

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE FERHAT ABBAS, SETIF 1



THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
pour l'obtention du diplôme de

Doctorat LMD

Option : Optimisation et Contrôle

Par

Mme. BELGUIDOUM Ouafa

Thème :

**RÉSOLUTION DU PROBLÈME D'INÉQUATIONS
VARIATIONNELLES GÉNÉRALISÉ PAR DEUX
NOUVELLES MÉTHODES DE PROJECTION**

Thèse soutenue le

devant le jury composé de :

Présidente
Directeur de thèse
Examineurs :

Mme. Zakia KEBBICHE
Mme. Hassina GRAR
Mr. Mousaab BOUAFIA
Mme. Zahira KEBAILI

Prof. UFA. Sétif 1
MCA. UFA. Sétif 1
MCA. 08 Mai 1945. Guelma
MCA. UFA. Sétif 1

2022 / 2023

DÉDICACES

À MES CHERS PARENTS,

À MON MARI ET MON CHER FILS DOUX IDRIS,

À MON FRÈRE LYAMINE, SA FEMME ET SES ENFANTS,

À MES CHÈRES SŒURS: HASSINA, SIHEM, SAMIHA, DALLEL, ABELA ET
SALMA,

À TOUTE MA FAMILLE,

À MES AMIES: SONIA, KHAOULA, IMENE, CHAHINEZ, NABILA, MOUNA,

À TOUS MES AMIS.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné la patience, la volonté et l'énergie pour suivre et mener à bien cet humble travail.

Je tiens à remercier chaleureusement ma directrice de thèse Dr. Hassina GRAR 'avoir accepté de rapporter cette thèse ainsi que pour sa constante disponibilité durant ces années, ses encouragements, son aide précieux, ses conseils, son engagement lors de la préparation de cette thèse et ses grandes qualités qui m'ont permis de mener ce projet. J'apprécie son dévouement envers les étudiants. Je voudrais exprimer mes remerciements et mon appréciation pour votre grand effort, et de vous dire que vous méritez tous les mots de remerciement, merci beaucoup.

En plus de ma directrice de thèse, je tiens à exprimer ma profonde gratitude au Prof. Zakia KEBBICHE pour l'honneur qu'elle me fait en présidant le jury, je la remercie respectueusement.

Je tiens à remercier les autres membres du jury, Dr. Mousaab BOUAFIA et Dr. Zahira KEBAILI pour avoir lu ma thèse et pour avoir pris le temps de participer à ce jury.

Je remercie également tous mes professeurs qui m'ont enseigné depuis l'école primaire jusqu'à maintenant.

Je tiens à remercier chaleureusement mon mari pour son grand et précieux aide. Sans lui, ce succès n'aurait pas été atteint.

Je veux aussi remercier mes chers parents qui sont restés derrière moi pour ma réussite et mon bonheur, également je remercie mes frères et mes sœurs, toute ma famille et tous mes amis, pour tout ce qu'ils m'ont donné et qui a été inestimable.

Afin de n'oublier personne, mes sincères remerciements vont à tous ceux qui m'ont aidé dans la réalisation de cette modeste thèse.

Belguidoum Ouafa

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	3
1 Présentation des notions fondamentales	8
1.1 Définition d'une application multivoque et notions relatives	8
1.1.1 Graphe, domaine et image d'une application multivoque	9
1.1.2 Image réciproque d'une application multivoque	14
1.1.3 Composée des applications multivoques	17
1.1.4 Opérations algébriques sur les applications multivoques	18
1.1.5 Linéarité des applications multivoques	18
1.1.6 Convexité des ensembles et des applications multivoques	19
1.1.7 Distance de Hausdorff	21
1.1.8 Notions de continuité des applications multivoques	23
1.1.9 Applications multivoques lipschitziennes	28
1.1.10 Différentiabilité des applications multivoques	29
1.1.11 Monotonie des applications multivoques	31
1.2 Notion de séparation	31
2 Problème d'inéquations variationnelles classique et généralisé	33
2.1 Problème d'inéquations variationnelles	34
2.1.1 Liens entre (VIP) et autres problèmes mathématiques	34

2.2	Problème d'inéquations variationnelles généralisé	38
2.2.1	Liens entre (GVIP) et autres problèmes mathématiques généralisés	39
2.2.2	Principaux résultats d'existence et d'unicité des solutions de (GVIP)	41
2.3	Résolution de (VIP)	43
2.3.1	Quelques méthodes de projection connues	43
2.4	Résolution de (GVIP)	49
3	Extension de la méthode de Grar et Benterki pour le problème d'inéquations variationnelles généralisé	51
3.1	Description de l'algorithme	53
3.2	Analyse de la convergence de l'algorithme	54
3.3	Algorithme de Ye	63
3.4	Implémentation numérique	64
3.5	Commentaires généraux	76
4	Nouvelle méthode de projection pour le problème d'inéquations variationnelles généralisé	77
4.1	Description de l'algorithme	78
4.2	Analyse de la convergence de l'algorithme	79
4.3	Implémentation numérique	86
4.4	Commentaires généraux	89
	Conclusion générale et perspectives	91
	Bibliographie	93

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie des problèmes d'inéquations variationnelles notés (*VIP*) introduits à l'origine sous l'impulsion des spécialistes des équations aux dérivées partielles, en particulier **G. Stampacchia** et **H. Hartman** au milieu des années soixante du siècle passé a joué un rôle crucial dans l'étude d'un large éventail de problèmes. Ces dernières décennies, cette théorie a été témoin d'une évolution pertinente contenant des progrès théoriques, des développements algorithmiques et des applications dans de nombreux domaines de sciences pures et appliquées. En effet, la théorie d'inéquations variationnelles offre un traitement unificateur et novateur pour les problèmes de l'élasticité, les problèmes unilatéraux d'obstacles et d'équilibre qui se posent dans l'économie et la finance, ainsi que les réseaux de transport. D'autre part, ce problème englobe plusieurs problèmes mathématiques intéressants, on cite à titre indicatif, les systèmes d'équations, le problème de complémentarité, les problèmes d'optimisation,...

C'est bien rarement qu'on trouve l'unicité dans les activités humaines et les problèmes du monde réel. L'outil mathématique convenable pour présenter ce phénomène est donné par les applications multivoques. Ces dernières apparaissent dans de nombreux problèmes pratiques tels que la compression d'image, la récupération d'image, l'évolution des réservoirs de pétrole, ... Comme elles apparaissent dans plusieurs problèmes mathématiques, parmi ces problèmes et les plus connus, on trouve l'image réciproque d'une fonction et le sous différentiel d'une fonction non différentiable.

L'introduction de la notion des applications multivoques, ces applications qui font

correspondre à chaque élément de l'ensemble de départ un ensemble de l'ensemble d'arrivée dans plusieurs problèmes théoriques et appliqués a conduit aussi à son introduction dans les problèmes (*VIP*) d'où l'apparition des problèmes d'inéquations variationnelles généralisés (*GVIP*) vers les années soixante dix. Evidemment que ces problèmes trouvent des applications importantes dans les domaines cités auparavant et d'autres domaines avec une généralité d'avantage.

Les inéquations variationnelles généralisées ont reçu une grande attention de la part de nombreux chercheurs qui ont fortement pensé à la nécessité de fonder de propres résultats pour la théorie de cette classe de problèmes, ainsi d'établir des méthodes numériques pour leur résolution.

La première idée qui est survenue aux têtes des chercheurs travaillant sur ce thème est la question naturelle suivante : Puisque (*GVIP*) est une extension de (*VIP*), donc est ce qu'il existe également une possibilité de faire une extension directe des méthodes déjà proposées pour la résolution de (*VIP*) et de les appliquer cette fois pour la résolution de (*GVIP*) et cela en remplaçant simplement $F(x)$ par un élément arbitraire t de $F(x)$ dans les algorithmes correspondants ? Théoriquement, ces algorithmes comme ils peuvent résoudre cette classe de problèmes efficacement, peuvent aussi échouer dans leur mission. Pour trancher au sujet de ce point primordial, il est indispensable d'examiner en premier lieu la cohérence de la théorie de ces algorithmes pour les (*GVIP*) et d'évaluer par la suite leur performance numériquement.

D'autres chercheurs trouvent qu'il sera plus intéressant s'ils concentrent leurs efforts afin de développer des algorithmes spécifiques proprement dits pour trouver des solutions approximatives pour (*GVIP*).

Dans ce contexte, de nombreux résultats théoriques et divers algorithmes pour les inéquations variationnelles généralisées ont été proposés et étudiés par exemple dans les références [1, 6, 23, 30, 33]. Ainsi, nous devons rappeler certains processus de développement de ces méthodes pour résoudre (*GVIP*). On commence par l'algorithme bien connu du point proximal [54] qui requiert que l'application multivoque impliquée dans le problème doit être monotone. En éliminant cette hypothèse, [1] a pu prouver que dans le cas où l'ensemble des contraintes a une structure d'un produit d'intervalles,

alors l'algorithme du point proximal est toujours applicable pour le problème en question. Sous l'hypothèse de la pseudomonotonie de l'application multivoque F , [37] ont décrit une méthode de relaxation combinée pour résoudre (GVIP), dans la même direction de recherche le lecteur intéressé peut consulter [38, 39]. Récemment, **Li et He** [30] ont mis au point une méthode de projection pour (GVIP), où le choix d'un élément de $F(x)$, nécessite la résolution d'un (VIP) classique. Par conséquent, le coût de calcul à chaque itération peut être assez coûteux, pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter aux références [19, 34]. Pour surmonter à cette difficulté, **Fang et He** [18] ont pu apporter des modifications aux algorithmes précédents de telle manière que le choix d'un élément de $F(x)$ puisse être arbitraire et la convergence est démontrée sous les mêmes hypothèses que dans [30].

Vu l'importance et le succès numérique incontestable des dernières méthodes de projection proposées pour (VIP) qui ont été largement étudiées et d'une manière intensive dans la littérature, alors nous concentrerons notre étude dans cette thèse sur les méthodes présentées dans les références [24, 32, 57, 60]. Ces travaux ont été réalisés dans le but d'alléger les hypothèses de convergence et d'améliorer le comportement algorithmique des premières méthodes de projection proposées dans [34, 41]. Ces nouveaux algorithmes possèdent des propriétés théoriques et numériques très intéressantes. De plus, leur mise en oeuvre sur de nombreuses classes de (VIP) a montré que les résultats obtenus ont été très encourageants.

Parmi ces algorithmes de projection, on trouve l'algorithme de **Grar et Benterki** [24] qui a fait preuve d'une supériorité numérique remarquable en comparaison avec les autres algorithmes. A cet égard, on a suggéré de faire une étude comportant l'extension théorique et algorithmique de cette méthode pour résoudre (GVIP). Cette idée constitue la motivation principale du premier axe de recherche proposé dans cette thèse.

Il est bien connu que les méthodes de projection [24, 30, 32, 34, 41, 57, 60] et les méthodes de point proximal [1, 8, 13, 18, 19, 38, 39, 43, 54, 69] sont les plus populaires pour résoudre (GVIP) et la convergence de la majorité de leurs algorithmes est prouvée sous les hypothèses de la continuité et la pseudomonotonie de l'application multivoque

F , où il a été remarqué que la méthode introduite par Ye [65] est l'une des méthodes les plus efficaces pour résoudre ($GVIP$). En s'inspirant de cette dernière et les méthodes de projection récentes proposées pour (VIP) mentionnées auparavant [24, 30, 57, 60], notre second objectif dans cette thèse est de combiner ces méthodes afin de profiter au maximum des qualités de chacune d'elles. La nouvelle version que nous avons proposée semble être plus prometteuse que celle de Ye sur le plan théorique et numérique. En effet, notre méthode converge globalement sous une condition plus faible que la pseudomonotonie, et d'autre part, nous avons introduit une procédure de recherche linéaire différente qui nécessite moins de projections à calculer. Concernant la détermination de l'itéré suivant, nous avons proposé deux expressions pour assurer que la suite générée par notre algorithme appartient à l'ensemble des contraintes ainsi qu'au demi-espace contenant ensemble des solutions. Certes, de point de vue théorique, ces propositions conduiront à une convergence plus rapide avec un coût de calcul considérablement réduit.

La thèse est répartie de la manière suivante :

Le premier chapitre est la base de cette étude, où nous donnons la définition des applications multivoques ainsi que les principaux ensembles caractéristiques associés. De même, nous présentons une synthèse détaillée concernant les notions de semi-continuité, la convexité, la monotonie, la différentiabilité et les opérations algébriques agissant sur les applications multivoques.

Le second chapitre contient dans sa première partie, la définition du problème d'inéquations variationnelles (VIP) ainsi que les relations qui existent entre ce dernier et d'autres problèmes mathématiques intéressants. Par la suite, on trouve la définition du problème à résoudre dans ce travail, il s'agit du problème d'inéquations variationnelles généralisé ($GVIP$). De même, on donne les liens existants entre ($GVIP$) et d'autres problèmes mathématiques généralisés. Cette présentation est suivie par les principaux résultats d'existence et d'unicité des solutions associés au problème en question. Ce pendant, la deuxième partie est consacrée à un bref aperçu concernant les méthodes de projection les plus connues pour la résolution de (VIP).

Le troisième chapitre constitue notre première contribution dans cette thèse où nous

proposons l'extension de la méthode de **Grar** et **Benterki** pour résoudre le (*GVIP*). Une présentation détaillée de l'algorithme correspondant accompagnée de plusieurs résultats pour établir sa convergence globale. Sans oublier de mentionner que l'extension des résultats théoriques déjà établis pour (*VIP*), n'a pas été une tâche facile. Quelques expériences numériques sont rapportées vers la fin dans un cadre comparatif appréciable et signifiant.

Le dernier chapitre est consacré à la deuxième approche numérique que nous avons introduite pour (*GVIP*). L'idée de base pour cette approche est la combinaison en quelque sorte de la méthode de **Grar** et **Benterki** et celle de **Ye**. Une description approfondie concernant cette nouvelle méthode de projection dont l'analyse et la démonstration de sa convergence a nécessité l'introduction de nouveaux résultats théoriques. On termine ce chapitre par une implémentation numérique comprenant une comparaison entre la méthode de **Ye** et la méthode proposée où les résultats obtenus par cette dernière témoignent d'une efficacité assez remarquable.

CHAPITRE 1

PRÉSENTATION DES NOTIONS FONDAMENTALES

Nous commençons ce chapitre tout d'abord par donner la définition d'une application multivoque ainsi qu'un éventail de définitions algébriques et topologiques en analyse multivoque. Les éléments à faire ressortir par la suite sont essentiellement les notions de la semi-continuité, la convexité, la monotonie et la différentiabilité des applications multivoques. Des divers exemples sont mis en évidence. Dans la dernière partie de ce chapitre, on donne un rappel sur la notion de séparation qui sera utile dans l'analyse de convergence des méthodes présentées dans ce travail.

1.1 Définition d'une application multivoque et notions relatives

L'application multivoque est une généralisation de l'application univoque connue par le nom (fonction). La pertinence de cette nouvelle notion a été négligée jusqu'à la fin du XXe siècle.

De nombreux spécialistes des mathématiques appliquées ont réalisé que les applications multivoques pouvaient être utilisées pour répondre à des questions dans différentes sciences telles que l'économie, la biologie, la physique, l'ingénierie, etc. Ces mathématiciens ont tenté d'étendre les propriétés des applications univoques au cas

des applications multivoques. A cet effet, de nouveaux concepts devaient être formulés.

Parmi ceux qui ont fortement contribué à cette théorie, on trouve le mathématicien français **Jean-Pierre Aubin** dans son livre sur l'analyse des applications multivoques publié en 1990.

Définition 1.1.1 Soient X, Y deux ensembles. Une application multivoque F de X à valeurs dans Y est une application qui associe à chaque élément x de X , un sous-ensemble éventuellement vide de Y . Cette notion peut être présentée par plusieurs notations qu'on rappelle ici :

$$F : X \rightrightarrows Y, F : X \rightarrow 2^Y \text{ ou } F : X \rightsquigarrow Y.$$

Dans la littérature, les applications multivoques sont aussi appelées multi-applications, multifonctions, relations ou correspondances.

1.1.1 Graphe, domaine et image d'une application multivoque

Définition 1.1.2 Soient X et Y deux ensembles non vides et $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque.

▷ On appelle graphe de F l'ensemble

$$\text{Gr}(F) \text{ ou Graph}(F) = \{(x, y) \in X \times Y / y \in F(x)\}.$$

Ou

$$\text{Gr}(F) = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times F(x)$$

▷ On appelle domaine de F , l'ensemble

$$\text{Dom}(F) = \{x \in X / F(x) \neq \emptyset\}.$$

Si $\text{Dom}(F) = X$, on dit que l'application multivoque F est stricte. Si $\text{Dom}(F) \neq \emptyset$, on dit que l'application multivoque F est propre.

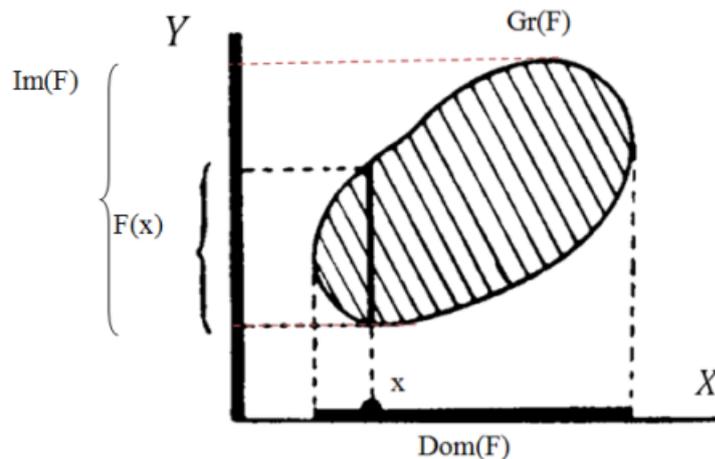


FIGURE 1.1 – Graphe, domaine et image d'une application multivoque F

▷ On appelle l'image de F l'ensemble

$$\text{Im}(F) = \bigcup_{x \in X} \{y \in Y / \exists x \in X, y \in F(x)\}.$$

Ou

$$\text{Im}(F) = \bigcup_{x \in X} \{F(x) / x \in \text{Dom}(F)\}.$$

► Une application multivoque F est dite non triviale si son graphe est non vide, c'est-à-dire, s'il existe au moins un élément $x \in X$ tel que $F(x)$ soit non vide.

$\text{Dom}(F)$ est la projection du graphe de F sur X et $\text{Im}(F)$ est la projection du graphe de F sur Y .

Définition 1.1.3 Soient K un sous-ensemble non vide de X et $F : K \rightrightarrows Y$ une application multivoque telle que $\forall x \in K, F(x) \neq \emptyset$. On peut prolonger F sur tout l'ensemble X par l'application multivoque F_K définie par

$$F_K(x) = \begin{cases} F(x), & \text{si } x \in K \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est évident que $\text{Dom}(F_K) = K$.

Définition 1.1.4 Soient K un sous-ensemble non vide de X et $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque. La restriction de F sur K notée par $F|_K$, est une application multivoque définie par

$$F|_K(x) = \begin{cases} F(x), & \text{si } x \in K \\ \emptyset, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on a $\text{Dom}(F|_K) = \text{Dom}(F) \cap K$.

On présente maintenant quelques exemples pour illustrer cette notion d'avantage.

Exemple 1.1.1 Soient $f : X \rightarrow Y$ une application univoque (fonction) et C un sous-ensemble non vide de Y .

L'application $F(x) = f(x) + C$ est une application multivoque de X dans Y .

Exemple 1.1.2 Etant donné deux ensembles X et Y et la fonction $f : X \rightarrow Y$, l'application réciproque $F = f^{-1} : Y \rightrightarrows X$ qui à tout $y \in Y$ associe

$$F(y) = \{x \in X / f(x) = y\},$$

est une application multivoque.

Exemple 1.1.3 Considérons l'application multivoque connue et dite de "Heaviside" $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ [-1, 1], & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exemple 1.1.4 Soient X un espace de Banach, X^* son espace dual et la fonction

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

L'application $\partial f : X \rightrightarrows X^*$ qui à $x \in X$ associe $\partial f(x)$ telle que

$$\partial f(x) = \{u \in X^* / \forall y \in X, f(y) \geq f(x) + \langle u, y - x \rangle\},$$

est une application multivoque. $\partial f(x)$ est appelé le sous-différentiel de f au point x et les éléments de $\partial f(x)$ sont appelés les sous-gradients de f en x .

Exemple 1.1.5 Soit X un espace de Banach et C un sous ensemble convexe fermé (non vide) de X .

Alors, l'application $N_C(\cdot) : X \rightrightarrows X^*$ telle que

$$N_C(x) = \{u \in X^* / \langle u, y - x \rangle \leq 0, \forall y \in C\},$$

définit une application multivoque désignant le cône normal de C en tout point x . Cette application multivoque joue un rôle crucial dans la caractérisation des solutions optimales pour les problèmes de minimisation.

Exemple 1.1.6 Soit la fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Alors, l'application multivoque $S_f : \mathbb{R} \rightrightarrows X$ donnée par

$$S_f(r) = \{x \in X / f(x) = r, r \in \mathbb{R}\}. \quad (\text{représente l'ensemble de niveau } r).$$

Exemple 1.1.7 Soit la fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Alors, on peut définir les applications multivoques $E_f, H_f : X \rightrightarrows \mathbb{R}$ telles que

$$E_f(x) = \{r \in \mathbb{R} / f(x) \leq r\}, \quad (\text{représente l'épigraphe de } f),$$

et

$$H_f(x) = \{r \in \mathbb{R} : f(x) \geq r\}, \quad (\text{représente l'hypographe de } f).$$

De plus, il est commode d'exhiber quelques problèmes ayant rapport avec les applications multivoques. Ces dernières ont permis de modéliser une multitude de problèmes issus de diverses disciplines dont ceux rencontrés en théorie de l'optimisation convexe. Ces applications ont permis d'étudier les problèmes du type

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ \text{tel que } x \in C, \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ est une application multivoque telle que $\text{Dom } f \neq \emptyset$, f est appelée fonction objectif (ou fonction coût). C est un sous-ensemble non vide de $\text{Dom}(f)$ appelé

ensemble des contraintes. Comme f est une application multivoque, il s'agit d'un problème d'optimisation multivoque. Résoudre ce problème consiste à déterminer tous les vecteurs $\bar{x} \in C$ pour lesquels il existe $\bar{y} \in f(\bar{x})$ tel que \bar{y} soit un élément minimal de l'ensemble $f(C)$. Dans [25], A. H. Hamel et al. ont appliqué ce type de problèmes d'optimisation pour certains modèles de marché dans le domaine de la finance. D'autre part, ce problème constitue le modèle approprié pour de nombreux problèmes de complémentarité, de contrôlabilité, d'équilibre, d'optimisation paramétrique, etc.

