

Université Ferhat Abbas, Sétif 1  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques



# THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques  
pour l'obtention du diplôme de

## Doctorat en-Sciences

Option : Mathématiques Appliquées

Par

**Mme. Houria SERGUINE**

Thème

**ETUDE D'UN ECOULEMENT POTENTIEL A SURFACE LIBRE SUR  
UNE PLAQUE AVEC TENSION DE SURFACE**

Thèse soutenue le 31/10/ 2023 devant le jury composé de :

Président	Mr.	Nacerdine HEMICI	Prof.	Université Ferhat Abbas, Sétif 1
Rapporteur	Mme.	Fairouz GUECHI	Prof.	Université Ferhat Abbas, Sétif 1
Examineurs	Mr.	Abdel Moumen TIAIBA	Prof.	Université Mohamed Boudiaf, M'sila
	Mr.	Bachir GAGUI	MCA.	Université Mohamed Boudiaf, M'sila
Invité	Mr.	Abdelkader GASMI	Prof.	Université Mohamed Boudiaf, M'sila

---

## *Dédicace*

*Je dédie ce travail à mon honorable père, qui attend depuis longtemps avec impatience  
son achèvement ;*

*Je dédie ce travail à ma chère mère, qui m'a toujours béni de ses prières ;*

*Je dédie ce travail à mes enfants adorés qui m'ont suivi avec amour et passion ;*

*Je dédie ce travail à mes chers frères et sœurs ;*

*Je dédie tout particulièrement ce travail à Fouzia.*

---

## **Remerciement**

*Tout d'abord, je remercie Dieu et le remercie pour sa grâce, sa générosité et son succès pour moi jusqu'à ce que j'aie terminé ce travail ;*

*J'adresse mes sincères remerciements et ma grande fierté à mes chers parents, que*

*Dieu prolonge leur vie ;*

*J'adresse mes sincères remerciements à toute ma famille ;*

*Je remercie Mr.HEMICI Nacerdine pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le comité de jury ;*

*Je tiens à remercier Mme.GUECHI Fairouz, qui a supervisé ce travail, l'a guidé tout au long de ses remarques attentives ;*

*Je tiens à remercier infiniment Mr.GASMI Abdelkader, qui a suivi ce travail et qui ne s'est jamais lésé sur moi de son aide et de ses opinions justes ;*

*Je suis très reconnaissant aux Mr.TIAIBA Abdelmoumen et Mr.GAGUI Bachir d'avoir accepté d'examiner ce mémoire et pour leurs encouragements constants et leurs précieux conseils ;*

*J'adresse également mes sincères remerciements à tous les collègues, en particulier Mme.Zidane Salima et son mari Mr.Bouleghlem Houssine ;*

*Mes sincères remerciements vont à mes chères amies et voisines, en particulier Hakima, Zahra, Hanane, Imane et Nadia ;*

*Enfin, je voudrais remercier tout particulièrement mes deux distinguées amies ; Fouzia et Houria.*

# Table des matières

<b>Notation</b>	<b>7</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
<b>1 Notions fondamentales sur l'écoulement bidimensionnel et équations de bases</b>	<b>14</b>
1.1 Introduction . . . . .	16
1.2 Description Eulérienne et Lagrangienne du mouvement d'un fluide . .	16
1.3 Quelques définitions sur les écoulements potentiels . . . . .	17
1.3.1 Tension de surface . . . . .	17
1.3.2 Champ de vitesse . . . . .	20
1.3.3 Écoulement stationnaire . . . . .	20
1.3.4 Écoulement irrotationnel . . . . .	21
1.3.5 Écoulement uniforme . . . . .	21
1.3.6 Écoulement bidimensionnel . . . . .	21
1.3.7 Fluide incompressible . . . . .	21
1.4 Équations de base . . . . .	23
1.4.1 Équation de conservation de la masse . . . . .	23
1.4.2 Équation de mouvement . . . . .	23

Table des matières	4
1.4.3 Équation d'Euler . . . . .	24
1.4.4 Équation de Bernoulli . . . . .	24
1.5 Écoulement à la base de la théorie de la variable complexe . . . . .	26
1.5.1 Fonction potentielle complexe . . . . .	26
1.5.2 Fonctions holomorphes . . . . .	27
1.5.3 Transformations conformes . . . . .	29
1.5.4 Transformation de Schwarz-Christoffel . . . . .	30
<b>2 Écoulement de type jet devant une plaque inclinée avec tension de surface</b>	<b>33</b>
2.1 Introduction . . . . .	34
2.2 Position et formulation du problème . . . . .	34
2.3 Résolution numérique . . . . .	41
2.3.1 Comportement local de la vitesse au voisinage de point de stagnation $t = 0$ . . . . .	44
2.3.2 Formulation de la série . . . . .	45
2.3.3 Forme de la surface libre . . . . .	47
<b>3 Résultats et discussion</b>	<b>50</b>
3.1 Écoulement sans tension de surface . . . . .	51
3.2 Écoulement avec tension de surface . . . . .	51
<b>Conclusion</b>	<b>58</b>
<b>Annexe</b>	<b>60</b>

# Table des figures

1.1	Présentation de la surface libre . . . . .	19
1.2	Présentation de tension de surface . . . . .	19
1.3	Position du champ de vitesse . . . . .	22
1.4	Transformation conforme . . . . .	29
1.5	Plan de la variable $\Omega$ . . . . .	31
1.6	Plan de la variable $\lambda$ . . . . .	32
2.1	Écoulement dans le plan $Z$ . . . . .	36
2.2	Le plan potentiel complexe $f = \phi + i\psi$ . . . . .	39
2.3	Plan de la variable $t$ . . . . .	42
3.1	Comparaison numérique de la forme de la surface libre pour $\gamma = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	52
3.2	Forme de la surface libre pour différentes valeurs du nombre de Weber $\alpha$ pour l'angle $\gamma = \frac{\pi}{3}$ . . . . .	55
3.3	Forme de la surface libre pour différentes valeurs du nombre de Weber $\alpha$ pour l'angle $\gamma = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	56
3.4	Variation du coefficient de contraction $C$ en fonction du nombre de We- ber $\alpha$ pour l'angle $\gamma = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	57

# Liste des tableaux

3.1	Valeur minimal du nombre de Weber $\alpha_0$ pour certaines valeurs de l'angle $\gamma$ et valeurs du nombre de Weber $\alpha^*$ lorsque le schéma numérique cesse d'épargner à la courbe d'origine. . . . .	53
3.2	Les coefficients $a_k$ pour certaines valeurs du nombre de Weber $\alpha$ et certaines valeurs de l'angle $\gamma$ . . . . .	54

# Notation

- Les variables avec tilde ( $\sim$ ) sont les variables de dimensions physiques et les variables sans tilde ( $\sim$ ) sont des variables sans dimensions.

Soit  $\vec{u}$  le champ vectoriel tel que  $\vec{u} = (u(x, y), v(x, y))$

- $\vec{Rot}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$
- $div(\vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$
- $\Delta(u(x, y)) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}$
- $T$  Tension de surface
- $\alpha$  Nombre de Weber
- $\gamma$  Angle d'inclinaison du plaque à l'horizontale
- $K$  Courbure de la surface libre
- $R$  Rayon de courbure
- $\rho$  Densité de fluide
- $p$  Pression du fluide
- $p_0$  Pression atmosphérique
- $q$  Module de la vitesse
- $f$  Fonction potentielle complexe

- 
- $\phi$  Fonction potentielle de la vitesse
  - $\psi$  Fonction de courant
  - $H$  Hauteur de fluide
  - $U$  Vitesse à l'infini
  - $\xi$  Vitesse complexe conjuguée
  - $\theta$  l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale

# Introduction générale

La mécanique des fluides est un domaine de la physique consacré à l'étude du comportement des fluides (liquides, gaz et plasmas) et des forces internes associées. C'est une branche de la mécanique des milieux continus qui modélise la matière à l'aide de particules assez petites pour relever de l'analyse mathématique, mais assez grandes par rapport aux molécules pour être décrites par des fonctions continues. Elle comprend deux sous-domaines : la statique des fluides, qui est l'étude des fluides au repos, et la dynamique des fluides, qui est l'étude des fluides en mouvement.

L'utilité pratique de la mécanique des fluides se manifeste par ses applications technologiques couvrant toute une gamme de domaines : aérodynamique, énergie, environnement, exploration pétrolière, aérospatial, biotechnologies, hydraulique, génie des procédés, propulsion, météorologie, tribologie, turbomachines, etc... [8, 9], [15, 16], [29], [31] et [32, 33, 34]. La mécanique des fluides a connu un développement très rapide grâce à l'apport de puissants moyens informatiques et au développement de méthodes numériques.

En mécanique des fluides, les écoulements à surface libre, autour des objets de différentes formes sont étudiés pour leurs applications industrielles et scientifiques. La surface libre est l'interface entre deux fluides non miscibles, généralement un liquide et un gaz. En état statique, la surface libre est plane et horizontale. Dans le cas dyna-

mique, la surface libre a une forme inconnue et elle est déterminée comme solution du problème donné. Les écoulements à surface libre avec tension de surface se produisent dans de nombreux phénomènes naturels et industriels, tels que les vagues à la surface de l'eau, les rivières, les canaux, les barrages, les jets d'eau et les bulles. Ils sont également importants dans les procédés industriels tels que la fabrication de papier, la production émulsions, la pulvérisation de peinture, la fabrication de fibres et la production de films minces [10, 11].

Les écoulements bidimensionnels de type jet peuvent être et souvent observés dans nombreux phénomènes naturels ou physiques qui interviennent dans le domaine industriel. Ainsi de son importance majeure, ce type d'écoulement fait l'objet de plusieurs travaux de recherche scientifique.

Il est bien connu que son intérêt dans le domaine des milieux continus est très indispensable. Ces écoulements sont basés sur les aspects principaux de la mécanique des fluides comme la loi de quantité de mouvement des milieux continus et les tensions superficielles qui sont des forces existant au niveau de toute interface entre deux milieux différents (le fluide et l'air), ces forces proviennent de la variation de pression entre deux milieux et elles sont gouvernées par la loi de Laplace, cette loi liant la courbure locale de l'interface séparant ces deux milieux à la différence de pression (aussi appelée pression de Laplace) entre ces deux milieux.

L'analyse d'un écoulement plan avec une surface libre a été l'objet d'intérêt pour beaucoup de scientifiques et d'industriels pour une longue période. La détermination de certaines caractéristiques de l'écoulement tel que le coefficient de décharge, le coefficient de contraction et la position de la surface libre sont d'un intérêt particuliers aux ingénieurs à nos jours, très peu de problèmes ont été résolus d'une façon explicite. Même les méthodes numériques sont assez difficiles à élaborer à cause de la condition aux

limites imposée sur la frontière "libre", inconnue à priori. Les questions qui peuvent surgir de ce type de problèmes sont, par exemple quelle forme doit avoir une goutte d'un liquide en chute libre ou éjectée sous pression, ou bien encore quelle est la forme de la surface libre d'une chute d'eau d'un récipient ou d'un barrage ; comme dans [35] et [38, 39, 40].

Des études sur les flux ont été présentées par de nombreux auteurs, par exemple [13], [19], [22], [30] et [37]. Jets frappant les murs ont été étudiés dans [26]. Weidong Peng et David F. Parker ont supposé un jet de fluide heurtant une paroi irrégulière [41]. Quelques auteurs ont supposé différentes géométries de parois lisses dans leur papier, en négligeant les effets de la tension superficielle et de la gravité, le problème peut être transformé en une équation intégrale sur la frontière libre qu'ils ont résolue numériquement [1], [25] et [27]. Notre travail de recherche entre dans le cadre général d'une étude numérique d'un écoulement bidimensionnel devant un obstacle de forme quelconque. Il poursuit des études précédentes déjà effectuées par l'auteur de ce mémoire H. Serguine sur l'écoulement devant une plaque verticale pour l'obtention de diplôme du Magister en 2004, ce travail est bien expliqué dans les articles [6, 7] en 2007, par F. Guechi et H. Mekias sur l'effet de la surface sur l'écoulement bidimensionnel à surface libre en 2008 [13], par A. Gasmi sur une étude numérique d'un jet d'écoulement bidimensionnel issu d'un entonnoir en 2014 [3], par A. Amara et A. Gasmi sur l'effet de la tension superficielle sur l'écoulement d'un jet dans un canal en forme U en 2018 [1] et par H. Sekhri, F. Guechi et H. Mekias sur un écoulement de surface libre sans ondes passant un obstacle triangulaire submergé en présence de tension de surface en 2018 [20].

Dans cette étude, le fluide est considéré comme incompressible, non visqueux et les effets de la gravité sont négligés. Avec ces hypothèses, nous obtenons des simplifications sur les équations qui gouvernent ce problème. Ainsi nous pouvons appliqués la théorie

des fonctions de la variable complexe telles que les propriétés des fonctions analytiques et les transformations conformes.

Le problème considéré ici, est caractérisé par les conditions aux limites sur les parois rigides et la condition non linéaire données par l'équation de Bernoulli sur la frontière libre d'une part et d'autre part de la forme inconnue de ce jet. Si on considère l'existence de la tension superficielle, cette condition rend le problème très difficile à résoudre analytiquement, ce qui nous oblige à employer des techniques et des méthodes numériques qui s'appuient sur les transformations conformes pour le résoudre. L'avantage principale de ces méthodes est de transformer les problèmes bidimensionnels à des problèmes unidimensionnels. Nous avons appliqué la technique de la troncation de la série introduite par Birkhoff et Zarantonello [15] et de nombreux auteurs comme dans [1], [4, 5], [13] et [20] pour obtenir l'écoulement à surface libre non linéaire et de l'écoulement en arc, nous cherchons la solution sous forme d'une série tronquée de  $N$  termes.

