République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Ferhat Abbas Setif1
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques.

POLYCOPIE DE COURS

Pour L2 et M1 Physique

Séries de Fourier, Transformée de Fourier, Transformée de Laplace

Préparé par

AISSA BENSEGHIR

Année 2021/2022

Table des matières

Avant propos

Ce cours concerne les étudiants de L2 et de M1 de la filière Physique . Il comporte les séries de Fourier, la transformée de Fourier, la transformée de Laplace.
Les séries de Fourier constituent un outil fondamental pour étudier les phénomènes , fonctions périodiques. En ingénierie elles sont utiles dans la décomposition de signaux périodiques tels que des courants électriques, des ondes cérébrales, des ondes sonores, des images etc. L'analyse de Fourier peut être considérée comme une façon de décrire les fonctions périodiques. Des opérations telles que la dérivation s'écrivent simplement à partir des coefficients de Fourier. Les séries de Fourier ont été introduites par Joseph Fourier en 1982. Ces séries ont ensuite constitué une des bases de plusieurs branches fondamentales des mathématiques.
La transformée de Fourier est une extension pour les fonctions non périodiques du développement en série de Fourier des fonctions périodiques. La transformée (continue) de Fourier (également appelée intégrale de Fourier) associe à une fonction $F(x)$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est une fonction notée $\mathcal{F}(F(x))(\xi)$ ξ est une variable indépendante de x , appelée variable duale.
Les transformées -intégrales de Fourier- constituent un pilier de l'analyse de Fourier qui ont par la suite constitué une base majeure de diverses branches mathématiques et de l'analyse du signal. Cette transformation mathématique peut être très utile pour résoudre certaines équations différentielles car bien plus simple à résoudre dans l'espace de Fourier (l'espace fréquentiel).
La transformée de Laplace d"une fonction $f(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est un opérateur intégrale conduisant à une nouvelle fonction de p, p la variable duale (indépendante de x). Cette transformation mathématique fut introduite par P-S. Laplace dans un cadre théorique de probabilités. La transformée de Laplace a la propriété de transformer très simplement la dérivée de la fonction originale f . Cette propriété permet un traitement simple des équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre $n \geq 2$. Il suffit de transposer l'équation différentielle dans le domaine de Laplace pur obtenir une équation algébrique relativement simple à manipuler et résoudre. Du fait de ces propriétés, la transformée de Laplace est utilisée en automatique et pour déterminer la fonction de transfert d'un système linéaire. Contrairement à la transformée de

Fourier qui est utilisée pour la détermination du spectre d'un signal donné.
Parmi les pré-requis à ce cours figurent les intégrales généralisées et la décomposition en éléments simples de fractions rationnelles.
Chaque chapitre est suivi d'une liste d'exercices ; avec des indications, qui sont généralement une illustration d'un point abordé antérieurement. Il est inutile d'insister sur le fait que ces exercices constituent le complément du cours.

Chapitre 1

Séries de Fourier

1.1 Définition

On appelle série de Fourier une série dont le terme général est de la forme :

$$u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \qquad (a_n \in \mathbb{R},\ b_n \in \mathbb{R}).$$

On a donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \cdots + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) + \cdots$$

Le terme général $u_n(x)$ est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de période $T_n = \dfrac{2\pi}{n}\cdot$ Il en résulte qu'en cas de convergence la somme d'une série de Fourier est une fonction périodique, de période $T = 2\pi$.

Remarque 1.1.1. On a la majoration $|u_n(x)| < |a_n| + |b_n|$.

Si donc les séries numériques $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sont absolument convergentes, la série de Fourier est également absolument convergente et même uniformément convergente car majorée par une série numérique convergente. Elle est dans ce cas dérivable et intégrable terme à terme.

1.2 Calcul des coefficients

Soit une série de Fourier convergente de somme $f(x)$:

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x)) + \cdots + (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) + \cdots$$

En supposant la série intégrable terme à terme sur $[0,2\pi]$ on obtient :

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]dx.$$

Or

$$\int_0^{2\pi} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]dx = \left[a_n \frac{\sin(nx)}{n} - b_n \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} = 0,$$

d'où :

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx}$$

Le calcul de a_n et b_n peut s'effectuer de la même façon à partir des intégrales

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(px)dx \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} f(x)\sin(px)dx, \quad (p \in \mathbb{N}).$$

En effet :

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(px)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]\cos(px)dx.$$

Si $p \neq n$, $\displaystyle \int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(px)dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos((n+p)x) + \cos((n-p)x)]dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+p)x)}{n+p} + \frac{\sin((n-p)x)}{n-p} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Si $p = n$, $\displaystyle \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(2nx) + 1]dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2nx)}{2n} + x \right]_0^{2\pi} = \pi.$$

Si $p \neq n$, $\displaystyle \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(px)dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\sin((n+p)x) + \sin((n-p)x)]dx$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((n+p)x)}{n+p} - \frac{\cos((n-p)x)}{n-p} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Si $p = n$, $\displaystyle \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(nx)dx = \left[\frac{\sin(2nx)}{2n} \right]_0^{2\pi} = 0.$

On obtient donc, en choisissant $p = n$:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \pi a_n,$$

d'où :

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx}$$

De la même façon :

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(px)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]\sin(px)dx.$$

Un calcul analogue conduit, en choisissant $p = n$, à :

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = \pi b_n,$$

d'où :

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx}$$

Remarque 1.2.1. **(importante)** Les intégrales intervenant dans le calcul des coefficients de Fourier peuvent être calculées sur un intervalle quelconque d'amplitude $2\pi,\ [x_0,\ x_0+2\pi]$. En effet :

$$\pi a_n = \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \int_0^{x_0} f(x)\cos(nx)dx + \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x)\cos(nx)dx + \int_{x_0+2\pi}^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx,$$

en posant $x = 2\pi + t$ la troisième intégrale devient :

$$\int_{x_0+2\pi}^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \int_{x_0}^{0} f(2\pi+t)\cos(n(2\pi+t))dx = \int_{x_0}^{0} f(t)\cos(nt)dx,$$

car la fonction f a pour période 2π.

D'où :

$$\pi a_n = \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x)\cos(nx)dx.$$

En désignant par $\mathscr{T}$ un intervalle quelconque d'amplitude 2π on a donc :

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathscr{T}} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\mathscr{T}} f(x)\cos(nx)dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\mathscr{T}} f(x)\sin(nx)dx}$$

<u>Cas des fonctions paires.</u>– En choisissant $\mathscr{T} = [-\pi, +\pi]$ On obtient :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx = a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,$$

(car $f(x)$ et $f(x)\cos(nx)$ sont paires).

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0, \quad \text{car } f(x)\sin(nx) \text{ est impaire.}$$

La série de Fourier est dans ce cas une série de cosinus :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

Cas des fonctions impaires.– En choisissant encore $\mathscr{T} = [-\pi, +\pi]$ On obtient de la même façon :

$$a_0 = 0,\ a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx,$$

car $f(x)\sin(nx)$ est impaire.

La série de Fourier est une série de sinus :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

1.3 Développement d'une fonction en série de Fourier

1.3.1 Cas d'une fonction périodique

A toute fonction f intégrable, de période $T = 2\pi$ on peut associer une série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$, appelée série de Fourier de f, dont les coefficients ont été calculés au paragraphe précédent.

La question se pose de savoir si cette série est convergente et dans ce cas si sa somme est $f(x)$.

La réponse est donnée par le théorème suivant dont on admettra la démonstration.

Théorème 1.3.1. Si f est une fonction périodique, de période 2π, continue et continûment dérivable sauf en un nombre fini de points par période,points en lesquels f ou $f^{'}$ admettent une limite à gauche, la série de Fourier associée à f est convergente sur $\mathbb{R}$ et a pour somme

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] \quad \text{(Figure 1.1)}$$

En tout point où f est continue on a donc :

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))}$$

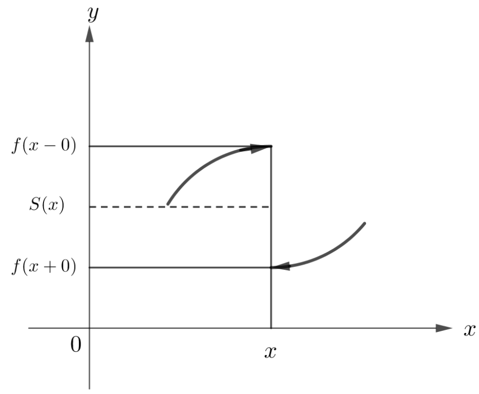


FIGURE 1.1 –

Exemple 1.3.2. Développer en série de Fourier la fonction f de période 2π définie par $f(x) = x$ si $x \in]-\pi, +\pi[$ (Figure 1.2).

La fonction est impaire et se développe donc en série de sinus

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}\right] + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx = -\frac{2}{n}\cos(n\pi) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

D'où $f(x) = 2[\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin(nx) + \dots]$.

pour $x = \pi$ on vérifie que la série a pour somme $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = 0$

pour $x = \frac{\pi}{2}$ on obtient :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \dots\right],$$

d'où :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \dots$$

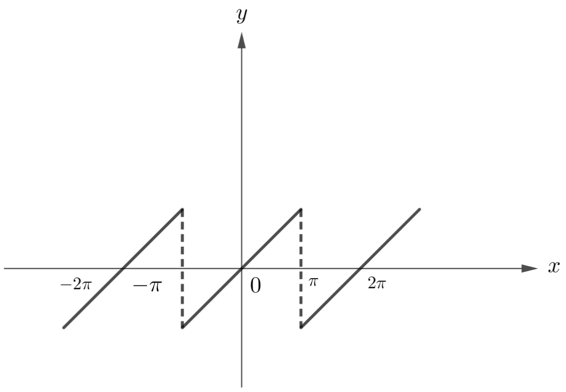


FIGURE 1.2 –

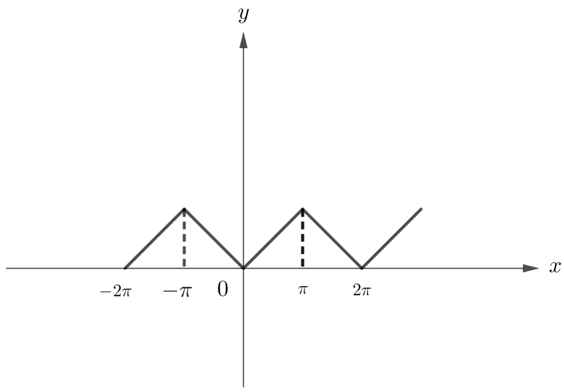


FIGURE 1.3 –

Exemple 1.3.3. Développer en série de Fourier la fonction f de période 2π définie par $f(x) = |x|$ si $x \in [-\pi, +\pi]$ (Figure 1.3).

La fonction est paire et admet un développement en série de cosinus

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\,.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx = -\frac{2}{\pi n}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}(\cos(n\pi) - 1).$$

Si $n = 2p,\ a_{2p} = 0.$

Si $n = 2p+1,\ a_{2p+1} = \dfrac{2}{\pi(2p+1)^2}\cdot(-2) = -\dfrac{4}{\pi(2p+1)^2}.$

D'où :

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}.$$

Remarque 1.3.4. On constate que sur $[0, \pi]$ les deux séries précédentes, bien que différentes, représentent la même fonction $f(x) = x$. Sur un intervalle donné le développement d'une fonction en série de Fourier n'est pas unique.

1.3.2 Cas d'une fonction quelconque

Soit f une fonction définie et bornée sur un certain intervalle $[a, b]$. Pour développer f en série de Fourier il est nécessaire de la prolonger en une fonction périodique.

Soit donc g la fonction de période $T = b - a$ qui coïncide avec f sur $[a, b]$:

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \in]a, b[, \\ g(x+T) = g(x) \end{cases} \qquad \text{(Figure 1.4)}$$

g vérifie les hypothèses du théorème fondamentale et possède un développement en série de Fourier dont le terme générale a pour période $\dfrac{T}{n}$:

$$u_n = a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right).$$

En posant $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, on a donc pour $x \in]a, b[$:

$$g(x) = f(x) = a_0 + a_1\cos(\omega x) + b_1\sin(\omega x) + \cdots + a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x) + \ldots$$

avec si $\mathscr{T}$ représente un intervalle quelconque d'amplitude T

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_{\mathscr{T}} f(x)dx;\ a_n = \frac{2}{T}\int_{\mathscr{T}} f(x)\cos(n\omega x)dx;\ b_n = \frac{2}{T}\int_{\mathscr{T}} f(x)\sin(n\omega x)dx}$$

(même calcul qu'au paragr. 2).

Dans certains cas il est parfois utile en physique de développer f en série de cosinus ou en série de sinus.

Il suffit alors de la prolonger en une fonction périodique de période $T > b - a$, paire ou impaire suivant les cas (Figure 1.5).

Pour $x \in]a, b[$ on a alors :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega x)$$

ou encore

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\omega x).$$

On voit qu'il existe une infinité de séries de Fourier représentant une fonction donnée sur un intervalle donné.

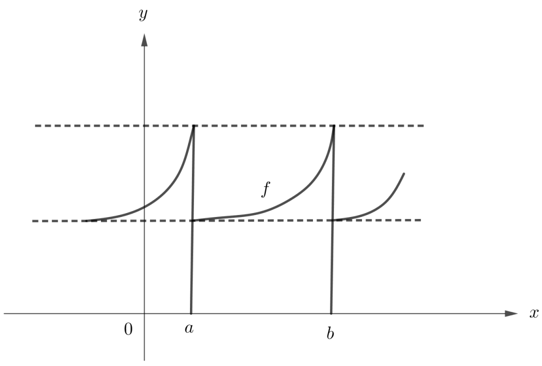


FIGURE 1.4 –

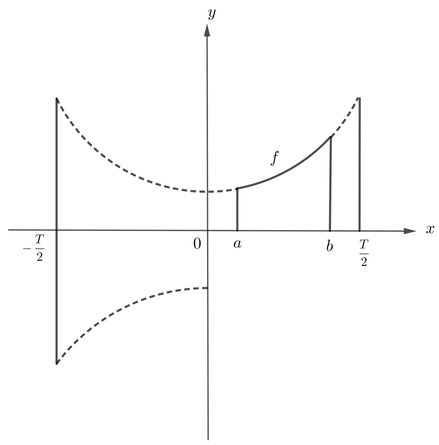


FIGURE 1.5 –

Exemple 1.3.5. Développer en série de sinus la fonction f définie par :

$$f(x) = 1 \text{ si } x \in [0, 1] \quad \text{(Figure 1.6)}$$

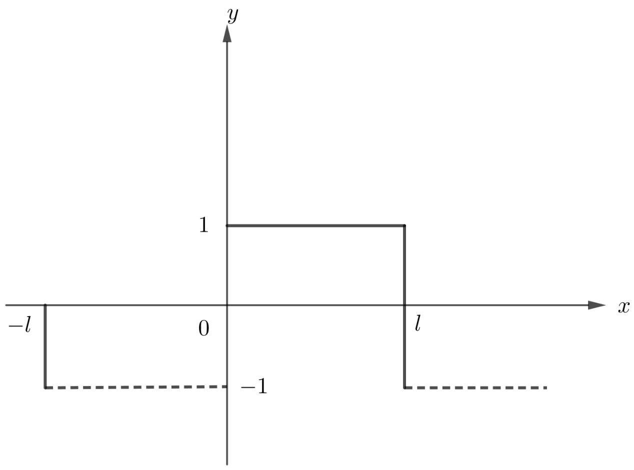


FIGURE 1.6 –

soit g la fonction de période $T = 2l$ définie par :

$$\begin{cases} g(x) = 1 & \text{si} \quad 0 < x < l \\ g(x) = -1 & \text{si} \quad -l < x < 0 \end{cases}$$

g est développable en série de sinus :
$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x)$,

$$\text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l}.$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-l}^{+l} g(x)\sin(n\omega x)dx = \frac{2}{l}\int_0^l \sin(n\frac{\pi}{l}x)dx = \frac{2}{n\pi}\left[-\cos(n\frac{\pi}{l}x)\right]_0^l.$$

Si $n = 2p, \quad b_{2p} = 0$.
Si $n = 2p+1, \quad b_{2p+1} = \dfrac{4}{\pi(2p+1)}$.
Pour $0 < x < l$ on a donc :

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{2p+1}\sin((2p+1)\frac{\pi}{l}x).$$

1.4 Forme complexe d'une série de Fourier

Soit f une fonction de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ développable en série de Fourier

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

En appliquant les formules d'Euler le terme général $u_n(x)$ peut s'écrire

$$u_n(x) = a_n \frac{e^{jn\omega x} + e^{-jn\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega x} - e^{-jn\omega x}}{2j}.$$

$$u_n(x) = \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega x} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega x}.$$

Il est utile de poser :

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n),$$

soit

$$c_n = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{T}\int_{\mathscr{T}} f(x)\cos(n\omega x)dx - j\frac{2}{T}\int_{\mathscr{T}} f(x)\sin(n\omega x)dx\right]$$

c'est-à-dire

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_{\mathscr{T}} f(x) e^{-jn\omega x} dx}$$

On a alors

$$u_n(x) = c_n e^{jn\omega x} + \overline{c}_n e^{-jn\omega x}$$
$$u_n(x) = c_n e^{jn\omega x} + c_{-n} e^{-jn\omega x}$$

car $\overline{c}_n = c_{-n}$, d'où :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n e^{jn\omega x} + c_{-n} e^{-jn\omega x}).$$

Soit en posant $c_0 = a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\mathscr{T}} f(x)dx$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{jn\omega x}}$$

Ainsi développer une fonction périodique de période T en série de Fourier, c'est l'exprimer comme une combinaison linéaire infinie de fonctions périodiques, linéairement indépendantes

$$\varphi_n(x) = e^{jn\omega x} \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

de périodes $T_n = \dfrac{2\pi}{n\omega} = \dfrac{T}{n}$.