Un second problème dans lequel les applications multivoques sont intensivement utilisées, on peut citer les inclusions différentielles. Ces dernières représentent une généralisation des équations différentielles ordinaires.

Une équation différentielle multivoque de premier ordre et à second membre est de la forme

$$\dot{x} \in F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0.$$

où $\dot{x}(\cdot)$ indique la dérivée temporelle de $x(\cdot)$, $x_0 \in X$ une condition initiale et $F : [0, T] \times X \rightrightarrows X$ une application multivoque.

Aujourd'hui, la théorie des inclusions différentielles est devenue plus attirante et son champ d'application s'est considérablement développé, et s'est avéré très fructueux dans de nombreux domaines comme la mécanique unilatérale, l'économie mathématique, les sciences de l'ingénieurs (circuits électriques), l'énergie (la contrôlabilité de la consommation de carburant).

Maintenant, on va considérer quelques exemples abstraits d'applications multivoques avec leurs graphiques.

Exemple 1.1.8 *Considérons l'application multivoque $F : [0, 1] \rightrightarrows [0, 1]$ définie comme suit*

$$F(x) = \{y \in [0, 1] / x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

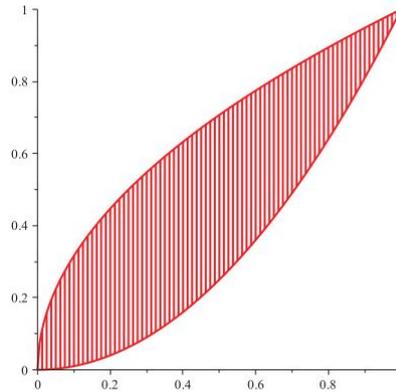


FIGURE 1.2 – Représentation graphique de de l'exemple 1.1.8

En cet exemple, $F(\frac{1}{2}) = [\frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.

Exemple 1.1.9 Considérons un autre exemple où $G : [0, 1] \rightrightarrows [0, 1]$ est définie par

$$G(x) = \begin{cases} [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}], & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}) \\ [0, 1], & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], & \text{si } x \in (\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

Dans ce dernier exemple, $G(\frac{1}{8}) = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ et $G(\frac{1}{2}) = [0, 1]$.

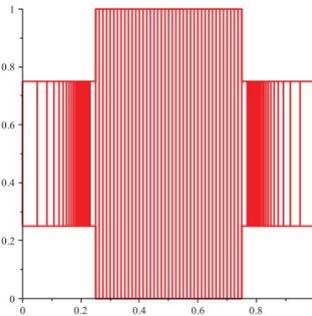


FIGURE 1.3 – Représentation graphique de l'exemple 1.1.9

1.1.2 Image réciproque d'une application multivoque

Les définitions suivantes décrivent les notions de l'application inverse et l'image d'un ensemble dans le cas multivoque.

Définition 1.1.5 (*Application inverse*)

Application inverse de $F : X \rightrightarrows Y$ est une application multivoque notée F^{-1} telle que $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ définie par

$$F^{-1}(y) = \{x \in X / y \in F(x)\},$$

de plus, on a la caractérisation suivante

$$(y, x) \in \text{Graph}(F^{-1}) \iff x \in F^{-1}(y) \iff y \in F(x) \iff (x, y) \in \text{Graph}(F).$$

Ainsi,

$$\text{Dom}(F^{-1}) = F(X) \text{ et } F^{-1}(Y) = \text{Dom}(F).$$

Exemple 1.1.10 Considérons l'application multivoque $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } x > 0 \\ \{-\sqrt{-x}, \sqrt{-x}\}, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

On a $\text{Dom}(F) = \mathbb{R}_-$, et on obtient

$$\text{Im}(F) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}_-} \{-\sqrt{-x}, \sqrt{-x}\} = \mathbb{R}.$$

et

$$\text{Graph}(F) = \{(x, \sqrt{-x}) / x \leq 0\} \cup \{(x, -\sqrt{-x}) / x \leq 0\}.$$

De plus, l'application multivoque inverse est donnée par

$$F^{-1} : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}, F^{-1}(y) = \{-y^2\}.$$

Définition 1.1.6 Soient X, Y deux ensembles, $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque et A un sous ensemble de X . L'image de A par F est définie par

$$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x).$$

Exemple 1.1.11 Soit l'application multivoque $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ telle que $F(x) = [x^2, x^2 + 1]$ pour

tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F(\{0, 1\}) = \bigcup_{x \in \{0, 1\}} F(x) = [0, 2]$$

L'une des différences entre les applications univoques et les applications multivoques est que pour une fonction univoque, l'image réciproque d'un ensemble est définie de manière unique. Par contre, il existe deux manières à définir cet ensemble dans le cas d'une application multivoque. En suivant la terminologie utilisée dans le livre de **Jean-Pierre Aubin**, le premier est l'image inverse (ou réciproque) d'un ensemble et le second est dit le noyau.

Définition 1.1.7 Soient $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque et C un sous ensemble de Y . L'image inverse de C par F est définie comme suit

$$F^-(C) = \{x \in X / F(x) \cap C \neq \emptyset\}.$$

Le noyau de C par F est défini comme suit

$$F^+(C) = \{x \in X / F(x) \subset C\}.$$

Notons que le noyau est un sous-ensemble de l'image inverse car chaque fois que $F(x) \subset C$, alors $F(x)$ intersecte C .

Exemple 1.1.12 Prenons l'exemple 1.1.8 donné ci-dessus

$$F(x) = \{y \in [0, 1] / x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Soit $C = \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Alors, l'image inverse de C par F est

$$F^-(C) = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

Le noyau de C par F est

$$F^+(C) = \left[0, \frac{1}{4}\right].$$

Proposition 1.1.1 Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque et A_1, A_2 deux sous ensembles de X . Alors,

1. $F(A_1 \cup A_2) = F(A_1) \cup F(A_2)$.
2. $F(A_1 \cap A_2) \subset F(A_1) \cap F(A_2)$.
3. $\text{Im}(F) \setminus F(A) \subset F(X \setminus A)$.
4. $A_1 \subset A_2 \implies F(A_1) \subset F(A_2)$.

1.1.3 Composée des applications multivoques

Comme dans le cas univoque, on peut définir la composée de deux applications multivoques $F : X \rightrightarrows Y$ et $G : Y \rightrightarrows Z$ par

$$(G \circ F)(x) = G(F(x)) = \bigcup_{y \in F(x)} G(y), \quad \forall x \in X.$$

Donc, pour tout sous-ensemble C non vide de X , on a

$$(G \circ F)(C) = G(F(C)) = \bigcup_{y \in F(C)} G(y), \quad \forall x \in C.$$

Exemple 1.1.13 Soient $F, G : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ telles que $F(x) = \{x^2, x^2 + 1\}$ et $G(x) = \{\sqrt{|x|}, \sqrt{|x|} + 1\}$. On a

$$\begin{aligned} (G \circ F)(x) &= G(F(x)) = \bigcup_{y \in F(x)} G(y) = G(x^2) \cup G(x^2 + 1) \\ &= \{|x|, |x| + 1, \sqrt{x^2 + 1}, \sqrt{x^2 + 1} + 1\}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (F \circ G)(x) &= F(G(x)) = \bigcup_{y \in G(x)} F(y) = F(\sqrt{|x|}) \cup F(\sqrt{|x|} + 1) \\ &= \{|x|, |x| + 1, (\sqrt{|x|} + 1)^2, (\sqrt{|x|} + 1)^2 + 1\}. \end{aligned}$$

1.1.4 Opérations algébriques sur les applications multivoques

Considérons X, Y deux ensembles et $F, G : X \rightrightarrows Y$ deux applications multivoques.

On peut alors définir de diverses applications multivoques en considérant

$$\diamond H = F \cup G : X \rightrightarrows Y \text{ telle que } H(x) = F(x) \cup G(x), \forall x \in X.$$

$$\diamond H = F \cap G : X \rightrightarrows Y \text{ telle que } H(x) = F(x) \cap G(x), \forall x \in X.$$

$$\diamond H = F \setminus G : X \rightrightarrows Y \text{ telle que } H(x) = F(x) \setminus G(x), \forall x \in X.$$

$$\diamond H = (F \times G) : X \rightrightarrows Y \text{ telle que } H(x) = F(x) \times G(x), \forall x \in X.$$

Et lorsque X, Y sont des espaces vectoriels, on peut définir les opérations suivantes :

$$\diamond H = F \pm G : X \rightrightarrows Y \text{ telle que } H(x) = F(x) \pm G(x) = \{y_1 \pm y_2 / y_1 \in F(x) \text{ et } y_2 \in G(x)\}, \\ \forall x \in X.$$

$$\diamond H = \lambda F : X \rightrightarrows Y \text{ telle que } H(x) = \lambda F(x) = \{\lambda y / y \in F(x)\}, \forall x \in X \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Donnons ci-après un exemple illustratif .

Exemple 1.1.14 Soient $F_1, F_2 : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ telles que $F_1(x) = [x - 1, x + 1]$ et

$$F_2(x) = [x, x + 2]. \text{ On a,}$$

$$(F_1 \cup F_2)(x) = [x - 1, x + 1] \cup [x, x + 2] = [x - 1, x + 2],$$

$$(F_1 \cap F_2)(x) = [x - 1, x + 1] \cap [x, x + 2] = [x, x + 1],$$

$$(F_1 \setminus F_2)(x) = [x - 1, x + 1] \setminus [x, x + 2] = [x - 1, x[,$$

$$(F_1 \times F_2)(x) = [x - 1, x + 1] \times [x, x + 2].$$

1.1.5 Linéarité des applications multivoques

On considère X et Y deux espaces vectoriels sur un corps commutatif K .

Définition 1.1.8 Une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ est dite linéaire si les conditions suivantes sont satisfaites

1. $F(x) + F(y) \subseteq F(x + y)$, pour tout couple de vecteurs $(x, y) \in X \times X$.
2. $\alpha F(x) \subseteq F(\alpha x)$, pour tout couple $(\alpha, x) \in K \times X$.

Proposition 1.1.2 Une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ où X et Y sont deux espaces vectoriels sur un corps commutatif K est linéaire si et seulement si son graphe $\text{Graph}(F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace produit $X \times Y$.

La composition des applications multivoques linéaires est une application multivoque linéaire.

1.1.6 Convexité des ensembles et des applications multivoques

Les fonctions et les ensembles convexes constituent l'un des outils de base de l'analyse convexe. L'importance de ce concept en théorie mathématique est bien connue, car il joue un rôle central dans la formulation de nombreux et de très forts résultats. Parmi ces derniers, on peut citer le théorème de séparation et le théorème de projection, sans oublier les résultats de caractérisation des solutions en optimisation.

a) Ensembles convexes

Définition 1.1.9 C est un ensemble convexe si et seulement si

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C, \quad \forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1],$$

c-à-d que le segment $[x, y]$ est entièrement contenu dans C .

Autrement dit, toute combinaison convexe d'éléments de C est dans C .

i.e. $\forall x_i \in C, \forall \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in C$.

Propriétés

- ▶ L'ensemble \mathbb{R}^n est convexe.
- ▶ Un singleton $\{a\}$ est convexe.
- ▶ Un intervalle $[a, b]$ est convexe dans \mathbb{R} .
- ▶ Une réunion d'intervalles disjoints de \mathbb{R} n'est pas convexe, par exemple :
 $] - \infty, 0] \cup [1, +\infty[$.

b) Application multivoque convexe, fermée et compacte

Considérons maintenant deux espaces vectoriels topologiques X, Y . Introduisons les définitions suivantes où $F : X \rightrightarrows Y$ est une application multivoque à valeurs non vides dans Y .

Définition 1.1.10 F est dite

i) À valeurs convexes sur X si pour tout $x \in X$, $F(x)$ est convexe

$$(1 - \lambda)F(x) + \lambda F(x) \subset F(x), \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

ii) À valeurs fermées (respectivement compactes) si pour tout $x \in X$, $F(x)$ est un sous-ensemble fermé (respectivement compact) de Y .

iii) Convexe sur X si pour tous $x_1, x_2 \in X$, et $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$(1 - \lambda)F(x_1) + \lambda F(x_2) \subset F((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2).$$

iv) Convexe (fermée, compacte) si et seulement si son graphe est un sous-ensemble convexe (fermé, compact) de $X \times Y$. En d'autres termes, une application multivoque est caractérisée par les propriétés de son graphe.

◇ Lorsque F est convexe, il en est de même pour son domaine et son image.

◇ La convexité de F est équivalente à celle de son inverse F^{-1} .

En se référant aux graphes des applications multivoques des exemples 1.1.8 et 1.1.9 précédents, le premier présente une application multivoque convexe mais le second ne l'est pas.

Lorsque X et Y sont des espaces métriques, on a les définitions suivantes.

Définition 1.1.11 On dit que

i) F est fermée en $x \in X$ si pour tout $y \in Y$, toute suite $\{x_n\} \subset X$ convergent vers x et toute suite $\{y_n\} \subset Y$ convergent vers y avec $y_n \in F(x_n)$, on a $y \in F(x)$.

ii) F est localement fermée en x si F est fermée dans un voisinage de x i.e., il existe une constante $r > 0$ telle que $B((x, y), r) \cap \text{Graph}(F)$ soit fermé pour tout $y \in F(x)$.

$B((x, y), r)$ désigne la boule de centre (x, y) et de rayon r .

iii) F est à valeurs bornées si $F(x)$ est un ensemble borné pour tout $x \in X$.

iv) F est localement bornée en x s'il existe un voisinage ouvert U de x et un compact $C \subset Y$ tels que $F(U) \subset C$.

◇ Les propriétés précédentes sont satisfaites pour F sur X (F fermée, localement fermée, bornée, localement bornée), si elles sont satisfaites en tout point $x \in X$.

Remarque 1.1.1 Il est clair que si F est fermée (resp. convexe), elle est nécessairement à valeurs fermées (resp. à valeurs convexes). La réciproque est fautive : il suffit de prendre l'application multivoque $F : \mathbb{R}^* \rightrightarrows \mathbb{R}$ telle que $F(x) = \left\{ \sin \frac{1}{x} \right\}$ (resp. $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ telle que $F(x) = \{x^3\}$).

1.1.7 Distance de Hausdorff

La définition classique d'une distance telle que nous la connaissons (dans le plan entre deux points par exemple, ou entre un point et une droite, etc.) est la longueur minimale des chemins possibles d'un point à un autre. Mais qu'en est-il entre deux ensembles ou deux figures?. L'une des distances introduites pour cette nécessité mathématique est celle introduite par le mathématicien allemand **Félix Hausdorff** au début du vingtième siècle.

Définition 1.1.12 Dans un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$, la distance d'un point

$x \in X$ à un sous-ensemble A de X est donnée par

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

Si A et B sont deux parties non vides de X , on appelle distance entre A et B le nombre

$$d(A, B) = \inf \{\|a - b\|, a \in A, b \in B\}.$$

On pose conventionnellement, $d(x, \emptyset) = +\infty$ et $d(\emptyset, B) = 0$ pour tout $x \in X$ et pour tout $B \neq \emptyset$.

Définition 1.1.13 (Excès)

Soient A et B deux sous-ensembles d'un espace vectoriel normé X .

On appelle excès de A sur B par

$$e(A, B) = \begin{cases} \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y) & , \text{ si } B \neq \emptyset \text{ et } A \neq \emptyset \\ +\infty & , \text{ si } B = \emptyset \text{ et } A = \emptyset \\ +\infty & , \text{ si } B = \emptyset \text{ et } A \neq \emptyset \\ 0 & , \text{ si } B \neq \emptyset \text{ et } A = \emptyset. \end{cases}$$

Exemple 1.1.15 Pour $A =]0, 1[$ et $B =]0, +\infty[$, on a $e(A, B) = 0$, $e(B, A) = +\infty$.

Pour les parties $A = [1, +\infty[$ et $B = \mathbb{N}^*$, on obtient $e(B, A) = 0$.

Et pour tout $x \geq 1$, $d(x, B) = \inf(x - [x], [x] - x + 1)$ où $[x]$ désigne la partie entière de x .

Ainsi $e(A, B) = \frac{1}{2}$.

On note que l'excès n'est pas symétrique ($e(A, B) \neq e(B, A)$) et n'est pas nécessairement fini. De plus, $e(A, B) = 0$ n'implique pas que $A = B$, donc l'excès ne vérifie pas les propriétés élémentaires d'une distance.

Les propriétés suivantes sont intéressantes.

Propriétés Soient A, B, C, D des parties non vides d'un espace métrique X , on a

$$(P_1) \quad e(A, B) \leq e(A, C) + e(C, B).$$

$$(P_2) \quad e(A, B) = 0 \iff \bar{A} \subset \bar{B} \text{ et } e(A, B) = e(\bar{A}, \bar{B}) \text{ où } \bar{A} \text{ et } \bar{B} \text{ désignent les ensembles complémentaires de } A \text{ et } B \text{ respectivement.}$$

$$(P_3) \quad \text{Si } A \subset C \text{ et } D \subset B, \text{ alors } e(A, B) \leq e(C, D).$$

Lorsque X est un espace vectoriel normé on a

$$(P_4) \quad e(A + C, B + D) \leq e(A, B) + e(C, D).$$

$$(P_5) \quad e(A, \lambda B + (1 - \lambda)C) \leq \lambda e(A, B) + (1 - \lambda)e(A, C), \forall \lambda \in [0, 1].$$

$$(P_6) \quad \text{Si } C \text{ est convexe, alors pour tout } \lambda \in [0, 1]$$

$$e(\lambda A + (1 - \lambda)B, C) \leq \lambda e(A, C) + (1 - \lambda)e(B, C).$$

Définition 1.1.14 (*Distance de Hausdorff*)

Soient A et B deux sous-ensembles non vides de X , on appelle distance de Hausdorff (ou distance de Pompeiu-Hausdorff) entre A et B la quantité

$$h(A, B) = \max \{e(A, B), e(B, A)\}.$$

Exemple 1.1.16 Soient $A =]a_1, b_1[$ et $B =]a_2, b_2[$ avec $a_i < b_i$, alors

$$h(A, B) = \max \{|a_2 - a_1|, |b_2 - b_1|\}.$$

Donc, si on prend par exemple $A =]0, 1[$ et $B =]0, +\infty[$, alors $h(A, B) = +\infty$.

Observons que le cas où les ensembles ne sont pas bornés, les quantités $e(A, B)$ et $h(A, B)$ peuvent être infinies.

Il faut noter que cette terminologie est trompeuse puisqu'en général, ni la distance entre deux ensembles ni la distance de Hausdorff ne sont des distances. Toutefois, cette dernière peut l'être, lorsque nous travaillons par exemple sur l'ensemble des parties bornées de X .

1.1.8 Notions de continuité des applications multivoques

Dans le cadre univoque, la continuité d'une fonction f ($f : X \rightarrow Y$, X et Y deux espaces vectoriels normés) en un point $x_0 \in X$ peut être caractérisée de différentes manières.

Par exemple, on dit que f est continue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tels que } \forall x \text{ vérifiant } \|x_0 - x\| < \delta, \text{ on a } \|F(x_0) - F(x)\| < \varepsilon.$$

En termes de voisinages, la fonction f est continue en x_0 si et seulement si, pour tout voisinage V de $f(x_0)$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(U) \subset V$. D'un point de vue séquentiel, f est continue en x_0 si et seulement si, pour toute suite $\{x_n\} \subset X$ convergeant vers x_0 , la suite $\{f(x_n)\}$ converge vers $f(x_0)$.

Dans le cas d'une fonction multivoque F , la continuité en un point donné x_0 , signifie que lorsque un point x est assez proche de x_0 , alors $F(x)$ est proche de $F(x_0)$. Il est donc commode de définir ce qu'on entend par l'ensemble $F(x)$ est proche de l'ensemble $F(x_0)$ ou par l'ensemble $F(x_0)$ est proche de l'ensemble $F(x)$ quand x est au voisinage de x_0 et d'étudier ces deux comportements. Dans la littérature, il existe plusieurs notions de continuité pour les applications multivoques, pour plus des détails, le lecteur intéressé par cette notion pourra consulter les références [2, 16, 17, 36, 50, 55]. En ce qui nous concerne dans cette thèse, nous nous intéresserons à deux concepts de continuité, l'un est attribué à **Berge** et l'autre à **Hausdorff**.

Notion de continuité au sens de Berge

Définition 1.1.15 [10, 46]

Soient X et Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque. On dit que

- ▶ F est semi-continue supérieurement au sens de Berge, ou simplement semi-continue supérieurement qu'on note s.c.s en $x_0 \in \text{Dom}(F)$ si pour tout ouvert V dans Y vérifiant $F(x_0) \subset V$, il existe un ouvert $U \subset V(x_0)$ tel que $F(x) \subset V$, pour tout $x \in U$.
- ▶ F est semi-continue inférieurement au sens de Berge, ou simplement semi-continue inférieurement qu'on note s.c.i en $x_0 \in \text{Dom}(F)$ si pour tout $y_0 \in F(x_0)$ et pour tout voisinage V de y_0 (dans Y), il existe un voisinage U de x_0 (dans X) tel que

$$\forall x \in U, F(x) \cap V \neq \emptyset.$$

- ▶ F est continue au point x sur X au sens de Berge si F est s.c.s et s.c.i en x .
- ▶ F est continue sur X au sens de Berge si F est continue en tout point de X .

Exemple 1.1.17

Soit $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} \{-1, 1\}, & \text{si } x \neq 0 \\ [-1, 1], & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Cette application multivoque est s.c.i en tout $x_0 \neq 0$, car pour tout voisinage V de

$y_0 \in F(x_0) = \{-1, 1\}$, on a donc

il existe toujours un voisinage U de x_0 tel que

$$F(x) \cap V \neq \emptyset, \text{ pour tout } x \in U.$$

Mais F n'est pas s.c.i en 0. En effet, pour $y_0 = 0 \in F(0)$ et $V =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, on a pour tout U voisinage de 0, il existe

$$x \in U, F(x) \cap V = \emptyset.$$

D'autre part, on a F est s.c.s en tout point $x_0 \neq 0$. En effet, considérons, pour $x_0 > 0$ (resp. $x_0 < 0$), un ouvert quelconque V dans \mathbb{R} contenant $\{-1, 1\}$, et

$U =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$ et tel que $x_0 - \varepsilon > 0$ (resp. $x_0 + \varepsilon < 0$). Alors,

$$F(x) = \{-1, 1\} \subset V \text{ pour tout } x \in U.$$

Maintenant, pour $x_0 = 0$, il suffit de prendre un ouvert quelconque V contenant $[-1, 1]$ et

$$U =]-\varepsilon, \varepsilon[\text{ où } \varepsilon > 0. \text{ Donc, on aura } F(x) \subset V \text{ pour tout } x \in U.$$

Corollaire 1.1.1 Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque. La semi-continuité supérieure de F est équivalente à chacune des conditions suivantes.

