REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE SETIF

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre : Série :

THESE

présentée pour obtenir le diplôme de

Doctorat LMD

Spécialité : Physique

Option : Physique Théorique

par

AMAOUCHE Nadjat

THEME

Mécanique quantique non-hermitienne : Applications :

i) états Cohérents de l'oscillateur inversé ii) systèmes SU (1,1) et SU (2) non-hermitiens dépendants du temps.

Soutenue le : 02/12/2023

Devant le Jury :

Président :	Bekkar Hacene	Pr	UFA.Setif 1
Rapporteur :	Maamache Mustapha	Pr	UFA.Setif 1
Examinateurs :	Cherbal Omar	Pr	USTHB
	Menouar Salah	Pr	UFA.Setif 1
	Bouguerra Yacine	MCA	UFA.Setif 1
	Lakehal Halim	MCA	UFA.Setif 1

DEDICACES

À Mes parents : Laala et Aouicha.

À mes sœurs : Fazia, Djohra, Sabrina Tasaàdit et Kafia.

À mes frères : Saoudi, Abd El halim, Faouzi et Younes.

À Tous mes amis et les personnes qui m'aiment.

Remerciements

Ramanujan disait " Une équation pour moi n'a aucune signification, à moins qu'elle ne représente une pensée de Dieu" ainsi mes premiers remerciements sont pour Allah.

Tout d'abord, je tiens à adresser ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse émérite, ***Mr. Maamache Mustapha****, professeur à l'université de Sétif. Votre expertise pointue, votre engagement sans faille et votre dévouement indéfectible ont été essentiels à la réussite de ce projet de recherche. Votre guidance éclairée, vos conseils avisés et votre soutien constant ont été pour moi une source inépuisable d'inspiration et de motivation. Je suis reconnaissante d'avoir eu la chance de travailler sous votre direction et d'avoir pu bénéficier de votre immense savoir.*

J'aimerais exprimer ma gratitude sincère envers les membres du jury qui ont accepté de juger ma thèse. Je vous suis reconnaissante d'avoir accepté cette responsabilité et d'avoir consacré votre temps précieux à l'évaluation de mon travail :

Monsieur **Bekkar Hacene** *professeur à l'université de Sétif, ait généreusement accepté d'assumer la prestigieuse fonction de président du jury.*

Messieurs : **Cherbal Omar** *professeur à l'USTHB,* **Menouar Salah** *professeur à UFAS1***,** **Bouguerra Yacine** *et* **Lakehal Halim** *des membres du MCA à UFAS1***,** *du grand honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être membres de jury.*

Je souhaite également adresser mes remerciements à tous mes collègues Dr. Zerimeche Rahma, Dr. Mana Naima , Dr. Koussa Walid, Rostom Moufok, Ishak Bouguerche, Maroua Sekhri, Nour El houda Absi et Hayet Lahreche durant mes années de doctorat. Votre présence, vos discussions stimulantes et votre esprit de camaraderie ont été d'une importance capitale dans ma formation académique. Les échanges scientifiques et les partages d'expérience que nous avons eus ont contribué à élargir mes horizons et à nourrir ma réflexion. Je vous suis reconnaissant pour vos conseils, votre soutien mutuel et les moments précieux de convivialité que nous avons partagés.

Je tiens à exprimer ma gratitude sincère envers tous les enseignants qui, par leur enseignement, leur soutien et leur assistance, ont contribué à ma formation tout au long de mon parcours académique, depuis l'école primaire jusqu'à l'université.

Table des matières

Introduction

La mécanique quantique est l'une des théories physique complexe bien étrange aujourd'hui, Elle décrit les phénomènes physique au niveau atomique et aux échelles inférieures. Dans ce monde minuscule, les choses se déroulent bien différemment qu'en physique classique. Au lieu d'une seule réalité physiques ainsi qu'on l'observe au quotidien. La mécanique quantique s'articule autour d'un monde de probabilité, où son amplitude caractérise les procesus physique possible dans ce domaine. Cette amplitude peut se propager sous forme d'une onde qui décrit l'évolution d'un système quantique.

Généralement, un système quantique est modélisé par une fonction d'onde qui décrit son état quantique dans une base de dimension infinie des positions. En effet, cet état quantique est représenté par des vecteurs $|\psi\rangle$ appartiennent à un espace vectoriel de Hilbert $\mathcal{H}$ ayant un produit scalaire positif. Alors que la dynamique d'un système en mécanique quantique, est décrit par un opérateur appelé Hamiltonien H qui régit l'évolution au cours du temps de ce système à travers l'équation de Schrödinger. Les solutions de cette dernière équation pourraient être exactes ou aproximatives, tout dépend de la méthode considéré. L'oscillateur Harmonique usuel H^{os} est un exemple parfait pour étudier des systèmes physiques notament en mécanique quantique et donne naissance à des applications importantes en physique. L'exemple de l'oscillateur inversé H^{r} a attiré beaucoup d'attention dans la littérature [1–4], car ce sytsème est applicable dans différentes branches en physique [5–13] notamment, en cosmologie, l'effet tunnel. Il possède un potentiel répulsif qui agit sur le mouvement de la particle souvent rencontré en tant que modèle phénoménologique dans les processus dissipatifs et a été utilisé, entre autres, comme modèle d'instabilité en mécanique quantique [14–18, 28]. Ce type d'oscillateur est l'un des problèmes physique complétement résoluble soit en mécanique quantique ou classique , tout comme l'oscillateur harmonique. En effet, l'oscillateur inversé s'obtient à partir de l'oscillateur harmonique usuel en faisant le changement de fréquance [1] : $\omega \to \pm i\ \omega$. Il est important de savoir que ces deux oscillateurs (usuel et inversé) révèlent différentes caractéristiques. Autrement dit, l'oscillateur inversé engendre un paquet d'onde qui n'oscille pas au cours du temps, ses solutions classiques divergent exponentiellement dans l'espace des phases, son spectre d'énergie est continu et ne possède pas d'énergie du point zéro, ses états propres ne sont pas de carrés sommable. La question qui se pose ici comment on peut avoir une solution physique pour ce problème d'énergie imaginaire pure ?

D'après les postulats de la mécanique quantique, un opérateur est défini Hermitique dans un espace de Hilbert, alors ses valeurs propres sont réelles et leurs fonctions propres sont orthogonales. Une autre branche importante est la mécanique quantique dite non-Hermitienne. il a été découvert que le critère pour qu'un Hamiltonien non-Hermitien ait un spectre réel est qu'il possède une symétrie $\mathcal{PT}$ ($\mathcal{P}$ c'est l'opérateurs parité et $\mathcal{T}$ opérateur de reversement du temps) [29, 30]. Le concept de la $\mathcal{PT}$-symétrie est trés utilisé dans plusieurs domaines en physique [31, 39]. Un système décrivant un oscillateur $\mathcal{PT}$-symétrique peut être transformé en un système anti-$\mathcal{PT}$-symétrique par la transformation $H^{\text{os}} \rightarrow (\pm i H^{\text{os}})$ [40, 43], c'est à dire que ses valeurs propres sont imaginaire [44]. Une autre approche alternative explorant la strucure de base d'un Hamiltonien non-Hermitien. C'est le concept de La pseudo Hermiticité [45–49], qui fait associé un Hamiltonien non-Hermitien à un Hamiltonien Hermitien. Notre intérêt consisteà la recherche des états cohérents d'un oscillateur inversé qui pourraient convenir à envisager la correspondance quantique-classique.

En revanche, de nombreux systèmes concrets ne peuvent pas être décrits par des Hamiltoniens stationnaires H mais nécessitent une dépendance explicite du temps $H(t)$. Parmi les méthodes les plus puissantes pour résoudre de tels systèmes quantiques la théorie des invariants de Lewis Riesenfeld (LR) [50] est plus appropriée car elle permet de donner la solution exacte de l'équation de Schrödinger. Ce qui nous a motivé à exploiter cette théorie pour étudier les systèmes quantique non-Hermitien dépendants du temps en utilisant la notion des invariants pseudo-Hermitien [51, 52], où la réalité des valeurs propres sont garanties.

L'objectif primordial de ce travail est de chercher d'une part des fonctions propres normées d'un oscillateur harmonique inversé à partir des états propres d'oscillateur harmonique usuels, en utilisant le concept de la pseudo-Hermiticité et d'autre part introduire de nouveaux opérateurs de création et annihilation propre à cet oscillateurs pour construire ses états cohérents. Ensuite on résout un système décrit par un Hamiltonien non-Hermitien dépendant explicitement du temps obéissant à l'algèbre de Lie $SU(1,1)$ et $SU(2)$ [54] et enfin calculer dans ces cas la phase géométrique de Berry [55].

Cette thèse est structurée comme suit : le premier chapitre est un rappel sur les notions de base de la $\mathcal{PT}$-symétrie, la pseudo-Hermiticité et les états cohérents. Le second est consacré, en jumelant les notions développées dans le premier chapitre, à l'étude de l'oscillateur inversé H^{r}. Dans le troisième chapitre, nous discutons la notion des pseudo-invariants dans le cas non-Hermitien. Dans le quatrième chapitre nous appliquons les pseudo-invariants pour résoudre un système dépendant du temps non-Hermitique obeissant à l'algèbre de Lie $SU(1,1)$ et $SU(2)$. Une conclusion clôture cette thèse.

Chapitre 1

$\mathcal{PT}$-symétrie, Quasi-Hermiticité et États Cohérents : Concept et Propriétés

En Théorie quantique moderne, on sait que l'évolution au cours du temps d'un système quantique est régie par l'opérateur Hamiltonien H à travers l'équation de Schrödinger. En 1998, Bender et Boettcher [29] ont montré qu'il existe des Hamiltoniens non-hermitiens possèdant des spectres réels. La réalité de ces spectres est dûe à la symétrie de réflexion d'espace-temps ($\mathcal{PT}-$symétrie) [29,30]. Ce concept a été généralisé à la notion de la pseudo-Hermiticité [46–49].

Nous présentons, dans ce chapitre, les fondements de base concernant la théorie de la $\mathcal{PT}$-symétrie introduite par Bender et al [29, 30, 53, 56–58], puis nous rappelons la notion de la pseudo-hermiticité [46–49] et nous terminons par les états cohérents [59, 60].

1.1 Mécanique quantique $\mathcal{PT}$-symétrique

On dit qu'un Hamiltonien H est à symétrie $\mathcal{PT}$ s'il est invariant sous l'action simultanée de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{T}$

$$[H, \mathcal{PT}] = 0. \tag{1.1}$$

Opérateur parité $\mathcal{P}$

- $\mathcal{P}$ est l'opérateur de réflexion d'espace :

$$\mathcal{P}\left|\overrightarrow{x}\right\rangle = \left|-\overrightarrow{x}\right\rangle, \tag{1.2}$$

où $\overrightarrow{x}$ est le vecteur position

- L'action de $\mathcal{P}^2$ sur $\left|\overrightarrow{x}\right\rangle$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^2\left|\overrightarrow{x}\right\rangle &= \mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left|\overrightarrow{x}\right\rangle\right) = \mathcal{P}\left|-\overrightarrow{x}\right\rangle \\ &= \left|\overrightarrow{x}\right\rangle, \end{aligned}$$

permet de déduire que l'opérateur $\mathcal{P}^2$ est un opérateur identité

$$\mathcal{P}^2 = 1 \tag{1.3}$$

- Comme

$$\mathcal{P}\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{P} = 1, \tag{1.4}$$

il s'ensuit que

$$\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}. \tag{1.5}$$

- $\mathcal{P}$ est un opérateur linéaire :

$$\mathcal{P}\left(a_1\left|\psi_1\right\rangle + a_2\left|\psi_2\right\rangle\right) = a_1\mathcal{P}\left|\psi_1\right\rangle + a_2\mathcal{P}\left|\psi_2\right\rangle, \quad a_1 \ et\ a_2 \in \mathbb{C}. \tag{1.6}$$

- L'opérateur parité $\mathcal{P}$ agit sur les opérateurs position x et impulsion p comme suit :

$$\mathcal{P} : x \to -x,\ p \to -p,\ i \to i. \tag{1.7}$$

tel que i est le nombre complexe.

Opérateur de renversement du temps

- L'opérateur de renversement du temps $\mathcal{T}$ est un opérateur anti-unitaire qui peut être décomposé en un produit d'un opérateur unitaire $\mathcal{U}$ et d'un opérateur de conjugaison complexe antilinéaire $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{T} = \mathcal{U}\mathcal{K}, \tag{1.8}$$

tel que :

$$\mathcal{T}\left(a_1\left|\psi_1\right\rangle + a_2\left|\psi_2\right\rangle\right) = a_1^*\mathcal{T}\left|\psi_1\right\rangle + a_2^*\mathcal{T}\left|\psi_2\right\rangle, a_1 \ et \ a_2 \in \mathbb{C}. \quad (1.9)$$

L'action de l'opérateur $\mathcal{T}$ sur un état $|\psi\rangle$ s'écrit :

$$\mathcal{T}\left|\psi\right\rangle = \mathcal{UK}\left|\psi\right\rangle = \mathcal{U}\left|\psi\right\rangle^*, \quad (1.10)$$

et son action sur un opérateur A s'écrit

$$\mathcal{T}\ A = \mathcal{UK}A = \mathcal{U}A^* \quad (1.11)$$

• La double action de l'opérateur $\mathcal{T}$ sur un état $|\psi\rangle$ laisse ce dernier inchangé à une phase près :

$$\mathcal{T}^{\ 2}\left|\psi\right\rangle = \pm 1\left|\psi\right\rangle, \quad (1.12)$$

où

$$\mathcal{T}^{\ 2} = \pm 1, \quad (1.13)$$

il y'en a deux cas :

• $\mathcal{T}^{\ 2} = +1$: c'est le cas de la symétrie de renversement du temps **paire,** qui correspond au spin entier (cas bosonique).

• $\mathcal{T}^{\ 2} = -1$:c'est le cas de la symétrie de renversement du temps **impaire**, qui correspond au spin demi-entier (cas fermionique)[1] .

• L'opérateur de renversement du temps $\mathcal{T}$ agit sur les opérateurs position x, impulsion p et sur i comme suit :

$$\mathcal{T}x\mathcal{T} = x,\ \mathcal{T}p\mathcal{T} = -p,\ \mathcal{T}i\mathcal{T} = -i, \quad (1.14)$$

Opérateur $\mathcal{PT}$

• Ainsi l'action de opérateur $\mathcal{PT}$ sur les opérateurs x, p et sur i est donné par

$$\mathcal{PT}\ :\ x \to -x,\quad p \to p,\quad i \to -i. \quad (1.15)$$

[1]Pour un ensemble de particule on'a $\mathcal{T}^2 = (-1)^{2s}$:

si s est entier, donc $\mathcal{T}^2 = 1$ cas bosonique.

si s est demi entier, donc $\mathcal{T}^2 = -1$ cas fermionique.

- Les opérateurs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ commutent,

$$[\mathcal{P}, \mathcal{T}] = 0. \tag{1.16}$$

- L'action de l'opérateur $\mathcal{PT}$ sur une fonction d'onde $\psi_n(x)$ s'écrit

$$\mathcal{PT}\ \psi_n(x) = [\psi_n(-x)]^*. \tag{1.17}$$

Spectre des Hamiltoniens $\mathcal{PT}$ -symétriques

Le spectre des Hamiltoniens non-hermitiens mais $\mathcal{PT}$-symétrique est réel ou bien constitué de paires d'énergies complexes conjuguées l'une de l'autre.

• Si les états propres de l'Hamiltonien $\mathcal{PT}$ -symétrique H sont états propres de l'opérateur $\mathcal{PT}$, on dit que la symétrie $\mathcal{PT}$ est non-brisée (unbroken $\mathcal{PT}$ -symmetry) :

$$H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle \tag{1.18}$$

$$[H, \mathcal{PT}] = 0, \quad \mathcal{PT}\ |\psi_n\rangle = \lambda_n\ |\psi_n\rangle, \tag{1.19}$$

et comme

$$(\mathcal{PT})^2 = 1 \tag{1.20}$$

alors

$$|\lambda_n|^2 = 1 \tag{1.21}$$

et sachant que H est $\mathcal{PT}$-symétrique, on peut écrire :

$$\begin{aligned} H|\psi_n\rangle &= \mathcal{PT}H\mathcal{PT}|\psi_n\rangle = |\lambda_n|^2 E_n^*|\psi_n\rangle & (1.22)\\ &= E_n|\psi_n\rangle, & (1.23)\end{aligned}$$

D'où, on montre que le spectre de H est réel :

$$E_n^* = E_n \tag{1.24}$$

• Si les états propres de l'Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique ne sont pas états propres de l'opérateur $\mathcal{PT}$, la $\mathcal{PT}$-symétrie de H est dite brisée "broken $\mathcal{PT}$-symmetry".

$$[H, \mathcal{PT}] = 0, \quad \mathcal{PT}\ |\psi_n\rangle \neq \lambda_n\ |\psi_n\rangle. \tag{1.25}$$

• Dans le cas où le spectre d'énergie d'un Hamiltonien $\mathcal{PT}$ -symétrique est constitué d'une partie réelle et de paires complexes conjuguées, la $\mathcal{PT}$ -symétrie est partiellement brisée ; par contre, si tout le spectre d'énergie est complexe, alors, la $\mathcal{PT}$-symétrie est totalement brisée.

Le $\mathcal{PT}$-produit scalaire

Dans le cadre de la mécanique quantique non-hermitienne $\mathcal{PT}$-symétrique, Bender et al [29, 30, 53, 56–58] ont introduits le $\mathcal{PT}$-produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle\psi_m\,|\psi_n\rangle_{\mathcal{PT}} &= \int dx\,[\mathcal{PT}\ \psi_m(x)]\,\psi_n(x) = \int dx\,[\psi_m(-x)]^*\,\psi_n(x) \\ &= (-1)^n\,\delta_{mn}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Cette définition du produit scalaire montre que la norme égale à $(-1)^n$ n'est pas nécessairement positive ce qui a incité Bender et al [29, 30] à redéfinir le $\mathcal{CPT}$-produit scalaire qui donne une norme positive.

Le $\mathcal{CPT}$-produit scalaire

Dans le but de définir un produit scalaire avec une norme positive Bender et al [29, 30, 53] ont introduit un nouvel opérateur linéaire $\mathcal{C}$ de conjugaison de charge.

En effet :

• L'action de cet opérateur sur un ket $|\psi\rangle$ est :

$$\mathcal{C}\,|\psi\rangle = s_i\,|\psi\rangle\,, \tag{1.27}$$

où $s_i = \pm 1$.

• $\mathcal{C}$ est aussi une involution : $\mathcal{C}^2 = 1$.

• il ne commute pas avec les opérateurs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ séparement mais il commute avec l'opérateur $\mathcal{PT}$ et l'Hamiltonian $\mathcal{H}$:

$$[\mathcal{C}, \mathcal{PT}] = 0, \qquad [\mathcal{C}, H] = 0. \tag{1.28}$$

Le $\mathcal{CPT}$-produit scalaire est définie comme suit

$$\langle\psi_m\,|\psi_n\rangle_{\mathcal{CPT}} = \int dx\,[\mathcal{CPT}\ \psi_m(x)]\,\psi_n(x)\,, \tag{1.29}$$

ou

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle_{\mathcal{CPT}} = \left(\mathcal{CPT} \ | \psi_m \rangle \right)^t | \psi_n \rangle . \tag{1.30}$$

La relation de fermeture s'écrit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \left[\mathcal{CPT} \ | \psi_n(y) \rangle \right] = \delta(x-y) . \tag{1.31}$$

1.2 Concept de la pseudo-Hermiticité

Ce concept a été introduit en 1940 par Dirac et Pauli [61–63] et discuté par la suite par Lee et Sudarshan [64]. Ils ont essayé de résoudre le problème pour lequel les états de norme négative apparaissent comme conséquence de la renormalisation, En faisant une correspondance entre un Hamiltonien non-hérmitique et son équivalent hermitique à l'aide de la transformation de similarité. Cette dérnière a été discuté en détail par Scholtz [45].

En 2002, Ali Mostaphazadah [46–49] a généralisé la $\mathcal{PT}$-symétrie à la notion de pseudo-Hermiticité qui peut générer un spectre réelle.

Un opérateur linéaire H dans l'espace de Hilbert est pseudo-Hermitien s'il vérifie :

$$H^{\dagger} = \eta H \eta^{-1}, \tag{1.32}$$

où l'opérateur η est un opérateur linéaire hermitique et inversible et $H^{\dagger}$ est l'adjoint de H.