Le coefficient complexe de Fourier c_n représente la composante de f relativement à φ_n. Il peut s'écrire

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{\mathscr{T}} f(x)\overline{\varphi_n(x)}dx.$$

Si l'on pose $c_n = (f|\varphi_n)$, On remarque que :

pour $n \neq p$, $(\varphi_n|\varphi_p) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T e^{jn\omega x}\cdot e^{-jp\omega x}dx = \dfrac{1}{T}\left[\dfrac{e^{j(n-p)\omega x}}{j(n-p)\omega}\right]_0^T = 0,$

pour $n = p$, $(\varphi_n|\varphi_n) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T e^{jn\omega x}\cdot e^{-jn\omega x}dx = 1.$

On convient de dire que les fonctions $\varphi_n(x) = e^{jn\omega x}$ forment une **suite orthonormée** sur $\mathscr{T}$ relativement à la forme bilinéaire $(f|g) \longrightarrow \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\mathscr{T}} f(x)g(x)dx.$

En formant $(f|f)$ on démontre l'égalité de Bessel-Parseval :

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_{\mathscr{T}} f^2(x)dx = \sum_{-\infty}^{+\infty}|c_n|^2}$$

Or

$$|c_n|^2 = |c_{-n}|^2 = \frac{a_n^2+b_n^2}{4},$$

d'où

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_{\mathscr{T}} f^2(x)dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}}$$

Interprétation. Soit la norme de f définie par :

$$\|f\|^2 = (f|f) = \frac{1}{T}\int_{\mathscr{T}} f^2(x)dx,$$

$$\|u_n\|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T (a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x))^2dx,$$

$$\|u_n\|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \left[a_n^2\cos^2(n\omega x) + b_n^2\sin^2(n\omega x) + 2a_nb_n\cos(n\omega x)\sin(n\omega x)\right]dx.$$

Or

$$\int_0^T \cos^2(n\omega x)dx = \int_0^T \sin^2(n\omega x)dx = \frac{T}{2},$$

et

$$\int_0^T \cos(n\omega x)\sin(n\omega x)dx = 0$$

d'où :

$$\|u_n\|^2 = \frac{1}{T}\left[a_n^2\frac{T}{2} + b_n^2\frac{T}{2}\right] = \frac{a_n^2+b_n^2}{2}.$$

De même
$$\|u_0\|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T a_0^2\, dx = a_0^2.$$
L'égalité de Bessel-Parseval peut donc s'écrire

$$\boxed{\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|^2}$$

Elle traduit que le carré de la valeur efficace de f est égale à la somme des carré des valeurs efficaces des termes du développement en série de Fourier.

Exemple 1.4.1. Soit la fonction f, de période 2π, définie par $f(x) = x$ si $x \in]-\pi, +\pi[$. On a obtenu au paragraphe 3

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\left[\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) + \cdots\right] \\
\|f\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{+\pi} = \frac{\pi^2}{3} \\
\|u_n\|^2 &= \frac{b_n^2}{2} = \frac{2}{n^2}.
\end{aligned}$$

D'où
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

EXERCICES

Exercise 1. Montrer que le développement en série de Fourier de $f_1(x) = \sin^2(x)$, $f_2(x) = \cos^2(x)$, $f_3(x) = \sin^3(x)$ et $f_4(x) = \cos^3(x)$ ne comporte qu'un nombre fini de termes.

Vérifier que plus généralement $\cos^p(x)$ et $\sin^p(x)$ $(p \in \mathbb{N})$ peuvent s'exprimer à l'aide d'une somme trigonométrique de la forme :

$$\sum_{n=0}^{p}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Exercise 2. Soit f une fonction continûment dérivable sur $[0; 2\pi]$ de coefficient de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

Montrer qu'il existe K tel que :

$$|a_n(f)| < \frac{K}{n} \quad \text{et} \quad |b_n(f)| < \frac{K}{n}.$$

Si de plus f'' et continue sur $[0, 2\pi]$, montrer que

$$|a_n(f)| < \frac{K'}{n^2} \quad \text{et} \quad |b_n(f)| < \frac{K'}{n^2}.$$

En déduire que dans ce cas la série de Fourier est uniformément convergente.

Exercise 3. Développer en série de Fourier la fonction de période $T = 2\pi$ définie par

$$\begin{cases} f(x) = \pi - x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ f(x) = \pi + x & \text{si} \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

Déduire développement obtenu $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

Montrer que la série de Fourier est absolument et uniformément convergente.

Exercise 4. Développer en série de Fourier la fonction de période $T = 2\pi$ définie par

$$\begin{cases} f(x) = \pi - x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ f(x) = -\pi + x & \text{si} \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

En déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2p+1)}$.

Exercise 5. Montrer que pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$ on a à la fois :

$$\begin{aligned} x(\pi - x) &= \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2} \\ x(\pi - x) &= \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}. \end{aligned}$$

Exercise 6. Développer en série de Fourier la fonction de période $T = 2\pi$ définie par

$$f(x) = \cos(px) \quad \text{pour} \quad x \in [-\pi, +\pi] \quad (p \notin \mathbb{N}).$$

Du développement obtenu déduire que :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sin(p\pi)} &= \frac{1}{p} + \frac{2p}{1 - p^2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{2p}{n^2 - p^2} + \cdots \\ \pi \cot(p\pi) &= \frac{1}{p} + \frac{2p}{p^2 - 1} + \cdots + \frac{2p}{p^2 - n^2} + \cdots \end{aligned}$$

Exercise 7. Développer en série de Fourier la fonction définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = x^2$ (on prolongera f en une fonction périodique).

Montrer que le terme général peut s'écrire

$$u_n(x) = A_n \cos(n\omega x - \varphi_n).$$

Étudier les variations de A_n.

Exercise 8. Même exercice pour la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = e^{-x}$ (il sera commode d'utiliser les coefficient de Fourier complexe).

Exercise 9. Soit la fonction de période T définie par

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si} \quad x_0 < x < x_0 + \dfrac{T}{2} \\ f(x) = -1 & \text{si} \quad x_0 + \dfrac{T}{2} < x < x_0 + T. \end{cases}$$

Calculer l'amplitude et la phase du terme général du développement en série de Fourier.

Vérifier que seule la phase dépend de x_0. Choisir x_0 pour obtenir un développement en série de sinus, en série de cosinus.

Exercise 10. Soit f une fonction de période T développable en série de Fourier. Calculer les coefficients de Fourier complexe de la fonction g définie par

$$g(x) = f(x - x_0) \quad \text{("fonction translatée")}$$

en fonction des coefficients de Fourier de f.

Vérifier que l'amplitude du terme général ne dépend pas de x_0.

Exercise 11. (Dérivation d'une série de Fourier) Montrer que si f' est développable en série de Fourier

$$\begin{cases} a_n(f') = \quad n\omega b_n(f) \\ b_n(f') = -n\omega a_n(f) \end{cases}$$

et que, par conséquent, $u_n(f') = [u_n(f)]'$.

Application:

Du développement de la fonction $f(x) = |x|$ si $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, déduire le développement de la fonction

$$\begin{cases} g(x) = 1 & \text{si} \quad 0 < x < \pi \\ g(x) = -1 & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \quad (T = 2\pi). \end{cases}$$

Exercise 12. (Intégration d'une série de Fourier) Soit f une fonction développable en série de Fourier.

A quelle condition une primitive F de f est-elle developpable en série de Fourier ? Calculer dans ce cas $a_n(F)$ et $b_n(F)$ en fonction de $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

Application

Du développement de $f(x) = x$ si $-\pi < x < \pi$, déduire le développement de $F(x) = x^2(-\pi < x < \pi) \quad (T = 2\pi)$.

Exercise 13. Développement en série de Fourier des fonctions périodiques du temps (ou signaux périodiques) représentées sur la figure 1.7.

Comparer les deux développement.

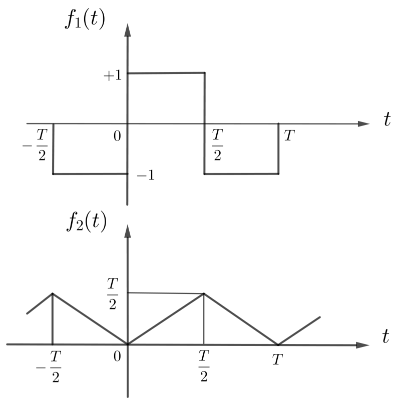


FIGURE 1.7 –

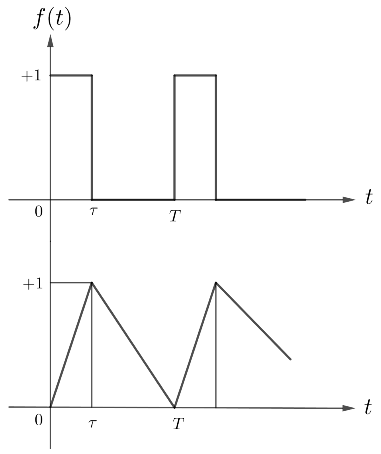


FIGURE 1.8 –

Exercise 14. Développement en série de Fourier du signal rectangulaire représenté sur la figure 1.8.

Calculer l'amplitude A_n et le déphasage φ_n de l'harmonique de rang n. Représenter en fonction de n les variations de A_n (spectre de fréquence).

Montrer qu'on peut choisir τ de façon à supprimer un certain nombre d'harmoniques.

Cas où $\tau = \dfrac{T}{2}$; $\tau = \dfrac{T}{3}$.

Exercise 15. Même exercice pour le signal triangulaire représenté sur la figure 1.8.

Cas où $\tau \to 0$; $\tau = \dfrac{T}{2}$; $\tau = T$.

Exercise 16. Calculer les coefficients de Fourier complexe de la fonction de période $T = \dfrac{\pi}{\omega}$ définie par

$$i(t) = \mathrm{I}|\sin(\omega t)|$$

(Courant alternatif redressé à deux alternances).

Appliquer en développement obtenu la formule de Parseval. Combien de termes sont nécessaires pour obtenir $\dfrac{90}{100}$ de l'intensité efficace ?

Exercise 17. Même exercice pour

$$\begin{cases} i(t) = \mathrm{I}\sin(\omega t) & \text{pour} \quad 0 < t < \dfrac{T}{2} \\ i(t) = \quad 0 & \text{pour} \quad \dfrac{T}{2} < t < T \quad \text{(Figure 1.9)} \end{cases}$$

(courant alternatif redressé à une alternance).

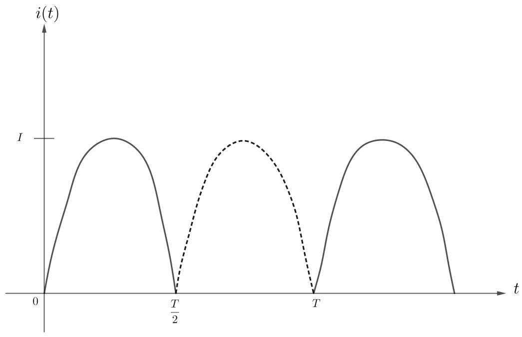


FIGURE 1.9 –

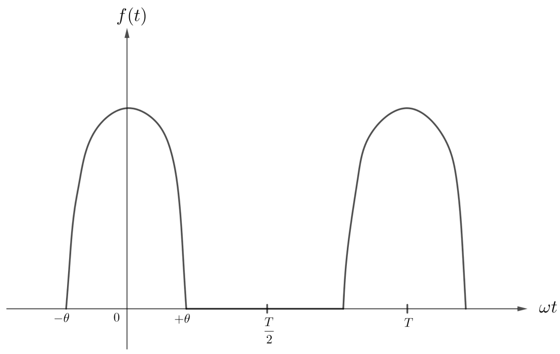


FIGURE 1.10 –

Exercise 18. Soit le signal de période T défini par

$$\begin{cases} f(t) = A(\cos(\omega t) - \cos(\theta)) & \text{si} \qquad -\theta < \omega t < \theta \\ f(t) = \quad 0 & \text{si} \qquad -\dfrac{T}{2} < \omega t < -\theta \text{ et } \theta < \omega t < \dfrac{T}{2} \end{cases} \quad \text{(Figure 1.10)}$$

Étudier en fonction de θ les variations de l'amplitude des premières harmoniques.
Cas où $\theta = \dfrac{T}{4}$.

Exercise 19. Soit f et g deux fonctions de période T.
On pose $(f|g) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\mathcal{T}} f(x)\overline{g(x)}dx \quad (\mathcal{T} = [x_0, x_0 + T])$.
Vérifier que $(f, g) \to (f|g)$ est une forme bilinéaire telle que $(g|f) = \overline{(f|g)}$ (produit hermitien).
Soit $\|f\| = \sqrt{(f|f)}$. Montrer en formant $\|f + \lambda g\|^2$ que $(f|g) \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$ (inégalité de schwarz).
En déduire que $\|f\|$ a les propriété d'une norme.
Application:
Soit les fonctions $e_p(x) = e^{jpx}$ $(p \in \mathbb{Z})$.
Vérifier que ces fonctions forment une famille orthonormée pour le produit hermitien précédent.

Exercise 20. Soit f une fonction développable sous la forme

$$f(x) = \sum_{p=-n}^{p=+n} c_p e^{jpx}.$$

En utilisant les résultats de l'exercice précédent calculer $\|f\|^2$.
En déduire la formule de Perceval dans ce cas particulier.

Exercise 21. Appliquer la formule de Parseval aux développements obtenus aux exercices 13 et 14.

Exercise 22. On pose $d(f,g) = \|f - g\|$.

Montrer que $d(f,g)$ a les propriétés d'une distance (cf. Analyse 1, chap. 13).
Soit $f_n(x) = \sum_{p=-n}^{p=+n} \alpha_p e^{jpx}$, vérifier que $d(f, f_n)$ est minimum si $\alpha_p = c_p$ (coefficient de Fourier de f).

Indications sur les exercices

Exercice 1 $\begin{cases} \sin^2(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x) \\ \cos^2(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2x). \end{cases}$ $\begin{cases} \sin^3(x) = \dfrac{3}{4}\sin(x) - \dfrac{1}{4}\sin(3x) \\ \cos^3(x) = \dfrac{3}{4}\cos(x) + \dfrac{1}{4}\cos(3x). \end{cases}$

Plus généralement $\cos^p(x) = \left(\dfrac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}\right)^p = \cdots$

Exercice 2

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[f(x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin(nx)dx \\
b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = -\frac{1}{\pi}\left[f(x)\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos(nx)dx
\end{aligned}$$

$$|a_n(f)| < \frac{1}{\pi n}\left|\int_0^{2\pi} f'(x)\sin(nx)dx\right| < \frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi} |f'(x)|dx < \frac{K}{n}$$

$$|b_n(f)| < \frac{1}{\pi n}|f(0) - f(2\pi)| + \frac{1}{\pi n}\left|\int_0^{2\pi} f'(x)\cos(nx)dx\right| < \frac{K}{n}\cdot$$

Si f'' est continue sur $[0, 2\pi]$:

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi n}\left[f'(x)\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi n^2}\int_0^{2\pi} f''(x)\cos(nx)dx.$$

D'où $|a_n(f)| < \dfrac{K'}{n^2}\cdot$ De même $|b_n(f)| < \dfrac{K'}{n^2}\cdot$

Dans ce cas :

$$|u_n(x)| < |a_n| + |b_n| < \frac{C}{n^2}\cdot$$

La série de Fourier, majorée par une série numérique convergente, est uniformément convergente.

Exercice 3 Fonction paire : développement en série de cosinus

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}.$$

Pour $x = 0$: $\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$, d'où $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

$$|u_n(x)| = \frac{4}{\pi}\frac{|\cos((2p+1)x)|}{(2p+1)^2} < \frac{4}{\pi}\frac{1}{(2p+1)^2} : \text{ convergence uniforme.}$$

Exercice 4 Fonction impaire : développement en série de sinus

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}.$$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$: $\frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}$, d'où $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 5 Soit la fonction f définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$. Elle peut être prolongée ;

- Soit en une fonction paire, de période $T = \pi$ ($\omega = 2$), développable en série de cosinus

$$g(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2nx).$$

- Soit en une fonction impaire, de période $T = 2\pi$, développable en série de sinus

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

sur $[0,\pi]$ on a $f(x) = g(x) = h(x)$.
(Remarque : la série de h est plus rapidement convergente que la série de g).

Exercice 6

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(px)}{p}\right]_0^{\pi} = \frac{\sin(p\pi)}{p\pi},\\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = (-1)^n\frac{\sin(p\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{p+n} + \frac{1}{p-n}\right],\\
b_n &= 0,
\end{aligned}$$

d'où

$$f(x) = \frac{\sin(p\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{p} - \frac{2p}{p^2-1}\cos(x) + \cdots + (-1)^n \frac{2p}{p^2-n^2}\cos(nx) + \cdots\right].$$

Pour $x = 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{2p}{1-p^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{2p}{n^2-p^2} + \cdots = \dfrac{\pi}{\sin(p\pi)}$.

Pour $x = \pi$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{2p}{p^2-1} + \cdots + \dfrac{2p}{p^2-n^2} + \cdots = \pi\cot(p\pi)$.

Exercice 7 $T = 2$, $\omega = \pi$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx = \frac{4}{3}\,. \\
a_n &= \int_0^2 x^2\cos(n\pi x)dx = \frac{4}{n^2\pi^2}\,. \\
b_n &= \int_0^2 x^2\sin(n\pi x)dx = -\frac{4}{n\pi}.
\end{aligned}$$

$$u_n(x) = \frac{4}{n\pi}\left(\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} - \sin(n\pi x)\right) = A_n\cos(n\pi x - \varphi_n),$$

avec $A_n = \dfrac{4}{n\pi}\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2\pi^2}}$.

Exercice 8 $T = 1$, $\omega = 2\pi$

$$c_n = \int_0^1 e^{-x}e^{-j2\pi nx}dx = \left[\frac{e^{-(1+j2\pi n)x}}{-(1+j2\pi n)}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-1}}{1+j2\pi n},$$

d'où $a_n = 2\dfrac{1-e^{-1}}{1+4n^2\pi^2}$ et $b_n = 2\dfrac{2\pi n(1-e^{-1})}{1+4n^2\pi^2}$

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1-e^{-1})\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+4n^2\pi^2}(\cos(2\pi nx) + 2\pi n\sin(2\pi nx))\right] \\
u_n(x) &= A_n\cos(2\pi nx - \varphi_n) \quad \text{avec} \quad A_n = \frac{2(1-e^{-1})}{\sqrt{1+4n^2\pi^2}}.
\end{aligned}$$

Exercice 9

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\left(\int_{x_0}^{x_0+\frac{T}{2}}\cos(n\omega x)dx - \int_{x_0+\frac{T}{2}}^{x_0+T}\cos(n\omega x)dx\right) \\
&= \frac{4}{\pi n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(n\omega\left(x_0+\frac{T}{4}\right)\right), \\
b_n &= \frac{2}{T}\left(\int_{x_0}^{x_0+\frac{T}{2}}\sin(n\omega x)dx - \int_{x_0+\frac{T}{2}}^{x_0+T}\sin(n\omega x)dx\right) \\
&= \frac{4}{\pi n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n\omega\left(x_0+\frac{T}{4}\right)\right),
\end{aligned}$$

d'où

$$u_{2p+1} = (-1)^p \frac{4}{\pi(2p+1)} \cos\left((2p+1)\omega\left(x - x_0 - \frac{T}{4}\right)\right),$$

donc

$$A_{2p+1} = \frac{4}{\pi(2p+1)}, \quad \omega_{2p+1} = (2p+1)\omega, \quad \varphi_{2p+1} = x_0 + \frac{T}{4}.$$

Si $x_0 = -\dfrac{T}{4}$, $b_n = 0$, $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos((2p+1)\omega x)$.