1. $F^+(V)$ est un ouvert de X pour tout ouvert V de Y .
2. $F^-(V)$ est un fermé de X pour tout fermé V de Y .
3. $\overline{F^-(V)} \subseteq F^-(\overline{V})$ pour tout sous-ensemble V de Y .

Corollaire 1.1.2 Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque. La semi-continuité inférieure de F est équivalente à chacune des conditions suivantes.

1. $F^+(V)$ est un fermé de X pour tout fermé V de Y .
2. $F^-(V)$ est un ouvert de X pour tout ouvert V de Y .
3. $\overline{F^+(V)} \subseteq F^+(\overline{V})$ pour tout sous-ensemble V de Y .

Exemple 1.1.18 L'application multivoque $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ [-1, 1], & \text{si } x \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$$

En utilisant le dernier corollaire, nous montrons que F semi-continue inférieurement sur \mathbb{R} .

Soit V un fermé de \mathbb{R} et rappelons que $F^+(V) = \{x \in \mathbb{R} / F(x) \subseteq V\}$.

- Si V est un fermé de \mathbb{R} ne contenant pas $[-1, 1]$ et contenant 0 , $F^+(V) = \{0\}$ qui est un fermé de \mathbb{R} .
- Si V est un fermé de \mathbb{R} contenant $[-1, 1]$, $F^+(V) = \mathbb{R}$ qui est un fermé \mathbb{R} .
- Si V est un fermé de \mathbb{R} ne contenant pas $[-1, 1]$ et ne contenant pas 0 , $F^+(V) = \emptyset$ qui est un fermé \mathbb{R} .

Proposition 1.1.3 [46]

Soient X, Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque. Alors,

1. F est s.c.i en x_0 si et seulement si pour tout $y_0 \in F(x_0)$ et pour toute suite $\{x_n\} \subset X$ telle que $x_n \rightarrow x_0$, il existe une suite $\{y_n\}$ convergant vers y_0 telle que $y_n \in F(x_n)$.
2. Si Y est compact et F fermée, alors F est s.c.s.
3. Si F est à valeurs fermées et s.c.s alors, F est fermée.

Notion de continuité au sens de Hausdorff

Définition 1.1.16 [44]

Soient X, Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque.

- F est dite semi-continue inférieurement au sens de Hausdorff, q'on note H-s.c.i en $x_0 \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$F(x_0) \subset B(F(x), \varepsilon) \text{ pour tout } x \in B(x_0, \delta),$$

Où $B(x_0, \delta)$ (respectivement $B(F(x), \varepsilon)$) désigne la boule de centre x_0 et de rayon δ (respectivement désigne la boule de centre $F(x)$ et de rayon ε).

- F est dite semi-continue supérieurement au sens de Hausdorff, q'on note H-s.c.s en $x_0 \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$F(x) \subset B(F(x_0), \varepsilon) \text{ pour tout } x \in B(x_0, \delta),$$

- F est dite continue au sens de Hausdorff en $x_0 \in X$ si elle est H-s.c.i et H-s.c.s en x_0 .

Proposition 1.1.4 Soient X, Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque à valeurs non vides et $x_0 \in X$. Alors,

1. Si F est H-s.c.i en x_0 , alors F est s.c.i en x_0 .
2. Si F est s.c.s en x_0 , alors F est H-s.c.s en x_0 . La réciproque est vraie lorsque $F(x_0)$ est compact.

Remarque 1.1.2 Semi continuité en terme des excès.

- ◇ Lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} e(F(x_0), F(x)) = 0$, alors F est H-s.c.i en x_0 .
- ◇ Lorsque F est H-s.c.s en x_0 , alors $\lim_{x \rightarrow x_0} e(F(x), F(x_0)) = 0$. La réciproque est vraie si $F(x_0)$ est compact.
- ◇ F est continue au sens de Hausdorff en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} h(F(x), F(x_0)) = 0$.

Donnons quelques exemples.

Exemple 1.1.19 L'application multivoque $F : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases}]0, \frac{1}{x}], & \text{si } x > 0 \\ \{0\}, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

est H-s.c.i en 0, mais n'est pas H-s.c.s en 0.

En effet, on a $e(F(0), F(x)) = d(0,]0, \frac{1}{x}]) = 0$ et $e(F(x), F(0)) = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0$.

Exemple 1.1.20 Soit $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{si } x \neq 0 \\ [-1, 1], & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ici F est H-s.c.s et non H-s.c.i en 0. En effet, pour tout x , $F(x) \subset F(0)$ donc $e(F(x), F(0)) = 0$ ce qui montre que F est H-s.c.s en 0.

Maintenant, soit $\bar{y} = 0 \in F(0)$, $d(0, F(x)) = 1$ pour tout $x \neq 0$ et donc $e(F(0), F(x)) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, ainsi F n'est pas H-s.c.i en 0.

1.1.9 Applications multivoques lipschitziennes

Les propriétés de type Lipschitz dont les origines remontent à quelques siècles ont joué depuis fort longtemps un rôle important dans plusieurs domaines dont les théories de la mesure et de l'existence de solutions pour des équations différentielles ordinaires. Aujourd'hui, il est bien connu que de telles propriétés sont devenues des outils de base en analyse multivoque. Toutefois, pour passer du cas univoque au cas multivoque, autrement dit de la version ponctuelle à la version ensembliste, en particulier pour mesurer l'écart entre deux ensembles on a besoin des notions d'excès et de la distance de Hausdorff qui sont deux outils fortement indispensables en analyse multivoque.

Définition 1.1.17 (*Applications multivoques lipschitziennes*)

On dit qu'une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ à valeurs non vides est τ -lipschitzienne sur X , s'il existe une constante $\tau \geq 0$ telle que

$$h(F(x), F(x')) \leq \tau \|x - x'\|, \forall x, x' \in X.$$

Si $\tau = 1$, F est dite non dilatante. Et si $0 \leq \tau < 1$, F est dite τ -contractante.

Exemple 1.1.21 [31] L'application multivoque $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ telle que $F(x) = \sin x + [0, 1]$ est lipschitzienne.

En effet, soient $x, x' \in \mathbb{R}$ et soit $y \in F(x) = \sin x + [0, 1]$, donc $y = \sin x + t$ avec $t \in [0, 1]$.

De même on considère $y' = \sin x' + t$, tel que $y' \in F(x')$ avec $t \in [0, 1]$.

Donc, on a clairement

$$d(y, F(x')) \leq |\sin x - \sin x'| \leq |x - x'|,$$

En prenant la borne supérieure pour tout $y \in F(x)$, cela implique que F est 1-lipchitzienne.

La proposition suivante donne une caractérisation des applications multivoques lipschitziennes.

Proposition 1.1.5 [49] Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque à valeurs fermées non vides. Alors, F est τ -lipschitzienne sur X , si et seulement s'il existe une constante $\tau \geq 0$ telle que

$$d(y, F(x)) \leq \tau d(x, F^{-1}(y)), \quad \forall y \in Y, \forall x \in X.$$

1.1.10 Différentiabilité des applications multivoques

La différentiabilité des applications multivoques fait l'objet de plusieurs travaux, par exemple, les travaux de Banks- Jacobs, Gautier, Azé-Chou, Aubin-Frankowska, Mordukhovich, levy-Rockafellar.

Diverses notions de différentiabilité pour les applications multivoques ont été donc introduites et qui ont conduit à des résultats variés et complémentaires en analyse multivoque.

On présentera par la suite, la notion de différentiabilité introduite dans [48]. En effet, cette notion généralise la différentiabilité classique (La différentiabilité au sens de Fréchet)

Définition 1.1.18 Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, U un ouvert non vide dans X et $F : U \rightrightarrows Y$ une application multivoque définie sur U . On dira que F est différentiable en $x_0 \in U$ si F est s.c.i en x_0 et s'il existe une application linéaire univoque continue $A : X \rightarrow Y$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in B(0, \delta_\varepsilon) : F(x_0 + x) \subset F(x_0) + A(x) + \varepsilon \|x\| \bar{B}_Y$$

i.e.

$$e(F(x_0 + x), F(x_0 + A(x))) \leq \varepsilon \|x\|$$

et on note $DF(x_0) = A$, la dérivée de F en x_0 .

\overline{B}_Y désigne la boule unité fermée dans l'espace Y .

Exemple 1.1.22 L'application multivoque $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ telle que $F(x) = [a - x^2, b + x^2]$ ($a \leq b$) est différentiable en $x_0 = 0$ avec $DF(x_0) = 0$.

Tout d'abord montrons que F s.c.i en 0.

En effet, il est clair que F est s.c.i en 0, car pour tout $y \in F(0) = [a, b]$ et tout voisinage V de y , il existe un voisinage U de 0 (par exemple $U =]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$ et assez petit) où $F(0) \subset F(x)$ pour tout x de U . Par conséquent, $F(x) \cap V \neq \emptyset$, pour tout x de U .

D'autre part, comme $F(x) = F(0) + x^2[-1, 1]$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ tel que $|x| \leq \varepsilon$, on a

$$F(x) \subset F(0) + \varepsilon |x| \overline{B}_{\mathbb{R}}.$$

D'où la différentiabilité de F en 0 avec $DF(0) = 0$, autrement dit que A est l'application constante nulle.

Propriétés

Si $F, G : X \rightrightarrows Y$ et $H : X \rightrightarrows Z$ sont des applications multivoques différentiables en $x_0 \in X$. Alors,

(1) L'application multivoque $S = F + G : X \rightrightarrows Y$ est différentiable en x_0 avec

$$DS(x_0) = DF(x_0) + DG(x_0).$$

(2) L'application multivoque $P = (F.H) : X \rightrightarrows Y \times Z$ est différentiable en x_0 avec

$$DP(x_0) = DF(x_0).DH(x_0).$$

1.1.11 Monotonie des applications multivoques

Définition 1.1.19 Soit C un sous-ensemble convexe non vide de X et F une application multivoque de X dans Y .

F est dite

1. Monotone sur C si

$$\langle t_x - t_y, x - y \rangle \geq 0, \forall x, y \in C \text{ et } \forall t_x \in F(x), t_y \in F(y).$$

2. Si l'inégalité ci-dessus est stricte dès que $x \neq y$, alors F est dite strictement monotone sur C .
3. Paramotone sur C , s'elle est monotone et $\langle x - y, t_x - t_y \rangle = 0$ pour $x, y \in C$, $t_x \in F(x)$, $t_y \in F(y)$, implique $t_x \in F(y)$, $t_y \in F(x)$.
4. Pseudomonotone sur C , si $\forall x, y \in C$ et $t_x \in F(x)$

$$\langle t_x, y - x \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle t_y, y - x \rangle \geq 0, \forall t_y \in F(y).$$

5. Fortement monotone de module μ ou simplement μ -fortement monotone sur C si

$$\langle t_x - t_y, x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2, \forall x, y \in C \text{ et } \forall t_x \in F(x), t_y \in F(y).$$

Il est clair que toute application multivoque μ -fortement monotone est strictement monotone et que toute application multivoque strictement monotone est monotone. La réciproque est évidemment fautive en général.

1.2 Notion de séparation

Rappelons en bref la notion de séparation, cette dernière est reconnue comme l'une des notions les plus fertiles dans la théorie de l'analyse convexe et ses applications.

On signale qu'il existe plusieurs types de séparation de deux ensembles, et l'intérêt de cette notion apparaît en particulier dans le cas des ensembles convexes.

Théorème 1.2.1 Soient H un hyperplan tel que $H = \{x \in \mathbb{R}^n / a^T x = \alpha\}$ (où $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$). Alors, H divise \mathbb{R}^n toujours en deux demi espaces fermés

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n / a^T x \geq \alpha\} \quad \text{et} \quad H^- = \{x \in \mathbb{R}^n / a^T x \leq \alpha\}.$$

Théorème 1.2.2 (Séparation large)

Soit $H = \{x \in \mathbb{R}^n / a^T x = \alpha\}$, C_1, C_2 deux sous-ensembles non vides de \mathbb{R}^n sont séparés au sens large par H si

$$a^T x \geq \alpha, \forall x \in C_1 \quad \text{et} \quad a^T x \leq \alpha, \forall x \in C_2.$$

Théorème 1.2.3 (Séparation stricte)

Soit $H = \{x \in \mathbb{R}^n / a^T x = \alpha\}$, C_1, C_2 deux sous-ensembles non vides de \mathbb{R}^n sont strictement séparés par H si

$$a^T x > \alpha, \quad \forall x \in C_1 \quad \text{et} \quad a^T x < \alpha, \quad \forall x \in C_2.$$

Remarque 1.2.1 On peut toujours séparer strictement un point y d'un ensemble convexe fermé non vide C ne contenant pas y .

Lemme 1.2.1 Soit C un convexe fermé non vide de \mathbb{R}^n et $y \in (\mathbb{R}^n \setminus C)$. Alors, il existe $a \in \mathbb{R}^n$ et un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$a^T y > \alpha \quad \text{et} \quad a^T x \leq \alpha, \quad \forall x \in C.$$

CHAPITRE 2

PROBLÈME D'INÉQUATIONS VARIATIONNELLES CLASSIQUE ET GÉNÉRALISÉ

La théorie du problème d'inéquations variationnelles est une théorie très vaste englobant les problèmes d'optimisation, de complémentarité, la théorie de contrôle, la théorie de jeux, les modèles d'équilibre économiques, les réseaux de transport, ainsi que d'autres problèmes pratiques. Historiquement, cette théorie a fait sa première apparition au milieu des années soixante où elle s'est développée principalement par les spécialistes des équations aux dérivées partielles, on cite en particulier les chercheurs **Stampacchia et Hartman** [29] qui ont utilisé les inéquations variationnelles comme un outil analytique permettant de résoudre ces équations avec des applications tirées de la mécanique dans les espaces de dimensions infinies. Cependant en dimensions finies, **Smith** [58] et **Dafermos** [15] ont remarqué que les conditions d'optimalité associées au problème d'affectation connu en réseaux de transport ont la structure d'un problème d'inéquations variationnelles. Depuis l'apparition de leurs travaux, ce problème a eu un grand impact sur le développement de plusieurs branches de sciences pures et appliquées, et par la suite cette méthodologie est devenue un cadre formel autonome qui modélise et qui s'applique à un éventail large de problèmes.

On commence cette partie par donner la définition du problème des inéquations variationnelles classique.

2.1 Problème d'inéquations variationnelles

Définition 2.1.1 Le problème d'inéquations variationnelles noté $VIP(F, C)$ ou simplement (VIP) consiste à

$$(VIP) \begin{cases} \text{Trouver } \bar{x} \in C \text{ tel que} \\ \langle F(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C. \end{cases} \quad (2.1)$$

Avec C est un ensemble convexe fermé non vide de \mathbb{R}^n , F une application continue de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^n , et \langle , \rangle désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^n .

Notons par S l'ensemble des solutions associées au problème (VIP) .

Interprétation géométrique

En terme géométrique, les inéquations variationnelles indiquent que

1. $\bar{x} \in S \iff F(\bar{x})$ et tout vecteur de la forme $x - \bar{x}$, ($\forall x \in C$) forment un angle $\alpha \leq 90$.
2. $\bar{x} \in S \iff -F(\bar{x}) \in \mathbb{N}_C(\bar{x})$, où $\mathbb{N}_C(\bar{x})$ est le cône normal de C au point \bar{x} défini par

$$\mathbb{N}_C(\bar{x}) = \{y \in \mathbb{R}^n / \langle y, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall x \in C\}.$$

2.1.1 Liens entre (VIP) et autres problèmes mathématiques

En effet, de nombreux problèmes mathématiques peuvent être formulés comme un problème d'inéquations variationnelles. On va présenter ci-après quelques uns de ces problèmes et leurs relations avec (VIP) .

a) Système d'équations

La proposition suivante présente l'exemple le plus simple des cas particuliers de (VIP) , il s'agit de la résolution d'un système d'équations

Proposition 2.1.1 Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, si $C = \mathbb{R}^n$, alors

$$\bar{x} \in S \iff F(\bar{x}) = 0.$$

b) Problème de complémentarité

Dans le cas où C est un cône, alors (VIP) est donné sous la forme d'un problème de complémentarité général défini par

$$(GCP) \begin{cases} \text{Trouver } \bar{x} \in C \text{ tel que} \\ F(\bar{x}) \in C^*, \langle \bar{x}, F(\bar{x}) \rangle = 0, \end{cases}$$

avec

$$C^* = \{y \in \mathbb{R}^n / \langle x, y \rangle \geq 0, \forall x \in C\} \text{ est le cône dual de } C.$$

Proposition 2.1.2 Soit $F : C \rightarrow \mathbb{R}^n$, C un cône de \mathbb{R}^n , alors

$$\bar{x} \in S \iff \bar{x} \text{ est une solution de (GCP).}$$

Parmi les cas particuliers intéressants de (GCP), on distingue le cas où le cône $C = \mathbb{R}_+^n$. Ce cas coïncide avec le problème connu par le problème de complémentarité et noté par (CP). Ce problème qui a été introduit par **R. Cottle** en 1964 dans sa thèse de (PHD), est défini comme suit

$$(CP) \begin{cases} \text{Trouver } \bar{x} \geq 0 \text{ tel que} \\ F(\bar{x}) \geq 0, \langle \bar{x}, F(\bar{x}) \rangle = 0. \end{cases}$$

De plus, parmi les cas particuliers de (CP), on distingue le cas linéaire noté (LCP) où $F(x) = Mx + q$ (M une matrice de $\mathbb{R}^{n \times n}$ et q un vecteur de \mathbb{R}^n) et le cas non linéaire (F une application non linéaire) noté (NLCP). Il faut signaler que le problème (LCP) généralise à son tour la programmation linéaire et la programmation quadratique.

c) Problème d'optimisation

Le problème d'optimisation consiste à déterminer la solution maximale ou minimale d'un problème d'optimisation donné par une fonction objectif f ($f : C \rightarrow \mathbb{R}$) sur un ensemble C non vide de \mathbb{R}^n . Ce problème qui peut être considéré avec ou sans contraintes, s'écrit comme suit

$$(OP) \begin{cases} \min f(x) \\ x \in C. \end{cases}$$

On note par Ω l'ensemble des solutions de (OP).

Pour établir la relation qui existe entre (VIP) et (OP), on a besoin de la proposition suivante.

Proposition 2.1.3 [26] Soit f ($f : C \rightarrow \mathbb{R}$) une fonction continûment différentiable sur C et $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convexe fermé, alors on a

$$\bar{x} \in \Omega \implies \bar{x} \text{ solution de } VIP(\nabla f, C),$$

où $VIP(\nabla f, C)$ est défini par

$$\langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq 0, \forall x \in C.$$

De plus, si f est convexe sur C , alors

$$\bar{x} \text{ est une solution de } VIP(\nabla f, C) \implies \bar{x} \in \Omega.$$

La transformation d'un problème (VIP) en un problème d'optimisation équivalent est donnée par le théorème suivant

Théorème 2.1.1 [15] Supposons que $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$, C est un convexe fermé, et F une application différentiable sur C , alors on a

- Soit J_F la matrice jacobienne de l'application F , alors

$$J_F \text{ symétrique} \implies \exists f : C \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \nabla f = F.$$

- Si de plus J_F est semi définie positive, alors le problème $VIP(F, C)$ est équivalent au problème (OP).

d) Problème de point fixe

Avant de présenter le lien entre (VIP) et le problème de point fixe donné par le théorème ci-dessous, il faut tout d'abord qu'on énonce cette définition.

Définition 2.1.2 (Projection)

Soit $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convexe fermé et on désigne par P_C l'opérateur de la projection orthogonale sur C . Alors, pour tout vecteur x de \mathbb{R}^n , il existe un point unique

$\bar{x} = P_C(x) \in C$ tel que

$$\|\bar{x} - x\| \leq \|y - x\|, \forall y \in C.$$

Où bien, en terme d'optimisation

$$\bar{x} = P_C(x) = \arg \min_{y \in C} \left(\frac{1}{2} \|y - x\|^2 \right).$$

Théorème 2.1.2 Soit $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe fermé et l'application $F : C \rightarrow \mathbb{R}^n$, alors on a

$$\bar{x} \in S \Leftrightarrow \bar{x} = P_C(\bar{x} - \alpha F(\bar{x})), \forall \alpha > 0. \quad (2.2)$$

Autrement dit que \bar{x} est solution de (VIP) si et seulement si \bar{x} est le point fixe de l'application $P_C(I_{\mathbb{R}^n} - \alpha F)$ où $I_{\mathbb{R}^n}$ est l'application identité de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n .

e) Problème d'équilibre

Les problèmes d'équilibre introduits par **Blum** et **Oettli** [11] en 1994 ont eu un impact considérable sur plusieurs domaines de recherche purs et appliqués. Il a été remarqué que ce problème nous fournit un outil unificateur et puissant pour le traitement de nombreux problèmes qu'on peut rencontrer dans l'économie, la finance, la reconstruction d'image, l'écologie, les réseaux de transport, l'élasticité et l'optimisation.

Le problème d'équilibre initialement étudié consiste à

$$(EP) \begin{cases} \text{Trouver } \bar{x} \in C \text{ tel que} \\ \varphi(\bar{x}, x) \geq 0, \quad \forall x \in C. \end{cases}$$

Où C un ensemble convexe fermé non vide de \mathbb{R}^n et φ une bifonction de $C \times C \rightarrow \mathbb{R}$.

Ce problème inclut en tant que cas particuliers, on cite en premier lieu les problèmes (VIP), les problèmes minimax et les modèles d'équilibre de Nash,...

En effet, il existe un lien immédiat et sans aucune condition entre (VIP) et (EP), à savoir si la bifonction $\varphi(x, y) = \langle F(x), x - y \rangle$, avec $(x, y) \in C \times C$ et F une application de C vers \mathbb{R}^n , alors, on a l'équivalence suivante

$$\bar{x} \text{ solution de (VIP)} \iff \bar{x} \text{ solution de (EP)}.$$

On tient à rappeler qu'il existe d'autres formes concernant les liens entre les solutions de (VIP) et (EP) et cela en passant par l'outil de l'optimisation [7].

2.2 Problème d'inéquations variationnelles généralisé

L'introduction des applications multivoques dans des problèmes purement théoriques et appliqués divers a conduit systématiquement à son introduction également dans les problèmes (VIP) et cela a conduit évidemment à son tour à l'apparition du problème d'inéquations variationnelles généralisé.

Ce problème a été initialement introduit dans les années 1970, voir, par exemple Bruck [29] et les références qu'il contient. Par la suite, Fang et Peterson [18] ont travaillé sur ce problème en 1982 dans le cadre des espaces de dimension finie. Depuis lors, ce problème a été largement étudié dans la littérature dans le but d'établir des résultats d'existence et d'unicité des solutions pour ce problème, ainsi que de développer des algorithmes de résolution, voir, par exemple [62, 63] et les références qu'ils contiennent.