- l'opérateur H et son adjoint $H^{\dagger}$ vérifie les équations au valeurs propres suivantes :

$$H | \psi_n \rangle = E_n | \psi_n \rangle , \tag{1.33}$$

$$H^{\dagger} | \phi_n \rangle = E_n^* | \phi_n \rangle , \tag{1.34}$$

avec E_n sont les valeurs propres de H et E_n^* celles de $H^{\dagger}$.

- Les vecteurs propres $|\psi_n\rangle$ et $|\phi_n\rangle$ forment une base bi-orthonormée $\{|\psi_n\rangle, |\phi_n\rangle\}$, c.à.d :

$$\langle \phi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn}, \tag{1.35}$$

donc la relation de fermeture est définit comme suit

$$\sum_n |\psi_n\rangle \langle\phi_n| = \sum_n |\phi_n\rangle \langle\psi_n| = 1. \tag{1.36}$$

• Les Hamiltoniens H et H^+ s'écrivent

$$H = \sum E_n |\psi_n\rangle \langle\phi_n|, \tag{1.37}$$

$$H^\dagger = \sum_n E_n^* |\phi_n\rangle \langle\psi_n|, \tag{1.38}$$

Si H admet un spectre réel alors il lui correspond un Hamiltonien Hermitian h via la relation de similarité :

$$h = \rho H \rho^{-1}. \tag{1.39}$$

On peut facilement montrer que h est hermitien. en effet son Hamiltonien ajdoint $h^\dagger$ s'écrit :

$$h^\dagger = \left(\rho^{-1}\right)^\dagger H^\dagger \rho^\dagger \tag{1.40}$$

d'après l'équation (1.32) on a

$$h^\dagger = \left(\rho^{-1}\right)^\dagger \eta H \eta^{-1} \rho^\dagger, \tag{1.41}$$

sachant que $\eta = \ \rho^+\rho$ et $\rho^{-1}\rho = 1$, on en déduit que

$$\begin{aligned} h^\dagger &= \left(\rho^{-1}\right)^\dagger \rho^\dagger \rho H \rho^{-1} \left(\rho^\dagger\right)^{-1} \rho^\dagger \\ &= \rho H \rho^{-1} = h. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Soit $|\varphi_n\rangle$ état propres de h et à partir de l'Éq. (1.33), on peut écrire :

$$H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle,$$

$$h |\varphi_n\rangle = E_n |\varphi_n\rangle. \tag{1.43}$$

En remplaçant l'expression suivante $h = \rho H \rho^{-1}$ dans l'équation juste en dessus, on obtient

$$\rho H \rho^{-1} |\varphi_n\rangle = E_n |\varphi_n\rangle \tag{1.44}$$

et si en multipliant l'équation (1.44) par l'opérateur ρ^{-1} on aura :

$$H\rho^{-1}\left|\varphi_n\right\rangle = E_n\rho^{-1}\left|\varphi_n\right\rangle, \tag{1.45}$$

Ainsi, on peut aisément définir la relation de correspondance entre les états propres de H et ceux de h [65]

$$\left|\psi_n\right\rangle = \rho^{-1}\left|\varphi_n\right\rangle \text{ ou bien } \left|\varphi_n\right\rangle = \rho\left|\psi_n\right\rangle. \tag{1.46}$$

De sorte que le produit scalaire sera

$$\left\langle\varphi_n\right|\left.\varphi_m\right\rangle = \left\langle\psi_n\right|\eta\left|\psi_m\right\rangle = \delta_{nm}, \tag{1.47}$$

on voit que les vecteurs propres $\left|\psi_n\right\rangle$ forment une base orthonormée, c'est à dire que le produit scalaire définit ci-dessus préserve la norme et définit positive.

1.3 Les états cohérents

Les états cohérents ont été introduits par Schrödinger [66] dans le cadre de la correspondance classique-quantique puis définis par Glauber en 1963 [67].

On se propose de présenter les definitions et les propriétés des états cohérents de l'oscillateur harmonique. Ensuite, nous rappellons leur évolution au cours du temps.

1.3.1 Définitions et propriétés

Définition (a) : Les états cohérents $|\alpha\rangle$ sont definis comme étant des états propres de l'opérateur d'annihilation a :

$$a\left|\alpha\right\rangle = \alpha\left|\alpha\right\rangle, \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{1.48}$$

l'expression des états cohérents $|\alpha\rangle$ dans l'espace de Fock s'écrit

$$\left|\alpha\right\rangle = e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left|n\right\rangle, \tag{1.49}$$

Définition (b) : Les états cohérents $|\alpha\rangle$ peuvent aussi etre obtenus à partir de l'action de l'opérateur de déplacement $D(\alpha)$

$$\begin{aligned} D(\alpha) &= \exp\left(\alpha\ a^{+} - \alpha^{*}a\right), \\ &= e^{\frac{-|\alpha|^{2}}{2}} e^{\alpha\ a^{+}} e^{-\alpha^{*}a} \end{aligned} \tag{1.50}$$

sur l'état du vide $|0\rangle$

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle = \exp\left(\alpha\ a^{+} - \alpha^{*}a\right)|0\rangle, \tag{1.51}$$

- L'opérateur $D(\alpha)$ est unitare

$$D^{+}(\alpha) D(\alpha) = D(\alpha) D^{+}(\alpha) = 1. \tag{1.52}$$

- l'action de $D(\alpha)$ sur les opérateurs a et a^{+} est donnée par :

$$D^{+}(\alpha)\, aD(\alpha) = a + \alpha, \tag{1.53}$$

$$D^{+}(\alpha)\, a^{+}D(\alpha) = a^{+} + \alpha^{*}, \tag{1.54}$$

Définition (c) : On peut aussi définir les états cohérents comme des états qui rendent la relation d'incertitude d'Heisenberg minimale,

$$[x, p] = i\hbar, \quad \Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}, \tag{1.55}$$

où les opérateurs position x et impulsion p sont donnés par

$$x = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \left(a^{+} + a\right), \quad p = \left(\frac{\hbar m\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}} i\left(a^{+} - a\right). \tag{1.56}$$

et les variances Δx et Δp sont :

$$\Delta x = \sqrt{\langle \hat{x}^{2}\rangle - \langle \hat{x}\rangle^{2}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \tag{1.57}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^{2}\rangle - \langle \hat{p}\rangle^{2}} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \tag{1.58}$$

1.3.2 Evolution tomporel des états cohérents

L'évolution au cours du temps des états cohérents est obtenue en appliquant l'opérateur d'évolution

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \tag{1.59}$$

associé à l'oscillateur harmonique

$$H = \hbar\omega\left(a^{+}a + \frac{1}{2}\right) \tag{1.60}$$

sur l'état initial $|\alpha_0\rangle$:

$$|\alpha;t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\,|\alpha_0\rangle\,. \tag{1.61}$$

L'évolué $|\alpha;t\rangle$ s'écrit donc

$$\begin{aligned} |\alpha;t\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n e^{-i\omega t\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{2}\omega t}e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n e^{-i\omega n t}}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{2}\omega t}\,|\alpha\,(t)\rangle\,, \end{aligned} \tag{1.62}$$

qui montre que l'évolué de α s'écrit $\alpha\,(t) = \alpha e^{-i\omega t}$.

Le prochain chapitre est consacré à l'étude de l'évolution de l'equation de Schrödinger de l'oscillateur harmonique inversé H^r ainsi que les états cohérents associés.

Chapitre 2

Étude de l'oscillateur harmonique inversé : États Cohérents

2.1 Introduction

L'oscillateur harmonique inversé est décrit par

$$H^{\mathrm{r}} = \frac{1}{2m}p^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \tag{2.1}$$

avec $H^{\mathrm{r}} = (H^{\mathrm{r}})^{+}$, il est symétrique sur le domaine $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$.

Rappelons d'abord quelques propriétés de l'oscillateur harmonique qui sont utiles pour introduire l'oscillateur inversé. L'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique s'écrit

$$H^{\mathrm{os}} = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \tag{2.2}$$

ses fonctions propres sont données au moyen du polynôme d'Hermite comme

$$\psi_n^{\mathrm{os}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{\omega m}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{-\omega m}{2\hbar}x^2\right] H_n\left(\sqrt{\frac{\omega m}{\hbar}}x\right), \tag{2.3}$$

sont orthonormée c.à.d

$$\langle\psi_m^{\mathrm{os}}(x)\,|\psi_n^{\mathrm{os}}(x)\rangle = \int \psi_m^{*\mathrm{os}}(x)\psi_n^{\mathrm{os}}(x)dx = \delta_{mn}\ , \tag{2.4}$$

et son spectre d'énergie s'écrit :

$$E_n^{\text{os}} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad \omega > 0. \tag{2.5}$$

Maintenant, Il est nécéssaire de revenir sur les origines de l'oscillateur inversé, car un point essentiel qu'il faudrait retenir est que le changement de la fréquence de ω vers $\pm i\omega$ ne peut pas s'appliquer pour trouver les valeurs propres de l'énergie de l'oscillateur inversé, sinon on obtiendra des valeurs d'énergies qui seront purement imaginaires :

$$E_n^r = \pm iE_n^{os} = \pm i\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{2.6}$$

On peut se poser aussi la question de savoir si les états ψ_n^{r} ($\widetilde{\psi}_n^{\text{r}}$) obtenus en changeant la pulsation en $\pm i\omega$ de l'oscillateur inversé sont normés, comme le sont ceux de l'oscillateur harmonique $\psi^{os}(x)$?

$$\psi_n^r(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{i\omega m}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{-i\omega m}{2\hbar}x^2\right] H_n\left(\sqrt{\frac{i\omega m}{\hbar}}x\right), \quad \omega = +i\omega \tag{2.7}$$

et

$$\widetilde{\psi}_n^{\text{r}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{-i\omega m}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{i\omega m}{2\hbar}x^2\right] H_n\left(\sqrt{\frac{-i\omega m}{\hbar}}x\right), \quad \omega = -i\omega. \tag{2.8}$$

Pour répondre à cette question, remarquons que les états ψ_n^{r} ($\widetilde{\psi}_n^{\text{r}}$) peuvent être déduits à partir de ceux de l'oscillateur harmonique (2.3) :

$$\begin{aligned}
\psi_n^{\text{r}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{i\omega m}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{-i\omega m}{2\hbar}x^2\right] H_n\left(\sqrt{\frac{i\omega m}{\hbar}}x\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}\omega m}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{-\omega m}{2\hbar}\left(xe^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2\right] H_n\left(\sqrt{\frac{\omega m}{\hbar}}\left(xe^{i\frac{\pi}{4}}\right)\right) \\
&= e^{i\frac{\pi}{8}}\psi_n^{\text{os}}(xe^{i\frac{\pi}{4}}),
\end{aligned} \tag{2.9}$$

et

$$\widetilde{\psi}_n^{\text{r}}(x) = e^{-i\frac{\pi}{8}}\psi_n^{\text{os}}(xe^{-i\frac{\pi}{4}}). \tag{2.10}$$

comme si nous avons multiplié les états $\psi^{os}(x)$ par un opérateur de dilatation ($\rho = \exp\left[-\frac{\pi}{8}(xp + px)\right]$), les états propres de l'oscillateur inversé [2] s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\psi_n^r(x) &= \exp\left[-\frac{\pi}{8}(xp + px)\right]\psi_n^{os}(x) \\
\psi_n^r(x) &= \exp\left[-\frac{\pi}{8}(xp + px)\right]\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{\omega m}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{-\omega m}{2\hbar}x^2\right] H_n\left(\sqrt{\frac{\omega m}{\hbar}}x\right).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

On voit bien que le produit scalaire n'est pas constant, ainsi les fonctions propres $\psi_n^r(x)$ ne sont pas orthogonales entre elles.

Ces résultats montrent que l'oscillateur inversé est un système atypique, car bien que son hamiltonien H^r est Hermitique, les valeurs propres de l'énergie sont imaginaires et la norme n'est pas conservée.

Afin de remedier à ce problème de la norme, nous introduisons un opérateur η. Tel que :

$$\eta = \exp\left[\frac{\pi}{4}\left(xp+px\right)\right], \tag{2.12}$$

et le produit scalaire doit nécéssairement satisfaire l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\left\langle \psi_m^r(x)\right| \eta \left|\psi_n^r(x)\right\rangle &= \left\langle \psi_m^{os}(x)\right| \exp\left[\frac{\pi}{4}\left(xp+px\right)\right] \exp\left[-\frac{\pi}{4}\left(xp+px\right)\right] \left|\psi_n^{os}(x)\right\rangle, \\ &= \left\langle \psi_m^{os}(x) \left|\psi_n^{os}(x)\right.\right\rangle = \delta_{mn}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Nous supposons qu'il y a une transformation qui relie les états de l'oscillateur harmonique aux états de l'oscillateur inversé, cette connexion est faite par un opérateur ρ. En d'autres termes :

$$\left|\psi_n^r(x)\right\rangle = \rho^{-1}\left|\psi_n^{os}(x)\right\rangle. \tag{2.14}$$

Et on définit le pseudo-produit scalaire comme :

$$\begin{aligned}\left\langle \psi_m^r(x)\right| \eta \left|\psi_n^r(x)\right\rangle &= \left\langle \psi_m^r(x)\right| \rho^+\rho \left|\psi_n^r(x)\right\rangle, \\ &= \left\langle \psi_m^{os}(x)\right| \left(\rho^+\right)^{-1}\rho^+\rho\rho^{-1}\left|\psi_n^{os}(x)\right\rangle, \\ &= \delta_{mn}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Car $\rho\rho^{-1} = 1$. Il est clair que la relation d'orthogonalisation est conservée par le nouveau pseudo-produit scalaire.

En effet, cette transformation modifie l'opérateurs position et impulsions x et p respectivement :

$$\begin{aligned}\exp\left[\frac{\pi}{8}(xp+px)\right] x \exp\left[-\frac{\pi}{8}(xp+px)\right] &= xe^{-i\frac{\pi}{4}}, \\ \exp\left[\frac{\pi}{8}(xp+px)\right] p \exp\left[-\frac{\pi}{8}(xp+px)\right] &= pe^{i\frac{\pi}{4}},\end{aligned} \tag{2.16}$$

par conséquent, la liaison entre l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique et celui de l'oscillateur inversé est donnée par :

$$\begin{aligned} H^{\mathrm{r}} &= \rho^{-1}(iH^{\mathrm{os}})\rho \\ &= i\exp\left[-\frac{\pi}{8}(xp+px)\right]\left(\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\exp\left[\frac{\pi}{8}(xp+px)\right] \\ &= \frac{1}{2m}p^2-\frac{1}{2}m\omega^2x^2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

On peut noter aussi que iH^{os} est anti-PT-symétrique, effectivement :

$$\mathcal{PT}iH^{os}\mathcal{TP}=-iH^{os} \quad \Longrightarrow \quad (iH^{os})^{+}=-iH^{os}, \tag{2.18}$$

donc iH^{os} anti-commute avec $\mathcal{PT}$ c.à.d

$$[iH^{os},\mathcal{PT}]_{+}=0. \tag{2.19}$$

Les équations (2.8), (2.9) et (2.10) montrent que

$$\widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}}(x)=\exp\left[\frac{\pi}{4}(xp+px)\right]\psi_n^{\mathrm{r}}(x). \tag{2.20}$$

Étant donné que la base $\left\{\psi_n^{\mathrm{r}}(x),\widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}}(x)\right\}$ possède les propriétés suivantes :

i) Les formules (2.9) et (2.10) sont conjuguées l'une de l'autre c.à.d :

$$\widetilde{\psi}_n^{*\mathrm{r}}(x)=\psi_n^{\mathrm{r}}(x), \tag{2.21}$$

ii) Ils sont bi-orthonormés

$$\begin{aligned} \left\langle\widetilde{\psi}_m^{\mathrm{r}}\right.\left|\psi_n^{\mathrm{r}}\right\rangle &= \left\langle\psi_m^{\mathrm{r}}\right.\left|\widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}}\right\rangle \\ &= \left\langle\psi_n^{\mathrm{os}}\right| e^{\left[-\frac{\pi}{8}(xp+px)\right]}e^{\left[\frac{\pi}{8}(xp+px)\right]}\left|\psi_n^{\mathrm{os}}\right\rangle \\ &= \left\langle\psi_n^{\mathrm{os}}\right|\left.\psi_n^{\mathrm{os}}\right\rangle \\ &= \delta_{mn}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

et pourraient s'écrire :

$$\left\langle\widetilde{\psi}_m^{\mathrm{r}}\right.\left|\psi_n^{\mathrm{r}}\right\rangle=\left\langle\psi_n^{\mathrm{r}}\right|\eta\left|\psi_n^{\mathrm{r}}\right\rangle=\delta_{mn}, \tag{2.23}$$

iii) ils admettent une base bi-complète

$$\sum_0^\infty |\psi_n^{\mathrm{r}}(x)\rangle \left\langle \widetilde{\psi}_m^{\mathrm{r}}(x')\right| = \sum_0^\infty \left|\widetilde{\psi}_m^{\mathrm{r}}(x)\right\rangle \langle\psi_n^{\mathrm{r}}(x')|$$
$$= e^{\left[\frac{\pi}{8}(xp+px)\right]}\sum_n |\psi_n^{\mathrm{os}}\rangle \langle\psi_n^{\mathrm{os}}| \, e^{\left[-\frac{\pi}{8}(xp+px)\right]} = \delta(x-x'). \tag{2.24}$$

2.2 Les états cohérents de l'oscillateur harmonique inversé

On peut vérifier que dans le cas de l'oscillateur inversé, la forme de l'Hamiltonien (2.1) s'écrit autrement

$$H^{\mathrm{r}} = \frac{i\hbar\omega}{2}(\bar{\mathcal{A}}\,\mathcal{A} + \mathcal{A}\,\bar{\mathcal{A}}), \tag{2.25}$$

où les opérateurs création et annihilation $\left(\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}\right)$ sont liés à ceux de l'Éq.(1.56) par la transformation

$$\mathcal{A} = \rho^{-1}a\rho = \exp\left[i\frac{\pi}{4}\right]\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\right) = \left(\sqrt{\frac{im\omega}{2\hbar}}x + \frac{ip}{\sqrt{2mi\omega\hbar}}\right), \tag{2.26}$$

$$\bar{\mathcal{A}} = \rho^{-1}a^\dagger\rho = \exp\left[i\frac{\pi}{4}\right]\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\right) = \left(\sqrt{\frac{mi\omega}{2\hbar}}x - \frac{ip}{\sqrt{2mi\omega\hbar}}\right), \tag{2.27}$$

ils satisfont à la relation de commutation suivante

$$\left[\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}\right] = 1. \tag{2.28}$$

Comme dans le cas de l'oscillateur harmonique, les états cohérents pour l'oscillateur inversé $|\varphi_\alpha^{\mathrm{r}}\rangle^{\mathcal{A}}$ peuraient être défini comme des états propres de l'opérateur d'annihilation $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}\,|\varphi_\alpha^{\mathrm{r}}\rangle^{\mathcal{A}} = \alpha\,|\varphi_\alpha^{\mathrm{r}}\rangle^{\mathcal{A}}, \qquad \alpha \in C. \tag{2.29}$$

Il faut noter que les Éqs. (2.26), (2.27) indiquent que la valeur propre α pourrait être considérée comme une valeur propre réelle de l'opérateur hermitien $\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\right)$ multiplié par le facteur de phase $e^{+i\frac{\pi}{4}}$

$$\alpha = |\alpha|\, e^{+i\frac{\pi}{4}}. \tag{2.30}$$

Dans la représentation position x , l'Éq. (2.29) devient

$$\left(\sqrt{\frac{mi\omega}{2\hbar}}x + \frac{\hbar}{\sqrt{2mi\omega\hbar}}\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_\alpha^{\mathrm{r}}(x) = \alpha\varphi_\alpha^{\mathrm{r}}(x), \tag{2.31}$$

on obtient l'expression de l'état $\varphi_\alpha^{\mathrm{r}}(x)$:

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha^{\mathrm{r}}(x) &= \left(\frac{im\omega}{2\hbar\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{i}{2}|\alpha|^2} \exp\left[\left(\sqrt{\frac{2im\omega}{\hbar}}\alpha x - i\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)\right] \\
&= \left(\frac{im\omega}{2\hbar\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{i}{2}|\alpha|^2} \exp\left[\alpha\left(\mathcal{A}+\bar{\mathcal{A}}\right)\right] \exp\left[-i\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right] \\
&= \left(\frac{im\omega}{2\hbar\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[\alpha\bar{\mathcal{A}}\right] \exp\left[\alpha\mathcal{A}\right] \exp\left[-i\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right] \\
&= \exp\left[\alpha\bar{\mathcal{A}}\right]\varphi_0^{\mathrm{r}}(x),
\end{aligned} \tag{2.32}$$

d'où l'état de vide de l'oscillateur inversé s'écrit

$$\varphi_0^{\mathrm{r}}(x) = \left(\frac{im\omega}{2\hbar\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-i\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right], \tag{2.33}$$

ainsi, pour l'état au point zéro la condition bi-orthonormale $\langle\widetilde{\varphi}_0^{\mathrm{r}}(x)\,|\varphi_0^{\mathrm{r}}(x)\rangle = \langle\varphi_0^{\mathrm{r}}(x)|\,\eta\,|\varphi_0^{\mathrm{r}}(x)\rangle = I$ est vérifiée.

