

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



**UNIVERSITÉ FERHAT ABBAS - SETIF1**

**FACULTÉ DE TECHNOLOGIE**

**THÈSE**

**Présentée au Département D'électrotechnique**

**Pour l'obtention du diplôme de**

**DOCTORAT**

**Domaine : Sciences et Technologie**

**Filière: Automatique**

**Option: Automatique**

**Par**

**HADDADJI Yamina**

**THÈME**

**Contrôle des systèmes chaotiques par l'approche synergétique**

**Soutenue le 18/03/2023 devant le Jury:**

<b>M. MOKADDEM Diab</b>	<b>Professeur</b>	<b>Univ. Ferhat Abbas Sétif 1</b>	<b>Président</b>
<b>M. BOUAFIA Abdelouahab</b>	<b>Professeur</b>	<b>Univ. Ferhat Abbas Sétif 1</b>	<b>Directeur de thèse</b>
<b>M. BENAGGOUNE Saïd</b>	<b>Professeur</b>	<b>Univ. Mostefa Benboulaïd Batna 2</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. TAIBI Mahmoud</b>	<b>Professeur</b>	<b>Univ. Badji mokhtar Annaba</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. BOUROUBA Bachir</b>	<b>MCA</b>	<b>Univ. Ferhat Abbas Sétif 1</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. HARMAS Mohamed Naguib</b>	<b>Professeur</b>		<b>Invité</b>

# Remerciements

---

Je remercie **Allah**, le tout puissant, le miséricordieux, de m'avoir appris ce que j'ignorais, de m'avoir donné la santé et tout dont je nécessitais pour l'accomplissement de cette thèse de doctorat.

Je tiens à remercier vivement, Monsieur **Mohamed Naguib HARMAS**, Professeur à l'université Ferhat ABBAS de Sétif 1 pour la proposition du sujet de cette thèse, pour son esprit scientifique et pour ses conseils et ses critiques objectifs tout au long de ce travail.

Merci Monsieur pour la confiance que vous m'avez accordée au cours de ces années d'encadrement.

De même, j'aimerais exprimer ma profonde gratitude et mon entière reconnaissance à mon actuel directeur de thèse Monsieur **BOUAFIA Abdelouahab** Professeur à l'université Ferhat ABBAS de Sétif 1.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur **MOKADDEM Diab**, Professeur à l'université Sétif 1, pour avoir accepté de juger ce travail et présider le jury. Je tiens également à remercier Monsieur **BOUROUBA Bachir** M.C.A à l'université Sétif 1, Monsieur **BENAGGOUNE Said** Professeur à l'université Batna 2 et Monsieur **TAIBI Mohmoud** Professeur à l'université d'Annaba pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail en acceptant de l'examiner.

Enfin, je remercie toute ma famille et tous mes amis (es).

# Dédicace

---

*Je dédie ce modeste travail à:*

*Mon père*

*A la mémoire de ma mère,*

*Ma petite famille, mon mari et mes  
enfants*

*Mes frères et mes sœurs*

*Mes amis et tous ceux qui me sont  
chers*

# Table des matières

---

## Introduction Générale

1.1 Introduction .....	1
------------------------	---

## CHAPITRE 1: Systèmes dynamiques et chaos

1.1 Introduction .....	10
1.2 Systèmes dynamiques .....	11
1.2.1 Systèmes en temps continu .....	12
1.2.2 Systèmes en temps discret .....	12
1.2.3 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs .....	12
1.2.4 Espace de phase .....	13
1.2.5 Espace d'état .....	13
1.2.6 Flot ou système dynamique .....	13
1.2.7 Cycles limites .....	14
1.2.8 Points d'équilibres .....	15
1.2.9 Classification des points d'équilibre .....	15
1.2.10 Section de Poincaré .....	17
1.2.11 Invariance et attraction .....	18
1.2.12 Stabilité et équilibre .....	20
1.2.13 Stabilité des solutions d'équilibre .....	20
1.2.14 Stabilité des systèmes linéaires.....	20
1.2.15 Stabilité des systèmes non linéaires.....	21
1.2.16 La théorie des bifurcations .....	24
1.3 Théorie du chaos .....	29
1.3.1 Définitions du chaos .....	29
1.3.2 Caractérisation de chaos .....	30
1.3.3 Détection du chaos.....	32
1.3.4 Routes vers le chaos .....	33
1.4 Exemples de systèmes chaotiques .....	34
1.4.1 Exemples de systèmes à temps continu .....	34
1.4.2 Système à temps discret .....	35
1.5 Systèmes hyperchaotiques .....	36
1.5.1 Premier système hyperchaotique .....	37
1.6 Contrôle de chaos .....	38
1.7 Conclusion .....	42

## **CHAPITRE 2: Les commandes robustes mode glissant et Synergétique pour des systèmes chaotiques**

2.1 Introduction .....	46
2.2 Commande par mode glissant .....	47
2.2.1 Principes de la commande par mode glissant .....	47
2.2.2 Synthèse de la commande par mode glissant .....	48
2.2.3 Inconvénients de la commande par mode glissant .....	51
2.2.4 Quelques solutions pour le chattering .....	52
2.2.5 Commande par mode glissant des systèmes chaotiques .....	54
2.3 La commande synergétique .....	59
2.3.1 Synthèse de la commande synergétique .....	59
2.3.2 Commande synergétique des systèmes chaotiques .....	61
2.4 Conclusion .....	71

## **CHAPITRE 3: Techniques de Commande Synergétique Avancée des systèmes chaotiques**

3.1 Introduction .....	74
3.2 La commande Adaptative .....	75
3.2.1 Principe de la commande adaptative par une fonction de Lyapunov .....	76
3.2.2 Synthèse de la commande adaptative synergétique pour les systèmes chaotiques.....	76
3.2.3 Résultats de simulation .....	78
3.3 La commande synergétique optimisée par l'essai de particules .....	80
3.3.1 Résultats de simulation .....	83
3.4 La Commande synergétique terminale .....	86
3.4.1 Synthèse de la commande terminale synergétique pour le système chaotique .....	86
3.5 Resultats des tests Hardware-in-the-loop (HIL) .....	90
3.5.1 La validation expérimentale des résultats des tests Hardware-in-the-loop (HIL) .....	91
3.6 Conclusion .....	94

## **CHAPITRE 4: Synchronisation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques par la commande synergétique**

4.1 Introduction .....	97
4.2 Définition de la synchronisation .....	98
4.2.1 Définition générale .....	98
4.2.2 Définition mathématique .....	98
4.3 Types de synchronisation .....	99

4.3.1 Synchronisation complète (CS) .....	99
4.3.2 Anti-Synchronisation .....	99
4.3.3 Synchronisation décalée .....	100
4.3.4 Synchronisation de phase .....	100
4.3.5 Synchronisation projective (PS) .....	101
4.3.6 Synchronisation généralisée (GS) .....	101
4.3.7 Synchronisation Q-S .....	102
4.3.8 Synchronisation FPS .....	102
4.3.9 Synchronisation HPS .....	103
4.4 La synchronisation des systèmes chaotiques et hyper chaotiques à l'aide de l'approche synergétique .....	104
4.4.1 Exemple de système chaotique .....	104
4.4.2 Exemple de système hyperchaotique .....	108
4.5 La synchronisation des systèmes chaotiques et hyper chaotiques par la commande synergétique Terminale .....	119
4.5.1 Exemple de système chaotique .....	119
4.5.2 Synchronisation adaptative de deux systèmes chaotiques identiques de Zhou par synergétique terminale .....	124
4.6 Conclusion .....	133

**Conclusion générale**

Conclusion générale.....	135
--------------------------	-----

# Table des figures

---

## Table des figures:

<b>Figure1. 1</b> Cycle limite .....	13
<b>Figure1. 2</b> Orbite hétérocline et orbite homocline.....	13
<b>Figure1. 3</b> Classification topologique des points d'équilibres.....	14
<b>Figure1. 4</b> Section de Poincaré .....	15
<b>Figure1. 5</b> Attracteur réguliers.....	17
<b>Figure1. 6</b> Signification géométrique de la stabilité asymptotique .....	19
<b>Figure1. 7</b> Diagramme de bifurcation nœud-col.....	24
<b>Figure1. 8</b> Diagramme de bifurcation fourche : (a) super critique, (b) sous critique. ....	25
<b>Figure1. 9</b> Bifurcation transcritique.....	26
<b>Figure1. 10</b> Diagramme de bifurcation Hopf .....	27
<b>Figure1. 11</b> Variation des états dans le temps pour l'attracteur de Rössler.....	29
<b>Figure1. 12</b> Attracteur de Lorenz.....	33
<b>Figure1. 13</b> Attracteur de Hénon, avec $a = 1.4$ et $b = 0.3$ .....	34
<b>Figure1. 14</b> Exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Henon.....	34
<b>Figure1. 15</b> Diagramme de bifurcation de Hénon .....	35
<b>Figure1. 16</b> l'attracteur hyperchaotique de Rössler de 4D .....	36
<b>Figure 2. 1</b> Portrait de phase d'une surface de glissement. ....	44
<b>Figure 2. 2</b> Fonction de <i>signe</i> et quelques fonctions approximatives. ....	49
<b>Figure 2. 3</b> Variation des trois états en fonction du temps pour le système .....	51
<b>Figure 2. 4</b> Comportement chaotique dans l'espace d'état pour le système.....	52
<b>Figure 2. 5</b> Convergence des trois états vers le point d'équilibre $x_{eq} = 0$ . ....	55
<b>Figure 2. 6</b> Comportement chaotique dans l'espace temporel pour l'oscillateur de Duffing..	59
<b>Figure 2. 7</b> Variation de l'état $x_2$ en fonction de l'état $x_1$ de l'oscillateur de Duffing .....	59
<b>Figure 2. 8</b> Convergence des états $x_1, x_2$ vers le point d'équilibre pour l'oscillateur de Duffing .....	61
<b>Figure 2. 9</b> Variation de la loi de commande en fonction de temps pour l'oscillateur de Duffing .....	61
<b>Figure 2. 10</b> Attracteur du système de Genesio-Tesi.....	62
<b>Figure 2. 11</b> Comportement chaotique dans l'espace temporel du système de Genesio-Tesi.	63
<b>Figure 2. 12</b> Convergence des trois états vers le point d'équilibre $x_{eq} = 0$ . ....	65
<b>Figure 2. 13</b> Variation de loi de commande pour le système de Genesio-Tesi .....	65
<b>Figure 2. 14</b> Convergence des états vers le point d'équilibre $x_{eq} = 0$ par la commande synergétique.....	68
<b>Figure 2. 15</b> Variation de loi de commande pour le système plasma à torche par la commande synergétique.....	68

<b>Figure 3. 1</b> Convergence des trois états vers le point d'équilibre $x_{eq} = 0$ .....	75
<b>Figure 3. 2</b> Variation de loi de commande .....	76
<b>Figure 3. 3</b> Les paramètres estimé .....	76
<b>Figure 3. 4</b> Organigramme de l'algorithme d'optimisation par PSO .....	79
<b>Figure 3. 5</b> Evolution de la fonction objective .....	80
<b>Figure 3. 6</b> Evolution des paramètres de contrôle a, b et T .....	81
<b>Figure 3. 7</b> Convergence des trois états vers le point d'équilibre .....	82
<b>Figure 3. 8</b> Evolution de loi de commande .....	82
<b>Figure 3. 9</b> Schéma fonctionnel sur Simulink du système de torche à plasma contrôlé par la commande synergétique Terminale .....	84
<b>Figure 3. 10</b> Convergence des états vers le point d'équilibre $x_{ref} = 0$ .....	86
<b>Figure 3. 11</b> Variation de loi de commande pour le système de torche à plasma .....	87
<b>Figure 3. 12</b> Hardware-in-the-loop (HIL) Simulink temps réel pour le système de torche à plasma .....	89
<b>Figure 3. 13</b> Trajectoire 2D du torche à plasma (HIL) .....	89
<b>Figure 3. 14</b> $x_1, x_2, x_3$ de torche à plasma (HIL, TSC) .....	90

Figure 4. 1	Convergence des états du premier système .....	102
Figure 4. 2	Convergence des états du deuxième système .....	102
Figure 4. 3	Sorties chaotiques maître esclave- synchronisées .....	103
Figure 4. 4	Synchronisation des erreurs $e_1, e_2$ .....	103
Figure 4. 5	Plan de phase du comportement du hyperchaotique du système Zhou .....	105
Figure 4. 6	Synchronisation projective de deux systèmes identiques par la commande synergétique à $\theta=2$ . ....	110
Figure 4. 7	Synchronisation projective des erreurs, $e_1, e_2, e_3, e_4$ .....	110
Figure 4. 8	Synchronisation projective de deux systèmes identiques par la commande synergétique à $\theta=-2$ . ...	111
Figure 4. 9	Synchronisation Projective des erreurs, $e_1, e_2, e_3, e_4$ .....	112
Figure 4. 1	Synchronisation projective de deux systèmes identiques par la commande synergétique à $\theta=1$ . ...	113
Figure 4. 1	Synchronisation Projective des erreurs, $e_1, e_2, e_3, e_4$ .....	113
Figure 4. 12	Synchronisation projective de deux systèmes identiques par la commande synergétique à $\theta=-1$ . ...	114
Figure 4. 1	Synchronisation Projective des erreurs, $e_1, e_2, e_3, e_4$ .....	115
Figure 4. 14	Synchronisation des états avec le contrôle synergique terminal (TSC).....	119
Figure 4. 15	Synchronisation des erreurs par la commande synergique terminale (TSC).....	119
Figure 4. 16	Synchronisation des états par SMC et TSC.....	126
Figure 4. 17	Synchronisation des erreurs par SMC et TSC .....	127
Figure 4. 18	Comparaison des paramètres estimés $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ entre SMC et TSC .....	128

# Liste des tableaux

---

## Liste des tableaux :

<b>Tableau 1.1</b> : Caractérisation d'attracteur .....	31
<b>Tableau4. 1</b> Comparaison du temps de réponse des états entre TSC et SMC.....	128
<b>Tableau4. 2</b> Comparaison du temps de réponse des erreurs entre TSC et SMC.....	129

# Introduction Générale

---

## Introduction :

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse de doctorat en Automatique concernent l'étude de la stabilisation des systèmes chaotiques au point d'équilibre ainsi que la synchronisation de deux systèmes chaotiques et hyperchaotiques à l'aide d'une nouvelle technique appelée commande synergétique.

La dynamique chaotique est considérée comme la troisième découverte majeure de la physique au XXe siècle avec la théorie de la relativité et la mécanique quantique. Semblable aux deux révolutions précédentes, le chaos brise également le canon de la mécanique newtonienne. Les plus passionnés des partisans de la nouvelle science ont dit un jour : "*La relativité, la mécanique quantique et le chaos sont trois choses du vingtième siècle dont la science se souviendra toujours*" [1,2].

La première découverte du comportement chaotique remonte à 1890 lorsque Poincaré, un mathématicien français, a mené une étude approfondie sur le problème des trois corps. Il a découvert que dans le problème du corps humain, l'interaction entre eux montrait une grande complexité et qu'il n'y avait pas de solutions précises. De plus, en appliquant des connaissances pertinentes en dynamique et en topologie, il a découvert que dans une certaine plage, la solution du problème à trois corps était aléatoire [3]. Cette découverte indiquait que même dans un certain système (déterministe), la trajectoire du système pouvait être extrêmement instable, et tout léger changement dans la condition initiale conduirait à des résultats complètement différents. C'est la première fois que de nombreux scientifiques commencent à réaliser qu'il pourrait exister un caractère aléatoire inhérent, c'est-à-dire une dynamique chaotique dans un système déterministe [4,5].

Les années 1960 et 1970 ont été une ère de développement rapide dans le domaine de la recherche sur la dynamique chaotique. Vers 1960, sur la base de l'étude de la stabilité du mouvement dans le système hamiltonien, Kolmogorov, Arnold et Moser ont proposé le célèbre théorème KAM en mécanique hamiltonienne, qui a jeté les bases de la théorie du chaos [6].

En 1963, Lorenz a publié un article influant intitulé "*Flux déterministe non périodique*" dans "*Journal of the Atmospheric Sciences*". Dans cet article, il a proposé un système autonome tridimensionnel (3D) pour décrire le changement climatique. C'est le fameux système de Lorenz qui est le premier modèle de chaos avec une description mathématique. Il a constaté que l'évolution du temps était étroitement liée aux conditions initiales. En d'autres termes, dans un système dynamique déterministe, un léger changement de la condition initiale entraînera une différence significative dans la sortie, ce qui est exactement la caractéristique typique du chaos : une sensibilité élevée à la condition initiale. Il a également donné une belle métaphore connue sous le nom "*effet papillon*" pour décrire ce comportement [7].

En 1964, Sharkovsky a proposé le célèbre théorème sur la coexistence de cycles avec différentes périodes dans une carte continue d'un intervalle en lui-même, et il a également donné l'ordre des périodes [8]. De plus, Hénon a proposé un système dynamique à temps discret bidimensionnel (2D), c'est la carte de Hénon, qui est l'une des cartes chaotiques les plus étudiées. En 1971, D. Ruelle et F. Takens ont publié un célèbre article "*Sur l'essence de la turbulence*", qui a utilisé le chaos pour expliquer la nature de la turbulence pour la première fois. Ils ont découvert que le système dynamique possède un nouvel attracteur particulièrement complexe et l'ont appelé "*attracteur étrange*". Ils l'ont également introduit dans le système dissipatif et ont prouvé que le mouvement lié à cet attracteur étrange est chaotique [9]. Aussi, dans l'étude de la turbulence, Smale a découvert une structure en "*fer à cheval*", c'est-à-dire "*l'attracteur en fer à cheval de Smale*" [10]. Cela peut être vu comme prenant de deux points arbitraires sur une pâte et la pâte est étirée puis pliée en continu, ce qui la rend étroitement imbriquée en elle-même et forme ainsi l'attracteur en fer à cheval de Smale. Cette métaphore figurative révèle la nature complexe du système chaotique. C'est un autre attracteur chaotique important après l'attracteur de Lorenz.

Dans l'article intitulé : "*La période trois implique le chaos*", Li et Yorke ont initié le chaos. Depuis lors, le chaos est officiellement abordé dans le domaine de la recherche [11].

En 1976, May. R a publié un article "*Modèles mathématiques simples avec une dynamique très compliquée*" dans "Nature" [12]. Dans l'article, il a analysé un modèle proie-prédateur, c'est-à-dire une carte logistique qui a d'abord été étudiée par P.J. Myrberg [13]. En outre, il a souligné que la bifurcation et le chaos doublant la période existait dans une carte 1D apparemment simple. Puis, deux ans plus tard, Feigenbaum a proposé deux constantes universelles qui mènent de la bifurcation à doublement de période au chaos : la constante de

convergence  $\delta$  et la constante d'échelle  $\alpha$ , qui ont jeté les bases de l'étude du comportement chaotique des cartes 1D.

En 1989, du point de vue de la topologie, Devaney a donné une autre définition mathématique du chaos, qui indiquait qu'un système chaotique devrait avoir une sensibilité à la condition initiale, à la transitivité topologique et à la densité de points périodiques [14,15]. Jusqu'à présent, la définition de Devaney, le chaos en fer à cheval proposé par Smale et la définition du chaos proposée par Li-Yorke sont considérées comme les trois définitions alternatives du chaos.

Depuis les années 1990, l'étude de la dynamique chaotique s'est développée rapidement. Un certain nombre de travaux de recherche ont été menés pour étudier les propriétés théoriques des systèmes chaotiques [16-17]. De nos jours, la théorie du chaos est importante non seulement dans le domaine de la météorologie, de la turbulence et de la biologie, mais aussi dans de nombreuses autres disciplines, telles que les mathématiques, la physique [18], la chimie [19], l'économie [20, 21], la sociologie, la philosophie, l'ingénierie, les sciences de l'information, etc.

Depuis sa découverte, le chaos a été considéré comme un comportement incontrôlable et imprédictible : Incontrôlable parce que une petite perturbation peut conduire le système à un état totalement différent du premier; Imprédictible parce que une petite différence dans les conditions initiales ou dans les paramètres du système provoque une évolution différente dans la trajectoire du système. Le premier pas dans le domaine de contrôle du chaos a été fait en 1989 [22], mais c'est Ott, Grebogi et York en 1990 qui publient le premier article sur le contrôle du chaos [23]. Ils ont montré qu'une telle dynamique complexe pouvait être stabilisée par une méthode simple et efficace, ce qui a vraiment intéressé les chercheurs du domaine. Pendant le même temps, Pecora et Carroll ont travaillé sur la synchronisation du chaos. Ils ont montré que malgré la dynamique très complexe des systèmes chaotiques, il était possible de les synchroniser, même s'ils évoluaient initialement de deux états différents [24].

Le terme "*contrôle du chaos*" est utilisé principalement pour dénoter la région d'interface d'étude entre la théorie du contrôle et la théorie des systèmes dynamiques étudiant les méthodes de contrôle des systèmes déterministes avec un comportement chaotique non régulier. Le problème de contrôle du chaos a attiré l'attention des chercheurs et des ingénieurs. Son progrès est remarqué essentiellement sur les techniques de conception de commande des classes des processus dynamiques non linéaires. Le concept du contrôle du chaos s'est installé dans le

jargon de la physique moderne pour signifier que tout processus ou mécanisme dans un système dynamique qui permet :

- d'améliorer le chaos où le stabiliser quand celui ci est bénéfique.
- de le supprimer complètement quand il est nocif.

Parallèlement aux travaux sur le chaos, une autre branche développée dans le domaine des systèmes dynamiques attire l'intérêt des chercheurs scientifiques, c'est la synchronisation. Ce phénomène est devenu un sujet de recherche actif lié au développement de la télécommunication. Il a connu des améliorations très remarquables au début du XX<sup>ème</sup> siècle.

La synchronisation est définie comme étant un problème qui consiste à concevoir un système dit esclave dont le comportement imite un autre système (système maître).

Certains travaux de recherche concernant l'application de la synchronisation du chaos dans les communications sécurisées, où le signal chaotique est utilisé pour masquer les messages à transmettre, sont publiés dans la littérature. Perez et Cerderia [25] ont prouvé que le masquage des messages par un système chaotique normal (possédant un seul exposant de Lyapunov positif) n'était pas toujours efficace. Puis, Pecora a montré que ce problème pouvait être résolu en utilisant un système chaotique de dimension élevée c'est-à-dire avec plusieurs exposants de Lyapunov positifs. Ceci a conduit aux travaux sur l'hyperchaotification. Le comportement dynamique des systèmes hyperchaotiques est plus compliqué que celui d'un simple système chaotique. C'est pour cette raison que ces systèmes offrent plus de sécurité dans le domaine de la communication.

Dans la littérature, plusieurs types de synchronisation sont présentés tels que la synchronisation complète [26], l'anti-synchronisation [26], la synchronisation généralisée [27], la synchronisation projective [28], la synchronisation décalée [29] et la synchronisation Q-S [30], etc. À l'aide de ces types de synchronisation, plusieurs méthodes de contrôle ont été appliquées pour réaliser la synchronisation, à savoir le contrôle continu [31], le contrôle adaptatif [32], le contrôle par mode glissant [33]. ).

Parmi les techniques robustes de contrôle utilisées principalement dans cette thèse, on retrouve la commande par mode glissant (SMC). Cette commande a connu un essor considérable durant les dernières décennies [34]. Techniquement, il s'agit d'une loi de contrôle discontinue à rétroaction d'état variant dans le temps permettant un comportement robuste du système en boucle fermée. Lorsque le système commandé est en régime de mode glissant, sa

dynamique devient alors moins sensible aux variations paramétriques, aux erreurs de modélisation et à certaines perturbations externes [35].

Une autre approche robuste de contrôle, similaire à la technique de contrôle par mode glissant, est la commande synergétique qui s'articule sur un concept commun avec le SMC à savoir l'imposition d'une dynamique préconçue par le concepteur mais dépourvu du problème de broutement. Cette approche robuste est basée sur le principe de forcer un système sous contrôle à fonctionner selon une contrainte de conception présélectionnée. Basée sur une loi de commande continue et une macro-variable qui peut être une simple combinaison de variables d'état, la commande synergétique est plus adaptée à une implémentation temps réel. Le principal avantage de cette approche est qu'une fois que les états du système atteignent l'attracteur, la dynamique du système reste insensible à une classe de variations de paramètres et aux perturbations externes [36,37]. Grâce aux hautes performances de la technique de contrôle synergétique, plusieurs articles de recherche ont été publiés dans la littérature. Cependant, dans une grande partie de ces recherches, la loi de commande synergétique a été conçue sur la base d'une analyse de stabilité asymptotique où les trajectoires du système évoluent vers un attracteur spécifié atteignant l'équilibre en un temps infini [38,39].

Notre contribution à travers le travail de recherche développé dans le cadre de cette thèse concerne la proposition et l'élaboration de nouvelles stratégies pour le contrôle et la synchronisation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques. Elle porte sur les points suivants :

- L'application de la commande robuste par mode glissant pour le contrôle des systèmes chaotiques.
  - Contrôle des systèmes chaotiques par le biais de la commande robuste synergétique et synergétique terminale. Cette dernière assure une convergence en temps fini réduisant ainsi rapidement les erreurs statiques.
  - L'étude des différents problèmes de synchronisation des systèmes chaotiques.
  - L'application de la commande robuste synergétique pour la synchronisation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques.
  - Le développement d'une méthode adaptative basée sur la commande synergétique terminale pour la synchronisation des systèmes hyperchaotiques à paramètres inconnus.
- Les différents développements théoriques et les résultats obtenus durant ce travail de thèse sont organisés en quatre chapitres :

**Le premier chapitre** présente un état de l'art sur les systèmes dynamiques et la théorie du chaos, où nous introduirons une série de définitions qui nous permettront de donner des caractérisations sur le phénomène du chaos. Les propriétés du chaos seront aussi présentées et suivies par les moyens de détection du chaos et les définitions des routes vers le chaos. Nous consacrons la deuxième partie de ce chapitre aux études des différents types de problèmes de contrôle des processus chaotiques, les problèmes de stabilisation et les problèmes du contrôle d'excitation ou génération d'oscillations chaotiques

**Le deuxième chapitre** s'occupe de l'élaboration et la synthèse de la commande par mode glissant et la commande synergétique. Ces deux types de commande sont appliqués à quelques systèmes chaotiques.

**Le troisième chapitre** présente la combinaison de l'approche synergétique avec d'autres techniques avancées pour améliorer les performances statiques et dynamiques des systèmes chaotiques. A cet effet, une technique de commande adaptative synergétique est synthétisée dans le cadre de ce travail. Une autre technique de commande synergétique optimisée par l'essaim de particules est également développée et validée. La commande des systèmes chaotiques par l'approche synergétique terminale est abordée dans ce chapitre. L'application de cette technique de commande garantit une convergence rapide et en temps fini. L'efficacité de l'approche synergétique terminale (TSC) proposée a été prouvée par la méthode de test en temps réel Hardware-in-the-loop (HIL).

**Le quatrième chapitre** est consacré à la théorie de la synchronisation des systèmes chaotiques. Dans un premier temps, quelques méthodes de synchronisations chaotiques sont présentées. Ensuite, nous avons appliqué deux méthodes de synchronisation pour un système hyperchaotique par la commande synergétique et synergétique terminale adaptative. Enfin, les deux méthodes de synchronisation développées sont comparées avec un contrôleur basé sur le mode glissant.

Une conclusion générale de ce travail ainsi que des perspectives clôturent ce mémoire.

# CHAPITRE 1

## Systèmes dynamiques et chaos

1.1	Introduction .....	8
1.2	Systèmes dynamiques .....	9
1.2.1	Systèmes en temps continu.....	10
1.2.2	Systèmes en temps discret .....	10
1.2.3	Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs .....	11
1.2.4	Espace de phase .....	11
1.2.5	Espace d'état.....	11
1.2.6	Flot ou système dynamique .....	11
1.2.7	Cycles limites .....	12
1.2.8	Points d'équilibres .....	13
1.2.9	Classification des points d'équilibre .....	14
1.2.10	Section de Poincaré .....	15
1.2.11	Invariance et attraction .....	16
1.2.12	Stabilité et équilibre.....	18
1.2.13	Stabilité des solutions d'équilibre .....	18
1.2.14	Stabilité des systèmes linéaires.....	18
1.2.15	Stabilité des systèmes non linéaires.....	19
1.2.16	La théorie des bifurcations .....	22
1.3	Théorie du chaos.....	27
1.3.1	Définitions du chaos .....	28
1.3.2	Caractérisation de chaos .....	28
1.3.3	Détection du chaos.....	30
1.3.4	Routes vers le chaos .....	32
1.4	Exemples de systèmes chaotiques .....	32
1.4.1	systèmes à temps continu: .....	32
1.4.2	Système à temps discret.....	33
1.5	Systèmes hyperchaotiques.....	35
1.5.1	Premier système hyperchaotique : .....	36
1.6	Contrôle de chaos .....	36
1.7	Conclusion .....	40

---

## 1.1 Introduction

Avant les années 1970, l'étude des systèmes dynamiques était cantonnée à un domaine relativement limité des mathématiques et de la physique mathématique. Depuis, elle est devenue une discipline qui est aujourd'hui l'une des plus importantes de la physique mathématique comme de la physique théorique et expérimentale. Elle comporte également des applications appartenant à d'autres domaines, allant de la chimie à la statistique des populations, lorsque l'on s'est aperçu de l'importance et de l'étendue des domaines où la notion de stabilité des systèmes dynamiques intervenait. L'avènement de l'étude, à l'aide d'ordinateur, de systèmes dynamiques même simples (comme ceux de JULIA et MANDELBROT), a permis de mieux les comprendre. C'est en 1975 exactement que Tien-Yien LI et James A. YORKE ont introduit le mot CHAOS avec le sens qu'on lui connaît maintenant en mathématique [11].

La dynamique chaotique présente un comportement de type aléatoire. Ce type de caractère aléatoire n'est pas induit par une entrée aléatoire externe mais par le système lui-même. Contrairement à d'autres systèmes déterministes connus, l'orbite d'un système chaotique est imprévisible à long terme. Bien que le comportement chaotique soit apparemment désordonné, il a une structure ordonnée à l'intérieur. La dynamique chaotique est un phénomène omniprésent dans la nature. Cependant, il n'y a pas encore de définition universellement acceptée du chaos. Les définitions existantes sont données en termes mathématiques.

Les problèmes du chaos et du contrôle du chaos ont fait l'objet des études intenses durant les deux dernières décennies. Le terme contrôle du chaos est principalement utilisé pour désigner le domaine d'étude :

- Incluant la théorie du contrôle et la théorie des systèmes dynamiques,
- Etudiant les méthodes de contrôle des systèmes déterministes présentant un comportement chaotique non régulier [40].

Le but de ce chapitre est de donner les notions et les concepts de base des systèmes dynamiques. Quelques propriétés telles que la stabilité et les deux méthodes de stabilité sont présentées. Ensuite, on donne une brève étude quantitative sur le chaos et quelques

caractérisations du chaos. On parle aussi des attracteurs, de la détection du chaos, de l'exposant de Lyapunov et de la dimension fractale. Puis, on passe à la transition vers le chaos et la définition des systèmes hyperchaotiques. On présente également dans ce chapitre les différentes méthodes de contrôle de chaos.

## 1.2 Systèmes dynamiques

Un système dynamique décrit par une fonction mathématique présente deux types de variables : dynamiques et statiques, les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps, les variables statiques, encore appelés paramètres, du système sont fixes.

Si un système dynamique peut être décrit à l'aide d'un ensemble de fonctions linéaires, il est considéré comme un système dynamique linéaire. Cependant, la plupart des phénomènes dans la nature sont des systèmes non linéaires. Un système dynamique non linéaire est utilisé pour décrire un modèle physique qui peut être représenté par un ensemble d'équations non linéaires telles que des équations algébriques, différentielles, intégrales, fonctionnelles, de différence ou d'opérateurs abstraits [41]. En réalité, les systèmes dynamiques non linéaires peuvent représenter une grande variété de phénomènes scientifiques et techniques. La théorie des systèmes dynamiques non linéaires est très importante pour analyser et résoudre les problèmes dans diverses disciplines, notamment les mathématiques, la physique, la chimie, la biologie, l'économie, la médecine et ingénierie.

Du point de vue mathématique, un système dynamique est défini à partir d'un ensemble de variables qui forment le vecteur d'état  $X = \{x_i \in \mathbb{R}\}, i = 1 \dots n$  où  $n$  représente la dimension du vecteur. Ces variables caractérisent complètement l'état instantané du système dynamique. L'ensemble des variables d'état d'un système permet de construire un espace mathématique appelé "espace des phases".

En plus de l'espace d'état, un système dynamique est défini par une loi d'évolution, généralement désignée par dynamique, qui caractérise l'évolution de l'état du système au cours du temps. La notion de déterminisme provient du fait que le système considéré est complètement caractérisé par son état initial et sa dynamique. L'évolution déterministe du système dynamique peut alors se modéliser de deux façons distinctes :

- Une évolution continue dans le temps : représentée par une équation différentielle ordinaire.

• Une évolution discrète dans le temps : l'étude théorique de ces modèles discrets est fondamentale, car elle permet de mettre en évidence des résultats importants, qui se généralisent souvent aux évolutions dynamiques continues. Elle est représentée par le modèle général des équations aux différences finies.

### 1.2.1 Systèmes en temps continu

La plupart des systèmes dynamiques non linéaires à temps continu peuvent être décrits par une équation différentielle sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = f(x, t, \mu) \quad (1.1)$$

Avec  $f$  un champ de vecteurs.  $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  est appelé vecteur d'état et  $\mu \in V \subseteq \mathbb{R}^p$  vecteur des paramètres. Enfin  $t$  est la variable temporelle.

#### ➤ Systèmes autonomes et non autonomes :

Soit le système dynamique suivant :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = f(x, t) \quad (1.2)$$

Lorsque le champ de vecteurs  $f$  ne dépend pas explicitement du temps, on dit que le système dynamique est autonome. Dans le cas contraire il est non autonome.

Par un changement de variable approprié, on peut toujours transformer un système dynamique non autonome de dimension  $n$  en un système dynamique autonome équivalent de dimension  $n+1$

### 1.2.2 Systèmes en temps discret

La notion de système dynamique présentée au paragraphe précédent peut être étendue aux systèmes en temps discret. On appelle système dynamique discret tout système d'équations algébriques récurrentes défini par :

$$x(k+1) = F(x(k), k) \quad (1.3)$$

D'où  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et  $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . On peut écrire aussi :

$$F^0(x) = x, F^1(x) = F(x), F^2(x) = F(F(x)), \dots, F^k(x) = F(F^{k-1}(x)) \quad (1.4)$$

Et  $x_0, x_1 = F(x_0), x_2 = F^2(x_0), \dots, x_k = F^k(x_0)$ .

### 1.2.3 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs

Chez les physiciens, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale contrairement au système dissipatif qui dissipe de l'énergie. Donc, le premier possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, et l'autre possède au moins un terme dépendant de la vitesse. Mais n'oublions pas que les systèmes considérés sont des systèmes déterministes, alors pour préciser cette définition, on arrive à dire qu'un système déterministe est conservatif, si et seulement si la dynamique du système associée à chaque condition initiale  $x_0$  a un et un seul état final  $x(t)$ . Il faut pour cela qu'il existe une application bijective  $\varphi$  de l'espace des phases

$$\varphi : X * R \rightarrow X$$

$$(x, t) \rightarrow \varphi_t(x) = \varphi(x, t),$$

Qu'on appelle flot et qui possède les propriétés suivantes :

$$\varphi_t(x_0) = x_0,$$

$$\varphi_{t+s}(x_0) = \varphi_t(\varphi_s(x_0)), \text{ pour tout } t, s \in R^+$$

**Remarque 1.1.1** Si le système est dissipatif, le flot n'est pas bijectif et il existe en général un (ou plusieurs) attracteurs dans l'espace des phases du système.

### 1.2.4 Espace de phase

L'espace de phase est un espace souvent multidimensionnel permettant d'interpréter géométriquement l'évolution d'un système dynamique décrit par des équations différentielles par rapport au temps.

### 1.2.5 Espace d'état

L'espace d'état est l'ensemble des coordonnées nécessaires à la description complète d'un système. Cet espace peut être continu ou discret.

### 1.2.6 Flot ou système dynamique

Soit  $M$  un ensemble quelconque et  $G$  un groupe additif ( $R$  ou  $Z$ ). Considérons  $\{\varphi^t\}_{t \in G}$  un groupe à un paramètre d'applications  $M$  dont  $M$  est indexé par le groupe  $G$ .

On appelle flot ou système dynamique le couple  $(M, \{\varphi_t\}_{t \in G})$ . L'ensemble  $M$  précédent constitue l'espace des phases du flot. Tout point  $x$  de cet espace représente un état du système dynamique.

#### ➤ Flot d'un système linéaire

Soit le système linéaire suivant :

$$\dot{x} = Ax \tag{1.5}$$

Ou A une matrice constante. La solution du système (1.5) avec la valeur initiale  $x(0) = x_0$  est  $x(t) = x_0 \exp(At)$ .

**Définition 1.2.1** L'ensemble des applications  $\exp(At) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est appelé le flot du système (1.5)

➤ **Flot d'un système non linéaire**

Soit le système non linéaire suivant :

$$\dot{x} = F(x, t) \tag{1.6}$$

On suppose que les solutions du système (1.6) sont définies pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Le flot du système (1.6) est la famille avec un paramètre d' applications  $\{\varphi(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  de  $\Omega$  dans lui-même définies par  $\varphi_t(a) = x(t, a)$ , pour tout  $a \in \Omega$ ,  $x(t, a)$  est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(X, t) \\ X(0) = a \end{cases}$$

\*  $\varphi_t$  est différentiable sur  $\Omega$ .

\*  $\varphi_0 = Id, \varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} = \varphi_{t_1+t_2}$  pour tout  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_t$  est une bijection de  $\Omega$  et  $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$ .

Alors l'ensemble  $G = (\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  est un groupe à un paramètre de difféomorphisme.

\*  $\frac{d\varphi_t(a)}{dt} = F(a, 0)$  cette formule montre que la donnée du flot  $\varphi_t$  définit le système (1.6)

**1.2.7 Cycles limites**

Un cycle limite est une trajectoire de phase fermée.

**Définition 1.2.2** Un système  $\dot{x} = f(x)$  possèdent un cycle limite C s'il existe un intervalle de temps  $[t_0; t_0 + T]$  et un point de départ  $x_0 \in C$ , tel que en désignant par  $\phi(t)$  la solution de système avec pour condition initiale  $x(t_0) = x_0 = \phi(t_0)$  on dit :

$$\varphi(t) \in C \quad \forall t \in [t_0; t_0 + T]$$

$$\varphi(t) = x_0$$

**1.2.7.1 Classification des cycles limites**

**Définition 1.2.3** Soit C un cycle limite.

1. **Stable**: Si toutes les trajectoires dans un voisinage du cycle  $\rightarrow C$ .

2. **Instable**: Si toutes les trajectoires divergent de  $C$ .

3. **Semi-stable** : Si certaines trajectoires convergent vers  $C$ .

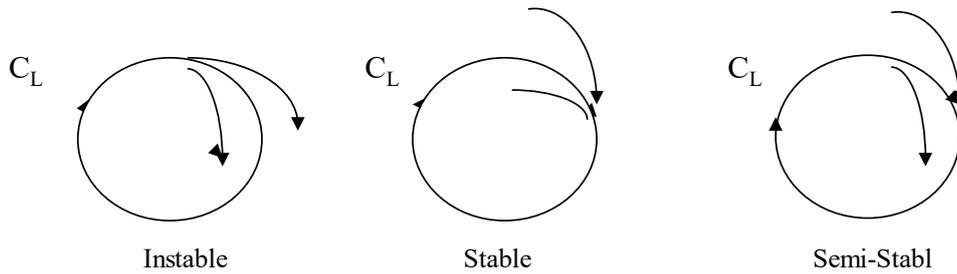


Figure1. 1Cycle limite

### 1.2.8 Points d'équilibres

#### Définition 1.2.4(système continu)

- a) Un point fixe (ou point critique, ou point singulier, ou point stationnaire) de l'équation  $\dot{x}_t = f(x, t, p)$  est un point  $x^*$  de l'espace des phases vérifiant l'équation  $f(x^*) = 0$ . (ou pour tout  $t \in \mathbb{R} : \varphi_t(x^*) = x^*$ ) sinon  $x^*$  est dit point ordinaire.
- b) Un point ordinaire  $x^*$  est dit périodique s'il existe  $T > 0$  tel que  $\varphi_T(x^*) = x^*$ .
- c) Une orbite  $\gamma_{x_0}$  telle qu'il existe deux points d'équilibre  $a$  et  $b$  vérifiant : [42]

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(x_0) = a$  et  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x_0) = b$  est dite orbite hétérocline si  $a \neq b$  et homocline si  $a = b$ .

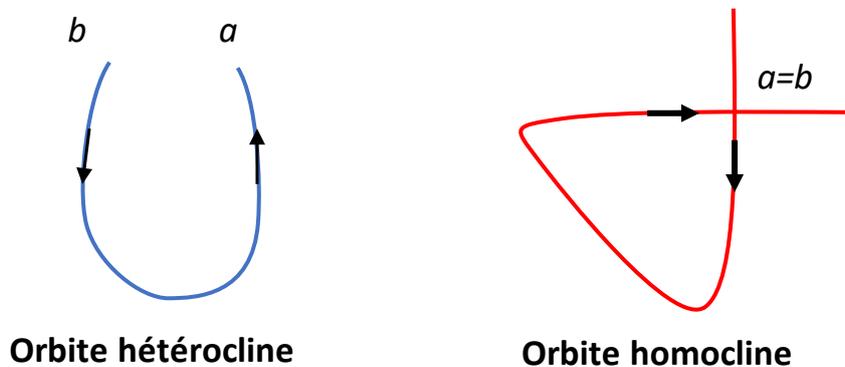


Figure1. 2Orbite hétérocline et orbite homocline

**Définition 1.2.5(système discret)** : Un point d'équilibre d'une application  $\dot{x}_{k+1} = f(x_k, p)$  est un point invariant par  $f$ , c'est-à-dire un point  $x^*$  de l'espace des phases vérifiant l'équation  $f(x^*) = x^*$ . Géométriquement, le point fixe est une intersection de la courbe de la fonction  $y = f(x)$  avec la bissectrice  $y = x$ .

### 1.2.9 Classification des points d'équilibre

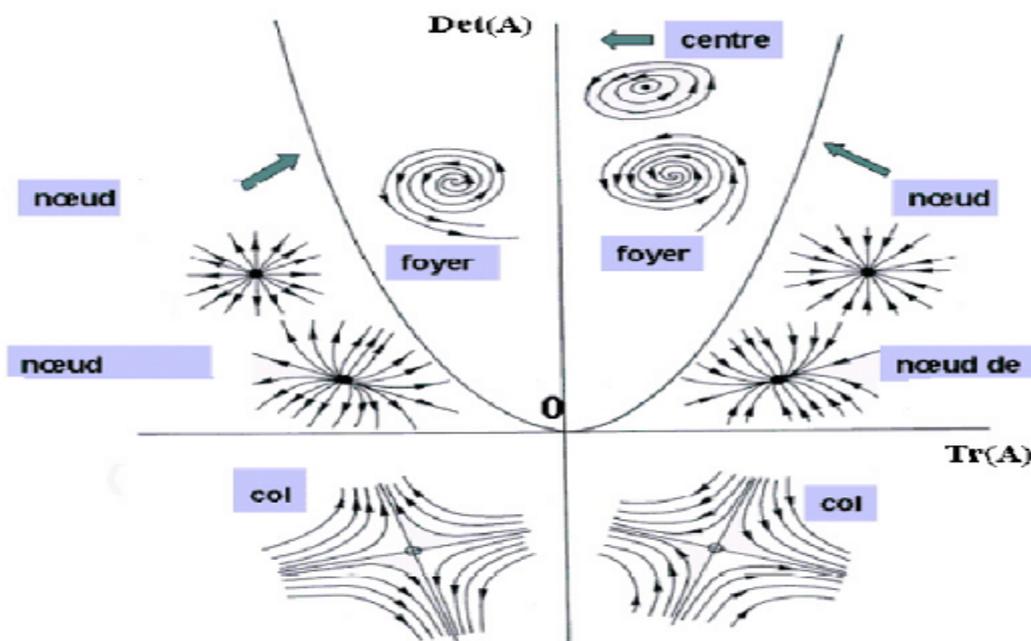
#### 1.2.9.1 Cas des systèmes linéaires

**Définition 1.2.6 :** *Considérons le système linéaire suivant :*

$$\dot{x} = Ax \tag{1.5}$$

Ou  $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$  et  $A$  est une matrice à coefficients constants appartenant à  $R^{n \times n}$  inversible. Soient  $\lambda_i \ i=1; 2; \dots; n$  les valeurs propres de  $A$  : [42]

1. **Point selle (point col) :** si les valeurs propres  $\lambda_i \ i=1 \dots n$  sont réelles, non nulles et de signes différents.
2. **Nœuds :** si les valeurs propres  $\lambda_i \ i=1 \dots n$  sont réelles et de même signe.
3. **Foyer :** si les valeurs propres  $\lambda_i \ i=1 \dots n$  sont complexes avec  $\text{Re } \lambda_i \neq 0, \ \forall i=1; 2; \dots; n;$
4. **Centre :** si les valeurs propres  $\lambda_i \ i=1 \dots n$  sont imaginaires pures.



**Figure 1.3** Classification topologique des points d'équilibres

#### 1.2.9.2 Cas des systèmes non linéaires

Considérons maintenant le système non linéaire décrit par l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x) \tag{1.6}$$

**Définition 1.2.7** Un point critique de  $x^*$  de (1.6) est appelé **puits** si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x^*)$  ont des parties réelles négatives. Il est appelé **sources** si

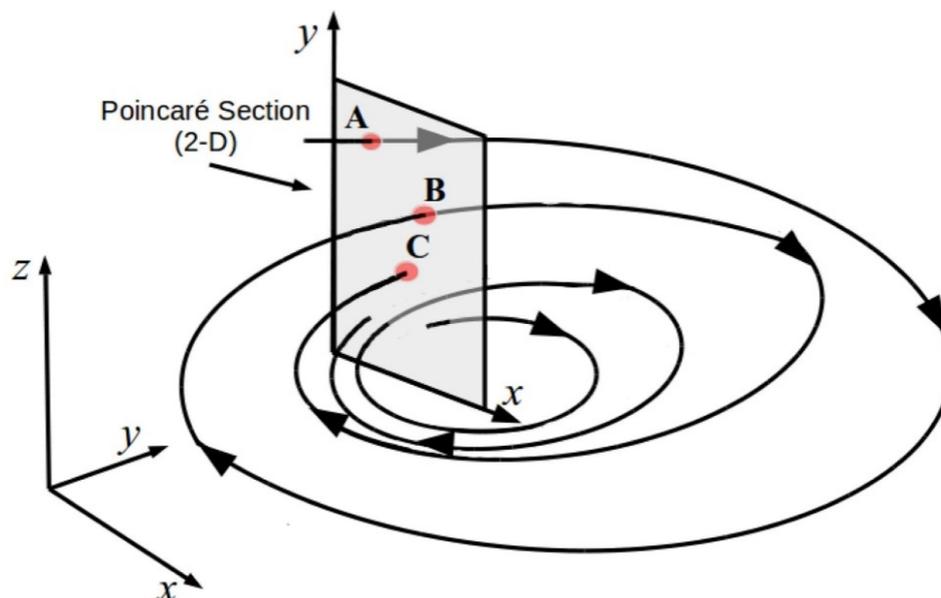
toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x^*)$  ont des parties réelles positives. Il est appelé **selle** s'il est hyperbolique et si  $A = Df(x^*)$  a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive ou au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.[42]

**Théorème 1.2.1** Soit  $\dot{x}(t) = f(x)$  ;  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1$  un système dynamique à temps continu. Si  $x^*$  est un point fixe ( $f(x) = 0$ ), alors si les valeurs propres de  $Df(x^*)$  sont des parties réelles négatives  $x^*$  est stable, et instable si l'une de ces valeurs propres de  $Df(x^*)$  est de partie réelle positive.

### 1.2.10 Section de Poincaré

La section de Poincaré est une technique classique d'analyse des systèmes dynamiques. Elle permet de transformer un système dynamique à temps continu d'ordre  $n$  en un système dynamique discret d'ordre  $(n-1)$ .

Soit un système dynamique continu, décrit dans un espace d'état de dimension  $n$  et la trajectoire de sa solution en  $x_0$ . Définissons dans cet espace une hyper surface de dimension  $(n-1)$ . L'application de Poincaré est le système dynamique en temps discret dont la suite des itérés correspond aux coordonnées des points d'intersection successifs de la trajectoire avec cette surface.



**Figure 1.4** Section de Poincaré

L'ensemble des points d'intersections, situés sur l'hyper surface est appelé section de Poincaré.

La technique de la section de Poincaré offre deux avantages :

- D'une part, la recherche des attracteurs autres que les points fixes est possible et leur étude est simplifiée via les applications.
- Par ailleurs, la représentation des résultats est simplifiée. La description et l'interprétation de la dynamique est notamment plus simple dans le plan que dans l'espace pour des systèmes de dimension trois.

### 1.2.11 Invariance et attraction

#### 1.2.11.1 Ensemble invariant

**Définition 1.2.5** Soit  $E$  une région de l'espace d'état  $R^n$  et  $X(t, X_0)$  une solution de (1.6).  $E$  est un ensemble invariant du flot si : [43]

$$\forall X_0 \in E \subset R^n \text{ et } \forall t \in R, X(t, X_0) \in E \quad (1.7)$$

**Remarque 1.2.1** La trajectoire d'un système autonome dans l'espace d'état est un ensemble invariant.

#### 1.2.11.2 Attracteurs

**Définition 1.2.6** Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est-à-dire, une situation (ou un ensemble de situations) vers lesquelles évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales. Mathématiquement, l'ensemble  $A$  est un attracteur si : [43]

1.  $A$  est un ensemble compact et invariant par le flot  $\varphi(t)$  (c-à-d  $\varphi(A) = A$  pour tout  $t$ )
2. Pour tout voisinage  $U$  de  $A$ , il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que toute solution  $X(t, X_0) = \varphi_t(X_0)$  restera dans  $U$  si  $X_0 \in V$
3.  $\bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(V) = A$
4. Il existe une orbite dense dans  $A$ .

#### 1.2.11.3 Bassin d'attraction

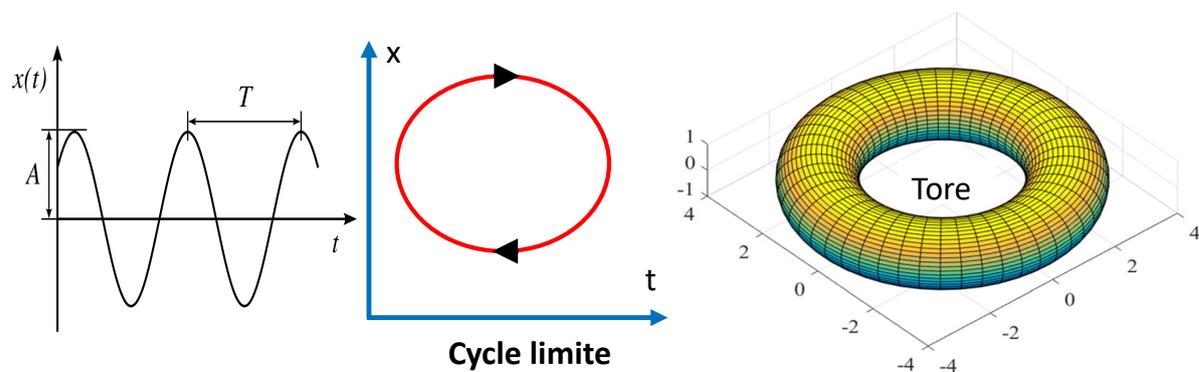
**Définition 1.2.7** Le bassin d'attraction  $B(A)$  de  $A$ , c'est l'ensemble des points dont les trajectoires convergent asymptotiquement vers  $A$  ; donc  $B(A) = \bigcup_{t < 0} \varphi_t(A)$  [43]

#### 1.2.11.4 Les différents types d'attracteurs

Il y a deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

➤ **Attracteurs réguliers** : Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

- **Le point fixe** : C'est le plus simple attracteur. Le système évolue vers un état de repos (point). On distingue seulement deux types d'attracteurs qui sont des points fixes. Il s'agit des nœuds stables et des foyers stables.
- **Le cycle limite périodique** : On appelle cycle limite d'un système dynamique, toute solution périodique isolée dans l'ensemble de toutes les solutions périodiques de ce système.
- **Le cycle limite pseudo-périodique** : Il correspond à une somme de solutions périodiques dont le rapport des périodes est un nombre irrationnel. Un régime quasi-périodique peut être représenté dans l'espace d'état par un tore.



**Figure1. 5** Attracteur réguliers

➤ **Attracteurs étranges** :

Les attracteurs étranges sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques : après un certain temps, tous les points de l'espace des phases (appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur) donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange.

L'attracteur étrange se caractérise par :

1. Sensibilité aux conditions initiales : deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'éloigner l'une de l'autre, ceci traduit un comportement chaotique.
2. La dimension de l'attracteur est fractale et non entière, ce qui justifie l'adjectif étrange.
3. L'attracteur est de volume nul dans l'espace des phases.

### 1.2.12 Stabilité et équilibre

La question de la stabilité et de l'équilibre se posait naturellement en dynamique, depuis les débuts de l'étude du problème à trois corps au milieu du XVIIIe (18ème) siècle (avec Clairaut, sur la figure de la Terre, d'Alembert, Euler, Lagrange, Laplace, Poisson, etc., sur le système solaire dans son ensemble). « La Stabilité à la Poisson » que Poincaré devait privilégier était telle que, bien que sans périodicité au sens strict, le système étant perturbé retourne au voisinage d'une configuration donnée au bout d'un certain temps. Poincaré aborda les problèmes d'équilibre et de stabilité de l'équilibre en 1885, à propos du comportement d'une masse fluide en rotation dans un champ de forces. Mais c'est surtout dans son travail sur « le problème des trois corps et les équations de la dynamique » de 1890, qu'il développa les idées qui sont à l'origine de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires.

### 1.2.13 Stabilité des solutions d'équilibre

Avant de présenter les outils d'analyse de la stabilité des solutions non linéaires statiques, quelques définitions, concernant la classe des systèmes dynamiques non linéaires décrits dans l'espace d'état :

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.7)$$

Où  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un champ de vecteurs analytiques non linéaires.

La stabilité des systèmes dynamiques non linéaires (1.7) est liée aux notions de point d'équilibre et de flot dynamique.

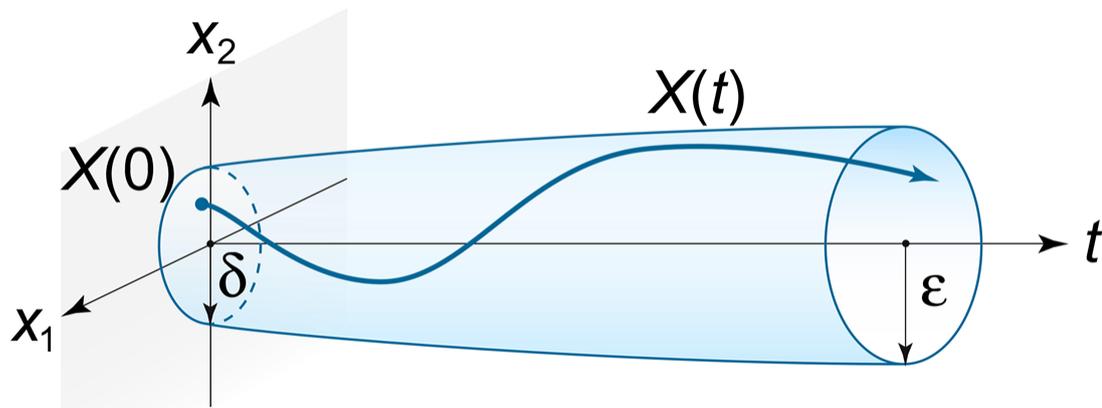
**Définition 1.2.8** *Le point d'équilibre  $x_e$ , appelé aussi point singulier, du système (1.7) est défini par la solution du problème non linéaire statique.*

$$f(x_e) = 0 \quad (1.8)$$

### 1.2.14 Stabilité des systèmes linéaires

Le cas linéaire se définit par la situation particulière où  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  d'où

$$\dot{x} = f(x) = Ax \quad (1.9)$$



**Figure 1.6** Signification géométrique de la stabilité asymptotique

Où  $A$  est une matrice à coefficients constants appartenant à  $R^{n \times n}$ .

- L'origine est toujours un équilibre de cette équation. Mais il peut y en avoir d'autres : tout élément de  $\text{Ker } A$  est un équilibre. L'origine est un équilibre asymptotiquement stable de  $\dot{x} = Ax$  si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  ont des parties réelles strictement négatives.