Si $x_0 = 0$, $a_n = 0$, $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin((2p+1)\omega x)$.

Exercice 10

$$c_n(g) = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x-x_0)e^{-jn\omega x}dx = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega(x_0+t)}dt,$$

donc $c_n(g) = e^{-jn\omega x_0} \cdot c_n(f)$, et par conséquent $|c_n(g)| = |c_n(f)|$.

La translation ne modifie pas l'amplitude du terme général, mais sa phase.

Exercice 11

$$c_n(f') = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f'(x)e^{-jn\omega x}dx = \frac{1}{T}\left[f(x)e^{-jn\omega x}\right]_{x_0}^{x_0+T} + \frac{jn\omega}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)e^{-jn\omega x}dx,$$

d'où

$$c_n(f') = jn\omega c_n(f) \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_n(f') = n\omega b_n(f) \\ b_n(f') = -n\omega a_n(f) \end{cases}$$

$$u_n(f') = c_n(f')e^{jn\omega x} = jn\omega c_n(f)e^{jn\omega x} = \frac{d}{dx}[c_n(f)e^{jn\omega x}],$$

c'est-à-dire

$$u_n(f') = [u_n(f)]'.$$

Application :

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2} \quad \text{(cf.paragr. 3, exemple 2)}$$

par dérivation

$$g(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin((2p+1)x)}{2p+1}.$$

Exercice 12 Une condition nécessaire pour que F soit développable en série de Fourier est que

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)dx = 0,$$

c'est-à-dire que f soit à valeur moyenne nulle.

Dans ce cas : $\begin{cases} a_n(F) = -\dfrac{1}{n\omega}b_n(F) \\ b_n(F) = \dfrac{1}{n\omega}a_n(F). \end{cases}$

Application :

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n},$$

d'où

$$F(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Exercice 13

$$f_1(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sin((2p+1)\omega t)}{2p+1}$$

$$f_2(t) = \frac{T}{4} - \frac{4}{\pi\omega}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\cos((2p+1)\omega t)}{(2p+1)^2} \quad (f_1(t) = f_2'(t)).$$

Exercice 14 $u_n(x) = \dfrac{2}{n\pi}\sin\left(n\omega\dfrac{\tau}{2}\right)\cos\left(n\omega\left(x - \dfrac{\tau}{T}\right)\right)$ avec $a_0 = \dfrac{\tau}{T}$, donc

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{2}{n\pi}\left|\sin\left(n\omega\dfrac{\tau}{2}\right)\right| = \dfrac{2}{n\pi}\left|\sin\left(n\pi\dfrac{\tau}{T}\right)\right| \\ \varphi_n = n\omega\dfrac{\tau}{2} = n\pi\dfrac{\tau}{T}. \end{cases}$$

Le spectre de fréquence a pour enveloppe la courbe d'équation $y = \dfrac{2\tau}{T}\cdot\dfrac{|\sin(x)|}{x}$ (Figure 1.11).

Par exemple :

- Si $\tau = \dfrac{T}{2}$, $A_n = \dfrac{2}{n\pi}\left|\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\right| = 0$ pour $n = 2, 4, 6, \ldots$: ne subsistent que les harmoniques impairs.

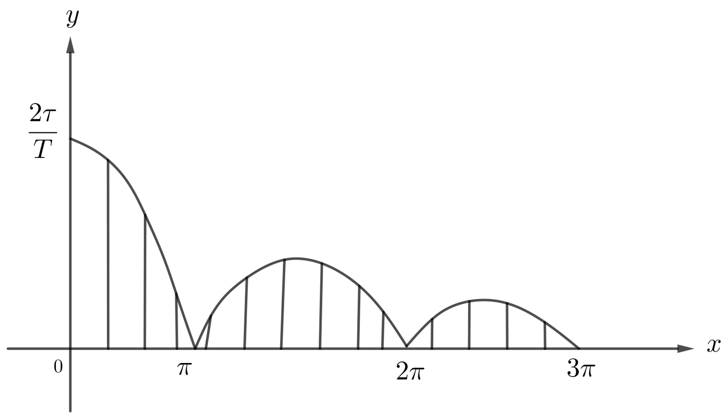


FIGURE 1.11 –

- Si $\tau = \dfrac{T}{3}$, $A_n = \dfrac{2}{n\pi}\left|\sin\left(n\dfrac{\pi}{3}\right)\right| = 0$ pour $n = 3, 6, 9, \ldots$

Exercice 15 $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\tau} & \text{si} \quad 0 < x < \tau \\ f(x) = \dfrac{T-x}{T-\tau} & \text{si} \quad \tau < x < T, \end{cases}$

d'où

$$u_n(x) = \frac{4}{\tau(T-\tau)} \cdot \frac{\sin\left(n\omega\frac{\tau}{2}\right)}{n^2\omega^2} \sin\left(n\omega\left(x - \frac{\tau}{2}\right)\right) \text{ avec } a_0 = \frac{1}{2}.$$

$$A_n = \frac{4}{\tau(T-\tau)} \cdot \frac{\left|\sin\left(n\omega\frac{\tau}{2}\right)\right|}{n^2\omega^2}$$

le spectre de fréquence a pour enveloppe la courbe d'équation $y = \dfrac{\tau}{T-\tau}\dfrac{|\sin(x)|}{x^2}$;

- Si $\tau \to 0$, $u_n(x) = \dfrac{2}{T-\tau} \cdot \dfrac{\sin\left(n\omega\frac{\tau}{2}\right)}{n\omega\frac{\tau}{2}} \cdot \dfrac{\sin\left(n\omega\left(x-\frac{\tau}{2}\right)\right)}{n\omega} \to \dfrac{2}{T}\dfrac{\sin(n\omega x)}{n\omega}$, dans ce cas

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\omega x)}{n}.$$

- Si $\tau = \dfrac{T}{2}$, $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\cos((2p+1)\omega x)}{(2p+1)^2}.$

- Si $\tau \to T$, $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(n\omega x)}{n}$.

Exercice 16 Fonction paire, de période $T = \dfrac{\pi}{\omega}$, $c_n = \dfrac{2\mathrm{I}}{\pi}\dfrac{1}{1-4n^2} = \dfrac{a_n}{2}$, d'où

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{2\mathrm{I}}{\pi}\left[1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\omega t)}{4n^2-1}\right] \\ \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt &= \frac{\mathrm{I}^2}{2} = \frac{4\mathrm{I}^2}{\pi^2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}\right). \end{aligned}$$

Exercice 17

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\mathrm{I}\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin(\omega x)\cdot e^{-jn\omega x}dx = -\frac{\mathrm{I}}{4\pi}\left[\frac{e^{j\omega(1-n)x}}{1-n} + \frac{e^{-j\omega(1+n)x}}{1+n}\right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} \qquad (n \neq 1) \\ c_{2p+1} &= 0,\ c_{2p} = -\frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{I}}{4p^2-1}, \quad \text{d'où } a_{2p} = -\frac{2}{\pi}\frac{\mathrm{I}}{4p^2-1} \text{ et } b_{2p} = 0 \\ c_1 &= \frac{\mathrm{I}\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin(\omega x)\cdot e^{-j\omega x}dx = -\frac{j\mathrm{I}\omega}{4\pi}, \text{ d'où } a_1 = 0 \text{ et } b_1 = \frac{\mathrm{I}}{2} \\ i(t) &= \mathrm{I}\left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(\omega t) - \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\cos(2p\omega t)}{4p^2-1}\right]. \end{aligned}$$

Exercice 18 Développement en série de cosinus

$$a_0 = \frac{A}{\pi}(\sin(\theta) - \theta\cos(\theta)), \quad a_1 = \frac{A}{\pi}(\theta - \sin(\theta)\cos(\theta)).$$

Exercice 19 $\begin{cases} (f_1 + f_2|g) = (f_1|g) + (f_2|g) \\ (\lambda f|g) = \lambda(f|g) \end{cases}$

et $(g, f) = \overline{(f, g)}$ (symétrie hermitienne)

d'où $\begin{cases} (f|g_1 + g_2) = (f|g_1) + (f|g_2) \\ (f|\lambda g) = \lambda(f|g) \end{cases}$

Pour l'inégalité de Schwarz, cf. Analyse 2. exercice 1.07.

Application:

$$(e_p|e_q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{jpx}\cdot e^{jqx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{j(p-q)x}dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p \neq q \\ 1 & \text{si} \quad p = q \end{cases}$$

Exercice 20

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 = (f|f) &= \left(\sum_{p=-n}^{+n} c_p e^{jpx} \middle| \sum_{q=-n}^{+n} c_q e^{jqx}\right)\\
&= \sum_{p=-n}^{+n}\sum_{q=-n}^{+n} c_p \overline{c}_q (e^{jpx}|e^{jqx})\\
&= \sum_{p=-n}^{+n} c_p \overline{c}_q \|e_p\|^2 = \sum_{p=-n}^{+n} |c_p|^2.
\end{aligned}$$

On démontre que la formule de Parseval s'étend au cas d'une sommation infinie, c'est-à-dire à la série de Fourier, $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_p e^{jpx}$.

Exercice 21 Dans le cas du signal carré, par exemple :

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sin((2p+1)\omega t)}{2p+1}\\
\|f_1\|^2 &= 1,\ \|u_{2p+1}\|^2 = \frac{a_{2p+1}^2}{2} = \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{(2p+1)^2},
\end{aligned}$$

d'où

$$1 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}.$$

Exercice 22 $d(f,g) = \|f-g\| = \left(\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T [f(x)-g(x)]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

On vérifie que :

1) $d(f,g) \geqslant 0$ et $d(f,g) = 0 \iff f = g$
2) $d(f,g) = d(g,f)$
3) $d(f,g) \leqslant d(f,h) + d(h,g)$

$$\begin{aligned}
d^2(f,f_n) &= \|f-f_n\|^2 = \left(f - \sum_{-n}^{+n}\alpha_p e^{jpx} \middle| f - \sum_{-n}^{n}\alpha_p e^{jpx}\right)\\
&= \|f\|^2 - \sum_{-n}^{+n}\overline{\alpha}_p (f|e^{jpx}) - \sum_{-n}^{+n}\alpha_p \overline{(f,e^{jpx})} + \sum_{-n}^{+n}|\alpha_p|^2\\
&= \|f\|^2 - \sum_{-n}^{+n}\overline{\alpha}_p c_p - \sum_{-n}^{+n}\alpha_p\overline{c}_p + \sum_{-n}^{+n}|\alpha_p|^2
\end{aligned}$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{-n}^{+n}|c_p|^2 + \sum_{-n}^{+n}(c_p-\alpha_p)(\overline{c}_p - \overline{\alpha}_p).$$

Or $(c_p - \alpha_p)(\overline{c}_p - \overline{\alpha}_p) \geqslant 0$, $d(f, f_n)$ est donc minimum si $\alpha_p = c_p$: la somme partielle $\sum_{-n}^{+n} c_p e^{jpx}$ réalise la meilleure approche de la fonction f au sens de la distance précédente (distance de la convergence en moyenne quadratique). De plus :

$$d^2_{\min}(f, f_n) = \|f\|^2 = \sum_{-n}^{+n} |c_p|^2 \geqslant 0,$$

d'où

$$\sum_{-n}^{+n} |c_p| \leqslant \|f\|^2 \quad \text{(inégalité de Bessel)}.$$

Application à la physique

On a vu qu'une fonction périodique, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, continue et continûment dérivable sauf en un nombre fini de points par période, est développable en série de Fourier sous la forme

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega x) + \sin(n\omega x))$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx,\ a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx,\ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx.$$

On peut donc considérer f comme la somme

- d'un terme constant a_0, égal à la valeur moyenne de f sur une période,
- d'un nombre infini de termes sinusoïdaux de périodes $T, \frac{T}{2}, \ldots, \frac{T}{n}\cdot$

Le terme de période T et appelé le **fondamental**, les termes suivants **harmoniques**.

L'harmonique de rang n

$$u_n = a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

peut encore écrire sous la forme

$$u_n = A_n \cos(n\omega x - \varphi_n),$$

avec

$$\begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \tan(\varphi_n) = \frac{b_n}{a_n}\cdot \end{cases}$$

A_n Représente **l'amplitude**, $\frac{2\pi}{n\omega}$ la **période**, $n\omega$ la **pulsation** et φ_n la **phase**.

La série étant convergente, $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$: dans la pratique la somme des premières harmoniques suffit donc à représenter la fonction de façon satisfaisante. Quant à la formule de Bessel-Parseval

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(x)dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2 + b_n^2}{2},$$

elle peut encore s'écrire :

$$\boxed{f_{eff}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2 + \cdots)}$$

Elle traduit que **l'énergie de la fonction est égale à la somme des énergies des harmoniques**.

Application des séries de Fourier à l'analyse harmonique d'un signal.

Soit f une fonction périodique du temps, ou signal, supposée développable en série de Fourier :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n).$$

Si l'on représente l'amplitude A_n des différents harmoniques en fonction de leur pulsation $n\omega$ on obtient un diagramme en bâtons appelé **spectre de fréquence du signal**.

On dit qu'on a procédé à l'analyse harmonique du signal.

Exemple 1.4.2. 1) Soit le signal " dent de scie" représenté sur la figure 1.12.

Son développement en série de Fourier s'écrit :

$$f(t) = \frac{2V}{\pi}\left[\sin(t) - \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(3t) - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt) + \cdots\right].$$

Les pulsations prennent les valeurs entières $\omega = 1, 2, \ldots, n$.

D'autre part $A_1 = \dfrac{2V}{\pi}, \ldots, A_n = \dfrac{2V}{\pi n}$, c'est-à-dire $\dfrac{A_n}{A_1} = \dfrac{1}{n}\cdot$

On obtient donc le spectre de fréquence ci-contre (Figure 1.13). On remarque que les amplitudes décroissantes comme $\dfrac{1}{n}\cdot$

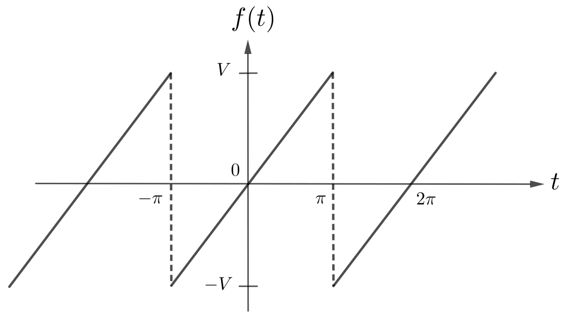


FIGURE 1.12 –

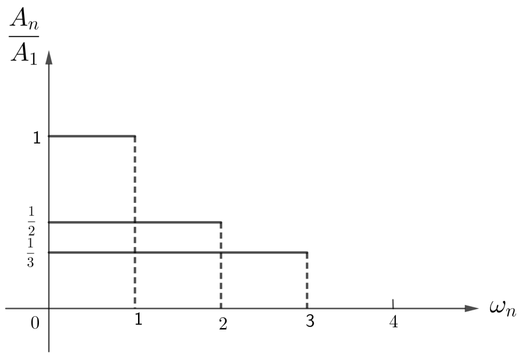


FIGURE 1.13 –

2) Soit le signal représenté sur la figure 1.14.

On obtient (cf. exercice 17)

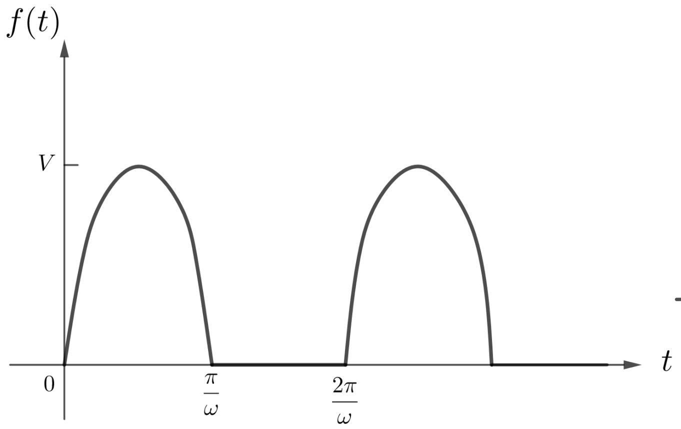


FIGURE 1.14 –

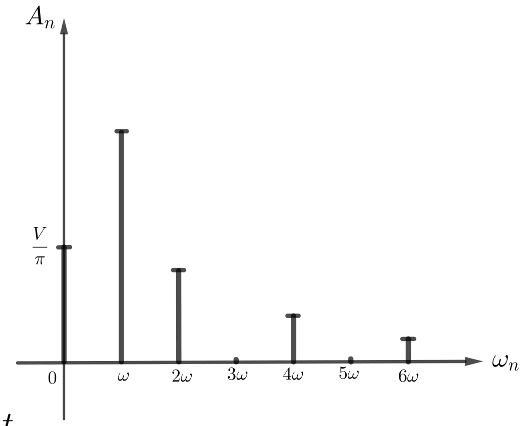


FIGURE 1.15 –

$$f(t) = \frac{V}{\pi}\left[1 + \frac{\pi}{2}\sin(\omega t) - \frac{2}{3}\cos(2\omega t) - \frac{2}{15}\cos(4\omega t) - \cdots - \frac{2}{2p^2-1}\cos(2p\omega t) - \cdots\right]$$

La valeur moyenne est $\frac{V}{\pi}\cdot$

Le fondamentale est $\frac{V}{2}\sin(\omega t)$ et l'amplitude de l'harmonique de rang $2p$ est $A_{2p} = \frac{2V}{\pi(2p^2-1)}$ $\left(\text{décroissance en } \frac{1}{n^2}\right)$. D'où le spectre de fréquence (Figure 1.15).

Les exemples précédents montrent l'intérêt du spectre de fréquence :

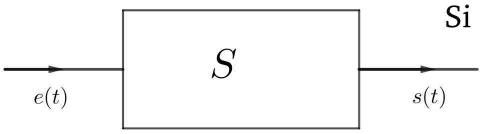
- Il caractérise le signal car un changement d'origine (ou de valeur moyenne) modifie la série de Fourier mais non les amplitudes des harmoniques.
- Il met en évidence l'importance du fondamental ainsi que la décroissance plus ou moins rapide des amplitudes des harmoniques d'ordre élevé.
- Il peut encore servir, à l'aide de la formule de Bessel-Perseval, à déterminer le nombre d'harmoniques nécessaires pour transmettre la quasi-totalité de l'énergie d'un signal (notion de bande passante).

