REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS - SETIF 1
ALGERIE

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Géométrie Différentielle Appliquée

Présentée par :

AIB AZIZA

Contribution à l'étude de la théorie du contrôle bilinéaire en dimension infinie et applications

Soutenue le: 26 Juin 2013 **Devant le jury:**

Mr. A. AIBECHE	**Prof. U.F.A Sétif 1**	**Président**
Mr. N. BENSALEM	**Prof. U.F.A Sétif 1**	**Rapporteur**
Mr. S. E. REBIAI	**Prof. U. Batna**	**Examinateur**
Mme. D. AZZAM LAOUIR	**Prof. U. Jijel**	**Examinateur**

ملخص:

هذه الأطروحة تتكون من خمسة أجزاء، في الجزء الأول نقدم بعض المفاهيم حول الجمل ثنائية الخطية ذات تحكم. في الجزء الثاني، نقدم إثبات لمبدأ الحد الأقصى لمشكلة التحكم الأجود تحكمه جملة ثنائية الخطية في البعد اللانهائي، ثم نطبق هذه النتائج للحصول على عبارة مباشرة للتحكم الأجود في الحالة التي تكون فيها رتبة عدم القوى تساوي واحد من أجل عاكفة لي [A,B]=AB-BA. والهدف من الجزء الثالث هو دراسة وجود مثل هذه النظم ثنائية الخطية حيث رتبة عدم القوى يساوي واحد في حالة البعد المنته و اللانهائي، من أجل مؤثر محدود ذو رتبة منتهية. في الجزء الرابع نوسع الدراسة إلى متراص في فضاء بناخ العقدي، مع جزء شبه عديم القوى موجب. وأخيرا، ننهي هذا العمل بأمثلة وتطبيق.

الكلمات المفتاح: جملة ثنائية الخطية ذات تحكم - المراقب الامثل – جبر لي عديم القوى

Résumé:

Cette thèse se compose de cinq parties. Dans la première partie, on introduit quelques notions concernant les systèmes de contrôle bilinéaires. Dans la deuxième partie, nous donnons une démonstration d’un principe du maximum pour le problème de contrôle optimal gouverné par un système bilinéaire en dimension infinie, et nous appliquons ces résultats pour obtenir une expression explicite de la solution optimale dans le cas où le rang de nilpotence est égal à un par rapport au crochet de Lie [A,B]=AB-BA. L’objet de la troisième partie est l'étude de l'existence de tels systèmes bilinéaires nilpotents de rang un en dimension finie et infinie, pour un opérateur borné de rang fini. Dans la quatrième partie on prolonge l'étude pour un opérateur compact à valeurs dans un espace complexe de Banach, avec une partie quasi-nilpotente positive. Enfin, on termine ce travail par des exemples et une application.

Mots clés: Système de contrôle bilinéaire - Contrôle optimal - Algèbre de Lie nilpotente

Abstract:

This thesis is composed of five parts. In the first one, we introduce some notions about the bilinear control systems. In the second part, we give a proof of principle of maximum for the optimal control problem governed by a bilinear system in infinite dimension, and we apply these results to obtain an explicit expression of optimal control in the case where the nilpotency rank is equal to one, for the Lie bracket [A,B]=AB-BA. The object of the third part is the study of the existence of such bilinear nilpotent systems of rank one in finite and infinite dimensional, for a bounded operator with finite rank. In the fourth part, we extend the study to a compact operator with values in a complex Banach space with some positive quasi-nilpotente part. Finally, this work ends with examples and an application.

Key words: Bilinear control system - Optimal control - Nilpotent Lie algebra

Remerciements

J'adresse mes remerciements à Monsieur Naceurdine Bensalem Professeur de l'Université de Sétif, qui m'a encadré pendant toutes ces années pour élaborer cette thèse. C'était une expérience passionnante et je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance pour son encadrement, sa patience, ses précieux conseils et bien sûr son encouragement. Permettez-moi Monsieur de vous remercier vivement encore une autre fois.

Par ailleurs, je tiens à exprimer ma profonde gratitude, à Monsieur le Professeur A. Aibeche, de l'Université de Sétif, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury, je le remercie respectueusement.

Mes vifs remerciements s'adressent également à Madame D. Azzam Laouir Professeur de l'Université de Jijel et Monsieur S. Rebiai Professeur de l'Université de Batna, qui ont accepté d'être les examinateurs et qui m'ont honoré par leur présence pour juger ce travail. Veuillez accepter mes sincères remerciements.

J'aimerai remercier également Monsieur F. Pelletier Professeur de l'Université de Savoie pour ses fructueuses discussions qui m'ont été d'un grand intérêt.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui m'ont soutenu pour l'achèvement de ce travail de près ou de loin. Merci à tous.

Table des matières

Introduction

Dans la nature, de nombreux problèmes doivent être modélisés dans des espaces de dimension infinie. En général, dans l'application, ces procédés sont commandés. Dès lors, il sagit de chercher la commande optimale, selon tel ou tel critère qui réalise le processus, qui peut être une commande qui réalise l'objectif avec un minimum d'énergie, ou en temps minimum.

La représentation mathématique du comportement dynamique du système contrôlé (commandé) est généralement **non linéaire**. D'autre part les problèmes des sciences et de la technologie sont bien avancés dans l'analyse non linéaire, d'où le développement de la théorie des systèmes de contrôle non linéaire.

Dans une classe importante de systèmes de contrôle non linéaires, le contrôle u est utilisé comme un multiplicateur, c'est à dire :

$$\dot{x}(t) = f(x) + u(t)g(x),$$

où f et g sont des fonctions vectorielles différentielles.

Ce type de systèmes est étudié par plusieurs auteurs, par exemple, Sontag [SO], Jurdjevic [JU]. Dans le cas où :

$$f(x) = Ax \quad \text{et} \quad g(x) = Bx,$$

A et B sont des applications linéaires, on écrit :

$$\dot{x}(t) = Ax + u(t)Bx,$$

ce dernier s'appelle **un système bilinéaire contrôlé**, pour lequel le caractère non linéaire se traduit par les équations d'état d'un terme bilinéaire relativement à l'état et au contrôle. Les difficultés liées à la non linéarité demeurent dans le cas bilinéaire.

Notre travail concerne **un système de contrôle bilinéaire en dimension infinie** qui est décrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)Bx(t) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

où A et B sont des opérateurs bornés dans un espace de Hilbert E, $x(t) \in E$ est l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}$ est le contrôle, et $[0,T]$ est un intervalle fixé de temps, tel que $T > 0$. Alors pour tout $t \in [0,T]$, on considère le problème suivant : Trouver un contrôle $u(t)$ permettant de minimiser la fonctionnelle :

$$J(u) = \int_0^T u^2 dt + \phi(x(T)), \tag{2}$$

sous la contrainte (1), où ϕ est de classe C^1 et borné sur toute partie bornée.

Pour déterminer le contrôle optimal en dimension finie, on applique le **principe du maximum de Pontryagin** [PBG]. Ce procédé n'est pas toujours valable en dimension infinie. Dans ce contexte (système bilinéaire (1) et (2)) si u est un contrôle borné, on utilise les résultats de [BBP], afin d'obtenir les contrôles optimaux en fonction des vecteurs d'état et des vecteurs adjoints. De plus, si l'algèbre de Lie engendrée par les opérateurs A et B est **nilpotente de rang un** pour le crochet $[A,B] = AB - BA$, le contrôle optimal s'écrit en fonction du temps et des conditions initiales.

Notre objectif dans cette thèse est de construire explicitement un opérateur B qui commute avec un opérateur donné A de dimension finie, ou de rang fini, ou bien compact. Ces constructions sont basées sur les résultats de Gantmacher [GA] où l'idée est de définir l'ensemble des matrices qui commutent avec une matrice donnée en dimension finie. Ces résultats se généralisent en dimension infinie, d'une part, pour un **opérateur de rang fini** qui admet une représentation matricielle quasi-diagonale, et d'autre part pour un **opérateur compact** dans un espace de Banach avec **une partie quasi-nilpotente positive**. Cet opérateur admet un ensemble dénombrable de valeurs propres non nulles, qui s'accumulent au point zéro. D'où la représentation matricielle.

- Présentation de la thèse

La thèse se compose de cinq chapitres et est organisée de la façon suivante :

– Dans le premier chapitre, on donne une synthèse sur les systèmes de contrôle bilinéaires en dimension finie et infinie.

– Au deuxième chapitre, on détermine le contrôle optimal du système (1) et (2) en dimension finie et infinie. Comme nous donnons une démonstration du principe du maximum pour notre système, puis nous appliquons ces résultats pour obtenir une expression explicite des contrôles extrémaux dans le cas où le rang de nilpotence est égal à un, pour le crochet de Lie $[A, B] = AB - BA$.

– Le troisième chapitre comporte deux parties. Dans la première on s'intéresse au problème de l'existence de tels systèmes de contrôle bilinéaires nilpotents de rang un en dimension finie, l'idée étant d'écrire une matrice sous la forme normale de Jordan ce qui permet de définir toutes les matrices commutantes avec elle. Dans la deuxième partie, ces résultats sont généralisés en dimension infinie pour un opérateur borné de rang fini et qui admet une représentation matricielle quasi-diagonale.

– Dans le quatrième chapitre, on prolonge l'étude à un compact dans un espace complexe de Banach avec une partie quasi-nilpotente positive. Dans ce cadre, on utilise les propriétés du spectre d'un opérateur compact pour lui donner une écriture matricielle, puis on définit l'ensemble des matrices commutantes.

– Enfin, dans le chapitre cinq, on termine ce travail par des exemples et une application de calcul du contrôle optimal associé à l'observateur. Comme nous donnons quelques remarques et perspectives.

Chapitre 1

Aperçu sur le contrôle optimal des systèmes bilinéaires en dimension finie et infinie

En théorie du contrôle, les systèmes dynamiques pour lesquels le caractère non linéaire se traduit par **un terme bilinéaire, relativement à l'état et au contrôle, sont l'un des plus simples systèmes non linéaires**. Ce type de systèmes est particulièrement applicable à l'analyse de plusieurs modèles non linéaires plus compliqués. Ils peuvent être aussi utilisés pour représenter un large éventail de problèmes dans la pratique et qui ne peuvent pas être modélisés efficacement sous l'hypothèse de linéarité.

Le concept de système de contrôle bilinéaire a été introduit dans les années 1960, puis il a été développé par plusieurs chercheurs, car ce type de systèmes est particulièrement applicable à **l'approximation** et à l'**analyse de beaucoup des systèmes de contrôle non linéaires,** voir les travaux de Krener [KR73], [KR75], [KR98], Isidory and Krener [IK], Yatsenko [YA], Yatsenko and Knopov [YK] et d'autres.

Les systèmes de contrôle bilinéaires peuvent aussi être utilisés pour **présenter des modèles mathématiques** réalisables pour de nombreuses classes de problèmes d'importance pratique grandissante telles que, la physique, la chimie, la biologie et la biomédecine , ect..... Parmis les premiers travaux dans ce contexte, on cite les travaux de Mohler [MO] en 1973, et aussi ceux de Bruni [BRU], Brockett [BRO], Andreev [AN], Butkovskiy et Samoilenko [BS], Aganoié and Gajic [AG], Jurdjevic [JU], Pardalos et Yatsenko [PY], David et Elliott [DE], ...

La théorie des systèmes bilinéaires peut être développée à partir des **systèmes linéaires** et aussi par l'utilisation des **groupes de Lie des matrices**, du fait que ces derniers sont riches en structures géométriques et algébriques qui promettent un champ fréquent de la recherche.

1.1 Contrôle des systèmes bilinéaires en dimension finie

Pour plus de détails sur cette section, le lecteur pourra consulter [PY], [DE], [MO], [KR75] et [KR73].

Dans le but de décrire un système de contrôle bilinéaire, on considère le système contrôlé non linéaire suivant :

$$\dot{y}(t) = f_0(y) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) f_i(y) \qquad y(0) = y_0, \tag{1.1}$$

tels que $y = (y_1, y_2, ..., y_p) \in G \subset \mathbb{R}^p$ est le **vecteur d'état** (G est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$), $u(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., \ u_m(t))$ est le **contrôle**, supposé mesurable et à valeurs dans $\Omega = \{u : |u_i| \leq 1, \ i = 1, ..., m\}$) et $f_0(y), f_1(y), ..., f_m(y)$ sont des fonctions vectorielles de dimension p et de classe C^∞.

Nous rappelons qu'en 1973 Krener [KR73] a donné des conditions suffisantes pour approximer le système de contrôle (1.1) par le système bilinéaire contrôlé suivant :

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) A_i x(t) \qquad x(0) = x_0, \tag{1.2}$$

tels que $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in G \subset \mathbb{R}^p$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t))$ et $A_0, A_1, ..., A_m$ sont des matrices constantes de taille $p \times p$. Pour un choix de $u(t)$, l'équation différencielle (1.2) est linéaire et admet une solution unique.

Une généralisation peut être donnée, si on suppose que le contrôle $u(.)$ s'écrit en fonction de l'état $x(.)$:

$$u : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m, \ u(t) = \phi(x),$$

u est appelé un **feedback**. Pour ce cas, l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle (1.2) exigent des conditions sur $\phi(x)$.

