République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE FERHAT ABBAS, SETIF 1

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en-Sciences

Option : Mathématiques Appliquées

Par

Mr. DERGUINE Mustafa

Thème :

Analyse variationnelle et asymptotique de différents problèmes aux limites avec frottement et à mémoire dans des domaines minces

Thèse soutenue le **devant le jury composé de :**

Président	Mr.	Salim MESBAHI	Prof. UFA. Sétif 1
Directeur de thèse	Mr.	Hamid BENSERIDI	Prof. UFA. Sétif 1
Examinateurs :	Mr.	Amrane HOUAS	MCA. UMK. Biskra
	Mr.	Fateh MERAHI	MCA. UMBB. Batna 2
Invité	Mr.	Abdelkader SAADALLAH	MCA. UFA. Sétif

2022 / 2023

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENT

J'exprime mes vifs remerciements et toute ma reconnaissance à mon encadreur monsieur Prof. *Hamid BENSERIDI*, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de diriger ce travail et pour sa disponibilité malgré ses nombreuses préoccupations.
Je remercie monsieur Prof. *Salim MESBAHI* qui a bien voulu examiner ce travail et accepté d'être le président de jury. Je remercie également monsieur Dr. *Amrane HOUAS* et monsieur Dr. *Fateh MERAHI*, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en participant au jury de cette thèse .
Je remercie aussi tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin surtout à concrétiser ce travail.
Je profite aussi de cette occasion pour remercie tous les enseignants du département de mathématiques de l'université Ferhat Abbas de Sétif et mes collègues de toutes mes années scolaires et universitaires.

DÉDICACES

Je dédie mon modeste travail à ma famille, qui était toujours à mes côtés et qui m'a beaucoup encouragé :

ma mère,

mon père,

ma femme,

mes frères,

mes sœurs,

mes enfants,

sans oublier tous mes amis.

Derguine Mustafa

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Une multitude de problèmes physiques et d'ingénierie nécessitent une étude réelle de modèles prenant en compte des effets tels que le durcissement et les matériaux de mémoire. Il est bien connu que les matériaux viscoélastiques ont une large application en sciences naturelles car ils présentent un amortissement naturel, qui est dû à la propriété particulière de ces matériaux de garder la mémoire de leur histoire. Cette propriété a attiré l'attention de nombreux mathématiciens, où les effets mémoire de ces matériaux sont modélisés par des équations intégro-différentielles. Dans la littérature mathématique, plusieurs études de modèles de viscosité ont été menées avec différentes conditions aux limites. Lions [17] a donné quelques modèles pour les lois de comportement en viscosité, il a ensuite étudié l'existence et l'unicité de solution pour certains problèmes de viscosité avec le frottement de Tresca. La stabilité asymptotique des équations de viscoélasticité linéaires avec conditions aux limites de Dirichlet est étudiée dans [11]. Dans [9], une étude est menée sur l'existence et les taux de décroissance uniformes pour les solutions du problème de viscosité semi-linéaire, l'existence et l'unicité de solutions régulières et faibles sont ensuite prouvées. Sofonea et al [31] ont étudié l'existence et l'unicité de la solution faible d'un problème de contact anti-plan pour les matériaux viscoélastiques à mémoire à long terme et frottement de Tresca. De plus, une analyse numérique de certains problèmes de viscosité avec mémoire à long terme et frottement de type Tresca est donnée dans [24] et [25].

Plus récemment, de nombreux auteurs ont appliqué des méthodes asymptotiques à des problèmes de viscosité et d'élasticité tridimensionnelles afin de dériver de nouveaux modèles réduits à d'autres modèles unidimensionnels ou bidimensionnels. On peut retrouver l'étude de l'analyse asymptotique pour une famille de coques en matériau viscoélastique avec mémoire à long terme sans frottement pour justifier les problèmes limites bidimensionnels en [18] et [19]. Dilmi et Benseridi dans [5] ont utilisé l'analyse asymptotique pour justifier les résultats de convergence et le problème limite bidimensionnel d'un problème dynamique d'élasticité isotherme avec le frottement non linéaire de Tresca. La convergence asymptotique d'un problème dynamique d'élasticité linéaire non isotherme avec frottement a été étudiée dans [27]. Une analyse asymptotique des problèmes aux limites pour l'élasticité linéaire à terme non linéaire en régime stationnaire a été étudiée dans [6] et [13]. Dans [23] Paumier a étudié la modélisation asymptotique d'une plaque élastique mince en contact unilatéral avec un frottement contre un obstacle rigide (problème de Signorini avec frottement), où il a prouvé que toute famille de solutions du problème tridimensionnel de Signorini avec un frottement converge fortement vers une solution unique d'un problème bidimensionnel de plaque de type Signorini sans frottement. Bayada et Lhalouani [3] ont étudié l'analyse asymptotique et numérique d'un problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb entre un corps élastique et une fine couche souple élastique. Benseghir et al [4] ont étudié l'analyse théorique d'un contact sans frottement entre deux corps élastiques généraux en régime stationnaire dans un domaine mince tridimensionnel avec la loi de frottement de Tresca.

Concernant l'analyse asymptotique d'un fluide incompressible dans un domaine mince, avec des conditions aux limites de frottement pour le cas stationnaire nous invitons le lecteur à voir [2, 14]. Des résultats concernant l'étude des phénomènes de la mécanique des milieux continus ont été obtenus par plusieurs auteurs. Par exemple, A. Saadallah dans [26] sur la comportement asymptotique de différents problèmes de contact avec frottement en film mince dans le cas isotherme et non-isotherme. Dilmi et Benseridi dans [15] ont établit l'analyse asymptotique d'un fluide de Bingham dans une couche mince avec des conditions aux limites de Fourier et Tresca. L'étude des écoulements isothermes et non-isothermes des fluides non Newtoniens (Loi de Carreau, loi de puissance) est donnée par F. Boughanim dans [7].

Dans le même cercle d'idée, plusieurs résultats concernant l'étude du phénomène de lubrification par des fluides Newtoniens avec glissement ont été obtenus dans [30] lorsqu'on prend aussi en considération l'effet de la température. Le comportement asymptotique de fluide de Bingham dans une couche mince a été étudié par [15]. Lorsque ce dernier opérateur est perturbé par un terme dissipatif, ce travail a été obtenu par [30].

Récemment, un grand nombre de problèmes physiques et d'ingénierie réels sont apparus qui ont rendu nécessaire l'étude de modèles prenant en compte les effets d'épaisseur et de mémoire sur un matériau et sa stabilité.

L'un des buts de l'analyse asymptotique est d'obtenir et de décrire un problème bidimensionnel **(2D)** à partir d'un problème tri-dimensionnel **(3D)**, en passant à la limite sur l'épaisseur du domaine (3D) supposé déjà mince.

Dans ce travail, nous analysons le comportement asymptotique du champ de déplacement tridimensionnel d'un corps constitué d'un matériau viscoélastique à mémoire courte terme ou long terme en présence d'une loi de frottement de Tresca sur une partie de la frontière et d'une condition de Dirichlet sur l'autre partie, comme l'épaisseur est proche de zéro. Ce modèle prend en compte l'historique des déformations ou contraintes antérieures subies par le matériau. L'effet mémoire se traduit par un mécanisme d'amortissement précis qui contrôle la stabilité des systèmes dynamiques. Donc l'objectif de ce travail est de justifier mathématiquement le modèle bidimensionnel du problème de viscosité linéaire tridimensionnel doté d'une mémoire longue distance et de la loi de frottement de Tresca. Ce travail donne une généralisation et une investigation de certains des résultats obtenus dans les articles mentionnés précédemment. Le premier point fort est que cette étude prend en compte les matériaux avec le terme mémoire. Le deuxième point quelles sont les conditions appliquées pour obtenir des estimations qui nous permettent d'atteindre le problème limite. Dans la présente étude, nous aurons à résoudre l'ensemble des difficultés que nous rencontrons du fait du changement de contexte. La première difficulté est de formuler la preuve de certaines estimations sur le déplacement et la vitesse. La deuxième difficulté est de savoir quel sera le comportement asymptotique du matériau lorsque le l'épaisseur du film mince est très petite.

Les problèmes considérées dans ce travail est très fréquent dans les applications. Par exemple, les domaines physiques sont définis de telle sorte que la hauteur est beaucoup plus petite que la longueur, utilisés en particulier par les industrie mécaniques et électroménagers telles que l'électroménager et l'automobile (essuie glace, ventilation, démarreur, levé vitre, ...).

Ce travail se décompose en trois chapitres, voici une esquisse du plan de ce travail :

Le but du premier chapitre est d'exposé les outils mathématiques utilisés dans la suite de la thèse qui concernent les espaces de Sobolev et de Hilbert et quelques résultats de l'analyse fonctionnelle comme la théorie des traces, la formule de Green et les inégalités de Korn, Poincaré, Hölder et Cauchy-Schwarz. Le candidat a terminé ce chapitre par un rappel sur les lois générales de la mécanique des milieux continus, particulièrement : l'équation de mouvement, loi de comportement élastique et les conditions de frottement de type Tresca.

Le deuxième chapitre est consacré aux résultats d'existence et d'unicité de la solution faible d'un problème associé à déformation d'un corps viscoélastique, avec des conditions de frottement non linéaire, de type Tresca et à mémoire courte dans un domaine mince de 3D. Dans une première étape, on donne des notations ainsi que la position du problème considéré. Ensuite on montre que le problème présenté sera équivalent à un nouveau problème variationnel. Après la formulation variationnelle du problème, on passe à l'étude de l'analyse asymptotique pour cela, en utilisant le changement d'échelle et des nouvelles inconnus pour mener l'étude sur un domaine ne dépend pas de ε. Enfin, on cherche des estimations à priori indépendamment du paramètre ε, ensuite en passant à la limite, on obtient le problème limite et l'équation faible généralisée. Cette étude est basée sur la formulation variationnelle, l'inégalité de Poincaré, Cauchy-Shwarz, Young, Hölder, Korn et Gronwell. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet d'une publication donnée dans [12].

Dans le dernier chapitre, on étudie le comportement asymptotique d'un problème aux limites à mémoire langue dans un domaine tridimensionnel mince noté Ω^{ε} en régime dynamique avec frottement non linéaire de type Tresca où ε est un réel entre 0 et 1. Le problème complet est donné par :

Problème P^{ε} **:** trouver $u^{\varepsilon}=(u_i^{\varepsilon})_{1\leq i\leq 3}:\Omega^{\varepsilon}\times]0,T[\to\mathbb{R}^3$ telle que :

$$\frac{\partial^2 u^{\varepsilon}}{\partial t^2}-Div\left(\sigma^{\varepsilon}(u^{\varepsilon})\right)=f^{\varepsilon}\ \text{ dans } \Omega^{\varepsilon}\times\,]0,T[\,,$$

$$\sigma\left(u^{\varepsilon}\right)=\mathcal{E}e\left(u^{\varepsilon}\right)+\int_0^t g(t-s)e\left(u^{\varepsilon}\right)(s)ds,\ \text{ dans } \Omega^{\varepsilon}\times\,]0,T[$$

$$u^{\varepsilon}=0 \text{ sur } \left(\Gamma_1^{\varepsilon}\cup\Gamma_L^{\varepsilon}\right)\times\,]0,T[\,,$$

$$\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}.n=0 \text{ sur } \omega\times\,]0,T[\,,$$

$$\left.\begin{aligned}&|\sigma_{\tau}^{\varepsilon}|<\pi^{\varepsilon}\implies(\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t})_{\tau}=0,\\&|\sigma_{\tau}^{\varepsilon}|=\pi^{\varepsilon}\implies\exists\beta\geq 0 \text{ tel que } (\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t})_{\tau}=-\beta\sigma_{\tau}^{\varepsilon},\end{aligned}\right\}\text{sur } \omega\times\,]0,T[\,,$$

$$u^{\varepsilon}(x,0)=u_0(x) \text{ et } \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(x,0)=u_1(x),\ \forall x\in\Omega^{\varepsilon}.$$

Pour l'étude de ce problème, en suivant les étapes suivantes : Premièrement, nous allons établir la formulation variationnelle du problème présenté et prouver l'existence et l'unicité de la solution faible. Ensuite, on étudie le comportement asymptotique lorsque le petit paramètre ε tend vers zéro. Finalement, à l'aide d'une estimation à priori, on donne le problème limite et l'équation faible généralisée dans le plan.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Contenu

1.1 Notation

Le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}$ sont définis par

$$uv = u_i v_i ; \|v\| = (v;v)^{\frac{1}{2}} \ \ \forall u; v \in \mathbb{R}^d.$$

$$\sigma\tau = \sigma_i \tau_i : \|\tau\| = (\tau;\tau)^{\frac{1}{2}} \forall \sigma; \tau \in \mathbb{S}^d.$$

avec la convention de sommation d'Einstein.

Notons par u, le champ de déplacement et par σ, le champ des contraintes. Dès lors,pour un vecteur un donné, un et u_τ représentent respectivement les composantes normale et tangentielle de u sur γ, i.e.

$$u_n = u.n = u_i.n_i$$

$$u_{\tau_i} = u_i - u_n.n$$

De même, σ_n et σ_τ désignent les contraintes normale et tangentielle sur γ, i.e.

$$\sigma_n = (\sigma n).n = \sigma_{ij} n_i.n_j$$

$$\sigma_\tau = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n.n$$

Notons également qu'un indice suivant une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante de la variable ; $u_{i;j} = \dfrac{\partial u_i}{\partial u_j}$.

Enfin d_{ij} et div désignent respectivement le tenseur de déformation linéarisé (le terme d'ordre 2 est négligé dans le cadre des petites perturbations)et l'opérateur de divergence, i.e.

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j;i}), div(\sigma) = \sigma_{ij,k}$$

1.2 Équations générales de la mécanique des milieux continus

Nous rappelons ici les résultat essentiels de la théorie des milieux continus. Ce rappel portera sur les lois de conservation locales.

Les problèmes des milieux continus se modélisant d'une part par les trois lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie qui forment les principes de base et d'autre part par les lois de comportement spécifiques à chaque type de milieux continu. Considérons un milieux continu qui occupe un domaine ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ pendant un intervalle de temps $[0, T_f]$.

1) La loi de conservation de la quantité de mouvement.

Elle est déduite du principe fondamental de la dynamique

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = div\,(\sigma) + \rho f \tag{1.1}$$

où le vecteur f, de composantes $f_i (i = 1, 2, 3)$, représente une distribution volumique des forces extérieures. Le tenseur σ, pour composantes $\sigma_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$, est le tenseur des contraintes, et div représente l'opérateur divergence pour les tenseurs :

$$div\sigma = (\sigma_{ij,j}) = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Le processus d'évolution défini par (1.1), s'appelle processus dynamique.

On remarque que l'équation (1.1) contient un terme non linéaire par rapport aux composantes de la vitesse. Les équations (1.1) sont connues sous le nom d'équations du mouvement. S'il s'agit d'un problème de statique le premier membre des équations (1.1) est identiquement nul et on les appelle équations d'équilibre ; elle sont alors linéaires par rapport aux composantes σ_{ij} du tenseur des contraintes.

$$div\,(\sigma) + \rho f = 0 \tag{1.2}$$

2) La loi de conservation de l'énergie est :

$$\sigma \frac{de}{dt} = \sigma : D\,(u) - div\,(q) + r$$

où e est un scalaire qui désigne l'énergie interne spécifique du milieu continu, r est un l'apport massique de la chaleur, q est le vecteur transport d'énergie et $D\,(u)$ est le tenseur des taux de déformation, de composantes :

$$d_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad 1 \leq i,\ j \leq 3$$

$\sigma : D(u)$ est le produit dyadique de deux tenseurs σ et $D(u)$ défini par

$$\sigma : D(u) = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij} d_{ij}(u)$$

1.3 loi de comportement viscoélastique

La loi de comportement d'un matériau viscoélastique est donnée par

$$\sigma = A\varepsilon(\dot{u}) + G\varepsilon(u)$$

où A est la fonction de viscosité non linéaire, G représente le tenseur d'élasticité.

1.4 Conditions aux limites de contact avec frottement

Maintenant, nous présentons quelques exemples sur les lois de frottement intervenant dans cette thèse.
Le frottement est la relation qui existe entre les efforts tangentiels (forces de frottement) sur la zone de contact et le mouvement tangentiel relatif des deux corps (glissement).
Les phénomènes physiques à faire apparaître dans une loi de frottement sont l'existence d'un seuil d'effort en dessous duquel aucun glissement n'est possible et une éventuelle dépendance de ce seuil à l'intensité des efforts normaux. Pour définir les

lois de frottement, on définit le glissement et la vitesse de glissement par :

$$\begin{aligned} u_n^{\varepsilon} &= u^{\varepsilon}.n = u_i^{\varepsilon}.n_i, \\ u_{\tau_i}^{\varepsilon} &= u_i^{\varepsilon} - u_n^{\varepsilon} n_i, \\ \sigma_n^{\varepsilon} &= (\sigma.n)\, n = \sigma_{ij}^{\varepsilon} n_i n_j, \\ \sigma_{\tau_i}^{\varepsilon} &= \sigma_{ij}^{\varepsilon} n_j - \sigma_n^{\varepsilon} n_i, \end{aligned}$$

La plus simple des lois de frottement est la loi de Tresca qui s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| < g \implies u_\tau = s \quad \text{(Adhérence)} \\ |\sigma_\tau| = g \implies \exists \lambda > 0 \text{ tel que } u_\tau = s - \lambda \sigma_\tau \text{ (Glissement)} \end{cases}$$

et dans le cas dynamique :

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| < g \implies \dfrac{\partial u_\tau}{\partial t} = 0 \quad \text{(Adhérence)} \\ |\sigma_\tau| = g \implies \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \dfrac{\partial u_\tau}{\partial t} = -\lambda \sigma_\tau \text{ (Glissement)} \end{cases}$$

où g est un seuil de d'adhérence/glissement fixé a priori, σ_τ la contrainte tangentielle et $\dfrac{\partial u_\tau}{\partial t}$ la vitesse relative tangentielle entre les deux corps en contact.

1.5 Espaces fonctionnels

Nous commençons par un rappel d'analyse fonctionnelle concernant l'espace des distributions, les espaces $L^p(\Omega)$ et les notions principales de la convergence faible. Ensuite, nous présentons également les espaces de Sobolev, et les principales propriétés notamment les théorèmes de trace. Nous finissons quelques lemmes du type Gronwall, qui seront de plus utiles notamment dans la démonstration d'unicité des solutions faibles ainsi que les majorations et d'estimations d'erreurs.

1.5.1 Quelque rappels d'analyse fonctionnelle

Nous allons introduire dans ce paragraphe un résume de l'analyse fonctionnelle, et quelques résultats qui interviennent dans l'étude de ce mémoire. De nombreux ouvrages parcourent ce sujet, nous renvoyons le lecteur de plus de détales à par exemple [1, 8].

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On désigne par $C_0^\infty(\Omega)$ (ou $D(\Omega)$) l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω.

On munit $C_0^\infty(\Omega)$ de la « pseudo-topologie » c'est-à-dire qu'on définit une notion de convergence dans $C_0^\infty(\Omega)$.

1. L'espace des distributions : $D^{'}(\Omega)$ est le « dual » de $D(\Omega)$, c'est-à-dire l'espace de formes linéaires continus sur $D(\Omega)$. On note $\langle T, \phi \rangle = T(\phi)$ le produit de dualité entre une distribution $T \in D^{'}(\Omega)$ et une fonction $\phi \in D(\Omega)$: ce produit de dualité généralise l'intégrale usuelle $\int_\Omega T\phi dx$. En effet, on vérifie que si f est une fonction localement intégrable dans Ω, alors on peut définir une distribution T_f par

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_\Omega f\phi dx.$$

On peut aussi munir $D^{'}(\Omega)$ d'une notion de convergence : on dit qu'une suite $T_n \in D^{'}(\Omega)$ **convergence au sens des distributions** vers $T \in D^{'}(\Omega)$ si, pour tout $\phi \in D^{'}(\Omega)$,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \langle T, \phi_n \rangle = \langle T, \phi \rangle .$$

Définissons maintenant la **dérivation au sens des distributions** : si $T \in D^{'}(\Omega)$, la dérivée $\dfrac{\partial T}{\partial x_i} \in D\prime(\Omega)$ est définie par :

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \phi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle, \qquad \forall \phi \in D(\Omega), \tag{1.3}$$

Pour tout $1 \leq p < \infty$, on note $L^p(\Omega)$ l'espace définie par

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable}; \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\dfrac{1}{p}},$$

et pour $p = \infty$, on note

$$L^p(\Omega) = \{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable}; \quad supess_{x \in \Omega} |u(x)| < +\infty \},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} = supess_{x\in\Omega} |u(x)|,$$

où $supess_{x\in\Omega} |u(x)| = \inf\{M > 0 \quad / \quad |u(x)| \leq M \quad p.p\}$.
Pour tout $1 \leq p \leq \infty$ on notera q l'exposant conjugué de p défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec convention $\frac{1}{\infty} = 0$. Pour tout $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, on a $uv \in L^1(\Omega)$ et $\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^q(\Omega)}$ **(l'inégalité de Hölder**).

Théorème 1.5.1. *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions intégrables telle que $u_n \longrightarrow u$ dans $L^1(\Omega)$. Alors il existe une sous suite $(u_{n_k})_k$ et $v \in L^1(\Omega)$ telle que*
$u_n \longrightarrow u \quad p.p$ dans Ω et $|u_{n_k}| \leq v \quad p.p$ dans Ω.

2. Convergence faible.

Définition. Soit E un espace de Banach. Une suite $(u_n) \subset E$ converge faiblement dans E vers un élément $u \in E$, et on note $u_n \rightharpoonup u$, si

$$\langle f, u_n\rangle \longrightarrow \langle f, u\rangle, \forall f \in E', \text{ou} \quad E' \text{ est le dual de } E$$

.

Théorème 1.5.2. *(**de Eberlien et Smulyan**).*
Soit E un espace de Banach réflexif, et soit (x_n) une suite borné dans E. Alors il existe une sous suite (x_{n_k}) qui converge faiblement vers E.

