

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE FERHAT ABBAS, SETIF 1



THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en-Sciences

Option : Mathématiques Appliquées

Par

Mme. SIDHOUM KARIMA

Thème :

**Analyse variationnelle d'un problème de contact frictionnel
viscoélastique**

Thèse soutenue le

devant le jury composé de :

Président

Directeur de thèse

Examineurs :

Mr. Azedine RAHMOUNE

Mr. Abdelbaki MEROUANI

Mr. Ilyas BOUKAROURA

Mme. Rebiha ZEGHDANE

Prof. UMBI. B. Bou Arreridj

Prof. UFA. Sétif 1

MCA. UFA. Sétif 1

MCA. UMBI. B. Bou Arreridj

2023 / 2024

Dédicace

Je dédie ce travail du fond du coeur

À mon père pour son soutien et son amour,

À ma mère pour son soutien et son amour,

À mon mari Samir

À mes frères et soeurs

À mes enfants Ikram, Khawla, Mourad

À mes familles Sidhoum et Benaniba

*Pour leurs encouragements constants, pour les
encouragements constants et le grand amour qu'ils m'ont
donné,*

*Que Dieu leur accorde une longue vie heureuse et une
bonne santé.*

*À tous mes amis dont les noms sont au-delà de pouvoir être
mentionnés sur une page, pour leur fraternité et leur soutien
continus.*

Ils seront remplis de bonheur et de joie.

K. Sidhoum

Remerciements

Je remercie dieu le tout puissant de m'avoir donné assez de courage pour accomplir ce travail. Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance envers mon directeur de thèse, le Professeur ABDELBAKI MEROUANI du Laboratoire de Mathématiques à Université Ferhat Abbas, Setif 1, pour sa confiance et pour son aide inestimable, ses qualités pédagogiques, sa patience conjugée à une rigueur scientifique d'exception ainsi que ses qualités humaines ont contribué de manière décisive à l'aboutissement de ce travail.

Je remercie tout particulièrement le professeur AZEDINE RAHMOUNE, Doyen de la faculté de MI, l'Université de M'ohamed El bachir Ibrahimi Bordj Bou Arreridj, pour L'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Comme je ne saurai gratifier les honorables membres de jury de leur disponibilité et de leur consultation d'experts en occurrence:

- Mr. Ilyas BOUKAROURA MCA. U FA, SETIF 1.
- Mme. Rebiha ZEGHDANE MCA. UMBI, Bordj Bou Arreridj.

Enfin, mes remerciements aussi à toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

K. SIDHOUM

Table des matières

Introduction	4
1 Formulation des problèmes aux limites et rappels d'analyse	9
1.1 Introduction	10
1.2 Cadre physique	10
1.3 Modèle mathématique	13
1.4 Lois de comportements	15
1.4.1 Lois de comportement des matériaux électro- élastiques	16
1.4.2 Lois de comportement des matériaux électro- viscoélastiques	17
1.5 Conditions aux limites de contact	18
1.5.1 Contact bilatérale.	19
1.5.2 Contact unilatérale	19
1.5.3 Contact avec compliance normale	21
2 Outils Mathématiques	22
2.1 Introduction	23
2.2 Espaces fonctionnels	23
2.2.1 Espaces de fonctions continues et continûments différentiables	24

2.3	Les espaces $L^p(\Omega)$	24
2.3.1	Espaces de Sobolev	26
2.4	Espaces liés aux opérateurs de déformation et de divergence	28
2.5	Espaces des fonctions à valeurs vectorielles	31
2.6	Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert	35
2.6.1	Rappel sur les espaces de Hilbert	35
2.6.2	Fonctions convexes et semi-continuité inférieure	37
2.6.3	Différentiabilité et sous différentiabilité	39
2.6.4	Inclusions différentielles	41
2.6.5	Opérateurs non-linéaires et formes bilinéaires dans un espace de Hilbert	42
2.7	Inéquations variationnelles elliptiques et d'évolution	44
2.8	Compléments divers	48
3	Problème de contact avec réponse normale instantanée et compliance normale	52
3.1	Introduction	53
3.2	Formulation mécanique du problème	53
3.3	Formulation variationnelle du problème	57
3.4	Existence et unicité de la solution	57

63	
4.1	Introduction 64
4.2	Formulation mécanique du problème 64
4.3	Formulation variationnelle du problème 65
4.4	Existence et unicité de la solution 65
5	Analyse variationnelle d'un contact frictionnel viscoélastique
	avec un corps à mémoire à long terme avec effets thermiques 68
5.1	Formulation du problème 69
5.2	Formulation variationnelle 71
5.2.1	Notations et préliminaires 71
5.3	Existence et unicité de la solution 79

Introduction

Les phénomènes de contact sont fréquents dans de nombreux secteurs industriels tels que l’aéronautique et l’automobile. On les retrouve également dans la vie quotidienne, comme le contact entre les pneus d’une voiture et la route, ou encore entre le piston et son cylindre. Ces exemples montrent la diversité des problèmes de mécanique des contacts. En raison de leur importance, la modélisation et la simulation numérique de ces processus ont fait l’objet d’un effort considérable de recherche. La littérature en ingénierie sur ce sujet est vaste voir [[1], [2]].

La connaissance et la maîtrise de ces phénomènes permettent aux scientifiques et aux industriels de développer des matériaux aux propriétés et aux performances souhaitées. Ainsi, de nombreux programmes de formation en école d’ingénieur ou à l’université sont axés sur les sciences des matériaux et les recherches dans ce domaine se sont considérablement multipliées ces derniers temps.

Les études mathématiques et la modélisation des phénomènes de contact sont plus récentes, en partie en raison des problèmes de contact non linéaires qui sont difficiles à étudier. Parmi les premières publications mathématiques sur ce sujet, on trouve celle de Signorini voir [[3]], qui formule le problème de contact unilatéral entre un corps linéairement élastique et une fondation rigide. Ce dernier a été résolu par Fichera voir [[4]], en se basant sur des arguments d’inéquations variationnelles de type elliptique. Il convient de noter que l’étude mathématique des problèmes de contact a débuté avec la monographie de Duvaut et Lions voir [[5]], qui a présenté la formulation variationnelle de plusieurs problèmes de contact, accompagnée de résultats d’existence et d’unicité de la solution. Après ces travaux et compte tenu de l’importance de ce phénomène, un effort considérable a été déployé pour modéliser les phénomènes de contact et la littérature sur ce sujet est très vaste,

comme en témoignent les travaux voir [[6], [7], [8]].

Dans la littérature en mathématiques appliquées, les modèles généraux pour les processus de contact dynamiques ou quasi-statiques sont récents. Les phénomènes de contact sont modélisés par des problèmes non linéaires difficiles, ce qui explique la lenteur des progrès de leur analyse mathématique. Lorsque deux surfaces entrent en contact, il se produit un réarrangement des aspérités de surface voir [[9]].

En mécanique et en physique, l'adhésion est l'ensemble des phénomènes physico-chimiques qui se produisent lorsque deux matériaux entrent en contact étroit dans le but de créer une résistance mécanique à la séparation. Une fois le contact établi, l'énergie nécessaire pour éviter la séparation s'appelle l'énergie d'adhésion voir [[10]]. Elle ne doit pas être confondue avec l'adhérence, qui est la force nécessaire pour réaliser cette même séparation. L'adhésion est soit directe elle a lieu uniquement pour des matériaux très lisses et extrusion, plusieurs approches ont été proposées, notamment l'approche phénoménologique, qui utilise des modèles empiriques basés sur des essais expérimentaux, et l'approche mécaniste, qui tente de décrire les processus physico-chimiques à l'origine de l'adhésion. Cette dernière approche est plus complexe mais permet une meilleure compréhension du phénomène voir [[11], [12]].

L'objectif de cette thèse est l'étude de trois problèmes viscoélastiques avec mémoire longue. On considère deux lois de comportement : viscoélastique avec mémoire longue dans le cas non linéaire et viscoélastique avec mémoire longue dans le cas linéaire. Les conditions aux limites sont de type compliance normale. Les lois de frottement utilisées sont des versions quasistatiques de la loi de Coulomb. Les conditions électriques sont introduites dans les cas où la fondation est isolatrice. Notre étude des phénomènes de contact comprend les étapes suivantes : la modélisation mathématique, l'analyse variationnelle incluant des résultats d'existence et d'unicité de la solution.

La première partie comprend les outils nécessaires pour une bonne com-

préhension des problèmes traités et elle est divisée en deux chapitres. Le premier a pour objet la présentation du cadre physique et les modèles mathématiques utilisés. Le deuxième est consacré aux espaces fonctionnels et les principales notations utilisées. Ensuite, nous rappelons quelques résultats fondamentaux d'analyse non linéaire, concernant les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz, les inéquations variationnelles, les inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolutions et les lemmes de Gronwall.

La deuxième partie est composée de deux chapitres, dans le premier chapitre de cette partie nous étudions deux problèmes, un problème de contact avec réponse normale instantanée dans un processus dynamique et un problème de contact avec compliance normale dans un processus dynamique, La loi de comportement est viscoélastique non linéaire avec terme intégral. On établit des résultats d'existence et d'unicité de la solution, les démonstrations sont basées sur des arguments d'équations variationnelles et des arguments de point fixe.

le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un modèle mathématique qui décrit le processus quasi-statique de contact entre un corps piézoélectrique à mémoire à long terme et un obstacle. L'évolution de la température est décrite par une équation d'évolution de première espèce. Le problème est formulé comme un système des inégalités variationnelles elliptiques pour le déplacement, et une égalité variationnelle pour la contrainte électrique. Nous prouvons l'existence d'une unique solution faible au problème.

En résumé, cette thèse contribue à la compréhension des processus de contact piézoélectrique entre des matériaux solides, en proposant des modèles mathématiques adaptés pour la simulation numérique. Ces modèles peuvent être utilisés pour la résolution de problèmes réels dans différents domaines de l'industrie, ce qui permettra aux scientifiques et aux industriels de mieux comprendre ces phénomènes et de développer des matériaux aux propriétés et aux performances voulues.

NOTATIONS PRINCIPALES

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), on note par

$\overline{\Omega}$	: l'adhérence de Ω
Γ	: la frontière de Ω , supposée souvent assez régulière
$\Gamma_i(\overline{1, 3})$	: une partition de la frontière Γ
ν	: la normale extérieure unitaire à Γ
v_ν, v_τ	: les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v
σ_ν, σ_τ	: les composantes normales et tangentielle du champ tensoriel σ
$\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$	: espace des conditions continument différentiable sur Ω
$\mathcal{D}(\Omega)$	: espace des fonctions réelles sur Ω indéfiniment dérivables et à support compact
H	: l'espace $L^2(\Omega)^d$
H_1	: l'espace H_1 l'espace $H_1(\Omega)^d$
$\mathcal{H}$	: l'espace $L^2(\Omega)^{d \times d}$
$\mathcal{H}_1$	: l'espace $\left\{ \sigma \in \mathcal{H} \text{ tel que } \text{Div} \sigma = (\sigma_{ij,j}) \in H \right\}$
H_Γ	: l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$
H'_Γ	: l'espace dual de H_Γ

Si H est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes :

$(\cdot, \cdot)_H$	: le produit scalaire de H
$(\cdot, \cdot)_{H' \times H}$	: le produit de dualité entre H' et H
$\ \cdot\ _H$	: La norme de H
$x_n \rightharpoonup x$	: la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H
$x_n \longrightarrow x$	: la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans H
$\mathcal{L}(H)$	: l'espace des applications linéaires continues de H dans H

Si de plus $[0, T]$ est un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par :

$\mathcal{C}(0, T, H)$	: l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ dans H
$\mathcal{C}^1(0, T, H)$	: l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H
$L^p(0, T, H)$	: l'espace des fonctions fortement mesurables sur $[0, T]$ dans H
$\ \cdot\ _{L^p(0, T, H)}$	: la norme de $L^p(0, T, H)$
$W^{k,p}(0, T; H)$	: l'espace de Sobolev de paramètres k et p
$\ \cdot\ _{W^{k,p}(0, T; H)}$	: la norme de $W^{k,p}(0, T; H)$
$\dot{f}, \ddot{f}$	: les dérivées première et seconde de f par rapport au temps
$\partial_i f, f_{,i}$	: la dérivée partielle de f par rapport à la i ème composante x_i
∇f	: le gradient de f
$Div f$	: la divergence de f
$\varepsilon(f)$	: la partie symétrique du gradient de f
$\mathbb{S}^d$	: l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d$
$\cdot \cdot$	: produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$
$ \cdot $	: norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$
I_d	: le tenseur identité du second ordre sur $\mathbb{R}^d$
C	: des constantes génériques strictement positives
$p.p.$	: presque partout

Chapitre 1

Formulation des problèmes aux limites et rappels d'analyse

Formulation des problèmes aux limites et rappels d'analyse

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons donner un petit rappel sur la mécanique des milieux continus où nous présentons le cadre physique étudié dans cette thèse. Nous rappellerons notamment de l'équation de mouvement de Cauchy et l'équation de la conservation de la charge. Nous décrirons les différentes lois de comportement des corps étudiés dans cette thèse (électro-élastique, électro-viscoélastique). Finalement, nous préciserons les conditions aux limites de contact avec frottement et adhésion où seulement avec adhésion.

1.2 Cadre physique

Cette section est consacrée à la présentation du cadre physique général étudié dans cette thèse et les formulations mathématiques appropriées à l'étude des problèmes de contacts, avec adhésion ou avec adhésion et frottement, entre un corps piézoélectrique et une fondation correspondant à ce cadre physique. Le cadre physique considéré dans cette thèse est le suivant :

Soit un corps piézoélectrique qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) avec une surface frontière régulière Γ , partitionnée en trois parties mesurables Γ_1 , Γ_2 , et Γ_3 , correspondant aux conditions aux limites mécanique, d'une part, et en trois parties mesurables Γ_a , Γ_b et Γ_3 correspondant aux conditions aux limites électrique, d'autre part, telles que $mes \Gamma_1 > 0$ et $mes \Gamma_a > 0$

1(3)

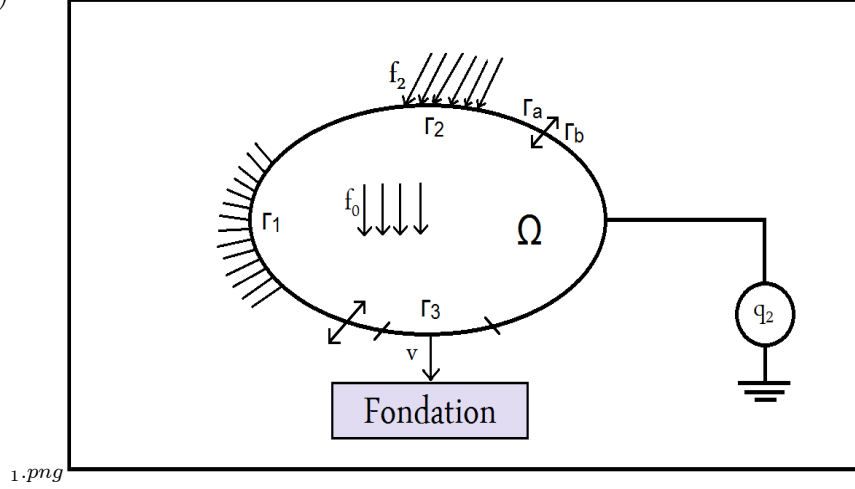


FIGURE 1.1-Corps piézo électrique en contact avec un isolateur.

On note par v la normale unitaire sortante à Γ . Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe et en contact (avec frottement, frottement et usure) avec une base isolatrice sur la partie Γ_3 . Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité f_2 . De plus, ce milieu est soumis à l'action de potentiel électrique fixé φ_0 sur la partie Γ_a de la frontière ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique q_2 sur la partie Γ_b . Nous nous intéressons à l'étude de l'évolution du corps matériel sous l'action des forces volumiques de densité f_0 et des charges électriques de densité volumiques q_0 dans Ω (Voir Fig 1.1). Nous supposons que f_0 et f_2 varient très lentement par rapport au temps. Finalement, soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Avant la description des modèles mathématiques associées au cadre physique présenté ci-dessus, nous donnons quelques notations et conventions que nous utiliserons tout au long de cette thèse.

Nous notons par $\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) ; "." et $\| \cdot \|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$ tels que :

$$\begin{aligned} u.v &= u_i v_i, \quad \|v\| = (v.v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u = (u_i), v = (v_i) \in \mathbb{R}^d, \\ \sigma.\tau &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad \|\sigma\| = (\sigma.\sigma)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \sigma = (\sigma_{ij}), \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \end{aligned}$$

avec la convention de l'indice muet.

Nous notons par $\sigma = \sigma(x, t)$ le champ des contraintes, par $D = D(x, t)$ le vecteur des déplacements électriques, par $u = u(x, t)$ le champ des déplacements, par $\varphi = \varphi(x, t)$ le potentiel électrique tels que $x \in \bar{\Omega}$ et $t \in [0, T]$. Nous notons aussi par $\varepsilon(u)$ le champ des déformations infinitésimales et par $\mathbf{E}(\varphi)$. Nous désignons par u_ν, v_τ , les composantes normales et tangentielles d'un vecteur u à la frontière tels que le champ électrique.

$$\begin{cases} u_\nu = u \cdot v, \\ u_\tau = u - u_\nu v. \end{cases} \quad (1.1)$$

Nous notons par σ_ν, σ_τ les composantes normales et tangentielles d'un champ des contraintes à la frontière tels que

$$\begin{cases} \sigma_\nu = (\sigma v) \cdot v, \\ \sigma_\tau = \sigma v - \sigma_\nu v. \end{cases} \quad (1.2)$$

Les relations (1.1) et (1.2) nous permettent d'écrire la relation suivante

$$(\sigma v) \cdot v = \sigma_\nu v_\nu + \sigma_\tau \cdot v_\tau, \quad (1.3)$$

qu'on va l'utiliser tout au long de cette thèse et surtout dans l'établissement des formulations variationnelles des problèmes mécaniques de contact.

Les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps, c'est à dire

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2} \quad (1.4)$$

où $\dot{u}$ désigne le champ des vitesses et $\ddot{u}$ désigne le champ des accélérations. Nous notons par u_ν , u_τ les composantes normale et tangentielle du vecteur de vitesse $\dot{u}$ à la frontière tels que

$$\begin{cases} \dot{u}v = \dot{\dot{u}} , \\ u_\tau = \dot{u} - \dot{u}_\nu v. \end{cases} \quad (1.5)$$

La relation entre le champ des déplacements u et le champ des déformations ε dans l'hypothèse des petites transformations est donnée par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (1.6)$$

En outre, le champ électrique est défini par la relation suivante

$$E(\varphi) = -\nabla\varphi = -(\varphi_{,i}) \quad (1.7)$$

où l'indice qui suit la virgule indique la dérivation partielle par rapport à la composante correspondantes de la variable.

1.3 Modèle mathématique

Le modèle mathématique qu'on va étudier dans cette thèse, décrit l'évolution du corps dans le cadre physique de la figure 1.1.

Dans le cas générale, on décrit l'évolution d'un corps matériel par l'équation de mouvement de suivante :

$$Div \sigma(t) + f_0(t) = \rho \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (1.8)$$

où $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne la densité de masse et " Div " désigne l'opérateur divergence des tenseurs tel que

$$Div \sigma = (\sigma_{ij,j}).$$

Les inconnues du problème dans ce cas sont le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$. Les processus d'évolution définis par (1.8) s'appellent processus dynamiques. On remarque que dans le cas où le champ de vitesse $\dot{u}$ varie très lentement par rapport au temps, le terme $\rho \ddot{u}$ peut être négligé et l'équation (1.8) devient

$$Div \sigma(t) + f_0(t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (1.9)$$

Cette équation s'appelle l'équation d'équilibre et les processus d'évolution définis par cette équation s'appellent processus quasistatiques. Dans le cadre physique décrit ci-dessus (dans la section précédente) on a supposé que f_0 et f_2 varient très lentement par rapport au temps. Par conséquent, si nous supposons que les accélérations dans le milieu sont négligeables nous nous plaçons dans le cas quasistatique et nous utilisons l'équation (1.9).