- Si la matrice  $A$  a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors l'origine n'est pas un équilibre stable de  $\dot{x} = Ax$

**Remarque 1.2.2** on peut donner une condition nécessaire et suffisante de la stabilité : l'origine est un équilibre stable de  $\dot{x} = Ax$  si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  ont de partie réelle négative ou nulle et si pour toute valeur propre de partie réelle nulle, les multiplicités algébrique et géométrique coïncident, (c'est-à-dire  $R^n = E^s + E^c$  et  $A|_{E^c}$  est diagonalisable dans  $C$ ).

### 1.2.15 Stabilité des systèmes non linéaires

Comme souligné précédemment, la propriété de la stabilité des systèmes non linéaires (1.7) est liée à la notion de point d'équilibre, solution de l'équation statique (1.8). Plusieurs solutions peuvent exister donnant lieu à plusieurs points d'équilibre. L'analyse de la stabilité se fait pour chacun de ces points. Deux approches principales sont définies pour traiter de la stabilité des solutions d'équilibre des systèmes dynamiques non linéaires (1.7). La première, appelée approche indirecte de Lyapunov, qui s'appuie sur l'analyse du système linéarisé autour du point d'équilibre  $x_e$  dont on veut analyser la stabilité. La deuxième s'appuie, quant à elle, sur l'analyse directe du système non linéaire en cherchant à lui construire une fonction de Lyapunov, qui est décroissante le long des trajectoires du système à

l' intérieur du bassin d'attraction. Cette procédure définit ce qu'on appelle l'approche directe de Lyapunov.

➤ **Méthode indirecte de Lyapunov**

La méthode indirecte de Lyapunov, pour étudier la stabilité autour d'un point d'équilibre  $x_e$ , consiste à étudier le système linéaire suivant :

$$\dot{x} = Ax \quad (1.10)$$

Avec

$$A = Df(x_e) = \left( \begin{array}{ccc|c} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{x=x_e} \quad (1.11)$$

A est la matrice jacobienne de  $f$  en  $x_e$ , qui s'appelle le linéarisé du système (1.7) au point d'équilibre  $x_e$ . Par un changement de coordonnées, le point fixe de (1.7) se ramène à l'origine ( $f(0) = 0$ ) et le développement de  $f$  en série de Taylor autour de  $x = 0$  donne le développement du premier ordre de Taylor suivant :

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x, x) + \frac{1}{3!}D^3f(0)(x, x, x) + \dots \quad (1.12)$$

Si A possède  $n$  valeurs propres distinctes  $\lambda_i$ ;  $i = 1; 2; \dots; n$  (les valeurs propres de A sont appelées exposants caractéristiques de l'équilibre 0). Alors la solution de (1.10) est :

$$x = \sum_{i=1}^n c_i \exp(\lambda_i t) v_i \quad (1.13)$$

vile vecteur propre associé à  $\lambda_i$  les  $c_i$  ;  $i = 1; \dots ; n$  sont des constantes (déterminées par les conditions initiales). La stabilité du point d'équilibre est analysée en utilisant les résultats du théorème suivant, pour le système (1.10).

1. Si toutes les valeurs propres sont strictement dans le demi-plan complexe gauche alors  $x_e$  est asymptotiquement stable.
2. S'il existe au moins une valeur propre appartenant strictement au demi-plan complexe droit alors  $x_e$  est instable.
3. Si toutes les valeurs propres appartiennent strictement au demi-plan complexe gauche avec au moins une qui soit imaginaire pure ou nulle, alors on ne peut rien dire.

**Définition 1.2.9** Si  $Df_{x_e}$  n'a pas de valeurs propres à partie réelles nulles alors le point d'équilibre  $x_e$  est dit hyperbolique.

**Théorème 1.2.2** Un point d'équilibre hyperbolique est soit asymptotiquement stable soit instable.

**Théorème 1.2.3 (d'Hartman-Grobmann)** Soit  $x_e$  un équilibre hyperbolique. Notons  $\phi_t^L : y \rightarrow e^t Df(x_e)y$  le flot du système linéarisé en  $x_e$ . Alors il existe un homéomorphisme  $h : V_{x_e} \rightarrow V_0$  ou  $V_{x_e}$  et  $V_0$  sont des voisinages respectivement de  $x_e$  et 0 dans  $R^n$  tel que  $\phi_t^L(h(x)) = h(\phi_t(x))$  Partout ou ces expressions ont un sens.

Le théorème de Hartman-Grobman est un résultat important dans la théorie qualitative locale des systèmes différentiels. Il montre qu'au voisinage d'un point équilibre hyperbolique  $x_e$  le système non linéaire suivant:

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.14}$$

a la même structure qualitative du système linéarisé

$$\dot{x} = Df_{x_e}(x) \tag{1.15}$$

Autrement dit, si l'origine est un point selle, foyer ou nœud pour le système (1.15) alors le point équilibre  $x_e$  sera respectivement selle, foyer ou nœud pour le système (1.14).

Cependant, si l'origine est de type centre pour le système (1.15), alors on ne peut rien dire sur la nature du point équilibre  $x_e$  de (1.14).

### ➤ Méthode directe de Lyapunov

**Définition 1.2.10** (Fonction définie positive) Une fonction définie positive est une fonction  $f(x) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) > 0, \forall x \neq 0$  et  $f(x) = 0$  lorsque  $x = 0$ :

**Définition 1.2.11** (Candidat de Lyapunov) Une fonction définie positive continue, notée  $V(x)$ , est un candidat de Lyapunov.

**Définition 1.2.12** (Fonction de Lyapunov) Une fonction de Lyapunov est un candidat de Lyapunov, à savoir une fonction continue  $V(x)$  telle que [42].

$$\forall x \neq 0 \text{ et } V(x) = 0 \quad x = 0$$

Ayant en plus la propriété

$$\dot{V} \leq 0 \quad \forall x \neq 0 \text{ et } \dot{V}(x) = 0 \quad x = 0$$

**Théorème 1.2.4** (Seconde méthode de Lyapunov, dite aussi méthode directe) Si une fonction de Lyapunov existe pour un système donné alors ce système est stable.

Si la fonction de Lyapunov est strictement décroissante, c'est-à-dire que  $V(x) < 0 \forall x \neq 0$  alors la stabilité est en plus asymptotique.

## 1.2.16 La théorie des bifurcations

L'aspect fondamental de l'étude des systèmes dynamiques est la notion de bifurcation. Un terme qui a été introduit par Henri Poincaré au début du XXe siècle dans ces travaux sur les systèmes différentiels. Pour certaines valeurs critiques des paramètres de contrôle du système, la solution de l'équation différentielle change qualitativement : on dit qu'il y a bifurcation. Une première approche pour l'étude des systèmes dynamiques consiste à rechercher les points d'équilibre, c'est-à-dire, les solutions stationnaires ne présentant pas l'évolution temporelle.

### 1.2.16.1 Définitions

Le terme bifurcation est généralement défini, de manière assez vague, comme un changement radical de comportement du système dynamique étudié.

Soit :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu) \quad (1.16)$$

Avec le paramètre de contrôle  $\mu$ , et soit  $x^*$  sa solution.

**Définition 1.2.13** Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution  $x^*$  du système (1.13) lorsqu'on modifie  $\mu$ , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions. [44]

**Définition 1.2.14** Un système est dit structurellement stable ou robuste si le portrait de phase ne change pas causé d'une perturbation de ses paramètres. Par conséquent, une bifurcation correspond à une perte de stabilité structurelle (la valeur du paramètre  $\mu$  pour laquelle le système (1.16) n'est pas structurellement stable). [44]

**Définition 1.2.15** Un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation. [44]

### ➤ Bifurcation locale

La codimension est la plus petite dimension de l'espace des paramètres permettant d'aboutir à cette bifurcation. On parle ici seulement de la bifurcation de codimension un, il existe quatre types de bifurcations de codimension un, qui correspondent tous à des comportements génériques.

### ➤ Bifurcation nœud-col

Une fonction linéaire ne change pas le nombre de racines. Le polynôme le plus simple qui change de nombre de racines en fonction du paramètre  $\mu$  est le polynôme quadratique  $f(x) = \mu - x^2$ , comme celui de la figure suivante Figure (1.7). Considérons le système (1.16). Si on peut réécrire la fonction  $f$  sous la forme ci-après:

$$f(x, \mu) = \mu - x^2 \quad (1.17)$$

Nous appelons la fonction (1.14) la forme normale de la bifurcation nœud-col. Étudions le comportement de l'équation (1.18). Les points fixes de cette dernière sont :

$$x_{\pm}^* = \pm\sqrt{\mu} \quad (1.18)$$

Qui existent seulement pour  $\mu > 0$ , leur stabilité est déterminée par :

$$f'(x_{\pm}^*) = -2x_{\pm}^* = -2(\pm\sqrt{\mu}) = \pm 2\sqrt{\mu} \quad (1.19)$$

Selon les signes de  $f'(x^*)$ , on voit que  $x_+^* = \sqrt{\mu}$  est instable, tandis que  $x_-^* = -\sqrt{\mu}$  est stable.

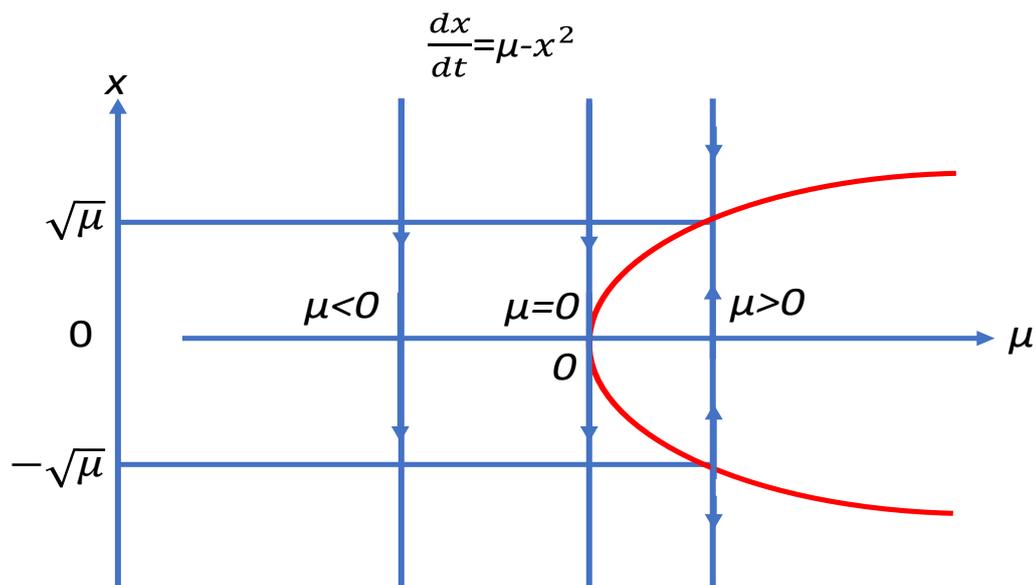


Figure1. 7Diagramme de bifurcation nœud-col

➤ **Bifurcations fourches**

Si on peut réduire  $f(x, \mu)$  à un polynôme cubique à ces quatre cas :

$$f(x, \mu) = \mu x - x^3 \tag{1.20}$$

$$f(x, \mu) = \mu x + x^3 \tag{1.21}$$

$$f(x, \mu) = -\mu x + x^3 \tag{1.22}$$

$$f(x, \mu) = -\mu x - x^3 \tag{1.23}$$

L'équation(1.18) s'appelle la forme normale d'une bifurcation fourche supercritique. Nous calculons ses points :

$$x^*(\mu - x^{*2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^* = 0 & \text{pour tout } \mu \\ x^* = \pm\sqrt{\mu} & \text{pour } \mu > 0 \end{cases} \tag{1.24}$$

$$f'(x^*) = (\mu + 3x^{*2}) = \begin{cases} \mu & \text{Pour } x^* = 0 \\ \mu + 3(-\mu) = -2\mu & \text{pour } x^* = \pm\sqrt{\mu} \end{cases} \tag{1.25}$$

Comme pour le cas supercritique, le point fixe  $x^* = 0$  est stable pour  $\mu < 0$  et devient instable à  $\mu = 0$ . Mais contrairement au cas supercritique, les autres points fixes  $\pm\sqrt{\mu}$  existent dans la région où  $x^* = 0$  est stable et sont toujours instables (Figure 1.8).

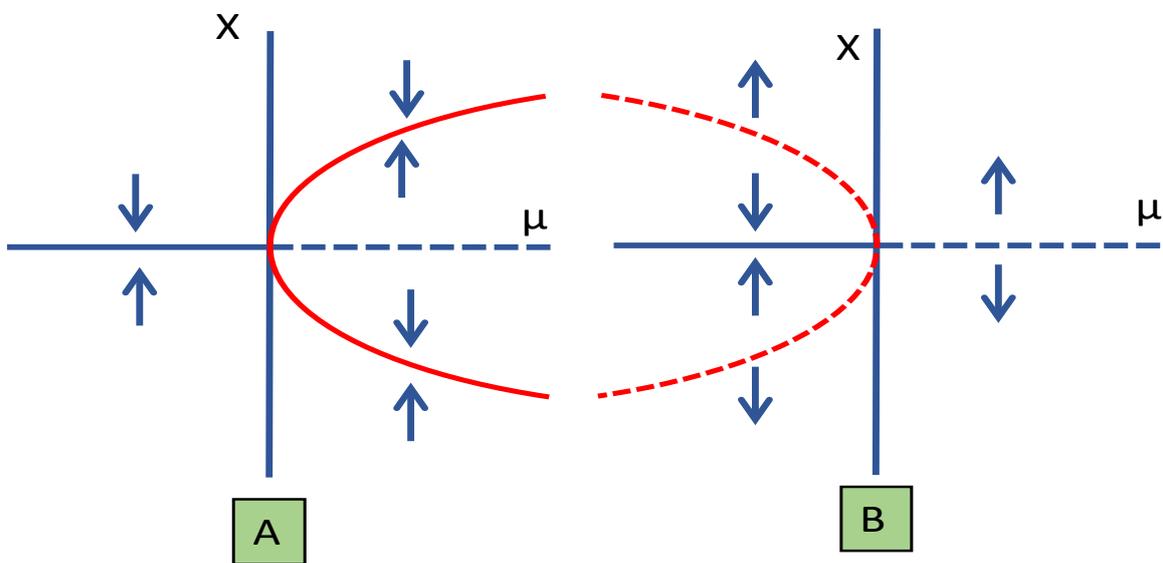
➤ **Bifurcations transcritiques**

Si  $f$  est contrainte à ne pas avoir de terme constant, le développement limité mène à la forme normale d'une bifurcation transcritique, qui est la dernière bifurcation stationnaire dans une dimension :

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \tag{1.26}$$

L'analyse usuelle donne :

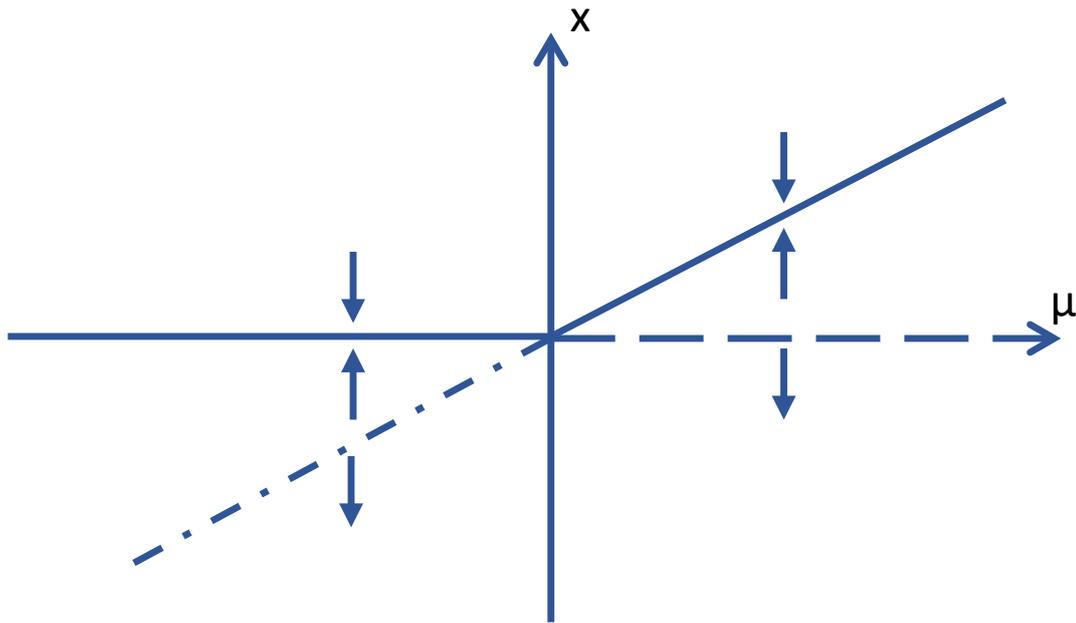
$$x^*(\mu - x^*) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^* = 0 \\ x^* = \mu \end{cases} \tag{1.27}$$



**Figure 1.8** Diagramme de bifurcation fourche : (a) super critique, (b) sous critique.

$$f'(x^*) = (\mu + 3x^{*2}) = \begin{cases} \mu & \text{Pour } x^* = 0 \\ -\mu & \text{Pour } x^* = \mu \end{cases} \tag{1.28}$$

Donc  $x^* = 0$  est stable pour  $\mu < 0$ , instable pour  $\mu > 0$ , tandis que  $x^* = \mu$  fait le contraire : ces points fixes échangent simplement leur stabilité (Figure 1.9).



**Figure1. 9**Bifurcation transcritique

### ➤ Bifurcation de Hopf

Tandis que toutes les bifurcations que nous avons décrites sont stationnaires, la bifurcation de Hopf donne naissance à des solutions oscillantes. L'espace des phases a maintenant deux composantes et la forme s'écrit dans le plan complexe comme suit :

Forme normale :

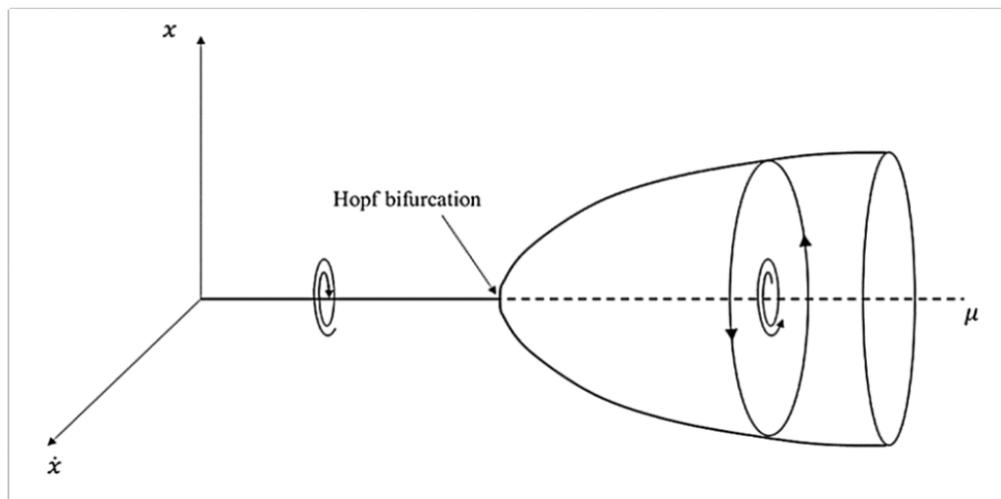
$$\frac{dZ}{dt} = \mu Z - \|Z\|^2 Z \quad (1.29)$$

En posant  $\mu = \mu_r + i\mu_i$  et  $Z = Xe^{i\theta}$  on obtient alors :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu_r x - x^3 \\ \frac{d\theta}{dt} = \mu_i \end{cases} \quad (1.30)$$

Nous obtenons donc une bifurcation fourche pour l'amplitude tandis que la phase tourne à la vitesse  $\mu_i$ . La solution est donc périodique et les trajectoires décrivent une spirale attirée vers une courbe asymptotique nommée : cycle limite. Naturellement la bifurcation de Hopf

peut être également sous critique si le coefficient du terme  $\|Z\|^2 Z$  est de signe positif. Il faut alors un terme négatif en  $\|Z\|^4 Z$  pour obtenir une saturation non-linéaire. On va s'intéresser maintenant à l'étape qui suit la régularité temporelle. Selon Landau la bifurcation d'un point d'un comportement stationnaire (point fixe) vers un comportement périodique (cycle limite) puis bipériodique (un tore) constituent les premières étapes de la transition vers la turbulence. Cette dernière présente un phénomène très intéressant qu'on appelle le chaos qui est depuis longtemps synonyme de désordre, de confusion et s'oppose à l'ordre et à la méthode. De nombreux chercheurs en sciences se sont intéressés aux mouvements dits chaotiques. Ils ont confirmé que, contrairement à ce que la pensée déterministe, martèle depuis des lustres, il se pourrait qu'il y ait de l'équilibre dans le déséquilibre, de l'organisation dans la désorganisation.



**Figure1. 10** Diagramme de bifurcation Hopf

### 1.3 Théorie du chaos

La théorie du chaos est un domaine des études en mathématiques avec des applications dans plusieurs disciplines comme la physique, l'ingénierie, la biologie, l'économie, la météorologie, la sociologie et la philosophie. Chaos ou un système chaotique, c'est un système générant des comportements différents à long terme lorsque les conditions initiales sont perturbées très légèrement. La sensibilité aux conditions initiales des systèmes chaotiques a fait du chaos une situation indésirable. Alors, l'homme s'interroge sur cette situation depuis la nuit des temps.

### 1.3.1 Définitions du chaos

La dynamique chaotique est un phénomène omniprésent dans la nature. Cependant, il n'y a aucune définition standard du chaos d'où la parution de plusieurs définition légèrement différentes. Deux principes mathématiques importants expliquent le comportement chaotique, celui de Devaney[15] et celui de Li-Yorke [45].

#### 1.3.1.1 Chaos dans le sens de Devaney :

Devaney proposa la définition suivante du chaos : un système dynamique est chaotique si et seulement si :

- il est topologiquement transitif.
- il possède un ensemble dense d'orbites périodiques,
- il présente le phénomène de sensibilité aux conditions initiales.

La transitivité signifie simplement que si l'on considère deux voisinages quelconques de deux états distincts d'un système dynamique, il existe une trajectoire qui passe de l'un à l'autre. Notons que les deux premières hypothèses impliquent la troisième sans que la réciproque soit vraie[46].

#### 1.3.1.2 Chaos dans le sens de Li-Yorke

Li et Yorke ont introduit la première définition mathématique du chaos. Ils ont établi un critère très simple "La présence de trois périodes impliquent le chaos". Ce critère joue un rôle très important dans l'analyse des systèmes dynamiques chaotiques.

### 1.3.2 Caractérisation de chaos

Bien qu'il n'y ait pas de définitions unifiées, le chaos a été largement reconnu qu'il possède des concepts et des propriétés communément acceptés.

- **La non-linéarité**

Pour prévoir des phénomènes réels générés par les systèmes dynamiques, la démarche consiste à construire un modèle mathématique qui établit une relation entre un ensemble de causes et un ensemble d'effets. Si cette relation est une opération de proportionnalité, le phénomène est linéaire. Dans le cas d'un phénomène non linéaire, l'effet n'est pas proportionnel à la cause. En général, un système chaotique est un système dynamique non linéaire, un système linéaire ne peut pas être chaotique.

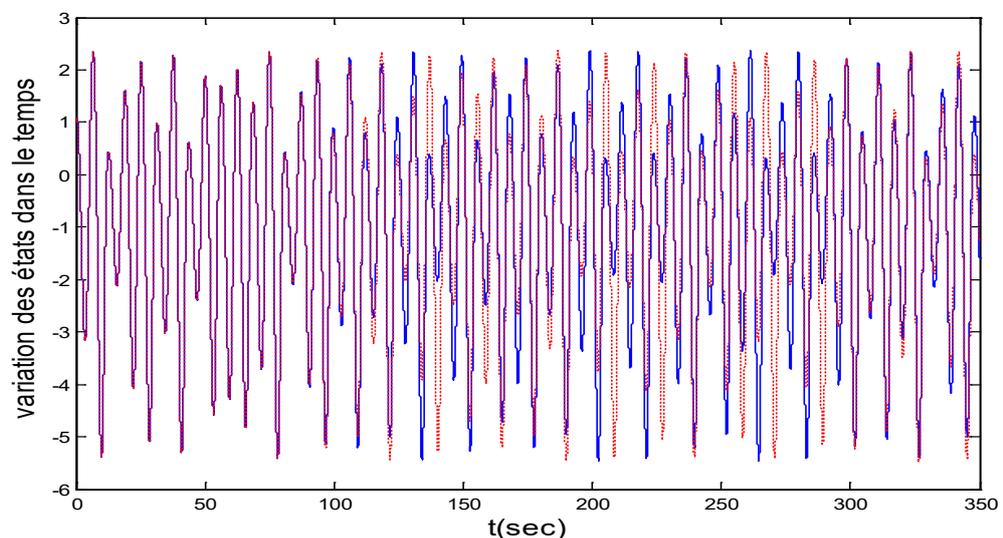
- **Le déterminisme**

Un système est dit déterministe lorsqu'il est possible de prédire (de calculer) son évolution au cours du temps. La connaissance exacte de l'état du système à un instant donné,

l'instant initial, permis le calcul précis de l'état du système à n'importe quel autre moment. Dans les phénomènes aléatoires, il est absolument impossible de prévoir la trajectoire d'une quelconque particule. Donc, un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes. Il est généralement régi par des équations différentielles non linéaires qui sont connues, donc par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes.

- **Sensibilité aux conditions initiales**

Une caractéristique typique de la dynamique chaotique est sa grande sensibilité aux conditions initiales et paramètres : deux conditions ou paramètres initiaux similaires (proches sans être identiques) peuvent donner lieu à deux orbites futures radicalement différentes. Ainsi, un petit changement arbitraire ou une perturbation de l'état actuel peut provoquer un comportement futur significativement différent. Ce phénomène est connu comme "effet papillon", une métaphore célèbre qui a été d'abord proposée par Lorenz. Ce dernier, a utilisé l'aile battante d'un papillon pour représenter un petit changement dans les conditions initiales d'un système dynamique. Ce battement provoquerait une chaîne d'événements qui pourraient modifier considérablement les conditions météorologiques futures, ce qui signifierait que les orbites en évolution changeraient considérablement [47].



**Figure1. 11** Variation des états dans le temps pour l'attracteur de Rössler

- **L'attracteur étrange**

Un système chaotique dissipatif possède, au moins, un attracteur d'un type particulier appelé attracteur étrange. Géométriquement, un tel attracteur peut être décrit comme le résultat d'une opération d'étirement et de repliement d'un cycle de l'espace des phases,

répétée un nombre infini de fois. La "longueur" de l'attracteur est finie, bien qu'il soit contenu dans un espace fini. Les attracteurs étranges sont également uniques en ce qu'ils ne se ferment jamais sur eux-mêmes, le mouvement du système ne se répète jamais (non périodique). Le mouvement que nous décrivons sur ces étranges attracteurs est ce que nous entendons par comportement chaotique.

Les attracteurs chaotiques (étranges) peuvent être classés en trois types principaux :

1. **Attracteurs hyperboliques** : sont des ensembles-limites structurellement stables. Généralement, la plupart des systèmes physiques connus n'appartiennent pas à cette classe des systèmes d'attracteurs hyperboliques.
2. **Attracteurs de type Lorenz** : Ces attracteurs ne sont pas structurellement stables, mais leurs orbites homoclines et hétéroclines sont structurellement stables (hyperboliques), et aucune des orbites périodiques instables apparaît sous les petites variations des paramètres, comme par exemple dans le système de Lorenz lui-même.
3. **Quasi-attracteurs** : Ces attracteurs sont des ensembles-limites renfermant des orbites périodiques de différents types topologiques et des orbites structurellement instables. Par exemple, les attracteurs générés par le circuit de Chua. Notez que ce type est plus complexe que les deux précédents-attracteurs et donc ne convient pas pour certaines applications potentielles d'un chaos tel que : la sécurité des communications et le masquage du signal.

### 1.3.3 Détection du chaos

Il existe plusieurs méthodes qui permettent de déterminer si des systèmes non linéaires sont ou non chaotiques. Elles ne sont généralement pas très nombreuses, ni réparties sur un temps suffisamment long à l'échelle du système étudié. On a choisi de mettre en œuvre deux des méthodes les plus couramment utilisées qui sont appelées : les exposants de Lyapunov et la dimension fractale.

#### 1.3.3.1 Les exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov, présentés par Oseledec pour la première fois en 1968, jouent un rôle important dans l'étude des systèmes non linéaires, notamment les systèmes chaotiques. Il sert à mesurer le taux de divergence des trajectoires voisines dans un système non linéaire soumis à des conditions initiales très proches.

- Au moins l'un d'eux est positif pour expliquer la divergence des trajectoires.
- Au moins l'un d'eux est négatif pour justifier le repliement des trajectoires.

- La somme de tous les exposants est négative pour expliquer qu'un système chaotique est dissipatif, c'est-à-dire, qu'il perd de l'énergie.

Le nombre des exposants de Lyapunov est égal à la dimension du système  $n$ . Il est défini mathématiquement comme suit :

$$LE_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \frac{p_i(t)}{p_i(0)} \quad (1.31)$$

Où  $LE_i$  sont les exposants de Lyapunov indexés du plus grand au plus petit avec  $i \in [1, \dots, n]$ .  $p_i$  est la longueur de l'axe principal ellipsoïdal définissant le  $i$ ème exposant de Lyapunov. L'apparition du chaos exige que les exposants de Lyapunov doivent remplir trois conditions. A titre d'exemple, les types d'attracteurs d'un système tridimensionnel en fonction des signes des exposants de Lyapunov sont donnés dans le tableau suivant :

**Tableau 1.1** :Caractérisation d' attracteur

Type d'attracteur	Les Signe exposants de Lyapunov
Point fixe	- - -
Cycle limite	0 - -
Attracteur étrange	+ 0 -
Type d'attracteur	les Signe exposants de Lyapunov

### 1.3.3.2 Dimension fractale

Si, à l'issue du calcul de la dimension de l'attracteur d'un système étudié, nous obtenons une valeur positive non entière, cela signifie que le système possède un attracteur étrange. Plusieurs dimensions ont été proposées telles que la dimension de Kolmogorov, dimension de corrélation et la dimension de Lyapunov. Il y a une différence légère entre chacune de ces dimensions, mais elles toutes caractérisent l'attracteur étrange avec sa dimension fractale et satisfaisant les trois propriétés suivantes :

1.  $A \subset B \Rightarrow d(A) \leq d(B)$
2.  $A = \emptyset \subset d(A) = 0$
3.  $d(A \times B) = d(A) + d(B)$

### 1.3.4 Routes vers le chaos

- **Le doublement de période**

Ce scénario a été découvert en même temps par *Mitchell Feigenbaum* et par les chercheurs français Pierre Couillet et Charles Tresser. Par augmentation du paramètre de contrôle de l'expérience, la fréquence du régime périodique double, puis est multipliée par 4, par 8, par 16 < etc. Les doublements étant de plus en plus rapprochés, on tend vers un point d'accumulation auquel on obtiendrait hypothétiquement une fréquence infinie. C'est à ce moment que le système devient chaotique. Ce scénario peut être observé dans un grand nombre d'expériences comme un robinet qui fuit, l'étude d'oscillateurs forcés, ou encore l'apparition de la turbulence dans les fluides.

- **L'intermittence**

Ce scénario a été décrit par Yves Pomeau. L'intermittence se caractérise par un mouvement périodique stable entrecoupé par des bouffées chaotiques qui apparaissent de manière irrégulière. L'augmentation d'un paramètre produit l'augmentation de la fréquence des perturbations, puis le chaos domine le comportement du système. Ce scénario a été observé dans des expériences sur la convection des fluides et dans des réactions chimiques.

- **Quasi-périodicité**

Le scénario de la quasi-périodicité a été mis en évidence par les travaux théoriques de Ruelle et Takens[9]. Dans un système dynamique à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnelle le comportement est périodique. Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi périodique. Alors, on change de nouveau le paramètre et il apparaît une troisième fréquence et ainsi de suite jusqu'au chaos.

## 1.4 Exemples de systèmes chaotiques

**1.4.1 Exemples de systèmes à temps continu:** On rappelle le système ci-dessous car il a une importance historique dans l'histoire du chaos.

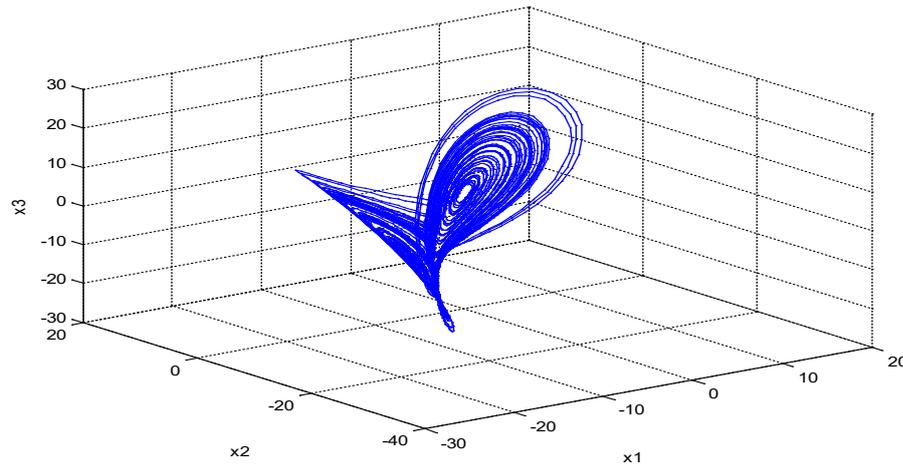
### 1.4.1.1 Système de Lorenz

En 1963, Lorenz a étudié numériquement un système de trois équations différentielles censé approximer la convection thermique dans l'atmosphère (obtenu à partir des équations de Navier-Stokes). Il s'agit du premier et célèbre système différentiel qui permet d'observer un attracteur étrange pour certaines valeurs de paramètres.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = r - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (1.32)$$

$\sigma$  ou  $Pr$  désigne le nombre de Prandtl, et  $r$  est le nombre de Rayleigh réduit.

Le système de Lorenz montre un comportement chaotique et génère un attracteur étrange pour  $\sigma = 10$ ,  $b=8/3$ ,  $r=28$  donné sur la figure (1.12)



**Figure 1.12** Attracteur de Lorenz

## 1.4.2 Système à temps discret

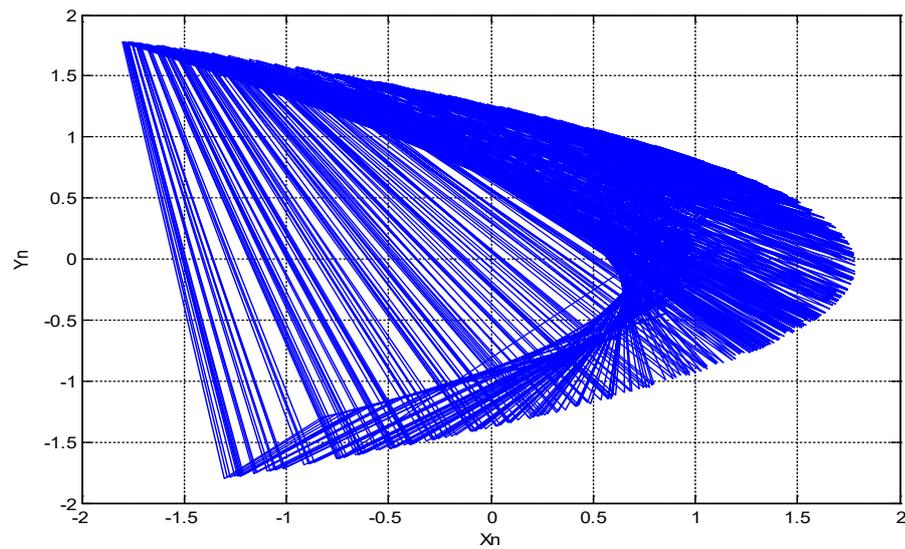
### 1.4.2.1 Système de Hénon

Le système de Hénon est un modèle proposé en 1976 par le mathématicien Michel Hénon.

Il est défini par les équations aux différences suivantes :

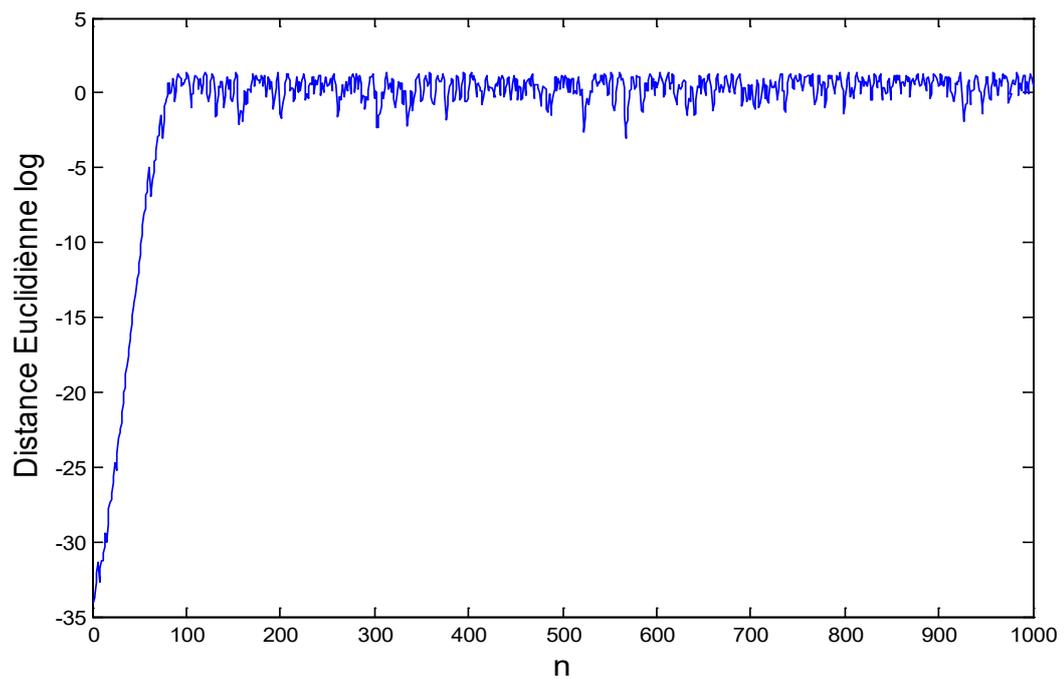
$$\begin{cases} x_{k+1} = a + x_k^2 + by_k \\ y_{k+1} = x_k \end{cases} \quad (1.33)$$

Avec  $k$ , le nombre d'itérations. Le système de Hénon montre un comportement chaotique et génère un attracteur étrange pour  $a = 1.4$ ,  $b = 0.3$  avec  $x(0) = 0$  et  $y(0) = 0$  les conditions initiales du système.



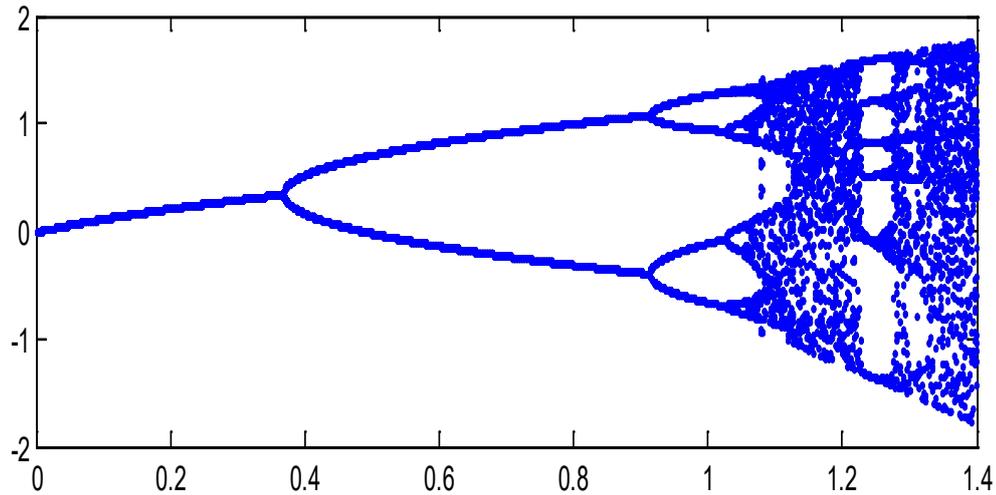
**Figure1. 13**Attracteur de Hénon, avec  $a = 1.4$  et  $b = 0.3$ .

Le tracé en échelle logarithmique montre bien que la distance croît de manière exponentielle, du fait de la sensibilité aux conditions initiales.



**Figure1. 14**Exposant de Lyapunov pour l'attracteur de Hénon

Le diagramme de bifurcation est représenté par la figure (1. 14). Ce diagramme est de type de bifurcation de doublement de période, l'attracteur de Hénon contient deux points fixes.



**Figure1. 15**Diagramme de bifurcation de Hénon

## 1.5 Systèmes hyperchaotiques

Un système hyper chaotique est mathématiquement défini comme un système chaotique ayant plus d'un exposant de Lyapunov positif impliquant que sa dynamique est déployée dans de nombreuses directions différentes simultanément. Ainsi, un hyper chaotique comporte des comportements dynamiques plus complexes qu'un système chaotique. Il existe de nombreux systèmes hyper chaotiques bien connus tels que le système hyper chaotique de Lorenz [48], Système hyper chaotique de Chen [49], Système hyper chaotique de Li [50], Systèmes hyper chaotique vaidyanathan [51,52],... etc

Ces dernières années, les systèmes chaotiques ont été beaucoup plus utilisés pour le cryptage des données dans les communications sécurisées. Dans la communication chaotique sécurisée, le signal chaotique est utilisé pour masquer les messages à transmettre. Perez et Cerderia [25] ont prouvé que le masquage des messages par un système chaotique normal (possédant un seul exposant de Lyapunov positif) n'était pas toujours efficace. Puis Pecora a montré que ce problème pouvait être résolu en utilisant un système chaotique de dimension élevée c'est-à-dire avec plusieurs exposants de Lyapunov positifs.

Pour générer un comportement hyperchaotique à partir d'un système chaotique, il faut que les deux conditions suivantes soient satisfaites [53]:

- La dimension du système doit être supérieure ou égale à 4 et l'ordre de chaque équation doit être supérieur ou égale à 2.

- Le système doit avoir au moins deux exposants positifs et la somme de tous les exposants doit être négative.

### 1.5.1 Premier système hyperchaotique :

Le premier système hyperchaotique à 4 dimensions a été proposé en 1979 par Rössler.

Ce système est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) \\ \dot{y} = x + ay + w \\ \dot{z} = b + xz \\ \dot{w} = -cz + dw \end{cases} \quad (1.34)$$

Le système suit un comportement hyperchaotique figure (1.16), quand les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  prennent les valeurs suivantes :  $a = 0.25, b = 3, c = 0.5$ , et  $d = 0.05$ . Les conditions initiales peuvent prendre les valeurs suivantes :  $x_0 = -10, y_0 = -6, z_0 = 0, w_0 = 10$ .

Les quatre exposants de Lyapunov correspondants sont  $\lambda_1 = 0.112, \lambda_2 = 0.119, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 25,118$ . On constate bien que ce système répond aux conditions de passage du chaos vers l'hyperchaos déjà prédéfinies.

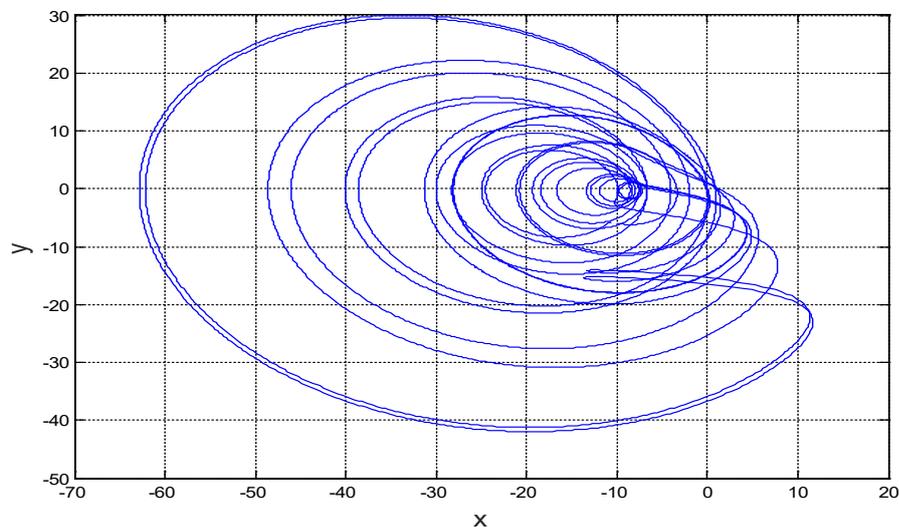


Figure1. 16l'attracteur hyperchaotique de Rössler de 4D

## 1.6 Contrôle de chaos

De nos jours et dans de nombreux domaines, de plus en plus de phénomènes chaotiques sont découverts et étudiés. Dans certains cas, le chaos est utile, par exemple lorsqu'il améliore les mécanismes de cinétique de réaction dans le transport de chaleur/masse. D'autre part, le

chaos est indésirable lorsqu'il provoque une irrégularité et une complexité non souhaitées dans les systèmes dynamiques non linéaires. Afin d'améliorer les performances des systèmes dans de nombreuses applications pratiques, le système doit être contrôlé de manière à supprimer le chaos, rendant le système prévisible conformément aux objectifs souhaités. Par conséquent, dans le domaine de la recherche sur la dynamique non linéaire, le contrôle ou l'ordonnement du chaos fait l'objet d'une attention croissante [54]

- **Contrôle par stabilisation et suppression du chaos**

L'objectif de la stabilisation du chaos est d'éliminer le mouvement chaotique. Une des caractéristiques qui distingue les systèmes chaotiques des autres systèmes non linéaires est la notion d'attracteur chaotique. L'idée du contrôle est donc d'exploiter cette notion pour concevoir un contrôleur. De plus, l'instabilité d'un système chaotique se traduit en général par la divergence de trajectoires voisines, quelle que soit la nature de l'état en question. Pour contrer cette instabilité, il suffit donc d'appliquer au système une perturbation afin de l'y ramener de nouveau toutes les fois où le système s'écarte de l'état considéré stable. Cette méthode de stabilisation est adaptée seulement aux systèmes de petites dimensions où les variables d'état observées ne sont soumises à aucun bruit. La remarque la plus importante, concernant la méthode OGY (Ott-Grebogi-Yorke), est que les orbites périodiques instables utilisées dans le calcul numérique représentent des approximations des orbites réelles ce qui a pour conséquence la convergence de l'état contrôlé vers des approximations d'orbites. Donc, la performance de la méthode OGY dépend de la précision des approximations.

Pour améliorer l'efficacité de la méthode OGY, différentes approches ont été proposées dans la littérature [55, 56]. En particulier, Shinbort, Ott, Grebogi et York ont proposé des approches pour réduire le temps d'attente et conduire la trajectoire vers le voisinage désiré dans un temps très court [57, 58]. Cependant, des problèmes comme la difficulté d'obtenir les paramètres du système ou même lorsqu'ils sont bien identifiés, il est très difficile de les introduire comme lois de commande, peuvent être rencontrés. Reyl et al [59] ont montré que des valeurs propres complexes survenaient pour des orbites de période 3 ou plus. Ils ont donc suggéré de revoir l'algorithme OGY pour qu'il puisse s'accommoder de plusieurs directions instables. Ils ont donc développé une méthode connue sous le nom MED (Minimal Expected Deviation). Pour la définition de l'orbite périodique, Hao a proposé une méthode analytique [60]. Osipanko a utilisé une représentation graphique pour identifier l'orbite périodique. L'idée de la méthode est basée sur la construction d'une représentation graphique

de la dynamique du système étudié [61]. Dans [62], Davidchack et al ont introduit des transformations sur le système chaotique original en gardant toujours la structure topologique de l'espace d'état. Donc, cette transformation agit seulement sur la stabilité des orbites. Pour éviter le problème d'identification de l'orbite périodique, beaucoup de chercheurs ont pensé à utiliser des méthodes qui réalisent les deux objectifs à la fois. C'est-à-dire, identifier l'orbite périodique et stabiliser le système. Le contrôle à retour d'état (feedback contrôle FC) est une méthode de la forme deux en un. La procédure d'identification de l'orbite périodique est combinée avec l'algorithme de stabilisation [63 , 64]. Pyragas a proposé une méthode simple et très efficace qui repose sur l'injection des états retardés sur l'entrée du système [65].

En 1991, Hunt a introduit une méthode de contrôle à retour d'état occasionnelle (OccasionalProportional Feedback OPF) [66]. Il a essayé de réduire un attracteur à une application unidimensionnelle autour d'un point fixe  $x_f$ . Nitsche et Dressler ont amélioré la méthode OPF en RPF (RecurssiveProportional Feedback) [67], en intégrant la notion de récursivité pour prendre en considération le déplacement d'une application sur une section de Poincaré sous un changement paramétrique. De plus, une fois le système est stabilisé, le contrôle peut être relâché, ce qui donne un autre avantage économique à la méthode. Cependant, après le relâchement du contrôle, la surveillance de l'état contrôlé doit se faire d'une manière permanente, ce qui est très difficile à réaliser pour des applications réelles et expérimentales. Pour remédier à ce problème, plusieurs stratégies du contrôle en boucle ouverte (Non-Feedback Control : NFC) ont été proposées. On citera à titre d'exemple, les travaux de Mirus et al, où un signal périodique a été appliqué pour supprimer le chaos [68], et les travaux de Ramesh et al, où un bruit qui a été suggéré au lieu du signal périodique [69]. Ce type de stratégies ne nécessite aucune analyse supplémentaire pour comprendre la dynamique chaotique du système étudié. De plus, du point de vue implémentation de la stratégie de contrôle, le NFC offre plus de simplicité par rapport au contrôle FC, puisque pour ce dernier, on a parfois besoin de valeurs difficilement mesurables. Le contrôle NFC permet de supprimer le chaos ou donner un mouvement périodique au système. Mais pour obtenir la poursuite d'une trajectoire, il est nécessaire de faire une analyse complète afin comprendre la dynamique du système et introduire aussi quelques modifications sur la stratégie de contrôle comme indiqué dans les références [70-72].

D'autres méthodes ont été proposées et développées pour réaliser le contrôle du chaos dans divers systèmes dynamiques non linéaires. En 1999, Chen a proposé une combinaison prédictive floue pour le contrôle des systèmes incertains définis par des séries de données

[73]. Udatawa a développé un contrôleur flou pour les systèmes chaotiques [74]. Puis dans [75], Park a proposé une autre structure adaptative d'un contrôleur flou pour le contrôle des systèmes chaotiques incertains. Ramesh et al ont utilisé un réseau neuronal pour le contrôle du chaos dans l'oscillateur de Van Der Pol [76]. Puis, Ren et al ont utilisé le réseau neuronal pour l'identification et le contrôle des systèmes chaotiques continus [77]. D'autres approches comme, le Backstepping [78, 79], le mode glissant [80, 81], et la commande adaptative [82] et [83] ont été également utilisées.

Il est important de préciser que la littérature dans ce domaine est très large et les méthodologies décrites dans cette thèse ne représentent qu'une partie d'entre elles. Dans ce qui suit, nous décrivons une nouvelle méthode de contrôle des systèmes chaotiques et hyperchaotique qui est la commande synergétique.

- **Chaotification des systèmes dynamiques**

La chaotification, ou l'anticontrol du chaos, est l'inverse de la suppression du chaos dans un système dynamique, c'est-à-dire, fait référence à la tâche consistant à générer du chaos à partir d'un système initialement non chaotique. L'objectif de ce processus est de créer ou d'améliorer la complexité du système pour un roman particulier,

Une méthode de chaotification mathématiquement rigoureuse a été développée pour la première fois par Chen et Lai [84, 85]. Plus tard, le chaos généré par leur méthode s'est avéré être strict au sens de Li-Yorke ainsi que dans le sens de Devaney [86]. Cette méthode joue un rôle important dans l'étude des problèmes de chaotification des systèmes dynamiques discrets.

Plus récemment, Wang et Chen [87, 88], Zhang et Chen [89], et Zheng et Chen [90] ont appliqué le théorème de Maroto, établi en 1978 [91], pour prouver que plusieurs systèmes contrôlés sont chaotiques au sens de Li-Yorke. De plus, Zheng et al. [92] ont appliqué la méthode de la limite anti-intégrable, proposée par Aubry et Abramovici [93], pour montrer que les systèmes contrôlés sont chaotiques au sens de Devaney.

Certaines applications de chaos anti-contrôle dans les systèmes dynamiques sont : la communication sécurisée et le traitement de l'information [94, 95], les systèmes biologiques et médicaux [96, 97], le mélange de fluides [98], le génie électrique et mécanique [99, 100], etc. Plusieurs méthodes anti-contrôle de chaos ont été proposées, telles que le contrôle à retour d'état [101], le contrôle à retard [102], le contrôle impulsif [103] et le contrôle non linéaire [104, 105]. Les auteurs de ces articles ont développé une méthode basée sur les

exposants de Lyapunov. L'idée est d'injecter un exposant positif dans une loi de commande composée d'une matrice de gain bornée et d'une action modulo pour garantir la convergence de l'algorithme. Cette action modulo est remplacée dans certains travaux par un contrôleur de faible amplitude.

- **La synchronisation contrôlable :**

La troisième classe importante des objectifs de contrôle correspond aux problèmes de synchronisation ou, plus précisément, de synchronisation contrôlable à l'opposé de l'autosynchronisation.

La synchronisation est un phénomène universel qui peut se produire lorsque deux ou plusieurs oscillateurs non linéaires sont couplés. La capacité des oscillateurs non linéaires à se synchroniser entre eux est une base pour l'explication de nombreux processus de la nature .

Dans la littérature, plusieurs concepts de synchronisation chaotique ont été proposés. En premier, par Yamada et Fujisaka [106, 107] qui ont utilisé une approche locale de la synchronisation chaotique. Par la suite, des concepts importants liés à la synchronisation chaotique ont été développés par Afraimovich et al dans [108]. Ultérieurement, Pecora et Carroll [109] ont défini la synchronisation chaotique connue sous le nom de synchronisation identique, développée sur la base de circuits chaotiques couplés avec l'un, appelé système esclave suit le rythme et la trajectoire imposés, par un autre système dynamique, appelé système maître. Ces travaux ont ouvert la voie des applications du chaos aux télécommunications [110].

## 1.7 Conclusion

Ce chapitre avait comme objectif, l'introduction de quelques notions élémentaires et concepts fondamentaux des systèmes dynamiques chaotiques. Dans la première section, les définitions des systèmes dynamiques non-linéaires en temps continu et discret, ainsi que leurs particularisations pour le cas de systèmes chaotiques ont été données. Et pour une meilleure compréhension du chaos déterministe, on a présenté par la suite, les systèmes dissipatifs en passant par l'étude de voisinage du point d'équilibre, les systèmes entretenus ainsi que la section de Poincaré. Ensuite, les exemples les plus célèbres des systèmes chaotiques à temps continus et discrets ont été exposés. Finalement, on a abordé d'une manière brève les systèmes hyperchaotiques, puisque le reste de ce travail est orienté plutôt vers les systèmes chaotiques.

Dans le chapitre suivant, on étudiera le contrôle du chaos par des commandes robustes telles que la commande par mode glissant et la commande synergétique.

## CHAPITRE 2

# Les commandes robustes mode glissant et synergétique pour des systèmes chaotiques

2.1	Introduction.....	42
2.2	Commande par mode glissant.....	43
2.2.1	Principes de la commande par mode glissant.....	43
2.2.2	Synthèse de la commande par mode glissant .....	44
2.2.3	Inconvénients de la commande par mode glissant .....	47
2.2.4	Quelques solutions pour le chattering .....	48
2.2.5	Commande par mode glissant des systèmes chaotiques.....	50
2.3	La commande synergétique .....	55
2.3.1	Synthèse de la commande synergétique .....	56
2.3.2	Commande synergétique des systèmes chaotiques .....	57
2.4	Conclusion.....	68

### 2.1 Introduction

Au cours des dernières années, les études et les recherches faites sur le contrôle des systèmes dynamiques chaotiques ont connu une augmentation considérable. L'objectif principal de la commande du chaos consiste à éliminer le comportement chaotique du système et le stabiliser en un point d'équilibre. Parmi les techniques de commande des systèmes non linéaires (chaotiques) qui ont suscité un intérêt particulier ces dernières années, on cite le mode glissant et la commande synergétique.

La commande par mode glissant (Sliding Mode Control : SMC) est un type de contrôle non linéaire, qui est assez facile à réaliser. En effet, il a été montré dans des travaux antérieurs [111], que les contrôleurs SMC peuvent être implémentés en utilisant des circuits analogiques simples [112-113]. De telles propriétés la rendent parfaitement adaptée et applicable dans les systèmes non linéaires, y compris l'électronique de puissance [114,115]. Il a aussi été

démontré à plusieurs reprises que la commande SMC est une solution viable pour améliorer les performances de contrôle des convertisseurs [116,117]. Une autre approche parmi les techniques robustes de contrôle utilisées dans cette thèse est l'approche synergétique.