Lorsque l'oscillateur inversé est dans un état particulier $\varphi_\alpha^{\mathrm{r}}(x)$ (2.32), à l'instant $t = 0$, comment évolue-t-il au cours du temps ?

Alors à tout instant t son état sera donné par :

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha^{\mathrm{r}}(x,t) &= \exp\left[-\frac{i}{\hbar}H^{\mathrm{r}}t\right]\varphi_\alpha^{\mathrm{r}}(x) \\
&= \exp\left[-\frac{i}{\hbar}H^{\mathrm{r}}t\right]\exp\left[\alpha\bar{\mathcal{A}}\right]\varphi_0^{\mathrm{r}}(x),
\end{aligned} \tag{2.34}$$

donc, on peut écrire :

$$\exp\left[-\frac{i}{\hbar}H^{\mathrm{r}}t\right]\varphi_\alpha^{\mathrm{r}}(x) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}H^{\mathrm{r}}t\right]\exp\left[\alpha\bar{\mathcal{A}}\right]\exp\left[\frac{i}{\hbar}H^{\mathrm{r}}t + \frac{\omega}{2}t\right]\varphi_0^{\mathrm{r}}(x), \tag{2.35}$$

où nous avons utilisé ces équations tel que :

$$\left(H^{\mathrm{r}} - i\frac{\omega\hbar}{2}\right)\varphi_0^{\mathrm{r}}(x) = 0. \tag{2.36}$$

$$\left[-\frac{i}{\hbar}H^{\mathrm{r}}t, \alpha\bar{\mathcal{A}}\right] = \omega t\alpha\bar{\mathcal{A}}, \tag{2.37}$$

et la formule de Baker-Campbell-Hausdorff qui stipule que si $[a, B] = cB$ avec $c \in \mathbb{C}$, alors

$$\exp[a]\exp[B]\exp[-a] = \exp[\exp(c)B]. \tag{2.38}$$

où $a = -\frac{i}{\hbar}H^{\mathrm{r}}t$, $B = \alpha\left(\bar{\mathcal{A}}\right)$ et $c = \omega t$.

par conséquant, les états cohérents de l'oscillateur inversé Éq.(2.34) devient :

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha(t)}^{\mathrm{r}}(x,t) &= \exp\left[\frac{\omega}{2}t\right]\exp\left[e^{\omega t}\alpha\bar{\mathcal{A}}\right]\varphi_0^{\mathrm{r}}(x)\\ &= \exp\left[\frac{\omega}{2}t\right]\varphi_\alpha^{\mathrm{r}}(x),\end{aligned} \tag{2.39}$$

la comparaison de ce résultat et celui de l'Éq.(2.32) montre que pour obtenir l'évolué $\psi_\alpha^{\mathrm{r}}(x,0) = \varphi_\alpha^{\mathrm{r}}(x)$ à $\psi_\alpha^{\mathrm{r}}(x,t)$, il suffit de changer α en $\alpha(t) = \alpha e^{\omega t}$ et de multiplier l'état obtenu par $\exp\left[\frac{\omega}{2}t\right]$ (qui est un facteur d'amplitude globale).

Nous savons déjà, pour l'oscillateur harmonique, les valeurs moyennes $\langle x\rangle^{\mathrm{os}}(t) = x_c^{\mathrm{os}}(t)$ et $\langle p\rangle^{\mathrm{os}}(t) = -m\omega x_c^{\mathrm{os}}(t)$ restent toujours égaux aux valeurs classiques correspondantes, est-ce le cas pour l'oscillateur inversé ?

Les valeurs moyennes $\langle x\rangle_\eta^{\mathrm{r}}$ et $\langle p\rangle_\eta^{\mathrm{r}}$ peuvent être obtenues en exprimant x et p en termes de $\mathcal{A}$ et $\bar{\mathcal{A}}$ [Eqs.(2.26) et (2.27)], tel que

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2mi\omega}}(\mathcal{A} + \bar{\mathcal{A}}), \qquad p = i\sqrt{\frac{\hbar mi\omega}{2}}(\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}). \tag{2.40}$$

Donc la valeur moyenne de l'opérateur position est comme suit

$$\begin{aligned}\langle x\rangle_\eta^{\mathrm{r}} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2mi\omega}}\left\langle\psi_\alpha^{\mathrm{r}}(x,t)\right|\eta(\mathcal{A}+\bar{\mathcal{A}})\left|\psi_\alpha^{\mathrm{r}}(x,t)\right\rangle\\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2mi\omega}}\exp[\omega t]\left\langle\varphi_\alpha^{\mathrm{r}}(x)\right|\eta(\mathcal{A}+\bar{\mathcal{A}})\left|\varphi_\alpha^{\mathrm{r}}(x)\right\rangle\\ &= 2\sqrt{\frac{\hbar}{2mi\omega}}\,|\alpha|\,e^{\omega t+i\frac{\pi}{4}}\end{aligned} \tag{2.41}$$

d'où

$$\langle x\rangle_{\eta}^{\mathrm{r}} = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,|\alpha|\,e^{\omega t} = x_{\eta}^{\mathrm{r}}(t), \tag{2.42}$$

de même, la valeur moyenne de l'opérateur impulsion est

$$\begin{aligned}\langle p\rangle_{\eta}^{\mathrm{r}} &= i\sqrt{\frac{\hbar m i\omega}{2}}\,\langle\psi_{\alpha}^{\mathrm{r}}(x,t)|\,\eta(\bar{\mathcal{A}}-\mathcal{A})\,|\psi_{\alpha}^{\mathrm{r}}(x,t)\rangle \\ &= \sqrt{2\hbar m\omega}\,|\alpha|\,e^{\omega t} \\ &= p_{\eta}^{\mathrm{r}}(t).\end{aligned} \tag{2.43}$$

L'évolution temporelle de ces valeurs moyennes correspondant à celles de l'oscillateur en mécanique classique.

Pour vérifier la relation d'incertitude d'Heisenberg, calculons :

• La valeur moyenne de x^2 et de p^2

$$\left\langle x^2\right\rangle_{\eta}^{\mathrm{r}} = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[(\alpha(t)+\alpha^*(t))^2+1\right], \tag{2.44}$$

$$\left\langle p^2\right\rangle_{\eta}^{\mathrm{r}} = \frac{\hbar m\omega}{2}\left[1-(\alpha(t)-\alpha^*(t))^2\right], \tag{2.45}$$

par conséquent :

$$\begin{aligned}(\Delta x)_{\eta}^{\mathrm{r}} &= \sqrt{\langle x^2\rangle_{\eta}^{\mathrm{r}} - \left(\langle x\rangle_{\eta}^{\mathrm{r}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{\left[(\alpha(t)+\alpha^*(t))^2-4\alpha^2(t)+1\right]} \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}},\end{aligned} \tag{2.46}$$

et

$$\begin{aligned}(\Delta p)_{\eta}^{\mathrm{r}} &= \sqrt{\langle x^2\rangle_{\eta}^{\mathrm{r}} - \left(\langle x\rangle_{\eta}^{\mathrm{r}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}.\end{aligned} \tag{2.47}$$

En multipliant $(\Delta x)_{\eta}^{\mathrm{r}}$ par $(\Delta p)_{\eta}^{\mathrm{r}}$, nous obtenons

$$(\Delta x)_{\eta}^{\mathrm{r}}\,.\,(\Delta p)_{\eta}^{\mathrm{r}} = \frac{\hbar}{2} \tag{2.48}$$

D'où ce résultat reproduit la fameuse relation d'incertitude d'Heisenberg.

Chapitre 3

Étude des systèmes quantique non-hermitique dépendants du temps

3.1 Introduction

Rappelons que l'évolution d'un système au cours du temps est régi par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi(t)\right\rangle = H(t)\left|\Psi(t)\right\rangle, \tag{3.1}$$

où $H(t)$ est l'Hamiltonien du système et $|\Psi(t)\rangle$ c'est un vecteur d'état, il appratient à l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Les principes fondamentaux utilisés pour résoudre les systèmes indépendants du temps ou même dépendants du temps en mécanique quantique hermitienne sont bien établis dans de nombreux documents standard. Par contre, les systèmes quantiques non-hermitiques sont moins développés. Néanmoins, de grands efforts ont été faits pour développer un cadre quantique approprié pour ces systèmes. Mais quand il s'agit des Hamiltoniens explicitement dépendants du temps, le processus est très difficile. Ce chapitre est consacré à une approche qui est censé reproduire des solutions exactes, c'est la théorie des invariants construite par Lewis et Riesenfeld en 1969 [50], qui se généralise au cas non-hermitique ou ce qu'on appelle la théorie des pseudo-invariants [51, 52].

3.2 Théorie des invariants pour des systèmes dépendants du temps

Le rôle des invariants dynamiques est très important, car ils simplifient la résolution des équations dynamiques gouvernant l'évolution temporelle des systèmes quantiques dépendants explicitement du temps. la solution de l'équation de Schrödinger est exprimeé comme une fonction des états propres de l'invariant multiplie par une phase [50]. Le problème se résume donc à trouver la forme explicite de l'opérateur invariant et la phase associé à l'évolution de systéme considéré.

3.2.1 Cas hermitien :

En mécanique quantique, un opérateur $\hat{I}_h\ (t)$ est dit invariant, s'il satisfait à l'équation de Lioville-Von-Neumann :

$$\frac{d\hat{I}_h(t)}{dt} = \frac{\partial \hat{I}_h(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{I}_h(t), \hat{h}(t)\right] = 0, \tag{3.2}$$

avec $\hat{h}(t)$ c'est l'opérateur Hamiltoniandans, dans ce cas l'Éq. (3.1) s'écrit

$$i\hbar\partial_t \left|\Psi^h(t)\right\rangle = \hat{h}(t)\left|\Psi^h(t)\right\rangle. \tag{3.3}$$

où $\left|\Psi^h(t)\right\rangle$ c'est un vecteur propre à $\hat{h}(t)$.

Alors, on peut définir une fonction $\left|\psi_{\lambda,\kappa}(t)\right\rangle$ comme étant état propre de l'invariant $I_h(t)$ tel que,

$$\hat{I}_h(t)\left|\psi_\lambda(t)\right\rangle = \lambda\left|\psi_\lambda(t)\right\rangle, \tag{3.4}$$

où λ est la valeur propre associe à $\hat{I}_h$.

Supposons que ces états propres admettent une basse orthonormeé

$$\left\langle\psi_{\lambda'}(t)\ \middle|\psi_\lambda(t)\right\rangle = \delta_{\lambda,\lambda'}. \tag{3.5}$$

Dons ce cas, la solution particulière de l'équation de Schrödinger s'écrit

$$\left|\psi_\lambda(t)\right\rangle_\alpha = \exp\left[i\alpha_\lambda(t)\right]\left|\psi_\lambda(t)\right\rangle, \tag{3.6}$$

avec $\alpha_\lambda(t)$ une phase qui satisfie à l'équation suivante

$$\hbar\frac{d\alpha_\lambda(t)}{dt} = \langle\psi_\lambda(t)\left(i\hbar\partial_t - \hat{h}(t)\right)|\psi_\lambda(t)\rangle. \tag{3.7}$$

Et la solution générale de l'Éq. (3.3) s'écrit comme une combinaison linéaire des états propres

$$\left|\Psi^h(t)\right\rangle = \sum_\lambda C_\lambda(0)\exp\left[i\alpha_\lambda(t)\right]|\psi_\lambda(t)\rangle, \tag{3.8}$$

avec $C_\lambda(0)$ ce sont des ceofficients indépendents du temps.

3.2.2 Cas non-hermitien : Théorie des Pseudo-invariants

Dans cette section, nous allons passer en revue aux résultats de la théorie des pseudo invariants [51, 52, 54]. Soit un Hamiltonien $H(t)$ non-hermitien dépendant du temps.

Il est possible de construire un opérateur pseudo-invariant dépendant du temps $\hat{I}^{PH}(t)$ vérifiant l'équation de Lioville-Von-Neumann :

$$\frac{\partial\hat{I}^{PH}(t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{I}^{PH}(t), \hat{H}(t)\right], \tag{3.9}$$

en introduisant une métrique dépendante du temps $\eta(t) = \rho^+(t)\rho(t)$, de manière analogue au cas indépendant du temps, la relation de " la pseudo-hermiticité " pour l'opérateur invariant est :

$$\hat{I}^{PH+}(t) = \eta(t)\hat{I}^{PH}(t)\,\eta^{-1}(t) \;\Leftrightarrow \hat{I}^h(t) = \rho(t)\hat{I}^{PH}(t)\rho^{-1}(t) = \hat{I}^{h+}(t), \tag{3.10}$$

l'opérateur métrique η relie l'invariant $\hat{I}^{PH}(t)$ à son conjugué hermitien $\hat{I}^{PH+}(t)$, et $\hat{I}^{PH}(t)$ peut également être relié à l'opérateur invariant hermitique $\hat{I}^h(t)$ à travers la transformation $\rho(t)$.

La particularité d'un tel couple conjugué $\hat{I}^h(t)$ et $\hat{I}^{PH}$ est qu'ils possèdent un spectre réel. Cela signifie que tout opérateur invariant auto-adjoint $\hat{I}^h(t)$,c 'est-à-dire un observable, dans le système hermitien il possède un opérateur observable $\hat{I}^{PH}$ équivalent au cas des systèmes non-hermitique, ils sont liés par la relation

$$\hat{I}^{PH} = \rho^{-1}(t)\hat{I}^h(t)\rho(t), \tag{3.11}$$

par analogie au cas indépendant du temps, les équations aux valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint s'écrivent :

$$\hat{I}_h(t)\left|\psi_n(t)\right\rangle = \lambda_n \left|\psi_n(t)\right\rangle, \tag{3.12}$$

$$\hat{I}^{PH}(t)\left|\phi_n^H(t)\right\rangle = \lambda_n \left|\phi_n^H(t)\right\rangle, \quad \lambda_n = cte, \tag{3.13}$$

où $\left|\psi_n(t)\right\rangle$ et $\left|\phi_n^H(t)\right\rangle$ deux fonctions propres liées par la relation :

$$\left|\psi_n(t)\right\rangle = \rho(t)\left|\phi_n^H(t)\right\rangle. \tag{3.14}$$

Les fonctions propres $\left|\phi_n^H(t)\right\rangle$ associées à l'invariant pseudo-hermitien satisfont au pseudo-produit scalaire suivant :

$$\left\langle \phi_n^H(t) \middle| \phi_n^H(t)\right\rangle_{\eta(t)} = \left\langle \phi_n^H(t)\right| \eta(t)\left|\phi_n^H(t)\right\rangle = \delta_{mn}. \tag{3.15}$$

Si on multiplie la fonction propre $\left|\phi_n^H(t)\right\rangle$ par un facteur de phase dépendant du temps $\alpha_n(t)$, la solution particulière $\left|\Phi_n^H(t)\right\rangle$ de l'équation de Schrodinger (3.1), sera

$$\left|\Phi_n^H(t)\right\rangle = e^{i\alpha_n(t)}\left|\phi_n^H(t)\right\rangle, \tag{3.16}$$

où la phase $\alpha_n(t)$ est réelle, elle satisfait à l'équation suivante :

$$\frac{d\alpha_n(t)}{dt} = \left\langle \phi_n^H(t)\right| \eta(t)\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}(t)\right] \left|\phi_n^H(t)\right\rangle. \tag{3.17}$$

Finalement, la solution générale est

$$\left|\Psi(t)\right\rangle = \sum_n C_n e^{i\alpha_n(t)}\left|\phi_n^H(t)\right\rangle, \tag{3.18}$$

où

$$C_n = \left\langle \phi_n^H(0)\right| \eta(0)\left|\Psi(0)\right\rangle \tag{3.19}$$

Nous appliquons cette théorie dans le chapitre prochain, au cas d'un système quantique non-hermitien dépendant du temps obeissant à l'algèbre de Lie $SU(1,1)$, $SU(2)$.

Chapitre 4

Illustration de la théorie des pseudo invariants : Systèmes non-hermitiques obéissant à l'algèbre de Lie $SU(1,1)$ et $SU(2)$

4.1 Introduction

À l'aide de la théorie des pseudo-invariants, on résout l'équation de Schrödinger dans le cas d'un Hamiltonien non-hermitien dépendant du temps, exprimé en fonction des générateurs des groupes $SU(1,1)$ et $SU(2)$. A cet effet nous intoduissons un opérateur de transformation non-unitaire $R(t)$ pour construire un invariant pseudo-hermitien. Nous cherchons la solution exacte de l'équation de Schrödinger, ainsi que la phase de Berry non diabatique qui se réduit à la phase adiabatique dans la variation lente.

4.2 Hamiltonien non-hermitien et invariant pseudo-hermitien

Considérons un système quantique décrit par un Hamiltonien non-hermitien dépendant du temps

$$\hat{H}(t) = \Omega\hat{K}_0 + G\left(\hat{K}_+ \exp\left(i\phi(t)\right) - \hat{K}_- \exp\left(-i\phi(t)\right)\right), \tag{4.1}$$

où Ω , G et $\phi(t) = \omega t$ sont des paramètres réels.

L'opérateur $\hat{K}_0$ est hermitien, alors que $\left(\hat{K}_-\right)^\dagger = \hat{K}_+$. Ces opérateurs ce sont des générateurs de l'algèbre de Lie $SU(1,1)$ et $SU(2)$, qui satisfont aux relations de commutation suivante :

$$\begin{array}{l} \left[\hat{K}_0, \hat{K}_\pm\right] = \pm\hat{K}_\pm \\ \left[\hat{K}_+, \hat{K}_-\right] = D\hat{K}_0 \end{array}, \tag{4.2}$$

où $D = \pm 2$ respectivement pour $SU(2)$ et $SU(1,1)$.

Ce système est regié par l'équation de Schrödinger (3.1) qui sera résolu à l'aide de la théorie des pseudo-invariants définit par

$$i\frac{d\hat{I}(t)}{dt} = i\frac{\partial}{\partial t}\hat{I}(t) + \left[\hat{I}(t), \hat{H}(t)\right] = 0. \tag{4.3}$$

Maintenant, Nous supposons un invariant $\hat{I}(t)$ est de la forme

$$\hat{I}(t) = \hat{R}(t)\hat{K}_0\hat{R}^{-1}(t), \tag{4.4}$$

où $\hat{R}(t)$ est un opérateur non-unitaire définit comme suit

$$\hat{R}(t) = \exp\left(\frac{\varepsilon}{2}\left(\hat{K}_+ \exp\left(i\phi(t)\right) + \hat{K}_- \exp\left(-i\phi(t)\right)\right)\right), \tag{4.5}$$

et son inverse s'écrit

$$\hat{R}^{-1}(t) = \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\left(\hat{K}_+ \exp\left(i\phi(t)\right) + \hat{K}_- \exp\left(-i\phi(t)\right)\right)\right), \tag{4.6}$$

ε est un paramètre réel à déterminer. Cet opérateur il est inversible et hermitien $\hat{R}(t) = \hat{R}^\dagger(t)$.