Dans cette thèse le corps étudié est piezoélectrique, donc aux inconnues mécaniques du problème se rajoutent les inconnues électriques qui sont le champ des déplacements électrique $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, ce qui nécessite une autre équation d'équilibre pour gérer cette situation ; c'est l'équation de Maxwell-Gauss ou équation de conservation de la charge qui décrit l'évolution du corps dans ce cas

$$div D = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (1.10)$$

où " div " est l'opérateur divergence pour les vecteurs, $Div D = (D_{i,i})$ et q_0 est la densité volumique de charge au sein du matériau.

La condition aux limites des déplacements sur la partie Γ_1 est

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \quad (1.11)$$

qui exprime que le corps est encastré sur cette partie

La condition aux limites de traction est

$$\sigma v = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \quad (1.12)$$

où f_2 représente la densité des forces surfacique appliquées sur Γ_2 et constitue une donnée du problème.

Les conditions aux limites électriques sont

$$\varphi = \varphi_0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T) \quad (1.13)$$

$$D.v = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T) \quad (1.14)$$

où φ_0 et q_2 étant des données des problème.

Pour compléter le modèle mathématique (1.9) – (1.14), nous préciserons ultérieurement les conditions aux limites de contact sur la partie Γ_3 .

Du point de vue mathématique l'équation (1.9) ne suffit pas à modéliser le problème d'équilibre précédent car, par exemple, les composantes u_i du champ des déplacements ne figurent pas dans cette équation. Par ailleurs, du point de vue physique, nous remarquons que l'équation (1.9) exprime une loi universelle valable pour tous les solides. Donc, soumis à des conditions identiques les divers milieux continus auraient des comportements identiques. Ceci est naturellement absurde. Par conséquent, il faut lui ajouter d'autre relations qui caractérise le comportement de chaque type de solide. C'est l'objet des lois de comportements que nous décrirons dans la section suivante.

1.4 Lois de comportements

Les lois de comportements caractérisent ce qui est propre à chaque type de matériau. Bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement ; on cite à titre d'exemple les quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Dans la description des phénomènes purement mécaniques, par loi de comportement (ou loi constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes σ , le tenseur des déformations infinitésimales ε et leurs dérivées temporelles $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$. Cette définition se modifie légèrement dans la description des phénomènes électro-mécanique, car ici nous devons aussi prendre en considération le champ de déplacement électrique $D = (D_i)$ ainsi que le champ électrique $\mathbf{E}(\varphi) = -\nabla\varphi = -(\varphi_{,i})$. Nous présentons par la suite les lois de comportement qui interviennent dans cette thèse.

1.4.1 Lois de comportement des matériaux électro-élastiques

Le tenseur des contraintes σ et le vecteur des déplacements électriques D dans ces matériaux sont données par la formule (la loi de comportement) suivante

$$\begin{cases} \sigma = \mathcal{F}\varepsilon(u) - \varepsilon^*\mathbf{E}(\varphi), \\ D = \mathcal{B}\mathbf{E}(\varphi) + \varepsilon\varepsilon(u) \end{cases} \quad (1.15)$$

ou $\mathcal{F}$ est l'opérateur d'élasticité, non forcément linéaire, à champ électrique nul (matériau piézoélectrique de courtcircuité), $\varepsilon = (e_{ijk})$ est le tenseur piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul, $\varepsilon^* = (e_{ijk}^*)$ est le transposé du tenseur ε , tel que

$$\begin{cases} e_{ijk}^* = e_{ijk} \\ \varepsilon\sigma.v = \sigma.\varepsilon^*v \end{cases} \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}^d, v \in \mathbb{R}^d \quad (1.16)$$

et $\mathcal{B} = (b_{ij})$ est le tenseur de la primitivité électrique à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif.

Si nous supposons dans (1.15) que le tenseur des contraintes σ est une fonction linéaire du tenseur des petites déformations ε et du gradient du potentiel électrique ou le champ électrique $\mathbf{E}$ nous nous plaçons dans le cas électro-élastique linéaire, on écrit

$$\sigma_{ij} = \mathcal{F}_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u) - e_{ijk}^*\mathbf{E}_k(\varphi) \quad (1.17)$$

où $\mathcal{F}_{ijkh}$ qui s'appellent les coefficients d'élasticité, sont les composantes du tenseur d'ordre quatre $\mathcal{F}$ et elles sont indépendantes du tenseur des déformations en élasticité pure. Notons ici que dans le cas homogène $\mathcal{F}_{ijkh}$ et e_{ijk} sont des constantes et dans le cas non homogène $\mathcal{F}_{ijkh}$ et e_{ijk} dépendent du point $x \in \Omega$

Dans (1.15), si nous prenons

$$\mathcal{F}(\xi) = \mathcal{A}\xi + \frac{1}{\alpha}(\xi - P_K\xi) \quad (1.18)$$

nous obtenons un exemple de loi de comportement électro-élastique non linéaire, où α est une constante strictement positive. $\mathcal{A} : \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ est un tenseur d'ordre quatre symétrique, défini positif; $K \in \mathbb{S}^d$ est un convexe fermé tel que c et P_K est l'opérateur de projection sur K . Ce convexe est défini par

$$K = \{\xi \in \mathbb{S}^d / G \leq k\}$$

où $G : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe continue telle que $G(0) = 0$ et $k > 0$. Pour plus de détaille sur la loi de comportement (1.15), nous renvoyons le lecteur à voir par exemple [[13], [14]].

1.4.2 Lois de comportement des matériaux électro-viscoélastiques

Toute loi de comportement de la forme suivante

$$\begin{cases} \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{F}\varepsilon(u) - \varepsilon^* \mathbf{E}(\varphi) \\ D = \mathcal{B}\mathbf{E}(\varphi) + \varepsilon\varepsilon(u) \end{cases} \quad (1.19)$$

est dite loi de comportement électro-viscoélastique. Dans (1.19) l'opérateur $\mathcal{A}$ est l'opérateur de viscosité à champ électrique nul, $\mathcal{F}$ est l'opérateur d'élasticité, non forcément linéaire, à champ électrique nul, $\varepsilon = (e_{ijk})$ est le tenseur piézoélectrique à champ constant ou nul, $\mathcal{B} = (b_{ikk})$ est le tenseur électrique.

Les lois de comportement pour les matériaux électro-viscoélastiques sont utilisées pour d'écrire le comportement des différents matériaux comme les métaux, les polymères et les roches.

En visco-élasticité linéaire de type Kelevin-Voigt (Voir par exemple [[15]]) le tenseur des contraintes est donnés par

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(\dot{u}) + \mathcal{F}_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u) - e_{ijk}^* \mathbf{E}_k(\varphi) \quad (1.20)$$

où a_{ijkh} sont les coefficients de viscosité.

La relation suivante

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \frac{1}{\alpha}(\varepsilon - P_K\varepsilon) - \varepsilon^* \mathbf{E}(\varphi) \quad (1.21)$$

est un exemple de loi électro-viscoélastique non linéaire. Ici, $\mathcal{A} = (a_{ikk})$ est le tenseur des coefficients viscoélastiques, $K \in \mathbb{S}^d$ est un convexe fermé tel que $0 \in \mathbb{S}^d$ et $P_K : \mathbb{S}^d \longrightarrow K$ est l'opérateur de projection sur K . L'opérateur d'élasticité est donné par

$$\mathcal{F}(\varepsilon) = \frac{1}{\alpha}(\varepsilon - P_K\varepsilon) \quad (1.22)$$

et $\varepsilon = (e_{ijk})$ est le tenseur des coefficients piézoélectriques.

Finalement, afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps, il faut préciser les conditions aux limites sur la partie Γ_3 ; c'est l'objet des conditions de contact et lois de frottement que nous décrirons dans la section suivante.

1.5 Conditions aux limites de contact

Nous nous plaçons dans le cadre physique de la FIGURE 1.1 et nous présentons en détails les conditions de contact sur la surface avec une Γ_3 discription de l'aspect mathématique et mécanique de ces conditions

1.5.1 Contact bilatéral.

Quand le contact entre le corps et la base est maintenue en tout temps on dit que c'est un contact bilatéral. C'est généralement le cas dans de nombreuses machines et entre les pièces et composants d'équipement ou de machines mobiles. Comme il n'y a pas d'écart entre le corps et la base, nous avons

$$u_\nu = 0 \quad (1.23)$$

La condition de contact bilatéral (1.23) a été utilisé dans un certain nombre de documents, pour plus de détails voir par exemple [[16], [7]]. On note ici que dans le dernier chapitre de cette thèse nous nous plaçons dans ce type de contact.

1.5.2 Contact unilatéral

Nous supposons que le corps est susceptible d'entrer en contact avec une base rigide. Par conséquent, le mouvement des particules matérielles de Γ_3 est restreint de la présence du solide rigide de telle sorte que, avant l'application des forces externes, la distance de chaque point $x \in \Gamma_3$ à la base rigide dans la direction de la normale $v(x)$ est connue et notée par $g(x)$.

Nous supposons aussi que le contact entre le corps et la base rigide se produit si et seulement si $u_\nu = g$. Puisque la base est considérée rigide, elle ne subira pas de déformations donc le corps Ω ne pourra pas le pénétrer ; cette propriété se traduit mathématiquement par l'inégalité

$$u \leq g \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (1.24)$$

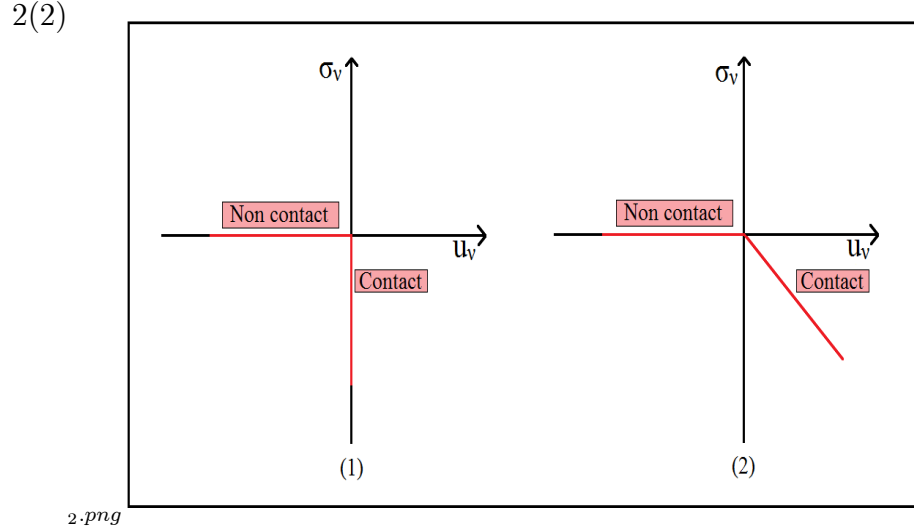


FIGURE 1.2- Loi de Signorini (1) et loi de compliance normale (2) pour $g = 0$.

Dans les points de Γ_3 tels que $u_\nu < g$, il n'existe pas de contact entre Ω et la base rigide donc le vecteur des contraintes de Cauchy s'annule, c-à-d

$$u_\nu < g \implies \sigma_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (1.25)$$

Pour les points de Γ_3 tels que $u_\nu = g$, le contact entre le corps Ω et la base rigide se produit ; nous supposons pour ces points que la base rigide exerce une pression inconnue suivant la direction de la normale et orientée vers Ω ; on à

$$u_\nu = g \implies \sigma_\nu \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (1.26)$$

On peut résumer les conditions (1.24)-(1.26) de la manière condensée suivante

$$u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu(u_\nu - g) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (1.27)$$

Les conditions (1.27) s'appellent les conditions de contact unilatéral ou conditions de contact de type Signorini.

1.5.3 Contact avec compliance normale

C'est le cas où la fondation est supposée légèrement déformable et la contrainte normale σ_ν satisfait

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g) \quad (1.28)$$

où u_ν est le déplacement normal, g est l'interstice entre le corps et la fondation et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale.

La relation (1.28) est dite condition de compliance normale et signifie que la fondation exerce une pression inconnue suivant la normale sur le corps en fonction de sa pénétration $u_\nu - g$. Des conditions de contact avec compliance normale ont été utilisées par exemple dans [[17], [18], [19]].

Remarque 1.1 *Dans le cas où l'interstice entre le corps et la fondation est nul on prend $g = 0$.*

Pour la fonction de compliance normale p_ν on prend comme exemple la fonction suivante

$$p_\nu = c_\nu r_+ \quad (1.29)$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est la fonction donnée par

$$p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha \\ c_\nu \alpha & \text{si } r \succ \alpha \end{cases} \quad (1.30)$$

où α est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. La condition de contact (1.30) dit que si la pénétration est trop profonde, c-à-d. quand elle dépasse α , la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

Chapitre 2

Outils Mathématiques

Outils Mathématiques

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la description des espaces fonctionnels utilisés dans cette thèse. Nous supposons dans ce chapitre que Ω est un domaine borné et de Lipschitz de $\mathbb{R}_d$ ($d = 2, 3$), c'est-à-dire que sa frontière Γ est représentable localement comme le graphe d'une fonction Lipschitzienne sur un ouvert de $\mathbb{R}_{d-1}$, Ω étant situé localement d'un seul côté de Γ . Par ailleurs, nous considérons une partition de Γ en trois parties mesurables disjointes Γ_1 , Γ_2 , et Γ_3 d'un côté et une partition de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ en deux parties ouvertes Γ_a et Γ_b d'un autre côté, telles que $\text{mes } \Gamma_1 > 0$ et $\text{mes } \Gamma_a > 0$.

2.2 Espaces fonctionnels

Dans cette section nous donnons quelques rappels sur les espaces de fonctions à valeurs réelles qui nous aident à comprendre les propriétés des espaces appropriés à la mécanique. Nous allons définir les espaces de fonctions continues, continûments différentiables, les fonctions p-intégrables et les espaces de Sobolev. Pour plus de détails sur ce sujet nous renvoyons le lecteur, par exemple, aux références [[26], [27], [28]].

Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ d'entiers positifs ou nuls on désigne par

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \quad (2.1)$$

où $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$ est la longueur de α . Dans cette thèse, on va désigner par $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\partial x_i u$, $\partial_i u$, u_{x_i} ou $u_{,i}$ les dérivées partielles d'une fonction u .

2.2.1 Espaces de fonctions continues et continûments différentiables

L'espace des fonctions uniformément continues sur Ω est noté par $C(\overline{\Omega})$ et il est un espace de Banach pour la norme donnée par

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup \{ |v(x)|, x \in \overline{\Omega} \}$$

Toute fonction uniformément continue est bornée et possède une unique extension continue sur Ω . Pour tout entier m , l'espace $C^m(\overline{\Omega})$ est donné par

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) / D^\alpha v \in C(\overline{\Omega}) \text{ pour } \alpha \leq m\}$$

est l'espace des fonctions continues sur Ω dont les dérivées d'ordre au plus m sont également continues sur Ω . Il est aussi un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{C(\overline{\Omega})}$$

L'espace $C^\infty(\overline{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\overline{\Omega})$$

Nous pouvons maintenant parler de l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur l'ensemble Ω à support inclus dans Ω , défini par

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) / \text{supp } v \subset \Omega\}$$

où $\text{supp } v = \overline{\{v \in C^\infty(\Omega) / v(x) \neq 0\}}$ est le support de la fonction v . Si $\text{supp } v$ est un sous ensemble propre de Ω , on dit que v est une fonction à support compact dans Ω .

2.3 Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 2.1 (*Espace de Lebesgue*). Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble

$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / v \text{ Lebesguemesurable sur } \Omega \text{ et } |v|^p \text{ Lebesgue integrable sur } \Omega\}$.
C'est un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = \infty$ et $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, alors on définit $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ par

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |v(x)| = \inf \{c : |v(x)| \leq c\}$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

Définition 2.2 Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, on dit qu'une fonction $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $u \circ I_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$, où I_K représente l'application identité de K .

Remarque 2.3 Soit $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, si on a

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

alors $u = 0$ p.p dans Ω .

Dans ce qui suit nous allons rappeler quelques propriétés des espaces $L^p(\Omega)$. Soit $1 < p < \infty$ un réel. On pose $q = \frac{p}{p-1}$ et on dit que q est l'exposant conjugué de p . L'exposant q est caractérisé par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour $p = 1$ (resp. $p = +\infty$) nous poserons naturellement $q = +\infty$ (resp $q = 1$).

Théorème 2.4 Pour tout $p \in [1, +\infty]$, les espaces $L^p(\Omega)$ vérifient les assertions suivantes

- 1) Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach.
- 2) Toute suite de Cauchy de $L^p(\Omega)$ possède une sous-suite convergente ponctuellement sur Ω .
- 3) Pour toute fonction $u \in L^p(\Omega)$, toute $v \in L^q(\Omega)$ l'inégalité de Hölder est vérifiée, i.e.

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

4) Les duaux des espaces $L^p(\Omega)$, pour $p \in [1, +\infty[$, vérifient $(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega)$.

5) Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces réflexifs pour $]1, +\infty[$.

6) Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces séparables pour $[1, +\infty[$.

L'espace $L^2(\Omega)$ munit du produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \quad \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

est un espace de Hilbert. De plus l'inégalité de Cauchy-Schwarz correspondant à l'inégalité de Hölder est vérifiée, i.e.

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \right| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

2.3.1 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont permis de résoudre bon nombre de problèmes concernant les équations aux dérivées partielles sans réponse jusque là. Nous nous limiterons aux espaces les plus utiles en gardant bien à l'esprit que la théorie sous-jacente est beaucoup plus vaste.

Dans ce qui suit, sauf mention explicite du contraire, on suppose l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ borné.

Définition 2.5 Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. On dit que la fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ est la dérivée faible d'ordre α de u si

$$\int_{\Omega} u(x) D^{\alpha} \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

En utilisant la remarque (2.1.3) nous déduisons que la dérivée faible, si elle existe, est unique dans $L^1_{loc}(\Omega)$.

Définition 2.6 Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_{\alpha} \in L^p(\Omega), \text{ telque } v_{\alpha} = D^{\alpha} u\}\}$$

Remarque 2.7 Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^\alpha u$ et v_α .

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

Pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

Théorème 2.8 Les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, munis de la norme $\|\cdot\|$, sont des espaces de Banach. De plus, les espaces $H^k(\Omega)$, pour tout k entier, sont des espaces de Hilbert.

Pour modéliser un problème mécanique, il nous faudra introduire des conditions aux limites, ce qui nous amène à parler de la restriction à la frontière Γ d'une fonction. Bien que cela semble tout-à-fait naturel de le faire, il faut s'assurer que cette restriction au bord ait un sens du point de vue mathématique. Pour cela nous introduisons la notion d'application trace γ ■ des fonctions des espaces de Sobolev.

Définition 2.9 Soit Ω un domaine de Lipschitz de $\mathbb{R}^d$ de frontière Γ et $1 \leq p < \infty$. Il existe une application linéaire continue $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Gamma)$ possédant les propriétés suivantes :

- 1) $\gamma v = v|_\Gamma$ si $v \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$
- 2) l'application γ est une application compact
- 3) il existe une constante $k > 0$, provenant de la continuité de l'application γ , telle que

$$\|\gamma v\|_{L^p(\Gamma)} \leq k \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté, nous remplaçons γv (la trace de la fonction $\forall v \in W^{1,p}(\Omega)$) par v .