Proposition 1.5.1. *Soit E un espace de Banach, et une suite $(u_n) \subset E$. Alors*

1. *$u_n \longrightarrow u$ implique $u_n \rightharpoonup u$.*
2. *Si E est un espace de dimension finie, alors la convergence faible et la convergence forte sont équivalentes.*
3. *Si $u_n \longrightarrow u$, alors (u_n) est bornée et $\liminf_{n\longrightarrow\infty} \|u_n\| \geq \|u\|$.*
4. *Si $u_n \rightharpoonup u$ dans E et $f_n \longrightarrow f$ dans E, alors il suit que $\langle f_n, u_n\rangle \longrightarrow \langle f, u\rangle$.*
5. *Si $u_n \longrightarrow u$ dans E et $f_n \rightharpoonup f$ dans E', alors il suit que $\langle f_n, u_n\rangle \longrightarrow \langle f, u\rangle$.*

Définition 1.5.1. Soit E un espace de Banach, une suite $(f_n) \subset E\prime$ converge faiblement étoile vers un élément $f \in E'$, et on note $f_n \rightharpoonup^* f$, si

$$\langle f_n, u\rangle \longrightarrow \langle f, u\rangle, \forall u \in E.$$

Théorème 1.5.3. ***(d'Aloaglu)****. Soit E un espace de Banach, et soit (f_n) une suite bornée dans $E^{'}$ le dual de E. Alors il existe une sous-suite f_{n_k} qui converge faiblement dans $E^{'}$.*

Proposition 1.5.2. *Soit E un espace de Banach, et une suite (f_n) une suite dans E' le dual d'espace E.*

1. *$f_n \longrightarrow f$ implique $f_n \rightharpoonup^* f$.*
2. *Si E est réflexif, alors $f_n \rightharpoonup^* f$ est équivalente à $f_n \rightharpoonup f$ dans $E^{'}$*
3. *Si $f_n \rightharpoonup^* f$, alors (f_n) est bornée et $\liminf\limits_{n\longrightarrow\infty} \|f_n\| \geq \|f|$.*
4. *Si $f_n \rightharpoonup f$ dans $E^{'}$ implique $f_n \rightharpoonup^* f$.*
5. *Si $u_n \longrightarrow u$ dans E et $f_n \rightharpoonup^* f$ dans $E^{'}$, alors il suit que $\langle f_n, u_n\rangle \longrightarrow \langle f, u\rangle$.*

3. Convergence faible dans les espace de Hilbert.

Théorème 1.5.4. ***(Théorème de représentation de Riesz-Fréchet)****. Soit H un espace de Hilbert réel et $(.,.)_H$ un produit scalaire de H. Pour tout $\varphi \in H^{'}$, il existe $f \in H$ unique tel que*

$$\langle \varphi, v\rangle_{H, \times H} = \langle f, v\rangle_H \qquad \forall v \in H \quad \textit{et} \quad \|\varphi\|_{H'} = \|f\|_H \,.$$

Nous dirons qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans H converge faiblement vers $f \in H$ si pour tout $v \in H$, les produits scalaires $\langle f_n, v\rangle$ convergent vers $\langle f, v\rangle$ dans $\mathbb{R}$. Nous noterons cette convergence par le symbole $\rightharpoonup$ pour la distinguer de la convergence forte (c'est-à-dire pour la norme hilbertienne) :

$f_n \longrightarrow f \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \|f_n - f\| = 0.$

$f_n \rightharpoonup f \Longleftrightarrow \forall v \in H, \quad \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (f_n, v) = (f, v)\,.$

Proposition 1.5.3.

1. *Une suite dans H qui converge fortement vers $f \in H$ converge aussi faiblement vers f.*
2. *la propriété « toute suite dans H qui converge faiblement vers $f \in H$ converge fortement vers f » est vraie si et seulement si la dimension de H est finie.*
3. *Toute suite faiblement convergente est bornée.*

4. *Si E et F sont des espaces de Hilbert réels, si $u \in L(E, F)$, alors l'image par u de toute suite dans E faiblement convergente vers un élément $x \in E$ est faiblement convergente dans F vers $u(x)$.*

Le résultat crucial suivant est une conséquence du théorème de Riesz-Fréchet et du théorème 1.5.3 de Banach-alaoglu.

1.5.2 Rappels sur les espaces de Sobolev

Nous définissons les espaces de Sobolev qui sont les espaces des fonctions permettant de résoudre les formulations variationnelles d'équations aux dérivées partielles. Leur compréhension est donc une étape nécessaire avant d'aborder les équations en question. Nous reprenons dans cette sous section certains énoncés de O.Kavian et de Brezis [8] sur le sujet, pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev, on pourra consulter l'ouvrage de R.A. Adams [1] Par la suite, Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$. pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables de carré sommable dans Ω.
Muni du produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int u(x)v(x)\ dx,$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert. On note

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

la norme correspondante.

Définition 1.5.2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in \{1, ...d, \} \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\right\},$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle de u au sens des distribuerions (1.3)

Proposition 1.5.4. *L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (u(x)v(x) + \nabla u(x)\nabla v(x))\ dx \tag{1.4}$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 \ dx\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert[8]. Voici l'inégalité très utile portant sur les normes de Sobolev.

Proposition 1.5.5. ***(Inégalité de Poincaré.)***

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, alors il existe une constante C telle que pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} .$$

En particulier, $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme équivalente de H_0^1 (H_0^1 désigne sous espace vectoriel des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur Γ).

Trace des fonction $H^1(\Omega)$ On peut mentionner le résultat suivant sur les traces des fonctions $H^1(\Omega)$.

Théorème 1.5.5. ***(Inégalité de Cauchy-Schwartz)***

Soit H un espace préhilbertien. Alors :

$$\forall (x, y) \in H^2, |\langle x, y\rangle| \geq \|x\| \|y\| .$$

Inégalité de Hölder

Il s'agit d'une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition 1.5.3. Si $p \in [1, +\infty[$, l'exposant conjugué de p est l'unique $q \in [1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

On fait les mêmes hypothèses que pour les inégalités de Cauchy-Schwarz. On a alors :

$$\sum |t_k| |m_k| \leq \left(\sum |t_k|^{\frac{1}{p}}\right)^p . \left(\sum |m_k|^{\frac{1}{q}}\right)^q$$

$$\int |t_k| |m_k| \leq \left(\int |t_k|^{\frac{1}{p}}\right)^p . \left(\int |m_k|^{\frac{1}{q}}\right)^q$$

pour tout $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^{p'}$, on a :

$$uv \in L^1(\Omega) \ et \ \|uv|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} . \|v\|_{L_{p'}(\Omega)} \quad (\textbf{Inégalité de Hölder}).$$

$$ab \leq \frac{a^r}{r} + \frac{b^{r'}}{r'}, \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \qquad (\textbf{L'inégalité de Young}).$$

Théorème 1.5.6. *Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$. Alors il existe un opérateur linéaire continu $\gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$, appelé opérateur trace, tel que*
$\gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$ est compact.

On définit l'espace vectoriel $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ comme suit :

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \left\{\gamma(u); \quad u \in H^1(\Omega)\right\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega} = \inf\left\{\|u\|_{1,\Omega}; \quad \gamma(u) = f\right\}.$$

Les premières propriétés les plus remarquables et utiles à notre exposé sont les suivantes :

1. Si $u \in H^1(\Omega)$, alors $\gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, est linéaire surjectif et

$$\|\gamma(u)\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega} \leq C\,\|u\|_{1,\Omega} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

2. Comme Ω est régulier, toute fonction $u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ est la trace d'une fonction $v \in H_0^1(G)$, i.e $v_{|\partial\Omega} = u$, où G est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenant Ω.

   Sur les questions concernant les espaces traces, voir par exemple J.L. Louis E. Magnes [21]

   Le théorème de trace permet de généraliser aux fonctions de $H^1(\Omega)$ la formule de Green établie pour des fonctions de classe C^1.

Théorème 1.5.7. ***(Formule de Green).*** *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1. Si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, elles vérifient*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x)\,d\sigma,$$

où $n = (n_i)_{1\leq i\leq d}$ est la normale unité extérieure à $\partial\Omega$.

Formule de Green pour l'élasticité

On munit l'espace produit $H^1(\Omega)^d$ du produit scalaire canonique et de la norme associée respectivement $(.,.)_{1,\Omega}$ et $\|.\|_{1,\Omega}$ qui sont définis par :

$$(u,v)_{1,\Omega} = \int_\Omega u_i v_i \, dx + \int_\Omega u_{i,j} v_{i,j} \, dx, \tag{1.5}$$

$$\|v\|_{1,\Omega}^2 = \int_\Omega |v|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx.$$

Et la norme de $L^2(\Omega)$ sera notée $\|.\|_{0,\Omega}$.

Nous rappelons que l'application de trace $\gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\mathit{\Gamma})^d$ est linéaire continue, mais n'est pas surjective. Limage de $H^1(\Omega)^d$ par cette application est notée par $H_{\mathit{\Gamma}}$, ce sous espace s'injecte continûment dans $L^2(\mathit{\Gamma})^d$. pour σ assez régulier nous avons la formule de Green :

$$\int_\Omega \sigma : \varepsilon(u) \, dx + \int_\Omega Div(\sigma).u \, dx = \int_\Gamma \sigma\nu.v \, d\Gamma \qquad \forall v \in H^1(\Omega)^d. \tag{1.6}$$

Un résultat essentiel pour les applications du prochain chapitre est l'inégalité suivante :

Théorème 1.5.8. ***(Inégalité de Korn).*** *Soit Ω un domaine régulier borné de $\mathbb{R}^d$ de classe C^1. Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)^d$, on a :*

$$\int_\Omega v_i v_i \, dx + \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v) \, dx \geq C \|v\|_{1,\Omega}^2 .$$

1.6 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Soit $0 < T < +\infty$ et soit V un espace de Banach réel de norme $\|.\|_V$. On définit les espaces à valeurs vectorielles suivants :

$$C(0,T;V) = \{u : [0,T] \to V \ \text{ continue}\},$$
$$L^p(0,T;V) = \left\{u : [0,T] \to V \text{ mesurable : } \int_0^T \|u(t)\|_V \, dt < \infty\right\}, 1 \leq p < \infty,$$
$$L^\infty(0,T;V) = \{u : [0,T] \to V \text{ mesurable : } \exists C > 0 \ \|u(t)\|_V \leq C, \ \forall t \in [0,T]\}$$

munis des normes

$$\|u\|_{C(0,T;V)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_V ,$$
$$\|u\|_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p \ dt\right)^{\frac{1}{p}} ,$$
$$\|u\|_{L^\infty(0,T;V)} = \inf\{C > 0 \ ; \ \ \|u(t)\|_V \le C \ \ \forall\, t \in [0,T] \ \} .$$

On note par $C_c^\infty(0,T;V)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans $]0,T[$ à valeurs dans V.

On note aussi par $H^1(0,T;V)$ l'espace de Sobolev sur $]0,T[$ à valeurs dans V, défini par

$$H^1(0,T;V) = \left\{ u \ : \quad u \in L^2(0,T; \ V) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T; \ V) \ \right\},$$

tel que la dérivée $\dfrac{\partial}{\partial t}$ est définie par

$$\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(t)\,\phi(t) \ dt = -\int_0^T u(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\phi(t) \ dt \ , \quad \forall \phi \in C_0^\infty(]0,T[).$$

Proposition 1.6.1. $L^p(0,T;V)$ *avec* $1 \le p \le \infty$ *est un espace de Banach.*

$L^p(0,T;V) \subset L^q(0,T;V)$ *avec injection continue* $1 \le q \le p \le \infty$.

Si V *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire* $(.,.)_V$ *, alors :*

$L^2(0,T;V)$ *est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire* :

$$(u,v)_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T (u(t)\,,v(t))_V\,dt$$

$L^p(0,T;V)' = L^q(0,T;V)$ *pour* $1 < q,p < \infty$ *et* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

$L^1(0,T;V)' = L^\infty(0,T;V)$

avec $L^p(0,T;V)'$ *est le dual de* $L^p(0,T;V)$ *pour* $1 \le p \le \infty$.

Théorème 1.6.1. *Soit* V *un espace de Banach réflexif et soit* $u \in L^2(0,T;V)$*. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

$u \in H^1(0,T;V)$.

Il existe $u_0 \in V$ *et* $g \in L^2(0,T;V)$*, telle que* $u(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t g(s)\,ds, \ \ \forall t \in [0,T]$.

Théorème 1.6.2. *Soit* $(V,(.,.)_V)$ *un espace de Hilbert et soit* $u \in H^1(0,T;V)$. *Alors :*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_V^2 &= (\dot{u}(t), u(t))_V, \quad forall\ t \in]0,T[,\\
\frac{1}{2}\|u(t)\|_V^2 &= \frac{1}{2}\|u(0)\|_V^2 + \int_0^t (\dot{u}(s), u(s))_V\ ds, \quad forall\ t \in]0,T[.
\end{aligned}$$

Théorème 1.6.3. *Soient* V, W *deux espaces de Hilbert de normes respectives* $\|.\|_V$, $\|.\|_W$ *qui vérifient les hypothèses suivantes :*

$$\begin{cases} V \text{ dense dans } W, \\ \quad V \subset W \subset V', \end{cases}$$

et soit K un sous-ensemble fermé non vide et convexe de V. On se donne une forme bilinéaire $a(.,.) : K \times K \to \mathbb{R}$ continue sur K qui satisfait :

$$\begin{aligned}
\text{il existe } \rho \text{ et } \alpha &> 0 \text{ tels que}\\
a(v,v) + \rho\|v\|_W^2 &\geq \alpha\|v\|_V^2, \ \forall v \in V.
\end{aligned}$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ *et* $f \in L^2(0,T;V')$, *il existe une unique fonction* u *qui satisfait*

$$\begin{gathered}
\langle \dot{u}(t), v - u(t)\rangle_{V'\times V} + a(u(t), v-u(t)) \geq \langle f, v-u(t)\rangle_{V'\times V} \ , \forall v \in K, \forall\ t \ \in [0,T],\\
u \in L^2(0,T;V) \cap C(0,T;W) \cap H^1(0,T;V'),\\
u(t) \in K, \forall t \in [0,T],\\
u(0) = u.
\end{gathered}$$

En outre, si $u_0 \in K$ *et* $f \in L^2(0,T;W)$, *alors* u *vérifie*

$$u \in L^2(0,T;V) \cap H^1(0,T;W).$$

1.7 Lemme de Gronwall

Lemme 1.4.1. *Soient* f, $\varphi \in C(0,\ T,\ \mathbb{R})$ *deux fonctions positives pour tout* $t \in [0,\ T]$, *et soit* $a \geq 0$. *Si* $\psi \in C(0,\ T,\ \mathbb{R})$ *est une fonction telle que :*

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t f(s)\,ds + \int_0^t \varphi(s)\,\psi(s)\,ds, \quad \forall t \in [0,\ T].$$

Alors
$$\psi(t) \leq \left(a + \int_0^t f(s)\, ds\right) \exp\left(\int_0^t \varphi(s)\, ds\right), \quad \forall t \in [0,\ T].$$

Pour le cas $f = 0$, ce lemme devient.

Corollaire 1.4.1. *Soit $\varphi \in C(0,\ T,\ \mathbb{R})$ telle que $\varphi(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,\ T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\psi \in C(0,\ T,\ \mathbb{R})$ est une fonction telle que*

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t \varphi(s)\, \psi(s)\, ds, \quad \forall t \in [0,\ T].$$

Alors
$$\psi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t \varphi(s)\, ds\right), \quad \forall t \in [0,\ T].$$

1.8 Propriétés de semi-continuité inférieure

Nous rappelons dans cette sections quelque notions d'analyse convexe. Nous considérons des fonctions φ définies sur un espace vectoriel réel X et à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$.

1. Une telle fonction est dite propre si elle n'est pas identique à $+\infty$ c'est à dire s'il existe $v_0 \in X$ tel que $\varphi(v_0) < +\infty$.
2. La fonction φ est dite convexe si

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v)$$

   pour tout $u, v \in X$ et $t \in]0, 1]$.
3. La fonction φ est dite strictement convexe si

$$\varphi(tu + (1-t)v) < t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v)$$

   pour tout $u, v \in X$ et $u \neq v$.
4. Une fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$, est dite semi-continue inférieurement si et seulement si

$$\liminf_n \varphi(v_n) \geq \varphi(v)$$

pour tout $v \in X$ et v_n converge vers v dans X.

Théorème 1.8.1. *Soit A un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert **V** muni de la norme $\|.\|_{\boldsymbol{V}}$ et soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire coercitive de **A** $\times$ **A** dans $\mathbb{R}$, c'est à dire telle que*

$$\exists \alpha_0 > 0, \quad a(v,v) \geq \|v\|_{\boldsymbol{V}}^2 \; \forall v \in \boldsymbol{A},$$

et continue, c'est à dire

$$\exists \alpha_1 > 0, \quad |a(v,v)| \geq \alpha_1 \, \|u\|_{\boldsymbol{V}} \|v\|_{\boldsymbol{V}} \; \forall u, v \in \boldsymbol{A}.$$

*soit j une fonctionnelle de **A** dans $\overline{\mathbb{R}}$ convexe, semi-continue inférieurement et propre, c'est à dire*

$$-\infty < j(v) < +\infty, \;\; \textit{pour tout } v \in \boldsymbol{A} \textit{ et } j \textit{ non identique à } + \infty.$$

*Alors pour tout forme linéaire ζ définie sur **V**, il existe un unique u dans **A** solution de l'inéquation variationnelle*

$$a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq \zeta(v-u), \quad \forall v \in \boldsymbol{V}.$$

CHAPITRE 2

ÉTUDE ASYMPTOTIQUE D'UN PROBLÈME VISCOÉLASTIQUE DYNAMIQUE À MÉMOIRE COURTE

Résumé. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude d'un problème viscoélastique dans un domaine de faible épaisseur borné de $\mathbb{R}^3$ avec les conditions de frottement non linéaires de type de Tresca sur une partie de la frontière et les conditions de Dirichlet sur l'autre partie.
Notre objectif est consacré sur l'étude du comportement asymptotique des solutions lorsque ε tend vers zéro.

Contenu

2.1 Introduction et position du problème

Nous considérons un problème à des déformations d'un corps homogène viscoélastique et isotrope en régime dynamique dans un domaine mince Ω^ε, où ε est un réel positif appartenant à $]0;1[$ et qui tend vers zéro.

La frontière de Ω^ε sera notée $\Gamma^\varepsilon = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \bar{\Gamma}_L^\varepsilon$ avec :

- $\bar{\Gamma}_1^\varepsilon$ est la frontière supérieure d'équation $x_3 = h(x_1; x_2)$;
- $\bar{\Gamma}_L^\varepsilon$ est la frontière latérale ;
- $\bar{\omega}$ est un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine Ω^ε.

On note $x' = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $x = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Le domaine Ω^ε est donné par :

$$\Omega^\varepsilon = \{(x, x_3) \in \mathbb{R}^3, (x, 0) \in \omega, \quad 0 < x_3 < \varepsilon h\,(x)\}.$$

où h est une fonction de classe C^1 définie sur ω telle que :

$$0 < \min h \leq h(x) \leq \max h; \forall (x; 0) \in \omega$$

Pour les forces extérieures f^ε données, nous supposons que les déformations d'un corps élastique sont gouvernées par les équations suivantes :

La loi de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial^2 u_{ij}^\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} - f_i^\varepsilon = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

On désigne par $\sigma^\varepsilon = (\sigma_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}^\varepsilon$ le tenseur des contraintes et par $D = (d_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ le tenseur des taux de déformations :

$$d_{ij}\,(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\ 1 \leq i, j \leq 3.$$

la loi de comportement viscoélastique non linéaire donnée par :

$$\sigma_{ij}^\varepsilon\,(u^\varepsilon) = 2\mu d_{ij}\,(u^\varepsilon) + \lambda d_{kk}\,(u^\varepsilon)\,\delta_{ij} + 2\theta d_{ij}\,(\dot{u}^\varepsilon) + \zeta d_{kk}\,(\dot{u}^\varepsilon)\,\delta_{ij},$$

où

- ► $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon)$ est le déplacement du corps élastique ;
- ► λ et μ sont les coefficients de Lamé, avec $\lambda + \mu \geq 0$.

Nous supposons que le déplacement est connu sur $\Gamma_1^\varepsilon \times]0, T[$ et sur $\Gamma_L^\varepsilon \times]0, T[$

$$u^\varepsilon(t) = 0 \quad \text{sur} \ (\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon) \times]0, T[$$

Le vecteur normal extérieur unitaire à Γ^ε sera noté $n = (n_1; n_2; n_3)$:

La normale unitaire extérieure à ω est le vecteur $(0; 0; -1)$.

On utilise les notations usuelles :

$$\begin{aligned} u_n^\varepsilon &= u^\varepsilon.n = u_i^\varepsilon.n_i, \\ u_{\tau_i}^\varepsilon &= u_i^\varepsilon - u_n^\varepsilon n_i, \\ \sigma_n^\varepsilon &= (\sigma.n)\, n = \sigma_{ij}^\varepsilon n_i n_j, \\ \sigma_{\tau_i}^\varepsilon &= \sigma_{ij}^\varepsilon n_j - \sigma_n^\varepsilon n_i, \end{aligned}$$

le déplacement normal, le déplacement tangentiel, la composante normale et la composante tangentielle du tenseur, respectivement.

Sur ω le déplacement tangentiel est connu et vérifie la loi de Tresca :

$$\left.\begin{aligned} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \Longrightarrow \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \Longrightarrow \exists \beta > 0 \text{ tel que } \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = -\beta \sigma_\tau^\varepsilon \end{aligned}\right\} \text{sur } \omega \times]0, T[$$

Le problème complet consiste donc à trouver le champ de déplacement u^ε vérifie les équations et les conditions aux limites suivantes :

$$\frac{\partial^2 u_{ij}^\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} = f_i^\varepsilon \quad \text{dans} \ \Omega^\varepsilon \times]0, T[\tag{2.1}$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = 2\mu d_{ij}(u^\varepsilon) + \lambda d_{kk}(u^\varepsilon)\,\delta_{ij} + 2\theta d_{ij}(\dot{u}^\varepsilon) + \zeta d_{kk}(\dot{u}^\varepsilon)\,\delta_{ij}, \tag{2.2}$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \ (\Gamma_1 \cup \Gamma_L) \times]0, T[\tag{2.3}$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}.n = 0 \quad \text{sur} \ \omega \times]0, T[\tag{2.4}$$

$$\left.\begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \Longrightarrow \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \Longrightarrow \exists \beta > 0 \ \textit{tel que} \ \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = -\beta\sigma_\tau^\varepsilon \end{array}\right\} \text{ sur } \omega \times]0,T[\tag{2.5}$$

$$u^\varepsilon(0) = u_0, \ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0) = u_1 \tag{2.6}$$

Afin de donner la formulation variationnelle du problème (2.1) – (2.6) , nous allons établir le lemme suivant :

Lemme 2.1.1. *La condition* (2.5) *est équivalente à la relation suivante :*

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\sigma_\tau^\epsilon + k^\epsilon \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| = 0 \qquad \textit{sur } \omega. \tag{2.7}$$

Preuve.