La commande synergétique (Synergetic Control : SC) est une technique de contrôle assez proche de la commande par mode glissant (SMC) dans le sens où l'on force le système considéré à évoluer avec une dynamique pré-choisie par le concepteur. Ces deux techniques partagent les propriétés de la réduction de l'ordre et du découplage mais contrairement au mode glissant (SMC), la commande synergétique convient à l'implémentation, car n'exigeant pas une bande passante importante du signal de commande. Son avantage primordial est que la loi de commande est continue contrairement à celle utilisée en mode glissant et n'induit donc aucun problème de broutement, désavantage majeur de la commande SMC limitant son implémentation hard sur des applications pratiques.

Dans ce chapitre nous allons donner quelques concepts de base de la théorie de contrôle par mode glissant et synergétique. Ensuite, nous les appliquerons sur les systèmes chaotiques et hyperchaotiques.

## **2.2 Commande par mode glissant**

La commande par mode glissant a été introduite initialement comme moyen de contrôle des systèmes à structure variable. Elle est basée essentiellement sur la résolution des équations différentielles de second ordre discontinues. Initiée par Filippov [118], elle a été étudiée et développée exclusivement dans les années quatre-vingts par le chercheur V.I.Utkin [119].

L'objectif de la commande par mode glissant est d'arriver à l'état de référence et de fonctionner selon une dynamique désirée. Une fois que l'état du système atteint la surface de glissement, le système se trouve en régime glissant, les dynamiques du système sont insensibles aux perturbations extérieures et aux variations paramétriques tant que les conditions du régime glissant restent assurées.

### **2.2.1 Principes de la commande par mode glissant**

La théorie des modes glissants (SMC) a été largement étudiée et appliquée pour le contrôle et l'observation des différents systèmes non linéaires dans des domaines très variés [120-123].

Son succès est dû à sa robustesse par rapport aux variations paramétriques et des perturbations externes en plus de sa simplicité de conception. Le principe de la commande par mode glissant est de définir d'abord une surface dite de glissement qui représente la dynamique désirée, puis synthétiser une loi de commande qui doit rendre la surface de glissement localement attractive, c'est-à-dire, il faut que les trajectoires du système dans n'importe quelle position de l'espace d'état se dirige vers elle. Une fois la surface est atteinte, il faut assurer le glissement le long de cette surface et la stabilité du système, pour rejoindre la référence comme montré sur la figure (2.1).

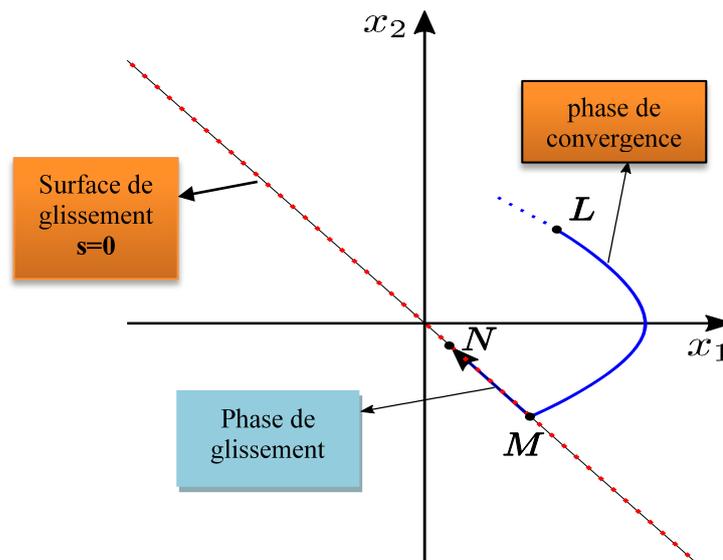


Figure 2. 1Portrait de phase d'une surface de glissement.

### 2.2.2 Synthèse de la commande par mode glissant

Soit un système défini par l'équation d'état non linéaire de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}^{(n)} = f(x) + g(x)u \\ \dot{y} = x \end{cases} \quad (2.1)$$

Ou :  $\dot{x}^{(n)}$  est la n<sup>ième</sup> dérivée de  $x$  en fonction du temps,  $u$  la commande du système et  $x = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]$  le vecteur d'état,  $f(x)$  et  $g(x)$  sont des fonctions non linéaires  $g(x)$  est supposée inversible.

Notre but est d'atteindre un état désiré  $x_d = [x_d, \dot{x}_d, \dots, x^{(n-1)}]$  en présence des incertitudes du modèle sur  $f(x)$  et  $g(x)$ . On définit le vecteur de l'erreur de poursuite comme  $e(t) = y(t) - x_d(t) = [e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)}]^T$ . La variable de glissement est généralement conçue par un ensemble de combinaisons linéaires de l'erreur  $e$ , comme la surface définie par Slotine [124].

$$s(x,t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} e(t) \quad (2.2)$$

Où  $\lambda$  est une constante strictement positive.

Sachant que la condition initiale est donnée par  $y_a(0) = y(0)$ , le problème de poursuite de l'état désiré  $y(t) = x_d(t)$  revient à maintenir les états du système sur la surface  $s(x,t)$  pour tout  $t > 0$ .

Le choix particulier de la surface de glissement satisfait la condition (2.3) :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2(x,t) \leq -\eta |s(x,t)| \quad , \eta > 0 \quad (2.3)$$

L'équation (2.3) [125] qui est appelée condition d'attraction force les trajectoires d'état à se diriger vers la surface de glissement puis restent dans un  $\varepsilon$ -voisinage de cette surface comme le présente la figure (2.1). On assume que  $s(0) > 0$  et on définit  $t_f$  comme étant le temps nécessaire à une trajectoire pour atteindre la surface  $s(x,t)$ .

L'équation (2.3) peut être réécrite comme suit :

$$\frac{d}{dt} s(x,t) \leq -\eta \quad , \eta > 0 \quad (2.4)$$

En intégrant (2.4) de  $t = 0$  à  $t = t_f$  on obtient:

$$s(t_f) - s(0) \leq -\eta(t_f - 0) \quad (2.5)$$

Vu que  $s(t_f) = 0$ , l'équation (2.5) deviendra:

$$t_f \leq s(0) / \eta \quad (2.6)$$

$t_f$  peut aussi être obtenu en considérant le cas où  $s < 0$  ce qui donne :

$$t_f \leq |s(0)| / \eta \quad (2.7)$$

L'équation (2.7) garantit que si les trajectoires sont à l'extérieur de  $s(x,t)$  elles atteindront la surface de glissement dans un temps fini inférieur à  $|s(0)| / \eta$ . Lorsque la surface de glissement  $s = 0$  est atteinte, l'erreur tend vers zéro exponentiellement ( $y = x_d$ ).

Pour une condition permettant de donner à la surface de glissement une dynamique de convergence vers zéro, on utilise généralement la condition d'attractivité non-linéaire suivante :

$$s(x,t)\dot{s}(x,t) \leq -\eta |s(x,t)| \quad (2.8)$$

L'élaboration de la loi de commande par mode glissant est basée sur le critère de stabilité de Lyapunov. Cette loi est choisie telle que la dérivée d'une fonction de Lyapunov soit négative. L'idée est d'utiliser la fonction scalaire  $s(x,t)$  pour définir la fonction de Lyapunov:

$$V(x,t) = \frac{1}{2} s^T(x,t) s(x,t) \quad (2.9)$$

La fonction de Lyapunov est définie positive de manière évidente et sa dérivée est :

$$\dot{V}(x) = s(x,t)\dot{s}(x,t) < 0 \quad (2.10)$$

La commande développée doit satisfaire la condition (2.10). La construction de cette loi de commande consiste à admettre qu'en mode de glissement le système piloté par une commande  $u_{eq}$ , solution de  $\dot{s} = 0$ , dite commande équivalente qui permet de maintenir l'état du système sur la surface  $s = 0$ .

Le calcul de la commande équivalente s'effectue en prenant en considération les conditions d'invariance suivantes :

$$\begin{cases} s(x,t) = 0 \\ \dot{s}(x,t) = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Considérons l'exemple d'un système non-linéaire avec une seule entrée, représenté par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x} = f(x,t) + g(x,t)u \quad (2.12)$$

L'existence du mode glissant implique que :

$$\dot{s}(x,t) = \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \quad (2.13)$$

En remplaçant (2.12) dans (2.13) :

$$\frac{\partial s}{\partial t} \dot{x} + \frac{\partial s}{\partial x} (f(x,t) + g(x,t)u_{eq}) = 0 \quad (2.14)$$

En supposant que  $\frac{\partial s}{\partial x} (g(x,t))$  est inversible :

$$u_{eq} = \left[ \frac{\partial s}{\partial t}(g(x,t)) \right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial t}(f(x,t)) \quad (2.15)$$

Par conséquent, on peut déterminer la dynamique sur la surface de glissement pour tout instant :

$$\dot{x} = \left[ I - g(x,t) \left[ \frac{\partial s}{\partial t}(g(x,t)) \right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial t} \right] f(x,t) \quad (2.16)$$

La commande discontinue ou de commutation qui permet de garantir la condition d'attractivité, peut prendre plusieurs formes.

La forme la plus simple est celle d'un relais.

$$u_c = -\eta \text{sign}(s(x,t)) \quad (2.17)$$

Où  $\eta$  est une constante positive.

La loi de commande par mode glissant satisfaite la condition (2.8) peut être donnée par :

$$u_{SMC} = u_{eq} + u_c \quad (2.18)$$

La loi de commande (2.18) est certes robuste vis-à-vis des perturbations externes mais présente des inconvénients.

### 2.2.3 Inconvénients de la commande par mode glissant

Un régime de glissement idéal nécessite un contrôleur qui peut commuter à une fréquence infinie. Évidemment, pour une utilisation pratique, seule une commutation à une fréquence finie est possible, ce qui entraîne un retard entre la mesure de sortie et le calcul de la commande, qui peut être amplifié si le système a naturellement des retards ou une dynamique négligée. Ainsi, lors d'un régime de glissement réel, la discontinuité de la commande génère des oscillations de haute fréquence autour de la surface de glissement. Ce phénomène est appelé broutement (chattering). Les principales causes de ce phénomène sont [126]:

- Les retards purs en série avec le système en boucle ouverte (retards inhérents au système, échantillonnage ...).

- Les dynamiques non modélisées des capteurs et des observateurs, qui retardent le moment où le régulateur prend conscience qu'il faut inverser la commande.

- Les dynamiques non modélisées des actionneurs et autres dynamiques rapides du système, qui retardent le moment où la commande est suffisamment forte pour rapprocher le système de la surface de glissement.

Tous ces phénomènes ont globalement l'effet de retarder l'application effective de la commande permettant de ramener le système sur la surface de glissement à partir du moment où il l'a quitté.

On parle aussi de chattering pour désigner l'oscillation haute fréquence de la commande (et non plus de la variable de glissement). Une autre cause de chattering, notamment sur la commande, est le bruit de mesure. En effet, une erreur de mesure quand l'état est très proche de la surface de glissement peut entraîner une erreur de signe de la commande, car cette dernière croit à tort que le système se trouve de l'autre côté de la surface. Ce phénomène est amplifié par la nécessité d'avoir des observateurs ou dérivateurs rapides, donc filtrant peu la mesure. Ce phénomène est amplifié par la nécessité d'avoir des observateurs ou dérivateurs rapides, donc filtrant peu la mesure.

Le phénomène de chattering peut être si pénalisant que l'utilisation d'une loi de commande par mode glissant peut être à proscrire dans certaines applications car son utilisation peut détériorer les performances, voire conduire à l'instabilité à cause du chattering sur la sortie. Le chattering de la commande, peut entraîner une usure prématurée des actionneurs ou des parties du système en raison de contraintes élevées. En excitant les modes propres de la dynamique non modélisée ou les fréquences de résonance du système correspondant au retard de commutation. Sur les systèmes mécaniques, ce contrôle peut provoquer des bruits et des oscillations à haute fréquence qui sont préjudiciables à leur structure. Sur les systèmes non mécaniques, les oscillations générées peuvent causer d'autres problèmes (réduction de la précision, création d'ondes électromagnétiques nocives ou d'autres ondes amplifiées par le système, ...).

#### **2.2.4 Quelques solutions pour réduire le chattering**

De nombreuses techniques ont été effectuées dans le but de réduire ou d'éliminer le phénomène de broutement. Parmi ces techniques les plus utilisées, nous citons :

##### **a. La couche limite (boundary layer)**

Elle consiste à remplacer la fonction de signe par une fonction continue approximative au voisinage de la surface de glissement  $s$  et faire saturer la fonction à l'extérieur[122]. Le régime glissant n'est plus confiné à  $s$ , mais à un voisinage de celle-ci. On dit alors que le

système à un régime pseudo-glissant. Cependant, cette méthode crée un compromis entre le niveau de réduction de chattering et la conservation de robustesse. Parmi les fonctions continues utilisées, on peut citer :

- **Fonction saturation** : Cela consiste à remplacer la fonction  $sign(s)$  par la droite de pente  $1/\delta$  à l'intérieur d'une bande de largeur située de part et d'autre de la surface de glissement. La discontinuité étant conservée à l'extérieur de cette bande. Son expression est donnée par :

$$sat(s, \delta) = \begin{cases} sign(s) & si |s| > \delta \\ \frac{s}{\delta} & si |s| \leq \delta \end{cases} \quad (2.19)$$

- **Fonction arctangente**

Elle est donnée par :

$$v(s, \delta) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{s}{\delta}\right) \quad (2.20)$$

Cette fonction (voir figure 2.2) donne une bonne approximation de la fonction de *signe* pour des valeurs suffisamment petites de  $\delta$ .

- **Fonction tangente hyperbolique** :

Une autre solution consiste à utiliser la fonction tangente hyperbolique (voir Figure 2.2).

$$v(s, \delta) = \tanh\left(\frac{s}{\delta}\right) \quad (2.21)$$

Avec  $0 < \delta < 1$ .

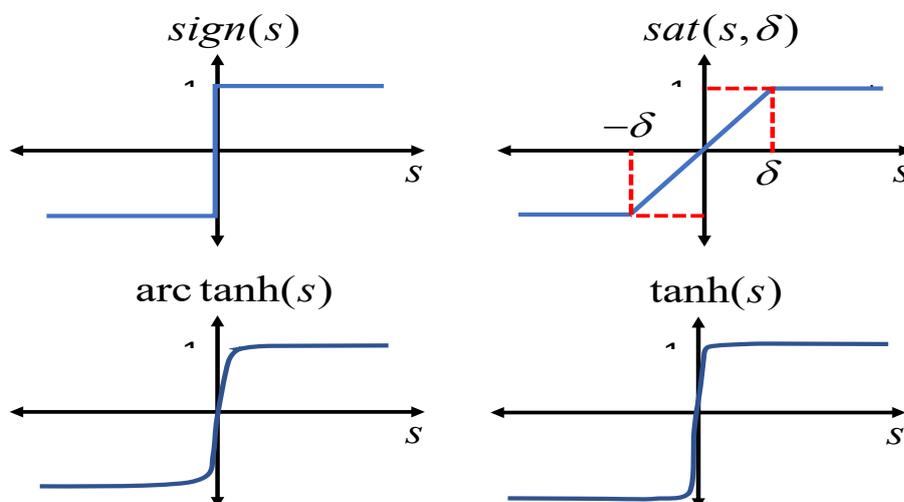


Figure 2. 2Fonction de *signe* et quelques fonctions approximatives.

### b. Observateur

L'idée de base de cette méthode consiste à générer un régime glissant dans une boucle contenant l'observateur de système au lieu de générer dans une boucle contenant le système réel. Etant donné que l'observateur est indépendant de la dynamique non modélisée, un mode glissant presque idéal se produit dans la boucle fermée de l'observateur [127]. Mais il est troublé par la fréquence d'échantillonnage finie ou par des dynamiques et les retards internes au système non modélisés. Cette méthode limite la robustesse, car l'observateur ne peut prendre en compte les perturbations non modélisées que lentement.

### 2.2.5 Commande par mode glissant des systèmes chaotiques

On considère une classe du troisième ordre non linéaire du système plasma thermique.

Le modèle mathématique du système de torche à plasma peut être écrit comme :

$$\ddot{F} + \Omega_2 \dot{F} + \Omega_1 \dot{F} + \Omega_0 F = \pm F^3 \quad (2.22)$$

Où  $F, \dot{F}, \ddot{F} \in \mathbb{R}$  sont quantités de champ de plasma et  $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{R}$  sont les paramètres de système. Les paramètres de (2.19) dépendent des propriétés thermo-physiques telles que le courant d'arc, la vitesse d'écoulement du gaz plasma et le dispositif de torche à plasma. On peut réécrire sans perte de généralité (2.23) comme :

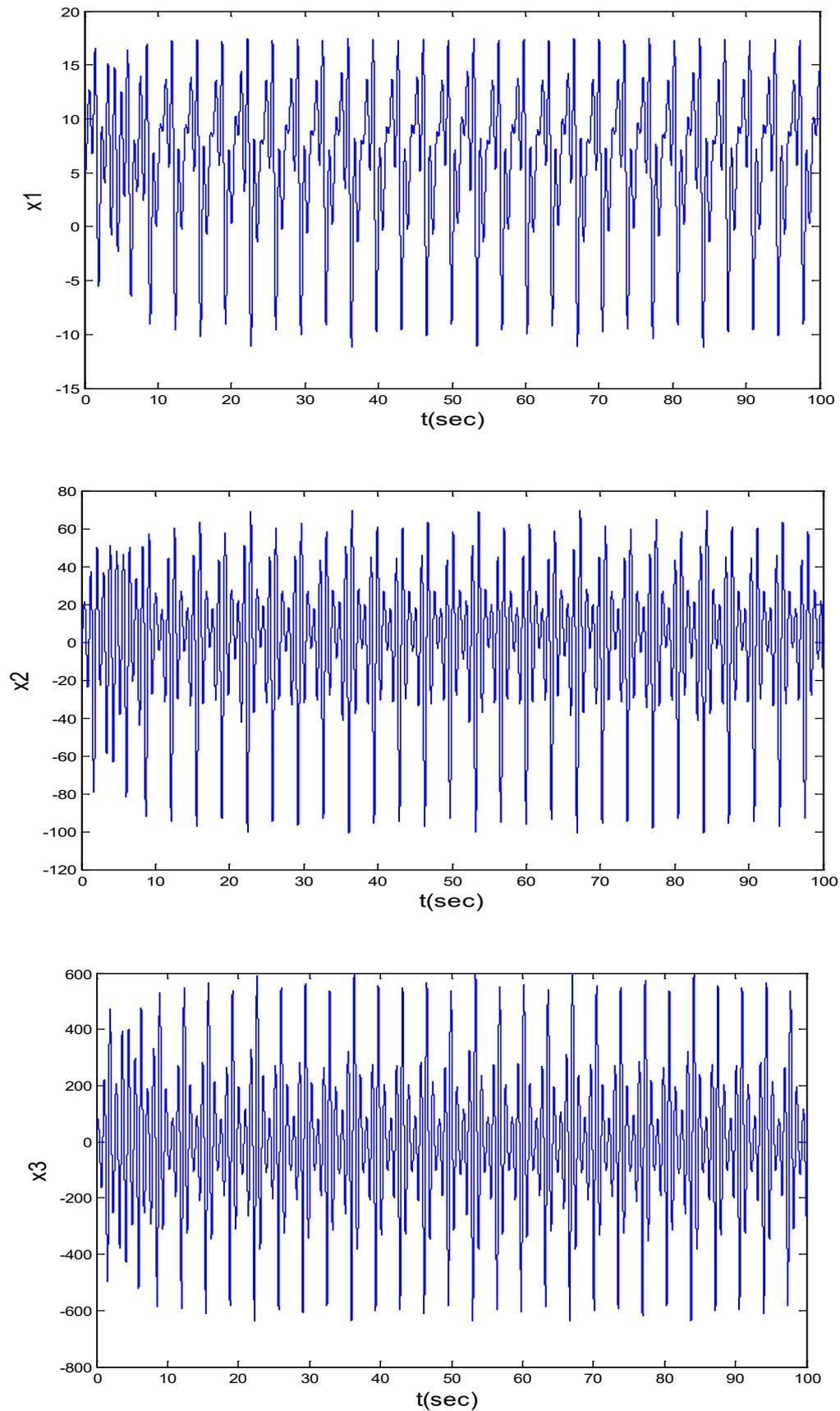
$$\ddot{F} + \Omega_2 \dot{F} + \Omega_1 \dot{F} + \Omega_0 F = -F^3 \quad (2.23)$$

$\Omega_0 = \mu, \Omega_1 = 50, \Omega_2 = 1, \mu$  est le paramètre de bifurcation. Le modèle d'allure d'état du système (2.23) est donné par [128] :

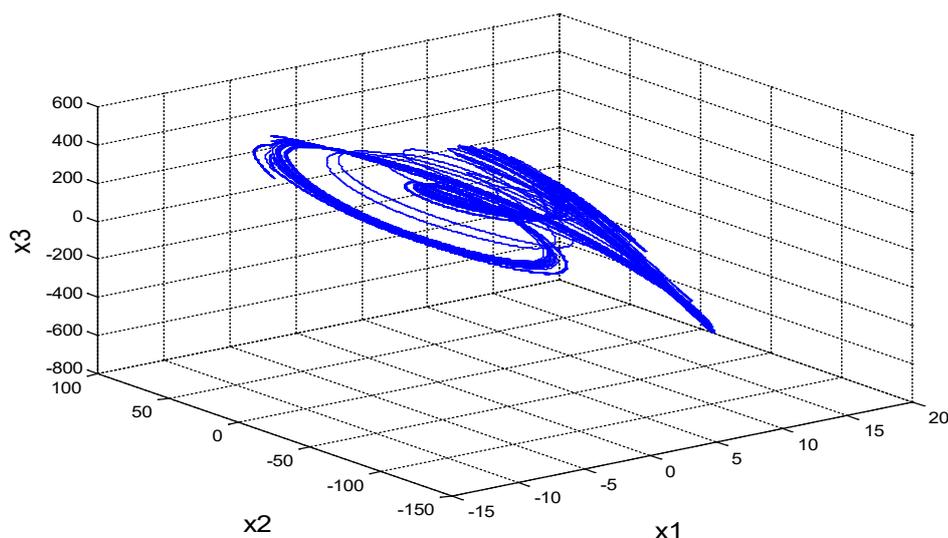
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\mu x_1 - 50x_2 - x_3 - x_1^3 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Les trois points d'équilibre du système sont :  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0), (\pm\sqrt{\mu}, 0, 0)$  pour  $\mu \leq 0$   $(0, 0, 0)$  est un point d'équilibre instable pour lequel  $\mu < 0$ , pour lequel les états du système ont un comportement chaotique.

La figure (2.3) illustre le comportement chaotique du système de torche à plasma.



**Figure 2. 3** Variation des trois états en fonction du temps pour le système de torche à plasma



**Figure 2. 4** Comportement chaotique dans l'espace d'état pour le système de torche à plasma

On applique le contrôleur SMC à ce système chaotique de torche à plasma :

Pour tester la robustesse en ajoutant la perturbation et l'incertitude additive compatible au troisième terme des équations d'état du système et en appliquant un signal de commande afin de contrôler le chaos et stabiliser le au point d'équilibre instable, le système torche à plasma est exprimé comme :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\mu x_1 - 50x_2 - x_3 - x_1^3 + \Delta f + d(t) + u(t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

La surface de glissement est :

$$s = e_3 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \quad (2.26)$$

Tel que :

$$\begin{cases} e_1 = e = x_1 - x_{ref} \\ e_2 = \dot{e} = x_2 - \dot{x}_{ref} \\ e_3 = \ddot{e} = x_3 - \ddot{x}_{ref} \end{cases} \quad (2.27)$$

Sa dérivée est:

$$\dot{s} = \dot{e}_3 + \lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_3 \quad (2.28)$$

La commande équivalente peut être calculée comme :

$$u_{eq} = \mu x_1 + 50x_2 + x_3 + x_1^3 - ax_3 - bx_2 - d(t) - \Delta f \quad (2.29)$$

Le signal de commande  $u$  est constitué de deux composants :  $u_c$  et  $u_{eq}$ .

$$u = u_{eq} + u_c \quad (2.30)$$

On a

$$u_c = -k \text{sign}(s) \quad (2.31)$$

Où :  $k$  est une constante positive qui représente le gain de la commande discontinue.

Donc la commande globale est donné par :

$$u = \mu x_1 + 50x_2 + x_3 + x_1^3 - ax_3 - bx_2 - d(t) - \Delta f - k \text{sign}(s) \quad (2.32)$$

La stabilité asymptotique est obtenue en utilisant la fonction de Lyapounov candidat:

$$V = \frac{1}{2} s^2 \quad (2.33)$$

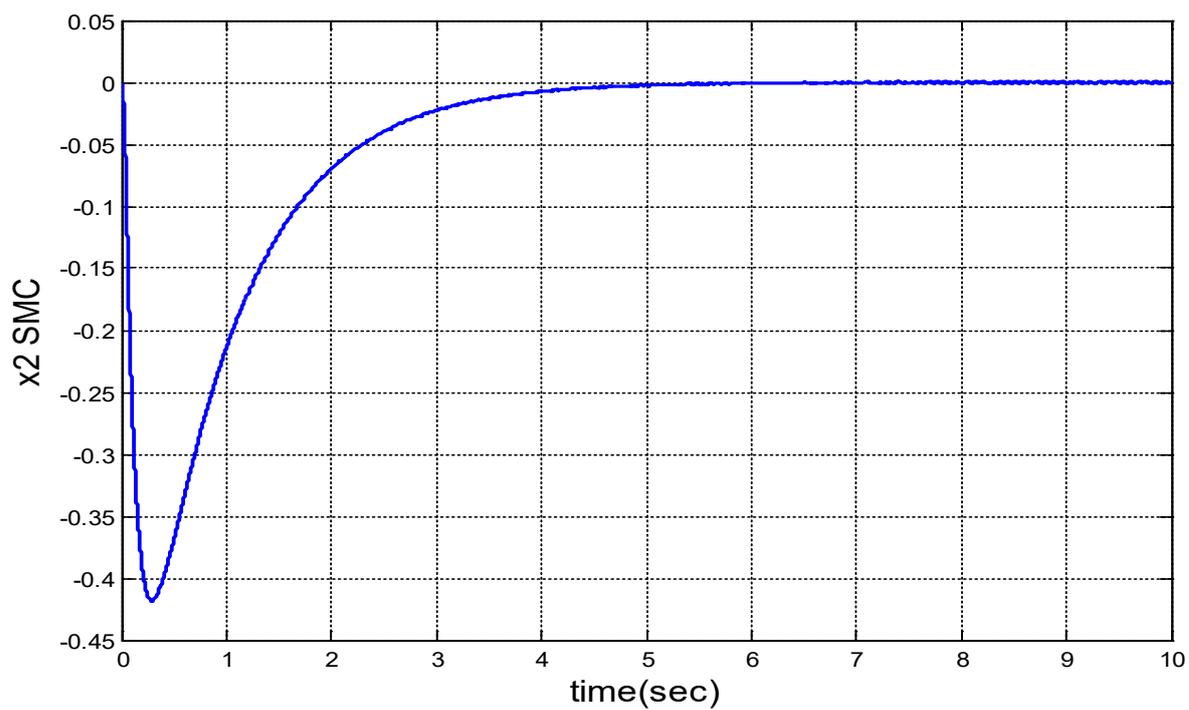
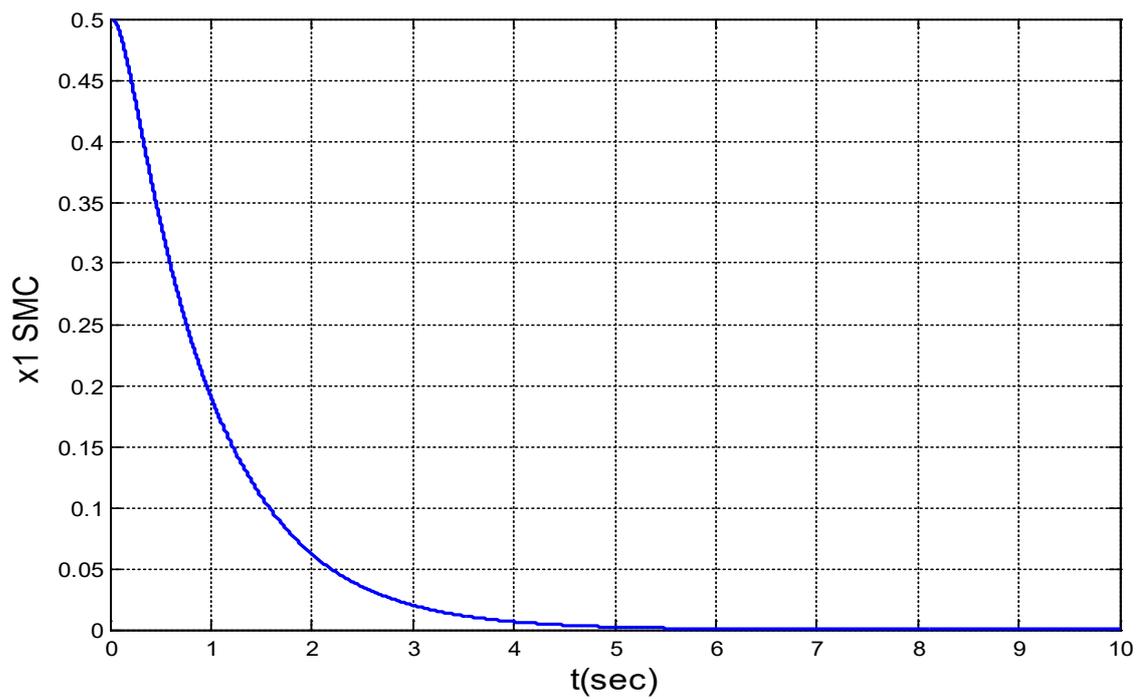
La dérivation de l'équation (2.33) nous donne :

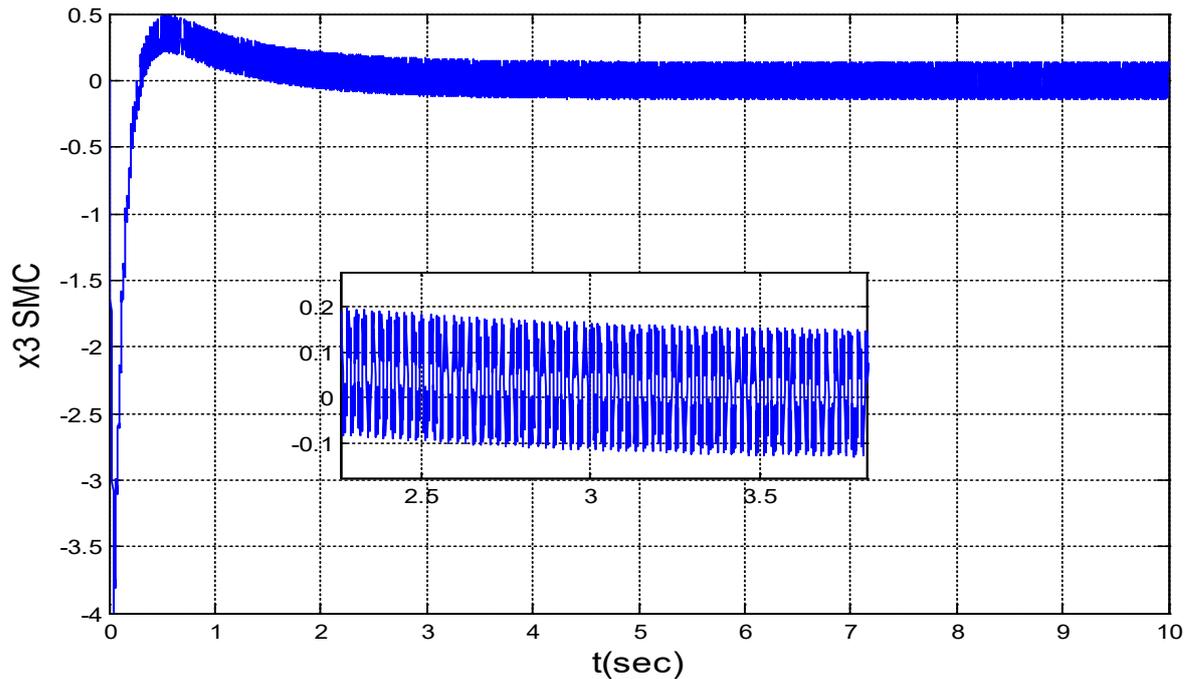
$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\dot{s} = s(\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_3 - \mu x_1 - 50x_2 - x_3 - x_1^3 - d(t) - \Delta f - u(t)) \\ \dot{V} &= -s.k.\text{sign}(s) = -k|s| \leq 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Il confirme la présence de l'atteinte de la condition ( $s\dot{s} < 0$ ), c'est-à-dire que la surface de glissement  $s = 0$  est une surface d'attraction. Il garantit la stabilité robuste du *SMC*.

### 2.2.5.1 Résultats de simulation

Les conditions initiales sont considérées  $x(0) = [0.5, 0, 0]^T$ . Le paramètre du système est considéré comme  $\mu = -130$ . Il a été choisi tel que (0,0,0) devient un point d'équilibre stable. Le système est exposé à des perturbations externes et présente une incertitude  $\Delta f = 0.2 \sin(px_1) \sin(px_2) \sin(px_3) |d(t)| \leq 5, |Af| \leq 0.2$ . Les paramètres de contrôle constants pour cette simulation sont évalués  $\lambda_1=2, \lambda_2=15, k=100$ .





**Figure 2. 5** Convergence des trois états vers le point d'équilibre  $x_{eq} = 0$ .

Les figures (2.4) et (2.5) montrent que la commande par mode glissant garantit la stabilité du système et la convergence des états au point d'équilibre stable. Bien que le signal de commande et l'évolution du troisième état présente des oscillations dû à la nature discontinue de la commande de commutation. La commande suivante est abordée pour surmonter le problème de broutement qui constitue l'inconvénient majeur de l'approche par mode glissant.

### 2.3 La commande synergétique

La théorie du contrôle synergétique a été développée et introduite de manière générale par le professeur Anatoly Klesnikov et son équipe [129]. C'est l'une des nouvelles options prometteuses dans le domaine du contrôle. Récemment, cette théorie a été appliquée avec succès dans le domaine de la commande des systèmes d'électronique de puissance. Son application à un convertisseur DC/DC élévateur a été présentée dans [130] et quelques aspects pratiques concernant la simulation et le hardware ont été discutés dans [131,132]. Parmi les applications pratiques réussies figure le chargeur de batteries [133].

La commande synergétique ne requiert pas la linéarisation du modèle. Elle utilise une macro-variable qui peut être fonction de deux ou plusieurs variables d'état du système. Un choix adéquat de la macro-variable garantit les performances requises.

### 2.3.1 Synthèse de la commande synergétique

Soit un système non linéaire défini par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (2.35)$$

Où  $x$  représente le vecteur d'état du système et  $u$  représente le vecteur de commande. La synthèse du contrôleur synergétique commence par la définition d'une macro-variable par le concepteur, afin de satisfaire le cahier des charges et prendre en considération d'éventuelles contraintes de contrôle. Elle est définie par :

$$\Psi(t) = \Psi(x, t) \quad (2.36)$$

Où  $\Psi$  est la macro-variable et  $\Psi(x, t)$  une fonction des variables d'état et du temps définie par l'utilisateur. L'objectif de la commande synergétique est de forcer le système à évoluer sur le domaine choisi au préalable par le concepteur :

$$\Psi = 0 \quad (2.37)$$

Les caractéristiques de la macro-variable peuvent être choisies par le concepteur, selon les paramètres de la commande, le temps de réponse, limitations de la commande, etc....

La macro-variable peut être une combinaison linéaire des variables d'état, et elle est forcée d'évoluer d'une façon désirée exprimée par une contrainte telle que :

$$T\dot{\Psi} + \Psi = 0, \quad T > 0 \quad (2.38)$$

La solution de l'équation (2.35) donne la fonction suivante :

$$\Psi(t) = \Psi_0 e^{-\frac{t}{T}} \quad (2.39)$$

D'après cette solution, la macro-variable  $\psi(t)$  converge vers l'attracteur ou le collecteur (manifold)  $\psi = 0$  pour différentes conditions initiales, où  $t$  représente le temps, et  $T$  est un paramètre de contrôle qui indique la vitesse de convergence du système en boucle fermée vers le domaine indiqué.

En tenant compte de la chaîne de la différentiation qui est donnée par :

$$\frac{d\Psi(x, t)}{dt} = \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (2.40)$$

La substitution de (2.29) et de (2.30) dans (2.33) permet d'écrire :

$$T \frac{d\Psi(x,t)}{dx} f(x,u,t) + \Psi(x,t) = 0 \quad (2.41)$$

En résolvant l'équation (2.38) pour  $u$ , la loi de commande est alors exprimée comme suit :

$$u = g(x, \Psi(x,t), T, t) \quad (2.42)$$

Il ressort clairement de l'équation précédente que la commande dépend non seulement des variables d'état du système, mais aussi de la macro-variable et de la constante de temps choisie. En d'autres termes, le concepteur peut choisir les caractéristiques du contrôleur en spécifiant une macro-variable et une constante de temps  $T$  appropriées. Dans la synthèse du contrôleur synergique, il est clair que le contrôleur agit sur le système non linéaire et une linéarisation où une simplification du modèle n'est pas nécessaire comme la théorie de commande traditionnelle. [134]

Par le choix approprié des macro-variables, le concepteur peut obtenir les caractéristiques intéressantes suivantes pour le système final :

- Stabilité globale
- Insensibilité vis-à-vis des paramètres
- Suppression de bruit.

Il est intéressant de noter que la loi de contrôle synergique garantit la stabilité globale sur le domaine choisi. Cela signifie qu'une fois la contrainte(2.35) atteinte, le système ne devrait pas la quitter, même avec des variations de paramètres suffisamment importantes. Cette propriété d'invariance aux perturbations est partagée par la technique de commande en mode glissant lors du glissement des trajectoires sur la surface de glissement. Des exemples d'applications sur des systèmes chaotiques sont donnés dans la section suivante pour illustrer la simulation et la mise en œuvre du contrôle synergétique.

### 2.3.2 Commande synergétique des systèmes chaotiques

Dans cette partie, nous utiliserons la commande synergétique pour le contrôle de quelques systèmes chaotiques :

#### 2.3.2.1 L'oscillateur de Duffing

L'oscillateur de Duffing fait partie des systèmes modèles qui permettent d'étudier une dynamique non linéaire. Il correspond à une équation différentielle non linéaire de la forme suivante:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + (\beta x^3 \pm \omega_0^2 x) = \lambda \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.43)$$

Cette équation diffère formellement de l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique en régime forcé par la présence d'un terme non linéaire en  $\beta x^3$ . Elle fut établie au début du siècle dernier par l'ingénieur George Duffing, dans le but de modéliser les vibrations forcées d'une machine industrielle. Un grand nombre de tels systèmes correspondent à une telle modélisation.

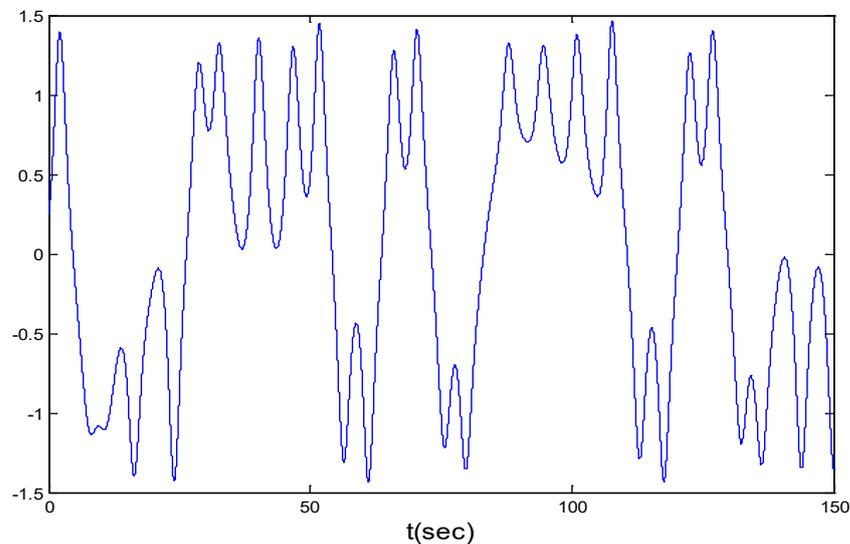
Si on prend  $\beta = \omega_0 = 1$  et un déphasage initial  $\phi = 0$  et un *signe -*, l'équation devient :

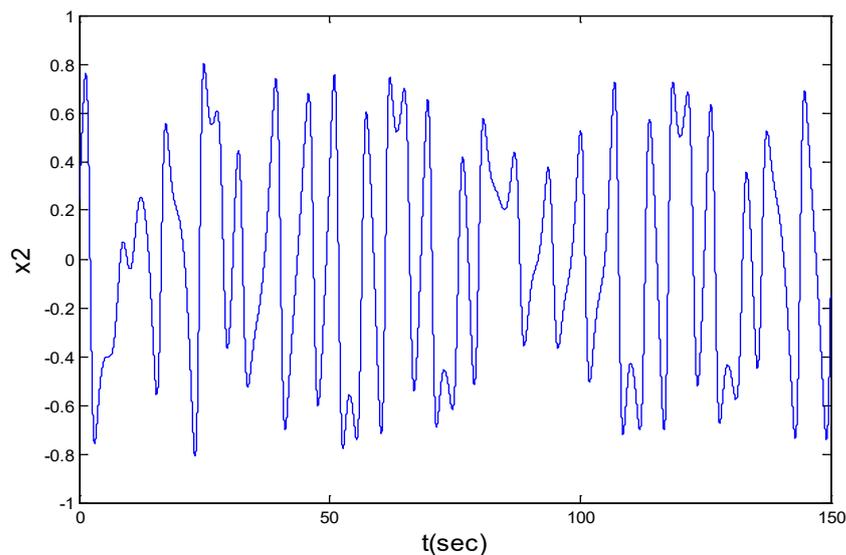
$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + (x^3 - x) = \lambda \cos(\omega t) \quad (2.44)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme d'un système non autonome d'équations différentielles du second ordre en posant  $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$  on obtient alors :

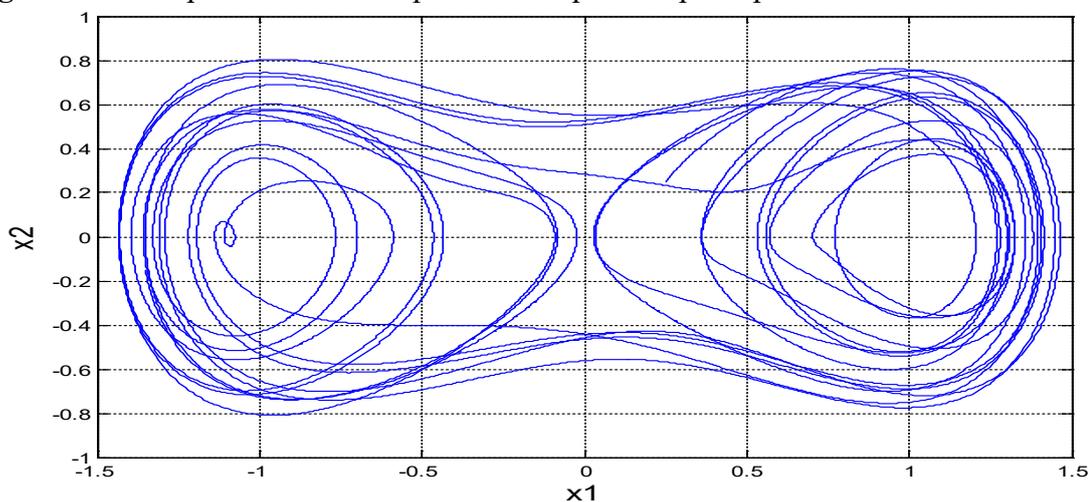
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\delta x_2 + x_1 - x_1^3 + \lambda \cos(\omega t) + u \end{cases} \quad (2.45)$$

Pour des valeurs des paramètres du système  $\delta = 0.25$  et  $\lambda = 0.3$  et des conditions initiales  $x_{10} = x_{20} = 0.25$ , le système présente un comportement chaotique, les figures suivantes illustrent ce phénomène.





**Figure 2. 6** Comportement chaotique dans l'espace-temps pour l'oscillateur de Duffing



**Figure 2. 7** Variation de l'état  $x_2$  en fonction de l'état  $x_1$  de l'oscillateur de Duffing

### 2.3.2.1.1 La synthèse de la commande synergétique pour l'oscillateur de Duffing

La synthèse de la commande synergétique commence par le choix d'une macro-variable. On choisit la macro-variable comme suit :

$$\Psi = e_2 + ke_1 \quad k > 0 \tag{2.46}$$

Tel que :

$$\begin{cases} e_1 = e = x_1 - x_{ref} \\ e_2 = \dot{e} = \dot{x}_1 - \dot{x}_{ref} \end{cases} \tag{2.47}$$

Où,  $k$  est une constante positive choisie par le concepteur.

L'évolution dynamique des macro-variables conduit les trajectoires du système à évoluer selon une façon appropriée exprimée par une contrainte choisie par le concepteur comme indiquée par l'équation :

$$T\dot{\Psi} + \Psi = 0 \quad (2.48)$$

T est une constante qui indique la vitesse de convergence du système en boucle fermée vers l'attracteur désiré.

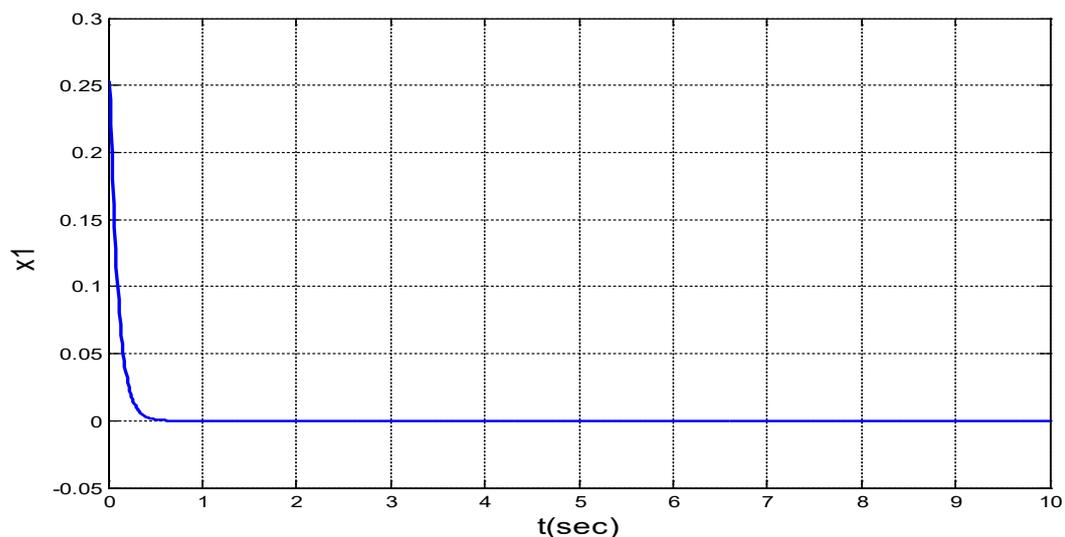
En remplaçant les équations (2.45) et (2.43) dans (2.32) et en réarrangeant, on obtient la loi de commande qui est donnée par :

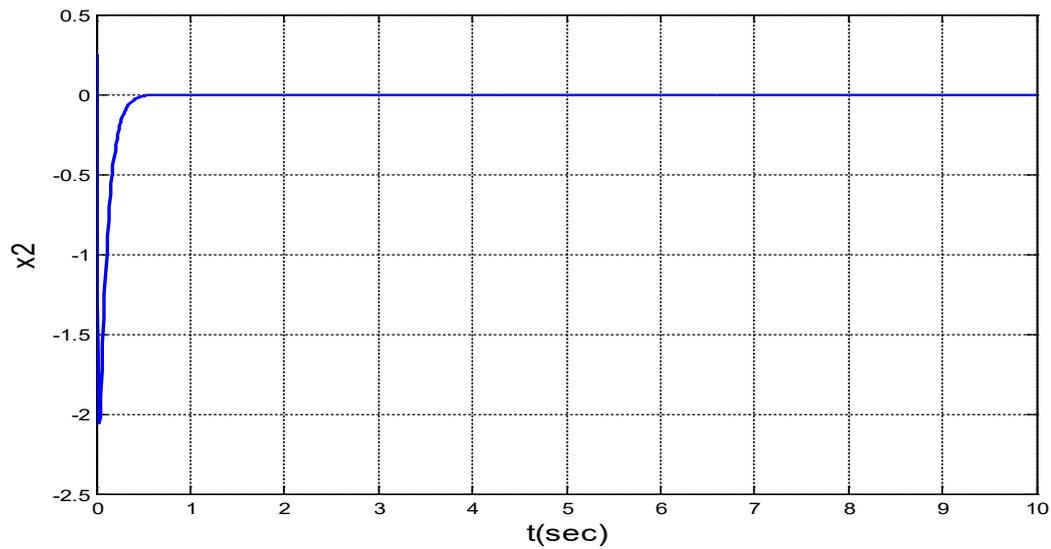
$$u = \delta x_2 - x_1 + x_1^3 - \lambda \cos(\omega t) + \ddot{x}_{ref} - k e_2 - \frac{\Psi}{T} \quad (2.49)$$

La loi de commande (2.46) force la trajectoire d'état du système à satisfaire l'équation (2.35), et donc converge vers l'attracteur avec une constante de temps T et y demeure durant toute la période.

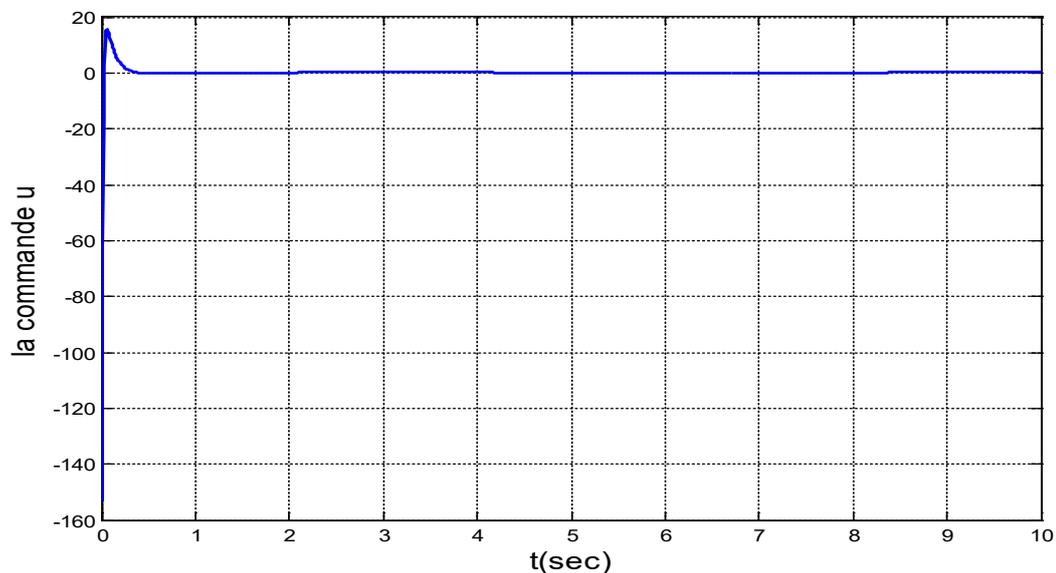
### 2.3.2.1.2 Résultats de simulation

Les résultats de simulation sont donnés pour les valeurs suivantes :  $\sigma = 0.25$ ,  $\lambda = 0.3$ ,  $\omega = 1$  et  $x_{10} = x_{20} = 0.25$ ,  $k = 11$ ,  $T = 0.02$ . Les figures montrant la convergence des états vers le point d'équilibre  $x_{ref} = x_{eq} = 0$  et la forme de la loi de commande pour l'oscillateur de Duffing sont données comme suit :





**Figure 2. 8** Convergence des états  $x_1, x_2$  vers le point d'équilibre pour l'oscillateur de Duffing



**Figure 2. 9** Variation de la loi de commande en fonction de temps pour l'oscillateur de Duffing

On remarque que les états ont convergé asymptotiquement vers l'état d'équilibre après l'application de loi de commande synergétique, donc le temps de convergence est très petit.

### 2.3.2.2 Système chaotique de Genesio-Tesi

Le système chaotique de Genesio-Tesi est défini par l'équation dynamique suivante :

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by + cy - y^2 = 0 \tag{2.50}$$

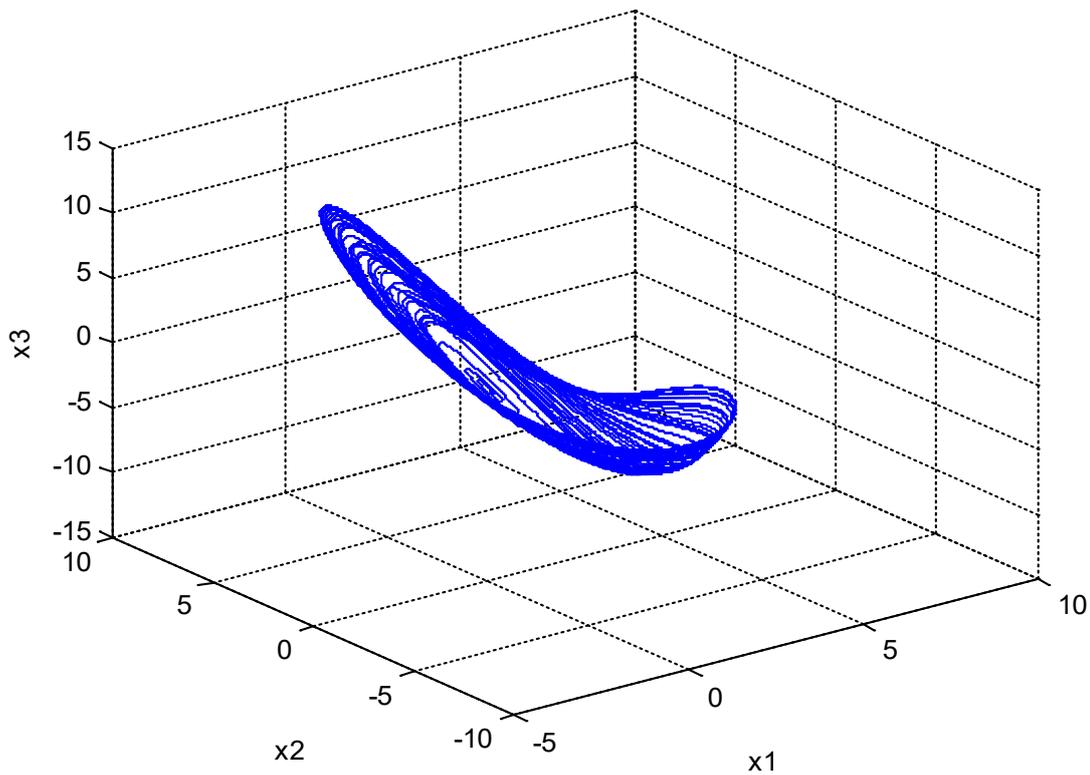
Avec  $a, b$  et  $c$  sont les constantes réelles positives satisfaisant  $ab < c$ .

Soit  $[x_1 x_2 x_3]^T = [y \dot{y} \ddot{y}]^T$  la représentation d'état correspondante au système (2.47).

Elle est donnée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -cx_1 - bx_2 - ax_3 + mx_1^2 + u \end{cases} \quad (2.51)$$

Pour les valeurs des paramètres suivantes :  $c=1.2$ ,  $b=2.92$  et  $a=6$ ,  $m=1$ , le système (2.48) représente un attracteur chaotique montré sur la figure 2.10.



