

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



UNIVERSITE FERHAT ABBAS, SETIF 1

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
pour l'obtention du diplôme de

Doctorat En Sciences

Option : Mathématiques Appliquées

Par

Mme. Benziane Laldja

Thème

**Analyse des Problèmes Antiplans Thermo-Électro-
Viscoélastiques de Contact avec Frottement**

Soutenue le : 29/04/ 2023 devant le jury composé de :

Nom	Grade	Établissement	Qualité
Djabi Seddik	Prof.	Université Ferhat Abbas Sétif 1	Président
Lebri Nemira	Prof.	Université Ferhat Abbas Sétif 1	Encadreur
Rahmoune Azedine	Prof.	Université Mohamed El Bachir El Ibrahimi de Bordj Bou Arréridj	Examineur
Boukoucha Rachid	MCA.	Université Abderrahmane Mira de Béjaia	Examineur
Drabla Salah	Prof.	Université Ferhat Abbas Sétif 1	Invité

Remerciements

Tout d'abord, mes sincères remerciements à Dieu le plus grand et le plus puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donnée pour réaliser cette thèse. En premier lieu, je tiens à remercier comme il se doit ma directrice de thèse, Professeur Lebri Nemira pour son acceptation de diriger ce travail malgré toutes ses préoccupations, pour sa patience et pour ses conseils. Je tiens ensuite à lui exprimer mes vifs remerciements pour la confiance qu'elle m'a accordée, en guidant et en orientant mon travail, pour ses encouragements et son soutien afin de poursuivre ce chemin de recherche.

Je remercie vivement le Professeur Djabi Seddik qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance. Comme je tiens aussi à lui exprimer tous mes respects et mes reconnaissances pour ses compétences. Je tiens à remercier le Professeur Azedine Rahmoune de l'université Bordj Bou Arrerijj d'avoir accepté d'examiner mon travail et de faire partie de ce jury. Je remercie également le Docteur Rachid Boukoucha de l'université Béjaia d'avoir accepté d'examiner ma thèse. Un grand merci à monsieur Drabla Salah d'avoir accepté d'être notre invité d'honneur.

je remercie chaleureusement mes parents qui suivent avec un grand intérêt mon parcours de recherche, mes sœurs pour leurs encouragements, et mes frères ainsi que leurs épouses, mon mari et mes enfants (Douâa, Anfel, Ahmed) pour leurs encouragements et leurs patiences.

Pour finir, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes collègues enseignants et enseignantes de l'université Ferhat Abbas Sétif 1 Faculté de Technologie, qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de cette thèse. Merci encore à vous!

Benziane Laldja

Table des matières

Introduction	iv
Notations	viii
I Outils mathématiques et modélisation	1
1 Outils mathématiques	2
1.1 Espaces fonctionnels	3
1.1.1 Espaces des fonctions continues et continûment différentiable . .	3
1.1.2 Espaces de Lebesgue L^p	4
1.1.3 Espaces de Sobolev	5
1.1.4 Normes équivalentes sur l'espace $H^1(\Omega)$	6
1.1.5 Les espaces de sobolev associés aux inconnues électriques	7
1.1.6 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles	8
1.2 Quelques résultats élémentaires	10
1.3 Opérateurs linéaires dans les espaces normés	12
1.3.1 Fonctions convexes-semi- continuité inférieure	13
1.4 Différentiabilité et sous différentiabilité	14
1.5 Triplet de Gelfand	15

1.6	Quelques inégalités	18
2	Inéquations variationnelles et inéquations d'évolution	20
2.1	Inéquations variationnelles	21
2.1.1	Inéquations variationnelles elliptiques	21
2.1.2	Inéquations quasi-variationnelles elliptiques	22
2.2	Inéquations d'évolution	23
2.2.1	Inéquations variationnelles d'évolution avec viscosité	23
2.2.2	Inéquations quasi-variationnelles d'évolution	24
2.2.3	Inéquations quasi-variationnelles d'évolution dépendantes de l'histoire avec la Viscosité	25
2.3	Équations différentielles ordinaires dans des espaces abstraits	27
3	Modélisation	28
3.1	Modélisation des processus du contact piézoélectrique	29
3.1.1	Cadre physique 1	29
3.1.2	Lois de comportement	33
3.1.3	Conditions de contact	36
3.1.4	Lois de frottement	39
3.2	Modélisation des problèmes antiplans	43
3.2.1	Cadre physique 2	43
3.2.2	Modélisation du problème <i>thermo-électro-viscoélastique</i>	46
3.2.3	Modélisation du problème thermo-électro-viscoélastique à mémoire longue	52
3.2.4	Les espaces fonctionnelles pour les problèmes antiplans	55

II	Analyse des modèles	58
4	Analyse d'un problème antiplan thermo-electro-viscoélastique avec frottement dépendant du taux de glissement total.	59
4.1	Formulation du problème-hypothèses	60
4.1.1	Formulation mécanique du problème	60
4.1.2	Hypothèses	61
4.2	Formulation variationnelle	66
4.3	Résultat d'existence et d'unicité	68
4.4	Résultat de convergence	78
5	Analyse d'un problème antiplan thermo-électro-viscoélastique avec mémoire longue	85
5.1	Formulation du problème-hypothèses	86
5.1.1	Formulation mécanique du problème	86
5.1.2	Hypothèses	87
5.2	Formulation variationnelle	91
5.3	Résultat d'existence et d'unicité	92
	Bibliographie	101

Introduction

Dans la plupart des systèmes de la mécanique des milieux continus, il existe des situations dans lesquelles un corps déformable entre en contact avec d'autres corps ou bien avec une fondation rigide ou déformable. La problématique du contact est essentiellement de savoir comment les forces sont appliquées sur une structure et comment réagissent ces structures lorsqu'elles subissent ses forces. Les problèmes de contact mécanique apparaissent principalement dans des domaines aussi variés que l'aéronautique, la mécanique automobile, le génie civil, les sciences du bois, la médecine, la production de l'énergie (assemblage des structures, fissuration dans les joints soudés) et les systèmes de transmission. Prenant en compte les comportements divers des milieux continus, elle englobe l'hydrodynamique, la dynamique des gaz, l'élasticité, la plasticité et d'autres types de comportement.

Vu l'importance du phénomène, des efforts ont été consacrés à la modélisation, l'analyse ainsi que l'approximation numérique des processus physiques provenant des contacts entre des corps déformables ou entre un corps et une base rigide, déformable ou lubrifiée. Par conséquent, une théorie mathématique générale de la mécanique du contact (MTCM) a actuellement émergé. Elle concerne les structures mathématiques qui sont à la base des problèmes de contact avec des lois constitutives différentes, c'est-à-dire, différents matériaux, diverses géométries et des conditions de contact différentes ; voir par exemple ([42], [44], [50]).

La modélisation des problèmes de contact d'un corps déformable avec une base dépend essentiellement des propriétés mécaniques du matériau considéré, ainsi que

des conditions aux limites de contact.

Les matériaux piézoélectriques sont extrêmement utilisés comme interrupteurs et actionneurs dans beaucoup de systèmes d'ingénierie, en radio électronique, l'électroacoustique et la mesure des équipements. Ils sont caractérisés par le couplage des propriétés mécaniques et électriques. Ce couplage conduit à l'apparition d'un potentiel électrique suite à une déformation mécanique et, inversement, une déformation mécanique est générée lorsqu'un potentiel électrique est appliqué. Les matériaux piézoélectriques, pour lesquelles les propriétés mécaniques sont viscoélastiques sont appelés "les matériaux électro-viscoélastiques".

Des modèles généraux pour des matériaux électro-élastiques ayant un effet piézoélectrique peuvent être trouvés dans [6, 7, 10, 27, 47]. Un problème de contact avec "slip-dépendent" pour les matériaux électro-élastiques a été étudié dans [46].

Actuellement, un intérêt considérable est porté aux problèmes de contact avec frottement impliquant les matériaux piézoélectriques voir par exemple [36].

Un autre phénomène très important en ingénierie sera considéré dans cette thèse, il s'agit du phénomène de contact avec l'effet thermique. Les processus de contact et de frottement s'accompagnent invariablement d'une production de la chaleur qui peut être considérable. À titre d'exemple, le freinage brusque d'une voiture peut entraîner la dissipation d'une puissance importante sous forme de chaleur. L'effet thermique dans les processus de contact affecte la composition et la rigidité des surfaces et provoque des contraintes thermiques dans les corps en contact. La façon dont la chaleur affecte les propriétés mécaniques d'une surface peut être partiellement prise en compte (en supposant que le coefficient de frottement dépend de la température voir [43]). Les modèles mathématiques en thermique ont besoin de quatre éléments : la condition de production de la chaleur, la condition décrivant l'échange de la chaleur entre le corps et la fondation, la relation constitutive et l'équation de l'énergie. Ces modèles ont été développés récemment dans [5, 25, 26, 37, 52].

L'objectif de cette thèse est l'étude de quelques problèmes thermo- électro-viscoélastiques

de contact avec frottement entre des corps cylindriques déformables et une fondation. Nous nous intéressons au cas des déformations antiplans, i.e. le champ des déplacements est parallèle aux génératrices du cylindre et est indépendant de la coordonnée axiale. De tels problèmes ont déjà été étudiés par plusieurs auteurs, sous plusieurs lois de contact et de frottement et différentes lois de constitution, citons par exemple [31, 39, 51]. Diverses loi de frottement sont envisagées, elles sont définies par des versions de la loi de Tresca, le couplage entre l'effet thermique et l'effet électrique constitue l'originalité des modèles étudiés dans cette thèse.

Nous allons étudier dans cette thèse des problèmes avec différents conditions de contact avec frottement. Nous commençons par décrire des problèmes antiplans de contact thermo-piézoélectriques de départ et, après avoir précisé les hypothèses sur les données, nous présentons des formulations variationnelles des problèmes posés pour lesquelles nous démontrons l'existence et l'unicité des solutions par rapport aux données et aux paramètres.

Cette thèse se compose de deux grandes parties, dont la première partie contient trois chapitres et la deuxième partie contient deux chapitres.

Dans le chapitre 1, nous introduisons les espaces fonctionnels utilisés dans cette thèse, et donnons quelques propriétés nécessaires pour l'élaboration de ce travail. Dans le chapitre 2, nous évoquons quelques résultats issus de la théorie des inéquations variationnelles elliptiques, équations d'évolution, les inéquations quasi-variationnelles avec terme mémoire.

Le chapitre 3 se compose de deux sections. Dans la première section, on introduit la modélisation du contact des problèmes quasistatiques. On rappelle le cadre physique et les modèles mathématiques contenant les différentes équations et conditions de contact concernant le champ des déplacements, des constructions des lois de frottement. Dans la seconde partie, on présente une modélisation des problèmes antiplans. Nous citons tout d'abord des hypothèses et des équations, puis nous faisons une présentation des conditions aux limites avec frottement. Le chapitre 4 est consacré

à l'étude mathématique d'un problème de contact antiplan avec frottement entre un matériau électro-viscoélastique, supposé avec effet thermique ; et une base. Le contact est modélisé par une condition de Tresca où le coefficient de frottement dépend du taux de glissement total. Après avoir établi la formulation variationnelle et avoir posé les hypothèses nécessaires, nous établissons les résultats d'existence et d'unicité en se basant sur la théorie des inéquations variationnelles d'évolution avec viscosité pour le champ des déplacements, avec une équation variationnelle dépendant du temps pour le champ électrique et une équation d'évolution de premier ordre pour le champ thermique et des arguments du point-fixe de Banach. Finalement, nous considérons un résultat de convergence de la solution faible du problème par rapport aux données

Le chapitre 5 porte sur l'étude mathématique d'un problème de contact en thermo-électro-viscoélastique avec frottement de Tresca. Le matériau est modélisé par une loi constitutive générale de nature thermo- électro-viscoélastique avec longue mémoire. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution moyennant les techniques de point fixe et des équations d'évolution d'ordre un avec des opérateurs monotones. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet de la publication [11].

Nous concluons que la solution du problème antiplan élastique de contact de type Tresca peut être approximée par la solution du problème antiplan viscoélastique de contact avec frottement de type Tresca, quand le coefficient de viscosité est suffisamment petit. Ce résultat indique que, dans le contexte des problèmes antiplans, l'élasticité avec frottement de type Tresca peut être considérée comme un cas limite de viscosité avec frottement de type Tresca.

Nous clôturons cette thèse par une conclusion générale, une perspective et une bibliographie détaillée.

Notations

Ω	est un domaine de \mathbb{R}^d ($d=2,3$), on note par :
Γ	la frontière de Ω supposée régulière,
$\text{mes } \Gamma_1$	la mesure de Lebesgue ($d - 1$) dimensionnelle de Γ_1 ,
$\Gamma_i (i = \overline{1,3})$	une partie mesurable de Γ ,
ν	la normale unitaire sortante à Γ ,
v_ν, v_τ	les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel v ,
σ_ν, σ_τ	les composantes normales et tangentielles du champ tensoriel σ ,
$C^1(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles continument différentiables sur Ω ,
$X = V \times W$	l'espace produit de deux espaces V et W .

Si de plus $[0, T]$ est un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$C(0, T; X)$	l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans X ,
$C^1(0, T; X)$	l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans X ,
$\mathbb{L}^p(0, T; X)$	l'espace des fonctions fortement mesurables sur $[0, T]$ dans X ,
$\ \cdot\ _{\mathbb{L}^p(0, T; X)}$	la norme de $\mathbb{L}^p(0, T; X)$,
$W^{k,p}(0, T; X)$	l'espace de Sobolev de paramètres k et p ,
$\ \cdot\ _{W^{k,p}(0, T; X)}$	la norme de $W^{k,p}(0, T; X)$,
$\bar{I} = (0, T)$	intervalle du temps, et $I = (0, T)$.

Pour une fonction f ; on note par

$\text{dom } f$	le domaine de la fonction de f ;
$\text{supp } f$	le support de f ,
$\partial_i f, f_{,i}$	la dérivée partielle de f par rapport à la i ème composante x_i ,
∇f	le gradient de f ,
$\text{Div } f$	la divergence de tenseur σ ,
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de f ,
∂f	le sous différentiel de f ,
$\text{div } f$	la divergence de vecteur f .