• Supposons que u^ε vérifie la condition aux limites de Tresca (2.5).

▷ Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon$, alors $\left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = 0$, d'où (2.7)

▷ Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon$, alors il existe $\beta \geq 0$ tel que $\left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = -\beta\sigma_\tau^\varepsilon$, on trouve donc

$$\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \cdot \sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon \cdot \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| = -\beta\left|\sigma_\tau^\varepsilon\right|^2 + \beta\left|\sigma_\tau^\varepsilon\right|^2 = 0$$

• Réciproquement, on suppose que $\dfrac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \cdot \sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon \cdot \left|\dfrac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| = 0.$

▷ Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon$, alors de (2.7) on a

$$\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \cdot \sigma_\tau^\varepsilon = -\left|\sigma_\tau^\varepsilon\right| \cdot \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right|$$

d'où l'existence d'un $\beta \geq 0$ tel que $\dfrac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} = -\beta\sigma_\tau^\varepsilon$

▷ Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon$, alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \cdot \sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon \cdot \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| &\geq -\left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| \cdot \left|\sigma_\tau^\varepsilon\right| + k^\varepsilon \cdot \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| \\ &\geq \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right|\left(k^\varepsilon - \left|\sigma_\tau^\varepsilon\right|\right) \end{aligned}$$

et comme $k^\varepsilon - |\sigma_\tau^\varepsilon| > 0$, d'où $\dfrac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} = 0.$

2.2 Formulation variationnelle du problème (2.1)–(2.6)

On introduit le cadre fonctionnel suivant :

$$H^1(\Omega^\varepsilon)^3 = \left\{ v \in \left(L^2(\Omega^\varepsilon)\right)^3 : \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega^\varepsilon),\ \forall i,j = 1,2,3 \right\}.$$

Nous définissons le convexe fermé non vide de $H^1(\Omega^\varepsilon)^3$, par :

$$V^\varepsilon = \left\{ \varphi \in \left(H^1(\Omega^\varepsilon)\right)^3 : \varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon \text{ et } \varphi.n = 0 \text{ sur } \omega \right\}.$$

On introduit également les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}, v\right) &= \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} v dx dx_3 \\
a(u^\varepsilon, v) &= \sum_{i,j=1}^{3} 2\mu \int_{\Omega^\varepsilon} d_{ij}(u^\varepsilon) d_{ij}(v) dx dx_3 + \lambda \int_{\Omega^\varepsilon} div(u^\varepsilon) .div(v) dx dx_3; \\
B(u^\varepsilon, v) &= \sum_{i,j=1}^{3} 2\theta \int_{\Omega^\varepsilon} d_{ij}(\dot{u}^\varepsilon) d_{ij}(v) dx dx_3 + \zeta \int_{\Omega^\varepsilon} div(\dot{u}^\varepsilon) .div(v) dx dx_3; \\
(f^\varepsilon, v) &= \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon v dx dx_3 = \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i dx dx_3; \\
J^\varepsilon(v) &= \int_\omega k^\varepsilon |v_\tau| dx;
\end{aligned}$$

Lemme 2.2.1. *Si u^ε est une solution du problème (2.1) – (2.6) alors elles vérifient le problème variationnel :*

$$\left\{ \begin{array}{c}
\text{Trouver } u^\varepsilon \text{ où } \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \in V^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) \\
\left(\dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \varphi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + a\left(u^\varepsilon, \varphi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + \\
B\left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \varphi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + J^\varepsilon(\varphi) - \\
J^\varepsilon\left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) \geq \left(f^\varepsilon, \varphi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right),\ \forall \varphi \in V^\varepsilon \\
u^\varepsilon(0) = u_0,\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0) = u_1
\end{array} \right. \tag{2.8}$$

Preuve. En multipliant l'équation (2.1) par $\left(\varphi_i - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)$, où $\varphi \in V^\varepsilon$ et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx dx_3 -$$
$$\int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon n_j \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) ds = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx dx_3.$$

Les conditions aux limites (2.3) et (2.5) impliquent que :

$$\int_{\Gamma^\epsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon n_j \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) d\sigma = \int_\omega \sigma_{ij}^\varepsilon n_j \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx.$$

Mais $\sigma_{ij}^\varepsilon n_j = \sigma_{T_i}^\varepsilon + \sigma_n^\varepsilon n_i$, on trouve :

$$\int_{\Gamma^\epsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon n_j \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) d\sigma = \int_\omega \sigma_{\tau_i}^\varepsilon \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx + \int_\omega \sigma_n^\varepsilon n_i \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx$$

et comme $\left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) n_i = 0$, on a :

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + \int_{\Omega^\epsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx dx_3 - \\ &\int_\omega \sigma_{\tau_i}^\varepsilon \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx = \int_{\Omega^\epsilon} f_i^\varepsilon \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx dx_3 \; \forall \varphi \in V^\varepsilon.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Dans (2.9) on ajoute et on retranche le terme $\int_\omega k^\varepsilon \left(|\varphi_\tau| - |\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}|\right) dx$, on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + \int_{\Omega^\epsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx dx_3 - \int_\omega \sigma_{\tau_i}^\varepsilon \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx +$$
$$\int_\omega k^\varepsilon \left(|\varphi_\tau| - |\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}|\right) dx - \int_\omega k^\varepsilon \left(|\varphi_\tau| - |\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}|\right) dx = \int_{\Omega^\epsilon} f_i^\varepsilon \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx dx_3.$$

On pose :

$$M = \int_\omega \sigma_{\tau_i}^\varepsilon \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx + \int_\omega k^\varepsilon \left(|\varphi_\tau| - |\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}|\right) dx.$$

Donc :

$$\begin{aligned} M &= \int_\omega \sigma_{\tau_i}^\varepsilon \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx + \int_\omega k^\varepsilon \left(|\varphi_\tau| - |\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}|\right) dx \\ &= \int_\omega \sigma_{\tau_i}^\varepsilon \varphi_i dx - \int_\omega \sigma_{\tau_i}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\, dx + \int_\omega k^\varepsilon |\varphi_\tau| dx - \int_\omega k^\varepsilon |\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}| dx.\end{aligned}$$

Maintenant le lemme 2.1.1 nous donnons :

$$M = \int_{\omega} \sigma^{\varepsilon}_{\tau_i} \varphi_i dx + \int_{\omega} k^{\varepsilon} |\varphi_{\tau}| dx.$$

Autrement :

$$\sigma^{\varepsilon}_{\tau} \varphi \geq -|\sigma^{\varepsilon}_{\tau}||\varphi_{\tau}| \geq -k^{\varepsilon}|\varphi_{\tau}| \text{ sur } \omega$$

et

$$B = \int_{\omega} \sigma^{\varepsilon}_{\tau_i} \varphi_i dx + \int_{\omega} k^{\varepsilon} |\varphi_{\tau}| dx \geq 0.$$

En déduit l'inégalité suivante :

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2 u^{\varepsilon}}{\partial t^2}(t), \varphi - \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right) + \int_{\Omega^{\epsilon}} \sigma^{\varepsilon}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varphi_i - \frac{\partial u^{\varepsilon}_i}{\partial t}\right) dx dx_3 + \\ \int_{\omega} k^{\varepsilon}|\varphi_{\tau}| dx - \int_{\omega} k^{\varepsilon} |\frac{\partial u^{\varepsilon}_{\tau}}{\partial t}(t)| dx \geq \int_{\Omega^{\epsilon}} f^{\varepsilon}_i \left(\varphi_i - \frac{\partial u^{\varepsilon}_i}{\partial t}\right) dx dx_3.\end{gathered} \tag{2.10}$$

En remplaçant $\sigma^{\varepsilon}_{ij}$ par l'expression (2.2) dans (2.10), on voit que :

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2 u^{\varepsilon}}{\partial t^2}(t), \varphi - \dot{u}^{\varepsilon}\right) + a\left(u^{\varepsilon}(t), \varphi_i - \dot{u}^{\varepsilon}\right) + B\left(\dot{u}^{\varepsilon}(t), \varphi_i - \dot{u}^{\varepsilon}\right) + \\ J^{\varepsilon}(\varphi) - J^{\varepsilon}(\dot{u}^{\varepsilon}) \geq \left(f^{\varepsilon}, \varphi_i - \dot{u}^{\varepsilon}\right), \forall \varphi \in V^{\varepsilon}.\end{gathered} \tag{2.11}$$

Pour l'analyse asymptotique nous introduisons les résultats qui seront utilisés dans la suite.

$$\|\nabla u^{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega^{\varepsilon})} \leq C \|D(u^{\varepsilon})\|_{L^2(\Omega^{\varepsilon})} \text{ (\textit{Inégalité de Korn})}$$

$$\text{Il existe } C_1 > 0 \text{ tel que } |B(u,v)| \leq C_1 \|u\| \|v\|, \text{(voir.[34], [?])} \tag{2.12}$$

$$\text{Il existe } C_2 > 0 \text{ tel que } B(u,u) \geq C_2 \|u\|^2, \text{(voir.[34])}. \tag{2.13}$$

2.3 Analyse asymptotique du problème

Nous essayons maintenant d'étudier les estimations à priori sur $\hat{u}^{\varepsilon}$. Pour cela nous avons besoin d'établir le lemme suivant :

Lemme 2.3.1. *(Inéquation de Poincaré).*

On rappelle que $0 < h(x) < \max h$,$\forall x \in \omega$, *on a l'inéquation suivante :*

$$\|\hat{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \max h \|\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial z}\|_{L^2(\Omega)}$$

Preuve. Soit $0 < z < h(x)$, on a

$$\hat{u}^\varepsilon(x,z) = -\int_z^{h(x)} \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial \varsigma}(x,\varsigma)d\varsigma + \hat{u}^\varepsilon(x,h(x))$$

et comme $\hat{u}^\varepsilon(x,h(x)) = 0$, alors :

$$\hat{u}^\varepsilon(x,z) = -\int_z^{h(x)} \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial \varsigma}(x,\varsigma)d\varsigma$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on voit que :

$$|\hat{u}^\varepsilon(x,z)|^2 \leq (\max h) \int_0^{h(x)} |\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial \varsigma}(x,\varsigma)|^2 d\varsigma \tag{2.14}$$

Nous intégrons (2.14) par rapport à z de 0 à $h(x)$, on obtient

$$\int_0^{h(x)} |\hat{u}^\varepsilon(x,z)|^2(x,z)dz \leq (\max h)^2 \int_0^{h(x)} |\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial \varsigma}(x,\varsigma)|^2 d\varsigma$$

en intégrant l'inéquation précédant sur ω ; on trouve

$$\int_\omega \int_0^{h(x)} |\hat{u}^\varepsilon(x,z)|^2(x,z)dzdx \leq (\max h)^2 \int_\omega \int_0^{h(x)} |\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial \varsigma}(x,\varsigma)|^2 d\varsigma dx$$

donc

$$\|\hat{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \max h \|\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial z}\|_{L^2(\Omega)}$$

2.3.1 Changement du domaine et problème variationnel

Pour l'analyse asymptotique du problème, nous utilisons le changement d'échelle $z = \frac{x_3}{\varepsilon}$, et donc le domaine Ω^ε se transforme à un domaine Ω indépendant de ε définit par :

$$\Omega = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^3, (x,0) \in \omega \ et \ 0 < z < h(x)\right\}.$$

On note $\Gamma = \bar{\omega} \cup \Gamma_L \cup \Gamma_1$, sa frontière. A la suite de ce changement d'échelle, nous notons par $\hat{u}^\varepsilon$, les inconnues définies sur Ω.

De plus, on définit sur Ω les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon (x, x_3, t) = \hat{u}_i^\varepsilon (x, z, t), \quad i = 1, 2 \\ \varepsilon^{-1} u_3^\varepsilon (x, x_3, t) = \hat{u}_3^\varepsilon (x, z, t). \end{cases} \tag{2.15}$$

Pour les données, nous avons les relations suivantes :

$$\begin{cases} \hat{f} (x, z, t) = \varepsilon^2 f^\varepsilon (x, x_3, t), \ \hat{k} = \varepsilon k^\varepsilon \\ (\hat{u}_0)_i (x, z) = (u_0)_i (x, x_3), \\ (\hat{u}_0)_3 (x, z) = \varepsilon^{-1} (u_0)_3 (x, x_3) \end{cases} \tag{2.16}$$

avec $\mu, \ \lambda, \ \theta, \ \zeta, \ \hat{f},$ indépendants de ε. Nous introduisons maintenant le cadre fonctionnel sur Ω. Pour cela, on note :

$$K (\Omega) = \left\{ \hat{\varphi} \in \left(H^1 (\Omega) \right)^3 : \hat{\varphi} = 0 \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_L; \ \hat{\varphi}.n = 0 \text{ sur } \omega \right\},$$
$$V_z = \left\{ \hat{\varphi} \in \left(L^2 (\Omega) \right)^2 ; \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} \in L^2 (\Omega) : \hat{\varphi} = 0 \ \text{ sur } \Gamma_1 \right\},$$

Il est clair que V_z est un espace de Banach, muni de la norme :

$$\|v\|_{V_z} = \left(\sum_{i=1}^{2} \|v_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial v_i}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Avec le changement d'échelle défini dans (2.15) - (2.16) le problème (2.11) devient

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{2} \varepsilon^2 (\frac{\partial^2 \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon(t)) + \varepsilon^4 (\frac{\partial^2 \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon(t)) + \\ &\quad \tilde{a}(\hat{u}^\varepsilon(t), \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon(t)) + \tilde{B} \left(\hat{u}^\varepsilon(t), \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon(t) \right) + j_0(\hat{\varphi}) - \\ &\quad\quad j_0 \left(\hat{u}^\varepsilon \right) \geq (\hat{f}, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon), \ \forall \hat{\varphi} \in K (\Omega), \end{aligned} \tag{2.17}$$

où

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(\hat{u}^\varepsilon(t), \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon(t)) = \mu \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon(t)}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon(t)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial(\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon(t))}{\partial x_j} dxdz \\
+ \mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon(t)}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon(t)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial(\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon(t))}{\partial z} dxdz \\
+ 2\mu \int_\Omega \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon(t)}{\partial z} \frac{\partial(\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon(t))}{\partial z} dxdz + \\
\mu \sum_{j=1}^{2} \int_\Omega \varepsilon^2 \left(\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon(t)}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon(t)}{\partial z} \right) \frac{\partial(\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon(t))}{\partial x_j} dxdz \\
+ \lambda \varepsilon^2 \int_\Omega div(\hat{u}^\varepsilon(t)) div(\hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon(t)) dxdz,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{B}(\hat{u}^\varepsilon(t), \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon(t)) = \theta \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \hat{\dot{u}}_i^\varepsilon(t)}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{\dot{u}}_j^\varepsilon(t)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial(\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon(t))}{\partial x_j} dxdz \\
+ \theta \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{\dot{u}}_i^\varepsilon(t)}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{\dot{u}}_3^\varepsilon(t)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial(\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon(t))}{\partial z} dxdz \\
+ 2\theta \int_\Omega \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{\dot{u}}_3^\varepsilon(t)}{\partial z} \frac{\partial(\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon(t))}{\partial z} dxdz \\
+ \theta \sum_{j=1}^{2} \int_\Omega \varepsilon^2 \left(\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{\dot{u}}_3^\varepsilon(t)}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{\dot{u}}_j^\varepsilon(t)}{\partial z} \right) \frac{\partial(\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon(t))}{\partial x_j} dxdz \\
+ \zeta \varepsilon^2 \int_\Omega div(\hat{\dot{u}}^\varepsilon(t)) div(\hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon(t)) dxdz,
\end{aligned}$$

$$j_0(\hat{\varphi}) = \int_\omega \hat{k} |\hat{\varphi}| dx,$$

$$(\hat{f}^\varepsilon(t), \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon(t)) = \sum_{j=1}^{2} \int_\Omega \hat{f}_i(t)(\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon(t)) dxdz + \int_\Omega \varepsilon \hat{f}_3(t)(\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3^\varepsilon(t)) dxdz.$$

2.3.2 Estimation à priori et résultats de convergence

Estimation à priori

Dans cette section, on cherche des estimations à priori sur le déplacement $\hat{u}^\varepsilon$, solution de notre problème variationnel, pour cela nous avons besoin d'établir le lemme suivant :

Lemme 2.3.2. *Supposons que* $f^\varepsilon, \dfrac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2} \in L^2(0, T, L^2(\Omega^\varepsilon)^3)$ *et* $u_0 \in H^2(\Omega^\varepsilon), u_1 \in H^1(\Omega^\varepsilon)$*, le coefficient de frottement* $k > 0$ *dans* $L^\infty(\omega)$*, alors, il existe une constante strictement positive* C *indépendante de* ε *telle que :*

$$\sum_{i,j=1}^{2}\left\|\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+ \\ \sum_{i=1}^{2}\left(\left\|\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\leq C. \tag{2.18}$$

$$\sum_{i,j=1}^{2}\left\|\varepsilon\frac{\partial^2\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j\partial t}(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\varepsilon\frac{\partial^2\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z\partial t}(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+ \\ \sum_{i=1}^{2}\left(\left\|\frac{\partial^2\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z\partial t}(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\varepsilon^2\frac{\partial^2\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i\partial t}(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\leq C. \tag{2.19}$$

Preuve. On choisit $\phi=0$ dans (1.3) on obtient

$$\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2},\dot{u}^\varepsilon\right)+a(u^\varepsilon(t),\dot{u}^\varepsilon(t))+b\left(\dot{u}^\varepsilon(t),\dot{u}^\varepsilon(t)\right)+\int_\omega k^\varepsilon\left|\dot{u}^\varepsilon(t)\right|dx\leq(f^\varepsilon(t),\dot{u}^\varepsilon(t)). \tag{2.20}$$

En intégrant (2.19) en temps pour $s\in[0,t]$, on a :

$$\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\left(t\right)\right\|^2+a\left(u^\varepsilon\left(t\right),u^\varepsilon\left(t\right)\right)\right)+\int_0^t b\left(\dot{u}^\varepsilon(s),\dot{u}^\varepsilon(s)\right)ds \\ \leq\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\left(0\right)\right\|^2+a\left(u^\varepsilon\left(0\right),u^\varepsilon\left(0\right)\right)\right)++\int_0^t\left(f_i^\varepsilon\left(s\right),\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\left(s\right)\right)ds$$

D'après l'inégalité de Korn, il existe C_K indépendant de ε telle que :

$$\left[\left\|\dot{u}^\varepsilon(t)\right\|^2+2\mu C_k\left\|\nabla u^\varepsilon(t)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2\right]+4\theta C_k\left\|\nabla\dot{u}^\varepsilon(t)\right\|_{L^2(0,T,\Omega^\varepsilon)}^2\leq \\ \left\|u_1\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2+(2\mu+3\lambda)\left\|\nabla u_0^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2+2\int_0^s(f^\varepsilon(t),\dot{u}^\varepsilon(t))dt.$$

et comme

$$\int_0^t(f^\varepsilon(s),\dot{u}^\varepsilon(s))ds=(f^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t))-(f^\varepsilon(0),u^\varepsilon(0))-\int_0^t\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s),u^\varepsilon(s)\right)ds$$

En appliquant les inégalités de Cauchy-Schwarz, Poincaré et de Young, on trouve la majoration suivante :

$$\begin{aligned}\left|2\int_0^t (f^\varepsilon(s),\dot{u}^\varepsilon(s))ds\right| &\leq \mu C_k\|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\nabla u^\varepsilon(0)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \\ &\frac{(\varepsilon h_{\max})^2}{\mu C_k}\int_0^t \|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}ds + \frac{(\varepsilon h_{\max})^2}{\mu C_k}\|f^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \\ &(\varepsilon h_{\max})^2\|f^\varepsilon(0)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{\mu C_k}{2}\int_0^t \|\nabla u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}ds.\end{aligned} \tag{2.21}$$

de (2.21) on trouve

$$\begin{aligned}\|\dot{u}^\varepsilon(t)\|^2 + \mu C_k\|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + 4\theta C_k\|\nabla \dot{u}^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(0,T,\Omega^\varepsilon)} &\leq \|u_1\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \\ (1+2\mu+3\lambda)\|\nabla u_0^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} &+ \frac{(\varepsilon h_{\max})^2}{\mu C_k}\|f^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \\ (\varepsilon h_{\max})^2\|f^\varepsilon(0)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} &+ \frac{(\varepsilon h_{\max})^2}{\mu C_k}\int_0^t \|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}ds + \\ \|\nabla u^\varepsilon(0)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} &+ \frac{\mu C_k}{2}\int_0^t \|\nabla u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}ds.\end{aligned} \tag{2.22}$$

En multipliant (2.22) par ε et en utilisant les égalités :

$$\varepsilon^2\|f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} = \varepsilon^{-1}\left\|\hat{f}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad \left\|\frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_3}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} = \varepsilon^{-1}\left\|\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\varepsilon\|\dot{u}^\varepsilon(t)\|^2 + \mu C_k\varepsilon\|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + 4\theta C_k\varepsilon\|\nabla \dot{u}^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(0,T,\Omega^\varepsilon)} \\ \leq C_1 + \varepsilon\mu C_k\int_0^t \|\nabla u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}ds.\end{aligned} \tag{2.23}$$

avec

$$\begin{aligned}C_1 = \|\hat{u}_1\|^2_{L^2(\Omega)} + (1+2\mu+3\lambda)\|\nabla \hat{u}_0^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \\ \frac{(h_{\max})^2}{\mu C_k}\int_0^t \|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds + \frac{h_{\max}}{\mu C_k}\|\hat{f}^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \\ h_{\max}\|\hat{f}^\varepsilon(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \hat{u}^\varepsilon(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned} \tag{2.24}$$

D'après le lemme de Gronwall, on déduit :

$$\varepsilon\|\dot{u}^\varepsilon(t)\|^2 + \varepsilon\|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq C. \tag{2.25}$$

D'après (2.25), on déduit (2.18).