2.4 Espaces liés aux opérateurs de déformation et de divergence

Dans cette section, nous introduisons les espaces de *Hilbert* suivants, associés aux inconnues mécaniques u et σ :

$$\begin{aligned} H &= \{u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\} \\ \mathcal{H} &= \{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\} \\ H_1 &= \{u = (u_i) \mid u_i \in H^1(\Omega)\} \\ \mathcal{H}_1 &= \{\sigma \in \mathcal{H} \mid \sigma_{ij,j} \in H\} \end{aligned}$$

Les espaces H , $\mathcal{H}$, H_1 et $\mathcal{H}_1$ sont des espaces réels de *Hilbert* munis des produits scalaires suivants :

$$\begin{aligned} (u, v)_H &= \int_{\Omega} u_i v_i \, dx \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} \, dx \\ (u, v)_{H_1} &= (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} &= (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, Div \tau)_H \end{aligned}$$

où $\varepsilon : H_1 \longrightarrow \mathcal{H}$ et $Div : \mathcal{H}_1 \longrightarrow H$ sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad Div \sigma = (\sigma_{ij,j})$$

Les normes sur les espaces H , $\mathcal{H}$, H_1 et $\mathcal{H}_1$ sont notées par $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$ respectivement

Pour tout champ de vecteurs $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour désigner la trace γv de v sur Γ . Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \longrightarrow L^2(\Gamma)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par H_{Γ} ce sous-espace s'injecte continûment dans

$L^2(\Gamma)^d$. Désignons par H'_Γ le dual de H_Γ et $(\cdot, \cdot)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}$ le produit de dualité entre H'_Γ et H_Γ . Pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$, il existe un élément $\sigma\nu \in H'_\Gamma$ tel que :

$$(\sigma\nu, \gamma v)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div\sigma, v)_H \quad \forall v \in H_1 \quad (2.2)$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(\sigma\nu, \gamma v)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma\nu \cdot v \, da \quad \forall v \in H_1 \quad (2.3)$$

Donc, pour σ assez régulier nous avons la formule de Green suivante :

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div\sigma, v)_H = \int_\Gamma \sigma\nu \cdot v \, da \quad \forall v \in H_1 \quad (2.4)$$

Nous définissons le sous-espace fermé de H_1

$$V = \{v \in H_1 \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \quad (2.5)$$

Puisque $mes \Gamma_1 > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V ; alors, il existe une constante $C_K > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$\|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \geq C_K \|v\|_{H_1} \quad \forall v \in V \quad (2.6)$$

Une preuve de cette inégalité peut être trouvée dans [[29]] p.79.

Nous considérons sur l'espace V , le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_H \quad \forall u, v \in V \quad (2.7)$$

et soit $\|\cdot\|_V$ la norme associée, telle que

$$\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_H \quad \forall v \in V \quad (2.8)$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert. De plus, en utilisant le Théorème de trace de Sobolev, (2.2.3) et (2.2.4), il existe une constante c_0 dépendant uniquement de Ω , Γ_1 et Γ_3 telle que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|v\|_V \quad \forall v \in V \quad (2.9)$$

Pour une fonction scalaire β , qui représente le champ d'adhésion sur la surface Γ_3 du contact, nous définissons l'ensemble

$$\mathcal{Q} = \{ \beta : \Gamma_3 \times [0.T] \longrightarrow \mathbb{R} / 0 \leq \beta(t) \leq 1 \quad \text{sur } \Gamma_3 \} \quad (2.10)$$

Dans ce qui suit, nous définissons les espaces de Sobolev associés aux inconnues électriques (Le champ des déplacements électriques D et le potentiel électrique φ) des problèmes électro-mécaniques qui vont être introduits dans cette thèse. Soit les espaces

$$\mathcal{W} = \{ D = (D_i) / D_i \in L^2(\Omega) \} = L^2(\Omega)^d \quad (2.11)$$

$$\mathcal{W}_1 = \{ D = (D_i) / D_i \in L^2(\Omega), D_{i,i} \in L^2(\Omega) \} \quad (2.12)$$

munis des produits scalaires

$$(D, E)_{\mathcal{W}} = \int_{\Omega} D_i E_i dx, \quad (D, E)_{\mathcal{W}_1} = (D, E)_{\mathcal{W}} + (Div D, Div E)_{L^2(\Omega)} \quad (2.13)$$

et leurs normes associées $\| \cdot \|_{\mathcal{W}}$ et $\| \cdot \|_{\mathcal{W}_1}$, respectivement. Le champ du potentiel électrique va être trouvé dans l'espace

$$W = \{ \xi \in H_1(\Omega) / \xi = 0 \text{ sur } \Gamma_a \} \quad (2.14)$$

Puisque $mes(\Gamma_a) > 0$, l'inégalité de **Friedrichs-Poincaré** est satisfaite, ainsi,

$$\| \nabla \xi \|_{\mathcal{W}} \geq c_F \| \xi \|_{H_1(\Omega)} \quad \forall \xi \in W \quad (2.15)$$

où $c_F > 0$ est une constante qui dépend uniquement de Ω et Γ_a et $\nabla \xi = (\xi_{,i})$.

Sur l'espace W , nous considérons le produit scalaire donné par

$$(\varphi, \xi)_W = (\nabla \varphi, \nabla \xi)_W \quad (2.16)$$

et soit $\| \cdot \|_W$ la norme associée. Il s'ensuit de (2.15) que $\| \cdot \|_{H_1(\Omega)}$ et $\| \cdot \|_W$ sont des normes équivalentes sur W et donc $(W, \| \cdot \|_W)$ est un espace

réel de *Hilbert* . De plus, par le théorème de trace de *Sobolev*, il existe une constante c_0 dépendant uniquement de Ω , Γ_a et Γ_3 , telle que

$$\| \xi \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0 \| \xi \|_W \quad \forall \xi \in W \quad (2.17)$$

Aussi, rappelons que lorsque $D \in \mathcal{W}_1$ est une fonction régulière, la formule de Green est satisfaite :

$$(D, \nabla \xi)_W + (\operatorname{div} D, \xi)_W = \int_{\Gamma} D \cdot \nu \xi \, da \quad \forall \xi \in H^1(\Omega) \quad (2.18)$$

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de *Sobolev* nous renvoyons le lecteur par exemple à [[1], [19], [32]].

2.5 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Ce paragraphe est destiné à rappeler les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de *Banach* réel. Bien que le contenu de ce paragraphe est standard et peut être trouvé dans un grand nombre d'ouvrages, une revue d'ensemble sur ce sujet nous a paru utile. Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \| \cdot \|_X)$ un espace de Banach réel. Nous notons par $C_c(0, T, X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeurs dans X .

Définition 2.10 . Une fonction $f : [0, T] \longrightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T, X)$ telle que $\| f_n(t) - f(t) \|_X \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$ pour tout $t \in [0, T] \setminus E$.

Définition 2.11 Une fonction $f : [0, T] \longrightarrow X$ est dite fortement dérivable dans $t_0 \in (0, T)$ s'il existe un élément $\frac{df}{dt}(t_0) \in X$ appelé la dérivée forte de f dans t_0 , tel que

$$\left\| \frac{1}{h} (f(t_0 + h) - f(t_0)) - \frac{df}{dt}(t_0) \right\|_X = 0$$

Définition 2.12 Une fonction $f : [0, T] \longrightarrow X$ est dite intégrable s'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T, X)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|f_n(t) - f(t)\|_X dt = 0$$

Théorème 2.13 (Bochner) : Une fonction $f : [0, T] \longrightarrow X$ mesurable est intégrable si et seulement si $x \longmapsto \|f(x)\|_X : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est intégrable. Dans ce cas,

$$\left\| \int_0^T f dt \right\|_X \leq \int_0^T \|f\|_X dt$$

Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Lebesgue $L^p(0, T, X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $f : (0, T) \longrightarrow X$ mesurables, telles que l'application $t \longmapsto \|f(t)\|_X$ appartient à $L^p(0, T)$. On sait que $L^p(0, T, X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(0, T, X)} &= \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < \infty \\ \|f\|_{L^p(0, T, X)} &= \inf \{c > 0 \mid \|f(t)\|_X \leq c, t \in (0, T)\} \quad p = \infty \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons les résultats suivants :

Proposition 2.14 (1) $L^p(0, T, X)$ ($1 \leq p < \infty$) est un espace de Banach.
(2) Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$, alors $L^p(0, T, X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^p(0, T, X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt$$

(3) $L^r(0, T, X) \subseteq L^q(0, T, X)$, avec injection continue, $1 \leq q \leq r \leq \infty$.
(4) Si X est un espace de Hilbert, alors

$$\begin{aligned} L^p(0, T, X)' &= L^q(0, T, X), \quad 1 \leq p, q \leq \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ L^1(0, T, X)' &= L^\infty(0, T, X)' \end{aligned}$$

où $L^p(0, T, X)'$ représente le dual de l'espace $L^p(0, T, X)$, $1 \leq p < \infty$.

Définition 2.15 Soit $u, w \in L^1(0, T, X)$. La fonction w s'appelle la dérivée généralisée d'ordre n de u sur $(0, T)$ si

$$\left(\int_0^T \varphi^{(n)}(t)u(t)dt = (-1)^n \left(\int_0^T \varphi^{(n)}(t)w(t)dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0, T)\right.\right.$$

$C_c^\infty(0, T)$ étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables, à support compact dans $(0, T)$. Nous écrivons $w = \dot{u}$ pour $n = 1$ et $w = u$ (pour $n \geq 2$).

Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0, T, X)$ est l'espace des fonctions $u : [0, T] \rightarrow X$ telles que $u \in L^p(0, T, X)$ et $\dot{u} \in L^p(0, T, X)$. L'espace $W^{1,p}(0, T, X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0, T, X)} = \|u\|_{L^p(0, T, X)} + \|\dot{u}\|_{L^p(0, T, X)}$$

Définition 2.16 Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite absolument continue si quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour toute suite d'intervalles (a_j, b_j) disjoints, inclus dans $[0, T]$, tels que $\sum_j (b_j - a_j) < \delta$ on a $\sum_j \|f(b_j) - f(a_j)\|_X \leq \varepsilon$.

Maintenant nous rappelons le lien entre les fonctions absolument continues et les fonctions de l'espace $W^{1,p}(0, T, X)$.

Théorème 2.17 Soit $1 \leq p \leq \infty$, X un espace de Banach réflexif et soit $u \in L^p(0, T, X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) $u \in W^{1,p}(0, T, X)$.
- (2) u admet un représentant absolument continu presque partout dérivable, ayant la dérivée forte dans $L^p(0, T, X)$.
- 3) Il existe $u_0 \in X$ et $g \in L^p(0, T, X)$, telles que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$$

Il découle de la démonstration du théorème précédent que, si X est un espace réflexif, alors toute fonction $u \in W^{1,p}(0, T, X)$ est fortement dérivable p.p. sur $(0, T)$ et $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ p.p. sur $(0, T)$. Par ailleurs, $W^{1,1}(0, T, X)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions $u : [0, T] \longrightarrow X$ absolument continues et $W^{1,\infty}(0, T, X)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions lipschitziennes $u : [0, T] \longrightarrow X$. Étant donné un entier $k \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on définit par récurrence l'espace

$$W^{k,p}(0, T, X) = \{u \in W^{k-1,p}(0, T, X), \quad \dot{u} \in W^{k-1,p}(0, T, X)\}$$

On vérifie aisément que $u \in W^{k,p}(0, T, X)$ si et seulement s'il existe k fonctions $g_1, \dots, g_k \in L^p(0, T, X)$ telles que

$$\int_0^T u(t) \varphi^j(t) dt = (-1)^j \int_0^T g_j(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I) \quad \forall j = 1, \dots, k$$

où $\varphi^{(j)}$ désigne la dérivée d'ordre j de φ . On peut donc considérer les dérivées successives $\dot{u} = g_1$, $u^{(2)} = g_2$, ..., $u^{(k)} = g_k$. L'espace $W^{k,p}(0, T, X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(0, T, X)} = \|u\|_{L^p(0, T, X)} + \sum_{\alpha=1}^k \|u^{(\alpha)}\|_{L^p(0, T, X)}$$

Nous avons alors les résultats suivants :

Théorème 2.18 *Si la fonction $u \in W^{k,p}(0, T, X)$, $1 \leq p \leq \infty$. Nous avons alors*

$$1) \|u(t) - u(s)\|_X \leq \int_s^t \|\dot{u}(r)\|_X dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T$$

2) Si de plus $p < \infty$, on a

$$\|u(t) - u(s)\|_X^p \leq (t - s)^{p-1} \int_s^t \|\dot{u}(r)\|_X^p dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T$$

3) Si $p = \infty$, on a

$$\|u(t) - u(s)\|_X \leq \|\dot{u}(r)\|_{L^\infty(0, T, X)} \quad 0 \leq s \leq t \leq T$$

Théorème 2.19 Dans le cas où l'espace $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ est un espace de Hilbert et si la fonction u appartient à l'espace $H^1(0, T, X)$, alors

1) la fonction $t \longrightarrow \frac{1}{2} \|u(t)\|_X^2$ est une fonction absolument continue sur l'intervalle $]0, T[$

2) $\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|u(t)\|_X^2 = (\dot{u}(t), u(t))_X$ p.p. $t \in]0, T[$

3) $\frac{1}{2} \|u(t)\|_X^2 = \frac{1}{2} \|u(0)\|_X^2 + \int_0^t (\dot{u}(s), u(s))_X ds \quad \forall t \in]0, T[$

Finalement, nous dénotons aussi par $C([0, T], X)$ et $C^1([0, T], X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0, T]$ à valeurs dans X , respectivement, avec les normes

$$\|u\|_{C([0, T], X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X$$

$$\|u\|_{C^1([0, T], X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X + \max_{t \in [0, T]} \|\dot{u}(t)\|_X$$

Pour plus de détails sur les résultats résumés dans cette section nous renvoyons par exemple aux références $[[31], [27]]$.

2.6 Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Cette section comporte des rappels de quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert et quelques résultats sur les inéquations variationnelles elliptiques, les inéquations variationnelles d'évolution et les inclusions différentielles qu'on va utiliser dans cette thèse. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurants dans cette section, nous renvoyons par exemple aux références $[[32], [33], [34]]$.

2.6.1 Rappel sur les espaces de Hilbert

Soit X un espace vectoriel réel et $(\cdot, \cdot)_X$ un produit scalaire sur X . La norme induite sur l'espace X par le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ est définie par :

$$\| u \|_X = (u, u)_X^{1/2}$$

Cette norme vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$(u, v)_X \leq \| u \|_X \| v \|_X \quad \forall u, v \in X$$

On dit que X est un espace de Hilbert si X est complet pour la norme définie ci-dessus. Dans la suite, on va supposer que X est un espace de Hilbert et la convergence forte dans l'espace X sera notée par une flèche

$$u_n \longrightarrow u \Leftrightarrow \| u_n - u \|_X \longrightarrow 0$$

On note par X' l'espace dual de X et par $\| \cdot \|_{X' \times X}$ la dualité entre X et X' . La norme sur l'espace X' est définie par :

$$\| \eta \|_{X'} = \sup_{\substack{v \in X \\ v \neq 0_X}} \frac{|(\eta, v)_{X' \times X}|}{\| v \|_X}$$

On a les résultats suivants :

Théorème 2.20 (*Théorème de représentation de Riesz-Fréchet*).

Etant donné $\eta \in X'$, il existe $f \in X$ unique tel que

$$(\eta, v)_{X' \times X} = (f, v)_X \quad \forall v \in X$$

On a de plus

$$\| \eta \|_{X'} = \| f \|_X$$

Ce théorème montre que toute forme linéaire continue sur X peut se représenter de manière unique à l'aide du produit scalaire. L'application $\eta \longrightarrow f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier X et son dual X' . On dit que la suite (U_n) de X est faiblement convergente vers l'élément $u \in X$ et on note $U_n \longrightarrow u$ si

$$(\eta, U_n)_X \longrightarrow (\eta, u) \quad \forall \eta \in X' \quad \forall \epsilon \in X'.$$

Dans ce cas, u s'appelle limite faible de la suite (U_n) . En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il résulte que si $U_n \longrightarrow u$ dans X . La réciproque n'est pas en général vraie. De plus, puisque tout espace de Hilbert est réflexif, on a le résultat suivant :

Théorème 2.21 *Soit (U_n) une suite bornée de X . Il existe alors un élément $u \in X$ et une sous-suite de (U_n) encore notée (U_n) telles que $U_n \longrightarrow u$.*

Un élément $u \in X$ qui est la limite faible d'une sous suite de la suite (U_n) s'appelle point faiblement adhérent de la suite (U_n) .

On prouve que :

Théorème 2.22 *Si la suite $(U_n) \subset H$ possède un unique point faiblement adhérent $u \in H$, alors $U_n \longrightarrow u$.*

Autrement dit, le théorème précédent affirme que si toutes les sous-suites faiblement convergentes d'une suite (U_n) on la même limite faible u , alors la suite (U_n) converge faiblement vers u .

2.6.2 Fonctions convexes et semi-continuité inférieure

On considère une fonction φ définie sur un espace vectoriel réel X et à valeur dans $]-\infty, +\infty]$. Une telle fonction est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$, c'est à dire s'il existe $u_0 \in X$ tel que $\varphi(u_0) < +\infty$. La fonction φ est dite convexe si

$$\varphi(tu + (1 - t)v) \leq t\varphi(u) + (1 - t)\varphi(v) \quad \forall u, v \in X, t \in [0, 1]$$

La fonction φ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u, v \in X$ tel que $u \neq v$.

Pour toute fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$, on définit le domaine et l'épigraphe de φ respectivement par :

$$\text{dom}\varphi = \{u \in X / \varphi(u) < +\infty\} \quad (2.19)$$

$$\text{epi}\varphi = \{(u, \alpha) \in X \times \mathbb{R} / \varphi(u) \leq \alpha\} \quad (2.20)$$

Il est clair qu'on peut établir les résultats suivants :

- 1) φ est propre si et seulement si $\text{dom}\varphi \neq \emptyset$.
- 2) Le domaine de φ est un ensemble convexe de X si φ est convexe.
- 3) φ est convexe si et seulement si $\text{epi}\varphi$ est un ensemble convexe de $X \times \mathbb{R}$.

Nous supposons maintenant l'espace vectoriel X muni d'une topologie (en général X sera un espace vectoriel normé ou encore plus particulièrement un espace de Hilbert). Une fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) si

$$\liminf_n \varphi(U_n) \geq \varphi(u)$$

pour tout $u \in X$ et $U_n \longrightarrow u$ dans X . La propriété de semi-continuité inférieurement peut être caractérisée par :

Lemme 2.23 *Soit $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$, alors Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) φ est semi-continue inférieurement.
- 2) L'épigraphe de φ est fermée dans $X \times \mathbb{R}$.

Puisque dans un espace vectoriel normé tout ensemble convexe est simultanément fermé pour la topologie forte et la topologie faible, le lemme précédent conduit au résultat suivant :

Théorème 2.24 *Soit X un espace de Hilbert et $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et propre. Alors φ est semi-continue inférieurement si et seulement si φ est semi-continue inférieurement par rapport à la topologie faible de X .*

Soit maintenant $K \subset X$. On appelle fonction indicatrice de K , la fonction $\psi_K : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ définie par :

$$\psi_K = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K \\ 1 & \text{si } u \notin K \end{cases} \quad (2.21)$$

En utilisant cette définition, on peut facilement prouver le résultat suivant :

Lemme 2.25 *K est un ensemble convexe, fermé et non vide de X si et seulement si la fonction indicatrice ψ_K est convexe, s.c.i et propre.*

2.6.3 Différentiabilité et sous différentiabilité

Soit X un espace Hilbert réel muni du produit scalaire $(., .)_X$ et de la norme associée $\| . \|_X$. On note à présent par 2^X l'ensemble de toutes les parties de X . Une fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite Gâteaux-différentiable au point $u \in X$ s'il existe un élément $\nabla\varphi(u) \in X$ tel que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} (\nabla\varphi(u), v)_X \quad \forall v \in X$$

L'élément $\nabla\varphi(u)$ s'appelle la différentielle au sens de Gâteaux de φ en u . La fonction φ est dite Gâteaux-différentiable si elle est Gâteaux-différentiable en tout point de X ; dans ce cas l'opérateur $u \longrightarrow \nabla\varphi(u)$ de X dans X s'appelle le gradient de φ .

La convexité des fonctions Gâteaux-différentiable peut être caractérisée comme suit :

Lemme 2.26 *Soit $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux-différentiable. Alors φ est une fonction convexe si et seulement si*

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (\nabla\varphi(u), v - u)_X \quad \forall u, v \in X \quad (2.22)$$

L'inégalité (2.22) suggère une généralisation de la notion de gradient aux fonctions convexes. On dit que la fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est sous différentiable en un point $u \in X$ s'il existe $f \in X$ tel que :

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X \quad (2.23)$$

L'élément f est alors appelé un sous-gradient de φ en u et l'ensemble des sous-gradients de φ en u est appelé le sous-différentiel de φ en u et est noté $\partial\varphi(u)$:

$$\partial\varphi(u) = \{f \in X / \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X\} \quad (2.24)$$

On note par $\text{dom}(\partial\varphi)$ l'ensemble défini par :

$$\text{dom}(\partial\varphi) = \{u \in X / \partial\varphi(u) \neq \emptyset\} \quad (2.25)$$

En utilisant (2.25) et (2.24) et (2.19), il résulte

$$\text{dom}(\partial\varphi) \subset \text{dom}\varphi \quad (2.26)$$

L'opérateur multivoque $u \longrightarrow \partial\varphi(u) : X \longrightarrow 2^X$ s'appelle le sous-différentiel de φ . La fonction φ est dite sous-différentiable si elle est sous-différentiable en tout point de X , c'est à dire si $\text{dom}(\partial\varphi) = X$.