Autres notations

- \liminf la limite inférieure,
 \limsup la limite supérieure,
 $D(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact,
 $D(\Omega)^d$ $\{\varphi = (\varphi_i), \varphi_i \in D(\Omega), i = \overline{1, d}\}$,
 $C_0^\infty(\Omega)^d$ $\{f \in C^\infty(\Omega)^d, f = 0 \text{ sur } \Gamma\}$,
 \mathbb{S}^d espace des tenseurs d'ordre deux symétriques sur \mathbb{R}^d c'est à dire $\mathbb{S}^d = \mathbb{R}_s^{d \times d}$,
" ." le produit scalaire sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d ,
" |." la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d ,
 C une constante générique strictement positive,
 Λ^n puissance n de l'opérateur Λ ,
p.p. presque partout,

Première partie

**Outils mathématiques et
modélisation**

Cette première partie contient trois chapitres, dans le chapitre 1, nous introduisons les espaces fonctionnels utilisés dans cette thèse, et donnons quelques propriétés nécessaires pour l'élaboration de ce travail. Dans le chapitre 2, nous évoquons quelques résultats issus de la théorie des inéquations variationnelles elliptiques, équations d'évolution, les inéquations quasi-variationnelles avec terme mémoire.

Le chapitre 3 se compose de deux sections. Dans la première section, on introduit la modélisation du contact d'un problème quasistatique. On rappelle le cadre physique et le modèle mathématique contenant les différentes équations et conditions de contact concernant le champ des déplacements, des constructions des lois de frottement. Dans la seconde partie, on présente une modélisation des problèmes antiplans. Nous citons tout d'abord des hypothèses et des équations, puis nous faisons une présentation des conditions aux limites avec frottement,

Chapitre 1

Outils mathématiques

Dans ce chapitre, nous présentons quelques préliminaires de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisés partout dans cette thèse. Il nous est paru utile de donner quelques rappels sur les espaces normés, les espaces fonctionnels, le théorème de point fixe de Banach et un résultat de point fixe qui s'adapte aux inéquations variationnelles avec des opérateurs à mémoire. Finalement, nous passons en revue quelques résultats fondamentaux de l'analyse fonctionnelle linéaire dans les espaces de Hilbert.

1.1 Espaces fonctionnels

Dans cette section nous donnons quelques rappels sur les espaces fonctionnels à valeurs réelles qui nous aident à comprendre les propriétés des espaces appropriés à la mécanique. Nous allons aborder les espaces des fonctions continues et continûment différentiables, les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev. Pour plus de détail, voir par exemple [12, 24].

Étant donné un ouvert Ω de \mathbb{R}^d . Soit $x = (x_1, \dots, x_d)$ un élément de \mathbb{R}^d et soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ un multi-indice tel que $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$, nous posons

$$D^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

1.1.1 Espaces des fonctions continues et continûment différentiable

On note par $C(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$. $C(\overline{\Omega})$ est un espace de Banach dont la norme est la suivante :

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup\{|v(x)| : x \in \Omega\} = \max\{|v(x)| : x \in \overline{\Omega}\}.$$

Pour $m \geq 0$, l'espace $C^m(\overline{\Omega})$ défini par

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : D^\alpha v \in C(\overline{\Omega}) \text{ pour tout } \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq m\}.$$

C'est l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ dont les dérivées d'ordre au plus m sont également continues sur $\overline{\Omega}$.

L'espace $C^m(\overline{\Omega})$ est un espace de Banach dont la norme est donnée par

$$\|v\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Par ailleurs, $C^\infty(\overline{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v \in C^m(\overline{\Omega}) \quad \forall m = 0, 1, \dots\}.$$

Soit v une fonction dans Ω , le support de v est défini par

$$\text{supp } v = \overline{\{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}}.$$

Si $\text{supp } v$ est un sous-ensemble propre de Ω , on dit que v est une fonction à support compact dans Ω .

L'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact est donné par

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \text{supp } v \subset \Omega\}.$$

1.1.2 Espaces de Lebesgue L^p

Pour $p \in [1, \infty[$, $L^p(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions mesurables au sens de Lebesgue définies sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} .

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : v \text{ Lebesgue mesurable et } |v|^p \text{ Lebesgue intégrable sur } \Omega\}.$$

C'est un espace de Banach, dont la norme est donnée par

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$ et $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable, alors

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess}|v(x)| = \inf\{c : |v(x)| \leq c\}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

1.1.3 Espaces de Sobolev

Une bonne partie de l'analyse des équations aux dérivées partielles se déroule dans les espaces de Sobolev. On renvoie le lecteur aux ouvrages [12, 1] pour plus de détails.

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty]$. Nous définissons les espaces de Sobolev par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tel que } D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ avec } |\alpha| \leq k\}.$$

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est définie par

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty; \\ \max_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Pour $p = 2$, $W^{k,2}(\Omega)$ sera noté par $H^k(\Omega)$, qui est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est donné par

$$(u, v)_k = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx \quad \forall u, v \in H^k(\Omega).$$

1.1.4 Normes équivalentes sur l'espace $H^1(\Omega)$

On a quelques résultats sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ tels que } \partial_i u \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, d\}.$$

D'abord, on note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)}.$$

Avec la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}},$$

et on écrit

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

On a les résultats suivants

$$C^1(\overline{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Théorème 1.1.1 (Rellich)

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ avec injection compacte.}$$

Théorème 1.1.2 (Trace de Sobolev) *Il existe une application linéaire et continue $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que $\gamma u = u|_{\Gamma}$ pour $u \in C^1(\overline{\Omega})$.*

Remarque 1.1.3 1. *L'espace $L^2(\Gamma)$ ci-dessus représente l'espace des fonctions réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle $d\Gamma$.*

2. *L'application γ s'appelle application trace; elle est définie comme le prolonge-*

ment par densité de l'application $u \rightarrow u|_{\Gamma}$ définie pour $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

3. On note que l'application de trace $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compact.

1.1.5 Les espaces de sobolev associés aux inconnues électriques

Dans ce qui suit, nous définissons les espaces de Sobolev associés aux inconnues électriques (champ du déplacement électrique D et le potentiel électrique φ) des problèmes électro-mécaniques qui vont être traités dans cette thèse.

Soient les deux espaces

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= \{D = (D_i) \mid D_i \in L^2(\Omega), \operatorname{div} D \in \mathbb{L}^2(\Omega)\}, \text{ où } \operatorname{div} D = (D_{i,i}) \\ W &= \{\zeta \in H^1(\Omega) \mid \zeta = 0 \text{ sur } \Gamma_a\}.\end{aligned}$$

Ces espaces \mathcal{W} et W sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires donnés par

$$\begin{aligned}(D, E)_{\mathcal{W}} &= (D, E)_{L^2(\Omega)^d} + (\operatorname{div} D, \operatorname{div} E)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \\ (\varphi, \phi)_W &= (\nabla \varphi, \nabla \phi)_{L^2(\Omega)^d},\end{aligned}$$

et leurs normes associées $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ et $\|\cdot\|_W$, respectivement.

$$\|D\|_{\mathcal{W}}^2 = \|D\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)^d}^2 + \|\operatorname{div} D\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \|\varphi\|_W = \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Puisque $\operatorname{mes} \Gamma_a > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est satisfaite, ainsi,

$$\|\nabla \xi\|_{\mathcal{W}} \leq c_F \|\xi\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \xi \in W, \tag{1.1}$$

où $c_F > 0$ est une constante qui dépend uniquement de Ω et Γ_a et $\nabla \xi = (\xi_{,i})$.

Il s'ensuit de (1.1) que $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|\cdot\|_W$ sont des normes équivalentes sur W et donc

$(W, \|\cdot\|_W)$ est un espace réel de Hilbert. De plus, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante \tilde{c}_0 dépendant uniquement de Ω , Γ_a et Γ_3 telle que

$$\|\xi\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0 \|\xi\|_W, \quad \forall \xi \in W. \quad (1.2)$$

Aussi, rappelons que lorsque $D \in L^2(\Omega)^d$ est une fonction régulière, la formule de Green (3.88) est satisfaite

$$(D, \nabla \xi)_{L^2(\Omega)^d} + (\operatorname{div} D, \xi)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} D\nu \cdot \xi da, \quad \forall \xi \in H^1(\Omega). \quad (1.3)$$

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le lecteur par exemple à [13, 1] et [12].

1.1.6 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

On aura besoin des espaces des fonctions à valeurs vectorielles dans l'étude des problèmes variationnels dépendant du temps. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach. Dans les problèmes de contact étudiés dans cette thèse $[0, T]$ désigne l'intervalle de temps où $T > 0$.

Espaces $C^m(0, T; X)$. Nous définissons $C(0, T; X)$ l'espace des fonctions $v : [0, T] \rightarrow X$ qui sont continues sur l'intervalle $[0, T]$. Avec la norme

$$\|v\|_{C(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_X.$$

L'espace $C(0, T; X)$ est un espace de Banach.

Pour $m \geq 0$, nous définissons l'espace

$$C^m(0, T; X) = \{v \in C(0, T; X) : v^{(j)} \in C(0, T; X), \quad j = 1, 2, \dots, m\}.$$

Il est un espace de Banach avec la norme

$$\|v\|_{C^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^m \max_{t \in [0,T]} \|v^{(j)}\|_X.$$

En particulier, $C^1([0, T]; X)$ désigne l'espace des fonctions continument différentiables sur $[0, T]$ à valeurs dans X . C'est un espace de Banach avec la norme

$$\|v\|_{C^1(0,T;X)} = \max_{t \in [0,T]} \|v(t)\|_X + \max_{t \in [0,T]} \|\dot{v}(t)\|_X.$$

Espaces $L^p(0, T; X)$. Pour $p \in [1, \infty)$, l'espace $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables $v : [0, T] \rightarrow X$ telle que $\int_0^T |v|_X^p dt < \infty$. L'espace $L^p(0, T; X)$ est un espace de Banach avec la norme

$$\|v\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T |v(t)|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $L^\infty(0, T; X)$ est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables $v : [0, T] \rightarrow X$ telle que $\|v(t)\|_X < \infty$. Avec la norme

$$\|v\|_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0,T]} \|v(t)\|_X,$$

l'espace $L^\infty(0, T; X)$ est un espace de Banach.

Lorsque $(X, (\cdot, \cdot))$ est un espace de Hilbert, $L^2(0, T; X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Espaces $W^{k,p}(0, T; X)$. Pour $k \in \mathbb{Z}_+$ et $1 \leq p \leq \infty$, nous présentons l'espace

$$W^{k,p}(0, T; X) = \{v \in L^p(0, T; X) : \|v^{(m)}\|_{L^p(0,T;X)} < \infty, \forall m \leq k\}.$$

Lorsque $p < \infty$, nous définissons la norme dans l'espace $W^{k,p}(0, T; X)$ par

$$\|v\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \left(\int_0^T \sum_{0 \leq m \leq k} |v^{(m)}(t)|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lorsque $p = \infty$, la norme est définie par

$$\|v\|_{W^{k,\infty}(0,T;X)} = \max_{0 \leq m \leq k} \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0,T]} \|v^{(m)}(t)\|_X.$$

Si X est un espace de Hilbert et $p = 2$, alors l'espace

$$H^k(0, T; X) \equiv W^{k,2}(0, T; X),$$

est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{H^k(0,T;X)} = \sum_{0 \leq m \leq k} \int_0^T (u^{(m)}(t), v^{(m)}(t))_X dt.$$

Pour plus de détails sur les résultats résumés dans ce paragraphe nous renvoyons le lecteur par exemple à [14].

1.2 Quelques résultats élémentaires

Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach va être utilisé plus tard dans cette thèse pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution. Soit X un espace de Banach muni de

la norme $\|\cdot\|_X$, $K \subset X$ une partie de X et soit $\Lambda : K \rightarrow X$ un opérateur défini sur K . On s'intéresse à l'existence d'une solution de l'équation

$$\Lambda u = u; \quad u \in K. \quad (1.4)$$

Une telle solution de (1.4) s'appelle un point fixe de Λ dans K .

Théorème 1.2.1 (Point fixe de Banach) *Soit K une partie non vide et fermée de l'espace de Banach X et soit $\Lambda : K \rightarrow K$ une contraction, i.e., $\exists k \in]0, 1[$ tel que*

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_X \leq k \|u - v\|_X, \quad \forall u, v \in K. \quad (1.5)$$

Alors il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$, i.e., Λ possède un point fixe unique dans K .

Rappelons que les puissances de l'opérateur Λ sont définies récursivement par

$$\Lambda^n = \Lambda(\Lambda^{n-1}) \text{ pour } n \geq 2.$$

Théorème 1.2.2 *Sous les mêmes conditions du **Théorème 1.2.1**, on suppose que Λ^n est une contraction pour un certain entier $n \geq 2$. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .*

Lemme 1.2.3 *Soit $\Lambda : C(0, T; X) \rightarrow C(0, T; X)$ un opérateur satisfaisant la propriété suivante : il existe $c > 0$ tels que*

$$\begin{aligned} \|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_X &\leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_X ds \\ \forall \eta_1, \eta_2 \in C(0, T; X), \quad t &\in [0, T]. \end{aligned}$$

Alors, il existe un élément unique $\eta^ \in C(0, T; X)$ tel que $\Lambda\eta^* = \eta^*$*

1.3 Opérateurs linéaires dans les espaces normés

Définition 1.3.1 *Étant donné un espace linéaire X , une norme $\|\cdot\|_X$ est une fonction de X à \mathbb{R} avec les propriétés suivantes.*

$$1- \|u\|_X \geq 0 \quad \forall u \in X, \text{ et } \|u\|_X = 0 \text{ si } u = 0_X.$$

$$2- \|\alpha u\|_X = \alpha \|u\|_X \quad \forall u \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$3- \|u + v\|_X \leq \|u\|_X + \|v\|_X \quad \forall u, v \in X.$$

Le couple $(X, \|\cdot\|_X)$ est appelé un espace normé. Ici et partout dans cette thèse, 0_X désignera l'élément zéro de X .

Définition 1.3.2 *Soient X et Y des espaces linéaires. Une application $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée forme bilinéaire si elle est linéaire dans chaque variable, c'est-à-dire pour chaque $u_1, u_2, u \in X, v_1, v_2, v \in Y$, et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,*

$$a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 a(u_1, v) + \alpha_2 a(u_2, v),$$

$$a(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 a(u, v_1) + \alpha_2 a(u, v_2).$$

Dans le cas $X = Y$, on dit qu'une forme bilinéaire est symétrique si

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in X.$$

Si X et Y sont des espaces normés, on peut considérer la continuité des formes bilinéaires.