Pour montrer l'estimation a priori (2.19), on régularise la fonctionnelle J^ε, en posant

$$j_\varsigma^\varepsilon(u) = \int_\omega k^\varepsilon(x)\varphi_\varsigma(|u_\tau|^2)dx, \quad \text{and} \quad \varphi_\varsigma(\lambda) = \frac{1}{1+\varsigma}|\lambda|^{(1+\varsigma)}.$$

on considère l'équation approchée suivante :

$$\begin{cases} (\frac{\partial^2 u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \phi) + a(u_\varsigma^\varepsilon(t), \phi) + B\left(\dot{u}_\varsigma^\varepsilon(t), \phi\right) + \left((j_\varsigma^\varepsilon)'(\frac{\partial u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t})(t), \phi\right) = (f^\varepsilon(t), \phi). \\ u_\varsigma^\varepsilon(0) = u_0, \quad \frac{\partial u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t}(0) = u_1, \quad (u_1)_\tau = 0. \end{cases} \tag{2.26}$$

maintenant on dérive (2.26) en t et on substituant φ par $\dfrac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(t)$

$$(\frac{\partial^3 u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t^3}(t), \frac{\partial^2 u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t^2}(t)) + a(\dot{u}_\varsigma^\varepsilon(t), \frac{\partial^2 u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t^2}(t)) + B\left(\frac{\partial^2 u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \frac{\partial^2 u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) + \left((j_\varsigma^\varepsilon)''(\frac{\partial u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t}(t)), \frac{\partial^2 u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) = (\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial^2 u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t^2}(t)).$$

et comme $\left(\left(J_\xi^\varepsilon\right)''\left(\frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t)\right), \frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) > 0$ et $b\left(\frac{\partial^2 u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \frac{\partial^2 u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) \geq 0$, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\frac{\partial^2 u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + a(\dot{u}_\varsigma^\varepsilon(t), \frac{\partial^2 u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t^2}(t)) \leq (\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial^2 u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t^2}(t)). \tag{2.27}$$

En intégrant (2.27) et utilisant l'inégalité de Korn, on trouve :

$$\|\frac{\partial^2 u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + 2\mu C_k\|\nabla\frac{\partial u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t}(t)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \|\frac{\partial^2 u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + (2\mu+3\lambda)\|\nabla\frac{\partial u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t}(0)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + 2\int_0^t(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial s}(s), \frac{\partial^2 u_\varsigma^\varepsilon}{\partial s^2}(s))ds.$$

et comme

$$2\int_0^t(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial s}(s), \frac{\partial^2 u_\varsigma^\varepsilon}{\partial s^2}(s))ds = 2(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t}(t)) - 2(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0), \frac{\partial u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t}(0)) - 2\int_0^t(\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial s^2}(s), \frac{\partial u_\varsigma^\varepsilon}{\partial s}(s))ds$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz, Poincaré et de Young, on obtient :

$$\begin{aligned}\|\frac{\partial^2 u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \mu C_k\|\nabla\frac{\partial u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t}(t)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \|\frac{\partial^2 u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} +\\ \mu C_k\|\nabla\frac{\partial u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t}(0)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + (2\mu+3\lambda)\|\nabla\frac{\partial u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t}(0)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} +\\ \frac{(\varepsilon h_{\max})^2}{\mu C_k}\int_0^t \|\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}ds + \frac{(\varepsilon h_{\max})^2}{\mu C_k}\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} +\\ \frac{(\varepsilon h_{\max})^2}{\mu C_k}\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{\mu C_k}{2}\int_0^t \|\nabla u_\varsigma^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}ds.\end{aligned} \tag{2.28}$$

Il faut estimer $\dfrac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(0)$, après l'équation (2.26) on déduit que :

$$\left(\frac{\partial^2 u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t^2}(0), \phi\right) = (f^\varepsilon(0), \phi) - a(u_\varsigma^\varepsilon(0), \phi)$$

donc

$$|\left(\frac{\partial^2 u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t^2}(0), \phi\right)| \leq \left(\varepsilon h_{\max}\|f^\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + (2\mu+3\lambda)\|u_\varsigma^\varepsilon(0)\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\right)\|\phi\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}. \tag{2.29}$$

En multipliant l'inégalité (2.29) par $\sqrt{\varepsilon}$ et comme

$$\varepsilon^{\frac{3}{2}}\|f^\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} = \left\|\hat{f}^\varepsilon(0)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}; \quad \sqrt{\varepsilon}\left\|u_\xi^\varepsilon(0)\right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} = \left\|\hat{u}_\xi^\varepsilon(0)\right\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}$$

on déduit que :

$$\sqrt{\varepsilon}\|\frac{\partial^2 u_\varsigma^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C_2.$$

avec $C_2 = h_{\max}\|\hat{f}^\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega)} + (2\mu+3\lambda)\|\hat{u}_\varsigma^\varepsilon(0)\|_{H^1(\Omega)}$.

En passant à la limite en ς dans (2.28), on obtient :

$$\begin{aligned}\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \mu C_k\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\nabla u^\varepsilon(0)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} +\\ (\mu C_k + 2\mu + 3\lambda)\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{(\varepsilon h_{\max})^2}{\mu C_k}\int_0^t \|\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}ds +\\ \frac{(\varepsilon h_{\max})^2}{\mu C_k}\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{(\varepsilon h_{\max})^2}{\mu C_k}\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{\mu C_k}{2}\int_0^t \|\nabla u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}ds.\end{aligned}$$

En multipliant cette inégalité par ε, on trouve :

$$\varepsilon\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon\mu C_k\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq C_3 + \varepsilon\mu C_k\int_0^t \|\nabla u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}ds.$$

avec

$$C_3 = C_2^2 + (\mu C_k + 2\mu + 3\lambda)\|\nabla\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{(h_{\max})^2}{\mu C_k}\int_0^t \|\frac{\partial^2 \hat{f}^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds + \frac{(h_{\max})^2}{\mu C_k}\|\frac{\partial \hat{f}^\varepsilon}{\partial t}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{(h_{\max})^2}{\mu C_k}\|\frac{\partial \hat{f}^\varepsilon}{\partial t}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

par l'inégalité de Gronwel, on obtient :

$$\varepsilon\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq C$$

donc la deuxième estimation est démontrée.

Résultats de convergence

Dans ce paragraphe, on va énoncer le théorème de convergence.

Théorème 2.3.1. *Sous les mêmes hypothèses du Lemme* (2.3.2), *il existe*

$$u^\star(t) = (u_1^\star(t), u_2^\star(t)) \in L^2(0,T,V_z)\bigcap L^\infty(0,T,V_z),$$

tel que pour des sous suites de $\hat{u}^\varepsilon$ notée encore $\hat{u}^\varepsilon$, on a les résultats de convergence suivants :

$$\begin{cases} \hat{u}_i^\varepsilon(t) \rightharpoonup u_i^\star(t), \ i=1,2, \\ \hat{\dot{u}}_i^\varepsilon(t) \rightharpoonup \dot{u}_i^\star(t), \ i=1,2, \end{cases} \tag{2.30}$$

$$\begin{cases} \varepsilon\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}(t) \rightharpoonup 0, \ i,j=1,2, \\ \varepsilon\frac{\partial \hat{\dot{u}}_i^\varepsilon}{\partial x_j}(t) \rightharpoonup 0, \ i,j=1,2, \end{cases} \tag{2.31}$$

$$\begin{cases} \varepsilon\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}(t) \rightharpoonup 0, \\ \varepsilon\frac{\partial \hat{\dot{u}}_3^\varepsilon}{\partial z}(t) \rightharpoonup 0, \end{cases} \tag{2.32}$$

$$\begin{cases} \varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}(t) \rightharpoonup 0, \ i=1,2 \\ \varepsilon^2\frac{\partial \hat{\dot{u}}_3^\varepsilon}{\partial x_i}(t) \rightharpoonup 0, \ i=1,2 \end{cases} \tag{2.33}$$

$$\begin{cases} \varepsilon\hat{u}_3^\varepsilon(t) \rightharpoonup 0, \\ \varepsilon\hat{\dot{u}}_3^\varepsilon(t) \rightharpoonup 0, \end{cases} \tag{2.34}$$

Démonstration. D'après le lemme 2.3.2, alors il existe une constante C indépendant de ε tel que

$$\left\| \frac{\partial \hat{\dot{u}}_i^\varepsilon}{\partial z}(t) \right\|_{L(0,T,L^2(\Omega))} \leq C, \ i = 1,$$

Grâce à cet estimation et l'inégalité de Poincaré, on trouve

$$\begin{cases} \|\hat{u}_i^\varepsilon(t)\|_{L(0,T,L^2(\Omega))} \leq h_{\max} \left\| \dfrac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}(t) \right\|_{L(0,T,L^2(\Omega))} \\ \left\| \dfrac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{L(0,T,L^2(\Omega))} \leq h_{\max} \left\| \dfrac{\partial^2 \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z \partial t}(t) \right\|_{L(0,T,L^2(\Omega))} \end{cases}, \ i = 1, 2$$

donc $\hat{u}_i^\varepsilon(t)$ et $\hat{\dot{u}}_i^\varepsilon(t)$ sont bornées dans $L^2(0,T,V_z) \bigcap L^\infty(0,T,V_z)$, $i = 1, 2$, ce qui implique qu'il existe $u_i^*(t)$ et $\dot{u}_i^*(t)$ dans $L^2(0,T,V_z) \bigcap L^\infty(0,T,V_z)$ tel que $\hat{u}_i^\varepsilon(t)$ converge faiblement vers $u_i^*(t)$ et $\hat{\dot{u}}_i^\varepsilon(t)$ converge faiblement vers $\dot{u}_i^*(t)$.

D'après (2.18) et (2.19), on trouve (2.31)-(2.34). □

2.3.3 Problème limite et l'équation généralisée de Reynolds

Théorème 2.3.2. *Sous les hypothèses du théorème 2.3.1 les solutions u^* vérifient les relations suivantes*

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \frac{\partial(u_i^*(t))}{\partial z}\frac{\partial(\hat{\varphi}_i - \dot{u}_i^*(t))}{\partial z}dxdz + \theta\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \frac{\partial(\dot{u}_i^*(t))}{\partial z}\frac{\partial(\hat{\varphi}_i - \dot{u}_i^*(t))}{\partial z}dxdz$$
$$+\hat{\jmath}(\hat{\varphi}) - \hat{\jmath}(\dot{u}^*(t)) \geq \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{f}_i(t)(\hat{\varphi}_i - \dot{u}_i^*(t))dxdz, \ \forall\hat{\varphi} \in \Pi(K), \tag{2.35}$$
$$u_i^*(0) = u_{0,i}^*,$$

$$-\mu\frac{\partial^2 u_i^*(t)}{\partial z^2} - \theta\frac{\partial^2 \dot{u}_i^*(t)}{\partial z^2} = \hat{f}_i(t) \in L^2(\Omega), \tag{2.36}$$

avec,

$$\Pi(K) = \left\{ \hat{\varphi} = (\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) \in H^1(\Omega)^2, \hat{\varphi} = 0 \ \textit{sur}\ \Gamma_1 \right\}.$$

Preuve. Dans (2.17), en passant à la limite et en utilisant les résultats de convergence du théorème (2.3.1), on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{2}\varepsilon^2(\frac{\partial^2\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2}(t),\hat{\varphi}_i-\hat{u}_i^\varepsilon(t))=0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{a}(\hat{u}^\varepsilon(t),\hat{\varphi}-\hat{u}^\varepsilon(t))=\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \mu\frac{\partial u_i^*}{\partial z}\frac{\partial\left(\hat{\varphi}_i-u_i^*(t)\right)}{\partial z}dxdz,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{B}(\hat{\dot{u}}^\varepsilon(t),\hat{\varphi}-\hat{\dot{u}}^\varepsilon(t))=\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \theta\frac{\partial \dot{u}_i^*}{\partial z}\frac{\partial\left(\hat{\varphi}_i-\dot{u}_i^*(t)\right)}{\partial z}dxdz,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\hat{f},\hat{\varphi}-\hat{u}^\varepsilon(t))=\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{f}_i\left(\hat{\varphi}_i-u_i^*(t)\right).$$

et comme j_0 est convexe semi-continue et inférieurement $\left(\liminf j_0\left(\hat{\dot{u}}^\varepsilon(t)\right)\geq j\left(\dot{u}^*(t)\right)\right)$, on obtient (2.35).

Nous pouvons choisir $\varphi_i=\dot{u}_i^*\pm\phi_i \quad i=1,2$, tel que $\phi\in H_0^1(\Omega)$ dans (2.35), on trouve :

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\frac{\partial u_i^*}{\partial z}(t)\frac{\partial\phi_i}{\partial z}dxdz+\theta\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\frac{\partial \dot{u}_i^*}{\partial z}(t)\frac{\partial\phi_i}{\partial z}dxdz=\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\hat{f}_i(t)\phi_i dxdz.$$

En choisissant $\phi_1=0$ et $\phi_2\in H_0^1(\Omega)$ puis $\phi_2=0$ et $\phi_1\in H_0^1(\Omega)$, on obtient :

$$\mu\int_\Omega\frac{\partial u_i^*}{\partial z}(t)\frac{\partial\phi_i}{\partial z}dxdz+\theta\int_\Omega\frac{\partial \dot{u}_i^*}{\partial z}(t)\frac{\partial\phi_i}{\partial z}dxdz=\int_\Omega\hat{f}_i(t)\phi_i dxdz.$$

Maintenant la formule de Green, nous donnons :

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u_i^*(t)}{\partial z}+\theta\frac{\partial \dot{u}_i^*(t)}{\partial z}\right)=\hat{f}_i(t),\quad i=1,2\ \in H^{-1}(\Omega),\tag{2.37}$$

et comme $\hat{f}_i\in L^2(\Omega)$, $\forall t\in(0,T)$, on déduit que $-\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u_i^*(t)}{\partial z}+\theta\frac{\partial \dot{u}_i^*(t)}{\partial z}\right)\in L^2(\Omega)$. Ce qui implique (2.36).

Théorème 2.3.3. *Avec les mêmes hypothèses du théorème 2.3.2, on a :*

$$\int_\omega k(|\psi+s^*|-|s^*|)dx-\int_\omega\mu\hat{\tau}^*\psi dx-\int_\omega\theta\frac{\partial\hat{\tau}^*}{\partial t}\psi\geq 0,\qquad\forall\psi\in L^2(\omega)^2,\tag{2.38}$$

$$\begin{cases}\left|\mu\tau^*+\theta\frac{\partial\tau^*}{\partial t}\right|<\hat{k}\Rightarrow s^*=0\\ \left|\mu\tau^*+\theta\frac{\partial\tau^*}{\partial t}\right|=\hat{k}\Rightarrow\exists\beta>0\text{ such that } s^*=\beta\left(\mu\tau^*+\theta\frac{\partial\tau^*}{\partial t}\right),\end{cases}\tag{2.39}$$

avec

$$\hat{\tau}^* = \frac{\partial \hat{u}^*}{\partial z}(x,0,t) \ \text{ and } \ s^*(x) = u^*(x,0,t).$$

De plus, u^* et s^* vérifie l'inéquation généralisée de Reynolds :

$$\int_\omega \left(\int_0^h \left[\mu u^*(x,z,t) + \theta \dot{u}^*(x,z,t) \right] dz + \tilde{F} - \frac{h}{2}\mu s^* - \frac{h}{2}\theta \frac{\partial s^*}{\partial t} \right) \nabla \psi(x)\, dx = 0, \tag{2.40}$$

où $\psi \in H^1(\omega)$, et

$$\tilde{F}(x) = \int_0^h F(x,z,t)\, dz - \frac{h}{2} F(x,h,t),$$

$$F(x,z,t) = \int_0^z \int_0^\xi \hat{f}_i(x,\alpha)\, d\xi d\alpha.$$

Preuve. L'inéquation variationnelle (2.17) s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2} \varepsilon^2 (\frac{\partial^2 \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\varepsilon(t) \\
&+\mu\varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}(t) + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i}(t) \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dxdz \\
&+\mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}(t) + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}(t) \right) \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \psi_3}{\partial x_i} \right] dxdz \\
&+2\mu\varepsilon^2 \int_\Omega \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}(t) \frac{\partial \psi_3}{\partial z} dxdz + \lambda\varepsilon^2 \int_\Omega div\left(\hat{u}^\varepsilon(t)\right) div(\psi)\, dxdz \\
&+\theta\varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{\dot{u}}_i^\varepsilon}{\partial x_j}(t) + \frac{\partial \hat{\dot{u}}_j^\varepsilon}{\partial x_i}(t) \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dxdz + \\
&\theta \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{\dot{u}}_i^\varepsilon}{\partial z}(t) + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{\dot{u}}_3^\varepsilon}{\partial x_i}(t) \right) \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \psi_3}{\partial x_i} \right] dxdz \\
&+2\theta\varepsilon^2 \int_\Omega \frac{\partial \hat{\dot{u}}_3^\varepsilon}{\partial z}(t) \frac{\partial \psi_3}{\partial z} dxdz + \zeta\varepsilon^2 \int_\Omega div\left(\hat{\dot{u}}^\varepsilon(t)\right) div(\psi)\, dxdz \\
&+\int_\omega \hat{k} \left| \psi + \dot{u}^\varepsilon(t) \right| dx - \int_\omega \hat{k} \left| \dot{u}^\varepsilon(t) \right| dx \geq \sum_{i=1}^{2} \left(\hat{f}_i, \psi_i \right) + \varepsilon \left(\hat{f}_3(t), \psi_3 \right).
\end{aligned}$$

en passant à la limite et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \mu \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial z^2}(t) \psi_i dxdz + \int_\Gamma \mu \frac{\partial u_i^*}{\partial z}(t) n \psi_i d\sigma - \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \theta \frac{\partial^2 \dot{u}_i^*}{\partial z^2}(t) \psi_i dxdz \\
&+\int_\Gamma \theta \frac{\partial \dot{u}_i^*}{\partial z}(t) n \psi_i d\sigma + \int_\omega \hat{k} \left| \psi + s^* \right| dx - \int_\omega \hat{k} \left| s^* \right| dx \geq \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{f}_i(t) \psi_i dxdz.
\end{aligned}$$

Mais

$$\mu \int_\Gamma \frac{\partial u_i^*}{\partial z}(t) n\psi_i d\sigma = \mu \int_\omega \frac{\partial u_i^*}{\partial z}(x,0,t)\psi_i dx,$$
$$\theta \int_\Gamma \frac{\partial \dot{u}_i^*}{\partial z}(t) n\psi_i d\sigma = \theta \int_\omega \frac{\partial \dot{u}_i^*}{\partial z}(x,0,t)\psi_i dx,$$

donc

$$-\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \mu \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial z^2}(t)\psi_i dxdz - \int_\omega \mu\tau_i^* \psi_i dx - \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \theta \frac{\partial^2 \dot{u}_i^*}{\partial z^2}(t)\psi_i dxdz$$
$$-\int_\omega \theta \frac{\partial \tau_i^*}{\partial t}\psi_i dx + \int_\omega \hat{k}\,|\psi + s^*|\,dx - \int_\omega \hat{k}\,|s^*|\,dx \geq \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{f}_i(t)\psi_i dxdz,$$

pour $\psi \in H_{\Gamma_L \cup \Gamma_1}(\Omega)^2$, avec

$$H_{\Gamma_L\cup\Gamma_1}(\Omega) = \left\{\psi \in H^1(\Omega), \psi = 0 \;\text{ on }\; \Gamma_L \cup \Gamma_1\right\}.$$

D'autre part grâce à (2.36), on trouve

$$\int_\omega \hat{k}\,|\psi + s^*|\,dx - \int_\omega \hat{k}\,|s^*|\,dx - \int_\omega \mu\tau^*\psi dx - \int_\omega \theta\frac{\partial \tau^*}{\partial t}\psi dx \geq 0. \tag{2.41}$$

L'inégalité (2.41) est aussi valable pour tout $\psi \in D(\omega)^2$ et par densité de $D(\omega)$ dans $L^2(\omega)$, on obtient

$$\int_\omega \hat{k}\,|\psi + s^*|\,dx - \int_\omega \hat{k}\,|s^*|\,dx - \int_\omega \mu\tau^*\psi dx - \int_\omega \theta\frac{\partial \tau^*}{\partial t}\psi dx \geq 0,$$

pour $\psi \in L^2(\omega)^2$. on en déduit (2.35).

Pour montrer (2.39), on prend $\psi = \pm s^*$ dans (2.38), Ainsi on a :

$$\int_\omega \hat{k}\,|s^*|\,dx - \int_\omega \left(\mu\tau^* + \theta\frac{\partial \tau^*}{\partial t}\right)|s^*|\,dx = 0. \tag{2.42}$$

et si on prend dans (2.38) $\psi = \phi - s^*$, avec $\phi \in L^2(\omega)$, on trouve :

$$\int_\omega \hat{k}\,|\phi|\,dx - \int_\omega \left(\mu\tau^* + \theta\frac{\partial\tau^*}{\partial t}\right)|\phi|\,dx \geq \int_\omega \hat{k}\,|s^*|\,dx - \int_\omega \left(\mu\tau^* + \theta\frac{\partial\tau^*}{\partial t}\right)|s^*|\,dx.$$

d'après (2.42), on en déduit

$$\int_\omega \hat{k}\,|\phi|\,dx - \int_\omega \left(\mu\tau^* + \theta\frac{\partial\tau^*}{\partial t}\right)\phi dx \geq 0, \tag{2.43}$$

Dans (2.43), on choisit $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ tel que $\phi_i \geq 0$ pour tut $i = 1, 2$, on obtient :

$$\int_\omega \left|\mu\tau^* + \theta\frac{\partial\tau^*}{\partial t}\right| \cos(\mu\tau^* + \theta\frac{\partial\tau^*}{\partial t}, \phi)dx \leq \hat{k}.$$

Dans (2.43), on choisit $-\phi$ tel que $\phi_i \geq 0$ pour tout $i = 1, 2$, on obtient aussi

$$\int_\omega \left|\mu\tau^* + \theta\frac{\partial\tau^*}{\partial t}\right| \cos(\mu\tau^* + \theta\frac{\partial\tau^*}{\partial t}, \phi)dx \leq -\hat{k}.$$

De (2.42)-(2.43), on en déduit que

$$\int_\omega \left|\mu\tau^* + \theta\frac{\partial\tau^*}{\partial t}\right| dx \leq \hat{k}.$$

Donc

$$\hat{k}\,|s^*| \geq \left|\mu\tau^* + \theta\frac{\partial\tau^*}{\partial t}\right| |s^*| \geq \left(\mu\tau^* + \theta\frac{\partial\tau^*}{\partial t}\right) s^*.$$

De plus, nous avons

$$\hat{k}\,|s^*| = \left(\mu\tau^* + \theta\frac{\partial\tau^*}{\partial t}\right) s^*. \tag{2.44}$$

Si $\hat{k} = \left|\mu\tau^* + \theta\frac{\partial\tau^*}{\partial t}\right|$, donc d'après (2.44) on a

$$\left|\mu\tau^* + \theta\frac{\partial\tau^*}{\partial t}\right| |s^*| = \left(\mu\tau^* + \theta\frac{\partial\tau^*}{\partial t}\right) s^*.$$

Alors, il existe β tel que $s^* = \beta\left(\mu\tau^* + \theta\frac{\partial\tau^*}{\partial t}\right)$.

