1}x_0 + P^{n-2}x'_0 + ... + x_0^{(n-1)}] + a_1[p^{n-2}x_0 + P^{n-3}x'_0 + ... + x_0^{(n-2)}] \\ &+... + \ a_{n-2}[px_0 + x'_0] + a_{n-1}x_0 + F(p). \end{aligned}$$

Le coefficient de $\overline{x}(p)$ dans le premier membre de l'égalité (30') est un polynôme en p d'ordre n que l'on peut obtenir si dans le premier membre de l'équation (27), on remplace les dérivées par les puissances correspondantes de p. Désignons-le par $\Phi_n(p)$:

$$\Phi_n(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + ... + a_{n-1}p + a_n. \tag{31}$$

Le second membre de l'équation (30') est ainsi composé :

le coefficient a_{n-1} est multiplié par x_0,

le coefficient a_{n-2} est multiplié par $px_0 + x'_0$,

....

le coefficient a_1 est multiplié par $p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x'_0 + ... + x_0^{(n-2)}$,

le coefficient $a_0$est multiplié par $p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x'_0 + p^{n-3}x''_0 + ... + x_0^{(n-1)}$.

On fait la somme de tous ces produits. Ajoutons encore la transformée du second membre de l'équation différentielle $F(p)$. Tous les termes du second membre de l'égalité (30'), $F(p)$ excepté, constituent après groupement des termes semblables, un polynôme en p de degré $n-1$ dont les coefficients sont connus. Désignons-le par $\Phi_{n-1}(p)$.
L'équation (30') peut être s'écrite ainsi :

$$\overline{x}(p)\Phi_n(p) = \Phi_{n-1}(p) + F(p).$$

Nous déterminons $\overline{x}(p)$ à partir de cette équation

$$\overline{x}(p) = \frac{\Phi_{n-1}(p)}{\Phi_n(p)} + \frac{F(p)}{\Phi_n(p)}. \tag{32}$$

Il s'ensuit que $\overline{x}(p)$ ainsi déterminé est la transformée de la solution $x(t)$ de l'équation (27), vérifiant les conditions initiales (28). Si maintenant nous trouvons la fonction $x^*(t)$ dont la transformée de Laplace est la fonction $\overline{x}(p)$, définie par l'égalité (32), il découlera alors du théorème d'unicité que $x^*(t)$ est la solution de l'équation (27) vérifiant les conditions (28), autrement dit

$$x^*(t) = x(t).$$

Remrque. Si nous voulons trouver la solution de l'équation (27) pour les conditions initiales nulles : $x_0 = x_0' = x_0^{''} = ... = x_0^{n-1} = 0$, alors dans l'égalité (32), nous aurons $\Phi_{n-1}(p) = 0$ et elle sera de la forme

$$\overline{x}(p) = \frac{F(p)}{\Phi_n(p)}$$

ou

$$\overline{x}(p) = \frac{F(p)}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + ... + a_{n-1}p + a_n}. \tag{32'}$$

5.12.2 Exemples de résolution des équations différentielles par la transformée de Laplace

ExempleTrouver la solution de l'équation

$$\frac{dx}{dt} + x = 1$$

vérifiant les conditions initiales : $x = 0$ pour $t = 0$.

Solution

Formant l'équation auxiliaire

$$\overline{x}(p)(p+1) = 0 + \frac{1}{p} \quad \text{ou} \quad \overline{x}(p) = \frac{1}{(p+1)p}.$$

Décomposons la fraction du second membre en éléments simples, nous obtenons :

$$\overline{x}(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Grâce aux formules 1 et 4 du tableau, nous trouvons la solution

$$x(t) = 1 - e^{-t}.$$

Exemple : Trouver la solution de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 1,$$

vérifiant les conditions initiales : $x_0 = x'_0 = 0$ pour $t = 0$.