Définition 1.3.3 *Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces normés. Une forme bilinéaire $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue s'il existe une constante $M > 0$ tel que*

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_Y \quad \forall u \in X, \quad \forall v \in Y.$$

Dans le cas $X = Y$, on dit qu'une forme bilinéaire est X -elliptique s'il existe une constante $m > 0$ tel que

$$a(v, v) \geq m \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X.$$

Les formes bilinéaires symétriques continues et X -elliptiques définies sur un espace de Hilbert X seront utilisées dans la suite de cette thèse dans l'étude des inégalités variationnelles et quasi-variationnelles.

1.3.1 Fonctions convexes -semi- continuité inférieure

Nous présentons dans ce paragraphe quelques rappels sur les fonctions convexes et sur les fonctions semi-continues inférieurement.

Définition 1.3.4 Soit φ une fonction définie sur un espace vectoriel réel X et à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$. Une telle fonction est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$, c'est-à-dire s'il existe $u_0 \in X$ tel que $\varphi(u_0) < +\infty$. La fonction φ est dite convexe si

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v), \quad \forall u, v \in X, t \in]0, 1[. \quad (1.6)$$

La fonction φ est dite strictement convexe, si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u, v \in X$ tel que $u \neq v$.

Définition 1.3.5 Une fonction $\varphi : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) en $u_0 \in X$ si

$$\liminf_{u \rightarrow u_0} \varphi(u) \geq \varphi(u_0).$$

Une fonction est dite s.c.i. sur $K \subset X$, si elle est s.c.i. en tout point de K et elle est dite s.c.i. si elle est s.c.i. sur tout X .

1.4 Différentiabilité et sous différentiabilité

Nous rappelons maintenant la définition des fonctions Gâteaux-différentiables.

Définition 1.4.1 Soient $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espace préhilbertien, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $u \in X$. Alors φ est Gâteaux-différentiable au point u s'il existe un élément $\nabla\varphi(u) \in X$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = (\nabla\varphi(u), v)_X \quad \forall v \in X. \quad (1.7)$$

L'élément $\nabla\varphi(u)$ qui satisfait (1.7) est unique et s'appelle le gradient de φ en u . La fonction $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite Gâteaux-différentiable si elle est Gâteaux-différentiable en tout point de X . Dans ce cas, l'opérateur $\nabla\varphi : X \rightarrow X$ qui associe chaque élément $u \in X$ par l'élément $\nabla\varphi(u)$ est appelé l'opérateur gradient de φ .

La convexité des fonctions Gâteaux-différentiable peut être caractérisée comme suit.

Proposition 1.4.2 Soit $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espace préhilbertien et soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux-différentiable. Les énoncés suivants sont équivalents :

- (i) φ est une fonction convexe ;
- (ii) φ satisfait l'inégalité

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (\nabla\varphi(u), v - u)_X \quad \forall u, v \in X;$$

- (iii) le gradient de φ est un opérateur monotone

$$(\nabla\varphi(u) - \nabla\varphi(v), u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X.$$

Soit $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un espace préhilbertien et soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et Gâteaux-différentiable. Alors φ est semi-continue inférieurement.

Définition 1.4.3 Soit $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ et soit $u \in X$. Le sous-différentiel de φ en u est l'ensemble

$$\partial\varphi(u) = \{f \in X : \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X\}.$$

On note

$$D(\partial\varphi) = \{u \in X \quad : \quad \partial\varphi(u) \neq 0\}.$$

La fonction φ est dite sous-différentiable en $u \in X$ si $u \in D(\partial\varphi)$, et chaque élément $f \in \partial\varphi(u)$ s'appelle sous-gradient de φ en u . La fonction φ est dite sous-différentiable si elle est sous-différentiable en tout point de X , c'est-à-dire si $D(\partial\varphi) = X$.

On peut montrer qu'une fonction $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ sous-différentiable est convexe et semi-continue inférieurement. En outre, pour les fonctions convexes, le lien entre l'opérateur gradient et sous-différentiel est donné par le résultat suivant.

Proposition 1.4.4 *Soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et Gâteaux-différentiable. Alors φ est sous-différentiable et $\partial\varphi(u) = \{\nabla\varphi(u)\}$ pour tout $u \in X$.*

1.5 Triplet de Gelfand

Dans cette section nous rappelons la définition d'un Triplet de Gelfand. Pour cela on va commencer par un rappel sur le théorème de représentation de Riesz-Fréchet

Théorème 1.5.1 *Soit H un espace de Hilbert et soit H' son espace dual. Alors, pour tout $\varphi \in H'$, il existe $f \in H$ unique tel que*

$$(\varphi, v)_{H' \times H} = (f, v)_H, \quad \forall v \in H.$$

On a de plus

$$\|\varphi\|_{H'} = \|f\|_H.$$

Preuve. Pour une démonstration, voir ([12], pages 81 – 82). ■

L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\varphi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H' .

Soit maintenant V un espace de Hilbert réel tel que V soit dense dans H et l'injection $V \subset H$ est continue. On identifie H et H' . Soit V' le dual de V . On peut alors prolonger H dans V' grâce au procédé suivant : Nous utilisons maintenant le théorème de représentation de Riesz pour étant donné $f \in H$, l'application $v \in V \mapsto (f, v)_H$ est une forme linéaire continue sur H et a fortiori sur V ; on la note $Tf \in V'$ de sorte que

$$(Tf, v)_{V' \times V} = (f, v)_H, \quad \forall f \in H, \quad \forall v \in V.$$

On vérifie que $T : H \rightarrow V'$ possède les propriétés suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \|Tf\|_{V'} \leq C \|f\|_H \quad \forall f \in H, \\ (2) T \text{ est injective,} \\ (3) T(H) \text{ est dense dans } V'. \end{array} \right.$$

En général T n'est pas surjective de H sur V' . A l'aide de T on plonge H dans V' et on a le schéma

$$V \subset H \equiv H' \subset V',$$

où les injections canoniques sont continues et denses. Ce triplet est appelé *triplet de Gelfand*. On dit que H est l'espace pivot.

Théorème 1.5.2 Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur hemicontinu et monotone qui satisfait

$$\begin{array}{l} a) (Av, v)_{V' \times V} \geq \omega |v|_V^2 + \lambda, \quad \forall v \in V, \\ b) \|Av\|_{V'} \leq C_1 (|v|_V + 1), \quad \forall v \in V. \end{array} \quad (1.8)$$

Pour des constantes $\omega > 0$, $C_1 > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Etant donnée $u_0 \in H$ et $f \in \mathbb{L}^2(0, T; V')$.

Alors, il existe une fonction unique u qui satisfait

$$\begin{aligned} u &\in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; V'), \\ \dot{u}(t) + Au(t) &= f(t), \quad p.p.t \in [0, T], \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Théorème 1.5.3 Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand, K est un ensemble convexe, fermé non vide de V ; et soit $a(.,.) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un opérateur bilinéaire, continu et symétrique tel que pour certaines constantes $\zeta > 0$ et c_0 ,

$$a(v, v) = c_0 \|v\|_H^2 \geq \zeta \|v\|_V^2, \quad \forall v \in H.$$

Alors, pour chaque $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0, T; H)$; il existe une unique fonction u qui satisfait

$$u \in L^2(0, T; V) \cap W^{1,2}(0, T; V'),$$

et que $u(0) = u_0, u(t) \in K$, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\langle \dot{u}(t), v - u(t) \rangle_{V' \times V} + a(u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_H, \quad \forall v \in K, \quad p.p.t \in [0, T],$$

Théorème 1.5.4 Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(.,.)$ et la norme $\|.\|$. On identifie H et son dual. Soit V un autre espace de Hilbert de norme $\|.\|$. On suppose que

$$V \subset H \subset V'.$$

Soit $T > 0$ fixé, pour presque tout $t \in [0, T]$ on se donne une forme bilinéaire $a(u, v) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés

- i) La fonction $t \mapsto a(t; u, v)$ est mesurable $\forall u, v \in V$.
- ii) $a(t; u, v) \leq M \|u\| \|v\| \quad p.p.t \in [0, T], \quad \forall u, v \in V.$
- iii) $a(t; v, v) > \alpha \|v\|^2 - C \|v\|^2 \quad \forall v \in V \quad p.p.t \in [0, T], \quad \forall v \in V,$

où $\alpha > 0$, M et C sont des constantes, $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0, T; V')$.

Alors il existe une fonction unique u telle que

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H) \text{ et } \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; V'). \quad (1.11)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{du}{dt}(t), v \right) + a(t; u(t), v) = (f(t), v), \text{ p.p } t \in [0, T], \quad \forall v \in V, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (1.12)$$

1.6 Quelques inégalités

Nous présentons dans cette section quelques inégalités élémentaires qui sont utiles dans les deux derniers chapitres de cette thèse. A cet effet, nous employons au-dessous la notation $C([a; b]; \mathbb{R})$ pour l'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle compact $[a; b] \subset \mathbb{R}$.

Lemme 1.6.1 (Inégalité de Gronwall) *Soient $f, g \in C([0, T])$ et supposons qu'il existe $c > 0$ tel que*

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t f(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t g(s) e^{c(t-s)} ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Si g est non décroissante, nous avons que

$$f(t) \leq g(t) e^{ct} \quad \forall t \in [0, T].$$

La démonstration de ce lemme peut être trouver dans [28].

Nous avons également besoin du résultat suivant.

Lemme 1.6.2 (Inégalité de Young) *Soient $a, b \geq 0$ et $1 < p, q < \infty$ deux expo-*

sants conjugués. Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{q^b}{q}.$$

Un cas simple (relativement fréquent) de l'inégalité de Young est l'inégalité avec des exposants 2 :

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

qui donne également l'inégalité de Young avec ε (valide pour tout $\varepsilon > 0$) :

Chapitre 2

Inéquations variationnelles et inéquations d'évolution

Dans ce chapitre, nous passons en revue quelques résultats standards d'existence et d'unicité pour des inéquations variationnelles, Inéquations d'évolution. Ces résultats seront nécessaires dans ce qui suit et pour plus de détail, voir [49], [3]. Dans ce chapitre, X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(., .)$ et la norme associée $\|.\|_X$.

2.1 Inéquations variationnelles

Dans cette partie, nous présentons quelques théorèmes sur la solvabilité des inéquations variationnelles elliptiques et quasi-variationnelles. Nous commençons par une existence de base et résultat d'unicité pour les inéquations variationnelles elliptiques. Ensuite, nous étendons une partie de ces résultats à l'étude des elliptiques les inéquations quasi-variationnelles. Les résultats présentés dans ce chapitre seront étude des problèmes de contact *antiplan statique avec les matériaux élastiques*.

2.1.1 Inéquations variationnelles elliptiques

Soit X un espace de Hilbert réel muni par le produit $(\cdot, \cdot)_X$ et la norme associée $\|\cdot\|_X$ et, soient $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, la fonctionnelle $j : X \rightarrow (-\infty; \infty]$ et, la fonction $f : X \rightarrow (-\infty; \infty]$ et, nous considérons le problème de trouver un élément u tel que

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X. \quad (2.1)$$

Une inéquation de la forme (2.1) s'appelle *inéquation variationnelle elliptique de deuxième espèce*. Nous sommes intéressés par des conditions suffisantes pour *l'existence et l'unicité* d'une solution à l'inéquation variationnelle (2.1). À cette fin, nous formulons les hypothèses suivantes :

$a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme *bilinéaire symétrique* et

(a) il existe $M > 0$ tel que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (2.2)$$

(b) il existe $m > 0$ tel que

$$a(u, u) \geq m \|u\|_X^2 \quad \forall u \in X.$$

$$j : X \rightarrow (-\infty; \infty] \text{ est une fonctionnelle convexe, propre et s.c.i.} \quad (2.3)$$

Notez que selon la **Définition 1.3.3**, les conditions (2.2)(a) et (2.2)(b) montrent que la forme bilinéaire a est continue et X -elliptique, respectivement. Alors, nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 2.1.1 *Soit X un espace de Hilbert et supposons que (2.2) et (2.3) sont satisfaites. Alors, pour tout $f \in X$, l'inéquation variationnelle elliptique (2.1) possède une solution unique $u \in X$. De plus, l'application $f \rightarrow u$ est de Lipschitz.*

Une démonstration du Théorème se trouve par exemple dans ([49] p44)

2.1.2 Inéquations quasi-variationnelles elliptiques

Nous rappelons par la suite quelques résultats sur les inéquations quasi-variationnelles elliptiques, dans lesquelles la fonctionnelle j dépend de la solution u . Pour étudier ce genre des problèmes; nous supposons que l'espace de Hilbert X , une fonction $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ et un élément $f \in X$, nous considérons le problème de trouver un élément u tel que

$$u \in X, \quad a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X. \quad (2.4)$$

Une inéquation de la forme (2.4) est appelée *inéquation quasi-variationnelle elliptique*.

Dans l'étude de (2.4), en plus des hypothèses (2.2) et (2.3), nous considérons les hypothèses suivantes sur la fonction j .

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Pour tout } \eta \in X, \quad j(\eta, \cdot) \text{ est convexe et s.c.i dans } X. \\ b) \text{ Il existe } \alpha \geq 0 \text{ tel que} \\ \quad j(\eta_1, v_2) - j(\eta_1, v_1) + j(\eta_2, v_1) - j(\eta_2, v_2) \leq \alpha \|\eta_1 - \eta_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X \\ \quad \forall \eta_1, \eta_2, v_1, v_2 \in X. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Nous donnons dans ce qui suit un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (2.4).