De la même manière, Kerner *[KR75]* a remplacé le système (1.1) par le système matriciel bilinéaire suivant :

$$\dot{X}(t) = A_0 X(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) A_i X(t), \qquad X(0) = I, \tag{1.3}$$

tel que $X(t) \in Gl(p, \mathbb{R})$; $Gl(p, \mathbb{R})$ est le groupe des matrices inversibles d'ordre p. Chaque colonne du système matriciel (1.3) est un système de la forme (1.2). L'avantage du système (1.3) est que $Gl(p, \mathbb{R})$ est un groupe de Lie, et chaque élément A_j définit un champ de vecteurs invariants à droite $A_j X$ est donc un élément de l'algèbre de Lie $gl(p, \mathbb{R})$ des matrices réelles carrées $p \times p$, cette algèbre est de dimension finie et sa multiplication est définie par les crochets de Lie :

$$[A_i, A_j] = A_i A_j - A_j A_i.$$

1.1.1 Contrôlabilité d'un système de contrôle bilinéaire

On se donne le système contrôlé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \\ x \in G \subset R^n, \ u \in U. \end{cases} \tag{1.4}$$

Définition 1.1.1 *On dit que le système* (1.4) *est* ***contrôlable*** *(ou* ***commandable****) si pour tous les états $x_0, x_1 \in G$, il existe un temps fini T et un contrôle admissible $u(t) \in U$ tel que $x_1 = x(T, x_0, u(t))$.*

Définition 1.1.2 *L'****ensemble accessible*** *en T par* (1.4)*, noté $Acc(x_0, T)$ est l'ensemble des extremités au temps T des solutions du système partant de x_0 :*

$$Acc(x_0, T) = \{x(T)/ \ x(0) = x_0\}.$$

Le système (1.4) *est contrôlable si :*

$$\underset{T \geq 0}{\cup} Acc(x_0, T) = G.$$

– **Cas d'un système de contrôle bilinéaire**

On considère dans $\mathbb{R}^n$ le système bilinéaire contrôlé suivant (voir [DE]) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \sum\limits_{i=1}^{m} u_i(t)B_i)x(t) \\ x(0) = \xi, \quad u(.) \in \Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

où : $U = \{u(t)/0 \leq t \leq T\}$, tel que u est **constant par morceaux** dans l'intervalle $[0, T]$, dans ce cas le système (1.5) sera traité comme un système différentiel vectoriel linéaire par morceaux. Pour obtenir $x(t) = \theta_t(\xi, u)$ pour tout ξ et u, on définit dans l'espace linéaire $L = \mathbb{R}^{n \times n}$, le système matriciel contrôlé suivant :

$$\dot{X} = AX + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)B_iX \qquad X(0) = I, \quad u(.) \in \Omega, \tag{1.6}$$

avec un contrôle constant par morceaux. Le système (1.6) admet une solution unique $X(t, u)$, appelée la matrice de transition (passage) du système (1.5), tel que $\theta_t(\xi, u) = X(t, u)\xi$.

Remarque 1.1.1 *La construction de la matrice de transition est pour représenter $X(t, u)$ comme un produit d'exponentiel des matrices.*

On remarque que l'origine dans $\mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre du système (1.5), alors $G = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et les trajectoires contrôlées sont $x(t) = X(t, u)\xi$, d'où (1.5) est contrôlable si :

$$A(\xi) = \underset{t \geq 0}{\cup} Acc(x_0, t) = \{X(t, u)\xi /\ t \in [0, T],\ u(.) \in \Omega\}.$$

Si $A(\xi) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ quelque soit ξ de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors (1.5) est contrôlable pour tous points de G.

1.1.2 Contrôle d'un système bilinéaire continu et d'un système bilinéaire discret

Le système **bilinéaire continu** est généralement défini par :

$$(BC) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t)u(t) + c(t)u(t), \\ y(t) = H(t)x(t), \quad u(t) = f(y(t)), \quad x_0 = x(t_0), \end{cases}$$

où $x(t),\ y(t),\ c(t)$ sont des vecteurs de dimension n; A, B, H sont des matrices

de taille $n \times n,\ u(t)$ est un contôle continu par rapport à t. Nous supposons que la solution $x(t)$ est continûment différentiable.

Pour un intervalle de temps discret, on considère la forme générale du système **bilinéaire contrôlé discret**, avec une sortie feedback comme suit :

$$(BD) \quad \begin{cases} x(t+1) = A(t)x(t) + \sum\limits_{i+1}^{m} B_i(t)x(t)u_i(t) + C(t)u(t) \\ y(t) = H(t)x(t), \\ u(t) = (u_1(t), ..., u_m(t))^T = f(y(t)), \quad x_0 = x(0), \end{cases}$$

tels que $x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^p,\ u \in \mathbb{R}^m,\ A(t),\ B_i(t),\ i = 1, ..., m$ sont des ma-

trices carrées de taille n, $C(t)$, $H(t)$ sont des matrices de taille $n \times m$, $p \times n$ réspectivement, et $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Un bon choix de la fonction $f(.)$ nous garantit l'existence et la convergence de la solution.

1.1.3 Stabilisation d'un système de contrôle bilinéaire

Un contrôle (ou une commande) en boucle ouverte est une application $t \longrightarrow u(t)$ d'un intervalle de temps dans l'espace des contrôles. Un contrôle en boucle fermée, appelée aussi une **rétroaction**, ou un **bouclage**, ou encore un **feedback**, est une application $u \longrightarrow R(x)$ définie sur les variables d'état du système. L'un des objectifs de la théorie du contrôle est de déterminer des rétroactions qui stabilisent le système en un état particulier.

On se donne un système

$$\dot{x}(t) = f(x), \tag{1.7}$$

tel que $f(0) = 0$, admettant $x = 0$ comme **équilibre** (noter que par un changement de variable on peut toujours ramener l'équilibre à l'origine).

Définition 1.1.3 *L'équilibre $x = 0$ du système (1.7) est dit* ***uniformément stable*** *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (1.7) on a :*

$$\|x(0)\| < \eta \Longrightarrow \forall t > 0, \ \|x(t)\| < \varepsilon.$$

Définition 1.1.4 *L'équilibre $x = 0$ du système (1.7) est dit* ***uniformément asymptotiquement stable*** *s'il est uniformément stable et s'il existe $r > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (1.7) on a :*

$$\|x(0)\| < r \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Le lemme suivant est valable pour les systèmes continus et discrets :

Lemme 1.1.1 *Soit f une fonction mesurable définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$ et satisfait l'hypothèse suivante :*

$$\int_0^T \sup_{\|x\|\leq t} |f(x)| \frac{dt}{t} \leq K_f T.$$

On suppose que

$$u(t) = f(y(t)), \qquad y(t) = H(t)x(t),$$

alors

$$|u(t)| \leq 4K_f \|H(t)\| \|x(t)\|,$$

tels que

$$\|x\| = \left(\sum_i |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \|H\| = \left(\sum_{i,j} |h_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad K_f : \text{ en fonction de } f.$$

Pour la stabilité d'un système bilinéaire continu, on a le théorème suivant :

Théorème 1 *Soit $x(t)$ la solution du système (BC). Supposons qu'il existe une matrice D définie en fonction de temps t, telle que $A = DD^{-1}$. Soit :*

$$\Lambda = \int_0^\infty 4K_f \|H\| \left\|D^{-1}\right\| \|D\| \|c\| \, dt,$$

et

$$G=\int_0^\infty 4K_f\left\|H\right\|\left\|D^{-1}\right\|\left\|D\right\|^2\left\|B\right\|dt.$$

Si

$$1-\Lambda e^{\Lambda}>0,$$

alors il existe $\delta>0$, *tel que*

$$\left\|x(t)\right\|\leq\frac{\left\|D^{-1}(t_0)x_0\right\|\left\|D(t)\right\|}{1-(\Lambda+\left\|D^{-1}(t_0)x_0\right\|G)e^{\Lambda}},$$

pour $\left\|x_0\right\|\leq\delta$.

Remarque 1.1.2 *On remarque que le point d'équilibre à l'origine du système* (BC) *est uniformément stable si* $\left\|D(t)\right\|\in L^\infty([t_0,\infty))$, *et uniformément asymptotiquement stable si* $\lim\limits_{t\to\infty}\left\|D(t)\right\|=0$.

Pour la stabilité d'un système bilinéaire discret, on a le lemme suivant :

Lemme 1.1.2 *Pour le système bilinéaire discret* (BD), *on suppose qu'il existe une constante* $\alpha>0$, *un polynôme* $h(.)$ *qui n'inclut pas un terme de degré* ≤ 3, *avec des coefficients positifs, telle que la relation suivante est vérifiée,*

$$\left\|x(t+1)\right\|\leq\alpha\left\|x(t)\right\|^2+h(\left\|x(t)\right\|),$$

alors le point d'équilibre à l'origine du système (BD) *est uniformément stable, et uniformément asymptotiquement stable si* $\alpha<1$.

Théorème 2 *Soient* $C(t)$ *et* $H(t)$ *uniformement bornées dans* $\mathbb{Z}^+$,*et*

$$\sqrt{\lambda_1}+K_1K_HK_C<1,$$

tel que

$$\lambda_1=\sup_{t\geq 0}\lambda_{\max}\left[A^T(t)A(t)\right],$$

K_1 *est une constante qui peut dépendre de* $f(.)$, K_H *et* K_C *sont des constantes. Alors le point d'équilibre à l'origine du système* (BD) *est uniformément stable, et uniformément asymptotiquement stable.*

1.1.4 Autres problèmes de la théorie du contrôle

– **Contrôle optimal**

Il sagit de chercher la commande optimale, "la meilleure", selon tel ou tel critère qui réalise le processus, ça peut être une commande qui réalise l'objectif avec un minimum d'énergie, ou en temps minimum. **Le Principe du Maximum de Pontryagin** (voir chapitre 2), qui donne des conditions nécessaires pour qu'une trajectoire soit optimale, est un outil puissant pour la détermination de ces commandes.

Dans un problème de contrôle optimal, en plus du modèle

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

on se donne un état initial $x(0) = x_0$, une cible $x(T) = x_1$ et une fonction coût

$$J(u) = \int_0^{+\infty} L(x(t), u(t))dt,$$

que l'on se propose à minimiser. Ainsi il faut chercher, parmi les contrôles admissibles, $u(.)$ celui qui réalise :

$$\min_u J(u), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1.$$

Lorsque T est fini, le problème de contrôle optimal est dit en horizon fini. Lorsque $T = +\infty$, on parle d'optimisation en horizon infini.

– **Observabilité**

Le problème d'un observateur est le suivant : prenons un système (S) décrit par des équations différentielles et sa fonction de sortie :

$$(S) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u) \\ y = h(x), \end{cases}$$

à partir des données, de l'entrée $u(t)$ et la sortie $y(t)$ de ce système, on veut retrouver l'état $x(t)$ du système (S). Pour cela, on va construire un autre système $(\hat{S})$ qui utilise comme entrées $u(t)$ et $y(t)$:

$$(\hat{S}) \quad \dot{\widehat{x}}(t) = g(\widehat{x}, y, u),$$

ce nouveau système $(\hat{S})$ est un observateur pour le système (S), et telle que l'erreur

$$\varepsilon(t) = \widehat{x}(t) - x(t),$$

tend vers 0 quand $t \longrightarrow \infty$.

1.2 Contrôle d'un système bilinéaire en dimension infinie

En dimension infinie, aucune théorie générale existe, les premiers travaux sur les systèmes de contrôle bilinéaires sont dûs à Slemrod [SL1], [SL2], Bal et autres [BMS], sur la contrôlabilité et la stabilité de ces systémes. Parmi les premières tentatives d'élaboration d'une théorie générale sur l'observabilité des systèmes en dimension infinie, on peut citer les travaux de Benssoussan [BEN] et Dolecki-Russel [DR1], [DR2]. Le premier résultat sur le contrôle optimal pour les systèmes en dimension infinie est dû à Butkovsky-Lerner [BL], en 1960. Yu. V. Egorov [EG1], [EG2] ont construit un exemple montrant que le PMP ne marche pas nécessairement pour les systèmes en dimension infinie. Dans le contexte des systèmes de contrôle bilinéaires, on cite aussi le résultat de A. Berrabah N. Bensalem et F. Pelletier qui ont démontré un principe du maximum exacte dans le cas où les opérateurs définissant la dynamique des contrôles sont compacts et où si l'espace des contrôles est de dimension finie ou bien une sphère (voir [BBP]).

Chapitre 2

Contrôle optimal pour une classe de systèmes bilinéaires

Il est bien connu que pour déterminer le contrôle optimal d'un problème en dimension finie, le principe du maximum de Pontryagin (en bref PMP) [PBG] donne des conditions nécessaires pour qu'une trajectoire soit optimale. Ce procédé n'est pas toujours valable en dimension infinie. Pour démontrer un **Principe du Maximum** pour le système de contrôle bilinéaire (1) et (2), nous utilisons les résultats de [BBP]. **Le contrôle optimal est donné en fonction du vecteur d'état et du vecteur adjoint**. De plus, si **l'algèbre de Lie** engendrée par les opérateurs A et B **est nilpotente** pour le crochet $[A, B] = AB - BA$, **le contrôle optimal s'écrit en fonction du temps et des conditions initiales.**

Ce chapitre est composé de quatre sections. Dans la première, on présente le problème de contrôle optimal gouverné par un système bilinéaire. Dans la deuxième section, on rappelle les conditions d'optimalité en dimension finie, le (PMP), puis on démontre un principe du maximum en dimension infinie. Enfin, on donne la valeur exacte du contrôle optimal dans le cas où A et B engendrent une algèbre de Lie nilpotente de rang un.