Si $\hat{k} > \left|\mu\tau^* + \theta\frac{\partial\tau^*}{\partial t}\right|$, donc d'après (2.44) on a

$$\hat{k}\,|s^*| - \left(\mu\tau^* + \theta\frac{\partial\tau^*}{\partial t}\right)s^* = 0 > \left[\hat{k} - \left(\mu\tau^* + \theta\frac{\partial\tau^*}{\partial t}\right)\right]|s^*|,$$

d'où $s^* = 0$ on ω.

Pour démontrer (2.40) en intégrant deux fois l'équation (2.37) de 0 à z, on trouve :

$$\begin{aligned} &-\mu u^*(x,z,t) - \theta\dot{u}^*(x,z,t) + \mu u^*(x,0,t) + \theta\dot{u}^*(x,0,t) \\ &+\mu z\tau^* + \theta z\frac{\partial\tau^*}{\partial t} = \int_0^z\int_0^\xi f(x,\alpha,t)d\alpha d\xi. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Si $z = h$, on obtient

$$\mu s^* + \theta\frac{\partial s^*}{\partial t} + \mu h\tau^* + \theta h\frac{\partial\tau^*}{\partial t} = \int_0^h\int_0^\xi f(x,\alpha,t)d\alpha d\xi. \tag{2.46}$$

En intégrant (2.45) de 0 à h, on obtient

$$\begin{aligned} &-\int_0^h(\mu u^*(x,z,t) + \theta\dot{u}^*(x,z,t))\,dz + \mu hs^* + \theta h\frac{\partial s^*}{\partial t} \\ &+\mu\frac{h^2}{2}\tau^* + \theta\frac{h^2}{2}\frac{\partial\tau^*}{\partial t} = \int_0^h F(x,z,t)dz. \end{aligned} \tag{2.47}$$

De (2.46)-(2.47), on déduit (2.40).

2.3.4 Unicité de solution du problème limite

Théorème 2.3.4. *La solution $u^*(t) \in L^2(0,T,V_z)\bigcap L^\infty(0,T,V_z)$ du problème limite (2.35) est unique.*

Preuve. Supposons qu'ils existent deux solutions $u^1(t)$ et $u^2(t)$ (2.35). De plus, on prend $\varphi = \dot{u}^2(t)$ et $\varphi = \dot{u}^1(t)$ respectivement, comme fonctions test dans (2.35) nous obtenons

$$\begin{aligned} &\mu\sum_{i=1}^2\int_\Omega\frac{\partial u_i^1(t)}{\partial z}\frac{\partial(\dot{u}_i^2(t) - \dot{u}_i^1(t))}{\partial z}dxdz + \theta\sum_{i=1}^2\int_\Omega\frac{\partial\dot{u}_i^1(t)}{\partial z}\frac{\partial(\dot{u}_i^2(t) - \dot{u}_i^1(t))}{\partial z}dxdz \\ &+\hat{j}(\dot{u}^2(t)) - \hat{j}(\dot{u}^1(t)) \geq \sum_{i=1}^2\int_\Omega\hat{f}_i(t)(\dot{u}_i^2(t) - \dot{u}_i^1(t))dxdz, \end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}&\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial u_i^2(t)}{\partial z}\frac{\partial(\dot u_i^1(t)-\dot u_i^2(t))}{\partial z}dxdz+\theta\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial \dot u_i^2(t)}{\partial z}\frac{\partial(\dot u_i^1(t)-\dot u_i^2(t))}{\partial z}dxdz\\ &\qquad+\hat{j}(\dot u^1(t))-\hat{j}(\dot u^2(t))\geq \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{f}_i(t)(\dot u_i^1(t)-\dot u_i^2(t))dxdz.\end{aligned}\tag{2.49}$$

En sommant les deux inéquations (2.48) et (2.49), on trouve

$$\theta\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial(\dot u_i^1(t)-\dot u_i^2(t))}{\partial z}\frac{\partial(\dot u_i^1(t)-\dot u_i^2(t))}{\partial z}dxdz\leq\mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial(u_i^1(t)-u_i^2(t))}{\partial z}\frac{\partial(\dot u_i^2(t)-\dot u_i^1(t))}{\partial z}dxdz.$$

Nous utilisons l'inégalité (2.12) et (2.13) on obtient

$$\left\|\frac{\partial}{\partial z}(\dot u^1(t)-\dot u^2(t))\right\|_{L^2(V_z)}\leq C\left\|\frac{\partial}{\partial z}(u^1(t)-u^2(t))\right\|_{L^2(V_z)}.\tag{2.50}$$

De plus, comme $u_i(0)=u_0$, on a

$$\frac{\partial u_i}{\partial z}(t)=\int_0^t\frac{\partial \dot u_i}{\partial z}(s)ds+\frac{\partial u_i}{\partial z}(0),$$

donc

$$\left\|\frac{\partial}{\partial z}(u^1(t)-u^2(t))\right\|_{L^2(V_z)}\leq\int_0^t\left\|\frac{\partial}{\partial z}(\dot u^1(s)-\dot u^2(s))\right\|_{L^2(V_z)}ds.\tag{2.51}$$

De (2.50) et (2.51), on trouve

$$\left\|\frac{\partial}{\partial z}(\dot u^1(t)-\dot u^2(t))\right\|_{L^2(V_z)}\leq C\int_0^t\left\|\frac{\partial}{\partial z}(\dot u^1(s)-\dot u^2(s))\right\|_{L^2(V_z)}ds.$$

D'après l'inégalité de Gronwall et de Poincaré , on en déduit que

$$\dot u^1(s)=\dot u^2(s),$$

pour tout $s\in[0,T]$.

En utilisant (2.51), on obtient $u^1(t)=u^2(t)$.

Donc le théorème est démontré.

CHAPITRE 3

ÉTUDE ASYMPTOTIQUE D'UN PROBLÈME AUX LIMITES AVEC FROTTEMENT ET À MÉMOIRE LONGUE DANS UN DOMAINE MINCE

Résumé. Nous étudions dans ce chapitre, le comportement asymptotique d'un problème aux limites à mémoire langue dans un domaine tridimensionnel, mince noté Ω^ε en régime dynamique avec frottement non linéaire de type Tresca où ε est un réel entre 0 et 1 ; en suivant les étapes suivantes : premièrement, nous allons établir une formulation variationnelle du problème et prouver l'existence et l'unicité de la solution faible. Ensuite, on étudie le comportement asymptotique lorsque le petit paramètre ε tend vers zéro.
Finalement, à l'aide d'une estimation à priori, on donne le problème limite et l'équation faible généralisée dans le plan.

3.1 Description du problème

Dans cette section, nous commençons par définir le domaine mince et quelques ensembles nécessaires pour étudier le comportement asymptotique des solutions. Ensuite, nous introduisons le problème considéré dans le domaine mince. Nous terminons cette section en donnant les formulations variationnelles faibles de notre problème.

3.1.1 Le domaine

Tout au long de ce chapitre, les points $x \in \mathbb{R}^3$ seront décomposés en $x = (x'; x3)$ avec $x' \in \mathbb{R}^2$, $x_3 \in \mathbb{R}$. Nous utilisons également la notation x' pour désigner un vecteur générique de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, nous définissons le domaine mince $\Omega^\varepsilon \in \mathbb{R}^3$, où

$$\Omega^\varepsilon = \{x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x', 0) \in \omega \ \text{ et } \ 0 < x_3 < \varepsilon h\left(x'\right)\}.$$

où ε est un petit paramètre qui tendra vers zéro. Pour le domaine Ω^ε, nous supposons que sa frontière $\partial\Omega^\varepsilon$ est de classe C^1 et est divisée en trois parties mesurables disjointes : $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega^\varepsilon = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \bar{\Gamma}_L^\varepsilon$, où ω est une région fixe dans le plan $x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. La surface supérieure $\bar{\Gamma}_1^\varepsilon$ est définie par $x_3 = \varepsilon h(x')$, $\bar{\Gamma}_L^\varepsilon$ est la frontière latérale, $\bar{\omega}$ est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure de Ω^ε et h est une fonction supposée de classe C^1 définie sur $\bar{\omega}$ telle que

$$0 < h_* \leq h(x') \leq h^*, \forall (x_1, x_2) \in \bar{\omega}.$$

De plus, nous utilisons les notations suivantes. On note par S_3 l'espace des tenseurs symétriques du second ordre dans $\mathbb{R}^3$. $(.,.)$ et $|.|$ le produit scalaire et la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^3$ et S_3 respectivement avec :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^3, \ \ (u, v) = u.v = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i, \qquad |v| = (v.v)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\forall \sigma, \tau \in S_3, \quad (\sigma, \tau) = \sigma.\tau = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}\tau_{ij}, \qquad |\tau| = (\tau.\tau)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour le champ de déplacement, nous utilisons la notation

$$H^1(\Omega^\varepsilon)^3 = \left\{ \varphi^\varepsilon \in \left(L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)^3 \ : \ \frac{\partial \varphi_i^\varepsilon}{\partial x_j} \in L^2\left(\Omega^\varepsilon\right), \ \forall i, j = 1, 2, 3 \right\},$$

qui est un espace de Hilbert muni de la norme $\|.\|_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^3}$ et du produit scalaire $(.,.)_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^3}$ définis respectivement par

$$\begin{aligned}
\|u^\varepsilon\|_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^3} &= \left(\sum_{i=1}^{3} \|u_i^\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2}}, \\
\|u_i^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} &= \left(\|u_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\nabla u_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2}}, \\
(u^\varepsilon, \varphi)_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^3} &= \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega^\varepsilon} \left(u_i^\varepsilon(x)\varphi_i^\varepsilon(x) \ + \nabla u_i^\varepsilon(x).\nabla\varphi_i^\varepsilon(x)\right) dx.
\end{aligned}$$

Le sous espace vectoriel de $\left(H^1(\Omega^\varepsilon)\right)^3$ défini par

$$V^\varepsilon = \left\{ \varphi^\varepsilon \in \left(H^1(\Omega^\varepsilon)\right)^3 \quad : \varphi^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \ \Gamma_L^\varepsilon \text{ et } \varphi^\varepsilon.n = 0 \text{ sur } \omega \right\}$$

est un convexe fermé non vide de $\left(H^1(\Omega^\varepsilon)\right)^3$.

Pour la contrainte, nous utilisons l'espace de Hilbert réel Q défini par :

$$Q = \left\{ \tau = (\tau_{ij}) \in S_3 : \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega^\varepsilon), \, \forall i, j = 1, 2, 3 \right\},$$

muni du produit scalaire :

$$(\sigma, \tau)_Q = \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma.\tau dx = \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}\tau_{ij} dx.$$

Soit Q_∞ l'espace du $4^{ième}$ ordre (voir [33] page 97) avec

$$Q_\infty = \{\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl}) : \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{jikl} = \mathcal{E}_{klij} \in L^\infty(\Omega^\varepsilon), \, 1 \leq i, j, k, l \leq 3\}$$

qui est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}_\infty} = \max_{0\leq i,j,k,l\leq 3} \|\mathcal{E}_{ijkl}\|_{L^\infty(\Omega^\varepsilon)},$$

telle que :

$$\|\mathcal{E}\tau\|_Q \leq 3\|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}_\infty}\|\tau\|_Q,\ \forall\mathcal{E}\in Q_\infty,\ \tau\in Q.$$

On note par $u^\varepsilon = (u_i^\varepsilon)_{1\leq i\leq 3}$ le déplacement du corps élastique et par $e\,(u^\varepsilon)$ le tenseur des déformations avec

$$\begin{array}{llll} e & : H^1(\Omega^\varepsilon)^3 & \longrightarrow & Q \\ & u^\varepsilon & \mapsto & e\,(u^\varepsilon) = (e_{ij}\,(u^\varepsilon))_{1\leq i,,j\leq 3} \end{array}$$

où

$$e_{ij}\,(u^\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right),\ 1\leq i,j\leq 3$$

3.1.2 L'énoncé du problème

Nous considérons un problème viscoélastique tridimensionnel avec une mémoire à long terme et une loi de frottement de Tresca dans un domaine mince Ω^ε.
La loi de comportement de viscosité avec la mémoire à long terme est donnée par :

$$\sigma\,(u^\varepsilon) = \left(\sigma_{ij}^\varepsilon\right)_{1\leq i,j\leq 3} = \mathcal{E}e\,(u^\varepsilon) + \int_0^t g(t-s)e\,(u^\varepsilon)\,(s)ds,\ \text{dans } \Omega^\varepsilon\times\,]0,T[$$

avec $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl})_{1\leq i,,j,k,l\leq 3}$ un tenseur d'ordre 4 de dimension 3 satisfaisant les conditions :

$$\begin{cases} \text{(a) } \mathcal{E} : \Omega^\varepsilon \times S_3 \to S_3. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{E}} > 0 \text{ telle que :} \\ \quad |\mathcal{E}(x,\tau_1) - \mathcal{E}(x,\tau_2)| \leq L_{\mathcal{E}} \, |\tau_1 - \tau_2| \\ \qquad \forall \, \tau_1, \tau_2 \in S_3, \forall \; x \in \Omega^\varepsilon. \\ \text{(c) Il existe } m_{\mathcal{E}} > 0 \text{ telle que :} \\ \qquad (\mathcal{E}(x,\tau_1) - \mathcal{E}(x,\tau_2)).(\tau_1 - \tau_2) \geq m_{\mathcal{E}} |\tau_1 - \tau_2|^2, \\ \qquad \forall \, \tau_1, \tau_2 \in S_3, \; \forall \;\; x \in \Omega^\varepsilon. \\ \text{(d) } \; x \longmapsto \mathcal{E}(x,0) \text{ est lebesgue mesurable dans } \Omega^\varepsilon, \; \forall \;\; \tau \in S_3, \\ \text{(e) } \; x \longmapsto \mathcal{E}(x,0) \in Q. \end{cases}$$

et $g(.)$ est une fonction de relaxation qui satisfait les conditions suivantes :

1) $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-$ est une fonction de classe C^2 telle que

$$0 < l \leq \left(\frac{\mu}{2} + \int_0^t g\,(s)\,ds \right), \; \forall t \in [0, T] \,. \tag{f}$$

2) $g\,(.)$ est croissante, et il existe des constantes positives G_1 et G_2 telles que

$$0 < g'\,(t) \leq G_1 \text{ et } |g''\,(t)| \leq G_2, \forall t \in [0, T] \,.$$

L'équation de la conservation de mouvement est donnée par l'équation d'équilibre

$$\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - Div\,(\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon)) = f^\varepsilon \;\; \text{dans } \Omega^\varepsilon \times \left]0, T\right[.$$

avec $f^\varepsilon = (f_i^\varepsilon)_{1 \leq i \leq 3}$ est la distribution volumique des forces extérieures.

Pour plus de détails sur la fonction $g\,(.)$, nous présentons les explications données par Kendra Cherry dans [10] : "La mémoire à long terme est généralement divisée en deux types explicites et implicites", où "Les souvenirs explicites, également connus sous le nom de souvenirs déclaratifs, incluent toutes les souvenirs qui sont disponibles dans la conscience et les souvenirs implicites sont ceux qui sont pour la plupart inconscients".

Pour la bonne compréhension du problème présenté dans ce travail avec la mé-

moire à long terme, voici quelques exemples sur ce terme qui satisfont aux conditions (1) et (2) : $g_1(s) = \dfrac{-\mu}{4}e^{-s}$, $g_2(s) = \dfrac{-\mu}{4\pi(1+s^2)}$ et $g_3(s) = \dfrac{-\mu}{4T}e^{-s^2}$, $T > 0$.
Ceux-ci peuvent apparaître dans des modèles de mécanique quantique, en particulier pour les fluides newtonien et non-newtonien comme : Maxwell, Bingham et autres.
Soit n le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur de $\partial\Omega^\varepsilon$. Les composantes normale et tangentielle de u^ε sur la frontière sont données par :

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon.n = (u_i^\varepsilon.n_i)_{1\leq i\leq 3}\,,\ \ u_\tau^\varepsilon = \left(u_{\tau_i}^\varepsilon\right)_{1\leq i\leq 3} = (u_i^\varepsilon - u_n^\varepsilon n_i)_{1\leq i\leq 3}\,,$$

De même, nous désignons par σ_n^ε et σ_τ^ε les composantes normale et tangentielle de σ^ε :

$$\sigma_n^\varepsilon = (\sigma.n)\,n = \left(\sigma_{ij}^\varepsilon n_i n_j\right)_{1\leq i,j\leq 3}\,,\ \text{et}\ \sigma_\tau^\varepsilon = \left(\sigma_{\tau_i}^\varepsilon\right)_{1\leq i\leq 3} = \left(\sigma_{ij}^\varepsilon n_j - \sigma_n^\varepsilon n_i\right)_{1\leq i,j\leq 3}.$$

Le déplacement u^ε est connu sur $\Gamma_1^\varepsilon\times]0,T[$ et sur $\Gamma_L^\varepsilon\ \times]0,T[$, il satisfait également la condition de Dirichlet

$$u^\varepsilon = 0.$$

Sur $\omega\times]0,T[$, la vitesse est supposée inconnue et elle satisfait la condition suivante :

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}.n = 0.$$

L'existence d'un frottement sur $\omega\times]0,T[$, qui est modélisé par la loi de Tresca non linéaire

$$\left.\begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < \pi^\varepsilon \implies (\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t})_\tau = 0, \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = \pi^\varepsilon \implies \exists\beta\geq 0 \text{ tel que } (\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t})_\tau = -\beta\sigma_\tau^\varepsilon, \end{array}\right\}\text{sur } \omega\times\,]0,T[\,,$$

où $|.|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$, $\pi^\varepsilon \geqslant 0$ est le coefficient de frottement (le seuil). Tant que la contrainte tangentielle n'a pas atteint le seuil, le déplacement tangentiel est donné et on dit qu'il y adhérence. Lorsque le seuil est atteint, le corps se déplace tangentiellement par rapport à la contrainte tangentiel et donc il y a un glissement.

Le problème présenté est complété par des conditions initiales données par :

$$u^\varepsilon(x',0) = u_0(x') \text{ et } \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x',0) = u_1(x'),\ \forall x' \in \Omega^\varepsilon.$$

Finalement la formulation classique du problème mécanique du contact bilatéral de frottement est énoncé comme suit :

Problème P^ε **:** trouver $u^\varepsilon = (u_i^\varepsilon)_{1\leq i\leq 3} : \Omega^\varepsilon \times]0,T[\to \mathbb{R}^3$ telle que :

$$\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - Div\left(\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon)\right) = f^\varepsilon \text{ dans } \Omega^\varepsilon \times]0,T[\,, \tag{3.1}$$

$$\sigma\left(u^\varepsilon\right) = \mathcal{E}e\left(u^\varepsilon\right) + \int_0^t g(t-s)e\left(u^\varepsilon\right)(s)ds, \text{ dans } \Omega^\varepsilon \times]0,T[\tag{3.2}$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ sur } (\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon) \times]0,T[\,, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}.n = 0 \text{ sur } \omega \times]0,T[\,, \tag{3.4}$$

$$\left.\begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < \pi^\varepsilon \implies (\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t})_\tau = 0, \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = \pi^\varepsilon \implies \exists \beta \geq 0 \text{ tel que } (\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t})_\tau = -\beta\sigma_\tau^\varepsilon, \end{array}\right\} \text{sur } \omega \times]0,T[\,, \tag{3.5}$$

$$u^\varepsilon(x,0) = u_0(x) \text{ et } \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x,0) = u_1(x),\ \forall x \in \Omega^\varepsilon. \tag{3.6}$$

Remarque 3.1.1. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance de divers fonctions pour la variable $x \in \Omega^\varepsilon$.

Lemme 3.1.1. *La condition* (3.5) *sur* $\omega \times]0,T[$ *est équivalente à la relation :*

$$\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau .\sigma_\tau^\varepsilon + \pi^\varepsilon.|\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau| = 0.$$

La démonstration de ce Lemme est donnée dans le Lemme 2.1.

3.1.3 Formulation variationnelle du problème P^ε

Nous terminons cette section en donnant la formulation variationnelle faible équivalente du problème P^ε, qui sera utile dans les sections suivantes.