L'analyse harmonique d'un signal est nécessaire pour déterminer la réponse d'un système linéaire S, de nature électrique ou mécanique, à une excitation donnée.

Soit en effet l'équation différentielle caractérisant le système

$$a\frac{ds}{dt} + bs(t) = e(t),$$

dans laquelle $e(t)$ représente la grandeur d'entrée et $s(t)$ la grandeur de sortie (Figure 1.16).



Si $e(t)$ est un signal développable en série de Fourier

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n),$$

on peut chercher une solution particulière sous la forme d'une série de Fourier

FIGURE 1.16 –

$$s(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega t - \psi_n).$$

Les coefficients b_0, B_n et ψ_n sont obtenus par identification.

La réponse du système est donc, en régime permanent, la fonction somme d'une série de Fourier.

Exemple 1.4.3. Soit le quadripôle représenté sur la figure 1.17.

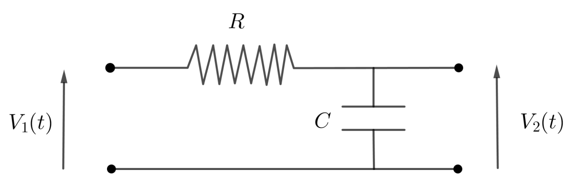


FIGURE 1.17 –

Écrire l'équation différentielle permettant d'exprimer $V_2(t)$ en fonction de $V_1(t)$.

Calculer $V_2(t)$ si $V_1(t)$ est le signal rectangulaire défini par

$$\begin{cases} V_1(t) = E & \text{si} \quad 0 < t < \dfrac{T}{2} \\ V_2(t) = -E & \text{si} \quad \dfrac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

Application des séries de Fourier à l'intégration d'équations aux dérivées partielle

Étant donné une corde de longueur l tendue entre deux points A et B (Figure 1.18), on démontre que l'élongation transversale z d'un point M d'abscisse x est à l'instant t solution de l'équation aux dérivées partielles

$$X''T - \frac{1}{a^2}XT'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \lambda \quad (\lambda \text{ constant})$$

d'où, en choisissant λ négatif pour que z soit borné,

$$\begin{cases} X(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) \quad (k = \sqrt{-\lambda}) \\ T(t) = K_1 \cos(kat) + K_2 \sin(kat) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$

avec pour conditions aux limites $z(0,t) = z(l,t) = 0$.
En cherchant des solutions de la forme $z(x,y) = X(x) \times T(t)$ (méthode de séparation des variables, cf. Analyse 2, chap. 6) on obtient successivement :

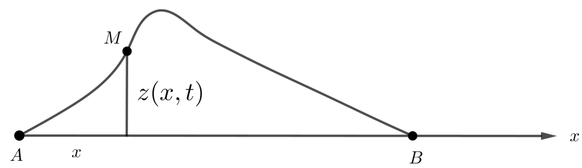


FIGURE 1.18 –

et

$$z_k(x,t) = (C_1\cos(kx) + C_2\sin(kx))(K_1\cos(kat) + K_2\sin(kat))$$

or
$$\begin{aligned} z_k(0,t) &= C_1(K_1\cos(kat) + K_2\sin(kat)) = 0 \quad \text{d'où} \quad C_1 = 0 \\ z_k(l,t) &= C_2\sin(kl)(K_1\cos(kat) + K_2\sin(kat)) = 0 \quad \text{d'où} \quad kl = n\pi. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$z_n(x,t) = \sin(\frac{n\pi}{l}x)\left(A_n\cos(\frac{n\pi a}{l}t) + B_n\sin(\frac{n\pi a}{l}t)\right).$$

Si l'on suppose la corde sans vitesse initiale,

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{d'où} \quad B_n = 0.$$

Donc

$$z_n(x,t) = A_n\sin(\frac{n\pi}{l}x)\cos(\frac{n\pi a}{l}t).$$

Par suite de la linéarité de l'équation aux dérivées partielles on peut prendre pour solution générale, sous réserve de convergence, la série

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(\frac{n\pi}{l}x)\cos(\frac{n\pi a}{l}t).$$

Les constantes A_n sont déterminées par la donnée de la position de la corde à l'instant $t = 0$.
En effet, si $z(x,0) = f(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(\frac{n\pi}{l}x) = f(x)$$

A_n est donc le coefficient de Fourier du développement de f en série de sinus. C'est-à-dire

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx.$$

D'où finalement :

$$z(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx\right)\cos(\frac{n\pi a}{l}t).$$

Exemple 1.4.4. Trouver les fréquences auxquelles vibre une corde de longueur l lâchée sans vitesse initiale de la position d'équilibre représenté sur la figure 1.19.

On a

$$z(x,0) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{2hx}{l} & \text{si} \quad 0 < x < \dfrac{l}{2}, \\ \dfrac{2h(l-x)}{l} & \text{si} \quad \dfrac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

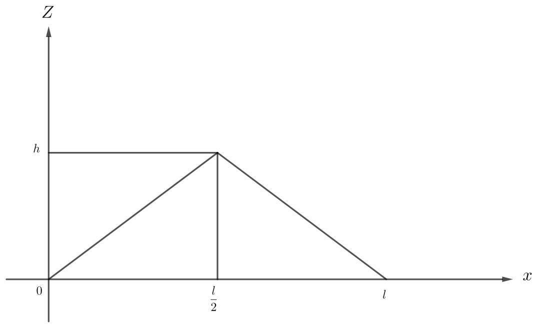


FIGURE 1.19 –

En développant f en série de sinus on obtient

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx$$

$$A_n = \frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{2hx}{l}\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx + \int_{\frac{l}{2}}^{l}\frac{2h(l-x)}{l}\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx\right].$$

Le calcul donne

$$A_n = \frac{8h}{\pi^2}\frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n^2}.$$

D'où

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8h}{\pi^2}\frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n^2}\sin(\frac{n\pi}{l}x)\cos(\frac{n\pi a}{l}t),$$

c'est-à-dire, en détaillant :

$$z(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\left[\sin(\frac{\pi}{l}x)\cos(\frac{\pi a}{l}t) - \frac{1}{3^2}\sin(\frac{3\pi}{l}x)\cos(\frac{3\pi}{l})\cos(\frac{3\pi a}{l}t) + \frac{1}{5^2}\sin(\frac{5\pi}{l}x)\cos(\frac{5\pi a}{l}t) + \cdots\right].$$

Le fondamental, $\frac{8h}{\pi^2}\sin(\frac{\pi x}{l})\cos(\frac{\pi a t}{l})$ a pour fréquence $f_1 = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi a}{l} = \frac{a}{2l}$.
Les fréquences suivantes sont celles des harmoniques d'ordre $3, 5, \ldots$:

$$f_3 = \frac{3a}{2l},\ f_5 = \frac{5a}{2l}, \ldots$$

On remarque qu'elles sont multiples de la fréquence fondamentale.

Chapitre 2

Intégrale de Fourier

2.1 Définition

Soit f une fonction périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ vérifiant les conditions de développement en série de Fourier :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

On a vu au chapitre précédent que

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\mathscr{T}} f(t)dt; \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{\mathscr{T}} f(t)\cos(n\omega t)dt; \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{\mathscr{T}} f(t)\sin(n\omega t)dt.$$

En choisissant pour $\mathscr{T}$ l'intervalle $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$, le terme général peut s'écrire

$$u_n(x) = \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)dt\right)\cos(n\omega x) + \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)dt\right)\sin(n\omega x),$$

c'est-à-dire encore :

$$u_n(x) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega(x-t))dt = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega(x-t))dt.$$

On a donc :

$$f(x) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega(x-t))dt\right)\omega.$$

On se propose maintenant d'envisager le cas où la période T tend vers l'infini. La fonction f devient une fonction **apériodique**.

On suppose de plus qu'elle est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ est convergente.

Lorsque $T \to \infty$, $\dfrac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)dt \to 0$ puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < +\infty$.

On admettra d'autre part que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega(x-t))dt\right)\omega \longrightarrow \int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\Omega(x-t))dt\right)d\Omega.$$

Il en résulte que :

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\Omega(x-t))dt.$$

En développant $\cos(\Omega(x-t))$ on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\Omega t)dt\right)\cos(\Omega x) + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\Omega t)dt\right)\sin(\Omega x)\right]d\Omega$$

c'est-à-dire, en posant

$$\begin{cases} A(\Omega) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\Omega t)dt \\ B(\Omega) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\Omega t)dt \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = \int_0^{+\infty}[A(\Omega)\cos(\Omega x) + B(\Omega)\sin(\Omega x)]d\Omega}$$

L'intégrale du deuxième membre est appelée **intégrale de Fourier**.

Ainsi dans le cas d'une fonction apériodique la série de Fourier est remplacée par l'intégrale de Fourier dans laquelle la pulsation Ω varie de façon continue de 0 à $+\infty$.

Le lecteur ne manquera pas de rapprocher les formules précédentes de celles rappelées au début du paragraphe.

Remarque 2.1.1. Comme dans le cas des séries de Fourier :

1. Si f est paire $B(\Omega) = 0$ et $A(\Omega) = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos(\Omega t)dt$
$A(\Omega)$ est appelé **transformée-cosinus de Fourier** de f et l'on a

$$f(x) = \int_0^{+\infty} A(\Omega)\cos(\Omega x)d\Omega.$$

2. Si f est impaire $A(\Omega) = 0$ et $B(\Omega)\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin(\Omega t)dt$ est la **transformée-sinus de Fourier** de f.

Dans ce cas
$$f(x) = \int_0^{+\infty} B(\Omega)\sin(\Omega x)d\Omega.$$

Application Calculer les coefficients de Fourier intégraux $A(\Omega)$ et $B(\Omega)$ si f est la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\aleph x} & \text{si} \quad x > 0 \quad (\alpha > 0) \\ f(x) = 0 & \text{si} \quad x < 0 \quad (\text{Figure } 2.1) \end{cases}$$

$$A(\Omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\Omega t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos(\Omega t)dt,$$
$$B(\Omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\Omega t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\sin(\Omega t)dt.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} e^{(-\alpha+j\Omega)t}dt = \left[\frac{e^{(-\alpha+j\Omega)t}}{-\alpha+j\Omega}\right]_0^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{\alpha - j\Omega} = \frac{\alpha + j\Omega}{\alpha^2 + \Omega^2}$$

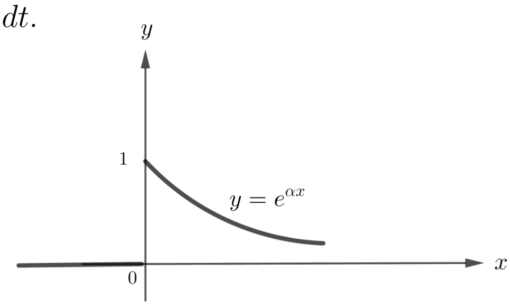


FIGURE 2.1 –

d'où :

$$A(\Omega) = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2 + \Omega^2},$$
$$B(\Omega) = \frac{1}{\pi}\frac{\Omega}{\alpha^2 + \Omega^2},$$

On en déduit, en appliquant la formule intégrale de Fourier,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \Omega^2}(\alpha\cos(\Omega x) + \Omega\sin(\Omega x))d\Omega = f(x) = \begin{cases} e^{\alpha} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

2.2 Forme complexe de l'intégrale de Fourier

On a obtenu au paragraphe précédent

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\Omega(x-t))dt,$$

c'est-à-dire, en remarquant que la fonction de Ω, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\Omega(x-t))dt$ est paire :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\Omega(x-t))dt.$$

Par ailleurs la fonction de Ω, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\Omega(x-t))dt$, étant impaire on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\Omega(x-t))dt = 0$$

On en déduit que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\Omega(x-t)}dt,$$

c'est-à-dire :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\Omega x} d\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\Omega t}dt,$$

Conclusion 2.2.1. Si f est une fonction continue et dérivable sauf en un nombre fini de points sur tout fermé $[-a, +a]$, absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Omega) e^{j\Omega x} d\Omega}$$

avec

$$\boxed{\varphi(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\Omega x} dt}$$

La fonction $\varphi(\Omega)$ est appelée **transformée de Fourier de f.**

Remarque 2.2.2. En un point de discontinuité on attribue à f, comme dans le cas des séries de Fourier, la valeur $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

On vérifiera que l'application $\mathcal{F}$

$$f(x) \underset{\mathcal{F}}{\rightarrow} \varphi(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\Omega x} dt,$$

appelée transformation de Fourier, est linéaire, c'est-à-dire que

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mu \mathcal{F}(g).$$

De plus, on démontre (cf. exercice 24) que :

- Si f est paire :

$$\varphi(\Omega) = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(\Omega t)dt,$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \varphi(\Omega)\cos(\Omega x)d\Omega.$$

- Si f est impaire :

$$\varphi(\Omega) = -2j\int_0^{+\infty} f(t)\sin(\Omega t)dt,$$

d'où

$$f(x) = \frac{j}{\pi}\int_0^{+\infty} \varphi(\Omega)\sin(\Omega x)d\Omega.$$

Exemple Transformée de Fourier de la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad |x| < 1, \\ f(x) = 0 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$ (Figure 2.2)

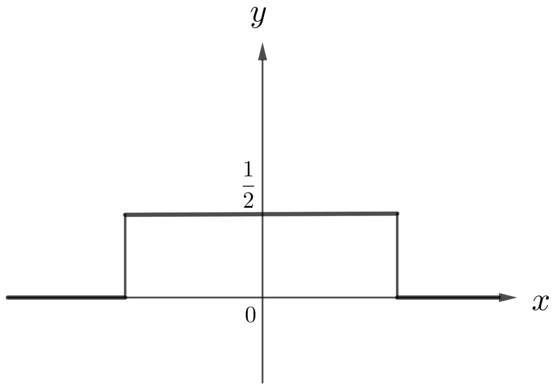


FIGURE 2.2 –

D'après ce qui précède

$$\varphi(\Omega) = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(\Omega t)dt = \int_0^{t} \cos(\Omega t)dt = \frac{\sin(\Omega)}{\Omega} \quad \text{(Figure 2.3)}.$$

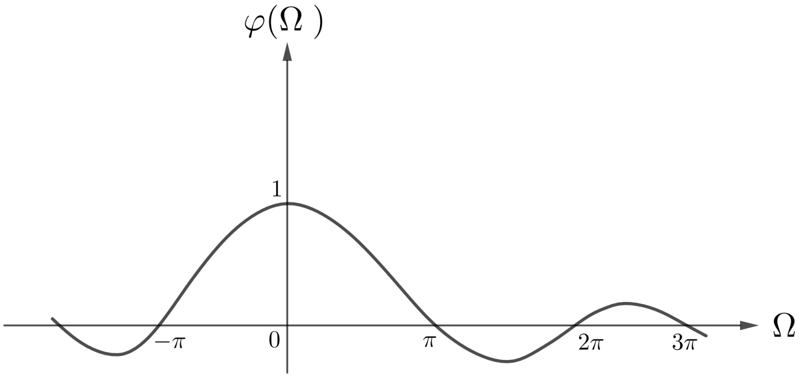


FIGURE 2.3 –

Inversement :

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\Omega)}{\Omega}\cos(\Omega x)d\Omega.$$

En particulier pour $x = 0$, $f(x) = \dfrac{1}{2}$, d'où :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\Omega)}{\Omega} d\Omega = \frac{\pi}{2}}$$

Remarque 2.2.3. Le résultat précédent est utile dans l'étude de la fonction " *sinus intégral*", notée **si** (x), définie par :

$$\textbf{si}\ (x) = \int_0^{x} \frac{\sin(\Omega)}{\Omega} d\Omega \quad (x > 0),$$

dont les variations sont résumées dans le tableau

x	0		π		2π		3π		$+\infty$
$\dfrac{\sin(x)}{x}$	1	$+$	0	$-$	0	$+$	0		
si(x)			M_1				M_3		$\dfrac{\pi}{2}$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$			
	0				m_2				

est représentée sur la figure 2.4

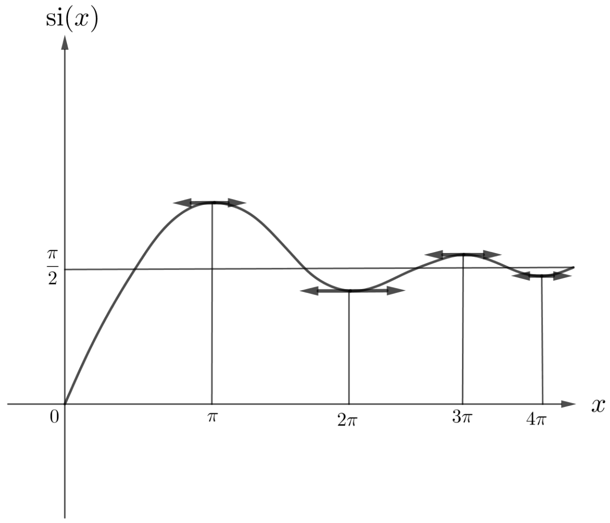


FIGURE 2.4 –

EXERCICES

Exercise 23. Montrer que la transformation de Fourier

$$f(x) \underset{\mathcal{F}}{\rightarrow} \varphi(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\Omega x} dt,$$

est linéaire.

Exercise 24. Transformée de Fourier d'une fonction paire ; d'une fonction impaire.

Exercise 25. Transformées de Fourier des fonction définies par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si} \quad |x| < 1, \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si} \quad x > 1, \end{cases} \qquad \text{avec } g(-x) = -g(x).$$

Exercise 26. Résoudre l'équation intégrale

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos(\lambda x) dx = \begin{cases} 1 - \lambda & \text{si} \quad 0 < \lambda < 1, \\ 0 & \text{si} \quad \lambda > 1, \end{cases}$$

dans laquelle f est la fonction inconnue.

Exercise 27. Trouver la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = e^{-|x|}$.

En déduire l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1 + t^2} dt.$

Exercise 28. Soit $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Vérifier que les conditions d'existence de la transformée de Fourier de f sont remplies.

Montrer que cette transformée est solution de l'équation différentielle

$$y' + xy = 0$$

(on admettra que le théorème $\dfrac{d}{d\lambda}\left(\displaystyle\int_a^b F(x,\lambda)dx\right) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,\lambda)dx$ est applicable).

En déduire que $\varphi(\Omega) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\Omega^2}{2}}$.

Exercise 29. Exprimer la transformée de Fourier des fonctions

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x-a) \quad \text{(fonction translatée)} \\ h(x) &= f(ax) \end{aligned}$$

à l'aide de la transformée de fourier de f.