2.1 Présentation du problème

Etant donné un système de contrôle bilinéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)Bx(t) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où A et B sont des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert E, $x(t) \in E$ est l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}$ est le contrôle et $[0,T]$ est un intervalle fixé de temps, tel que $T > 0$. Alors pour tout $t \in [0,T]$ on considère le problème suivant : Trouver un contrôle $u(t)$ permettant de minimiser la fonctionnelle :

$$J(u) = \int_0^T u^2 dt + \phi(x(T)), \tag{2.2}$$

sous la contrainte (2.1), où $\phi(x(T)) = \langle x(T), Fx(T) \rangle$, F est un opérateur borné symétrique et coercif, ϕ est de classe C^1 et borné sur toute partie bornée.

Pour tout $t \in [0,T]$ où T est quelconque. Soit $u \in L^2([0,T], K)$ où K est un sous ensemble borné de $\mathbb{R}$, les hypothèses précédentes assurent l'existence de la solution du système (2.1) sur un intervalle de temps $[0,\tau] \subset [0,T]$ et qui est donnée explicitement par :

$$x(t) = x_0 + \int_0^\tau (A + u(s)B)x(s)ds.$$

Rappelons maintenant le lemme suivant :

Lemme 2.1.1 *(de Gronwall) Supposons que les fonctions non négatives $f(.)$ et $g(.)$ sont mesurables sur le segment I. Si pour certains $b > 0$ et $\tau \in I$ et pour tous les $t \in I$ on a l'inégalité*

$$g(t) \leq b + \left| \int_\tau^t f(s)g(s)ds \right|,$$

alors pour tout $t \in I$ on a

$$g(t) \leq be^{\left|\int_\tau^t f(s)ds\right|}.$$

Grâce au lemme de Gronwall précédent, on obtient la majoration :

$$\|x\| \leq \|x_0\| \, e^{M_1 T + M_0},$$

où M_0 et M_1 sont des constantes, ce qui assure l'existence de la solution du système sur l'intervalle de temps $[0, T]$.

2.2 Condition d'optimalité en dimension finie

Un contrôle **admissible** $u(t)$ est une application mesurable bornée, définie sur l'intervalle $[0, T]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que la trajectoire correspondante transfère le système de l'état $x(0) = x_0$ à l'état $x(1) = x_1$. On note U l'ensemble des contrôles ayant cette propriété.

Définition 2.2.1 *Un élément $u^\star \in U$ est dit optimal si :*

$$J(u^\star) \leq J(u), \quad \forall u \in U.$$

Soit $x(t) \in \mathbb{R}^n$, introduisons le **système augmenté** suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx = f(x, u) \\ \dot{x}^0 = u^2(t) = f^0(u), \quad x^0(0) = 0 \\ \widehat{x} = (x^0, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad \widehat{f} = (f^0, f) \\ u \in \Omega = L^2([0, T], U). \end{cases}$$

On rappelle le **Principe du Maximum de Pontryagin** (voir [PBG])

Théorème 3 *Si le contrôle $u^\star$ et la trajectoire correspondante $\widehat{x}^\star$ du système augmenté sont optimaux sur $[0, T]$, alors il existe un vecteur $\widehat{p}^\star(t) = (p_0^\star(t), p(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$, $\widehat{p}^\star(t) \neq 0$ pour tout t positif tel que : les* *équations dites de* **Pontryagin** *soient satisfaites pour presque tout t appartenant à $[0,T]$:*

$$\begin{cases} \dot{(\widehat{x}^\star)} = \frac{\partial}{\partial \widehat{p}} \widehat{H}(\widehat{x}^\star, \widehat{p}^\star, u^\star) \\ \\ \dot{(\widehat{p}^\star)} = \frac{\partial}{\partial \widehat{x}} \widehat{H}(\widehat{x}^\star, \widehat{p}^\star, u^\star), \end{cases}$$

avec

$$\widehat{H} = \left\langle \widehat{p}, \widehat{f}(\widehat{x}, u) \right\rangle,$$

$\widehat{H}$ est appelé le Hamiltonien et $\widehat{p}$ le vecteur adjoint. Par ailleurs, la condition suivante est vérifiée pour presque tout $t \in [0,T]$:

$$\widehat{H}(\widehat{x}^\star(t), \widehat{p}^\star(t), u^\star(t)) = \min_{u \in \Omega} \widehat{H}(\widehat{x}^\star, \widehat{p}^\star, u),$$

c'est-à-dire que pour presque tout t, la fonction $u(t)$ doit minimiser la fonctionnelle :

$$u \in \Omega \longrightarrow \widehat{H}(\widehat{x}^\star, \widehat{p}^\star, u).$$

Pour calculer le contrôle optimal du problème (2.1) - (2.2) lorsque E est de dimension finie, on applique le principe du maximum de Pontryagin, il en résulte que pour un contrôle optimal u, il existe un vecteur adjoint $p(t)$ solution de :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \frac{\partial}{\partial p} H(x,u,p) \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial}{\partial x} H(x,u,p) \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial u} H(x,u,p), \end{cases} \tag{2.3}$$

où

$$H(x,u,p) = \langle p(t), (A + u(t)B)x(t) \rangle - u^2(t),$$

avec la condition terminale : $p(T) = d\phi(x(T)) = Fx(T)$.

Comme les contrôles sont solutions de (2.3) on a :

$$\frac{\partial}{\partial u} H(x,u,p) = 0 \Longrightarrow \langle p(t), Bx(t) \rangle - 2u(t) = 0,$$

on obtient **le contrôle optimal** en fonction du vecteur d'état et du vecteur adjoint

$$u^\star(x,p) = \frac{1}{2}\langle p(t), Bx(t)\rangle . \tag{2.4}$$

2.3 Condition d'optimalité en dimension infinie

Le principe du maximum de Pontryagin donne des conditions nécessaires pour qu'une trajectoire soit optimale. Il est bien connu que ces conditions ne sont plus valables en dimension infinie. Le but de ce paragraphe est de démontrer un principe du maximum dans le cas où l'espace de contrôle est de dimension finie.

On s'intéresse au problème d'optimisation suivant : Pour un point fixé $x_{0,}$ trouver un contrôle $\bar{u}$ qui minimise la fonctionelle

$$J(u) = \int_0^T u^2 dt + \phi(x(T)),$$

lorsque u appartenant à $L^2([0,T], K)$ où $K \subset \mathbb{R}$ et $\overline{x}$ est la trajectoire associée à $\bar{u}$, parmi toutes les trajectoires d'origine x_0 et correspondantes à un contrôle u.

On obtient alors le "principe du maximum" suivant :

Théorème 4 *Parmi tous les contrôles $u \in L^2([0,T], K)$, K compact de $\mathbb{R}$, il existe un contrôle $\bar{u}$ qui minimise la fonctionnelle J et $\bar{u}$ vérifie la relation suivante pour presque tout $t \in [0,T]$:*

$$\langle (A + \bar{u}(t)B)\overline{x}(t), \overline{p}(t)\rangle + \bar{u}^2(t) = \min_{v\in K}\left\{\langle (A + vB)\overline{x}(t), \overline{p}(t)\rangle + v^2\right\},$$

où $\overline{x}(t)$ est la trajectoire associée à $\bar{u}(t)$ et $\overline{p}(t)$ est solution du système adjoint :

$$\begin{cases} \dot{\overline{p}}(t) = -(A + \bar{u}B)^\star \overline{p}(t) \\ \overline{p}(T) = d\phi(x(T)). \end{cases}$$

Pour la démonstration du théorème 4, nous rappelons la version suivante du principe du maximum "approché" (voir [BBP]) :

Théorème 5 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un contrôle $u_\varepsilon \in L^2([0,t], K)$ tel que la trajectoire associée x_ε vérifie les propriétés suivantes :*

$$\inf J(u) \leq J(u_\varepsilon) \leq \inf J(u) + \varepsilon, \tag{2.5}$$

$$\langle Ax_\varepsilon(t) + u_\varepsilon(t)Bx_\varepsilon(t), p_\varepsilon(t)\rangle + u_\varepsilon^2(t) \leq \min_{v\in K}\left\{\langle Ax_\varepsilon(t) + vBx_\varepsilon(t), p_\varepsilon(t)\rangle + v^2\right\} + \varepsilon, \tag{2.6}$$

pour presque tout $t \in [0,T]$ et où $p_\varepsilon(t)$ est presque partout solution du système adjoint :

$$\begin{cases} \dot{p_\varepsilon}(t) = -(A + u_\varepsilon B)^\star p_\varepsilon(t) \\ p_\varepsilon(T) = d\phi(x(T)), \end{cases}$$

où $(A + u_\varepsilon B)^\star$ est l'adjoint de $(A + u_\varepsilon B)$ et $\inf J$ *désigne la borne inférieure de J sur $L^2([0,t], K)$.*

Démonstration du théorème 4.

Pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$ considérons un contrôle u_n vérifiant les propriétés du théorème 4. La suite (u_n) étant bornée dans $L^2([0,t], K)$, on peut supposer qu'elle converge faiblement vers $\overline{u} \in L^2([0,t], K)$.

On a :

$$\begin{aligned} \|x_n(t) - \overline{x}(t)\|_E &\leq \left\|\int_0^t (A + u_n(s)B)(x_n(s) - \overline{x}(s))ds\right\| + \left\|\int_0^t (u_n(s) - \overline{u}(s))B\overline{x}(s)ds\right\| \\ &\leq M\left\|\int_0^t (u_n(s) - \overline{u}(s))B\overline{x}(s))ds\right\| e^{CT}. \text{ (lemme de Gronwall)} \end{aligned}$$

Comme la suite (u_n) converge faiblement vers $\overline{u}$ et est bornée, le nombre t étant fixé, pour toute fonction continue $\psi : [0,t] \longrightarrow E$, et d'après [GXB] on a :

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\int_0^t (u_n(s) - \overline{u}(s))\psi(s)ds\right\| = 0.$$

On en déduit que x_n converge vers $\overline{x}$. Par continuité de J dans la relation (2.5), on obtient la minimalité de $\overline{u}$.

Le même type d'argument que précédemment permet de montrer que $p_n(t)$ converge vers $\overline{p}(t)$ sur $[0,T]$.

Considérons un sous ensemble D de $[0,T]$ et $v \in K$ fixés. D'après le théorème 5, on a :

$$\int_D [(v - u_n(s)) \langle Bx_n(s), p_n(s) \rangle + v^2 - u_n^2(s)] ds + \frac{T}{n} \geq 0. \tag{2.7}$$

On a les convergences suivantes :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_D [\langle (A + vB) x_n(s), p_n(s) \rangle + v^2] ds = \int_D [\langle (A + vB) \overline{x}(s), \overline{p}(s) \rangle + v^2] ds.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
& \left| \int_D \langle (A + u_n(s)B) x_n(s), p_n(s) \rangle \, ds - \int_D \langle (A + \overline{u}(s)B) \overline{x}(s), \overline{p}(s) \rangle \, ds \right| \\
\leq \; & \int_D |\langle A(x_n(s) - \overline{x}(s)), \overline{p}(s) \rangle \, ds| + \int_D |\langle Ax_n(s), p_n(s) - \overline{p}(s) \rangle \, ds| + \\
& \int_D |\langle (u_n(s) - \overline{u}(s)) \, B\overline{x}(s), \overline{p}(s) \rangle \, ds| + \int_D |\langle u_n(s) Bx_n(s), p_n(s) - \overline{p}(s) \rangle \, ds| \, .
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_D \langle (A + u_n(s)B) x_n(s), p_n(s) \rangle \, ds = \int_D \langle (A + \overline{u}(s)B) \overline{x}(s), \overline{p}(s) \rangle \, ds.$$

Il découle de (2.7) que l'on a :

$$\int_D [(v - \overline{u}(s)) \langle B\overline{x}(s), \overline{p}(s) \rangle + v^2 - \overline{u}^2(s)] ds \geq 0. \tag{2.8}$$

Comme l'inégalité (2.8) est vraie pour tout sous ensemble D de $[0,T]$, on en déduit :

$$\langle (A+\overline{u}(t)B)\overline{x}(t), \overline{p}(t)\rangle + \overline{u}^2(t) \leq \langle (A+vB)\overline{x}(t), \overline{p}(t)\rangle + v^2(t),$$

pour presque tout $t \in [0, T]$ et pour $v \in K$ quelconque, on obtient l'égalité suivante pour presque tout t :

$$\langle (A+\overline{u}(t)B)\overline{x}(t), \overline{p}(t)\rangle + \overline{u}^2(t) = \min_{v\in K} \left\{ \langle (A+vB)\overline{x}(t), \overline{p}(t)\rangle + v^2(t) \right\}.$$

Ce qui achève la démonstration du Théorème 4.

La proposition suivante présente une généralisation du cas de la dimension finie, où on obtient une caractérisation similaire du contrôle optimal lorsque E est un espace de **Hilbert de dimension infinie**. La démonstration est obtenue de la même manière que dans [PP].