En multipliant (3.1) par $\left(\varphi^\varepsilon - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) \in V^\varepsilon$ et on intègre par partie sur Ω^ε avec l'utilisation de la formule de Green et les conditions aux limites $(3.3)-(3.6)$, on obtient le problème variationnel suivant :

Problème P_v^ε : *Trouver* $u^\varepsilon \in V^\varepsilon$ *avec* $\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \in V^\varepsilon$, $\forall t \in [0,T]$, *telle que* :

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}, \varphi^\varepsilon - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) + \breve{a}\left(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) + \displaystyle\int_0^t g\,(t-s)\,\breve{a}\left(u^\varepsilon\,(s)\,, \varphi^\varepsilon - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\,(t)\right) ds \\ + j^\varepsilon(\varphi^\varepsilon) - j^\varepsilon\left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) \geq \left(f^\varepsilon, \varphi^\varepsilon - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right), \; \forall \varphi^\varepsilon \in V^\varepsilon, \\ u^\varepsilon(x,0) = u_0\,(x)\,,\; \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\,(x,0) = u_1\,(x)\,. \end{array}\right), \quad (3.7)$$

avec

$$\begin{aligned} \breve{a}\,(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) &= \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon)\,(e_{ij}(\varphi^\varepsilon))\,dx = \int_{\Omega^\varepsilon} \mathcal{E}_{ijpq}\,(e_{pq}(u^\varepsilon))\,(e_{ij}(\varphi^\varepsilon))\,dx, \;\; \forall u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3 \\ (f^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) &= \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon.\varphi^\varepsilon dx, \;\; \text{et } j^\varepsilon(\varphi^\varepsilon) = \int_\omega \pi^\varepsilon\,|\varphi^\varepsilon|\,dx', \;\; \forall \varphi^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3. \end{aligned}$$

Remarque 3.1.2. Il résulte des propriétés précédentes et de l'inégalité de Korn (voir[33] page 97), que la forme bilinéaire $\breve{a}(.,.)$ est coercitive et continue c'est-à-dire :

$$\breve{a}(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \geq \mu C_K \left\|\nabla u^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2, \quad \forall u^\varepsilon \in V^\varepsilon,$$

$$|\breve{a}(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)| \leq M \left\|\nabla u^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \left\|\nabla \varphi^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}, \quad \forall u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon \in V^\varepsilon.$$

Les résultats d'existence et d'unicité de la solution faible du problème (3.7) sont obtenus dans le théorème suivant :

Théorème 3.1.1. *Sous les hypothèses*

$$f^\epsilon, \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2} \in L^2\left(0, T, L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right),$$

$$\pi^\varepsilon \in C_0^\infty(\omega),\ \pi^\varepsilon > 0, \text{ est indépendant de } t,$$

$$u_0\,(x) \in H^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3,\ u_1\,(x) \in H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3,\ \left(u_1\right)_\tau = 0. \quad (3.8)$$

Il existe une solution unique u^ϵ *de* P_v^ε *telle que*

$$u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \in L^\infty\left(0, T, H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right), \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} \in L^\infty\left(0, T, L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right). \quad (3.9)$$

.

Étant donné que la fonction j^ε n'est pas régularisée, nous allons la régulariser en utilisant j_ξ^ε, avec :

$$j_\xi^\varepsilon(\varphi^\varepsilon) = \int_\omega \kappa^\varepsilon(x)\psi_\xi(|\varphi_{1\tau}^\varepsilon|^2)dx', \quad \text{et} \quad \psi_\xi(\beta) = \frac{1}{1+\xi}|\beta|^{(1+\xi)}, \ \xi > 0. \tag{3.10}$$

Ensuite, nous formulons le problème approché associé

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \varphi\right) + \mu\breve{a}\left(u_\xi^\varepsilon(t), \varphi\right) + \displaystyle\int_0^t g\left(t-s\right)\breve{a}\left(u_\xi^\varepsilon\left(s\right), \varphi\right) ds \\ + \left(\left(j_\xi^\varepsilon\right)'\left(\dfrac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t)\right), \varphi\right) = \left(f^\epsilon(t), \varphi\right), \forall\varphi \in V^\epsilon, \\ u_\xi^\varepsilon(x,0) = u_0\left(x\right), \ \dfrac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}\left(x,0\right) = u_1\left(x\right). \end{array} \right), \tag{3.11}$$

La preuve est basée sur la théorie des opérateurs non linéaires ; en utilisant la méthode de Galerkin (comme dans Lions, Les inéquations, Lions, quelques]) avec les hypothèses (a)-(e) de $\mathcal{E}$, on montre qu'il existe une solution unique $u_\zeta^\varepsilon = (u_{1\zeta}^\varepsilon, u_{2\zeta}^\varepsilon)$ de (3.11).

Finalement, nous montrons que la limite de u_ζ^ε vers u^ε quand ζ tends vers zéro est solution de (3.7).

3.2 Changement déchelle par rapport à x_3

Notre objectif est d'étudier le comportement asymptotique de u^ε lorsque ε tend vers zéro. Dans ce but, comme c'est habituellement le cas lorsque nous travaillons avec des domaines minces, nous utilisons la dilatation dans la variable x_3 donnée par $x_3 = \varepsilon z$. Ainsi, pour (x', x_3) dans Ω^ε, nous avons (x', z) dans :

$$\Omega = \{(x', z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x', 0) \in \omega \ \text{ et } \ 0 < z < h\,(x')\}.$$

Afin d'avoir les fonctions définies dans Ω avec la frontière $\Gamma = \partial\Omega = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_L$, nous définissons $\hat{u} \in L^{\infty}\left(0, T, H^1(\Omega)^3\right)$ en utilisant :

$$\begin{cases} u_i^{\varepsilon}(x', x_3, t) = \hat{u}_i(x', z, t), \quad i = 1, 2 \\ \varepsilon^{-1} u_3^{\varepsilon}(x', x_3, t) = \hat{u}_3(x', z, t) \end{cases} \tag{3.12}$$

Introduisons quelques notations qui seront utiles par la suite. Pour les données du problème $(3.1) - (3.6)$, nous supposons qu'elles dépendent de ε de la manière suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon^2 f^{\varepsilon}(x', x_3, t) = \hat{f}(x', z, t), \\ \varepsilon \pi^{\varepsilon} = \widehat{\pi}. \end{cases} \tag{3.13}$$

avec $\hat{f}$ et $\widehat{\pi}$ indépendants de ε.

En suite, nous définissons le tenseur des contraintes $\hat{\sigma}_{ij}^{\varepsilon}$ comme suit :

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{ij} = \varepsilon^2 \sigma_{ij}^{\varepsilon}, \ 1 \leq i, j \leq 2, \\ \hat{\sigma}_{i3} = \varepsilon \sigma_{i3}^{\varepsilon}, \ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Nous introduisons maintenant le cadre fonctionnel sur Ω. Nous notons :

$$\begin{aligned} V &= \left\{\hat{\varphi} \in \left(H^1(\Omega)\right)^3 \ : \ \hat{\varphi} = 0 \text{ sur } \Gamma_1^{\varepsilon} \cup \ \Gamma_L^{\varepsilon}, \ \hat{\varphi}.n = 0 \text{ sur } \omega\right\}, \\ \Pi(V) &= \left\{\hat{\varphi} \in \left(H^1(\Omega)\right)^2 \ : \ \hat{\varphi} = (\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2), \ \hat{\varphi}_i = 0 \text{ sur } \Gamma_L \cup \ \Gamma_1, \text{ pour } i = 1, 2\right\}, \\ V_z &= \left\{\hat{\varphi} = (\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) \in \left(L^2(\Omega)\right)^2 \ : \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} \in L^2(\Omega) \text{ et } \hat{\varphi} = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \ i = 1, 2\right\}, \end{aligned}$$

où V_z est un espace de Banach pour la norme

$$\|\hat{\varphi}\|_{V_z} = \left(\sum_{i=1}^{2} \|\hat{\varphi}_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant la symétrie de $\mathcal{E}_{ijpq}$, le problème variationnel (3.7) est reformulé sur le domaine fixe comme suit :

Problème $\hat{P}_v$. Trouver $\hat{u} \in V$ avec $\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t} \in V$, $\forall t \in [0,T]$, telle que :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial t^2}, \hat{\varphi}_i - \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} \right) + \varepsilon^4 \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_3}{\partial t^2}, \hat{\varphi}_3 - \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial t} \right) + \widehat{a} \left(\hat{u}, \hat{\varphi} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right) \\ \displaystyle + \int_0^t g(t-s)\, \hat{a} \left(\hat{u}(s), \hat{\varphi} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t) \right) ds + \widehat{j}(\hat{\varphi}) - \widehat{j}\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right) \\ \displaystyle \geq \sum_{i=1}^{2} \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} \right) + \varepsilon \left(\hat{f}_3, \hat{\varphi}_3 - \frac{\partial \hat{u}_3^{\epsilon}}{\partial t} \right), \forall \hat{\varphi} \in V, \\ \displaystyle \hat{u}(0) = \hat{u}_0, \ \ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0) = \hat{u}_1, \end{cases} \tag{3.14}$$

où

$$\widehat{j}(\hat{\varphi}) = \int_{\omega} \widehat{\pi} \, |\hat{\varphi}| \, dx', \tag{3.15}$$

$$\left.\begin{aligned} \widehat{a}(\hat{u}, \hat{\varphi}) &= \varepsilon^2 \int_{\Omega} \mathcal{E}_{ijkl} e_{kl}(\hat{u}) \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial x_j} dx'dz + 2\varepsilon \int_{\Omega} \mathcal{E}_{i3kl} e_{kl}(\hat{u}) \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} dx'dz \\ &+ 2\varepsilon^2 \int_{\Omega} \mathcal{E}_{ijk3} e_{k3}(\hat{u}) \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial x_j} dx'dz + 4\varepsilon \int_{\Omega} \mathcal{E}_{i3k3} e_{k3}(\hat{u}) \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} dx'dz \\ &+ \varepsilon^2 \int_{\Omega} \mathcal{E}_{ij33} e_{33}(\hat{u}) \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial x_j} dx'dz + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \mathcal{E}_{33ij} e_{ij}(\hat{u}) \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial z} dx'dz \\ &+ 2\varepsilon \int_{\Omega} \mathcal{E}_{i333} \hat{e}_{33}(\hat{u}) \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} dx'dz + 2\varepsilon^2 \int_{\Omega} \mathcal{E}_{33i3} e_{i3}(\hat{u}) \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial z} dx'dz \\ &+ \varepsilon^2 \int_{\Omega} \mathcal{E}_{3333} e_{33}(\hat{u}) \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial z} dx'dz, \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

et le tenseur de déformation $e(\hat{u}) = (e_{ij}(\hat{u}))_{ij}$, $i, j = 1, 2$ est reformulé sur le domaine fixe par :

$$\begin{aligned} e_{ij}(\hat{u}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ e_{i3}(\hat{u}) &= \hat{e}_{3i}(\hat{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, \\ e_{33}(\hat{u}) &= \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial z}. \end{aligned}$$

Dans la section suivante, nous établissons quelques estimations pour les solutions du problème variationnel (3.14).

Théorème 3.2.1. *Si les hypothèses du Théorème 3.1 sont vérifiées, alors il existe une constante positive C ne dépendant pas de ε, telle que l'on a :*

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{2} \left[\left\| \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &+ \sum_{i,j=1}^{2} \left\| \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C, \end{aligned} \tag{3.17}$$

Théorème 3.2.2. *Sous les mêmes hypothèses du Théorème précédent, il existe une* *constante positive C ne dépendant pas de ε, telle que on a :*

$$\sum_{i=1}^{2}\left[\left\|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\varepsilon\frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \hat{u}_3}{\partial t}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right]$$
$$+\sum_{i,j=1}^{2}\left\|\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\varepsilon\frac{\partial^2 \hat{u}_3}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\varepsilon\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \hat{u}_3}{\partial t}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\leq C. \tag{3.18}$$

Démonstration du Théorème 3.2. Supposons que le problème P_v^ε admette une solution notée par u^ϵ, alors pour $\varphi^\varepsilon = 0$, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2},\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)+\breve{a}\left(u^\varepsilon,\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)+\displaystyle\int_0^t g\left(t-s\right)\breve{a}\left(u^\varepsilon\left(s\right),\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\left(t\right)\right)ds\\ +j^\varepsilon\left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\leq\left(f^\varepsilon,\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right),\end{array}\right),$$

Nous savons que $j^\varepsilon(.)$ est positif (puisque $\pi^\varepsilon > 0$), alors

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\breve{a}\left(u^\varepsilon,u^\varepsilon\right)\right]+\int_0^t g\left(t-s\right)\breve{a}\left(u^\varepsilon\left(s\right),\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\left(t\right)\right)ds\\&\leq\left(f^\varepsilon,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right),\end{aligned} \tag{3.19}$$

D'autre part, en utilisant le fait que $\mathcal{E}$ est linéaire et indépendant de t, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^t g\left(t-s\right)\breve{a}\left(u^\varepsilon\left(s\right),\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\left(t\right)\right)ds=\int_0^t g\left(t-s\right)\int_{\Omega^\varepsilon}\sigma^\varepsilon_{ij}(u^\varepsilon\left(s\right))\left(e_{ij}(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\left(t\right))\right)dxds\\&=\int_0^t g\left(t-s\right)\int_{\Omega^\varepsilon}\mathcal{E}_{ijpq}\left(e_{pq}(u^\varepsilon\left(s\right))\right)\left(e_{ij}(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\left(t\right))\right)dxds\\&=\int_0^t g\left(t-s\right)\int_{\Omega^\varepsilon}\mathcal{E}_{ijpq}\left(e_{pq}(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\left(t\right))\right)\left[e_{pq}(u^\varepsilon\left(s\right))-e_{ij}(u^\varepsilon\left(t\right))\right]dxds\\&+\int_0^t g\left(t-s\right)\int_{\Omega^\varepsilon}\mathcal{E}_{ijpq}\left(e_{pq}(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\left(t\right))\right)e_{ij}(u^\varepsilon\left(t\right))dxds\end{aligned} \tag{3.20}$$

En utilisant les technique de la dérivée classique par rapport à t, en déduit que :

$$\begin{aligned}
\int_0^t g(t-s)\,\breve{a}\left(u^\varepsilon(s), \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) ds &= -\frac{1}{2}\int_0^t g(t-s)\frac{d}{dt}\int_{\Omega^\varepsilon}\left[\mathcal{E}_{ijpq}e_{pq}(u^\varepsilon(s)) - \mathcal{E}_{ijpq}e_{pq}(u^\varepsilon(t))\right]^2 dxds \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t g(t-s)\frac{d}{dt}\int_{\Omega^\varepsilon}\left[\mathcal{E}_{ijpq}e_{pq}(u^\varepsilon(t))\right]^2 dxds \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^t g(t-s)\frac{d}{dt}\left\|\mathcal{E}_{ijpq}e_{pq}(u^\varepsilon(s)) - \mathcal{E}_{ijpq}e_{pq}(u^\varepsilon(t))\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t g(t-s)\frac{d}{dt}\left\|\mathcal{E}_{ijpq}e_{pq}(u^\varepsilon(t))\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds \\
&= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^t g(t-s)\left\|\mathcal{E}_{ijpq}e_{pq}(u^\varepsilon(s)) - \mathcal{E}_{ijpq}e_{pq}(u^\varepsilon(t))\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds\right] \\
&+ \int_0^t g'(t-s)\left\|\mathcal{E}_{ijpq}e_{pq}(u^\varepsilon(s)) - \mathcal{E}_{ijpq}e_{pq}(u^\varepsilon(t))\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds \\
&+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^t g(s)\,ds\left\|\mathcal{E}_{ijpq}e_{pq}(u^\varepsilon(t))\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right] - \frac{1}{2}g(t)\left\|\mathcal{E}_{ijpq}e_{pq}(u^\varepsilon(t))\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

En insérant (3.21) dans (3.19), on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \breve{a}(u^\varepsilon, u^\varepsilon) - 2\left(g \star \mathcal{E}_{ijpq}e_{pq}(u^\varepsilon)\right)(t) + 2\int_0^t g(s)\,ds\left\|\mathcal{E}_{ijpq}e_{pq}(u^\varepsilon(t))\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right] \\
&+ 2\left(g' \star \mathcal{E}_{ijpq}e_{pq}(u^\varepsilon)\right)(t) - g(t)\left\|\mathcal{E}_{ijpq}e_{pq}(u^\varepsilon)(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \\
&\leq \left(f^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right),
\end{aligned} \tag{3.22}$$

où

$$\left(g \star \psi^\varepsilon\right)(t) = \int_0^t g(t-s)\left\|\psi^\varepsilon(s) - \psi^\varepsilon(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds,\ \forall \psi^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon).$$

En intègrant l'inégalité (3.22) sur $(0,t)$ et en utilisant la majoration de $\|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}_\infty}$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}
&\left[\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \breve{a}(u^\varepsilon, u^\varepsilon) - 2\left(g \star \mathcal{E}_{ijpq}e_{pq}(u^\varepsilon)\right)(t) + 2\int_0^t g(s)\,ds\left\|\mathcal{E}_{ijpq}e_{pq}(u^\varepsilon(t))\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right] \\
&+ 4\int_0^t \left(g' \star \mathcal{E}_{ijpq}e_{pq}(u^\varepsilon)\right)(s)\,ds - 2\int_0^t g(s)\left\|\mathcal{E}_{ijpq}e_{pq}(u^\varepsilon)(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds \\
&\leq \|u_1\|^2_{L^2(\Omega^\epsilon)} + 3\sqrt{3}M\left\|\nabla u_0\right\|^2_{L^2(\Sigma^\epsilon)} + 2\int_0^t \left(f^\varepsilon(s), \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right) ds,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

où $M = \max_{1\leq i,j,p,q\leq 3}\|\mathcal{E}_{ijpq}\|_{L^\infty(\Omega^\varepsilon)}$,
D'après l'inégalité de Korn et les hypothèses $(a)-(e)$, il existe une constante $C_k > 0$

indépendante de ε, telle que :

$$\breve{a}\left(u^{\varepsilon}(t), u^{\varepsilon}(t)\right) \geq 2\mu C_K \|\nabla u^{\varepsilon}\|^2_{L^2(\Omega^{\varepsilon})}. \tag{3.24}$$

En tenant compte du fait que $g\left(.\right)$ est négatif et croissant :

$$\left(g \star \mathcal{E}_{ijpq} e_{pq}(u^{\varepsilon})\right)(t) \leq 0, \text{ and } 0 \leq \left(g' \star \mathcal{E}_{ijpq} e_{pq}(u^{\varepsilon})\right)(t),$$

alors, l'inégalité variationnelle (3.23) se ramène à :

$$\begin{aligned}
&\left[\left\|\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^{\varepsilon})} + 2C_K\left(\mu + \int_0^t g\left(s\right) ds\right) \|\nabla u^{\varepsilon}\|^2_{L^2(\Omega^{\varepsilon})}\right] \\
&\leq \|u_1\|^2_{L^2(\Omega^{\varepsilon})} + 3\sqrt{3}M \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega^{\varepsilon})} + 2\int_0^t \left(f^{\varepsilon}\left(s\right), \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\left(s\right)\right) ds.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Comme

$$2\int_0^t \left(f^{\varepsilon}\left(s\right), \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\left(s\right)\right) ds = 2(f^{\varepsilon}(t), u^{\varepsilon}(t)) - 2(f^{\varepsilon}(0), u(0)) - 2\int_0^t \left(\frac{\partial f^{\varepsilon}}{\partial t}(s), u^{\varepsilon}(s)\right) ds,$$

et par l'inégalité de Poincaré :

$$\|u^{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega^{\varepsilon})} \leq \varepsilon h^{\star} \|\nabla u^{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega^{\varepsilon})}, \text{ pour } u^{\varepsilon} \in V^{\varepsilon}$$

puis par l'inégalité de Young :

$$ab \leq \eta^2 \frac{a^2}{2} + \eta^{-2}\frac{b^2}{2}, \text{ pour } \eta > 0,$$

on trouve

$$\left.\begin{aligned}
\left|\int_0^t \left(f^{\varepsilon}\left(s\right), \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\left(s\right)\right) ds\right| \leq \frac{\mu C_K}{2} \|\nabla u^{\varepsilon}(t)\|^2_{L^2(\Omega^{\varepsilon})} \\
+\frac{1}{2}\frac{(\varepsilon h^{\star})^2}{\mu C_K} \|f^{\varepsilon}(t)\|^2_{L^2(\Omega^{\varepsilon})} + \frac{(\varepsilon h^{\star})^2}{2} \|f^{\varepsilon}(0)\|^2_{L^2(\Omega^{\varepsilon})} + \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega^{\varepsilon})} \\
+\frac{\mu C_K}{2}\int_0^t \|\nabla u^{\varepsilon}(s)\|^2_{L^2(\Omega^{\varepsilon})} ds + \frac{1}{2}\frac{(\varepsilon h^{\star})^2}{\mu C_K}\int_0^t \left\|\frac{\partial f^{\varepsilon}}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^{\varepsilon})} ds
\end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

En substituant (3.26) dans (3.25), on trouve

$$\begin{aligned}
&\left[\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + 2C_K\left(\mu + \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right] \\
&\leq \|u_1\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \left(1+3\sqrt{3}M\right)\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \mu C_K\|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \\
&+ \frac{(\varepsilon h^\star)^2}{\mu C_K}\|f^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + (\varepsilon h^\star)^2\|f^\varepsilon(0)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \\
&\mu C_K\int_0^t \|\nabla u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}ds + \frac{(\varepsilon h^\star)^2}{\mu C_K}\int_0^t\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}ds
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Comme $\varepsilon^2\|f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} = \varepsilon^{-1}\|\hat{f}\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$, et en multipliant (3.27) par ε et en appliquant l'hypothèse (f), on déduit que :

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\left[\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + 2C_K l\,\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right] \\
&\leq A + \mu C_K\int_0^t \varepsilon\left[\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\nabla u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right]ds
\end{aligned} \tag{3.28}$$

où A est une constante indépendante de ε, avec

$$\begin{aligned}
A &= \|\widehat{u}_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(1+3\sqrt{3}M\right)\|\nabla\widehat{u}_0\|^2_{L^2(\Omega)} + (h^\star)^2\|\hat{f}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ \frac{(h^\star)^2}{\mu C_K}\left[\|\hat{f}(t)\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3} + \int_0^t\left\|\frac{\partial\hat{f}}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3} ds\right]
\end{aligned} \tag{3.29}$$

En utilisant le Lemme de Gronwall, nous obtenons (3.17).