On considère l'étude d'un écoulement bidimensionnel et potentiel d'un jet devant une plaque inclinée par  $\gamma$ , où  $\gamma$  est l'angle d'inclinaison avec l'horizontale. L'application de la méthode de transformation hodographique à la théorie des jets peut être trouvée par Birkhoff et Zarantonello [15], certaines généralisations de la formule de Schwartz-Christoffel sont données par cette méthode comme il est expliqué dans [7], [15], [17], [22, 23, 24] et [36, 37] qui transforme la moitié d'un champ occupé par un écoulement dans un champ avec une bordure qui combine un polygone et une courbe lisse. Loin en amont, la vitesse d'écoulement est constante  $U$  et la profondeur du fluide est  $2H$ . On note que l'écoulement est caractérisé par deux paramètres; le premier est l'angle  $\gamma$  entre le fond horizontal et la plaque inclinée et le second est le nombre de Weber  $\alpha$ .

Notre travail est composé de trois chapitres et une annexe. Le premier chapitre présente les définitions générales de la mécanique des fluides qui nous aident à établir

les différentes équations de bilans décrivant les mouvements des fluides. La théorie de la variable complexe et les transformations conformes (exemple : Transformations de Schwarz-Christoffel, qui sont un outil important pour modéliser le problème), sont présentées.

Dans le deuxième chapitre, les tensions de surface sont prises en considération et l'effet des forces de gravité est nul. Dans ce cas, le problème est caractérisé par le nombre de Weber  $\alpha$  et l'angle de l'inclinaison  $\gamma$ . L'équation de Bernoulli imposée sur la surface libre inconnue à priori est non linéaire, ce qui rend le problème difficile à résoudre. Le problème non linéaire complet est résolu numériquement en se basant sur une procédure de troncation de séries formulée par Vanden Broeck et Keller [5], [12], [14] et [28].

Dans le troisième chapitre, on discute les résultats obtenus.

Nous achevons cette thèse par une conclusion générale dans laquelle nous ouvrons des perspectives sur nos travaux futurs.

Dans l'annexe, on présente la méthode de Newton, pour la résolution d'un système d'équations non linéaires, et son algorithme, et l'algorithme de Jordan avec pivotation totale implicite.

# **Chapitre 1**

## **Notions fondamentales sur**

## **l'écoulement bidimensionnel et**

## **équations de bases**

### **Résumé**

Dans ce chapitre, on présente des préliminaires et les concepts de base de la mécanique des fluides qui permettent d'établir les équations de bilans décrivant les mouvements des fluides pour un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux.

### **Contenu**

1. Introduction
2. description Eulérienne et Lagrangienne du mouvement d'un fluide
3. Quelques définitions sur les écoulements potentiels

4. Équations de base
5. Écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible à la base de la théorie de la variable complexe

## 1.1 Introduction

Dans la mécanique des fluides, on s'intéresse à étudier des fluides et leurs comportements statique et dynamique. Un fluide en mouvement sera supposé mécaniquement parfait s'il est non visqueux et non conducteur de la chaleur. Il ne présente pas de viscosité si les forces d'interaction entre les divers éléments macroscopiques de fluides sont nulles. L'écoulement d'un fluide parfait se fait alors sans dissipation d'énergie, ni mécanique en raison de sa viscosité nulle, ni thermique en raison de sa conductivité thermique nulle. Dans notre étude, alors, on considère le fluide comme parfait [32].

La mécanique des fluides est une science qui nécessite beaucoup de mathématiques. Les connaissances de la fonction de la variable complexe [34], l'analyse vectorielle [33], la notion tensorielle et la résolution des équations différentielles [31] sont supposées connues.

## 1.2 Description Eulérienne et Lagrangienne du mouvement d'un fluide

Dans l'étude de mouvement d'un fluide c'est encore le point de vue macroscopique. Dans la description Eulérienne, on considère un point géométrique  $M$  fixe par rapport à un référentiel d'étude  $(R)$ , de coordonnées  $(x, y, z)$  et l'on s'intéresse aux différents grandeurs qui se trouvent au point d'observation  $M$  à l'instant  $t$ . Les quatre variables  $x, y, z$  et  $t$  sont appelées variable d'Euler. On appelle cet élément macroscopique, particule de fluide de volume  $\vartheta$  qui se trouve à l'instant  $t$  au point  $M$ .

Par contre, dans la description Lagrangienne, on s'intéresse à une particule de fluide dont on suit l'évolution au cours du temps. Si sa position à tout instant  $t$  est repérée

par le rayon vecteur  $O\vec{M}(t)$ ,  $\frac{dO\vec{M}(t)}{dt}$  représente alors la vitesse de cette particule par rapport au référentiel d'étude  $(R)$ . A l'inverse  $\frac{dO\vec{M}(t)}{dt}$  n'a aucune signification dans  $(R)$ .

Alors, la difficulté qui est l'impossibilité d'identifier toutes les particules de fluide, est résolue par la description eulérienne qui est en pratique bien adaptée à l'étude de l'écoulement des fluides car l'expérimentateur étudie généralement les grandeurs données par capteurs placés sur des points fixes de l'écoulement [31, 32].

## 1.3 Quelques définitions sur les écoulements potentiels

**Définition 1.** *Un écoulement est dit à surface libre lorsqu'il se produit avec une interface libre entre l'air et le fluide. Voir (Figure 1.1)*

### 1.3.1 Tension de surface

La tension de surface est une force qui existe au niveau de toute interface entre deux milieux différents ( liquide-air) liés aux interactions moléculaires d'un fluide. Elle résulte de l'augmentation de l'énergie à l'interface entre deux fluides. La tension de surface peut être aussi écrite en terme de différence de pression entre deux milieux non miscibles séparés par une interface. Ceci est fait en introduisant le terme de courbure, et donne ce que l'on l'appelle l'équation de capillarité de Laplace. La dérivation de cette équation est calculée par [8].

Pour un élément de surface  $ds \rightarrow 0$  on peut considérer cet élément comme un arc d'un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ , voir (Figure 1.2). L'élément de surface est divisé par  $BO$  de telle sorte que  $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = d\theta$ . La force résultante due à la tension de

surface agissant sur cet élément, dans la direction normale, est simplement égale à la somme des forces aux deux extrémités, et donc :

$$\text{Force résultante} = 2T \sin(d\theta)$$

Comme  $ds \rightarrow 0$ , on a  $d\theta \rightarrow 0$  et donc

$$2T \sin(d\theta) \sim 2T d\theta$$

Cette force est aussi considérée comme la différence de pression à travers la surface libre. On a alors

$$2T d\theta = (p - p_0) ds \quad (1.1)$$

D'une autre part si on considère  $ds \rightarrow 0$  la longueur de l'élément de surface peut être exprimée en fonction de la rayon  $R$  et de l'angle  $d\theta$

$$ds = 2R d\theta \quad (1.2)$$

En remplace (1.1) dans (1.2), on trouve

$$(p - p_0) ds = \frac{T}{R} ds \Rightarrow (p - p_0) = \frac{T}{R} \quad (1.3)$$

Donc

$$T = R(p - p_0) \quad (1.4)$$

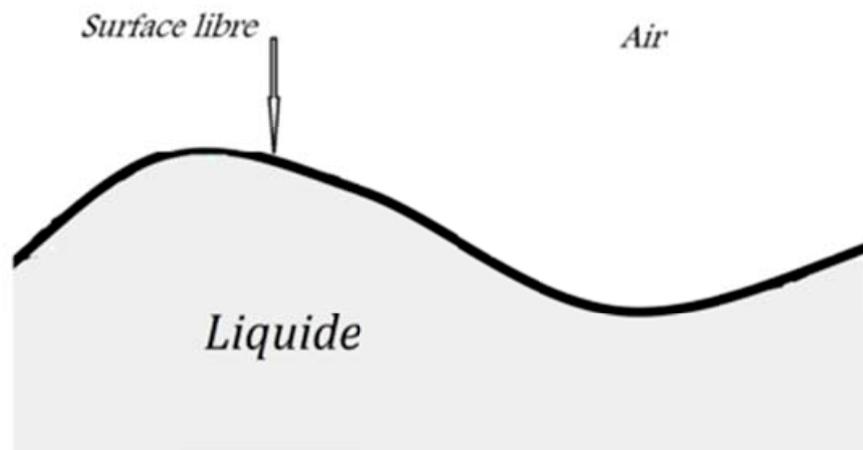


FIGURE 1.1 – Présentation de la surface libre

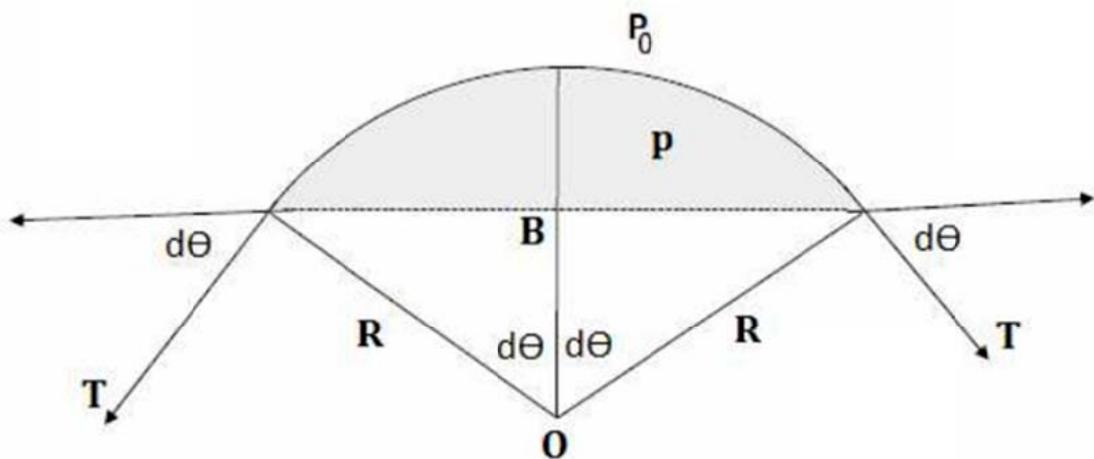


FIGURE 1.2 – Présentation de tension de surface

### 1.3.2 Champ de vitesse

La description d'un fluide en mouvement peut s'interpréter de deux façons. La première ce qu'on peut choisir de suivre les particules de ce fluide dans leur mouvement (méthode de Lagrange) comme on peut faire un cliché à un instant donné du champ de vitesse de toutes les particules fluides (méthode d'Euler). Nous allons adopter la méthode d'Euler par ce qu'il est plus commode pour la description du mouvement d'un fluide.

La méthode d'Euler consiste à décrire l'écoulement en donnant les composantes du vecteur vitesse et autres quantités physiques en chaque point de l'espace, c'est-à-dire, on fixe un point dans l'espace et on constate les variations des quantités liées aux particules du fluide passant par ce point.

- A chaque instant  $t_1$ , on détermine au point  $M$  une particule  $P_1$  de vitesse  $\vec{v}$  et d'autres caractéristiques physiques.
- Et à l'instant  $t_2 = t_1 + dt$ , on trouve au même point  $M$  de l'espace, une autre particule  $P_2$  de vitesse et des caractéristiques physiques différentes.

Donc, on a en  $M$  et à l'instant  $t_1$

$$\vec{V} = \vec{V}(P_1, t_1) = \vec{V}(x, y, z, t_1)$$

et à l'instant  $t_2$ , on a en même point  $M$

$$\vec{V} = \vec{V}(P_2, t_2) = \vec{V}(x, y, z, t_2)$$

### 1.3.3 Écoulement stationnaire

On dit qu'un écoulement est stationnaire ou encore écoulement permanent, si toutes ses caractéristiques quantitatives sont indépendantes du temps, en particulier pour la vitesse, on a

$$\frac{\partial \vec{V}(x, y, z, t)}{\partial t} = 0$$

### 1.3.4 Écoulement irrotationnel

Dans les régions d'écoulement, loin des parois solides où le fluide peut être considéré comme non visqueux, l'écoulement est dit irrotationnel et on a alors la condition

$$\text{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$$

### 1.3.5 Écoulement uniforme

On dit qu'un écoulement est uniforme si ses composantes de vitesse sont indépendantes des coordonnées de l'espace, sinon il est non-uniforme.

### 1.3.6 Écoulement bidimensionnel

un écoulement est dit bidimensionnel ou un écoulement plan, si toutes ses caractéristiques sont dépendantes de deux variables spatiales  $(x, y)$  et du temps  $t$

### 1.3.7 Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible si sa masse volumique est constante par rapport au temps, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Le fluide en mouvement est sans frottements entre les molécules au cours de son déplacement qu'on appelle fluide parfait ou non visqueux.

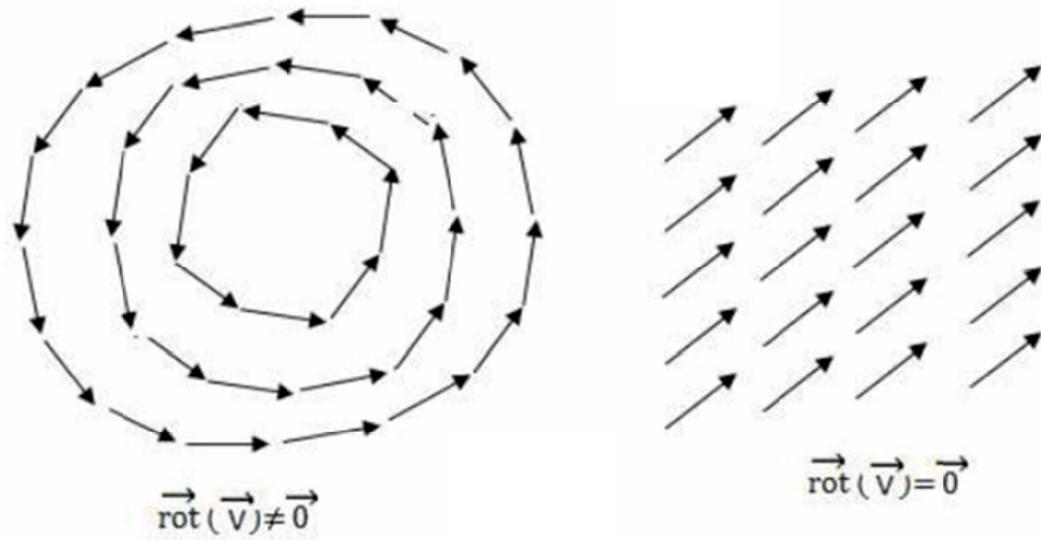


FIGURE 1.3 – Position du champ de vitesse

## 1.4 Équations de base

### 1.4.1 Équation de conservation de la masse

Le principe de conservation de la masse est appliqué sur un élément de volume de l'espace, ce qui impose que l'augmentation de masse pendant un certain temps  $t$ , du fluide contenu dans ce volume doit être égale à la somme des masses de fluide qui y entrent, diminuée de celles qui sortent [15]. On définit l'équation de conservation de la masse par

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (1.5)$$

Cette équation est aussi référée comme l'équation de continuité, c'est-à-dire, il n'y a ni apparition ni disparition de fluide au cours du mouvement. On sait qu'un fluide est incompressible lorsque sa masse volumique est invariable  $\rho = C_{ste}$ .