En utilisant l'inégalité (2.23), on obtient :

Lemme 2.27 *Soit $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction sous-différentiable, Alors φ est convexe, propre et semi-continue inférieurement.*

Lemme 2.28 *Soit $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et Gâteaux différentiable. Alors φ est sous-différentiable et $\partial\varphi(u) = \{\nabla\varphi(u)\}$ pour tout $u \in X$.*

Remarque 2.29 *Explicitons le sous- différentiel de la fonction indicatrice d'un ensemble $K \subset \mathbb{R}^N$; en utilisant (2.26), (2.19) et (2.21), il résulte $\text{dom}(\partial\psi_K) \subset K$ et d'après (2.24) il vient*

$$f \in \partial\psi_K \Leftrightarrow u \in K \text{ et } f.(v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K \quad (2.27)$$

En utilisant cette relation, il résulte que si u se trouve à l'intérieur de K , alors $\partial\psi_K(u) = \{0_{\mathbb{R}^N}\}$

2.6.4 Inclusions différentielles

Soit X un espace Hilbert et $A : D(A) \subset X \longrightarrow 2^X$ un opérateur multivoque, où $D(A)$ est le domaine de A défini par

$$D(A) = \{x \in X : Ax \neq \emptyset\} \quad (2.28)$$

Le graphe de A dénoté par $Gr(A)$ est défini par

$$Gr(A) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in Ax\}$$

Définition 2.30 *L'opérateur $A : X \longrightarrow 2^X$ est dit*

(i) monotone si

$$\forall (x_1, y_1) \in Gr(A), \forall (x_2, y_2) \in Gr(A) : (y_1 - y_2, x_1 - x_2)_X \geq 0$$

(ii) maximal monotone si A est monotone et n'existe aucun opérateur monotone $B : X \longrightarrow 2^X$ tel que $Gr(A)$ est un ensemble propre de $Gr(B)$, ce qui est équivalent à l'implication

$$[(y_1 - y_2, x_1 - x_2)_X \geq 0, \forall (x_1, y_1) \in Gr(A)] \implies (x_2, y_2) \in Gr(A)$$

Proposition 2.31 . *Le sous-différentiel $\partial\psi_K : X \longrightarrow 2^X$ de la fonction indicatrice d'un ensemble convexe fermé K de l'espace X est un opérateur maximal monotone.*

Proposition 2.32 *La somme d'un opérateur maximal monotone et un opérateur monotone et de Lipschitz est un opérateur maximal monotone.*

Théorème 2.33 *Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow 2^X$ un opérateur multivoque tel que $A + \omega I_X$ est un opérateur maximal monotone pour certains réels ω . Alors, pour toute $f \in W^{1,1}(0, T, X)$ et $u_0 \in D(A)$, il existe une unique fonction $u \in W^{1,1}(0, T, X)$, vérifiant*

$$\dot{u}(t) + Au(t) \ni f(t) \text{ p.p. } t \in (0, T) \quad (2.29)$$

$$u(0) = u_0 \quad (2.30)$$

Pour la démonstration de ce théorème voir [[35]], page 32.

2.6.5 Opérateurs non-linéaires et formes bilinéaires dans un espace de Hilbert

Nous donnons dans ce paragraphe quelques définitions et propriétés sur les opérateurs non linéaire et les formes bilinéaires dans un espaces de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\| \cdot \|_X$.

Définition 2.34 *Soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur non-linéaire. L'opérateur A est dit*

1) *monotone si*

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X \quad (2.31)$$

2) *fortement monotone si*

$$\begin{aligned} &\text{il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ &(Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X \end{aligned} \quad (2.32)$$

3) *de Lipschitz si*

$$\begin{aligned} &\text{il existe } M > 0 \text{ tel que} \\ &\|Au - Av\|_X \leq M \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X \end{aligned} \quad (2.33)$$

Théorème 2.35 Soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et $K \subset X$ un ensemble convexe, fermé non vide. Alors pour tout $f \in X$ il existe un unique élément u tel que

$$u \in K, (Au, v - u)_X \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K \quad (2.34)$$

L'inéquation précédente s'appelle inéquation variationnelle de première espèce sur X .

Si on prend $K = X$ dans le théorème précédent on obtient le résultat suivant

Corollaire 2.36 Soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors pour tout $f \in X$ il existe un unique élément $u \in X$ tel que $Au = f$.

Le corollaire précédent représente un cas particulier du Théorème de Minty-Browder (voir par exemple [[17]] p.88). Ce théorème nous prouve que tout opérateur $A : X \longrightarrow X$ fortement monotone et de Lipschitz est inversible.

Lemme 2.37 Soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors son inverse A^{-1} est également fortement monotone et de Lipschitz.

Lemme 2.38 Soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur fortement monotone et $B : X \longrightarrow X$ un opérateur monotone. Alors, $A + B$ est fortement monotone.

Maintenant, soit $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.

Définition 2.39 La forme bilinéaire a est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X \quad (2.35)$$

Définition 2.40 La forme bilinéaire a est X -elliptique s'il existe un réel $m > 0$ tel que

$$|a(u, u)| \geq m \|u\|_X^2 \quad \forall u \in X \quad (2.36)$$

2.7 Inéquations variationnelles elliptiques et d'évolution

Soit X un espace Hilbert réel muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\| \cdot \|_X$, $A : X \longrightarrow X$ un opérateur non linéaire, $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire et $f \in X$. La modélisation de plusieurs classes de problèmes physiques conduit à un problème mathématique de la forme suivante

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u \text{ telque} \\ &u \in X, (Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X \end{aligned} \tag{2.37}$$

où $j : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, ou à un problème de la forme

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u \text{ telque} \\ &u \in X, (Au, v - u)_X + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X \end{aligned} \tag{2.38}$$

où $j : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Les problèmes (2.37) et (2.38) sont appelés inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce et inéquation quasi-variationnelle de type elliptique sur X , respectivement. Dans le problème (2.38) la fonctionnelle j dépend de la solution elle même. Nous donnons par la suite un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (2.37).

Théorème 2.41 *Soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et $j : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonctionnelle propre, convexe et semi-continue inférieurement. Alors le problème (2.5.1) admet une solution unique.*

Notons que ce résultat sera utilisé dans le deuxième chapitre de la troisième partie de cette thèse. Les démonstration des théorèmes (2.35) et (2.37) peuvent être trouvées dans [[32], [33]]

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u : [0, T] \longrightarrow X \text{ telque} \\ &a(u(t), v - \dot{u}(t)) + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq f(t), v - \dot{u}(t))_X \end{aligned}$$

$$\forall v \in X, p.p.t \in (0, T) \quad (2.39)$$

$$u(0) = u_0 \quad (2.40)$$

où $j : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $f : [0, T] \longrightarrow X$. La différence entre le problème (2.38) et le problème (2.39) – (2.40) consiste dans le fait que le dernier problème est évolutif. En effet, f et u dépendent maintenant du temps, la dérivée $\dot{u}$ apparaît dans la formulation du problème et par conséquent, une condition initiale, (2.40), est rajoutée.

Hémicontinu si

$$\forall u, v \in H, \text{ l'application } t \longrightarrow A(u + tv) : \mathbb{R} \longrightarrow H' \text{ est continu}$$

Pour étudier le problème (2.39) – (2.40), nous introduisons les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est une forme bilinéaire symétrique et} \\ (a) \text{ il existe } M > 0 \text{ telle que} \\ |a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X \\ (b) \text{ il existe } m > 0 \text{ telle que} \\ a(v, v) \geq m \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X \end{array} \right. \quad (2.41)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } \zeta \in X, j(\zeta, \cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonctionnelle positive} \\ \text{homogène et sous-additive, c'est-à-dire} \\ (a) \quad j(\zeta, \lambda u) = \lambda j(\zeta, u) \quad \forall u \in X, \lambda \in \mathbb{R}_+ \\ (b) \quad j(\zeta, u + v) \leq j(\zeta, u) + j(\zeta, v) \quad \forall u, v \in X \end{array} \right. \quad (2.42)$$

$$f \in W^{1,\infty}(0, T, X) \quad (2.43)$$

$$u_0 \in X \quad (2.44)$$

$$a(u_0, v) + j(u_0, v) \geq (f(0), v)_X \quad \forall v \in X \quad (2.45)$$

Gardant à l'esprit (2.42), il en résulte que pour tout $\zeta \in X$, La fonctionnelle $j(\zeta, \cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe. Par conséquent, cette fonctionnelle

possède une dérivée directionnelle j'_2 donnée par :

$$j'_2(\zeta, u, v) = \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{1}{\lambda} [j(\zeta, u + \lambda v) - j(\zeta, u)] \quad \forall \zeta, u, v \in X \quad (2.46)$$

Nous considérons aussi les hypothèses supplémentaires suivantes sur la fonctionnelle j .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } (U_n) \subset X \text{ avec } \|U_n\|_X \longrightarrow \infty \\ \text{toute suite } (t_n) \subset [0, 1] \text{ et pour tout } \bar{u} \in X \text{ on a} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf \left[\frac{1}{\|U_n\|_X^2} j'_2(t_n U_n, U_n - \bar{u}, -U_n) \right] < m \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } (U_n) \subset X \text{ avec } \|U_n\|_X \longrightarrow \infty \\ \text{toute suite bornée } (\zeta_n) \subset X \text{ et tout } \bar{u} \in X \text{ on a} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf \left[\frac{1}{\|U_n\|_X^2} j'_2(\zeta_n, U_n - \bar{u}, -U_n) \right] \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } (U_n) \subset X \text{ et } \zeta_n \subset X \text{ avec } \|U_n\|_X \longrightarrow \infty \\ U_n \longrightarrow u \in X, \zeta_n \longrightarrow \zeta \in X \text{ et pour tout } v \in X, \text{ on a} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup [j(\zeta_n, v) - j(\zeta_n, U_n)] \leq j(\zeta, v) - j(\zeta, u) \end{array} \right. \quad (2.47)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } k_0 \in (0, m) \text{ telle que} \\ j(u, v - u) - j(v, v - u) \leq k_0 \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X \end{array} \right. \quad (2.48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe deux fonctions } a_1 : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ et } a_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \text{qui mènent des sous-ensembles bornés de } X \text{ dans} \\ \text{des sous-ensembles bornés de } \mathbb{R} \text{ tels que} \\ |j(\zeta, u)| \leq a_1(\zeta) \|u\|_X^2 + a_2(\zeta), \quad \forall \zeta, u \in X \\ \text{et } a_1(0_X) < m - k_0 \end{array} \right. \quad (2.49)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } \zeta_n \subset X \text{ avec } \zeta_n \longrightarrow \zeta \in X \\ \text{et pour toute suite bornée } (U_n) \subset X, \text{ on a} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} [j(\zeta_n, U_n) - j(\zeta, U_n)] = 0 \end{array} \right. \quad (2.50)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } s \in (0, T] \text{ et pour toute fonction} \\ u, v \in W^{1,\infty}(0, T, X) \text{ avec } u(0) = v(0), u(s) \neq v(s) \\ \text{l'inégalité ci-dessous vérifiée} \\ \int_0^s \left[j(u(t), \dot{v}(t)) - j(u(t), \dot{u}(t)) + j(v(t), \dot{u}(t)) - j(v(t), \dot{v}(t)) \right] dt \\ < \frac{m}{2} \| u(s) - v(s) \|_X^2 \end{array} \right. \quad (2.51)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } \alpha \in (0, \frac{m}{2}) \text{ telle que pour tout } s \in (0, T] \text{ et toute} \\ \text{fonctions } u, v \in W^{1,\infty}(0, T, X) \text{ avec } u(s) \neq v(s), \text{ on a} \\ \int_0^s \left[j(u(t), \dot{v}(t)) - j(u(t), \dot{u}(t)) + j(v(t), \dot{u}(t)) - j(v(t), \dot{v}(t)) \right] dt \\ < \alpha \| u(s) - v(s) \|_X^2 \end{array} \right. \quad (2.52)$$

Pour l'étude du problème de l'évolution (2.39) – (2.40), nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.42 *Supposons que les conditions (2.41) – (2.45) sont vérifiées.*

Alors

(i) *Sous les hypothèses (??) – (2.50), le problème (2.39) – (2.40) possède au moins une solution $u, \in W^{1,\infty}(0, T, X)$.*

(ii) *Sous les hypothèses (??) – (2.51), le problème (2.39) – (2.40) possède une solution unique $u, v \in W^{1,\infty}(0, T, X)$.*

(iii) *Sous les hypothèses (??) – (2.50) et (2.52), le problème (2.39) – (2.40) possède une solution unique u telle que $(f, u_0) \rightarrow \mathbb{R}$.lipschitzienne de $W^{1,\infty}(0, T, X) \times X$ à valeurs dans $L^\infty(0, T, X)$.*

Corollaire 2.43 *Soit $j : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une semi-norme continue. Nous supposons que les hypothèses (2.41), (2.43) et (2.44) sont vérifiées et que u_0 satisfait la condition*

$$a(u_0, v) + j(v) \geq (f(0, v))_X \quad \forall v \in X \quad (2.53)$$

Alors, il existe une fonction unique $u \in W^{1,\infty}(0, T, X)$ telle que

$$\begin{aligned} a(u(t), v - \dot{u}(t))_{\mathcal{H}}(t) + j(v) - j(\dot{u}(t)) &\geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \\ \forall v \in V, p.p.t \in (0, T) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{2.54}$$

En outre, l'application $(f, u_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne de $W^{1,\infty}(0, T, X) \times X$ à valeurs dans $L^\infty(0, T, X)$.

La démonstration du théorème (2.38) et du corollaire (2.39) qui peut être trouver dans [[36]] est obtenue en plusieurs étapes et il est basé sur des arguments des inégalités quasivariational elliptiques et une méthode de discrétisation en temps.

2.8 Compléments divers

Dans cette section, nous allons rappeler une version du théorème de Cauchy-Lipschitz, le théorème de point fixe et les lemmes de type Gronwal.

Théorème 2.44 Soit $(X, \| \cdot \|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \longrightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $(0, T)$, qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \| F(t, x) - F(t, y) \|_X \leq L_F \| x - y \|_X \quad \forall x, y \in X, p.p.t \in (0, T) \end{array} \right.$$

il existe $1 \leq p \leq \infty$ tel que $F(t, x) \in L^p(0, T, X) \forall x \in X$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0, T, X)$ telle que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(t, x(t)) \text{ p.p.t} \in (0, T) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

Pour des détails sur ce théorème on peut renvoyer le lecteur par exemple à [[37]] p.60.

Théorème 2.45 (*Théorème de point fixe de Banach*) Soit K un sous ensemble fermé et non-vidé de l'espace de Banach $(X, \| \cdot \|_X)$. Supposons que $\Lambda : K \longrightarrow K$ est une contraction, c'est à dire il existe $c \in (0, 1]$ telle que

$$\| \Lambda u - \Lambda v \|_X \leq c \| u - v \|_X \quad \forall u, v \in K$$

Alors, il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda u = u$.

Pour l'opérateur $\Lambda^m : K \longrightarrow K$ défini par la relation

$$\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1}) \quad m \geq 2$$

nous avons la version suivante du théorème de point fixe

Théorème 2.46 Soit K un sous-ensemble fermé et non-vidé de l'espace de Banach $(X, \| \cdot \|_X)$ et soit $\Lambda : K \longrightarrow K$. Supposons que $\Lambda^m : K \longrightarrow K$ est une contraction pour m un entier positif. Alors, Λ a un point fixe unique dans K .

Nous rappelons que

$$\| \Lambda \eta_1 - \Lambda \eta_2 \|_{V'}^2 \leq \int_s^t \| \dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s) \|_V^2 ds \quad (2.55)$$

A la fin, nous passons en revue les lemmes de Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans ce paragraphe, le lecteur pourra consulter par exemple [[38], [34]]. Notons par ailleurs que dans certains paragraphes de ce mémoire, nous allons utiliser des versions "presque partout" de ces lemmes.

Lemme 2.47 Soient $m, n \in C([0, T], \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante, et $\psi \in C([0, T], \mathbb{R})$.

(1) Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$$

alors

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T]$$

(2) Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$$

alors

$$\int_0^t \psi(s)ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s)ds$$

Dans le cas particulier $m = 0$, la partie (1) de ce lemme devient :

Corollaire 2.48 Soit $n \in C([0, T], \mathbb{R})$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\psi \in C([0, T], \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$$

alors

$$\psi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T]$$

Le Corollaire précédent est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. En supposant qu'il existe deux solutions, en notant par ψ la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer ψ sous la forme

$$\psi(t) \leq \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$$

avec une certaine fonction $n \geq 0$. L'application du corollaire donne immédiatement la nullité de ψ .

Lemme 2.49 Soient $m, n \in C([0, T], \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0, n(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]$ et $a \geq 0$. Soit également $\phi : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\phi(t)dt + \int_0^s n(t)\phi^2(t)dt \quad \forall s \in [0, T]$$

alors

$$|\phi(s)| \leq a + \int_0^s m(t)dt e^{\int_0^s n(t)dt} \quad \forall s \in [0, T]$$

Dans le cas particulier $n = 0$, le Lemme précédent devient :

Corollaire 2.50 Soit $m \in C([0, T], \mathbb{R})$ tel que $m(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Soit également $\phi : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\phi(t)dt \quad \forall s \in [0, T]$$

alors

$$|\phi(s)| \leq a + \int_0^s m(t)dt \quad \forall s \in [0, T]$$

Chapitre 3

Problème de contact avec réponse normale instantanée et compliance normale

Problème de contact avec réponse normale instantanée compliance normale

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère un problème de contact entre un corps viscoélastique et une base déformable dans un processus dynamique. Le contact est modélisé par une réponse normale instantanée, la loi de comportement est viscoélastique avec mémoire longue. On présente la formulation mécanique et variationnelle du problème et on établit l'existence et l'unicité de la solution. La démonstration est basée sur la théorie des équations variationnelles et du théorème de point fixe. Un résultat de dépendance continue de la solution par rapport aux données a été considéré voir [[39]].

3.2 Formulation mécanique du problème

Problème P_1 . Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, le champ du tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$ tels que :

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) + \int_0^t B(t-s)\varepsilon(u(s))ds \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.1)$$

$$\rho \ddot{u} = \operatorname{div} \sigma + f_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \quad (3.3)$$

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \quad (3.4)$$

$$-\sigma_\nu = p(\dot{u}_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (3.5)$$

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (3.6)$$

$$u(0) = u_0 \quad \dot{u} = v_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.7)$$

Ici, la relation (3.1) représente la loi de comportement d'un matériau visco-élastique avec mémoire longue, la relation (3.2) représente l'équation d'équilibre et les relations (3.3) – (3.4) sont les conditions de déplacement-traction. Les relations (3.5) – (3.6) représentent les conditions de contact avec réponse normale instantanée et (3.7) représente les conditions initiales du champ de déplacement u_0 et du champ de vitesse v_0 .