Démonstration du Théorème 3.3. La fonctionnelle j^ε est convexe mais non dérivable. Pour surmonter cette difficulté, nous utilisons l'approche suivante. On régularise la fonction j^ε par j^ε_ζ , où

$$j^\varepsilon_\zeta(v) = \int^\varepsilon_{\Omega^\varepsilon}\pi^\varepsilon(x')\,\phi_\zeta\left(|v_\tau|^2\right)dx' \text{ avec } \phi_\zeta(\lambda) = \frac{1}{1+\zeta}|\lambda|^{(1+\zeta)},\ \zeta > 0,$$

Ensuite, on construit le problème approché

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2},\varphi^\varepsilon\right)+\breve{a}\left(u_\zeta^\varepsilon,\varphi^\varepsilon\right)+\displaystyle\int_0^t g\left(t-s\right)\breve{a}\left(u_\zeta^\varepsilon\left(s\right),\varphi^\varepsilon\right)ds \\ +\left(\left(\jmath_\zeta^\varepsilon\right)'\left(\dfrac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right),\varphi^\varepsilon\right)=\left(f^\varepsilon,\varphi^\varepsilon\right),\ \forall\varphi^\varepsilon\in V^\varepsilon, \\ u_\zeta^\varepsilon(x',0)=u_0(x')\text{ et }\dfrac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(x',0)=u_1(x'),\ \forall x'\in\Omega^\varepsilon.\end{array}\right), \tag{3.30}$$

Pour montrer l'estimation a priori (3.18), on dérive (3.30) par rapport à t et on prend $\varphi^\varepsilon=\dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial^3 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2},\dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)+\breve{a}\left(\dfrac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t},\dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)+\displaystyle\int_0^t g'\left(t-s\right)\breve{a}\left(u_\zeta^\varepsilon\left(s\right),\dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)ds \\ +g\left(0\right)\breve{a}\left(u_\zeta^\varepsilon\left(t\right),\dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\left(t\right)\right)+\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\jmath_\zeta^\varepsilon\right)'\left(\dfrac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right),\dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)=\left(\dfrac{\partial f^\varepsilon}{\partial t},\dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right),\end{array}\right), \tag{3.31}$$

En utilisant le fait que $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\jmath_\zeta^\varepsilon\right)'\left(\dfrac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right),\dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)\geq 0$, puis par l'utilisation de l'inégalité de Korn, on trouve

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+2\mu C_K\left\|\nabla\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right]+2\int_0^t g'\left(t-s\right)\breve{a}\left(u_\zeta^\varepsilon\left(s\right),\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\left(t\right)\right)ds \\ &+2g\left(0\right)\breve{a}\left(u_\zeta^\varepsilon\left(t\right),\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\left(t\right)\right)\leq\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\left(1+3\sqrt{3}M\right)\left\|\nabla\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+ \\ &+C_K\mu\left\|\nabla\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\frac{(\varepsilon h^\star)^2}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\mu C_K\left\|\nabla\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+ \\ &\frac{(\varepsilon h^\star)^2}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}+\frac{(\varepsilon h^\star)^2}{\mu C_K}\int_0^t\left\|\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}ds+\int_0^t\mu C_K\left\|\nabla\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}ds.\end{aligned} \tag{3.32}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned}&\int_0^t g'\left(t-s\right)\breve{a}\left(u_\zeta^\varepsilon\left(s\right),\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\left(t\right)\right)ds= \\ &-g'\left(0\right)\breve{a}\left(u_\zeta^\varepsilon,\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\left(t\right)\right)+\frac{d}{dt}\int_0^t g'\left(t-s\right)\breve{a}\left(u_\zeta^\varepsilon\left(s\right),\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\left(t\right)\right)ds \\ &-\int_0^t g''\left(t-s\right)\breve{a}\left(u_\zeta^\varepsilon\left(s\right),\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\left(t\right)\right)ds,\end{aligned} \tag{3.33}$$

aussi

$$g(0)\breve{a}\left(u_\zeta^\epsilon(t), \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) = g(0)\frac{d}{dt}\breve{a}\left(u_\zeta^\varepsilon(t), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) - g(0)\breve{a}\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right). \quad (3.34)$$

Maintenant, estimons $\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)$. De (3.8) et (3.30), on déduit

$$\left|\int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\varphi^\varepsilon dx\right| \leq \varepsilon h^\star \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\|\nabla\varphi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \left(1+3\sqrt{3}M\right)\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\|\nabla\varphi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \left(\left[\varepsilon h^\star\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} +\right.\right.$$

En multipliant cette inégalité par $\sqrt{\varepsilon}$, on obtient

$$\sqrt{\varepsilon}\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq C', \quad (3.35)$$

où $C' = h^\star\|\hat{f}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \left(1+3\sqrt{3}M\right)\|\hat{u}_0\|_{H^1(\Omega)}\|_{L^2(\Omega)}$ est indépendant de ε.

En substituant $(3.33)-(3.35)$ dans (3.32), puis en intègrant cette inégalité de 0 à t, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left[\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \mu C_K\left\|\nabla\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right] + \int_0^t g'(t-s)\breve{a}\left(u_\zeta^\varepsilon(s), \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right)ds \\
&+ 2g(0)\breve{a}\left(u_\zeta^\varepsilon(t), \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) - 2g(0)\breve{a}\left(u_\zeta^\varepsilon(0), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)\right) \\
&- 2g(0)\int_0^t \breve{a}\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right)ds - g'(0)\int_0^t \breve{a}\left(u_\zeta^\varepsilon(s), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right)ds \\
&- \int_0^t\int_0^\tau g''(\tau-s)\breve{a}\left(u_\zeta^\varepsilon(s), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\tau)\right)dsd\tau \\
&\leq \left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{8g(0)^2}{\mu C_K}\left\|\nabla u_\zeta^\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{4G_1^2}{\mu C_W}\int_0^t\left\|\nabla u_\zeta^\varepsilon(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}ds \\
&+ \frac{4G_2^2}{\mu C_K}\int_0^t\int_0^\tau\left\|\nabla u_\zeta^\varepsilon(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}dsd\tau + 4g(0)^2\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \left(1+\mu C_K+3\sqrt{3}M\right)\|\nabla u_1\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \\
&\frac{(\varepsilon h^\star)^2}{\mu C_K}\left[\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \int_0^t\left\|\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}ds\right] \quad (3.36) \\
&+ \int_0^t\left[\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \mu C_K\left\|\nabla\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right]ds.
\end{aligned}$$

Si on passe à la limite dans (3.36) lorsque ζ tend vers zéro, on trouve

$$\begin{aligned}
&\left[\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \mu C_K \left\|\nabla\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right] + \int_0^t g'(t-s)\,\breve{a}\left(u^\varepsilon(s), \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) ds \\
&+ 2g(0)\,\breve{a}\left(u^\varepsilon_\zeta(t), \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) - 2g(0)\,\breve{a}\left(u^\varepsilon(0), \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0)\right) \\
&- 2g(0)\int_0^t \breve{a}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s), \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right) ds - g'(0)\int_0^t \breve{a}\left(u^\varepsilon(s), \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right) ds \\
&- \int_0^t\int_0^\tau g''(\tau - s)\,\breve{a}\left(u^\varepsilon(s), \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(\tau)\right) ds d\tau \\
&\leq \left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{8g(0)^2}{\mu C_K}\left\|\nabla u^\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{4G_1^2}{\mu C_W}\int_0^t \left\|\nabla u^\varepsilon(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds \\
&+ \frac{4G_2^2}{\mu C_K}\int_0^t\int_0^\tau \left\|\nabla u^\varepsilon_\zeta(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds d\tau + 4g(0)^2\left\|\nabla u_0\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \left(1 + \mu C_K + 3\sqrt{3}M\right)\left\|\nabla u_1\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \\
&\frac{(\varepsilon h^\star)^2}{\mu C_K}\left[\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \int_0^t \left\|\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds\right] \qquad (3.37) \\
&+ \int_0^t \left[\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \mu C_K \left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right] ds.
\end{aligned}$$

En multipliant maintenant (3.37) par ε, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\left[\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \mu C_K \left\|\nabla\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right] \\
&\leq B + \int_0^t \left[\varepsilon\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \mu C_K \left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right] ds,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
B &= (C')^2 + \frac{2}{\mu C_K}\left(4g(0)^2 + 2G_1^2 T + G_2^2 T^2\right)\left\|\nabla u^\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \\
&+ 4g(0)^2\left\|\nabla \widehat{u}_0\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \left(1 + \mu C_K + 3\sqrt{3}M\right)\left\|\nabla \widehat{u}_1\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \\
&\frac{(h^\star)^2}{\mu C_K}\left[\left\|\frac{\partial \widehat{f}}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \left\|\frac{\partial \widehat{f}}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \int_0^t \left\|\frac{\partial^2 \widehat{f}}{\partial t^2}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} ds\right] \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

Maintenant, en substituant le terme $\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$ dans l'expression de B par sa majoration C donnée dans (3.17), puis par le Lemme de Gronwall on obtient l'estimation (3.18). $\square$

3.3 Résultats de convergence lorsque ε tend vers 0 et problème limite

Théorème 3.3.1. *Sous les hypothèses du Théorème 3.1 et le Théorème 3.2 sont vérifiées, il existe $u^\star = (u_i^\star)$ dans $L^2(0,T,V_z) \cap L^\infty(0,T,V_z)$, $i = 1,2$, telle que :*

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{u}_i \rightharpoonup u_i^\star, & \\ & i=1,2, \\ \dfrac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} \rightharpoonup \dfrac{\partial u_i^\star}{\partial t} & \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{faiblement dans } L^2(0,T,V_z) \\ \textit{faiblement}\star \textit{ dans } L^\infty(0,T,V_z) \end{array} \tag{3.39}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \varepsilon e_{ij}(\hat{u}) \rightharpoonup 0 & \\ & i,j=1,2, \\ \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t} e_{ij}(\hat{u}) \rightharpoonup 0 & \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ \textit{faiblement } \star \textit{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \end{array} \tag{3.40}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} \rightharpoonup 0 & \\ & i=1,2, \\ \varepsilon \dfrac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial t^2} \rightharpoonup 0 & \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ \textit{faiblement } \star \textit{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \end{array} \tag{3.41}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \varepsilon^2 \dfrac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 & \\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial \hat{u}_3}{\partial t} \rightharpoonup 0 & \\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 \hat{u}_3}{\partial x_i \partial t} \rightharpoonup 0 & i=1,2, \\ \varepsilon e_{33}(\hat{u}) \rightharpoonup 0 & \\ \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t} e_{33}(\hat{u}) \rightharpoonup 0 & \\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 \hat{u}_3}{\partial t^2} \rightharpoonup 0 & \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ \textit{faiblement } \star \textit{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \end{array} \tag{3.42}$$

Démonstration. La démonstration du Théorème (3.3) est une conséquence du Théorème (3.2). En effet, d'après le Théorème (3.2) on a :

$$\left.\begin{array}{l} \left\| \dfrac{\partial \hat{u}_i}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C, \quad , i=1,2 \\ \left\| \dfrac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial z \partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C, \end{array}\right\} \tag{3.43}$$

avec C une constante indépendante de ε.

Ensuite, on applique l'inégalité de Poincaré en $\Omega \times (0,T)$, avec une simple comparaison des deux estimations données en (3.43), on en déduit :

$$\begin{aligned}\|\hat{u}_i\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leq h^* \left\|\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial z}\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq h^* C, \\ \left\|\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leq h^* \left\|\frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial z \partial t}\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq h^* C, \; i=1,2,\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\hat{u}_i$ est borné dans $W^{1,2}(0,T;V_z) \cap L^\infty(0,T;V_z)$ pour $i=1,2$, donc par l'injection $W^{1,2}(0,T;V_z) \hookrightarrow C(0,T;V_z)$ comme dans ([24], Lemma 2.2) nous obtenons les convergences (3.39).

D'autre part, de la définition de $e_{i,j}(\hat{u})$ qui est reformulé sur le domaine fixe, les convergences faibles (3.40) – (3.42) découlent de (3.17) – (3.18) et (3.39). □

Théorème 3.3.2. *Si les hypothèses du Théorème 3.1 sont vérifiées, la solution $u^\star$ satisfait le problème variationnel :*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \mathcal{E}^*\left(\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}\right).\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^\star}{\partial t})dx + \int_\omega \widehat{\pi}\,|\hat{\varphi}|\,dx' - \int_\omega \widehat{\pi}\left|\frac{\partial u^*}{\partial t}\right| dx' \\ +\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \left(\int_0^t g\,(t-s)\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\,(s)\right) ds\right).\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^*}{\partial t}\right) dx'dz + \\ \qquad \geq \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{f}_i(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^\star}{\partial t})dx, \quad \forall \hat{\varphi} \in \Pi(V), \end{cases} \tag{3.44}$$

et le problème limite

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{2}\mathcal{E}^*\frac{\partial u_i^\star}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\int_0^t g\,(t-s)\,u_i^*\,(s)\,ds\right)\right] = \hat{f}_i, i=1,2 \textit{ dans } L^2(\Omega), \tag{3.45}$$

$$u_i^\star(x',z,0) = \widehat{u}_{0,i}\;,\, i=1,2 \tag{3.46}$$

Remarque 3.3.1. *Par les convergences* $(3.39)-(3.42)$, la matrice $\widehat{\mathcal{E}}$, converge pour $\varepsilon \to 0$ vers

$$\mathcal{E}^* = \begin{pmatrix} \mathcal{E}^*_{1313} & \mathcal{E}^*_{1323} \\ \mathcal{E}^*_{2313} & \mathcal{E}^*_{2323} \end{pmatrix}. \tag{3.47}$$

Démonstration du Théorème 3.4. Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$ dans l'inégalité variationnelle (3.14), en utilisant les résultats de convergence du théorème

3.3 et le fait que $\widehat{j}$ est convexe et semi-continu inférieur, c-à-d :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\inf \int_{\omega} \widehat{\pi} \left| \frac{\partial \hat{u}^{\epsilon}}{\partial t} \right| dx' \right) \geq \int_{\omega} \widehat{\pi} \left| \frac{\partial u^{*}}{\partial t} \right| dx',$$

on obtient directement la formule (3.44).

Pour la preuve de (3.45), on choisit dans (3.44) ; $\hat{\varphi}_i = \dfrac{\partial u_i^{\star}}{\partial t} \pm \hat{\psi}_i$, avec $\hat{\psi}_i \in H_0^1(\Omega)$, $i = 1, 2$, on trouve :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \mathcal{E}^{*} \left(\frac{\partial u_i^{\star}}{\partial z} \right) . \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial z} dx' dz + \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \int_{0}^{t} g\left(t-s\right) \frac{\partial u_i^{*}}{\partial z} \left(s\right) ds \frac{\partial \psi_i}{\partial z} dx' dz \\ = & \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \hat{f}_i \hat{\psi}_i dx' dz. \end{aligned}$$

Comme ψ_i est nulle sur le bord de Ω ; en utilisant la formule de Green et en choisissant, $\psi_1 = 0$ et $\psi_2 \in H_0^1(\Omega)$, puis $\psi_2 = 0$ et $\psi_1 \in H_0^1(\Omega)$, on arrive à

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{E}^{*} \left(\frac{\partial u_i^{\star}}{\partial z} \right) \right) . \hat{\psi}_i dx' dz - \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \int_{0}^{t} g\left(t-s\right) \frac{\partial^2 u_i^{*}}{\partial z^2} \left(s\right) ds \psi_i dx' dz \\ = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \hat{f}_i \hat{\psi}_i dx' dz \end{aligned} \right\} \tag{3.48}$$

ce qui donne

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} \mathcal{E}^{*} \frac{\partial u_i^{\star}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_{0}^{t} g\left(t-s\right) u_i^{*}\left(s\right) ds \right) \right] = \hat{f}_i, i = 1, 2 \text{ dans } L^2(\Omega), \tag{3.49}$$

Comme $\hat{f}_i \in L^2 \left(0, T; L^2(\Omega)\right)$, alors (3.49) est vraie dans $L^2 \left(0, T; L^2(\Omega)\right)$.

La condition (3.46) est une conséquence immédiate de la seconde équation de (3.12) et (3.39).

Théorème 3.3.3. *Avec les mêmes hypothèses du théorème précédent, le trace* $\tau^{*}\left(x', t\right) = \dfrac{\partial u^{*}}{\partial z}\left(x', 0, t\right)$, *et* $s^{*}\left(x', t\right) = u^{*}\left(x', 0, t\right)$ *satisfont l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \widehat{\pi} \left(\left| \psi + \frac{\partial s^{*}}{\partial t} \right| - \left| \frac{\partial s^{*}}{\partial t} \right| \right) dx' - \int_{\omega} \left(\frac{1}{2} \mathcal{E}^{*}(x', 0) \tau^{*} + \int_{0}^{t} g\left(t-\xi\right) \tau^{*}\left(\xi\right) d\xi \right) \psi dx' \\ & \geq 0, \forall \psi \in L^2\left(\omega\right)^2, \forall t \in \left]0, T\right[\end{aligned} \tag{3.50}$$

et la forme limite de la condition aux limites de Tresca en $\omega \times]0, T[$

$$\begin{array}{l} \left|\frac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^* + \int_0^t g\left(t-\xi\right)\tau^*\left(\xi\right)d\xi\right| < \widehat{\pi} \Rightarrow \frac{\partial s^*}{\partial t} = 0, \\ \left|\frac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^* + \int_0^t g\left(t-\xi\right)\tau^*\left(\xi\right)d\xi\right| = \widehat{\pi} \Rightarrow \\ \exists\beta > 0 : \frac{\partial s^*}{\partial t} = \beta\left(\frac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^* + \int_0^t g\left(t-\xi\right)\tau^*\left(\xi\right)d\xi\right). \end{array} \tag{3.51}$$

Démonstration. Pour tout $t \in]0, T[$, on choisit dans l'inéquation variationel (3.44) : $\hat{\varphi}_i = \frac{\partial u_i^\star}{\partial t} + \hat{\phi}_i$ pour $i = 1, 2$, avec

$$\hat{\phi}_i \in H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L} = \left\{\hat{\phi}_i \in H^1(\Omega) : \hat{\phi}_i = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_L\right\},$$

puis en appliquant la formule de Green ; on obtient

$$\left\{\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\mathcal{E}^*(x',0)\left(\frac{\partial u_i^\star(x',t)}{\partial z}\right)\right].\hat{\phi}_i(x',t)dx'dz + \\ \int_\omega \widehat{\pi}\left(\left|\hat{\phi}_i(x',t) + \frac{\partial s^*}{\partial t}\right| - \left|\frac{\partial s^*}{\partial t}\right|\right)dx' \\ + \int_\omega \left(\frac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^* + \int_0^t g\left(t-\xi\right)\tau^*\left(\xi\right)d\xi\right)\hat{\phi}_i(x',t)dx' \\ \geq \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{f}_i(x',t)\hat{\phi}_i(x',t)dx'dz \end{array}\right.$$

D'autre part, de (3.45), on déduit que :

$$\left.\begin{array}{c} \int_\omega \widehat{\pi}\left(\left|\hat{\phi}_i(x',t) + \frac{\partial s^*}{\partial t}\right| - \left|\frac{\partial s^*}{\partial t}\right|\right)dx' - \int_\omega \left(\frac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^* + \int_0^t g\left(t-\xi\right)\tau^*\left(\xi\right)d\xi\right)\hat{\phi}_i(x',t)dx' \geq 0 \\ ,\forall\hat{\phi} \in (\mathfrak{D}(\omega))^2. \end{array}\right\} \tag{3.52}$$

De la densité de $\mathfrak{D}(\omega)$ dans $L^2(\omega)$, on déduit que (3.52) est valable pour toute $\hat{\phi} \in (\mathfrak{D}(\omega))^2$.

Pour prouver (3.51), on suive les mêmes techniques que dans le cas du problème des fluides (voir [Bayada and K. Lhalouani-2003]). En effet, on prend $\psi_i \pm \frac{\partial s^*}{\partial t}$ dans (3.50), on obtient

$$\int_\omega \widehat{\pi}\left|\frac{\partial s^*}{\partial t}\right|dx' - \int_\omega \left(\frac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^* + \int_0^t g\left(t-\xi\right)\tau^*\left(\xi\right)d\xi\right)\frac{\partial s^*}{\partial t}dx' = 0. \tag{3.53}$$

Maintenat pour $\psi = \phi - \dfrac{\partial s^*}{\partial t}$, avec ϕ dans $L^2(\omega)^2$, l'inégalité (3.50) se ramène à

$$\begin{aligned}
&\int_\omega \left(\widehat{\pi}\,|\phi| - \frac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^*\phi - \int_0^t g\,(t-\xi)\,\tau^*\,(\xi)\,d\xi\phi \right) dx' \\
\geq\ &\int_\omega \left(\widehat{\pi} \left| \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| - \frac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^*\frac{\partial s^*}{\partial t} - \int_0^t g\,(t-\xi)\,\tau^*\,(\xi)\,d\xi\frac{\partial s^*}{\partial t} \right) dx'
\end{aligned}$$

De (3.53), la dernière inégalité nous donnons

$$\int_\omega \left(\widehat{\pi}\,|\phi| - \frac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^*\phi - \int_0^t g\,(t-\xi)\,\tau^*\,(\xi)\,d\xi\phi \right) dx' \geq 0, \text{ pour } \phi \in L^2(\omega)^2 \tag{3.54}$$

En utilisant le fait que $|\tau^*\phi| = |\tau^*|\,|\phi|\cos(\tau^*,\phi)$ et en choisissant dans (3.54) $\phi_i = \varphi_i \geq 0$ puis $-\phi_i$ avec $\phi_i = \varphi_i \geq 0$, on arrive à :

$$\left.\begin{aligned}
\widehat{\pi} &\geq \left(\frac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^* + \int_0^t g\,(t-\xi)\,\tau^*\,(\xi)\,d\xi \right)\cos(\tau^*,\phi), \text{ pp. sur } \omega, \\
-\widehat{\pi} &\leq \left(\frac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^* + \int_0^t g\,(t-\xi)\,\tau^*\,(\xi)\,d\xi \right)\cos(\tau^*,\phi), \text{ pp. sur } \omega,
\end{aligned}\right\} \tag{3.55}$$

Autrement : $\widehat{\pi} \geq \dfrac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^* + \displaystyle\int_0^t g\,(t-\xi)\,\tau^*\,(\xi)\,d\xi$, pp. sur ω, ou

$$\left.\begin{aligned}
\widehat{\pi}\left| \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| &\geq \left(\frac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^* + \int_0^t g\,(t-\xi)\,\tau^*\,(\xi)\,d\xi \right)\left| \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| \\
&\geq \left(\frac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^* + \int_0^t g\,(t-\xi)\,\tau^*\,(\xi)\,d\xi \right)\frac{\partial s^*}{\partial t}, \text{ pp. sur } \omega,
\end{aligned}\right\} \tag{3.56}$$

De (3.53), on déduit que

$$\widehat{\pi}\left| \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| - \left(\frac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^* + \int_0^t g\,(t-\xi)\,\tau^*\,(\xi)\,d\xi \right)\frac{\partial s^*}{\partial t} = 0, \text{ pp. sur } \omega, \tag{3.57}$$

Si $\left| \dfrac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^* + \displaystyle\int_0^t g\,(t-\xi)\,\tau^*\,(\xi)\,d\xi \right| = \widehat{\pi}$, alors d'après (3.57), on a

$$\left| \frac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^* + \int_0^t g\,(t-\xi)\,\tau^*\,(\xi)\,d\xi \right| \left| \frac{\partial s^*}{\partial t} \right| = \left(\frac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^* + \int_0^t g\,(t-\xi)\,\tau^*\,(\xi)\,d\xi \right)\frac{\partial s^*}{\partial t}$$

pp. sur ω. Alors, il existe $\beta \geq 0$ tel que $\dfrac{\partial s^*}{\partial t} = \beta\left(\dfrac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^* + \displaystyle\int_0^t g\,(t-\xi)\,\tau^*\,(\xi)\,d\xi \right)$.