Proposition 2.3.1 *Si $\bar{u}$ est un* ***contrôle optimal borné*** *appartenant à $L^2([0,T], \mathbb{R})$ on a :*

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{2} \langle \overline{p}(t), B\overline{x}(t)\rangle, \tag{2.9}$$

où $\overline{x}(t)$ est la trajectoire associée à $\bar{u}(t)$ et $\overline{p}(t)$ est la solution du système adjoint :

$$\begin{cases} \dot{\overline{p}}(t) = -\langle \overline{p}(t), (A+\bar{u}B)\rangle \\ \overline{p}(T) = F\ \overline{x}(T). \end{cases} \tag{2.10}$$

Démonstration.
Soit $\bar{u}$ un contrôle optimal borné, posons :

$$a = \max\left\{ |\bar{u}(t)|, \quad t \in [0, T] \right\}.$$

Et $K_n = [-n, n]$ un compact de $\mathbb{R}$, avec $n \in \mathbb{N}$. Alors pour $n \geq a$, le contrôle $\bar{u}(t)$ est un contrôle optimal parmi tous les contrôles $u(.) \in L^2([0,T], K_n)$.

D'après le théorème 4, $\bar{u}(t)$ vérifie la relation suivante pour prèsque tout $t \in [0,T]$:

$$\langle \overline{p}(t), (A + \bar{u}(t)B)\overline{x}(t) \rangle - \bar{u}(t)^2 = \max_{v \in K_n} \left\{ \langle \overline{p}(t), (A + vB)\overline{x}(t) \rangle - v^2 \right\},$$

où $\overline{x}(t)$ est la trajectoire associée à $\bar{u}(t)$ et $\overline{p}(t)$ est la solution du système adjoint (2.10).

Grâce au lemme de Gronwall, il existe une constante C telle que $\|\overline{x}(t)\|$ et $\|\overline{p}(t)\|$ sont uniformément bornées par C pour tout $t \in [0,T]$.

Alors pour t fixé, le $\max\limits_{v \in K_n} \{\langle \overline{p}(t), (A + vB)\overline{x}(t) \rangle - v^2\}$ est atteint en :

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{2} \langle \overline{p}(t), B\overline{x}(t) \rangle .$$

2.4 Contrôle optimal pour un système bilinéaire nilpotent

2.4.1 Rappels utiles

On note par $\mathcal{L}(E)$ l'espace des opérateurs bornés de E.

– Une algèbre M sur un corps K est appelée une **algèbre de Lie** sur K si sa multiplication (notée $(u, v) \longrightarrow [u, v]$) vérifie les identités :

1) $[u, u] = 0$,

2) $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$,

3) $[u,v] = -[v,u]$.

– Soit Ad_u l'endomorphisme défini par :

$$\begin{array}{cccc} Ad_u & \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & v & \longrightarrow & [u,v] = uv - vu, \end{array}$$

et

$$Ad_M(N) = \{[u,v] \diagup u \in M \quad et \quad v \in N\},$$

avec M et N sont des parties de $\mathcal{L}(E)$. Et on définit par récurrence pour $k \geq 1$

$$\begin{array}{rcl} (Ad_M)^k(N) & = & Ad_M\left\{(Ad_M)^{k-1}(N)\right\} \\ (Ad_M)^0(N) & = & N. \end{array}$$

Alors, on dit qu'une sous algèbre de Lie M de $\mathcal{L}(E)$ est **nilpotente** de rang k, pour les crochets $[u,v] = uv - vu$ s'il existe un entier l tel que $(Ad_M)^l(M) = \{0\}$, et k le plus petit élément de l'ensemble de ces entiers l.

2.4.2 Caractérisation du contrôle optimal

Revenons au problème de minimisation (2.1) et (2.2). Notons $M(A,B)$ l'algèbre de Lie engendrée par les opérateurs A et B et supposons que cette algèbre de Lie soit **nilpotente de rang un**, avec ces conditions, on énonce le théorème suivant qui donne au contrôle optimal une expression indépendante de $p(t)$ et $x(t)$ (voir [PP], Théorème 3.1) :

Théorème 6 *Etant donné le problème de minimisation* (2.1) *et* (2.2)*, si* $k = 1$(*i.e.* $[A,B] = 0$)*, alors le contrôle optimal* $\bar{u}(t)$ *est une constante qui est caractérisée par l'équation :*

$$2\bar{u} + \left\langle e^{(A+\bar{u}B)T}x_0, [FB + B^\star F]\, e^{(A+\bar{u}B)T}x_0 \right\rangle = 0.$$

Où $B^\star$ *désigne l'adjoint de* B.

Démonstration. Le contrôle optimal (2.9) est donné par :

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{2}\left\langle \overline{p}(t), B\overline{x}(t)\right\rangle,$$

d'où la dérrivée de $\bar{u}(t)$ est :

$$\begin{aligned}
2\dot{\bar{u}}(t) &= \left\langle \dot{\overline{p}}(t), B\overline{x}(t)\right\rangle + \left\langle \overline{p}(t), B\dot{\overline{x}}(t)\right\rangle \\
&= -\left\langle \left\langle \overline{p}(t), (A+\bar{u}B)\right\rangle, B\overline{x}(t)\right\rangle + \left\langle \overline{p}(t), B(A+\bar{u}B)\overline{x}(t)\right\rangle \\
&= \left\langle \overline{p}(t), [B,(A+\bar{u}B)]\,\overline{x}(t)\right\rangle \\
&= \left\langle \overline{p}(t), [B,A]\,\overline{x}(t)\right\rangle.
\end{aligned}$$

De l'hypothèse $[A,B]=0$, il en résulte que $\bar{u}$ est une constante qui minimise la fonctionnelle (2.2), d'où cette constante est caractérisée par l'équation :

$$2\bar{u} + \left\langle e^{(A+\bar{u}B)T}x_0, [FB+B^{\star}F]\, e^{(A+\bar{u}B)T}x_0\right\rangle = 0.$$

Chapitre 3

Ensemble d'opérateurs qui commutent avec un opérateur donné

Le but de ce chapitre est de définir l'ensemble des matrices qui commutent avec une matrice donnée. Ce résultat est obtenu par l'application des techniques de [GA]. Ce dernier afirme que pour chaque matrice A de $M_n(C)$ définie par ses **diviseurs élémentaires,** il existe un ensemble de matrices qui commutent avec A, c-à-d qui vérifie $[A, B] = 0$ (B est un élément de l'ensemble de matrices commutatives). Ces résultats sont généralisés pour le cas d'un **opérateur borné de rang fini** dans un espace de Hilbert de dimension infinie. L'écriture de cet opérateur sous forme matricielle, nous permet de définir l'ensemble des opérateurs qui commutent avec ce type de matrices (voir [WE1], [AB1]). Pour atteindre cet objectif, le travail est réparti en trois sections. Dans la première, on rappelle la **forme normale de Jordan** d'une matrice de dimension finie. Dans la deuxième section, on donne une procédure de calcul de **l'ensemble des matrices qui commutent avec une matrice donnée** de dimension finie. Enfin, la troisième section est consacrée à la généralisation de la forme normale de Jordan à un **opérateur borné de rang fini** dans un espace de Hilbert, puis à la définition de l'ensemble de matrices qui commutent avec ce type d'opérateurs.

3.1 Rappels sur certains outils d'analyse matricielle

Pour plus de détail sur ces rappels voir [GA], [WE1].

3.1.1 Diviseurs élémentaires

Pour définir les diviseurs élémentaires d'une matrices A de $M_n(\mathbb{C})$ on détermine d'abord les polynômes invariants de la matrice caractéristique $(\lambda I - A)$ de rang n. Ces polynômes invariants sont de la forme :

$$i_1(\lambda) = \frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)},\ i_2(\lambda) = \frac{D_{n-1}(\lambda)}{D_{n-2}(\lambda)}, \ldots,\ i_n(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)} \qquad (D_0(\lambda) = 1),$$

où $D_p(\lambda)$ est le plus grand diviseur commun de tous les déterminants (mineurs) d'ordre p, dont le produit est égal au polynôme caractéristique :

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = D_n(\lambda) = i_1(\lambda) i_2(\lambda) \ldots i_n(\lambda).$$

La décomposition des polynômes invariants en **diviseurs élémentaires** sur le corps $\mathbb{C}$ sera de la forme :

$$\begin{cases} i_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{c_1} (\lambda - \lambda_2)^{c_2} \ldots (\lambda - \lambda_\mu)^{c_\mu} \\ i_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} (\lambda - \lambda_2)^{d_2} \ldots (\lambda - \lambda_\mu)^{d_\mu} \\ \qquad \vdots \\ i_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} (\lambda - \lambda_2)^{l_2} \ldots (\lambda - \lambda_\mu)^{l_\mu}. \end{cases}$$

Les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ donnent l'ensemble de toutes les racines distinctes de $\Delta(\lambda)$.

Remarque 3.1.1 *Il y a une méthode pratique pour le calcul des polynômes invariants, cette dernière est basée sur la réduction de la matrice caractéristique $(\lambda I - A)$ à la forme diagonale canonique au moyen d'opérations élémentaires, et les éléments de la diagonale sont les polynômes invariants.*

3.1.2 Forme normale de Jordan

Considérons un diviseur élémentaire arbitraire :

$$(\lambda - \lambda_p)^k ,$$

ici, λ_p est l'un des nombres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu$ et k est l'un des exposants (non nuls) :

$$c_i, d_i, ..., l_i \quad (i = 1, 2, ..., \mu)$$

A ce diviseur élémentaire, il correspond un sous espace engendré par les vecteurs $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$:

$$e_1 = (A - \lambda_p I)^{k-1} e, \; e_2 = (A - \lambda_p I)^{k-2} e, ..., e_k = e,$$

avec

$$(A - \lambda_p I) e_1 = 0,$$

les vecteurs $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ sont linéairement indépendants.
Notons maintenant que :

$$\begin{cases} (A - \lambda_p I) e_1 = 0 \\ (A - \lambda_p I) e_2 = e_1 \\ \vdots \\ (A - \lambda_p I) e_k = e_{k-1}, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} Ae_1 = \lambda_p e_1 \\ Ae_2 = \lambda_p e_2 + e_1 \\ \vdots \\ Ae_k = \lambda_p e_k + e_{k-1}, \end{cases}$$

à l'aide de cette dernière écriture, nous pouvons écrire le bloc correspondant au diviseur élémentaire $(\lambda - \lambda_p)^k$ dans la base $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ sous la forme :

$$\left(\underbrace{\begin{array}{ccccc} \lambda_p & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_p \end{array}}_{k}\right)$$

De la même manière précédente, on définit les bases de Jordan pour tous les diviseurs élémentaires $(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$, d'où l'existence d'une matrice inversible U de $M_n(\mathbb{C})$ telle que A est semblable à $\widetilde{A}$ et qui s'écrit sous la forme normale de Jordan associée aux diviseurs élémentaires de A :

$$\begin{aligned} A &= U\widetilde{A}U^{-1} \\ &= U\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{ccccc} \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_1 \end{array} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{array}{ccccc} \lambda_\mu & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_\mu \end{array} \end{array}\right)U^{-1}. \end{aligned}$$

3.2 Cas de dimension finie : équation matricielle $AB = BA$

Dans cette section, chaque matrice A de $M_n(\mathbb{C})$ présente un endomorphisme dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On considère alors que A est une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui est définie par ses diviseurs élémentaires :

$$(\lambda - \lambda_1)^{n_1}, (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, ..., (\lambda - \lambda_\mu)^{n_\mu},$$

telles que $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu$ sont les valeurs propres de A qui ne sont pas forcément distinctes et μ est le nombre de diviseurs élémentaires. On cherche toutes les matrices B qui vérifient $Ad_A(B) = [A, B] = 0$. Cela nous amène au *problème de Frobenius* (voir [GA], page 218) pour déterminer l'ensemble de matrices qui commutent avec A. Cela revient à résoudre une équation matricielle de la forme :

$$AB = BA.$$

Réduisons A à la forme normale de Jordan :

$$A = U\widetilde{A}U^{-1},$$

nous obtenons alors toutes les matrices qui commutent avec A sous la forme :

$$B = U\widetilde{B}U^{-1},$$

où $\widetilde{B}$ désigne une matrice arbitraire commutative avec $\widetilde{A}$, et $\widetilde{B}$ est décomposée en B_{ij} blocs tels que $i, j = 1, 2, ..., \mu$ (μ est le nombre de diviseurs élémentaires de A)

$$\widetilde{B} = (B_{ij}) \qquad i, j = 1, 2, ..., \mu$$

telles que B_{ij} est la **matrice nulle** si $\lambda_i \neq \lambda_j$, ou bien une matrice **triangulaire supérieure** régulière si $\lambda_i = \lambda_j$. Les schémas ci-dessous montrent la structure de ces matrices :

$$B_{ij} = \left.\left(\underbrace{\begin{matrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n_i} \\ 0 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{matrix}}_{n_i}\right)\right\} n_i \qquad \text{si} \quad n_i = n_j \tag{3.1}$$

$$B_{ij} = \left.\left(\underbrace{\begin{array}{|cccc|cccc|} \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n_i} \\ \vdots & & & \vdots & 0 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \hline \end{array}}_{n_j}\right)\right\} n_i \qquad \text{si} \quad n_i < n_j \tag{3.2}$$

$$B_{ij} = \left.\left(\underbrace{\begin{array}{|cccc|} \hline a_1 & a_2 & \cdots & a_{n_j} \\ 0 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \hline 0 & \cdots\cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & \cdots & 0 \\ \hline \end{array}}_{n_j}\right)\right\} n_i \qquad \text{si} \quad n_j < n_i \tag{3.3}$$

tels que $a_1, a_2, a_3, ...$ sont des paramètres arbitraires et les éléments de chaque direction parallèle à la diagonale principale sont égaux.