L'équation de continuité se réduit alors, dans le cas d'un écoulement conservatif d'un fluide incompressible, à

$$\text{div}(\vec{V}) = 0 \quad (1.6)$$

### 1.4.2 Équation de mouvement

Les forces qui agissent sur une particule d'un fluide sont de deux types :

- Forces intérieures d'origine moléculaires ; elles sont composées deux à deux et donc leurs résultantes sont nulles.
- Forces extérieures ; sont des forces de volume ou des forces de surface.

La forme de l'équation qui gouverne le mouvement d'une particule de fluide dépend des forces que l'on doit considérer. Comme équation, on a

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{d\vartheta} \sum F_{ext}^{\vec{}}$$

D'où

$$\rho \left( \frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = \frac{1}{d\vartheta} \sum F_{ext}^{\vec{}}$$

### 1.4.3 Équation d'Euler

On considère que l'élément de volume du fluide est soumis à la force ( $gradP$ ) exercée par le fluide environnant, où  $P$  est la pression. Dans le cas où on ne considère que les forces surfaciques, l'équation de la balance des forces s'écrit alors

$$\rho \left( \frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = -gradP \quad (1.7)$$

Lorsque le fluide est placé dans un champ (champ de pesanteur, champ magnétique,...etc), chacun de ses éléments de volume est encore soumis à la force  $F_{champ}^{\vec{}}$ , cette force doit être ajoutée au second membre de l'équation (1.7) de sorte que cette dernière s'écrit sous la forme

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} gradP + F_{champ}^{\vec{}} \quad (1.8)$$

Cette équation est dite d'Euler.

### 1.4.4 Équation de Bernoulli

A partir de l'équation d'Euler pour un fluide incompressible et parfait et lorsque les forces de volume dérivent d'un potentiel  $F_{champ}^{\vec{}} = grad\mu$ , on a

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} gradP + grad\mu$$

On rappelle l'identité vectorielle

$$(\vec{V} grad) \vec{V} = grad\left(\frac{V^2}{2}\right) + (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V}$$

Ce qui permet d'écrire

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) + (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{grad}P + \vec{grad}\mu$$

On a alors

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{grad}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \mu\right) + (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V} = 0 \quad (1.9)$$

On rappelle que la forme du vecteur tourbillon est  $\vec{rot}\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$ . Dans le cas d'un écoulement permanent (stationnaire)  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$  et l'équation (1.9) s'écrit

$$\vec{grad}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \mu\right) + \vec{rot}\vec{V} \times \vec{V} = 0$$

Sur une ligne de courant de vecteur unitaire  $\vec{s}$ , on a  $\frac{\partial}{\partial s} = \vec{s} \cdot \vec{grad}$ . Ce qui donne

$$\vec{s} \cdot \vec{grad}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \mu\right) + \vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V} = 0$$

Comme  $\vec{s}$  et  $\vec{V}$  sont colinéaires, alors

$$\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V} = 0$$

Ainsi, on a

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \mu\right) = 0$$

On a alors

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \mu = K$$

Où  $K$  est le long d'une ligne de courant et les forces de volume se réduisent le plus souvent à la seule force de pesanteur, dans ce cas, on a

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = K \quad (1.10)$$

## 1.5 Écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible à la base de la théorie de la variable complexe

### 1.5.1 Fonction potentielle complexe

#### Fonction de courant

Si l'écoulement est incompressible alors l'équation de continuité (conservation de la masse) se réduit à

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0$$

En deux dimensions,  $\vec{V} = (u(x, y); v(x, y))$  où  $u$  et  $v$  sont les composantes de la vitesse

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

Cela implique que la forme différentielle  $-vdx + udy$  est une différentielle totale d'une certaine fonction  $\psi$  tel que

$$d(\psi) = -vdx + udy$$

Alors, on trouve

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -vdx + udy$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1.11)$$

$\psi$  s'appelle la fonction de courant et les surfaces définies par les lignes  $\psi = \text{Constante}$  sont des lignes de courants.

### Potentiel de vitesse

Si l'écoulement est irrotationnel, alors sa vitesse dans tout le domaine de l'écoulement est donnée par l'équation suivante

$$\text{rot}(\vec{V}) = 0$$

En deux dimensions,  $\vec{V} = (u(x, y); v(x, y))$  où  $u$  et  $v$  sont les composantes de la vitesse

$$\text{div}(\vec{V}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

Cela implique que la forme différentielle  $-vdx + udy$  est une différentielle totale d'une certaine fonction  $\phi$  tel que

$$d(\phi) = udx + vdy$$

On peut donc écrire

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases} \quad (1.12)$$

$\phi$  représente le potentiel de vitesse.

On définit la fonction  $f$  de la variable complexe  $z = x + iy$  comme suit

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

Cette fonction est dite fonction potentielle.

### 1.5.2 Fonctions holomorphes

On peut définir un point  $z$  du plan complexe  $C$  par deux coordonnées réelles de différentes manières. Soit  $(x, y)$  les coordonnées cartésiennes d'un point du plan. Pour utiliser la notion de variable complexe, on introduit la variable  $z$

$$z = x + iy \text{ où } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Ou bien encore

$$z = \exp(i\theta), r = |z|, \theta = \text{Arg}(z)$$

Où  $r$  est le module de la variable  $z$  et  $\theta$  son argument. Un disque dans le plan complexe est désigné par

$$D(z_0, r_0) = \{z \in C, |z - z_0| < r_0\}$$

Soit la fonction potentielle

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

Où  $\phi$  et  $\psi$  sont deux fonctions réelles de deux variables qu'elles vérifient les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1.13)$$

De plus, on a

$$\Delta \phi = \Delta \psi = 0$$

Les lignes  $\phi = C_{ste}$  et  $\psi = C_{ste}$  constituent des familles orthogonales et la vitesse complexe est donnée par

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv \quad (1.14)$$

### 1.5.3 Transformations conformes

Soit  $f$  une fonction de variable complexe du plan  $Z$  (l'ensemble de départ) vers le plan  $W$  (l'ensemble d'arrivé).

**Définition 2.** [33] Une transformation  $f(z) = w$  est conforme, si l'angle entre deux courbes du plan  $Z$  est égale à l'angle qu'il y a entre les images de ces courbes dans le plan  $W$ . Le sens de l'angle doit être respecté.

**Théorème** Une transformation analytique est conforme à tous les points où  $f' \neq 0$ .

La preuve de ce théorème est trouvée dans [33] page 286.

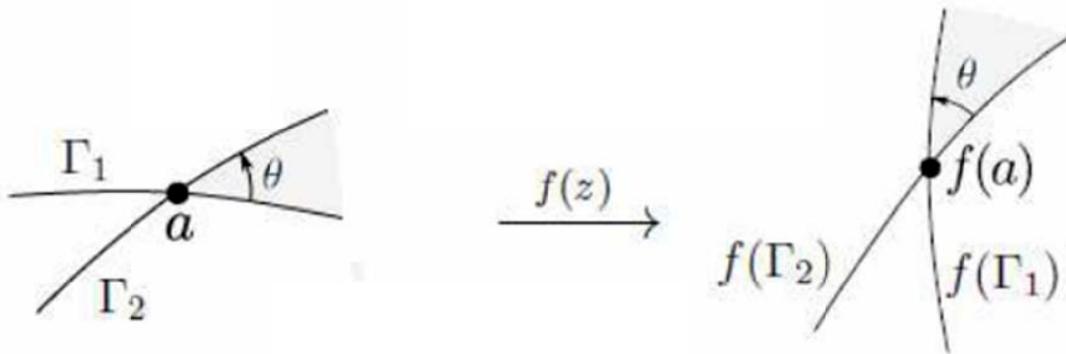


FIGURE 1.4 – Transformation conforme

### 1.5.4 Transformation de Schwarz-Christoffel

La transformation de Schwarz-Christoffel est une transformation conforme très utilisée dans la résolution des problèmes d'écoulements. Cette transformation réalise une transformation de l'intérieur d'un polygone du plan complexe  $\Omega$  (Figure 1.5) en demi-plan supérieur (Figure 1.6) de la variable complexe  $\lambda$ .

Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  les points correspondants respectivement à  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  de l'axe réel du plan  $\lambda$ ; voir (Figure 1.6). On définit la transformation de Schwarz-Christoffel qui représente l'intérieur du polygone à un demi-plan supérieur par la formule

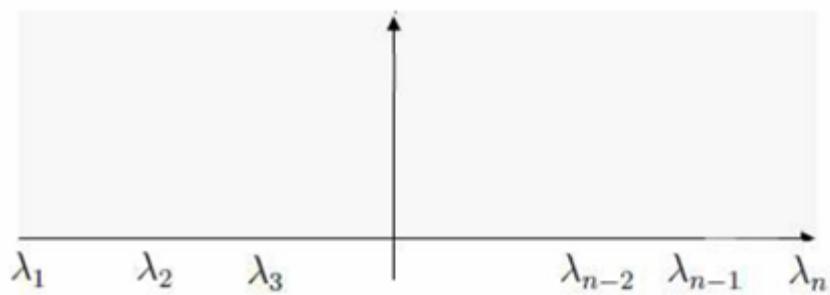
$$\Omega = A \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} d\lambda + B \quad (1.15)$$

Où  $A$  et  $B$  sont des constantes complexes,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  des nombres réels et  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  les angles intérieurs au polygone.

#### Remarques

1. La transformation  $\Omega(\lambda)$  est conforme sauf aux points  $\lambda_i$ .
2. Le point anguleux est transformé en un point non anguleux.
3. La transformation de  $\alpha_i$  tend vers l'infini, alors on omet le facteur  $(\lambda - \lambda_n)$  dans la transformation, car il serait associé à l'exposant 0. On dit que le polygone est dégénéré en ce point.
4. On peut choisir trois points arbitraire parmi les  $n$  points  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

FIGURE 1.5 – Plan de la variable  $\Omega$

FIGURE 1.6 – Plan de la variable  $\lambda$

## Chapitre 2

# Écoulement de type jet devant une plaque inclinée avec tension de surface

### Résumé

Dans ce chapitre, on va étudier un problème d'écoulement d'un jet devant une plaque inclinée. Le fluide est considéré comme incompressible et non visqueux. Dans le cas où en négligeant les effets de la gravité et en tenant compte l'effet de la tension de surface, ce problème devient très difficile à résoudre analytiquement, alors une approche numérique dite technique de la troncation de la série est adoptée pour le résoudre. Par cette méthode, on a pu déterminer la solution qui donne la forme de la surface libre de l'écoulement et qui est caractérisé par un paramètre dite nombre de Weber  $\alpha$  et par l'angle de l'inclinaison  $\gamma$ .

### Contenu

1. Introduction
2. Position et formulation du problème
3. Résolution numérique

## 2.1 Introduction

Dans cette partie de notre travail, on traite un problème d'écoulement d'un fluide d'un jet devant une plaque inclinée par un angle  $\gamma$  avec les effets de tension de surface. Lorsque le terme non linéaire de l'équation de Bernoulli existe, la solution exacte de ce problème est impossible. Dans ce cas, on utilise une procédure numérique qui est la méthode de troncation de la série pour trouver la solution. Cette méthode est introduite par Vanden-Broeck [26], telle que sa bonne performance est montrée dans plusieurs travaux antérieurs, (voir les articles [2, 3],[6, 7], [18] et [21]). L'idée principale de cette méthode est basée sur la théorie des transformations conformes et qui consiste à transformer le domaine occupé par l'écoulement dans un plan en un disque d'un autre plan. Par cette approche on a pu déterminer avec précision le comportement de vitesse au voisinage de point de stagnation et donc la solution qui est caractérisé par un paramètre dite nombre de Weber  $\alpha$  et l'angle de l'inclinaison  $\gamma$ .

## 2.2 Position et formulation du problème

Considérons un écoulement potentiel et bidimensionnel dû à un jet d'un fluide incompressible et non visqueux devant une plaque inclinée par un angle  $\gamma$  formé avec l'horizontale. Sur la surface libre l'effet de la gravité est négligé et seulement l'effet de la tension superficielle est pris en compte.

Et comme repère de coordonnées, On prend la paroi  $EO$  sur l'axe  $\tilde{x}o\tilde{x}'$  et la paroi  $COC'$  sur la droite de l'équation  $\tilde{y} = -\tan(\gamma)\tilde{x}$ .

On suppose que quand  $\tilde{x} \rightarrow -\infty$ , l'écoulement est uniforme de vitesse  $\tilde{U}$  et du profondeur  $2\tilde{H}$ . Cet écoulement est limité supérieurement par la ligne de courant libre  $AB$  et inférieurement par la ligne de courant libre  $A'B'$  et la vitesse est proportionnelle à  $\tilde{x}$ ,

car quand  $\tilde{x} \rightarrow 0$ , la vitesse tend vers zéro, voir (Figure 2.1).

Comme l'écoulement est bidimensionnel, on peut alors utiliser la notion de la variable complexe en supposant que  $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ . La vitesse conjuguée complexe est donnée par  $\tilde{\xi} = \tilde{u} - i\tilde{v}$ , où  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  sont les composantes du vecteur vitesse et par  $\tilde{f} = \tilde{\phi} + i\tilde{\psi}$  la fonction potentielle complexe, où  $\tilde{\phi}$  et  $\tilde{\psi}$  sont respectivement la fonction potentielle et la fonction de courant.