Théorème 2.1.2 *Soit X un espace de Hilbert et supposons que les hypothèses (2.2), (2.3) et (2.5) sont satisfaites. De plus, supposons que $m < \alpha$ où $m > 0$. Alors, pour tout $f \in X$ l'inéquation quasi-variationnelle (2.5) admet une solution unique.*

2.2 Inéquations d'évolution

2.2.1 Inéquations variationnelles d'évolution avec viscosité

Dans cette section nous allons présenter une description détaillée sur les inéquations variationnelles d'évolution. La différence que l'on doit signaler ici consiste dans la présence de la dérivée de l'inconnue dans la formulation du problème ce qui rajoute aussi une condition initiale. Nous commençons par des résultats de base sur l'existence et l'unicité de la solution et, alors, Nous considérons également les inéquations quasi-variationnelles évolutives et les inéquations variationnelles évolutives dépendantes de l'histoire avec la viscosité pour dont nous prouvons l'existence et l'unicité des résultats. nous supposons que l'espace de Hilbert X est muni par le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et la norme $\|\cdot\|_X$. Soient $a(\cdot, \cdot)_X$ et $b(\cdot, \cdot)_X$ deux formes bilinéaires sur X , $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ et un élément, $f : [0, T] \rightarrow X$. nous considérons le problème de trouver un élément u tel que

$$\begin{aligned} a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + j(v) - j(\dot{u}(t)) \\ \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X \quad \forall v \in X, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$u(0) = u_0. \quad (2.7)$$

Remarquons que (2.6) représente une *inéquation variationnelle d'évolution* car cette inégalité contient la dérivée de l'inconnue u , où le terme $b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t))$ appelé

le *terme de viscosité*. Par conséquent, la condition initiale (2.7) est nécessaire. Dans l'étude du problème de Cauchy (2.6)–(2.7), on suppose que :

$$\begin{aligned}
 & a : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une forme bilinéaire et} \\
 & (a) \text{ il exists } M > 0 \text{ tel que} \\
 & |a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
 & b : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une forme bilinéaire symétrique et} \\
 & (a) \text{ il exists } M' > 0 \text{ tel que} \\
 & |b(u, v)| \leq M' \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X. \\
 & (b) \text{ il exists } m' > 0 \text{ tel que} \\
 & b(u, u) \geq m' \|u\|_X^2 \quad \forall u \in X.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\text{La fonctionnelle } j : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe, propre et s.c.i :} \tag{2.10}$$

$$f \in C(0, T; X); \tag{2.11}$$

$$u_0 \in X. \tag{2.12}$$

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.2.1 *Soit X un espace de Hilbert et supposons que les hypothèses (2.8)–(2.12) sont satisfaites. Alors le problème variationnelle (2.6)–(2.7) admet une solution unique $u \in C^1(0, T; X)$.*

2.2.2 Inéquations quasi-variationnelles d'évolution

Dans cette section, nous considérons les inégalités quasi-variationnelles d'évolution avec viscosité, c'est-à-dire que nous permettons à la fonctionnelle j de dépendre explicitement de la solution u ou sur sa dérivée \dot{u} . Ainsi, on suppose que $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ et on considère le problème suivant :

trouver $u : [0, T] \rightarrow X$ tel que

$$\begin{aligned} a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \\ \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X \quad \forall v \in X, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$u(0) = u_0. \quad (2.14)$$

Alternativement, nous considérons le second problème, où la fonctionnelle $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est dépend uniquement de \dot{u} par

$$\begin{aligned} a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + j(\dot{u}(t), v) - j(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) \\ \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X \quad \forall v \in X, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$u(0) = u_0. \quad (2.16)$$

Dans l'étude de ces inégalités quasi-variationnelles d'évolution, nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 2.2.2 *Soit X un espace de Hilbert et supposons que les hypothèses (2.8)-(2.12) et (2.5) sont satisfaites. Alors :*

- (1) *Il existe une solution unique $u \in C^1(0, T; X)$ du problème (2.13)-(2.14).*
- (2) *Si $m' > \alpha$, Il existe une solution unique $u \in C^1(0, T; X)$ du problème (2.15)-(2.16).*

2.2.3 Inéquations quassi-variationnelles d'évolution dépendantes de l'histoire avec la Viscosité

Passons maintenant à l'étude des inéquations quasi-variationnelles avec la viscosité pour lesquelles la fonctionnelle j dépend de l'intégrale de la solution ou de l'intégrale de sa dérivée. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces de Hilbert et un opérateur

$\mathcal{S} : C(0, T; X) \rightarrow C(0, T; Y)$ et $j : Y \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Nous sommes intéressés à fournir des conditions qui garantissent la solvabilité unique du problème suivant :

trouver $u : [0, T] \rightarrow X$ tel que

$$\begin{aligned} a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + j(\mathcal{S}u(t), v) - j(\mathcal{S}u(t), \dot{u}(t)) \\ \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X \quad \forall v \in X, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$u(0) = u_0. \quad (2.18)$$

Alternativement, nous considérons le second problème, où la fonctionnelle $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est dépend uniquement de \dot{u} par

$$\begin{aligned} a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + j(\mathcal{S}\dot{u}(t), v) - j(\mathcal{S}\dot{u}(t), \dot{u}(t)) \\ \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X \quad \forall v \in X, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$u(0) = u_0. \quad (2.20)$$

Dans l'étude de ces problèmes, on suppose que l'opérateur \mathcal{S} vérifie la condition suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } L_s > 0 \text{ tel que} \\ \| \mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t) \|_Y \leq L_s \int_0^t \| u_1(s) - u_2(s) \|_X ds \\ \forall u_1, u_2 \in C(0, T; X), \quad \forall t \in (0, T). \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Un exemple d'opérateur \mathcal{S} qui satisfait (2.21) dans le cas où $Y = X$ est donné par $\mathcal{S} : C(0, T; X) \rightarrow C(0, T; X)$ tel que

$$\mathcal{S}u(t) = \int_0^t u(s) ds + u_0, \quad \forall u \in C(0, T; X), \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.22)$$

et $u_0 \in X$.

Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 2.2.3 *Supposons que les hypothèses (2.8)-(2.9), (2.11)-(2.12), (2.5), (2.21) et sont vérifiées. Alors*

(1) *Il existe une solution unique $u \in C^1(0, T; X)$ du problème (2.17)-(2.18).*

(2) *Si $m' > \alpha$, Il existe une solution unique $u \in C^1(0, T; X)$ du problème (2.19)-(2.20).*

La démonstration de cette théorème est basée sur un argument de point fixe et sera établie en plusieurs étapes voir ([49] p71).

2.3 Équations différentielles ordinaires dans des espaces abstraits

Le résultat abstrait suivant peut être trouvée dans [9].

Théorème 2.3.1 *Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand et soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur hémicontinu et monotone qui satisfait*

$$(Au, u)_{V' \times V} \geq \omega \|u\|_V^2 + \lambda \quad \forall u \in V, \quad (2.23)$$

$$|Au|_{V'} \leq c(\|u\|_V + 1) \quad \forall u \in V, \quad (2.24)$$

où les constantes $\omega > 0$, $c > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0, T; V')$, il existe une fonction unique u qui satisfait

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; V'),$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \quad p.p. \ t \in (0, T),$$

$$u(0) = u_0.$$

Chapitre 3

Modélisation

Ce chapitre comporte deux sections, dans la première section nous présentons une description générale d'un modèle mathématique qui décrit le contact entre un corps piézoélectrique et un obstacle dit fondation. Un tel genre de processus est rencontré dans l'industrie et la vie quotidienne, Nous précisons à rappeler l'équation de mouvement de Cauchy, à décrire les lois de comportement électro-élastiques, électro-viscoélastique et électro-viscoélastique avec mémoire longue. Par ailleurs, nous précisons les conditions aux limites de contact avec frottement. Ensuite, dans la deuxième section, nous considérons le modèle mathématique d'un processus particulier dit problème antiplan. On peut introduire des états de déformations antiplans dans un solide en le chargeant dans une manière spéciale. Nous commençons par une description détaillée des hypothèses de base et nous particularisons les équations d'équilibre et constitutives dans le contexte antiplan. Finalement, nous présentons une particularisation des conditions de contact et les espaces fonctionnels utilisés dans la suite.

3.1 Modélisation des processus du contact piézo-électrique

Nous présentons dans cette section le cadre physique et les modèles mathématiques associés à l'étude des problèmes de contact impliquant des corps piézoélectrique.

3.1.1 Cadre physique 1

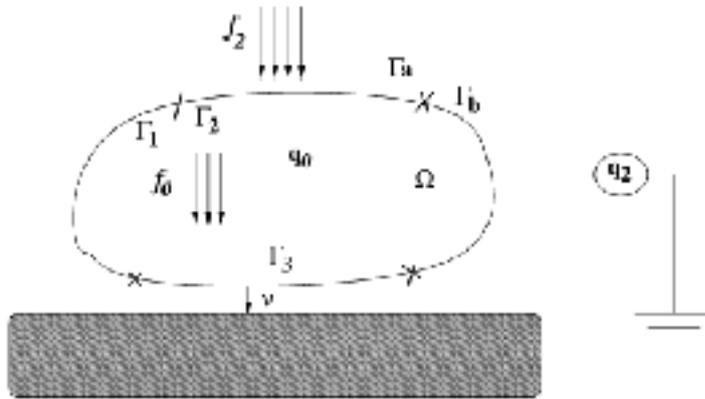


Figure 1

On considère un corps déformable occupant un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, de frontière Γ de Lipschitz, divisée en trois parties disjointes et mesurables Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , d'une part, et une partition de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ en deux parties disjointes et mesurables Γ_a et Γ_b , d'une autre part, telles que $mes(\Gamma_1) > 0$ et $mes(\Gamma_a) > 0$. Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Le corps est encastré sur Γ_1 , alors le champ de déplacement est nul sur cette partie. Des forces surfaciques de densité f_2 agissent sur Γ_2 et des forces volumiques de densité f_0 agissent dans Ω . Nous supposons aussi

que le potentiel électrique est nul sur Γ_a et une charge électrique de densité surfacique q_2 est donnée sur Γ_b . De plus on exerce sur le corps des charges électrique de densité volumique q_0 , on suppose que le corps est en contact frottant avec une fondation isolatrice (ou conductrice) sur la partie Γ_3 . Nous dénotons par S^3 l'espace des tenseurs symétriques de second ordre sur \mathbb{R}^3 ou, de façon équivalente, l'espace des matrices symétriques d'ordre 3. Et “.”, $\|\cdot\|$ représentent le produits scalaires et la norme Euclidienne dans les deux espaces \mathbb{R}^3 et S^3 respectivement ; on a donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_i v_i, \quad \|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{\frac{1}{2}} \text{ pour tout } \mathbf{u} = (u_i), \mathbf{v} = (v_i) \in \mathbb{R}^3, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad \|\boldsymbol{\tau}\| = (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})^{\frac{1}{2}} \text{ pour tout } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}), \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in S^3. \end{aligned}$$

Avec la convention de l'indice muet.

Pour un vecteur \mathbf{v} on désigne par v_ν et \mathbf{v}_τ les composantes *normale* et *tangentielle* sur la frontière, définies par

$$v_\nu = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - v_\nu \boldsymbol{\nu}. \quad (3.1)$$

Nous désignons par $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(x, t)$ le champ des contraintes, par $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ le champ des déplacements et par $\varepsilon(\mathbf{u})$ le champ des déformations infinitésimales. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons par explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \partial\Omega$ et $t \in [0, T]$.

Pour le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ on désigne par σ_ν et $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ la *composante normale* et la *composante* sur la frontière, avec

$$\sigma_\nu = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}. \quad (3.2)$$

En utilisant (3.1) et (3.2), nous obtenons la relation suivante

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = \sigma_\nu\nu_\nu + \sigma_\tau\cdot\nu_\tau, \quad (3.3)$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire. En outre, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation d'une fonction par rapport au temps ; par exemple

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{u}} = \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}.$$

Où $\dot{\mathbf{u}}$ désigne le *champ des vitesses* et $\ddot{\mathbf{u}}$ désigne le *champ des accélérations*. Pour le champ des vitesses $\dot{\mathbf{u}}$, les notations $\dot{\mathbf{u}}_\nu$ et $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ désignent respectivement *la vitesse normale* et *la vitesse tangentielle* à la frontière, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_\nu = \dot{\mathbf{u}}\cdot\nu, \\ \dot{\mathbf{u}}_\tau = \dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}_\nu\nu. \end{cases}$$

Rappelons que le tenseur des déformations linéarisés est donné par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})). \\ \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad 1 \leq i, j \leq 3. \end{cases} \quad (3.4)$$

Le champ électrique est défini par l'égalité

$$\mathbf{E}(\varphi) = -\nabla\varphi = (-\varphi_{,i}). \quad (3.5)$$

Nous précisons par ailleurs que l'indice qui suit une virgule signifie une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante de la variable spatiale.

Nous négligeons le terme d'accélération dans l'équation du mouvement et nous considérons donc un *processus quasistatique* de contact. Ainsi, le champ de contrainte

satisfait l'équation d'équilibre

$$Div \boldsymbol{\sigma} + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.6)$$

où le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$, "Div" représente l'opérateur de divergence pour les tenseurs, $Div \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j})$.

L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ des déplacements électrique $\mathbf{D} = (D_i)$

$$div \mathbf{D} = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.7)$$

où "div" représente l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $div \mathbf{D} = (D_{i,i})$.

Puisque le corps est encastré sur la frontière Γ_1 , le champ des déplacements s'annule

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T], \quad (3.8)$$

la condition aux limites en traction est

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T], \quad (3.9)$$

f_2 étant une donnée du problème.

Maintenant, nous voulons d'écrire les conditions électriques aux bords (sur la frontière), le potentiel électrique s'annule sur Γ_a

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times [0, T]. \quad (3.10)$$

Tandis que sur Γ_b , une charge électrique de densité q_2 est prescrite,

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times [0, T]. \quad (3.11)$$

Finale­ment, afin de compléter le modèle mathématique, il faut préciser la loi de com­por­te­ment du ma­té­riau ainsi que les con­di­tions aux li­mites sur la frontière Γ_3 , c'est-à-dire les con­di­tions de contact. Ceci fera l'objet des deux sections sui­vantes.

3.1.2 Lois de com­por­te­ment

Nous décrivons dans ce para­graphe quelques lois de com­por­te­ment des ma­té­ri­aux *élastiques*, *viscoélastiques*, *viscoélastiques avec mémoire longue*. Par loi de com­por­te­ment nous comprenons dans ce qui suit une relation entre le tenseur des contraintes, le tenseur des déformations infinitésimales $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ d'un côté, et le champ des déplacements électrique \mathbf{D} et le champ électrique $\mathbf{E}(\varphi)$ d'un autre côté.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad (3.12)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}), \quad (3.13)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds, \quad (3.14)$$

où $\mathcal{A} = (a_{ijkl})$ et $\mathcal{B} = (b_{ijkl})$ sont des tenseurs du quatrième ordre, tel que \mathcal{A} représente l'opérateur d'élasticité et \mathcal{B} est l'opérateur de viscosité dans (3.13) et le tenseur des coefficients de relaxation lorsqu'il est utilisé dans (3.14).