Exercise 30. Exprimer la transformée de Fourier des fonctions $f'(x)$ et $f''(x)$ à l'aide de la transformée de fourier de f.

Exercise 31. On appelle *produit de convolution* de deux fonctions f et g la fonction, notée $f * g$, définie par

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt,$$

(l'intégrale étant supposée convergente).

vérifier que $(f * g)(x) = (g * f)(x)$.

Démontrer que, si $\mathcal{F}(f)$ désigne la transformée de Fourier de f,

$$\boxed{\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g)}$$

Application :

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| < 1, \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Exercise 32. Si $\mathcal{F}(f) = \varphi$ et $\mathcal{F}(g) = \psi$ démontrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Omega)\overline{\psi(\Omega)}d\Omega.$$

En déduire l'égalité de Parseval

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\Omega)|^2d\Omega.}$$

Exercise 33. Appliquer la formule de Parseval si

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| < 1, \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$.

Indications sur les exercices

Exercice 23 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} [\lambda f(t) + \mu g(t)] e^{-j\Omega t} dt = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\Omega t} dt.$

Exercice 24 $\displaystyle\varphi(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} f(t) e^{-j\Omega t} dt + \int_{0}^{+\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt$

en posant $t = -u$ dans la première intégrale :

$$\int_{-\infty}^{0} f(t) e^{-j\Omega t} dt = -\int_{+\infty}^{0} f(-u) e^{j\Omega u} du = \int_{0}^{+\infty} f(-u) e^{j\Omega u} du$$

- si f est paire : $f(-u) = f(u)$, d'où

$$\varphi(\Omega) = \int_{0}^{+\infty} f(t) [e^{-j\Omega u} + e^{j\Omega u}] dt = -2 \int_{0}^{+\infty} f(t) \cos(\Omega t) dt$$

- si f est impaire : $f(-u) = -f(u)$, d'où

$$\varphi(\Omega) = \int_{0}^{+\infty} f(t) [e^{-j\Omega u} - e^{j\Omega u}] dt = -2j \int_{0}^{+\infty} f(t) \sin(\Omega t) dt.$$

Exercice 25

- f est paire, d'où :

$$\begin{aligned} \varphi(\Omega) &= 2 \int_{0}^{+\infty} f(t) \cos(\Omega t) dt \\ &= 2 \int_{0}^{1} (1-t) \cos(\Omega t) dt = 2 \left[(1-t) \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} - \frac{\cos(\Omega t)}{\Omega^2} \right]_0^1 \\ \varphi(\Omega) &= 2 \frac{1 - \cos(\Omega)}{\Omega^2} \end{aligned}$$

- g est impaire, d'où

$$\Psi(\Omega) = -2j \int_{0}^{\infty} g(t) \sin(\Omega t) \; dt = -2j \int_{0}^{1} (1-t) \sin(\Omega t) \; dt,$$

$$\Psi(\Omega) = 2j \frac{\sin \Omega - \Omega}{\Omega^2}.$$

Exercice 26 Si f est paire

$$2\int_0^\infty f(x)\cos(\lambda x)\,dx = \varphi(\lambda) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\infty \varphi(\lambda)\cos(\lambda x)\,d\lambda\right)$$

or

$$\int_0^\infty f(x)\cos(\lambda x)\,dx = \begin{cases} 1-\lambda & \text{si } 0<\lambda<1 \\ 0 \quad \text{si } \lambda>1 \end{cases}$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^t 2(1-\lambda)\cos(\lambda x)\,d\lambda = \frac{2}{\pi}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Exercice 27 f étant paire

$$\varphi(\Omega) = 2\int_0^\infty e^{-t}\cos(\Omega t)\,dt = 2\Re e\left(e^{(-1+j\Omega)t}\,dt\right) = \frac{2}{1+\Omega^2}.$$

Inversement :

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi(\Omega)\cos(\Omega x)\,d\Omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\Omega x)}{1+\Omega^2}\,d\Omega$$

d'où

$$\int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}.$$

Exercice 28 f est continue, dérivable et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$

$$\varphi(\Omega) = 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\cos(\Omega t)\,dt$$

$$\varphi'(\Omega) = -2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\sin(\Omega t)\,t\,dt = 2\int_0^{+\infty}\sin(\Omega t)\,d\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)$$

$$\varphi'(\Omega) = 2\left[\sin(\Omega t)\,e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^{+\infty} - 2\Omega\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}\cos(\Omega t)\,dt.$$

donc

$$\varphi'(\Omega) = -\Omega\varphi(\Omega).$$

d'où

$$\varphi(\Omega) = \lambda e^{-\frac{\Omega^2}{2}} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Inversement

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\varphi(\Omega)\cos(\Omega x)\,d\Omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\frac{\Omega^2}{2}}\cos(\Omega x)\,d\Omega$$

$$f(x) = \frac{\lambda}{2\pi}\varphi(x) = \frac{\lambda^2}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}},\ \text{d'où}\ \lambda^2 = 2\pi.$$

finalement

$$\varphi(\Omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\Omega^2}{2}}.$$

En particulier, pour $\Omega = 0 \;\; \varphi(\Omega) = \sqrt{2\pi},$ d'où

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\Omega^2}{2}}\, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\Omega^2}{2}}\, dt = \sqrt{2\pi}.$$

Exercice 29

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)e^{-j\Omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-j\Omega(u+a)}\, du = e^{-j\Omega a} \times \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-j\Omega u}\, du.$$

c'est-à-dire

$$\mathscr{F}(g) = e^{-j\Omega s} \times \mathscr{F}(f)$$

(comparer au résultat obtenu pour les séries de Fourier, exercice 4.10).

Exercice 30

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-j\Omega t}\, dt = \left[f(t)e^{-j\Omega t} \right]_{-\infty}^{+\infty} + j\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\Omega t}\, dt.$$

Or $\lim\limits_{|t|\to\infty} |f(t)e^{-j\Omega t}| = 0$ car f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'où

$$\mathscr{F}(f') = j\Omega \mathscr{F}(f)$$

du même

$$\mathscr{F}(f'') = (j\Omega)^2 \mathscr{F}(f).$$

Exercice 31

$$(g \star f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(x-t)dt.$$

en posant $x - t = u$

$$(g \star f)(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-u)f(u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)\, du = (f \star g)(x).$$

Il est facile de vérifier de plus la bilinéarité de l'application $(f, g) \to f \star g$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(f \star g)(\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f \star g)(x) e^{-j\Omega x}\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\Omega x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t)\, dt \right] dx.\end{aligned}$$

Si l'on admet que l'on peut intervertir l'ordre des intégrations

$$\mathscr{F}(f \star g)(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) e^{-j\Omega x}\, dx \right].$$

Le crochet représente la transformée de Fourier de la fonction translatée (exercice 2.2). D'où

$$\mathscr{F}(f \star g)(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[e^{-j\Omega x} \mathscr{F}(g)(\Omega) \right] dt$$

$$\mathscr{F}(f \star g)(\Omega) = \left[f(t) e^{-j\Omega t}\, dt \right] \times \mathscr{F}(g)(\Omega)$$

soit $\mathscr{F}(f \star g) = \mathscr{F}(f) \times \mathscr{F}(g)$.

Application :

$$\begin{aligned}(f \star g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t)\, dt = \int_{-1}^{+1} f(t) g(x-t)\, dt \\ &= \int_{-1}^{+1} g(x-t)\, dt = \int_{x-1}^{x+1} g(u)\, du.\end{aligned}$$

d'où

$$(f \star g)(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad |x| > 2 \\ 2 - |x| \quad \text{si} \quad |x| < 2 \end{cases}$$

$$\mathscr{F}(f \star g) = 2\, \frac{1 - \cos(2\Omega}{\Omega^2} \qquad \text{(exercice 5.03)}$$

$$\mathscr{F}(f \star g) = 4\, \frac{\sin^2 \Omega}{\Omega^2} \quad \text{Or} \quad \mathscr{F}(f) = \mathscr{F}(g) = 2\, \frac{\sin \Omega}{\Omega}.$$

Exercice 32

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\Omega) e^{j\Omega x}\, d\Omega$$

d'où

$$\overline{g(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\Psi(\Omega)} e^{-j\Omega x}\, d\Omega$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left[\overline{\Psi(\Omega)} e^{-j\Omega x}\, d\Omega\right] dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\Psi(\Omega)}\left[f(x) e^{-j\Omega x}\, dx\right] d\Omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Omega)\overline{\Psi(\Omega)}\, d\Omega.
\end{aligned}$$

Si $f = g$ on obtient l'identité de Perseval.

Exercice 33

$$\varphi(\Omega) = 2\,\frac{\sin\Omega}{\Omega}$$

d'où

$$\int_{-1}^{+1} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(2\,\frac{\sin\Omega}{\Omega}\right)^2 d\Omega$$

On en déduit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\Omega}{\Omega^2}\, d\Omega = \pi.$$

Chapitre 3

Intégrale de Laplace

3.1 Transformation de Laplace

Définition 3.1.1. Soit f une fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ et supposée nulle pour $x < 0$.

On appelle transformée de Laplace de f la fonction F définie par

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\, dx.$$

où p est une variable réelle ou éventuellement complexe.

On écrira

$$F(p) = \mathscr{L} f(x).$$

$\mathscr{L}$ signifiant transformée de Laplace de f .

$F(p)$ est encore appelée **image de** f, ce que l'on note parfois $F(p) \subset f(x)$.

L'application qui associe à f son image F, $f \xrightarrow{\mathscr{L}} F$ est la **transformation de Laplace**

La transformée de Laplace d'une fonction n'existe que si l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\, dx$ est convergente.

Pour cela on est amené à imposer à f deux conditions :

– être continue par morceaux sur tout fermé $[0,x_0]$;

– être d'ordre exponentiel à l'infini, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ et α tels que

$$|f(x)| < M\, e^{\alpha x} \quad \text{lorsque } x \to +\infty.$$

On démontre que si les hypothèses précédentes sont vérifiées la transformée de Laplace est définie pour $p > \alpha$, ou si p est complexe, pour $\Re e(p) > \alpha$.

Le domaine de convergence de $F(p)$ est donc l'ouvert $]\alpha, +\infty[$ ou le demi-plan complexe défini par $\Re e(p) > \alpha$ (fig. 3.1).

Il est à noter que les conditions imposées à f ne sont que des conditions suffisantes d'existence de la transformée de Laplace. Elles sont toutefois vérifiées par les fonctions dont sera question dans ce chapitre.

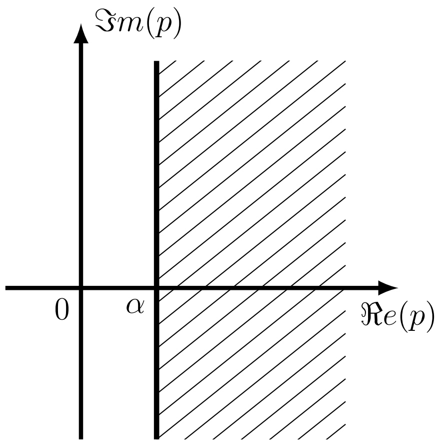


FIGURE 3.1 –

Exemples.

Pour un certain nombre de fonction élémentaires le calcul de la transformée de Laplace est simple :

1. Fonction échelon unité (ou fonction de Heaviside).

Elle définie par

$$\begin{cases} \mathscr{U}(x) = 1 \text{ pour } x > 0 & \text{(fig.3.2)} \\ \mathscr{U}(x) = 0 \text{ pour } x < 0 \end{cases}$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px}\, dx = \left[\frac{e^{-px}}{-p}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

$p > 0$

donc $\quad \mathscr{L}[\mathscr{U}(x)] = \dfrac{1}{p} \quad (p > 0)$

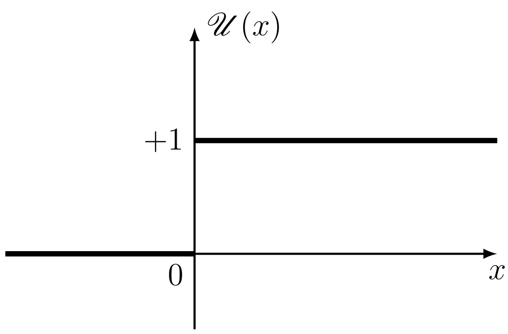


FIGURE 3.2 –

2. Fonction impulsion unité (ou distribution de Dirac).

Soit la famille de fonctions définie par

$$\begin{cases} f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon} \quad \text{pour} \quad 0 < x < \varepsilon \quad (\text{fig.}3.3) \\ f_\varepsilon(x) = \varepsilon \quad \text{pour} \quad x < 0 \;\; \text{ou} \;\; x > \varepsilon \end{cases}$$

On remarque que, quel que soit ε,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\, dx = 1$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f_\varepsilon(x)\, dx = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} e^{-px}\, dx$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{e^{-px}}{-p}\right]_0^{\varepsilon} = \frac{1-e^{-px}}{p\varepsilon}$$

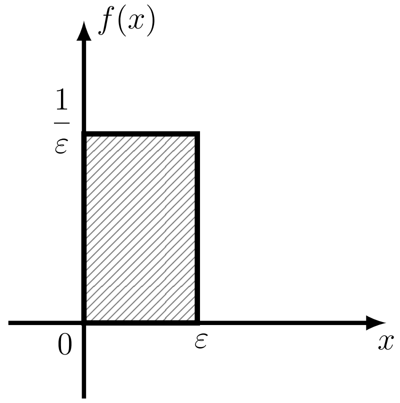


FIGURE 3.3 –

si $\varepsilon \to 0$ $\begin{cases} f_\varepsilon(x) \to +\infty \quad \text{si} \quad x = 0 \\ f_\varepsilon(x) \to 0 \quad \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$

La limite ainsi obtenue n'est pas à proprement parler une fonction. Elle définit la distribution de Dirac, notée $\delta(x)$ appelée par commodité fonction impulsion unité car elle sert à représenter en physique une action (force, impulsion) s'exerçant durant un temps très court.

On a donc :

$$\begin{cases} \delta(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \neq 0 \\ \delta(x) \to +\infty \quad \text{si} \quad x \to 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

Or si $\varepsilon \to 0$, $\quad \dfrac{1-e^{-px}}{p\varepsilon} \to 1.$

D'où $\boxed{\mathscr{L}[\delta(x)] = 1}$.

3. Fonction puissance. Soit

$$\begin{cases} f(x) = x^n \quad \text{pour} \quad x > 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \\ f(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} x^n\, dx = I_n.$$

Une intégration par parties conduit à

$$I_n = \left[x^n \, \frac{e^{-px}}{-p}\right]_0^{\infty} + \frac{n}{p}\int_0^{+\infty} e^{-px} x^{n-1}\, dx.$$

Si $p > 0$ le crochet est nul et on obtient la relation de récurrence

$$I_n = \frac{n}{p}\, I_{n-1}$$

C'est-à-dire

$$I_n = \frac{n}{p} \times \frac{n-1}{p} \times \cdots \times \frac{1}{p} \times I_0.$$

Or $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-px}\, dx = \frac{1}{p}$ d'où finalement :

$$\boxed{\mathscr{L}[x^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}}. \qquad (p > 0)$$

4. Fonction exponentielle.

$$\text{Soit} \quad \begin{cases} f(x) = e^{-ax} \quad \text{pour} \quad x > 0 \\ f(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x < 0. \end{cases}$$

On suppose ici a et p complexes

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} e^{-ax}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)x}\, dx = \left[\frac{e^{-(p+a)x}}{-(p+a)}\right]_0^{+\infty}.$$

Or

$$|e^{-(p+a)x}| = e^{-\Re e(p+a)x}.$$

Si $\Re e(p+a)x > 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} |e^{-(p+a)x}| = 0$, d'où

$$\boxed{\mathscr{L}[e^{-ax}] = \frac{1}{p+a}} \qquad (\Re e(p) > -\Re e(a))$$

5. Fonction trigonométriques. Si $a = jw$ on a

$$\mathscr{L}[e^{-jwx}] = \frac{1}{p+jw} = \frac{p-jw}{p^2+w^2} \qquad (p > 0).$$

Or d'après la linéarité de l'intégrale

$$\mathscr{L}[e^{-jwx}] = \mathscr{L}[\cos wx - j\sin wx] = \mathscr{L}(\cos wx) - j\mathscr{L}(\sin wx)$$

On en déduit

$$\boxed{\begin{cases} \mathscr{L}(\cos wx) = \dfrac{p}{p^2+w^2} \\ \mathscr{L}(\sin wx) = \dfrac{w}{p^2+w^2} \end{cases}} \qquad (p>0).$$

Les résultat précédents sont regroupés dans le tableau ci-dessous (encore appelé dictionnaire d'images)

$f(x)$	$F(p)$	
$\mathscr{U}(x)$	$\dfrac{1}{p}$	
$\delta(x)$	1	
x^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}$
e^{-ax}	$\dfrac{1}{p+a}$	
$\cos wx$	$\dfrac{p}{p^2+w^2}$	
$\sin wx$	$\dfrac{w}{p^2+w^2}$	

Il est à noter que les fonctions considérées sont supposées nulles pour $x < 0$. .

3.2 Propriétés de la Transformation de Laplace

1. Linéarité.

Il résulte de propriétés de l'intégrale que la transformation de Laplace $f \xrightarrow{\mathscr{L}} F$ est linéaire. C'est-à-dire quels que soient λ et μ complexes

$$\boxed{\mathscr{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathscr{L}(f) + \mu\mathscr{L}(g)}$$

Exemples

a. $\mathscr{L}(x^3 - 3x + 1) = \dfrac{2}{p^3} - 3\,\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p}$

b. $\mathscr{L}(cos^2 x) = \mathscr{L}\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{p}{p^2+4}\right).$

Dans le cas où la fonction f est définie par une série entière convergente

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

on a

$$\mathscr{L}[f(x)] = \mathscr{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \,\mathscr{L}(x^n)$$

$$\mathscr{L}[f(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \,\frac{n!}{p^{n+1}}$$

sous réserve de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \,\frac{n!}{p^{n+1}}$
(cf. exercice n° 6.09, 6.10).