Au cours des dernières décennies, le problème d'inéquations variationnelles généralisé a reçu une attention grandissante, et cela revient à son importance primordiale

dans plusieurs domaines pratiques (économie, réseaux de transport,...) et de nombreux problèmes mathématiques (optimisation, complémentarité, problème d'équilibre, ...) qui impliquent dans leurs données les applications multivoques.

En ce qui suit, on va donner la définition du problème des inéquations variationnelles généralisé.

Définition 2.2.1 Soit C est un ensemble convexe fermé non vide de \mathbb{R}^n et $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une application multivoque à valeurs compactes et convexes. Le problème d'inéquations variationnelles généralisé noté $GVIP(F, C)$ ou simplement $(GVIP)$ consiste à

$$(GVIP) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \bar{x} \in C, \text{ et } \bar{t} \in F(\bar{x}) \text{ tels que} \\ \langle \bar{t}, x - \bar{x} \rangle \geq 0, \forall x \in C. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Notons par \mathcal{T} l'ensemble des solutions associées au problème $(GVIP)$.

2.2.1 Liens entre $(GVIP)$ et autres problèmes mathématiques généralisés

On donne des exemples sur les liens existants entre $(GVIP)$ et quelques problèmes mathématiques intéressants.

a) Problème de complémentarité généralisé

Dans le cas où $C = \mathbb{R}_+^n$ et $F : C \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une application multivoque, alors $(GVIP)$ est donné sous la forme d'un problème de complémentarité généralisé qui est défini par

$$(GCP) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \bar{x} \geq 0 \text{ et } \bar{t} \in F(\bar{x}) \text{ tels que} \\ \bar{t} \geq 0, \quad \langle \bar{t}, \bar{x} \rangle = 0. \end{array} \right.$$

b) Problème d'optimisation

Nous observons que les $(GVIP)$ sont étroitement liés aux problèmes d'optimisation. En effet, considérons le problème d'optimisation avec contraintes suivant

$$(OP) \quad \begin{cases} \min f(x) \\ x \in C \end{cases}$$

avec C est un convexe fermé non vide de \mathbb{R}^n et f ($f : C \rightarrow \mathbb{R}$) une fonction convexe non nécessairement différentiable sur C . En utilisant la condition nécessaire et suffisante associée à ce problème, on remarque que cette dernière est équivalente au problème d'inéquations variationnelles généralisé $GVIP(\partial f, C)$ défini par

$$(GVIP) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \bar{x} \in C, \text{ et } \bar{t} \in \partial f(\bar{x}) \text{ tels que} \\ \langle \bar{t}, x - \bar{x} \rangle \geq 0, \forall x \in C, \end{cases}$$

où ∂f est le sous-différentiel de la fonction f sur C .

Donc dans ce cas, toute solution de (OP) est solution de $GVIP(\partial f, C)$ et réciproquement.

c) Problème de point fixe généralisé

De même comme dans le cas de (VIP) , les solutions du problème $(GVIP)$ coïncident avec les solutions de problème de point fixe généralisé. Le théorème ci-dessous décrit cette relation.

Théorème 2.2.1 *Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe fermé non vide et $F : C \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une application multivoque, alors on a*

$$\bar{x} \in \mathcal{T} \iff \bar{x} = P_C(\bar{x} - \alpha \bar{t}), \forall \alpha > 0 \text{ et } \forall \bar{t} \in F(\bar{x}).$$

d) Problème d'équilibre généralisé

Dernièrement, la notion de problème d'équilibre au sens multivoque a été largement utilisée et elle a produit des résultats dans divers domaines des mathématiques (voir par exemple [68] et les références qui s'y trouvent).

La définition du problème d'équilibre généralisé est donnée par

$$(GEP) \begin{cases} \text{Trouver } \bar{x} \in C \text{ tel que} \\ \varphi(\bar{x}, x) \subset \mathbb{R}_+, \forall x \in C. \end{cases}$$

Où $\varphi : C \times C \rightrightarrows \mathbb{R}$ une bifonction multivoque.

Similairement, on rappelle que (GVIP) est l'un des principaux cas particuliers du problème (GEP).

e) Équation généralisée

On se donne un convexe fermé non vide $C \subseteq \mathbb{R}^n$ et F une application multivoque monotone maximale sur C , (F est dite maximale si son graphe n'est pas contenu dans aucun graphe d'une autre application monotone) [21].

Le problème (GVIP) entre dans le cadre de l'équation généralisée suivante

$$(GE) \begin{cases} \text{Trouver } \bar{x} \in C \text{ tel que} \\ 0 \in T(\bar{x}), \end{cases}$$

où T est une application multivoque monotone maximale définie comme suit

$$T(x) = \begin{cases} z + N_C(x) \text{ et } z \in F(x), \text{ si } x \in C \\ \emptyset, \text{ sinon.} \end{cases}$$

On a dans ce cas, toute solution de (GVIP) est solution de (GE).

Si $C = \mathbb{R}^n$, $T(x) = F(x)$, dans ce cas $N_{\mathbb{R}^n}(x) = \{0\}$, alors (GE) devient simplement $0 \in F(\bar{x})$.

2.2.2 Principaux résultats d'existence et d'unicité des solutions de (GVIP)

Nous fournissons maintenant quelques conditions d'existence et d'unicité des solutions de (GVIP) qui découlent principalement des propriétés de l'application multivoque F et l'ensemble C . A cet égard, nous citons les résultats suivants.

Le théorème suivant est un théorème d'existence classique en théorie d'inéquations variationnelles généralisées, voir théorème 3.1 dans [18]

Théorème 2.2.2 *Supposons que*

- i) C est un sous-ensemble convexe compact non vide dans \mathbb{R}^n .
- ii) $F : C \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est une application multivoque semi-continue supérieurement.
- iii) $F(x)$ est un sous-ensemble non vide, convexe et compact de \mathbb{R}^n pour chaque $x \in C$.

Alors, il existe une solution (\bar{x}, \bar{t}) au problème (GVIP), $(\bar{t} \in F(\bar{x}))$.

Théorème 2.2.3 [67] *Soit C est un sous-ensemble fermé non vide (respectivement convexe fermé non vide) et $F : C \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une application multivoque semi-continue supérieurement, où $F(x)$ est un convexe compact non vide pour tout $x \in C$. Supposons que la condition suivante soit vérifiée*

Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, pour toute suite $\{x_n\} \subset C$ avec $\|x_n\| \rightarrow +\infty$ et pour toute suite $\{t_n\}$

avec $\{t_n\} \subset F(x_n)$, il existe un entier positif n_0 et $y \in C$ tels que

$$\|y - \bar{x}\| < \|x_{n_0} - \bar{x}\| \text{ tel que } \langle t_{n_0} - \bar{x}, y - x_{n_0} \rangle \leq 0,$$

(respectivement $\|y - \bar{x}\| \leq \|x_{n_0} - \bar{x}\|$ tel que $\langle t_{n_0} - \bar{x}, y - x_{n_0} \rangle < 0$)

Alors, l'ensemble des solutions de (GVIP) est non vide (respectivement l'ensemble des solutions de (GVIP) est non vide et compact).

Théorème 2.2.4 [67] *Soit C est un sous-ensemble convexe fermé non vide et $F : C \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une application multivoque semi-continue supérieurement, où $F(x)$ est un convexe compact non vide pour tout $x \in C$. Supposons que la condition suivante soit vérifiée*

Étant donné $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, il existe une constante $\rho > 0$ telle que, pour tout $x \in C$ avec

$$\|x - \bar{x}\| > \rho, \text{ il existe } y \in C \text{ et } t \in F(x) \text{ satisfaisant}$$

$$\|y - \bar{x}\| < \|x - \bar{x}\| \text{ et } \langle t, y - x \rangle \leq 0,$$

(respectivement $\|y - \bar{x}\| \leq \|x - \bar{x}\|$ et $\langle t, y - x \rangle < 0$).

Alors, l'ensemble des solutions de (GVIP) est non vide (respectivement l'ensemble des solutions de (GVIP) est non vide et compact).

2.3 Résolution de (VIP)

Pour résoudre numériquement les problèmes des inéquations variationnelles, il existe plusieurs méthodes dont les premières proposées pour cette raison sont connues par le nom des méthodes de projection.

En plus de ces dernières, ces problèmes peuvent être également résolus par d'autres méthodes populaires, on cite ci-dessous brièvement quelques unes à titre indicatif.

- Méthodes de projection et contraction [28].
- Méthodes de point intérieur [14].
- Méthodes d'optimisation [22].
- Méthodes de pénalité [5].
- Méthodes des directions alternées [27].

2.3.1 Quelques méthodes de projection connues

La classe des méthodes de projection constitue une catégorie fondamentale dans la résolution numérique de (VIP). Ces méthodes sont largement étudiées en raison de leur principe simple ainsi que leur mise en œuvre aisée en pratique. On va donner par la suite, un bref aperçu historique sur les algorithmes de projection proposés et bien connus.

Mais avant de présenter cet aperçu, on a besoin de donner la fonction de résidu r associée à (VIP) définie par l'équation de projection suivante

$$r(x, \alpha) = x - P_C(x - \alpha F(x)), \forall \alpha > 0. \quad (2.4)$$

Alors,

$$\bar{x} \text{ est une solution de } VIP(F, C) \iff \|r(\bar{x}, \alpha)\| = 0, \forall \alpha > 0. \quad (2.5)$$

Procédure de base

Cette méthode introduite en 1970 coïncide intégralement avec la méthode du gradient projeté connue en optimisation où son principe se base essentiellement sur l'ap-

plication du théorème de point fixe.

Son schéma itératif est donné par

$$x^{k+1} = P_C(x^k - \alpha F(x^k)).$$

Conditions de convergence

Cet algorithme converge vers l'unique solution de (VIP) si

- F satisfait la condition de la forte monotonie de constante μ sur C .
- F satisfait la condition de continuité de Lipschitz sur C qu'on rappelle sa définition

ici

F est continue de Lipschitz, s'il existe $L \geq 0$ tel que

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L \|x - y\|, \forall x, y \in C.$$

- Pour tout choix de $\alpha \in]0, \frac{2\mu}{L^2}[$, alors la convergence de la procédure de base est garantie.

Méthode de Korpolevich [41]

Cette variante connue également par la méthode de l'extragradient, a été proposée par **Korpolevich** en 1976 où son algorithme fait recours au calcul de deux projections à chaque itération,

$$\begin{cases} y^k = P_C(x^k - \alpha F(x^k)) \\ x^{k+1} = P_C(x^k - \alpha F(y^k)). \end{cases}$$

Conditions de convergence

Cet algorithme converge vers une solution de (VIP) pour tout choix de $\alpha \in]0, \frac{1}{L}[$ si

- F satisfait la condition de monotonie sur C .
- F satisfait la condition de continuité de Lipschitz sur C .

En appliquant l'algorithme de l'extragradient, on doit se déplacer de x^k dans la direction du vecteur $(x^k - \alpha F(y^k))$ qui représente la projection de x^k sur

$H_k = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle F(y^k), x - y^k \rangle = 0\}$. Cet hyperplan de normale $F(y^k)$, passe par y^k et sépare x^k de l'ensemble des solutions. Et pour déterminer x^{k+1} , on projete le vecteur $(x^k - \alpha F(y^k))$ sur l'ensemble des contraintes C pour assurer que les itérés générés soient réalisables. Par conséquent, l'itéré x^{k+1} sera plus proche de l'ensemble S que l'itéré x^k . Cette propriété appelée la monotonie de Fejér de la suite $\{x^k\}$ par rapport à l'ensemble S est l'idée de base pour démontrer la convergence de cet algorithme. Ce principe fondamental est également adopté pour la démonstration de la convergence de tous les algorithmes de projection qui vont être présentés par la suite.

On tient à mentionner que l'opération de séparation de l'itéré x^k de l'ensemble S est justifiée. Car pour ce type de méthodes de projection, cet ensemble est toujours un convexe fermé sous la condition de monotonie pour F comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.3.1 *Soient C un convexe fermé non vide de \mathbb{R}^n et F une application continue et monotone ($F : C \rightarrow \mathbb{R}^n$). Alors, \bar{x} est une solution de (VIP) si et seulement si*

$$\langle F(x), x - \bar{x} \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

De plus, si l'ensemble des solutions de (VIP) est non vide, alors ce dernier est un ensemble convexe fermé.

► Ce résultat a été démontré à l'origine par **Minty** pour les problèmes (VIP) monotones dans les espaces de Hilbert [47], et par la suite, il a été généralisé par **Karamardian** dans le cas où F est pseudomonotone [35].

Méthode de Korpolevich modifiée [34]

C'est une version modifiée de la méthode de Korpolevich introduite par **A. Iusem** en 1994 dont la suite des itérés est générée par le schéma suivant

$$\begin{cases} y^k = P_C(x^k - \alpha_k F(x^k)) \\ x^{k+1} = P_C(x^k - \lambda_k F(y^k)). \end{cases}$$

Conditions de convergence

Cet algorithme converge vers une solution de (VIP) si

- F satisfait la condition de monotonie sur C .
- F satisfait la condition de continuité sur C .

La détermination du pas α_k , autrement dit la détermination de y^k , est faite par une procédure de recherche linéaire dite de relaxation de telle manière que l'hyperplan H_k (le même hyperplan défini dans le paragraphe précédent) doit satisfaire la séparation de x^k de l'ensemble S et $x^k - \lambda_k F(y^k)$ est la projection de x^k sur H_k . Dans ce cas, λ_k est donné par l'expression

$$\lambda_k = \langle F(y^k), x^k - y^k \rangle / \|F(y^k)\|^2.$$

Remarque 2.3.1 *Il est évident, qu'afin de déterminer un certain pas de déplacement satisfaisant la procédure de la recherche linéaire proposée par Iusem dans sa méthode, il est nécessaire d'évaluer plusieurs projections sur C avant de tomber sur le bon choix, donc on doit effectuer un calcul très excessif.*

Méthode de double projection [32]

Dans le but de réduire le coût calculatoire dans la méthode de Korpolevich modifiée, Iusem a proposé une autre fois en 1997 une nouvelle version des méthodes de projection pour résoudre les (VIP)_s. Son schéma itératif est le suivant :

$$\begin{cases} z^k = P_C(x^k - \beta_k F(x^k)) \\ y^k = (1 - \alpha_k)x^k + \alpha^k z^k \\ x^{k+1} = P_C(x^k - \lambda_k F(y^k)) \end{cases}$$

Son algorithme converge sous les mêmes conditions que l'algorithme précédent.

Sa stratégie dans cette méthode est basée d'une part sur l'introduction d'une procédure de recherche linéaire de type Armijo convenable pour déterminer α_k tout en assurant la séparation de x^k de l'ensemble S .

D'autre part, la nécessité d'effectuer à chaque itération deux projections seulement, d'où le nom de la méthode.

Remarque 2.3.2 *Malgré que les résultats numériques obtenus à travers les travaux réalisés en appliquant la méthode de double projection n'ont pas été vraiment encourageants, mais sur le plan théorique, cette méthode est considérée comme l'origine de tous les développements ultérieurs concernant les méthodes de projection proposées par la suite.*

Méthode de Solodov [57]

Quelques années plus tard, **Solodov** et **Svaiter** ont pu développer une autre méthode de projection simple et qui possède des propriétés théoriques et numériques meilleures. En effet, le principe de cette dernière se base sur la même idée de **Iusem** et qui converge sous les conditions de la continuité et la pseudomonotonie de F seulement. Afin d'améliorer la performance algorithmique de la méthode de double projection, ces chercheurs ont apporté des modifications importantes. Ces dernières consistent dans la nouvelle technique proposée pour déterminer la suite $\{\beta_k\}$ (comme indiqué dans l'algorithme ci-dessous) et de considérer la région de projection pour obtenir l'itéré x^{k+1} est l'intersection de C et le demi-espace noté D_k contenant S . On signale que l'hyperplan H_k défini auparavant représente la frontière de D_k .

On donne par la suite l'algorithme associé à la méthode de **Solodov**.

Algorithme 2.3.1 Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $k = 0$.

Choisir $\gamma \in [0, 1]$, $\sigma \in [0, 1]$, $\alpha_{-1} > 0$, $\theta > 0$, ε est une précision donnée.

Prendre $\beta_k = \min \{\theta \alpha_{-1}, 1\}$.

— **Tant que** $\|r(x^k, \beta_k)\| > \varepsilon$, **faire**

Trouver j le plus petit entier positif satisfaisant

$$\langle F(x^k - \gamma^j \beta_k r(x^k, \beta_k)), r(x^k, \beta_k) \rangle \geq \frac{\sigma}{\beta_k} \|r(x^k, \beta_k)\|^2.$$

On pose $\alpha_k = \gamma^j \beta_k$ et $y^k = x^k - \alpha_k r(x^k, \beta_k)$.

Calculer

$$x^{k+1} = P_{C \cap D_k}(x^k),$$

où $D_k = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle F(y^k), x - y^k \rangle \leq 0\}$.

$k = k + 1$.

— *Fin.*

Méthode de Grar et Benterki [24]

En 2015 et dans la même forme des algorithmes de projection présentés par les auteurs cités ci-dessus et sous les mêmes hypothèses de convergence de l'Algorithme 2.3.1, **Grar** et **Benterki** ont proposé un nouvel algorithme avec des modifications concernant le choix du paramètre β qui doit être constant et une procédure de recherche linéaire légèrement différente de celles proposées dans les méthodes présentées auparavant. Mais la modification majeure introduite consiste dans le pas de déplacement qui doit satisfaire une nouvelle condition donnée par l'inégalité (2.6) dans l'algorithme ci-après. L'intérêt principal de cette condition est que l'itéré suivant x^{k+1} dans cette méthode doit appartenir à $C \cap D_k$, contrairement à celui de **Solodov** où $x^{k+1} = P_{C \cap D_k}(x^k)$ et puisque x^k n'appartient pas à D_k , alors x^{k+1} va appartenir à $C \cap H_k$ (On rappelle que H_k est la frontière de D_k). Comme conséquence, l'itéré x^{k+1} dans la méthode de **Grar** et **Benterki**, de point de vue géométrique, sera plus proche de l'ensemble des solutions que celui de **Solodov**. L'introduction de toutes ces modifications et notamment la dernière ont eu un impact très fort sur la grande accélération de la convergence de l'algorithme associé à cette méthode. Les tests numériques effectués sur plusieurs classes de (VIP) ont témoigné que cette méthode est d'une performance très remarquable, comme elle est devenue une concurrente sérieuse pour les autres méthodes connues pour la résolution de ce type de problèmes.

On donne par la suite, la forme détaillée de cet algorithme.

Algorithme 2.3.2 Soit $k = 0, x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Choisir $\sigma, \gamma \in (0, 1), \beta > 0$ et ε une précision donnée.

Calculer $z^k = P_C(x^k - \beta F(x^k))$

— *Tant que* $\|r(x^k, \beta_k)\| > \varepsilon$ *faire*

Trouver j le plus petit entier positif satisfait

$$\langle F(x^k - \gamma^j r(x^k, \beta)), r(x^k, \beta) \rangle \geq \frac{\sigma}{\beta} \|r(x^k, \beta)\|^2.$$

On pose $\alpha_k = \gamma^j$, $y^k = (1 - \alpha_k)x^k + \alpha_k z^k$.

Calculer

$$x^{k+1} = P_C(x^k - \lambda_k F(y^k)),$$

où λ_k est choisi tel que

$$\langle F(y^k), P_C(x^k - \lambda_k F(y^k)) - y^k \rangle \leq 0. \quad (2.6)$$

$k = k + 1$.

— *Fin*

► Revenons à notre sujet d'étude, il est très clair que le lien entre les deux problèmes (GVIP) et (VIP) repose principalement sur le type de l'application F . Dans le cas où F est une application univoque, alors (GVIP) se réduit au problème d'inéquations variationnelle classique (VIP).

2.4 Résolution de (GVIP)

Pour résoudre le problème (GVIP), de nombreuses approches numériques ont été introduites, on cite par exemple :

- Méthodes de projection,
- Méthodes de point proximal,
- Méthodes de relaxation,
- Méthodes de descente.

Parmi ces méthodes, on trouve que celles de projection ont été les méthodes les plus largement étudiées dans la littérature. Pour un aperçu sur ces méthodes de projection, le lecteur intéressé peut consulter [19, 20, 40, 51, 61, 66].

► La majorité des méthodes de projection proposées se partagent le même principe, mais en ce qui concerne les deux étapes indispensables pour ce type de méthodes, il s'agit ici de la détermination de l'hyperplan qui sépare l'itéré x^k et l'ensemble des solutions et aussi le calcul de l'itéré suivant x^{k+1} , chaque méthode a sa propre stratégie. Sur le plan numérique, la performance se diffère d'une méthode à une autre, mais on trouve que celle de **Ye** est considérée comme la méthode la plus efficace pour les problèmes (*GVIP*).

CHAPITRE 3

EXTENSION DE LA MÉTHODE DE GRAR ET BENTERKI POUR LE PROBLÈME D'INÉQUATIONS VARIATIONNELLES GÉNÉRALISÉ

Parmi les méthodes de projection qui ont fait preuve d'une efficacité supérieure avec des conditions de convergence assez faibles par rapport à d'autres méthodes pour la résolution de (VIP), on trouve la méthode proposée par **Grar** et **Benterki**. L'objectif principal de ce chapitre est d'examiner de près si l'extension théorique et algorithmique de cette méthode est vraiment possible pour (GVIP), et voir aussi si cette dernière conserve sa performance numérique lors de son application pour ce problème. On tient bien à signaler que l'extension de cette étude n'a pas été une tâche facile. Car dans le cas de (GVIP), on doit utiliser les applications multivoques et manipuler des concepts généralisés.

Dans la première partie de ce chapitre, nous donnons quelques notions et propriétés de base qui seront d'usage fréquent dans l'analyse ultérieure. Nous présentons par la suite les détails de l'algorithme adapté où nous prouvons plusieurs résultats élémentaires pour sa convergence globale.

Tout d'abord, on a besoin de rappeler certaines propriétés bien connues pour l'opérateur de la projection orthogonale P_C . Ces propriétés sont résumées dans le lemme

suivant.

Lemme 3.0.1 [53] Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe fermé non vide, on a

i) L'inégalité de projection classique est donnée par

$$\bar{x} = P_C(x) \iff \langle \bar{x} - x, y - \bar{x} \rangle \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in C.$$

ii) L'opérateur de la projection est un opérateur non expansif (ou bien P_C est lipschitzien de constante $L = 1$), c'est à dire que

$$\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

iii) L'opérateur de la projection vérifie l'inégalité suivante

$$\|P_C(x) - x\| \leq \|x - y\| - \|P_C(x) - y\|, \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ et } y \in C.$$

iv) L'opérateur de la projection vérifie aussi l'inégalité

$$\langle y - x, y - P_C(x) \rangle \geq \|y - P_C(x)\|^2, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in C.$$

Lemme 3.0.2 Soit Ω un sous-ensemble fermé, convexe et non vide de \mathbb{R}^n .