Les hypothèses portant sur les diverses fonctions intervenant dans le problème mécanique seront données ci-après puis quelques notations seront introduites avant d'énoncer la formulation variationnelle d'un tel problème mécanique. On considère l'espace des déplacements admissibles suivant

$$V = \{ v \in H_1(\Omega^d) / v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \}$$

Puisque $mes(\Gamma_1) > 0$ l'inégalité de Korn est satisfaite, il existe $C_k > 0$ qui dépend de Ω et de Γ_1 el que

$$| \varepsilon(v) |_{\mathcal{H}} \geq C_k | v |_{H_1} \quad \forall v \in V \quad (3.8)$$

Sur l'espace V , on considère le produit scalaire défini par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V \quad (3.9)$$

On note par $| \cdot |_V$ la norme associée,

$$| v |_V = | \varepsilon(v) |_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V \quad (3.10)$$

Il vient de l'inégalité de Korn que $| \cdot |_{H^1(\Omega)^d}$ et $| \cdot |_V$ sont des normes équivalentes sur V Par conséquent $(V, | \cdot |_V)$ est un espace de Hilbert réel. En se référant de plus à l'inégalité de Korn et au théorème de trace de Sobolev, il existe une constante C_0 strictement positive ne dépendant que du domaine Ω et des parties Γ_1 et Γ_3 telle que

$$| v |_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 | v |_V \quad \forall v \in V \quad (3.11)$$

Pour l'étude du problème mécanique (3.1)–(3.7), on considère les hypothèses suivantes.

L'opérateur de viscosité $A : \Omega \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_A > 0 \text{ tel que} \\ |A(x, \varepsilon_1) - A(x, \varepsilon_2)| \leq L_A |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega \\ (b) \text{ Il existe } m_A > 0 \text{ tel que} \\ (A(x, \varepsilon_1) - A(x, \varepsilon_2))(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \leq m_A |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega \\ (c) \text{ } x \longrightarrow A(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \\ (d) \text{ L'application } x \longrightarrow A(x, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H} \end{array} \right. \quad (3.12)$$

L'opérateur d'élasticité $G : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_G > 0 \text{ tel que} \\ |G(x, \varepsilon_1, \alpha_1) - G(x, \varepsilon_2, \alpha_2)| \leq L_G (|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\alpha_1 - \alpha_2|) \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \\ \forall \alpha_1, \alpha_2, \text{ p.p. } x \in \Omega \\ (b) \text{ Pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ } x \longrightarrow G(x, \varepsilon, \alpha) \\ \text{est Lebesgue mesurable sur } \Omega \\ (c) \text{ L'application } x \longrightarrow G(x, 0, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

La fonction de contact $P : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_p \text{ tel que} \\ |p(x, r_1) - p(x, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3 \\ (b) (p(x, r_1) - p(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3 \\ (c) \text{ L'application } x \longrightarrow p(x, r) \text{ est mesurable } \forall r \in \mathbb{R} \\ (d) p(x, r) = 0 \quad \forall r < 0 \text{ p.p. } x \in \Gamma_3 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

L'opérateur B de relaxation satisfait

$$B \in C(0, T, \mathcal{H}_\infty) \quad (3.15)$$

où $\mathcal{H}_\infty$ est l'espace du champ tensorielle de quatrième ordre donné par

$$\mathcal{H}_\infty = \langle E = E_{ijkl} / E_{ijkl} = E_{klij} \in L^\infty(\Omega), 1 \leq k, l, i, j \leq d \rangle \quad (3.16)$$

qui est espace de Banach réel avec la norme

$$\| E \|_{\mathcal{H}_\infty} = \max_{1 \leq k, l, i, j \leq d} \| E \|_{L^\infty(\Omega)} \quad (3.17)$$

Aussi nous supposons que la densité de masse satisfait

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \text{ il existe } \rho^* \text{ telle que } \rho(x) \geq \rho^* \text{ et } x \in \Omega \quad (3.18)$$

La force volumique et la traction surfacique sont supposées satisfaire

$$f_0 \in C(0, T, H), \quad f_2 \in C(0, T, L^2(\Omega)^d) \quad (3.19)$$

et les données initiales satisfont aux conditions suivantes

$$u_0 \in V, \quad v_0 \in L^2(\Omega)^d \quad (3.20)$$

Nous passons maintenant à la formulation variationnelle du problème P_1 . Nous utilisons un produit modifié intérieure sur $H = L^2(\Omega)^d$ donné par

$$(u, v)_H = (\rho u, v)_H \quad \forall u, v \in H \quad (3.21)$$

et la norme associée

$$\| v \|_H = (\rho v, v)_H^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in H \quad (3.22)$$

Il résulte des hypothèses (3.21) – (3.22) que $\| \cdot \|_H$ et $| \cdot |_H$ sont des normes équivalentes sur H et l'inclusion $(V, | \cdot |_V)$ dans $(V, \| \cdot \|_H)$ est dense et continu. On note par V' le dual de V . De l'identification de H avec son propre dual, on peut écrire le triplet de Gelfand $V \subset H \subset V'$. Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$ pour représenter la dualité entre V' et V , nous avons

$$(u, v)_{V' \times V} = (u, v)_H \quad \forall u \in H, \forall v \in V \quad (3.23)$$

Ensuite, on note par $f : [0, T] \longrightarrow V$ la fonction définie par

$$(f(t), v)_{V' \times V} = \int_{\Omega} f_0(t).v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t).v \, da \quad \forall v \in V, \, t \in [0, T] \quad (3.24)$$

puis, la fonctionnelle $j : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} p(u_\nu) \, v_\nu \, da \quad \forall u, v \in V \quad (3.25)$$

On note que la condition (3.24) implique

$$f \in L^2(0, T, V') \quad (3.26)$$

3.3 Formulation variationnelle du problème

En utilisant des arguments standards basés sur la formule de Green, on obtient la formulation variationnelle du problème (3.1) – (3.7).

Problème P_1V : Trouver le champ de déplacement $u : [0, T] \longrightarrow V$ et le champ du tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathcal{H}$ tels que :

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t B(t-s)\varepsilon(u(s)) \, ds \quad (3.27)$$

$$(\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \, t \in [0, T] \quad (3.28)$$

$$u(0) = u_0 \quad \dot{u} = v_0 \quad (3.29)$$

3.4 Existence et unicité de la solution

Le principal résultat dans cette section est le suivant :

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses (3.12) – (3.20), le problème P_1V admet une solution unique (u, σ) ayant la régularité suivante :*

$$u \in W^{1,2}(0, T, V) \cap C^1(0, T, H), \quad \ddot{u} \in L^2(0, T, V') \quad (3.30)$$

$$\sigma \in L^2(0, T, \mathcal{H}), \quad \text{Div} \sigma \in L^2(0, T, V') \quad (3.31)$$

Preuve : La démonstration du théorème 3.1.1 se fait en plusieurs étapes. Nous supposons que les hypothèses du théorème 3.1.1 sont vérifiées et que C est une constante positive qui dépend de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \mathcal{A}, \mathcal{G}, B, p$ et T dont la valeur change d'un endroit à un autre. Soit $\eta \in L^2(0, T, V')$ Dans la première étape, on considère le problème variationnel suivant.

Problème P_1V_η : Trouver le champ de déplacement $u_\eta : [0, T] \longrightarrow V$ tel que

$$(\ddot{u}_\eta(t), v)_{V' \times V} + \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\eta(t), v)_{V' \times V} + j(\dot{u}(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in [0, T] \quad (3.32)$$

$$u_\eta(0) = u_0 \quad \dot{u} = v_0 \quad (3.33)$$

■

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.2 *Le problème P_1V_η admet une solution unique qui satisfait la régularité (3.30). Cependant, si u_i représente la solution du problème $P_1V_{\eta_i}$, pour $\eta = \eta_i \in L^2(0, T, V')$, $i = 1, 2$; alors il existe $C > 0$ tel que*

$$\int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V^2 ds \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.34)$$

Preuve : Nous définissons l'opérateur $A : V \longrightarrow V'$

$$A(u, v)_{V' \times V} = (A\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u, v) \quad \forall u, v \in V \quad (3.35)$$

En posant $\dot{u}_\eta = v_\eta$ le problème P_1V devient

Trouver le champ de déplacement $v : [0, T] \longrightarrow V$ tel que

$$\dot{v}_\eta(t) + Av_\eta(t) + \eta(t) = f(t) \quad (3.36)$$

$$v_\eta(0) = v_0 \quad (3.37)$$

Il resulte de (3.10), (3.11), (3.12)(a), (3.14)(a), (3.25) et (3.35) que

$$\| Au - Av \|_{V'} \leq (L_A + L_p C_0^2) \| u - v \|_V \quad \forall u, v \in V \quad (3.38)$$

ce qui implique que $A : V \longrightarrow V'$ est un opérateur de Lipschitz donc continu. D'où l'application $t \longrightarrow A(u + tv)$ est continue et alors de la définition de hémicontinu, nous concluons que A est un opérateur hémicontinu. Maintenant, de (3.35), (3.12)(c) et (3.14)(b) nous trouvons

$$(Au - Av, u - v)_{V' \times V} \geq m_A \| v_1 - v_2 \|_V^2 \quad \forall u, v \in V \quad (3.39)$$

donc que A est un opérateur monotone. Nous choisissons $v = 0_V$ dans (3.39) et en utilisant l'inégalité $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned} (Au, u)_{V' \times V} &\geq m_A \| u \|_V^2 - \| A0_V \|_{V'} \| u \|_V \\ &\geq \frac{1}{2} m_A \| u \|_V^2 - \frac{1}{2m_A} \| A0_V \|_{V'}^2 \quad \forall u \in V \end{aligned}$$

danc

$$(Au, u)_{V' \times V} \geq \lambda \| u \|_V^2 + \alpha \quad \forall u \in V, \quad \text{avec } \lambda = \frac{1}{2} m_A \text{ et } \alpha = -\frac{1}{2m_A} \| A0_V \|_{V'}^2$$

Alors la condition de Lipchitz est vérifiée. Ensuite, en choisissant $v = 0_V$ dans (3.38) nous trouvons

$$\| Au \|_{V'} \leq c(\| u \|_V + 1) \quad \forall u \in V$$

Alors la condition de (1.1) est satisfaite. Enfin, nous rappelons que par (3.20) et (3.26) nous avons $f - \eta \in L^2(0, T, V')$ et $v_0 \in H$. Il résulte alors du théorème I.2.1 qu'il existe une fonction unique v_η qui satisfait

$$v_\eta \in u \in L^2(0, T, V') \cap C(0, T, H), \quad \dot{v}_\eta \in L^2(0, T, V')$$

$$\dot{v}_\eta(t) + Av_\eta(t) + \eta(t) = f(t) \quad p.p. t \in [0, T] \quad (3.40)$$

$$v_\eta(0) = v_0 \quad (3.41)$$

Soit $u_\eta : [0, T] \longrightarrow V$ la fonction définie par

$$u_\eta(t) = \int_0^t ds + u_0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.42)$$

Il vient de (3.35) et (??) – (3.42) que u est une solution du problème variationnel PV et satisfait la régularité (3.30). Ce qui conclut la partie existence du lemme 3.1.1 :

L'unicité de la solution vient de l'unicité de la solution du problème (??) – (3.42), garantie par le théorème de Lipchitz. Considérons maintenant $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0, T, V')$ et notons, $u_i = u_{\eta_i}$, $v_i = v_{\eta_i}$, $\dot{u}_{\eta_i}$ pour $i = 1, 2$. De (3.32) nous obtenons que

$$(\dot{v}_1 - \dot{v}_2, v_1 - v_2)_{V' \times V} + (A\varepsilon(v_1) - A\varepsilon(v_2), \varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2))_{\mathcal{H}} = -(\eta_1 - \eta_2, v_1 - v_2)_{V' \times V}$$

Par integration par rapport à t de l'égalité ci-dessus et par utilisation des conditions initiales $v_1(0) = v_2(0) = v_0$ et les propriétés de l'opérateur A on trouve que

$$m_A \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq -\int_0^t (\eta_1(s) - \eta_2(s), v_1(s) - v_2(s))_{V' \times V} ds$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité $(\alpha\beta \leq \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2})$, on déduit que

$$\int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \leq C \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 ds$$

d'où (3.1.34) : Maintenant pour $\eta \in L^2(0, T, V')$ on considère l'opérateur $\Lambda : L^2(0, T, V') \longrightarrow L^2(0, T, V')$ défini par

$$(\Lambda\eta(t), v)_{V' \times V} = (\mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t), \varepsilon(v)))_{\mathcal{H}} + (\int_0^t B(t-s)\varepsilon(u_\eta(s)) ds, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u \in V, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.43)$$

■

Lemme 3.3 *Pour $\eta \in L^2(0, T, V')$, l'opérateur est continu et il existe un élément unique $\eta^* \in L^2(0, T, V')$ tels que $\Lambda\eta^* = \eta^*$*

Preuve : Soit $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0, T, V')$ et $t \in [0, T]$. On note $u_i = u_{\eta_i}$ pour $i = 1, 2$: En utilisant (3.43), (3.11), (3.15)(a), (3.16), (3.17) on trouve que

$$\| \Lambda \eta_1(t) - \Lambda \eta_2(t) \|_{V'} \leq C(\| u_1(t) - u_2(t) \|_V + \int_0^t \| u_1(s) - u_2(s) \|_V ds) \quad (3.44)$$

D'autre part de $u_1(0) = u_2(0) = u_0$ nous avons

$$\| u_1(t) - u_2(t) \|_V \leq \int_0^t \| \dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s) \|_V ds \quad (3.45)$$

Par suite, utilisant (3.44) pour déduire que

$$\| u_1(t) - u_2(t) \|_V + \int_0^t \| u_1(s) - u_2(s) \|_V ds \leq C \int_0^t \| \dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s) \|_V ds \quad (3.46)$$

Il résulte de (3.46) que

$$\| \Lambda \eta_1(t) - \Lambda \eta_2(t) \|_{V'} \leq C \int_0^t \| \dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s) \|_V ds$$

ce qui implique que

$$\| \Lambda \eta_1(t) - \Lambda \eta_2(t) \|_{V'}^2 \leq C \int_0^t \| \dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s) \|_V ds \quad (3.47)$$

Maintenant de (3.34) et (3.47), il vient que

$$\| \Lambda \eta_1(t) - \Lambda \eta_2(t) \|_{V'}^2 \leq C \int_0^t \| \eta_1(s) - \eta_2(s) \|_{V'}^2 ds \quad \forall t \in [0, T]$$

En réitérant cette inégalité m fois on obtient

$$\| \Lambda^m \eta_1 - \Lambda^m \eta_2 \|_{L^2(0, T, V')}^2 \leq \frac{C^m T^m}{m!} \| \eta_1 - \eta_2 \|_{L^2(0, T, V')}^2$$

Ainsi, pour m sufisant grand, Λ^m est une contraction sur l'espace de Banach $L^2(0, T, V')$, et donc Λ^m a un point fixe unique. Par conséquent, Λ admet un point fixe unique η^* tel que $\Lambda \eta^* = \eta^*$. ■

Maintenant nous avons tous les ingrédients pour démontrer le théorème 3.1.1 :

Preuve : Soit η^* le point fixe de défini par (3.43) et notons

$$u^* = u_{\eta^*} \quad (3.48)$$

et

$$\sigma^* = \sigma_{\eta^*} = \mathcal{A}\varepsilon(u^*) + \mathcal{G}\varepsilon(u^*) + \int_0^t B(t-s)\varepsilon(u^*(s)) \, ds \quad (3.49)$$

Puisque

$$(\eta^*(t), v)_{V' \times V} = (\mathcal{G}\varepsilon(u^*, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + \int_0^t B(t-s)\varepsilon(u^*(s)) \, ds, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u^*, v))$$

on va prouver que le couple (u^*, σ^*) satisfait (3.27) – (3.29). En effet, nous écrivons (3.32) pour $\eta = \eta^*$ et on utilise (3.48) – (3.49) pour voir que (3.28) est satisfaite, (3.27) découle de (3.49) et (3.29) est une conséquence de (3.33) : La régularité de u^* vient du lemme 3.1.1 : et la régularité de $\sigma^* \in L^2(0, T, \mathcal{H})$ vient du lemme 3.1.1, (3.12), (3.13), (3.15) et la relation (3.49). Enfin (3.28) implique que

$$\rho \ddot{u}^*(t) = \text{Div} \sigma^* + f_0(t) \quad \text{sur } V' \quad p.p \quad t \in [0, T]$$

et donc par (3.18) – (3.19), nous constatons que $\text{Div} \sigma^* \in L^2(0, T, V')$. Nous en déduisons que la régularité (3.31) est vérifiée ce qui conclut la partie d'existence du théorème 3.1.1 L'unicité est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur défini par (3.43). ■

Chapitre 4

Problème de contact avec compliance normale

Problème de contact avec compliance normale

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère un problème de contact entre un corps viscoélastique et une base déformable dans un processus dynamique. Le contact est modélisé par une compliance normale, la loi de comportement est viscoélastique avec mémoire longue. On présente la formulation mécanique et variationnelle du problème ainsi qu'un résultat d'existence et d'unicité de la solution. La démonstration est basée sur la théorie des équations variationnelles et des arguments de point fixe.

4.2 Formulation mécanique du problème

Problème P_2 . Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, le champ du tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$ tels que

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) + \int_0^t B(t-s)\varepsilon(u(s))ds \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (4.1)$$

$$\rho \ddot{u} = \operatorname{div} \sigma + f_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (4.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \quad (4.3)$$

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \quad (4.4)$$

$$\sigma_\nu = p(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (4.5)$$

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0.T) \quad (4.6)$$

$$u(0) = u_0 \quad \dot{u} = v_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (4.7)$$

Ici, la relation (4.1) représente la loi de comportement d'un matériau visco-élastique avec mémoire longue, la relation (4.2) représente l'équation d'équilibre et les relations (4.3) – (4.4) sont les conditions de déplacement-traction. Les relations (4.5) – (1.9) représentent les conditions de contact avec compliance normale et (4.7) représente les conditions initiales du champ de déplacement u_0 et du champ de vitesse v_0 .

Les hypothèses portant sur les diverses fonctions intervenant dans le problème mécanique sont les mêmes données pour le problème P_1 .

4.3 Formulation variationnelle du problème

En utilisant des arguments standards basés sur la formule de Green, on obtient la formulation variationnelle du problème (3.1) – (3.7).

Problème P_1V : Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times [0, T] \longrightarrow V$ et le champ du tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathcal{H}$ tels que :

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) + \int_0^t B(t-s)\varepsilon(u(s)) \, ds \quad (4.8)$$

$$(\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V}, \quad \forall v \in V, \quad t \in [0, T] \quad (4.9)$$

$$u(0) = u_0 \quad \dot{u} = v_0 \quad (4.10)$$

4.4 Existence et unicité de la solution

Ici le principal résultat est le suivant :

Théorème 4.1 *Sous les hypothèses (4.12) – (??), le problème P_2V admet une solution unique (u, σ) ayant la régularité (??) – (??). Les fonctions nous conciuons par des théorèmes (4.1) et (4.2) que sous les hypotheses (3.9) – (3.17), la dynamique des problèmes de contact P_2 a une solution unique faible avec une régularité (3.28) – (3.29).*

La démonstration du théorème 3.2.1 est similaire à celle du théorème 3.1.1 et est réalisée en plusieurs étapes. Des modification sont simples sont à apporter et nous omettons

les détails.

Démonstration. Les étapes sont les suivantes :

(i) Pour chaque $\eta \in L^2(0, T, V')$ nous montrons qu'il existe une fonction unique u ayant la régularité (3.1.30) de telle sorte que

$$\begin{aligned} (\ddot{u}_\eta(t), v)_{V' \times V} + (\mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v)))_{\mathcal{H}} + j(u_\eta(t), v) + (\eta(t), v)_{V' \times V} = (f(t), v)_{V' \times V} \\ \forall v \in V \text{ p.p. } t \in [0, T] \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$u_\eta(0) = u_0 \quad \dot{u} = v_0 \tag{4.12}$$

Nous définissons l'opérateur $A : V \longrightarrow V'$ par

$$(Au, v)_{V' \times V} = (\mathcal{A}(\varepsilon(u), \varepsilon(v)))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V \tag{4.13}$$

Nous prouvons que A satisfait les condition (2.33) et (3.10) et nous procédons comme dans la démonstration du lemme 3.1.1. Par ailleurs, nous avons recours à des estimations semblables à celles dans la preuve du lemme 3.1.1. Pour voir que, si u_i représente la solution du problème (4.11) – (4.12) pour $\eta_i \in L^2(0, T, V')$, $i = 1, 2$, il existe $C > 0$ telle que (3.34) est satisfaite.