2. Transformée de $f(ax)$.

Soit $g(x) = f(ax) \quad (a > 0)$

$$\mathscr{L}[g(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(ax)\,dx.$$

Si l'on pose $ax = t$

$$\mathscr{L}[g(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-p\frac{t}{a}} f(t)\,d\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{p}{a}\right)t} f(t)\,dt.$$

D'où, si $\mathscr{L}[f(x)] = F(p)$

$$\boxed{\mathscr{L}[f(ax)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)}$$

3. Transformée de $f(x-a)$.

Soit la fonction défini par

$$\begin{cases} g(x) = f(x-a) \quad \text{si} \quad x > a \\ g(x) = 0 \quad \text{si} \quad x < a \quad \text{(fig.3.4)} \end{cases}$$

$$\mathscr{L}[g(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-px} g(x)\ dx = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x-a)\ dx$$

. En posant $x - a = t$ on obtient

$$\mathscr{L}[g(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-p(a+t)} f(t)\ dt = e^{-pa} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\ dt.$$

D'où, si

$$\mathscr{L}[f(x)] = F(p),\ \mathscr{L}[g(x)] = e^{-pa}\ F(p).$$

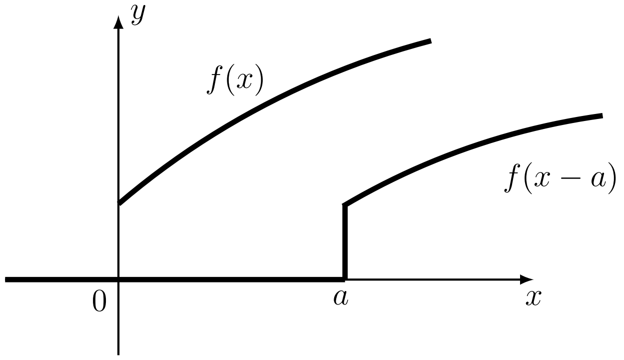


FIGURE 3.4 –

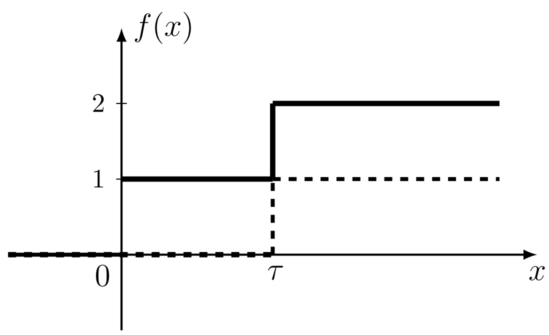


FIGURE 3.5 –

La fonction g peut d'ailleurs s'écrire

$$g(x) = f(x-a)\cdot \mathscr{U}(x-a) \qquad \left(\text{car } \mathscr{U}(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ 1 & \text{si} \quad x > a \end{cases}\right)$$

d'où

$$\boxed{f(x-a)\cdot \mathscr{U}(x-a) = e^{-pa}\mathscr{L}[f(x)]}$$

Le résultat précédent est habituellement appelé théorème du retard (le terme e^{-pa} est appelé facteur de retard).

Exemples. Transformé de la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ f(x) = 1 & \text{si} \quad 0 < x < \tau \\ f(x) = 2 & \text{si} \quad x > \tau \quad \text{(fig.3.5)} \end{cases}$$

On peut écrire

$$f(x) = \mathscr{U}(x) + \mathscr{U}(x - \tau).$$

D'où

$$F(p) = \frac{1}{P} + e^{-p\tau}\frac{1}{P} = \frac{1 + e^{-p\tau}}{p}.$$

Application : **Transformée d'une fonction périodique.**
Soit f une fonction périodique pour $x > 0$, de période T (fig. 3.6).

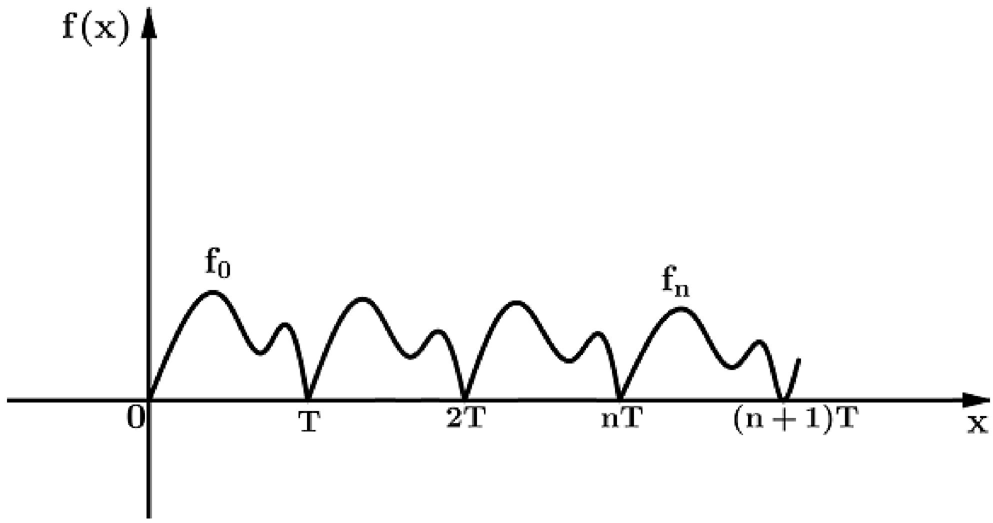


FIGURE 3.6 –

Si l'on considère la suite de fonction définies par

$$\begin{cases} f_0(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x \in [0, T] \\ f_0(x) = 0 \quad \text{pour} \quad \text{si} \quad x \neq [0, T] \end{cases}$$

et

$$f_n(x) = f_0(x - nT)$$

on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

d'où en appliquant la linéarité et le théorème du retard

$$\mathscr{L}[f(x)] = \mathscr{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathscr{L}[f_n(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pnT}\mathscr{L}[f_0(x)]$$

Or

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-pnT} = \frac{1}{1-e^{-pT}} \qquad \text{(série géométrique)}$$

d'où

$$\mathscr{L}[f(x)] = \frac{\mathscr{L}[f_0(x)]}{1-e^{-pT}}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{F(p) = \frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}}$$

Il suffit donc de connaître la transformée $F_0(p)$ de la fonction qui coïncide avec f sur $[0, T]$.

Exemples

a. Transformée de la fonction représentée sur la figure 3.7.

$$\begin{cases} f_0(x) = A & \text{si} \quad 0 < x < \tau \\ f_0(x) = 0 & \text{si} \quad x > \tau \end{cases}$$

donc

$$F_0(p) = \frac{A}{p}(1-e^{-p\tau})$$

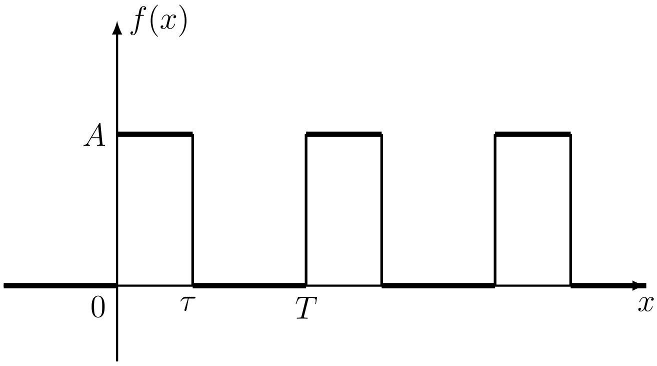


FIGURE 3.7 –

d'où

$$F(p) = \frac{A}{p}\frac{1-e^{-p\tau}}{1-e^{-pT}}.$$

Si $\tau = \dfrac{T}{2}$ on obtient

$$F(p) = \frac{A}{p}\frac{1}{1-e^{-p\frac{T}{2}}}$$

d'où

$$F_0(p) = \frac{1}{p^2+1} + e^{-p\pi}\frac{1}{p^2+1} = \frac{1+e^{-p\pi}}{p^2+1}$$

et par conséquent

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1+e^{-p\pi}} = \frac{1}{p^2+1}\frac{1+e^{-p\pi}}{1-e^{-p\pi}} = \frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{\tanh p\frac{\pi}{2}}$$

b. Transformée de $f(x) = |\sin x|$.

$$\begin{cases} f_0(x) = \sin x & \text{si} \quad 0 < x < \pi \\ f_0(x) = 0 & \text{si} \quad x > \pi \end{cases}$$

(fig. 3.8)

on peut écrire

$f_0(x) = \sin x \,\mathscr{U}(x) + \sin(x-\pi)\,\mathscr{U}(x-\pi)$

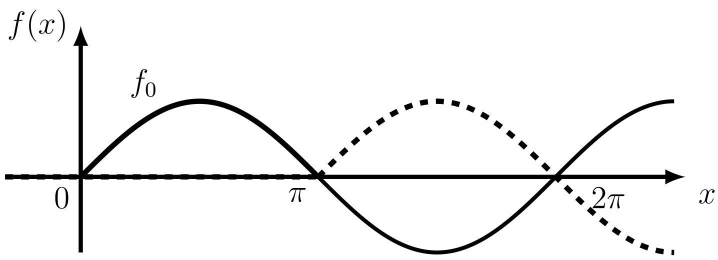


FIGURE 3.8 –

4. Transformée de la dérivée.

Théorème 3.2.1. *(Théorème fondamentale). Si f' est continue par morceaux sur tout fermé $[0, x_0]$ et si $\mathscr{L}[f(x)] = F(p)$ alors*

$$\boxed{\mathscr{L}[f'(x)] = pF(p) - f(0^+)}$$

Démonstration. En effet

$$\mathscr{L}[f'(x)] = \int_0^\infty e^{-px} f'(x)\, dx.$$

En intégrant par parties on obtient

$$\mathscr{L}[f(x)] = \Big[e^{-px} f'(x)\Big]_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx.$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty} e^{-px} f(x) = 0, \; \Big[e^{-px} f'(x)\Big]_0^\infty = -f(0^+)$$

$f(0^+)$ représentant la limite à droite de $f(x)$ quand $x \to 0$.
D'où

$$\mathscr{L}[f'(x)] = pF(p) - f(0^+)$$

□

Généralisation. Si f^n vérifie à son tour les hypothèses du théorème on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f''(x)] &= p\mathscr{L}[f'(x)] - f'(0^+) \\ &= p[pF(p) - f(0^+)] - f'(0^+).\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\mathscr{L}[f''(x)] = p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)}$$

Le lecteur vérifiera que, plus généralement

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(x)] = p^nF(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+).$$

Dans le cas particulier ou $f(0^+) = f'(0^+) = \cdots = 0$, on a

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(x)] = p^nF(p).$$

Dériver f correspond alors à multiplier F par p.

On peut considérer que la transformation de dérivation $\frac{d}{dx}$, par le produit algébrique de $F(p)$ par p

$$\frac{d}{dx} \cdot f(x) \xrightarrow{\mathscr{L}} p \times F(p)$$

Cette propriété fondamental, qui fait la richesse de la transformation de Laplace sera largement utilisée dans l'intégration des équations différentielles.

Remarque 3.2.2. Soit la relation

$$\mathscr{L}[f'(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-px}f'(x)\,dx = pF(p) - f(0^+).$$

a. si $p \to +\infty,\ e^{-px} \to 0$. En admettant que

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}f'(x)\,dx \to 0$$

on en déduit

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} pF(p) = f(0^+)}$$

b. si $p \to 0,\ e^{-px} \to 1$. Or

$$\int_0^{+\infty} f'(x)\,dx = f(+\infty) - f(0^+)$$

donc

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} pF(p) = f(+\infty)}$$

Les relations précédentes sont appelées respectivement, théorème de la valeur initiale et théorème de la valeur finale.

5. Transformée de la primitive.

Théorème 3.2.3. *Si* $\mathscr{L}[f(x)] = F(p)$, *alors*

$$\boxed{\mathscr{L}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right] = \frac{F(p)}{p}}$$

Démonstration. En effet, soit la fonction

$$\begin{cases} \varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt \\ \varphi'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad \varphi(0^+) = 0. \end{cases}$$

En appliquant à φ le théorème sur la transformation de la dérivée on obtient

$$\mathscr{L}[\varphi'(x)] = p\mathscr{L}[\varphi(x)]$$

par ailleurs

$$\mathscr{L}[f(x)] = F(p)$$

d'où

$$\mathscr{L}[f(x)] = \frac{F(p)}{p}.$$

□

3.3 Transformation de Laplace inverse

Soit $F(p)$ la transformation de Laplace d'une fonction $f(x)$. On appelle transformée de Laplace inverse, ou **original**, de $F(p)$, la fonction $f(x)$.

On note

$$f(x) = \mathscr{L}^{-1}[F(p)]$$

ou encore

$$f(x) \supset F(p).$$

Exemples :

1. $\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{p^2}) = x \quad \text{car} \quad \mathscr{L}[x] = \frac{1}{p^2}.$

2. $\mathscr{L}^{-1}(\frac{p}{p^2+4}) = \cos 2x \quad \text{car} \quad \mathscr{L}[\cos 2x] = \frac{p}{p^2+4}.$

3. $\mathscr{L}^{-1}(\frac{e^{-ap}}{p}) = \mathscr{U}(x-a) \quad \text{car} \quad \mathscr{L}[\mathscr{U}(x-a)] = e^{-ap}\mathscr{L}[\mathscr{U}(x)] = e^{-ap}\frac{1}{p}.$

On démontre que si les fonctions f considérées possèdent les propriétés énoncées au début du chapitre, c'est-à-dire sont

– continues par morceaux sur tout fermé $[0, x_0]$,

– d'ordre exponentiel à l'infini,

l'original $f(x)$ d'une fonction $F(p)$ est unique sur tout sous-ensemble où il est continu. La recherche de l'original conduit à étudier les propriétés de l'application

$$F(p) \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} f(x).$$

appelée transformation de Laplace inverse.

3.4 Propriétés de la Transformation de Laplace inverse

1. Linéarité.

L'inverse d'une application linéaire étant linéaire

$$\boxed{\mathscr{L}^{-1}(\lambda F + \mu G) = \lambda \mathscr{L}^{-1}(F) + \mu \mathscr{L}^{-1}(G)}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^3} - \frac{4}{p+1}\right) &= \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^3}\right) - 4\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2}{p^3}\right) - 4\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right)\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^3} - \frac{4}{p+1}\right) = \frac{1}{2}x^2 - 4e^{-x}.$$

D'une façon générale pour obtenir l'original d'une fraction rationnelle $F(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$ on utilise sa décomposition en éléments simples (cf. Algèbre, chap. 6).

<u>Exemples</u> : Trouver l'originale de $F(p) = \dfrac{p+1}{p^2(p^2+4)}$.

La décomposition de $F(p)$ s'écrit

$$\frac{p+1}{p^2(p^2+4)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{Cp+D}{p^2+4}$$

Le calcul donne

$$A = \frac{1}{4},\ B = \frac{1}{4},\ C = -\frac{1}{4},\ D = -\frac{1}{4}$$

D'où

$$f(x) = \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right) + \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) - \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+4}\right) - \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+4}\right)$$

c'est-à-dire

$$f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\frac{\sin 2x}{2}.$$

2. Original de $F(ap)$.

Soit $f(x)$ l'original de $F(p)$

$$f(x) = \mathscr{L}^{-1}[F(p)]$$
$$F(ap) = \int_0^{+\infty} e^{-apx} f(x)\, dx.$$

En posant $ax = t$, on obtient

$$F(ap) = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-pt} f\left(\frac{t}{a}\right) dt.$$

D'où

$$\boxed{\mathscr{L}^{-1}F(ap) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)}$$

3. Original de $F(p+a)$.

Soit $f(x) = \mathscr{L}^{-1}F(ap)$

$$F(a+p) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+p)x} f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-px}[e^{-ax} f(x)]\, dx.$$

$F(a+p)$ est donc l'image de la fonction $g(x) = e^{-ax} f(x)$.

C'est dire que

$$\boxed{\mathscr{L}^{-1}F(a+p) = e^{-ax} f(x)}$$

Par exemple

$$\begin{cases} \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}\right] = e^{-ax}\cos\omega x. \\ \\ \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}\right] = e^{-ax}\sin\omega x. \end{cases}$$

Exercice : Trouver l'original de $F(p) = \dfrac{p}{p^2+p+1}$

On peut écrire

$$\frac{p}{p^2+p+1} = \frac{p}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

D'où successivement

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+p+1}\right) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right] - \frac{1}{2}\,\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right] \\ &= e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,e^{-\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= e^{-\frac{x}{2}}\left[\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right]. \end{aligned}$$

4. Originaux de $F'(p)$ et de $\int_p^{+\infty} F(u)\,du$.

On a admettra les résultats suivants dont les démonstration pourront être abordées en exercice (cf. exercice 6.13 et 6.15).

Si $\mathscr{L}^{-1}[F(p)] = f(x)$ alors

$$\boxed{\mathscr{L}^{-1}[F'(p)] = -xf(x)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathscr{L}^{-1}\left[\int_p^{+\infty} F(u)\,du\right] = \frac{f(x)}{x}}$$

Remarque 3.4.1. En appliquant n fois la formule $\mathscr{L}^{-1}[F'(p)] = -xf(x)$ on obtient plus généralement

$$\mathscr{L}^{-1}[F^{(n)}(p)] = (-1)^n x^n f(x).$$

Exemples

a. $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p+3}\right) = e^{-3x}$ donc $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(p+3)^2}\right) = x\, e^{-3x}$.

b. $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p^2+1}\right) = \sin x$.

or
$$\int_p^{+\infty} \frac{du}{u^2+1} = [\arctan u]_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan p = \arctan \frac{1}{p}$$
d'où
$$\mathscr{L}^{-1}\left[\arctan \frac{1}{p}\right] = \frac{\sin x}{x}$$
c'est-à-dire
$$\int_0^{+\infty} e^{-px} \cdot \frac{\sin x}{x}\, dx = \arctan \frac{1}{p}.$$
En particulier si $p \to 0$, on obtient
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

5. Original de $F(p) \times G(p)$.

Théorème 3.4.2. *Si $\mathscr{L}^{-1}[F(p)] = f(x)$ et $\mathscr{L}^{-1}[G(p)] = g(x)$, alors*

$$\boxed{\mathscr{L}^{-1}[F(p) \times G(p)] = \int_0^{+\infty} f(t)g(x-t)\, dt}$$

(pour la démonstration, cf. exercice n° 6.16).

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(x-t)\, dt$ est appelée produit de convolution de f par g et est notée $(f \star g)(x)$.

On vérifiera que
$$(f \star g)(x) = (g \star f)(x).$$

L'original du produit (algébrique) de deux fonction est donc le produit de convolution des originaux.

Exemple. Original de $\dfrac{1}{p^2(p+1)}$
$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right) = x \quad \text{et} \quad \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right) = e^{-x}.$$

D'où

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2(p+1)}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p+1}\right] = \int_0^x t\ e^{-(x-t)}\ dt = e^{-x}\int_0^x t\ e^t\ dt.$$

Au moyen d'une intégration par parties, on obtient

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2(p+1)}\right] = e^{-x}[x\ e^x - (e^x - 1)] = x - 1 + e^{-x}.$$

résultat que l'on pouvait également déduire de la décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle $\dfrac{1}{p^2(p+1)}$.