En utilisant la formule de Baker–Campbell–Hausdorff

$$\exp(A)B\exp-(A) = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + ..., \tag{4.7}$$

Les opérateurs $\hat{K}_+$, $\hat{K}_-$ et $\hat{K}_0$ se transforment [70–72] comme :

$$\hat{R}(t)\hat{K}_+\hat{R}^{-1}(t) = \hat{K}_+\cosh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \hat{K}_-\exp\left(-2i\phi(t)\right)\sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \hat{K}_0\exp\left(-i\phi(t)\right)\sqrt{\frac{D}{2}}\sinh\left(\alpha\right),$$
$$\hat{R}(t)\hat{K}_-\hat{R}^{-1}(t) = \hat{K}_-\cosh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \hat{K}_+\exp\left(2i\phi(t)\right)\sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \hat{K}_0\exp\left(i\phi(t)\right)\sqrt{\frac{D}{2}}\sinh\left(\alpha\right),$$
$$\hat{R}(t)\hat{K}_0\hat{R}^{-1}(t) = \hat{K}_0\cosh\left(\alpha\right) - \frac{1}{\sqrt{2D}}\sinh\left(\alpha\right)\left(\hat{K}_+\exp\left(i\phi(t)\right) - \hat{K}_-\exp\left(-i\phi(t)\right)\right), \tag{4.8}$$

et la dérivée s'éxprime comme

$$i\hat{R}^{-1}(t)\frac{\partial}{\partial t}\hat{R}(t) = -2\omega\hat{K}_0\sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\omega}{\sqrt{2D}}\sinh\left(\alpha\right)\left(\hat{K}_+\exp\left(i\phi(t)\right) - \hat{K}_-\exp\left(-i\phi(t)\right)\right), \tag{4.9}$$

tel que

$$\alpha = \varepsilon\sqrt{\frac{D}{2}}, \tag{4.10}$$

De ce fait, l'invariant (4.4) s'écrit en utilisant les formules (4.8),

$$\hat{I}(t) = \hat{K}_0\cosh\left(\alpha\right) - \frac{1}{\sqrt{2D}}\sinh\left(\alpha\right)\left(\hat{K}_+\exp\left(i\phi(t)\right) - \hat{K}_-\exp\left(-i\phi(t)\right)\right). \tag{4.11}$$

Il est évident que cet invariant est non-hermitien

$$\begin{aligned}\hat{I}^+(t) &= \hat{K}_0\cosh\left(\alpha\right) + \frac{1}{\sqrt{2D}}\sinh\left(\alpha\right)\left(\hat{K}_+\exp\left(i\phi\right) - \hat{K}_-\exp\left(-i\phi\right)\right)\\ &\neq \hat{I}(t).\end{aligned} \tag{4.12}$$

En remplaçant l'invariant $\hat{I}(t)$ dans l'Éq.(4.3), et en calculant le commutateur

$$\begin{aligned}\left[\hat{I}(t),\hat{H}(t)\right] &= \left[\Omega\hat{K}_0 + G\left(\hat{K}_+\exp\left(i\phi(t)\right) - \hat{K}_-\exp\left(-i\phi(t)\right)\right), \hat{K}_0\cosh\left(\alpha\right)\right.\\ &\quad\left. - \frac{1}{\sqrt{2D}}\sinh\left(\alpha\right)\left(\hat{K}_+\exp\left(i\phi(t)\right) - \hat{K}_-\exp\left(-i\phi(t)\right)\right)\right]\\ &= -\frac{\Omega}{\sqrt{2D}}\sinh\left(\alpha\right)\exp\left(i\phi(t)\right)\left[\hat{K}_0,\hat{K}_+\right] + \frac{\Omega}{\sqrt{2D}}\sinh\left(\alpha\right)\exp\left(-i\phi(t)\right)\left[\hat{K}_0,\hat{K}_-\right]\\ &\quad + \frac{G}{\sqrt{2D}}\sinh\left(\alpha\right)\left[\hat{K}_-,\hat{K}_+\right] + G\cosh\left(\alpha\right)\exp\left(i\phi(t)\right)\left[\hat{K}_0,\hat{K}_+\right]\\ &\quad - \frac{G}{\sqrt{2D}}\sinh\left(\alpha\right)\left[\hat{K}_+,\hat{K}_-\right] - G\cosh\left(\alpha\right)\exp\left(-i\phi(t)\right)\left[\hat{K}_0,\hat{K}_-\right].\end{aligned} \tag{4.13}$$

on obtient le résultat suivant

$$\left[\hat{I}(t), \hat{H}(t)\right] = \left[\frac{\Omega}{\sqrt{2D}} \sinh(\alpha) + G \cosh(\alpha)\right] \left(\hat{K}_+ \exp(i\phi) + \hat{K}_- \exp(-i\phi)\right), \tag{4.14}$$

sachant que la dérivée par au temps de l'invariant (4.11), donne

$$i\frac{\partial \hat{I}(t)}{\partial t} = -\frac{\omega}{\sqrt{2D}} \sinh(\alpha) \left(\hat{K}_+ \exp(i\phi) + \hat{K}_- \exp(-i\phi)\right). \tag{4.15}$$

Les équations (4.14) et (4.15), permettent d'obtenir l'équation auxiliare :

$$G \cosh(\alpha) = -\frac{\omega + \Omega}{\sqrt{2D}} \sinh(\alpha). \tag{4.16}$$

Nous introduisons un opérateur métrique $\widehat{\eta}$ tel que

$$\widehat{\eta} = \left(\hat{R}^{-1}\right)^{\dagger} \hat{R}^{-1}, \tag{4.17}$$

et sachant que $\hat{R}(t) = \hat{R}^{\dagger}(t)$

$$\widehat{\eta} = \hat{R}^{-2},$$

donc, on peut montrer que l'invariant $\hat{I}(t)$ est pseudo-hermitien $\hat{I}^{\dagger}(t) = \widehat{\eta}\hat{I}(t)\widehat{\eta}^{-1}$. Considérons un état propre $|n\rangle$ et la valeur propre λ_n associe à l'opérateur $\hat{K}_0$ tel que l'équation aux valeurs propres s'écrit

$$\hat{K}_0 |n\rangle = \lambda_n |n\rangle, \tag{4.18}$$

ce qui conduit alors à définir l'état propre de l'invariant $\widehat{I}(t)$

$$\widehat{I}(t) |n(t)\rangle = \lambda_n |n(t)\rangle, \quad \text{avec} \quad |n(t)\rangle = \hat{R}(t) |n\rangle, \tag{4.19}$$

les λ_n sont également des valeurs propres de l'invariant $\hat{I}(t)$.

Sachant que les états propres $|n\rangle$ définissent une base orthogonale :

$$\langle n | m\rangle = \delta_{nm}, \tag{4.20}$$

c'est à dire :

$$\langle n | m\rangle = \langle n(t)| \left(\hat{R}^{-1}\right)^{+} \hat{R}^{-1} |m(t)\rangle = \delta_{nm}. \tag{4.21}$$

Par conséquant, les états propres $|n(t)\rangle$ sont ainsi satisfont le produit scalaire pseudo-hermitien suivant :

$$\langle n(t)| \widehat{\eta}(t) |m(t)\rangle = \delta_{nm}.$$

4.3 Calcul de la phase de Berry et la solution exacte

Nous avons déterminer les états $|n(t)\rangle$ de l'invariant pseudo-Hermitien $\hat{I}(t)$, alors la solution générale de l'équation de Schrödinger dépendante du temps Eq.(3.1) s'écrit comme étant une superposition d'états propre de l'invariant (4.11) :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n e^{i\alpha_n(t)} |n(t)\rangle, \tag{4.22}$$

avec C_n sont des coefficients indépendants du temps et $\alpha_n(t)$ c'est la phase LR.

En remplaçant la solution Éq. (4.22) dans l'équation de Schrödinger Éq. (3.1), la phase $\alpha_n(t)$:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_n C_n e^{i\alpha_n(t)} |n(t)\rangle\right] &= \hat{H}(t)\left[\sum_n C_n e^{i\alpha_n(t)} |n(t)\rangle\right] \\ \left[-\dot{\alpha}_n(t)|n(t)\rangle + i\frac{\partial |n(t)\rangle}{\partial t}\right] &= \hat{H}(t)|n(t)\rangle, \end{aligned} \tag{4.23}$$

donc pour avoir l'expression de la phase $\alpha_n(t)$, il faut multiplier l'Éq. (4.23) par le bra $\langle n(t)|$ qui permet de déterminer la phase

$$\alpha_n(t) = \int_0^t dt' \left\langle n\left(t'\right)\right| \widehat{\eta}\left[i\frac{\partial}{\partial t'} - \hat{H}(t')\right]\left|n\left(t'\right)\right\rangle. \tag{4.24}$$

En utilisant les relations Eqs. (4.9), la condition auxiliare (4.16) et $\widehat{\eta} = \hat{R}^{-2}$, nous obtenons l'expression de la phase de Lewis Riesenfeld (LR) en fonction des paramètres du systèmes étudié c'est à dire :

$$\begin{aligned} \alpha_n(t) &= \int_0^t dt' \ \langle n| \left[i\hat{R}^{-1}\frac{\partial \hat{R}}{\partial t'} - \hat{R}^{-1}\hat{H}\ \hat{R}\right]|n\rangle \\ &= -\int_0^t dt' \langle n| G(\hat{R}^{-1}\hat{K}_+\hat{R}e^{i\phi(t)} - \hat{R}^{-1}\hat{K}_-\hat{R}e^{-i\phi(t)}) + \Omega\hat{R}^{-1}\hat{K}_0\hat{R} - i\hat{R}^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\hat{R}|n\rangle \\ &= -\int_0^t dt' \left(G\cosh(\alpha) + \frac{\dot{\phi}+\Omega}{\sqrt{2D}}\sinh(\alpha)\right)\langle n|\left(\hat{K}_+e^{i\phi(t')} - \hat{K}_-e^{-i\phi(t')}\right)|n\rangle \\ &\quad -\int_0^t dt' \left(2\sqrt{\frac{D}{2}}G\sinh(\alpha) + 2\left(\Omega+\dot{\phi}\right)\sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \Omega\right)\langle n|\hat{K}_0|n\rangle, \end{aligned} \tag{4.25}$$

qui conduit à

$$\alpha_n(t) = -\lambda_n \int_0^t dt' \left(\Omega + 2\sqrt{\frac{D}{2}}G\sinh(\alpha) + 2(\Omega+\omega)\sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right), \tag{4.26}$$

dans laquelle,

$$\sinh^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2}\left[-1 \pm \frac{(\omega+\Omega)}{\sqrt{(\omega+\Omega)^2 - 2DG^2}}\right], \tag{4.27}$$

tel que $(\omega+\Omega)^2 \succ 2DG^2$.

Le premier terme dans l'expression de la phase de Lewis Riesenfeld (LR) $\alpha_n(t)$ (4.24), appellé phase géométrique (phase de Berry), qu'en peut définir sur une période $T = 2\pi/\omega$ comme :

$$\gamma_n(T) = i\int_0^T dt' \langle n(t')|\, \eta \frac{\partial}{\partial t'} |n(t')\rangle = -2\lambda_i \oint \sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\phi, \qquad T = 2\pi/\omega. \tag{4.28a}$$

En remplaçant l'équation (4.27) dans l'expression ci-dessus, peuvent donner la phase de Berry non-adiabatique qui est approprie aux deux systèmes $SU(2)$ et $SU(1,1)$.

Ces deux possibilités ($\pm$) montrés dans la fonction sinus hyperbolique Éq.(4.27) sont valables pour le système des bosons $SU(1,1)$ avec $D=-2$, par conséquant une seule valeur valide $(+)$ pour le système $SU(2)$ avec $D = 2$.

Dans tout ce qui suit, on va appliquer ces résultats généraux pour deux systèmes particuliers.

4.3.1 Le système $SU(1,1)$

Pour le système $SU(1,1)$ définit par la valeur $D=-2$, les générateurs de l'algèbre de Lie peuvent s'exprimer en fonction des opérateur de création et annihilation tel que

$$\hat{K}_0 = \frac{1}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right), \qquad \hat{K}_+ = \frac{1}{2}\left(\hat{a}^\dagger\right)^2, \qquad \hat{K}_- = \frac{1}{2}\left(\hat{a}\right)^2. \tag{4.29}$$

Dans ce cas l'Hamiltonien devient dans la représentation position un oscillateur harmonique usuel :

$$\begin{aligned}\widehat{H} = {} & \frac{1}{2}\left[\frac{\Omega}{2} + iG\sin\phi(t)\right]\widehat{x}^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{\Omega}{2} - iG\sin\phi(t)\right]\widehat{p}^2 \\ & - iG\cos\phi(t)\, xp. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Les états propre de l'opérateur $\hat{K}_0$ sont exprimés dans l'espace de Fock $\hat{a}^{\dagger}\widehat{a}\left|n\right\rangle = n\left|n\right\rangle$ où ses valeurs prores sont $\lambda_n = \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)$,

$$\hat{K}_0\left|n\right\rangle = \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left|n\right\rangle . \tag{4.31}$$

la fonction sinus hyperbolique [Éq.(4.27)] devient une fonction sinus dans le cas $D=-2$, c.à.d :

$$\sin^2(\frac{\varepsilon}{2}) = \frac{1}{2}\left[1 \pm \frac{(\omega+\Omega)}{\sqrt{(\omega+\Omega)^2+4G^2}}\right] . \tag{4.32}$$

D'où la phase LR (4.26) s'écrit

$$\alpha_n(t) = -\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^t dt'\left(\Omega - G\sin\varepsilon + 2\left(\Omega+\omega\right)\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{4.33}$$

Ainsi la phase de Berry non adiabatique, peut s'éxprimer comme

$$\gamma_n(T) = \pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(1 \pm \frac{\Omega+\omega}{\sqrt{(\Omega+\omega)^2+4G^2}}\right), \tag{4.34}$$

et dans l'approximation adiabatique ($\frac{d\phi}{dt}\to 0, T\to\infty$), elle se réduit à [55, 73]

$$\gamma_n(T) = \pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(1 \pm \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2+4G^2}}\right). \tag{4.35}$$

4.3.2 Le système $SU(2)$

Dans ce cas $D=2$ (ou algèbre de Lie $SU(2)$), alors l'équation aux valeurs propres de l'opérateur $\hat{K}_0$ est défini par

$$\hat{K}_0\left|j,n\right\rangle = n\left|j,n\right\rangle . \tag{4.36}$$

En remplaçant la valeur D par 2 dans l'Éq. (4.26), La phase LR s'écrit

$$\alpha_n(t) = -n\int_0^t dt'\left(\Omega + G\sinh\varepsilon + 2\left(\Omega+\omega\right)\sinh^2\frac{\varepsilon}{2}\right), \tag{4.37}$$

où

$$\sinh^2(\frac{\varepsilon}{2}) = \frac{1}{2}\left[\frac{(\omega+\Omega)}{\sqrt{(\omega+\Omega)^2-4G^2}} - 1\right]. \tag{4.38}$$

Par conséquant, la phase de Berry dans l'approximation adiabatique s'exprime comme suit :

$$\gamma_n(T) = -2\pi n\left(\frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2-4G^2}} - 1\right). \tag{4.39}$$

A l'aide de la théorie des pseudo-invariants, nous avons résolu un système non-hermitien dépendant du temps obeissant à l'algèbre $SU\left(1,1\right)$ et $SU\left(2\right)$. Nous avons défini un opérateur non-unitaire hermitien $\widehat{R}(t)$, pour construire un invariant $\widehat{I}(t)$, qui est évidemment non-hermitien et on a montré qu'il est pseudo-Hermitien à travers un opérateur metrique $\widehat{\eta}=\widehat{R}^{-2}$. L'invariant $\widehat{I}(t)$ possède un spectre réel pour les deux systèmes $SU(1,1)$ et $SU(2)$. Ce qui nous a amené à écrire la solution exacte en fonction des états propres de l'invariant et calculer la phase de Lewis Riesenfeld (LR) et la phase de Berry. Ces deux dernières phases sont en accord avec leurs homologues hermitiens [71, 72].

Conclusion

Dans cette thèse on a abordé les points suivants :

• Nous avons rappeler certaines notions sur la $\mathcal{PT}$-symétrie, la Pseudo-Hérmiticicité et les états cohérents.

• Nous avons relié l'oscillateur harmonique anti-PT-symétrique et l'oscillateur harmonique inversé H^{r} tel que $H^{\mathrm{r}} = \rho^{-1}(iH^{\mathrm{os}})\rho$, où nous avons utilisé la transformation de Dyson $\rho = \exp\left[\frac{\pi}{8}(xp+px)\right]$ et exprimé ses fonctions propres en terme des états propres de l'oscillateurs harmonique usuel. Ensuite nous avons construit les états cohérents généralisées de l'Hamiltonien inversé à l'aide des nouvaux opérateurs de création et annihilation $\left(\mathcal{A},\bar{\mathcal{A}}\right)$ satisfaisant la relation de commutation $\left[\mathcal{A},\bar{\mathcal{A}}\right] = 1$. Ce qui nous a permis à calculer les valeurs moyennes des quantités physique (x,p) , qui corresponds exactement à celles trouver en classique puis trouver les écarts quadratiques $(\Delta x, \Delta p)$ dans lequel nous arrivons à la relation d'incertitude d'Heisenberg $\Delta x.\Delta p = \frac{1}{2}$.

• Nous avons introduit la théorie des invariants pour des systèmes quantique dépendant du temps non-Hermitique, afin de l'appliquer aux systèmes non-hermitiques et dépendants du temps obéissant à l'algèbre $SU(1,1)$ et $SU(2)$.

Bibliographie

[1] G. Barton : Quantum mechanics of the inverted oscillator potential, *Ann. Phys.* **166**, 322 (1986).

[2] D. Chruscinski : Quantum mechanics of damped systems. II. Damping and parabolic potential barrier, *J. Math. Phys.* **45**, 841 (2004).

[3] D. Chruscinski : Quantum damped oscillator II : Bateman's Hamiltonian vs. 2D parabolic potential barrier, *Ann Phys.* **321**, 840 (2006).

[4] C. Yuce, A. Kilic and A. Coruh : Inverted Oscillator, Phys. *Phys. Scr.* **74,** 114 (2006).

[5] A. H. Guth and S.Y. Pi : Quantum mechanics of the scalar field in the new inflationary universe, *Phys. Rev. D.* **32**, 1899 (1991).

[6] S. Tarzi : The inverted harmonic oscillator : some statistical properties, *J. Phys. A : Math. Gen.* **21**, 3105(1988).

[7] H. Hofmann and D. Kiderlen : Statistical fluctuations for the fission process on its descent from saddle to scission, *Phys. Rev. C.* **56**, 1025 (1997).

[8] P. A. Miller and S. Sarkar : Fingerprints of classical instability in open quantum dynamics, *Phys. Rev. E.* **58**, 4217 (1998).

[9] G. Felder, A. Frolov, L. Kofman, and A. Linde : Cosmology with negative potentials, *Phys. Rev. D.* **66**, 023507 (2002).

[10] J. Ambjorn and R. A. Janik : Decoherence in Josephson Phase Qubits from Junction Resonators, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 077003 (2004).

[11] S. V. Morozov, K. S. Novoselov, M. I. Katsnelson, F. Schedin, L. A. Ponomarenko, D. Jiang, and A. K. Geim : Strong Suppression of Weak Localization in Graphene, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 016801 (2006).

[12] G. Chong and W. Hai : Dynamical evolutions of matter-wave bright solitons in an inverted parabolic potential, *J. Phys. B*. **40**, 211 (2007).

[13] F. H. Gaioli, E. T. GarciaAlvarez and M. A. Castagnino : Supersymmetric partners and confinement of a spiked inverted oscillator model, *Eur. Phys. J. Plus.* **130**, 228 (2015).

[14] S. Baskoutas, A. Jannussis, R. Mignani and V. Papatheou : Tunnelling process for non-Hermitian systems : the complex-frequency inverted oscillator, *J. Phys. A : Math. Gen.* **17**, 819 (1993).

[15] R. K. Bhaduri, A. Khare and J. Law : Phase of the Riemann Zeta function and the inverted harmonic oscillator, *Phys. Rev. E.* **52**, 486 (1995).

[16] R. K. Bhaduri, A. Khare, S. M. Reimann and E. L. Tomusiakl : The Riemann Zeta Function and the Inverted Harmonic Oscillator, *Ann. Phys.* **254**, 25 (1997).

[17] M. Castagnino, R. Diener, L. Lara, and G. Puccin : Rigged Hilbert spaces and time asymmetry : The case of the upside-down simple harmonic oscillator, *Int. J. of Theor. Phys.* **36**, 2349 (1997).

[18] T. Shimbori : Operator methods of the parabolic potential barrier, *Phys. Lett. A.* **273**, 37 (2000).

[19] I. A. Pedrosa, I. Guedes : Quantum States of a Generalized Time-Dependent Inverted Harmonic Oscillator, *Int. J. Mod. Phys. B.* **18**, 1379 (2004).

[20] C. A. Muñtoz : J. Rueda-Paz, and K. B. Wolf, Discrete repulsive oscillator wave functions, *J. Phys. A.* **42**, 485210 (2009).

[21] T. Shimbori and T. Kobayashi : Complex eigenvalues of the parabolic potential barrier and Gel'fand triplet, *Nuovo Cimento B.* **115**, 325 (2000)

[22] D. Bermudez and D. J. Fernández : Factorization method and new potentials from the inverted oscillator, *Ann. Phys.* **333**, 290 (2013).

[23] M. Maamache, Y. Bouguerra and J. R. Choi : Time behavior of a Gaussian wave packet accompanying the generalized coherent state for the inverted oscillator, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2016**, 6 (2016).

[24] K. Rajeev, S. Chakraborty and T. Padmanabhan : Inverting a normal harmonic oscillator : physical interpretation and applications, *Gen. Relativ. Gravit.* **50**, 116 (2018).