1. Pour $x, d \in \mathbb{R}^n$, et $\lambda \geq 0$, on définit $x(\lambda) = P_\Omega(x - \lambda d)$,

alors $\langle d, x - x(\lambda) \rangle$ est croissante pour $\lambda \geq 0$.

2. Pour $x \in \Omega$, $d \in \mathbb{R}^n$, et $\lambda > 0$, on définit

$$\psi(\lambda) = \min \left\{ \|y - x + \lambda d\|^2 / y \in \Omega \right\},$$

alors

$$\psi'(\lambda) = 2 \langle d, x(\lambda) - x + \lambda d \rangle.$$

Lemme 3.0.3 \bar{x} est une solution de (GVIP) si et seulement si

$$\bar{x} = P_C(\bar{x} - \beta \bar{t}), \forall \bar{t} \in F(\bar{x}), \forall \beta > 0. \quad (3.1)$$

Pour $x \in C$ et $\beta > 0$, on définit la fonction de résidu associée à (GVIP) par

$$r(x, \beta, t) = x - P_C(x - \beta t), \forall \beta > 0 \text{ et } \forall t \in F(x).$$

Il est évident que les solutions de (GVIP) coïncident avec les zéros de cette fonction. On a donc le lemme suivant.

Lemme 3.0.4 \bar{x} est une solution de (GVIP) si et seulement si

$$r(\bar{x}, \beta, \bar{t}) = 0, \forall \beta > 0 \forall \bar{t} \in F(\bar{x}). \quad (3.2)$$

Dans le cas où $\beta = 1$, on note simplement $r(x, \beta, t)$ par $r(x, t)$.

►Maintenant, on définit les hypothèses qui sont nécessaires à notre méthode

(A1) : \mathcal{T} est non vide.

(A2) : F est continue sur C .

(A3) : Pour tout $\bar{x} \in \mathcal{T}$ et tout $x \in C$, on a

$$\langle t, x - \bar{x} \rangle \geq 0, \forall t \in F(x).$$

Remarque 3.0.1 Evidemment, d'après la définition de la pseudomonotonie de F sur C , alors pour tout $\bar{x} \in \mathcal{T} \subset C$ et $\bar{t} \in F(\bar{x})$, on a

$$\langle \bar{t}, x - \bar{x} \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle t, x - \bar{x} \rangle \geq 0, \forall x \in C, \forall t \in F(x).$$

Ainsi, dans notre cas, l'hypothèse (A3), est plus faible que la condition de la pseudomonotonie de F sur C .

3.1 Description de l'algorithme

Dans ce qui suit, on va présenter la forme adaptée de l'algorithme de **Grar** et **Benterki** pour résoudre le problème (GVIP).

Algorithme 3.1.1 Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $k = 0$.

Choisir $\sigma, \gamma \in (0, 1)$, $\beta > 0$ et soit ε une précision donnée

Choisir arbitrairement $t^k \in F(x^k)$ et calculer $z^k = P_C(x^k - \beta t^k)$.

— **Tant que** $\|r(x^k, \beta, t^k)\| > \varepsilon$, **faire**

Trouver j le plus petit entier positif satisfaisant

$$\langle m^k, r(x^k, \beta, t^k) \rangle \geq \frac{\sigma}{\beta} \|r(x^k, \beta, t^k)\|^2, \quad (3.3)$$

où $m^k \in F(x^k - \gamma^j r(x^k, \beta, t^k))$ est choisi arbitrairement.

On pose $\alpha_k = \gamma^j$ et

$$y^k = (1 - \alpha_k)x^k + \alpha_k z^k = x^k - \alpha_k r(x^k, \beta, t^k). \quad (3.4)$$

Calculer

$$x^{k+1} = P_C(x^k - \lambda_k m^k), \quad (3.5)$$

où λ_k est choisi tel que

$$\langle m^k, P_C(x^k - \lambda_k m^k) - y^k \rangle \leq 0, \quad (3.6)$$

$k = k + 1$.

— **Fin.**

3.2 Analyse de la convergence de l'algorithme

Nous commençons notre analyse par montrer que l'étape de la procédure de recherche linéaire donnée dans l'algorithme 3.1.1 est bien définie.

Lemme 3.2.1 Si x^k n'est pas une solution du problème (2.3), alors il existe j le plus petit entier positif tel que

$$\langle m^k, r(x^k, \beta, t^k) \rangle \geq \frac{\sigma}{\beta} \|r(x^k, \beta, t^k)\|^2.$$

Démonstration 3.2.1 Supposons que x^k n'est pas une solution du problème (2.3), donc $\|r(x^k, \beta, t^k)\| > 0$.

Puisque $\gamma \in (0, 1)$, on obtient

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (x^k - \gamma^j r(x^k, \beta, t^k)) = x^k.$$

En combinant cette limite et le fait que F est semi-continue inférieurement, on sait qu'il existe $m^k(j) \in F(x^k - \gamma^j r(x^k, \beta, t^k))$ tel que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m^k(j) = t^k, \quad t^k \in F(x^k).$$

Supposons que, pour un certain k , la procédure de recherche linéaire (3.3) n'est pas satisfaite pour tout entier positif j , c'est-à-dire que

$$\langle m^k, r(x^k, \beta, t^k) \rangle < \frac{\sigma}{\beta} \|r(x^k, \beta, t^k)\|^2, \quad \forall j, \quad m^k \in F(x^k - \gamma^j r(x^k, \beta, t^k)),$$

On prend en particulier $m^k = m^k(j)$, alors on a

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle m^k(j), r(x^k, \beta, t^k) \rangle = \langle t^k, r(x^k, \beta, t^k) \rangle \leq \frac{\sigma}{\beta} \|r(x^k, \beta, t^k)\|^2. \quad (3.7)$$

D'autre part, en appliquant le lemme 3.0.1(i), on obtient

$$\langle P_C(x^k - \beta t^k) - (x^k - \beta t^k), x^k - P_C(x^k - \beta t^k) \rangle \geq 0,$$

ce qui implique que

$$\beta \langle t^k, r(x^k, \beta, t^k) \rangle \geq \|r(x^k, \beta, t^k)\|^2. \quad (3.8)$$

De (3.7) et (3.8), on déduit

$$\|r(x^k, \beta, t^k)\|^2 \leq \beta \langle t^k, r(x^k, \beta, t^k) \rangle \leq \sigma \|r(x^k, \beta, t^k)\|^2,$$

Alors,

$$(1 - \sigma) \|r(x^k, \beta, t^k)\|^2 \leq 0.$$

On obtient une contradiction car $0 < \sigma < 1$ et $\|r(x^k, \beta, t^k)\| > 0$. Par conséquent, la procédure

de recherche linéaire (3.3) est satisfaite pour un certain entier positif j .

Ci après, on donne l'analyse théorique de la convergence de l'algorithme adapté pour résoudre (GVIP) sous les hypothèses (A1), (A2) et (A3).

On a pour tout $m^k \in F(y^k)$,

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - \bar{x}\|^2 &= \|P_C(x^k - \lambda_k m^k) - \bar{x}\|^2 \\ &\leq \|x^k - \bar{x} - \lambda_k m^k\|^2 - \|x^k - x^{k+1} - \lambda_k m^k\|^2 \\ &\leq \|x^k - \bar{x}\|^2 + \lambda_k^2 \|m^k\|^2 - 2\lambda_k \langle m^k, x^k - y^k \rangle - \\ &\quad 2\lambda_k \langle m^k, y^k - \bar{x} \rangle - \|x^k - x^{k+1} - \lambda_k m^k\|^2 \\ &\leq \|x^k - \bar{x}\|^2 + \lambda_k^2 \|m^k\|^2 - 2\lambda_k \langle m^k, x^k - y^k \rangle - \\ &\quad \|x^k - x^{k+1} - \lambda_k m^k\|^2, \end{aligned}$$

où la première inégalité découle du lemme 3.0.1(ii), et pour la dernière inégalité on utilise l'hypothèse (A3).

Pour tout $\lambda \geq 0$, on définit

$$x^{k+1} = x(\lambda) = P_C(x^k - \lambda m^k) \quad (3.9)$$

et la fonction

$$\phi_k(\lambda) = 2\lambda \langle m^k, x^k - y^k \rangle + \|x^k - x^k(\lambda) - \lambda m^k\|^2 - \lambda^2 \|m^k\|^2 \quad (3.10)$$

en utilisant le résultat du lemme 3.0.2, on obtient sa dérivée

$$\phi'_k(\lambda) = 2 \langle m^k, x^k(\lambda) - y^k \rangle. \quad (3.11)$$

De [60], on rappelle que pour un (VIP), les ϕ_k, ϕ'_k sont des fonctions positives pour toute valeur $\lambda \in [0, \lambda_{k1}]$ où λ_{k1} est le pas associé à l'algorithme de **Solodov** [57]. En particulier, cette propriété est satisfaite pour le pas associé à l'algorithme de **Iusem** λ_{k2} ($\lambda_{k2} \in [0, \lambda_{k1}]$) qui est donné dans [32] par l'expression suivante

$$\lambda_{k2} = \frac{\langle F(y^k), x^k - y^k \rangle}{\|F(y^k)\|^2}.$$

On rappelle que le pas de l'algorithme de **Solodov** n'a pas d'expression explicite, mais l'itéré x^{k+1} peut être calculé comme suit

$$x^{k+1} = P_{C \cap D_k}(x^k) = P_{C \cap D_k}(x^k - \lambda_{k2}F(y^k)),$$

où D_k est le demi espace défini par $D_k = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle F(y^k), x - y^k \rangle \leq 0\}$.

De plus, la fonction ϕ_k atteint son maximum à λ_{k1} , donc on obtient

$$\langle F(y^k), x^k(\lambda_{k1}) - y^k \rangle = 0 \quad (3.12)$$

où $x(\lambda_{k1}) = x^{k+1} = P_C(x^k - \lambda_{k1}F(y^k))$.

De point de vue théorique, toutes ces propriétés, restent valables si on applique les algorithmes de **Solodov** et **Iusem** sur $(GVIP)$, il faut juste de considérer que F est une application multivoque.

Pour notre algorithme, l'itéré x^{k+1} est calculé par

$$x(\lambda_{k1}) = x^{k+1} = P_C(x^k - \lambda_k m^k),$$

où le pas λ_k doit satisfaire

$$\langle m^k, P_C(x^k - \lambda_k m^k) - y^k \rangle \leq 0,$$

ce qui signifie théoriquement que $\phi'_k(\lambda_k) \leq 0$ et puisque ϕ'_k est une fonction décroissante, donc on obtient $\lambda_k > \lambda_{k1}$, cela garantit que la distance entre l'itéré suivant x^{k+1} déterminé par l'algorithme 3.1.1 garantit une décroissance plus large vers l'ensemble des solutions que celle obtenue par l'algorithme de **Solodov**.

On donne maintenant la proposition suivante qui confirme cette propriété caractérisant le pas λ_k .

Proposition 3.2.1 Soient $x^k(\lambda_{k1})$ et $x^k(\lambda_k)$ les itérés suivants correspondants à l'itération $(k+1)$ calculés par les algorithmes de **Solodov** et algorithme 3.1.1 respectivement, on a

i) $\|x^k - x^k(\lambda_k)\|^2 - \|x^k - x^k(\lambda_{k1})\|^2 \geq 0.$

ii) De plus, si $\|x^k - x^k(\lambda_k)\|^2 - \|x^k - x^k(\lambda_{k1})\|^2 \geq 2\lambda_k \langle m^k, y^k - x^k(\lambda_k) \rangle$, alors

$\phi_k(\lambda_k) \geq \phi_k(\lambda_{k1}).$

Démonstration 3.2.2 Soit $m^k \in F(y^k)$.

$$\begin{aligned}
\|x^k - x^k(\lambda_k)\|^2 &= \|x^k - x^k(\lambda_k) - x^k(\lambda_{k1}) + x^k(\lambda_{k1})\|^2 \\
&= \|x^k - x^k(\lambda_{k1})\|^2 + \|x^k(\lambda_k) - x^k(\lambda_{k1})\|^2 \\
&\quad - 2\langle x^k - x^k(\lambda_{k1}), x^k(\lambda_k) - x^k(\lambda_{k1}) \rangle \\
&= \|x^k - x^k(\lambda_{k1})\|^2 + \|x^k(\lambda_k) - x^k(\lambda_{k1})\|^2 \\
&\quad - 2\langle x^k - \lambda_{k1}m^k + \lambda_{k1}m^k - x^k(\lambda_{k1}), x^k(\lambda_k) - x^k(\lambda_{k1}) \rangle \\
&= \|x^k - x^k(\lambda_{k1})\|^2 + \|x^k(\lambda_k) - x^k(\lambda_{k1})\|^2 \\
&\quad + 2\langle x^k(\lambda_{k1}) - (x^k - \lambda_{k1}m^k), x^k(\lambda_k) - x^k(\lambda_{k1}) \rangle \\
&\quad + 2\lambda_{k1} \langle m^k, y^k - x^k(\lambda_k) \rangle + 2\lambda_{k1} \langle m^k, x^k(\lambda_{k1}) - y^k \rangle \\
\|x^k - x^k(\lambda_k)\|^2 &\geq \|x^k - x^k(\lambda_{k1})\|^2.
\end{aligned}$$

On obtient directement la dernière inégalité en utilisant le premier résultat du lemme 3.0.1 et les deux inégalités (3.6), (3.12) satisfaites par les pas λ_{k1} , λ_k .

Pour le deuxième point, on utilise la définition de la fonction ϕ_k

$$\begin{aligned}
\phi_k(\lambda_k) - \phi_k(\lambda_{k1}) &= 2\lambda_k \langle m^k, x^k - y^k \rangle + \|x^k - x^k(\lambda_k) - \lambda_k m^k\|^2 \\
&\quad - \lambda_k^2 \|m^k\|^2 - 2\lambda_{k1} \langle m^k, x^k - y^k \rangle \\
&\quad - \|x^k - x^k(\lambda_{k1}) - \lambda_{k1} m^k\|^2 + \lambda_{k1}^2 \|m^k\|^2 \\
&= 2\lambda_k \langle m^k, x^k - y^k \rangle + \|x^k - x^k(\lambda_k)\|^2 \\
&\quad + \lambda_k^2 \|m^k\|^2 - 2\lambda_k \langle m^k, x^k - x^k(\lambda_k) \rangle - \lambda_k^2 \|m^k\|^2 \\
&\quad - 2\lambda_{k1} \langle m^k, x^k - y^k \rangle - \|x^k - x^k(\lambda_{k1})\|^2 \\
&\quad - \lambda_{k1}^2 \|m^k\|^2 + 2\lambda_{k1} \langle m^k, x^k - x^k(\lambda_{k1}) \rangle + \lambda_{k1}^2 \|m^k\|^2 \\
&= \|x^k - x^k(\lambda_k)\|^2 - \|x^k - x^k(\lambda_{k1})\|^2 - 2\lambda_k \langle m^k, y^k - x^k(\lambda_k) \rangle \\
&\quad - 2\lambda_{k1} \langle m^k, x^k(\lambda_{k1}) - y^k \rangle.
\end{aligned}$$

En utilisant i) et la condition (ii) donnée dans cette proposition, on obtient le résultat.

Le lemme suivant montre que l'hyperplan

$$H_k = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle m^k, x - y^k \rangle = 0, m^k \in F(y^k)\}$$

sépare effectivement l'itéré courant x^k de l'ensemble de solutions \mathcal{T} .

Lemme 3.2.2 Soit $\{x^k\}$ une suite générée par l'algorithme 3.1.1 et supposons que F vérifie l'hypothèse (A3) sur C .

Si $D_k = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle m^k, x - y^k \rangle \leq 0, m^k \in F(y^k)\}$ est le demi-espace de frontière H_k , alors $\mathcal{T} \subset D_k$ et $x^k \notin D_k$.

Démonstration 3.2.3 Puisque F vérifie (A3), donc on a pour tout $\bar{x} \in \mathcal{T}$, pour tout $\bar{t} \in F(\bar{x})$ et pour tout $m^k \in F(y^k)$

$$\langle \bar{t}, y^k - \bar{x} \rangle \geq 0 \implies \langle m^k, \bar{x} - y^k \rangle \leq 0.$$

Alors, $\mathcal{T} \subset D_k$.

D'autre part, nous avons d'après (3.3)

$$\begin{aligned} \langle m^k, x^k - y^k \rangle &= \alpha_k \langle m^k, r(x^k, \beta, t^k) \rangle \\ &\geq \frac{\alpha_k \sigma}{\beta} \|r(x^k, \beta, t^k)\|^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

En utilisant l'expression de y^k , la procédure de recherche linéaire et le fait que x^k n'est pas une solution, alors on obtient le dernier résultat.

On est arrivé à la preuve de notre principal résultat de convergence donné par le théorème suivant.

Théorème 3.2.1 Supposons que le problème (GVIP) satisfait les hypothèses (A1), (A2) et (A3), et $\{x^k\}$ soit la suite générée par l'algorithme 3.1.1. Alors, cette suite converge vers une solution de (GVIP) et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|r(x^k, \beta, t^k)\| = 0. \quad (3.13)$$

Démonstration 3.2.4 En utilisant le deuxième résultat de la proposition 3.2.1 pour chaque itéré et le fait que la fonction ϕ atteint son maximum sur $[0, \lambda_{k1}]$ en λ_{k1} et $\lambda_{k2} \in [0, \lambda_{k1}]$, on déduit que $\phi(\lambda_k) \geq \phi(\lambda_{k2})$. De plus, on a pour tout $\bar{x} \in \mathcal{T}$ et pour tout $m^k \in F(y^k)$ l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
 \|x^k - \bar{x}\|^2 &\leq \|x^k - \bar{x}\|^2 - \phi(\lambda_k) \\
 &\leq \|x^k - \bar{x}\|^2 - \phi(\lambda_{k2}) \\
 &= \|x^k - \bar{x}\|^2 + \lambda_{k2}^2 \|m^k\|^2 - 2\lambda_{k2} \langle m^k, x^k - y^k \rangle - \|x^k - x^k(\lambda_{k2}) - \lambda_{k2} m^k\|^2 \\
 &= \|x^k - \bar{x}\|^2 + \frac{\langle m^k, x^k - y^k \rangle^2}{\|m^k\|^2} - 2 \frac{\langle m^k, x^k - y^k \rangle^2}{\|m^k\|^2} - \|x^k - x^k(\lambda_{k2}) - \lambda_{k2} m^k\|^2 \\
 &= \|x^k - \bar{x}\|^2 - \lambda_{k2}^2 \|m^k\|^2 - \|x^k - x^k(\lambda_{k2}) - \lambda_{k2} m^k\|^2 \\
 &\leq \|x^k - \bar{x}\|^2 - \lambda_{k2}^2 \|m^k\|^2.
 \end{aligned}$$

Alors, la suite $\{\|x^k - \bar{x}\|\}$ est décroissante, de plus elle est positive, donc elle converge.

En conséquence $\{x^k\}$ est bornée. En effet, on a l'inégalité $\|x^k\| \leq \|x^k - \bar{x}\| + \|\bar{x}\|$ et le fait que la suite $\{\|x^k - \bar{x}\|\}$ est décroissante pour tout $\bar{x} \in \mathcal{T}$, on obtient

$$\|x^k\| \leq \|x^0 - \bar{x}\| + \|\bar{x}\| \text{ ce qui implique que } \{x^k\} \text{ est bornée.}$$

On déduit aussi que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_{k2} \|m^k\|) = 0. \quad (3.14)$$

D'où, il découle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\langle m^k, x^k - y^k \rangle}{\|m^k\|} = 0.$$

Puisque la suite $\{x^k\}$ est bornée, de même pour $\{y^k\}$ et le fait que F est une application semi-continue supérieurement à valeurs compactes. Alors d'après la proposition 3.11 dans [3], on a $\{F(y^k)\}$ est une suite bornée et donc $\{m^k\}$ est également bornée.

En utilisant ce résultat, on trouve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle m^k, x^k - y^k \rangle = 0.$$

À partir de l'expression de y^k et en utilisant la procédure de recherche linéaire de l'algorithme 3.1.1, on a

$$\langle m^k, x^k - y^k \rangle \geq \alpha_k \frac{\sigma}{\beta} \|r(x^k, \beta, t^k)\|^2,$$

donc on obtient

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k \|r(x^k, \beta, t^k)\|^2) = 0. \quad (3.15)$$

Cas A : Si $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \neq 0$, d'après l'égalité (3.15), on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|r(x^k, \beta, t^k)\| = 0,$$

et le résultat demandé est obtenu.

Cas B : Supposons que $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$. Par le fait que $\{x^k\}$ est bornée, donc elle possède une sous-suite convergente $\{x^{k_l}\}$ qu'on note sa limite par \bar{x} , c'est-à-dire

$$\lim_{l \rightarrow \infty} x^{k_l} = \bar{x},$$

et puisque la suite $\{x^k\}$ est contenue dans C et ce dernier est un ensemble fermé, donc \bar{x} appartient à C .

Alors,

$$\begin{aligned} y^{k_l} &= (1 - \alpha_{k_l}) x^{k_l} + \alpha_{k_l} z^{k_l} \\ &= x^{k_l} - \alpha_{k_l} r(x^{k_l}, \beta, t^{k_l}) = \bar{x}, \text{ quand } l \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Comme F est semi-continue inférieurement sur C , donc pour tout $\bar{t} \in F(\bar{x})$, on sait qu'il existe une suite $\{t^{k_l}\} \subset F(x^{k_l})$ telle que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} t^{k_l} = \bar{t}, \quad (3.16)$$

et il existe $m^{k_l} \in F(x^{k_l} - (\alpha_{k_l}/\gamma) r(x^{k_l}, \beta, t^{k_l}))$ tel que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} m^{k_l} = \bar{t}. \quad (3.17)$$

En vertu de la définition de α_{k_l} , le fait que $m^{k_l} \in F(x^{k_l} - (\alpha_{k_l}/\gamma) r(x^{k_l}, \beta, t^{k_l}))$ et moyennement la procédure de recherche linéaire (3.3), cela implique que

$$\langle m^{k_l}, r(x^{k_l}, \beta, t^{k_l}) \rangle < \frac{\sigma}{\beta} \|r(x^k, \beta, t^k)\|^2. \quad (3.18)$$

Soit

$$u^k = x^k - \beta t^k, \quad (3.19)$$

et puisque les suites $\{x^k\}$, $\{t^k\}$ sont bornées, donc $\{u^k\}$ est également bornée, alors en prenant $l \rightarrow +\infty$ dans

$$u^{k_l} = x^{k_l} - \beta t^{k_l},$$

on obtient

$$\bar{u} = \bar{x} - \beta \bar{t}. \quad (3.20)$$

De plus, en utilisant (3.19) et le lemme 2(iv), on a

$$\beta \langle \bar{t}, r(\bar{x}, \beta, \bar{t}) \rangle = \langle \bar{x} - \bar{u}, \bar{x} - P_C(\bar{u}) \rangle \geq \|\bar{x} - P_C(\bar{u})\|^2. \quad (3.21)$$

La combinaison de (3.18) et (3.21) donne

$$\frac{1}{\beta} \|\bar{x} - P_C(\bar{u})\|^2 \leq \langle \bar{t}, r(\bar{x}, \beta, \bar{t}) \rangle \leq \frac{\sigma}{\beta} \|r(\bar{x}, \beta, \bar{t})\|^2, \quad (3.22)$$

alors on obtient

$$(1 - \sigma) \|\bar{x} - P_C(\bar{u})\|^2 \leq 0.$$

Puisque $\sigma \in (0, 1)$ implique que

$$0 = \|\bar{x} - P_C(\bar{u})\| = \|\bar{x} - P_C(\bar{x} - \beta \bar{t})\| = \|r(\bar{x}, \beta, \bar{t})\|,$$

Donc, $\bar{x} \in \mathcal{T}$.