On choisit  $\tilde{\phi} = 0$  au point  $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$ , et  $\tilde{\psi} = 0$  sur la ligne de courant  $EOC$  et  $EOC'$ , il s'ensuit que  $\tilde{\psi} = \tilde{U}\tilde{H}$ ,  $\tilde{\psi} = -\tilde{U}\tilde{H}$  sur les lignes de courant  $ADB$  et  $A'D'B'$ .

L'écoulement est potentiel, alors les composantes du vecteur vitesse sont écrites en fonction de  $\tilde{\phi}$  et  $\tilde{\psi}$  par les relations suivantes

$$\begin{cases} \tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}} \\ \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \end{cases} \quad (2.1)$$

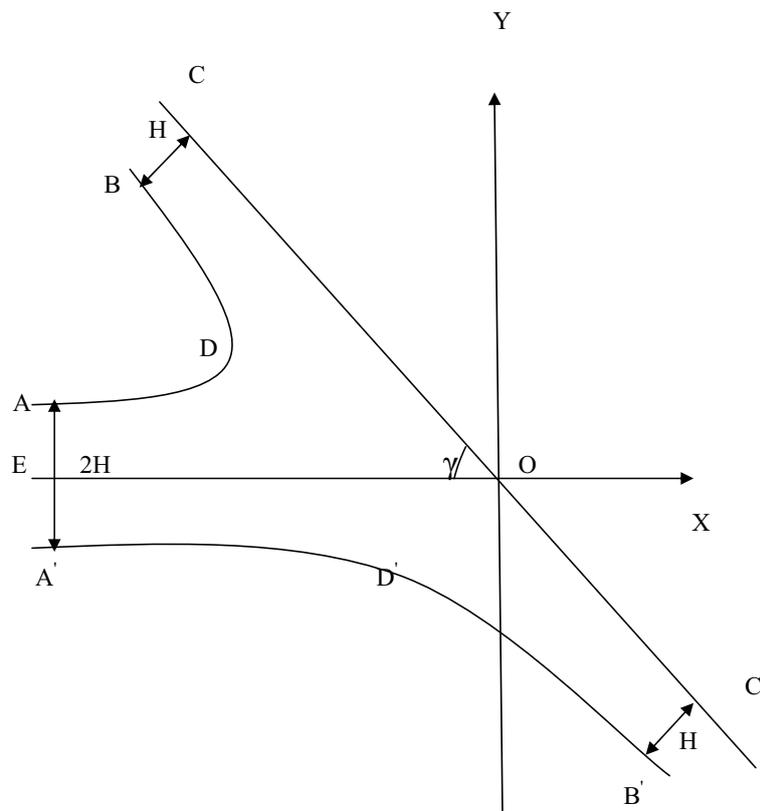
Les relations (2.1) montrent que la vitesse complexe  $\tilde{\xi}$  et la fonction potentielle  $\tilde{f}$  sont des fonctions analytiques en  $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ .

On désigne par  $\tilde{P}_0$  la pression atmosphérique qui est constante au dessus de la surface libre et par  $\tilde{P}$  la pression du fluide sur la surface libre. Lorsque  $\tilde{x} \rightarrow -\infty$ , la surface libre est une droite qui est parallèle à  $\tilde{x}o\tilde{x}'$  donc  $\tilde{P} = \tilde{P}_0$ .

Sous ces conditions, l'équation de Bernoulli sur les surfaces libres  $ADB$  et  $A'D'B'$  est donnée par

$$\frac{1}{2}\tilde{q}^2 + \frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}} = \frac{1}{2}\tilde{U}^2 + \frac{\tilde{P}_0}{\tilde{\rho}} \quad (2.2)$$

$\tilde{\rho}$  est la masse volumique du fluide et  $\tilde{q} = \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}$  désigne le module de la vitesse.

FIGURE 2.1 – Écoulement dans le plan  $Z$

La relation entre  $\tilde{P}$  et  $\tilde{P}_0$  est donnée par la loi de Laplace

$$\tilde{P} - \tilde{P}_0 = \frac{\tilde{T}}{\tilde{R}} \quad (2.3)$$

Où  $\tilde{T}$  et  $\tilde{R}$  désignent respectivement la tension de surface et le rayon de courbure de la surface libre.

On a par définition  $\tilde{K} = \frac{1}{\tilde{R}}$ . Puisque le centre de courbure est en dehors du domaine de l'écoulement, alors  $\tilde{R}$  est de signe négatif.

En substituant (2.3) dans (2.2), on trouve

$$\frac{1}{2}\tilde{q}^2 - \frac{\tilde{T}}{\tilde{\rho}}\tilde{K} = \frac{1}{2}\tilde{U}^2 \quad (2.4)$$

Pour des raisons de simplification de l'équation ci-dessus, on est conduit à choisir certaines grandeurs, qui à partir desquelles, on peut exprimer (2.4) en variables non dimensionnelles. Pour cela, nous choisissons  $\tilde{H}$  et  $\tilde{U}$  comme étant respectivement des références de la longueur de la vitesse.

On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \frac{\tilde{q}}{\tilde{U}}; \\ x = \frac{\tilde{x}}{\tilde{H}}, y = \frac{\tilde{y}}{\tilde{H}}; \\ u = \frac{\tilde{u}}{\tilde{U}}, v = \frac{\tilde{v}}{\tilde{U}}; \\ \phi = \frac{\tilde{\phi}}{\tilde{C}\tilde{H}\tilde{U}}, \psi = \frac{\tilde{\psi}}{\tilde{C}\tilde{H}\tilde{U}}; \\ C = \frac{\tilde{y}_C}{\tilde{H}}; \\ K = \tilde{H}\tilde{R} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Où les nouvelles variables  $q, x, y, u, v, \phi, \psi$  et  $K$  sont non dimensionnelles, dans ce cas

l'équation (2.4) devienne

$$\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{\alpha}K = \frac{1}{2} \quad (2.6)$$

Où  $\alpha$  désigne le nombre de Weber, tel que  $\alpha = \frac{\tilde{\rho}\tilde{U}^2\tilde{H}}{\tilde{T}}$ .

Le paramètre sans dimension  $C$  a une propriété particulière; il donne la valeur du rapport de la profondeur du point le plus proche de la surface libre au point de stagnation  $O$  à la profondeur du fluide à l'infini, ce rapport définit le coefficient de contraction. Le potentiel complexe sans dimension et la fonction de la vitesse complexe sans dimension sont données par

$$f = \phi + i\psi \text{ et } \xi = \frac{df}{dz} = u - iv$$

Ainsi

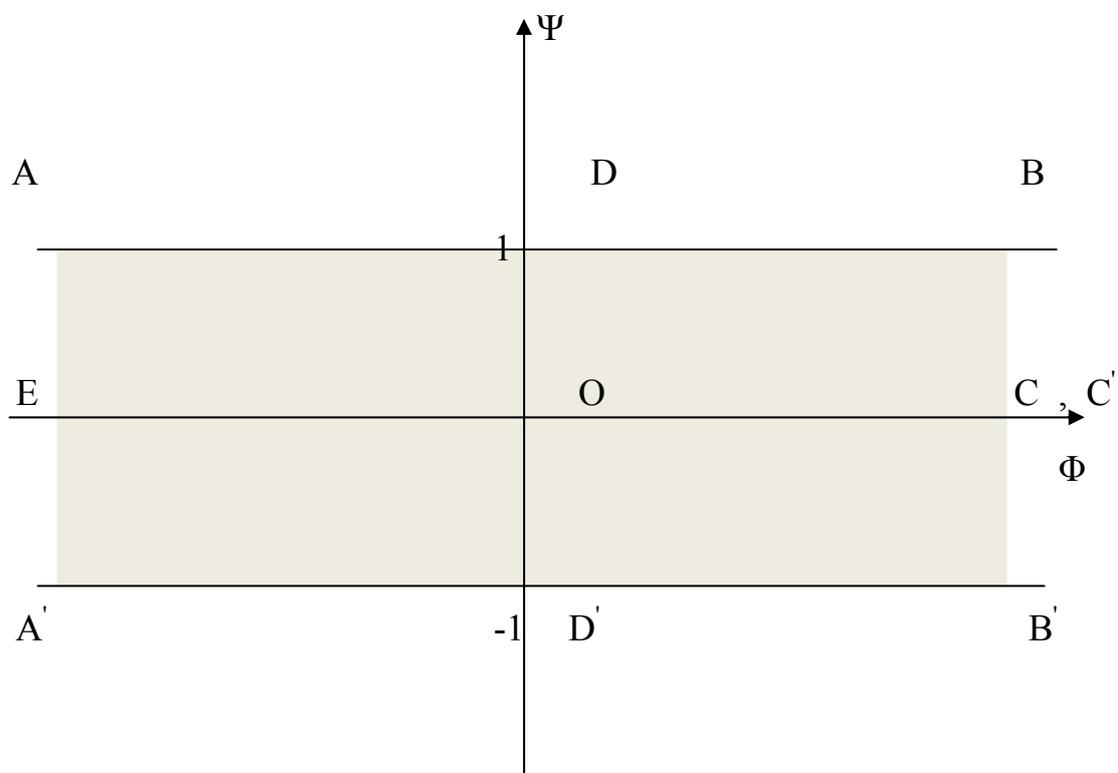
$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \text{ et } v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Où  $\phi$  est la fonction potentielle sans dimension,  $\psi$  est la ligne de courant sans dimension, voir (Figure 2.2).

Le problème mathématique comme il est dans la description ci dessus est formulé comme un problème aux limites consiste à déterminer la fonction potentielle complexe

$\phi(x, y)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi = 0, & \text{dans le domaine de l'écoulement} \\ \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = 0, & \text{aux parois rigides} \\ |\Delta\phi|^2 - \frac{2}{\alpha}K = 1, & \text{sur les surfaces libres} \\ \phi(0, 0) = 0. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

FIGURE 2.2 – Le plan potentiel complexe  $f = \phi + i\psi$

La résolution du problème sous cette forme est très difficile d'autant plus que la condition aux limites non linéaire est spécifiée sur une frontière inconnue (la surface libre). Au lieu de résoudre le problème sous sa forme d'équation aux dérivées partielles de la fonction  $\phi$ , on profite de la propriété que pour l'écoulement bidimensionnel potentiel (comme dans notre problème) et si le plan dans lequel l'écoulement est identifié au plan complexe, la vitesse complexe ( $\xi = u - iv$ ) et la fonction du potentiel complexe ( $f = \phi + i\psi$ ) sont des fonctions analytiques de la variable complexe ( $z = x + iy$ ). Par conséquent, nous utilisons toutes les propriétés nécessaires des fonctions analytiques d'une variable complexe (transformation conforme).

Comme  $(u - iv)$  est analytique, on définit la fonction  $(\tau - i\theta)$  par la relation

$$\xi = u - iv = \exp(\tau - i\theta) \quad (2.8)$$

Où  $\theta$  est l'angle entre le vecteur vitesse et l'horizontale.

Évaluons maintenant le courbure  $K$ , on a

$$\vec{V} = \exp(\tau) \left( \cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j} \right)$$

Et dans les coordonnées intrinsèques

$$\vec{V} = |\vec{V}| \vec{u}_T$$

Ici  $\vec{u}_T = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$  est le vecteur unitaire tangentiel.

$$\begin{aligned} \vec{u}_\eta &= R \frac{d\vec{u}_\eta}{ds} = R \frac{d\vec{u}_\eta}{dt} \frac{dt}{ds} \\ &= R \exp(-\tau) \left( \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{d\vec{u}_T}{\theta} \\ &= R \exp(\tau) \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \left( -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \right) \end{aligned}$$

$\vec{u}_\eta$  est le vecteur unitaire normal et  $ds$  désigne l'élément de longueur sur la surface libre.

Finalement, on obtient

$$K = \frac{1}{R} = \exp(\tau) \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|$$

On remplace  $K$  par sa valeur dans l'équation (2.6), on trouve

$$\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{\alpha}q \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| = \frac{1}{2}, \quad \text{sur } ADB \text{ et } A'D'B' \quad (2.9)$$

On sait que  $\theta(\phi)$  est une fonction croissante lorsque  $-\infty < \phi < +\infty$  sur les surfaces libres.