Définition 3.2.1 *On dit que la matrice $B \in M_n(\mathbb{C})$ est $A-$**similaire** à la matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ s'il existe une matrice inversible U de $M_n(\mathbb{C})$ telle que :*

$$B = U\widetilde{B}U^{-1}, \qquad A = U\widetilde{A}U^{-1},$$

où $\widetilde{A}$ est la forme canonique de Jordan de la matrice A.

On a la proposition suivante :

Proposition 3.2.1 *(Problème de Frobenius) Toute matrice $B \in M_n(\mathbb{C})$ qui commute avec la matrice donnée $A \in M_n(\mathbb{C})$ (A est définie par ses diviseurs élémentaires $(\lambda - \lambda_1)^{n_1}$, $(\lambda - \lambda_2)^{n_2}, ..., (\lambda - \lambda_\mu)^{n_\mu}$) est $A-$similaire à une matrice qui est décomposée à μ^2 blocs de type* $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,3)$ *ou bien zéro.*

Exemple 1 *Ecrivons les matrices $\widetilde{B}$ dans le cas où A est définie par les diviseurs élémentaires : $(\lambda-\lambda_1)^3$, $(\lambda-\lambda_1)^2$, $(\lambda-\lambda_2)^3$, $(\lambda-\lambda_2)^1$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$.*

$$A = U \left(\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{matrix} & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} \\
\hline
\mathit{0} & \begin{matrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix} & \mathit{0} & \mathit{0} \\
\hline
\mathit{0} & \mathit{0} & \begin{matrix} \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{matrix} & \mathit{0} \\
\hline
\mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} & \lambda_2 \\
\hline
\end{array}\right) U^{-1},$$

$$B = U \left(\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
\begin{matrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{matrix} & \begin{matrix} f & j \\ 0 & f \\ 0 & 0 \end{matrix} & \mathit{0} & \mathit{0} \\
\hline
\begin{matrix} 0 & h & k \\ 0 & 0 & h \end{matrix} & \begin{matrix} d & e \\ 0 & d \end{matrix} & \mathit{0} & \mathit{0} \\
\hline
\mathit{0} & \mathit{0} & \begin{matrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{matrix} & \begin{matrix} p \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\
\hline
\mathit{0} & \mathit{0} & \begin{matrix} 0 & 0 & l \end{matrix} & m \\
\hline
\end{array}\right) U^{-1},$$

Où a,b,c,.... sont des paramètres arbitraires. On a $[A,B] = 0$.

3.3 Cas où A est de rang fini dans un espace de Hilbert

Soit E un espace de Hilbert complexe de dimension infinie et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés dans E. On définit :

$$\mathcal{L}'(E) = \{A \in \mathcal{L}(E) : \ A \text{ de rang fini } \},$$

pour tout opérateur A de $\mathcal{L}(E)$, on note par $D(A)$ le domaine de définition de A, et $R(A) = A(E)$ l'image de A. Un opérateur A est de **rang fini** (de rang n) si la dimension de $R(A)$ est finie (de dimension n).

Un opérateur A de rang fini, peut s'écrire sous **la forme canonique** suivante : (voir [WE2], Théorème 6.1 p129)

Théorème 7 *Soit A un opérateur de E tel que $D(A) = E$. L'opérateur A est borné de rang n si et seulement s'il existe une base orthonormée $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ de $R(A)$ telle que :*

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, x \rangle v_i \quad \textit{pour tout} \quad x \in E, \tag{3.4}$$

En plus, l'opérateur A est de rang n si et seulement si $A^\star$ est de rang n ($A^\star$ est l'adjoint de A).

Démonstration.

$(\Longleftarrow)$

On note $L\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

D'après (3.4), on a :

$$R(A) \subset L\{v_1, v_2, ..., v_n\}.$$

D'un autre côté, soit $i_0 \in \{1, 2, ..., n\}$, $u_{i_0} \neq 0$ et $u_{i_0} \perp v_i$ pour $i_0 \neq i$ alors :

$$Au_{i_0} = \alpha_{i_0} \langle v_{i_0}, u_{i_0} \rangle v_{i_0},$$

d'où :

$$v_i \in R(A), \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

On en déduit que :

$$R(A) = L\{v_1, v_2, ..., v_n\},$$

alors :

$$\dim R(A) = n.$$

D'autre part, on a :

$$\|Ax\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, |\langle v_i, x\rangle| \, \|v_i\| \leq \underset{i}{Sup} \, |\alpha_i| \, \|x\| \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2,$$

donc :

$$\|A\| \leq \underset{i}{Sup} \, |\alpha_i| \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2,$$

alors, A est un opérateur borné.

$(\Longrightarrow)$

Comme A est un opérateur borné de rang fini n, alors $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ est une base orthonormée de $R(A)$, d'où $\forall x \in E$:

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, Ax\rangle \, v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, x\rangle \, v_i.$$

Passons à la deuxième partie du théorème :
A est de rang fini $\Longleftrightarrow$ $A^\star$ est de rang fini.
$\forall x \in E$ et $y \in R(A)$:

$$\langle y, Ax\rangle = \langle A^\star y, x\rangle,$$

et d'autre part :

$$< y, \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, x\rangle \, v_i >= \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, x\rangle \langle y, v_i\rangle =< \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, y\rangle \, v_i, x >,$$

d'où :

$$A^{\star} y = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, y \rangle \, v_i.$$

Alors $A^{\star}$ est de rang n, ainsi, le théorème est démontré.

Définition 3.3.1 *Un endomorphisme A de E est semblable à un endomorphisme $\widetilde{A}$ s'il existe un automorphisme U de E tel que $A = U\widetilde{A}U^{-1}$. Dans ce cas, on dit qu'un endomorphisme B est $A-$similaire à $\widetilde{B}$ si pour le même automorphisme U, on a $B = U\widetilde{B}U^{-1}$.*

Proposition 3.3.1 *Soit A un opérateur de $\mathcal{L}'(E)$ et E_1 un sous-espace de E engendré par $R(A)$ et $R(A^{\star})$. Alors A est semblable à la forme quasi-diagonale $\left(\begin{array}{|c|c|}\hline A_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array}\right)$, où A_1 est un endomorphisme de E_1. En particulier, il existe une base $\{e_1, e_2, .., e_n\}$ de E_1 telle que la matrice de A_1 a une forme normale de Jordan associée à ses diviseurs élémentaires (voir Section 3.2).*

Démonstration.

En utilisant les formules canoniques précédentes de A et $A^{\star}$, on a :

$$E_1 = R(A) + R(A^{\star}),$$

généré par $\{u_i\}$ et $\{v_i\}$.

Donc E_1 est bien défini et est invariant par A ($AE_1 \subset E_1$).

Alors,

$$E = E_1 \oplus E_2,$$

tel que $E_2 = E_1^{\perp}$ est l'intersection des noyaux de A et $A^{\star}$.

D'où $A\,|_{E_1}$ est caractérisé par ses diviseurs élémentaires

$$(\lambda - \lambda_1)^{m_1}, ..., (\lambda - \lambda_\mu)^{m_\mu},$$

avec $m_1 + m_2 + ... + m_\mu = n$. D'après la Section 3.1, il existe une base $\{e_1, e_2, .., e_n\}$ de E_1 telle que la matrice A_1 dans cette base a une forme normale de Jordan associée à ses diviseurs élémentaires.

Donc, il existe une matrice inversible V telle que $VA\,|_{E_1} V^{-1}$ est la forme normale de Jordan de $A\,|_{E_1}$.

Notons U l'automorphisme de E défini par :

$$U\,|_{E_1} = V \quad \text{et } U\,|_{E_2} = Id_{E_2},$$

d'où A est semblable à la forme quasi-diagonale suivante :

$$A = U \left(\begin{array}{|c|c|} \hline A_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right) U^{-1}.$$

Théorème 8 *Soit A un opérateur de $\mathcal{L}'(E)$ et $E_1 = R(A) + R(A^\star)$ un sous-espace invariant associé à A. Alors l'ensemble de tous les opérateurs $B \in \mathcal{L}(E)$ qui laissent E_1 invariant ($BE_1 \subset E_1$) et tel que $[A, B] = 0$, sont $A-$similaires à $\left(\begin{array}{|c|c|} \hline B_1 & 0 \\ \hline 0 & B_2 \\ \hline \end{array} \right)$ où B_1 est tout endomorphisme de E_1 qui commute avec A_1 et B_2 est un endomorphisme de E_2. En particulier, il existe une base $\{e_1, e_2, .., e_n\}$ de E_1 telle que la matrice A_1 a une forme normale de Jordan associée à ses diviseurs élémentaires, et la matrice de B_1 est décomposée en blocs de type $(3.1), (3.2), (3.3)$ ou bien zéro (voir Proposition 3.2.1).*

Démonstration.

Soit A un opérateur de $\mathcal{L}'(E)$, d'après la Proposition 3.3.1, il existe un automorphisme U tel que :

$$A = U \left(\begin{array}{|c|c|} \hline A_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right) U^{-1}.$$

Nous considérons l'ensemble des endomorphismes B_1 de E_1 qui commutent

avec A_1. D'aprés la section 3.2, il existe une base $\{e_1, e_2, .., e_n\}$ de E_1 telle que la matrice A_1 a une forme normale de Jordan et la matrice de B_1 est décomposée en blocs de type $(3.1), (3.2), (3.3)$ ou bien zéro.

Pour tout endomorphisme B_2 de E_2, soit B une matrice définie par la forme quasi-diagonale :

$$B = U \left(\begin{array}{|c|c|} \hline B_1 & 0 \\ \hline 0 & B_2 \\ \hline \end{array} \right) U^{-1},$$

où U est l'automorphisme précédemment associé à A.

Il est clair que nous avons :

$$[A, B] = 0.$$

Remarque 3.3.1 *Dans le théorème précédent, $B \in \mathcal{L}'(E)$ si et seulement si B_2 est de rang fini.*

Exemple 2 *Soit ℓ^2 l'ensemble de suites $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\mathbb{C}$ telle que $\sum\limits_n |x_n|^2$ converge, l'espace vectoriel ℓ^2 menu de la norme $\|X\| = \sqrt{\sum\limits_n |x_n|^2}$ est un espace de Hilbert. Et T est un opérateur linéaire de rang fini défini par :*

$$\begin{array}{rccc} T: & \ell^2 & \longrightarrow & \ell^2 \\ & X & \longmapsto & TX, \end{array}$$

tel que :

$$TX = (\alpha_1 x_1 + x_2, \alpha_1 x_2, \alpha_2 x_3 + x_4, \alpha_2 x_4, ..., \alpha_n x_{2n-1} + x_{2n}, \alpha_n x_{2n}, 0, 0, ...)\,,$$

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sont des éléments de $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ tels que $\alpha_i \neq \alpha_j$ pour $i \neq j$, et l'opérateur T admet une représentation matricielle dans la base canonique $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ comme suit :

$$TX = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 1 & 0 & \cdots & & & \\ \vdots & & \ddots & \alpha_2 & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & & \\ 0 & & & & \ddots & \alpha_n & 1 & \ddots & \\ \vdots & & & & & & \alpha_n & 0 & \ddots \\ & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{2n-1} \\ x_{2n} \\ x_{2n+1} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

D'après le Théorème 8, les matrices qui commutent avec T sont de la forme :

$$\begin{pmatrix}
a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \\
0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \\
0 & 0 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & & & \\
\vdots & & \ddots & a_2 & \ddots & \ddots & & & \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & & \\
0 & & & & \ddots & a_n & b_n & \ddots & \\
\vdots & & & & & & a_n & 0 & \ddots \\
 & & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & \ddots
\end{pmatrix},$$

tels que a_i, b_i sont des paramètres arbitraires.

Chapitre 4

Ensemble d'opérateurs qui commutent avec un opérateur compact

Dans ce chapitre, on va prolonger l'étude au cas d'un opérateur **compact dans un espace de Banach de dimension infinie.** Cet opérateur possède un ensemble dénombrable de valeurs propres non nulles, qui s'accumulent au point zéro. On applique le calcul fonctionnel de **Riesz** pour isoler chaque **valeur propre non nulle** par un cercle. Ce calcul nous permet d'obtenir des projections qui présentent des **sous espaces invariants de dimension finie**. Dans ce cas, l'espace s'écrit comme une somme directe des images de ces projections et d'un sous espace dans lequel **l'opérateur est quasi-nilpotent** (le complément de la somme directe de ces projections et **son rayon spectral est égal à zéro**). Pour chaque somme directe de sous espaces propres correspondants à des valeurs propres non nulles, l'opérateur admet la **représentation matricielle de Jordan**.