**Figure 2. 10** Attracteur du système de Genesisio-Tesi

La figure 2.11 montre l'évolution des trajectoires des trois états du système dans le temps pour les conditions initiales suivantes :  $x_{10}=x_{20}=x_{30}=0.1$

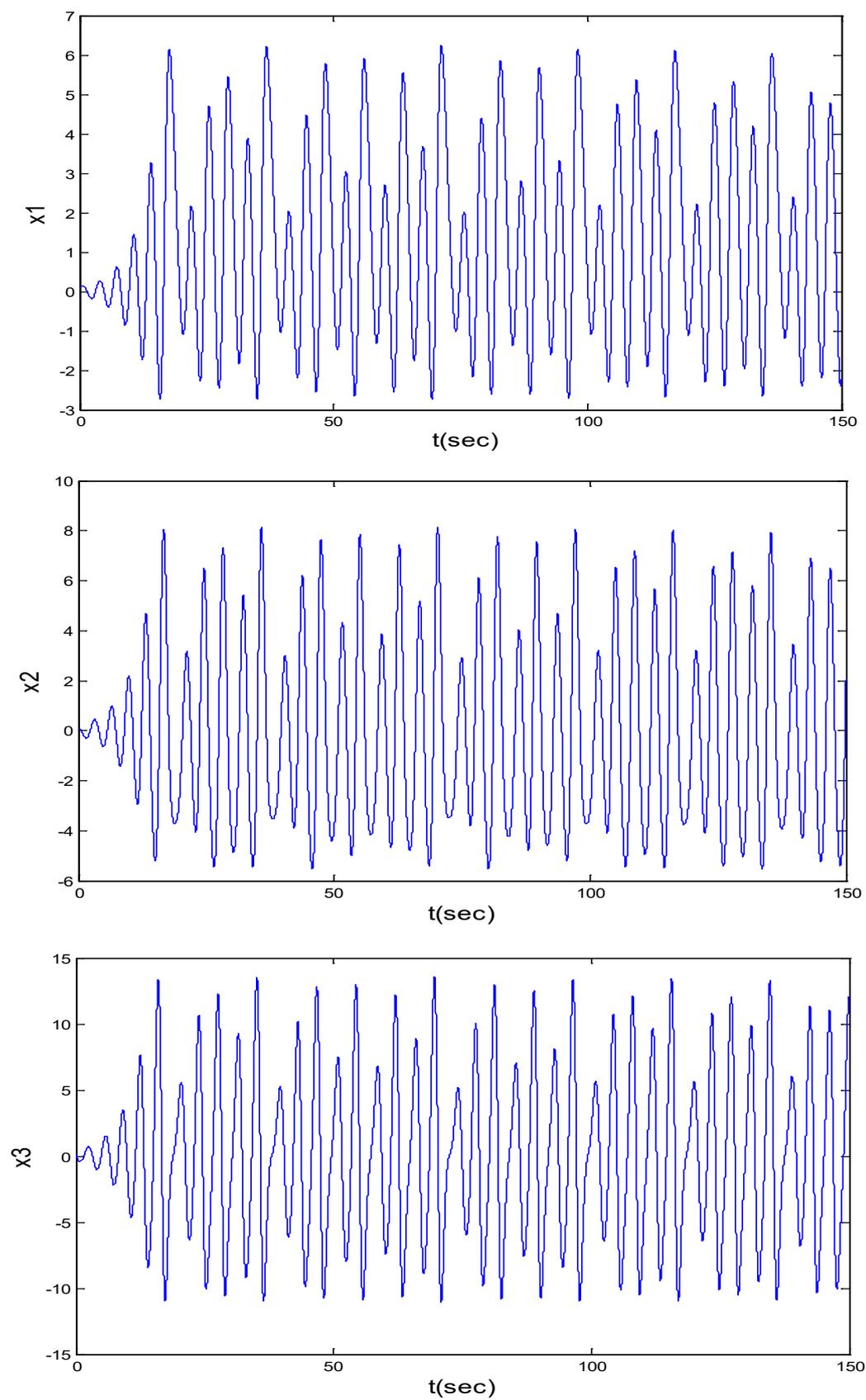


Figure 2. 11 Comportement chaotique dans l'espace temporel du système de Genesio-Tesi

### 2.3.2.2.1 Développement de la commande synergétique du système de Genesio-Tesi

La synthèse du contrôleur synergétique débute par la définition d'une macro-variable comme suit :

$$\Psi = e_3 + k_2 e_2 + k_1 e_1 \quad (2.52)$$

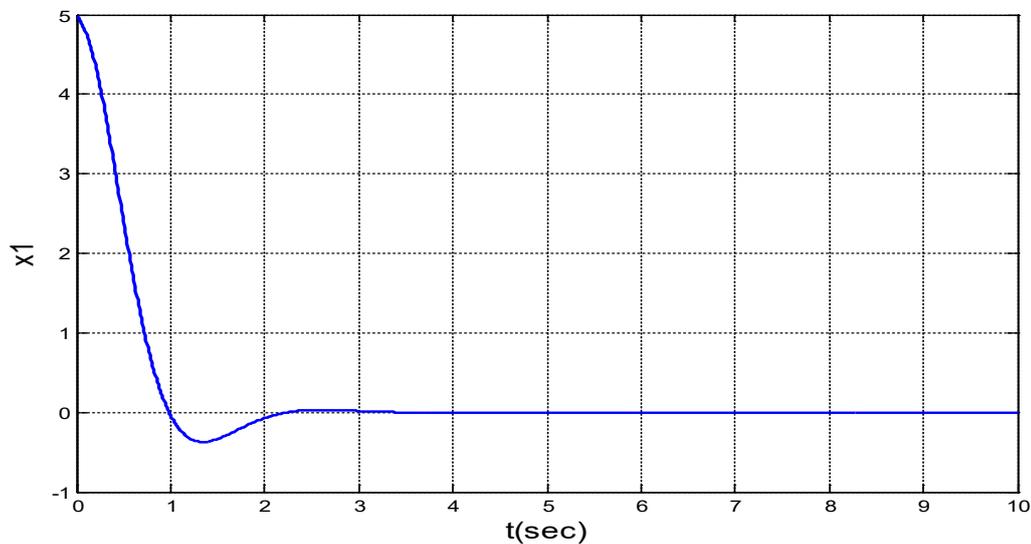
L'objectif de la commande synergétique est de forcer le système à évoluer sur le domaine choisi au préalable par le concepteur :  $\Psi = 0$

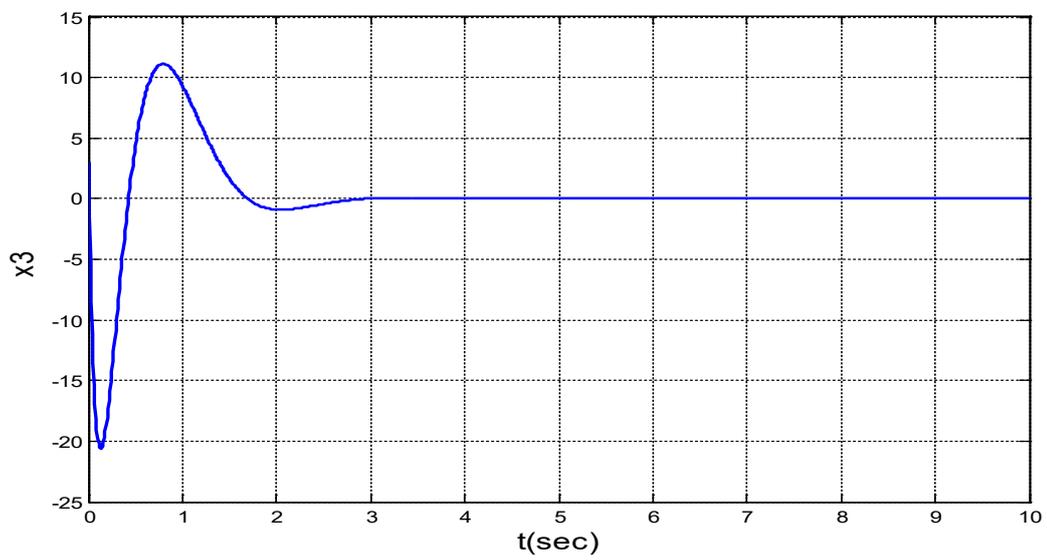
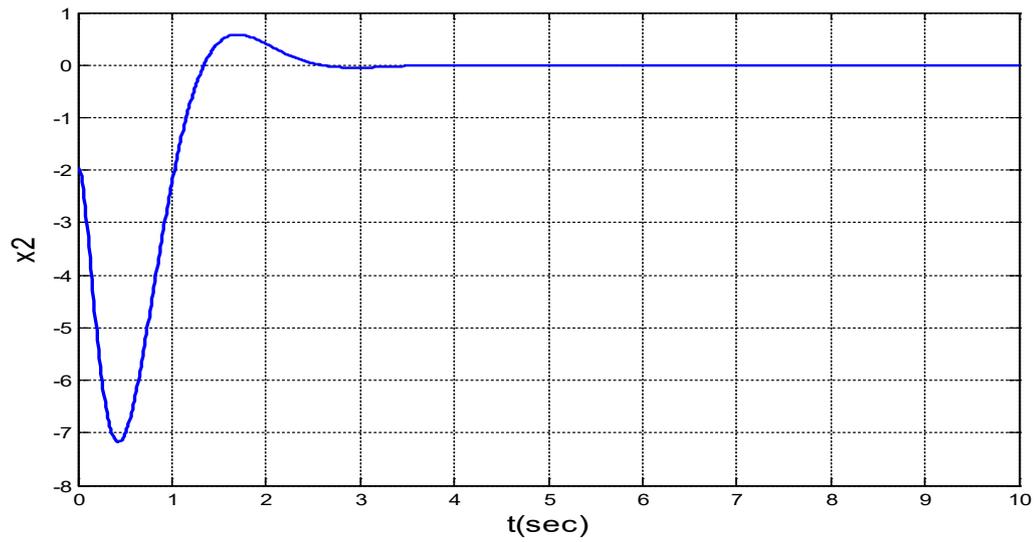
On utilise la même approche qu'avant pour déterminer la commande nécessaire pour stabiliser le système, ce qui donne :

$$u = cx_1 + bx_2 + ax_3 - mx_1^2 - \ddot{x}_{ref} - k_2 e_3 - k_1 e_2 - \frac{\Psi}{T} \quad (2.53)$$

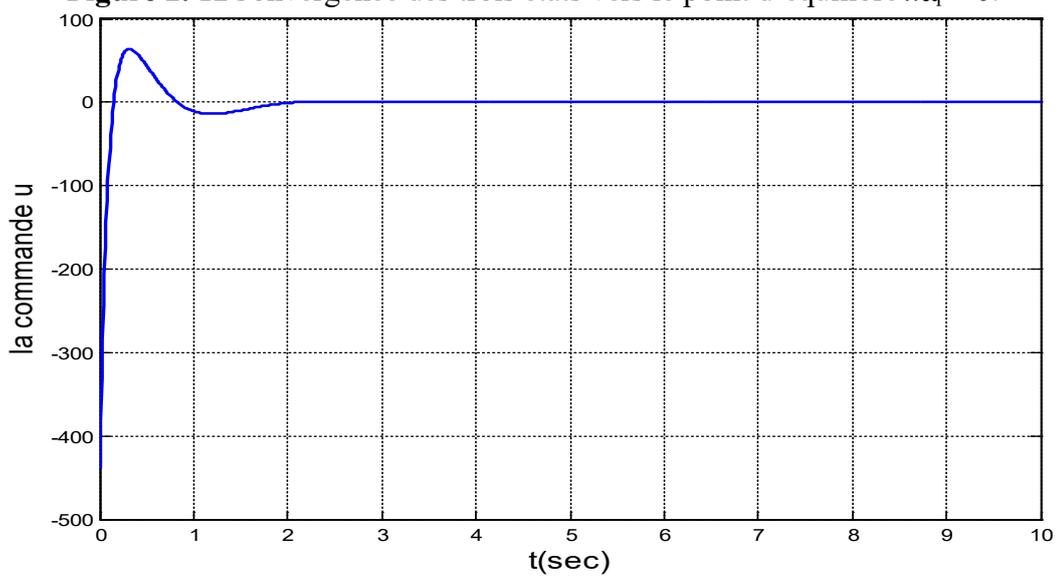
### 2.3.2.2.2 Résultats de simulation

Les résultats de simulation permettent d'obtenir les figures (2.12) et (2.13) ci-dessous avec les valeurs des paramètres suivantes:  $c=1.2$ ,  $b=2.92$  et  $a=6$ ,  $m=1, k_1=4$ ,  $k_2=10$ ,  $T=0.1$ ,  $x_{ref}=0$ . Les conditions initiales étant :  $x(0)=[5,-2,3]^T$





**Figure 2. 12** Convergence des trois états vers le point d'équilibre  $x_{eq} = 0$ .



**Figure 2. 13** Variation de loi de commande pour le système de Genesis-Tesi

On constate que le système n'est plus chaotique et les états ont convergé asymptotiquement vers l'état d'équilibre. On considère maintenant un autre système chaotique celui de la torche à Plasma en vue d'illustrer les performances de la commande synergétique.

### 2.3.2.3 Le système chaotique de torche à Plasma

Concédons le système chaotique de torche à Plasma décrit par le système d'équations d'état suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\mu x_1 - 50x_2 - x_3 - x_1^3 + u(t)\end{aligned}\tag{2.54}$$

L'objectif de la loi de commande est de contrôler le chaos et de stabiliser le point d'équilibre instable.

La macro-variable est choisie comme :

$$\Psi = x_3 + ax_2 + bx_1\tag{2.55}$$

$a, b$  sont des constants positives qui représentent le régime souhaité.

La dérivée temporelle de la macro-variable est :

$$\dot{\Psi} = \dot{x}_3 + ax_3 + bx_2\tag{2.56}$$

On utilise la même procédure que dans l'approche synergétique, la loi de commande synergétique de ce système est obtenue comme suit :

$$u(t) = \mu x_1 + (50 - b)x_2 + (1 - a)x_3 + x_1^3 - \frac{\Psi}{T}\tag{2.57}$$

Pour prouver la stabilité asymptotique on choisit la fonction de Lyapunov comme suit :

$$V = \frac{1}{2} \Psi^T \Psi\tag{2.58}$$

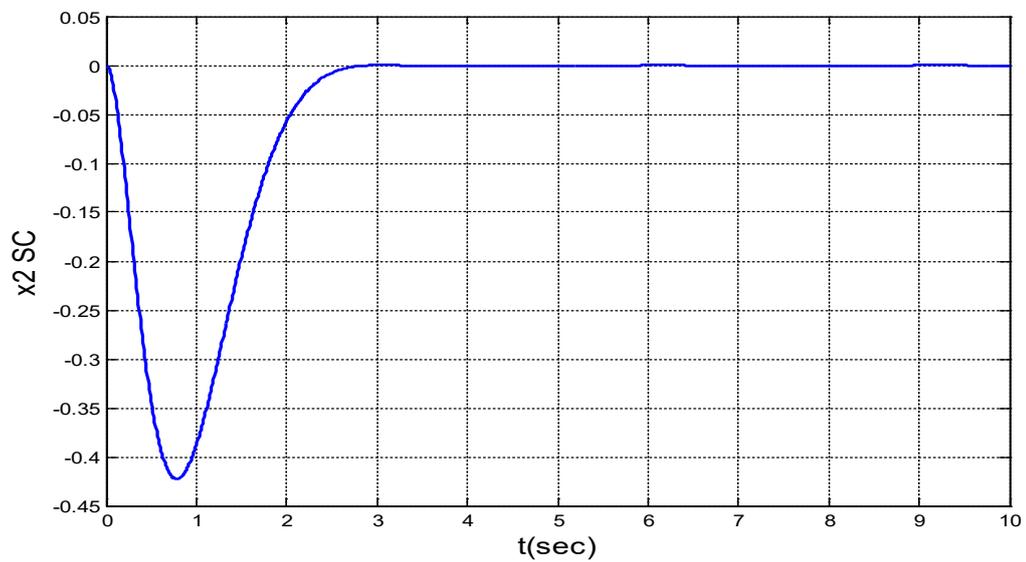
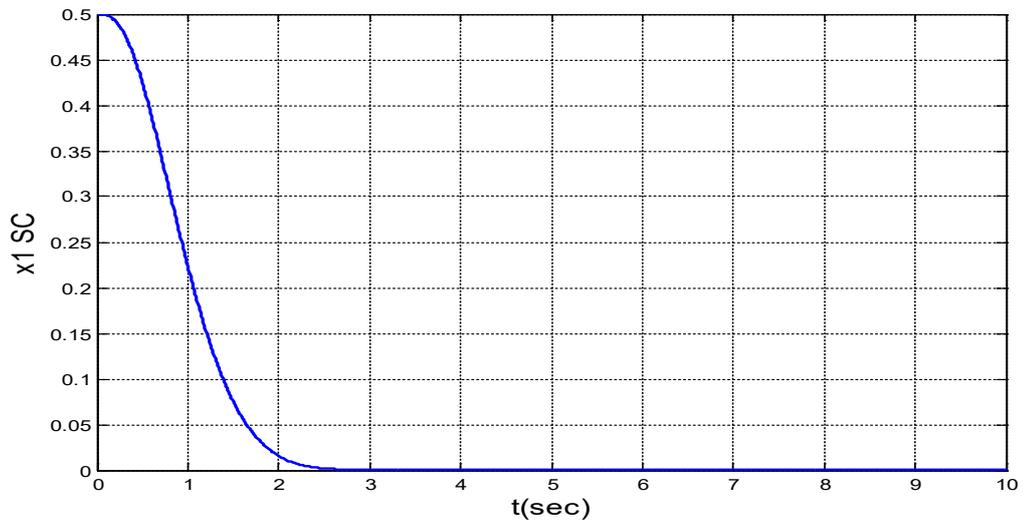
Cela conduit, après différenciation puis en utilisant (2.55) à :

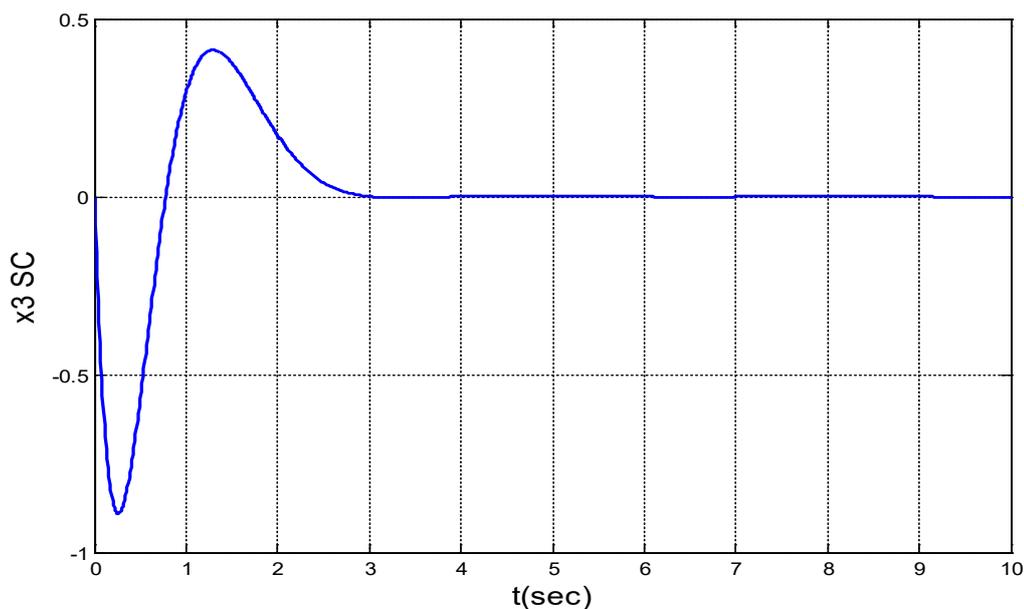
$$\dot{V} = \Psi \dot{\Psi} = -\frac{1}{T} \Psi^2 < 0\tag{2.59}$$

Alors la stabilité est garantie.

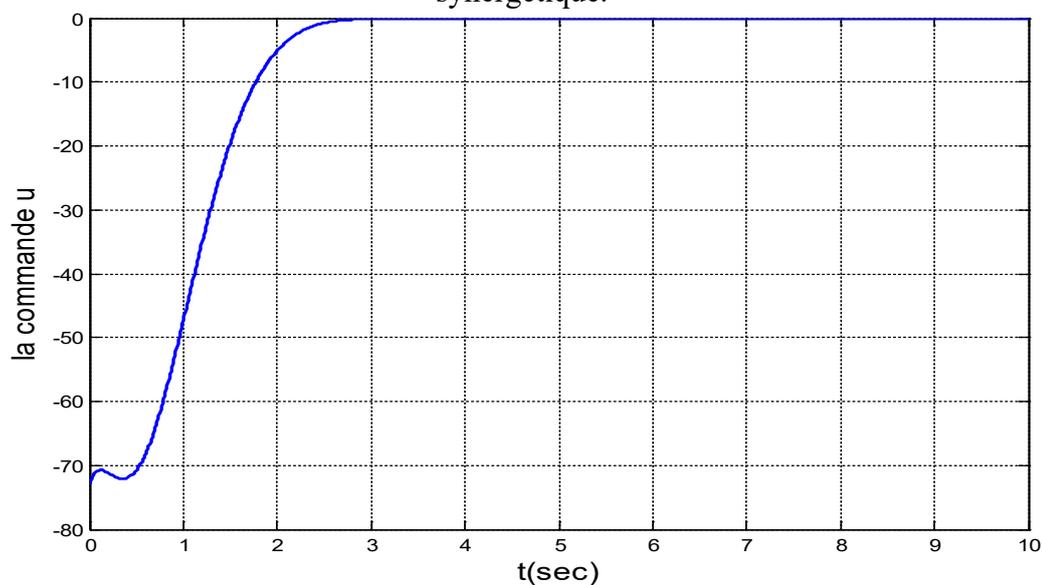
#### 2.3.2.3.1 Résultats de simulation

Les conditions initiales sont considérées  $x(0) = [0.5, 0, 0]^T$ . Le paramètre du système est considéré comme  $\mu = -130$ . Les paramètres de contrôle SC sont évalués :  $a=4$ ,  $b=8$ ,  $T=0.5$ .





**Figure 2. 14** Convergence des états vers le point d'équilibre  $x_{eq} = 0$  par la commande synergétique.



**Figure 2. 15** Variation de loi de commande pour le système plasma à torche par la commande synergétique

A travers les résultats de simulation de la commande synergétique de la torche à plasma on remarque que le temps de convergence a été réduit et le broutement qui apparaissait dans les simulations par SMC est éliminé.

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné les notions de base de la théorie de la commande par mode glissant et la commande synergétique. Ensuite, nous avons appliqué cette dernière approche pour stabiliser les systèmes chaotiques au point d'équilibre pour les systèmes

chaotiques autonomes du troisième ordre tels que le système de Genesio-Tesi et le système de torche à plasma et pour les systèmes chaotiques non autonomes du second ordre tels que les oscillateurs de Duffung.

L'intérêt majeur de ces techniques non linéaires réside d'une part dans la simplicité de la conception de la loi de commande et d'autre part, la haute performance pour assurer la stabilité des systèmes chaotiques. D'après les résultats de simulation, on peut conclure que la loi de commande synergétique montre une bonne performance de poursuite et garanti la stabilité asymptotique des systèmes avec élimination du phénomène de broutement.

Pour améliorer la robustesse par la réduction de temps de convergence vers le point d'équilibre, l'approche synergétique terminale a été proposée pour assurer une stabilisation rapide et en temps fini des systèmes chaotiques au chapitre suivant.

## CHAPITRE 3

### Techniques de Commande Synergétique Avancée des systèmes chaotiques

3.1	Introduction.....	70
3.2	La commande Adaptative .....	71
3.3.1	Principe de la commande adaptative par une fonction de Lyapunov .....	72
3.3.2	Synthèse de la commande adaptative synergétique pour les systèmes chaotiques..	72
3.3.3	Résultats de simulation .....	74
3.3	La commande synergétique optimisée par l'essaim de particules .....	76
3.3.1	Résultats de simulation .....	79
3.4	La Commande synergétique terminale .....	82
3.3.1	Synthèse de la commande terminale synergétique pour le système chaotique.....	83
3.4.1.1	Résultats de simulation .....	85
3.5	Resultats des tests Hardware-in-the-loop (HIL) .....	87
3.3.1	La validation expérimentale des résultats des tests Hardware-in-the-loop (HIL) ...	88
3.6	Conclusion .....	91

---

### 3.1 Introduction

La commande synergétique est une nouvelle approche de contrôle qui force le système à suivre une trajectoire préalablement choisie par le concepteur, basée sur le même principe d'invariance que l'on retrouve dans le contrôle par glissement mais sans le phénomène de broutement (bavardage). Elle en diffère dans le fait que la commande est toujours continue et utilise une macro-variable qui peut être fonction de deux ou plusieurs variables d'état du système.

Récemment, l'approche synergétique a attiré l'attention de nombreux chercheurs où elle a été classée comme l'une des techniques de contrôle robuste les plus prometteuses en raison des résultats satisfaisants qui ont été prouvés théoriquement et expérimentalement dans divers domaines [135]. Cette stratégie a été appliquée avec succès dans le domaine de contrôle des

convertisseurs statiques de puissance DC-DC [38,136,137,], dans un système de chargement de batterie [138] et dans la conception de stabilisateurs d'un système de puissance [139-142 ,].

Une autre approche importante dans le traitement des systèmes non linéaires incertains est le contrôle adaptatif, qui s'est avéré très utile pour résoudre les problèmes de contrôle. Cette étude propose un schéma d'estimation adaptative qui est intégré dans un contrôleur synergétique pour obtenir une convergence rapide même en présence des perturbations et des incertitudes.

Afin d'atteindre le point d'équilibre dans un temps fini et de réduire l'erreur d'état stable autant que possible, l'approche Terminal Synergétique (TSC) a été introduite dans plusieurs travaux de recherche récents pour surmonter le problème de la stabilité asymptotique et améliorer ainsi la robustesse du système.

La commande adaptative synergétique et la commande synergétique terminale sont développées dans la section suivante pour un système chaotique. L'efficacité de l'approche synergétique terminale (TSC) proposée a été prouvée par la méthode de test en temps réel Hardware-in-the-loop (HIL) en utilisant l'outil Simulink.

### **3.2 La commande Adaptative**

La commande adaptative est utilisée dans les années 1950 comme solution pour contrôler les systèmes fonctionnant dans des conditions et des environnements variables au fil du temps. Dans les années 1960, plusieurs contributions de la théorie de la commande ont été introduites dans le développement du contrôle adaptatif, telles que l'approche d'état et les théories de stabilité. Au début des années 1970, différentes méthodes d'estimation ont été introduites dans le contrôle adaptatif.

L'étude de la stabilité du contrôle adaptatif a commencé au début des années 1980, en parallèle avec une rapide évolution en micro-électronique, qui a permis d'implémenter des contrôleurs adaptatifs sur les systèmes de microprocesseurs.

À l'heure actuelle, la commande adaptative revêt une grande importance dans le domaine du contrôle. Ce contrôle est répandu dans les systèmes possédant des incertitudes, des perturbations structurelles et des changements environnementaux. Le principal objet de la commande adaptative est la synthèse de la loi d'adaptation pour l'ajustement automatique en temps réel des régulateurs des boucles de commande. Par la suite, réaliser ou maintenir un certain niveau de performance quand les paramètres du procédé à commander sont difficiles à

déterminer ou varier avec le temps. L'intérêt de la commande adaptative se situe principalement au niveau des perturbations paramétriques, c'est-à-dire, travaille sur les caractéristiques du processus à contrôler et des perturbations qui influent sur les variables à réguler ou à contrôler.

### 3.3.1 Principe de la commande adaptative par une fonction de Lyapunov

La conception d'une commande adaptative utilisant la fonction de Lyapunov consiste à calculer une loi de commande et une loi de mise à jour des paramètres pour s'assurer que la dérivée de la fonction de Lyapunov est négative.

L'approche consiste donc à trouver un triplet (fonction de Lyapunov, loi de commande, loi d'adaptation) qui répond aux spécifications. Les tâches s'effectuent simultanément et la dynamique de l'estimation est prise en compte et/ou maîtrisée afin d'éviter tout effet destructeur. C'est grâce à cette propriété que ce type de méthode présente un intérêt pour la commande des systèmes non linéaires. Le design par Lyapunov est resté, jusqu'à récemment, limité aux systèmes linéaires. Cette limitation était principalement due à l'absence, pour les systèmes non linéaires, d'une méthode systématique de calcul de "bonnes" fonctions de Lyapunov.

### 3.3.2 Synthèse de la commande adaptative synergétique pour les systèmes chaotiques

Rappelons le système chaotique de torche à Plasma du chapitre précédent :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\mu x_1 - 50x_2 - x_3 - x_1^3 + \Delta f + d(t) + u(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$\Delta f$  : est une partie incertaine du système chaotique,  $d(t)$  est la perturbation externe du système (3.1).

Recherchons la loi de commande adaptative pour la stabilisation du système au voisinage du point d'équilibre par la méthode Synergétique.

Commençons par la définition d'une macro variable qui est choisie comme suit :

$$\Psi = x_3 + ax_2 + bx_1 \quad (3.2)$$

L'objectif de contrôle est de forcer le système à évoluer vers l'attracteur  $\Psi = 0$ . L'évolution dynamique désirée des macro-variables est :

$$T\dot{\Psi} + \Psi = 0 \quad (3.3)$$

Où  $T$  est un paramètre de conception indiquant la vitesse de convergence vers le collecteur spécifié par la macro-variable.

**Hypothèse 1.** En général, on suppose que l'incertitude et la perturbation sont bornées comme suit :  $|d(t)| \leq \alpha$ ,  $|\Delta f| \leq \beta$

Où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes inconnues positives.

La loi de commande  $u$  est donnée par l'équation

$$u(t) = \mu x_1 + 50x_2 + x_3 + x_1^3 - \hat{\alpha} - \hat{\beta} - \frac{\Psi}{T} - ax_3 - bx_2 \quad (3.4)$$

Où  $a, b$  et  $T$  sont des constants,  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\beta}$  sont des estimations pour  $\alpha$  et  $\beta$ , respectivement.

Les lois adaptatives sont les suivantes :

$$\dot{\hat{\alpha}} = |\Psi| \quad \hat{\alpha}(0) = \alpha_0 \quad \dot{\hat{\beta}} = |\Psi| \quad \hat{\beta}(0) = \beta_0 \quad (3.5)$$

**Preuve.** Considérons la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V(t) = \frac{1}{2}\Psi^2 + \frac{1}{2}\tilde{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\tilde{\beta}^2 \quad (3.6)$$

Il est clair que  $V$  est une fonction définie positive, alors en prenant la dérivée de  $V(t)$  par rapport au temps  $t$ , on a :

$$\dot{V}(t) = \Psi\dot{\Psi} + (\hat{\alpha} - \alpha)\dot{\hat{\alpha}} + (\hat{\beta} - \beta)\dot{\hat{\beta}} \quad (3.7)$$

Depuis  $\dot{\Psi} = \dot{x}_3 + ax_2 + bx_1$ , donc remplaçant  $\dot{\Psi}$  dans l'équation ci-dessus, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= \Psi(\dot{x}_3 + ax_3 + bx_2) + (\hat{\alpha} - \alpha)\dot{\hat{\alpha}} + (\hat{\beta} - \beta)\dot{\hat{\beta}} \\
 &= \Psi(-\mu x_1 - 50x_2 - x_3 - x_1^3 + \Delta f + d(t) + u(t) + ax_3 + bx_2) + \\
 &(\hat{\alpha} - \alpha)\dot{\hat{\alpha}} + (\hat{\beta} - \beta)\dot{\hat{\beta}}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

En introduisant les lois adaptatives dans (3.5) dans le côté droit de l'équation (3.9), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= \Psi(-\mu x_1 + 50x_2 + x_3 - x_1^3 + \Delta f + d(t) + u(t) + ax_3 + bx_2) + \\
 &(\hat{\alpha} - \alpha)|\Psi| + (\hat{\beta} - \beta)|\Psi|
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

En substituant u(t) de (3.4) à (3.9), cela donne

$$V(t) = \Psi[-(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) + \Delta f + d(t) - \frac{\Psi}{T}] + (\hat{\alpha} - \alpha)|\Psi| + (\hat{\beta} - \beta)|\Psi| \tag{3.10}$$

Il est clair que :

$$\dot{V}(t) \leq \Psi \left[ -(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) - \frac{\Psi}{T} \right] + [|\Delta f| + |d(t)|]|\Psi| + (\hat{\alpha} - \alpha)|\Psi| + (\hat{\beta} - \beta)|\Psi| \tag{3.11}$$

Par l'hypothèse 1, on peut obtenir

$$\dot{V}(t) \leq \Psi \left[ -(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) - \frac{\Psi}{T} \right] + [\alpha + \beta]|\Psi| + (\hat{\alpha} - \alpha)|\Psi| + (\hat{\beta} - \beta)|\Psi| \tag{3.12}$$

Il est clair que

$$\dot{V}(t) \leq \Psi \left[ -\frac{\Psi}{T} \right] - (\hat{\alpha} + \hat{\beta})|\Psi| + (\alpha + \beta)|\Psi| + (\hat{\alpha} + \hat{\beta})|\Psi| - (\alpha + \beta)|\Psi| \tag{3.13}$$

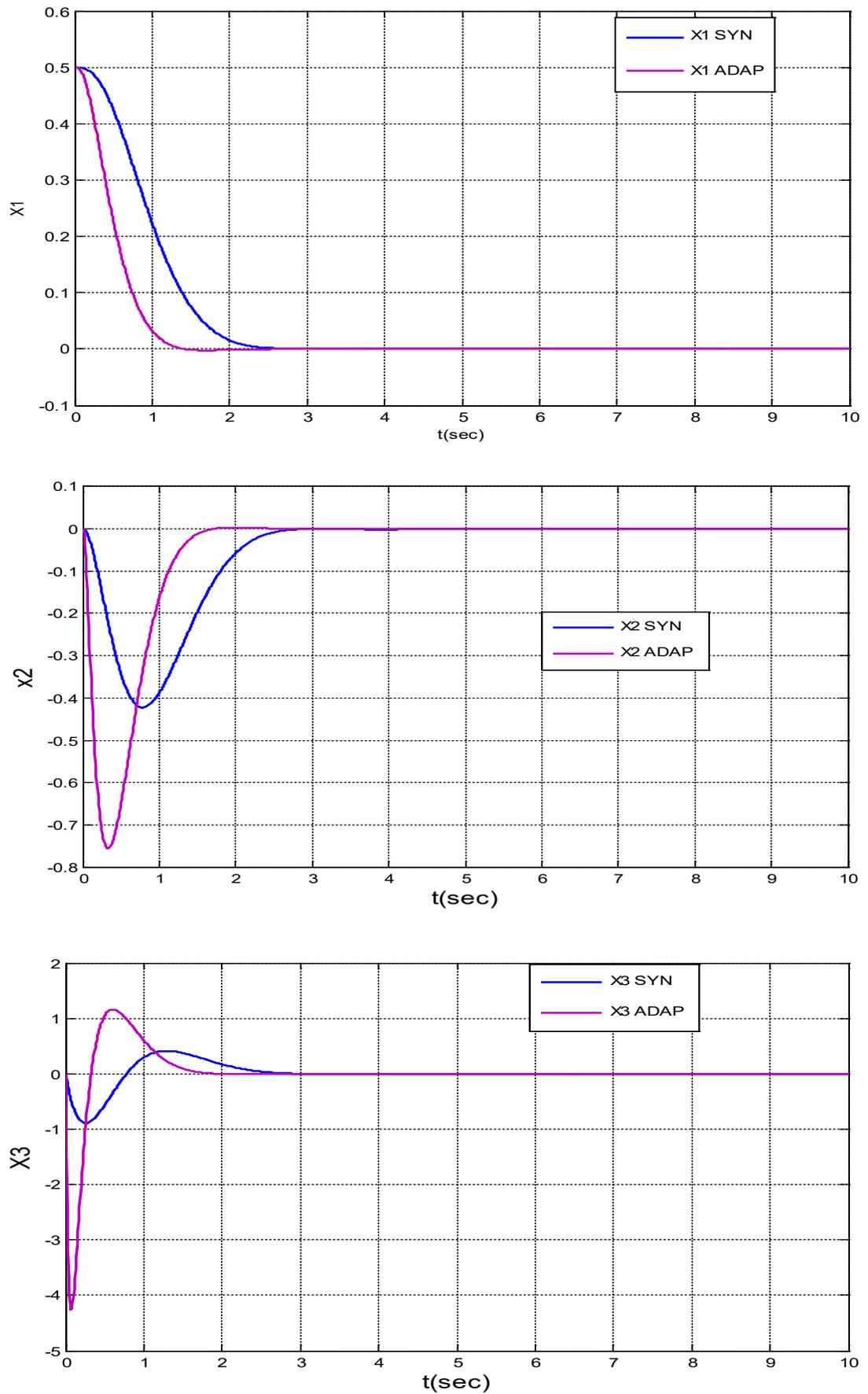
Donc :

$$\dot{V}(t) = -\frac{1}{T}\Psi^2 \Rightarrow \dot{V}(t) \leq 0 \tag{3.14}$$

Par conséquent, le système en boucle fermée est asymptotiquement stable et la preuve est complète.

### 3.3.3 Résultats de simulation

Les conditions initiales sont considérées  $x(0) = [0.5, 0, 0]^T$ . Le paramètre du système est considéré comme  $\mu = -130$ . Le système est exposé à des perturbations externes et présente une incertitude  $\Delta f = 0.2 \sin(px_1) \sin(px_2) \sin(px_3)$   $|d(t)| \leq 5$ ,  $|\Delta f| \leq 0.2$ . Les paramètres de contrôle ASC sont évalués :  $a=4$ ,  $b=14$ ,  $T=0.05$ .



**Figure 3. 1** Convergence des trois états vers le point d'équilibre  $x_{eq} = 0$

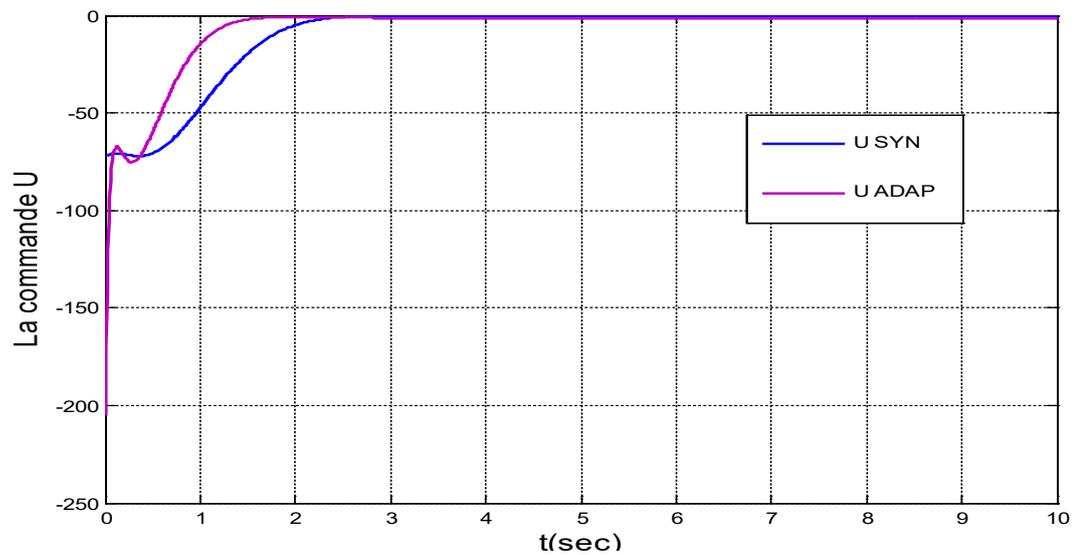


Figure 3. 2Variation de loi de commande

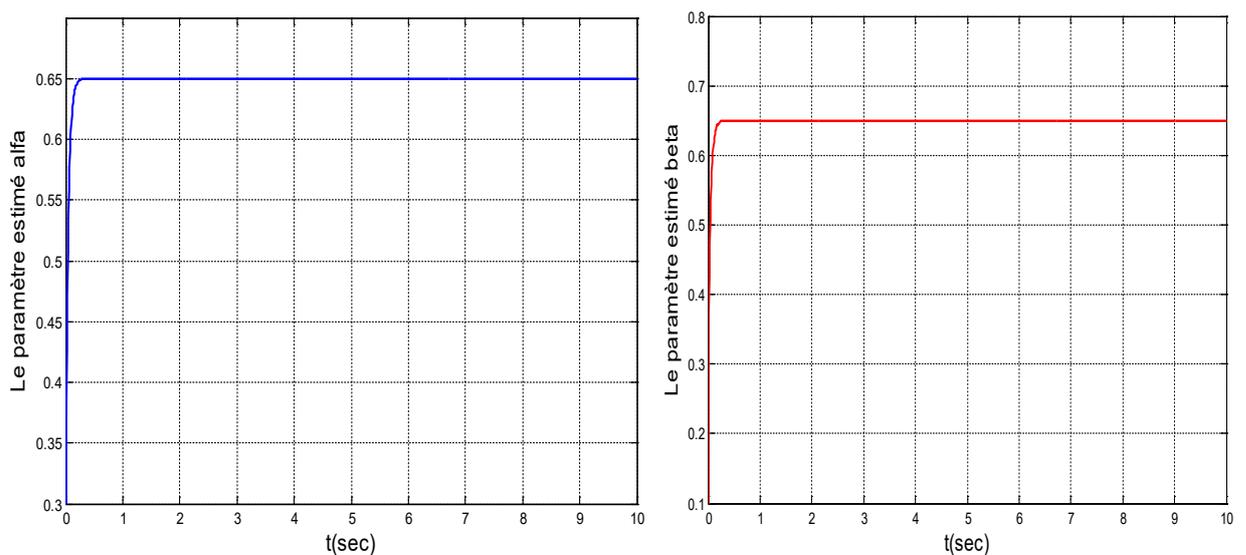


Figure 3. 3 Les paramètres estimés

D'après les résultats de la simulation, il est clair que les résultats théoriques obtenus sont réalisables et efficaces pour stabiliser le système de torche à plasma au voisinage du point d'équilibre plus rapide que le synergétique.

### 3.3 La commande synergétique optimisée par l'essaim de particules

L'optimisation par essaim de particules (PSO: Particle Swarm Optimisation) est un algorithme de recherche sociale inspiré du comportement social des oiseaux. Tout d'abord, cet algorithme a été utilisé pour comprendre la réglementation qui domine les essaims d'oiseaux et leurs changements soudains [143]. Dans cet algorithme, les particules se déplacent dans l'espace de recherche. Les changements de position des particules sont basés sur l'expérience de chaque particule lui-même et aussi de ses voisins. Ainsi, les positions de l'essaim influencent chaque recherche de particules. Le résultat de la modélisation de ce comportement est une procédure de recherche dans laquelle les particules convergent vers des régions réussies. Les particules apprennent les unes des autres et, selon les connaissances acquises, se déplacent vers leurs meilleurs voisins. La base de l'opération PSO est fondée sur ce principe que chaque particule définit sa position selon la meilleure position qu'elle a connue et la meilleure position que l'essaim a acquise.

Dans cet algorithme, un essaim d'oiseaux recherche un espace de façon stochastique pour trouver de la nourriture. Un seul morceau de nourriture est dans l'espace. Aucun oiseau ne connaît la position de la nourriture. Suivre l'oiseau qui a la distance minimale à la nourriture est une bonne stratégie. Chaque solution dans cet algorithme est similaire à un oiseau dans un essaim. Chaque particule a une valeur de forme physique calculée par une fonction de coût. Lorsque chaque particule se rapproche de la cible (nourriture), sa fonction de coût diminue. En d'autres termes, sa valeur de forme physique augmente. En outre, chaque particule a une vitesse qui guide le mouvement des particules. Suivant les particules optimales actuelles, chaque particule continue son mouvement dans l'espace de recherche. Au stade initial, un essaim de particules est généré de manière stochastique. Ensuite, en actualisant l'essaim, la solution optimale est recherchée. Dans chaque itération, chaque position de particule est mise à jour en fonction de deux valeurs optimales : l'une d'elles est la meilleure position que la particule a connue (pbest) et l'autre est la meilleure position obtenue dans l'essaim (gbest) [144]. Après avoir trouvé ces deux meilleures valeurs, la position et la vitesse de chaque particule sont mises à jour par les équations (3.15, 3.16).

$$V_i(t+1) = wV_i(t) + c_1 * rand_1 * (pbest_i - S_i(t)) + c_2 * rand_2 * (gbest_i - S_i(t)) \quad (3.15)$$

$$S_i(t+1) = S_i(t) + V_i(t) \quad (3.16)$$

Où  $V_i(t)$  Vitesse de la particule  $i$  à l'itération  $t$ ,  $S_i(t)$  position courante de la particule  $i$  à l'itération  $t$ .  $w$  Fonction de pondération.  $c1$ ,  $c2$  facteurs de pondération sont uniformément répartis nombres aléatoires entre 0 et 1.

$rand_1$  et  $rand_2$  sont deux constantes d'accélération régulant les vitesses relatives par rapport aux meilleurs positions locales et globales.

(pbest) la meilleure position identifiée durant sa trajectoire antécédente. Soit (gbest) la meilleure position globale identifiée dans le processus de recherche pour toutes les particules dans le swarm. La position optimale est mesurée avec la fonction fitness définit suivant le problème d'optimisation.

Les étapes suivantes résument la méthode d'optimisation PSO pour désigner la commande synergétique optimale appliquée au système chaotique de torche à plasma :

1 - Les paramètres ( $a$ ,  $b$  et  $T$ ) sont bornées par les contraintes suivantes:

$$7 \leq a \leq 8.5, \quad 4.6 \leq b \leq 5.9, \quad 0.1 \leq T \leq 0.2$$

2 - Le programme de PSO évalue la fonction objective (fitness) définie par le critère (3.16), pour garder la meilleure valeur de  $a$ ,  $b$  et  $T$ .

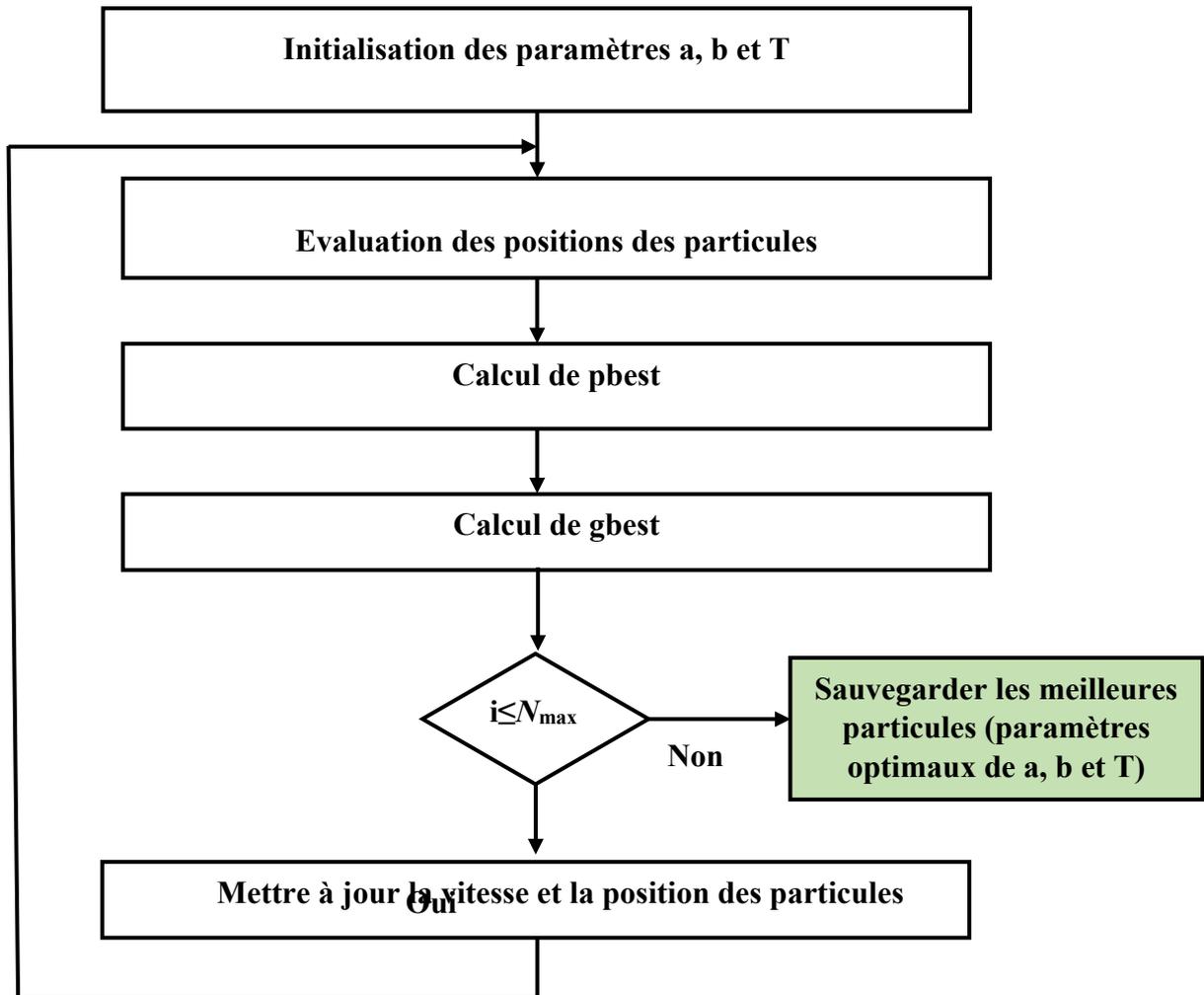
$$ITAE = \int_0^t t \cdot |e(t)| dt \quad (3.17)$$

Le critère ITAE est l'intégrale de l'erreur absolue pondérée par le Temps (Integral Time multiplied by Absolute Error).

3 - Pour passer à une autre itération, l'algorithme PSO vérifie l'itération actuelle par rapport à l'itération maximale pour relancer une nouvelle itération et modifier les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $T$  au moyen des équations (3.15) et (3.16)

4 - Si l'itération courante devient égale à l'itération maximale la procédure s'arrête, sinon la procédure continue en revenant au point 2.

L'organigramme de l'algorithme PSO est illustré sur la figure (3.4)

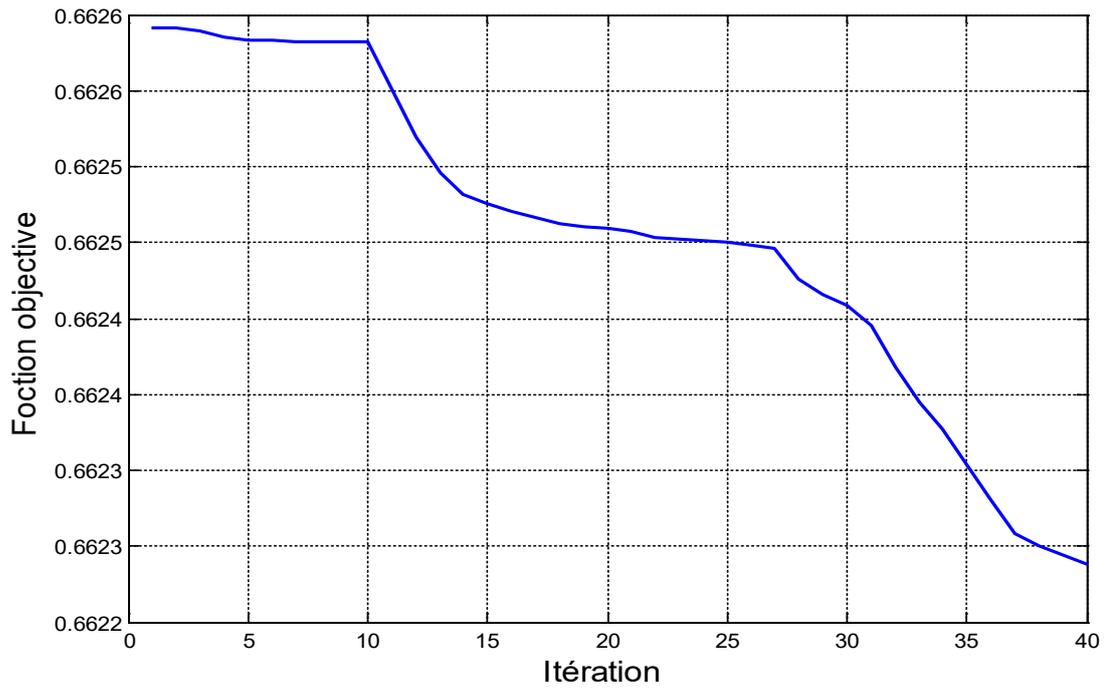


**Figure 3. 4** Organigramme de l'algorithme d'optimisation par PSO

### 3.3.1 Résultats de simulation

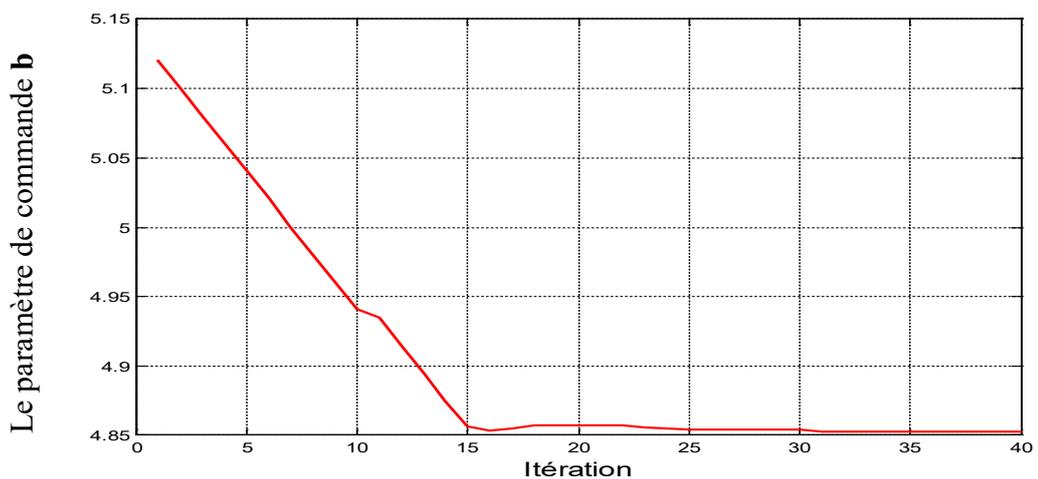
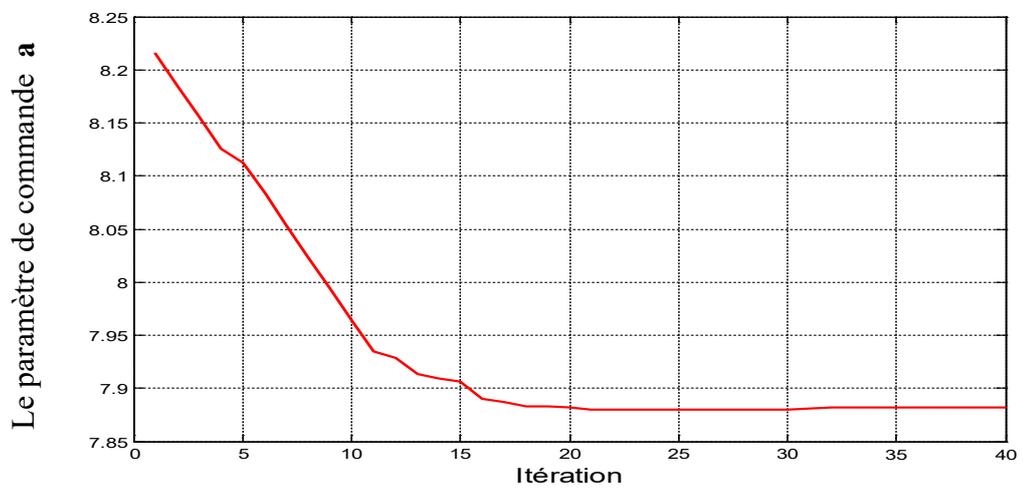
Les conditions initiales sont considérées  $x(0) = [0.5, 0, 0]^T$ . Le paramètre du système est considéré comme  $\mu = -130$ . Les valeurs choisies des paramètres de PSO sont :  $c_1=c_2=2$ ,  $w=1$ ,  $N_{max}=30$ .