Alors, l'équation de Bernoulli dans le plan  $f$  s'écrit

$$\frac{1}{2} \exp 2\tau - \frac{1}{\alpha} \exp \tau \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| = \frac{1}{2}, \quad \text{sur } ADB \text{ et } A'D'B' \quad (2.10)$$

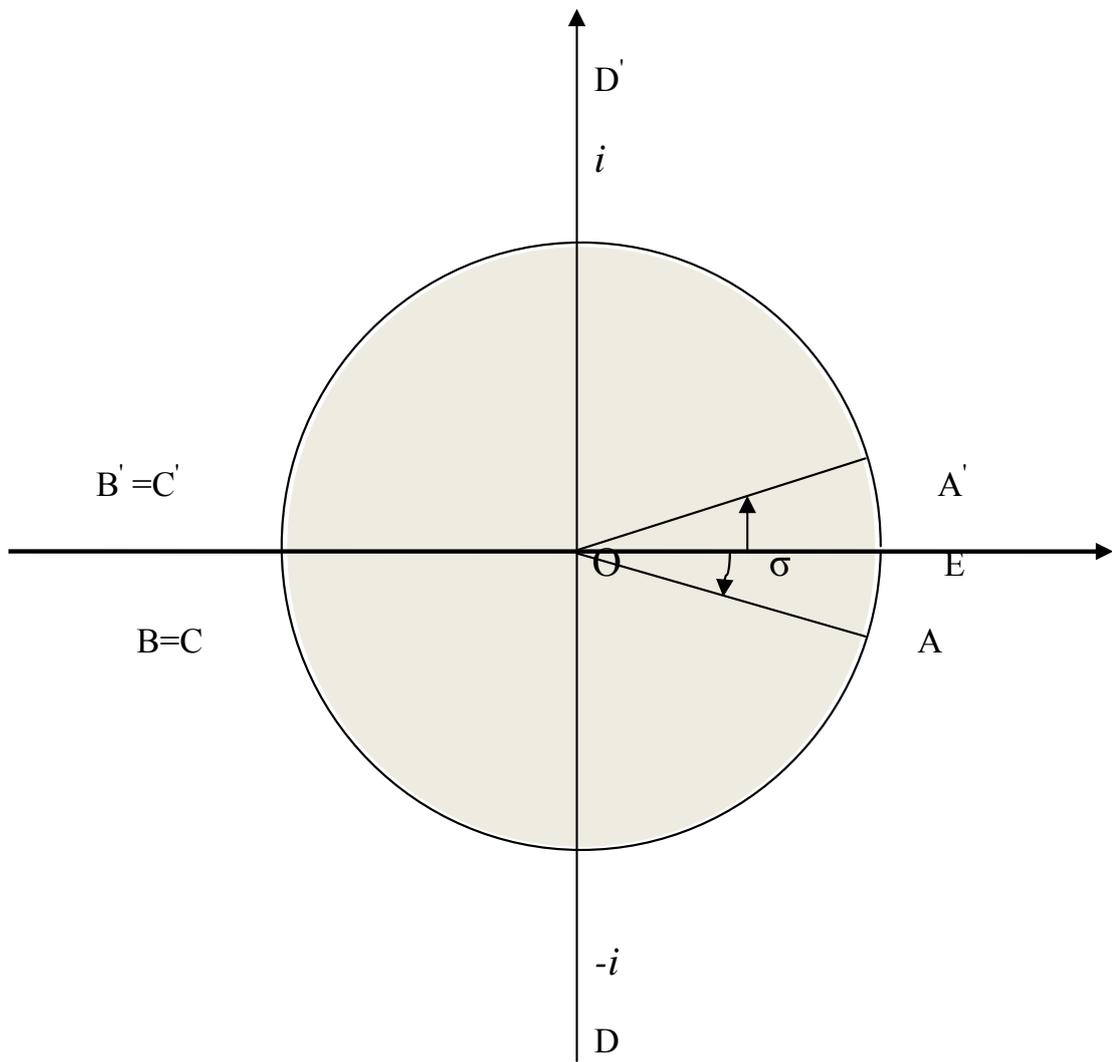
Avec les conditions

$$\begin{cases} \theta = 0, \psi = 0, \phi < 0, & \text{sur } EO \\ \theta = \gamma, \psi = 0, \phi > 0, & \text{sur } OC \\ \theta = \pi - \gamma, \psi = 0, \phi > 0, & \text{sur } OC' \end{cases} \quad (2.11)$$

Ce problème mathématique consiste à déterminer la fonction  $\tau - i\theta$  qui est analytique dans la bande  $-1 < \psi < 1$  et qui vérifie les conditions (2.10) et (2.11).

## 2.3 Résolution numérique

Pour résoudre ce problème numériquement, on passe à l'étape où l'on utilise la technique de troncation de la série. On transforme le domaine occupé par le fluide dans le plan  $f$ , en un disque unité dans le plan de la variable  $t$ , voir (Figure 2.3), par la transformation

FIGURE 2.3 – Plan de la variable  $t$

$$f = \frac{2}{\pi} \ln \left( \frac{1-t}{1+t} \right). \quad (2.12)$$

Les points  $(A, E, A')$ ;  $(B, C, B', C')$ ;  $D$ ;  $D'$  et  $O$  dans le plan  $f$  sont transformés respectivement aux points  $t = 1$ ,  $t = -1$ ,  $t = -i$ ,  $t = i$  et  $t = 0$ .

Les surfaces libres  $ADB$  et  $A'D'B'$  en deux circonférences d'un cercle voir (Figure 2.3).

Les points des surfaces libre dans le plan  $t$  sont donnés par la relation

$$t = |t| \exp(i\sigma) = \begin{cases} \exp(i\sigma), & -\pi < \sigma < 0 \text{ sur } ADB \\ \exp(i\sigma), & 0 < \sigma < \pi \text{ sur } A'D'B' \end{cases} \quad (2.13)$$

Et dans le plan  $f$  par la relation

$$f = \phi, \text{ tel que } -\infty < \sigma < +\infty \quad (2.14)$$

Pour résoudre le problème, on doit écrire l'équation (2.10) dans le plan  $t$ . Pour cela, on doit évaluer  $\left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|$ , dans le plan  $t$ . En substituant (2.13) dans l'équation (2.12), on trouve

$$f = \phi = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \ln \left( -i \tan \left( \frac{\sigma}{2} \right) \right), & -\pi < \sigma < 0 \text{ sur } ADB \\ \frac{2}{\pi} \ln \left( i \tan \left( \frac{\sigma}{2} \right) \right), & 0 < \sigma < \pi \text{ sur } A'D'B' \end{cases}$$

Ce qui implique

$$f = \phi = \begin{cases} \frac{2}{\pi \sin(\sigma)} d\sigma, & -\pi < \sigma < 0 \text{ sur } ADB \\ -\frac{2}{\pi \sin(\sigma)} d\sigma, & 0 < \sigma < \pi \text{ sur } A'D'B' \end{cases}$$

D'où

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} = \begin{cases} \frac{2}{\pi \sin(\sigma)}, & -\pi < \sigma < 0 \text{ sur } ADB \\ -\frac{2}{\pi \sin(\sigma)}, & 0 < \sigma < \pi \text{ sur } A'D'B' \end{cases} \quad (2.15)$$

D'autre part, on a

$$\left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| = \left| \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \phi} \right| = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \sin(\sigma) \frac{\partial \theta}{\partial \sigma}, & -\pi < \sigma < 0 \text{ sur } ADB \\ \frac{\pi}{2} \sin(\sigma) \frac{\partial \theta}{\partial \sigma}, & 0 < \sigma < \pi \text{ sur } A'D'B' \end{cases}$$

Finalement l'équation de Bernoulli devient

$$\begin{cases} \exp(2\tau) + \frac{\pi}{\alpha} \sin(\sigma) \exp(\tau) \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = 1 & \text{sur } ADB \\ \exp(2\tau) - \frac{\pi}{\alpha} \sin(\sigma) \exp(\tau) \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = 1 & \text{sur } A'D'B' \end{cases} \quad (2.16)$$

Puisque  $\xi(t) = \exp(\tau(t) - i\theta(t))$  est analytique dans tout le domaine d'écoulement sauf au point de stagnation  $O$  (la vitesse est nulle), une étude asymptotique est nécessaire pour obtenir le comportement de la vitesse en ce point.

### 2.3.1 Comportement local de la vitesse au voisinage de point de stagnation $t = 0$

Au point de stagnation  $O$ , où  $t = 0$  nous avons un écoulement dans un angle  $\gamma$ , cet écoulement est caractérisé par la fonction potentielle suivante

$$f \sim \begin{cases} a(z)^{\frac{\pi}{\gamma}} & \text{sur } ADB \\ a(z)^{\frac{\pi}{\pi - \gamma}} & \text{sur } A'D'B' \end{cases} \quad (2.17)$$

Alors, lorsque  $z \rightarrow 0$ , on a

$$\xi = C \frac{df}{dz} \sim \begin{cases} aC \frac{\pi}{\gamma} (z)^{\frac{\pi}{\gamma} - 1} & \text{sur } ADB \\ aC (z)^{\frac{\pi}{\pi - \gamma} - 1} & \text{sur } A'D'B' \end{cases} \quad (2.18)$$

On a sur la surface libre

$$f = \phi = \frac{2}{\pi} \ln \left( \frac{1-t}{1+t} \right) \quad (2.19)$$

D'après les relations (2.17) et (2.19) et lorsque  $z \rightarrow 0$ , on trouve

$$z \sim \begin{cases} \left[ \frac{2}{a\pi} \ln \left( \frac{1-t}{1+t} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\pi}} & \text{sur } ADB \\ \left[ \frac{2}{a\pi} \ln \left( \frac{1-t}{1+t} \right) \right]^{\frac{\pi-\gamma}{\pi}} & \text{sur } A'D'B' \end{cases} \quad (2.20)$$

Lorsque  $t \rightarrow 0$ , on trouve

$$\xi = \begin{cases} aC \left[ \frac{2}{a\pi} \ln \left( \frac{1-t}{1+t} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\pi}} & \text{sur } ADB \\ aC \left[ \frac{2}{a\pi} \ln \left( \frac{1-t}{1+t} \right) \right]^{\frac{\pi-\gamma}{\pi}} & \text{sur } A'D'B' \end{cases} \quad (2.21)$$

Le développement limité de la fonction potentielle complexe  $f$  au voisinage du point  $t = 0$  est donné par

$$f \sim t + O(t^2) \quad (2.22)$$

### 2.3.2 Formulation de la série

Définissons la fonction  $\Omega(t)$  comme suit

$$\xi(t) = g(t) \Omega(t)$$

Où  $g(t)$  contient les singularités et les zéros. La fonction  $\Omega(t)$  est bornée et continue sur le cercle unité et analytique à l'intérieur du disque unité, alors, elle se développe en série. On peut donc écrire  $\xi(t)$  comme suit

$$\xi(t) = g(t) \exp \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right). \quad (2.23)$$

Où les coefficients  $a_k$  sont des réels à déterminer. En utilisons les relations (2.17), (2.18), (2.19) et (2.21) pour écrire  $\xi(t)$  donné par (2.23) comme suit

$$\xi(t) = u - iv = \begin{cases} (t)^{\frac{\pi - \gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{2k}\right) & \text{sur } ADB \\ (t)^{\frac{\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{2k}\right) & \text{sur } A'D'B' \end{cases} \quad (2.24)$$

L'équation (2.24) vérifie toutes les conditions aux limites sauf la condition de Bernoulli.

On détermine les  $a_k$  de sorte que l'équation de Bernoulli soit vérifiée.

En substituant l'équation (2.13) dans l'équation (2.24), on obtient

$$\exp(\tau - i\theta) = \begin{cases} \exp\left[\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(2k\sigma) + i\left(\left(\frac{\pi - \gamma}{\pi}\right)\sigma + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sin(2k\sigma)\right)\right] & \text{sur } ADB \\ \exp\left[\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(2k\sigma) + i\left(\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)\sigma + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sin(2k\sigma)\right)\right] & \text{sur } A'D'B' \end{cases} \quad (2.25)$$

D'où

$$\tau(\sigma) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(2k\sigma) \text{ sur } ADB \text{ et } A'D'B' \quad (2.26)$$

Et

$$\theta(\sigma) = \begin{cases} -\left(\left(\frac{\pi - \gamma}{\pi}\right)\sigma + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sin(2k\sigma)\right) & \text{sur } ADB \\ -\left(\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)\sigma + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sin(2k\sigma)\right) & \text{sur } A'D'B' \end{cases} \quad (2.27)$$

En substituant (2.26) et (2.27) dans l'équation (2.16), on trouve

$$\begin{cases} \exp\left(2\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(2k\sigma)\right) - \frac{\pi}{\alpha} \exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(2k\sigma)\right) \\ \times (\sin \sigma) \left(\left(\frac{\pi - \gamma}{\pi}\right) + \sum_{k=0}^{+\infty} 2ka_k \cos(2k\sigma)\right) = 1, & \text{sur } ADB \\ \exp\left(2\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(2k\sigma)\right) + \frac{\pi}{\alpha} \exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(2k\sigma)\right) \\ \times (\sin \sigma) \left(\left(\frac{\gamma}{\pi}\right) + \sum_{k=0}^{+\infty} 2ka_k \cos(2k\sigma)\right) = 1, & \text{sur } A'D'B' \end{cases} \quad (2.28)$$

Pour déterminer les coefficients  $a_k$ , faisons une troncation de la série après  $N$  termes. Ainsi on introduit la discrétisation des intervalles  $[-\frac{\pi}{2}, 0]$  et  $[0, \frac{\pi}{2}]$  en  $N$  points, comme suit

$$\sigma(I) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2(N+1)} \left(I - \frac{1}{2}\right), & \text{sur } ADB \\ \frac{\pi}{2(N+1)} \left(I - \frac{1}{2}\right), & \text{sur } A'D'B' \end{cases} \quad I = 1, 2, \dots, N+1 \quad (2.29)$$

On utilise (2.28) et (2.29), on obtient le système de  $N+1$  équations de  $N+1$  inconnus

$$\begin{cases} \exp\left(2\sum_{k=0}^N a_k \cos(2k\sigma(I))\right) - \frac{\pi}{\alpha} \exp\left(\sum_{k=0}^N a_k \cos(2k\sigma(I))\right) \\ \times (\sin \sigma(I)) \left(\left(\frac{\pi - \gamma}{\pi}\right) + \sum_{k=0}^N 2ka_k \cos(2k\sigma(I))\right) = 1, & \text{sur } ADB \\ \exp\left(2\sum_{k=0}^N a_k \cos(2k\sigma(I))\right) + \frac{\pi}{\alpha} \exp\left(\sum_{k=0}^N a_k \cos(2k\sigma(I))\right) \\ \times (\sin \sigma(I)) \left(\left(\frac{\gamma}{\pi}\right) + \sum_{k=0}^N 2ka_k \cos(2k\sigma(I))\right) = 1, & \text{sur } A'D'B' \end{cases} \quad (2.30)$$

Pour résoudre ce système, on utilise la méthode de Newton.