Si la partie quasi-nilpotente de l'opérateur A est positive, l'espace est donc décomposable en **une chaîne croissante maximale de bandes** qui présentent les sous espaces invariants, d'où la représentation matricielle de Jordan, (voir [AB1], [AR], [HP]).

Ce chapitre est composé principalement de deux sections. La première est consacrée à la construction de l'ensemble d'opérateurs commutant avec un **compact de valeurs propres non nulles**. Dans la deuxième section, on a effectué la même étude pour la partie quasi-nilpotente de l'opérateur compact.

4.1 Décomposition spectrale d'un opérateur compact

4.1.1 Rappels sur quelques éléments d'analyse fonctionnelle

Pour plus de précisions, sur les notions introduites ici, on peut consulter les livres standards : [LO], [TA], [KU], [AR], [CO].

Soit E un espace de Banach et A un opérateur compact dans E. Nous rappelons les définitions suivantes :

– Un opérateur A est compact dans E si l'image d'un sous-ensemble de E par A est un sous-ensemble relativement compact.

– Le **spectre** de A est l'ensemble $\sigma(A)$ défini par :

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \ \text{ n'est pas inversible}\}.$$

– La **résolvante** de A est l'ensemble $\rho(A)$ défini par :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \ \text{ est inversible}\}.$$

– λ est une valeur propre isolée de $\sigma(A)$ (**un point isolé** de $\sigma(A)$), s'il existe un voisinage de λ ne contenant aucun autre point de $\sigma(A)$, ou bien si λ n'est pas un point d'accumulation.

– Une courbe γ est dite **contour de Jordan** ce dernier est le graphe d'une application continue $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ telle que $\varphi(0) = \varphi(1)$ et la restriction de φ sur $[0,1)$ est injective. Alors, γ est une boucle continue qui n'a pas de points d'auto-intersection. (une courbe fermée γ de Jordan, est orientée dans le sens positif usuel de la théorie de variable complexe).

- Pour toute fonction holomorphe f sur une couronne $C(a,0,r) = \{z \in \mathbb{C};\quad 0 < |z-a| < r\}$, il existe une série unique qui s'appelle **série de Laurent** et qui dépend seulement de f telle que :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n,$$

où la série de fonctions converge normalement sur tout compact de la couronne $C(a,0,r)$. De plus, les coefficients a_n sont donnés par :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}},$$

où γ est le paramétrage d'un cercle de centre (a) tracé dans la couronne.

Rappelons les propriétés spectrales suivantes :

- Chaque élément non nul $\lambda \in \sigma(A)$ est une valeur propre de A.
- Pour chaque élément non nul $\lambda \in \sigma(A)$, il existe m tel que :

$$Ker(\lambda I - A)^m = Ker(\lambda I - A)^{m+1}.$$

- Les valeurs propres ne peuvent s'accumuler qu'au point zéro. Si la dimension de E est infinie, alors $\sigma(A)$ doit contenir le zéro.
- $\sigma(A)$ est dénombrable.
- Chaque élément non nul de $\sigma(A)$ est un pôle de la résolvante $R(\lambda, A)$ qui est définie par :

$$\lambda \to R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

4.1.2 Sous-espaces invariants de valeurs propres non nulles

Soit E un espace complexe de Banach, alors comme dans le cas d'une matrice en dimension finie, les propriétés du spectre d'un opérateur compact A, permettent de décomposer E en sous espaces invariants. Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de A, alors λ est **un point isolé** de $\sigma(A)$. En utilisant le calcul fonctionnel holomorphique pour définir les **projections de Riesz** P_λ par :

$$P_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\zeta I - A)^{-1} d\zeta,$$

où γ est le **contour de Jordan** contenant le seul point λ de $\sigma(A)$, et P_λ satisfait :

- $P_\lambda^2 = P_\lambda$, donc P_λ sont des projections spectrales.
- P_λ commute avec A ($P_\lambda A(z) = AP_\lambda(z)$).
- De plus, $P_\lambda P_\mu = 0$ si $\lambda \neq \mu$.

Soit $E(\lambda)$ le sous espace défini par $E(\lambda) = P_\lambda E$. La restriction de l'opérateur A à $E(\lambda)$ est un opérateur compact inversible de spectre $\{\lambda\}$.

Et soit m un entier tel que :

$$Ker(\lambda I - A)^m = Ker(\lambda I - A)^{m+1}.$$

La **série de Laurent** de la résolvante qui admet un pôle d'ordre m au point $z = \lambda$, nous donne :

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-\lambda)^n + \sum_{n=1}^{m} b_n (z-\lambda)^{-n},$$

avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{R(\lambda, A)d\lambda}{(z-\lambda)^{n+1}}, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{R(\lambda, A)d\lambda}{(z-\lambda)^{-n+1}}$$

telles que les composantes a_n, b_n vérifient les relations suivantes (voir [LO], [TA]):

$$b_m = (A - \lambda I)b_{m-1}, \quad (A - \lambda I)a_{m+1} = a_m,$$

d'où

$$\begin{cases} b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(\lambda, A)d\lambda = P_\lambda \\ b_m = (A - \lambda I)^{m-1}b_1 = (A - \lambda I)^{m-1}P_\lambda, \end{cases}$$

alors, on a :

$$0 = b_{m+1} = (A - \lambda I)^m P_\lambda = P_\lambda(\lambda I - A)^m.$$

En inspectant la forme de Jordan, il existe n tel que $(\lambda I - A)^n = 0$ tant que $(\lambda I - A)^{n-1} \neq 0$, d'où :

$$E(\lambda) = Ker(\lambda I - A)^m.$$

Alors, $E(\lambda)$ est un **sous espace invariant de dimension finie,** d'où la restriction de A à $E(\lambda)$ admet une **représentation matricielle de Jordan** d'une seule valeur propre λ.

Si nous posons $E(0)$ l'intersection des noyaux des P_λ, alors $E(0)$ est un sous espace fermé invariant selon A et la restriction de A à $E(0)$ est un **opérateur compact de spectre** $\{0\}$.

Donc, nous obtenons la proposition suivante (voir [AR]) :

Proposition 4.1.1 *Soient A un opérateur compact dans un espace de Banach E et $\sigma(A)$ le spectre de A. Alors, E s'écrit comme une somme directe de $E(0)$ et les sous espaces invariants de projection $E(\lambda_i)$ ($\lambda_i \neq 0$) où $A_{|E(\lambda_i)}$ admet une représentation de Jordan :*

$$E = \bigoplus_i E(\lambda_i) \oplus E(0).$$

4.1.3 Ensemble d'opérateurs qui commutent avec un opérateur compact de valeurs propres non nulles

Théorème 9 *Soient E un espace complexe de Banach et A un opérateur compact dans E avec des valeurs propres non nulles $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}^\star}$. Les opérateurs compacts B qui sont $A-$similaires et qui commutent avec A sont de la forme quasi-diagonale suivante :*

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline B_{\lambda_1} & & & & \\ \hline & \ddots & & & \\ \hline & & B_{\lambda_n} & & \\ \hline & & & \ddots & \\ \hline & & & & B_0 \\ \hline\end{array}\right),$$

avec : $E = \bigoplus\limits_i E(\lambda_i) \oplus E(0),\quad B_{\lambda_i}E(\lambda_i) \subset E(\lambda_i)$ *et* $A_0 = A_{|E(0)}$, $B_0 = B_{|E(0)}$ *des opérateurs nuls.*

Démonstration. Si λ_i est une valeur propre telle que $\lambda_i \neq 0$, par conséquent $A_{|E(\lambda_i)} = A_{\lambda_i}$ admet une représentation matricielle de Jordan d'une seule valeur propre λ_i (voir Proposition 4.1.1). Pour plus de simplification, tout opérateur de la forme quasi-diagonale $\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline A_1 & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & A_n \\ \hline\end{array}\right)$ sera écrit par la suite $A_1 \oplus ... \oplus A_n$.

Alors, on peut construire une chaîne d'opérateurs comme suit :

$A_1 = A_{\lambda_1} \oplus A_0,$
$A_2 = A_{\lambda_1} \oplus A_{\lambda_2} \oplus A_0,$
$A_3 = A_{\lambda_1} \oplus A_{\lambda_2} \oplus A_{\lambda_3} \oplus A_0,$
$\vdots$
$A_n = A_{\lambda_1} \oplus A_{\lambda_2} \oplus A_{\lambda_3} \oplus \cdots \oplus A_{\lambda_n} \oplus A_0,$

$\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}^\star}$ $(A_i : E \longrightarrow E)$, une suite d'opérateurs de rang fini, telle que sa limite est l'opérateur compact $A : E \longrightarrow E$, où :

$$\lim_{n\to\infty} \|A - A_n\| = 0,$$

et

$$A = \underset{i\in\mathbb{N}}{\oplus}(A_{|E(\lambda_i)}) \oplus A_0.$$

Pour définir l'ensemble des opérateurs qui commutent avec A. Appliquons la Proposition 3.2.1 pour définir l'ensemble de tous les endomorphismes B_{λ_i} de $E(\lambda_i)$ satisfaisant $[A_{\lambda_i}, B_{\lambda_i}] = 0$, alors nous construisons une chaîne d'opérateurs B_i comme suit :

$$\begin{aligned}
&B_1 = B_{\lambda_1} \oplus B_0,\\
&B_2 = B_{\lambda_1} \oplus B_{\lambda_2} \oplus B_0,\\
&B_3 = B_{\lambda_1} \oplus B_{\lambda_2} \oplus B_{\lambda_3} \oplus B_0,\\
&\vdots\\
&B_n = B_{\lambda_1} \oplus B_{\lambda_2} \oplus B_{\lambda_3} \oplus \cdots \oplus B_{\lambda_n} \oplus B_0.
\end{aligned}$$

Pour $i := 1, ..., n \quad B_i : E \longrightarrow E$ et satisfait : $[A_i, B_i] = 0$.

$\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}^\star}$ une suite d'opérateurs de rang fini, telle que sa limite est l'opérateur compact $\quad B : E \longrightarrow E$, où

$$\underset{n\to\infty}{lim} \|B - B_n\| = 0.$$

Pour compléter la démonstration, nous allons montrer que : $[A, B] = 0$.

Premièrement, on démontre que :

$$[A, B] = \lim_{n\to\infty} [A_n, B_n],$$

qui est équivalent à :

$$AB - BA = \lim_{n\to\infty} (A_n B_n - B_n A_n),$$

on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|A_n B_n - AB\| &= \lim_{n\to\infty} \|A_n B_n - AB_n + AB_n - AB\|\\
&= \lim_{n\to\infty} \|(A_n - A)B_n + A(B_n - B)\|\\
&\leq \lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| \, \|B_n\| + \|A\| \, \|B_n - B\| = 0.
\end{aligned}$$

D'une manière analogue, on montre que :

$$\begin{array}{rcl}\lim\limits_{n\to\infty}\|B_nA_n - BA\| & = & \lim\limits_{n\to\infty}\|B_nA_n - BA_n + BA_n - BA\| \\ & = & \lim\limits_{n\to\infty}\|(B_n - B)A_n + B(A_n - A)\| \\ & \leq & \lim\limits_{n\to\infty}\|B_n - B\|\,\|A_n\| + \|B\|\,\|A_n - A\| = 0,\end{array}$$

comme A_n et B_n sont bornés alors :

$$\begin{array}{rcl}\lim\limits_{n\to\infty}[A_n, B_n] & = & \lim\limits_{n\to\infty}(A_nB_n - B_nA_n) \\ & = & \lim\limits_{n\to\infty}A_nB_n - \lim\limits_{n\to\infty}B_nA_n \\ & = & AB - BA = [A, B]\,.\end{array}$$

Finalement, puisque $[A_n, B_n] = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, alors :

$$[A, B] = 0.$$

Ce qui termine la démonstration du théorème.

4.2 Décomposition spectrale d'un opérateur compact quasi-nilpotent positif

4.2.1 Définitions et notations

Pour cette partie, nous renvoyons le lecteur à [AAB], [HP], [AB2], [AFP], [DR1], [RH]. En outre, nous avons besoin de rappeler les définitions suivantes :

- Un opérateur continu A dans un espace de Banach est dit **quasi-nilpotent** si son rayon spectral est égal à zéro. Il est bien connu que A est quasi-nilpotent si et seulement si pour chaque $x \in E$:

$$\lim_{n\to\infty} \left\|A^n x\right\|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

- **Un treillis vectoriel** est un espace vectoriel réel ordonné E par une relation d'ordre, tel que $\sup(x, y)$ existe pour tous $x, y \in E$.

- Une norme d'un treillis vectoriel est appelée une **norme treillis** si :

$$|x| \leq |y| \Longrightarrow \|x\| \leq \|y\| \quad \text{pour} \;\; x, y \in E,$$

  où $|x|$ est la valeur absolue de x : $|x| := x \vee (-x)$.

- Un **treillis de Banach** E, est un espace réel de Banach muni d'une relation $\leq$ telle que $(E, \leq)$ est un treillis vectoriel et la norme sur E est une norme treillis.

- Un opérateur linéaire A est dit **positif** (noté par $A \geq 0$) si $Ax \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

- Un sous-espace I d'un treillis de Banach E est un **idéal** si et seulement si :

$$x \in I,\; y \in E \;\text{ et }\; |y| \leq |x| \quad \text{implique } y \in I.$$

- Un sous-espace I d'un treillis de Banach E est une **bande** si I est un idéal dans E, et $\sup(M) \in I$ pour toute partie non vide M de I, admettant un supremum dans E. (idéal fermé = une bande).