Solution

Ecrivons l'équation auxiliaire (30')

$$\overline{x}(p)(p^2+9)=\frac{1}{p} \quad \text{ou} \quad \overline{x}(p)=\frac{1}{p(p^2+9)}.$$

Décomposonn cette fraction en éléments simples, nous obtenons :

$$\overline{x}(p)=\frac{\frac{-1}{9}p}{(p^2+9)}+\frac{\frac{1}{9}}{p}.$$

En vertu des formules (1) et (3) du tableau nous trouvons la solution :

$$x(t)=\frac{-1}{9}\cos 3t+\frac{1}{9}.$$

Exemple : Soit à résoudre

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+2x=e^t,$$

avec les conditions initiales $x(0)=1$, $x'(0)=0$ pour $t=0$.

Solution

Le passage à la transformée de Laplace donne :

$$(p^2-3p+2)\pounds\{x(t)\}-p+3=\frac{1}{p-1},$$

soit :

$$\pounds\{x(t)\}=\frac{p^2-4p+4}{(p^2-3p+2)(p-1)}=\frac{p-2}{(p-1)^2}=\frac{-1}{(p-1)^2}+\frac{1}{p-1}.$$

La transformée de Laplace inverse d'une fraction rationnelle décomposée en éléments simples s'obtient facilement :

$$x(t)=-te^t+e^t=(1-t)e^t.$$

Exemple : On cherche à résoudre

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = \sin t,$$

avec les conditions initiales $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$ pour $t = 0$.

Solution

Ecrivons l'équation auxiliaire (30')

$$\overline{x}(p)(p^2 + 2p + 5) = p.1 + 2 + 2.1 + \pounds\,\{\sin t\}$$

ou

$$\overline{x}(p)(p^2 + 2p + 5) = p + 4 + \frac{1}{p^2 + 1},$$

d'où nous trouvons $\overline{x}(p)$:

$$\overline{x}(p) = \frac{p+4}{(p^2 + 2p + 5)} + \frac{1}{(p^2 + 1)(p^2 + 2p + 5)}.$$

En décomposant la dernière fraction du second membre en éléments simples, nous pouvons écrire :

$$\overline{x}(p) = \frac{\frac{11}{10}p + 4}{(p^2 + 2p + 5)} + \frac{-\frac{1}{10}p + \frac{1}{5}}{(p^2 + 1)}.$$

donc

$$\overline{x}(p) = \frac{11}{10}\frac{p+1}{(p+1)^2 + 2^2} + \frac{29}{10.2}.\frac{2}{(p+1)^2 + 2^2} - \frac{1}{10}.\frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{5}.\frac{1}{p^2 + 1}.$$

En vertu des formules (8), (7), (3) et (2) du tableau précédent, nous trouvons la solution

$$x(t) = \frac{11}{10}e^{-t}\cos 2t + \frac{29}{20}e^{-t}\sin 2t - \frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{5}\sin t$$

ou

$$x(t) = e^{-t}(\frac{11}{10}\cos 2t + \frac{29}{20}\sin 2t) - \frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{5}\sin t.$$

Bibliographie

[1] Frank Ayres JR, Série Schaum, *Théorie et Application du Calcul Differentiel et Intégral*, McGraw-Hill Inc. New York, 1972.

[2] J. Bass, *Cours de mathématiques,* tomes 1 et 2, Masson, Paris, 1968.

[3] Bibmath.net (la bibliothèque des mathématiques)

[4] P. Florent, G. Lauton, M. Lauton. *Equations et systèmes différentiels*, Les Presse de l'université du Québec, C.P. 250, Succursale N, Montréal, H2X 3M4 Canada, 1978.

[5] P. Florent, G. Lauton, M. Lauton. *Suites et fonctions numériques.* Les Presse de l'université du Québec, C.P. 250, Succursale N, Montréal, H2X 3M4 Canada, 1977.

[6] Ahmed Lesfari, *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace*, Ellipse, Paris, 2013.

[7] R. Murray.Spiegel, *Théorie et Application de L'Analyse,* McGraw-Hill Inc. New York, 1973.

[8] R. Murray.Spiegel, *Transformées de Laplace*, McGraw-Hill, 1980.

[9] N. Piskounov. *Calcul Différentiel et Intégral,* tome I et II, Mir Moscou 1980-1978.A.

[10] J. Quinet, *Cours élémentaires de mathématiques supérieures*, tome 3 et 4, Dunod, Paris, 1977.

[11] A. Taik, *Transformation de Laplace et de Fourier*, Cours , Mohammedia, 2008.