### 2.3.3 Forme de la surface libre

De la relation  $\xi = C \frac{df}{dz}$ , on a

$$dz = dx + idy = C \exp(-\tau + i\theta)(d\phi + id\psi) \quad (2.31)$$

Comme  $d\psi = 0$  sur la surface libre, il devient

$$\begin{cases} dx = C \exp(-\tau) \cos(\theta) \partial\phi \\ dy = C \exp(-\tau) \sin(\theta) \partial\phi \end{cases}$$

Par suite

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \sigma} = C \exp(-\tau) \cos(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma} = C \exp(-\tau) \sin(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \end{cases} \quad (2.32)$$

Pour tracer la courbe de la surface libre, on utilise la formule suivante

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} + i \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{1}{\xi} = \frac{1}{u - iv} = \exp(-\tau + i\theta)$$

En substituant (2.26), (2.27) et (2.15) dans (2.32), on obtient le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \sigma}(\sigma(I)) = \frac{2C}{\pi \sin \sigma(I)} \exp\left(-\sum_{k=0}^N a_k \cos(2k\sigma(I))\right) \times \\ \cos\left(-\left(\frac{\pi - \gamma}{\pi}\right) - \sum_{k=0}^N 2ka_k \cos(2k\sigma(I))\right) \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma}(\sigma(I)) = \frac{2C}{\pi \sin \sigma(I)} \exp\left(-\sum_{k=0}^N a_k \cos(2k\sigma(I))\right) \times \\ \sin\left(-\left(\frac{\pi - \gamma}{\pi}\right) - \sum_{k=0}^N 2ka_k \cos(2k\sigma(I))\right) \end{cases} \quad \text{sur } ADB \quad (2.33)$$

Et

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \sigma}(\sigma(I)) = \frac{2C}{\pi \sin \sigma(I)} \exp\left(-\sum_{k=0}^N a_k \cos(2k\sigma(I))\right) \times \\ \cos\left(-\left(\frac{\gamma}{\pi}\right) - \sum_{k=0}^N 2ka_k \cos(2k\sigma(I))\right) \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma}(\sigma(I)) = \frac{2C}{\pi \sin \sigma(I)} \exp\left(-\sum_{k=0}^N a_k \cos(2k\sigma(I))\right) \times \\ \sin\left(-\left(\frac{\gamma}{\pi}\right) - \sum_{k=0}^N 2ka_k \cos(2k\sigma(I))\right) \end{cases} \quad \text{sur } A'D'B' \quad (2.34)$$

Pour déterminer le degré de contraction C, on procède comme suit : On remplace approximativement la dérivée contenue dans la deuxième équation de (2.33) et (2.34) par

$$\frac{\partial y}{\partial \sigma} \simeq \frac{y(\sigma(I)) - y(\sigma(I-1))}{h}, I = 1, N+1$$

Et comme

1.  $y(\sigma(N+1)) = 1$  au point  $A$  et  $y(\sigma(1)) = -x(\sigma(1)) \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{C}$  au point  $D$  pour la surface libre  $ADB$ .
2.  $y(\sigma(N+1)) = -1$  au point  $A'$  et  $y(\sigma(1)) = x(\sigma(1)) \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = -\frac{1}{C}$  au point  $D'$  pour la surface libre  $A'D'B'$ , avec  $h = \frac{\pi}{2(N+1)}$ .

On peut trouver le coefficient de contraction sur les surfaces libres  $ADB$  et  $A'D'B'$  par la formule suivante

$$\frac{1}{C} = \begin{cases} 1 - h \sum_{I=1}^N \frac{2}{\pi \sin \sigma(I)} \\ \times \exp\left(-\sum_{k=0}^N a_k \cos(2k\sigma)\right) \sin\left(-\left(\frac{\pi - \gamma}{\pi}\right) - \sum_{k=0}^N 2ka_k \cos(2k\sigma)\right) \\ 1 - h \sum_{I=1}^N \frac{2}{\pi \sin \sigma(I)} \\ \times \exp\left(-\sum_{k=0}^N a_k \cos(2k\sigma)\right) \sin\left(-\frac{\gamma}{\pi} - \sum_{k=0}^N 2ka_k \cos(2k\sigma)\right) \end{cases}.$$

La forme des surfaces libres est obtenue en intégrant numériquement les relations (2.33) et (2.34).

# Chapitre 3

## Résultats et discussion

### Résumé

Dans ce chapitre, on prescrit nos résultats obtenus. On a utilisé pour ce but deux méthodes, la première est la méthode des lignes de courant libre et la deuxième est de la troncation de la série quand l'effet de la tension de surface est considéré, l'influence de cette dernière apparaît sous forme d'une condition non linéaire donnée par l'équation de Bernoulli sur la surface libre, ce que fait intervenir le nombre de Weber  $\alpha$ . On donne nos résultats pour différentes valeurs de  $\alpha$  et pour différentes valeurs de l'angle de l'inclinaison  $\gamma$  sans oublier de remarquer le problème quand  $\alpha \rightarrow \infty$  et  $\alpha = \alpha_0$  telle que  $\alpha_0$  est une valeur minimale de  $\alpha$ .

### contenu

1. Écoulement sans tension de surface
2. Écoulement avec tension de surface

Nous avons utilisé le schéma numérique décrit dans le deuxième chapitre pour calculer des solutions de différentes valeurs du nombre de Weber  $\alpha$  pour plusieurs valeurs de l'angle  $\gamma$ . La plupart des résultats présentés ici sont obtenus avec  $N = 70$ .

### 3.1 Écoulement sans tension de surface

Lorsque la tension de surface est négligée, le nombre de Weber tend vers l'infini et l'équation (2.16) sur la surface libre devient

$$\exp(2\tau) = u^2 + v^2 = 1$$

Et le système (2.30) se réduit à

$$\exp\left(2\sum_{k=0}^N a_k \cos(2k\sigma(I))\right) - 1 = 0, \text{ tel que } I = 1, N + 1$$

Où  $\sigma(I)$  est donnée par la relation (2.29). Les solutions analytiques exactes peuvent être calculées via la théorie des lignes de courant libres. Nous avons calculé les solutions numériquement en utilisant la procédure décrite ci-dessus et nos résultats sont en accord avec la théorie et les résultats sont donnés dans la Figure 3.1.

### 3.2 Écoulement avec tension de surface

Lorsque l'effet de la tension superficielle est inclus dans la surface libre, il existe une solution numérique connue. On utilise la procédure numérique décrit dans le chapitre 2 pour calculer les solutions du problème pour différentes valeurs de nombre de Weber  $\alpha$ , et pour diverses valeurs de l'angle  $\gamma$ .

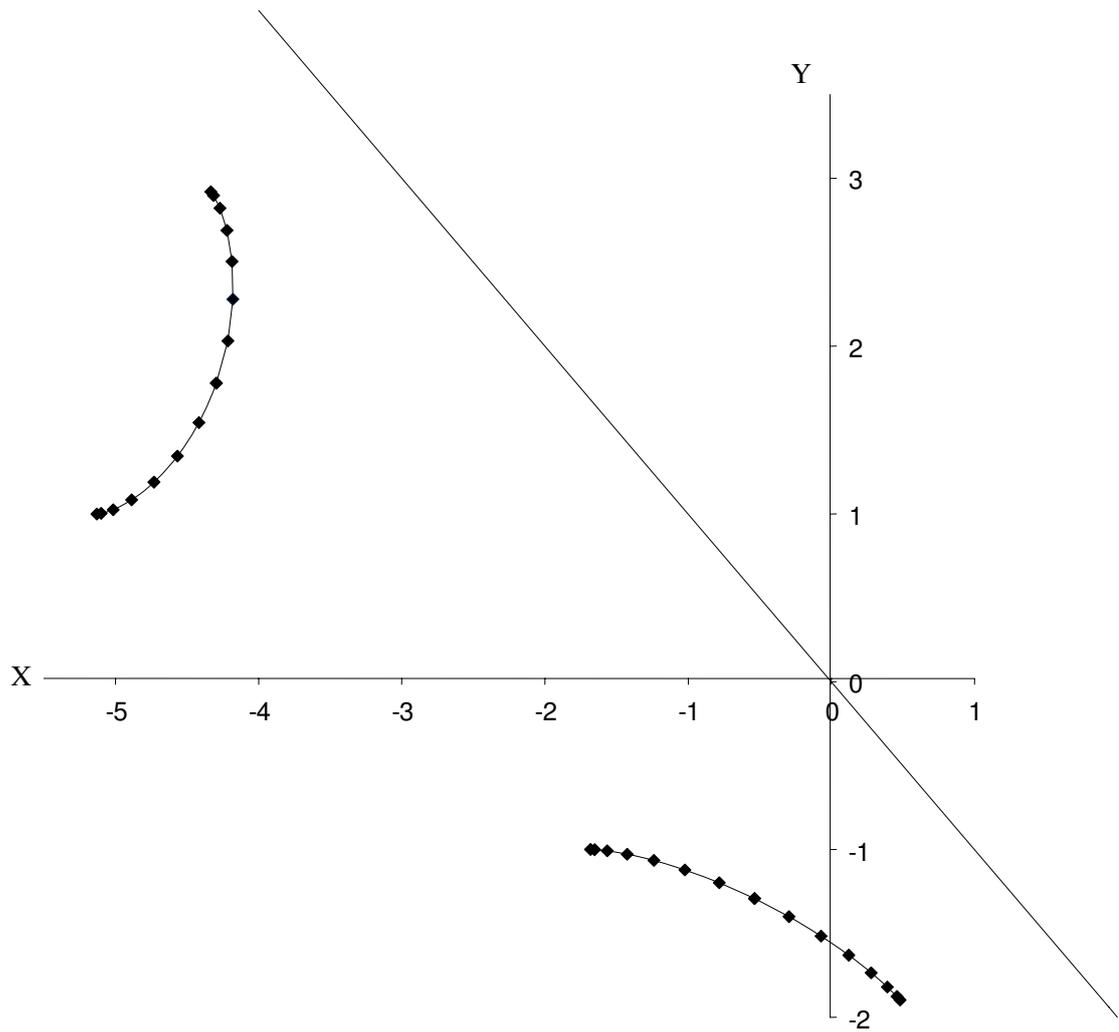


FIGURE 3.1 – Comparaison numérique de la forme de la surface libre pour  $\gamma = \frac{\pi}{4}$

Dans la Figure 3.2 et la Figure 3.3; quand  $\gamma = \frac{\pi}{3}$  et  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ , nous avons montré différents profils de surface libre pour différentes valeurs du nombre de Weber. Lorsque le nombre de Weber est très grand, la forme de la surface libre était lisse sans ondes capillaires. Pour  $\alpha$  même petit, la forme de la surface libre s'aplatit et tend vers une ligne droite.

TABLE 3.1 – Valeur minimal du nombre de Weber  $\alpha_0$  pour certaines valeurs de l'angle  $\gamma$  et valeurs du nombre de Weber  $\alpha^*$  lorsque le schéma numérique cesse d'épargner à la courbe d'origine.

$\gamma$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$
$\alpha_0$	0.05	0.1	0.25
$\alpha^*$	25	50	100

On pourrait calculer des solutions pour le nombre de Weber très petit, quand  $\alpha \leq \alpha_0$ , l'algorithme converge rapidement. Par exemple, pour  $\gamma = \pi/3$ , on pourrait calculer la solution pour tout  $\alpha \geq 0.1$ . Pour chaque valeur de  $\gamma$  il existe une valeur critique  $\alpha^*$ , voir Tableau 3.1. Pour  $\alpha \geq \alpha^*$ , tous les profils des surfaces libres pour différentes valeurs de  $\alpha \geq \alpha^*$  et pour chaque  $\gamma$  fixe ont les mêmes graphiques.

La Figure 3.4 montre la variation du coefficient de contraction  $C$  en fonction du nombre de Weber  $\alpha$ .

Le tableau 3.2 présente quelques valeurs des coefficients  $a_k$  pour différentes valeurs de nombre de Weber  $\alpha$  et pour différentes valeurs de l'angle  $\gamma$ . On trouve pour chaque valeur de  $\alpha$  et pour chaque valeur de  $\gamma$ , les coefficients  $a_k$  de la série (2.23). Pour des valeurs fixes de  $\alpha$ , les coefficients  $a_k$  étaient trouvés à diminuer très rapidement quand  $k$  augmente.

TABLE 3.2 – Les coefficients  $a_k$  pour certaines valeurs du nombre de Weber  $\alpha$  et certaines valeurs de l'angle  $\gamma$ .

$\gamma$	$\alpha$	$a_1$	$a_{25}$	$a_{48}$	$a_{70}$
$\frac{\pi}{4}$	$10^8$	$-7.5 \times 10^{-9}$	$6.16 \times 10^{-12}$	$1.23 \times 10^{-12}$	$4.25 \times 10^{-14}$
	500	$-1.49 \times 10^{-3}$	$1.24 \times 10^{-6}$	$2.47 \times 10^{-7}$	$8.46 \times 10^{-9}$
	10	$-7.15 \times 10^{-2}$	$7.82 \times 10^{-5}$	$1.55 \times 10^{-5}$	$4.7 \times 10^{-7}$
	0.01	-4.44	$3.54 \times 10^{-3}$	$7.57 \times 10^{-4}$	$2.15 \times 10^{-5}$
$\frac{\pi}{3}$	$10^7$	$-6.66 \times 10^{-8}$	$5.47 \times 10^{-11}$	$1.09 \times 10^{-11}$	$3.77 \times 10^{-13}$
	100	$-6.63 \times 10^{-3}$	$5.63 \times 10^{-6}$	$1.12 \times 10^{-6}$	$3.73 \times 10^{-8}$
	50	$-1.32 \times 10^{-2}$	$1.15 \times 10^{-5}$	$2.31 \times 10^{-6}$	$7.49 \times 10^{-8}$
	0.1	-2.039	$3.17 \times 10^{-3}$	$6.76 \times 10^{-4}$	$1.92 \times 10^{-5}$
$\frac{\pi}{2}$	$10^7$	$-5 \times 10^{-8}$	$4.1 \times 10^{-11}$	$8.21 \times 10^{-12}$	$2.83 \times 10^{-13}$
	250	$-1.99 \times 10^{-3}$	$1.66 \times 10^{-6}$	$3.32 \times 10^{-7}$	$1.12 \times 10^{-8}$
	5	$-9.16 \times 10^{-2}$	$1.22 \times 10^{-4}$	$2.44 \times 10^{-5}$	$7.19 \times 10^{-7}$
	0.05	-2.369	$2.7 \times 10^{-3}$	$5.78 \times 10^{-4}$	$1.64 \times 10^{-5}$
$\frac{3\pi}{4}$	$10^7$	$-2.49 \times 10^{-8}$	$2.05 \times 10^{-11}$	$4.10 \times 10^{-12}$	$1.41 \times 10^{-13}$
	150	$-1.66 \times 10^{-3}$	$1.39 \times 10^{-6}$	$2.78 \times 10^{-7}$	$9.35 \times 10^{-9}$
	0.2	$-6.34 \times 10^{-1}$	$1.25 \times 10^{-3}$	$2.66 \times 10^{-4}$	$7.57 \times 10^{-6}$
$\frac{2\pi}{3}$	$10^7$	$-3.33 \times 10^{-8}$	$2.74 \times 10^{-11}$	$5.47 \times 10^{-12}$	$1.88 \times 10^{-13}$
	100	$-3.31 \times 10^{-3}$	$2.81 \times 10^{-6}$	$5.62 \times 10^{-7}$	$1.86 \times 10^{-8}$
	0.5	$-4.22 \times 10^{-1}$	$1.01 \times 10^{-3}$	$2.13 \times 10^{-4}$	$6.07 \times 10^{-6}$