- Une **chaîne de bandes** est une famille de sous-espaces qui sont **ordonnés par inclusion** un ordre total.

– Soit L l'ensemble ordonné de toutes les chaînes fermées de sous-espaces dans un treillis de Banach E, on dit que C est une **chaîne maximale** en L, si C est incluse dans une autre chaîne C' de L, alors $C = C'$.

– Le **Lemme de Zorn** affirme que si un sous-ensemble ordoné I est tel que toute chaîne de I possède un majorant, alors I admet un élément maximal.

– Par la suite, on note par $E' = E(0)$ et A' la restriction de A à $E(0)$.

4.2.2 Chaîne maximale de bandes

Soit L un ensemble ordonné de tous les sous espaces fermés de E', rappelons qu'une chaîne C de L est dite **simple** presque partout si elle satisfait les conditions suivantes :

1) $\{0\} \in C, \;\; E' \in C.$

2) Si C_0 est une sous-famille de C, alors les sous-espaces fermés : $\wedge C_0 = \cap \{c : c \in C_0\}, \;\; \vee C_0 = \overline{\cup \{c : c \in C_0\}}$ sont dans C.

3) Pour tout M de C, l'espace quotient M/M_- tel que $M_- = \vee \{c \in C : c \subsetneqq M\}$ est de maximum de dimension un.

D'aprés la condition (2), $\;\; M_- \in C \;$ pour tout $M \in C$.

Résultat 1 (voir [HP]) : La chaîne C est **maximale** si est seulment si elle est **simple**.

Résultat 2 (voir [HP]) : Si $(E', \|\|\|)$ est un treillis de Banach ($\dim E' \geq 2$), et si A' est un opérateur compact positif quasi-nilpotent dans E', alors il existe **un sous-espace invariant non trivial** (un idéal fermé dans E') invariant par A'.

Donc, nous obtenons la décomposition spectrale suivante (voir [AB1]) :

Proposition 4.2.1 *Chaque opérateur compact positif quasi-nilpotent A' dans E' possède une chaîne maximale de bandes qui sont $A'-$invariant (sous espaces invariants par A'). D'où la **représentation matricielle de Jordan** de l'opérateur A'.*

Démonstration.

En appliquant le Résultat 2, chaque opérateur compact positif quasi-nilpotent A' admet un sous espace invariant bande non-trivial, et le lemme de **Zorn** garantit l'existence d'une chaîne maximale C de sous espaces invariants de bandes (voir [HP]). Si on note par B a l'ensemble ordonné **des bandes**, alors on peut démontrer que C est une chaîne maximale dans B.

Soit (P) une partition de E' selon la chaîne maximale C, alors :

$$(P) \qquad \{0\} = E'_0 \subset E'_1 \subset ....E'_n \subset ...E' \qquad (E'_i \in C),$$

telle que $\dim E'_i/E'_{i-1} \leq 1$.

Et A'_i est la restriction de A' à E'_i alors :

$$A'_i = A'_{|E'_i} \qquad E'_i \longrightarrow E'_i.$$

Il est évident que : $A'_n = A'_{|E'_n}$ est nilpotent de rang au maximum n. Si E'_1 est engendré par le vecteur non nul $\{v\}$, alors quelque soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$E'_1 = span\,\{v\}$,
$E'_2 = span\,\{v, A'v\}$,
$E'_3 = span\,\{v, A'v, A'^2v\}$,
$\vdots$
$E'_n = span\,\{v, A'v, ..., A'^{n-1}v\}$.

Si on dénote par $U_n = \{v, A'v, ..., A'^{n-1}v\}$ alors A'_n admet une **représentation matricielle de Jordan** d'une seule valeur propre zéro de la forme :

$$A'_n = U_n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} U_n^{-1},$$

tel que

$$(A'_n)^n = 0,$$

par récurrence, on montre pour $n+1$:

$$
\begin{aligned}
A'_{n+1} &= U_{n+1}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline & 0 \\ & \vdots \\ A'_n & \vdots \\ & 0 \\ & 1 \\ \hline 0 \ \cdots \ \cdots \ 0 \ 0 & 0 \\ \hline \end{array}\right)U_{n+1}^{-1} \\
&= U_{n+1}\left(\begin{array}{|ccccc|c|}\hline 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}\right)U_{n+1}^{-1},
\end{aligned}
$$

d'où

$$(A'_{n+1})^{n+1} = 0$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$, $(A'_n)^n = 0$.

D'où l'opérateur quasi-nilpotent A' admet une représentation de Jordan selon la partition (P) de E' sous la forme :

$$
A' = U\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}U^{-1}.
$$

Remarque 4.2.1 *Il est claire que la partition (P) est une chaîne maximale car elle vérifie les trois conditions d'une chaîne simple.*

4.2.3 Ensemble d'opérateurs qui commutent avec un opérateur quasi-nilpotent positif

Théorème 10 *Soient E' un treillis de Banach, A' un opérateur compact quasi-nilpotent positif dans E', (P) une partition de E' selon A'. Les opérateurs B' qui sont $A'-$similaires et qui commutent avec A', admettent une représentation matricielle triangulaire supérieure de dimension infinie (selon la même partition (P) de E' qu'on a considéré pour A'), de la forme suivante :*

$$U\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n & \cdots \\ 0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_2 & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 & \ddots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}U^{-1},$$

tels que $a_1, a_2, a_3, ...$ sont des paramètres arbitraires.

Démonstration.

Soit E' un triellis de Banach tel que A' un opérateur compact quasi-nilpotent positif. D'après la proposition 4.2.1, A' admet une décomposition spectrale qui nous permet de définir pour chaque sous-matrice finie A'_n l'ensemble de toutes les matrices B'_n qui sont définies dans le même sous-espace invariant que A'_n et B'_n admettent une représentation matricielle triangulaire supérieure où les éléments de toutes les directions parallèles à la diagonale principale sont égaux (D'après la Proposition 3.2.1).

$$A'_n = U_n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} U_n^{-1}, \quad B'_n = U_n \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \end{pmatrix} U_n^{-1},$$

nous pouvons démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$

$$[A'_n, B'_n] = 0,$$

il est clair que pour un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ la relation $[A'_n, B'_n] = 0$ est satisfaite, et pour $n+1$ on écrit A'_{n+1}, B'_{n+1} sous la forme :

$$A'_{n+1} = U_{n+1}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right) U_{n+1}^{-1},$$

$$B'_{n+1} = U_{n+1}\left(\begin{array}{cccc|c} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & a_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & a_n \\ \vdots & & \ddots & a_2 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_2 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \end{array}\right) U_{n+1}^{-1},$$

qui satisfont

$$\left[A'_{n+1}, B'_{n+1}\right] = 0,$$

alors, nous pouvons dire $\forall n \in \mathbb{N}^\star$:

$$[A'_n, B'_n] = 0.$$

Si on écrit :

$$B' = \lim_{n\to\infty} B'_n = B'_\infty,$$

alors,

$$[A', B'] = 0.$$

Exemple 3 *Soit ℓ^2 l'ensemble de suites $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\mathbb{R}$, et sa norme est définie par :*

$$\|X\| = \sqrt{\sum_n |x_n|^2}.$$

Et T est un opérateur quasi-nilpotent positif défini par :

$$\begin{array}{rccc} T: & \ell^2 & \longrightarrow & \ell^2 \\ & X & \longmapsto & TX, \end{array}$$

tel que :

$$TX = \left(\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots\cdots, \frac{x_n}{n}, \cdots\right),$$

et qui admet dans la base canonique $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ *la représentation matricielle suivante :*

$$TX=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \cdots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & & & & & 0 & \frac{1}{n} & \ddots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix},$$

on a

$$\left\|T^k\right\|=\frac{1}{(k+1)!},$$

d'où

$$\lim_{k\to\infty}\left\|T^kX\right\|^{\frac{1}{k}}=0.$$

En appliquant la proposition 4.2.1, il existe une base $U=\{v,Tv,T^2v,...,T^nv,...\}$*, tel que* T *admet la représentation matricielle de Jordan suivante :*

$$T=U\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 & & \\ 0 & & & & & 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}U^{-1},$$

d'où l'ensemble de matrices qui commutent avec T *sont de la forme :*

$$U\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n & \cdots \\ 0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_2 & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 & \ddots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}U^{-1},$$

tels que $a_1,a_2,a_3,....$ *sont des paramètres arbitraires.*

Conclusion *D'après les sections* 4.1 *et* 4.2*, nous pouvons conclure ce qui suit : Si A est un opérateur compact avec une partie quasi-nilpotente positive dans un espace de Banach E, alors A peut être écrit sous la forme $A = \overset{n}{\underset{i}{\oplus}} A_i \oplus A'$ et $E = \overset{n}{\underset{i}{\oplus}} E_i \oplus E_0$ (voir Proposition 4.1.1) tel que $A_i = A_{|E_i}$ et $A' = A_{|E_0}$ est la partie quasi-nilpotente de A, alors on peut définir dans E tous les opérateurs B tels que $B = \overset{n}{\underset{i}{\oplus}} B_i \oplus B'$ et $BE_i \subset E_i$ (voir Théorème 9 et Théorème 10) satisfaisant $[A, B] = 0$.*

Remarque 4.2.2 *L'opérateur B est compact si et seulement si B' est compact.*

Chapitre 5

Quelques applications

Dans ce chapitre, on présente une application sur le calcul du contrôle optimal dans la dimension finie. Concernant la dimension infinie, on donne une application du calcul du contrôle optimal de l'erreur associée à un observateur. Le problème d'observateur trouve de nombreuses applications dans les domaines de robotique, mécanique, transfert de la chaleur et les processus biochimiques (voir [DO], [DR2], [EL], [LI], [LGX]).

5.1 Calcul du contrôle optimal en dimension finie

Nous considérons le système bilinéaire contrôlé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &=& Ax(t) + u(t)Bx(t) \\ x(0) &=& x_0, \end{cases}$$

où A et B sont données comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & e & f \\ 0 & a & 0 & e \\ j & k & c & d \\ 0 & j & 0 & c \end{pmatrix},$$

on détermine le contrôle $\hat{u}(t)$ qui minimise la fonctionelle :

$$J(u) = \int_0^T u^2 dt + \langle x(T), x(T) \rangle .$$

Comme $[A, B] = 0$, alors d'après le théorème 6 $\hat{u}$ est une constante :

$$\hat{u} = \text{const},$$

et

$$x(t) = x_0 e^{(A+\hat{u}B)t}.$$

Le contrôle optimal doit minimiser $J(u)$, d'où $\hat{u}$ est solution de l'équation :

$$2\hat{u} + \left\langle e^{(A+\hat{u}B)T} x_0, [B + B^\star] \, e^{(A+\hat{u}B)T} x_0 \right\rangle = 0.$$

5.2 Contrôle optimal de l'erreur associée à l'observateur en dimension infinie

Considérons un système bilinéaire contrôlé observé :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &=& \Delta x(t) + A(t)u(t) + B(u(t), x(t)) \\ x(0) &=& x_0 \\ y(t) &=& Cx(t), \end{cases} \tag{5.1}$$

tels que $u \in L^2([0,T],\mathbb{R})$, E est un espace de Hilbert et C est un opérateur linéaire borné dans E.

Nous supposons que $\Delta \in L(D(\Delta);E)$, $(D(\Delta) =$ domaine de $\Delta)$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement contenu $G(t)$, nous rappelons que :

$$G(0) = Id \qquad \text{et} \qquad \|G(t)\| \leq M.$$

Pour un système de type (5.1), un observateur "classique", qui est une généralisation de la situation des systèmes linéaires en dimension finie, est le suivant (voir [GXB], [GXL]) :

$$\begin{cases} \dot{\widehat{x}}(t) &= \Delta\widehat{x}(t) + A(t)u(t) + B(u(t),\widehat{x}(t)) - \widehat{K}(C\widehat{x}(t) - y(t)) \\ \widehat{x}(0) &= \widehat{x}_0 \\ \widehat{y}(t) &= C\widehat{x}(t). \end{cases}$$

L'objectif est de donner une estimation $\widehat{x}(t)$ de l'état $x(t)$ du système initial, telle que l'erreur :

$$\varepsilon(t) = \widehat{x}(t) - x(t),$$

qui tend vers zéro quand t tend vers l'infini, l'équation d'erreur dans ce cas est :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} &= \Delta\varepsilon + B(u,\varepsilon) - \widehat{K}C\varepsilon \\ \varepsilon(0) &= \varepsilon_0 \\ \widehat{y} - y &= C\varepsilon. \end{cases} \tag{5.2}$$

Soit $\Delta' = \Delta - \widehat{K}C$, alors le système (5.2) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}(t) &= \Delta'\varepsilon(t) + B(u(t),\varepsilon(t)) \\ \varepsilon(0) &= \varepsilon_0 \\ \widehat{y}(t) - y(t) &= C\varepsilon(t), \end{cases} \tag{5.3}$$

avec les notations, $C^{\star}C \in \mathcal{L}(E)$ et $\Delta' \in L(D(\Delta), E)$. Il découle de [CP] et [PA] que $\Delta' = \Delta - C^{\star}C$ un générateur d'un semi-groupe continu $S(t)$ sur E satisfaisant :

$$\|S(t)\| \leq Me^{M\|C\|^2 t} = M_1.$$

– **Application.**
Considérons le cas où :

$$J(u) = \int_0^1 \|u\|^2 \, ds + \|\varepsilon(1)\|^2 ,$$

on suppose que $B(u(t), \varepsilon(t)) = u(t)B\varepsilon(t)$, tel que B un opérateur linéaire de rang fini, qui est défini par :

$$B = B_1 \oplus B_0 = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline B_1 & 0 \\ \hline 0 & B_0 \\ \hline \end{array} \right),$$

tel que $B_1 \in M_{5,5}(\mathbb{C})$ et B_0 est un bloc nul de dimension infinie :

$$B_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si Δ' est défini tel que le crochet de Lie $[\Delta', B]$ est nul, alors selon le théorème 6, il existe un contrôle constant optimal qui minimise la fonctionnelle J. D'après le théorème 8, toutes les matrices qui commutent avec B sont de la forme :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & \\ 0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & \\ \hline & & 0 & & & 0 \end{array}\right),$$

nous choisissons Δ' de la forme :

$$\Delta' = \Delta'_1 \oplus \Delta'_0 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & & 0 & & & 0 \end{array}\right),$$

tel que Δ'_0 est un bloc infini nul.