(ii) Nous introduisons maintenant l'opérateur $\Lambda : L^2(0, T, V') \longrightarrow L^2(0, T, V')$ défini par

$$(\Lambda\eta(t), v)_{V' \times V} = (\mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t), \varepsilon(v)))_{\mathcal{H}} + \int_0^t B(t-s)(\varepsilon(u_\eta(s)))_{\mathcal{H}} ds, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u_\eta(t), v), \forall v \in V, t \in [0, T] \quad (4.14)$$

Ici, pour chaque $\eta \in L^2(0, T, V')$, u_η représente le champ de déplacement obtenu étape (i). Nous utilisons des estimations semblables à ceux utilisés dans le lemme 3.2) pour prouver que l'opérateur Λ satisfait (3.47). Il s'ensuit maintenant de (3.34) et du théorème du point fixe que l'opérateur Λ a un point fixe unique $\eta^* \in L^2(0, T, V')$.

(iii). Soit $\eta^* \in L^2(0, T, V')$ le point fixe de l'opérateur Λ notons

$$u^* = u_{\eta^*}, \sigma^* = \sigma_{\eta^*} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}^*) + \mathcal{G}\varepsilon(u^*) + \int_0^t B(t-s)\varepsilon(u^*(s))ds. \quad (4.15)$$

Nous utilisons l'égalité $\Lambda\eta^* = \eta^*$, (4.15) et la définition (4.14) de l'opérateur Λ pour prouver que le couple (u^*, σ^*) est une solution de problème PV_2 et satisfait la régularité (3.30) – (3.31). Ceci conclut de l'existence du théorème. L'unicité résulte de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (3.14) obtenu à l'étape (ii).

Chapitre 5

Analyse variationnelle d'un
contact frictionnel
viscoélastique avec un corps à
mémoire à long terme avec
effets thermiques

Analyse variationnelle d'un problème de contact frictionnel viscoélastique avec un corps à mémoire à long terme avec effets thermiques

Dans ce chapitre, nous utilisons les contacts thermiques et mécaniques et nous négligeons le contact électrique pour une raison quelconque utilisée dans des matériaux tels que la batterie de voiture il n'y a pas de champ électrique entre la batterie et la tôle.

5.1 Formulation du problème

Problème P_1 : Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, le champ du tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$, le potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ de déplacement électrique $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et la température $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\sigma(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t))) + \mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) + \int \mathcal{G}(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}(s))) ds + \zeta^* \nabla \varphi(t) - \mathcal{M}\theta(t) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (5.1)$$

$$\mathbf{D}(t) = \varepsilon \varepsilon(\mathbf{u}(t)) - \mathbf{B} \nabla \varphi(t) - \mathcal{P}\theta(t) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (5.2)$$

$$\dot{\theta}(t) - \operatorname{div} k(\theta(t)) = \psi(\mathcal{M}\theta(t), \dot{\mathbf{u}}(t) + q_{th}) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (5.3)$$

$$\operatorname{div} \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (5.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (5.5)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T] \quad (5.6)$$

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T] \quad (5.7)$$

$$\begin{cases} \sigma_\nu = -\alpha |\dot{u}_\nu|, |\sigma_\nu| = -\mu\sigma_\nu \\ \sigma_\tau = -\lambda(\dot{u}_\tau - v^*), \text{ si } \lambda \geq 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T] \quad (5.8)$$

$$-k_{i,j}\theta_i n_j = k_e(\theta(t) - \theta_F) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T] \quad (5.9)$$

$$D.\boldsymbol{\nu} = \Psi(u_\nu - g)\Phi_l(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T] \quad (5.10)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \times [0, T] \quad (5.11)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times [0, T] \quad (5.12)$$

$$D.\boldsymbol{\nu} = q_b \quad \text{sur } \Gamma_b \times [0, T] \quad (5.13)$$

$$u(0) = u_0 \quad \theta(0) = \theta_0 \quad \text{sur } \Omega \quad (5.14)$$

Nous décrivons maintenant le problème (5.1)-(5.14) et fournir une explication des équations et des conditions aux limites.

L'équation (5.1) et (5.2) représentent la loi de comportement thermo-électro-viscoélastique à mémoire à long terme, l'évolution du champ de température est régie par une équation différentielle donnée par la relation (5.3) où ψ est la source mécanique de la croissance de température, supposée être fonction assez générale des déformations. Équations suivantes (5.4) et (5.5) sont les équations stationnaires du champ de contrainte et de déplacement électrique, conditions (5.6) et (5.7) sont les conditions aux limites de déplacement et de traction. Equation (5.11) signifie que la température s'annule sur $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \times [0, T]$ ce qui implique qu'il n'y a qu'un effet électromécanique sur $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$. Suivant, (5.12) et (5.13) représentent les conditions aux limites électriques pour le potentiel électrique sur Γ_a et les charges électriques sur Γ_b , respectivement. L'équation (5.14) représente le champ de déplacement

initial et le champ de dommage initial où u_0 est le déplacement initial, et θ_0 est la température initiale.

Passons aux conditions de contact (5.8)-(5.10) décrivant le contact thermomécanique de frottement sur la surface de contact potentiel Γ_3 . La relation (5.8) décrit une condition normale de conformité à la loi de Coulomb du frottement sec où p_ν est une fonction prescrite, et g représente l'écart dans la direction ν . La différence $u_\nu - g$, lorsqu'il est positif, représente la pénétration de la surface des spérités dans celles de la fondation. De plus les deux dernières inégalités dans la relation (5.8) décrivent la loi de Coulomb du frottement sec. (5.9) représente une condition aux limites de température associée sur la surface de contact, où k_e est un coefficient d'échange thermique entre le corps et l'obstacle. et θ_F est la température de la fondation. Enfin, l'équation (5.10) montre qu'il n'y a pas de charges électriques sur la surface de contact. Nous ne sommes pas ici pour la condition (5.8) nous choisissons la version suivante de la conformité normale

$$p_\nu = \mu p_\tau$$

ce choix se retrouve souvent dans la littérature, ici μ est le coefficient de frottement et p_τ est appelée compliance tangentielle.

5.2 Formulation variationnelle

Pour obtenir la formulation variationnelle du problème P , nous utilisons les notations et préliminaires suivants.

5.2.1 Notations et préliminaires

Nous présentons la notation dont nous rappelons quelques éléments préliminaires. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [[10], [11]]. On

rappelle que les produits scalaires canoniques et les normes correspondantes sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$, sont donnés respectivement par

$$\begin{aligned} u.v &= u_i.v_i, \quad \|v\| = \sqrt{v.v} \quad \text{pour tous } u, v \in \mathbb{R}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\tau} &= \sigma_{ij}.\tau_{ij}, \quad \|\boldsymbol{\tau}\| = \sqrt{\boldsymbol{\tau}.\boldsymbol{\tau}} \quad \text{for all } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d, \end{aligned}$$

Nous présentons les espaces

$$\begin{aligned} H &= L^2(\Omega)^d = \{v = (v_i), \quad v_i \in L^2(\Omega)\} \\ \mathcal{H} &= \{\boldsymbol{\tau} = \tau_{ij}, \quad \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega)\}, \\ H^1(\Omega)^d &= \{v = (v_i) \in H, \quad \varepsilon(v) \in \mathcal{H}\}, \\ \mathcal{H}_1 &= \{\boldsymbol{\tau} \in : Div \boldsymbol{\tau} \in H\}, \end{aligned}$$

Ici $\varepsilon : H^1(\Omega)^d \rightarrow H$ et $Div : \mathcal{H} \rightarrow H$ sont les opérateurs de déformation linéarisée et de divergence, respectivement, définis par

$$\varepsilon(v) = (\varepsilon_{ij}(v)), \quad \varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad Div \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij,j}).$$

Les espaces H , $\mathcal{H}$, $H^1(\Omega)^d$ et $\mathcal{H}_1$ are real Hilbert spaces endowed with the canonical inner products given by

$$\begin{aligned} (u, v)_H &= \int_{\Omega} u_i.v_i \, dx, \quad (\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij}.\tau_{ij} \, dx \\ (u, v)_{H^1(\Omega)^d} &= (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \\ (\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}} &= (\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\tau}) + (Div \boldsymbol{\sigma}, Div \boldsymbol{\tau})_H. \end{aligned}$$

On introduit le sous-espace fermé de $H^1(\Omega)^d$ Défini par

$$V = \{v \in H^1(\Omega)^d : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\},$$

nous introduisons également les espaces

$$\begin{aligned} W_e &= \{\phi \in H^1(\Omega)^d : \phi = 0 \text{ dans } \Gamma_a\}, \\ \mathcal{W}_e &= \{D = (D_i) : D_i \in L^2(\Omega), \operatorname{div} D \in L^2(\Omega)\}, \\ W_{th} &= \{w \in H^1(\Omega) : w = 0 \text{ p.p dans } (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)\}, \end{aligned}$$

Puisque $mes \Gamma_a > 0$ et $mes \Gamma_1 > 0$, les inégalités de Korn et de Friedrichs-Poincaré tiennent donc,

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} &\geq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)^d}, \quad \forall v \in V, \\ \|\nabla \phi\|_{\mathcal{W}_e} &\geq C_1 \|\phi\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \phi \in W_e \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\|\nabla \mathbf{w}\|_H \geq C_2 \|w\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{w} \in W_{th}, \quad (5.16)$$

où ici et en bas C_0 , C_1 et C_2 sont des constantes positives qui dépendent des données du problème mais qui sont indépendantes des solutions, dont la valeur peut varier d'une ligne à l'autre.

Sur les espaces V , W_e , $\mathcal{W}_e$ et W_{th} , nous définissons les produits intérieurs suivants

$$(u, v)_V = (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad \forall u, v \in V, \quad (5.17)$$

$$(\varphi, \phi)_{W_e} = (\nabla \varphi, \nabla \phi)_{\mathcal{W}_e}, \quad \forall \varphi, \phi \in W_e, \quad (5.18)$$

$$(\mathbf{w}, z)_{W_{th}} = (\nabla \mathbf{w}, \nabla z)_H, \quad \forall \mathbf{w}, z \in W_{th}, \quad (5.19)$$

où

$$\begin{aligned} (\varphi, \phi)_{W_e} &= \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \phi \, dx, \\ (D, \mathbf{E})_{w_e} &= \int_{\Omega} D \cdot \mathbf{E} \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} D \cdot \operatorname{div} \mathbf{E} \, dx \end{aligned}$$

Il existe des constantes C_0 , C_1 et C_2 sont des constantes positives telles que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 \|v\|_V, \quad \forall v \in V, \quad (5.20)$$

$$\|\phi\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C_1 \|\phi\|_W, \quad \forall \phi \in W_e, \quad (5.21)$$

$$\|z\|_{L^2(\Gamma_3)} \geq C_2 \|z\|_{W_{th}}, \quad \forall z \in W_{th}, \quad (5.22)$$

et on note par v_ν et v_τ les composantes normale et tangentielle de v sur Γ donné par

$$v_\nu = v \cdot \nu, \quad v_\tau = v - v_\nu \nu. \quad (5.23)$$

De même, nous définissons ses composantes normale et tangentielle par

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu) \cdot \nu, \quad v_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \nu, \quad (5.24)$$

pour tous $\sigma \in \mathcal{H}_1$, $\theta \in H^1(\Omega)^d$ et $D \in \mathcal{W}$, les trois formules de Green suivantes sont valables

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div} \sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma_\nu v \, da \quad \forall v \in H^1(\Omega)^d \quad (5.25)$$

$$(\theta, \nabla \mathbf{w})_H + (\text{div} \theta, \mathbf{w})_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} \theta_\nu \cdot \mathbf{w} \, da \quad \forall \mathbf{w} \in H^1(\Omega) \quad (5.26)$$

$$(D, \nabla \phi)_H + (\text{div} D, \phi)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} D_\nu \cdot \phi \, da \quad \forall \phi \in H^1(\Omega) \quad (5.27)$$

Où

$$\text{div} \theta = \theta_{i,i}, \quad \text{div} D = (D_{i,i}),$$

On rappelle le théorème suivant

Théorème 5.1 *Soit $V \subset H \subset V'$ être un triplé de Gelfand. Supposons que $A : V \rightarrow V'$ est un opérateur hémicontinu et monotone qui satisfait*

$$(Av, v)_{V' \times V} \geq \omega \|v\|_V^2 + \varsigma, \quad \forall v \in V \quad (5.28)$$

$$\|Av\|_{V'}^2 \leq C(\|v\|_V + 1), \quad \forall v \in V \quad (5.29)$$

Pour certaines constantes $\omega > 0$, $C > 0$ et $\varsigma \in \mathbb{R}$ alors, étant donné $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0, T, V')$ il existe une fonction unique $u \in L^2(0, T, V') \cap C(0, T, H)$ satisfait

$$u \in L^2(0, T, V') \cap C(0, T, H), \quad \dot{u} \in L^2(0, T, V'),$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \quad t \in (0, T),$$

$$u(0) = u_0$$

La preuve de ce résultat abstrait se trouve dans [[41]] .

On note par $\mathcal{C}(0, T; X)$ et $\mathcal{C}^1(0, T; X)$ l'espace des fonctions continues et continûment différentiables de $[0, T]$ vers X , respectivement, avec les normes

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathcal{C}(0, T; X)} &= \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_{\mathcal{C}(0, T; X)} \\ \|f\|_{\mathcal{C}^1(0, T; X)} &= \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X,\end{aligned}$$

Si X_1 et X_2 sont des espaces de Hilbert alors $X_1 \times X_2$ désigne l'espace de Hilbert muni du produit scalaire canonique $(\cdot, \cdot)_{X_1 \times X_2}$.

4.2.2 Nous énumérons maintenant les hypothèses sur les données du problème. L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \| \mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2) \| \leq L_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \text{ pour tous } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, x \in \Omega. \\ (b) \text{ Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) / (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2 \text{ pour tous } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, x \in \Omega. \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est mesure de Lebesgue sur } \Omega, \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ (d) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H} \end{array} \right. \quad (5.30)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\mathcal{B}} > 0 \text{ tel que} \\ \| \mathcal{B}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{B}(x, \varepsilon_2) \| \leq L_{\mathcal{B}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \text{ pour tous } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, x \in \Omega. \\ (b) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{B}(x, \varepsilon) \text{ est mesure de Lebesgue sur } \Omega, \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{B}(x, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (5.31)$$

The relation operator $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{G}} \succ 0 \text{ tel que} \\ \|\mathcal{G}(x, t_1, \varepsilon_1) - \mathcal{G}(x, t_2, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{G}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \text{ pour tous } t_1, t_2 \in (0, T) \\ \text{pour tous } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, x \in \Omega. \\ (b) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, t, \varepsilon) \text{ est mesure de Lebesgue sur } \Omega \\ \text{pour tout } t \in (0, T), \text{ for any } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, t, \varepsilon) \text{ est continue, dans } (0, T), \\ \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, x \in \Omega. \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, 0, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (5.32)$$

L'opérateur piézoélectrique $\varepsilon : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \varepsilon(x, t) = (e_{ijk} \tau_{jk}), \forall \tau = (\tau_{jk}) \in S^d, \text{ a.e. } x \in \Omega. \\ (b) e_{ijk} \tau_{jk} = e_{ikj} \tau_{jk} \in L^\infty(\Omega), 1 \leq i, j, k \leq d. \end{array} \right. \quad (5.33)$$

L'opérateur d'expansion thermique $\mathcal{M} : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{M}} \succ 0 \text{ tel que} \\ \|\mathcal{M}(x, \theta_1) - \mathcal{M}(x, \theta_2)\| \leq L_{\mathcal{M}} \|\theta_1 - \theta_2\| \text{ pour tous } \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \\ (b) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{M}(x, \theta) \text{ est mesure de Lebesgue sur } \Omega \text{ pour tout } \theta \in \mathbb{R} \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{M}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (5.34)$$

La fonction constitutive non linéaire $\psi : \Omega \times \mathbb{R} \times V \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe une constante } L_{\psi} > 0 \text{ tel que} \\ \|\psi(x, \mathcal{M}\theta_1, v_1) - \psi(x, \mathcal{M}\theta_2, v_2)\| \leq L_{\psi} (\|\mathcal{M}\theta_1 - \mathcal{M}\theta_2\| + \|v_1 - v_2\|) \\ \text{pour tous } \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \text{ pour tous } v_1, v_2 \in V, x \in \Omega. \\ (b) \text{ L'application } x \mapsto \psi(x, \mathcal{M}\theta, v) \text{ est mesure de Lebesgue sur } \Omega \\ \text{pour tout } \theta \in \mathbb{R}, \text{ pour tout } v \in V. \\ (c) \text{ L'application } x \mapsto \psi(x, 0, 0) \in L^2(\Omega) \end{array} \right. \quad (5.35)$$

L'opérateur de permittivité électrique $B = (B_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \ B(x, E) = (B_{ij}(x)E_j) \text{ pour tout } E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \ x \in \Omega. \\ (b) \ B_{ij} = B_{ji} \in L^\infty(\Omega), \ 1 \leq i, j \leq d. \\ (c) \ \text{Il existe une constante } M_B > 0 \text{ tel que } BE \cdot E \geq M_B |E|^2 \\ \text{tel que } E = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (5.36)$$

The pyroelectric operator $\mathcal{P} : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \ \text{Il existe une constante } L_{\mathcal{P}} > 0 \text{ tel que} \\ \|\mathcal{P}(x, \theta_1) - \mathcal{P}(x, \theta_2)\| \leq L_{\mathcal{P}} \|\theta_1 - \theta_2\| \text{ pour tout } \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } x \in \Omega. \\ (b) \ m_{ij} = m_{ji} \in L^\infty(\Omega), \ 1 \leq i, j \leq d. \\ (c) \ \text{L'application } x \mapsto \mathcal{P}(x, 0) \text{ appartient à } \mathcal{W}_e. \end{array} \right. \quad (5.37)$$

L'opérateur de conductivité thermique $\mathcal{K} : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \ \text{Il existe une constante } L_{\mathcal{K}} > 0 \text{ tel que} \\ \|\mathcal{K}(x, \theta_1) - \mathcal{K}(x, \theta_2)\| \leq L_{\mathcal{K}} \|\theta_1 - \theta_2\| \text{ pour tous } \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \ x \in \Omega. \\ (b) \ m_{ij} = m_{ji} \in L^\infty(\Omega) \quad 1 \leq i, j \leq d. \\ (c) \ \text{L'application } x \mapsto \mathcal{K}(x, 0, 0) \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (5.38)$$

La fonction de compliance normale $p_\nu : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \ \text{Il existe une constante } L_\nu > 0 \text{ tel que} \\ \|p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)\| \leq L_\nu \|r_1 - r_2\| \text{ pour tous } r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \ x \in \Omega. \\ (b) \ \text{L'application } x \mapsto p_\nu(x, r) \text{ est mesure de Lebesgue sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}, \\ (c) \ \text{L'application } x \mapsto p_\nu(x, 0) \text{ appartient à } L^2(\Gamma_3) \end{array} \right. \quad (5.39)$$

On suppose aussi que les forces corporelles et les tractions surfaciques ont la régularité

$$f_0 \in \mathcal{C}(0, T; H), \quad f_2 \in \mathcal{C}(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (5.40)$$

$$q_0 \in \mathcal{C}(0, T; L^2(\Omega)), \quad q_2 \in \mathcal{C}(0, T; L^2(\Gamma_b)), \quad (5.41)$$

$$q_2(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.42)$$

Les fonctions g et μ ont les propriétés suivantes :

$$g \in L^2(\Gamma_3), \quad g(x) \geq 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (5.43)$$

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(x) > 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (5.44)$$

$$u_0 \in V \quad (5.45)$$

et le champ de température initial satisfait

$$\theta_0 \in W_{th}, \quad \theta_F \in L^2(0, T, L^2(\Gamma_3)), \quad k_e \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+), \quad q_{th} \in L^2(0, T, W'_{th}) \quad (5.46)$$

En utilisant la notation ci-dessus et les formules de Green données par (5.25)-(5.27), on obtient la formulation variationnelle du problème mécanique (5.1)-(5.14), pour toutes les fonctions $v \in V$, $w \in W_{th}$, $\phi \in W_e$ and $t \in (0, T)$ donnée comme suit.