[25] R. D. Mota, D.Ojeda-Guillén, M. Salazar-Ramírez, and V. D. Granados : Non-Hermitian inverted harmonic oscillator-type Hamiltonians generated fromsupersymmetry with reflections, *Mod. Phys. Lett. A.* **34**, 1950028 (2019).

[26] K. Aouda, N. Kanda, Sh. Naka and H. Toyoda : Ladder operators in repulsive harmonic oscillator with application to the Schwinger effect, *Phys. Rev. D.* **102**, 025002 (2020).

[27] A. Bhattacharyya, W. Chemissany, S. S. Haque, J. Murugan and B. Yan : The multi-faceted inverted harmonic oscillator : Chaos and complexity, *SciPost Phys.* **4**, 002 (2021).

[28] V. Subramanyan, S. S. Hegde, S. Vishveshwara, B. Bradlyn : Physics of the Inverted Harmonic Oscillator : From the lowest Landau level to event horizons, *Ann. Phys.* **435**, 168470 (2021).

[29] C. M. Bender and S. Boettcher : Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having $\mathcal{PT}$-Symmetry, Phys. Rev. Lett. **80**, 5243 (1998).

[30] C. M. Bender, M. V. Berry, A. Mandilara : Generalized PT symmetry and real spectra, *J. Phys. A : Math. Gen.* **35**, 467 (2002).

[31] J. Rubinstein, P. Sternberg, Q. Ma : Bifurcation diagram and pattern formation of phase slip centers in superconducting wires driven with electric currents, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 167003 (2007).

[32] K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, and Z. H. Musslimani : Beam Dynamics in Symmetric Optical Lattices, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 103904 (2008).

[33] Z. H. Musslimani, K. G. Makris, R. El-Ganainy, and D. N. Christodoulides : Optical Solitons in Periodic Potentials, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 030402 (2008).

[34] J. Schindler, Z. Lin, J. M. Lee, H. Ramezani, F. M. Ellis, and T. Kottos : The self-collimation effect induced by non-Hermitian acoustic systems, *J. Phys. A : Math. Theor.* **45**, 444029 (2012).

[35] C. M. Bender, B. Berntson, D. Parker, E. Samuel : Systems of coupled $\mathcal{PT}$ -symmetric oscillators, *Am. J. Phys.* **81**, 173 (2013).

[36] L. Feng,Y. -L. Xu, W. S. Fegadolli, M. -H. Lu, J. E. B. Oliveira, V. R. Almeida, Y. -F. Chen, and A. Scherer : Single-mode laser by parity-time symmetry breaking, *Nat. Matter.* **12**, 108 (2013).

[37] L. Feng, Z. J. Wong, R. M. Ma, Y. Wang, X. Zhang : Single-mode laser by parity-time symmetry breaking, *Science.* **346**, 972 (2014).

[38] H. Hodaei, M. -A. Miri, M. Heinrich, D. N. Christodoulides, M. Khajavikhan : Parity-time–symmetric microring lasers, *Science.* **346**, 975 (2014).

[39] S. V. Suchkov, A. A. Sukhorukov, J. Huang, S. V. Dmitriev, C. Lee, Yu. S. Kivshar : Nonlocal solitons supported by non-parity-time-symmetric complex potentials, *Laser Photonics Rev.* **10**, 177 (2016).

[40] L. Ge and H. E. Türeci : Antisymmetric $\mathcal{PT}$-photonic structures with balanced positive- and negative-index mateials, *Phys. Rev. A.* **88**, 053810 (2013).

[41] J. H. Wu, M. Artoni, G. C. La Rocca : Non-Hermitian Degeneracies and Unidirectional Reflectionless Atomic Lattices, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 123004 (2014).

[42] S. Longhi : Phase transitions in Wick-rotated $\mathcal{PT}$-symmetric optics, *Ann. Phys.* **360**, 150 (2015).

[43] P. Peng, W. Cao, C. Shen, W. Qu, J. Wen, L. Jiang, Y. Xiao : Anti-parity–time symmetry with flying atoms, *Nat. Phys.* **12**, 1139 (2016).

[44] M. Maamache and L. Kheniche : Anti-PT symmetry for a non-Hermitian Hamiltonian, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2020,** 6 (2020).

[45] F. G. Scholtz, H. B. Geyer and F. J. W. Hahne : Quasi-Hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle, *Ann. Phys.* **213** (1992).

[46] A. Mostafazadeh : Pseudo-Hermiticity versus $\mathcal{PT}$-symmetry : The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian, *J. Math. Phys.* **43**, 205(2002).

[47] A. Mostafazadeh : Pseudo-Hermiticity versus $\mathcal{PT}$-symmetry.II. A complete characterization of non-Hermitian Hamiltonians with real spectrum, *J. Math. Phys.* **43**, 2814 (2002).

[48] A. Mostafazadeh : Pseudo-Hermiticity versus $\mathcal{PT}$ -symmetry.III. Equivalence of Pseudo Hermiticity and the presence of antilinear symmetries, *J.Math. Phys.* **43**, 3944 (2002).

[49] A. Mostafazadeh : Pseudo-Hermiticity and Generalized $\mathcal{PT}$- and $\mathcal{CPT}$-Symmetries, *J. Math. Phys.* **44**, 974 (2003).

[50] H. R. Lewis and W. B. Riesenfeld : An Exact Quantum Theory of the Time-Dependent Harmonic Oscillator and of a Charged Particle in a Time-Dependent Electromagnetic Field, *J. Math. Phys.* **10**, 1458 (1969).

[51] B. Khantoul, A. Bounames, M. Maamache : On the invariant method for the time-dependent non-Hermitian Hamiltonians. *Eur. Phys. J. Plus.* **132**, 258 (2017).

[52] M. Maamache, O. K. Djeghiour, N. Mana, W. Koussa : Pseudo-invariants theory and real phases for systems with non-Hermitian time-dependent Hamiltonians. *Eur. Phys. J. Plus.* **132**, 383 (2017).

[53] C. M. Bender, D. C. Brody, H. F. Jones : Complex Extension of Quantum Mechanics, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 270401 (2002).

[54] W. Koussa, N. Mana, O. K. Djeghiour, M. Maamache : The pseudo-Hermitian invariant operator and time-dependent non-Hermitian Hamiltonian exhibiting an $SU(1,1)$ and $SU(2)$ dynamical symmetry, *J. Math. Phys.* **59**, 072103 (2018).

[55] M. V. Berry : Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc. R. Soc. London. A.* **45**, 392 (1984).

[56] C. M. Bender, P. N. Meisinger, Q. Wang : Calculation of the hidden symmetry operator in PT-symmetric quantum mechanics, *J. Phys. A : Math. Gen.* **36**, 1973 (2003).

[57] C. M. Bender : Four easy pieces, *J. Phys. A : Math. Gen.* **39**, 9993 (2006).

[58] C. M. Bender : Making sense of non-Hermitian Hamiltonians, *Rep. Prog. Phys.* **70**, 947 (2007).

[59] W. M. Zhang, D. H. Feng, R. Gilmore : Coherent states : Theory and some applications, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 867 (1990).

[60] A. M. Perelomov : Generalized Coherent States and their Applications, *Springer-Verlag, Berlin*, (1986).

[61] P. A. M. Dirac, The physical interpretation of quantum mechanics, *Proc. Roy. Soc. London A.* **180**, 1 (1942).

[62] W. Pauli, On Dirac's New Method of Field Quantization, *Rev. Mod. Phys.* **15**, 175 (1943).

[63] S. N. Gupta : Theory of Longitudinal Photons in Quantum Electrodynamics, *Proc. Phys. Soc. London.* **63**, 681 (1950).

[64] E.C.G. Sudarshan : Quantum mechanical systems with indefinite metric, *Phys. Rev.* **123,** 2183 (1961) .

[65] F. J. Dyson : Thermodynamic behavior of an ideal ferromagnet, *Phys. Rev.* **102,** 1230 (1956) .

[66] E. Schrödinger : Der stetige Übergang von der Mikro-zur Makromechanik, *Naturwissenschaften* **14**, 664 (1926).

[67] R. J. Glauber : The Quantum Theory of Optical Coherence, *Phys. Rev.***130,** 2529 (1963), Photon Correlations, *Phys. Rev. Lett.* **10,** 84 (1963), Coherent and Incoherent States of the Radiation Field, *Phys. Rev.* **131**, 2766 (1963) .

[68] Y. Gu, X. M. Bai, X. L. Hao, J. Q. Liang : $\mathcal{PT}$-symmetric non-Hermitian Hamiltonian and invariant operator in periodically driven $SU(1,1)$ system, *Results. in. Physics.* **38**, 105561 (2022).

[69] Y. Gu, X. L. Hao, J. Q. Liang : Generalized Gauge Transformation with $\mathcal{PT}$-Symmetric Non-Unitary Operator and Classical Correspondence of Non-Hermitian Hamiltonian for a Periodically, *Annalen. der. Physik.* 202200069 (2022).

[70] Y. Z. Lai, J. Q. Liang, H. J. W. Muller-Kirsten, J. G. Zhou : Time-dependent systems and the invariant Hermitian operator, *Phys. Rev. A.* **53**, 3691 (1996).

[71] Y. Z. Lai, J. Q. Liang, H. J. W. Muller-Kirsten and J. G. Zhou : Time evolution of quantum systems with time-dependent Hamiltonian and the invariant Hermitian operator, *J. Phys. A : Math. Gen.* **29**. 1773 (1996).

[72] M. Maamache : Unitary transformation approach to the cyclic evolution of $SU(1,1)$ and $SU(2)$ time-dependent systems and geometrical phases, *J. Phys. A : Math. Gen.* **31**, 6849 (1998).

[73] Da-Jian Zhang, P. Z. Zhao, G. F. Xu : Inconsistency of the theory of geometric phases in adiabatic evolution, *Phys. Rev. A.* **105**, 042208 (2022).

Articles

Vol. 90 (2022) *REPORTS ON MATHEMATICAL PHYSICS* No. 3

ANTI-$\mathcal{PT}$-SYMMETRIC HARMONIC OSCILLATOR AND ITS RELATION TO THE INVERTED HARMONIC OSCILLATOR

Nadjat Amaouche[1], Ishak Bouguerche[1], Rahma Zerimeche[1,2] and Mustapha Maamache[1]

[1]Laboratoire de Physique Quantique et Systèmes Dynamiques,
Faculté des Sciences, Ferhat Abbas Sétif 1, Sétif 19000, Algeria
[2]Physics Department, University of Jijel, BP 98, Ouled Aissa,
18000 Jijel, Algeria
(e-mails: nadjatamaouch@gmail.com, isaacmadrid77@yahoo.com, zerimecherahma@gmail.com,
maamache@univ-setif.dz)

(*Received March 21, 2022 — Revised June 9, 2022*)

We treat the quantum dynamics of a harmonic oscillator as well as its inverted counterpart in the Schrödinger picture. Generally in the most papers in the literature, the inverted harmonic oscillator is formally obtained from the harmonic oscillator by the replacement of ω by $i\omega$, this leads to unbounded eigenvectors. This explicitly demonstrates that there are some unclear points involved in redefining the variables in the harmonic oscillator inversion. To remedy this situation, we introduce a scaling operator (Dyson transformation) by connecting the inverted harmonic oscillator to an anti-$\mathcal{PT}$-symmetric harmonic oscillator, and we obtain the standard quasi-Hermiticity relation which would ensure the time invariance of the eigenfunction's norm. We give a complete description for the eigenproblem. We show that the wave functions for this system are normalized in the sense of the pseudo-scalar product. A Gaussian wave packet of the inverted oscillator is investigated by using the ladder operators method. This wave packet is found to be associated with the generalized coherent state that can be crucially utilized for investigating the mean values of the space and momentum operators. We find that these mean values reproduce the classical motion.

Keywords: inverted oscillator, harmonic oscillator, anti-$\mathcal{PT}$-symmetry, inverted coherent states.

This paper is dedicated to the memory of ours colleagues: Brahim Bouzerafa and Rabah Zegadi who died of covid 19. And to Ali-Sahraoui Ferhat who died of cardiac arrest.

1. Introduction

The inverted harmonic oscillator is described by the operator

$$H^{\mathrm{r}} = \frac{1}{2m}p^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2, \tag{1}$$

where the index r specifies inverted or repulsive, has attracted great attention over the years in quantum mechanics [1–4]. It is of course not positive definite but symmetric on the domain $\mathcal{D} \subset$ in the Hilbert space $\mathcal{H}$ endowed with scalar product $\langle .,. \rangle$ and related norm $\|.\|$. It is well known that this system gives rise to a complex eigenvalues and a nonphysical eigenvectors although H^{r} is self-adjoint and the physical reason is that its potential is unbounded from below.

The inverted harmonic oscillator obtained by changing ω to $\pm i\omega$ in the harmonic oscillator, is often encountered as a phenomenological model in dissipative processes and has been used among others, as a model of instability in quantum mechanics [5–9]. In fact, its associated time-dependent solutions of the Schrödinger equation can be mapped to those of the harmonic potentials [10–15]. It yields some physical information on scales that span classical mechanics to quantum field theory [16–18]. Recently in [19], the Hamiltonian of the inverted oscillator has been used to understand the quantum mechanics of scattering and time-decay in a diverse set of physical systems.

This system has a wide range of applications in different branches of physics [20–28] such as the tunnelling effects, the mechanism of matter-wave bright solitons, the cosmological model, and the quantum theory of measurements.

From the fact that we are able to invert a standard oscillator by redefining the frequency ω, we expect both of the normal and the inverted oscillator representations to possess the same observable consequences. However, it is not clear how this result truly comes about. It is important to note that the regular and the inverted harmonic oscillators are genuinely different. As a result, one cannot take for granted the known formulae of the regular oscillator and extrapolate them to the inverted oscillator by simply replacing ω with $\pm i\omega$. Among the goals of this paper is to define the transformation which connects the harmonic oscillator to the inverted one and describes the physical situation, thereby clarifying several questions.

The analytic continuation of the angular velocity $\omega \to \pm i\omega$ leads to an imaginary energy spectrum which eventually could be obtained as an eigenvalue of the anti-$\mathcal{PT}$-symmetric non-Hermitian Hamiltonian $(\pm iH^{\mathrm{os}})$. The question that quickly comes to mind is can we relate H^{r} and $(\pm iH^{\mathrm{os}})$? or precisely, which method should be used to obtain, from the anti-$\mathcal{PT}$ non-Hermitian oscillator $(\pm iH^{\mathrm{os}})$, the inverted oscillator H^{r} without recourse to the substitution of ω by $\pm i\omega$? We will try to answer these questions in the next section.

Another important branch in studying quantum systems is the so-called non-Hermitian quantum mechanics. It was found that the criteria for a non-Hermitian quantum Hamiltonian to have a real spectrum is that it possesses an unbroken $\mathcal{PT}$-symmetry ($\mathcal{P}$ is the space-reflection operator or parity operator, and $\mathcal{T}$ is the time-reversal operator) [29, 30]. The concept of $\mathcal{PT}$-symmetry has found applications in several areas of physics [31–39]. Due to the fact that the energy spectrum of $(\pm iH^{\mathrm{os}})$ is completely imaginary, the physical structure of the system changes. We recall that a $\mathcal{PT}$-symmetric system can be transformed to an anti-$\mathcal{PT}$-symmetric one by the transformation $H^{\mathrm{os}} \to (\pm iH^{\mathrm{os}})$ [40–43].

In analogy with the $\mathcal{PT}$-symmetric case, we call the anti-$\mathcal{PT}$-symmetry of a Hamiltonian H unbroken if all of the eigenfunctions of H are eigenfunctions of the $\mathcal{PT}$ operator, i.e. when the energy spectrum of H is entirely imaginary [44]. An alternative approach exploring the basic structure responsible of a non-Hermitian

Hamiltonian is the notion of the pseudo-Hermiticity introduced in [45]. Mostafazadeh [46] pointed out that the condition for a Hamiltonian H to be $\mathcal{PT}$-symmetric can be understood more generally as a special case of pseudo-Hermiticity. An operator H is said to be pseudo-Hermitian or quasi-Hermitian if it satisfies the following relation

$$H^{\dagger} = \eta H \eta^{-1}, \tag{2}$$

where the Hermitian operator $\eta = \rho^{+}\rho$ and the Dyson operator ρ are linear and invertible. The pseudo-Hermiticity links as well the pseudo-Hermitian Hamiltonian H with an equivalent Hermitian Hamiltonian h,

$$h = \rho H \rho^{-1}. \tag{3}$$

In what follows, we only consider the anti-$\mathcal{PT}$-symmetric Hamiltonian case (iH^{os}). Similarly, the case $(-iH^{\mathrm{os}})$ would serve equally well.

In the present paper, we generate from anti-$\mathcal{PT}$-symmetric Hamiltonian (iH^{os}) an inverted harmonic oscillator-type Hamiltonian H^{r} which is a Hermitian Hamiltonian and thus its solution is real.

The paper is organized as follows. In Section 2, we recall briefly some properties of the standard harmonic and inverted oscillators. Then we introduce an appropriate quantum scaling operator η which links the anti-$\mathcal{PT}$-symmetric Hamiltonian oscillator (iH^{os}) to the inverted oscillator Hamiltonian H^{r}. We obtain the set of solutions of the inverted harmonic oscillator and also we define the full orthonormalization relation of eigenstates of H^{r}. This procedure allows us to construct the ladder operators for the inverted harmonic oscillator, in Section 3, where we will address the problem of construction of generalized coherent states associated with the inverted oscillator H^{r}. We obtain the mean values of the space and momentum operators in the generalized coherent states and furthermore we calculate the corresponding Heisenberg uncertainty. An outlook over the main results is given in the conclusion.

2. Generalized eigenfunction of the inverted harmonic oscillator

Let us first recall some properties of the harmonic oscillator which are useful to introduce the inverted oscillator. The Hamiltonian of the harmonic oscillator is

$$H^{\mathrm{os}} = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \tag{4}$$

and its normalized eigenfunctions are given by means of Hermite polynomial as

$$\psi_n^{\mathrm{os}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{\omega m}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{-\omega m}{2\hbar}x^2\right] H_n\left(\sqrt{\frac{\omega m}{\hbar}}x\right). \tag{5}$$

Therefore the spectrum is discrete and the eigenvalues of (4) are nonnegative real numbers which correspond to the quantized energy levels

$$E_n^{\mathrm{os}} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad \omega > 0, \tag{6}$$

and the orthonormal condition is well preserved

$$\left\langle \psi_m^{\mathrm{os}}(x) \left| \psi_n^{\mathrm{os}}(x) \right.\right\rangle = \int \psi_m^{*\mathrm{os}}(x) \psi_n^{\mathrm{os}}(x) dx = \delta_{mn}, \tag{7}$$

naturally, the linear combination $\sum_n c_n \psi_n^{\mathrm{os}}(x)$ is a square integrable function for $\sum_n |c_n|^2 < \infty$.

The Hamiltonian (1) is formally obtainable from the harmonic oscillator by the change $\omega \to \pm i\omega$ and it corresponds to the Hamiltonian of the harmonic oscillator with purely imaginary frequency. Therefore, this replacement transforms the eigenfunctions of the harmonic oscillator (5) into generalized eigenvectors of the inverted harmonic oscillator (1)

$$\psi_n^{\mathrm{r}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{i\omega m}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{-i\omega m}{2\hbar} x^2\right] H_n\left(\sqrt{\frac{i\omega m}{\hbar}} x\right), \tag{8}$$

$$\widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{-i\omega m}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{i\omega m}{2\hbar} x^2\right] H_n\left(\sqrt{\frac{-i\omega m}{\hbar}} x\right), \tag{9}$$

which should be proved as eigenvectors of the inverted harmonic oscillator (1) with the discrete purely imaginary spectrum

$$E_n^{\mathrm{r}} = \pm i E_n^{\mathrm{os}} = \pm i\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{10}$$

From the mathematical point of view, the solution of the inverted Hamiltonian in (1) is similar to that of the harmonic oscillator. But these transformations, applied to the potential of the harmonic oscillator, turn it into the potential $-\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ and the same happens with the eigenvalues: they are transformed from discrete real eigenvalues to discrete imaginary ones. Once again we see that these generalized eigenfunctions cannot represent physical states. When calculating the squared norm of these functions

$$\left\langle \psi_n^{\mathrm{r}} \left| \psi_n^{\mathrm{r}} \right.\right\rangle = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{\omega m}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} H_n\left(\sqrt{\frac{-i\omega m}{\hbar}} x\right) H_n\left(\sqrt{\frac{i\omega m}{\hbar}} x\right) dx \neq 1, \tag{11}$$

$$\left\langle \widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}} \left| \widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}} \right.\right\rangle = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{\omega m}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} H_n\left(\sqrt{\frac{i\omega m}{\hbar}} x\right) H_n\left(\sqrt{\frac{-i\omega m}{\hbar}} x\right) dx \neq 1, \tag{12}$$

we see that they diverge in the limit $|x| \to \infty$ as x^{2n}. Therefore any nontrivial linear combination does not yield a square integrable function. Clearly, ψ_n^{r} $(\widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}})$ are not elements of $L^2(R)$.