L'égalité (3.12) représente une loi constitutive *linéaire élastique* ; nous nous référons à (3.13) comme une loi constitutive *viscoélastique linéaire* et à (3.14) comme une loi constitutive *viscoélastique linéaire à longue mémoire*. Sous forme de composant, les équations constitutives (3.12)–(3.14) se lisent comme suit :

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}),$$

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) + b_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\dot{\mathbf{u}}),$$

$$\sigma_{ij}(t) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t b_{ijkl}(t-s)\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}(s)) ds,$$

nous permettons aux coefficients a_{ijkl} et b_{ijkl} de dépendre de l'emplacement du point dans le corps, respectivement.

Lorsque le matériau est *isotrope*, chaque tenseur est caractérisé par seulement deux coefficients. Ainsi, la loi de comportement d'un matériau *isotrope linéairement élastique* est donné par

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \lambda\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\mathbf{I}, \quad (3.15)$$

où $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ sont les coefficients de Lamé, $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}(\mathbf{u})$ et \mathbf{I} est le tenseur d'unité dans \mathbb{R}^3 . Dans les composants, nous avons

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) + \lambda\varepsilon_{kk}(\mathbf{u})\delta_{ij}, \quad (3.16)$$

où δ_{ij} est le *delta de Kronecker*. La loi de comportement pour un *viscoélastique linéaire* d'un matériau isotrope est donné par

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \lambda\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\mathbf{I} + 2\zeta\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \gamma\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}})\mathbf{I}, \quad (3.17)$$

ou, en composants

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) + \lambda\varepsilon_{kk}(\mathbf{u})\delta_{ij} + 2\zeta\varepsilon_{ij}(\dot{\mathbf{u}}) + \gamma\varepsilon_{kk}(\dot{\mathbf{u}})\delta_{ij}. \quad (3.18)$$

Où $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ sont les coefficients de Lamé, γ et ζ sont les coefficients de viscosité, $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}(\mathbf{u})$ et \mathbf{I} est le tenseur d'unité dans \mathbb{R}^3 .

Enfin, la loi de comportement pour un matériau *linéairement viscoélastique* isotrope à *longue mémoire* est

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \lambda\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\mathbf{I} + 2 \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds + \int_0^t \zeta(t-s) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))) \mathbf{I} ds, \quad (3.19)$$

ou, en composants

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) + \lambda\varepsilon_{kk}(\mathbf{u})\delta_{ij} + 2 \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}(s)) ds + \int_0^t \zeta(t-s) \varepsilon_{kk}(\mathbf{u}) \delta_{ij} ds. \quad (3.20)$$

Ici \mathcal{G} et ζ représentent des *coefficients de relaxation* qui dépendent du temps.

Lois de comportement thermo-électro-viscoélastique

Les matériaux piézoélectriques sont caractérisés par le couplage des propriétés mécaniques et électriques. Ce couplage conduit à l'apparition d'un potentiel électrique lors de l'application des contraintes mécaniques, et inversement, des contraintes mécaniques sont générées lorsqu'un potentiel électrique est appliqué. Un matériau piézoélectrique dont les propriétés mécaniques sont viscoélastiques est appelé matériau électro-viscoélastique. De plus, si l'on considère *l'effet thermique* du matériau lors du contact, on nous arrivons à une généralisation des lois (3.17)-(3.19), qui sont utilisés dans le chapitre 4 et le chapitre 5

Lois de comportement thermo-électro-viscoélastique Pour modéliser les propriétés *thermo-électro-viscoélastique* des matériaux, nous considérons une loi de comportement de la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) + \lambda \text{tr}\varepsilon(\mathbf{u})\mathbf{I} + 2\zeta\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \gamma \text{tr}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}})\mathbf{I} - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi) - \mathbf{M}_c\boldsymbol{\theta}, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{D} = \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}) + \alpha\mathbf{E}(\varphi) - \mathcal{P}\boldsymbol{\theta}. \quad (3.22)$$

Où $\mathcal{E} = (e_{ijk})$ est le tenseur piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul; $\alpha = (\alpha_{ij})$ est le tenseur de *permittivité électrique* à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif et $\mathbf{E}(\varphi) = -\nabla\varphi$ où $-\nabla\varphi = (\varphi_{,i})$ représente le champ électrique. par ailleurs

$\mathcal{E}^* = (e_{ijk}^*)$ dénote le transposé du tenseur \mathcal{E} , tel que

$$\mathcal{E}\sigma \cdot \mathbf{v} = \sigma \cdot \mathcal{E}^* \mathbf{v} \quad \forall \sigma \in \mathbf{S}^d, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d.$$

On plus, θ est le champ de température et $M_c := (m_{ij})$, $\mathcal{P}(p_i)$ représente le tenseur de dilatation thermique et tenseur pyroélectrique, respectivement.

Lois de comportement thermo-électro-viscoélastique à mémoire longue Pour modéliser les propriétés *thermo-électro-viscoélastique à mémoire longue* des matériaux, nous considérons une loi de comportement de la forme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \lambda \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\mathbf{I} + 2 \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)) ds \\ &\quad + \int_0^t \zeta(t-s) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))) \mathbf{I} ds - \mathcal{E}^* \mathbf{E}(\varphi) - \mathbf{M}_c \boldsymbol{\theta}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \alpha \mathbf{E}(\varphi) - \mathcal{P}\boldsymbol{\theta}. \quad (3.24)$$

La température θ est définie par une équation différentielle, qui représente la conservation de l'énergie comme suit

$$\dot{\theta} - \text{div}(K\nabla\theta) = -M_c \nabla \dot{u} + h(t),$$

où $h(t)$ est la quantité de chaleur dans le volume durant l'intervalle de temps où $K = (k_{ij})$ représente le tenseur de conductivité thermique, $\text{div}(K\nabla\theta) = (k_{ij}\theta_{,i})$ représente la densité du volume de la source température.

3.1.3 Conditions de contact

Pour compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps, il faut préciser les conditions aux limites sur Γ_3 , c'est l'objet des conditions de contact et des lois de frottement que nous allons d'écrire dans ce que suit.

Condition de contact bilatéral

Le contact se fait d'une façon bilatérale c'est-à-dire le contact est maintenu pendant le mouvement et il n'y a pas de séparation entre le corps et l'obstacle. La composante normale du champ des déplacements s'annule sur la surface de contact et donc

$$u_\nu = 0. \quad (3.25)$$

Condition de contact unilatéral

Cette condition modélise le contact avec une fondation rigide. Puisque la fondation est considérée rigide, elle ne subira donc pas de déformation. Le corps ne pourra pas donc y pénétrer. Cette propriété se traduit par la relation mathématique

$$u_\nu \leq 0. \quad (3.26)$$

Aux points de Γ_3 tel que $u_\nu < 0$ le corps déformable quitte la base rigide. Les contraintes normales y sont alors nulles. Par conséquent nous obtenons

$$u_\nu < 0 \implies \sigma_\nu = 0. \quad (3.27)$$

Aux points de Γ_3 tel que $u_\nu = 0$ le contact est maintenu et la base rigide exerce une réaction normale orientée vers Ω et donc nous pouvons écrire

$$u_\nu = 0 \implies \sigma_\nu \leq 0. \quad (3.28)$$

Les conditions de contacts décrites par (3.26), (3.27) et (3.28) s'appellent "conditions de contact unilatéral" ou bien "conditions de contact de Signorini". Elles peuvent

être regroupées sous la forme :

$$\begin{cases} u_\nu \leq 0, \\ \sigma_\nu \leq 0, \\ \sigma_\nu u_\nu = 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

Conditions de contact avec compliance normale

C'est le cas où la fondation est supposée déformable dans ce cas la pénétration est possible et la contrainte normale σ_ν satisfait :

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g),$$

où u_ν est le déplacement normal, g représente l'interstice initial entre le corps et la fondation et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale. Cette relation est dite condition *de compliance normale* et signifie que la fondation exerce une réaction suivant la normale sur le corps en fonction de sa pénétration $u_\nu - g$ qui s'annule lorsqu'il y a séparation (c'est-à-dire $u_\nu < g$).

Dans le cas où l'interstice entre le corps et la fondation est nul on prend $g = 0$.

Comme exemple de fonction de compliance normale p_ν nous pouvons considérer

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+,$$

ou, plus généralement

$$p_\nu(r) = c_\nu (r_+)^m,$$

où $c_\nu > 0$ est le coefficient de raideur de la surface, $m > 0$ est l'exposant de la compliance normale et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est donné par

$$p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha, \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha, \end{cases}$$

où α est un coefficient positif lié à l'usure et la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact de compliance normale signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, c'est-à-dire quand elle dépasse α , la fondation se désintègre et n'offre aucune résistance à la pénétration.

Conditions de contact avec réponse normale instantanée

Une condition de contact avec *réponse normale instantanée* a été utilisée principalement pour d'écrire un contact lubrifié. Cette condition suppose que la contrainte normale sur la surface de contact est liée à la vitesse normale, c'est-à-dire

$$-\sigma_\nu = p_\nu(\dot{u}_\nu),$$

où, p_ν est une fonction donnée qui s'annule lorsque l'argument est négatif.

3.1.4 Lois de frottement

Nous décrivons dans cette section les conditions dans la direction tangentielle appelées généralement conditions de frottement ou lois de frottement.

Contact sans frottement

Nous supposons qu'on a un glissement parfait, ou sans frottement. Ceci se traduit par la relation

$$\sigma_\tau = 0. \tag{3.30}$$

Loi de coulomb

Dans le cas où la force de frottement σ_τ ne s'annule pas sur la surface de contact, alors le contact est *avec frottement*. Le contact en frottement est souvent modélisé avec

la *loi de Coulomb* ; dans cette loi, la traction tangentielle σ_τ peut atteindre la borne g qui est appelée *seuil de frottement*.

On a

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq g, \\ \sigma_\tau = -g \frac{\dot{u}_\tau}{\|\dot{u}_\tau\|} \quad \text{si } \dot{u}_\tau \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \end{cases} \quad (3.31)$$

Ici \dot{u}_τ est la *vitesse tangentielle relative*. Nous notons que la *loi de Coulomb* (3.31) est caractérisée par l'existence d'une zone d'adhérence et de glissement sur la région frontière de contact à chaque moment $t \in [0, T]$. Il suit de (3.31) que, lorsque x est un point de la frontière Γ_3 et l'inégalité $\|\sigma_\tau(x, t)\| < g(x)$ est vérifiée, alors $\dot{u}_\tau(x, t) = 0$ et le point matériel x se trouve dans la zone d'adhérence. Maintenant si $\|\sigma_\tau(x, t)\| = g(x)$ alors le point x se trouve dans la zone de glissement. Nous concluons que la loi de frottement de Coulomb (3.31) modélise des phénomènes où le glissement se produit seulement quand la force de frottement atteint une valeur critique.

Version de la loi de Coulomb

Dans certaines applications, particulièrement où le frottement est très large, la fonction g dans (3.31) ne dépend pas des variables du processus et se comporte comme une fonction donnée. En considérant

$$g = g(x), \quad (3.32)$$

dans (3.31) qui mène à la *loi de frottement de Tresca* ; ceci simplifie considérablement l'analyse des problèmes de contact.

Souvent et particulièrement en littérature technologique, le *seuil de frottement* g est choisi comme suit

$$g = g(\sigma_\nu) = \bar{\mu} |\sigma_\nu|, \quad (3.33)$$

$\bar{\mu} \geq 0$ étant le coefficient de frottement. Le choix (3.33) dans (3.31) mène vers la version classique de la loi de frottement de Coulomb. Récemment, les modèles mathématiques pour le contact avec frottement ont employé un coefficient de frottement variable et la dépendance du coefficient à l'égard des paramètres du processus a été incorporée aux modèles. Par exemple, le choix

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}(\|u_\tau\|). \quad (3.34)$$

A été considéré dans plusieurs publications en géophysique pour modéliser le mouvement des plaques tectoniques voir [38], [31]; souvent le choix

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}(\|\dot{u}_\tau\|), \quad (3.35)$$

a été considéré par plusieurs auteurs, voir pour plus de détails [29].

Une version de la dépendance (3.34) et (3.35) peut être obtenue en supposant que le coefficient de frottement dépend *du glissement total* ou *du taux de glissement total* de la surface, c'est-à-dire :

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}(\mathcal{S}u_\tau(t)). \quad (3.36)$$

Ou

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}(\mathcal{S}\dot{u}_\tau(t)). \quad (3.37)$$

Ici

$$\mathcal{S}w(t) = \int_0^t \|w_\tau(s)\| ds. \quad (3.38)$$

Et les fonctions $\mathcal{S}u_\tau(x, t)$ et $\mathcal{S}\dot{u}_\tau(x, t)$ représentent le *glissement total* et le *taux de glissement total* au point x sur Γ_3 sur la période de temps $[0, T]$, respectivement.

Nous tenons compte de la dépendance de (3.34) ou (3.35) en (3.33) pour que le seuil de frottement g satisfait à :

$$g = g(\|u_\tau\|). \quad (3.39)$$

Ou

$$g = g(\|\dot{u}_\tau\|). \quad (3.40)$$

Les deux égalités ci-dessus montrent que la borne de frottement g dépend *du glissement* u_τ ou *vitesse de glissement* \dot{u}_τ . Pour cette raison, la loi de friction (3.31) associée à (3.39) sera appelée une *loi de frottement* dépendant *du glissement* et la même loi de frottement (3.31) associée à (3.40) sera appelée une *loi de frottement* dépendant *du taux de glissement*.

Un argument similaire basé sur la dépendance (3.36) ou (3.37) montre que il faut étendre la *loi de frottement* de *Tresca* en considérant le cas

$$g = g(\mathcal{S}u_\tau(t)). \quad (3.41)$$

Ou

$$g = g(\mathcal{S}\dot{u}_\tau(t)). \quad (3.42)$$

La loi de frottement (3.31) associée à (3.41) sera appelée loi de frottement dépendant de *glissement total* et la même loi de frottement (3.31) associée à (3.42) sera appelée une loi de frottement dépendante du *taux de glissement total*.