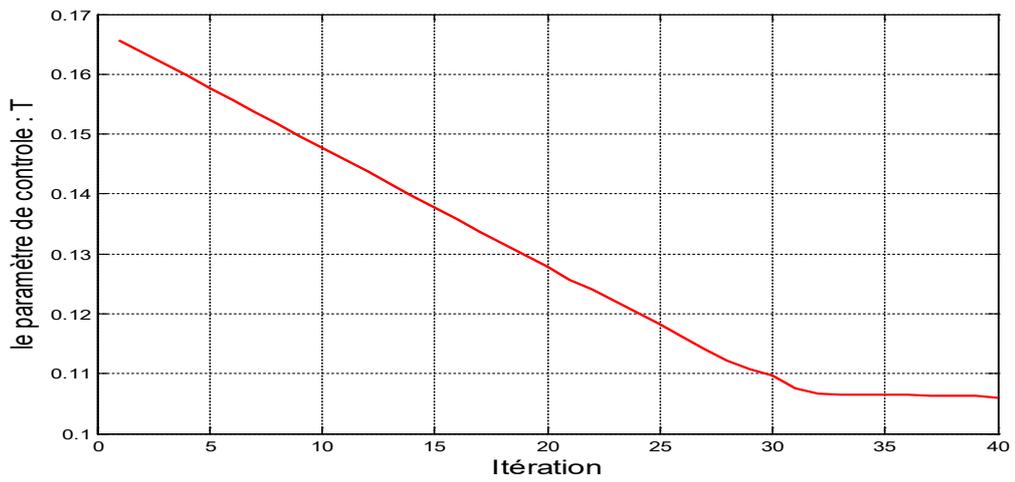
L'évolution de la fonction fitness est représentée sur la figure (3.4)



**Figure 3. 5** Evolution de la fonction objective

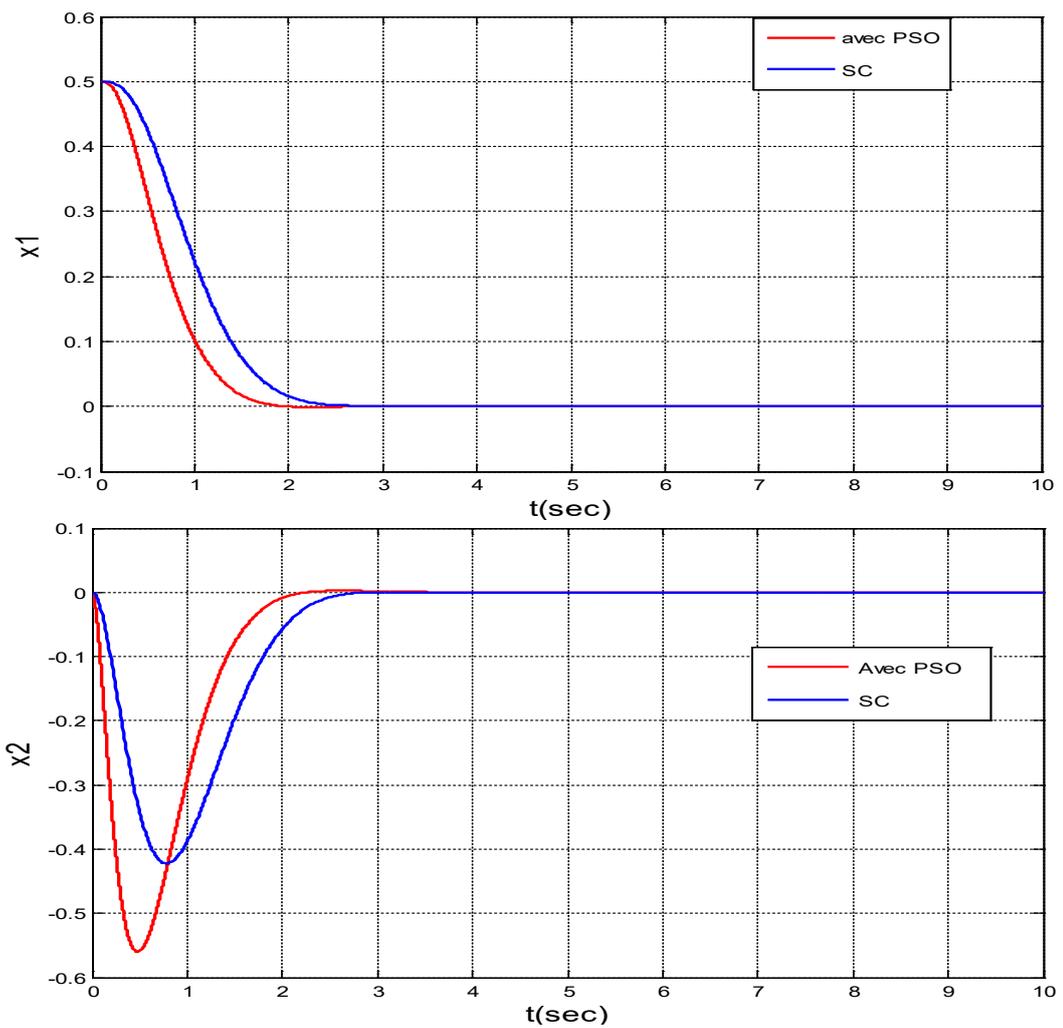
Ainsi, les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $T$  sont fixées à  $a=7.8817$ ,  $b= 4.8530$  et  $T= 0.1058$  respectivement, comme montre les figures (3.5) et (3.6).

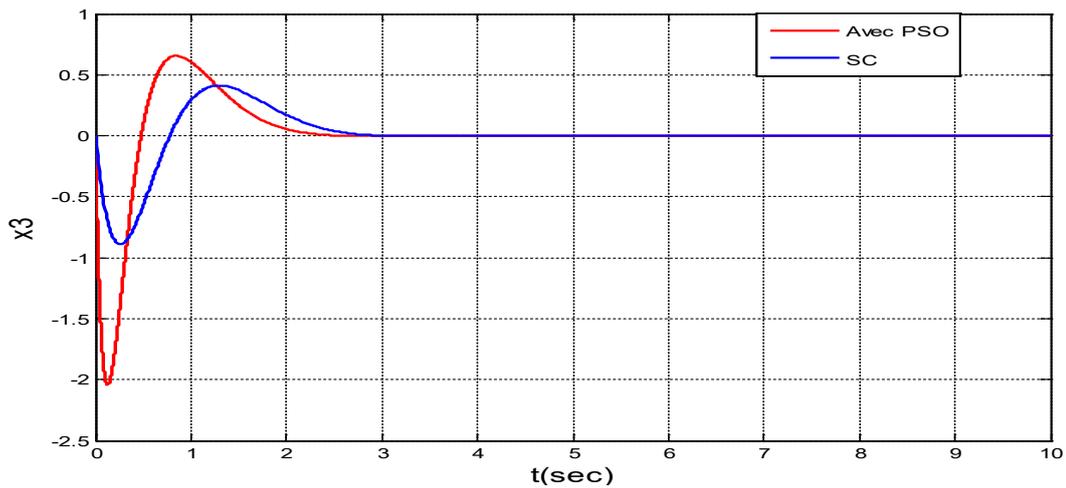




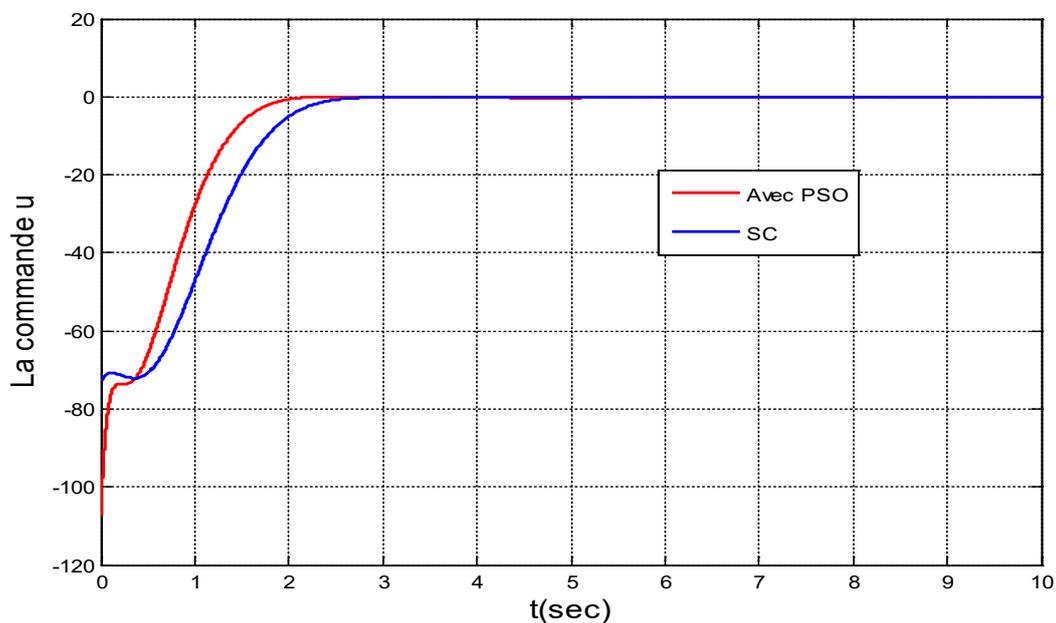
**Figure 3. 6** Evolution des paramètres de contrôle a, b et T

Dans la simulation, la commande proposée ASC (synergétique adaptative) a été comparée avec la commande synergétique conventionnelle SC.





**Figure 3. 7** Convergence des trois états vers le point d'équilibre



**Figure 3. 8** Evolution de loi de commande

On peut voir à partir de ces courbes que le contrôle synergétique adaptatif ASC par la méthode PSO présente une convergence plus rapide vers le point d'équilibre que le synergétique.

### 3.4 La Commande synergétique terminale

Plusieurs travaux de recherche ont proposé une approche dite terminale aboutissant à une convergence en temps fini basée sur des techniques d'attracteurs terminaux [145, 146]. En réduisant le temps requis pour atteindre le point d'équilibre, nous renforçons aussi bien la convergence que l'atténuation rapide de l'effet des perturbations. La commande terminale synergétique a l'avantage de convergence en temps fini et minimiser l'erreur statique. La

robustesse de cette commande joue un rôle très important pour garantir le fonctionnement normal du système. La conception de la commande terminale synergétique est basée sur un choix particulier de la macro variable qui se traduit par la détermination d'une loi de commande pour forcer le système pour suivre un signal de référence en un temps fini.

Maintenant, un contrôleur terminal synergétique est proposé pour le système de torche à plasma.

### 3.3.1 Synthèse de la commande terminale synergétique pour le système chaotique

L'approche dite terminale permet d'obtenir une convergence finie accordée par le concept d'attraction terminale.

On aborde dans ce qui suit l'application de la commande synergétique terminale au système chaotique de torche à plasma qui décrit par le système d'équations d'état suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\mu x_1 - 50x_2 - x_3 - x_1^3 + \Delta f + d(t) + u(t)\end{aligned}\tag{3.18}$$

La fonction de macro-variable non linéaire du TSC est choisie comme suit:

$$\Psi = x_3 + ax_2 + bx_1^{\frac{p}{q}} + rx_1\tag{3.19}$$

Où  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $r > 0$ ,  $p$  et  $q$  sont des constantes positives, et  $p > q$

En utilisant l'approche synergétique,

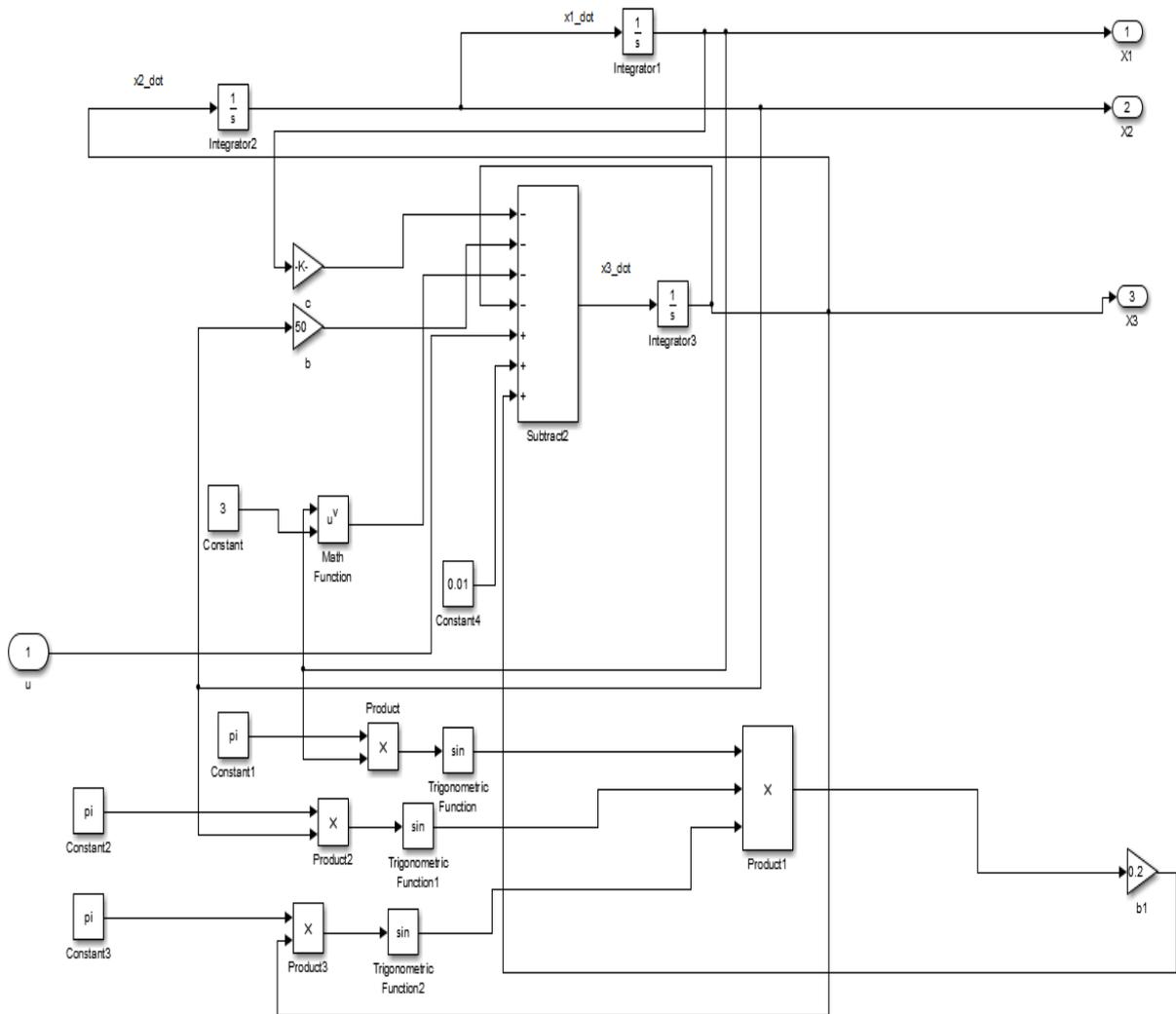
$$T\dot{\Psi} + \Psi = 0\tag{3.20}$$

L'équation (3.20) peut être exprimée comme suit :

$$\dot{x}_3 + ax_3 + rx_2 + b\frac{p}{q}x_2x_1^{\frac{p-1}{q}} = -\frac{\Psi}{T}\tag{3.21}$$

Donc la commande synergétique terminale est donnée par la relation suivante :

$$u(t) = \mu x_1 + (50 - r)x_2 + (1 - a)x_3 + x_1^3 - b\frac{p}{q}x_1^{\frac{p-1}{q}}x_2 - \Delta f - d(t) - \frac{\Psi}{T}\tag{3.22}$$



**Figure 3. 9** Schéma fonctionnel sur Simulink du système de torche à plasma contrôlé par la commande synergétique Terminale

Pour justifier la stabilité de système de commande, on utilise la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2} \Psi^T \Psi \tag{3.23}$$

Après différenciation, et en utilisant (3.23), nous aurons donc :

$$\dot{V} = \Psi^T \dot{\Psi} \tag{3.24}$$

$$\dot{V} = \Psi(\dot{x}_3 + ax_3 + rx_2 + b \frac{p}{q} x_2 x_1^{\frac{p-1}{q}}) = \Psi(-\frac{1}{T} \Psi) \tag{3.25}$$

$$\dot{V} = -\frac{1}{T}\Psi^2 < 0 \quad (3.26)$$

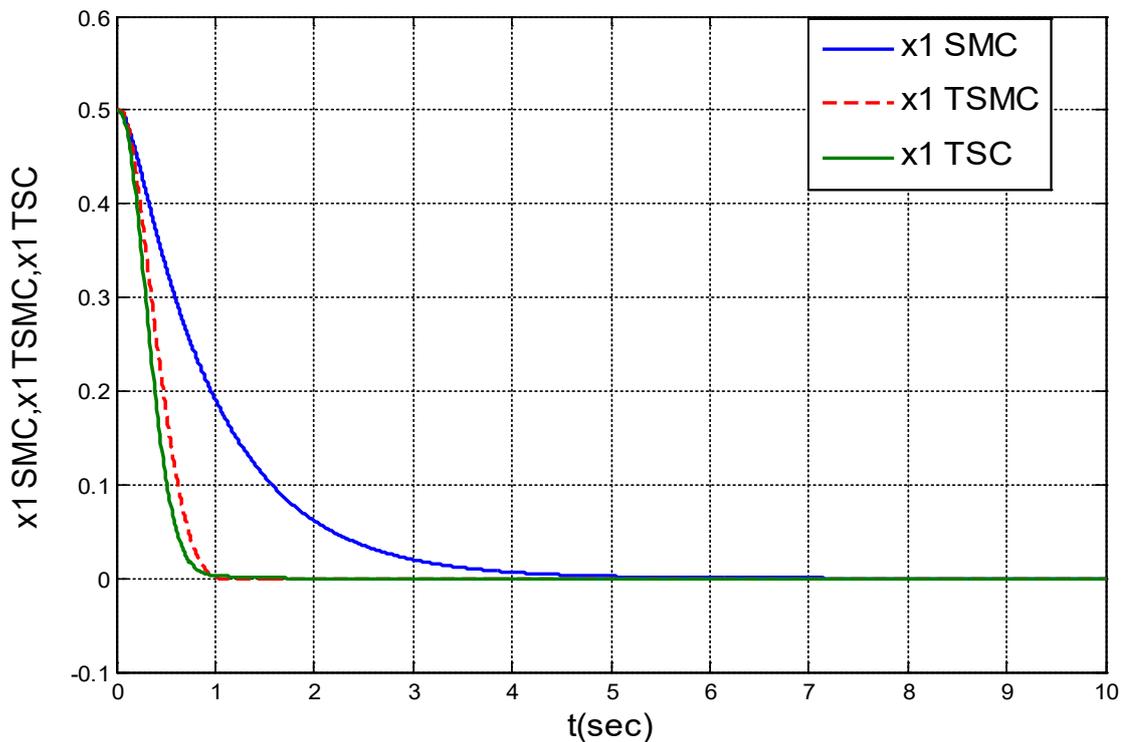
Par conséquent, le contrôleur peut répondre à la stabilité de Lyapunov.

### 3.4.1.1 Résultats de simulation

Les performances du contrôleur synergique terminal (TSC), développé pour le système de torche à plasma, sont étudiées et évaluées via des résultats de simulation.

Les méthodes précédentes appliquées au système de torche à plasma telles que SMC et TSMC sont reproduits a partir d'un article publié [128] et les résultats sont comparés à ceux de l'approche proposée. Les conditions initiales sont considérées  $x(0) = [0.5, 0, 0]^T$ . Le paramètre du système est considéré comme  $\mu = -130$ . Le système est exposé à des perturbations externes et présente une incertitude  $\Delta f = 0.2 \sin(px_1) \sin(px_2) \sin(px_3) |d(t)| \leq 5$ ,  $|\Delta f| \leq 0.2$ .

Les paramètres constants de contrôle pour la simulation de TSC sont évalués  $a = 18$ ,  $b = 10$ ,  $r = 45$ ,  $p = 9$ ,  $q = 7$  and  $T = 0.19$



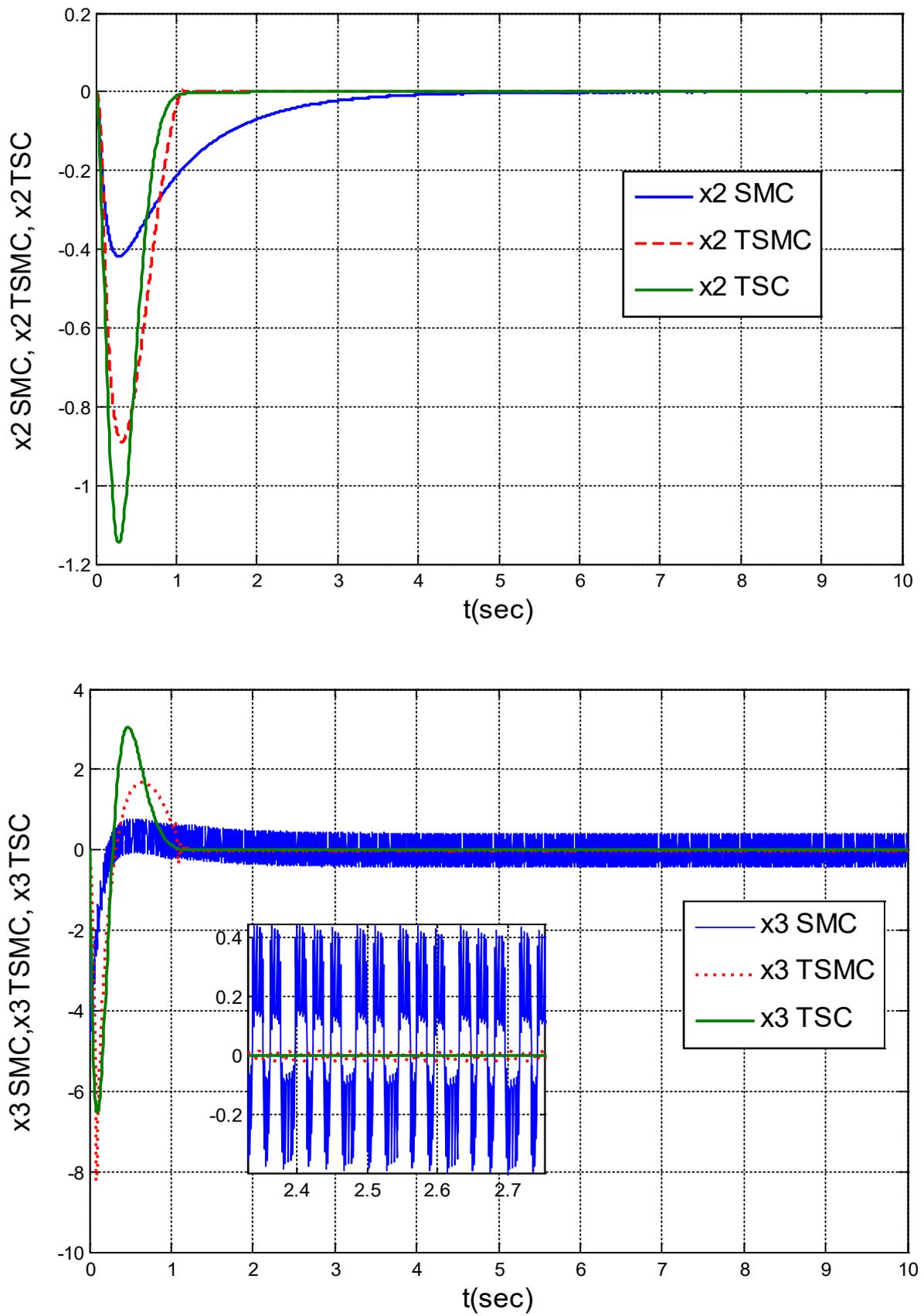
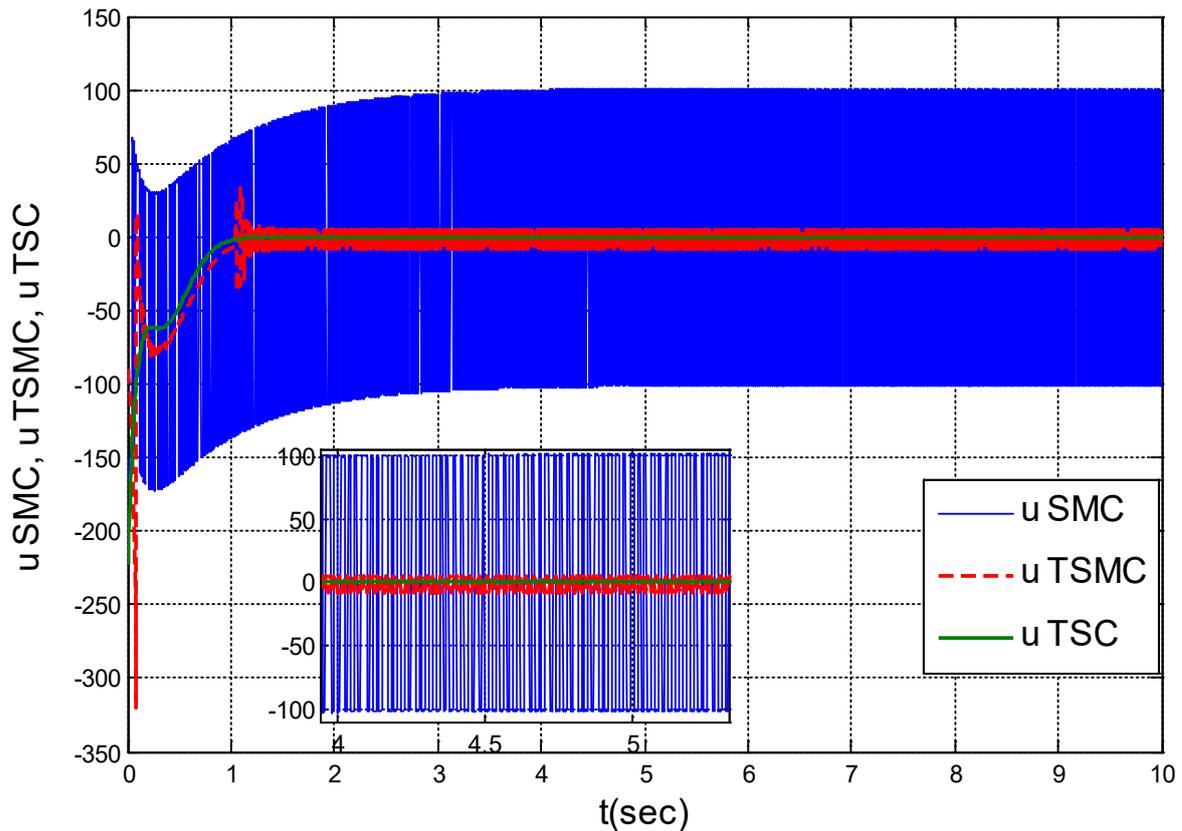


Figure 3. 10 Convergence des états vers le point d'équilibre  $x_{ref}=0$ .



**Figure 3. 11** Variation de loi de commande pour le système de torche à plasma

Ces figures fournissent une comparaison entre les trois méthodes SMC, TSMC, TSC appliquées au système de torche à plasma. Comme on peut l'observer, la réponse du SMC présente un broutement élevé, ce qui est indésirable pour ce système dont le temps de stabilisation est plus long.

Bien que la réponse TSMC soit acceptable, elle est entachée de broutement indésirable.

Le TSC permet d'obtenir de meilleures performances dans le temps d'établissement malgré les perturbations et l'incertitude introduite. De plus, le broutement présent dans le troisième état et le signal de commande avec TSMC est complètement éliminé au TSC.

### 3.5 Resultats des tests Hardware-in-the-loop (HIL)

Des tests rigoureux et fiables sont nécessaires pour vérifier et confirmer la conception d'une méthode de contrôle. Partie intégrante d'une stratégie de test globale, la méthode de test Hardware-In-the-Loop permet de tester des calculateurs réels intégrés dans un environnement de simulation réaliste de manière reproductible. Cela permet de réaliser des tests complets en laboratoire 24h/24 et 7j/7, de raccourcir les temps de validation et d'augmenter la gamme de

scénarios de test. En outre, la méthode HIL permet de tester des bugs critiques sans problèmes de sécurité pour l'équipement testé ou l'environnement en boucle fermée ainsi que dans les configurations de test en boucle ouverte. [147]

### **3.3.1 La validation expérimentale des résultats des tests Hardware-in-the-loop (HIL)**

La validation expérimentale du système chaotique de torche à plasma, commandé par la technique TSC sous environnement MATLAB/Simulink®, est effectuée à l'aide de la méthode de test Hardware-In-the-Loop (HIL) Real-Time. L'expérience contient les dispositifs suivants comme le montrent la figure (3.4).

- Deux PC (environnement MATLAB/Simulink®).
- Deux cartes dSPACE 1104.
- Oscilloscope pour visualiser les résultats

Le test expérimental est divisé en quatre étapes

- La première étape est la mise en œuvre du modèle de système torche à plasma dans un environnement dspace (dSPACE 1104 carte 1)
- La deuxième étape consiste à implémenter le contrôleur TSC dans un environnement dSPACE (dSPACE 1104 carte 2)
- La troisième étape consiste à connecter toutes les sorties à l'entrée et vice versa pour chaque carte dSPACE 1104
- La quatrième étape consiste à synchroniser les informations d'entrée et de sortie



Figure 3. 12 Hardware-in-the-loop (HIL) Simulink temps réel pour le système de torche à plasma

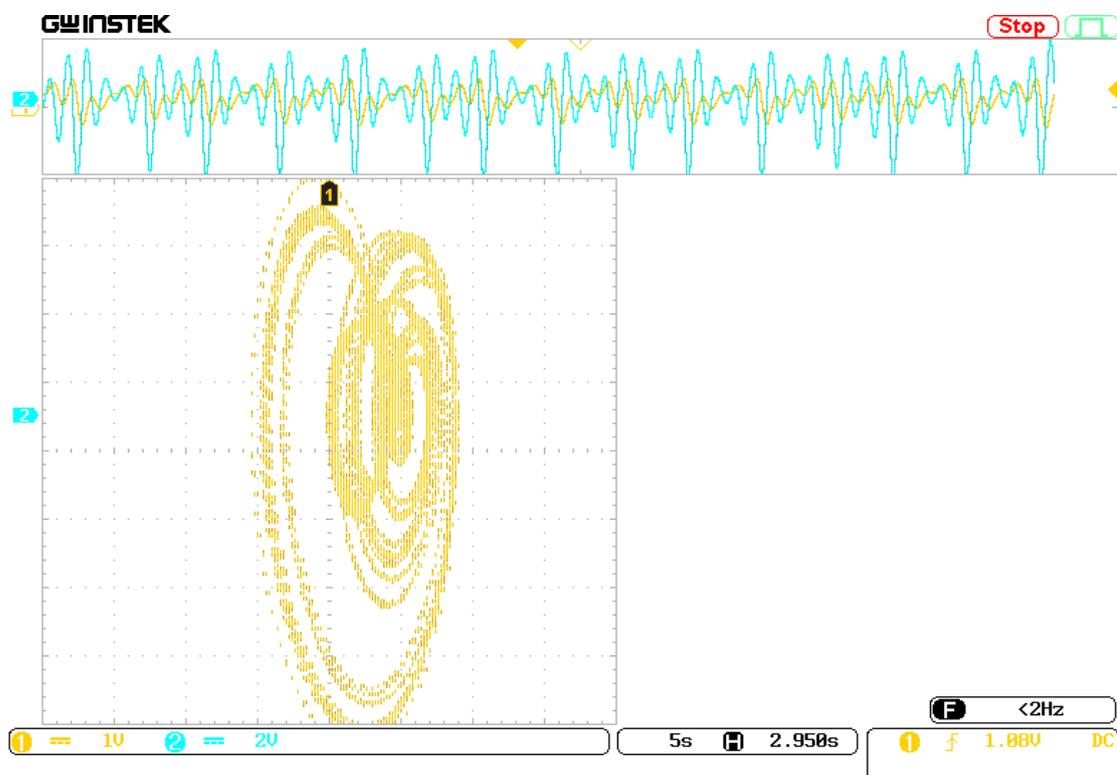


Figure 3. 13 Trajectoire 2D du torche à plasma (HIL)

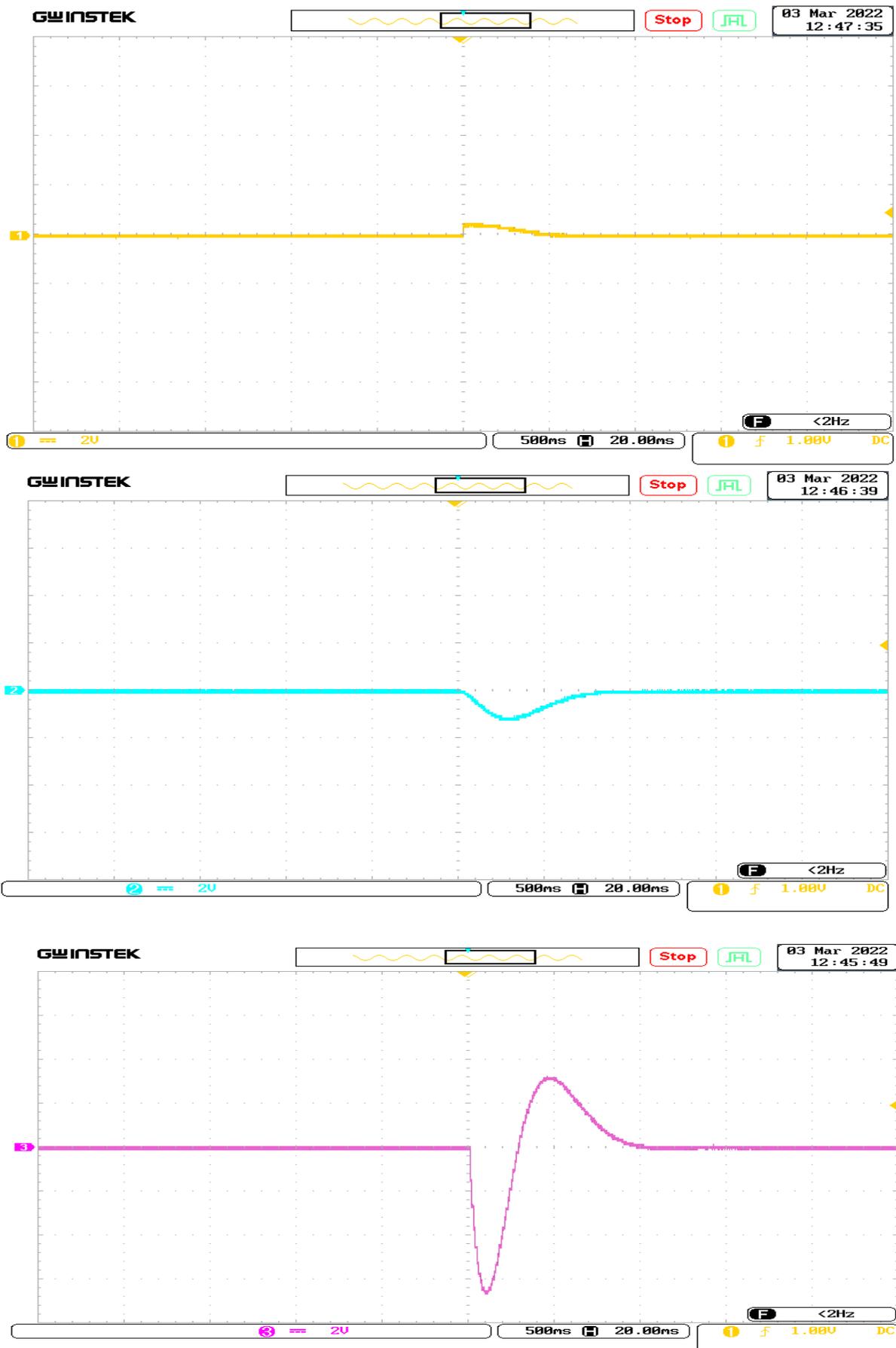


Figure 3. 14 x1, x2, x3 de torche à plasma (HIL, TSC)

Les résultats du test HIL donnés par la figure (3.14) montrent la robustesse et le succès de la stratégie de contrôle TSC proposée pour la stabilisation des états en temps court.

### 3.6 Conclusion

Ce chapitre présente l'application des techniques de l'approche synergétique pour le contrôle du système chaotique de torche à plasma.

Les résultats de simulation de la commande adaptative synergétique montrent une bonne performance en stabilisation et suppression du chaos.

L'optimisation par la méthode PSO permet à travers l'indice ITAE d'évaluer et d'ajuster les paramètres du contrôleur synergétique, problème majeur de la technique, et d'en améliorer ainsi les performances globales. Les performances obtenues par simulation lors de l'utilisation du contrôleur adaptatif synergétique montrent la bonne tenue de l'estimateur utilisé tout en convergeant vers les solutions globales.

Afin d'améliorer la robustesse par la réduction de temps de convergence vers le point d'équilibre, l'approche synergétique terminale a été proposée et validée par les résultats de simulation qui sont comparés à ceux de l'approche mode glissant (SMC) et mode glissant terminal (TSMC).

L'efficacité de l'approche synergétique terminale (TSC) proposée a été prouvée par la méthode de test en temps réel Hardware-in-the-loop (HIL) en utilisant le Simulink. Les résultats en temps réel confirment les performances obtenues par simulation.

Le chapitre suivant présente la synchronisation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques par les approches synergétique et synergétique terminale.

# Chapitre4 : Synchronisation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques par la commande synergétique

4.1	Introduction .....	93
4.2	Définition de la synchronisation.....	94
4.2.1	Définition générale .....	94
4.2.2	Définition mathématique .....	94
4.3	Types de synchronisation .....	95
4.3.1	Synchronisation complète (CS).....	95
4.3.2	Anti-Synchronisation.....	96
4.3.3	Synchronisation décalée .....	96
4.3.4	Synchronisation de phase .....	96
4.3.5	Synchronisation projective (PS).....	97
4.3.6	Synchronisation généralisée (GS) .....	97
4.3.7	Synchronisation Q-S.....	98
4.3.8	Synchronisation FPS .....	98
4.3.9	Synchronisation HPS.....	99
4.4	La synchronisation des systèmes chaotiques et hyper chaotiques à l'aide de l'approche synergétique.....	100
4.5	La synchronisation des systèmes chaotiques et hyper chaotiques par la commande synergétique Terminale. ....	115
4.5.1	Exemple de système chaotique.....	115
4.5.2	Synchronisation adaptative de deux systèmes hyperchaotiques identiques de Zhou par synergétique terminale.....	120
4.6	Conclusion .....	129

## 4.1 Introduction

La synchronisation du chaos est une suite de développement de la théorie du contrôle. Les méthodes de stabilisation du chaos ont prouvé non seulement la possibilité de stabiliser un système chaotique sur une orbite périodique, mais aussi pour faire une poursuite d'une trajectoire périodique. Ce phénomène de contrôle peut donc être considéré comme un phénomène de synchronisation d'un système chaotique avec un signal périodique. La synchronisation chaotique c'est lorsque le signal périodique est remplacé par un signal chaotique. Si l'on s'arrête à la propriété de sensibilité aux conditions initiales des systèmes chaotiques, cette synchronisation paraît difficile à réaliser car à la différence de la synchronisation où l'on cherche à reproduire juste une période d'oscillation, la synchronisation chaotique présente plus de contraintes.

Les radiocommunications constituent actuellement un domaine en plein essor, depuis quelques années, de nombreux chercheurs étudient la possibilité d'utiliser des signaux chaotiques pour transmettre des données. Dans les systèmes de communication, la synchronisation est fondamentale pour une transmission réussie. La synchronisation est une clé très importante pour une transmission réussie.

La synchronisation classique employée dans les systèmes de télé-communication cherche à reproduire juste le signal périodique de la porteuse. Par contre, la synchronisation chaotique au niveau du récepteur cherche à dupliquer le signal chaotique envoyé de l'émetteur. Cela veut dire que deux signaux chaotiques seront dit synchronisés s'ils sont asymptotiquement identiques lorsque le temps  $t$  tend vers l'infini.

Dans la littérature plusieurs concepts de synchronisation chaotique ont été proposés en premier par Yamada et Fujisaka [107, 108] qui ont utilisé une approche locale de la synchronisation chaotique. Par la suite, des concepts importants liés à la synchronisation chaotique ont été développés par Afraimovich et al dans [109] et ultérieurement Pecora et Carroll [24] ont défini la synchronisation chaotique connue sous le nom de synchronisation identique, développée sur la base de circuits chaotiques couplés avec l'un maître et l'autre esclave. Ces travaux ont ouvert la voie des applications du chaos aux télécommunications [148].

Au cours des dernières années, la synchronisation des systèmes chaotiques a attiré beaucoup d'attention en raison de ses larges applications dans divers domaines de la physique et de l'ingénierie. Différentes méthodes et diverses approches ont été appliquées avec succès à la synchronisation du chaos et hyperchaos dans les systèmes dynamiques, telles que : la

méthode de contrôle actif [149] qui peut être utilisée lorsque les paramètres du système sont connus, la méthode de contrôle adaptatif [150, 151] est appliquée lorsque les paramètres du système sont inconnus, la méthode Feedback [152], la méthode de backstepping [153] et la méthode de mode glissant [154]. etc...

Dans ce chapitre nous allons utiliser une nouvelle méthode de synergetique et synergetique terminale pour développer des lois de synchronisation pour des systèmes chaotiques et hyperchaotiques qui sont des repères pour la validation des concepts et des approches tels qu'ils sont utilisés aux chapitres précédents.

## 4.2 Définition de la synchronisation

### 4.2.1 Définition générale

**Définition 4.1** *synchronisation est un mot décomposé en deux parties : (syn) qui veut dire (ensemble) et (chronos) qui veut dire (temps), c'est l'action de mettre en phase pour créer une simultanéité entre plusieurs opérations en fonction du temps.*

**Définition 4.2** *La synchronisation est une manière de faire l'entretien d'un mouvement périodique (ou chaotique). La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système.*

### 4.2.2 Définition mathématique

Après plusieurs tentatives faites pour définir un mouvement synchronisé, Brown et Kocarev [155] ont récemment abouti à une définition mathématique de la synchronisation. Pour construire la définition, ils supposent deux sous systèmes :

$$\begin{aligned}\dot{X} &= F(X(t)) \\ \dot{Y} &= G(Y(t))\end{aligned}\tag{4.1}$$

Ou,  $X(t) \in R^n$  et  $Y(t) \in R^m$  sont des vecteurs qui peuvent avoir des dimensions différentes.

**Définition 4.3** *Les sous-systèmes dans les équations (4.1) sont synchronisés sur la trajectoire de  $\varphi(\omega_0)$  par rapport aux propriétés  $g_x$  et  $g_y$ ; s'il existe un instant indépendant de l'application  $h$  tel que  $\|h(g_x; g_y)\| = 0$ .*

Avec le choix de  $g_x$ ,  $g_y$  et  $h$  on peut déterminer le type de la synchronisation.

**Théorème 4.1** Le système maître et le système esclave sont synchronisés si et seulement si tous les exposants de Lyapunov des synchronisations esclave, appelés les exposants de Lyapunov conditionnels, sont négatifs.

### 4.3 Types de synchronisation

Dans cette section, nous introduisons différents types de synchronisation à savoir la synchronisation complète, l'anti-synchronisation, la synchronisation décalée, la synchronisation FSHP, la synchronisation généralisée, et la synchronisation Q-S.

#### 4.3.1 Synchronisation complète (CS)

La synchronisation complète a été réalisée grâce aux effets des forces d'accouplements unidirectionnelles des systèmes c'est la forme de la synchronisation la plus simple et la plus typique.

**Définition 4.4** Supposons qu'on a deux systèmes dynamiques liés par un accouplement unidirectionnel représenté par les équations différentielles ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X(t)) \\ \dot{Y} = G(Y(t)) + U \end{cases} \quad (4.2)$$

Où  $X(t)$  est le vecteur d'état du système maître de dimension  $n$  et  $Y(t)$  le vecteur d'état du système esclave de dimension  $m$ ;  $F$  et  $G$  sont des champs de vecteurs  $F:R^n \rightarrow R^n$ ;  $G:R^m \rightarrow R^m$  et  $U = (u_i)_{i=1}^n \in R^n$  à déterminer le vecteur de contrôle. L'erreur de la synchronisation complète est définie par :

$$e(t) = Y(t) - X(t), \quad \forall x(0), y(0) \quad (4.3)$$

$$\text{telle que :} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0 \quad (4.4)$$

Où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne.

- Si  $F = G$ , on dit qu'on a une synchronisation complète identique.
- Si  $F \neq G$ , on dit qu'on a une synchronisation complète non identique.

Donc, la synchronisation CS correspond à une coïncidence complète entre les variables d'état des deux systèmes synchronisés.

### 4.3.2 Anti-Synchronisation

**Définition 4.5** *Théoriquement, deux systèmes sont anti-synchronisés si d'une part, le système maître et le système esclave ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue mais avec des signes opposés et que d'autre part, la somme des vecteurs d'état des deux systèmes tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini [156]. L'erreur d'anti-synchronisation peut donc être définie comme suit :*

$$e(t) = Y(t) + X(t) \quad (4.5)$$

### 4.3.3 Synchronisation décalée

**Définition 4.6** *Les chercheurs ont découvert que deux systèmes dynamiques chaotiques non identiques peuvent exposer un phénomène de synchronisation dans lequel les variables dynamiques des deux systèmes deviennent synchronisées, mais avec un décalage en temps [157]. On dit qu'on a une synchronisation retardée (ou anticipée) si les variables d'état  $Y(t)$  du système chaotique esclave convergent vers les variables d'état  $X(t)$  décalées dans le temps du système chaotique maître comme l'indique la relation ci-dessous :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) - X(t - \tau)\| = 0 \quad \forall x(0) \quad (4.6)$$

Avec  $\tau$  est un nombre positif très petit.

### 4.3.4 Synchronisation de phase

Soit  $\phi_1$  et  $\phi_2$  les phases des deux systèmes, maître et esclave, respectivement. La synchronisation de phase est réalisée si pour deux nombres entiers  $m$  et  $n$ , il existe un nombre positif très petit  $\varepsilon$  tel que :

$$|m\phi_1 - n\phi_2| < \varepsilon \quad (4.7)$$

Le phénomène de synchronisation de phase est totalement différent de ceux présentés précédemment. Généralement, lorsque la synchronisation chaotique est obtenue, les exposants de Lyapunov du système esclave sont tous négatifs. Donc le système esclave est un système

non chaotique avec une sortie chaotique. Cependant, dans le cas de la synchronisation de phase, les exposants de Lyapunov peuvent prendre des valeurs positives. [158]

#### 4.3.5 Synchronisation projective (PS)

La synchronisation projective a été d'abord rapportée par Mainieri et Rehacek [159] dans les systèmes chaotiques partiellement linéaires, dans laquelle les réponses des deux systèmes identiques se synchronisent selon un facteur d'échelle constant  $\alpha_i$ .

**Définition 4.7** On dit qu'on a une synchronisation projective si les variables d'état  $y_i(t)$  du système chaotique esclave  $Y(t) = y_i(t)_{1 \leq i \leq n}$  se synchronisent avec une constante multiple de l'état  $x_i(t)$  du système chaotique maître  $X(t) = x_i(t)_{1 \leq i \leq n}$  telle que :

$$\exists \alpha_i \neq 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i(t) - \alpha_i x_i(t)\| = 0 \quad \forall (x(0), y(0)) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.8)$$

On appelle  $\alpha_i$  facteur d'échelle constant.

- Le cas où tous les  $\alpha_i$  sont égaux à 1 représente un cas de synchronisation complète.
- Le cas où tous les  $\alpha_i$  sont égaux à -1 représente un cas d'anti-synchronisation complète.

#### 4.3.6 Synchronisation généralisée (GS)

La synchronisation généralisée est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète, l'anti-synchronisation et la synchronisation projective dans le cas des systèmes chaotiques de dimensions et de modèles différents [160]. Elle se manifeste par une relation fonctionnelle entre les deux systèmes chaotiques. En comparaison avec la synchronisation identique, la synchronisation généralisée notée par GS (en anglais : Generalized Synchronization) peut donner une dynamique plus riche, car elle peut aussi envisager certains cas désynchronisés dus aux disparités des paramètres, aux déformations des canaux de transmission et autres. En conséquence, les possibilités d'appliquer la GS peuvent être plus larges que la synchronisation identique. Parmi les premières publications sur cette méthode, on cite les travaux de Rulkov et al. [161] et de Kocarev et Parlitz [162]. Yan et Li [163] ont introduit la synchronisation généralisée pour des systèmes chaotiques unifiés.

Récemment, cette méthode est étudiée pour les systèmes chaotiques de dimension arbitraire par un contrôle non linéaire [164]. Cependant, il n'existe que peu de résultats théoriques sur la synchronisation généralisée des systèmes dynamiques chaotiques de

différentes dimensions, alors ce type de recherche est juste en début. Pour définir la GS, on considère un couple de systèmes maître-esclave représenté par :

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X(t)) \\ \dot{Y} = G(Y(t)) + U \end{cases} \quad (4.9)$$

Où  $X(t) \in \mathbb{R}^n, Y(t) \in \mathbb{R}^m$ , sont les états de système maître et le système esclave respectivement,

$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, G: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, U = (u_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$  est un contrôleur à déterminer.

**Définition 4.8** *S'il existe une fonction  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  telle que toutes les trajectoires du système maître et du système esclave, avec les conditions initiales  $x(0)$  et  $y(0)$  vérifient :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) - \phi(X(t))\| = 0; \quad \forall x(0), y(0) \quad (4.10)$$

Alors le système maître et le système esclave (4.9) se synchronisent au sens généralisé par rapport à la fonction  $\phi$ .

#### 4.3.7 Synchronisation Q-S

La synchronisation Q-S est considérée comme une généralisation de tous les types de synchronisations précédentes [165].

**Définition 4.9** *Nous disons qu'un système maître,  $n$ -dimensionnelle,  $X(t)$  et un système esclave,  $m$ -dimensionnelle,  $Y(t)$  sont en une synchronisation Q-S dans la dimension  $d$ , s'il existe un contrôleur  $U = u(i)_{1 \leq i \leq m}$  et deux fonctions  $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d, S: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que l'erreur de synchronisation exprimée par :*

$$e(t) = Q(X(t)) - S(Y(t)) \quad (4.11)$$

Vérifie la condition suivante  $\therefore \lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0$

#### 4.3.8 Synchronisation FPS

La plupart des efforts de recherche qui ont aboutie aux différents types de synchronisation présentés ci-dessus se sont concentrés sur l'étude d'un facteur d'échelle

constant. Récemment, Chen et Li [166] ont présenté une nouvelle méthode de synchronisation notée FPS (en anglais : Function Projective Synchronization). Par la suite, Hongyue Du et al [167] ont montré qu'un contrôle peut être utilisé pour manipuler le facteur échelle de telle sorte que le système émetteur et le système récepteur peuvent être synchronisés jusqu'à une fonction de mise à l'échelle souhaitée.

La FPS est la définition plus générale de la synchronisation projective (PS). En comparaison avec la PS, la FPS signifie que les deux systèmes maître et esclave peuvent être synchronisés à une fonction de mise en échelle, mais pas une constante. Cette fonction pourrait être utilisée pour obtenir une communication plus sécurisée, car il est évident que l'imprévisibilité de l'échelle de la fonction dans la méthode FPS peut en outre améliorer la sécurité de la communication.

Pour le meilleur de nos connaissances, à l'heure actuelle, il y a peu de résultats théoriques sur la FPS. Motivés par cette raison, nous nous référons aux travaux de Hongyue Du et al.[ 167] pour donner une définition et un exemple de la méthode.

Pour définir la synchronisation FPS, on décrit le terme d'erreur par :

$$e(t) = X(t) - H(t)Y(t) \quad (4.12)$$

Où  $H(t)$  est une fonction continûment différentiable bornée et  $H(t) \neq 0$  pour tout  $t$ .

**Définition 4.10** Pour le système, s'il existe une fonction de mise à l'échelle  $H(t)$  telle que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0$  alors nous appelons cette synchronisation FPS.

#### 4.3.9 Synchronisation HPS

La synchronisation notée HPS (en anglais : Hybrid Projective Synchronization) a été proposée par Manfeng Hu et al. [168]. Dans ce type de synchronisation, les deux systèmes émetteur et récepteur peuvent se synchroniser jusqu'à des différents facteurs d'échelle. La HPS peut être considérée comme une extension de la synchronisation projective PS, car la synchronisation complète et anti-synchronisation sont ses deux cas particuliers. Depuis, la synchronisation HPS ne cesse d'être étudiée pour plusieurs disciplines, en particulier les travaux présentés par A. Khan et al [169].

Pour définir la synchronisation HPS, le terme d'erreur est proposé comme :

$$e(t) = H(t)Y(t) - X(t) \quad (4.13)$$

Où  $H(t)$  est une matrice de mise à l'échelle,  $H(t) = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_n)$ ,  $h_i$  est un facteur d'échelle et  $h_i \neq 0$  pour tout  $t$ .

**Définition 4.11** Pour le système, s'il existe une matrice réversible de mise à l'échelle  $H$  d'ordre  $n$  telle que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0$

Alors il y a une synchronisation HPS.

1. Si  $H = I$ , ou  $I$  est la matrice unité, alors la synchronisation est appelée CS.
2. Si  $H = I$ , alors la synchronisation est nommée AS.
3. Si  $H = I$ , et  $\neq \pm 1$  un réel constant différent de zéro, alors la synchronisation est appelée PS.
4. Si  $H(t) = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_n)$  et  $h_1, h_2, \dots, h_n$  sont des constantes différentes non nulles, alors la synchronisation est nommée MPS. Donc CS, AS, PS et MPS sont des cas particuliers de la HPS.

## 4.4 La synchronisation des systèmes chaotiques et hyper chaotiques à l'aide de l'approche synergétique

### 4.4.1 Exemple de système chaotique

On souhaite maintenant synchroniser deux systèmes chaotiques en utilisant l'approche synergétique.

Considérons les deux systèmes chaotiques suivants :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -0.4x_2 + 1.1x_1 - x_1^3 - 2.1\cos(1.8t) \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = 1.8y_1 - 0.1y_2 - y_1^3 - 1.1\cos(0.4t) + u \end{cases} \quad (4.15)$$

Où le premier système est le système maître et le second système est l'esclave dont la sortie doit suivre celle du premier système.

$u$  : est la commande qu'il faut appliquer.

On utilise la contrainte générale:

$$T\dot{\Psi} + \Psi = 0 \quad (4.16)$$

L'erreur utilisée est donc:

$$e = y_1 - x_1 \quad (4.17)$$

Le problème de synchronisation est par conséquent transformé en un problème de stabilisation du modèle d'erreur autour de zéro.