Finally, we are left with the following question: what is the relation between the eigenfunctions $\psi_n^{\mathrm{os}}(x)$ (5) and those of the inverted oscillator $\psi_n^{\mathrm{r}}(x)$ (8) (or (9))?

It is important to emphasize that the functions $\psi_n^{\mathrm{r}}(x)$ and $\widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}}(x)$ are essentially the rotated versions of the eigenstates $\psi_n^{\mathrm{os}}(x)$ in (5),

$$\psi_n^{\mathrm{r}}(x) = e^{i\frac{\pi}{8}} \psi_n^{\mathrm{os}}(xe^{i\frac{\pi}{4}}), \qquad \widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}}(x) = e^{-i\frac{\pi}{8}} \psi_n^{\mathrm{os}}(xe^{-i\frac{\pi}{4}}). \tag{13}$$

What we have done so far can be restated in terms of a similarity operator, ρ, an unbounded operator with an unbounded inverse. We put $\psi_n^{\mathrm{r}}(x) = \rho^{-1}\psi_n^{\mathrm{os}}(x)$, i.e. ρ^{-1} brings any wave function $\psi_n^{\mathrm{os}}(x)$ into the wave function $\psi_n^{\mathrm{r}}(x)$. One possibility is to take for ρ the complex squeezed operator $\exp\left[-\frac{\pi}{8}(xp+px)\right]$, because if $|\psi\rangle$ is the state vector of a system then $\exp\left[-\frac{\pi}{8}(xp+px)\right]|\psi\rangle$ represents the same system compressed in position space by the factor $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ and expanded in momentum space by the factor $e^{+i\frac{\pi}{4}}$. Indeed, this transformation changes the coordinate x and momentum p operators as

$$\exp\left[\frac{\pi}{8}(xp+px)\right]x\exp\left[-\frac{\pi}{8}(xp+px)\right] = xe^{-i\frac{\pi}{4}},$$

$$\exp\left[\frac{\pi}{8}(xp+px)\right]p\exp\left[-\frac{\pi}{8}(xp+px)\right] = pe^{i\frac{\pi}{4}}, \tag{14}$$

and thus

$$\exp\left[\frac{\pi}{8}(xp+px)\right]H^{\mathrm{r}}\exp\left[-\frac{\pi}{8}(xp+px)\right] = (iH^{\mathrm{os}})\,. \tag{15}$$

An important property of the transformation ρ is that its action on a wave function in the x representation reads $\rho f(x) = e^{i\frac{\pi}{8}}f(xe^{i\frac{\pi}{4}})$. This suggests that we can establish a connection between $\psi_n^{\mathrm{r}}(x)$ (8) and $\psi_n^{\mathrm{os}}(x)$ (5) as

$$\psi_n^{\mathrm{r}}(x) = \exp\left[-\frac{\pi}{8}(xp+px)\right]\psi_n^{\mathrm{os}}(x) = e^{i\frac{\pi}{8}}\psi_n^{\mathrm{os}}(xe^{i\frac{\pi}{4}}) \tag{16}$$

and for $\widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}}(x)$ (9) in the form

$$\widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}}(x) = \exp\left[\frac{\pi}{8}(xp+px)\right]\psi_n^{\mathrm{os}}(x) = e^{-i\frac{\pi}{8}}\psi_n^{\mathrm{os}}(xe^{-i\frac{\pi}{4}}). \tag{17}$$

We now return to Eqs. (9), (16), (17) and notice that

$$\widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}}(x) = \exp\left[\frac{\pi}{4}(xp+px)\right]\psi_n^{\mathrm{r}}(x). \tag{18}$$

We observe that these two families of generalized eigenvectors $\psi_n^{\mathrm{r}}(x)$ and $\widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}}(x)$ have the remarkable properties:

i) Formulae (16) and (17) imply that they are conjugate to each other,

$$\widetilde{\psi}_n^{*\mathrm{r}}(x) = \psi_n^{\mathrm{r}}(x), \tag{19}$$

which implies that $\psi_n^{\mathrm{r}}(x)$ and $\widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}}(x)$ are related by the time-reversal operator $T\psi_n^{\mathrm{r}}(x) = \widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}}(x)$.

ii) They are biorthonormal

$$\begin{aligned}\left\langle\widetilde{\psi}_m^{\mathrm{r}}\,\middle|\psi_n^{\mathrm{r}}\right\rangle &= \left\langle\psi_m^{\mathrm{r}}\,\middle|\widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}}\right\rangle \\ &= \left\langle\psi_n^{\mathrm{os}}\middle|\,e^{\left[-\frac{\pi}{8}(xp+px)\right]}e^{\left[\frac{\pi}{8}(xp+px)\right]}\,\middle|\psi_n^{\mathrm{os}}\right\rangle = \delta_{mn},\end{aligned} \tag{20}$$

the generalized orthonormal relation (20) involves the eigenvectors $\left|\psi_n^{\mathrm{r}}\right\rangle$ as well as $\left|\widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}}\right\rangle$.

iii) They are bicomplete

$$\sum_0^\infty \left|\psi_n^{\mathrm{r}}(x)\right\rangle \left\langle\widetilde{\psi}_m^{\mathrm{r}}(x')\right| = \sum_0^\infty \left|\widetilde{\psi}_m^{\mathrm{r}}(x)\right\rangle \left\langle\psi_n^{\mathrm{r}}(x')\right|$$
$$= e^{\left[\frac{\pi}{8}(xp+px)\right]} \sum_n \left|\psi_n^{\mathrm{os}}\right\rangle \left\langle\psi_n^{\mathrm{os}}\right| e^{\left[-\frac{\pi}{8}(xp+px)\right]} = \delta(x-x'). \tag{21}$$

The proof follows immediately from the orthonormality and the completeness of the oscillator's eigenfunctions ψ_n^{os}. Indeed, for the harmonic oscillator, the completeness relation is $\sum_n \left|\psi_n^{\mathrm{os}}(x)\right\rangle \left\langle\psi_n^{\mathrm{os}}(x')\right| = \delta(x-x')$, where the kets $\left|\psi_n^{\mathrm{os}}\right\rangle = \exp\left[\frac{\pi}{8}(xp+px)\right]\left|\psi_n^{\mathrm{r}}\right\rangle$ form a complete set of bases, consequently the bicompleteness relation (21) is verified.

Notice that the generalized biorthonormalization relation (20) can be rewritten as

$$\left\langle\widetilde{\psi}_m^{\mathrm{r}} \middle| \psi_n^{\mathrm{r}}\right\rangle = \left\langle\psi_n^{\mathrm{r}}\right| \eta \left|\psi_n^{\mathrm{r}}\right\rangle = \delta_{mn}, \tag{22}$$

which introduces the notion of the η-pseudo-scalar product where the operator η is defined as

$$\eta = \exp\left[\frac{\pi}{4}(xp+px)\right] = \rho^+\rho, \tag{23}$$

and

$$\rho = \exp\left[\frac{\pi}{8}(xp+px)\right]. \tag{24}$$

Now, the condition (11) yields

$$\left\langle\psi_m^{\mathrm{r}}\right| \eta \left|\psi_n^{\mathrm{r}}\right\rangle = \psi_n^{\mathrm{os}}(x) \exp\left[-\frac{\pi}{8}(xp+px)\right] \quad [\eta] \quad \exp\left[-\frac{\pi}{8}(xp+px)\right]\psi^{\mathrm{os}}(x)dx = \delta_{mn}. \tag{25}$$

Under this observation, we deduce that to ensure the normalization condition concerning the inverted eigenfunctions, one must clearly apply the η-pseudo-inner product $\langle,\rangle_\eta$. This proves that one of the fundamental basis in the study of the inverted oscillator is the pseudo-Hermicity concept.

Therefore, the operator η links (iH^{os}) to its Hermitian conjugate

$$(-iH^{\mathrm{os}}) = \eta(iH^{\mathrm{os}})\eta^{-1}, \tag{26}$$

which is nothing more than the quasi-Hermiticity relation. It then follows immediately, that the two Hamiltonians H^{r} and (iH^{os}) are related to each other as

$$H^{\mathrm{r}} = \rho^{-1}(iH^{\mathrm{os}})\rho. \tag{27}$$

Therefore, Eq. (25) stands for the η inner product $\langle,\rangle_\eta$ in the pseudo-Hermitian case. The eigenfunctions of the inverted harmonic oscillator $\psi_n^{\mathrm{r}}(x)$ are related to the eigenfunctions of the harmonic oscillator $\psi_n^{\mathrm{os}}(x)$ via the transformation operator ρ (24) as

$$\psi_n^{\mathrm{r}}(x) = \rho^{-1}\psi^{\mathrm{os}}(x), \tag{28}$$

thus any nontrivial linear combination $\sum_n c_n \psi_n^{\mathrm{r}}(x)$ yields a square integrable function for $\sum_n |c_n|^2 < \infty$.

As advertised before, let us go back to the properties (20) and (21) of the generalized eigenvectors $\psi_n^{\mathrm{r}}(x)$ and $\widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}}(x)$. The unbounded operator $\eta = \exp\left[\frac{\pi}{4}(xp + px)\right]$, that cannot be defined on all of Hilbert space $\mathcal{H}$, acts on $\mathcal{H}$ with domain $\mathfrak{D}(\eta)$ and let $\mathcal{D}$ be a dense subspace of $\mathcal{H}$ such that $\eta\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$, where $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{D}(\eta)$. We can define in $\mathcal{D}$ the vectors $\left|\psi_n\right\rangle$ and $\left|\phi_n\right\rangle = \eta\left|\psi_n\right\rangle$ and the related sets $F_{\psi_n^{\mathrm{r}}} = \{\left|\psi_n^{\mathrm{r}}\right\rangle, n \geq 0\}$, $F_{\widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}}} = \{\left|\widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}}\right\rangle = \eta\left|\psi_n^{\mathrm{r}}\right\rangle, n \geq 0\}$. In particular, this leads to Eq. (22) so that $F_{\psi_n^{\mathrm{r}}}$ and $F_{\widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}}}$ are biorthogonal sets and consequently $F_{\psi_n^{\mathrm{r}}} = \{\left|\psi_n^{\mathrm{r}}\right\rangle\}$ and $F_{\widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}}} = \{\left|\widetilde{\psi}_n^{\mathrm{r}}\right\rangle\}$ are bases for $\mathcal{H}$.

We can assert that the generalized orthonormalization condition (20) or rather (22) can be interpreted as a biorthonormalization condition. Thus, from Eqs. (16) and (18), the completeness relation (21) can be immediately deduced from that of the oscillator eigenfunction, i.e. $\sum_n \left|\psi_n^{\mathrm{os}}\right\rangle\left\langle\psi_n^{\mathrm{os}}\right| = \mathbf{I}$.

Before discussing in the next section the coherent states of the inverted oscillator H^{r}, let us introduce the dimensionless annihilation and creation operators of the quantum harmonic oscillator H^{os} as

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\frac{p}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \qquad a^{+} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\frac{p}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \tag{29}$$

these ladder operators (29) can be represented in terms of position x and momentum p operators

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^{+} + a), \qquad p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^{+} - a), \tag{30}$$

while their commutation relation is

$$[a, a^{+}] = 1. \tag{31}$$

The best way to present the inverted coherent states is to translate their definitions into the language of coherent states of the harmonic oscillator. Coherent states, or semi-classical states, are remarkable quantum states that were originally introduced in 1926 by Schrödinger for the Harmonic oscillator [47] where the mean values of the position and momentum operators in these states have properties close to the classical values of the position $x_c(t)$ and the momentum $p_c(t)$. In particular, we can construct the coherent states of the harmonic oscillator $|\alpha\rangle$ [48–50] as eigenstates of the annihilation operator a,

$$a\left|\alpha\right\rangle = \alpha\left|\alpha\right\rangle, \qquad \alpha \in C. \tag{32}$$

They can be also obtained from the vacuum state $|0\rangle$ by the action of the unitary displacement operator $D(\alpha)$

$$D(\alpha)\left|0\right\rangle = \exp\left(\alpha\ a^{+} - \alpha^{*}a\right)\left|0\right\rangle. \tag{33}$$

3. Generalized coherent states for the inverted harmonic oscillator

One can verify that in the case of the inverted oscillator, the form of Hamiltonian (1) reads

$$H^{\mathrm{r}} = \frac{i\hbar\omega}{2}(\bar{\mathcal{A}}\ \mathcal{A} + \mathcal{A}\ \bar{\mathcal{A}}), \tag{34}$$

where the ladder operators $(\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}})$ are linked to those in Eq. (29) through the transformation

$$\mathcal{A} = \rho^{-1} a \rho = \exp\left[i\frac{\pi}{4}\right]\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\right) = \left(\sqrt{\frac{im\omega}{2\hbar}}x + \frac{ip}{\sqrt{2mi\omega\hbar}}\right), \tag{35}$$

$$\bar{\mathcal{A}} = \rho^{-1} a^{\dagger} \rho = \exp\left[i\frac{\pi}{4}\right]\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\right) = \left(\sqrt{\frac{mi\omega}{2\hbar}}x - \frac{ip}{\sqrt{2mi\omega\hbar}}\right), \tag{36}$$

and satisfy the following commutation relation $\left[\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}\right] = 1$. As in the case of harmonic oscillator, the coherent states for the inverted oscillator $\left|\varphi^{\mathrm{r}}_{\alpha}\right\rangle^{\mathcal{A}}$ can be defined as eigenstates of the annihilation operator A,

$$\mathcal{A}\left|\varphi^{\mathrm{r}}_{\alpha}\right\rangle^{\mathcal{A}} = \alpha\left|\varphi^{\mathrm{r}}_{\alpha}\right\rangle^{\mathcal{A}}, \qquad \alpha \in C. \tag{37}$$

It should be noted that Eqs. (35) and (36) indicate that the eigenvalue α can be considered as being a real eigenvalue of the Hermitian operator $\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\right)$ multiplied by the phase factor $e^{+i\frac{\pi}{4}}$,

$$\alpha = |\alpha|\, e^{+i\frac{\pi}{4}}. \tag{38}$$

In the x representation, Eq. (37) can be written as

$$\left(\sqrt{\frac{mi\omega}{2\hbar}}x + \frac{\hbar}{\sqrt{2mi\omega\hbar}}\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi^{\mathrm{r}}_{\alpha}(x) = \alpha\varphi^{\mathrm{r}}_{\alpha}(x), \tag{39}$$

and can be explicitly solved; we obtain

$$\begin{aligned}
\varphi^{\mathrm{r}}_{\alpha}(x) &= \left(\frac{im\omega}{2\hbar\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{i}{2}|\alpha|^2} \exp\left[\left(\sqrt{\frac{2im\omega}{\hbar}}\alpha x - i\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)\right] \\
&= \left(\frac{im\omega}{2\hbar\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{i}{2}|\alpha|^2} \exp\left[\alpha\left(\mathcal{A} + \bar{\mathcal{A}}\right)\right] \exp\left[-i\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right] \\
&= \left(\frac{im\omega}{2\hbar\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[\alpha\bar{\mathcal{A}}\right] \exp\left[\alpha\mathcal{A}\right] \exp\left[-i\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right] \\
&= \exp\left[\alpha\bar{\mathcal{A}}\right] \varphi^{\mathrm{r}}_{0}(x),
\end{aligned} \tag{40}$$

where the vacuum state of the inverted oscillator

$$\varphi^{\mathrm{r}}_{0}(x) = \left(\frac{im\omega}{2\hbar\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-i\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right]$$

is not square integrable. The vacuum states $\left\{\left|\varphi_0^{\mathrm{r}}\right\rangle, \left|\widetilde{\varphi}_0^{\mathrm{r}}\right\rangle\right\} \in D$ are related to each other as $\left|\widetilde{\varphi}_0^{\mathrm{r}}\right\rangle = \eta\left|\varphi_0^{\mathrm{r}}\right\rangle$. Thus, the biorthonormalization condition $\left\langle\widetilde{\varphi}_0^{\mathrm{r}}(x)\right|\left.\varphi_0^{\mathrm{r}}(x)\right\rangle = \left\langle\varphi_0^{\mathrm{r}}(x)\right|\eta\left|\varphi_0^{\mathrm{r}}(x)\right\rangle = I$ is verified.

When the inverted oscillator is in a particular state $\varphi_\alpha^{\mathrm{r}}(x)$ (40) at the instant $t=0$, how do its physical properties evolve over time?

Suppose that a system is in the state $\varphi_\alpha^{\mathrm{r}}(x)$ at $t=0$, and when the Hamiltonian is not time-dependent then its state at all t will be given by

$$\begin{aligned}\psi_\alpha^{\mathrm{r}}(x,t) &= \exp\left[-\frac{i}{\hbar}H^{\mathrm{r}}t\right]\varphi_\alpha^{\mathrm{r}}(x)\\ &= \exp\left[-iH^{\mathrm{r}}t\right]\exp\left[\alpha\bar{\mathcal{A}}\right]\varphi_0^{\mathrm{r}}(x),\end{aligned}$$

therefore we write

$$\exp\left[-\frac{i}{\hbar}H^{\mathrm{r}}t\right]\varphi_\alpha^{\mathrm{r}}(x) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}H^{\mathrm{r}}t\right]\exp\left[\alpha\bar{\mathcal{A}}\right]\exp\left[\frac{i}{\hbar}H^{\mathrm{r}}t + \frac{\omega}{2}t\right]\varphi_0^{\mathrm{r}}(x), \tag{41}$$

where we used

$$\left(H^{\mathrm{r}} - i\frac{\omega\hbar}{2}\right)\varphi_0^{\mathrm{r}}(x) = 0.$$

Knowing that

$$\left[-\frac{i}{\hbar}H^{\mathrm{r}}t, \alpha\bar{\mathcal{A}}\right] = \omega t\alpha\bar{\mathcal{A}},$$

we can thus use a special case of the Baker-Campbell-Hausdorff formula which states that if $[a, B] = cB$ with $c \in C$, then

$$\exp[a]\exp[B]\exp[-a] = \exp[\exp(c)B]. \tag{42}$$

We apply Eq. (42) with $a = -\frac{i}{\hbar}H^{\mathrm{r}}t$, $B = \alpha\left(\bar{\mathcal{A}}\right)$ and $c = \omega t$ to obtain

$$\psi_{\alpha(t)}^{\mathrm{r}}(x,t) = \exp\left[\frac{\omega}{2}t\right]\exp\left[e^{\omega t}\alpha\bar{\mathcal{A}}\right]\varphi_0^{\mathrm{r}}(x) = \exp\left[\frac{\omega}{2}t\right]\varphi_\alpha^{\mathrm{r}}(x), \tag{43}$$

if we compare this result with (40), we see that, to go from $\psi_\alpha^{\mathrm{r}}(x,0) = \varphi_\alpha^{\mathrm{r}}(x)$ to $\psi_\alpha^{\mathrm{r}}(x,t)$, all we must do is to change α to $\alpha(t) = \alpha e^{\omega t}$ and multiply the obtained state by $\exp\left[\frac{\omega}{2}t\right]$ (which is a global amplitude factor). We already know, for the harmonic oscillator, that the mean values $\langle x\rangle^{\mathrm{os}}(t) = x_c^{\mathrm{os}}(t)$ and $\langle p\rangle^{\mathrm{os}}(t) = -m\omega x_c^{\mathrm{os}}(t)$ always remain equal to the corresponding classical values. What about the mean values of physical quantities of the inverted oscillator?

The mean values $\langle x\rangle_\eta^{\mathrm{r}}$ and $\langle p\rangle_\eta^{\mathrm{r}}$ can be obtained by expressing x and p in terms of $\mathcal{A}$ and $\bar{\mathcal{A}}$ [Eqs. (35) and (36)],

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2mi\omega}}(\mathcal{A} + \bar{\mathcal{A}}), \qquad p = i\sqrt{\frac{\hbar mi\omega}{2}}(\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}), \tag{44}$$

we see that

$$\langle x\rangle_\eta^{\mathrm{r}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2mi\omega}}\left\langle\psi_\alpha^{\mathrm{r}}(x,t)\right|\eta(\mathcal{A} + \bar{\mathcal{A}})\left|\psi_\alpha^{\mathrm{r}}(x,t)\right\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,|\alpha|\,e^{\omega t} = x_\eta^{\mathrm{r}}(t), \tag{45}$$

$$\langle p\rangle_\eta^{\mathrm{r}} = i\sqrt{\frac{\hbar m i\omega}{2}}\left\langle\psi_\alpha^{\mathrm{r}}(x,t)\right|\eta(\bar{\mathcal{A}}-\mathcal{A})\left|\psi_\alpha^{\mathrm{r}}(x,t)\right\rangle = \sqrt{2\hbar m\omega}\,|\alpha|\,e^{\omega t} = p_\eta^{\mathrm{r}}(t), \tag{46}$$

the time dependence of the expectation value matches the classical one of the inverted oscillator.