3.2 Modélisation des problèmes antiplans

3.2.1 Cadre physique 2

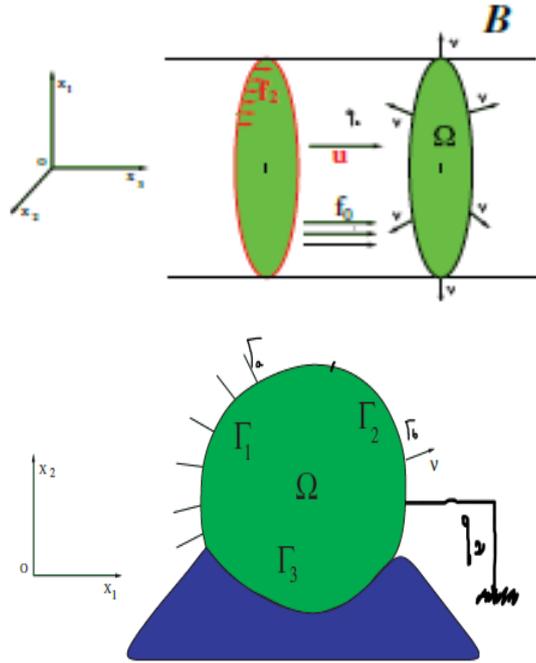


figure 2

Nous considérons un corps piézoélectrique \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 , rapporté dans le repaire orthogonal cartésien $Ox_1x_2x_3$, situé dans une configuration d'origine fixe et non déformée. Nous admettons que les génératrices de ce cylindre \mathcal{B} sont parallèles à l'axe Ox_3 . Sa coupe transversale est un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$; repéré dans le plan Ox_1x_2 . Le corps *cylindrique* est supposé suffisamment long afin de négliger les effets dans la direction axiale.

Nous pouvons alors écrire que $\mathcal{B} = \Omega \times [-\infty, +\infty[$. Notons $\partial\Omega = \Gamma$ la frontière du domaine Ω , divisée en trois parties disjointes et mesurables Γ_1, Γ_2 , et Γ_3 avec $mes \Gamma_1 > 0$. Le cylindre est bloqué sur cette partie $\Gamma_1 \times [-\infty, +\infty[$, subit à la fois des forces volumiques \mathbf{f}_0 dans \mathcal{B} et des forces surfaciques \mathbf{f}_2 sur $\Gamma_2 \times [-\infty, +\infty[$ et est en

contact avec une fondation tout au long de la partie $\Gamma_3 \times [-\infty, +\infty[$. Nous supposons aussi qu'une partition $\Gamma_a \cup \Gamma_b$ de $\partial\Omega$ est donnée et celle-ci est associée aux conditions électriques. Le potentiel électrique s'annule sur la partie $\Gamma_a \times [-\infty, +\infty[$ de la frontière et des charges électriques de densité surfaciques q_2 agissant sur $\Gamma_b \times [-\infty, +\infty[$. De plus on exerce sur le corps des charges électrique de densité volumique q_0 .

Nous supposons que les forces appliquées au temps sont de la forme

$$\mathbf{f}_0 = (0, 0, f_0) \quad \text{avec} \quad f_0 = f_0(x_1, x_2, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.43)$$

$$\mathbf{f}_2 = (0, 0, f_2) \quad \text{avec} \quad f_2 = f_2(x_1, x_2, t) : \Gamma_2 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.44)$$

$$q_0 = q_0(x_1, x_2, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.45)$$

$$q_2 = q_2(x_1, x_2, t) : \Gamma_b \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.46)$$

Ensuite, nous supposons que les deux forces \mathbf{f}_0 et \mathbf{f}_2 définies par les relations (3.43) et (3.44) et les charges q_0 et q_2 définies par les formules (3.45) et (3.46) engendrent une déformation sur le *cylindre piézoélectrique* avec un champ de *déplacement* \mathbf{u} et à un champ de *potentiel électrique* φ tels que

$$\mathbf{u} = (0, 0, u) \quad \text{avec} \quad u = u(x_1, x_2, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.47)$$

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.48)$$

Ce type de déformation, associé à un champ de déplacement de la forme (3.47), est appelé un *cisaillement antiplan*, voir par exemple [30] pour plus de détails.

En utilisant (3.4) et (3.47) il résulte que dans le cas antiplan, le tenseur des déformations $\varepsilon(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}))$ peut se mettre sous la forme

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}u_{,1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}u_{,2} \\ \frac{1}{2}u_{,1} & \frac{1}{2}u_{,2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

et noté que $tr(\varepsilon(\mathbf{u})) = \varepsilon_{kk}(\mathbf{u}) = 0$.

Par ailleurs la définition (3.5) du champ électrique φ dans le cas antiplan

$$\nabla\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{,1} \\ \varphi_{,2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

On suppose que $\mathcal{E} : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ d'ordre trois défini par

$$\mathcal{E}\varepsilon = \begin{pmatrix} e(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{31}) \\ e(\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32}) \\ e\varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad \forall \varepsilon = (\varepsilon_{ij}) \in S^3. \quad (3.51)$$

Où e est le coefficient piézoélectrique. Souvent, nous supposons que e et dépendent de la variable spatiale x_1, x_2 , et ne dépendent pas de la variable spatiale x_3 . De plus $\mathcal{E}\varepsilon.v = \varepsilon.\mathcal{E}^*v$ pour tout $\varepsilon \in S^3, v \in \mathbb{R}^3$, il suit que de (3.51) que

$$\mathcal{E}^*v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ev_1 \\ 0 & 0 & ev_2 \\ ev_1 & ev_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall v \in \mathbb{R}^3. \quad (3.52)$$

Soit $\sigma = (\sigma_{ij})$ le champ de contraintes et rappelons que dans le quasistatique processus il satisfait l'équation d'équilibre (3.6). Puisque $\text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j})$, il découle de (3.43) que

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = 0 \\ \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} + f_0 = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \mathcal{B} \times [0, T]. \quad (3.53)$$

L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre (3.7), où

$\operatorname{div} D = (\mathbf{D}_{i,i})$, il découle de (3.45) que

$$\mathbf{D}_{1,1} + \mathbf{D}_{2,2} + \mathbf{D}_{3,3} - q_0 = 0 \text{ dans } \mathcal{B} \times [0, T]. \quad (3.54)$$

3.2.2 Modélisation du problème *thermo-électro-viscoélastique*

Supposons que le comportement du matériau du cylindre soit modélisé par une loi de comportement *thermo-électro-viscoélastique* (3.21)-(3.22), qui utilisé dans le Chapitre 4, dans laquelle $\zeta(x_1, x_2)$ et $\mu(x_1, x_2)$. θ est le champ de température et $M_c := (m_{ij})$, $\mathcal{P} = (p_i)$ représente le tenseur de dilatation thermique et le tenseur pyro-électrique respectivement, et sont donnés par

$$M_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathcal{M}_{c_1} \\ 0 & 0 & \mathcal{M}_{c_2} \\ \mathcal{M}_{c_1} & \mathcal{M}_{c_2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.55)$$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

Nous supposons que $\mathcal{M}_{c_i}(x_1, x_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, and $p_i(x_1, x_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Ensuite, en utilisant des arguments similaires à ceux ci-dessus, il s'ensuit que le tenseur des contraintes donné par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \zeta \dot{u}_{,1} + \mu u_{,1} + e\varphi_{,1} - \theta \mathcal{M}_{c_1} \\ 0 & 0 & \zeta \dot{u}_{,2} + \mu u_{,2} + e\varphi_{,2} - \theta \mathcal{M}_{c_2} \\ \zeta \dot{u}_{,1} + \mu u_{,1} + e\varphi_{,1} - \theta \mathcal{M}_{c_1} & \zeta \dot{u}_{,2} + \mu u_{,2} + e\varphi_{,2} - \theta \mathcal{M}_{c_2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

Il résulte de (3.57) que les deux premières équations de (3.53) sont satisfaites à l'iden-

tique ; de plus, la dernière équation de (3.53) devient

$$\operatorname{div}(\zeta \nabla \dot{u} + \mu \nabla u) + \operatorname{div}(e \nabla \varphi) - \operatorname{div}(\theta \mathcal{M}_c) + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.58)$$

avec

$$\mathcal{M}_c = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{c_1} \\ \mathcal{M}_{c_2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous remplaçons maintenant (3.56), (3.51), (3.50) et (3.49) dans (3.22) pour obtenir le déplacement électrique

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} eu_{,1} - \alpha \varphi_{,1} - p_1 \theta \\ eu_{,2} - \alpha \varphi_{,2} - p_2 \theta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

Nous combinons (3.59) et (3.54) pour trouve l'équation électrique s'écrite sous la forme

$$\operatorname{div}(e \nabla u - \alpha \nabla \varphi) - \operatorname{div}(\theta \mathcal{P}) = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]. \quad (3.60)$$

Dans ce qui suit, nous utilisons les notations :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} &= \tau_{1,1} + \tau_{2,2} \quad \text{pour } \boldsymbol{\tau} = (\tau_1(x_1, x_2, t), \tau_2(x_1, x_2, t)), \\ \nabla v &= (v_{,1}, v_{,2}), \quad \partial_\nu v = v_{,1} \nu_1 + v_{,2} \nu_2 \quad \text{pour } v = v(x_1, x_2, t). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Maintenant, nous voulons d'écrire les conditions aux bords (sur la frontière). Les déplacements étant bloqués sur la frontière $\Gamma_1 \times]-\infty, +\infty]$ et le potentiel électrique devient nul sur $\Gamma_a \times]-\infty, +\infty]$; alors, (3.47) et (3.48) implique que :

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T], \quad (3.62)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times [0, T]. \quad (3.63)$$

Soit $\boldsymbol{\nu}$ désigne la normale unitaire sur $\Gamma \times]-\infty, +\infty]$. Nous avons

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, 0) \quad \text{avec} \quad \nu_i = \nu_i(x_1, x_2) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2. \quad (3.64)$$

Pour le vecteur \boldsymbol{v} on désigne par v_ν et \boldsymbol{v}_τ les composantes normale et tangentielle sur la frontière, définit par :

$$v_\nu = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{v}_\tau = \boldsymbol{v} - v_\nu \boldsymbol{\nu}. \quad (3.65)$$

Respectivement. Dans (3.65) et dans le reste de ce chapitre on note par “ \cdot ” le produit scalaire sur l’espace \mathbb{R}_3 ($d = 2, 3$). De plus, pour le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ on désigne par σ_ν et $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ la composante normale et la composante sur la frontière, avec

$$\sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}. \quad (3.66)$$

Des relations (3.59), (3.57), et (3.64) on déduit que le vecteur des contraintes de Cauchy et la composante normale du champ des déplacements sont donnés par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} &= (0, 0, \zeta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \boldsymbol{\nu}), \\ \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} &= e \partial_\nu u - \alpha \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{P} \cdot \boldsymbol{\nu}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

En tenant compte des relations (3.44), (3.46), et (3.67), la condition de traction sur $\Gamma_2 \times]-\infty, +\infty]$ et la condition électrique sur $\Gamma_b \times]-\infty, +\infty]$ sont :

$$\zeta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \boldsymbol{\nu} = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T], \quad (3.68)$$

$$e \partial_\nu u - \alpha \partial_\nu \varphi = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times [0, T]. \quad (3.69)$$

Maintenant, nous décrivons la condition de contact frottant et la condition électrique sur la partie $\Gamma_3 \times]-\infty, +\infty]$. Premièrement, de l’équation (3.47) et (3.64) on déduit que le déplacement normal est nul, $u_\nu = 0$, ce qui montre que le contact est *bilatéral*.

Utilisons les formules (3.47) et (3.64)-(3.66), on déduit que :

$$\mathbf{u}_\tau = (0, 0, u), \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = (0, 0, \sigma_\nu), \quad (3.70)$$

où

$$\sigma_\nu = \zeta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_{c,\nu}.$$

On suppose que le frottement est invariant le long de l'axe x_3 et de plus, il est modélisé par la loi de frottement de Tresca sur Γ_3 :

$$\begin{cases} |\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)| \leq g \left(\int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_\tau(s)| ds \right), \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)| < g \left(\int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_\tau(s)| ds \right) \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) = 0, \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)| = g \left(\int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_\tau(s)| ds \right) \Rightarrow \exists \beta \geq 0, \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\beta \dot{\mathbf{u}}_\tau. \end{cases} \quad (3.71)$$

Ici $g : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée, liée au frottement, et $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ représente la vitesse tangentielle sur la frontière de contact. C'est une version de la loi de frottement de Tresca où la fonction g est supposée dépendre du glissement accumulé de la surface. Dans (3.71) l'inégalité stricte est valable dans la zone d'adhérence et l'égalité dans la zone de glissement.

Utilisons la relation (3.70), il suit que la loi de frottement (3.71) implique que :

$$\begin{cases} |\zeta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_{c,\nu}| \leq g \left(\int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_\tau(s)| ds \right), \\ |\zeta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_{c,\nu}| < g \left(\int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_\tau(s)| ds \right) \Rightarrow \dot{u}(t) = 0, \\ |\zeta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_{c,\nu}| = g \left(\int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_\tau(s)| ds \right) \Rightarrow \exists \beta \geq 0, \\ \text{tel que } \zeta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_{c,\nu} = -\beta \dot{u}. \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (3.72)$$

Ensuite, puisque la fondation est électriquement conductrice et que le contact est bilatéral, nous supposons que la composante normale du champ de déplacement électrique ou la charge libre est proportionnelle à la différence entre le potentiel sur la fondation

et la surface du corps. Ainsi,

$$\mathbf{D}.\boldsymbol{\nu} = k(\varphi - \varphi_F) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T],$$

où φ_F représente le potentiel électrique de la fondation et k est le coefficient de conductivité électrique. Nous utilisons (3.67) et l'égalité précédente pour obtenir

$$e\partial_\nu u - \alpha\partial_\nu \varphi - \theta\mathcal{P}.\boldsymbol{\nu} = k(\varphi - \varphi_F) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (3.73)$$

Il ne reste plus qu'à compléter ces équations en donnant le déplacement initial et la température initiale

$$u(0) = u_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.74)$$

où u_0, θ_0 sont des fonctions donnée sur Ω .

Nous recueillons les équations et les conditions ci-dessus pour obtenir la formulation classique du problème antiplan pour les matériaux *thermo-électro-viscoélastiques*, en contact frottant avec une fondation.