Conclusion. Les principales propriétés obtenues dans l'étude de la transformation de Laplace et de son inverse ont été regroupées dans le tableau ci-dessous.

La lecture de gauche à droite correspond à une propriété de $\mathscr{L}$, de droite à gauche à une propriété de $\mathscr{L}^{-1}$.

La connaissance de ces propriétés facilité la recherche des transformés des originaux et dispense parfois de consulter les tables.

Prob.N°	$f(x) \underset{\mathscr{L}^{-1}}{\overset{\mathscr{L}}{\rightleftarrows}} F(p)$	
①	$\lambda f + \mu g$	$\lambda F + \mu G$
②	$f(ax)$	$\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{a}{b}\right)$
③	$f(x-a)\cdot\mathscr{U}(x-a)$	$e^{-ap}\ F(p)$
③	$e^{-ax}\ f(x)$	$F(p+a)$
④	$f'(x)$	$pF(p) - f(0^+)$
④	$-xf(x)$	$F'(p)$
⑤	$\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$	$\dfrac{F(p)}{p}$
⑤	$\dfrac{f(x)}{x}$	$\displaystyle\int_p^x F(u)\ du$
⑥	$\displaystyle\int_0^x f(t)g(x-t)\ dt$	$F(p)\times G(p)$

Dans les applications de la transformation de Laplace données ci-après, il sera commode de rappeler ces propriétés par leur numéro.

3.5 Application de la Transformation de Laplace aux Équations Différentielles

1. **Équations différentielles linéaires.**
Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = f(x).$$

On a vu que si

$$\mathscr{L}[y(x)] = Y(p)$$
$$\mathscr{L}[y'(x)] = pY(p) - y(0)$$
$$\mathscr{L}[y'(x)] = p^2 Y(p) - pY(p) - y'(0)$$

et plus généralement :

$$\mathscr{L}[y^{(n)}(x)] = p^n Y(p) - p^{n-1} y(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0).$$

En appliquant la transformation de Laplace à l'équation différentielle précédente, on obtient donc, par suite de la linéarité :

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0) Y(p) + \Phi(p) = F(p)$$

équation dans laquelle $\Phi(p)$ représente un polynôme de degré $n-1$ en p contenant $y(0), y'(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$.

On en déduit

$$Y(p) = \frac{F(p) - \Phi(p)}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0}$$

et par conséquent, en appliquant la transformation inverse

$$y(x) = \mathscr{L}^{-1}[Y(p)].$$

Le calcul précédent fait apparaître les avantages de la méthode

a. L'équation différentielle étant transformée en une équation algébrique, La solution $y(x)$ est obtenue sans intégration en cherchant l'original de $Y(p)$.

b. On obtient seulement la solution particulière correspondant aux conditions initiale $y(0),\ y'(0), \ldots$ imposées par la nature physique du phénomène étudié. Il est aussi possible de discuter de l'influence de ces conditions initiales sur la forme de la solution.

Exemple. Trouver la solution de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = x\,e^{x} \qquad \text{telle que} \qquad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\mathscr{L}(y'' - 2y' + y) = \mathscr{L}(y'') - 2\mathscr{L}(y') + \mathscr{L}(y) = (p^2 Y - p) - 2(pY - 1) + Y$$

$$\mathscr{L}(x\,e^{x}) = \frac{1}{(p-1)^2} \qquad \text{(propeiété 3)}$$

D'où successivement

$$\begin{aligned}
&(p^2 - 2p + 1)Y(p) - p + 2 = \frac{1}{(p-1)^2} \\
&Y(p) = \frac{1}{(p-1)^2}\left[\frac{1}{(p-1)^2} + p - 2\right] \\
&Y(p) = \frac{1}{(p-1)^4} - \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)} \\
&y(x) = e^{x}\left[\frac{x^3}{6} - x + 1\right].
\end{aligned}$$

La méthode précédente se généralise d'ailleurs au cas des équations différentielles linéaires à coefficients non constants et des systèmes différentiels linéaires.

Exemple. Trouver la solution de système différentielle

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 4y_1 + 4y_2 \\[2ex] \dfrac{dy_2}{dx} = y_2 + 4y_2 \end{cases} \qquad \text{telle que} \qquad \begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1. \end{cases}$$

En posant $\mathscr{L}(y_1) = Y_1$ et $\mathscr{L}(y_2) = Y_2$ on obtient

$$\begin{cases} pY_1 = 4Y_1 + 4Y_2 \\ pY_2 - 1 = Y_1 + 4Y_2 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} (p-4)Y_1 - 4Y_2 = 0 \\ -Y_1 + (p-4)Y_1 = 1. \end{cases}$$

Les formules de Cramer donnent

$$Y_1 = \frac{4}{p^2 - 8p + 12} = \frac{4}{(p-6)(p-2)}$$

$$Y_2 = \frac{p-4}{p^2 - 8p + 12} = \frac{p-4}{(p-6)(p-2)}$$

En décomposant en éléments simples

$$\begin{cases} Y_1 = \dfrac{1}{p-6} - \dfrac{1}{p-2} \\ Y_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-6} + \dfrac{1}{p-2}\right) \end{cases} \quad \text{d'où finalement} \quad \begin{cases} y_1 = e^{6x} - e^{2x} \\ \dfrac{1}{2}(e^{6x} + e^{2x}). \end{cases}$$

Le lecture pourra comparer avec les méthodes matricielles d'intégration des systèmes différentiels linéaires.

La transformation de Laplace a l'avantage de donner directement la solution particulière cherchée ; toutefois, en laissant les conditions initiale sous forme littérale on obtient la solution générale dans lequelle ces conditions initiales jouent le rôle de constantes d'intégration (cf. Application à la Physique).

EXERCICES

Exercise 34. Transformées des fonctions définies par

$$\begin{cases} f(x) = 1 \text{ si } 0 < x < T \\ f(x) = 0 \text{ si } x > T \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) = x \text{ si } 0 < x < T \\ g(x) = 0 \text{ si } x > T \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) = x \text{ si } 0 < x < T \\ g(x) = T \text{ si } x > T \end{cases}$$

Exercise 35. Soit l'intégrale

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx \quad (\alpha > 0).$$

Montrer que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ et que $\Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N})$.

En déduire que $\mathscr{L}(x^\alpha) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$.

Calculer $\mathscr{L}(\sqrt{x})$ $\left(\text{on admettra que} \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right)$.

Exercise 36. Trouver les transformées de Laplace des fonctions suivantes $(x > 0)$

$$f(x) = (x^2+1)^2 \ ; \ f(x) = \sin 2x - 3\cos 2x \ ; \ f(x) = e^{-x}\cos 3x$$
$$f(x) = e^{-2x}(x^3+1) \ ; \ f(x) = \sin^2 x \ ; \ f(x) = \sin(\omega x)\cos(\Omega x)$$
$$f(x) = \sinh \omega x \ ; \ f(x) = \cosh(\omega x).$$

Exercise 37. Trouver les transformées de $f(x) = x \ \cos\omega x$ et$g(x) = x \ \sin\omega x$ en utilisant

1. ls exponentielles complexes,
2. la propriété 4.

Exercise 38. Représenter les fonctions

$$f_1(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).\mathscr{U}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f_2(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).\mathscr{U}(x)$$

$$f_3(x) = \sin x.\mathscr{U}\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

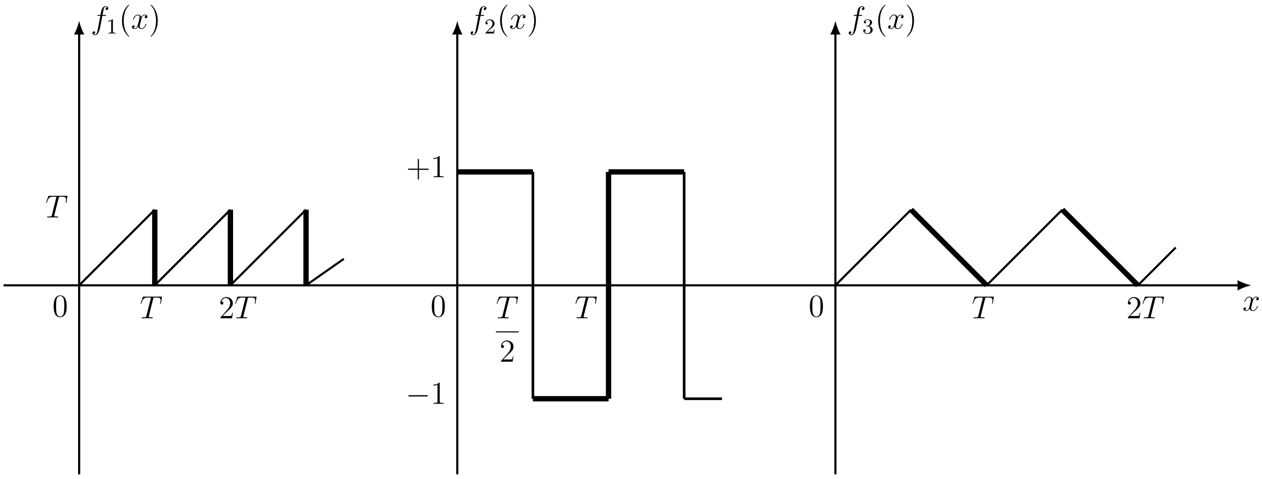
Comparer leurs transformées.

Exercise 39. Exprimer au moyen de fonctions échelon unité la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \ \text{ et } \ 0 < x < a \\ &= 2 \ \text{ et } \ a < x < 2a \\ & \text{ et } \ 2a < x < 3a. \end{aligned}$$

En déduire l'image de f.

Exercise 40. Transformées des fonctions $f_1, \ f_2$ et f_3 de période T représentées sur la figure ci-dessous



Quelle relation existe-il entre $F_2(p)$ et $F_3(p)$?

Exercise 41. Transformée de la fonction de période $T = 2\pi$ définie par

$$\begin{cases} f(x) = \sin x \quad \text{si} \quad 0 < x < \pi \\ f(x) = 0 \quad \text{si} \quad \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

Exercise 42. Transformée de la fonction de période $T = 2\pi$ définie par Du développement en série entière de $\dfrac{\sin x}{x}$ déduire que

$$\mathscr{L}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \arctan \frac{1}{p}.$$

Retrouver le résultat précédent en utilisant la propriété 5.
En déduire la transformée de

$$\text{si } (x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Exercise 43. Soit la fonction

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

(cf. chp. 3, Fonctions de Bessel)
Calculer $\mathscr{L}[J_0(x)]$ et vérifier que

$$\mathscr{L}[J_0(x)] = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\,;$$

Exercise 44. Trouver les originaux des fractions rationnelles suivantes

$$\frac{1}{p^2-3}\ ;\ \frac{p}{p^2-16}\ ;\ \frac{1}{(p-a)^2}\ ;\ \frac{p^2}{(p-1)(p+3)}\ ;\ \frac{P}{(p-1)^2(p+2)}$$
$$\frac{2p-1}{p(p^2+3)}\ ;\ \frac{p+1}{p^2+p+2}\ ;\ \frac{p-3}{p^2+8p+15}\ ;\ \frac{2p+1}{p^2-4p+20}\ ;\ \frac{p}{(p^2+1)^2}.$$

Exercise 45. Trouver les originaux de

$$\frac{e^{-2p}}{p-1}\ ;\ \frac{e^{-px}}{p^2+p+1}.$$

Exercise 46. Démontrer que

$$\mathscr{L}^{-1}[F'(p)] = -xf(x).$$

$\left(\text{on admettra le théorème de dérivation sous le signe } \int\right)$.
En déduire l'origine de $F^{(n)}(p)$.

Application. Trouver les images de $x \sin \omega x$ et $x \cos \omega x$ (cf. exercice **??**).

Exercise 47. Soit $F(p) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{p^2}\right)$.
Calculer $F'(p)$ et en déduire l'origine de $F(p)$.
Retrouver le résultat à l'aide d'un développement de $F(p)$ en série entière de la variable $\dfrac{1}{p}$.

Exercise 48. Démontrer que

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\int_p^{\infty} F(u)\,du\right] = \frac{f(x)}{x}.$$

$\left(\text{on admettra que l'ordre des intégrations peut être modifié}\right)$.

Application. Image de

$$\frac{\sin x}{x}\ ;\ \frac{\sinh x}{x}\ ;\ \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}.$$

Exercise 49. On définit le produit de convolution de deux fonctions par

$$(f \star g) = \int_0^x f(t)g(x-t)\, dt.$$

Vérifier que

$$\begin{cases} f \star g = g \star f \\ (f_1 + f_2)\star = f_1 \star g + f_2 \star g \\ \lambda f \star g = \lambda(f \star g) \end{cases}$$

Démontrer que si $\mathscr{L}[f(x)] = F(p)$ et $\mathscr{L}[g(x)] = G(p)$

$$\mathscr{L}^{-1}[f(x) \times G(p)] = (f \star g)(x).$$

Exercise 50. En utilisant le produit de convolution trouver les originaux de

$$\frac{1}{(p+4)^2}\ ;\ \frac{1}{(p-1)(p^2+1)}\ ;\ \frac{p}{(p^2+\omega^2)(p^2+\Omega^2)}.$$

Exercise 51. Trouver l'original de $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$ en utilisant
– le produit de convolution,
– la décomposition en fraction de première espèce,
– les propriétés 4 puis 5.

Exercise 52. Trouver la solution des équations différentielles
- $y'' - y = \sin 2x$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$
- $y'' + 2y + y = e^{-x}$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
- $y'' + 2y + 5y = e^{-x}\sin 2x$ telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1.$

Exercise 53. Trouver la solution de l'équation

$$y'' + 4y = f(x) \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} y(0) = y_0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

avec successivement

$$\begin{cases} f(x) = f_0 \cos \omega x \\ f(x) = f_0\ \mathscr{U}(x-a) \\ f(x) = f_0 \delta(x) \ldots \end{cases}$$

Exercise 54. Discuter la forme des solution de l'équation différentielle

$$y'' + 2\alpha y' + \omega^2 y = 0.$$

On posera $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y'_0$.
Représenter les variations de $y(x)$.

Exercise 55. Trouver la solution de l'équation

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Exercise 56. Même exercice pour

$$xy'' + 2y' + xy = 0 \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Exercise 57. Trouver la solution des systèmes différentiels

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = x - 3y \end{cases} \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x - 6y + t \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 12x + 10y \end{cases} \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Indications sur les exercices

Exercice 34 $F(p) = \dfrac{1 - e^{-pt}}{p}$; $G(p) = \dfrac{1}{p^2}(1 - e^{-pt}) - \dfrac{T}{p} e^{-pt}$; $H(p) = \dfrac{1 - e^{-pt}}{p}$.

Remarque. $h(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ donc $H(p) = \dfrac{1}{p}\, F(p)$.

Exercice 35

$$\mathscr{L}(x^\alpha) = \int_0^\infty e^{-px} x^\alpha \, dx = \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{t}{p}\right)^\alpha d\left(\frac{t}{p}\right) = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha \, dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}.$$

Si $\alpha = n$ on retrouve le résultat $\mathscr{L}(x^\alpha) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$

$$\mathscr{L}(\sqrt{x}) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{p^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{p^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{p^{\frac{3}{2}}}$$

Exercice 36

$$\frac{24}{p^5} - \frac{4}{p^3} + \frac{1}{p}\ ;\ \frac{2-3p}{p^2+4}\ ;\ \frac{p+1}{p^2+2p+5}\ ;\ \frac{6}{(p+2)^4} + \frac{1}{p+1}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right)\ ;\ \frac{1}{2}\left[\frac{\omega+\Omega}{p^2+(\omega+\Omega)^2} + \frac{\omega-\Omega}{p^2+(\omega-\Omega)^2}\right]\ ;\ \frac{\omega}{p^2-\omega^2}\ ;\ \frac{p}{p^2-\omega^2}$$

Exercice 37

$$\mathscr{L}(x\ e^{jwx}) = \left(\frac{1}{p-j\omega}\right)^2 = \left(\frac{p+j\omega}{p^2+\omega^2}\right)^2 = \frac{p^2-\omega^2+2jp\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$$

d'où

$$\cos\ \omega = \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2} \quad \text{et} \quad \sin\ \omega = \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

En utilisant la propriété 4

$$\mathscr{L}(x\ \cos\ \omega x) = -\frac{d}{dp}[\mathscr{L}(\cos\ \omega x)] = -\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right) = \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

Exercice 38 Fig. 3.9

$$\mathscr{L}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathscr{U}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right] = e^{-p\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{p^2+1}$$

$$\mathscr{L}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathscr{U}(x)\right] = \int_0^{+\infty} e^{-px}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1-p}{p^2-1}$$

$$\mathscr{L}\left[\sin(x)\mathscr{U}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty} e^{-px}\sin\ x\ dx = \int_0^{+\infty} e^{-px}\sin\ x\ dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-px}\sin\ x\ dx$$

$$= \frac{1}{p^2+1} - \left[\frac{-e^{-px}}{p^2+1}(\cos\ x + p\sin\ x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-p\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1+p}{p^2+1}.$$

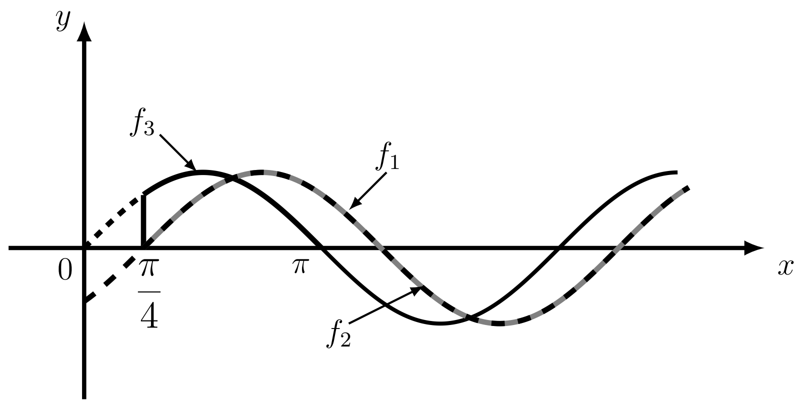


FIGURE 3.9 –

Exercice 39

$$f(x) = \mathscr{U}(x) + \mathscr{U}(x-a) + \mathscr{U}(x-2a) + \cdots$$

$$F(p) = \frac{1}{p}(1 + e^{-ap} + e^{-2ap} + \cdots) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1-e^{-ap}}.$$

Exercice 40 Appliquer le résultat sur la transformée d'une fonction périodique

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}$$

$$F_1(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{T}{p}\,\frac{e^{-pT}}{1-e^{-pT}}; \qquad F_2(p) = \frac{1}{p}\tanh\left(p\,\frac{T}{4}\right); \qquad F_3(p) = \frac{1}{p^2}\tanh\left(p\,\frac{T}{4}\right)$$

<u>Remarque.</u> $f_3(x) = \int_0^x f_2(t)\,dt$ d'où $F_3(p) = \frac{1}{p}F_2(p)$.