De même, si $\left|\frac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^* + \int_0^t g(t-\xi)\,\tau^*(\xi)\,d\xi\right| < \widehat{\pi}$, l'égalité (3.57) nous donnons,

$$\begin{aligned} 0 &= \widehat{\pi}\left|\frac{\partial s^*}{\partial t}\right| - \left(\frac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^* + \int_0^t g(t-\xi)\,\tau^*(\xi)\,d\xi\right)\frac{\partial s^*}{\partial t} \\ &\geq \left[\widehat{\pi} - \left(\frac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^* + \int_0^t g(t-\xi)\,\tau^*(\xi)\,d\xi\right)\right]\frac{\partial s^*}{\partial t}, \text{ pp. sur } \omega. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\widehat{\pi} - \left|\frac{1}{2}\mathcal{E}^*(x',0)\tau^* + \int_0^t g(t-\xi)\,\tau^*(\xi)\,d\xi\right| > 0$, alors $\frac{\partial s^*}{\partial t}$, pp. sur ω.

□

Théorème 3.3.4. *Supposons que les hypothèses du théorème précédent soient vérifiées, de plus si les composantes de $\mathcal{E}^*_{i3j3}$ pour $1 \leq i,j \leq 2$ dépendent seulement de la variable x', alors la solution u^* satisfait l'équation généralisée faible :*

$$\left.\begin{aligned} &\int_\omega \left(\int_0^h \left(\frac{1}{2}\mathcal{E}(x')\,\hat{u}_i^\star(x,z,t) + \int_0^t g(t-\xi)\,\hat{u}_i^\star(x',z,\xi)\,d\xi\right)dz\right)\nabla\hat{\varphi}dx' \\ &+\int_\omega \left(\tilde{F}(x') - \frac{h}{2}\left(\frac{1}{2}\mathcal{E}(x')\,s^\star + \int_0^t g(t-\xi)\,s^*(\xi)\,d\xi\right)\right)\nabla\hat{\varphi}dx' = 0,\ \forall\hat{\varphi} \in H^1(\omega) \end{aligned}\right\} \quad (3.58)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x') &= \int_0^h F(x',z,t)dz - \frac{h}{2}F(x',h,t). \\ F(x',z,t) &= \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}(x',\theta,t)d\theta d\zeta \end{aligned}$$

Démonstration. Pour démontrer (3.58), on intègre deux fois (3.45) entre 0 et z, avec $\mathcal{E}_{i3j3}$, $1 \leq i,j \leq 2$ dépendent seulement de x', on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^z\int_0^\xi \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\mathcal{E}(x')\right)\frac{\partial\hat{u}_i^\star}{\partial\alpha}(x',\alpha,t)\,d\alpha d\xi + \int_0^t g(t-\xi)\,\hat{u}_i^\star(x',z,\xi)\,d\xi \\ = &\int_0^t g(t-\xi)\left[s^*(\xi) + z\tau^*(\xi)\right]d\xi - \int_0^z\int_0^\xi \hat{f}_i(x,\alpha,t)\,d\alpha d\xi \end{aligned}$$

Alors

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}(x')\,\hat{u}_i^\star(x,z) + \int_0^t g(t-\xi)\,\hat{u}_i^\star(x',z,\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}\mathcal{E}(x')\,\hat{u}_i^\star(x,0) + \frac{1}{2}z\tau^\star + \int_0^t g(t-\xi)\left[s^*(\xi) + z\tau^*(\xi)\right]d\xi - \int_0^z\int_0^\xi \quad (3.54)$$

En remplaçant z par h et en utilisant le fait que $\hat{u}_i^\star(x', h(x'), t) = 0$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}(x')\, s^\star + \frac{1}{2}h(x')\,\tau^\star + \int_0^t g(t-\xi)\left[s^*(\xi) + h\tau^*(\xi)\right] d\xi = \int_0^h \int_0^\xi \hat{f}_i(x,\alpha)\, d\alpha d\xi. \tag{3.55}$$

Intégrons (3.54) pour la toisième fois entre 0 et h, on trouve :

$$\begin{aligned}
&\int_0^h \left(\frac{1}{2}\mathcal{E}(x')\,\hat{u}_i^\star(x,z,t) + \int_0^t g(t-\xi)\,\hat{u}_i^\star(x',z,\xi)\, d\xi\right) dz \\
= \;& \frac{1}{2}\mathcal{E}(x')\int_0^h \hat{u}_i^\star(x,0)\, dz + \frac{1}{2}\int_0^h z\tau^\star dz + \int_0^t g(t-\xi)\left[s^*(\xi) + z\tau^*(\xi)\right] d\xi - \int_0^h\int_0^z\int_0^\xi \hat{f}_i(x,\alpha)\, d\alpha d\xi dz \\
= \;& \frac{h}{2}\mathcal{E}(x')\, s^\star + \frac{h^2}{4}\tau^\star + \int_0^t g(t-\xi)\left[hs^*(\xi) + \frac{h^2}{2}\tau^*(\xi)\right] d\xi - \int_0^h\int_0^z\int_0^\xi \hat{f}_i(x,\alpha)\, d\alpha d\xi dz.
\end{aligned}$$

On déduit de $(3.54) - (3.55)$ que :

$$\begin{aligned}
&\int_0^h \left(\frac{1}{2}\mathcal{E}(x')\,\hat{u}_i^\star(x,z,t) + \int_0^t g(t-\xi)\,\hat{u}_i^\star(x',z,\xi)\, d\xi\right) dz + \\
&-\frac{h}{2}\left(\frac{1}{2}\mathcal{E}(x')\, s^\star + \int_0^h\int_0^\xi \hat{f}_i(x,\alpha,t)\, d\alpha d\xi + \int_0^t g(t-\xi)\, s^*(\xi)\, d\xi\right) + \int_0^h\int_0^z\int_0^\xi \hat{f}_i(x,\alpha)\, d\alpha d\xi dz \\
= \;& 0
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
&\int_\omega \left(\int_0^h \left(\frac{1}{2}\mathcal{E}(x')\,\hat{u}_i^\star(x,z,t) + \int_0^t g(t-\xi)\,\hat{u}_i^\star(x',z,\xi)\, d\xi\right) dz\right) \nabla\hat{\varphi} dx' \\
&+ \int_\omega \left(\tilde{F}(x') - \frac{h}{2}\left(\frac{1}{2}\mathcal{E}(x')\, s^\star + \int_0^t g(t-\xi)\, s^*(\xi)\, d\xi\right)\right) \nabla\hat{\varphi} dx' \\
= \;& 0, \quad \forall \hat{\varphi} \in H^1(\omega),
\end{aligned}$$

pour : $\tilde{F}(x') = \int_0^h F(x',z,t)dz - \frac{h}{2}F(x',h,t)$ et $F(x',h,t) = \int_0^h\int_0^\xi \hat{f}_i(x,\alpha,t)\, d\alpha d\xi$. □

Théorème 3.3.5. *Si les composantes de $\mathcal{E}_{i3j3}^*$ pour $1 \leq i,j \leq 2$ dépendent seulement de la variable x', le problème $(3.44) - (3.46)$ admet une solution unique $u^\star$ dans $L^2(0,T,V_z) \cap L^\infty(0,T,V_z)$.*

Démonstration. Supposons que $(u^\star)^1$ et $(u^\star)^2$ soient deux solutions du problème

$(3.44)-(3.46)$ et soit $t\in(0,T)$, donc

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\mathcal{E}^{*}\left(x'\right)\left(\frac{\partial\left(u_i^{\star}\right)^{1}}{\partial z}\right).\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\varphi}_i-\frac{\partial\left(u_i^{\star}\right)^{1}}{\partial t})dx'dz+\widehat{j}\left(\hat{\varphi}\right)-\widehat{j}\left(\frac{\partial\left(u^{\star}\right)^{1}}{\partial t}\right)\\ +\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left(\int_0^t g\left(t-s\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\left(u_i^{\star}\right)^{1}}{\partial t}\left(s\right)\right)ds\right).\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\varphi}_i-\frac{\partial\left(u_i^{\star}\right)^{1}}{\partial t}\right)dx'dz+\\ \qquad\geq\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{f}_i(\hat{\varphi}_i-\frac{\partial\left(u_i^{\star}\right)^{1}}{\partial t})dx'dz,\quad\forall\hat{\varphi}\in\Pi(V),\end{array}\right.\tag{3.56}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\mathcal{E}^{*}\left(x'\right)\left(\frac{\partial\left(u_i^{\star}\right)^{2}}{\partial z}\right).\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\varphi}_i-\frac{\partial\left(u_i^{\star}\right)^{2}}{\partial t})dx'dz+\widehat{j}\left(\hat{\varphi}\right)-\widehat{j}\left(\frac{\partial\left(u^{\star}\right)^{2}}{\partial t}\right)\\ +\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left(\int_0^t g\left(t-s\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\left(u_i^{\star}\right)^{2}}{\partial t}\left(s\right)\right)ds\right).\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\varphi}_i-\frac{\partial\left(u_i^{\star}\right)^{2}}{\partial t}\right)dx'dz+\\ \qquad\geq\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{f}_i(\hat{\varphi}_i-\frac{\partial\left(u_i^{\star}\right)^{2}}{\partial t})dx'dz,\quad\forall\hat{\varphi}\in\Pi(V),\end{array}\right.\tag{3.57}$$

Prenons dans (3.56), $\hat{\varphi}=\dfrac{\partial\left(u^{\star}\right)^{2}}{\partial t}$ et dans (3.57), $\hat{\varphi}=\dfrac{\partial\left(u^{\star}\right)^{1}}{\partial t}$ respectivement, on trouve :

$$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\mathcal{E}^{*}\left(x'\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\left(u_i^{\star}\right)^{1}-\left(u_i^{\star}\right)^{2}\right).\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\left(u^{\star}\right)^{1}}{\partial t}-\frac{\partial\left(u_i^{\star}\right)^{2}}{\partial t}\right)dx'dz\\ +\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left(\int_0^t g\left(t-s\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\left(u^{\star}\right)^{1}}{\partial t}(s)-\frac{\partial\left(u_i^{\star}\right)^{2}}{\partial t}(s)\right)ds\right).\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\left(u^{\star}\right)^{1}}{\partial t}-\frac{\partial\left(u_i^{\star}\right)^{2}}{\partial t}\right)dx'dz+\\ \leq 0.\end{array}\right.\tag{3.58}$$

Pour $\mathbb{T}=\left(u^{\star}\right)^{1}(t)-\left(u^{\star}\right)^{2}(t)$, on déduit que :

$$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\Omega}\mathcal{E}^{*}\left(x'\right)\frac{\partial\mathbb{T}}{\partial z}.\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mathbb{T}}{\partial t}\right)dx'dz+\\ +\displaystyle\int_{\Omega}\left(\int_0^t g\left(t-s\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mathbb{T}}{\partial z}\right)(s)ds\right).\frac{\partial\mathbb{T}}{\partial z}dx'dz+\\ \leq 0.\end{array}\right.\tag{3.59}$$

Comme $\mathbb{T}(0)=0$, l'intégrale de (3.59) entre 0 et T, nous donne :

$$\frac{1}{2}\left\langle\mathcal{E}^{*}\left(x'\right)\frac{\partial}{\partial z}\mathbb{T}(t),\frac{\partial}{\partial z}\mathbb{T}(t)\right\rangle_{\Omega}+\left\langle\int_0^t g\left(t-s\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mathbb{T}}{\partial z}\right)(s)ds,\frac{\partial}{\partial z}\mathbb{T}(t)\right\rangle_{\Omega}\leq 0.\tag{3.60}$$

Montrons maintenant que la matrice $\mathcal{E}^{*}\left(x'\right)$ est elliptique. Soit $\eta=\left(\eta_i\right)_{i=1,2}\in\mathbb{R}^2$. En utilisant le fait que $\|\mathcal{E}\tau\|_Q\leq 3\|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}_\infty}\|\tau\|_Q$, $\forall\mathcal{E}\in Q_\infty$, $\tau\in Q$, l'hypothèse (c) et et par le choix du tenseur symétrique $e = (e_{ij})$ qui est donné par $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta_1 \\ 0 & 0 & \eta_2 \\ \eta_1 & \eta_2 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^*_{ijkl} e_{kl} e_{ij} &= 2\mathcal{E}^*_{\alpha 3\beta 3}(e_{\beta 3})(e_{\alpha 3}) + 2\mathcal{E}^*_{\alpha 333}(e_{33})(e_{\alpha 3}) + 2\mathcal{E}^*_{33\alpha 3}(e_{\alpha 3})(e_{33}) + \mathcal{E}^*_{3333}(e_{33})(e_{33}) \\ &= \mathcal{E}^*_{\alpha\beta\eta_\beta\eta_\alpha}, \text{ pour } \alpha, \beta. \end{aligned}$$

Mais comme $|e|^2 = 2|\eta|^2$, on a :

$$\mathcal{E}^*\eta.\eta \geq 2m\mathcal{E}^* |\eta|^2, \quad \text{pour tout } l = 1, 2,\ \eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Par conséquent (3.60) devient :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{T}(t) \right\|^2_{L^\infty(0,T;V_z)} \leq 0.$$

car $\mathbb{T}(0) = 0$, et $m_{\mathcal{E}^*} > 0$.
L'inégalité de Poincaré, nous donnons :

$$\|\mathbb{T}(t)\|^2_{L^2(0,T;V_z)} = \|\mathbb{T}(t)\|^2_{L^\infty(0,T;V_z)} = 0.$$

On peut conclure alors que $(u^\star)^1 = (u^\star)^2$ dans $L^2(0,T;V_z) \cap L^\infty(0,T,V_z)$ et donc l'unicité de la solution du problème $(3.44) - (3.46)$.

Conclusion générale

Dans cette thèse de Doctorat, nous avons analysé le comportement asymptotique du champ de déplacement tridimensionnel d'un corps constitué d'un matériau viscoélastique à mémoire courte terme ou long terme en présence d'une loi de frottement de Tresca sur une partie de la frontière et d'une condition de Dirichlet sur l'autre partie, comme l'épaisseur est proche de zéro. Ce modèle prend en compte l'historique des déformations ou contraintes antérieures subies par le matériau. L'effet de mémoire se traduit par un mécanisme d'amortissement précis qui contrôle la stabilité des systèmes dynamiques. Donc l'objectif de ce travail est de justifier mathématiquement le modèle bidimensionnel du problème de viscosité linéaire tridimensionnel doté d'une mémoire longue distance et de la loi de frottement de Tresca. Ce travail donne une généralisation et une investigation de certains des résultats obtenus dans les articles mentionnés dans l'introduction de cette thèse. Le premier point fort est que cette étude prend en compte les matériaux avec le terme mémoire. Le deuxième point quelles sont les conditions appliquées pour obtenir des estimations qui nous permettent d'atteindre le problème limite. Dans cette étude, nous avons résolu l'ensemble des difficultés que nous rencontrons du fait du changement de contexte. La première difficulté est de formuler la preuve de certaines estimations sur le déplacement et la vitesse. La deuxième difficulté est de savoir quel sera le comportement asymptotique du matériau lorsque le l'épaisseur du film mince est très petite.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. A. A DAMS , *Sobolev Spaces, Academic Press,* New York 1975.

[2] G. Bayada and M. Boukrouche, On a free boundary problem for Reynolds equation derived from the Stokes system with Tresca boundary conditions, J. Math. Anal. Appl., 382 (2003), pp.212–231.

[3] G. Bayada and K. Lhalouani, Asymptotic and numerical analysis for unilateral contact problem with Coulomb's friction between an elastic body and a thin elastic soft layer, Asymptot. Anal. 25 (2001), 329-362.

[4] A. Benseghir, H. Benseridi and, M. Dilmi, On the asymptotic study of transmission problem in a thin domain, J. Inverse Ill-Posed Probl. https ://doi.org/10.1515/jiip-2017-0085.

[5] H. Benseridi and M. Dilmi, Some inequalities and asymptotic behavior of dynamic problem of linear elasticity, Georgian Math. J., 20(1) (2013), pp. 25–41, ISSN (Online) 1572-9176, ISSN (Print) 1072-947X, DOI10.1515/gmj-2013-0004, March 2013.

[6] D. Benterki, H. Benseridi, and M. Dilmi, Asymptotic study of a boundary value problem governed by the elasticity operator with nonlinear term, Adv. Appl. Math. Mech., 6 (2014), pp.191-202.

[7] F. BOUGHANIM, *Etude des écoulement isothermes et non isothermes des fluides non newtoniens : Loi de Carreau, loi de puissance*,Thèse de mathématiques appliquées, Université Jean Monnet Saint-Etienne (1996).

[8] H. BREZIZS, *Analyse fonctionnelle - Théorie et Application.* Masson, Paris, 1983.

[9] M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, T.F. Ma, and J. A.Soriano, Global exisience and asymptotic stability for viscoelastic problems, Differential and Integral Equations volume 15, Number 6, June 2002, Pages 731-748.

[10] K. Cherry, What Is Long-Term Memory ?, https ://www.verywellmind.com/what-is-long-term-memory-2795347, Updated on October 15, 2022.

[11] C. M. Dafermos, Asymptotic stability in viscoelasticity. Arch. Rat Mech. Anal., vol 37 (1970) 297-308.

[12] M. Derguine, A. Saadallah, H. Benseridi, Study of a dynamic viscoelastic problems with short memory, Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 14 (2023) 1, pp. 1911–1923.

[13] M. Dilmi, H. Benseridi and A. Saadallah, Asymptotic behavior of a nonlinear boundary value problem with friction. Proc. Natl. Acad. Sci., India, Sect. A Phys. Sci. Accepted : 9 December 2016. DOI 10.1007/s40010-016-0332-7.

[14] M. Dilmi, M. Dilmi and H. Benseridi, Study of generalized Stokes operator in a thin domain with friction law (case p < 2). Math Meth Appl Sci. 2018 ;1-10 .https ://doi.org/10.1002/mma.4876.

[15] M. DILMI, H. BENSERIDI, AND A. SAADALLAH, *Asymptotic Analysis of a Bingham Fluid in a Thin Domain with Fourier and Tresca Boundary Conditions.* Adv. Appl. Math. Mech. 6, 797-810 (2014).

[16] I. EKELAND, R. TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnels.* Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[17] G. Duvaut and J. L. Lions, Les inéquations en mécanique des fluides, Dunod, 1969.

[18] L. Fushan, Asymptotic analysis of linearly viscoelastic shells, Asymptotic Anal. 36 (2003) 21–46.

[19] L. Fushan, Asymptotic analysis of linearly viscoelastic shells – justification of flexural shell equations, Chin. Ann. Math., Ser. A 28 (2007) 71–84.

[20] T. H. Gronwall, *Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations*, Ann. of Math. 20 (2) : 292-296 (1919).

[21] J.-L. LIONS ET E. MAGENES , *Problèmes aux limites non homogèmes,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pissa (3) 15 1961 311-326

[22] P.D. Panagiotopoulos, Inequality problems in mechanical and applications. Birkhäuser, Basel (1985).

[23] J.C. Paumier, Le problème de Signorini dans la Théorie des plaques minces de Kirchhoff-Love. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 335 :567–570, 2002.

[24] Á. Rodríguez-Arós , J. M. Viaño, and M. Sofonea, Numerical analysis of a frictional contact problem for viscoelastic materials with long-term memory, Numer. Math. (2007) 108 :327–358.

[25] Á. Rodríguez-Arós, M. Sofonea, and J. M. Viaño, Numerical approximation of a viscoelastic frictional contact problem, C. R. Mecanique 334 (2006) 279–284.

[26] A. SAADALLAH, *Comportement asymptotique de déférents problèmes de contacte avec frottement en film mince dans le cas isotherme et non-isotherme*, Thèse de Doctorat en Sciences, UFA-sétif, 21.01.2016

[27] A. Saadallah, H. Benseridi, M. Dilmi and S. Drabla, Estimates for the asymptotic convergence of a non-isothermal linear elasticity with friction. Georgian Math J. 2016 ;23(3) :435-446.

[28] A. SAADALLAH AND H. BENSERIDI, *Asymptotic analysis of a dynamic flow of the Bingham fluid, Dynamics of Continuous*, Discrete and Impulsive Systems Series B : Applications and Algorithms 28 (2021) 197-213.

[29] A. SAADALLAH, H. BENSERIDI AND M. DILMI, *Asymptotic convergence of a generalized non-newtonian fluid with tresca boundary conditions*, Acta Mathematica Scientia, 2020, 40b(3), pp. 700–712.

[30] F. SAIDI, *Sur quelques problèmes de lubrification par des fluides newtoniens non isothermes et incompressibles avec des conditions aux bords non linéaires. Etude mathématique et numerique* , Thèse, Université Jean Monnet - Saint-Etienne, 2004.

[31] M. Sofonea , C. P. Niculescu and A. Matei, An antiplane contact problem for viscoelastic materials with long term memory, Mathematical Modelling and Analysis, Volume X Number x, 20xx, pages 1–15.

[32] M. SOFONEA, A. MATEI *Variational Inequalities with Applications*, Advances in Mechanics and Mathematics, 2009, DOI : 10.1007/978-0-387-87460-9.

[33] M. Sofonea and A. Matei, Mathematical Models in Contact Mechanics, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[34] R. TEMAM, I. EKELAND, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Paris, Dunod, Gauthier-Villars, 1974.