Utilisons le fait que $\{\|x^{k_l} - \bar{x}\|\}$ converge vers zéro, alors la suite globale $\{\|x^k - \bar{x}\|\}$ converge aussi vers la même limite, donc $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - \bar{x}\| = 0$, autrement dit que $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \bar{x}$ et ceci termine la preuve.

Il est clair que l'élément fondamental dans la définition de (GVIP) est l'application multivoque F , alors le choix d'une image de tout élément de C selon cette application est arbitraire. Mais la question qui se pose fortement est de savoir s'il existe un choix plus approprié qui permet d'assurer une convergence rapide vers l'ensemble des solutions

de (GVIP).

Pour atteindre cet objectif, nous proposons le même choix pour m^k ($m^k \in F(y^k)$) déjà utilisé dans [65] et qui est donné par

$$m^k = P_{F(y^k)}(t^k).$$

En effet, on a $y^k = (1 - \alpha_k)x^k + \alpha_k z^k$, alors $y^k \rightarrow x^k$ quand $j \rightarrow +\infty$ (car $\alpha_k \rightarrow 0$ quand $j \rightarrow +\infty$) et puisque F est semi-continue inférieurement sur C et le fait que $t^k \in F(x^k)$, on déduit qu'il existe une suite $\{\widehat{m}^k\} \subset F(y^k)$ telle que $\widehat{m}^k \rightarrow t^k$ quand $j \rightarrow +\infty$.

D'autre part, on a $m^k = P_{F(y^k)}(t^k)$, cela donne

$0 \leq \|m^k - t^k\| \leq \|\widehat{m}^k - t^k\| \rightarrow 0$ quand $j \rightarrow +\infty$, ce qui implique que $m^k \rightarrow t^k$ quand $j \rightarrow +\infty$.

3.3 Algorithme de Ye

Avant de passer à la partie numérique, on va rappeler l'algorithme de **Ye**, qui a été introduit en 2018 et considéré comme étant l'un des algorithmes les plus efficaces pour la résolution de (GVIP) sous les conditions à savoir la continuité et la pseudomonotonie de l'application F . L'itéré x^{k+1} dans cette méthode est obtenu en projetant l'itéré courant x^k sur un demi-espace tout à fait différent de celui défini dans notre algorithme et qu'il doit vérifier évidemment la stricte séparation de x^k de l'ensemble des solutions \mathcal{T} . L'algorithme associé fonctionne sans avoir besoin que les itérés x^k appartiennent à C . Ainsi, en appliquant cet algorithme, à chaque itération, on peut se débarrasser de toute procédure auxiliaire, ce qui permet en quelque sorte de réduire les calculs.

Description de l'algorithme de Ye

Algorithme 3.3.1 Soit $x^0 \in C$ et $k = 0$.

Choisir $\sigma, l \in (0, 1)$, et soit ε une précision donnée

Choisir arbitrairement $t^k \in F(x^k)$ et calculer $\bar{x}^k = P_C(x^k - t^k)$.

— Tant que $\|r(x^k, t^k)\| > \varepsilon$, faire

Trouver j le plus petit entier positif satisfaisant

$$l^j \langle t^k - t^k(j), x^k - y^k(j) \rangle \leq \sigma \|x^k - y^k(j)\|^2 \quad (3.23)$$

Où $t^k(j) = P_{F(y^k(j))}(t^k)$, $y^k(j) = P_C(x^k - l^j t^k)$

Soit $\alpha_k = l_k^j$. $y^k = y^k(m^k) = P_C(x^k - \alpha_k t^k)$ et $t^k = t^k(j^k) = P_{F(y^k)}(t^k)$.

Calculer

$$x^{k+1} = P_{D_k}(x^k)$$

Où D_k est le demi espace défini par

$$D_k = \left\{ x \mid \langle x^k - y^k - \alpha_k(t^k - \bar{t}^k), x - y^k \rangle \leq 0 \right\} \quad (3.24)$$

$k = k + 1$.

— *Fin.*

Remarque 3.3.1 On note que si la procédure de recherche linéaire utilisée dans l'algorithme de Ye nécessite à l'itération k par exemple p étapes, alors on doit calculer p projections sur C et p autres projections sur $F(y^k(j))$, ce qui rend l'algorithme correspondant assez coûteux en termes de volume de calculs. Contrairement à notre procédure de recherche linéaire qui nécessite moins de projections à calculer.

3.4 Implémentation numérique

— Dans la dernière partie de ce chapitre, nous présentons quelques expériences numériques issues de la mise en oeuvre de l'algorithme de **Grar et Benterki** adapté pour (GVIP) où l'itéré x^{k+1} est calculé par deux méthodes :

$$(K1) \begin{cases} 1. x^{k+1} = P_C(x^k - \lambda_k m^k), \lambda_k = \lambda \text{ constant} \\ 2. x^{k+1} = (1 - \theta)x_s^{k+1} + \theta z^k, x_s^{k+1} : \text{est l'itéré de Solodov.} \end{cases}$$

— Pour chacun de ces deux cas :

$$(K2) \begin{cases} 1. m^k \text{ est choisi arbitrairement} \\ 2. m^k = P_{F(y^k)}(t^k). \end{cases}$$

A partir de cette expression, on sait que x^{k+1} appartient à C et vérifie la condition (3.6). En effet, on a d'abord

$$\begin{aligned}\langle m^k, z^k - y^k \rangle &= (1 - \alpha_k) \langle m^k, z^k - x^k \rangle \\ &\leq -(1 - \alpha_k) \frac{\alpha}{\beta} \|r(x^k, \beta, t^k)\| \\ &< 0.\end{aligned}$$

Où la première inégalité est vérifiée en utilisant l'expression de y^k et la procédure de recherche linéaire (3.3). Par conséquent, on obtient également

$$\begin{aligned}\langle m^k, \theta x^k(\lambda_{k1}) + (1 - \theta)z^k - y^k \rangle &= \langle m^k, \theta x^k(\lambda_{k1}) + (1 - \theta)z^k - (\theta + (1 - \theta))y^k \rangle \\ &= \theta \langle m^k, x^k(\lambda_{k1}) - y^k \rangle + (1 - \theta) \langle m^k, z^k - y^k \rangle \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

La dernière inégalité découle du résultat précédent et du fait que λ_{k1} satisfait (3.12).

Les algorithmes associés à ces quatre cas sont notés $Alg1$, $Alg1'$ pour (K1) et $Alg2$, $Alg2'$ pour (K2). On a implémenté ces algorithmes sous Matlab et on a exécuté les programmes sur quelques exemples décrits ci-dessous. Pour évaluer l'efficacité de l'algorithme adapté, nous avons effectué une étude comparative entre les résultats obtenus et ceux obtenus par l'algorithme de Ye [65] noté par $Alg3$. Le critère d'arrêt considéré pour tous les programmes est $\varepsilon = 10^{-6}$. On note par $Iter$ le nombre des itérations effectuées et cpu le temps d'exécution calculé en secondes pour obtenir la solution approximative.

Exemple 3.4.1 L'application multivoque F et l'ensemble C pour cet exemple sont définis par

$$\begin{aligned}F(x) &= \{(s, s + 2x_2, s + 3x_3, \dots, s + nx_n) / s \in [0, 1]\}, \\ C &= \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n / \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\},\end{aligned}$$

et la solution de ce (GVIP) est $(1, 0, \dots, 0, 0)$.

Dans cet exemple, nous prenons $s = 1$, donc on prend comme choix arbitraire pour $t^k \in F(x^k)$ (respectivement $m^k \in F(y^k)$), $t^k = (1, 1 + 2x_2^k, 1 + 3x_3^k, \dots, 1 + nx_n^k)$ (respectivement $m^k = (1, 1 + 2y_2^k, 1 + 3y_3^k, \dots, 1 + ny_n^k)$).

Nous donnons par la suite les résultats obtenus à partir des algorithmes implémentés où les valeurs des constantes prises sont comme suit.

Pour Alg1 et Alg1' : $\sigma = 0.1$ et $\beta = 0.2$ pour tout x^0 .

Pour Alg2 et Alg2' : $\sigma = \gamma = 0.1$ pour tout x^0 .

Pour Alg3 : $\sigma = l = 0.9$ pour tout x^0 .

n	x^0	Alg1				Alg1'			
		Iter	cpu	γ	λ	Iter	cpu	γ	λ
10	(0, ..., 0)	01	0.0087	0.99	08	01	0.0127	0.99	08
	(1, ..., 1)	02	0.0186	0.9	08	02	0.0178	0.9	08
	(-2, ..., -2)	02	0.1286	0.9	08	02	0.0175	0.9	08
100	(0, ..., 0)	01	0.1796	0.99	62	01	0.1879	0.99	62
	(1, ..., 1)	02	0.2940	0.9	62	01	0.2904	0.9	62
	(-2, ..., -2)	02	0.2692	0.9	62	02	0.2688	0.9	62
500	(0, ..., 0)	01	8.6412	0.99	62	01	8.0693	0.99	62
	(1, ..., 1)	02	16.6910	0.9	100	02	14.2122	0.9	62
	(-2, ..., -2)	01	9.4871	0.9	62	01	8.8689	0.9	62
1000	(0, ..., 0)	0	62.4649	0.99	70	01	64.3016	0.99	70
	(1, ..., 1)	02	114.9030	0.9	70	02	103.1856	0.9	70
	(-2, ..., -2)	01	73.1072	0.9	70	01	72.9489	0.9	70
2000	(0, ..., 0)	01	486.7950	0.99	70	01	488.6435	0.99	70
	(1, ..., 1)	02	788.0726	0.9	100	02	744.2567	0.9	100
	(-2, ..., -2)	01	476.4511	0.9	70	01	478.8541	0.9	70

Tableau 1 : Exemple 3.4.1

n	x^0	$Alg2$				$Alg2'$			
		$Iter$	cpu	β	θ	$Iter$	cpu	β	θ
10	(0, ..., 0)	02	0.0090	09	0.000001	02	0.0231	09	0.000001
	(1, ..., 1)	01	0.00076	09	0.000001	01	0.0112	09	0.000001
	(-2, ..., -2)	06	0.0347	09	0.02	06	0.0622	09	0.02
100	(0, ..., 0)	02	0.1873	55	0.000001	02	0.2048	55	0.000001
	(1, ..., 1)	01	0.0966	55	0.000001	01	0.9730	55	0.000001
	(-2, ..., -2)	04	0.4558	55	0.001	04	0.4713	55	0.001
500	(0, ..., 0)	02	8.8875	09	0.000001	02	9.8775	09	0.000001
	(1, ..., 1)	01	4.7572	09	0.000001	01	4.6676	09	0.000001
	(-2, ..., -2)	01	4.1909	09	0.000001	01	4.5143	09	0.000001
1000	(0, ..., 0)	02	70.4925	09	0.000001	02	71.5098	09	0.000001
	(1, ..., 1)	01	38.0792	09	0.000001	01	37.7169	09	0.000001
	(-2, ..., -2)	01	34.1407	09	0.000001	01	34.3693	09	0.000001
2000	(0, ..., 0)	02	498.4062	09	0.000001	02	460.9882	09	0.000001
	(1, ..., 1)	01	259.6617	09	0.000001	01	254.7739	09	0.000001
	(-2, ..., -2)	01	248.3225	09	0.000001	01	230.2177	09	0.000001

Tableau 2 : Exemple 3.4.1

<i>Alg 3</i>			
n	x^0	<i>Iter</i>	<i>cpu</i>
10	(0, ..., 0)	239	58.9988
	(1, ..., 1)	182	21.4116
	(-2, ..., -2)	226	57.0424
20	(0, ..., 0)	769	270.4970
	(1, ..., 1)	707	106.6512
	(-2, ..., -2)	764	306.6620
100	(0, ..., 0)	-	-
	(1, ..., 1)	-	-
	(-2, ..., -2)	-	-
1000	(0, ..., 0)	-	-
	(1, ..., 1)	-	-
	(-2, ..., -2)	-	-
2000	(0, ..., 0)	-	-
	(1, ..., 1)	-	-
	(-2, ..., -2)	-	-

Tableau 3 : Exemple 3.4.1

- : désigne que le nombre d'itération dépasse 1000 itérations.

Exemple 3.4.2 [30, 65] L'application multivoque F et l'ensemble C pour cet exemple sont donnés par

$$F(x) = \{(s, s - x_1, s - x_2, \dots, s - x_{n-1}) / s \in [0, 1]\}$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n / \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\},$$

et la solution de ce (GVIP) est $(0, 0, \dots, 0, 1)$.

Dans cet exemple, nous prenons $s = 1$, donc on prend comme choix arbitraire pour $t^k \in F(x^k)$ (respectivement $m^k \in F(y^k)$), $t^k = (1, 1 - x_1^k, 1 - x_2^k, \dots, 1 - nx_{n-1}^k)$

(respectivement $m^k = (1, 1 - y_1^k, 1 - y_2^k, \dots, 1 - ny_{n-1}^k)$).

On donne les résultats obtenus à partir des algorithmes implémentés où les valeurs des constantes prises sont comme suit

Pour Alg1 et Alg1' : $\sigma = 0.1$ pour tout $x^0, \gamma = 0.1$ si $x^0 = (1/n, \dots, 1/n), (1, \dots, 1)$ et $\gamma = 0.99999$ si $x^0 = (-2, \dots, -2)$.

Pour Alg2 et Alg2', $\sigma = \gamma = 0.1$ pour tout x^0 .

Pour Alg3 : $\delta = 0,34$ pour tout x^0 .

n	x^0	Alg1				Alg1'			
		Iter	cpu	β	λ	Iter	cpu	β	λ
10	$(1/n, \dots, 1/n)$	05	0.0933	2.3	30	05	0.1013	4.6	30
	$(1, \dots, 1)$	05	0.07693	2.3	30	05	0.1084	4.6	30
	$(-2, \dots, -2)$	05	0.1752	2.3	30	05	0.1502	4.6	30
50	$(1/n, \dots, 1/n)$	08	0.4548	4.6	30	05	0.3672	1.3	600
	$(1, \dots, 1)$	09	0.5292	2.3	25	05	0.3637	1.3	600
	$(-2, \dots, -2)$	25	2.9980	2.3	30	25	2.7703	03	04
100	$(1/n, \dots, 1/n)$	19	4.6537	3.3	30	18	4.7851	1.3	30
	$(1, \dots, 1)$	08	1.2500	5.3	30	18	4.9539	1.3	30
	$(-2, \dots, -2)$	50	17.3849	1.5	30	50	18.6507	1.3	30
200	$(1/n, \dots, 1/n)$	84	122.7375	1.5	30	07	4.7840	4.6	30
	$(1, \dots, 1)$	88	133.7441	3.3	30	07	4.8564	4.6	30
	$(-2, \dots, -2)$	100	167.8360	3.3	30	100	165.3262	03	30

Tableau 4 : Exemple 3.4.2

n	x^0	Alg2				Alg2'			
		Iter	cpu	β	θ	Iter	cpu	β	θ
10	$(1/n, \dots, 1/n)$	10	0.1044	09	0.01	10	0.2166	7.2	0.01
	$(1, \dots, 1)$	10	0.2146	05	0.01	10	0.2255	2.8	0.01
	$(-2, \dots, -2)$	13	0.2455	09	0.01	13	0.2849	8.1	0.01
50	$(1/n, \dots, 1/n)$	25	0.7580	8.1	0.01	28	1.7506	4.3	0.01
	$(1, \dots, 1)$	27	1.6024	5.5	0.001	27	1.9405	8.3	0.01
	$(-2, \dots, -2)$	53	4.5289	09	0.01	53	5.6964	4.3	0.01
100	$(1/n, \dots, 1/n)$	43	9.9579	6.1	0.01	43	9.2976	3.3	0.01
	$(1, \dots, 1)$	32	6.6368	6.9	0.01	45	13.3148	34	0.01
	$(-2, \dots, -2)$	103	33.9310	6.1	0.01	103	35.7461	34	0.01
200	$(1/n, \dots, 1/n)$	116	179.6938	6.6	0.01	116	181.6362	6.6	0.01
	$(1, \dots, 1)$	113	159.2788	3.4	0.01	112	161.1741	3.4	0.01
	$(-2, \dots, -2)$	203	369.6150	6.6	0.01	203	358.1106	6.6	0.01

Tableau 5 : Exemple 3.4.2

		Alg3		
n	x_0	Iter	cpu	l
10	$(1/n, \dots, 1/n)$	35	1.7592	0.95
	$(1, \dots, 1)$	44	1.6183	0.95
	$(-2, \dots, -2)$	43	1.7283	0.95
50	$(1/n, \dots, 1/n)$	64	12.3182	0.95
	$(1, \dots, 1)$	129	14.9710	0.9
	$(-2, \dots, -2)$	127	15.1543	0.9
100	$(1/n, \dots, 1/n)$	90	37.3068	0.95
	$(1, \dots, 1)$	214	82.9337	0.95
	$(-2, \dots, -2)$	213	88.2488	0.95
200	$(1/n, \dots, 1/n)$	122	226.3886	0.95
	$(1, \dots, 1)$	390	687.8674	0.95
	$(-2, \dots, -2)$	391	718.4568	0.95

Tableau 6 : Exemple 3.4.2

Exemple 3.4.3 [30, 65]

Soit $C = \mathbb{R}_+^n$, et l'application multivoque est la même que dans l'exemple précédent. Alors, le point $(0, 0, \dots, 0)$ est la solution de ce (GVIP).

On donne les résultats obtenus à partir des algorithmes implémentés où les valeurs des constantes prises sont comme suit

Pour Alg1, Alg1', Alg2 et Alg2' : $\sigma = 0.1$ pour tout x^0 , $\gamma = 0.1$ si $x^0 = (0.9, \dots, 0.9)$, $(1, \dots, 1)$ et $\gamma = 0.99999$ si $x^0 = (-2, \dots, -2)$

Pour Alg3, $\delta = 0.9$, $l = 0.5$ pour tout x^0 .

n	x^0	$Alg1$				$Alg1'$			
		$Iter$	cpu	β	λ	$Iter$	cpu	β	λ
10	(1, ..., 1)	05	0.1080	2.5	02	04	0.1173	01	90
	(0.9, ..., 0.9)	01	0.0194	09	02	01	0.0375	01	90
	(-2, ..., -2)	01	0.0160	0.2	90	01	0.0152	01	90
100	(1, ..., 1)	08	0.2907	0.2	90	07	0.2838	04	90
	(0.9, ..., 0.9)	01	0.0498	0.2	90	01	0.0490	01	90
	(-2, ..., -2)	01	0.0327	0.2	90	01	0.0447	01	90
500	(1, ..., 1)	08	0.4193	0.2	90	06	1.6353	05	90
	(0.9, ..., 0.9)	01	0.0781	0.2	90	01	0.2545	01	90
	(-2, ..., -2)	01	0.0682	0.2	90	01	0.4599	01	90
1000	(1, ..., 1)	08	0.9780	0.2	90	06	8.0998	05	90
	(0.9, ..., 0.9)	01	0.1478	0.2	90	01	1.2334	01	90
	(-2, ..., -2)	01	0.2105	0.2	90	01	3.0099	01	90
2000	(1, ..., 1)	08	2.9927	0.2	90	06	51.5017	5.5	90
	(0.9, ..., 0.9)	01	0.3171	0.2	90	01	8.6067	05	90
	(-2, ..., -2)	01	0.6774	0.2	90	01	21.5148	05	90

Tableau 7 : Exemple 3.4.3

n	x^0	$Alg2$				$Alg2'$			
		$Iter$	cpu	β	θ	$Iter$	cpu	β	θ
10	(1, ..., 1)	06	0.1537	15	0.1	06	0.1133	09	0.1
	(0.9, ..., 0.9)	01	0.0505	15	0.1	01	0.0157	09	0.1
	(-2, ..., -2)	02	0.0276	15	0.001	02	0.0276	09	0.1
100	(1, ..., 1)	42	3.5722	1.5	0.1	09	0.6863	190	0.3
	(0.9, ..., 0.9)	01	0.0605	15	0.1	01	0.0745	09	0.3
	(-2, ..., -2)	02	0.3209	15	0.001	02	0.3258	90	0.3
500	(1, ..., 1)	41	72.716	1.5	0.1	09	17.1776	190	0.3
	(0.9, ..., 0.9)	01	0.2051	15	0.1	01	10.5841	90	0.3
	(-2, ..., -2)	02	10.1726	15	0.001	02	12.2527	90	0.3
1000	(1, ..., 1)	92	1589.711	0.5	0.1	07	98.3717	600	0.3
	(0.9, ..., 0.9)	01	0.8017	15	0.1	01	1.6180	09	0.3
	(-2, ..., -2)	02	69.4234	15	0.1	02	53.5731	15	0.001
2000	(1, ..., 1)	38	3255.6828	1.5	0.1	11	841.6456	190	0.9
	(0.9, ..., 0.9)	01	22.9217	15	0.1	01	4.6524	09	0.3
	(-2, ..., -2)	02	472.9522	15	0.001	02	555.4430	15	0.001

Tableau 8 : Exemple 3.4.3

<i>Alg 3</i>			
n	x^0	<i>Iter</i>	<i>cpu</i>
10	(1, ..., 1)	15	0.3515
	(0.9, ..., 0.9)	15	0.4098
	(-2, ..., -2)	17	0.3880
100	(1, ..., 1)	96	3.7692
	(0.9, ..., 0.9)	21	0.7153
	(-2, ..., -2)	21	0.7609
500	(1, ..., 1)	101	26.0059
	(0.9, ..., 0.9)	21	6.1334
	(-2, ..., -2)	21	5.4223
1000	(1, ..., 1)	101	131.7395
	(0.9, ..., 0.9)	21	29.3578
	(-2, ..., -2)	21	30.2118
2000	(1, ..., 1)	95	785.6897
	(0.9, ..., 0.9)	21	193.5405
	(-2, ..., -2)	21	200.4297

Tableau 9 : Exemple 3.4.3

3.5 Commentaires généraux

Comme nous pouvons le constater d'après les résultats issus de cette implémentation numérique, est qu'une réduction très significative a été enregistrée en termes de nombre d'itérations et du temps de calcul par rapport à l'algorithme de Ye. En particulier, dans le cas où le pas λ_k est constant et $m^k = P_{F(y^k)}(t^k)$ et cela quelque soit le point initial réalisable ou non et quelque soit la dimension de l'exemple testé. La majorité des résultats obtenus ont été très précis où l'erreur commise a atteint une valeur négligeable (de rang 10^{-16}). Ceci exprime le rôle crucial joué par la condition introduite (3.6) dans la performance numérique de notre algorithme.