Problème \mathcal{P} : Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ de température $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\zeta \nabla \dot{u} + \mu \nabla u) + \operatorname{div}(e \nabla \varphi) - \operatorname{div}(\theta \mathcal{M}_c) + f_0 &= 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ \operatorname{div}(e \nabla u - \alpha \nabla \varphi) - \operatorname{div}(\theta \mathcal{P}) &= q_0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ \dot{\theta} - \operatorname{div}(K \nabla \theta) &= -\mathcal{M}_c \nabla \dot{u} + h(t) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T], \\ \zeta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \nu &= f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T], \\ \left\{ \begin{array}{l} |\zeta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \nu| \leq g \left(\int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_\tau(s)| ds \right), \\ |\zeta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \nu| < g \left(\int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_\tau(s)| ds \right) \Rightarrow \dot{u}(t) = 0, \\ |\zeta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \nu| = g \left(\int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_\tau(s)| ds \right) \Rightarrow \exists \beta \geq 0, \\ \text{tel que } \zeta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \nu = -\beta \dot{u}. \end{array} \right. & \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \\ \theta &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times [0, T], \\ \varphi &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times [0, T], \\ e \partial_\nu u - \alpha \partial_\nu \varphi &= q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times [0, T], \\ e \partial_\nu u - \alpha \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{P} \cdot \nu &= k(\varphi - \varphi_F) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \\ -k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} n_i &= k_e(\theta - \theta_R) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \\ u(0) &= u_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

3.2.3 Modélisation du problème thermo-électro-viscoélastique à mémoire longue

Considérons maintenant le cas des matériaux *thermo-électro-viscoélastique à mémoire longue* (3.23)-(3.24) qui utilisé dans le Chapitre 5 où $\mu = \mu(x_1, x_2)$ et $\mathcal{G} = \mathcal{G}(x_1, x_2, t)$; alors, il s'ensuit que

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.75)$$

où les composantes non nulles σ_{ij} à l'instant t sont données par

$$\sigma_{13}(t) = \sigma_{31}(t) = \mu u_{,1}(t) + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) u_{,1}(s) ds + e\varphi_{,1} - \theta \mathcal{M}_{c_1}, \quad (3.76)$$

$$\sigma_{23}(t) = \sigma_{32}(t) = \mu u_{,2}(t) + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) u_{,2}(s) ds + e\varphi_{,2} - \theta \mathcal{M}_{c_2}. \quad (3.77)$$

De plus, l'équation d'équilibre se réduit à l'équation scalaire.

$$\operatorname{div}(\mu \nabla u) + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \operatorname{div}(\nabla u(s)) ds + \operatorname{div}(e \nabla \varphi) - \operatorname{div}(\theta \mathcal{M}_c) + f_0(t) = 0 \quad \text{in } \Omega \times [0, T]. \quad (3.78)$$

Des relations (3.59), (3.75), et (3.64) on déduit que le vecteur des contrainte de Cauchy et la composante normale du champ des déplacements sont donnés par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} &= (0, 0, \mu \partial_\nu u + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \partial_\nu u(s) ds + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \boldsymbol{\nu}), \\ \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} &= e \partial_\nu u - \alpha \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{P} \cdot \boldsymbol{\nu}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

En tenant compte des relations (3.44), (3.46) et (3.79), la condition de traction sur $\Gamma_2 \times]-\infty, +\infty]$ et la condition électrique sur $\Gamma_b \times]-\infty, +\infty]$ sont :

$$\mu \partial_\nu u + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \partial_\nu u(s) ds + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \nu = f_2 \text{ on } \Gamma_2 \times]-\infty, +\infty], \quad (3.80)$$

$$e \partial_\nu u - \alpha \partial_\nu \varphi = q_2 \text{ on } \Gamma_b \times]-\infty, +\infty]. \quad (3.81)$$

Maintenant, nous décrivons la condition de contact frottant et la condition électrique sur la partie $\Gamma_3 \times]-\infty, +\infty]$. Premièrement, de l'équation (3.47) et (3.64) on déduit que le déplacement normale est nul, $u_\nu = 0$, ce qui montre que le contact est bilatéral. Utilisons les formules (3.47) and (3.64)-(3.66), on déduit que :

$$\mathbf{u}_\tau = (0, 0, u), \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = (0, 0, \sigma_\nu), \quad (3.82)$$

où

$$\sigma_\nu = \mu \partial_\nu u + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \partial_\nu u(s) ds + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \nu.$$

On suppose que le frottement est invariant le long de l'axe x_3 et de plus, il est modélisé la loi de frottement de Tresca sur Γ_3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)| \leq g \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)| < g \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) = 0, \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)| = g \Rightarrow \exists \beta \geq 0, \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\beta \dot{\mathbf{u}}_\tau \end{array} \right. \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (3.83)$$

Ici $g : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée. Utilisons la relation (3.82), il suit que la loi de frottement (3.83) implique que :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\mu \partial_\nu u + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \partial_\nu u(s) ds + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \nu| \leq g, \\ |\mu \partial_\nu u + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \partial_\nu u(s) ds + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \nu| < g \Rightarrow \dot{u}(t) = 0, \\ |\mu \partial_\nu u + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \partial_\nu u(s) ds + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \nu| = g \Rightarrow \exists \beta \geq 0, \\ \text{tel que } \mu \partial_\nu u + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \partial_\nu u(s) ds + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \nu = -\beta \dot{u}. \end{array} \right. \quad \text{on } \Gamma_3 \times [0, T].$$

(3.84)

Nous recueillons les équations et les conditions ci-dessus pour obtenir la formulation classique du problème antiplan pour les matériaux thermo-électro-viscoélastiques à mémoire à long terme, en contact frottant avec une fondation.

Problème \mathcal{P} : Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ de température $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\operatorname{div}(\mu \nabla u) + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \operatorname{div}(\nabla u(s)) ds + \operatorname{div}(e \nabla \varphi) - \operatorname{div}(\theta \mathcal{M}_c) + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T],$$

$$\operatorname{div}(e \nabla u - \alpha \nabla \varphi) - \operatorname{div}(\theta \mathcal{P}) = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T],$$

$$\dot{\theta} - \operatorname{div}(K \nabla \theta) = -\mathcal{M}_c \nabla \dot{u} + h(t) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T],$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T],$$

$$\mu \partial_\nu u + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \partial_\nu u(s) ds + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T],$$

$$\begin{cases}
 |\mu \partial_\nu u + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \partial_\nu u(s) ds + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_{c.\nu}| \leq g \\
 |\mu \partial_\nu u + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \partial_\nu u(s) ds + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_{c.\nu}| < g \Rightarrow \dot{u} = 0 \\
 |\mu \partial_\nu u + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \partial_\nu u(s) ds + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_{c.\nu}| = g \Rightarrow \exists \beta \geq 0 \\
 \text{tel que } \mu \partial_\nu u + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \partial_\nu u(s) ds + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_{c.\nu} = -\beta \dot{u}
 \end{cases}
 \quad \text{dans } \Gamma_3 \times [0, T],$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times [0, T],$$

$$e \partial_\nu u - \alpha \partial_\nu \varphi = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times [0, T],$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times [0, T].$$

$$e \partial_\nu u - \alpha \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{P}.\nu = k(\varphi - \varphi_F) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T],$$

$$-k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} n_i = k_e(\theta - \theta_R) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T],$$

$$u(0) = u_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega.$$

3.2.4 Les espaces fonctionnelles pour les problèmes antiplans

Pour étudier les problèmes proposés Nous allons introduire les espaces suivants :

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}, \quad W = \{\psi \in H^1(\Omega) \mid \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_a\},$$

et

$$E = \{\eta \in H^1(\Omega) \mid \eta = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}.$$

Il est bien connu que V , W et E sont des espaces réels de Hilbert muni du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
 (u, v)_V &= (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)^2} \quad \forall u, v \in V, \quad (\varphi, \psi)_W = (\nabla \varphi, \nabla \psi)_{L^2(\Omega)^2} \quad \forall \varphi, \psi \in W, \\
 (\eta, \theta)_E &= (\nabla \eta, \nabla \theta)_{L^2(\Omega)^2} \quad \forall \eta, \theta \in E.
 \end{aligned}$$

De plus, la norme associée est de la forme :

$$\begin{aligned}
\|v\|_V &= \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^2} \quad \forall v \in V, \\
\|\psi\|_W &= \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)^2} \quad \forall \psi \in W, \\
\|\eta\|_E &= \|\nabla \eta\|_{L^2(\Omega)^2} \quad \forall \eta \in E,
\end{aligned} \tag{3.85}$$

qui sont toujours équivalentes sur V , W et E , respectivement, avec la norme usuelle $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Par le théorème de trace de Sobolev on peut déduire qu'il existe trois constantes positives $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $c_3 > 0$ telles que :

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq c_1 \|v\|_V \quad \forall v \in V, \quad \|\psi\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c_2 \|\psi\|_W \quad \forall \psi \in W, \\
\|\eta\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq c_3 \|\eta\|_E \quad \forall \eta \in E.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Si $(X, \|\cdot\|_X)$ represents l'espace réel de Banach où $X = V \times W \times E$, souvent, on note par $C([0, T]; X)$ l'espace des fonctions continues et les fonctions différentiables continues sur l'intervalle $[0, T]$ et à valeurs dans l'espace produit X , avec la norme :

$$\|x\|_{C([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|_X,$$

et on utilise les notations standard pour l'espace de Lebesgue $L^2(0, T; X)$ comme dans l'espace de Sobolev $W^{1,2}(0, T; X)$. En particulier, et par la suite, on peut déduire que la norme sur l'espace de $L^2(0, T; X)$ est donnée par la relation :

$$\|u\|_{L^2(0, T; X)}^2 = \int_0^T \|u(t)\|_X^2 dt,$$

et la norme sur l'espace $W^{1,2}(0, T; X)$ est donnée par la formule :

$$\|u\|_{W^{1,2}(0, T; X)}^2 = \int_0^T \|u(t)\|_X^2 dt + \int_0^T \|\dot{u}(t)\|_X^2 dt.$$

Enfin, nous supprimons l'argument X où $X = \mathbb{R}$; ainsi, par exemple on utilise la notation $W^{1,2}(0, T)$ pour l'espace $W^{1,2}(0, T; \mathbb{R})$ et la notation $\| \cdot \|_{W^{1,2}(0, T)}$ pour la norme $\| \cdot \|_{W^{1,2}(0, T; \mathbb{R})}$.

Nous terminons cette section avec une *formule de Green* qui sera utilisée dans la deuxième partie afin de dériver des formulations variationnelles de problèmes de contact antiplan. A cette fin, nous rappelons (3.61) et nous notons que, avec la notation faite là, les égalités ci-dessous tiennent :

$$\tau \cdot \nu = \tau_1 \nu_1 + \tau_2 \nu_2, \quad \tau \cdot \nabla v = \tau_1 \nu_{,1} + \tau_2 \nu_{,2}. \quad (3.87)$$

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.2.1 *Soit $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in H^1(\Omega)^2$. alors*

$$\int_{\Omega} \tau \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \tau \cdot v \, dx = \int_{\Gamma} \tau \cdot \nu \, v \, da \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (3.88)$$

Deuxième partie

Analyse des modèles

Chapitre 4

Analyse d'un problème antiplan thermo-electro-viscoélastique avec frottement dépendant du taux de glissement total.

Ce chapitre, est consacré à l'étude mathématique d'un problème de contact antiplan avec frottement entre un matériau électro-viscoélastique, supposé avec effet thermique, et une base. Le contact est modélisé par une condition de Tresca où le coefficient de frottement dépend du taux de glissement total. Après avoir établi la formulation variationnelle et avoir posé les hypothèses nécessaires nous établissons les résultats d'existence et d'unicité en se basant sur la théorie des *inéquations quasi-variationnelles d'évolution avec viscosité* pour le champ des déplacements avec une équation variationnelle dépendant du temps pour le champ électrique et inéquation variationnelle d'évolution du premier ordre

pour le champ thermique et le théorème du point fixe de Banach, et nous présentons la convergence de la solution du problème.

4.1 Formulation du problème-hypothèses

4.1.1 Formulation mécanique du problème

Dans cette section, nous recueillons les équations et les conditions du chapitre 3 pour maintenir la formulation classique du problème antiplan pour les matériaux électro-viscoélastiques en contact de frottement avec une fondation.

Notre problème antiplan quasistatique peut se formuler comme suit :

Problème \mathcal{P} : Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ de température $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\operatorname{div}(\zeta \nabla \dot{u} + \mu \nabla u) + \operatorname{div}(e \nabla \varphi) - \operatorname{div}(\theta \mathcal{M}_c) + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (4.1)$$

$$\operatorname{div}(e \nabla u - \alpha \nabla \varphi) - \operatorname{div}(\theta \mathcal{P}) = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (4.2)$$

$$\dot{\theta} - \operatorname{div}(K \nabla \theta) = -\mathcal{M}_c \nabla \dot{u} + h(t) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (4.3)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T], \quad (4.4)$$

$$\zeta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T], \quad (4.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\zeta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \nu| \leq g \left(\int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_\tau(s)| ds \right), \\ |\zeta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \nu| < g \left(\int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_\tau(s)| ds \right) \Rightarrow \dot{u}(t) = 0, \\ |\zeta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \nu| = g \left(\int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_\tau(s)| ds \right) \Rightarrow \exists \beta \geq 0, \\ \text{tel que } \zeta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \nu = -\beta \dot{u}. \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (4.6)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times [0, T], \quad (4.7)$$

$$e \partial_\nu u - \alpha \partial_\nu \varphi = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times [0, T], \quad (4.8)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times [0, T]. \quad (4.9)$$

$$e\partial_\nu u - \alpha\partial_\nu \varphi - \theta\mathcal{P}\cdot\nu = k(\varphi - \varphi_F) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (4.10)$$

$$-k_{ij}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}n_i = k_e(\theta - \theta_R) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (4.11)$$

$$u(0) = u_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (4.12)$$

Nous notons que (4.1) et (4.2) représentent les équations d'équilibre électrique, l'équation (4.3) décrit l'évolution du champ de température, où $K := (k_{ij})$ représente le tenseur de conductivité thermique, $h(t)$ la densité de la source thermique. La condition aux limites de température associée est donnée par (4.11), où θ_R est la température de la fondation, et k est le coefficient de l'échange entre le corps et l'obstacle. L'équation (4.7) signifie que la température disparaît sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times [0, T]$. Les équations (4.4)-(4.5) sont les conditions de déplacement-traction. L'équation (4.6) représente la loi de frottement de Tresca, (4.8) représente la condition aux limites de la charge surfacique. La condition (4.10) représente la condition électrique que nous avons définie dans (3.73) et qui décrit l'échange du potentiel entre le corps piézoélectrique et la fondation. Dans (4.12), u_0 est le déplacement initial et θ_0 est la température initiale.