On dérivant dans le temps les états erreurs.

$$\dot{e} = \dot{y}_1 - \dot{x}_1 \quad (4.18)$$

Avec

$$\Psi = \dot{e} + ke \quad (4.19)$$

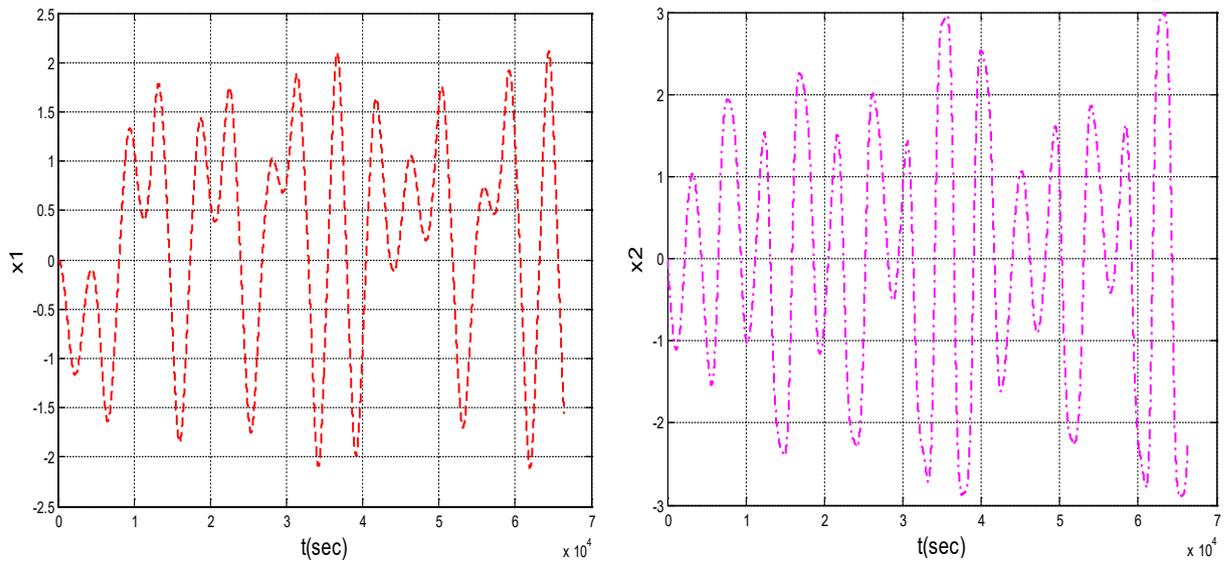
On calcule  $\dot{\Psi}$  et on remplace avec la fonction  $\Psi$  et les fonctions d'état des systèmes dans la fonction (4.15) puis on conclut la commande  $u$  :

$$u = \left(-\frac{1}{T} - k\right)(y_2 - x_2) + \frac{k}{T}(x_1 - y_1) - 1.8y_1 + 0.1y_2 + y_1^3 + 1.1\cos(0.4t) - 0.4x_2 + 1.1x_1 - x_1^3 - 2.1\cos(1.8t) \quad (4.20)$$

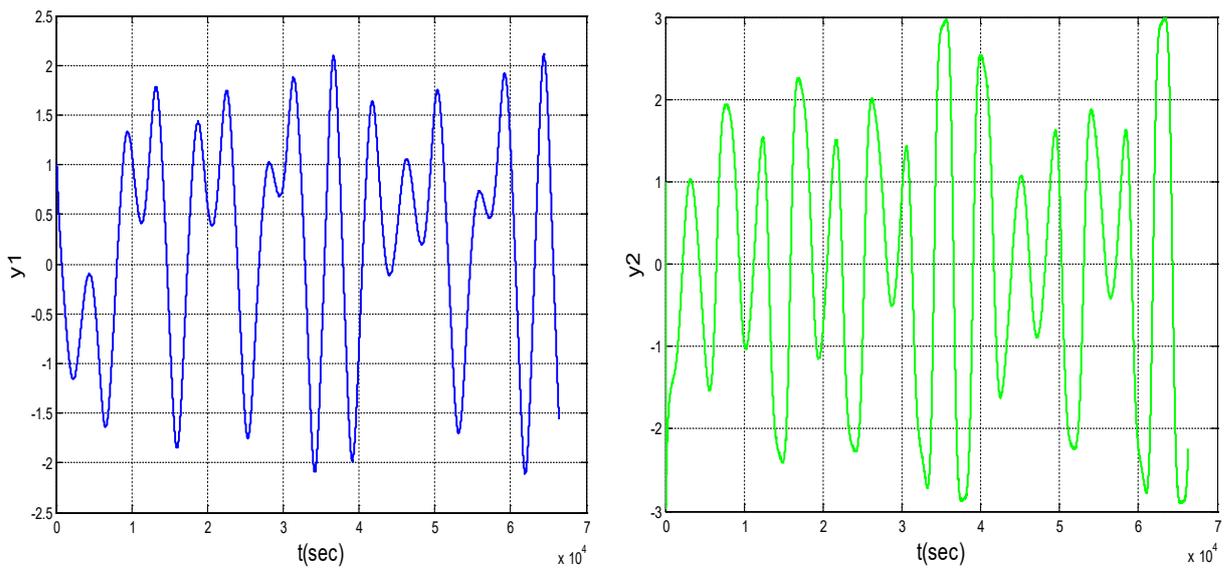
#### 4.4.1.1 Résultats de simulation

Les résultats de simulation permettent d'obtenir les figures (4.1), (4.2) et (4.3) ci-dessous avec les conditions initiales suivantes :  $x(0) = [-0.1, 0]^T$ ,  $y(0) = [1, 1]^T$

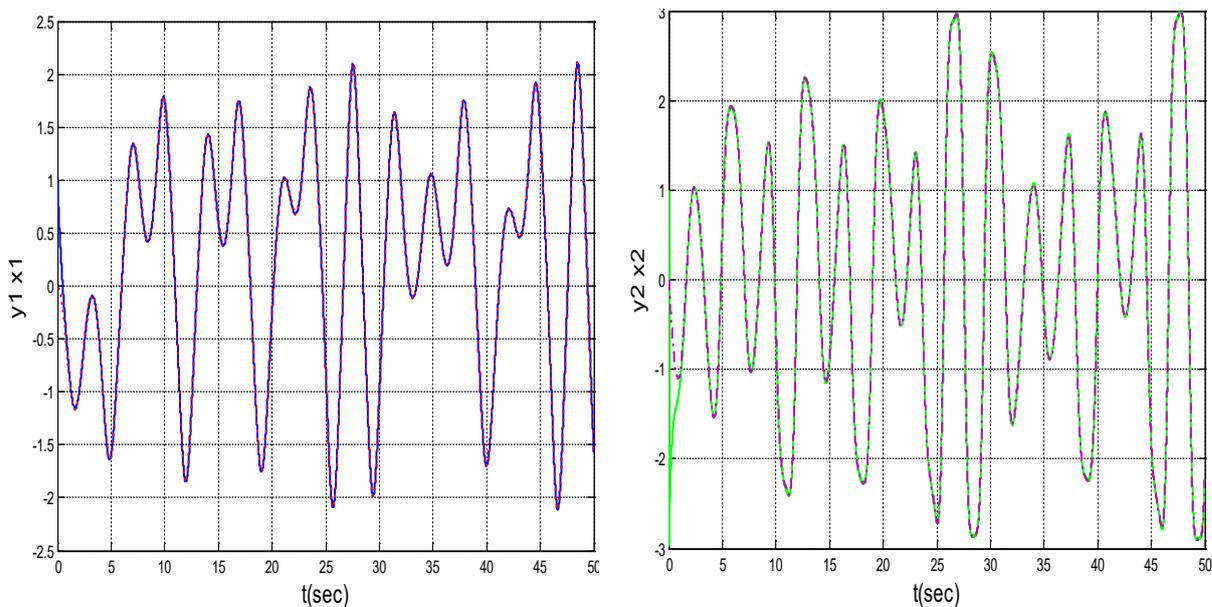
Des étapes simples conduisent à la loi de commande synergique et les résultats de simulation sont matérialisés par la figure (4.4) qui indique une synchronisation rapide entretenant un comportement chaotique des systèmes malgré la différence des conditions initiales.



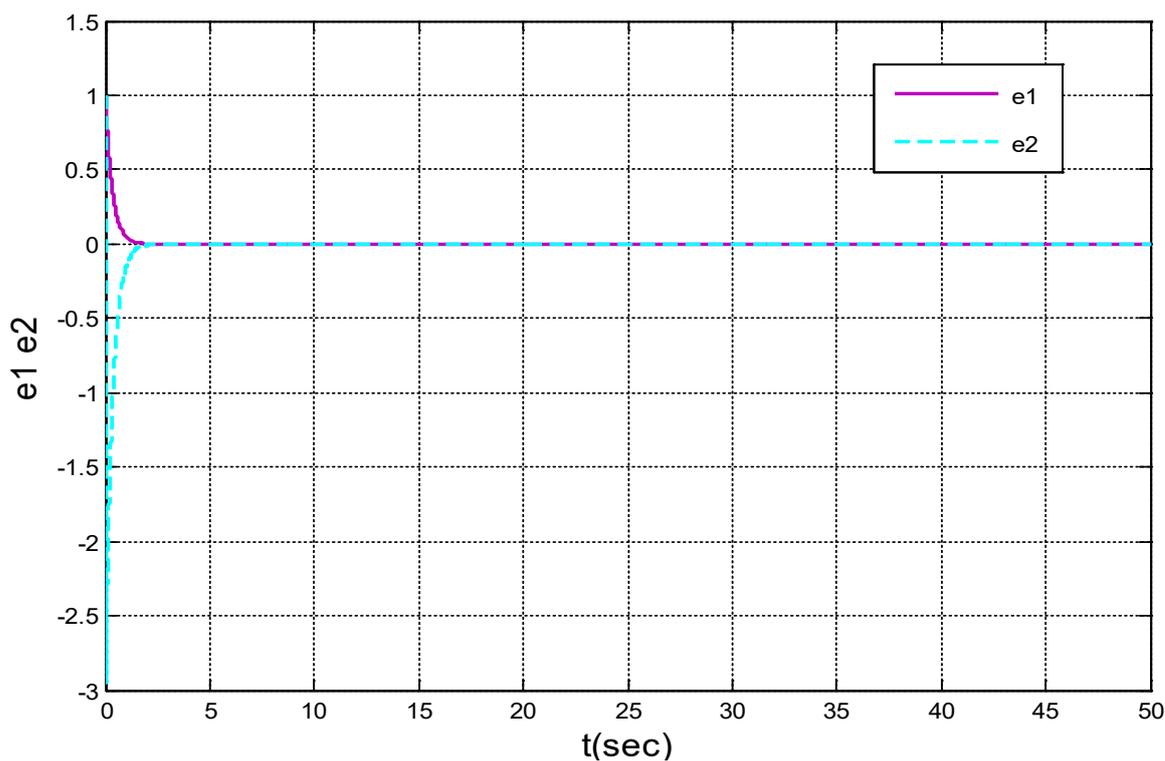
**Figure 4. 1** Convergence des états du premier système



**Figure 4. 2** Convergence des états du deuxième système



**Figure 4. 3** Sorties chaotiques maître esclave- synchronisées



**Figure 4. 4** Synchronisation des erreurs e1, e2

On peut observer que malgré des conditions initiales différentes, les deux systèmes sont rapidement synchronisés en utilisant un contrôle synergique tout en restant dans leurs états chaotiques, ce qui pourrait éventuellement être utilisé pour sécuriser la transmission des données.

#### 4.4.2 Exemple de système hyperchaotique

En 2009, le système Zhou hyperchaotique [170] est décrit par quatre dimensions :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a(x_1 - x_2) + x_4 \\ \dot{x}_2 &= cx_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= -bx_3 + x_1x_2 \\ \dot{x}_4 &= dx_1 + 0.5x_2x_3\end{aligned}\tag{4.21}$$

Où  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  sont les variables d'état, et  $a, b, c$  et  $d$  sont les paramètres du système. Le système (4.21) présente un comportement hyperchaotique pour les valeurs des paramètres suivants :

$$a = 35, b = 3, c = 12, 0 < d < 34.8\tag{4.22}$$

En utilisant (4.22), la matrice de linéarisation du système au point d'équilibre  $E_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$  est obtenue comme suit :

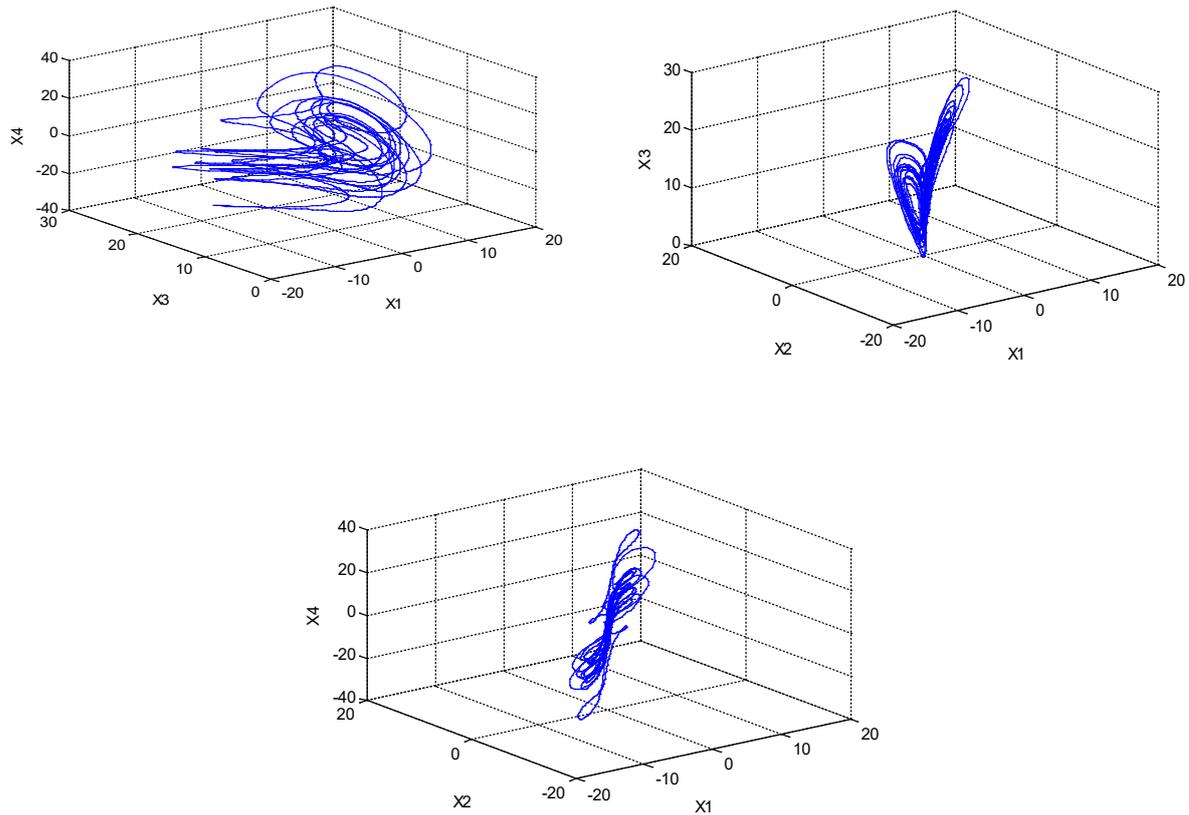
$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\tag{4.23}$$

Les valeurs propres de  $A$  sont :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= c, \lambda_2 = -b, \lambda_3 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4d}}{2}, \\ \lambda_4 &= \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4d}}{2}\end{aligned}\tag{4.24}$$

Puisque  $\lambda_1$  est une valeur propre positive de  $A$ , il ressort immédiatement de la théorie de la stabilité de Lyapunov [4.28] que le système hyperchaotique de Zhou, représenté par l'équation (4.21), est instable au point d'équilibre  $E_0 = [0, 0, 0, 0]$ .

Dans l'étude de simulation, les valeurs de  $a, b, c$  sont données par (4.22) et la valeur de  $d$  est choisie comme  $d=1$ . Les projections de différents attracteurs sont illustrées sur la figure (4.1). Cette figure montre le comportement chaotique du système Zhou.



**Figure 4. 5** Plan de phase du comportement du hyperchaotique du système Zhou

#### 4.4.2.1 La synchronisation projective de système hyperchaotique de Zhou

Un contrôleur synergétique sera conçu pour un système Zhou hyperchaotique maître-esclave.

Les systèmes : maître et esclave peuvent être considérés comme un simple réseau dynamique avec deux nœuds et un lien. Dans ce réseau dynamique, chaque nœud est supposé avoir un oscillateur de sorte que son comportement peut être décrit comme un système Zhou hyperchaotique.

Le système Zhou hyperchaotique maître est défini comme suit :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= a(x_1 - x_2) + x_4 \\
 \dot{x}_2 &= cx_2 - x_1x_3 \\
 \dot{x}_3 &= -bx_3 + x_1x_2 \\
 \dot{x}_4 &= dx_1 + 0.5x_2x_3
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont les mêmes paramètres que ceux de l'équation (4.221<sup>2</sup>).

Le système esclave avec les contrôleurs synergétiques ( $u_i$ ) est défini comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= a(y_2 - y_1) + y_4 + u_1 \\
\dot{y}_2 &= cy_2 - y_1y_3 + u_2 \\
\dot{y}_3 &= -by_3 + y_1y_2 + u_3 \\
\dot{y}_4 &= dy_1 + 0.5y_2y_3 + u_4
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Dans (4.26),  $y_1, y_2, y_3, y_4$  sont les variables d'état et  $u_1, u_2, u_3, u_4$  sont les commandes à déterminer.

Pour la synchronisation projective des systèmes maître et esclave, les erreurs de synchronisation tendent vers zéro  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e_i) = 0$

Où  $e_i$  est défini par :

$$e_i = y_i - \theta x_i \quad (i=1,2,3,4) \tag{4.27}$$

**Remarque1 :**

Si  $\theta=1$  le problème à traité sera la synchronisation complète.

Si  $\theta=-1$  le problème à traité sera l'anti-synchronisation.

**Remarque2**

Si  $\theta=0$  la synchronisation sera réduite à un problème de contrôle du chaos.

L'erreur de la synchronisation est obtenue comme suit:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= a(y_2 - y_1) + y_4 - \theta(a(x_2 - x_1) - x_4) + u_1 \\
\dot{e}_2 &= cy_2 - y_1y_3 - \theta(cx_2 + x_1x_3) + u_2 \\
\dot{e}_3 &= -by_3 + y_1y_2 + \theta(bx_3 - x_1x_2) + u_3 \\
\dot{e}_4 &= dy_1 + 0.5y_2y_3 - \theta(dx_1 - 0.5x_2x_3) + u_4
\end{aligned} \tag{4.28}$$

L'objectif principal ici est de concevoir des contrôleurs synergiques  $u_1, u_2, u_3, u_4$  pour synchroniser deux systèmes hyperchaotiques : le système représenté par l'équation (4.25) avec celui représenté par l'équation (4.26)

Dans un premier temps, une macro-variable  $\Psi$  est définie pour construire une variété du système non linéaire à contrôler qui peut s'exprimer par :

$$\Psi_i = e_i + k_i \int_0^t e_i(\tau) d\tau \quad (4.29)$$

Où  $i=1,2,3,4$  et  $k_i > 0$  sont des constantes positives spécifiées par le concepteur selon les spécifications de performance.

La dérivée de l'équation (4.29) donne :

$$\dot{\Psi}_i = \dot{e}_i + k_i e_i \quad (4.30)$$

La macro-variable est forcée d'évoluer en fonction de la contrainte imposée par le concepteur comme dans la relation ci-dessous (4.31).

$$T_i \dot{\Psi}_i + \Psi_i = 0 \quad (4.31)$$

Où  $T_i > 0$  ( $i=1, 2, 3, 4$ )

Les contrôleurs synergiques élaborés possèdent les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} u_1 &= -a(e_2 - e_1) - e_4 - k_1 e_1 - \frac{\Psi_1}{T_1} \\ u_2 &= -c e_2 + y_1 y_3 - \theta x_1 x_3 - k_2 e_2 - \frac{\Psi_2}{T_2} \\ u_3 &= b e_3 - y_1 y_2 + \theta x_1 x_2 - k_3 e_3 - \frac{\Psi_3}{T_3} \\ u_4 &= -d e_1 - 0.5 y_2 y_3 + 0.5 \theta x_2 x_3 - k_4 e_4 - \frac{\Psi_4}{T_4} \end{aligned} \quad (4.32)$$

La méthode d'analyse de la stabilité de Lyapunov est utilisée pour étudier la stabilité du système contrôlé. Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2} \sum_1^4 \Psi_i^2 \quad (4.33)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov est :

$$\dot{V} = \sum_1^4 \Psi_i \dot{\Psi}_i \quad (4.34)$$

Le remplacement des deux équations (4.30) et (4.28) dans l'équation (4.34) conduit à :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \Psi_1 [ay_2 - ay_1 + y_4 - (ax_2 + ax_1 - x_4)\theta + u_1 + k_1 e_1] + \\ & \Psi_2 [cy_2 - y_1 y_3 + (-cx_2 + x_1 x_3)\theta + u_2 + k_2 e_2] + \\ & \Psi_3 [-by_3 + y_1 y_3 + (bx_2 - x_1 x_2)\theta + u_3 + k_3 e_3] + \\ & \Psi_4 [dy_1 + 0.5y_2 y_3 + (-dx_1 - 0.5x_2 x_3)\theta + u_4 + k_4 e_4] \end{aligned} \quad (4.35)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \Psi_1 [a(e_2 - e_1) + e_4 + u_1 + k_1 e_1] + \\ & \Psi_2 [ce_2 - y_1 y_3 + \theta x_1 x_3 + u_2 + k_2 e_2] + \\ & \Psi_3 [-be_3 + y_1 y_3 - \theta x_1 x_2 + u_3 + k_3 e_3] + \\ & \Psi_4 [de_1 + 0.5y_2 y_3 - 0.5\theta x_2 x_3 + u_4 + k_4 e_4] \end{aligned} \quad (4.36)$$

L'utilisation de (4.32) dans (4.36) fournit ce qui suit :

$$\dot{V} = -\frac{\Psi_1^2}{T_1} - \frac{\Psi_2^2}{T_2} - \frac{\Psi_3^2}{T_3} - \frac{\Psi_4^2}{T_4} \quad (4.37)$$

Où,  $T_i > 0$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) permettant ainsi d'affirmer que :

$$\dot{V} < 0 \quad (4.38)$$

Nous concluons que la synchronisation des erreurs  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$ ,  $e_3(t)$ ,  $e_4(t)$  converge exponentiellement vers zéro lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

#### 4.4.2.2 Résultats de simulation

Des résultats de simulation numérique sont donnés pour évaluer les performances de la méthode proposée. Les paramètres du système pour le comportement hyperchaotique sont sélectionnés comme suit :  $a=35, b=3, c=12, d=1$ ,

Les conditions initiales du système maître, représenté par l'équation (4.25), sont les suivantes :  $x_1(0)=25, x_2(0)=-16, x_3(0)=20, x_4(0)=-30$ .

Les conditions initiales du système esclave, représenté par l'équation (4.26), sont sélectionnées comme suit :

$$y_1(0)=14, y_2(0)=28, y_3(0)=-10, y_4(0)=6.$$

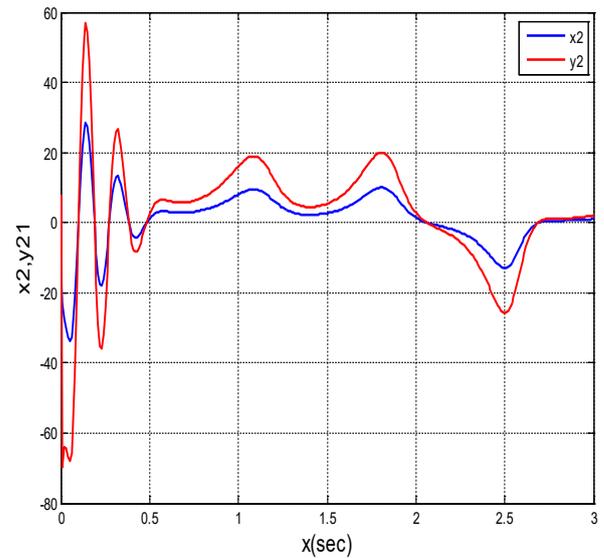
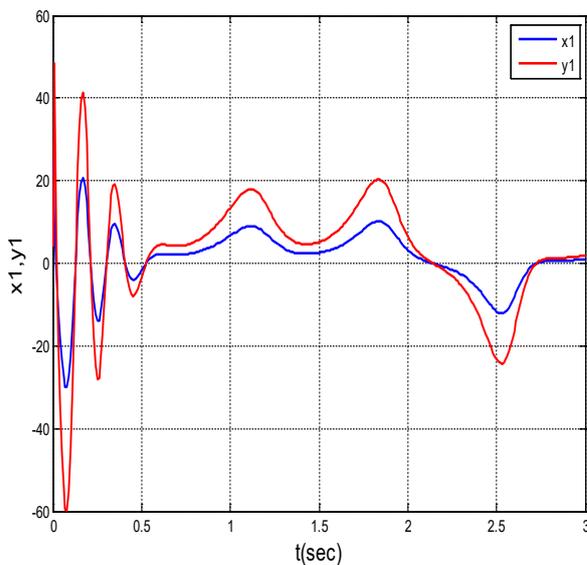
Les paramètres de contrôle synergétique sont considérés sont :  $T_i=100, k_i=30, (i=1,\dots,4)$ .

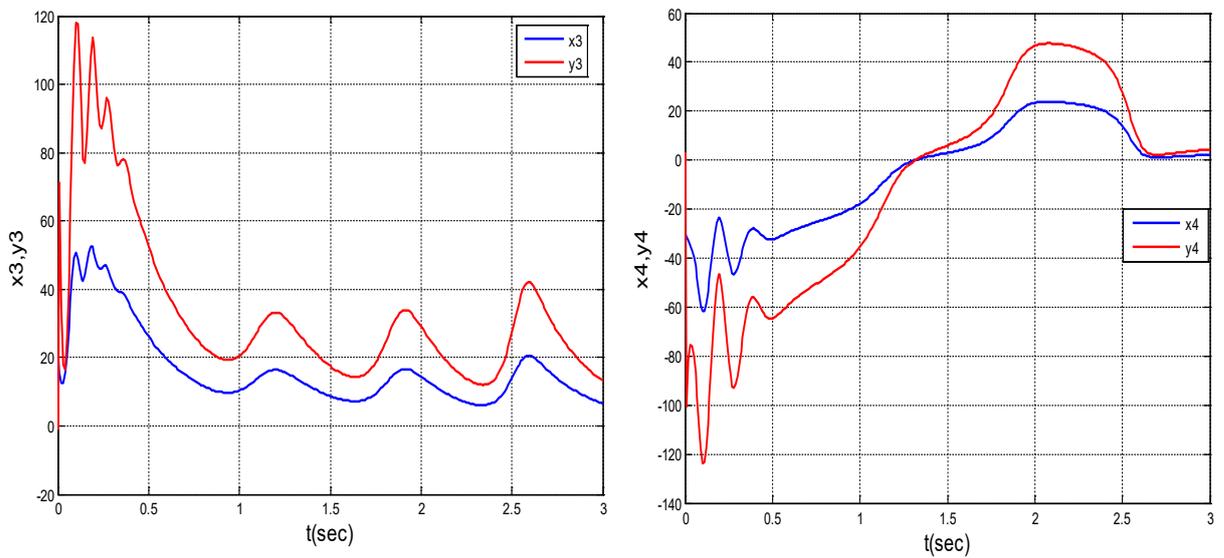
Pour  $\theta=2$ , la figure (4.6) montre que les trajectoires d'état des systèmes (4.25) et (4.26) tendent à être proportionnellement synchronisées et que le rapport des amplitudes des deux systèmes tend vers un facteur d'échelle constant. L'erreur de synchronisation projective du système (4.28) converge vers zéro est illustrée sur la figure (4.7).

La figure (4.8) montre que la synchronisation projective des variables d'état des deux systèmes tend à être proportionnellement synchronisée dans le sens opposé avec  $\theta=-2$ . La figure (4.9) montre les évolutions des erreurs avec  $\theta=-2$ .

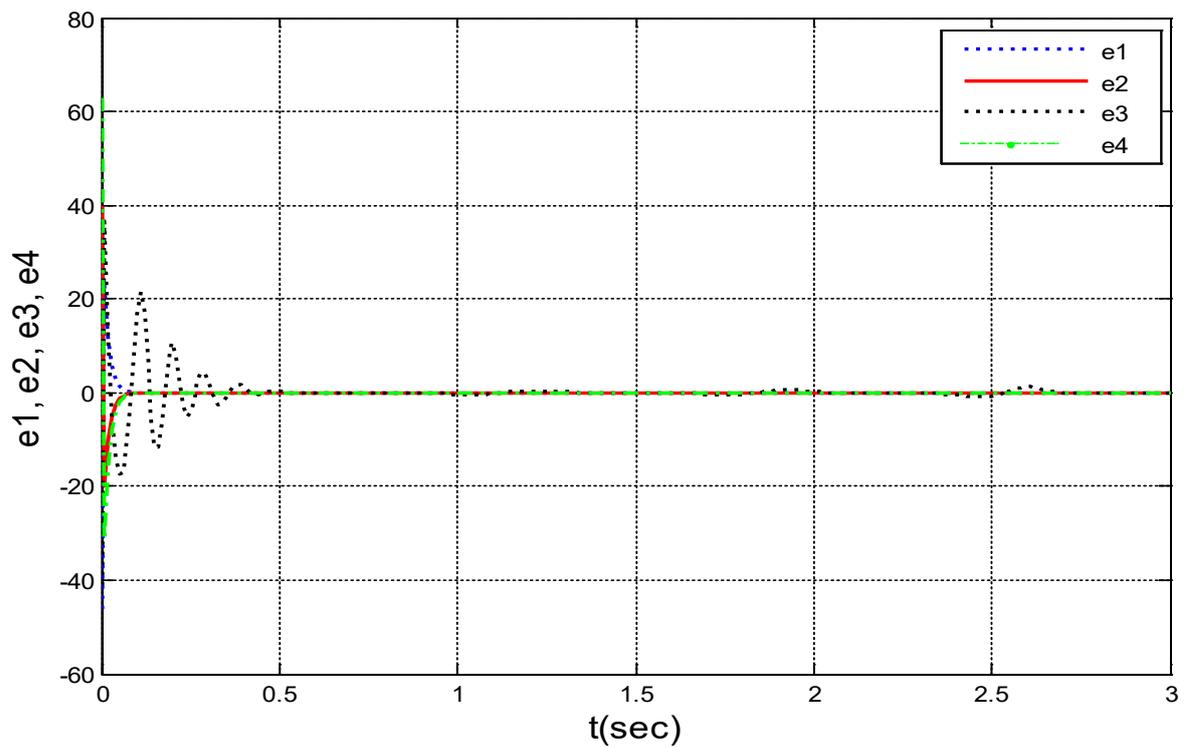
Pour  $\theta=1$ , la synchronisation complète des états est représentée sur la figure (4.10) dont la figure (4.11) montre l'erreur de synchronisation complète.

Pour  $\theta=1$ , la figure (4.12) affiche les vecteurs d'état du système d'entraînement (4.25) et du système de réponse (4.26) et la figure (4.13) montre que l'erreur d'anti-synchronisation converge vers zéro.

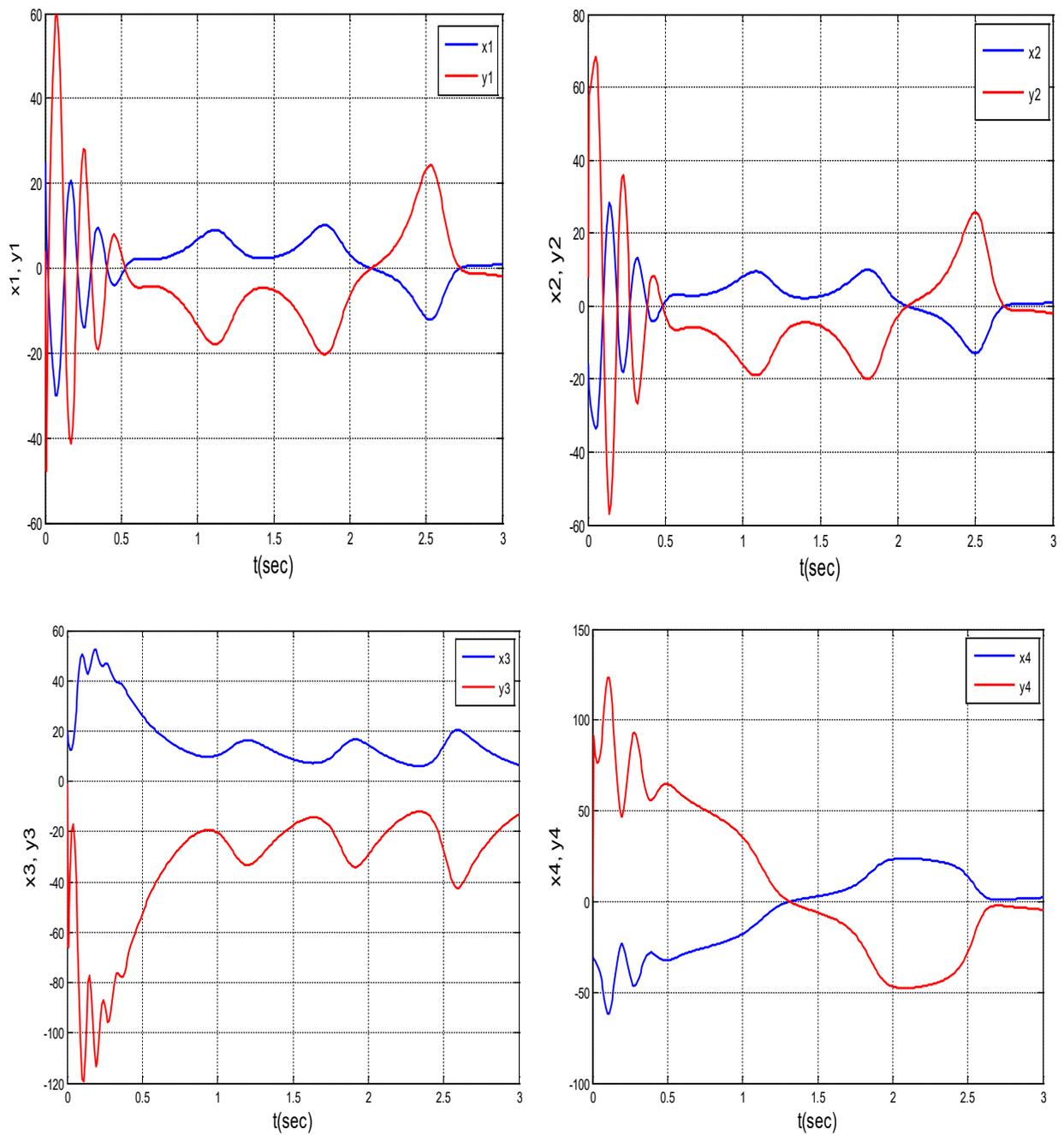




**Figure 4. 6** Synchronisation projective de deux systèmes identiques par la commande synergétique à  $\theta=2$ .



**Figure 4. 7** Synchronisation projective des erreurs,  $e_1, e_2, e_3, e_4$



**Figure 4. 8** Synchronisation projective de deux systèmes identiques par la commande synergétique à  $\theta=-2$ .

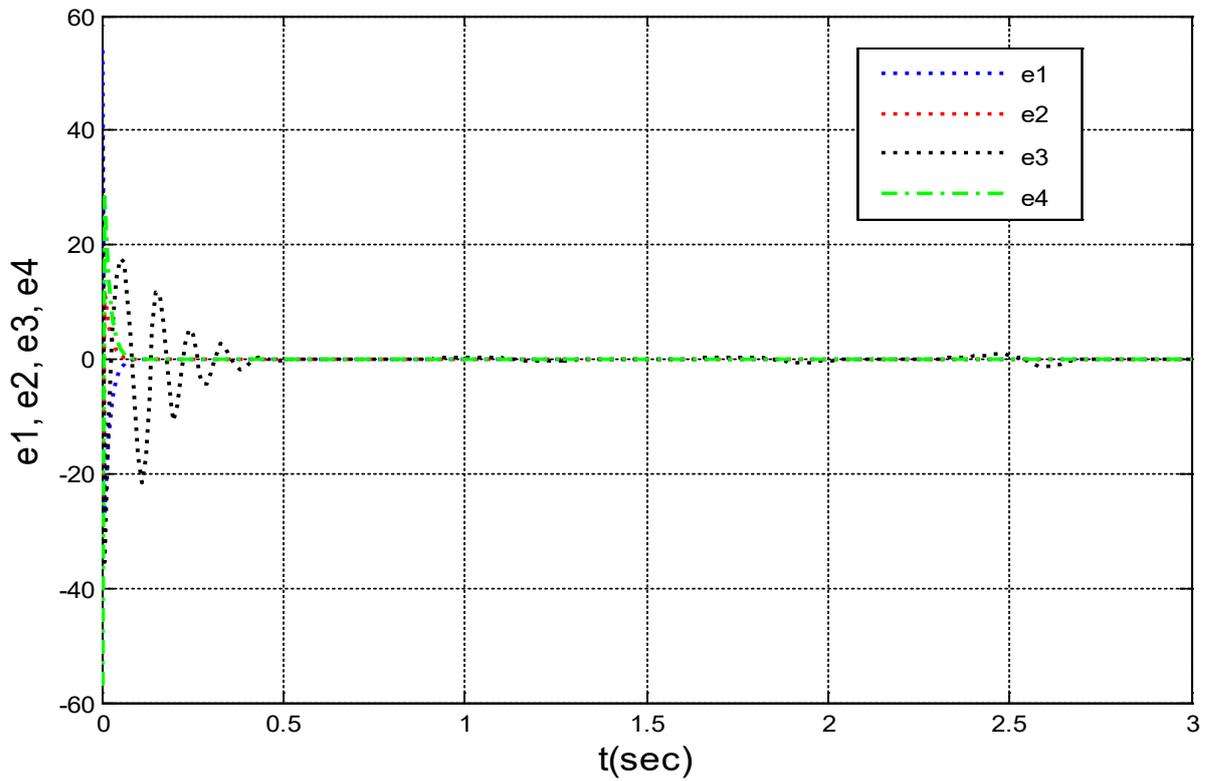
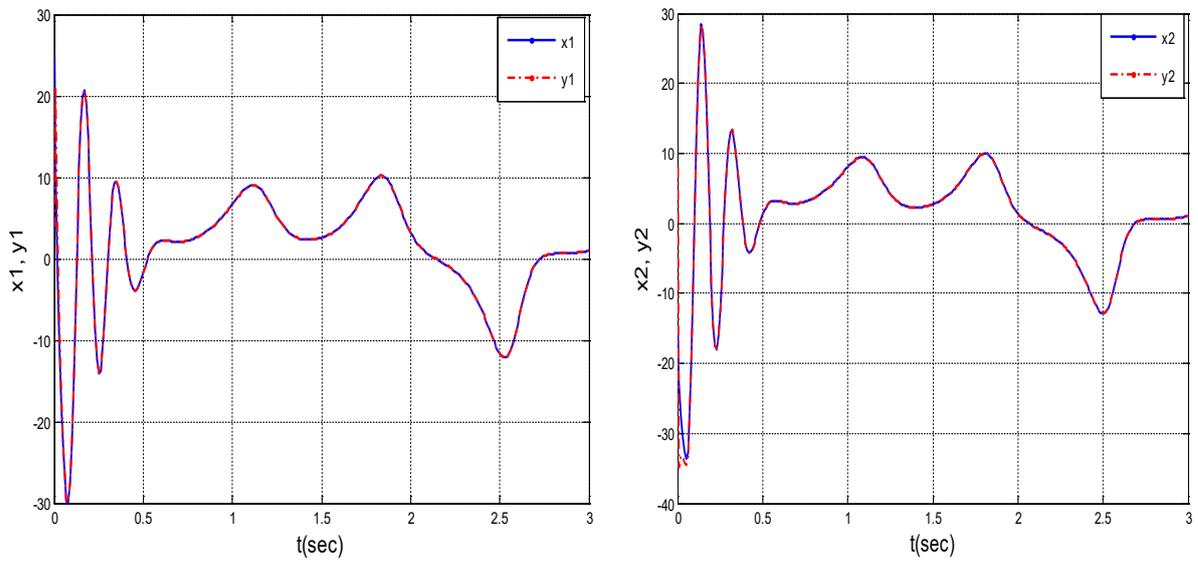
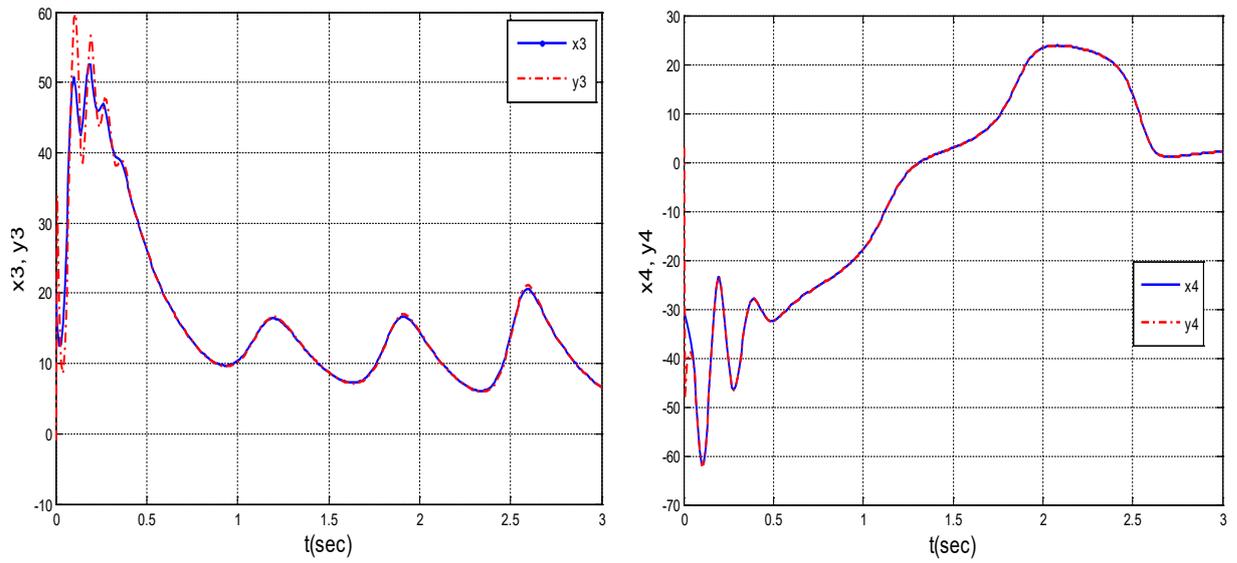
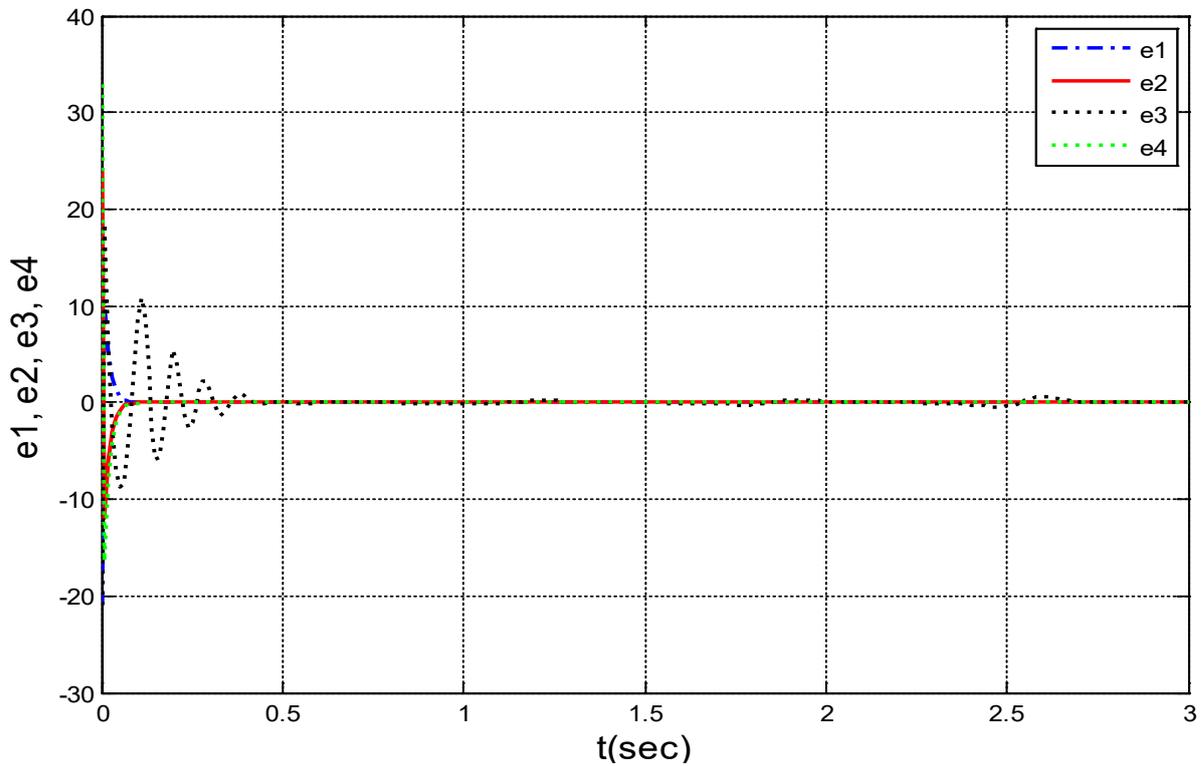


Figure 4. 9 Synchronisation Projective des erreurs,  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ ,  $e_4$

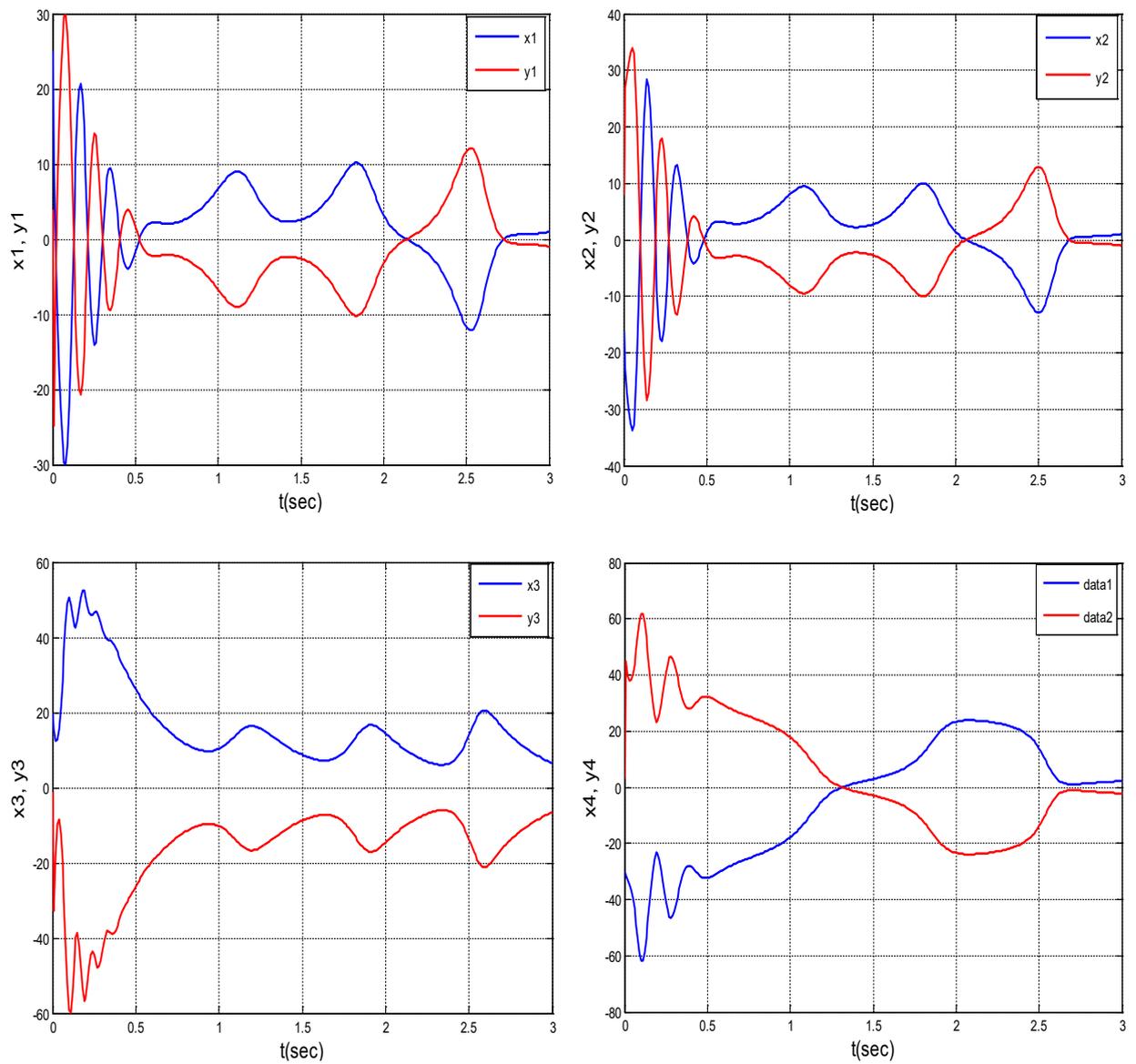




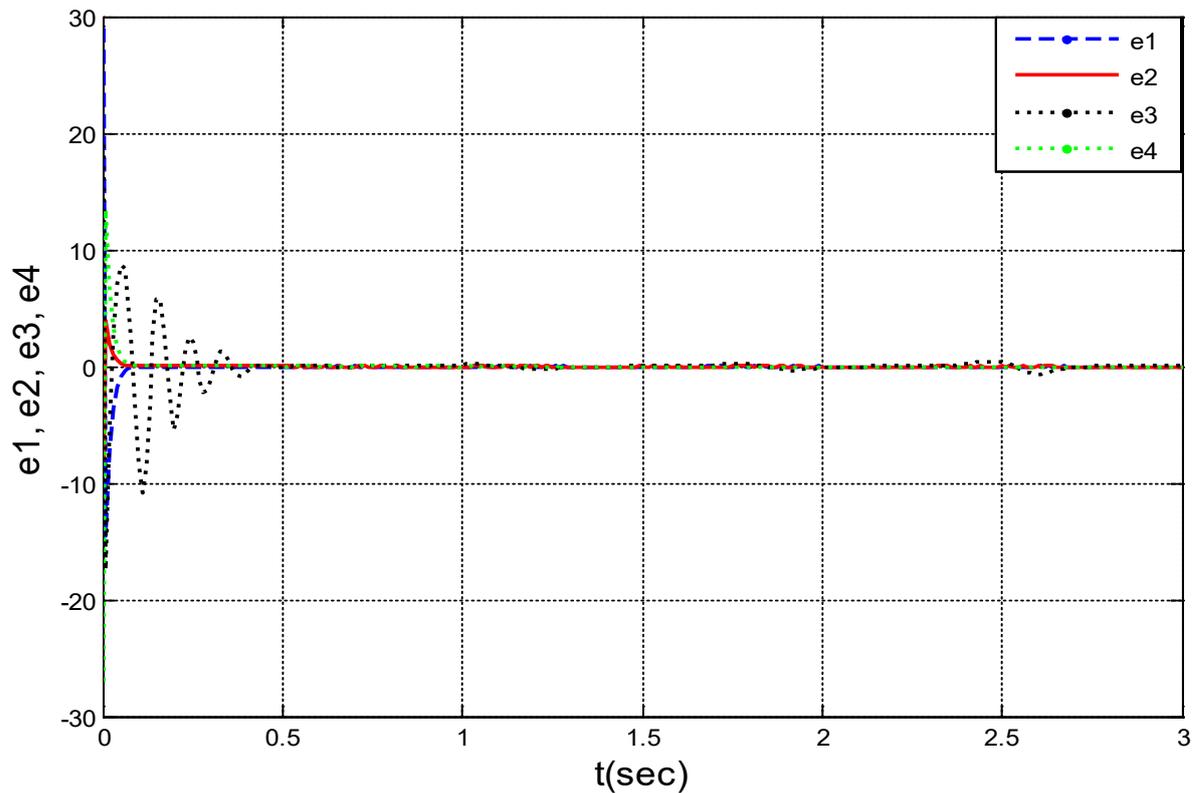
**Figure 4. 10** Synchronisation projective de deux systèmes identiques par la commande synergetique à  $\theta=1$ .



**Figure 4. 11** Synchronisation Projective des erreurs,  $e_1, e_2, e_3, e_4$



**Figure 4. 12** Synchronisation projective de deux systèmes identiques par la commande synergétique à  $\theta=-1$ .



**Figure 4. 13**Synchronisation Projective des erreurs, e1, e2, e3, e4

## 4.5 La synchronisation des systèmes chaotiques et hyper chaotiques par la commande synergétique Terminale

### 4.5.1 Exemple de système chaotique

Dans cette section, le contrôleur synergétique terminal est proposé pour synchroniser un esclave et un maître de systèmes chaotiques identiques.

Le système maître de torche à plasma est donné par :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\mu x_1 - 50x_2 - x_3 - x_1^3\end{aligned}\tag{4.39}$$

Où  $x_1, x_2, x_3$  sont les états du système et  $\mu$  est le paramètre chaotique.

Le système de torche à plasma suivant est considéré comme un système esclave :

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_2 + u_1 \\
\dot{y}_2 &= y_3 + u_2 \\
\dot{y}_3 &= -\mu y_1 - 50y_2 - y_3 - y_1^3 + u_3
\end{aligned} \tag{4.40}$$

L'objectif principal ici est de concevoir un contrôleur pour synchroniser les deux systèmes chaotiques représentés par les deux équations (4.40) et (4.39).

Les erreurs de synchronisation  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e_i) = 0$  Où  $e_i$  est défini par :

$$e_i = y_i - x_i \tag{4.41}$$

La dynamique d'erreur de synchronisation est obtenue comme suit:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= e_2 + u_1 \\
\dot{e}_2 &= e_3 + u_2 \\
\dot{e}_3 &= -\mu e_1 - 50e_2 - e_3 - y_1^3 + x_1^3 + u_3
\end{aligned} \tag{4.42}$$

La macro-variable est définie par l'expression ci-après :

$$\Psi_i = \frac{1}{\beta} e_i + \int_0^t e_i^{q_i}(\tau) d\tau \tag{4.43}$$

où  $i=1,2,3,4$  et  $k_i > 0$ ,  $p$  et  $q$  sont des constantes impaires positives, telles que  $0 < \frac{p}{q} < 1$ .

La dérivée de l'équation (4.43) conduit à :

$$\dot{\Psi}_i = \frac{1}{\beta} \dot{e}_i + e_i^{q_i} \tag{4.44}$$

Les temps de convergence sont obtenus par la résolution de l'équation dynamique (4.44) :

$$t_f = \frac{e_i(0)^{\frac{1-p_i}{q_i}}}{k_i(1-\frac{p_i}{q_i})} \tag{4.45}$$

Il est clair que si la dynamique de l'erreur est entraînée vers la macro-variable  $\Psi=0$  la stabilité du système est assurée en temps fini.

On a la contrainte:

$$T\dot{\Psi} + \Psi = 0 \quad (4.46)$$

Les lois de commande suivantes en résultent :

$$\begin{aligned} u_1 &= -\beta_1 e_1^{\frac{p_1}{q_1}} - e_2 - \beta_1 \left( \frac{\Psi_1}{T_1} \right) \\ u_2 &= -\beta_2 e_2^{\frac{p_2}{q_2}} - e_3 - \beta_2 \left( \frac{\Psi_2}{T_2} \right) \\ u_3 &= -\beta_3 e_3^{\frac{p_3}{q_3}} + \mu e_1 + 50e_2 + e_3 + y_1^3 - x_1^3 - \beta_3 \left( \frac{\Psi_3}{T_3} \right) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Pour l'étude de la stabilité, considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2}(\Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2) \quad (4.48)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov est :

$$\dot{V} = \Psi_1 \dot{\Psi}_1 + \Psi_2 \dot{\Psi}_2 + \Psi_3 \dot{\Psi}_3 \quad (4.49)$$

Et l'utilisation de l'équation (4.46) conduit à :

$$\dot{V} = -\frac{\Psi_1^2}{T_1} - \frac{\Psi_2^2}{T_2} - \frac{\Psi_3^3}{T_3} \quad (4.50)$$

Donc :

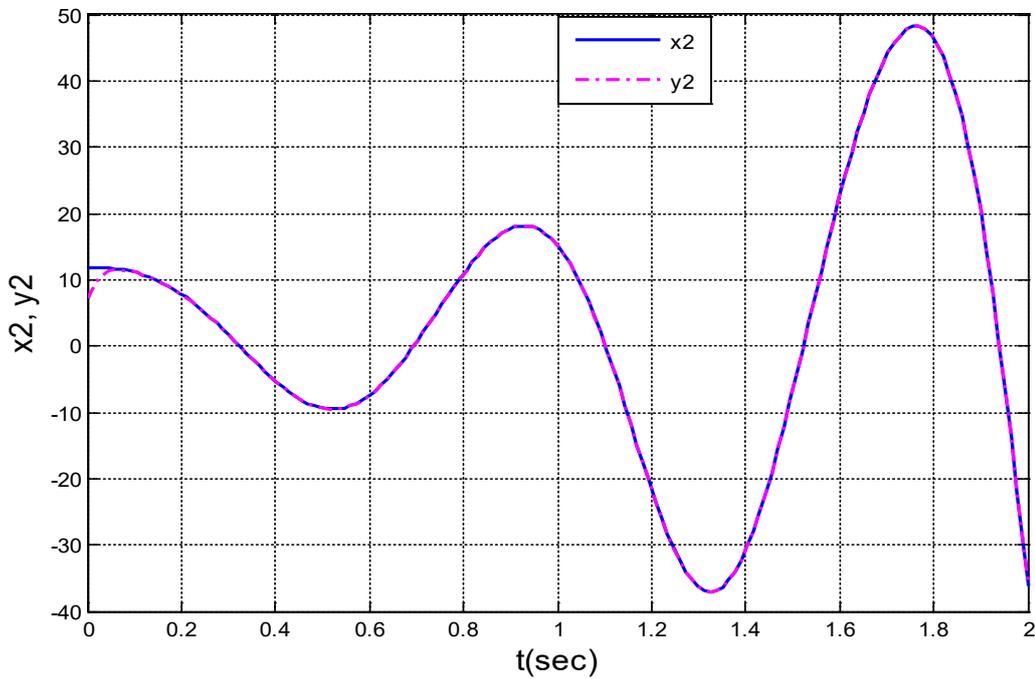
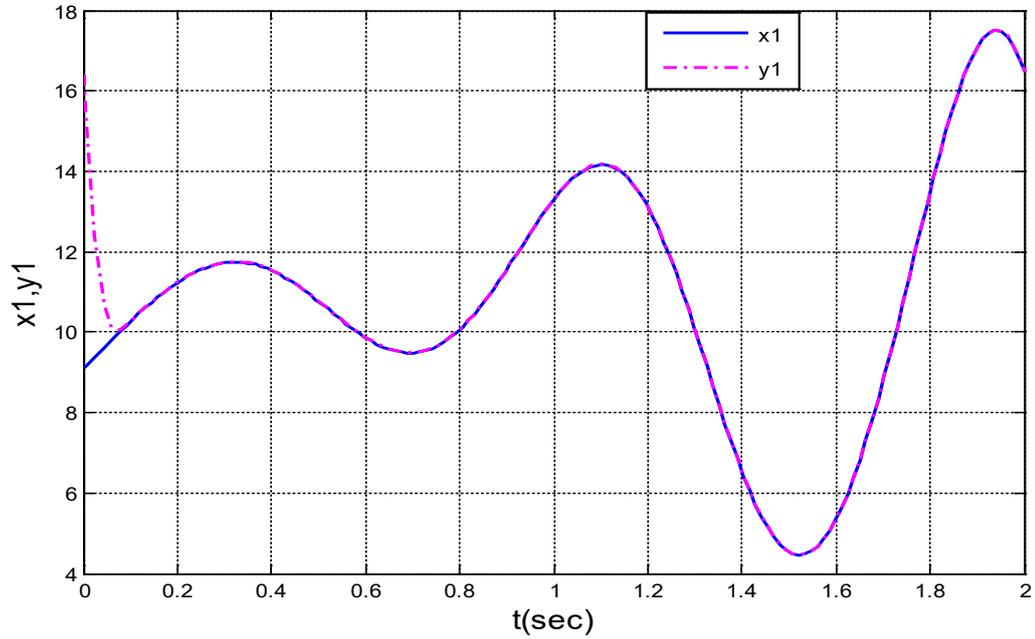
$$\dot{V} < 0 \quad (4.51)$$

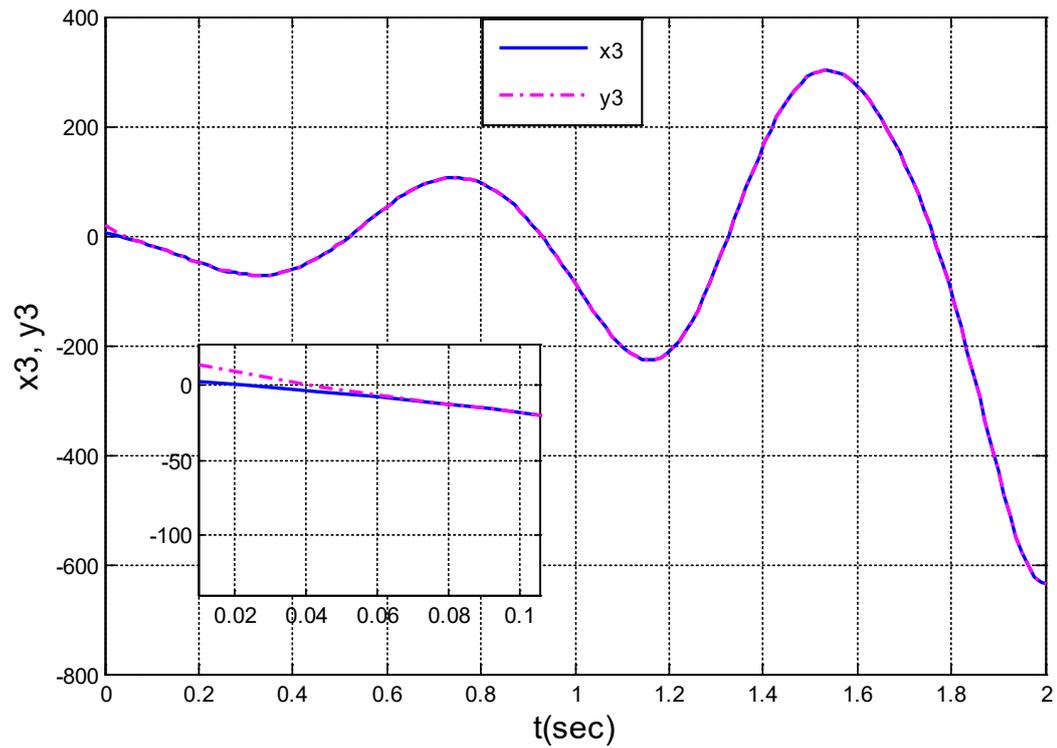
Par conséquent, le contrôleur peut répondre à la stabilité de Lyapunov.