3.3. Problem P_V . Trouver le champ de déplacement $u: [0, T] \rightarrow V$, le champ de contrainte $\sigma: [0, T] \rightarrow \mathcal{H}_1$, le potentiel électrique $\varphi: [0, T] \rightarrow W$, le champ de déplacement électrique $D: [0, T] \rightarrow H$ et la température $\theta: [0, T] \rightarrow V$ tel que

$$\sigma(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(t-s, \varepsilon(u(s))) ds + \varepsilon^* \nabla \varphi(t) - \mathcal{M}\theta(t), \quad (5.47)$$

$$(\sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j((u(t), v)) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V, \quad (5.48)$$

$$D(t) = \varepsilon \varepsilon(u(t)) - B \nabla \varphi(t) - \mathcal{P}\theta(t), \quad (5.49)$$

$$(D(t), \nabla \phi)_H = -(q_e(t), \phi)_W, \quad (5.50)$$

$$(\dot{\theta}(t), \mathbf{w})_{W_{th} \times W'_{th}} + (\mathcal{K}(\nabla \varphi(t)), \nabla \mathbf{w}) = (j_{th}(\theta, \mathbf{w}) + \psi(\mathcal{M}\theta, \dot{u}(t)) + (q_{th}, \mathbf{w})_{W'_{th} \times W_{th}}, \quad (5.51)$$

$$u(0) = u_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \text{sur } \Omega \quad (5.52)$$

où $j : V \times V \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [0, T] \rightarrow V$, $q_e : [0, T] \rightarrow W$, $j_{th} : W_{th} \times W_{th} \rightarrow \mathbb{R}$ sont respectivement définies par

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} \alpha \|u_\nu\| (\mu \|v_\tau - v^*\|) + v_\nu da, \quad (5.53)$$

$$f(t, v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v \, da, \quad (5.54)$$

$$(q_e(t), \phi)_W = \int_{\Omega} q_0(t) \cdot \phi \, dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \cdot \phi \, da, \quad (5.55)$$

$$j_{th} = - \int_{\Gamma_3} k_e(\theta \cdot \nu - \theta_F \cdot \nu) \mathbf{w} \, da, \quad (5.56)$$

On définit l'application $h : V \times W_e \rightarrow W_e$ par

$$(h(u, \varphi), \phi)_W = \int_{\Gamma_3} \Psi((u_\nu - g)\Phi_l(\varphi - \varphi_0)) \xi \, da,$$

$$(B \nabla \varphi, \nabla \phi)_H - (\varepsilon \varepsilon(u, \nabla \phi)_H + (h(u, \varphi), \phi)_{W_e} = (q(t), \phi)_{W_e}$$

pour tous $u, v \in V$, $\theta, w \in W_{th}$ et $\phi \in W_e$ et $t \in [0, T]$. Notons que les définitions de f et q_e sont basés sur le théorème de représentation de Riesz. De plus, les conditions (5.42) et (5.43) impliquer que

$$f \in C(0, T; V), \quad q_e \in C(0, T; W_e). \quad (5.57)$$

5.3 Existence et unicité de la solution

Maintenant, nous proposons notre résultat d'existence et d'unicité.

Théorème 5.2 *Supposons que (5.32)-(5.48) prise. Alors il existe une constante α_0 qui ne dépend que de Ω , Γ_1 , Γ_3 et $\mathcal{A}$ telle que si*

$$L_\nu(1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) < \alpha_0 \quad (5.58)$$

où $\alpha_0 = \frac{m_{\mathcal{A}}}{C_0^2}$ tel que $m_{\mathcal{A}}$ est défini dans (5.32) et C_0 défini par (5.20). Alors il existe une solution unique $\{u, \sigma, \theta, \varphi, D\}$ au problème P_V . De plus, la solution satisfait

$$u \in \mathcal{C}^1(0, T; V), \quad (5.59)$$

$$\sigma \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H}_1), \quad (5.60)$$

$$\theta \in L^2(0, T, W_{th}) \cap C(0, T; L^2(\Omega)), \quad (5.61)$$

$$\varphi \in \mathcal{C}(0, T; W_e), \quad (5.62)$$

$$D \in C(0, T; \mathcal{W}_e), \quad (5.63)$$

La démonstration du théorème 4.1 se fait en plusieurs étapes. Elle est basée sur des résultats d'inégalités variationnelles évolutives, d'équations différentielles ordinaires et d'arguments de point fixe.

Pour prouver le théorème, nous considérons les trois problèmes auxiliaires suivants pour $\eta \in \mathcal{C}(0, T; V)$, $\chi \in L^2(0, T, W'_{th})$, $\lambda \in C(0, T; W_e)$ nous considérons les trois problèmes auxiliaires suivants.

4.1 Problem PV_η . Trouver le champ de déplacement $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$ et le champ de contraintes $\sigma_\eta : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ tel que

$$\sigma_\eta(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(u_\eta(t))) + \mathcal{B}\varepsilon(u_\eta(t)), \quad (5.64)$$

$$(\sigma_\eta(t), \varepsilon(v - u_\eta(t)))_{\mathcal{H}} + j(u_\eta(t), v) - j(u_\eta(t), u_\eta(t)) \geq (f(t), v - u_\eta(t))_{V'} \quad (5.65)$$

$$u_\eta(0) = u_0, \text{ sur } \Omega \quad (5.66)$$

pour tous $u_\eta, v \in V$ et $t \in (0, T)$,

4.2 Problem PV_χ . Trouver la température $\theta_\chi : [0, T] \rightarrow W_{th}$ qui est la solution du problème variationnel

$$(\theta_\chi(t), \mathbf{w})_{W'_{th} \times W_{th}} + (\mathcal{K}(\nabla \theta(t)), \nabla \mathbf{w})_{W'_{th} \times W_{th}} = (\chi(t) + q_{th}(t), \mathbf{w})_{W'_{th} \times W_{th}} \quad (5.67)$$

$$\theta_\chi(0) = \theta_0, \quad \text{sur } \Omega. \quad (5.68)$$

pour tous $\theta_\chi, \mathbf{w} \in W_{th}$, $p.p$ $t \in (0, T)$,

4.3 Problem PV_λ . Trouver le potentiel électrique $\varphi_\lambda : [0, T] \rightarrow W_e$, $D_\lambda : [0, T] \rightarrow W_e$ tel que

$$D_\lambda(t) = B \nabla \varphi_\lambda(t) - \varepsilon \varepsilon(u_\eta(t)) - \mathcal{P}\theta, \quad (5.69)$$

$$(B \nabla \varphi_\lambda(t), \nabla \phi)_H - (\varepsilon \varepsilon(u_\eta(t)), \nabla \phi)_H = (\lambda(t), \phi)_{W_e}. \quad (5.70)$$

pour tous $\varphi_\lambda, \phi \in W_e$, $t \in (0, T)$.

Nous commençons par un résultat auxiliaire sur les priorités des fonctions $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ et $j_{th} : W_{th} \times W_{th} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par (5.55) et (5.53) respectivement.

Lemme 5.3 *Sous les hypothèses (5.32)–(5.48), fonctionnelle j et j_{th} satisfait*

$$j(u, \cdot) \text{ est convexe et semi-continu sur } V, \quad (5.71)$$

$$j(u_1, v_2) + j(u_2, v_1) - j(u_1, v_1) - j(u_2, v_2) \quad (5.72)$$

$$\leq C_0^2 (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \|u_1 - u_2\|_V \|v_1 - v_2\|_V, \text{ pour } u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$$

$$\|(\theta_1, \mathbf{w}) - j_{th}(\theta_2, \mathbf{w})\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C_{j_{th}} \|(\theta_1(t) - \theta_2(t))\|_{W_{th}}, \text{ for all } \theta_1, \theta_2, \mathbf{w} \in W_{th} \quad (5.73)$$

Preuve : Nous utilisons la condition (5.46) et l'inégalité (5.20) pour voir que la fonctionnelle j défini par (5.55) est une semi-norme sur V et de plus,

$$\|j(u_1, v) + j(u_2, v)\| \leq C_0^2 \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \|u_1 - u_2\|_V \|v_1 - v_2\|_V$$

Ainsi, la semi-norme j est continu sur V et, par conséquent, (5.71) tient. De la définition de la fonctionnelle j donnée par (5.55), nous avons

$$\begin{aligned} & j(u_1, v_2) + j(u_2, v_1) - j(u_1, v_1) - j(u_2, v_2) \quad (5.74) \\ &= \int_{\Gamma_3} (\alpha \|u_{1\nu} - \alpha \|u_{2\nu})(\mu \|v_{2\tau} - v^*\| - \mu \|v_{1\tau} - v^*\|) + v_{2\nu} - v_{1\nu}) da \\ &\leq C_0^2 \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \|u_1 - u_2\|_V \|v_1 - v_2\|_V \end{aligned}$$

ensuite nous utilisons la majoration suivante

Pour la fonctionnelle j définie par (??)

$$j_{th}(\theta, \mathbf{w}) = - \int_{\Gamma_3} k_e(\theta \cdot \nu - \theta_F \cdot \nu) \mathbf{w} \, da, \quad \text{for all } \theta, \theta_F, \mathbf{w} \in W_{th},$$

Ainsi par l'hypothèse (5.48) et une majoration de (5.74), on a

$$\| j_{th}(\theta_1, \mathbf{w}) - j_{th}(\theta_2, \mathbf{w}) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \| k_e \|_{L^\infty(\Gamma_3)} \| \theta_1(t) - \theta_2(t) \|_{L^2(\Gamma_3)},$$

$$\| j_{th}(\theta_1, \mathbf{w}) - j_{th}(\theta_2, \mathbf{w}) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C_1 \| k_e \|_{L^\infty(\Gamma_3)} \| \theta_1(t) - \theta_2(t) \|_{W_{th}},$$

on peut donc écrire

$$\| j_{th}(\theta_1, \mathbf{w}) - j_{th}(\theta_2, \mathbf{w}) \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C_{j_{th}} \| \theta_1(t) - \theta_2(t) \|_{W_{th}}, \text{ pour } \theta_1, \theta_2 \in W_{th}.$$

■

Nous avons le résultat suivant pour le problème PV_η .

Lemme 5.4 *Sous les hypothèses (5.32) -(5.48), pour tout $\eta \in \mathcal{C}(0, T; V)$, le problème PV_η a une solution unique $\{u_\eta, \sigma_\eta\}$, tel que*

$$u_\eta \in \mathcal{C}^1(0, T; V), \quad \sigma_\eta \in \mathcal{C}^1(0, T; H_1) \quad (5.75)$$

en outre, si $\{u_i, \sigma_i\}$ est la solution du problème PV_{η_i} , correspondant $\eta = \eta_i \in \mathcal{C}(0, T; V)$ pour $i = 1, 2$, alors

$$\| u_1(t) - u_2(t) \|_V \leq C \int_0^T \| \eta_1(s) - \eta_2(s) \|_V \, ds \quad (5.76)$$

Preuve : nous avons choisi $v = \dot{u}(t) \pm \zeta$ dans (5.65), où $\zeta \in D(\Omega)^d$ est quelconque, on trouve

$$(\sigma_\eta(t), \varepsilon(\phi)) = (f(t), \phi)_V$$

En utilisant la définition (5.56) pour f , on déduit

$$Div \sigma_\eta(t) + f_0(t) = 0, \quad t \in (0, T) \quad (5.77)$$

Avec l'hypothèse de régularité (5.42) sur f_0 on voit ça $Div \sigma_\eta(t) \in H$. Donc, $\sigma_\eta(t) \in \mathcal{H}_1$.

pour tous $u, v \in V$ et $t \in [0, T]$.

$$\|Au - Av\|_V \leq L_{\mathcal{A}} \|u - v\|_V, \quad (5.78)$$

ce qui prouve que $A : V \rightarrow V$ est Lipschitz et continu,

$$(Au - Av)_V \geq m_{\mathcal{A}} \|u - v\|_V^2, \quad \forall u, v \in V \quad (5.79)$$

et par (5.76) et (5.32) on obtient

$$\|Bu - Bv\|_V \leq L_{\mathcal{B}} \|u - v\|_V, \quad (5.80)$$

si 4.1 est satisfait, puisque l'opérateur continu fortement monotone et Lipschitz sur V et B est l'opérateur continu de Lipschitz sur V , $j(u, \cdot)$ satisfait aux conditions (5.71) et (5.72), u_0 satisfait l'hypothèse (5.47) et on note que pour tout fixe $\eta \in \mathcal{C}(0, T; V)$ nous utilisons les définitions (5.79) et (5.78) pour montrer que $f_\eta \in \mathcal{C}(0, T; V)$. on déduit des résultats classiques pour les inégalités variationnelles elliptiques évolutives (voir par exemple [[32], [40]]) qu'il existe une fonction unique $u_\eta \in \mathcal{C}(0, T; V)$. De plus, pour $u_i = u_{\eta_i}$ solutions du problème PV_{η_i} pour $i = 1, 2$, alors nous avons

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq C \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V ds \quad (5.81)$$

en utilisant l'inégalité(5.38) et l'inégalité (5.39)

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq C \int_0^T \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V ds \quad (5.82)$$

■

Pour le problème PV_χ Nous avons les résultats suivants.

Lemme 5.5 *Sous les hypothèses (5.32)-(5.48), pour chaque c , le problème PV_χ admet une unique solution faible telle que*

$$\theta_\chi \in L^2(0, T, W_{th}) \cap C(0, T, L^2(\Omega)), \quad (5.83)$$

De plus, si θ_i est la solution au problème PV_{χ_i} , correspondant $\chi = \chi_i \in C(0, T, W'_{th})$.

$$\| \theta_1(t) - \theta_2(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \| \chi_1(s) - \chi_2(s) \|_{W'_{th}}^2 ds \quad (5.84)$$

Preuve : Le problème (5.67)-(5.68) peut être écrit comme

$$\dot{\theta}_\chi(t) + K \theta_\chi(t) = Q(t)$$

$$\theta_\chi(0) = \theta_0$$

Où $K : W_{th} \rightarrow W'_{th}$ et $Q : [0, T] \rightarrow W'_{th}$ sont définis comme

$$(K\tau, \mathbf{w})_{W'_{th} \times W_{th}} = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} k_{i,j} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma_3} \tau \cdot \mathbf{w} da, \quad (5.85)$$

$$(Q, \mathbf{w})_{W'_{th} \times W_{th}} = (\chi(t) + q_{th}(t), \mathbf{w})_{W'_{th} \times W_{th}} \quad (5.86)$$

Il découle de la définition de l'opérateur K , on obtient

$$\| K\tau - K\mathbf{w} \|_{W'_{th}} \leq L_K \| \tau - \mathbf{w} \|_{W'_{th}} \quad (5.87)$$

Ce qui montre que $K : W_{th} \rightarrow W'_{th}$ est continue et par (5.38)-(5.37)(c), on obtient

$$(K\tau - K\mathbf{w}, \tau - \mathbf{w})_{W'_{th} \times W_{th}} \geq m_K \| \tau - \mathbf{w} \|_{W_{th}}^2, \quad \forall \tau, \mathbf{w} \in W_{th} \quad (5.88)$$

K est un opérateur monotone. On choisit $\mathbf{w} = \mathbf{0}_{W_{th}}$ sur (5.88) on trouve

$$\begin{aligned} ((K\tau, \tau)_{W'_{th} \times W_{th}} &\geq m_K \| \tau \|_{W_{th}}^2 - \| K\mathbf{0} \|_{W'_{th}} \| \tau \|_{W_{th}}) \\ &\geq \frac{1}{2} m_K \| \tau \|_{W_{th}}^2 - \frac{1}{2m_K} \| K\mathbf{0}_{W_{th}} \|_{W'_{th}}^2, \quad \forall \tau \in W_{th} \end{aligned}$$

Ainsi, K satisfait la condition (5.29) avec $\omega = \frac{m_{\mathcal{K}}}{2}$ et $\zeta = -\frac{1}{2m_{\mathcal{K}}} \|K\mathbf{0}_{W_{th}}\|_{W'_{th}}$ et par (5.88) on en déduit que

$$\|K\tau\|_{W'_{th}} \leq L_{\mathcal{K}} \|\tau\|_{W_{th}} + \|K\mathbf{0}_{W_{th}}\|_{W'_{th}}, \quad \forall \tau \in W_{th} \quad (5.89)$$

cette inégalité implique que K satisfait la condition (5.31). De plus, pour $\chi(t) \in L^2(0, T, W_{th})$ et $q_{th}(t) \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$ ce qui implique $Q \in L^2(0, T, W'_{th})$ et $\theta_0 \in L^2(\Omega)$. D'après le théorème 3.2, il existe une fonction unique $\theta_{\chi} \in L^2(0, T, W_{th}) \cap \mathcal{C}(0, T, L^2(\Omega))$ qui satisfait le problème PV_{χ} . On prend $\chi = \chi_1$ et $\chi = \chi_2$ dans (5.67), on déduit en choisissant $\mathbf{w} = \theta_1(t) - \theta_2(t)$ comme fonction de test

$$\begin{aligned} & (\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t), \theta_1(t) - \theta_2(t))_{W'_{th} \times W_{th}} + K \theta_1(t) - K \theta_2(t), \theta_1(t) - \theta_2(t))_{W'_{th} \times W_{th}} \\ &= (\chi_1(t) - \chi_2(t), \theta_1(t) - \theta_2(t))_{W'_{th} \times W} \end{aligned}$$

Puis en intégrant la dernière propriété sur $(0, t)$, en utilisant (5.28) -(5.89), on déduit (5.86). ■

Pour le dernier problème PV_{λ} . Nous avons les résultats suivants.

Lemme 5.6 4.4 *Sous les hypothèses (5.32)-(5.48), pour chaque $\lambda \in \mathcal{C}(0, T, W_e)$, le problème PV_{λ} a une solution unique $\{\varphi_{\lambda}, D_{\lambda}\}$ tel que*

$\varphi_{\lambda} \in \mathcal{C}(0, T, W_e)$, $D_{\lambda} \in \mathcal{C}(0, T, W_e)$ De plus, si $\{\varphi_i, D_i\}$ est la solution au problème PV_{λ_i} , correspondant $\lambda = \lambda_i \in \mathcal{C}(0, T, W_e)$ pour $i = 1, 2$, alors

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_{W_e} \leq C \|u_1(t) - u_2(t)\|_V + \|\lambda_1(t) - \lambda_2(t)\|_{W_e} \quad (5.90)$$

Preuve : on définit l'opérateur $F : W \rightarrow W$ par

$$(F\varphi, \phi)_W = (B\nabla\varphi(t), \nabla\phi)_H - (\zeta\varepsilon(u_{\eta}(t), \nabla\phi)_W, \quad \forall \varphi, \phi \in W_e \quad (5.91)$$

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in W$. Par (5.48), on trouve que

$$(F\varphi_1 - F\varphi_2, \phi_1 - \phi_2)_W \geq m_B \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W_e}^2 \quad \forall \varphi, \phi \in W_e \quad (5.92)$$

d'autre part, en utilisant l'hypothèse (5.35)-(5.38) on trouve qui

$$(F\varphi_1 - F\varphi_2, \phi)_W \leq C_\zeta \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W_e}^2 \|\phi\|_{W_e} \quad \forall \varphi, \phi \in W_e,$$

où C_ζ est une constante positive qui dépend de ζ . Ainsi

$$\|F\varphi_1 - F\varphi_2\|_{W_e} \leq C_\zeta \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W_e} \quad (5.93)$$

et par (5.92)-(5.93) on obtient que $F(t)$ est un opérateur monotone et continu de Lipchitz sur W_e et il existe un élément unique $\varphi_\lambda \in W_e$ tel que

$$F(t)\varphi_\lambda(t) = \lambda(t) \quad \forall \varphi_\lambda \in W_e \quad (5.94)$$

On obtient que $\varphi_\lambda(t)$ est une solution de PV_λ . Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}(0, T, W_e)$. À partir de (5.35)-(5.38) et (5.70) alors

$$m_B \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W_e}^2 \leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V + \|\lambda_1(t) - \lambda_2(t)\|_{W_e}) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W_e}$$

ce qui implique

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W_e}^2 \leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V + \|\lambda_1(t) - \lambda_2(t)\|_{W_e}) \quad (5.95)$$

Où C est $\frac{C_\zeta}{m_B}$ et pour tout $\lambda \in \mathcal{C}(0, T, W_e)$ et $u_\eta \in \mathcal{C}^1(0, T, V)$, l'inégalité (5.91) implique que $\varphi_\lambda \in \mathcal{C}(0, T, W_e)$. Alors pour $\lambda \in \mathcal{C}(0, T, W_e)$ l'inégalité précédente et la régularité de q_e implique que $\varphi_\lambda \in \mathcal{C}(0, T, W_e)$. Par (5.57) et la définition de l'opérateur de divergence que

$$(\operatorname{div} D_\lambda, \phi)_H = (q_e, \phi)_H \quad \forall \phi \in H^1(\Omega) \quad (5.96)$$

ce qui prouve que $D_\lambda \in \mathcal{C}(0, T, W_e)$.