★ Cette partie de ce travail a donné lieu à une publication internationale : O. Belguidoum, H. Grar, An improved projection algorithm for variational inequality problem with multivalued mapping, Numerical Algebra, Control and Optimization, 13, no. 2, (2023), 210-223.

CHAPITRE 4

NOUVELLE MÉTHODE DE PROJECTION POUR LE PROBLÈME D'INÉQUATIONS VARIATIONNELLES GÉNÉRALISÉ

Dans ce chapitre, nous proposons un nouveau type d'algorithmes de projection pour les inéquations variationnelles impliquant les applications multivoques. En s'inspirant de la méthode de projection de **Ye** et celle proposée dans le chapitre 3, notre seconde contribution dans ce travail est d'hybrider les qualités de ces dernières dans le but de développer une méthode caractérisée par une supériorité théorique et numérique. En effet, notre méthode converge globalement sous les mêmes hypothèses exigées par la méthode présentée au chapitre 3, et d'autre part, nous avons introduit une procédure de recherche linéaire différente qui nécessite moins de projections à effectuer par rapport à celle de **Ye**, et pour le calcul de l'itéré suivant x^{k+1} , nous avons proposé deux expressions pour assurer que la suite générée est incluse dans l'intersection de l'ensemble des contraintes et le demi-espace contenant l'ensemble des solutions ce qui nous permet une convergence rapide avec un coût de calcul réduit d'une manière significative.

Pour la description et l'analyse de convergence de l'algorithme associé à cette nouvelle méthode, en plus de résultats donnés au chapitre 3 (lemmes 3.0.1, 3.0.2, 3.0.3, 3.0.4),

on a besoin du lemme suivant.

Lemme 4.0.1 [30] Soit Ω un sous-ensemble convexe fermé de \mathbb{R}^n , $h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles et $\bar{\Omega} = \{x \in \Omega / h(x) \leq 0\}$.

Si $\bar{\Omega}$ est un sous ensemble non vide de \mathbb{R}^n et h une fonction continue de Lipshitz sur Ω de module $\theta > 0$, alors

$$\text{dist}(x, \bar{\Omega}) \geq \theta^{-1} \max \{h(x), 0\}, \quad \forall x \in \Omega.$$

► Rappelons les hypothèses qui sont nécessaires pour notre méthode

(A1) : \mathcal{T} est non vide.

(A2) : F est continue sur C .

(A3) : Pour tout $\bar{x} \in \mathcal{T}$ et tout $x \in C$, on a

$$\langle t, x - \bar{x} \rangle \geq 0, \text{ pour tout } t \in F(x).$$

4.1 Description de l'algorithme

Nous présentons ci-après les étapes du nouvel algorithme en détails.

Algorithme 4.1.1 Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $k = 0$.

Choisir $\sigma, \gamma \in (0, 1), \beta > 0$ et soit ε une précision donnée

Choisir arbitrairement $t^k \in F(x^k)$

Calculer $z^k = P_C(x^k - \beta t^k)$ et $r(x^k, \beta, t^k) = x^k - z^k$.

— **Tant que** $\|r(x^k, \beta, t^k)\| > \varepsilon$, **faire**

Trouver j le plus petit entier positif satisfaisant

$$\langle m^k(j), x^k - y^k(j) \rangle \geq \frac{\sigma}{\beta} \|x^k - y^k(j)\|^2 \quad (4.1)$$

où $y^k(j) = (1 - \gamma^j)x^k + \gamma^j z^k$, $m^k(j) = P_{F(y^k(j))}(t^k)$

On pose $\alpha_k = \gamma^j$ et $y^k = (1 - \alpha_k)x^k + \alpha_k z^k$

Calculer $m^k = P_{F(y^k)}(t^k)$

Calculer

$$\bar{x}^k = x^k - \frac{\langle m^k, x^k - y^k \rangle}{\|m^k\|^2} m^k \quad (4.2)$$

Si $\bar{x}^k \in C$, alors

$$x^{k+1} = \bar{x}^k$$

Sinon calculer

$$x^{k+1} = P_{C \cap D_k}(x^k)$$

où D_k le demi-espace défini par

$$D_k = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle m^k, x - y^k \rangle \leq 0\} \quad (4.3)$$

$k = k + 1$.

— *Fin.*

4.2 Analyse de la convergence de l'algorithme

Tout d'abord et similairement à la méthode présentée au chapitre précédent, nous donnons le lemme ci-après décrivant la faisabilité de la procédure de recherche linéaire (4.1), c'est-à-dire l'existence de $y^k(j)$ et donc également l'existence de $m^k(j)$.

Lemme 4.2.1 Soit $\{x^k\}$ une suite générée par l'algorithme 4.0.1. Si x^k n'est pas une solution du problème (2,3), alors il existe un entier positif j tel que

$$\langle m^k(j), x^k - y^k(j) \rangle \geq \frac{\sigma}{\beta} \|x^k - y^k(j)\|^2.$$

Démonstration 4.2.1 Supposons que x^k n'est pas une solution du problème (2.3), alors $\|r(x^k, \beta, t^k)\| > 0$.

On utilise l'expression de y^k et puisque $\gamma \in (0, 1)$, on obtient

$$\lim_{j \rightarrow \infty} y^k = \lim_{j \rightarrow \infty} \left((1 - \gamma^j) x^k + \gamma^j z^k \right),$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(x^k - \gamma^j r(x^k, \beta, t^k) \right) = x^k.$$

D'après ce résultat et le fait que F est semi-continue inférieurement, on sait qu'il existe $m^k(j) \in F(y^k(j))$ tel que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m^k(j) = t^k, \quad t^k \in F(x^k).$$

Supposons que, pour un certain k , la procédure de recherche linéaire (4.1) n'est pas satisfaite pour tout entier positif j , c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \beta \langle m^k(j), x^k - y^k(j) \rangle &< \sigma \|x^k - y^k(j)\|^2 \iff \\ \beta \langle m^k(j), x^k - (1 - \gamma^j)x^k - \gamma^j z^k \rangle &< \sigma \|x^k - (1 - \gamma^j)x^k - \gamma^j z^k\|^2 \iff \\ \beta \langle m^k(j), r(x^k, \beta, t^k) \rangle &< \sigma \gamma^j \|r(x^k, \beta, t^k)\|^2, \end{aligned}$$

alors, on a

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \beta \langle m^k(j), r(x^k, \beta, t^k) \rangle = \beta \langle t^k, r(x^k, \beta, t^k) \rangle \leq 0, \quad (4.4)$$

puisque $\gamma \in (0, 1)$.

D'autre part, en appliquant le lemme 3.0.1(i), on obtient

$$\langle P_C(x^k - \beta t^k) - (x^k - \beta t^k), x^k - P_C(x^k - \beta t^k) \rangle \geq 0,$$

Ce qui implique

$$\beta \langle t^k, r(x^k, \beta, t^k) \rangle \geq \|r(x^k, \beta, t^k)\|^2 \quad (4.5)$$

D'après (4.4) et (4.5), on obtient

$$\|r(x^k, \beta, t^k)\|^2 \leq \beta \langle t^k, r(x^k, \beta, t^k) \rangle \leq 0,$$

Alors,

$$\|r(x^k, \beta, t^k)\|^2 \leq 0.$$

On obtient une contradiction puisque x^k n'est pas une solution de (GVIP). Par conséquent, la procédure de recherche linéaire (4, 1) est bien satisfaite pour un certain entier positif j .

Dans ce qui suit, nous donnons l'analyse théorique de la convergence du nouvel algorithme sous les hypothèses (A1), (A2) et (A3).

◇ Le lemme 3.2.2 reste également valable pour cette méthode, c'est à dire que l'hyperplan $H_k = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle m^k, x - y^k \rangle = 0\}$ sépare effectivement l'itéré courant x^k de l'ensemble de solutions \mathcal{T} .

La partie suivante est consacrée à la démonstration que cette méthode satisfait la propriété de contraction, en d'autres termes, la suite $\{\|x^k - \bar{x}\|^2\}$ est décroissante

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\| \leq \|x^k - \bar{x}\|, \forall \bar{x} \in \mathcal{T}.$$

Proposition 4.2.1 Soit $\{x^k\}$ une suite générée par l'algorithme 4.0.1 et $\bar{x} \in \mathcal{T}$. Alors, pour tout $k \geq 0$, il existe un nombre $M > 0$ tel que

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\|^2 \leq \|x^k - \bar{x}\|^2 - M \|x^k - y^k\|^4. \quad (4.6)$$

Démonstration 4.2.2 On a $\bar{x} \in \mathcal{T} \subset D_k$ pour tout $k \geq 0$. On rappelle les deux expressions données dans l'algorithme 4.0.1 pour déterminer l'itéré x^{k+1} .

1)

$$x^{k+1} = \bar{x}^k = x^k - \frac{\langle m^k, x^k - y^k \rangle}{\|m^k\|^2} m^k = P_{D_k}(x^k).$$

Il est clair que la première expression de x^{k+1} n'est rien d'autre que la projection de x^k sur D_k .

2)

$$x^{k+1} = P_{C \cap D_k}(x^k).$$

Alors, on peut remplacer x, C et y dans le lemme 3.0.1(iii) par x^k, D_k et \bar{x} (respectivement par $x^k, C \cap D_k$ et \bar{x}), pour tout $k \geq 0$, il s'en suit donc que

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\|^2 \leq \|x^k - \bar{x}\|^2 - \|x^{k+1} - \bar{x}\|^2 = \|x^k - \bar{x}\|^2 - \text{dist}^2(x^k, \Gamma_k), \quad (4.7)$$

où $\Gamma_k = D_k$ ou $\Gamma_k = C \cap D_k$.

À partir de cette inégalité, on remarque que la suite $\{\|x^k - \bar{x}\|\}$ est décroissante et bornée inférieurement et donc elle est convergente. En conséquence, $\{x^k\}$ est bornée et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(x^k, \Gamma_k) = 0.$$

En utilisant la proposition 3.11 dans [3] et l'hypothèse que F est semi-continue supérieurement à valeurs compactes et le fait que la suite $\{x^k\}$ est bornée impliquent que l'ensemble $\{F(x^k) / k \in \mathbb{N}\}$ est également borné et la même chose pour la suite $\{t^k\}$. On a $z^k = P_C(x^k - \beta t^k)$ et puisque la suite $\{x^k\}$ est contenue dans $C \cap D_k$, donc dans C , et par la non-expansivité de l'opérateur de projection P_C (voir lemme 3.0.1(ii)), on a

$$\begin{aligned} \|y^k - \bar{x}\| &= \|(1 - \alpha_k)x^k + \alpha_k z^k - \bar{x}\| \\ &\leq \|x^k - \bar{x}\| + \alpha_k \|x^k - z^k\| \\ &\leq \|x^k - \bar{x}\| + \alpha_k \|x^k - x^k + \beta t^k\| \\ &\leq \|x^k - \bar{x}\| + \alpha_k \beta \|t^k\|, \end{aligned}$$

et donc la suite $\{y^k\}$ est bornée.

De même, on aura que l'ensemble $\{F(y^k) / k \in \mathbb{N}\}$ est borné, ce qui implique aussi que l'ensemble $\{m^k / k \in \mathbb{N}\}$ est borné. Donc, il doit exister un nombre constant $L > 0$ tel que

$$\|m^k\| \leq L, \quad \forall k \geq 0 \quad (4.8)$$

Soit $h_k(\cdot) = \langle m^k, \cdot - y^k \rangle$. Il est facile de prouver que h_k est une fonction continue de Lipschitz de constante L .

En effet,

$$\begin{aligned} |h_k(x) - h_k(y)| &= \left| \langle m^k, x - y^k \rangle - \langle m^k, y - y^k \rangle \right| \\ &= \left| \langle m^k, x - y \rangle \right|. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned} |h_k(x) - h_k(y)| &\leq \|m^k\| \|x - y\| \\ &\leq L \|x - y\|. \end{aligned}$$

En remplaçant dans le lemme 4.0.1, x, Ω et $\bar{\Omega}$ par x^k, \mathbb{R}^n et $\Gamma^k = D_k$ (respectivement x, C et $\Gamma^k = C \cap D_k$), on en déduit que

$$\text{dist}(x^k, \Gamma_k) \geq L^{-1} \max \{h_k(x^k), 0\} \geq L^{-1} \frac{\sigma}{\beta} \|x^k - y^k\|^2 \geq 0,$$

où la seconde inégalité est dûe au lemme 3.2.2 et la définition de $h_k(x^k)$. Ceci et d'après (4.7) on obtient

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\|^2 \leq \|x^k - \bar{x}\|^2 - \left(\frac{\sigma}{L\beta}\right)^2 \|x^k - y^k\|^4.$$

Enfin, en posant $M = \left(\frac{\sigma}{L\beta}\right)^2$, on obtient l'inégalité (4.6).

Lemme 4.2.2 Soit $\{x^k\}$ une suite générée par l'algorithme 4.0.1. Alors,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - y^k\| = 0 \tag{4.9}$$

Démonstration 4.2.3 Soit $\bar{x} \in \mathcal{T}$. D'après l'inégalité (4.6), on remarque que la suite $\{\|x^{k+1} - \bar{x}\|^2\}$ est décroissante et bornée inférieurement. Par conséquent, on déduit que la limite $\|x^{k+1} - \bar{x}\|^2$ existe.

Noter qu'on peut réécrire l'équation (4.6) sous la forme suivante

$$0 \leq M \|x^k - y^k\|^4 \leq \|x^k - \bar{x}\|^2 - \|x^{k+1} - \bar{x}\|^2.$$

En prenant les limites des deux membres de cette inégalité et en faisant tendre k vers (∞) , il

découle directement que l'inégalité (4.9) est vraie.

Le théorème établissant la convergence globale du nouvel algorithme ainsi que les détails de sa démonstration sont donnés dans le paragraphe suivant.

Théorème 4.2.1 *Supposons que les hypothèses (A1), (A2) et (A3) soient vérifiées par le problème (GVIP) et soit $\{x^k\}$ la suite générée par l'algorithme 4.0.1, alors cette dernière converge vers une solution de (GVIP) et satisfait*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|r(x^k, \beta, t^k)\| = 0 \quad (4.10)$$

Démonstration 4.2.4 *On utilise le lemme 3.0.3 et l'expression de y^k , on obtient*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\alpha_k \|r(x^k, \beta, t^k)\| \right) = 0 \quad (4.11)$$

Cas A : Si $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \neq 0$, sans perte de généralité, par (4.11) on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|r(x^k, \beta, t^k)\| = 0,$$

et le résultat demandé est obtenu.

Cas B : Supposons que $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$. Par le fait que $\{x^k\}$ est bornée, donc elle possède une sous-suite $\{x^{k_l}\}$ convergente qu'on note sa limite par \bar{x} , c'est-à-dire

$$\lim_{l \rightarrow \infty} x^{k_l} = \bar{x}.$$

De plus $\bar{x} \in C$, puisque la suite $\{x^k\}$ est contenue dans C qui est un ensemble fermé.

Alors,

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} y^{k_l} &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left((1 - \alpha_{k_l}) x^{k_l} + \alpha_{k_l} z^{k_l} \right) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left(x^{k_l} - \alpha_{k_l} r(x^{k_l}, \beta, t^{k_l}) \right) = \bar{x}, \text{ car } \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{k_l} = 0. \end{aligned}$$

Comme F est semi-continue inférieurement sur C , donc pour tout $\bar{t} \in F(\bar{x})$, on sait qu'il

existe une suite $\{t^{k_l}\}$ où $t^{k_l} \in F(x^{k_l})$ telle que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} t^{k_l} = \bar{t}, \quad (4.12)$$

et il existe aussi une suite $\{m^{k_l}(j-1)\}$ où $m^{k_l}(j-1) \in F(x^{k_l} - (\alpha_{k_l}/\gamma)r(x^{k_l}, \beta, t^{k_l}))$ telle que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} m^{k_l}(j-1) = \bar{t}. \quad (4.13)$$

Dans ce cas, la procédure de recherche linéaire (4.1), implique que

$$\langle m^{k_l}(j-1), x^{k_l} - y^{k_l}(j-1) \rangle < \frac{\sigma}{\beta} \|x^{k_l} - y^{k_l}(j-1)\|^2, \quad (4.14)$$

Alors,

$$\left(\frac{\alpha_{k_l}}{\gamma}\right) \langle m^{k_l}(j-1), r(x^{k_l}, \beta, t^{k_l}) \rangle < \frac{\sigma}{\beta} \left(\frac{\alpha_{k_l}}{\gamma}\right)^2 \|r(x^{k_l}, \beta, t^{k_l})\|^2.$$

En prenant la limite $l \rightarrow +\infty$ dans la dernière inégalité, on obtient

$$\langle \bar{t}, r(\bar{x}, \beta, \bar{t}) \rangle \leq 0. \quad (4.15)$$

car $\frac{\sigma \alpha_{k_l}}{\beta \gamma} \rightarrow 0$ quand $l \rightarrow +\infty$.

Soit

$$u^k = x^k - \beta t^k. \quad (4.16)$$

et puisque les suites $\{x^k\}$, $\{t^k\}$ sont bornées, donc $\{u^k\}$ est également bornée, alors en prenant $l \rightarrow +\infty$ dans

$$u^{k_l} = x^{k_l} - \beta t^{k_l},$$

on obtient

$$\bar{u} = \bar{x} - \beta \bar{t}. \quad (4.17)$$

De plus, en utilisant (4.17) et le lemme 3.0.1(iv), on a

$$\beta \langle \bar{t}, r(\bar{x}, \beta, \bar{t}) \rangle = \langle \bar{x} - \bar{u}, \bar{x} - P_C(\bar{u}) \rangle \geq \|\bar{x} - P_C(\bar{u})\|^2. \quad (4.18)$$

La combinaison de (4.15) et (4.18) donne

$$\frac{1}{\beta} \|\bar{x} - P_C(\bar{u})\|^2 \leq \langle \bar{t}, r(\bar{x}, \beta, \bar{t}) \rangle \leq 0, \quad (4.19)$$

alors on obtient

$$\|\bar{x} - P_C(\bar{u})\|^2 \leq 0,$$

Ce qui implique que

$$0 = \|\bar{x} - P_C(\bar{u})\| = \|\bar{x} - P_C(\bar{x} - \beta\bar{t})\| = \|r(\bar{x}, \beta, \bar{t})\|,$$

Donc, $\bar{x} \in \mathcal{T}$.

Utilisons le fait que la suite $\{\|x^{k_i} - \bar{x}\|\}$ converge vers zéro, alors la suite globale $\{\|x^k - \bar{x}\|\}$ converge aussi vers la même limite, donc, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - \bar{x}\| = 0$, autrement dit que $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \bar{x}$ et ceci achève la preuve.

4.3 Implémentation numérique

D'une manière sémi-laire, on termine ce chapitre par la présentation des expériences numériques effectuées en appliquant le nouvel algorithme noté par *Alg4*. L'implémentation est toujours réalisée sous Matlab et les programmes sont exécutés sur les mêmes exemples donnés au chapitre précédent. Et afin d'évaluer l'efficacité de la méthode proposée, les résultats obtenus par l'algorithme associé sont comparés à ceux obtenus par l'algorithme de **Ye** où la précision permise ne doit pas dépasser $\varepsilon = 10^{-6}$.

Exemple 4.3.1 L'application multivoque F et l'ensemble C pour cet exemple sont définis par

$$F(x) = \{(s, s + 2x_2, s + 3x_3, \dots, s + nx_n) / s \in [0, 1]\}$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n / \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\},$$

et la solution de ce (GVIP) est $(1, 0, \dots, 0, 0)$.

Pour le choix arbitraire de $t^k \in F(x^k)$ est le même considéré que dans le chapitre 3. Tandis que pour $m^k \in F(y^k)$, on va opter pour l'expression $m^k = P_{F(y^k)}(t^k)$. Puisque d'après l'étude numérique effectuée au chapitre précédent, ce choix a conduit à des résultats meilleurs que ceux obtenus par l'autre choix. On tient à signaler que cette étape de choix pour (t^k, m^k) sera également considérée pour les exemples suivants.

Pour Alg3 : $\sigma = l = 0.9$ pour tout x^0 .

n	x^0	Alg4					Alg3	
		Iter	cpu	β	σ	γ	Iter	cpu
5	$(1/n, 1/n, 1/n, 1/n, 1/n)$	43	0.3396	2.3	0.1	0.3	51	7.8204
	$(0, 0, 0, 0, 0)$	01	0.0512	2.2	0.1	0.3	49	7.6013
	$(-1, 1, -1, 1, -1)$	47	0.3858	5.9	0.9	0.41	41	6.3546
	$(-2, -2, -2, -2, -2)$	44	0.5788	2.4	0.1	0.3	42	7.9972
10	$(1/n, \dots, 1/n)$	115	1.9135	04	0.1	0.3	222	52.2295
	$(0, \dots, 0)$	01	0.0622	2.4	0.1	0.3	239	58.9988
	$(-1, 1, -1, 1, \dots)$	104	1.6558	6.5	0.9	0.3	179	41.4715
	$(-2, \dots, -2)$	116	1.9811	2.9	0.1	0.3	226	57.0424
20	$(1/n, \dots, 1/n)$	224	5.0495	8.7	0.1	0.3	715	247.9950
	$(0, \dots, 0)$	01	0.0878	2.9	0.1	0.3	769	270.4970
	$(-1, 1, -1, 1, \dots)$	231	8.3181	9.6	0.9	0.3	700	225.7738
	$(-2, \dots, -2)$	211	7.5434	9.2	0.1	0.3	764	306.6620

Tableau 1 : Exemple 4.2.1

Exemple 4.3.2 [30, 65] L'application multivoque F et l'ensemble C pour cet exemple sont définis par

$$F(x) = \{(s, s - x_1, s - x_2, \dots, s - x_{n-1}) / s \in [0, 1]\},$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n / \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\},$$

et la solution de ce (GVIP) est $(0, 0, \dots, 0, 1)$.