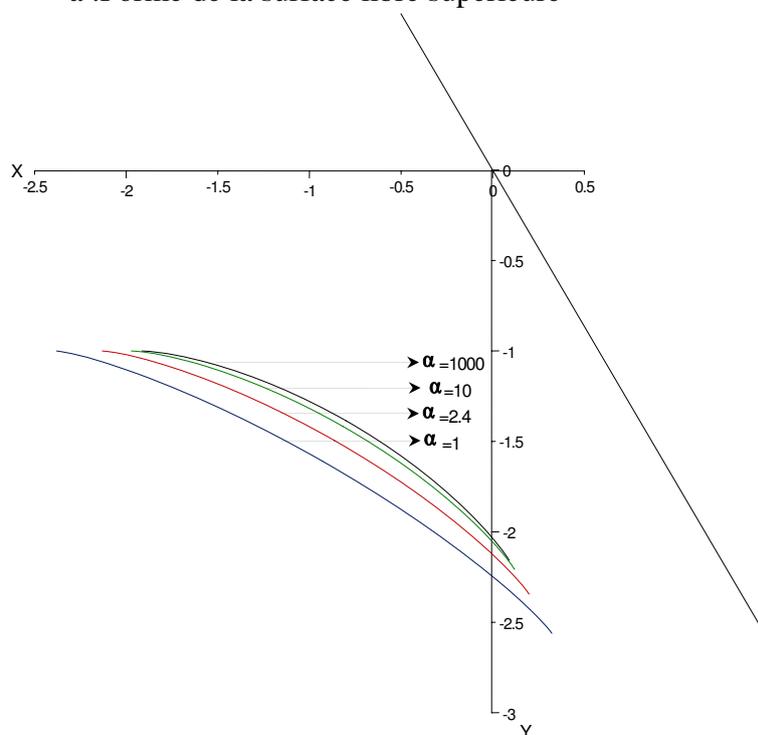
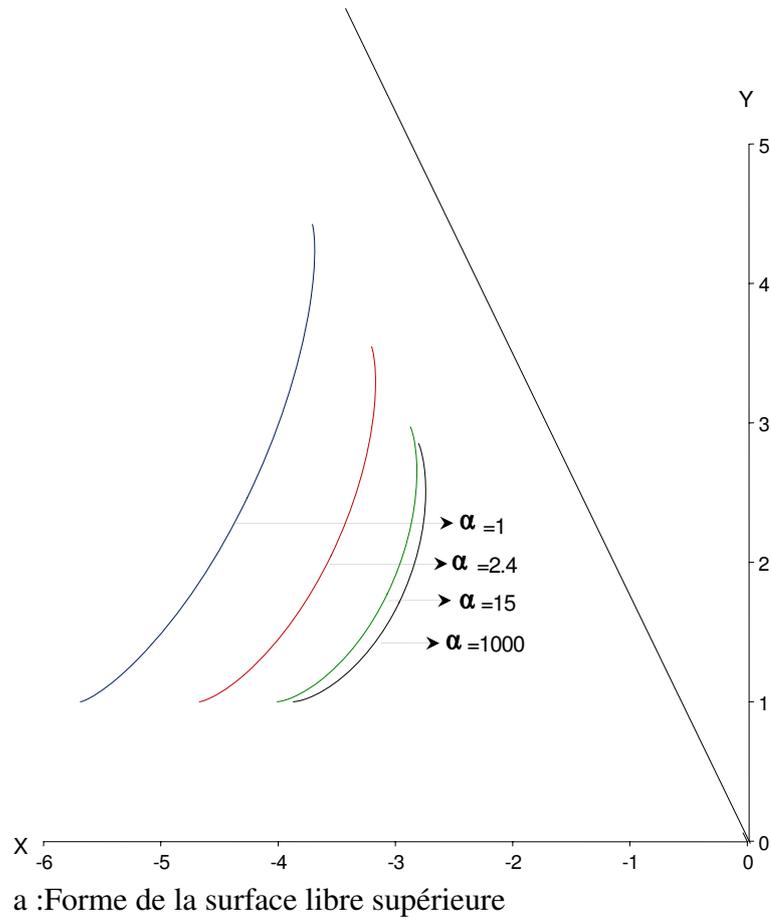


FIGURE 3.2 – Forme de la surface libre pour différentes valeurs du nombre de Weber  $\alpha$  pour l'angle  $\gamma = \frac{\pi}{3}$

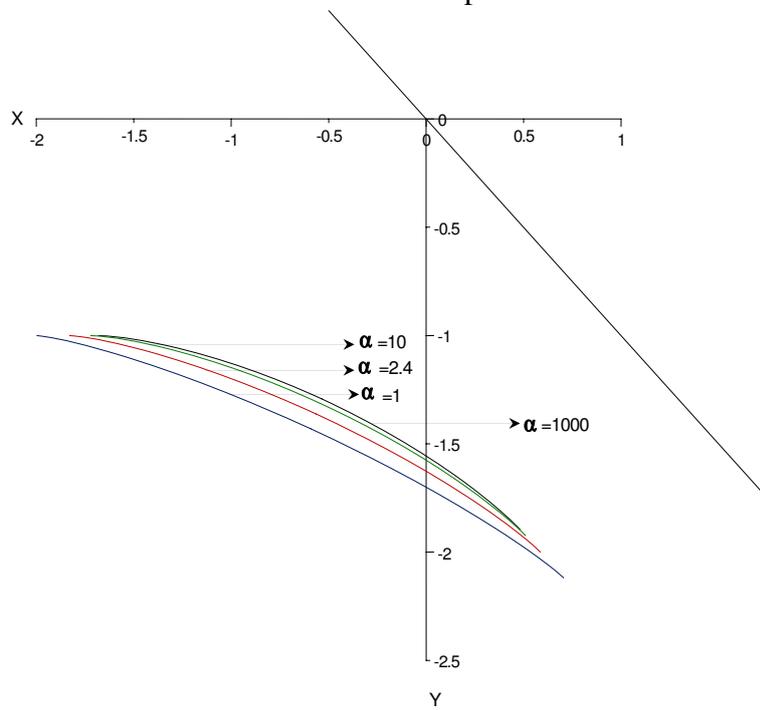
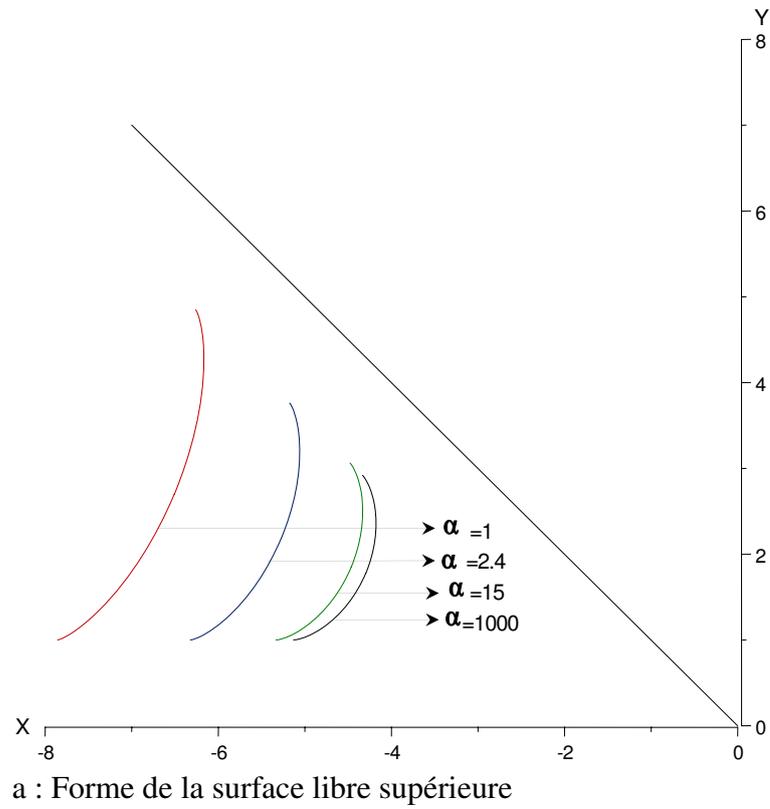


FIGURE 3.3 – Forme de la surface libre pour différentes valeurs du nombre de Weber  $\alpha$  pour l'angle  $\gamma = \frac{\pi}{4}$

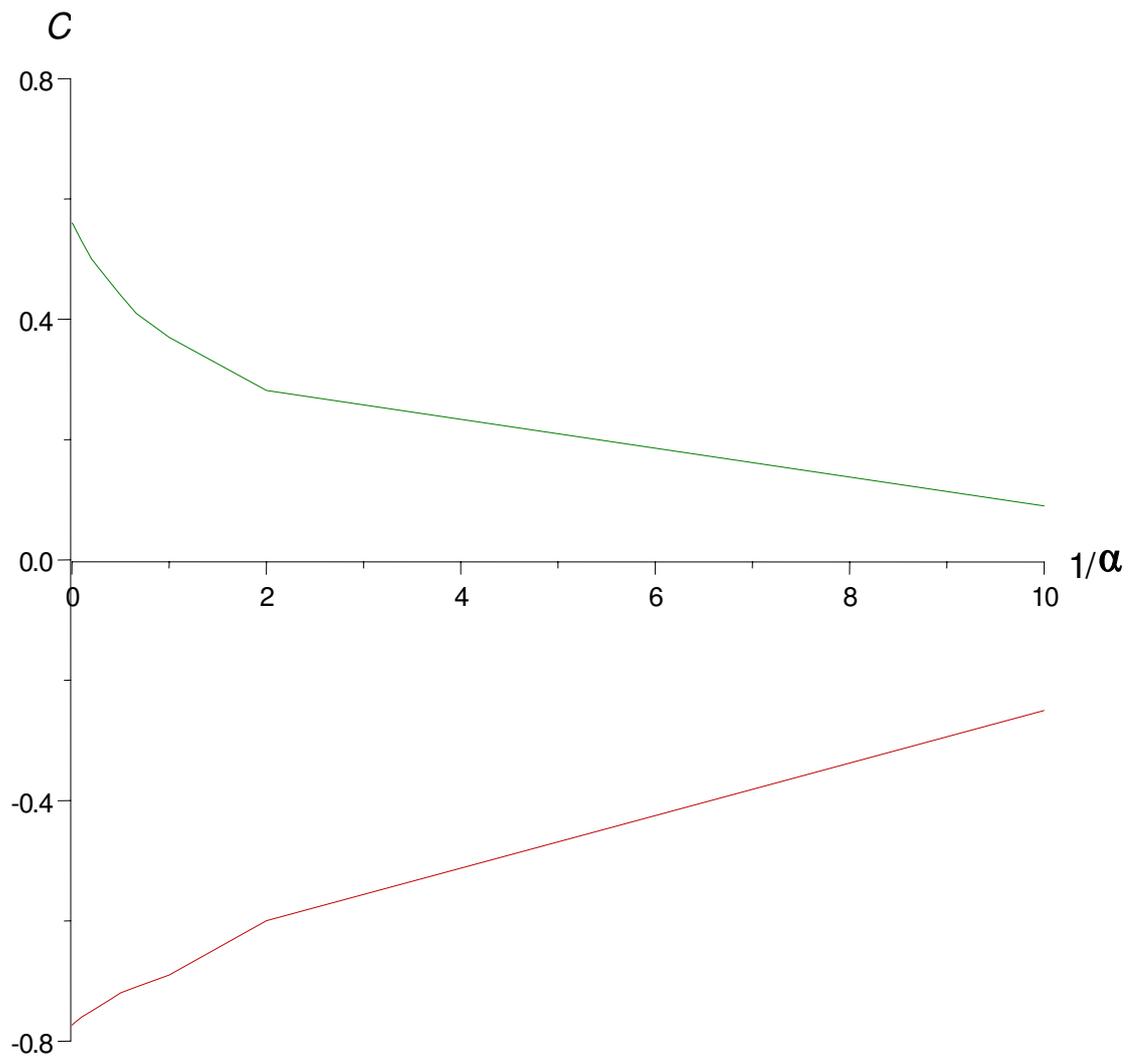


FIGURE 3.4 – Variation du coefficient de contraction  $C$  en fonction du nombre de Weber  $\alpha$  pour l'angle  $\gamma = \frac{\pi}{4}$

# Conclusion

Dans ce travail, nous avons effectué une étude numérique d'un problème d'un écoulement potentiel bidimensionnel d'un jet d'un fluide incompressible et non visqueux devant une plaque inclinée par un angle  $\gamma$  à l'horizontale, où en tenant compte l'effet de la tension de surface et en négligeant l'effet de la gravité. Due à ces causes, le problème devient très difficile à résoudre analytiquement à cause de la condition non-linéaire sur les frontières libres du domaine de l'écoulement.

Pour traiter ce problème, on a utilisé des méthodes analytiques et numériques basées sur la théorie des variables complexes. Dans cette étude, on satisfait quelques résultats :

- En premier, on a donné une formulation mathématique du problème considéré, en utilisant les aspects théoriques de la fonction d'une variable complexe.
- En second, on a utilisé la théorie des lignes de courant libres et transformation de Schwarz-Christoffel qui donne une transformation conforme que l'on a utilisé pour former une série et en faisant une troncature de cette dernière. On appelle cette technique la méthode de troncature de la série. Cette procédure a été utilisée avec succès pour calculer la solution approximée du jet pour différentes valeurs de nombre de Weber  $\alpha$  avec des différentes valeurs de l'angle de l'inclinaison  $\gamma$ . Cette étude a été publiée dans une revue internationale [21], ainsi, une étude d'un

cas particulier de cette étude, a été publié encore ultérieurement dans deux revues internationales [6, 7].