#### 4.5.1.1 Résultats de simulation

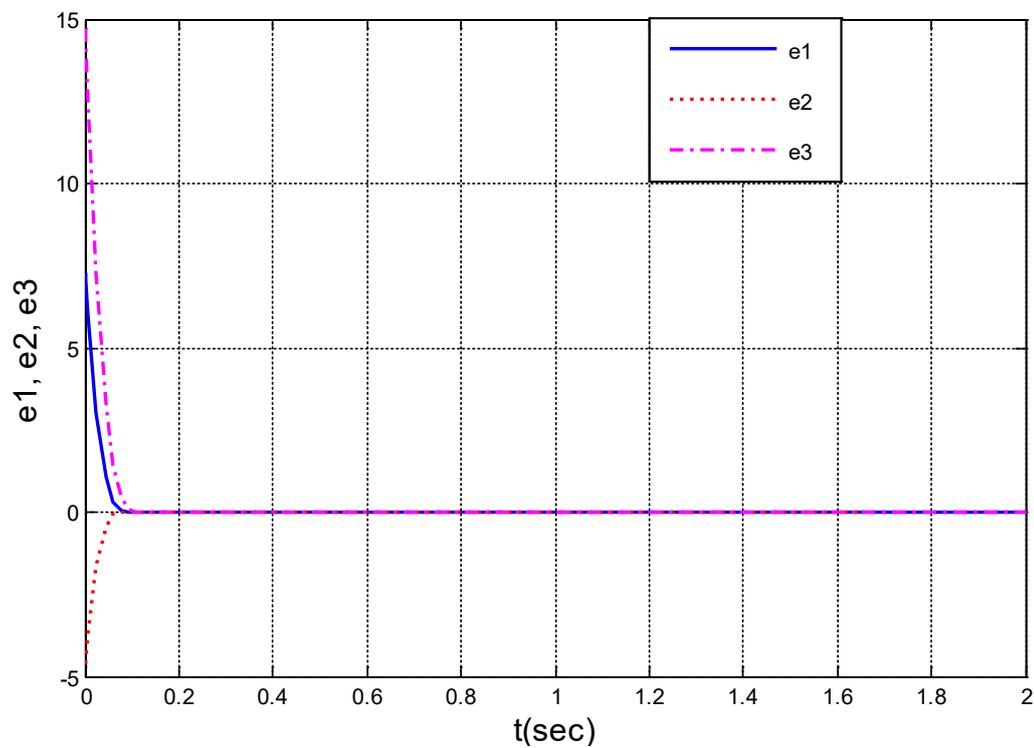
La figure 4.14 montre la synchronisation des deux systèmes de torche à plasma identiques. Les conditions initiales du système maître sont :  $x_1(0)=9.1$ ,  $x_2(0) = 11.7$ ,  $x_3(0) = 4.6$ . L'état initial du système esclave est choisie comme :  $y_1(0)=16.4$ ,  $y_2(0)=7.1$ ,  $y_3(0)=19.3$ .

Les paramètres de contrôle constants pour cette simulation sont évalués par  $\beta_i = 50$ ,  $T_i = 100$ .





**Figure 4. 14** Synchronisation des états avec le contrôle synergique terminal (TSC)



**Figure 4. 15** Synchronisation des erreurs par la commande synergique terminale (TSC)

D'après les résultats obtenus, on peut affirmer que les systèmes maître et esclave sont rapidement synchronisés malgré la différence des conditions initiales et que les erreurs convergent vers zéro en peu de temps en utilisant TSC. Par conséquent, ces résultats montrent clairement la performance robuste du TSC.

#### 4.5.2 Synchronisation adaptative de deux systèmes hyperchaotiques identiques de Zhou par synergétique terminale

Un schéma adaptatif sera utilisé dans cette section en conjonction avec une approche synergétique terminale pour élaborer une loi de commande robuste pour synchroniser globalement deux systèmes Zhou hyperchaotiques identiques avec des paramètres inconnus.

Soit le système maître donné par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + x_4 \\ \dot{x}_2 &= cx_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= -bx_3 + x_1x_2 \\ \dot{x}_4 &= dx_1 + 0.5x_2x_3\end{aligned}\tag{4.52}$$

Le système esclave avec les contrôleurs synergétiques terminaux ( $u_i$ ) est défini comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \hat{a}(y_2 - y_1) + y_4 + u_1 \\ \dot{y}_2 &= \hat{c}y_2 - y_1y_3 + u_2 \\ \dot{y}_3 &= -\hat{b}y_3 + y_1y_2 + u_3 \\ \dot{y}_4 &= \hat{d}y_1 + 0.5y_2y_3 + u_4\end{aligned}\tag{4.53}$$

$y_1, y_2, y_3, y_4$  représentent les états du système et  $u_1, u_2, u_3, u_4$  les commandes adaptatives à élaborer sur la base des estimations  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$  pour les paramètres inconnus  $a, b, c, d$ .

Pour une synchronisation complète des systèmes maître et esclave, les erreurs de synchronisation doivent atteindre rapidement une valeur nulle soit :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e_i) = 0$  Où  $e_i$  est défini par :

$$e_i = y_i - x_i\tag{4.54}$$

Ainsi, la dynamique des erreurs de synchronisation peut être décrite par (4.55) :

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= \hat{a}(y_2 - y_1) + y_4 - a(x_2 - x_1) - x_4 + u_1 \\
\dot{e}_2 &= \hat{c}y_2 - y_1y_3 - cx_2 + x_1x_3 + u_2 \\
\dot{e}_3 &= -\hat{b}y_3 + y_1y_2 + bx_3 - x_1x_2 + u_3 \\
\dot{e}_4 &= \hat{d}y_1 + 0.5y_2y_3 - dx_1 - 0.5x_2x_3 + u_4
\end{aligned} \tag{4.55}$$

L'objectif principal ici est de concevoir des contrôleurs synergétiques terminaux adaptatifs pour synchroniser deux systèmes hyperchaotiques représentés par les équations (4.53) et (4.52).

Tout d'abord, une macro-variable  $\Psi$  est définie pour construire une variété pour le système non linéaire à contrôler. Elle donnée par :

$$\begin{aligned}
\Psi_i &= e_i + k_i \int_0^t e_i^{q_i}(\tau) d\tau \\
\Psi_i &= 0
\end{aligned} \tag{4.56}$$

La dérivée de l'équation (4.56) conduit à :

$$\dot{\Psi}_i = \dot{e}_i + k_i e_i^{q_i} \tag{4.57}$$

Où,  $i=1,2,3,4$  et  $k_i, p$  et  $q$  sont des constantes impaires positives, telles que  $0 < \frac{p}{q} < 1$ . En atteignant l'attracteur terminal  $\Psi=0$ , la dynamique de l'erreur est déterminée par l'équation différentielle suivante:

$$\dot{e}_i = -k_i e_i^{q_i} \tag{4.58}$$

L'équation (4.58) peut aussi être écrite comme suit :

$$dt = -\frac{1}{k_i} e_i^{-\frac{p_i}{q_i}} de_i \tag{4.59}$$

En intégrant les deux côtés de l'égalité (4.59) et en évaluant l'équation résultante dans l'intervalle fermé ( $e_i(0) \neq 0, e_i(t_f) = 0$ ) on aura :

$$t_f = \frac{e_i(0)^{\frac{1-p_i}{q_i}}}{k_i(1-\frac{p_i}{q_i})} \quad (4.60)$$

Lorsque le système atteint l'attracteur  $\Psi = 0$ , l'erreur d'état du système converge vers zéro en un temps fini  $t_f$ .

On a la contrainte :

$$T\dot{\Psi} + \Psi = 0 \quad (4.61)$$

L'utilisation des équations (4.58) et (4.57) donne les résultats suivants :

$$\dot{\Psi}_i = \dot{e}_i + k_i e_i^{\frac{p_i}{q_i}} = -\frac{\Psi_i}{T_i} \quad (4.62)$$

Les lois de commande terminale synergique adaptative obtenues sont données par la relation suivante (4.63):

$$\begin{aligned} u_1 &= -\hat{a}(e_2 - e_1) - e_4 - k_1 e_1^{\frac{p_1}{q_1}} - \frac{\Psi_1}{T_1} \\ u_2 &= -\hat{c}e_2 + y_1 y_3 - x_1 x_3 - k_2 e_2^{\frac{p_2}{q_2}} - \frac{\Psi_2}{T_2} \\ u_3 &= \hat{b}e_3 - y_1 y_2 + x_1 x_2 - k_3 e_3^{\frac{p_3}{q_3}} - \frac{\Psi_3}{T_3} \\ u_4 &= -\hat{d}e_1 - 0.5y_2 y_3 + 0.5x_2 x_3 - k_4 e_4^{\frac{p_4}{q_4}} - \frac{\Psi_4}{T_4} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Les paramètres inconnus estimés sont obtenus à l'aide des lois d'adaptation suivantes :

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{a}} &= -\Psi_1(x_2 - x_1) \\
\dot{\hat{b}} &= \Psi_3 x_3 \\
\dot{\hat{c}} &= -\Psi_2 x_2 \\
\dot{\hat{d}} &= -\Psi_4 x_1
\end{aligned} \tag{4.64}$$

L'analyse de la stabilité de Lyapunov est utilisée pour étudier la stabilité du système contrôlé.

**Théorème 4.2 :** La loi d'entrée de commande synergétique terminale adaptative dans l'équation (4.64) avec  $k_i > 0$  et  $T_i > 0$  stabilise le système.

**Preuve 4.1. :** Pour justifier la stabilité de système de commande, nous considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2} \sum_1^4 \Psi_i^2 + \frac{1}{2} \sum_1^4 \alpha_i^2 \tag{4.65}$$

Où les erreurs d'estimation des paramètres sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \hat{a} - a \\
\alpha_2 &= \hat{b} - b \\
\alpha_3 &= \hat{c} - c \\
\alpha_4 &= \hat{d} - d
\end{aligned} \tag{4.66}$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov donne :

$$\dot{V} = \sum_1^4 \Psi_i \dot{\Psi}_i + \sum_1^4 \alpha_i \dot{\alpha}_i \tag{4.67}$$

En utilisant (4.62) et (4.58) dans (4.67) donne :

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \Psi_1 \left[ \hat{a}y_2 - \hat{a}y_1 + y_4 - ax_2 + ax_1 - x_4 + u_1 + k_1 e_1^{\frac{p_1}{q_1}} \right] + \\
&\Psi_2 \left[ \hat{c}y_2 - y_1y_3 - cx_2 + x_1x_3 + u_2 + k_2 e_2^{\frac{p_2}{q_2}} \right] + \Psi_3 \left[ -\hat{b}y_3 + y_1y_2 + bx_3 - x_1x_2 + u_3 + k_3 e_3^{\frac{p_3}{q_3}} \right] + \\
&\Psi_4 \left[ \hat{d}y_1 + 0.5y_2y_3 - dx_1 - 0.5x_2x_3 + u_4 + k_4 e_4^{\frac{p_4}{q_4}} \right] + \alpha_1 \dot{\hat{a}} + \alpha_2 \dot{\hat{b}} + \alpha_3 \dot{\hat{c}} + \alpha_4 \dot{\hat{d}}
\end{aligned} \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned}
&= \Psi_1 \left[ \hat{a}y_2 - \hat{a}y_1 + y_4 - (\hat{a} - \alpha_1)x_2 + (\hat{a} - \alpha_1)x_1 - x_4 + u_1 + k_1 e_1^{\frac{p_1}{q_1}} \right] + \\
&\Psi_2 \left[ \hat{c}y_2 - y_1y_3 - (\hat{c} - \alpha_3)x_2 + x_1x_3 + u_2 + k_2 e_2^{\frac{p_2}{q_2}} \right] + \\
&\Psi_3 \left[ -\hat{b}y_3 + y_1y_2 + (\hat{b} - \alpha_3)x_3 - x_1x_2 + u_3 + k_3 e_3^{\frac{p_3}{q_3}} \right] + \\
&\Psi_4 \left[ \hat{d}y_1 + 0.5y_2y_3 - (\hat{d} - \alpha_4)x_1 - 0.5x_2x_3 + u_4 + k_4 e_4^{\frac{p_4}{q_4}} \right] + \alpha_1 \hat{a} + \alpha_2 \hat{b} + \alpha_3 \hat{c} + \alpha_4 \hat{d}
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Ce qui conduit après quelques manipulations mathématiques à :

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \Psi_1 \left[ \hat{a}(e_2 - e_1) + e_4 + u_1 + k_1 e_1^{\frac{p_1}{q_1}} \right] + \Psi_2 \left[ \hat{c}e_2 - y_1y_3 + x_1x_3 + u_2 + k_2 e_2^{\frac{p_2}{q_2}} \right] + \\
&\Psi_3 \left[ -\hat{b}e_3 + y_1y_2 - x_1x_2 + u_3 + k_3 e_3^{\frac{p_3}{q_3}} \right] + \Psi_4 \left[ \hat{d}e_1 + 0.5y_2y_3 - 0.5x_2x_3 + u_4 + k_4 e_4^{\frac{p_4}{q_4}} \right] \\
&+ \alpha_1 \left[ \Psi_1(x_2 - x_1) + \hat{a} \right] + \alpha_3 \left[ \Psi_2x_2 + \hat{c} \right] + \alpha_2 \left[ -\Psi_3x_3 + \hat{b} \right] + \alpha_4 \left[ \Psi_4x_1 + \hat{d} \right]
\end{aligned} \tag{4.70}$$

L'équation (4.70) peut être réécrite comme ci-dessous avec les conditions des équations (4.63) et (4.62) :

$$\dot{V} = -\frac{\Psi_1^2}{T_1} - \frac{\Psi_2^2}{T_2} - \frac{\Psi_3^3}{T_3} \tag{4.71}$$

Ou  $T_i > 0$ ,  $i = 0, \dots, 4$ .

On conclut :

$$\dot{V} < 0 \tag{4.72}$$

Il est évident que l'équation (4.72) confirme la stabilité du système.

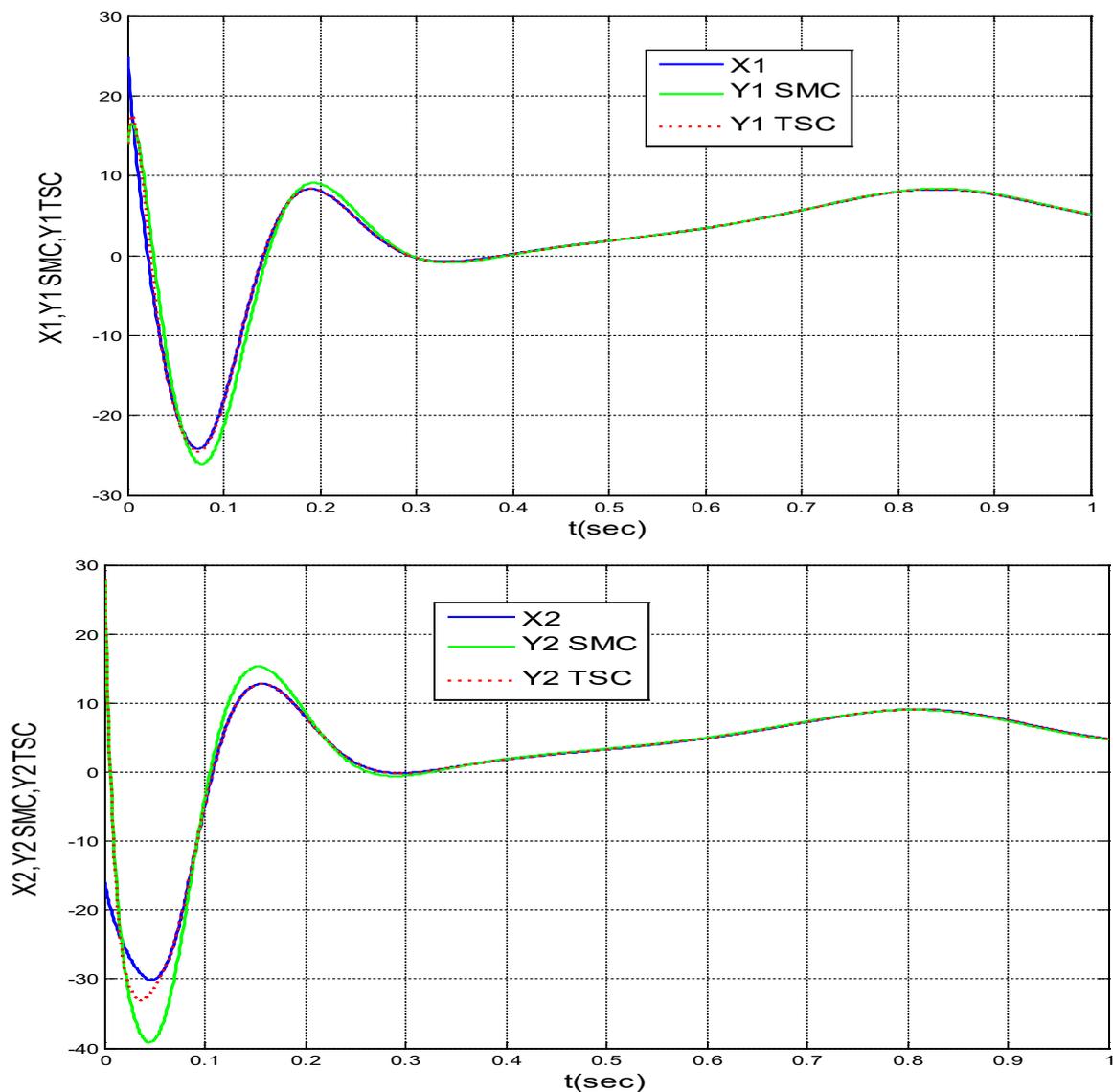
#### 4.5.2.1 Résultats de simulation

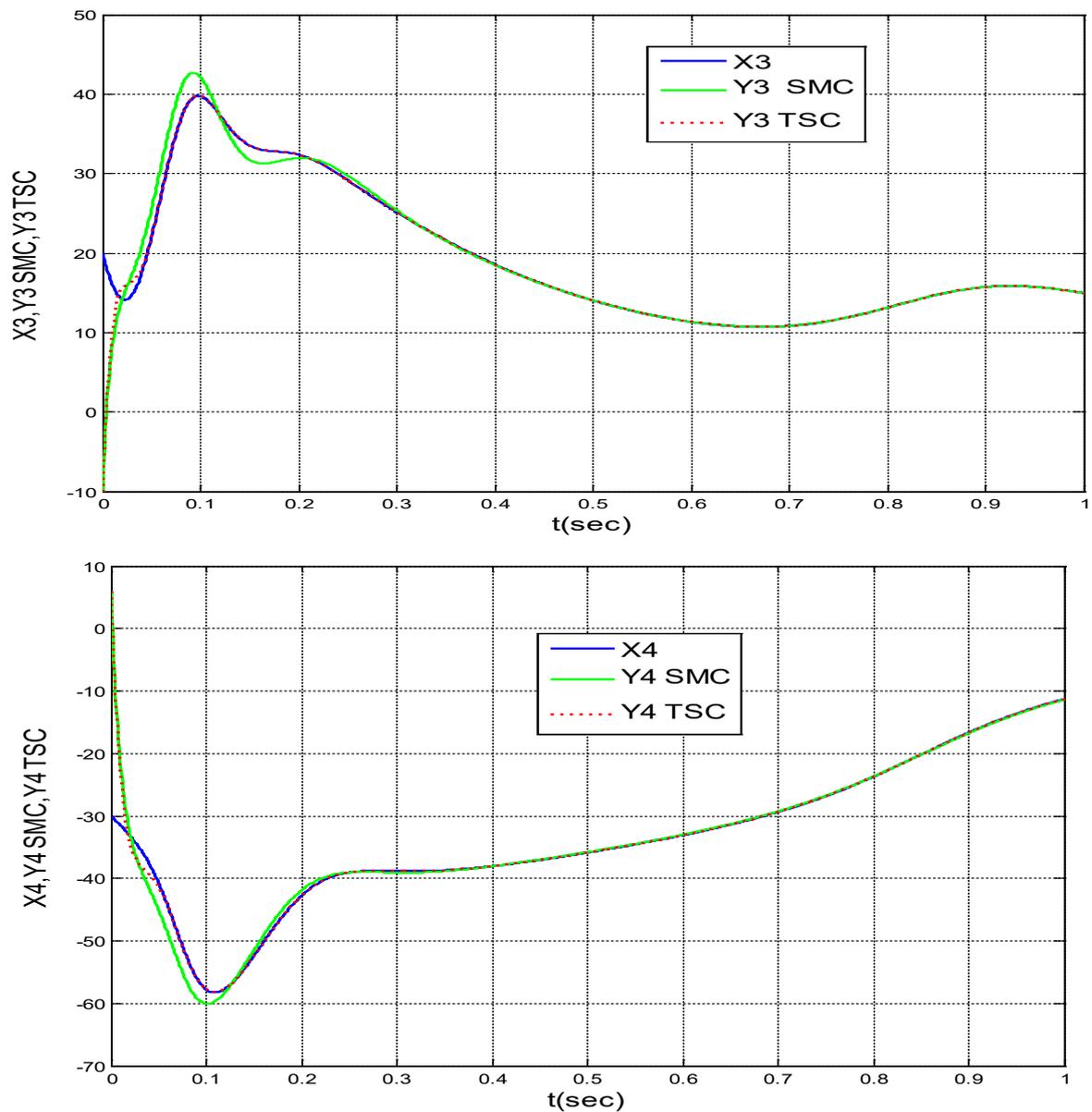
Des simulations numériques sont réalisées pour évaluer les performances de la méthode proposée dont les paramètres du système Zhou pour le comportement hyperchaotique sont :  $a=35$ ,  $b=3$ ,  $c=12$ ,  $d=1$ . Deux ensembles différents de conditions initiales sont choisis  $x_1(0) =$

$25, x_2(0) = -16, x_3 = (0)20, x_4(0) = -30$  pour le système maître (4.52) et  $y_1(0) = 14, y_2(0) = 28, y_3(0) = -10, y_4(0) = 6$  pour le système de slave.

Les valeurs initiales des paramètres estimés sont prises comme suit :  $\hat{a} = 6, \hat{b} = 10, \hat{c} = 20, \hat{d} = 15$ . Les paramètres de contrôle utilisés sont :  $T = 100, k_i = 30(i=1, \dots, 4)$ .

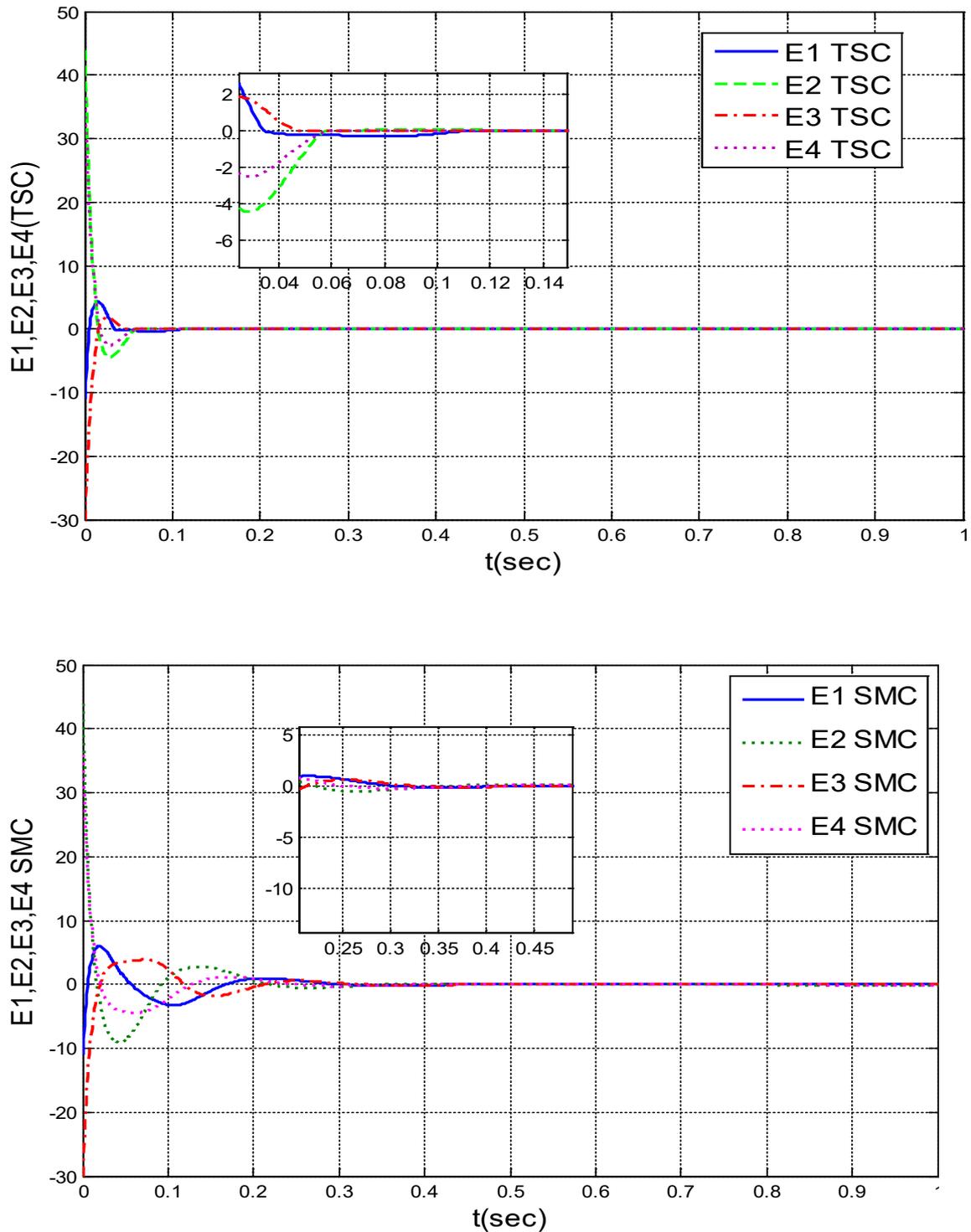
Une étude comparative est réalisée en utilisant des conditions initiales identiques entre la méthode proposée et un contrôleur en mode glissant. Les résultats de la simulation sont présentés sur la Figure 4.16 pour la synchronisation des états des deux systèmes Zhou hyperchaotiques identiques. Il est à noter que les états du système esclave en terminal synergétique (SC) sont synchronisés avec ceux du système maître plus rapidement que les états du SMC.





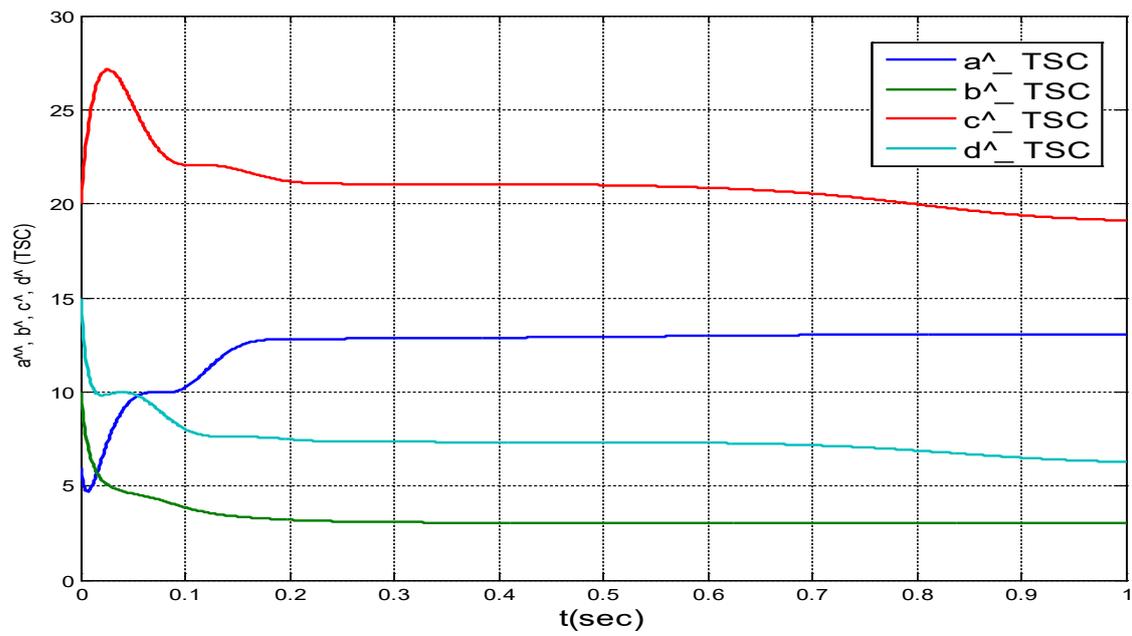
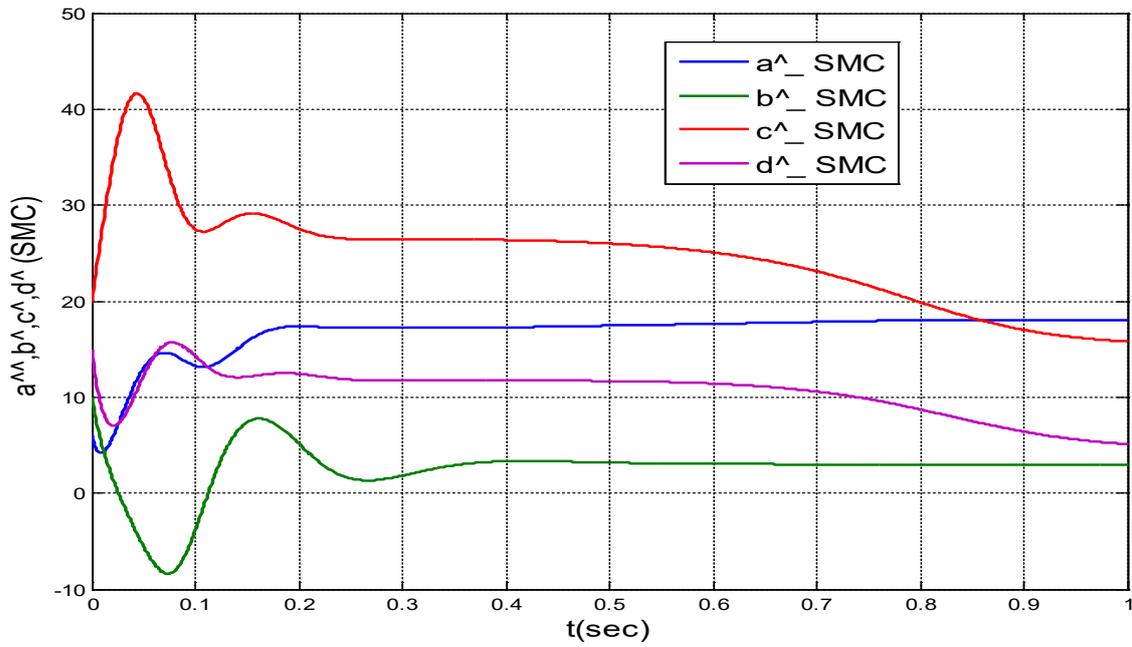
**Figure 4. 16**Synchronisation des états par SMC et TSC

Sur la Figure (4.17), il est clair que les réponses de simulation des erreurs de la méthode proposée présentent une convergence plus rapide vers zéro que les erreurs de contrôle par mode glissant.



**Figure 4.17** Synchronisation des erreurs par SMC et TSC

La figure (4.18) montre que les estimations des paramètres du système esclave avec un contrôleur synergique terminal convergent vers les valeurs des paramètres du système maître avec des réponses plus rapides et moins d'oscillations que SMC.



**Figure 4. 18** Comparaison des paramètres estimés  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{c}$ ,  $\hat{d}$  entre SMC et TSC

Ces tableaux récapitulent la comparaison entre les deux méthodes TSC et SMC.

**Tableau4. 1** Comparaison du temps de réponse des états entre TSC et SMC

Temps de réponse des états	TSC (sec)	SMC(sec)
$x_1, y_1$	0.031	0.26
$x_2, y_2$	0.047	0.17

$x_3, y_3$	<b>0.046</b>	<b>0.19</b>
$x_4, y_4$	<b>0.059</b>	<b>0.18</b>

**Tableau 4. 2** Comparaison du temps de réponse des erreurs entre TSC et SMC

<b>Temps de réponse des erreurs</b>	<b>TSC(sec)</b>	<b>SMC(sec)</b>
<b>E1</b>	<b>0.127</b>	<b>0.44</b>
<b>E2</b>	<b>0.059</b>	<b>0.36</b>
<b>E3</b>	<b>0.048</b>	<b>0.45</b>
<b>E4</b>	<b>0.06</b>	<b>0.39</b>

Il ressort des tableaux 4.1 et 4. 2 qu'une synchronisation plus rapide peut être obtenue en utilisant la commande synergétique terminale qu'avec l'utilisation de SMC d'un facteur 4.

Les erreurs induites par la commande en mode glissant diminuent jusqu'à 0,4 seconde alors que celles liées à l'approche proposée 0,15 secondes. Ainsi, grâce au contrôle synergique terminal (TSC), la précision et la stabilité dynamique du système sont améliorées.

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, et après avoir abordé les différents types de synchronisation, nous avons essayé d'expliquer au mieux ce phénomène tout en l'appliquant à plusieurs systèmes chaotiques. L'approche synergique et synergique terminale adaptative a été proposée dans un processus de synchronisation de deux systèmes chaotiques et hyperchaotiques identiques.

Les résultats de simulation des ces commandes montrent une bonne performance en synchronisation.

# Conclusion générale

---

Le travail de recherche réalisé dans le cadre de cette thèse de doctorat a trait au contrôle et à la synchronisation de quelques types de systèmes dynamiques chaotiques et hyperchaotiques. Les techniques de contrôle et de synchronisation élaborées s'articulent principalement sur des approches avancées telles que la commande synergétique, le mode glissant et la commande adaptative. Le développement théorique et la validation des stratégies proposées sont présentés dans ce mémoire dont le contenu est organisé en quatre chapitres :

Nous avons abordé dans la première partie, les notions de base et les concepts fondamentaux des systèmes dynamiques tels que : les points d'équilibre, les attracteurs et ses différents types, les notions de stabilité et la théorie de bifurcation. Puis, nous avons présenté les caractérisations du chaos et ses propriétés. Ensuite, nous exposé les moyens de détection du chaos et quelques routes vers le chaos. Nous avons clôturé cette partie par la présentation des différents problèmes rencontrés dans le contrôle des processus chaotiques. La suppression de la dynamique chaotique dans un système dynamique est le seul objectif pour un problème de contrôle. Par conséquent, il est clair que le comportement dynamique d'un système non linéaire peut être changé en changeant certaines valeurs de ses paramètres où les valeurs de ses variables d'état, à condition que ces dernières soient accessibles pour l'ajustement.

Dans la seconde partie de ce travail, nous avons exploité deux approches robustes, à savoir, le mode glissant et la commande synergétique pour contrôler et supprimer le comportement chaotiques dans quelques systèmes dynamiques chaotiques. Ces techniques de contrôle ont, toutes les deux, une convergence asymptotique en plus du broitement propre à la commande par mode glissant. Ce phénomène est résolu par l'approche synergétique qui ne requiert pas de composante discontinue dans la loi de commande. Ensuite, nous avons introduit la commande adaptative et la technique d'optimisation par l'essaim des particules (PSO) pour calculer des gains optimaux de la commande synergétique. Le concept de convergence en temps fini, grâce aux améliorations introduites sur la macro-variable, nous a permis de développer une approche de contrôle dite terminale synergétique. Cette dernière garantit une convergence en temps fini. Les résultats de simulation obtenus montrent

clairement les hautes performances de cette commande qui permet une convergence rapide et en temps fini par rapport au mode glissant.

Une comparaison est effectuée sur l'environnement MATLAB/Simulink pour évaluer les performances et les avantages des contrôleurs synergétique terminale(TSC) et mode glissant terminale(TSMC) les uns par rapport aux autres. L'efficacité de l'approche synergétique terminale (TSC) proposée a été validée expérimentalement par la méthode de test en temps réel Hardware-in-the-loop (HIL). A cet effet, deux cartes dSPACE 1104 interfacées avec l'environnement MATLAB/Simulink sont utilisées dans l'implémentation sous plusieurs conditions de fonctionnement.

La dernière partie du travail regroupe une série de définitions qui conduisent à une définition mathématique de la synchronisation, puis nous avons présenté des différents types de la synchronisation, ensuite nous appliquons deux types de synchronisation complète et projective par la commande synergétique sur les systèmes chaotiques une fois et hyperchaotique une autre fois.

Une approche terminale synergique adaptative a été également proposée dans un processus de synchronisation de deux systèmes Zhou hyperchaotiques. En conséquence, le modèle du système utilisé a été étudié, puis deux systèmes hyperchaotiques identiques ont été synchronisés à l'aide d'un contrôle synergétique terminal adaptatif; à condition que les paramètres du système soient inconnus. Enfin, les résultats obtenus ont été comparés aux résultats du contrôle par le mode glissant. Les résultats de la simulation montrent la prédominance de l'approche synergique sur le contrôle par mode glissant.

En perspective aux travaux proposés dans le cadre de cette thèse :

- ✓ L'implémentation expérimentale du système chaotique et du système hyperchaotique proposés est envisagée comme la principale perspective de ce travail.
- ✓ L'implémentation des lois de commande proposées pour la synchronisation projective est aussi envisagée par la suite.
- ✓ Modifier et appliquer les méthodes à d'autres systèmes dynamiques chaotiques et hyperchaotiques d'ordre entier et fractionnaire en temps discret.

# Bibliographie

---

- [1] E. S. Overman, “The new science of management : Chaos and quantum theory and method” , Journal of Public Administration Research and Theory, vol. 6, no. 1, pp. 75–89, 1996.
- [2] J. Gleick, “Chaos Making a new science” , Open Road Media, 2011.
- [3] H. Poincaré, “ Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique” , Acta mathematica, vol. 13, no. 1, pp. A3–A270, 1890.
- [4] H. Poincaré, “ The three-body problem and the equations of dynamics : Poincaré’s foundational work on dynamical systems theory, vol. 443. Springer, 2017.
- [5] F. Diacu and P. Holmes, “ Celestial encounters : the origins of chaos and stability, vol. 22. Princeton university press, 1999.
- [6] D. Salamon, “ The Kolmogorov-Arnold-Moser theorem”, Math. Phys. Electron. J, vol. 10, no. 3, pp. 1–37, 2004.
- [7] E. N. Lorenz, “ Deterministic non periodic flow” , Journal of the atmospheric sciences, vol. 20, no. 2, pp. 130–141, 1963.
- [8] Sharkovskii, “ Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself” ,
- [9] D. Ruelle and F. Takens, “ On the nature of turbulence”, Les rencontres physiciens mathématiciens de Strasbourg-RCP25, vol. 12, pp. 1–44, 1971.
- [10] S. Smale et al., “ Differentiable dynamical systems” , Bulletin of the American mathematical Society, vol. 73, no. 6, pp. 747–817, 1967.
- [11] T.-Y. Li and J. A. Yorke, “ Period three implies chaos” , The American Mathematical Monthly, vol. 82, no. 10, pp. 985–992, 1975.
- [12] R. M. May, “ Simple mathematical models with very complicated dynamics”, Nature, vol. 261, no. 5560, pp. 459–467, 1976.
- [13] P. Myrberg, “ Sur l’itération des polynomes réels quadratiques, J. Math. Pures Appl , vol. 41,n.9, pp. 339–351, 1962.
- [14] R. L. Devaney, P. B. Siegel, A. J. Mallinckrodt, and S. McKay, “ A first course in chaotic dynamical systems : theory and experiment” , Computers in Physics, vol. 7, no. 4, pp. 416–417, 1993.
- [15] R. L. Devaney, “ An introduction to chaotic dynamical systems” , 1989.
- [16] L. Billings and E. Bollt, “ Probability density functions of some skew tent maps, Chaos, Solitons & Fractals, vol. 12, no. 2, pp. 365–376, 2001.

- [17] K. Feltekh, D. Fournier-Prunaret, and S. Belghith, “ Analytical expressions for power spectral density issued from one-dimensional continuous piecewise linear maps with three slopes” , Signal processing, vol. 94, pp. 149–157, 2014.
- [18] E. Schöll, “ Nonlinear spatio-temporal dynamics and chaos in semiconductors” , vol. 10. Cambridge University Press, 2001.
- [19] D. Lathrop, “ Nonlinear dynamics and chaos : With applications to physics, biology, chemistry, and engineering,” Physics Today, vol. 68, no. 4, p. 54, 2015.
- [20] D. A. Hsieh, “ Chaos and nonlinear dynamics : application to financial markets,” The journal of finance, vol. 46, no. 5, pp. 1839–1877, 1991.
- [21] N. Basalto, R. Bellotti, F. De Carlo, P. Facchi, , S. Pascazio, “ Clustering stock market companies via chaotic map synchronization”, Physica A : Statistical Mechanics and its Applications, vol. 345, no. 1-2, pp. 196–206, 2005.
- [22] A. Hübler, “ Adaptive control of chaotic systems” , Helv. Phys. Acta, Vol. 62, pp. 343-347, 1989.
- [23] E. Ott, C. Grebogi , J. A. Yorke, “ Controlling chaos”, Phys. Rev. Lett, Vol. 64, pp. 1196-1199, 1990.
- [24] L. M. Pecora , T. L. Carroll, “ Synchronization in chaotic systems” , Phys. Rev. Lett. Vol. 64, pp. 821-824, 1990.
- [25] G. Perez and H. Cerderia, “ Extracting message masked by chaos” , Phys. Rev. Lett. 74, pp. 1970-1973, 1995.
- [26] Y. Zhang and J. Sun, “ Chaotic synchronization and anti-synchronization based on suitable separation”, Physics Letters. A, vol. 330, pp. 442-447, 2004.
- [27] G. Alvarez, S. Li, F. Montoya, G. Pastor and M. Romera. “ Breaking projective chaos synchronization secure communication using filtering and generalized synchronization”, Chaos, Solitons and Fractals, vol. 24, pp. 775-783, 2005.
- [28] R. Mainieri ,J. Rehacek. “ Projective synchronization in three dimensional chaotic systems”, Phys. Rev. Lett, vol. 82, pp. 3042-3045, 1999.
- [29] D. Pazo, M.A. Zaks and J. Kurths, “ Role of unstable periodic orbit in phase and lag synchronization between coupled chaotic oscillators. Chaos, vol. 13, pp. 309-318, 2003.
- [30] Y. Chai, L. Chen, R. Wu , J. Dai. “ Q-S synchronization of the fractional-order unified system. Pramana J. Physics, vol. 80, pp. 449–461, 2013.
- [31] H.E. Guitian , L.U.O. Maokang. “ Dynamic behavior of fractional order Dufing chaotic system and its synchronization via singly active control”, Appl. Math. Mech.Engl. Ed, vol. 33 n. 5, pp. 567-582, 2012.
- [32] Q. Gan, Y. Yang, S. Fan , Y. Wang, “Synchronization of stochastic Fuzzy cellular neural networks with leakage delay based on adaptive control”, Differ. Equ. Dyn. Syst, vol. 22, pp. 319-332, 2014.
- [33] W. Zhen, H. Xia , S. Hao. “ Control of an uncertain fractional order economic system via adaptive sliding mode. Neuro computing, vol. 83, pp: 83–88, 2012.
- [34] L.Jinkum, X. Wang, “ Advenced sliding mode control for mechanical systems”, Springer.
- [35] P. Mattavelli, L. Rossetto, G. Spiazzi, P. Tenti, “ General-purpose sliding-mode controller for DC/DC converter applications, ” in Proceedings of IEEE Power Electronics Specialist Conference-PESC'93, 1993: IEEE, pp. 609-615.

- [36] V. Utkin, J. Guldner, M. Shijun, "Sliding mode control in electro-mechanical systems". CRC press, 1999.
- [37] Z. Bouchama, N. Essounbouli, M. N. HARMAS, et al. "Reaching phase free adaptive fuzzy synergetic power system stabilizer". *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 77, p. 43-49, 2016.
- [38] N. Zerroug, M. N. Harmas, S. Benagoune, et al. "DSP-based implementation of fast terminal synergetic control for a DC-DC Buck converter". *Journal of the Franklin Institute*, vol. 355, no 5, p. 2329-2343, 2018.
- [39] P. Zhao, W. Yao, J. Wen et al. "Improved synergetic excitation control for transient stability enhancement and voltage regulation of power systems", *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 68, p. 44-51, 2015.
- [40] B. R. Andrievskii, A. L. Fradkov, "Control of Chaos : Methods and Applications", *Automation and Remote Control*, vol 64, no. 5, , pp. 673-713, 2003.
- [41] G. Chen, X. Dong, "From chaos to order : methodologies, perspectives and applications, World Scientific, vol. 24. 1998
- [42] P. Mullhaupt, "Introduction à l'analyse et à la commande des systèmes non linéaires", PPUR Presses polytechniques, 2009.
- [43] A. Senousi, "Systèmes dynamiques chaotiques et synchronisation", thèse doctorat, université de Biskra, 2020.
- [44] A. Ben Saad, "Contribution a l'analyse des bifurcation des systèmes non linéaire : Application au systèmes proie-prédateur", Université de Carthage . 2019
- [45] T. Li et J. Yorke, "Period three implies chaos , " *The American Mathematical Monthly*, vol. 82, N 10 , p. 985—992. 1975
- [46] Houmor, "Analyse du Chaos dans un Système d'équations Différentielles Fractionnaires" , p. 144.
- [47] D. Chandler, "Edward Lorenz, father of chaos theory and butterfly effect, dies at 90," MIT Tech Talk on, 2008.
- [48] Q. Jia, "Hyperchaos generated from the Lorenz chaotic system and its control", *Physics Letters A*, vol. 366, pp. 217-222, 2007.
- [49] Z. Yan and P. Yu, "Hyperchaos synchronization and control on a new hyperchaotic attractor", *Chaos, Solutions and Fractals*, vol. 35, no. 2, pp. 333-345, 2008.
- [50] Y. Li, W.K.S. Tang and G. Chen, "Generating Hyperchaos via state feedback control", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 15, no. 10, pp. 3367-3375, 2005.
- [51] S. Vaidyanathan, A.T. Azar, K. Rajagopal, P. Alexander, "Design and SPICE implementation of a 12-term novel hyperchaotic system and its synchronization via active control", *International Journal of Modeling, Identification and Control*, vol. 23, no. 3, pp. 267- 277, 2015.
- [52] S. Vaidyanathan, A. Boulkroune, "A novel hyperchaotic system with two quadratic nonlinearities, its analysis and synchronization via integral sliding mode control", *International Journal of Control Theory and Applications*, vol. 9, no. 1, pp. 321-337, 2016.
- [53] G. Wang, X. Zhang, Y. Zheng, Y. Li, "A new modified hyperchaotic Lü system," *Phys. Lett. A*. Vol. 371, pp. 260-272, 2006.
- [54] H-T. Yau, C-K. Chen, C-LI.Chen, "Sliding mode control of chaotic systems with uncertainties", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 10, No. 5 1139–1147,2000.
- [55] M. Ding, E. Ott, C. Grebogi, "Controlling chaos in a temporally irregular environment," *Phys. D*, Vol. 74, pp. 386-394.
- [56] [56] K. Yagasaki, T. Uozumi, "New approach for controlling chaotic dynamical systems," *Phys. Lett. A*, Vol. 238, pp. 349-357, 1998.
- [57] T. Shinbort, C. Grebogi, J. Yorke, E. Ott, "Using small perturbations to control chaos," *Nature*, Vol. 363, pp. 411-417, 1993.
- [58] T. Shinbort, E. Ott, C. Grebogi, J. Yorke, "Using chaos to direct orbits to targets," *Phys. Rev. Lett*, Vol. 65, pp. 3215-3218, 1990.

- [59] C. Reyl, L. Fleep, R. Baddi , E. Brun , “ Control of NMR-laser chaos in high dimensional embedding space,” *Phys. Rev. E*, Vol. 47, pp. 267-272, 1993.
- [60] B. Hao, “ Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems,” World Scientific, Singapore, 1989.
- [61] G. Osipanko, “ Dynamical Systems, Graphs, and Algorithms,” Springer, Berlin, 2007.
- [62] R. Davidchack , Y. Lai, “ Efficient algorithm for detecting unstable periodic orbits in chaotic systems,” *Phys. Rev. E*, Vol. 60, pp. 6172-6175, 1999.
- [63] M. Brandt and G. Chen, “ Time-delay feedback control of complex pathological rhythms in an atrioventricular conduction model,” *Int. J. Bifurc. Chaos*, Vol. 10, pp. 2781-2784, 2000.
- [64] [64] J. Socolar, D. Sukow and D. Gauthier, “ Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems,” *Phys. Rev. E*, Vol. 50, pp. 3245-3248, 1994.
- [65] K. Pyragas, “ Continuous control of chaos by self-controlling feedback,” *Phys. Lett. A*, Vol. 170, pp. 421-428, 1992.
- [66] E. R. Hunt, “ Stabilizing high-period orbits in a chaotic systems,” *Phys. Rev. Lett*, Vol. 67, pp. 1953-1955, 1991.
- [67] U. Dressler , G. Nitsche, “ Controlling chaos using time delay coordinates,” *Phys. Rev. Lett*, Vol. 68, pp. 1-4, 1992.
- [68] K. Mirus , J. Sprott, “ Controlling chaos in a high dimensional system with periodic parametric perturbations,” *Phys. Lett. A*, Vol. 254, pp. 275-278, 1999.
- [69] M. Ramesh , S. Narayanan, “ Chaos control by non feedback methods in the presence of noise,” *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 10, pp. 1473-1489, 1999.
- [70] E. Jackson, “On the control of complex dynamic systems,” *Phys. D*, Vol. 50, pp. 341-366, 1991
- [71] E. Jackson , I. Grosu, “An open-plus-closed-loop (OPCL) control of complex dynamic systems,” *Phys. D*, Vol. 85, pp. 1-9, 1995.
- [72] E. Jackson , A. Hübler, “Periodic entrainment of chaotic logistic map dynamics,” *Phys. D*, Vol. 44, pp. 407-420, 1990.
- [73] L. Chen , G. Chen, “ Fuzzy predictive control of uncertain chaotic systems using time series,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 9, pp. 757-767, 1999.
- [74] L. Udawatta, K. Watanabe, K. Kiguchi , K. Izumi, “Fuzzy-chaos hybrid controller for controlling of nonlinear systems,” *IEEE Transaction on Fuzzy systems*, Vol. 10, pp. 401-411, 2002.
- [75] C. Park, C. Lee, J. Kim, S. Kim and M. Park, “ Design of an adaptive fuzzy controller and its applications to controlling uncertain chaotic systems,” *Transaction on Control, Automation and Systems Engineering*, Vol. 3, pp. 95-105, 2001.
- [76] M. Ramesh , S. Narayanan, “ Chaos control of Bonhoeffer-van der Pol oscillator using neural networks,” *Chaos Solutions and Fractals*, Vol. 12, pp. 2395-2405, 2001.
- [77] X. M. Ren, A.B. Rad, P.T. Chan , W.L. Lo, “ Identification and control of continuous-time nonlinear systems via dynamic neural networks,” *IEEE Transaction on Industrial Electronics*, Vol. 50, pp. 478-486, 2003.
- [78] U.E. Vincent, A. Ucar, J.A. Laoye , S.O. Kareem, “ Control and synchronization of chaos in RCL-shunted Josephson junction using backstepping design,” *Phys. C. Superconductivity*, Vol. 468, Issue 5, pp. 374-382, 2008.
- [79] D. Lin, X. Wang, F. Nian , Y. Zhang, “ Dynamic fuzzy neural networks modeling and adaptive backstepping tracking control of uncertain chaotic systems,” *Neurocomputing*, Vol. 73, Issues 16-18, pp. 2873-2881, 2010.
- [80] H. Salarieh , A. Alasty, “ Control of stochastic chaos using sliding mode method,” *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 225, Issue. 1, pp. 135-145, 2009.
- [81] G. Ablay, “Sliding mode control of uncertain unified chaotic systems,” *Nonlinear Analysis. Hybrid Systems*, Vol. 3, Issue. 4, pp. 531-535, 2009.

- [82] G. Chen, "A simple adaptive feedback control method for chaos and hyper-chaos control," *Applied Mathematics and Computation*, Vol 217, Issue 17, pp. 7258-7264, 2011.
- [83] Z. Ge, S. Li, S. Li and C. Chang, "Pragmatical adaptive chaos control from a new double van der Pol system to a new double Duffing system," *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 203, Issue. 2, pp. 513-522, 2008.
- [84] G. Chen, G. & Lai, D. "Feedback control of Lyapunov exponents for discrete-time dynamical systems," *Int. J. Bifurcation and Chaos* 6, 1341-1349, 1996.
- [85] G. Chen, , Lai, D. "Anticontrol of chaos via feedback," *Proc. IEEE Conf. Decision and Control*, San Diego, CA, Dec., pp. 367-372. 1997
- [86] G. Chen, , Lai, D. "Feedback anticontrol of discrete chaos," *Int. J. Bifurcation and Chaos* 8, pp.1585-1590, 1998.
- [87] Y. Shi, , G. Chen, "Chaos of discrete dynamical systems in complete metric spaces," *Chaos Solit. Fract.* 22, 555-571, 2004.
- [88] X. F. Wang, , Chen, G. "On feedback anticontrol of discrete chaos," *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 9, 1435-1441, 1999.
- [89] X. F. Wang, , Chen, G. "Chaotification via arbitrary small feedback controls," *Int. J. Bifurcation and Chaos* 10, 549-570, 2000.
- [90] H. Z. Zhang, , Chen, G. "Single-input multioutput state-feedback chaotification of general discrete systems," *Int. J. Bifurcation and Chaos* 14, 3317- 3323, 2004.
- [91] Y. Zheng, G. Chen, "Single state-feedback chaotification of discrete dynamical systems," *Int. J. Bifurcation and Chaos* 14, 279-284, 2004.
- [92] F. R. Marotto, "Snap-back repellers imply chaos in  $R^n$ ," *J. Math. Anal. Appl.* 63, 199-223, 1978.
- [93] Y. Zheng, G. Chen, Z. Liu, "On chaotification of discrete systems," *Int. J. Bifurcation and Chaos* 13, 3443-3447, 2003.
- [94] S. Aubry, G. Abramovici, "Chaotic trajectories in the standard map, the concept of antiintegrability," *Physica D* 43, 199-219, 1990.
- [95] H. Huijberts, H. Nijmeijer , R. Willems, "System identification in communication with chaotic systems", *IEEE Trans. Circuits Syst I*, 47(6):800-808, 2000.
- [96] S. Sinha , W. L. Ditto, "Computing with distributed chaos", *Phys Rev E*, vol.60, n.1, pp.363-376, 1999.
- [97] S. J. Schiff, K. D. Jerger, H. Duong, T. Chang, M. L. Spano , W. L. Ditto, "Controlling chaos in the brain" , *Nature*, 370, pp.615-620, 1994.
- [98] W. Yang, M. Ding, A. J. Mandell and E. Ott, "Preserving chaos: control strategies to preserve complex dynamics with potential relevance to biological disorders " , *Phys Rev E*, 51, pp.102-110, 1995.
- [99] G. Chen, J. Q. Fang, Y. Hong, H. S. Qin, "Introduction to chaos control and anti-control, In: Leung TP, Qin HS (eds) *Advanced topics in nonlinear control systems* ", Chap 6. World Scientific, Singapore, pp. 193-245, 2001.
- [100] G. Chen , X. Dong, "From chaos to order: methodologies, perspectives and applications " , Singapore: World Scientific, 1998.
- [101] I. T. Georgiou , I. B. Schwartz, "Dynamics of large scale coupled structural/mechanical systems: A singular perturbation/proper orthogonal decomposition approach" , *SIAM J. Appl. Math.*, 59, pp.1178-1207, 1999.