On détermine le contrôle optimal $\bar{u}$ du problème (5.3) qui est une constante, solution de l'équation : :

$$2\bar{u} + \varepsilon_0^t[\exp(\Delta' + \bar{u}B)]^t\,[B + B^*]\,[\exp(\Delta' + \bar{u}B)]\varepsilon_0 = 0, \tag{5.4}$$

pour $\varepsilon_0^t = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, ...)$, tel que :

$$\exp(\Delta' + \bar{u}B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} e^{-2} & e^{-2}\left(\bar{u}+1\right) & \frac{e^{-2}}{2}\left(\bar{u}+1\right)^2 & 0 & 0 & \\ 0 & e^{-2} & e^{-2}\left(\bar{u}+1\right) & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & e^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-3} & e^{-3}\left(\bar{u}+1\right) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-3} & \\ \hline & & 0 & & & I_\infty \end{array}\right),$$

et (5.4) est équivalent à :

$$\bar{u}^3 + 6\bar{u}^2 + (2e^4 + 2e^{-2} + 15)\bar{u} + 4e^{-2} + 14 = 0,$$

la solution est :

$$\bar{u} = -0.117\,48,$$

et

$\varepsilon(t) = e^{(\Delta+\bar{u}B)t}\varepsilon_0$
$\varepsilon(t){=}e^{-2t}(\ 1 + 0.882\,52t + 0.389\,42t^2\ ,\quad 1 + 0.882\,52t\ ,\quad 1\ ,\quad (1 + 0.882\,52t)e^{-t}\ ,$
$\quad e^{-t}\ ,\quad 0\ ,\quad 0\ ,\quad ....\ )$

tel que $\varepsilon(t)$ tend vers zéro quand t tend vers l'infini.

Conclusion et perspectives

Les systèmes de contrôle bilinéaires constituent une classe importante et particulière des systèmes non-linéaires. En dimension finie, il est bien connu que le principe du maximum de Pontryagin (PMP) donne une condition nécessaire d'optimalité. A priori, en dimension infinie, il n'existe pas d'analogue au (PMP). Dans un travail récent (voir [PP]), les auteurs ont proposé une méthode permettant de donner une expression explicite du contrôle optimal pour une classe de systèmes de contrôle de la forme $\dot{x}(t) = Ax + u(t)Bx$ et dont l'algèbre de Lie engendrée par les opérateurs A et B est nilpotente pour le crochet $[A, B] = AB - BA$.

Cette thèse s'inscrit dans cette problématique et a pour principal objectif de construire des algèbres de Lie nilpotentes de rang un, pour des opérateurs bornés en dimension infinie.

Le problème alors est le suivant :

Construire explicitement un opérateur B qui commute avec un opérateur donné A de dimension finie ou de rang fini ou bien compact. Ces constructions sont basées sur les résultats de Gantmacher [GA]. L'idée est de définir l'ensemble des matrices qui commutent avec une matrice donnée en dimension finie. Ces résultats sont généralisés en dimension infinie, dans les situations suivantes :

- Cas d'un **opérateur de rang fini** qui admet une représentation matricielle quasi-diagonale.

- Cas d'un **opérateur compact** dans un espace de Banach avec **une partie quasi-nilpotente positive**. Cet opérateur admet un ensemble dénombrable de valeurs propres non nulles, qui s'accumulent au point zéro.

Sur la base de ces différents résultats, **Les perspectives sont les suivantes** :

- Dans la pratique, un grand nombre de phénomènes sont modélisés par des opérateurs **non bornés**, par exemple l'équation de la chaleur. Un projet intéressant est de généraliser les résultats obtenus pour le cas des opérateurs non bornés.

- Un autre projet est de généraliser l'étude à des rangs supérieurs, c'est à dire de construire une algèbre de Lie nilpotente **de rang deux et plus**.

- Il est aussi très utile d'appliquer les résultats obtenus à d'autres problèmes issus de phénomènes concrets.

Bibliographie

[AAB] Y. A. Abramovich, C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Invariant subspaces for positive operators acting on Banach space with basis,* American Mathematical society, Vol. 123,N 6, 1995.

[AB1] A. Aib, N. Bensalem, *Optimal control problem gouverned by an infinite dimensional one-nilpotent bilinear systems,* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Romanie, Tome (52), Vol 103, N 2, 2012.

[AB2] C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Positive compact operators on Banach lattices*, Math. Z. 174, 289-298 by Springer 1980.

[AFP] C. Apostol, C. Folas, C. Pearcy, *That quasinilpotent operators are norm limits of nilpotent operators revisited*, American mathematical society, Vol. 73, N 1, 1979.

[AG] Z. Aganovic, Z. Gajic, *Linear optimal control of bilinear systems,* Berlim-New York 1995.

[AN] N. Andreev, *Differential geometric methods in control theory.* Automatic and Remot control,10, 5-46, 1982.

[AR] W. Arveson, *A short cours on spectral theory*, Springer 2002.

[BBP] A. Berrabah, N. Bensalem, F. Pelletier, *Optimality problem for infinite dimensional bilinear systems*, Bull des Scie math. 130, 442-466, 2006.

[BE] B. Beausamy, *Introduction to operator theory and invariant subspaces*, North-Holland Mathematical Library 1988.

[BEN] A. Bensoussan, *Observateurs et Stabilité, Proceedings du Symposium sur la Stabilité*, édité par l'Académie Nationale Francaise de l'Air et de l'Espace, 73-85, 1987.

[BG] D. Bakic, B. Guljas, *A note on compact operators and operator matrices*, Mathematical communications 4, 159-165, 1999.

[BMS] J. M. Bal, J. E. Marsden, M. Slemrod, *Controllability of distributed bilinear systems*, SIAM J. Control Optim, (6), 575-597, 1982.

[BL] A. G. Butkovsky, A. ja. Lerner, *Optimal control systems with distributed parameters*, Avtomatika telemekhanika, 21, 682-691, Russian 1960.

[BRU] C. Bruni, *On the mathematical models of bilinear systems*, Ricerche di Auto-matica 2, 11-26, 1971.

[BRO] R. Brockett, *Finite and infinite dimensional bilinear systems*, Journal of the franklin Institute,301, 509-520, 1976.

[BS] A. Butkovsky, YU. Samoilenk, *Control of quantum-mechanical processes and systems*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands 1990.

[CO] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, Springer 1990.

[CP] R. F. Curtain and A. J. pritchard, *Infinite dimensional linear systems theory,* Springer-Verlag, New York, 1978.

[DE] David L. Elliott, *Bilinear control systems : Matrices in action*, Springer 2009.

[DO] D. Dochain, *Contribution to the analysis and control of distributed parameter systems with application to (bio)chimical processes and robotics,* Thèse. Univ. Cath. Louvain, Belgium 1994.

[DR1] R. Drnovsek, *Triangularizing semigroups of positive operators on an atomic normed Riesz space*, PEMS(2000) 43, 43-55, 1997.

[DR2] S. Dolecki, D. L. Russell, *A general theory of obsevation and control*, SIAM J. Control Optim, 15(2), 1977.

[EL] N. EL Alami, *Analyse et commande optimale des systèmes bilinéaires à paramètres distribués - Application aux procédés énergétiques,* Thèse. Univ. de Perpignan, France 1986.

[EG1] Yu. V. Egorov, *Optimal control in Banach spaces*, Dokl. Acad. Nauk SSSR.150, 241-244, Russian 1963.

[EG2] Yu. V. Egorov, *Certain problems in optimal control theory*, USSR Comput. Math. Phys, 3, 1209-1963 Russian 1963.

[GA] F. R. Gantmacher, *Théorie des matrices*, Tome I, Dunod, Paris 1966.

[GXB] J. P. Gauthier, C. Z. Xu and A. Bounat, *An observer for infinit-dimensional skew-adjoint bilinear systems,* J. Math. Systems Estim. Control 5, 119-122, 1995.

[GXL] J. P. Gauthier, C. Z. Xu and P. Ligarius, *An observer for infinit-dimensional dissipative bilinear systems,* Comput. Math. Appl. 29 N° 7, 13-21, 1995.

[HP] C. B. Huijsmans, B. D. Pagter, *Positive compact quasinilpotent operators*, Arch Math, Vol. 47, 537-544, 1986.

[IK] A. Isidory, A. Krener, *On the syntesis of linear input-output responses for nonlinear systems*, Syst. Control. Lett 4 (1), 17-22 1984.

[JU] V. Jurdjevic, *Optimal control, geometry and mechanics,* Mathematical control theory, 227-321, Springer, New York 1998.

[KU] C. S. Kubrusly, *An introduction to models and decompositions in operator theary*, Birkhauser Boston, 1997.

[KR73] A. Krener, *On the equivalence of control systems and the linearization of nonlinear systems*, SIAM. J. Contr 11, 670-676, 1973.

[KR75] A. Krener, *Bilinear and nonlinear realizations of input-output maps*, SIAM. J. Contr 13 (4), 827-834, 1975.

[KR98] A. Krener, *Feedback linearization*, Math Contr theory, 86-98, Springer. Verlag, New York 1998.

[LN] K. B. Laursen, M. M. Neumann, *An introduction to local spectral theory*, Oxford Science Publications 2000.

[LI] P. Ligarius, *Observateurs de systèmes bilinéaires à paramètres répartis - Application à un échangeur thermique,* Thesis. Univ. of Rouen, France 1995.

[LGX] P. Ligarius, J.P. Gauthier and C.Z. Xu, *A simple observer for distributed systems. Application on a heat exchanger,* J. Math. Systems Estim. Control 8, 1-23, 1998.

[LO] J. Locker, *Spectral theory of non-self-adjoint two-point differential operators*, American mathematical society, Vol 73, 1999.

[MO] R. Mohler, *Bilinear control Processes, with application to Engineering, Ecology and Medicine*, Academic Press, New York 1973.

[ON] S. C. Ong, *What kind of operators have few invariant subspaces*, Linear Algebra and its Applications Vol. 95 181-185, 1987.

[PA] P. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations,* Springer-Verlag, New York, 1983.

[PBG] L. S. Pontryagin, V. G. Bbltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, *The mathematical theory of optimal processes*, ED. Mir, tard. Francaise, 1974.

[PP] M. Popescu, F. Pelletier, *Contrôle optimal pour une classe de systèmes bilinéaires*, Revue Roumaine des sciences techniques, série de mécanique appliquée, tome 50, N°1-3, 2005.

[PY] P. M. Pardalos, V. A. Yatsenko, *Optimization and control of bilinear systems, Theory, Algorithms and Applications*, Springer 2008.

[RH] A. Rhandi, *A short introduction to Banach lattices and positive operators*, Quaderni del Dipartimento di Matematica dell' Università del Salento, 1 / 2002.

[SC] A. Schweinsberg, *The operator equation $AX - XB = C$ with normal A and B*, Pacific journal of mathematics, Vol. 102, N°. 2. 1982.

[SL1] M. Slemrod, *A not on complete controllability and stabilizability for linear control systems in Hilbert space,* SIAM J. Control, 12, 500-508, 1974.

[SL2] M. Slemrod, *Stabilization of bilinear control systems with application to nonconservative problems in elasticity*, SIAM J. Control, 16(1), 1978.

[SO] E.D. Sontag, *Mathematical Control Theory : Deterministic Finite Dimensional Systems,* Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[TA] A. E. Taylor, *Introduction to functional analysis*, John Wiley, New York, 1963.

[WE1] S. H. Weintraubi, *Jordan canonical form theory and practice*, Morgan & Claypool Publishers 2009.

[WE2] J. Weidmann, *Linear operators in Hilbert spaces*, Springer-Verlag New York 1976.

[YA] V. Yatsenko, *Dynamic equivalent systems in the solution of some optimal control problems*, Automatik 4, 59-65, 1984.

[YK] V. Yatsenko, P. C. Knopov, *Parameter estimation of almost periodic signal via controlable bilinear observations*, Aut. Remot. Contr3, 65-70, 1992.