An analogous calculation yields

$$\left\langle x^2\right\rangle_\eta^{\mathrm{r}} = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[(\alpha(t)+\alpha^*(t))^2+1\right], \qquad \left\langle p^2\right\rangle_\eta^{\mathrm{r}} = \frac{\hbar m\omega}{2}\left[1-(\alpha(t)-\alpha^*(t))^2\right], \tag{47}$$

and therefore

$$(\Delta x)_\eta^{\mathrm{r}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \qquad (\Delta p)_\eta^{\mathrm{r}} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}. \tag{48}$$

Neither $(\Delta x)_\eta^{\mathrm{r}}$ nor $(\Delta p)_\eta^{\mathrm{r}}$ depend on α. Note also that $(\Delta x)_\eta^{\mathrm{r}}\,.\,(\Delta p)_\eta^{\mathrm{r}}$ takes its minimum value,

$$(\Delta x)_\eta^{\mathrm{r}}\,.\,(\Delta p)_\eta^{\mathrm{r}} = \frac{\hbar}{2}\,.$$

4. Conclusion

It is well known that the system described by the inverted oscillator gives rise to the generalized complex eigenvalues. The physical reason for that is that the potential is unbounded from below. The corresponding energy eigenstates for (1) have been found in terms of the parabolic cylinder functions $D_\nu(x)$ [2].

Using a nonconventional technique, i.e. a quasi-Hermiticity in quantum mechanics, we have solved the problem relative to the inverted oscillator. In fact, we find that the system can be entirely expressed in terms of idealized states that are related to those of the harmonic oscillator. The connection with a harmonic oscillator may be established by the scaling operator ρ (24).

Ideal physical systems are conceptually Hermitian, but realistic systems are sometimes non-Hermitian because of interactions with their environments. We have given the principal properties of the harmonic oscillator H^{os} formulation in quantum mechanics and we introduced the inverted oscillator H^{r}. Using the notion of anti-$\mathcal{PT}$-symmetric non-Hermitian Hamiltonian, this led us to show that H^{r}, (iH^{os}) and their two sets of eigenfunctions are connected in a simple manner. Therefore, eigenfunctions of the inverted oscillator are pseudo-orthonormal.

The coherent states of ordinary oscillator are special wave groups giving probability distributions whose shapes never change, and follow classical trajectories. They are obtained as eigenstates of the annihilation operator, or equivalently by acting on vacuum eigenstate with the unitary displacement operator $D(\alpha)$ introduced in Section 2. One might think that the coherent states for the inverted oscillator seem less important, largely because, unlike groups of waves, they are not fully integrable which is not at all appropriate.

So, to show their importance, we addressed the problem of construction of ladder operators for H^{r} and their associated integrable coherent states. To do this, we took as reference state the vacuum state of the inverted oscillator and, as in the case of the harmonic oscillator, the generalized coherent states for inverted oscillator are defined as eigenstates of the annihilation operator $A = \rho^{-1} a \rho$, where a is the annihilation operator associated to the harmonic oscillator. These generalized coherent states can be also obtained by the action on the vacuum state of the inverted oscillator of a nonunitary displacement operator.

Then, we showed that the mean values of the position and momentum operators in these coherent states have properties close to the classical values of the position $x_c^{\mathrm{r}}(t)$ and the momentum $p_c^{\mathrm{r}}(t)$. The corresponding Heisenberg uncertainty relation is minimum.

Acknowledgments

The authors are grateful to Prof. A. Layadi (UFAS) and Dr. N. Mana for the valuable suggestions that led to considerable improvement in the presentation of this paper.

REFERENCES

[1] G. Barton: Quantum mechanics of the inverted oscillator potential, *Ann. Phys.* **166**, 322 (1986).
[2] D. Chruściński: Quantum mechanics of damped systems. II. Damping and parabolic potential barrier, *J. Math. Phys.* **45**, 841 (2004).
[3] D. Chruściński: Quantum damped oscillator II: Bateman's Hamiltonian vs. 2D parabolic potential barrier, *Ann Phys*. **321**, 840 (2006).
[4] C. Yuce, A. Kilic and A. Coruh: Inverted oscillator, *Phys. Scr.* **74,** 114 (2006).
[5] S. Baskoutas, A. Jannussis, R. Mignani and V. Papatheou: Tunnelling process for non-Hermitian systems: the complex-frequency inverted oscillator*, J. Phys. A: Math. Gen*. **17**, L819 (1993).
[6] R. K. Bhaduri, A. Khare and J. Law: Phase of the Riemann Zeta function and the inverted harmonic oscillator, *Phys. Rev. E.* **52**, 486 (1995).
[7] R. K. Bhaduri, A. Khare, S. M. Reimann and E. L. Tomusiakl: The Riemann Zeta function and the inverted harmonic oscillator, *Ann. Physics*. **254**, 25 (1997).
[8] M. Castagnino, R. Diener, L. Lara and G. Puccin: Rigged Hilbert spaces and time asymmetry: The case of the upside-down simple harmonic oscillator, *Int. J. Theor. Phys.* **36**, 2349 (1997).
[9] T. Shimbori: Operator methods of the parabolic potential barrier, *Phys. Lett. A* **273**, 37 (2000).
[10] I. A. Pedrosa and I. Guedes: Quantum States of a Generalized Time-Dependent Inverted Harmonic Oscillator, *Int. J. Mod. Phys. B.* **18**, 1379 (2004).
[11] C. A. Muñtoz, J. Rueda-Paz and K. B. Wolf: Discrete repulsive oscillator wave functions, *J. Phys. A* **42**, 485210 (2009).
[12] T. Shimbori and T. Kobayashi: Complex eigenvalues of the parabolic potential barrier and Gel'fand triplet, *Nuovo Cimento B.* **115**, 325 (2000)
[13] D. Bermudez and D. J. Fernández C: Factorization method and new potentials from the inverted oscillator, *Ann. Phys*. **333**, 290 (2013).
[14] M. Maamache, Y. Bouguerra and J. R. Choi: Time behavior of a Gaussian wave packet accompanying the generalized coherent state for the inverted oscillator, *Prog. Theor. Exp. Phys.* 063A01, (2016).
[15] K. Rajeev, S. Chakraborty and T. Padmanabhan: Inverting a normal harmonic oscillator: physical interpretation and applications, *Gen. Relativ. Gravit.* **50**, 116 (2018).
[16] R. D. Mota, D.Ojeda-Guillén, M. Salazar-Ramírez and V. D. Granados: Non-Hermitian inverted harmonic oscillator-type Hamiltonians generated from supersymmetry with reflections, *Mod. Phys. Lett. A* **34**, 1950028 (2019).
[17] K. Aouda, N. Kanda, Sh. Naka and H. Toyoda: Ladder operators in repulsive harmonic oscillator with application to the Schwinger effect, *Phys. Rev. D* **102**, 025002 (2020).

[18] A. Bhattacharyya, W. Chemissany, S. S. Haque, J. Murugan and B. Yan: The multi-faceted inverted harmonic oscillator: Chaos and complexity, *SciPost Phys. Core* 4, 002 (2021).
[19] V. Subramanyan, S. S. Hegde, S. Vishveshwara and B. Bradlyn: Physics of the Inverted Harmonic Oscillator: From the lowest Landau level to event horizons, *Ann. Phys.* **435**, 168470 (2021).
[20] A. H. Guth and S.Y. Pi: Quantum mechanics of the scalar field in the new inflationary universe, *Phys. Rev. D* **32**, 1899 (1991).
[21] S. Tarzi: The inverted harmonic oscillator: some statistical properties, *J. Phys. A: Math. Gen.* **21**, 3105(1988).
[22] H. Hofmann and D. Kiderlen: Statistical fluctuations for the fission process on its descent from saddle to scission, *Phys. Rev. C* **56**, 1025 (1997).
[23] P. A. Miller and S. Sarkar: Fingerprints of classical instability in open quantum dynamics, *Phys. Rev. E* **58**, 4217 (1998).
[24] G. Felder, A. Frolov, L. Kofman and A. Linde: Cosmology with negative potentials, *Phys. Rev. D* **66**, 023507 (2002).
[25] J. Ambjorn and R. A. Janik: Decoherence in Josephson phase qubits from junction resonators, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 077003 (2004).
[26] S. V. Morozov, K. S. Novoselov, M. I. Katsnelson, F. Schedin, L. A. Ponomarenko, D. Jiang and A. K. Geim: Strong suppression of weak localization in graphene, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 016801 (2006).
[27] G. Chong and W. Hai: Dynamical evolutions of matter-wave bright solitons in an inverted parabolic potential, *J. Phys. B* **40**, 211 (2007).
[28] F. H. Gaioli, E. T. GarciaAlvarez and M. A. Castagnino: Supersymmetric partners and confinement of a spiked inverted oscillator model, *Eur. Phys. J. Plus.* **130**, 228 (2015).
[29] C. M. Bender and S. Boettcher: Real spectra in Non-Hermitian Hamiltonians having PT symmetry, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5243 (1998).
[30] C. M. Bender, D. C. Brody and H. F. Jones: Complex extension of quantum mechanics, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 270401 (2002).
[31] J. Rubinstein, P. Sternberg and Q. Ma: Bifurcation diagram and pattern formation of phase slip centers in superconducting wires driven with electric currents, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 167003 (2007).
[32] K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides and Z. H. Musslimani: Beam dynamics in symmetric optical lattices, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 103904 (2008).
[33] Z. H. Musslimani, K. G. Makris, R. El-Ganainy and D. N. Christodoulides: Optical solitons in periodic potentials, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 030402 (2008).
[34] J. Schindler, Z. Lin, J. M. Lee, H. Ramezani, F. M. Ellis, and T. Kottos: The self-collimation effect induced by non-Hermitian acoustic systems, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**, 444029 (2012).
[35] C. M. Bender, B. Berntson, D. Parker and E. Samuel: Systems of coupled PT-symmetric oscillators, *Am. J. Phys.* **81**, 173 (2013).
[36] L. Feng,Y. -L. Xu, W. S. Fegadolli, M. -H. Lu, J. E. B. Oliveira, V. R. Almeida, Y. -F. Chen and A. Scherer: Single-mode laser by parity-time symmetry breaking, *Nat. Matter.* **12**, 108 (2013).
[37] L. Feng, Z. J. Wong, R. M. Ma, Y. Wang and X. Zhang: Single-mode laser by parity-time symmetry breaking, *Science* **346**, 972 (2014).
[38] H. Hodaei, M. -A. Miri, M. Heinrich, D. N. Christodoulides and M. Khajavikhan: Parity-time–symmetric microring lasers, *Science* **346**, 975 (2014).
[39] S. V. Suchkov, A. A. Sukhorukov, J. Huang, S. V. Dmitriev, C. Lee and Yu. S. Kivshar: Nonlocal solitons supported by non-parity-time-symmetric complex potentials, *Laser Photonics Rev.* **10**, 177 (2016).
[40] L. Ge and H. E. Türeci: Antisymmetric $\mathcal{PT}$-photonic structures with balanced positive- and negative-index mateials, *Phys. Rev. A*. **88**, 053810 (2013).
[41] J. H. Wu, M. Artoni and G. C. La Rocca: Non-Hermitian degeneracies and unidirectional reflectionless atomic lattices, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 123004 (2014).
[42] S. Longhi: Phase transitions in Wick-rotated $\mathcal{PT}$-symmetric optics, *Ann. Phys.* **360**, 150 (2015).
[43] P. Peng, W. Cao, C. Shen, W. Qu, J. Wen, L. Jiang and Y. Xiao: Anti-parity–time symmetry with flying atoms, *Nat. Phys*. **12**, 1139 (2016).

[44] M. Maamache and L. Kheniche: Anti-PT symmetry for a non-Hermitian Hamiltonian, *Prog. Theor. Exp. Phys.* 123A01 (2020).
[45] F. G. Scholz, H. B. Geyer and F. J. Hahne: Quasi-Hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle, *Ann. Phys*. **74**, 101 (1992).
[46] A. Mostafazadeh: Pseudo-Hermiticity versus $\mathcal{PT}$ symmetry: The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian, *J. Math. Phys.* **205**, 214 (2002).
[47] E. Schrödinger: Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik, *Naturwissenschaften* **14**, 664 (1926).
[48] R. J. Glauber: The quantum theory of optical coherence, *Phys. Rev.***130** 2529(1963).
Photon correlations, *Phys. Rev. Lett.* **10,** 84 (1963).
Coherent and incoherent states of the radiation field, *Phys. Rev*. **131**, 2766 (1963) .
[49] J. R. Klauder: Continuous-representation theory. I. Postulates of continuous-representation theory, *J. Math. Phys.* **4**, 1055 (1963).
Continuous-representation theory. II. Generalized relation between quantum and classical dynamics, *J. Math. Phys.* **4**, 1058 (1963).
[50] E. C. G. Sudarshan: Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 277 (1963).

Physics Open 13 (2022) 100126

Contents lists available at ScienceDirect

Physics Open

journal homepage: www.elsevier.com/locate/physo

Non-Hermitian Hamiltonian beyond PT symmetry for time-dependent $SU(1,1)$ and $SU(2)$ systems — Exact solution and geometric phase in pseudo-invariant theory

Nadjat Amaouche [a], Maroua Sekhri [a], Rahma Zerimeche [a,b], Mustapha Maamache [a,*], J.-Q. Liang [c]

[a] Laboratoire de Physique Quantique et Systèmes Dynamiques, Faculté des Sciences, Universite Ferhat Abbas Sétif 1, Sétif 19000, Algeria
[b] Physics Department, University of Jijel, BP 98, Ouled Aissa, 18000 Jijel, Algeria
[c] Institute of Theoretical Physics and Department of Physics, State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Shanxi University, Taiyuan, Shanxi 030006, China

ARTICLE INFO

Keywords:
Non-Hermitian Hamiltonian
$SU(1,1)$ and $SU(2)$ Lie algebra
Pseudo-Hermitian invariant

ABSTRACT

In this paper we investigate time-dependent non-Hermitian Hamiltonians, which consist of $SU(1,1)$ and $SU(2)$ generators. The former Hamiltonian is PT symmetric but the latter one is not. A time-dependent non-unitary operator is proposed to construct the non-Hermitian invariant, which is verified as pseudo-Hermitian with real eigenvalues. The exact solutions are obtained in terms of the eigenstates of the pseudo-Hermitian invariant operator for both the $SU(1,1)$ and $SU(2)$ systems in a unified manner. Then, we derive the Lewis–Riesenfeld (LR) phase, which can be separated into the dynamic and the geometrical phases. The analytical results are well consistent with those of the corresponding Hermitian Hamiltonians reported in the literature.

1. Introduction

In conventional quantum mechanics the Hamiltonian is always Hermitian, which constrains the energy spectrum to be real. The non-hermiticity means that the usual arguments for the real spectrum cannot be used. Carl Bender et al. [1,2] interpreted the real values of this spectrum as being due to its PT symmetry. That is, if we simultaneously reflect in space and reverse time, the potential remains unchanged. Various PT-symmetric non-Hermitian Hamiltonians have been studied experimentally involving optics [3–6],microwave cavities [7], as well as two-particle quantum interference [8]. Another idea that has been put forward as an extension of conventional Hermitian quantum mechanics, is the pseudo-hermiticity. The fact that it may be possible to find real eigenvalues in a non-Hermitian Hamiltonian is a point of interest. Particularly the concept of PT-symmetry appears to have a more physical interpretation than the very mathematical concept of hermiticity. The pseudo hermiticity is a generalization of the conventional Hermitian quantum mechanics. A Hamiltonian is said to be η pseudo-Hermitian [9] if

$$\hat{H}^{\dagger} = \hat{\eta}\hat{H}\,\hat{\eta}^{-1}. \tag{1}$$

Mostafazadeh [10–13] associates the real value spectrum reality to a more general property of the pseudo-hermiticity than the PT-symmetry. These new perspectives form the foundation of a new research field based on the fact that the hermiticity is a sufficient but unnecessary condition to have real spectra [14]. A good starting point for studying PT-invariant (or pseudo-Hermitian) systems is the Swanson oscillator [15], a one-dimensional multi-parameter toy model. This system has all real eigenvalues for a certain choice of the parameters. Consequently, the Dyson map [16] can transforms the corresponding non-Hermitian Hamiltonian into a Hermitian one in such a case. Supersymmetric extensions of the 1D and 2D Swanson models are investigated by using the conformal bridge transformation [17]. Many concrete systems cannot be described by stationary Hamiltonians $\hat{H}$, but require an explicit dependence on time $\hat{H}(t)$. In this work, we discuss how to treat the systems in a consistent way when the Hamiltonian $\hat{H}(t)$ is non-Hermitian [18–23]. While many researchers focused on studying time-independent non-Hermitian systems, others directed their efforts to solve time dependent non-Hermitian systems in terms of the Lewis–Riesenfeld (LR) invariant theory [24], which presents the advantage of obtaining exact solutions. Invariants are important in modern theoretical physics and many theories are expressed in terms of their symmetries and invariants. In particular, with the invariants, we are able to find the solution of the equation of motion. In the following, we recall the notion of the pseudo-Hermitian invariants [25,

* Corresponding author.
E-mail addresses: nadjatamaouch@gmail.com (N. Amaouche), sekhrimaroua@gmail.com (M. Sekhri), zerimecherahma@gmail.com (R. Zerimeche), maamache@univ-setif.dz (M. Maamache), jqliang@sxu.edu.cn (J.-Q. Liang).

https://doi.org/10.1016/j.physo.2022.100126
Received 20 July 2022; Received in revised form 14 October 2022; Accepted 4 November 2022
Available online 21 November 2022

26], which have played a distinctive role in non Hermitian quantum mechanics. In Refs. [25–27], a particular attention is given to the special subset of pseudo-Hermitian invariant operators associated to time dependent non-Hermitian Hamiltonians, in which the real eigenvalues of the invariant are guaranteed. Let us review briefly the pseudo-Hermitian invariant theory. The invariant operator $\widehat{I}(t)$ is said to be pseudo-Hermitian with respect to the Hermitian metric operator $\widehat{\eta}(t)$, if

$$\widehat{I}^{\dagger}(t) = \widehat{\eta}(t)\widehat{I}(t)\widehat{\eta}^{-1}(t). \tag{2}$$

Thus the invariant $\widehat{I}(t)$ can always be mapped to a Hermitian invariant operator $\widehat{I}^{h}(t)$ by a similarity (Dyson) transformation $\widehat{\rho}(t)$, such that

$$\widehat{I}^{h}(t) = \widehat{\rho}(t)\widehat{I}(t)\widehat{\rho}^{-1}(t) = \left(\widehat{I}^{h}(t)\right)^{\dagger},$$

with $\widehat{\eta}(t) = \widehat{\rho}^{\dagger}(t)\widehat{\rho}(t)$.

The exact solution of a PT-symmetric non-Hermitian Hamiltonian was presented recently for the periodically driven $SU(1,1)$ generators [28,29]. We emphasize that the real eigenvalues spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian is not confined to the PT symmetry. In this paper, we follow the pseudo-Hermitian invariant theory to solve the Schrödinger equation for a non-Hermitian Hamiltonian consisting of time-dependent $SU(1,1)$ and $SU(2)$ generators. The $SU(1,1)$ Hamiltonian is PT symmetric but the $SU(2)$ Hamiltonian is not. The $SU(2)$ Hamiltonian describes a spin in a rotating magnetic field. While the $SU(1,1)$ Hamiltonian is for a harmonic oscillator in a time-dependent field. The Hermitian counterparts of these two Hamiltonians were considered originally by Berry for the demonstration of the geometric phase [30]. We modified the Hermitian Hamiltonians to the non-Hermitian versions in order to see whether or not the non-Hermitian Hamiltonians possess real spectra and the corresponding Berry phase. The geometric phase has been well studied for the non-Hermitian Hamiltonian [31,32]. The paper is organized as follows: in Section 2 we put forward a non-Hermitian Hamiltonian consisting of periodically driven $SU(1,1)$ and $SU(2)$ generators. We propose a non-unitary transformation operator $\hat{R}(t)$ to construct the pseudo-Hermitian invariant. In Section 3. exact solutions of the Schrödinger equation are found along with the LR phase and the non-adiabatic Berry phase, which reduces to the adiabatic phase in the slowly varying limit [30]. The conclusion is given in Section 4.