Pour Alg 3 : $\sigma = 0.34$ pour tout x^0 .

n	x^0	Alg4					Alg3		
		Iter	cpu	β	γ	σ	Iter	cpu	l
10	$(1/n, \dots, 1/n)$	06	0.1508	9.7	0.9	0.0001	35	1.7592	0.95
	$(1, \dots, 1)$	06	0.1280	9.7	0.9	0.0001	44	1.6183	0.95
	$(-2, \dots, -2)$	07	0.1985	9.7	0.9	0.0001	43	1.7283	0.95
50	$(1/n, \dots, 1/n)$	22	1.4691	9.7	0.999	0.01	64	12.3182	0.95
	$(1, \dots, 1)$	22	1.2609	9.7	0.999	0.01	129	14.9710	0.95
	$(-2, \dots, -2)$	32	2.2109	1.9	0.999999	0.1	127	15.1543	0.9
100	$(1/n, \dots, 1/n)$	21	3.6112	9	0.99	0.01	90	37.3068	0.95
	$(1, \dots, 1)$	22	3.5995	9.9	0.99	0.01	214	82.9337	0.95
	$(-2, \dots, -2)$	42	8.3071	1.9	0.999999	0.1	213	88.2488	0.95
200	$(1/n, \dots, 1/n)$	21	17.7812	9.75	0.99	0.01	122	226.3886	0.95
	$(1, \dots, 1)$	23	19.7980	9.1	0.99	0.01	390	687.8674	0.95
	$(-2, \dots, -2)$	42	35.6098	1.9	0.9999999	0.01	391	718.4568	0.95

Tableau 2 : Exemple 4.2.2

Exemple 4.3.3 [30, 65] Soit $C = \mathbb{R}_+^n$, et l'application multivoque est la même que dans l'exemple précédent. Alors, $(0, 0, \dots, 0)$ est la solution de ce (GVIP).

Pour Alg4 : $\gamma = 0.99999$ si $x^0 = (-2, \dots, -2)$ et $\gamma = 0,9999$ pour les autres points initiaux. De plus, $\sigma = 0,1$ pour tout point initial x^0 .

Pour Alg3 : $\sigma = 0,9$.

n	x^0	Alg4			Alg3		
		Iter	cpu	β	Iter	cpu	l
10	(1, ..., 1)	07	0.0387	02	15	0.3515	0.5
	(1/n, ..., 1/n)	02	0.0098	02	11	0.2835	0.34
	(0.9, ..., 0.9)	02	0.0075	09	15	0.4098	0.5
	(-2, ..., -2)	02	0.0067	02	17	0.3880	0.5
100	(1, ..., 1)	19	1.2903	15	96	3.7692	0.5
	(1/n, ..., 1/n)	02	0.0568	05	09	0.3640	0.34
	(0.9, ..., 0.9)	02	0.0423	09	21	0.7609	0.5
	(-2, ..., -2)	02	0.5343	02	21	5.4223	0.5
500	(1, ..., 1)	19	59.7997	15	101	26.0059	0.5
	(1/n, ..., 1/n)	02	1.0008	02	07	3.8209	0.34
	(0.9, ..., 0.9)	02	1.0599	09	21	11.0590	0.5
	(-2, ..., -2)	02	16.6848	02	21	10.2255	0.5
1000	(1, ..., 1)	19	399.7473	15	101	324.3389	0.5
	(1/n, ..., 1/n)	01	2.9432	5.2	07	24.3017	0.34
	(0.9, ..., 0.9)	02	6.8824	9	21	69.6499	0.5
	(-2, ..., -2)	02	111.5210	02	21	71.7927	0.5
2000	(1, ..., 1)	20	2839.82	15	95	2056.99	0.5
	(1/n, ..., 1/n)	01	20.4036	02	06	139.3987	0.34
	(0.9, ..., 0.9)	02	46.8763	09	21	484.3285	0.5
	(-2, ..., -2)	02	755.1661	15	21	489.8369	0.5

Tableau 3 : Exemple 4.2.3

4.4 Commentaires généraux

Certainement, la méthode de projection proposée dans ce chapitre pour la résolution de (GVIP) possède de bonnes propriétés théoriques et une efficacité algorithmique

signifiante. Toutes ces propriétés ont été confirmées par les tests numériques effectués où les résultats obtenus en appliquant cet algorithme étaient généralement nettement meilleurs en comparaison avec ceux obtenus par l'algorithme de **Ye**. En effet, la procédure de recherche linéaire associée à cet algorithme nécessitant moins de projections à effectuer a conduit à une réduction significative en coût de calcul, notamment en termes de nombre d'itérations. De plus, la suite générée par le nouvel algorithme est contenue dans $C \cap D_k$, cette propriété nous a permis d'avoir des itérés plus proches de l'ensemble des solutions, autrement dit, une convergence plus accélérée. Mais, il faut signaler que lorsque on augmente n la dimension des exemples testés, notre algorithme enregistre un nombre d'itérations très petit mais le temps de calcul est un peu élevé par rapport à l'algorithme de **Ye** qui enregistre un nombre d'itérations relativement assez grand avec un temps de calcul très raisonnable. Cela peut être justifié par ; si lors de l'exécution du programme, il existe des itérations faisant recours à la deuxième formule pour déterminer l'itéré x^{k+1} , alors on doit effectuer une projection sur l'ensemble $C \cap D_k$, autrement dit, résoudre un sous-problème soumis aux contraintes $C \cap D_k$, ce qui entraîne un coût calculatoire supplémentaire. Tandis que pour l'algorithme de **Ye**, l'itéré x^{k+1} est toujours calculé par une formule explicite très simple.

★ Cette partie est soumise à journal international qui donnera aussi lieu une publication éventuelle très prochainement.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse, nous sommes intéressés à la résolution du problème d'inéquations variationnelles généralisé (*GVIP*) par deux méthodes de projection.

Dans un premier lieu, nous avons introduit une extension théorique et algorithmique de la méthode de **Grar** et **Benterki** proposée auparavant pour résoudre le problème d'inéquations variationnelles classique (*VIP*). Les résultats de convergence globale ont été établis d'une manière claire et détaillée. D'autre part, une mise en œuvre de l'algorithme correspondant a montré la haute performance de la méthode adaptée pour cette classe de problèmes.

De même et de notre part, on a participé aux progrès fournis dans le développement des algorithmes spécifiques proprement dits pour la résolution du problème en question. Dans ce sens, on a pu proposer une nouvelle version des méthodes de projection pour (*GVIP*) en combinant les qualités de la méthode de **Grar** et **Benterki** et celle de **Ye** pour avoir une convergence plus accélérée et moins coûteuse. De propres contributions ont été apportées à l'algorithme associé notamment au niveau de la procédure de recherche linéaire et la détermination de l'itéré suivant. De plus sur le plan théorique, on a introduit de nouveaux résultats pour la démonstration de la convergence de l'algorithme. Afin d'évaluer le comportement de cette méthode, une étude numérique comparative a été effectuée montrant son efficacité par rapport à la méthode de **Ye**, notamment dans la réduction considérable du nombre d'itérations.

A travers cette étude théorique et numérique de deux nouvelles méthodes de pro-

jection proposées et en comparaison avec la méthode de **Ye**, on remarque que les trois méthodes convergent presque sous les mêmes hypothèses exigées pour l'application multivoque et l'ensemble des contraintes associées. Mais selon la performance numérique, on peut constater clairement la supériorité de la méthode de **Grar** et **Benterki** par rapport aux autres, la raison qui la place en tête des méthodes présentées dans ce travail et confirme également qu'elle a conservé son efficacité pour ce type de problèmes. La méthode combinée qui vient en deuxième position, a prouvé aussi sa performance, mais cela n'empêche pas qu'elle peut être améliorée d'avantage. Ce pendant pour la méthode de **Ye** qui est classée la dernière, malgré ça, elle possède une propriété algorithmique très importante dont il faut profiter. Cette propriété consiste dans sa suite générée qui converge vers une solution de (*GVIP*) sans avoir besoin d'être incluse dans l'ensemble des contraintes, ce qui réduit les calculs d'une manière considérable, en particulier pour les grandes dimensions.

Les perspectives que nous espérons aborder dans le futur sont résumées dans les points suivants :

1. Proposer d'autres combinaisons ou hybridations entre les méthodes de projection connues par leur efficacité soit pour (*VIP*) ou pour (*GVIP*) pour développer de nouveaux algorithmes plus performants et qui convergent sous des hypothèses allégées d'avantage pour la résolution du problème étudié.
2. Proposer de nouvelles procédures de recherche linéaire plus appropriées au sens où ces procédures ne nécessitent aucune projection à effectuer et qui peuvent bien fonctionner avec l'expression de l'itéré x^{k+1} donnée par **Ye**, dans le but de développer des algorithmes réalisant le nombre d'itérations et le temps de calcul les plus moins possibles.
3. Effectuer des études théoriques et numériques comparatives entre ces méthodes de projection et d'autres méthodes conçues spécialement pour (*GVIP*).
4. Faire une extension des méthodes présentées dans cette thèse pour la résolution du problème des équations généralisées, et de même pour le problème d'équilibre généralisé.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. Allevi, A. Gnudi, I.V. Konnov, The proximal point method for nonmonotone variational inequalities, *Mathematical Methods of Operations Research*, 63 no. 3, (2006), 553–565.
- [2] L. Q. Anh, P. Q. Khanh, D. N. Quy, About semicontinuity of setvalued maps and stability of quasivariational inclusions, *Set-Valued maps and stability of quasivariational inclusions*, *Set-Valued Var*, 22 no. 3, (2014), 533-555.
- [3] J.P. Aubin, I. Ekeland, *Applied nonlinear analysis*, Wiley, New York, (1984).
- [4] J.P. Aubin, H. Frankowska, *Set-valued analysis*, volume 2 of *Systems and Control : Foundations and Applications*, Birkhäuser Boston Inc, Boston, MA, (1990).
- [5] A. Auslender, *Optimisation, Méthodes numériques*, Masson - Paris, (1976).
- [6] A. Auslender, M. Teboulle, Lagrangian duality and related multiplier methods for variational inequality problems, *SIAM Journal on Optimization*, 10 no. 4, (2000), 1097–1115.
- [7] D. Aussel, J. Dutta and T. Pandit, *About the Links Between Equilibrium Problems and Variational Inequalities*, Chapter 6, Springer Nature Singapore Pte Ltd, (2018).
- [8] T.Q. Bao, P.Q. Khanh, A projection-type algorithm for pseudomonotone nonlip-schitzian multivalued variational inequalities, in *Generalized Convexity, Generalized Monotonicity and Applications*, 77 of *Nonconvex Optimization and Its Applications*, Springer, New York, NY, USA, (2005), 113–129.

- [9] O. Belguidoum, H. Grar, An improved projection algorithm for variational inequality problem with multivalued mapping, *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 13, no. 2, (2023), 210-223.
- [10] C. Berge, *Espaces Topologiques, Fonctions Multivoques*, Dunod, Paris, (1982).
- [11] E. Blum, W. Oettli, From optimization and variational inequalities to equilibrium problem, *Math. Stud*, 63, (1994), 123- 145.
- [12] R.E. Bruck, An iterative solution of a variational inequality for certain monotone operator in a Hilbert space, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 81, (1975), 890–892, (Corrigendum) 82, (1976), 353.
- [13] L.C. Ceng, G. Mastroeni, J.C. Yao, An inexact proximal-type method for the generalized variational inequality in Banach spaces, *Journal of Inequalities and Applications*, Article ID 78124, (2007), 14 pages.
- [14] Y. Censor, A. N. Iusem, S. A. Zenios, An interior point method with Bregman functions for variational inequality problem with paramonotone operators, *Mathematical Programming*, 81, (1998), 373-400.
- [15] S. Dafermos, Traffic equilibria and variational inequalities, *Transportation Sci*, 14, (1980), 42-54.
- [16] A. Daniilidis, J. C. H. Pang, Continuity and differentiability of set-valued maps revisited in the light of tame geometry, *J. Lond. Math. Soc*, no. 2, 83, no. 3, (2011), 637-658.
- [17] A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar, *Implicit functions and solution mappings*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Dordrecht, (2009). A view from variational analysis.
- [18] S.C. Fang, E.L. Peterson, Generalized variational inequalities, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 38, no. 3, (1982), 363–383.
- [19] C.J. Fang, Y. He, A double projection algorithm for multi-valued variational inequalities and a unified framework of the method, *Applied Mathematics and Computation*, 217, (2011), 9543–9551.

- [20] C.J. Fang, S. Chen, Subgradient extragradient algorithm for solving multi-valued variational inequality, *Appl Math Comput.* (2014), 229(3–4),123–130.
- [21] M. Fortin, R. Glowinski, *Méthodes de lagrangien augmenté, Application à la résolution de problèmes aux limites*, Dunod 9, Paris, (1982).
- [22] M. Fukushima, Equivalent differentiable optimization problems and descent methods for asymmetric variational inequality problems, *Mathematical Programming*, 53, (1992), 99-110.
- [23] M. Fukushima, The primal Douglas-Rachford splitting algorithm for a class of monotone mappings with application to the traffic equilibrium problem, *Mathematical Programming*, 72 no. 1, (1996), 1–15.
- [24] H. Grar, D. Benterki, New effective projection method for variational inequalities problem, *RAIRO Operations Research*, 49, (2015), 805-820.
- [25] A. H. Hamel, F. Heyde and B. Rudloff, Set-valued risk measures for conical market models, *Math. Financ. Econ*, 5 (1) (2011), 1-28.
- [26] D. Han, Two New Self-Adaptive projection methods for variational inequality problems, *computers and mathematics with applications*, 43, (2002), 1529-1537.
- [27] D. Han, A proximal decomposition for variational inequality problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, (2003), 231-244.
- [28] D. Han, A new class of projection and contraction methods for solving variational inequality problems, *Computers and Mathematics with Applications*, 51, (2006), 937-950.
- [29] P. Hartman, G. Stampacchia, On some nonlinear elliptic differential functional equations, *Acta Math*, 115, (1966), 271-310.
- [30] Y. He, A new double projection algorithm for variational inequalities, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 185, (2006), 166-173.
- [31] M.R. Hestenes, E Stiefel, Methods of conjugate gradients for solving linear systems, *J. Res. Nat, Bur. Standards*, 49, (1952), 409-436.
- [32] A.N. Iusem, B.F. Svaiter, A variant of Korpolevich’s method for variational inequalities with a new search strategy, *Optimization*, 42, (1997), 309–321.

- [33] A.N. Iusem, L.R.L. Perez, An extragradient-type algorithm for non-smooth variational inequalities, *Optimization*, 48, (2000), 309–332.
- [34] A.N. Iusem, An iterative algorithm for variational inequalities problem, *Computational and Applied Mathematics*, 13, (1994), 103–114.
- [35] S. Karamardian, An existence theorem for the complementarity problem, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 18, no. 4, (1976), 445-454.
- [36] A. A. Khan, C. Tammer, C. Z Linescu, Set-valued optimization, *Vector Optimization*. Springer, Heidelberg, An introduction with applications, (2015).
- [37] I.V. Konnov, On the rate of convergence of combined relaxation methods, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 12, (1993), 89–92.
- [38] I.V. Konnov, A combined relaxation method for variational inequalities with non-linear constraints. *Math Program.*,80, no. 2, (1998), 239–252.
- [39] I.V. Konnov, *Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 495 Springer, Berlin, Germany, (2001).
- [40] I.V. Konnov, Combined relaxation methods for generalized monotone variational inequalities, in : eneralized convexity and related topics, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 583 Springer, Berlin, Germany, (2007), 3–31 .
- [41] G.M. Korpolevich, The extragradient method for finding saddle points and other problems, *Matecon*, 12, (1976), 747–756.
- [42] H. Lacheheb, Application multivoque et stabilité d’une solution optimal, mémoire de master, *Analyse mathématique et applications*, Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi, BBA, (2020).
- [43] F. Li, Y. He, An algorithm for generalized variational inequality with pseudomonotone mapping, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 228, (2009), 212–218.
- [44] B. Luderer, L. Minchenkoand, T. Satsura, *Multivalued and Nonlinear Programming Problems with Perturbations*, Springer Science, (2002).

- [45] M. Meddahi, Régularité métrique des multifonctions et résolution d'inéquations variationnelles, thèse de doctorat, analyse non linéaire et optimisation, Université Ahmed Ben Bella, Oran1 (2019/2020).
- [46] M. Merouani, Stabilité Différentielle dans un Problème d'Optimisation Paramétré, Mémoire de Magister en Mathématiques, Université d'Oran, (2011).
- [47] G. Minty, Monotone (non-linear) operators in Hilbert spaces, *Duke Mathematics Journal*, 29, (1962), 3pp. 41-346.
- [48] S. B. Nadler, Multivalued contraction mappings, *Pacific J. Maths.*, 30 (1969), 475-488.
- [49] Z. Opial, Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings, *Bull. Am. Math. Soc*, 73, (1967), 591-597.
- [50] C. H. J. Pang. Generalized direntiation with positively homogeneous maps, Applications in set-valued analysis and metric regularity. *Math. Oper. Res.*,36, no. 3, (2011), 377-397.
- [51] B. Panucucci, M. Pappalardo, M. Passacantando. Descent methods for a class of generalized variational inequalities, *Comput Optim Appl*. 45, (2010), 415–425.
- [52] J.P. Penot, P.H. Quang, Generalized convexity of functions and generalized monotonicity of set-valued maps, *J. Optimiz Theory App*, 92, (1997), 343-356.
- [53] B.T. Polyak, Introduction to Optimization, Optimization Software Incorporation, Publications Division, New York, USA, (1987).
- [54] R.T. Rockafellar, Monotone operators and the proximal point algorithm, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 14, no. 5, (1976), 877–898.
- [55] R. T. Rockafellar, R. J. B. Wets. Variational analysis, volume 317 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Fundamental Principles of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, (1998).
- [56] M.V. Solodov, P. Tseng, Modified projection-type methods for monotone variational inequalities, *SIAM Journal of Control and Optimization*, 34, (1996), 1814-1830.
- [57] M.V. Solodov, B.F. Svaiter, A new projection method for variational inequality problems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 37, (1999), 765–776.

- [58] M. J. Smith, The existence, uniqueness and stability of traffic equilibria, *Transpn. Res*, 13B, (1979), 295-304.
- [59] G. Stampacchia, A. Ghizzetti (Ed.), *Variational Inequalities, Theory and Applications of Monotone Operators*, Edizioni Oderisi, Gubbio, Italy, (1969), 101–192.
- [60] Y.J. Wang, N. Xiu, C.Y. Wang, Unified framework of extragradient-type method for pseudomonotone variational inequalities, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 111, (2001), 641–656.
- [61] F.Q. Xia, N.J. Huang . A projection-proximal point algorithm for solving generalized variational inequalities. *J Optim Theory Appl*, 62, (2011), 4596–4604.
- [62] J.C. Yao, J.S. Guo, Variational and generalized variational inequalities with discontinuous mappings, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 182, (1994), 371–392.
- [63] J.C. Yao, Multi-valued variational inequalities with K-pseudomonotone operators, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 83, (1994), 391–403.
- [64] M. Ye, A cutting hyperplane projection method for solving generalized quasi-variational inequalities. *J Oper Res, Soc China*, 4, no. 4, (2016), 483–501.
- [65] M. Ye, An improved projection method for solving generalized variational inequality problems, *Optimization, Journal of Mathematical Programming and Operations Research*, 67, (2018), 1523–1533.
- [66] ML.Ye, A cutting hyperplane projection method for solving generalized quasi-variational inequalities. *J Oper Res Soc China*, 4, (2016), 483–501.
- [67] J. Yu, Existence of solutions for generalized variational inequality problem, *Nonlinear Analysis*, 71, (2009), 2327-2330.
- [68] L. Zhang, W. Zhou, D. H. Li, Global convergence of a modified Fletcher-Reeves conjugate gradient method with Armijo-type line search, *Numerische Mathematik*, 104, (2006), 561-572.
- [69] M. Zhu, G. Tang, A projection-type method for generalized variational inequalities with dual solutions, *Journal Nonlinear Sciences and Applications*, 10, (2017), 4812-4821.

المخلص :

الهدف من هذه الأطروحة هو حل مسألة المتراجحات التغيرية المعممة (GVIP) بطريقتين من نوع الإسقاط. نهتم في الجزء الأول بتمديد الدراسة النظرية والخوارزمية لطريقة *Grar* و *Benterki* المقترحة لحل مسألة المتراجحات التغيرية الكلاسيكية (VIP) أين برهنا نتائج التقارب بطريقة واضحة. وفي الجزء الثاني لهذه الأطروحة قمنا باقتراح طريقة جديدة من نوع الإسقاط لحل (GVIP) وذلك بإدماج الخاصيات الإيجابية لطريقة *Grar* و *Benterki* وطريقة أخرى تم اقتراحها من طرف *Ye*. عدة مساهمات نظرية وخوارزمية تم إدخالها على الخوارزمية الجديدة وبرهنة تقاربها. من أجل تقييم الطريقتين الجديتين، دراسة عددية تم إجرائها في إطار مقارنة جد معتبرة في جزئي الأطروحة أين لوحظ فعالية هاتين الطريقتين لهذا النوع من المسائل الصعبة وخاصة طريقة *Grar* و *Benterki*.

الكلمات المفتاحية : مسألة المتراجحات التغيرية، مسألة المتراجحات التغيرية المعممة، التطبيقات متعددة القيم، طرق الإسقاط.

Abstrac :

The objective of this thesis is the resolution of the generalized variational inequality problem (GVIP) by two projection methods. We are interested in the first part in the theoretical and algorithmic extension of the method of *Grar* and *Benterki* designed to solve the classical variational inequalities problem (VIP). Global convergence results have been well established. In the second part of this study, we proposed a new version of the projection methods for (GVIP) by combining the qualities of *Grar* and *benterki* method and another method which was introduced by *Ye*. Own theoretical and algorithmic contributions have been made on the associated algorithm and the demonstration of its convergence. In order to evaluate the performance of these two new methods, an implementation was carried out in a significant comparative framework in both parts clearly showing their superiority for this class of delicate problems, especially *Grar* and *Benterki* method.

Keywords: Variational inequalities problem, Generalized variational inequality problem, Multivalued mapping, Projection methods.

Résumé :

L'objectif de cette thèse est la résolution du problème d'inéquations variationnelles généralisé (GVIP) par deux méthodes de projection. On s'intéresse dans la première partie à l'extension théorique et algorithmique de la méthode de *Grar* et *Benterki* conçue pour résoudre le problème d'inéquations variationnelles classique (VIP). Les résultats de convergence globale ont été bien établis. Dans la seconde partie de cette étude, on a proposé une nouvelle version des méthodes de projection pour (GVIP) en combinant les qualités de la méthode de *Grar* et *Benterki* et une autre méthode introduite par *Ye*. De propres contributions théoriques et algorithmiques ont été apportées sur l'algorithme associé et la démonstration de sa convergence. Afin d'évaluer la performance de ces deux nouvelles méthodes, une mise en œuvre a été effectuée dans un cadre comparatif signifiant dans les deux parties montrant clairement leur supériorité pour cette classe de problèmes délicats, tout particulièrement la méthode *Grar* et *Benterki*.

Mots-Clés : Problème d'inéquations variationnelles, Problème d'inéquations variationnelles généralisé, Applications multivoques, Méthodes de projection.