Exercice 41 Soit

$$\begin{cases} f_0(x) = \sin\,x & \text{si} \quad 0 < x < \pi \\ f_0(x) = 0 & \text{si} \quad x > \pi. \end{cases}$$

On a vu (paragr. II.3) que $F_0(p) = \dfrac{1+e^{-p\pi}}{p^2+1}\cdot$

D'où

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} \cdots \frac{1+e^{-p\pi}}{1-e^{-2p\pi}} = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{1-e^{-p\pi}}$$

Exercice 42

$$\frac{\sin\ x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$\mathscr{L}\left(\frac{\sin\ x}{x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\frac{(2n)!}{p^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)}\frac{1}{p^{2n+1}} = \arctan\frac{1}{p}\cdot$$

On en déduit

$$\mathscr{L}[\text{si }(x)] = \frac{1}{p}\mathscr{L}\left(\frac{\sin\ x}{x}\right) = \frac{1}{p}\arctan\frac{1}{p}\cdot$$

Exercice 43

$$\mathscr{L}[J_0(x)] = \frac{1}{p} - \frac{1}{4}\frac{2}{p^3} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(n!)^2}\frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{p^{2n+1}} + \cdots$$

$$\mathscr{L}[J_0(x)] = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{p^2} + \cdots + (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{1}{p^{2n}} + \cdots\right)$$

$$\mathscr{L}[J_0(x)] = \frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\cdot$$

Exercice 44

$$\frac{\sinh\ x\sqrt{3}}{\sqrt{3}};\quad \cosh\ 4x;\quad x\ e^{-ax};\quad \delta(x) + \frac{1}{4}\ e^{x} - \frac{9}{4}\ e^{-3x}$$

$$\frac{e^x}{3}\left(x+\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}\ e^{-2x};\quad -\frac{1}{3}\mathscr{U}(x) + \frac{1}{3}\cos\ x\sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\ x\sqrt{3}$$

$$e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\ \frac{x\sqrt{7}}{2} + \frac{1}{\sqrt{7}}\sin\ \frac{x\sqrt{7}}{2}\right);\quad 5\ e^{-5x} - 4\ e^{-3x}$$

$$e^{2x}\left(2\cos\ 4x + \frac{5}{4}\sin\ 4x\right);\quad \frac{x\ sin\ x}{2}$$

Exercice 45

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\right) = e^x \Longrightarrow \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2p}}{p-1}\right) = e^{x-2}.\,\mathscr{U}(x-2)$$

d'après la propriété n° 3.

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right] = \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{x}{2}}\ \sin\ \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

d'où

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-px}}{p^2+p+1}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{x-\pi}{2}}\ \sin\ (x-\pi)\ \frac{2\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 46

$$F'(p) = \int_0^\infty \frac{d}{dp}[e^{-px}\ f(x)]\ dx = \int_0^\infty -x\ e^{-px}\ f(x)\ dx = \int_0^\infty e^{-px}[-x\ f(x)]\ dx$$

d'où

$$\mathscr{L}^{-1}[F'(p)] = -x\ f(x) \quad \text{et} \quad \mathscr{L}^{-1}[F^{(n)}(p)] = (-1)^n x^n f(x).$$

Exemples.

$$\mathscr{L}(\sin\ \omega x) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \Longrightarrow \mathscr{L}(x\ \sin\ \omega x) = \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}\cdot$$

$$\mathscr{L}(\cos\ \omega x) = \frac{p}{p^2+\omega^2} \Longrightarrow \mathscr{L}(x\ \cos\ \omega x) = -\frac{(p^2+\omega^2)-2p^2}{(p^2+\omega^2)^2} = \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}\cdot$$

Exercice 47

$$F'(p) = \frac{-2}{p(p^2+1)} = -\frac{2}{p} + \frac{2p}{p^2+1}\cdot$$

$$\mathscr{L}^{-1}[F'(p)] = -x\ f(x) = -2\mathscr{U}(x) + \ \cos\ x$$

d'où

$$f(x) = 2\,\frac{1-\cos\ x}{x} \quad \text{pour } x>0.$$

Exercice 48

$$\int_p^{+\infty} F(u)\ du = \int_p^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-ux}\ f(x)\ dx = \int_0^{+\infty} dx \int_p^{+\infty} e^{-ux}\ f(x)\ du$$

$$\int_0^{+\infty} f(x)\left[\frac{e^{-ux}}{-x}\right]_0^\infty dx = \int_0^{+\infty} e^{-px}\ .\ \frac{f(x)}{x}\ dx$$

d'où
$$\mathscr{L}^{-1}\left[\int_p^{+\infty} F(u)\, du\right] = \frac{f(x)}{x}\cdot$$

Exemples.

- $\mathscr{L}\left(\frac{\sin\ x}{x}\right) = \int_p^{\infty} \frac{du}{u^2+1} = \frac{\pi}{2} - \arctan\ p = \arctan\ \frac{1}{p}.$
- $\mathscr{L}\left(\frac{\sinh\ x}{x}\right) = \int_p^{\infty} \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\ \ln\frac{p+1}{p-1}.$
- $\mathscr{L}\left(\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\right) = \int_p^{\infty} \left(\frac{1}{u+a} - \frac{1}{u+b}\right) du = \ln\frac{p+b}{p+a}.$

Exercice 49

$$(g\star f)(x) = \int_0^x g(t)f(x-t)\ dt = \int_x^0 g(x-u)f(u)\ d(-u) \quad (x-t=u)$$
$$(g\star f)(x) = \int_0^x f(u)g(x-u)\ d(u) = (f\star g)(x).$$

Le produit de convolution est commutatif (on vérifie aisément la bilinéarité)

$$\mathscr{L}[(f\star g)(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-px}édx \int_0^x f(t)g(x-t)\ dt$$
$$= \lim_{x\to\infty} \iint_{\mathscr{D}_x} e^{-px}\ f(t)g(x-t)\ dx\ dt \qquad \text{(fig.3.10)}$$

en posant
$$\begin{cases} x = u+v \\ t = u \end{cases} \quad \left(\left|\frac{D(x,t)}{D(u,v)}\right| = 1\right)$$

on obtient
$$\mathscr{L}[(f\star g)(x)] = \lim_{x\to\infty} \iint_{\Delta_x} e^{-p(u+v)}\ f(u)g(v)\ du\ dv$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-pu}f(u)\ du \times \int_0^{+\infty} e^{-pv}g(v)\ dv$$

d'où
$$\mathscr{L}[(f\star g)(x)] = \mathscr{L}[f(x)] \times \mathscr{L}[g(x)].$$

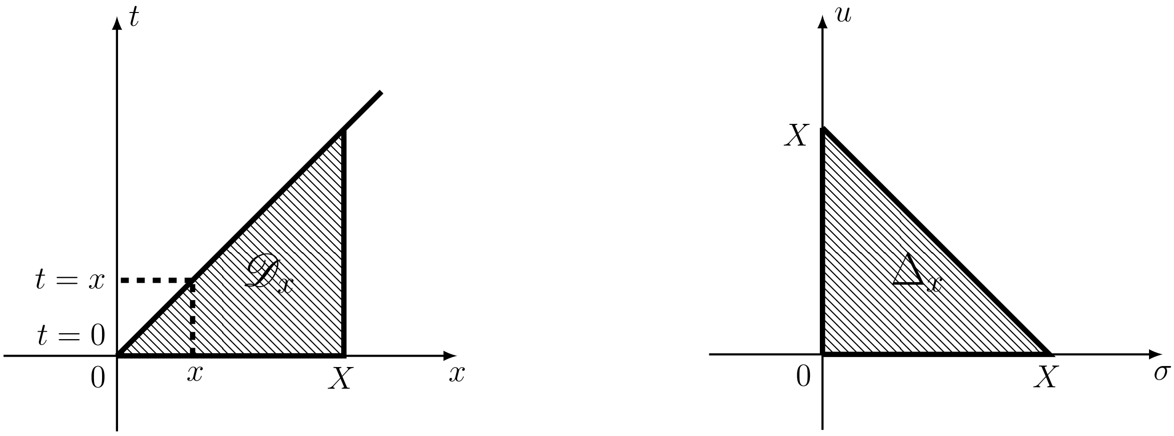


FIGURE 3.10 –

Exercice 50

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+4}\cdot\frac{1}{p+4}\right) = \int_0^x e^{-4t}\cdot e^{-4(x-t)}\,dt = x\,e^{-4x}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\right) = \int_0^x e^{-t}\sin(x-t)\,dt = \frac{1}{2}[e^{-x}+\sin\ x-\cos\ x]$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{\Omega^2+\omega^2}\right) = \int_0^x \cos\ \omega t\cdot\frac{\sin\ \Omega(x-t)}{\Omega}\,dt = \frac{1}{\Omega^2+\omega^2}(\cos\ \omega x-\cos\ \Omega x).$$

Exercice 51

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1} = \left(\frac{1}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{p^2+\omega^2}\right) &= \int_0^x \frac{\sin\omega t}{\omega}\cdot\frac{\sin\omega(x-t)}{\omega}\,dt\\ &= \frac{1}{2\omega^2}\left[\frac{\sin\omega(2t-x)}{2\omega}-t\cos\ \omega x\right]_0^x\\ &= \frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{\sin\omega t}{\omega}-x\cos\ \omega x\right).\end{aligned}$$

<u>Autre méthode.</u>

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+\omega^2}\right) = \frac{\sin\omega x}{\omega} \quad \text{d'où} \quad \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{-2p}{(p^2+\omega^2)^2}\right) = -x\,\frac{\sin\omega x}{\omega}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p^2+\omega^2)^2}\right) = \frac{x}{2}\,\frac{\sin\omega x}{\omega} \quad \text{d'où} \quad \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}\right) = \frac{1}{2\omega}\int_0^x t\ \sin\ \omega t\ dt$$

Exercice 52 1. $y = \frac{1}{5}\, e^{x} + \frac{4}{5}\, e^{-x} - \frac{1}{5}\, \sin\, 2x$

2. $y = e^{-x}\left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right)$

3. $y = e^{-x}\left(-\frac{x}{4}\, \cos\, 2x + \frac{5}{8}\, \sin\, 2x\right)$.

Exercice 53

$$p^2 Y - p y_0 + 4Y = F(p)$$

$$Y = y_0\, \frac{p}{p+4} + F(p) \cdot \frac{1}{p+4}$$

d'oü

$$y = y_0\, \cos\, 2x + \frac{1}{2} \int_0^t f(t) \sin\, 2(x-t)\, dt.$$

On obtient successivement

Exercice 54 En appliquant la transformation de Laplace on obtient

$$Y = \frac{p y_0 + y_0' + 2\alpha y_0}{p^2 + 2\alpha p + \omega^2} = \frac{(p+\alpha) y_0 + y_0' + \alpha y_0}{(p+\alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2}.$$

Si $\Delta = \alpha^2 - \omega^2 > 0$, $\quad y(x) = e^{-\alpha x}\left[y_0 \cosh\, x\sqrt{\alpha^2 - \omega^2} + \frac{y_0' + \alpha y_0}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}\text{é} \sinh\, x\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}\right]$

Si $\Delta = \alpha^2 - \omega^2 = 0$, $\quad y(x) = e^{-\alpha x}[y_0 + (y_0' + \alpha y_0)x]$

Si $\Delta = \alpha^2 - \omega^2 < 0$, $\quad y(x) = e^{-\alpha x}\left[y_0\, \cos\, \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} + \frac{y_0' + \alpha y_0}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}\, \sin\, \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}\right]$

On obtient dans ce dernier cas un terme sinusoïdal amorti de période $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}$ si $\alpha \neq 0$, un terme sinusoïdal de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ si $\alpha = 0$ (fig. 3.11). α est appelé coefficient d'amortissement, ω fréquence propre.

Exercice 55 On utilise la propriéte 4. $\mathscr{L}[-xf(x)] = F'(p)$

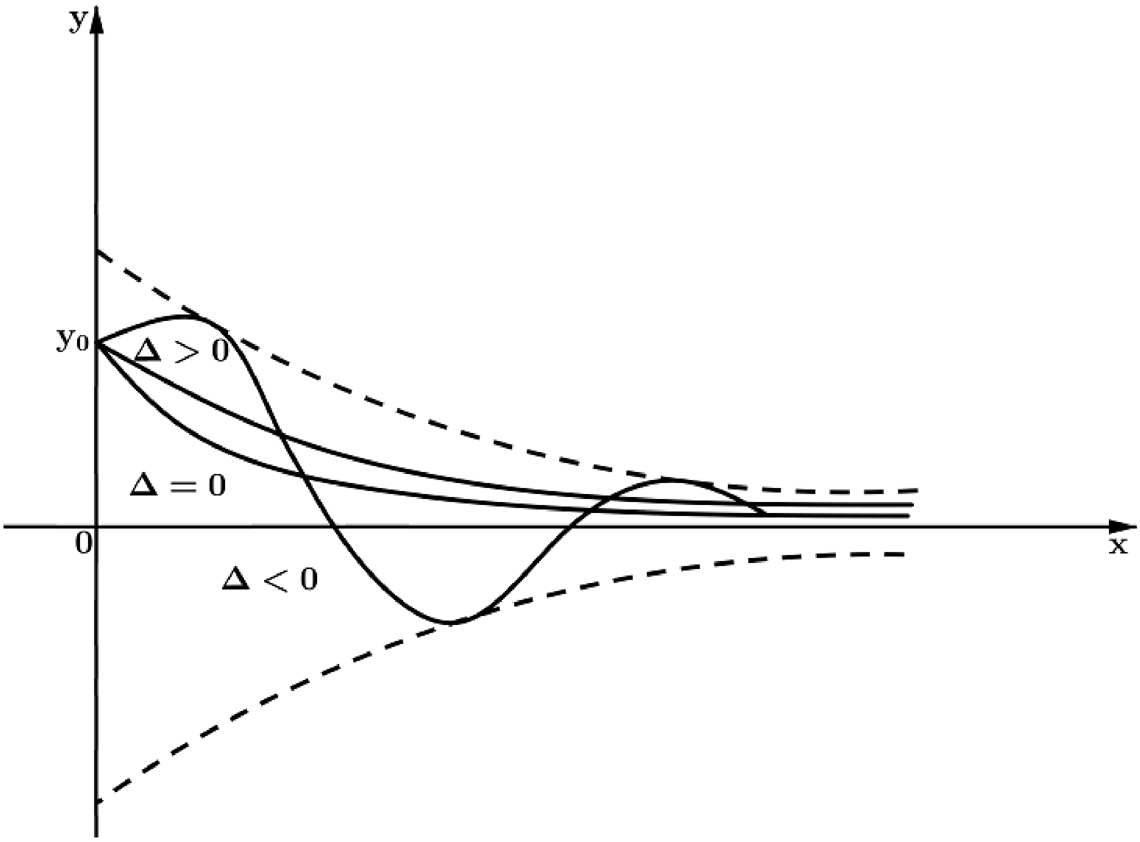


FIGURE 3.11 –

$$-\frac{d}{dp}(p^2Y - p) + (pY - 1) - \frac{d}{dp}(Y) = 0$$

$$\frac{Y'}{Y} = -\frac{p}{p^2+1} \Rightarrow Y = \frac{C}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Or $\lim_{p\to\infty} pY(p) = y(0^+)$ (théorème de la valeur initiale).

Donc $C = 1,\ Y = \dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ et $y = J_0(x)$ (cf. exercice **??**).

Exercice 56 Même méthode qu'a l'exercice précédent

$$Y' = -\frac{1}{p^{+}1} \Rightarrow Y = -\arctan\ p + C = \arctan\ \frac{1}{p} + K$$

$$\lim_{p\to\infty} pY(p) = y(0^+) = 1 \Rightarrow K = 0$$

$$y = \mathscr{L}^{-1}\left(\arctan\ \frac{1}{p}\right) = \frac{\sin\ x}{x}.$$

Exercice 57 $\left\{\begin{array}{l} X = \dfrac{p+13}{(p+2)(p-4)} = -\dfrac{11}{6}\,\dfrac{1}{p+2} + \dfrac{17}{6}\,\dfrac{1}{p-4} \\ \\ Y = \dfrac{2p-1}{(p+2)(p-4)} = \dfrac{5}{6}\,\dfrac{1}{p+2} + \dfrac{7}{6}\,\dfrac{1}{p-4} \end{array}\right.$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{11}{6}\,e^{-2x} + \dfrac{17}{6}\,e^{4x} \\ \\ y = \dfrac{5}{6}\,e^{-2x} + \dfrac{7}{6}\,e^{4x} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} X = \dfrac{p-10}{p^2(p-1)(p-2)} = \dfrac{-5}{p^2} - \dfrac{7}{p} + \dfrac{9}{p-1} - \dfrac{2}{p-2} \\ Y = \dfrac{12}{p^2(p-1)(p-2)} = \dfrac{6}{p^2} + \dfrac{9}{p} + \dfrac{12}{p-1} - \dfrac{3}{p-2} \end{array}\right.$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} x = -5t + 7\mathscr{U}(t) + 9e^t - 2e^{2t} \\ y = 6t + 9\mathscr{U}(t) - 12e^t + 3e^{2t}. \end{array}\right.$$

Bibliographie

[1] K. Allab, Elements d'analyse , OPU (1986).

[2] S. Abou Jaoude, et J. Chevalier, Callier de mathématiques, Analyse II et III , OCDL (1972).

[3] J. Lelong-Ferrand et J. M. Arnaudies, Cours de mathématiques , tome 2 Analyse , Dunod (1977).

[4] J. Quinet, Cours élémentaire de mathématiques supérieures, tome 3- Calcul intégrale et séries , Dunod (1989).

[5] N. Piskounov, Calcul différentiel et intégral, tome 1 et 2, Édition Mir Moscou (1980).

[6] P. Thuillier, J. C. Belloc, Analyse 1. Fonction d'une variable réelle. Fonction de plusieurs variables , Masson, (1990).

[7] P. Thuillier, J. C. Belloc, Analyse 2. Calcul intégrale, équation différentielles. , Masson, (1989).

[8] P. Thuillier, J. C. Belloc, Analyse 3. Séries, intégrale de Laplace, intégrale de Fourier, transformation en Z , Masson, (1989).