— Enfin, on a discuté les résultats obtenus avec des schémas et des tableaux qui expliquent bien notre travail.

D'après ces résultats numériques ci-dessus, nous concluons que pour tout nombre de Weber  $\alpha \geq \alpha_0$  et pour une valeur fixe de l'angle d'inclinaison  $\gamma$ , il y a une et une seule solution. Dans ce cas, la formulation en série fournit une bonne approximation.

On peut dire que la méthode que nous avons adoptée pour la solution dans ce travail a l'avantage de passer d'un problème bidimensionnel à un problème unidimensionnel. L'efficacité de la méthode apparaît dans la rapidité d'acquisition et la précision des données, en raison de la bonne convergence de la série. Ces résultats sont très importants, surtout lorsqu'ils sont utilisés pour compléter la solution de certains problèmes mathématiques en mécanique des fluides dans des recherches futures, ou de les comparer à d'autres problèmes résolus par d'autres méthodes.

# Annexe

## Contenu

1. Méthode de Newton
2. Algorithme de Newton pour la résolution de système non linéaire  $f(x) = 0$
3. Algorithme de Jordan avec pivotation totale implicite

Dans ce travail, on a utilisé la méthode de Newton pour la résolution d'un système non linéaire avec l'algorithme de Jordan avec pivotation totale implicite. Dans cet annexe, on donne une description de la méthode utilisée.

## 1. Méthode de Newton

Dans la présente section, on considère le problème de rechercher d'une solution d'un système d'équations

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

On peut écrire  $f(x) = 0$ , où  $f$  et  $x$  sont deux vecteurs à  $n$  composantes. On suppose que  $f$  est de classe  $C^1$  sur un certain ouvert convexe  $D$ .

La matrice  $E(x) = \left( \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$  est appelée Jacobienne de  $f$  au point  $x$ .

Le développement de Taylor au voisinage d'une approximation  $x^*$  de  $x$  s'écrit

$$f(x) = f(x^* + E(x^*)(x - x^* + R(x^*, x - x^*)))$$

Où

$$R(x^*, x - x^*) = (x - x^*) \int_0^1 (E(x^* + t(x - x^*)) - E(x^*)) dt$$

Ainsi, au voisinage de  $x^*$  l'expression linéaire

$$f_*(x) = f(x^*) + E(x^*)(x - x^*)$$

est une bonne approximation de  $f(x)$ . Il est clair qu'une meilleure approximation de la solution  $x$  que  $x^*$  peut être obtenue en résolvant l'équation

$$f_*(x) = 0$$

C'est à dire

$$f(x^*) + E(x^*)(x - x^*) = 0$$

En suivant la procédure précédente, la méthode générale de Newton consiste à prendre une approximation initiale  $x_0$  à la solution  $x$ , puis tenter à l'améliorer itérativement comme suit

$$x_{k+1} = x_k - S_k^{-1} f_k, \text{ tel que } k = 1, 2, \dots, n$$

En prenant  $f_k = f(x_k)$  et la définition de la matrice Jacobienne

$$S_k = E(x_k)$$

On continue jusqu'à ce que  $|f_i(x_{k+1})| < \epsilon$ .

## 2. Algorithme de Newton pour la résolution de système non linéaire $f(x) = 0$

Étant donné

1. Calculer

$$\left. \begin{array}{l} E_{ij}^{(k)} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \Big|_{x=x_k} \\ f_i^{(k)} = -f_i(x_k) \end{array} \right\} \begin{array}{l} j = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

2. Résoudre le système linéaire

$$\left. \sum_{j=1}^n E_{ij}^{(k)} \Delta X_j^{(k)} = f_i^{(k)} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

3. Calculer

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta X^{(k)} \quad \left. \vphantom{x_i^{(k+1)}} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

4. Si

$$|f_i(x_{k+1})| < \epsilon \quad i = 1, 2, \dots, n$$

est vérifié, arrêter

### 3. Algorithme de Jordon avec pivotation totale implicite

$$\left. \begin{array}{l}
 \bullet \text{ Choix du pivot} \\
 P_k = a_{l_k c_k} \quad \text{où} \quad a_{l_k c_k} = \max_{ij} |a_{ij}| \\
 i = 1, n \quad i \neq l_1, l_2, \dots, l_{k-1} \\
 j = 1, n \quad j \neq c_1, c_2, \dots, c_{k-1} \\
 \bullet \text{ Normalisation} \\
 a_{l_k j} = \frac{a_{l_k j}}{P_k} \quad j = 1, n + 1 \\
 \bullet \text{ Réduction} \\
 \left. \begin{array}{l}
 w = a_{ij} \\
 a_{ij} = a_{ij} - w \cdot a_{l_k j} \quad j = 1, n + 1
 \end{array} \right\} \quad i = 1, n \quad \text{et} \quad i \neq l_k \\
 \bullet \text{ Remise en ordre} \\
 x_{c_k} = a_{l_k, n+1}
 \end{array} \right\} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

# Bibliographie

- [1] A. Amara and A. Gasmi, The effect of surface tension on the jet flow in U-shaped channel, *Inter. J. Pure. Appl. Math.*, **Vol. 118, No. 3.**, (2018), pp. 625–635.
- [2] A. Doeak and JM. Vanden-Broeck, New exotic capillary free-surface flows, *J. Fluid Mech*, (2020), Rapids 899 :  $R_4$  .
- [3] A. Gasmi, Numerical study of two-dimensional jet flow issuing from a funnel, *Adv. Appl. Math.*, **Vol 87**, (2014), pp. 161–169.
- [4] A. Gasmi and H. Mekias, The effect of surface tension on the contraction coefficient of a jet, *J. Phys. A : Math. Gen.*, **Vol. 36**, (2004), pp. 851–862.
- [5] A. Gasmi and H. Mekias, A study on inviscid flow with a free surface over an undulating bottom, *J. Appl. Fluid. Mech.*, **Vol. 9**, (2016), pp. 1089–1096.
- [6] B. Bouderah, A. Gasmi and H. Serguine, Zero gravity of free-surface jet flow, *Inter. Math. For.*, **Vol. 2, No. 66**, (2007), pp. 3273–3277.
- [7] B. Bouderah, H. Serguine and A. Gasmi, The free-surface flow due to a jet against an infinite vertical plate in presence of surface tension, *Appl. Math. Sci.*, **Vol. 1, No. 43**, (2007), pp. 2119–2128.
- [8] C. Grosstete, *Mécanique des fluides*, Ellipses, Paris, (1991).
- [9] C. Jacob, *Introduction mathématique à la mécanique des Fluides*, Gauthier-Villars, Paris, (1959).

- 
- [10] E. Cumberbatch and J. Norbury, Capillary modification of the singularity at a free streamline separation point, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **Vol. 32**, (1979), pp. 303–312.
- [11] E. Varvaruca, Singularities of Bernoulli free boundaries, *Commun. Partial Differ. Equ.*, **Vol. 31**, (2006), pp. 1451–1477.
- [12] F. Dias and J.M. Vanden-Broeck, Potential-flow studies of steady two-dimensional jets, waterfalls, weirs and sprays, *J. Eng. Math.*, **Vol. 70**, (2011), pp. 165–174.
- [13] F. Guechi and H. Mekias, Effect of surface on two-dimensionnel free surface flow, *E. J. Diff. Equ.*, **Vol. 190**, (2008), pp. 1–8.
- [14] F.Z. Chedala, A. Amara and M. Meftah, Numerical and analytical calculations of the free surface flow between two semi-infinite straights, *J. Appl. Math. Comput. Mech.*, **Vol. 19**, (2020), pp. 21–32.
- [15] G. Birkhoff and E.H. Zarantonello, *Jets, wakes and cavities*, **4328**, New York Academic, (1957).
- [16] G.C. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, (1967).
- [17] G.C. Hoking, Steady Prandtl-Batchelor flows past a circular cylinder, *Anziam J.*, **Vol. 48**, (2006), pp. 165–177.
- [18] H. Mekias and J. M. Vanden-Broeck, Subcritical flow with a stagnation point due to a source beneath a free surface, *Phys. Fluids A.*, **Vol 3.**, (1991), pp. 2652.
- [19] H. Mekias and J. M. Vanden-Broeck, Supercritical free surface flow with a stagnation point due to a submerged source, *Phys. Fluids A.*, **Vol 3.**, (1991), pp. 2652.
- [20] H. Sekhri, F. Guechi and H. Mekias, A waveless free surface flow past a submerged triangular obstacle in a presence of surface tension, *E. J. Diff. Equ.*, **Vol. 190**, (2016), pp. 1–8.

- 
- [21] H. Serguine, F. Guechi and A. Gasmi, Numerical study of mathematical model of free-surface potential flow, *Aust. J. Math. Anal. Appl.*, **Vol. 20, No. 1**, (2023).
- [22] J. Eggers and A.F. Smith, Free streamline flows with singularities, *J. Fluid. Mech.*, **Vol. 647**, (2010), pp. 187–200.
- [23] J Cheng, L Du and Z Xin, Incompressible impinging jet flow with gravity, *Calc. Var.*, **Vol. 62**, (2023).
- [24] J. M. Chuang, Numerical studies on non linear free surface flow using generalized Schwartz-Christoffel transformation, *Int. J. Numer. Methods. Fluids.*, **Vol. 32**, (2000), pp. 745–772.
- [25] J.M. Vanden-Broeck, The effect of surface tension on the shape of the Kirchoff jet, *Phys. Fluids.*, **Vol. 27**, (1984), pp. 1933–1936.
- [26] J. M. Vanden-Broeck, *Gravity-capillary free-surface flows*, Cambridge university press, (1991).
- [27] J. M. Vanden-Broeck , Nonlinear capillary free-surface flows, *J. Eng. Math.*, **Vol. 50**, (2004), pp. 415–426.
- [28] J. M. Vanden-Broeck and A. Doak, Nonlinear two-dimensional free surface solutions of flow exiting a pipe and impacting a wedge, *J. Eng. Math.*, **Vol. 126**, (2021), pp. 1431–1434.
- [29] L. Euler, *Principes généraux du mouvement des fluides*, **11 : 1757**, Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, (1957).
- [30] L. K. Forbes and L. W. Schwarz, Free-surface flow over a semicircular obstruction, *J. Fluid. Mech.*, **Vol. 114**, (1982), pp. 299–314.
- [31] M. Boumehrath et A. Gourdin, *Méthodes numériques appliquées*, Édition O.P.U Alger, (1991).

- 
- [32] M. Damou, *Mécanique des fluides*, Édition O.P.U Alger, (1993).
- [33] M. Lambert and R. Gélinas, *Éléments d'analyse complexe*, Presses de l'Université du Québec, (1994).
- [34] M. R. Spiegel, *Variables complexes cours et problèmes*, McGraw-Hill, New York, (1973).
- [35] P. Christodoulides and F. Dias, Impact of a falling jet, *J. Fluid. Mech.*, **Vol. 657**, (2010), pp. 22–35.
- [36] S. J. Chapman and J. M. Vanden-Broeck, Exponential asymptotics and capillary waves, *SIAM. J. Appl. Math.*, **Vol. 62**, (2002), pp. 1872–1898.
- [37] S. Panda, A jet from container and flow past a vertical flat in a channel with the surface tension effects, *Appl. Math. Sciences.*, **Vol. 1, No. 54**, (2007), pp. 2687–2698.
- [38] S. Panda, S. C. Martha and A. Chakrabati, Three-layer fluid flow over a small obstruction on the bottom of a channel, *Anziam J.*, **Vol. 56**, (2015), pp. 248–274.
- [39] S. Tooley and J. M. Vanden-Broeck, Waves and singularities in nonlinear capillary free-surface flows, *J. Eng. Math.*, **Vol. 43**, (2002), pp. 89–99.
- [40] T. G. J. Chandler and P. H. Trinh, Complex singularities near the intersection of a free-surface and wall. Part1. Vertical jets and rising bubbles, *J. Fluid. Mech.*, **Vol. 856**, (2018), pp. 323–350.
- [41] W. Peng and D. F. Parker, An ideal fluid jet impinging on an uneven wall, *J. Fluid. Mech.*, **Vol. 333**, (1997), pp. 231–255.

## ملخص

في هذه المذكرة نهتم بدراسة مسألة تدفق كموني ذو سطح حر لسائل غير قابل للانضغاط و غير لزج، في مستو، ناتج عن مصدر دفق بعيد أمام صفيحة مائلة بزاوية عن الأفق. و مع وجود تأثير قوى الضغط السطحي فإن المسألة المطروحة تتميز بشرط غير خطي معطى بمعادلة برنولي على السطح الحر للسائل ذو شكل غير معروف. و لإيجاد الحل نستعمل تقنية السلاسل التي تعتمد أساسا على التحويلات المتطابقة و النتائج المحصل عليها مرتبطة بالوسيط الفيزيائي عدد ويبر و زاوية الميلان.

**الكلمات المفتاحية:** سطح حر، تدفق كموني، توتر سطحي، عدد ويبر، تقنية السلاسل.

## Abstract

In this memory, we interest by study of a problem of a bidimensional and potential flow on free surface of an incompressible and no viscous fluid of a jet in front of an inclined plate by an angle with the horizontal. In the existence of the effect of the surface tension, there is the equation of Bernoulli on the free surface and to solve our problem, the technique of truncation of the series was used. Our results dependent of a physical parameter, it is the Weber number and the angle of inclination of the plate.

**Key words:** free surface, potential flow, surface tension, Weber number, technique of truncation of series.

## Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude d'un problème d'un écoulement potentiel et bidimensionnel à surface libre d'un fluide incompressible et non visqueux d'un jet devant une plaque inclinée par un angle à l'horizontale. Et à cause d'existence de l'effet de la tension de surface, on a l'équation de Bernoulli sur la surface libre et pour résoudre notre problème, on a utilisé la technique de troncation de la série basée sur les transformations conformes. Nos résultats sont dépends d'un paramètre physique c'est le nombre de Weber et l'angle de l'inclinaison du plaque.

**Mots clefs:** surface libre, écoulement potentiel, tension de surface, nombre de Weber, technique de troncation de la série.