Enfin, dès ces résultats et par les propriétés des opérateurs $\mathcal{G}$, ζ , $\mathcal{M}$, $\mathcal{P}$ et la fonction $\psi \in [0, T]$, on considère l'élément

$$\Lambda(\eta, \theta)(t) = (\Lambda_1(\eta, \chi, \lambda)(t), \Lambda_2(\eta, \chi, \lambda)(t), \Lambda_3(\eta, \chi, \lambda)(t)) \in V \times L^2(W'_{th}) \times W_e \quad (5.97)$$

défini par

$$(\Lambda_1(\eta, \chi, \lambda)(t) = \int_0^t \mathcal{G}(t-s, \varepsilon(u_\eta(s)))ds + \zeta^* \nabla \varphi_\lambda(t) - \mathcal{M}\theta_\chi, \forall t \in [0, T], \quad (5.98)$$

$$\Lambda_2(\eta, \chi, \lambda)(t) = \psi(\mathcal{M}\theta, \dot{u}(t)) + j_{th}(\theta, \mathbf{w}), \forall t \in [0, T], \quad (5.99)$$

$$\Lambda_3(\eta, \chi, \lambda)(t) = \mathcal{P}\theta_\lambda + q_e(t), \forall t \in [0, T], \quad (5.100)$$

■

on a le resultat suivant.

Lemme 5.7 *Soit (5.58) satisfait. Puis pour $(\eta, \chi, \lambda) \in \mathcal{C}(0, T, V) \times L^2(W'_{th}) \times W_e$, la fonction $\Lambda(\eta, \chi, \lambda) : [0, T] \rightarrow V \times L^2(W'_{th}) \times W_e$ est continu, et il existe un élément unique $(\eta^*, \chi^*, \lambda^*) \in \mathcal{C}(0, T, V) \times L^2(W'_{th}) \times W_e$, tel que $\| \Lambda(\eta_1, \chi_1, \lambda_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \chi_2, \lambda_2)(t) \|_{V \times L^2(W'_{th}) \times W_e}^2 = (\eta^*, \chi^*, \lambda^*)$*

Preuve : Soit $(\eta, \chi, \lambda) \in \mathcal{C}(0, T, V) \times L^2(W'_{th}) \times W_e$ et $t_1, t_2, s_1, s_2 \in [0, T]$. à partir de (5.33) -(5.37) et (5.39), nous avons

$$\begin{aligned} & \| \Lambda(\eta_1, \chi_1, \lambda_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \chi_2, \lambda_2)(t) \|_{V \times L^2(W'_{th}) \times W_e} \\ & \leq L_{\mathcal{G}} \int_0^t \| u_1(s) - u_2(s) \|_V ds + C_{\zeta} \| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \|_W \\ & \quad + L_{\psi}(L_{\mathcal{M}} \| \theta_1(t) - \theta_2(t) \|_{L^2(\Omega)} + \| \dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s) \|_V) \\ & \quad + \| j_{th}(\theta_1, \mathbf{w}_1) - j_{th}(\theta_2, \mathbf{w}_2) \|_{L^2(\Gamma_3)} + C_{\zeta} \| \dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s) \|_V \\ & \quad + L_{\mathcal{P}} \| \theta_1(t) - \theta_2(t) \|_{L^2(\Omega)} + \| q_{e1}(t) - q_{e2}(t) \|_W \end{aligned}$$

on utilise (5.42) et (5.70) de (5.35)-(5.38) et (5.39) on obtient

$$\begin{aligned} & \| q_{e1}(t) - q_{e2}(t) \|_W \quad (5.101) \\ & \leq C_{\mathbf{B}} \| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \|_W \\ & + C_{\zeta} \| u_1(s) - u_2(s) \|_V + L_{\mathcal{P}} \| \theta_1(t) - \theta_2(t) \|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

En insérant la dernière inégalité dans (5.100) et par (5.48)

$$\begin{aligned}
& \| \Lambda(\eta_1, \chi_1, \lambda_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \chi_2, \lambda_2)(t) \|_{V \times L^2(W'_{th}) \times W_e} \\
& \leq L_{\mathcal{G}} \int_0^t \| u_1(s) - u_2(s) \|_V ds + (C_{\zeta} + C_B) \| \boldsymbol{\lambda}_1(t) - \boldsymbol{\lambda}_2(t) \|_{W_e} \\
& + (L_{\psi} L_{\mathcal{M}} + 2L_{\mathcal{P}} + C_{j_{th}}) \| \theta_1(t) - \theta_2(t) \|_{L^2(\Omega)} \\
& + (L_{\psi} + C_{\zeta}) \| \dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s) \|_V \\
& + (2C_{\zeta} + C_B) \| u_1(s) - u_2(s) \|_V
\end{aligned} \tag{5.102}$$

on obtient par (5.83)

$$\begin{aligned}
& L_{\mathcal{G}} \int_0^t \| u_1(s) - u_2(s) \|_V ds + (L_{\psi} + C_{\zeta}) \| \dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s) \|_V \\
& + (2C_{\zeta} + C_B) \| u_1(s) - u_2(s) \|_V \\
& \leq L_{\mathcal{G}} \int_0^t \int_0^s \| \dot{u}_1(r) - \dot{u}_2(r) \|_V dr ds \\
& + (L_{\psi} + 3C_{\zeta} + C_B) \int_0^t \int_0^s \| \dot{u}_1(r) - \dot{u}_2(r) \|_V \\
& \leq (L_{\mathcal{G}} + L_{\psi} + 3C_{\zeta} + C_B) \int_0^t \int_0^s \| \dot{u}_1(r) - \dot{u}_2(r) \|_V dr ds \\
& \leq C \int_0^t \int_0^s \| \dot{u}_1(r) - \dot{u}_2(r) \|_V dr ds,
\end{aligned} \tag{5.103}$$

nous avons

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^s \| \dot{u}_1(r) - \dot{u}_2(r) \|_V dr ds \\
& \leq C \int_0^t \int_0^s \| u_1(r) - u_2(r) \|_V + \| \eta_1(s) - \eta_2(s) \|_V dr ds
\end{aligned} \tag{5.104}$$

L'inégalité (5.86) devient

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^s \| \dot{u}_1(r) - \dot{u}_2(r) \|_V dr ds & \leq C \int_0^t \int_0^s \int_0^r \| \dot{u}_1(z) - \dot{u}_2(z) \|_V dz dr ds \\
& + C \int_0^t \int_0^s \| \eta_1(r) - \eta_2(r) \|_V dr ds
\end{aligned}$$

de l'inégalité de Gronwall

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^s \| \dot{u}_1(r) - \dot{u}_2(r) \|_V dr ds & \leq C \int_0^t \int_0^s \| \eta_1(r) - \eta_2(r) \|_V dr ds \\
& \leq C \int_0^T \| \eta_1(s) - \eta_2(s) \|_V ds
\end{aligned}$$

les équations (5.92)-(5.102)-(5.104) devient

$$\begin{aligned}
& \| \Lambda(\eta_1, \chi_1, \lambda_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \chi_2, \lambda_2)(t) \|_{V \times L^2(W'_{th}) \times W_e}^2 \\
& \leq C \int_0^T \| \Lambda(\eta_1, \chi_1, \lambda_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \chi_2, \lambda_2)(t) \|_{V \times L^2(W'_{th}) \times W_e}^2 dt
\end{aligned} \tag{5.105}$$

Existence

Soit $(\eta^*, \chi^*, \lambda^*) \in \mathcal{C}(0, T, V) \times L^2(W'_{th}) \times W_e$, le point fixe de Λ défini par (5.99) – (5.102) nous notons

$$\begin{aligned}
u_* &= u_{\eta^*}, \quad \theta_* = \theta_{\chi^*}, \quad \varphi_* = \varphi_{\lambda^*}. \\
\sigma_* &= \mathcal{A}(\varepsilon(u_*)) + \mathcal{B}(\varepsilon(u_*)) + \int_0^t \mathcal{G}(t-s, \varepsilon(u_*(s))) ds + \zeta^* \nabla \varphi_*(t) - \mathcal{M} \theta_* \\
D_* &= \zeta \varepsilon(u_*) - B \nabla \varphi_* - P \theta_*
\end{aligned}$$

Soit $\{u_*, \sigma_*\}$, θ_* et $\{\varphi_*, D_*\}$ la solution des problèmes PV_{η^*} , PV_{χ^*} et PV_{λ^*} respectivement, les égalités $\Lambda_1(\eta^*, \chi^*, \lambda^*) = \eta^*$, $\Lambda_2(\eta^*, \chi^*, \lambda^*) = \chi^*$ et $\Lambda_3(\eta^*, \chi^*, \lambda^*) = \lambda^*$ combiné avec (5.99)-(5.102) montrer que (5.49)-(5.53) sont satisfait. La régularité (5.59)-(5.63) suivre des lemmes 4.3 - 4.4 et 4.5.

Unicité

L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (5.99)-(5.102) et la solution unique des problèmes PV_{η^*} , PV_{χ^*} et PV_{λ^*} qui complètent la preuve. ■

Conclusions et perspectives

Dans cette thèse, nous avons théoriquement étudié un problème de contact piézoélectrique entre des matériaux solides, à mémoire longue et un obstacle lors de ce travail nous avons conclu que :

- Les équations et les inéquations dans le cadre abstrait peuvent modéliser plusieurs phénomènes.
- L'évolution de la température est décrite par une équation d'évolution de première espèce
- Les conditions compliquées de contact mènent à des équations et inéquations quasi-variationnelles qui sont très utiles dans ce domaine.
- On a traité un problème très proche de la réalité d'usure et de frottement, les effets électriques, les effets thermiques).

Perspectives

Les perspectives pouvant être apportées à ce travail sont :

- Trouver des résultats dans le cadre abstrait an de l'appliquer dans la résolution des problèmes de contact.
- L'utilisation d'autres versions des lois pour le comportement de matériau, l'usure, le frottement, les effets électriques
- L'utilisation des méthodes numériques pour l'approximation des problèmes de contact.

Bibliographie

- [1] R. Glowinski, Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems, Springer Ver-lag. New York, 1984.
- [2] F. Il'Isola, M. Sofonea, D.Steigmann, Mathematical Modelling Solid Mechanics, Springer Science and Business Media LLC, 2017.
- [3] A. Signorini, Sopra alcune questioni di elastostatica, Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, 1933.
- [4] G. Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. II. Problema di Signorini con ambigue onditioni al ontorno, Mem. Aad. Naz. Lincei, S. VIII, Vol. VII,Sez. I, 5 (1964), 91-140.
- [5] G. Duvaut, J. L. Lions, Les Inéquations en Mécanique et en Physique, Dunod, Paris, (1972).
- [6] W. Han, M. Sofonea, Evolutionary Variational inequalities arising in Viscoelastic contact Problems, SIAM journal of Numerical Analysis, 38(2000), 556-579.
- [7] M. Shillor, M. Sofonea, J.J. Telega, Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact, Lecture Notes Phys. 655, Springer, Berlin, 2004.
- [8] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage. Pure and Applied Mathematics 276, Chapman- Hall/ CRC Press, New York, 2006.

- [9] M. Sofonea, Flavius Patrulescu and Yahyeh Souleiman, Analysis of contact problem with wear and unilateral constraint, *Applicable Analysis*, 95(2016), pp. 2590-2607.
- [10] M. Sofonea and A. Matei, History-dependent Quasivariational Inequalities arising in Contact Mechanics, *European Journal of Applied Mathematics*, 22 (2011), 471–491.
- [11] M. Sofonea and A. Matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, London Mathematical Society Lecture Note Series 398, Cambridge University Press, 2012.
- [12] M. Sofonea and S. Migórski, *Variational-Hemivariational Inequalities with Applications*, Pure and Applied Mathematics, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton-London, 2018.
- [13] R.C. Batra, J.S. Yang, Saint-Venant's principle in linear piezoelectricity, *Journal of Elasticity* 38(1995), 209-218.
- [14] P. Bisenga, F. Lebon, F. Maceri, The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support. in *Contact Mechanics*, J.A.C. Martins and Manuel D.P. Monteiro Marques (Eds.), Kluwer, Dordrecht, 2002, 347-354.
- [15] W. Han, M. Sofonea, Evolutionary Variational inequalities arising in-Viscoelastic contact Problems, *SIAM journal of Numerical Analysis*, 38(2000), 556-579.
- [16] W. Han, M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*. Studies in Advanced Mathematics 30, American Mathematical Society, Providence, RI - Intl. Press, Sommerville, MA, 2002.
- [17] W. Han, On the numerical approximation of a frictional contact problem with normal compliance, *Numer. Funct. Anal. et Optimiz*, 17(1996), 307-321

- [18] W. Han, M. Sofonea, Analysis and numerical approximation of an elasticfrictional contact problem with normal compliance, *Applicaciones Mathematicae*, 26(1999), 415-435.
- [19] D. Motreanu, M. Sofonea, Quasivariationl inequalities and applications in frictional contact problems with normal compliance. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 10(2000), 103-118.
- [20] M. Frémond, Adhérence des Solides. *Journal. Mécanique Théorique et Appliquée* 6 (1987), 383-407. Paris, Série II 295 (1982), 913–916.
- [21] M. Frémond, Adhérence des Solides. *Journal. Mécanique Théorique et Appliquée* 6 (1987), 383-407.
- [22] M. Frémond, *Non-Smooth Thermomechanics*. Springer, Berlin, 2002.
- [23] Z. Lerguet, *Analyse de Quelques Problèmes de Contact avec Frottement et Adhésion*, Thèse de Doctorat en Mathématique Appliquées, Univ, Ferhat Abbas, setif, 2008.
- [24] M. Raous, L. Congemi , M. Cocu, A consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 177 (1999), 383–399.
- [25] M. Cocu, R. Rocca, Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion, *Math. Model. Num. Anal* 34, (2000), 981-1001.
- [26] R. S. Adams, “Sobolev spaces”, Academic press, New York (1975).
- [27] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris (1987).
- [28] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris (1967).
- [29] I. Ekeland, R. Temam, *Convex Analysis an Variational Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1976.

- [30] H. Brezis, Équations et inéquations nonlinéaires dans les espaces vectoriels en dualité, *Ann. Inst. Fourier*, 18 (1968), 115–175.
- [31] V. Barbu, T. Precupanu, *Convexity and optimisation in Banach spaces*, D. Reidel, Publishing Company, Dordrecht, 1986.
- [32] V. Barbu, *Optimal Control of Variational Inequalities. Research Notes in Mathematics*, vol. 100, Pitman, Massachusetts, 1984.
- [33] M. Sofonea, *Problèmes Nonlinéaires dans la Théorie de l'Elasticité Cours de Magister de Mathématiques Appliquées*, Université de Sétif, Algérie, 1993.
- [34] M. Sofonea, *Problèmes Mathématiques en Élasticité et Viscoplasticité, Cours de DEA de Mathématiques Appliquées*, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 1991.
- [35] J. Nečas and I. Hlaváček, “Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic. Bodies An Introduction”, Elsevier,” Amsterdam (1981).
- [36] D. Motreanu and M. Sofonea, Evolutionary variational inequalities arising in quasistatic frictional contact problems for elastic materials, *Abstr. Appl. Anal.* 4 (1999), 255-279.
- [37] P. Suquet, *Plasticité et Homogénéisation*, Thèse de Doctorat d'Etat, Univ, Pierre et Marie Curie, Paris 6 (1982).
- [38] I. R. Ionescu, M. Sofonea, “Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity”, Oxford University Press, Oxford, (1993).
- [39] M. Selmani, these doctorat en sciences, Etude Mathématique de quelques problèmes aux limites en mecanique du contact.
- [40] G. Duvaut. J. L. Lions, *Les inéquations en Mécanique et en Physique*. Springer, Berlin, 1976. (In French).
- [41] A. Merouani and F. Messelmi, Dynamic evolution of damage in elasticthermo-viscoplastic materials, *Electron. J. Differential Equ.* 2010 (2010), no. 129, pp. 1–15.

- [42] K. Sidhoum, A. Merouani, Variational analysis of a viscoelastic frictional contact with long-term memory body with thermal effects, *Advances in Mathematics : Scientific Journal* 12 (2023), no.3, 433–455
[https ://doi.org/10.37418/amsj.12.3.2](https://doi.org/10.37418/amsj.12.3.2)

Résumé: L'objet de cette thèse est l'étude variationnelle d'un problème en mécanique de contact pour des lois constitutives élastiques, viscoélastiques et viscoélastiques avec mémoire longue. Les résultats obtenus concernent l'existence et l'unicité d'une solution faible pour les problèmes considérés. La thèse est structurée en deux parties. La première partie est subdivisée en deux chapitres. Le premier chapitre est consacré à rappeler les différents modèles mécaniques de contact étudiés ainsi que quelques outils mathématiques nécessaires pour la suite de ce travail. Le deuxième chapitre est destiné à des rappels de l'analyse fonctionnelle non-linéaire telle que les inéquations variationnelles les lemmes de Grönwall et le théorème de point fixe. La deuxième partie est constituée de deux chapitres. Le premier chapitre traite l'étude d'un problème de contact statique avec compliance normale et contrainte unilatérale. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un problème analyse variationnelle d'un contact frictionnel viscoélastique avec un corps de mémoire à long terme à effets thermiques.

Mots clés : Mémoire à long terme, Compliance normale, Thermo-piézoélectrique, Inégalité variationnelle, Solution faible, Point fixe.

Abstract: The object of this thesis is the variational study of problem in contact mechanics for elastic, viscoelastic and viscoelastic constitutive laws with long memory. The results obtained concern the existence and the uniqueness of a weak solution for the considered problems. The thesis is structured in two parts. The first part is subdivided into two chapters. The first chapter is devoted to recalling the various mechanical models of contact studied as well as some mathematical tools necessary for the continuation of this work. The second chapter is intended for reminders of nonlinear functional analysis such as variational inequalities, Grönwall lemmas and the fixed point theorem. The second part consists of two chapters. The first chapter deals with the study of a static contact problem with normal compliance and unilateral constraint. The second chapter is devoted to the study of a variational analysis problem of a viscoelastic frictional contact with a long-term memory body with thermal effects.

Keys words: Long term memory, Normal compliance, Thermo-piezoelectric, Variational inequality, Weak solution , Fixed point.

ملخص: الهدف من هذه الأطروحة هو الدراسة التباينية لمسألة في ميكانيك التلامس للقوانين التأسيسية المرنة ، واللزجة اللزجة ذات الذاكرة الطويلة. النتائج التي تم الحصول عليها تتعلق بوجود ووحداية الحل ضعيف لهذه المسائل المطروحة. تتكون الأطروحة من جزأين. ينقسم الجزء الأول إلى فصلين. تم تخصيص الفصل الأول لاستدعاء النماذج الميكانيكية المختلفة للتلامس التي تمت دراستها بالإضافة إلى بعض الأدوات الرياضية اللازمة لتسهيل فهم هذا العمل. الفصل الثاني مخصص للتذكير بالتحليل الوظيفي غير الخطي مثل المتباينة المتغيرة و قضايا غرونوال ونظرية النقطة الثابتة.

الجزء الثاني يتكون من فصلين. يتناول الفصل الأول دراسة مشكلة اتصال ثابتة مع الامتثال العادي والقيود الأحادية. و الفصل الثاني مكرس لدراسة مشكلة تحليل التباين للتلامس الاحتكاكي اللزج مع جسم ذاكرة طويل المدى مع تأثيرات حرارية.

الكلمات المفتاحية: الذاكرة طويلة المدى ، التوافق الطبيعي ، الكهروضغطية الحرارية ، عدم المساواة المتغيرة ، الحل الضعيف ، النقطة الثابتة.