- [102] X. Wang , G. Chen, “ Generating topologically conjugate chaotic systems via feedback control” ,IEEE. Trans. Circuits. Syst. I, vol. 50, pp. 812-817, 2003.
- [103] X. Wang, G. Chen , X. Yu, “ Anticontrol of chaos in continuous-time systems via time delay feedback” ,Chaos, Vol. 10, pp. 771-779, 2000.
- [104] H. Zhang, Z. Wang , D. Liu, “ Chaotifying fuzzy hyperbolic model using impulsive and nonlinear feedback control approaches” , Int. J. Bifurc. Chaos, Vol. 15, pp. 2603-2610, 2005.
- [105] R. Enns , G. McGuire, “ Nonlinear Physics with Maple for Scientists and Engineers” , Birkh“auser, Boston, 1997.
- [106] A. Ikhlef et T. Chahboub, “ La commande prédictive floue appliquée à des systèmes non linéaires ”, Projet de fin d’étude, université Mentouri Constantine, 2003.
- [107] T. Yamada , H. Fujisaca, “ Stability theory of synchronized motion in coupled oscillator” , Systems. II. Prog. Theor. Phys, vol. 70, pp. 1240, 1983
- [108] T. Yamada , H. Fujisaca, “ Stability theory of synchronized motion in coupledo scillator” ,Systems. III. Prog. Theor. Phys, vol. 72, pp. 885, 1984
- [109] V. S. Afraimovich, N. N. Verochev , M. I. Robinovich, “ Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems” , Radio. Phys. and Quantum Electron, Vol. 29, pp. 795-803, 1986.
- [110] A.Khadra,X.Liu,X.Shen. “ Application of impulsive synchronization chaotic systems with delay and application to secure communication” , Automatica ,:1491-1502, 2005.
- [111] E. Alarcon, A. Romero, A. Poveda, et al., “ Sliding mode control analog integrated circuit for switching DC-DC power converters ”, Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems, pp. 500-503, Sydney, NSW, Australia, 2001.
- [112] H. Chiacchiarini, P. Mandolesi, , A. Oliva, “ Nonlinear analog controller for a buck converter: theory and experimental results”, Proceedings of IEEE International Symposium on Industrial Electronics, pp. 601-606, 1999.
- [113] S. C. Tan, Y. M. Lai, M. K. H. Cheung, et al., “ On the practical design of a sliding mode voltage controlled buck converter”, IEEE Trans. on Power Electron., vol. 20, no. 2, pp. 425-437, 2005.
- [114] M. N. Marwali, J. W. Jung, and A. Keyhani, “ Control of distributed generation systems--Part II: load sharing control”, IEEE Trans. Power Electron., vol. 19, no. 6, pp. 1551- 1561, 2004.
- [115] F-J Lin, C-K Chang, , P-K Huang, “ FPGA-based adaptive backstepping sliding mode control for linear induction motor drive”, IEEE Trans. Power Electron., vol. 22, no. 4, pp. 1223-1231, 2007
- [116] B. J. Cardoso, A. F. Moreira, B. R. Menezes, , P. C. Cortizo, “ Analysis of switching frequency reduction methods applied to sliding mode-controlled DC-DC converters”, IEEE Appl. Power Electron. Conf. Expo (APEC), pp. 403-410, Boston, USA, 1992.
- [117] S. C. Tan, Y. M. Lai, and C. K. Tse, “ A unified approach to the design of PWM based sliding mode voltage controller for basic DC-DC converters in continuous conduction mode”, IEEE Trans. Circuits Syst. I, vol. 53, no. 8, pp. 1816-1827, 2006.
- [118] S. C. Tan, Y. M. Lai, C. K. Tse, et al., “ An adaptive sliding mode controller for buck converter on continuous conduction mode”, IEEE APEC, vol.3, pp. 1395-1400, Anaheim, CA, USA, 2004.
- [119] W. Perruquetti and J.-P. Barbot, “ Sliding mode control in engineering. CRC press, 2002.
- [120] V.I. Utkin, “ Variable structure systems with sliding modes”, IEEE Trans on Automatic Control, vol. 22, no.2, 212-0222, 1977.
- [121] H. Asada , J.J. Slotine, “ Robot Analysis and Control”, J. Wiley, New York, 1986.
- [122] V.I. Utkin, “ Sliding Modes in control and optimization” , Springer, Verlag Berlin, Heidelberg, 1992.
- [123] S.C Tan, Y.M Lai, C.K Tse, “ Sliding mode control of switching power converters techniques and implementation”, CRC Press Taylor& Francis Group, 2012.
- [124] J.E.Slotine , W. Li, “ Applied nonlinear control” , Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [125] S. Vaidyanathan , C.H. Lien, “ Applications of sliding mode control in science and engineering” , Springer, 2017.

- [126] K. D. Young, V. I. Utkin, , U. Ozguner, “ A control engineer's guide to sliding mode control, ” IEEE transactions on control systems technology, vol. 7, no. 3, pp. 328-342, 1999.
- [127] V.Bregeault, “ Quelques contributions à la théorie de la commande par modes glissants”, 2010.
- [128] Khari, S., Rahmani, Z., Rezaie, B. “ Designing fuzzy logic controller based on combination of terminal sliding mode and state feedback controllers for stabilizing chaotic behaviour in rod-type plasma torch system”, Trans. Inst. Meas. Control, 38, pp. 150-164, 2015.
- [129] Kolesnikov, G. Veselov, “ Modern Applied Control Theory: Synergetic Approach in Control Theory” , Vol. 2, Moscow–Taganrog, TSURE Press, 2000.
- [130] A. Kolesnikov, G. Veselov, A. Monti, F. Ponci, E. Santi, , R. A. Dougal, “ Synergetic Synthesis of DC-DC Boost Converter Controllers : Theory and Experimental Analysis, ” Proceedings of 17th Annual IEEE Applied Power Electronics Conference, 1,Dallas, TX, April 2002, pp. 409-415.
- [131] A. Monti, E. Santi, K. Proddatur, R. A. Dougal, “ Synergetic Control for DC-DC Boost Converter: Implementation Options ” , IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 39, N° 6, pp. 1803-1813, Dallas, Nov. 2003.
- [132] I.Kondratiev, E.Santi, R. A. Dougal, G. Veselov, “ Synergetic Control for M-Parallel Connected DC-DC Buck Converters” , Proceedings of IEEE Power Electronics Specialists Conference, Vol. 1, pp. 182-188, June 2004.
- [133] Z. Jiang, R. Dougal, “ Synergetic Control of Power Converters for Pulse Current Charging of Advanced Batteries From A Fuel Cell Power Source” , IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 19. n. 4, pp. 1140-1150, 2004.
- [134] D. Li, K. Proddatur, E. Santi, and A. Monti, “ Synergetic control of a boost converter: Theory and experimental verification”, in Proceedings IEEE SoutheastCon (Cat. No. 02CH37283), IEEE, pp. 197-200, 2002.
- [135] H. Haken, “ Visions of synergetics”, Journal of the Franklin Institute, vol. 334, no. 5- 6, pp. 759-792, 1997.
- [136] E. Santi, A. Monti, D. Li, et al., “ Synergetic control for DC-DC boost converter: implementation options”, IEEE Trans. on Ind. Appl., vol. 39, no. 6, pp. 1803-1813, 2003.
- [137] I. Kondratiev, E. Santi, R. Dougal, et al., “ Synergetic control for m-parallel connected DC-DC buck converters”, PESC., 30th Annual IEEE, vol. 1, pp. 182-188, Aachen, Germany, 2004.
- [138] Z. Jiang, , R. A. Dougal, “ Synergetic control of power converters for pulse current charging of advanced batteries from a fuel cell power source”, IEEE Trans. on Power Electronics, vol. 19, no. 4, pp. 1140–1150, 2004.
- [139] Z. Bouchama, M. N. Harnas, “ Optimal robust adaptive fuzzy synergetic power system stabilizer design”, Electron. Power syst. Res., vol. 83, no. 1, pp. 170-175, 2012.
- [140] K. Behih, , Z.Bouchama, , K. Saoudi, “Finite-time fuzzy synergetic power system regulator. Soft Computing and Electrical Engineering, v 1, n.1, pp: 69-78. 2019.
- [141] Z. Jiang, “ Design of a nonlinear power system stabilizer using synergetic control theory”, Electron. Power Syst. Res. vol. 79, no. 6, pp. 855–862, 2009.
- [142] E. Nechadi, “ Adaptive fuzzy type2 synergetic control based on bat optimization for multi machine power system stabilizers. Engineering,Technology& Applied Science Research, vol. 9 ,n. 5, pp:46734678, 2019.
- [143] Y . Shi, Eberhart RC Empirical study of particle swarm optimization”, EvolComput. CEC 99. Proc 1999 Congress 3:1945-1950, 1999.
- [144] R. Poli, J. Kennedy, T. Blackwell, “ Particle swarm optimization”, Swarm Intell 1(1):33–57. 2007
- [145] M. Zhihong, A. P. Paplinski, and H. R. Wu, “ A robust MIMO terminal sliding mode control scheme for rigid robotic manipulators ” , IEEE transactions on automatic control, vol. 39, no. 12, pp. 2464-2469, 1994.
- [146] S. Yu, X. Yu, B. Shirinzadeh, , Z. Man, “ Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode ” , Automatica, vol. 41, no. 11, pp. 1957-1964, 2005.

- [147] <https://www.dspace.com/fr/fra/home/applicationfields/foo/hil-testing.cfm>
- [148] A. Khadra, X. Liu, X. Shen, “Robust impulsive synchronization and application to communication security,” *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems– Series B :Applications & Algorithms*, : 403-417, 2003.
- [149] M.C.Ho , Y.C. Hung, “Synchronization of two different systems by using generalized active control”, *PhysicsLettersA*, 301, pp. 424-428. .2002
- [150] W.Li, , Z.Liu, , J. Miao, “Adaptive synchronization for a unified chaotic system with uncertainty”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15:3015-3021. 2010.
- [151] S.Vaidyanathan, S. Pakiriswamy, “Generalized projective synchronization of six-term Sundar Pandian chaotic systems by adaptive control”, *International Journal of Control Theory and Applications*, vol.6,no.2, pp. 153-163,2013.
- [152] H.H.Chen, G.J.Sheu, , Y.L.Lin, , C.S. Chen, “Chaos synchronization between two different chaotic systems via nonlinear feedback control”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods &Applications*,70:4393-4401. 2009.
- [153] X.Tan, , J.Zhang , Y. Yang, “Synchronizing chaotic systems using backstepping design”. *Chaos, Solitons and Fractals*,vol.16, no.1,pp .37-45. 2003.
- [154] S.Vaidyanathan, S.Sivaperumal, “Sliding controller design of hybrid synchronization of four-wing chaotic systems”, *International Journal of Soft Computing*, vol.6, pp:224-231, 2013.
- [155] R.Brown , L.Kocarev, “A unifying definition of synchronization for dynamical systems ”, *Chaos*, vol. 10, no.2, pp. 344-349, June, 2000.
- [156] Adeli, M., Zarabadipoor, H. “Anti-synchronization of discrete-time chaotic systems using optimization algorithms,” *International Journal of Electronic Signals and Sys tems*, pp. 143-147. 2011.
- [157] Diao, M., Yu, Y-G., Wang, S., Yu, J-Z. “Hybrid lag function projective synchronization of discrete chaotic systems with different orders,” *Inter. J. Nonl. Sci. Num. Simu. Vol. 11, no.7, pp. 503–508. 2010.*
- [158] M.G.Rosenblum, A.S.Picovisky, J.P. Kurths, “Phase synchronization of chaotic oscillators”, *Physical Review Letters*, vol.76, n.11, pp:1804-1807. 1996.
- [159] R. Mainieri, J. Rehacek, “Projective synchronization in three dimensional chaotic system”, *Physical Review Letters*, vol.82, no.15, pp: 3042-3045. 1999.
- [160] Z. Ma, Z. Liu and G. Zhang, “Generalized synchronization of discrete systems”, *Appl.Math. Mech*, vol. 28 , no.5, pp.609-614,2007.
- [161] N.F. Rulkov, K.M. Sushchik, L.S. Tsimring ,H.D.I, Abarbanel, “Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems”, *Phys. Rev. E*, vol. 51, pp. 980-994,1995.
- [162] L. Kocarev , U. Parlitz. “Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems”, *Phys. Rev. Lett*, vol. 76, pp. 1816-1819, 1996.
- [163] J. Yan , C. Li. “Generalized projective synchronization of a unified chaotic system”. *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 26, pp.1119-1124, 2005.
- [164] X. He, C. Li, J. Huang and L. Xiao. “Generalized synchronization of arbitrary-dimensional chaotic systems”, *Optik*, vol. 126, no.4, pp: 454-459, 2015.
- [165] M. Manfeng, Z. Xu. “General scheme for Q-S synchronization of chaotic systems”, *Nonlinear Analysis : Theory, methods and applications*, vol. 69, no.4, pp. 1091-1099, 25008°.
- [166] Y. Chen, X. Li. “Function projective synchronization between two identical chaotic systems”, *International journal of modern physics C.*, vol.18, no.5, pp.883-888, 2007.
- [167] H. Du, Q. Zeng, C. Wang. “Function projective synchronization of different chaotic systems with uncertain parameters”, *Phy. Lett.A.*, vol. 372, pp . 5402-5410, 2008.
- [168] M. Hu, Y. Yang, Z. Xu, L. Guo. “Hybrid projective synchronization in chaotic complex non linear system”, *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 79, pp. 449-457, 2008.

- [169] A. Khan, N. R Garg, G. Jain, “Hybrid projective synchronization and chaos control”, International Refereed Journal of Engineering and Science, vol. 3, no.1, pp.09-14, 2014
- [170] P.Zhou, Y.X. Cao, X.F. Cheng, “ A new hyperchaos system and its circuit simulation by EWB”, Chinese Physics B, 1394-1398, 2009.

## Adaptive Terminal Synergetic Synchronization of Hyperchaotic Systems

Yamina Haddadji<sup>1,2\*</sup>, Mohamed Naguib Harmas<sup>2</sup>, Abdoulouahab Bouafia<sup>1,2</sup>, Ziyad Bouchama<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Electrical Engineering Department, University Ferhat Abbas Setif 1, Setif 19000, Algeria

<sup>2</sup>QUERE Laboratory University Ferhat Abbas Setif1, Setif 19000, Algeria

<sup>3</sup>Electrical Engineering Department, University Mohammed El Bachir El-Ibrahimi BordjBou-Arreridj, BordjBou-Arreridj 34000, Algeria

Corresponding Author Email: [y.haddadji@univ-setif.dz](mailto:y.haddadji@univ-setif.dz)

<https://doi.org/10.18280/jesa.xxxxxx>

**Received:** 26 October 2020

**Accepted:** 15 July 2021

### Keywords:

*hyperchaotic Zhou system, terminal synergetic, synchronization, Lyapunov*

### ABSTRACT

This research paper introduces an adaptive terminal synergetic nonlinear control. This control aims at synchronizing two hyperchaotic Zhou systems. Thus, the adaptive terminal synergetic control's synthesis is applied to synchronize a hyperchaotic i.e., slave system with unknown parameters with another hyperchaotic i.e., master system. Accordingly, simulation results of each system in different initial conditions reveal significant convergence. Moreover, the findings proved stability and robustness of the suggested scheme using Lyapunov stability theory.

## 1. INTRODUCTION

Chaos theory and chaotic systems are deterministic, irregular, and aperiodic with unpredictable behavior having an extra-sensitive dependence on initial conditions [1]. Hence, chaotic systems are generally defined as a set of two or three autonomous nonlinear equations. Accordingly, a three-dimensional chaotic system includes one positive, one zero, and one negative Lyapunov exponents. Thus, if a system has more than three states and displays chaotic behavior, then it is referred to as a hyperchaotic system [2], that was first discovered by Rössler [3]. For instance, among the classical common systems are, Lorentz system [4], hyperchaotic Lü system [5], Chua's circuit [6], and Qi system [7]; in addition, the recent hyperchaotic systems are Dadras system [8], hyperchaotic Vaidyanathan systems [9], hyperchaotic Sampath system [10], and hyperchaotic Pham system [11]. On the other hand, a four-dimensional hyperchaotic system contains one more positive Lyapunov exponent. It has complex dynamics and characteristics than chaotic systems; therefore, this type of dynamics has miscellaneous applications in engineering such as secure communications [12, 13], cryptosystems [14], encryption [15, 16], and electrical circuits [17, 18].

Furthermore, in the last two decades, synchronization of chaotic and hyperchaotic systems has been a crucial topic of research, it is required when a chaotic system drives another chaotic system reaching asymptotically zero error between master and slave systems states. Among synchronization types studied recently in the literature are: complete synchronization [19], anti-synchronization [20, 21], hybrid synchronization [22, 23], lag synchronization [24], phase synchronization [25], anti-phase synchronization [26], generalized synchronization [27], projective synchronization [28], generalized projective synchronization [29-31], etc.

In the same vein, since the discovery of chaos synchronization applications, various control techniques and

methods have been developed, such as active control method [32] can be used when the system parameters are known, adaptive control method [31, 33] is applied when the system parameters are unknown., nonlinear feedback [34], backstepping control [35] and sliding mode control [36].

Similar to sliding mode (SMC) but without chattering, the synergetic technique is a robust approach which doesn't need linearization with no discontinuous term in its control law is thus more suited for real-time implementation. As in sliding mode control upon reaching the equilibrium point, the system dynamics remain insensitive to a class of parameter deviations and disturbances. A variety of successful applications of this approach exist such as a battery charging system [37], a power system stabilizer [38, 39], a quadrotor helicopter system [40], and DC\_DC power converter control [41, 42].

The goal considered in this paper, is to force the master-slave hyperchaotic systems to be synchronized even if they have differential initial conditions. Simulation results show that the proposed controller effectively drives the slave system in spite of different initial conditions. In this paper, Section 2 introduces the hyperchaotic Zhou system while Section 3 covers the main results for the adaptive terminal synchronization of the identical Zhou systems with unknown parameters using terminal synergetic control. Finally, the concluding remarks are given in Section 4.

## 2. SYSTEM DESCRIPTION

In 2009, hyperchaotic Zhou system [43] is described by a fourth order model.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + x_4 \\ \dot{x}_2 &= cx_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= -bx_3 + x_1x_2 \\ \dot{x}_4 &= dx_1 + 0.5x_2x_3\end{aligned}\quad (1)$$

$x_1, x_2, x_3$  and  $x_4$  represent the system variables, and  $a, b, c$  and  $d$  are system parameters. Hyperchaotic compartment for (1) can be observed for:

$$a = 35, b = 3, c = 12, 0 < d < 34.8 \quad (2)$$

Using (2), the system linearization matrix at the equilibrium point  $E_0 = [0 \ 0 \ 0]$  is obtained as:

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Eigenvalues of A are:

$$\lambda_1 = c, \lambda_2 = -b, \lambda_3 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4d}}{2}, \quad (4)$$

$$\lambda_4 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4d}}{2}$$

It is obvious that system (1) is unstable,  $\lambda_1$  being positive.

In the simulation study, the values of  $a, b, c$  are as given in (2) and the value of  $d$  is chosen as  $d=1$ . Projections of different attractors are shown in Figure 1. This figure shows the behavior chaotic of Zhou system.

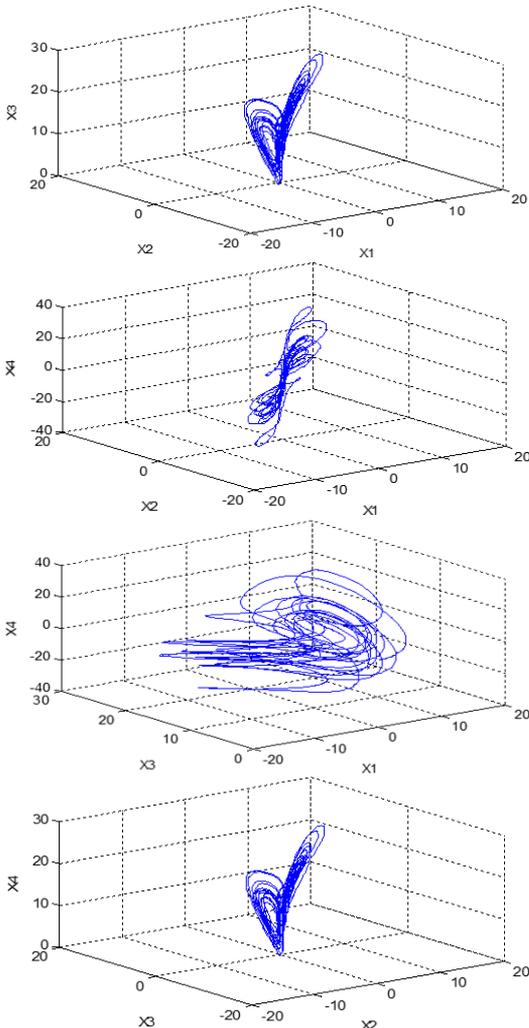


Figure 1. Hyperchaotic Zhou system phase plane portrait

### 3. SYNERGETIC CONTROL

Synergetic control is a robust nonlinear approach very similar to sliding mode control technique; it relies on a suitable macro-variable choice which comprises variables of interest and a desired performance based constraint.

Synthesis of the controller begins with a choice of a function of two or more state variables called the macro-variable (5):

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (5)$$

$x$  is the system state vector and  $u$  the control law.

Synergetic control includes the choice of a function of two or more system variables called the macro-variable as in (6):

$$\Psi = \Psi(x, t) \quad (6)$$

The synergetic control goal is to drive the system to a chosen manifold.

$$\dot{\Psi} = \frac{d\Psi}{dx} \dot{x} \quad (7)$$

$T$  represents the desired speed convergence to the selected manifold.

$$\dot{\Psi} = \frac{d\Psi}{dx} \dot{x} \quad (8)$$

Substituting (9) and (6) into (8) gives:

$$T \frac{d\Psi}{dx} f(x, u, t) + \Psi = 0 \quad (9)$$

Solving (9) for  $u$  leads to (10):

$$u = g(x, \Psi(x, t), T, t) \quad (10)$$

### 4. ADAPTIVE SYNCHRONIZATION USING TERMINAL SYNERGETIC CONTROL

An adaptive scheme will be used in this section in conjunction with a terminal synergetic approach to provide a robust control law for globally synchronizing identical hyperchaotic Zhou systems with unknown parameters.

Letting the master system be given as:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + x_4 \\ \dot{x}_2 &= cx_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= -bx_3 + x_1x_2 \\ \dot{x}_4 &= dx_1 + 0.5x_2x_3 \end{aligned} \quad (11)$$

The slave system with the terminal synergetic controllers ( $u_i$ ) is defined as follows:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \hat{a}(y_2 - y_1) + y_4 + u_1 \\ \dot{y}_2 &= \hat{c}y_2 - y_1y_3 + u_2 \\ \dot{y}_3 &= -\hat{b}y_3 + y_1y_2 + u_3 \\ \dot{y}_4 &= \hat{d}y_1 + 0.5y_2y_3 + u_4 \end{aligned} \quad (12)$$

$y_1, y_2, y_3, y_4$  represent system states and  $u_1, u_2, u_3, u_4$  the adaptive controls to be elaborated based on estimates  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$  for the unknown parameters  $a, b, c, d$ .

For the complete synchronization of the master and slave systems, the synchronization errors must rapidly reach a zero value i.e.:  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i = 0$ . Where  $e_i$  is defined by:

$$e_i = y_i - x_i \quad (13)$$

Thus, the synchronization errors dynamics can be described by (14):

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \hat{a}(y_2 - y_1) + y_4 - a(x_2 - x_1) - x_4 + u_1 \\ \dot{e}_2 &= \hat{c}y_2 - y_1y_3 - cx_2 + x_1x_3 + u_2 \\ \dot{e}_3 &= -\hat{b}y_3 + y_1y_2 + bx_3 - x_1x_2 + u_3 \\ \dot{e}_4 &= \hat{d}y_1 + 0.5y_2y_3 - dx_1 - 0.5x_2x_3 + u_4 \end{aligned} \quad (14)$$

#### 4.1 Control design

The main objective here is to design adaptive terminal synergetic controllers ( $u_1, u_2, u_3, u_4$ ) to synchronize the hyperchaotic systems in Eq. (12) with Eq. (11).

First, a macro-variable  $\Psi$  is defined to construct a manifold for the nonlinear system to be controlled given as:

$$\begin{aligned} \Psi_i &= e_i + k_i \int_0^t e_i^{q_i}(\tau) d\tau \\ \Psi_i &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

The derivative of (15) leads to:

$$\dot{\Psi}_i = \dot{e}_i + k_i e_i^{q_i} \quad (16)$$

where,  $i = 1, 2, 3, 4$  and  $k_i > 0$ ,  $p$  and  $q$  are positive odd constants, such that  $0 < \frac{p}{q} < 1$ . Upon reaching the terminal attractor  $\Psi = 0$ , the error system dynamics is constrained by (17):

$$\dot{e}_i = -k_i e_i^{q_i} \quad (17)$$

which may be written as (18):

$$dt = -\frac{1}{k_i} e_i^{-\frac{p_i}{q_i}} de_i \quad (18)$$

Time integrating (18) ( $e_i(0) \neq 0$ ,  $e_i(t_f) = 0$ ) leads to the following equation:

$$t_f = \frac{e_i(0)^{1-\frac{p_i}{q_i}}}{k_i(1-\frac{p_i}{q_i})} \quad (19)$$

When the system reaches the terminal synergetic mode at  $t = t_f$ , the system state error converges to zero in finite-time.

The adaptive synergetic controllers obtained are given in (20):

$$\begin{aligned} u_1 &= -\hat{a}(e_2 - e_1) - e_4 - k_1 e_1^{q_1} - \frac{\Psi_1}{T_1} \\ u_2 &= -\hat{c}e_2 + y_1y_3 - x_1x_3 - k_2 e_2^{q_2} - \frac{\Psi_2}{T_2} \\ u_3 &= \hat{b}e_3 - y_1y_2 + x_1x_2 - k_3 e_3^{q_3} - \frac{\Psi_3}{T_3} \\ u_4 &= -\hat{d}e_1 - 0.5y_2y_3 + 0.5x_2x_3 - k_4 e_4^{q_4} - \frac{\Psi_4}{T_4} \end{aligned} \quad (20)$$

The estimated unknown parameters are obtained using the following adaptive laws:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}} &= -\Psi_1(x_2 - x_1) \\ \dot{\hat{b}} &= \Psi_3x_3 \\ \dot{\hat{c}} &= -\Psi_2x_2 \\ \dot{\hat{d}} &= -\Psi_4x_1 \end{aligned} \quad (21)$$

#### 4.2 Robust stability analysis of the controller

Lyapunov stability analysis is used to study the stability of the controlled system.

**Theorem:** The adaptive terminal synergetic control input law in equation (20) with  $k_i > 0$  and  $T_i > 0$  stabilizes the system.

**Proof:** A Lyapunov function candidates chosen as:

$$V = \frac{1}{2} \sum_1^4 \Psi_i^2 + \frac{1}{2} \sum_1^4 \alpha_i^2 \quad (22)$$

where the parameter estimation errors are defined as:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \hat{a} - a \\ \alpha_2 &= \hat{b} - b \\ \alpha_3 &= \hat{c} - c \\ \alpha_4 &= \hat{d} - d \end{aligned} \quad (23)$$

The derivative of the Lyapunov function gives:

$$\dot{V} = \sum_1^4 \Psi_i \dot{\Psi}_i + \sum_1^4 \alpha_i \dot{\alpha}_i \quad (24)$$

Using (16) and (23) in (24) results in (25)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \Psi_1[\hat{a}y_2 - \hat{a}y_1 + y_4 - ax_2 + ax_1 - x_4 + u_1 + k_1 e_1^{q_1}] \\ &+ \Psi_2[\hat{c}y_2 - y_1y_3 - cx_2 + x_1x_3 + u_2 + k_2 e_2^{q_2}] \\ &+ \Psi_3[-\hat{b}y_3 + y_1y_2 + bx_3 - x_1x_2 + u_3 + k_3 e_3^{q_3}] \\ &+ \Psi_4[\hat{d}y_1 + 0.5y_2y_3 - dx_1 - 0.5x_2x_3 + u_4 + k_4 e_4^{q_4}] \\ &+ \alpha_1 \dot{\hat{a}} + \alpha_2 \dot{\hat{b}} + \alpha_3 \dot{\hat{c}} + \alpha_4 \dot{\hat{d}} \end{aligned} \quad (25)$$

which leads after some basic mathematical manipulations to (26):

$$\begin{aligned}
 \dot{V} = & \Psi_1 [u_1 + \hat{a}(e_2 - e_1) + e_4 + k_1 e_1^{p_1}] \\
 & + \Psi_2 [u_2 + \hat{c}e_2 - y_1 y_3 + x_1 x_3 + k_2 e_2^{p_2}] \\
 & + \Psi_3 [u_3 - \hat{b}e_3 + y_1 y_2 - x_1 x_2 + k_3 e_3^{p_3}] \\
 & + \Psi_4 [\hat{d}e_4 + 0.5y_2 y_3 - 0.5x_2 x_3 + u_4 + k_4 e_4^{p_4}] \\
 & + \alpha_1 [\Psi_1(x_2 - x_1) + \hat{a}] + \alpha_2 (\Psi_2 x_2 + \hat{c}) \\
 & + \alpha_3 (-\Psi_3 x_3 + \hat{b}) + \alpha_4 (\Psi_4 x_1 + \hat{d})
 \end{aligned} \tag{26}$$

Making use of (20), (21) in (26) permits to write:

$$\dot{V} = -\frac{\Psi_1^2}{T_1} - \frac{\Psi_2^2}{T_2} - \frac{\Psi_3^2}{T_3} - \frac{\Psi_4^2}{T_4} \tag{27}$$

where,  $T_i > 0, i = 0, \dots, 4$ .

Thus, one concludes:

$$\dot{V} < 0 \tag{28}$$

It's obvious that (28) confirms the stability of the system.

## 5. SIMULATION RESULTS

Numerical simulations are carried out to assess the proposed method performance; the parameters of the Zhou system for hyperchaotic behavior are:  $a = 35, b = 3, c = 12, d = 1$ .

Two different sets of initial conditions are chosen:

$x_1(0) = 25, x_2(0) = -16, x_3(0) = 20, x_4(0) = -30$ , for the master system (11) and:  $y_1(0) = 14, y_2(0) = 28, y_3(0) = -10, y_4(0) = 6$ , for the slave system.

Initial values for the parameter estimates are taken as:  $\hat{a} = 6, \hat{b} = 10, \hat{c} = 20, \hat{d} = 15$ . The synergetic control parameters used are  $T = 100, k_i = 30, (i=1, \dots, 4)$ .

A comparative study is realized using identical initial conditions between the proposed method and a sliding mode controller. Simulation results are shown in Figure 2 for the synchronization of states of the two identical hyperchaotic Zhou systems, where it was noted that the states of the slave.

Systems in terminal synergetic control are synchronized with the master system faster than the states of SMC.

In Figure 3 the simulation responses of errors of proposed method presents a faster convergence to zero than the sliding mode control errors. Figure 4 shows the parameter estimates of the slave system with terminal synergetic control do converge to parameter values in the master system with faster responses and less oscillations than SMC.

These tables recapitulate the comparison between the two methods TSC and SMC.

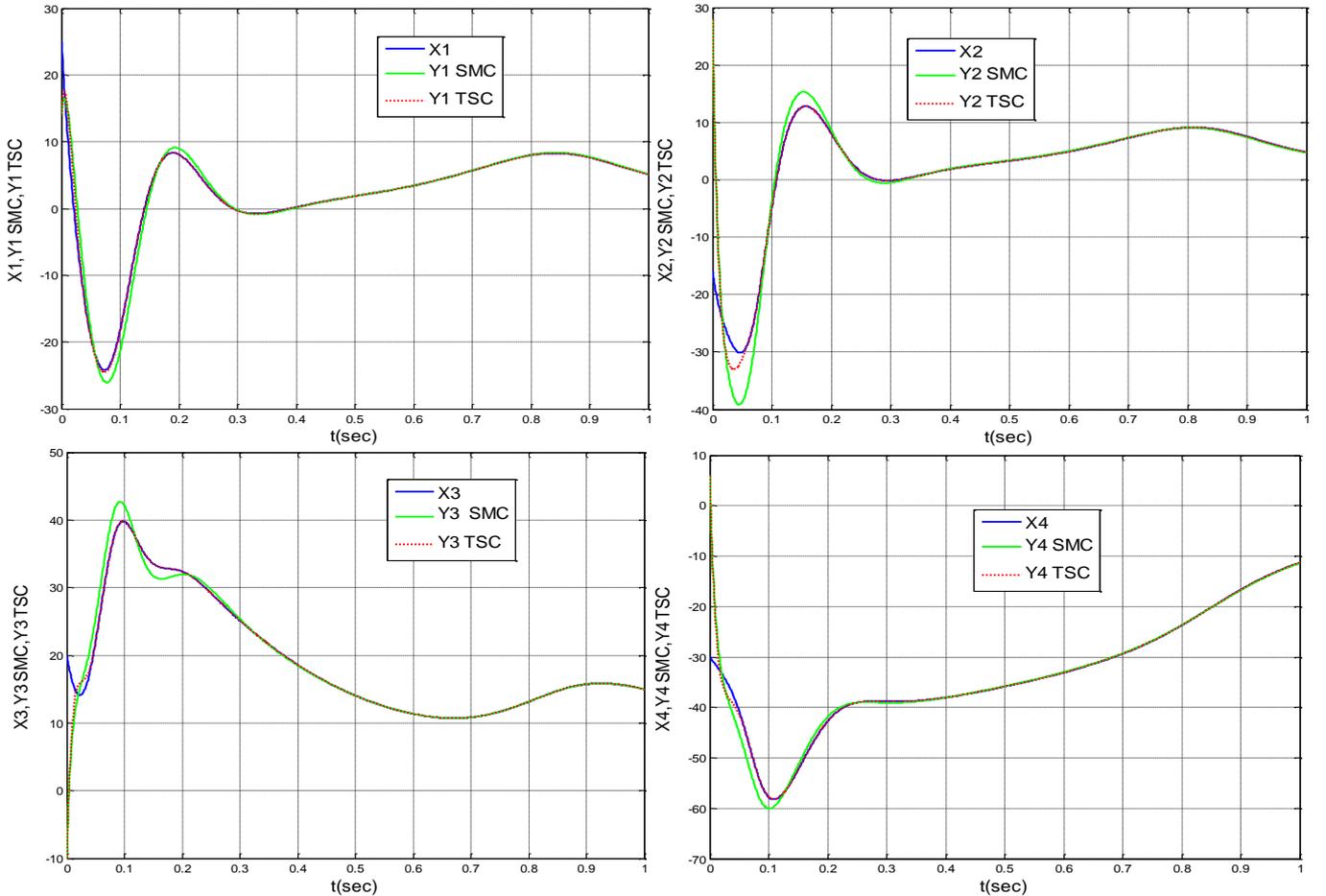


Figure 2. Synchronization of the states with SMC and TSC

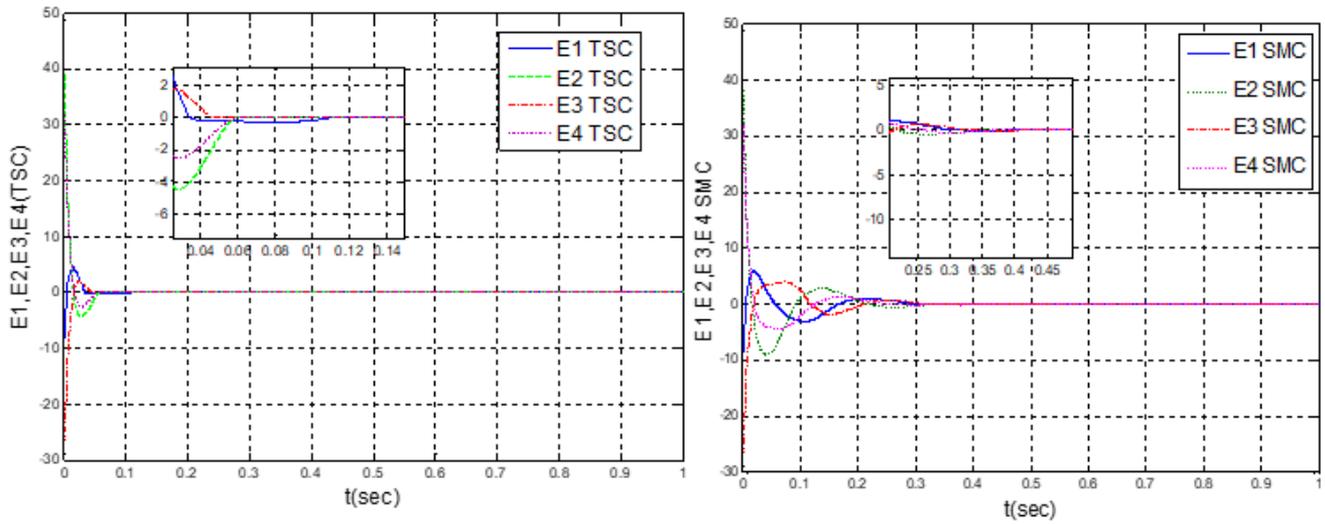


Figure 3. Synchronization of the errors with SMC and TSC

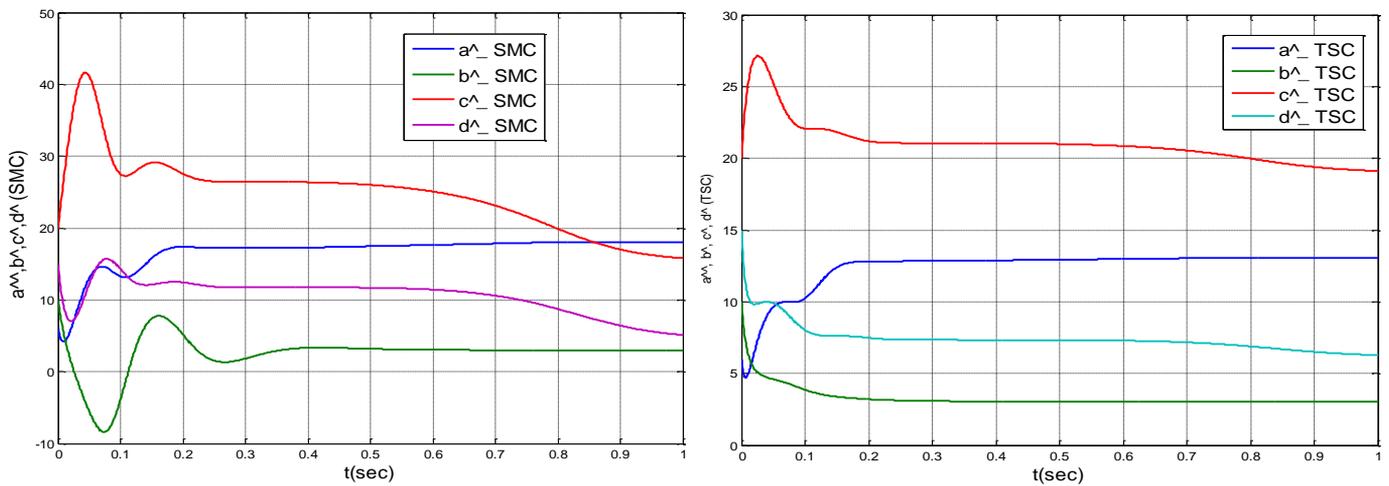


Figure 4. Comparison of the parameter estimates  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{c}$ ,  $\hat{d}$  between SMC and TSC

Table 1. Comparison of the response time of states between TSC and SMC

Methods/response time of states	TSC	SMC
$x_1, y_1$	0.031 sec	0.26 sec
$x_2, y_2$	0.047 sec	0.17 sec
$x_3, y_3$	0.046 sec	0.19 sec
$x_4, y_4$	0.059 sec	0.18 sec

Table 2. Comparison of error response time between the two methods TSC and SMC

Methods/response time of errors	TSC	SMC
$E_1$	0.127	0.44
$E_2$	0.059	0.36
$E_3$	0.048	0.45
$E_4$	0.06	0.39

It is evident from Tables 1 and 2 that faster synchronization can be obtained using terminal synergetic control than with the use of SMC by a factor of 4. Sliding mode control induced errors subsides up to 0.4 seconds whereas those related to the proposed approach fade away within 0.15 seconds. So, thanks to the terminal synergetic control (TSC), the accuracy and the dynamic stability of the system is improved.

## 6. CONCLUSION

In this paper, an adaptive synergetic terminal approach has been proposed in a synchronization process of two hyperchaotic Zhou systems. Accordingly, the system model used was dismantled, then two identical hyperchaotic systems were synchronized using adaptive terminal synergetic control; provided that the system parameters are unknown. Finally, the findings were compared to sliding mode control results. The simulation outcomes show the prevalence of the synergetic approach over the sliding mode control. Indeed, two identical hyperchaotic systems have been synchronized using adaptive terminal synergetic control assuming unknown system parameters with good overall performance.

## REFERENCES

- [1] Guessas, L., Abiza, M. (2018). Chaos suppression using genetically optimized PID control of the 4-D novel hyperchaotic vaidyanathan system. Engineering, Technology & Applied Science Research, 8(6): 3619-3623. <https://doi.org/10.48084/etasr.2394>
- [2] Kocamaz, U.E., Uyaroglu, Y., Kizmaz, H. (2017).

- Controlling hyperchaotic Rabinovich system with single state controllers: Comparison of linear feedback, sliding mode, and passive control methods. *International Journal for Light and Electron Optics*, 130: 914-921. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2016.11.006>
- [3] Rössler, O.E. (1979). An equation for hyperchaos. *Physics Letters A*, 71(2-3): 155-157. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(79\)90150-6](https://doi.org/10.1016/0375-9601(79)90150-6)
- [4] Jia, Q. (2007). Hyperchaos generated from the Lorenz chaotic system and its control. *Physics Letters A*, 366: 217-222. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.02.024>
- [5] Chen, A., Lu, J., Lü, J., Yu, S. (2006). Generating hyperchaotic Lü attractor via state feedback control. *Physica A*, 364: 103-110. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2005.09.039>
- [6] Kapitaniak, T., Chua, L. (1994). Hyperchaotic attractors of unidirectionally-coupled chua's circuits. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(2): 477-482. <https://doi.org/10.1142/S0218127494000356>
- [7] Qi, G.Y., van Wyk, M.A., Wyk, B.J., Chen, G.R. (2008). On a new hyperchaotic system. *Physics Letters A*, 372(2): 124-136. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.10.082>
- [8] Dadras, S., Momeni, H.R., Qi, G., Wang, Z.L. (2012). Four-wing hyperchaotic attractor generated from a new 4D system with one equilibrium and its fractional-order form. *Nonlinear Dynamics*, 67: 1161-1173. <https://doi.org/10.1007/S11071-011-0060-0>
- [9] Vaidyanathan, S., Azar, A.T., Rajagopal, K., Alexander, P. (2015). Design and SPICE implementation of a 12-term novel hyperchaotic system and its synchronization via active control. *International Journal of Modeling, Identification and Control*, 23(3): 267-277. <https://doi.org/10.1504/IJMIC.2015.069936>
- [10] Sampath, S., Vaidyanathan, S., Volos, C.K., Pham, V.T. (2015). An eight-term novel four-scroll chaotic system with cubic nonlinearity and its circuit simulation. *Journal of Engineering Science and Technology Review*, 8(2): 1-6. <https://doi.org/10.25103/jestr.082.01>
- [11] Pham, V.T., Vaidyanathan, S., Volos, C.K., Jafari, S., Wang, X. (2016). A chaotic hyperjerk system based on memristive device. *Advances and Applications in Chaotic Systems*, pp. 39-58. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-30279-9\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-30279-9_2)
- [12] Smaoui, N., Karouma, A., Zribi, M. (2011). Secure communications based on the synchronization of the hyperchaotic Chen and the unified chaotic systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(8): 3279-3293. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.10.023>
- [13] Wu, X.J., Wang, H., Lu, H.T. (2011). Hyperchaotic secure communication via generalized function projective synchronization. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 12(2): 1288-1299. <http://dx.doi.org/10.1016/j.nonrwa.2010.09.026>
- [14] Wu, X., Bai, C., Kan, H. (2014). A new color image cryptosystem via hyperchaos synchronization. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(6): 1884-1897. <http://10.1016/j.cnsns.2013.10.025>
- [15] Zhang, Y., Wen, W., Su, M., Li, M. (2014). Cryptanalyzing a novel image fusion encryption algorithm based on DNA sequence operation and hyperchaotic system. *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, 125(4): 1562-1564. <http://doi:10.1016/j.ijleo.2013.09.018>
- [16] Liu, H., Wong, X., Kadir, A. (2013). Color image encryption using Choquet fuzzy integral and hyperchaotic system. *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, 124(18): 3527-3533. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2012.10.068>
- [17] Wei, X., Fang, Y.F., Li, Q. (2012). A novel four-wing hyper-chaotic system and its circuit implementation. *Procedia Engineering*, 29: 1264-1269. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.01.124>
- [18] Niu, Y., Wang, X., Wang, M., Zhang, H. (2010). A new hyperchaotic system and its circuit implementation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(11): 3518-3524. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.12.005>
- [19] Pecora, L.M., Carroll, T.L. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 64(8): 821-825. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.821>
- [20] Vaidyanathan, S., Karthikeyan, R. (2011). Anti-synchronization of hyperchaotic Lorenz and hyperchaotic Chen systems by adaptive control. *International Journal of Signal System Control and Engineering Application*, 4(2): 18-25. <https://doi.org/10.3923/IJSSCEAPP.2011.18.25>
- [21] Vaidyanathan, S. (2015). Anti-synchronization of mathieu-van der pol chaotic systems via adaptive control method. *International Journal of ChemTech Research*, 8(11): 638-653.
- [22] Vaidyanathan, S., Karthikeyan, R. (2012). Hybrid synchronization of hyperchaotic Lorenz and hyperchaotic Chen systems via active control. *Journal of Engineering and Applied Sciences*, 7: 254-264. <https://doi.org/10.3923/JEASCI.2012.254.264>
- [23] Karthikeyan, R., Vaidyanathan, S. (2014). Hybrid chaos synchronization of four-scroll systems via active control. *Journal of Electrical Engineering*, 65(2): 97-103. <https://doi.org/10.2478/jee-2014-0014>
- [24] Rosenblum, M.G., Picovisky, A.S., Kurths, J. (1997). From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, 78: 4193. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.4193>
- [25] Rosenblum, M.G., Picovisky, A.S., Kurths, J. (1996). Phase synchronization of chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, 76(11): 1804-1807. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.1804>
- [26] Astakhov, V., Shabunin, A., Anishchenko, V. (2000). Antiphase synchronization in symmetrically coupled self-oscillator. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 10(4): 849-857. <https://doi.org/10.1142/S021812740000061X>
- [27] Rulkov, N.F., Sushchik, M.M., Tsimring, L.S., Ababarnel, H.D.I. (1995). Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Physical Review E*, 51: 980-994. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.980>
- [28] Mainieri, R., Rehacek, J. (1999). Projective synchronization in three dimensional chaotic system. *Physical Review Letters*, 82(15): 3042-3045. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.3042>
- [29] Sarasu, P., Vaidyanathan, S. (2011). The generalized projective synchronization of hyperchaotic Lorenz and hyperchaotic Qi systems via active control. *International Journal of Soft Computing*, 6: 216-223. <https://doi.org/10.3923/IJSCOMP.2011.216.223>

- [30] Sarasu, P., Vaidyanathan, S. (2012). Adaptive controller design for the generalized projective synchronization of 4-scroll systems. *International Journal of Signal System Control and Engineering Application*, 5: 21-30. <https://doi.org/10.39.23/IJSSCEAPP.2012.21.30>
- [31] Vaidyanathan, S., Pakiriswamy, S. (2013). Generalized projective synchronization of six-term Sundar Pandian chaotic systems by adaptive control. *International Journal of Control Theory and Applications*, 6(2): 153-163.
- [32] Ho, M.C., Hung, Y.C. (2002) Synchronization of two different systems by using generalized active control. *Physics Letters A*, 301: 424-428. [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(02\)00987-8](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(02)00987-8)
- [33] Li, W., Liu, Z., Miao, J. (2010). Adaptive synchronization for a unified chaotic system with uncertainty. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15: 3015-3021. <https://doi.org/10.1016/J.CNSNS.2009.11.002>
- [34] Chen, H.H., Sheu, G.J., Lin, Y.L., Chen, C.S. (2009). Chaos synchronization between two different chaotic systems via nonlinear feedback control. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 70: 4393-4401. <https://doi.org/10.1016/J.NA.2008.10.069>
- [35] Tan, X., Zhang, J., Yang, Y. (2003). Synchronizing chaotic systems using backstepping design. *Chaos, Solitons and Fractals*, 16(1): 37-45. [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(02\)00153-4](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(02)00153-4)
- [36] Vaidyanathan, S., Sivaperumal, S. (2013). Sliding controller design of hybrid synchronization of four-wing chaotic systems. *International Journal of Soft Computing*, 6: 224231. <https://doi.org/10.39.23/IJSCOMP.2011.224.231>
- [37] Jiang, Z., Dougal, R.A. (2004). Synergetic control of power converters for pulse current charging of advanced batteries from a fuel cell power source. *IEEE Trans. Power Electronics*, 19: 1140-1150. <https://doi.org/10.1109/TPEL.2004.830044>
- [38] Behih, K., Bouchama, Z., Saoudi, K. (2019). Finite-time fuzzy synergetic power system regulator. *Soft Computing and Electrical Engineering*, 1(1): 69-78.
- [39] Nechadi, E. (2019). Adaptive fuzzy type-2 synergetic control based on bat optimization for multi-machine power system stabilizers. *Engineering, Technology & Applied Science Research*, 9(5): 4673-4678. <https://doi.org/10.48084/etasr.2970>
- [40] Veselov, G., Sklyarov, A., Sklyarov, S., Semenov, V. (2016). Synergetic approach to the quadrotor helicopter control in an environment with external disturbances. *International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON)*, Moscow, Russia. <https://doi.org/10.1109/SIBCON.2016.7491680>
- [41] Zerroug, N., Harmas, M.N., Benaggoune, S., Bouchama, Z., Zehar, K. (2018). DSP-based implementation of fast terminal synergetic control for a DC-DC Buck converter. *Journal of the Franklin Institute*, 355: 2329-2343. <https://doi.org/10.1016/J.JFRANKLIN.2018.01.004>
- [42] Bouchama, Z., Harmas, M.N., Zehar, K. (2019). Finite time nonlinear control of a DC-DC Buck converter. *Soft Computing and Electrical Engineering*, 1(1): 36-45.
- [43] Zhou, P., Cao, Y.X., Cheng, X.F. (2009). A new hyperchaos system and its circuit simulation by EWB. *Chinese Physics B*, 18(4): 1394-1398. <https://doi.org/10.1088/1674-1056/18/4/018>

## ملخص

الفوضى هي ظاهرة غير خطية مثيرة للاهتمام وقد تمت دراستها بشكل متزايد على مدى العقود الثلاثة الماضية ، في هذا العمل حققنا قانون التحكم التآزري والنهائي. يتم تقديم تذكير بالمفاهيم الأساسية للتحكم في الوضع المنزلق في الجزء الأول ، متبوعًا بمقدمة موجزة للتحكم التآزري الذي تم في الفصل (TSC) تطويره بشكل أساسي للتخلص من الأثر الناتجة عن استخدام التحكم في الوضع المنزلق. تم اقتراح وحدة تحكم تآزرية طرفية بميزات التقارب السريع والوقت (SC) الثالث للتحكم في الأنظمة الفوضوية. يتميز أسلوب التحكم المقترح عن وحدة التحكم التآزرية التقليدية المحدد. من أجل تقييم التحسين الفعال الناتج عن التحكم التآزري ، تم إجراء اختبار تجريبي باستخدام طريقة اختبار-Simulink Real-time الجزء الأخير من هذا العمل مكرس لمزامنة الأنظمة الفوضوية و dSPACE 1104. باستخدام لوحة (HIL) للأجهزة داخل الحلقة Time من النوع المماثل. يتم تطبيق توليف التحكم التآزري لمزامنة نظام فرط التشابه ، أي نظام الرقيق مع معلمات غير hyperchaotic معروفة مع نظام فرط تشابه آخر ، أي نظام رئيسي. علاوة على ذلك ، أثبتت النتائج ثبات وقوة تقنية التحكم المقترحة باستخدام نظرية الاستقرار لياپونوف.

الكلمات الرئيسية: الأنظمة الفوضوية ، أنظمة فرط التشبت ، التحكم في الوضع الانزلاقي ، التحكم التآزري ، التحكم التآزري ، المزامنة ، التحكم التآزري التكيفي

## Résumé

Le chaos est un phénomène non linéaire intéressant qui couvre plusieurs domaines. Il a été de plus en plus étudié au cours des trois dernières décennies. Dans ce travail, nous nous sommes intéressés principalement au contrôle et à la synchronisation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques, en utilisant des approches modernes et robustes. Dans un premier temps, deux lois de commande, mode glissant et synergetique, ont été développées et validées par simulation pour quelques systèmes chaotiques. Ensuite, la commande adaptative et l'optimisation par l'essai des particules (PSO) ont été combinées avec l'approche synergetique pour améliorer davantage les performances. Contrairement au contrôleur synergetique classique (SC), l'approche de contrôle synergetique terminale proposée présente des caractéristiques de convergence rapide et en temps fini. La méthode de test en temps réel Hardware-in-the-loop (HIL), utilisant deux cartes dSPACE 1104 sous l'environnement MATLAB/Simulink, est exploitée pour valider expérimentalement l'approche synergetique terminale. La dernière partie de ce travail est consacrée à la synchronisation des systèmes chaotiques et hyperchaotique de type identique. La synthèse du contrôle synergetique terminal adaptatif est appliquée pour synchroniser un système hyperchaotique, c'est-à-dire, esclave avec des paramètres inconnus avec un autre système hyperchaotique maître. Enfin, les résultats ont prouvé la stabilité et la robustesse de la technique de commande proposée en utilisant la théorie de la stabilité de Lyapunov.

**Mots clés : systèmes chaotiques, systèmes hyperchaotiques, la commande par mode glissant, la commande synergetique, la commande synergetique terminale, synchronisation , la commande terminale adaptative**

## Abstract

Chaos is an interesting nonlinear phenomenon and has been increasingly studied over the last three decades, in this work we have realized a sliding mode and synergetic control law. A reminder of the basic concepts of sliding mode control is given in the first part, followed by a brief introduction of the synergetic control mainly developed to eliminate the chatter induced by the use of sliding mode control. Adaptive control and particle swarm optimization (PSO) have been proposed to improve the performance. A terminal synergetic controller (TSC) proposed in the third chapter to control chaotic systems. Distinct from the classical synergetic controller (SC), the proposed control approach presents fast convergence and finite time characteristics. In order to evaluate the effective improvement brought by the terminal synergetic controller, an experimental test was performed using a real-time Simulink hardware-in-the-loop (HIL) test method using a dSPACE 1104 board. The last part of this work is devoted to the synchronization of chaotic and hyperchaotic systems of identical type. The adaptive terminal synergetic control synthesis is applied to synchronize a hyperchaotic i.e. slave system with unknown parameters with another hyperchaotic i.e. master system. Furthermore, the results proved the stability and robustness of the proposed control technique using Lyapunov stability theory.

**Keywords: chaotic systems, hyperchaotic systems, sliding mode control, synergetic control, synergetic terminal control, synchronization, adaptive terminal control**