2. Non-Hermitian Hamiltonian and pseudo-Hermitian invariant

The considered system is described by the following time dependent Hamiltonian

$$\hat{H}(t) = \Omega\hat{K}_0 + G\left(\hat{K}_+\exp(i\phi(t)) - \hat{K}_-\exp(-i\phi(t))\right), \tag{3}$$

where Ω, G and $\phi(t)$ are real parameters: Ω being the driving frequency, G a coupling parameter and $\phi(t) = \omega t$ the periodic parameter $\phi(t) = \phi(t+T)$. The interaction part with coupling constant G is modified to non-Hermitian one, due to the minus sign in frond of $\hat{K}_-$. This can be realized experimentally by the manipulation of the phase of the driven field.

The operator $\hat{K}_0$ is Hermitian, while $\left(\hat{K}_-\right)^{\dagger} = \hat{K}_+$. These operators are $SU(1,1)$ and $SU(2)$ generators, which satisfy the commutation relations

$$\begin{array}{l}\left[\hat{K}_0, \hat{K}_{\pm}\right] = \pm\hat{K}_{\pm} \\ \left[\hat{K}_+, \hat{K}_-\right] = D\hat{K}_0\end{array}, \tag{4}$$

where $D = \pm 2$ respectively for the $SU(2)$ and $SU(1,1)$ Lie algebras. It is obvious that the Hamiltonian is periodic $\hat{H}(t) = \hat{H}(t+T)$ but non Hermitian

$$\hat{H}^{\dagger}(t) = \Omega\hat{K}_0 - G\left(\hat{K}_+\exp(i\phi(t)) - \hat{K}_-\exp(-i\phi(t))\right) \neq \hat{H}(t). \tag{5}$$

The non-Hermitian Hamiltonian Eq. (5) is PT symmetric for $SU(1,1)$ system but is asymmetric for $SU(2)$. The time dependent Schrödinger equation for this Hamiltonian is given by

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle. \tag{6}$$

Since the time-dependent Hamiltonian is not a conserved quantity, we solve the time-dependent Schrödinger Eq. (6) with the help of the pseudo-Hermitian invariant scheme. The total time-derivative of the invariant $\hat{I}(t)$ must be zero,

$$i\frac{d\hat{I}(t)}{dt} = i\frac{\partial}{\partial t}\hat{I}(t) + \left[\hat{I}(t), \hat{H}(t)\right] = 0. \tag{7}$$

We assume that the invariant $\hat{I}(t)$ can be generated from the operator $\hat{K}_0$ such that

$$\hat{I}(t) = \hat{R}(t)\hat{K}_0\hat{R}^{-1}(t), \tag{8}$$

where $\hat{R}(t)$ is a non-unitary transformation operator defined as

$$\hat{R}(t) = \exp\left(\frac{\varepsilon}{2}\left(\hat{K}_+\exp(i\phi(t)) + \hat{K}_-\exp(-i\phi(t))\right)\right), \tag{9}$$

$$\hat{R}^{-1}(t) = \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\left(\hat{K}_+\exp(i\phi(t)) + \hat{K}_-\exp(-i\phi(t))\right)\right), \tag{10}$$

and ε is a real parameter to be determined.

Using the following transformations [33–35] :

$$\begin{aligned}\hat{R}(t)\hat{K}_+\hat{R}^{-1}(t) &= \hat{K}_+\cosh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \hat{K}_-\exp(-2i\phi(t))\sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &\quad - \hat{K}_0\exp(-i\phi(t))\sqrt{\frac{D}{2}}\sinh(\alpha), \\ \hat{R}(t)\hat{K}_-\hat{R}^{-1}(t) &= \hat{K}_-\cosh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \hat{K}_+\exp(2i\phi(t))\sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &\quad + \hat{K}_0\exp(i\phi(t))\sqrt{\frac{D}{2}}\sinh(\alpha), \\ \hat{R}(t)\hat{K}_0\hat{R}^{-1}(t) &= \hat{K}_0\cosh(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{2D}}\sinh(\alpha)\left(\hat{K}_+\exp(i\phi(t)) - \hat{K}_-\exp(-i\phi(t))\right), \\ i\hat{R}^{-1}(t)\frac{\partial}{\partial t}\hat{R}(t) &= -2\omega\hat{K}_0\sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\omega}{\sqrt{2D}}\sinh(\alpha)\left(\hat{K}_+\exp(i\phi(t))\right. \\ &\quad \left. - \hat{K}_-\exp(-i\phi(t))\right),\end{aligned} \tag{11}$$

in which

$$\alpha = \varepsilon\sqrt{\frac{D}{2}}, \tag{12}$$

we can obtain the invariant $\hat{I}(t)$ written as

$$\hat{I}(t) = \hat{K}_0\cosh(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{2D}}\sinh(\alpha)\left(\hat{K}_+\exp(i\phi(t)) - \hat{K}_-\exp(-i\phi(t))\right). \tag{13}$$

The invariant is obviously non-Hermitian,

$$\hat{I}^{+}(t) = \hat{K}_0\cosh(\alpha) + \frac{1}{\sqrt{2D}}\sinh(\alpha)\left(\hat{K}_+\exp(i\phi) - \hat{K}_-\exp(-i\phi)\right) \neq \hat{I}(t). \tag{14}$$

Substituting the invariant into the Eq. (7) we have

$$\left[\hat{I}(t), \hat{H}(t)\right] = \left[\frac{\Omega}{\sqrt{2D}}\sinh(\alpha) + G\cosh(\alpha)\right]\left(\hat{K}_+\exp(i\phi) + \hat{K}_-\exp(-i\phi)\right),$$

and

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{I}(t) = -\frac{\omega}{\sqrt{2D}}\sinh(\alpha)\left(\hat{K}_+\exp(i\phi) + \hat{K}_-\exp(-i\phi)\right).$$

The Eq. (7) is fulfilled under the auxiliary condition:

$$G\cosh(\alpha) = -\frac{\omega+\Omega}{\sqrt{2D}}\sinh(\alpha), \tag{15}$$

from which the parameter ε is determined. It is easy to check that the invariant $\hat{I}(t)$ is pseudo-Hermitian with respect to the metric operator $\hat{\eta}$

$$\hat{I}^{\dagger}(t) = \hat{\eta}\hat{I}(t)\hat{\eta}^{-1}, \tag{16}$$

where

$$\hat{\eta} = \left(\hat{R}^{-1}\right)^{\dagger} \hat{R}^{-1} = \hat{R}^{-2}, \tag{17}$$

for the Hermitian operator $\hat{R}^{\dagger} = \hat{R}$.

3. Exact solution and geometric phase

Assuming that the pseudo-Hermitian invariant possesses a set of non-degenerate eigenstates,

$$\hat{I}(t)|n(t)\rangle = \lambda_n|n(t)\rangle, \tag{18}$$

with the orthogonality condition

$$\langle n(t)|\hat{\eta}(t)|m(t)| = \delta_{nm}.$$

The general solution of the time-dependent Schrödinger Eq. (6) is the superposition of the eigenstates of the pseudo-Hermitian invariant $\hat{I}(t)$,

$$|\psi(t)| = \sum_n C_n e^{i\alpha_n(t)}|n(t)|, \tag{19}$$

where C_n are time independent coefficients and $\alpha_n(t)$ is the LR phase.

Substituting the general solution Eq. (19) into the Schrödinger equation Eq. (6) yields the LR phase

$$\alpha_n(t) = \int_0^t dt' \langle n\left(t'\right)|\hat{\eta}\left[i\frac{\partial}{\partial t'} - \hat{H}(t')\right]|n\left(t'\right)|. \tag{20}$$

Using the transformation relations (11) and the auxiliary condition (15), we obtain the LR phase

$$\alpha_n(t) = -\lambda_n \int_0^t dt' \left(\Omega + 2\sqrt{\frac{D}{2}}G\sinh(\alpha) + 2(\Omega+\omega)\sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right), \tag{21}$$

in which

$$\sinh^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2}\left[-1 \pm \frac{(\omega+\Omega)}{\sqrt{(\omega+\Omega)^2 - 2DG^2}}\right]. \tag{22}$$

The first term of LR phase $\alpha_n(t)$ in Eq. (20) gives rise to the geometrical phase or Berry phase, which can be evaluated in one period of driving field $T = 2\pi/\omega$ as

$$\gamma_n(T) = i\int_0^T dt' \left\langle n\left(t'\right)|\eta\frac{\partial}{\partial t'}|n\left(t'\right)\right\rangle = -2\lambda_n \oint \sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)d\phi. \tag{23a}$$

Substituting the hyperbolic function of Eq. (22) into the Eq. (23a) yields the non-adiabatic Berry phase suitable for both $SU(2)$ and $SU(1,1)$ systems.

The square of the hyperbolic function in Eq. (22) possesses two values ($\pm$) for $SU(1,1)$ system with $D=-2$, and only one valid value (+) for the $SU(2)$ with $D=2$.

3.1. $SU(1,1)$ system

For $SU(1,1)$ system with $D=-2$, the generators of Lie algebra can be expressed by boson creation and annihilation operators such that

$$\hat{K}_0 = \frac{1}{2}\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \frac{1}{2}\right), \quad \hat{K}_+ = \frac{1}{2}\left(\hat{a}^{\dagger}\right)^2, \quad \hat{K}_- = \frac{1}{2}(\hat{a})^2. \tag{24}$$

The non-Hermitian Hamiltonian which is PT symmetric becomes, in coordinate representation, the well known harmonic oscillator

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Omega}{2} + iG\sin\phi(t)\right]\hat{x}^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{\Omega}{2} - iG\sin\phi(t)\right]\hat{p}^2 - iG\cos\phi(t)xp.$$

The eigenstates of $\hat{K}_0$ in this case are Fock states $\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$ with the eigenvalues $\lambda_n = \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)$,

$$\hat{K}_0|n\rangle = \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle. \tag{25}$$

The hyperbolic function [Eq. (22)] becomes triangular function for $D=-2$

$$\sin^2(\frac{\varepsilon}{2}) = \frac{1}{2}\left[1 \pm \frac{(\omega+\Omega)}{\sqrt{(\omega+\Omega)^2 + 4G^2}}\right].$$

The LR phase (21) is then

$$\alpha_n(t) = -\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^t dt' \left(\Omega - G\sin\varepsilon + 2(\Omega+\omega)\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{26}$$

The non-adiabatic Berry phase is

$$\gamma_n(T) = \pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(1 \pm \frac{\Omega+\omega}{\sqrt{(\Omega+\omega)^2+4G^2}}\right),$$

which in the adiabatic approximation ($\frac{d\phi}{dt} \to 0, T \to \infty$) reduces to the adiabatic Berry phase [30,36]

$$\gamma_n(T) = \pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(1 \pm \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2+4G^2}}\right). \tag{27}$$

3.2. $SU(2)$ system

For $D=2$ the generators of $SU(2)$ are simply spin operators. The Hamiltonian describes a spin in a rotating magnetic field. Since the spin operators $\hat{K}_0$, $\hat{K}_{\pm}$ change respectively to $-\hat{K}_0$, $-\hat{K}_{\mp}$ under PT transformation, the non-Hermitian Hamiltonian is PT asymmetric. The eigenstates and the eigenvalues of $\hat{K}_0$ are defined in this case as

$$\hat{K}_0|j,n\rangle = n|j,n\rangle. \tag{28}$$

The LR phase (21) is,

$$\alpha_n(t) = -n\int_0^t dt' \left(\Omega + G\sinh\varepsilon + 2(\Omega+\omega)\sinh^2\frac{\varepsilon}{2}\right), \tag{29}$$

where

$$\sinh^2(\frac{\varepsilon}{2}) = \frac{1}{2}\left[\frac{(\omega+\Omega)}{\sqrt{(\omega+\Omega)^2-4G^2}} - 1\right].$$

And the Berry phase in the adiabatic approximation is given by

$$\gamma_n(T) = -2\pi n\left(\frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2-4G^2}} - 1\right). \tag{30}$$

4. Conclusion

It is well known that non-Hermitian Hamiltonians with PT symmetry can possess a real spectrum [1,2]. However this real spectrum is not restricted to th PT symmetry only. If a pseudo-Hermitian invariant exists for a non-Hermitian Hamiltonian, the real spectrum is guaranteed. We solve the time-dependent non-Hermitian Hamiltonian consisting of $SU(1,1)$ and $SU(2)$ generators with the help of a pseudo-Hermitian invariant without considering the PT symmetry property. We propose a non-unitary but a Hermitian transformation operator $\hat{R}(t)$ to construct the non-Hermitian invariant operator $\hat{I}(t)$, which is proved to be pseudo-Hermitian in regard to the metric operator given by $\hat{\eta} = \hat{R}^{-2}$. This invariant operator $\hat{I}(t)$ possesses real eigenvalues for both the $SU(1,1)$ and $SU(2)$ systems. Exact solutions are obtained in terms of its eigenstates. We obtain the LR and the Berry phases, which are in consistence with their Hermitian counterparts [34,35]. It has been demonstrated that the PT symmetry is a neither sufficient or a necessary condition for the real spectra of non-Hermitian Hamiltonian [10,14]. While the pseudo-Hermitian Hamiltonian is a necessary condition for the reality of spectrum. We extend the pseudo-Hermitian Hamiltonian to the time-dependent case to verify that the spectrum has indeed real eigenvalues.

CRediT authorship contribution statement

Nadjat Amaouche: Conceptualization, Mathematical computation. **Maroua Sekhri:** Conceptualization, Mathematical computation. **Rahma Zerimeche:** Investigation, Mathematical computation. **Mustapha Maamache:** Methodology, Writing – original draft. **J.-Q. Liang:** Investigation, Writing – revised version.

Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Data availability

No data was used for the research described in the article.

References

[1] C.M. Bender, S. Boettcher, Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having PT symmetry, Phys. Rev. Lett. 80 (1998) 5243.
[2] C.M. Bender, D.C. Brody, H.F. Jones, Complex extension of quantum mechanics, Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 270401.
[3] A. Guo, G.J. Salamo, D. Duchesne, R. Morandotti, M. VolatierRavat, V. Aimez, G.A. Siviloglou, D.N. Christodoulides, Observation of PT-symmetry breaking in complex optical potentials, Phys. Rev. Lett. 103 (2009) 093902.
[4] C.E. Rüter, K.G. Makris, R. El-Ganainy, D.N. Christodoulides, M. Segev, D. Kip, Observation of parity–time symmetry in optics, Nat. Phys. 6 (2010) 192.
[5] Z. Lin, H. Ramezani, T. Eichelkraut, T. Kottos, H. Cao, D.N. Christodoulides, Phys. Rev. Lett. 106 (2011) 213901.
[6] L. Feng, M. Ayache, J. Huang, Y.L. Xu, M.H. Lu, Y.F. Chen, Y. Fainman, A. Scherer, Nonreciprocal light propagation in a silicon photonic circuit, Science 333 (2011) 729.
[7] S. Bittner, B. Dietz, U. Günther, H.L. Harney, M. Miski-Oglu, A. Richter, F. Schäfer, PT Symmetry and spontaneous symmetry breaking in a microwave billiard, Phys. Rev. Lett. 108 (2012) 024101.
[8] F. Klauck, L. Teuber, M. Ornigotti, M. Heinrich, S. Scheel, A. Szameit, Observation of PT-symmetric quantum interference, Nat. Photonics 13 (2019) 883.
[9] F.G. Scholtz, H.B. Geyer, F.J.W. Hahne, Quasi-Hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle, Ann. Physics 213 (1992).
[10] A. Mostafazadeh, Pseudo-hermiticity versus PT symmetry: The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian, J. Math. Phys. 43 (2002) 205–214.
[11] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry.II. a complete characterization of non-Hermitian hamiltonians with real spectrum, J. Math. Phys. 43 (2002) 2814–2816.
[12] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry.III. equivalence of pseudo Hermiticity and the presence of antilinear symmetries, J. Math. Phys. 43 (2002) 3944–3951.
[13] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity and generalized PT- and CPT-symmetries, J. Math. Phys. 44 (2003) 974–989.
[14] R. Yang, J.W. Tan, T. Tai, J.M. Koh, L. Li, S. Longhi, Ch. H. Lee, Designing non-Hermitian real spectra through electrostatics, Sci. Bull. 67 (2022) 1865.
[15] M.S. Swanson, Transition elements for a non-Hermitian quadratic Hamiltonian, J. Math. Phys. 45 (2004) 585.
[16] F.J. Dyson, Thermodynamic behavior of an ideal ferromagnet, Phys. Rev. 102 (1956) 1230.
[17] L. Inzunza, M.S. Plyushchay, Conformal bridge transformation, PT - and supersymmetry, J. High Energy Phys. 2022 (2022) 228.
[18] X.C. Gao, J.B. Xu, T.Z. Qian, Invariants and geometric phase for systems with non-hermitian time-dependent Hamiltonians, Phys. Rev. A 46 (1992) 3626.
[19] C. Yuce, Time-dependent PT symmetric problems, Phys. Lett. A 336 (2005) 290.
[20] A. Fring, M.H.Y. Moussa, Non-Hermitian Swanson model with a time-dependent metric, Phys. Rev. A 94 (2016) 042128.
[21] A. Fring, T. Frith, Solvable two-dimensional time-dependent non-hermitian quantum systems with infinite dimensional Hilbert space in the broken PT-regime, J. Phys. A. Math. Theor. 51 (26) (2018) 265301.
[22] A. Fring, M.H.Y. Moussa, Non-Hermitian Swanson model with a time-dependent metric, Phys. Rev. A 94 (2016) 042128.
[23] A. Fring, R. Tenney, Exactly solvable time-dependent non-Hermitian quantum systems from point transformations, Phys. Lett. A 410 (2021) 127548.
[24] H.R. Lewis, W.B. Riesenfeld, An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field, J. Math. Phys. 10 (1969) 1458.
[25] B. Khantoul, A. Bounames, M. Maamache, On the invariant method for the time-dependent non-Hermitian Hamiltonians, Eur. Phys. J. Plus. 132 (2017) 258.
[26] M. Maamache, O.K. Djeghiour, N. Mana, W. Koussa, Pseudo-invariants theory and real phases for systems with non-hermitian time-dependent Hamiltonians, Eur. Phys. J. Plus. 132 (2017) 383.
[27] W. Koussa, N. Mana, O.K. Djeghiour, M. Maamache, The pseudo-Hermitian invariant operator and time-dependent non-Hermitian Hamiltonian exhibiting an $SU(1,1)$ and $SU(2)$ dynamical symmetry, J. Math. Phys. 59 (2018) 072103.
[28] Y. Gu, X.M. Bai, X.L. Hao, J.Q. Liang, PT-Symmetric non-Hermitian Hamiltonian and invariant operator in periodically driven $SU(1,1)$ system, Results Phys. 38 (2022) 105561.
[29] Y. Gu, X.L. Hao, J.Q. Liang, Generalized gauge transformation with PT-symmetric non-unitary operator and classical correspondence of non-hermitian Hamiltonian for a periodically, Ann. Physik. (2022) 202200069.
[30] M.V. Berry, Quantal phase factors accompanying adiabatic changes, Proc. R. Soc. London. A. 392 (1984) 45.
[31] Da-Jian Zhang, Qing-hai Wang, Jiangbin Gong, Quantum geometric tensor in PT-symmetric quantum mechanics, Phys. Rev. A 99 (2019) 042104.
[32] Da-Jian Zhang, Qing-hai Wang, Jiangbin Gong, Time-dependent PT-symmetric quantum mechanics in generic non-Hermitian systems, Phys. Rev. A 100 (2019) 062121.
[33] Y.Z. Lai, J.Q. Liang, H.J.W. Muller-Kirsten, J.G. Zhou, Time-dependent systems and the invariant Hermitian operator, Phys. Rev. A 53 (1996) 3691.
[34] Y.Z. Lai, J.Q. Liang, H.J.W. Muller-Kirsten, J.G. Zhou, Time evolution of quantum systems with time-dependent Hamiltonian and the invariant Hermitian operator, J. Phys. A: Math. Gen. 29 (1996) 1773.
[35] M. Maamache, Unitary transformation approach to the cyclic evolution of $SU(1,1)$ and $SU(2)$ time-dependent systems and geometrical phases, J. Phys. A Math. Gen. 31 (1998) 6849–6854.
[36] Da-Jian Zhang, P.Z. Zhao, G.F. Xu, Inconsistency of the theory of geometric phases in adiabatic evolution, Phys. Rev. A 105 (2022) 042208.