4.1.2 Hypothèses

Pour étudier le **Problème** \mathcal{P} , on suppose que le coefficient de *viscosité* et le *coefficient de permittivité électrique* satisfont :

$$\zeta \in L^\infty(\Omega) \quad \text{et il existe } \zeta^* > 0 \quad \text{tel que } \zeta(\mathbf{x}) \geq \zeta^* \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.13)$$

$$\alpha \in L^\infty(\Omega) \quad \text{et il existe } \alpha^* > 0 \quad \text{tel que } \alpha(\mathbf{x}) \geq \alpha^* \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.14)$$

Souvent, on suppose que le coefficient de Lamé et le coefficient piézoélectrique satisfont :

$$\mu \in L^\infty(\Omega) \quad \text{et } \mu(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.15)$$

$$e \in L^\infty(\Omega). \quad (4.16)$$

Les tenseurs thermiques satisfont

$$\mathcal{M}_c = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{c_1} \\ \mathcal{M}_{c_2} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } \mathcal{M}_{c_i}(x_1, x_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{M}_{c_i} \in L^\infty(\Omega),$$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } p_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, p_i \in L^\infty(\Omega). \quad (4.17)$$

Les données thermiques aux limites satisfont

$$\theta_R \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_3)), k_e \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+), h \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)). \quad (4.18)$$

Le tenseur de conductivité thermique vérifie la symétrie et l'ellipticité usuelles : pour certains $c_k > 0$ et pour tous $\xi_i \in \mathbb{R}^d$

$$K = (k_{ij}), \quad k_{ij} = k_{ji} \in L^2(\Omega), \quad \forall c_k > 0, \xi_i \in \mathbb{R}^d; \quad k_{ij}\xi_i \cdot \xi_j \leq c_k \xi_i \cdot \xi_j. \quad (4.19)$$

La fonction $R : V \rightarrow L^2(\Omega)$ satisfait

$$\exists L_R > 0, \quad \|R(v_1) - R(v_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq L_R \|v_1 - v_2\|_V, \quad \forall v_1, v_2 \in V. \quad (4.20)$$

On suppose que les forces volumiques f_0 et de tractions f_2 sont supposées avoir la régularité

$$f_0 \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \text{ et } f_2 \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_2)). \quad (4.21)$$

Le champ électrique de densité volumique q_0 et les charges électriques de densité surfacique q_2 satisfont

$$q_0 \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \text{ et } q_2 \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_b)). \quad (4.22)$$

Le coefficient de conductivité électrique satisfont

$$k \in L^\infty(\Gamma_3) \text{ et } k(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (4.23)$$

De plus, nous supposons que le potentiel électrique de la fondation est tel que :

$$\varphi_F \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_3)). \quad (4.24)$$

Nous supposons que le seuil de frottement g satisfait les propriétés suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \ g : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+; \\ (b) \ \exists L_g \geq 0 \text{ tel que } |g(x, r_1) - g(x, r_2)| \leq L_g |r_1 - r_2|, \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } x \in \Gamma_3; \\ (c) \ \forall r \in \mathbb{R}, g(\cdot, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3; \\ (d) \ g(\cdot, 0) \in L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (4.25)$$

Enfin, nous supposons que les données initiales vérifient ;

$$u_0 \in V, \quad \theta_0 \in L^2(\Omega), \quad (4.26)$$

Pour tout $t \in [0, T]$ nous devons considérer l'opérateur \mathcal{S}_t défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_t : L^\infty(0, T; V) &\rightarrow L^2(\Gamma), \\ \mathcal{S}_t(v) &= \int_0^t |v(s)| ds \text{ p.p. sur } \Gamma. \end{aligned} \quad (4.27)$$

D'après (3.86) et (4.27), il s'ensuit que pour tout $v_1, v_2 \in L^\infty(0, T; V)$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|\mathcal{S}_t(v_1) - \mathcal{S}_t(v_2)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V ds. \quad (4.28)$$

Ici et ci-dessous, C représente une constante positive dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre.

Et, de plus, on considère la fonctionnelle $j : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ donnée par :

$$j(\xi, v) = \int_{\Gamma_3} g(\xi) |v| da \quad \forall \xi \in L^2(\Gamma), \quad \forall v \in V. \quad (4.29)$$

En utilisant les conditions (4.25), nous déduisons que l'intégrale dans (4.29) est bien définie. Souvent nous définissons les applications $f : [0, T] \rightarrow V$ et $q : [0, T] \rightarrow W$, respectivement, par

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t)v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t)v da, \quad (4.30)$$

$$(q(t), \psi)_W = \int_{\Omega} q_0(t)\psi dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t)\psi da + \int_{\Gamma_3} k\varphi_F(t)\psi da, \quad (4.31)$$

$$\forall v \in V, \psi \in W, \forall t \in [0, T].$$

La définition des opérateurs f et q est basée sur le théorème de représentation de Riesz ; de plus, il suit des hypothèses (4.21) et (4.22), nous en déduisons que les intégrales ci-dessus sont bien définies et

$$f \in W^{1,2}(0, T; V), \quad (4.32)$$

$$q \in W^{1,2}(0, T; W). \quad (4.33)$$

Par la suite, on définit les formes bilinéaires par les égalités :

$$a_\mu : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_\mu(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad (4.34)$$

$$a_\zeta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_\zeta(u, v) = \int_{\Omega} \zeta \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad (4.35)$$

$$a_e : V \times W \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_e(u, \varphi) = \int_{\Omega} e \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = a_e^*(\varphi, u), \quad (4.36)$$

$$a_\alpha : W \times W \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_\alpha(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \alpha \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{\Gamma_3} k \varphi \psi \, da, \quad (4.37)$$

$$a_{\mathcal{M}} : E \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_{\mathcal{M}}(\theta, v) = \int_{\Omega} \mathcal{M}_c \theta \cdot \nabla v \, dx, \quad (4.38)$$

$$a_{\mathcal{P}} : E \times W \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_{\mathcal{P}}(\theta, \psi) = \int_{\Omega} \mathcal{P} \theta \cdot \nabla \psi \, dx, \quad (4.39)$$

pour tout $u, v \in V$ et $\varphi, \psi \in W$.

Les hypothèses (4.29)–(4.33) impliquent que les intégrales précédentes sont bien définies et, en utilisant la relation (3.85) et (3.86), il suit que les formes bilinéaires a_μ , a_ζ , a_e , a_e^* , a_α et $a_{\mathcal{M}}$, $a_{\mathcal{P}}$ sont continues ; de plus, les formes a_μ , a_ζ et a_α sont symétriques et, la forme a_α est W-elliptique et a_ζ est V-elliptique depuis :

$$a_\alpha(\psi, \psi) \geq \alpha^* \|\psi\|_W^2 \quad \forall \psi \in W, \quad (4.40)$$

$$a_\zeta(v, v) \geq \zeta^* \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V. \quad (4.41)$$

De plus, on définit les opérateurs suivants $Q : [0, T] \rightarrow E'$, $K : E \rightarrow E'$, $R : V \rightarrow E'$

par :

$$\begin{aligned}\langle Q(t), \mu \rangle_{E' \times E} &= \int_{\Gamma_3} k_c \theta_R(t) \mu \, ds + \int_{\Omega} h(t) \mu \, dx, \\ \langle K\tau, \mu \rangle_{E' \times E} &= \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Gamma_3} k_c \tau \mu \, ds, \\ \langle Rv, \mu \rangle_{E' \times E} &= \int_{\Gamma_3} h_{\tau}(|v_{\tau}|) \mu \, ds - \int_{\Omega} (\mathcal{M}_c \nabla v) \mu \, dx,\end{aligned}$$

pour tout $v \in V$ et $\tau, \mu \in E$.

4.2 Formulation variationnelle

Avec ces notations, nous suivons la procédure standard pour dériver la formulation variationnelle du Problème \mathcal{P} .

Nous supposons que le problème antipalrn électro-viscoélastique \mathcal{P} a une solution $(u, \varphi, \theta) \in V \times W \times E$, et soit $(v, \psi) \in V \times W$. Nous multiplions l'équation (4.1) par l'élément $(v - \dot{u}) \in V$, intégrons le résultat sur Ω , et utilisons la formule de Green (3.88) et la notation (3.61) pour trouver

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega} \zeta \nabla \dot{u}(t) \cdot \nabla (v - \dot{u}(t)) \, dx + \int_{\Omega} \mu \nabla u(t) \cdot \nabla (v - \dot{u}(t)) \, dx + \\ & \int_{\Omega} e \nabla \varphi(t) \cdot \nabla (v - \dot{u}(t)) \, dx - \int_{\Omega} \theta \mathcal{M}_c \cdot \nabla (v - \dot{u}(t)) \, dx \\ &= \int_{\Omega} f_0 (v - \dot{u}(t)) \, dx + \int_{\Gamma} (\zeta \partial_{\nu} \dot{u}(t) + \mu \partial_{\nu} u(t) + e \partial_{\nu} \varphi(t) - \theta(t) \mathcal{M}_c \cdot \nu) (v - \dot{u}(t)) \, da.\end{aligned}$$

Nous divisons l'intégrale de frontière sur Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 et, puisque $v - \dot{u}(t)$ disparaît sur Γ_1 et à partir de l'équation (3.68), nous déduisons que

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega} \zeta \nabla \dot{u}(t) \cdot \nabla (v - \dot{u}(t)) \, dx + \int_{\Omega} \mu \nabla u(t) \cdot \nabla (v - \dot{u}(t)) \, dx + \int_{\Omega} e \nabla \varphi(t) \cdot \nabla (v - \dot{u}(t)) \, dx \\ & - \int_{\Omega} \theta(t) \mathcal{M}_c \cdot \nabla (v - \dot{u}(t)) \, dx = \int_{\Omega} f_0 (v - \dot{u}(t)) \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2 (v - \dot{u}(t)) \, dx \\ & + \int_{\Gamma_3} (\zeta \partial_{\nu} \dot{u}(t) + \mu \partial_{\nu} u(t) + e \partial_{\nu} \varphi(t) - \theta(t) \mathcal{M}_c \cdot \nu) (v - \dot{u}(t)) \, da.\end{aligned}$$

En utilisant les relations (4.30) et (4.34)-(4.36), on obtenons donc :

$$\begin{aligned}
& a_\zeta(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + a_\mu(u(t), v - \dot{u}(t)) + a_e^*(\varphi(t), v - \dot{u}(t)) - a_{\mathcal{M}}(\theta(t), v - \dot{u}(t)) \\
& - \int_{\Gamma_3} (\zeta \partial_\nu \dot{u}(t) + \mu \partial_\nu u(t) + e \partial_\nu \varphi(t) - \theta(t) \mathcal{M}_{c,\nu})(v - \dot{u}(t)) da \\
& = (f(t), (v - \dot{u}(t)))_V.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

En utilisant la condition de frottement de contact (4.6) et la formule de la fonctionnelle (4.29) sur $\Gamma_3 \times [0, T]$, nous déduisons que

$$j(\mathcal{S}_t(\dot{u}), \dot{u}(t)) = - \int_{\Gamma_3} (\zeta \partial_\nu \dot{u}(t) + \mu \partial_\nu u(t) + e \partial_\nu \varphi(t) - \theta(t) \mathcal{M}_{c,\nu}) \dot{u}(t) da, \tag{4.43}$$

il est très facile de voir que

$$j(\mathcal{S}_t(\dot{u}), v) \geq - \int_{\Gamma_3} (\zeta \partial_\nu \dot{u}(t) + \mu \partial_\nu u(t) + e \partial_\nu \varphi(t) - \theta(t) \mathcal{M}_{c,\nu}) v da, \tag{4.44}$$

et combiner cette inégalité avec (4.42), (4.43) pour trouver

$$\begin{aligned}
& a_\zeta(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + a_\mu(u(t), v - \dot{u}(t)) + a_e^*(\varphi(t), v - \dot{u}(t)) - a_{\mathcal{M}}(\theta(t), v - \dot{u}(t)) \\
& + j(\mathcal{S}_t(\dot{u}), v) - j(\mathcal{S}_t(\dot{u}), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

En tenant compte des relations (4.2) et (4.8)-(4.10), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} e \nabla u(t) \cdot \nabla \psi dx - \int_{\Omega} \alpha \nabla \varphi(t) \cdot \nabla \psi dx - \int_{\Omega} \mathcal{P} \theta(t) \cdot \nabla \psi dx + \int_{\Omega} q_0(t) \psi dx \\
& = \int_{\Gamma_b} q_2 \psi da + \int_{\Gamma_3} k(\varphi - \varphi_F) da.
\end{aligned}$$

En utilisant (4.31) et (4.36)-(4.37), on trouve la seconde inégalité

$$a_\alpha(\varphi(t), \psi) - a_e(u(t), \psi) + a_{\mathcal{P}}(\theta(t), \psi) = (q(t), \psi)_W. \tag{4.46}$$

Enfin, d'après les équations (4.4), (4.7) et (4.11) et en appliquant la formule de Green

et en utilisant les définitions de R , $Q(t)$ et K respectivement, on obtient l'équation suivante

$$\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = R\dot{u}(t) + Q(t) \quad \text{dans } E'. \quad (4.47)$$

Ensuite des relations (4.45)-(4.47) et la condition (4.12) on obtient le problème variationnel suivant

Problème \mathcal{PV} : trouver le champ des déplacements $u : [0; T] \rightarrow V$, un potentiel électrique $\varphi : [0; T] \rightarrow W$ et le champ de température $\theta : [0; T] \rightarrow E$ tels que

$$\begin{aligned} & a_\zeta(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + a_\mu(u(t), v - \dot{u}(t)) + a_e^*(\varphi(t), v - \dot{u}(t)) \\ & - a_{\mathcal{M}}(\theta(t), v - \dot{u}(t)) + j(\mathcal{S}_t(\dot{u}(t)), v) - j(\mathcal{S}_t(\dot{u}(t)), \dot{u}(t)) \\ & \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad \forall v \in V, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$a_\alpha(\varphi(t), \psi) - a_e(u(t), \psi) + a_{\mathcal{P}}(\theta(t), \psi) = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T], \quad (4.49)$$

$$\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = R\dot{u}(t) + Q(t) \quad \text{dans } E', \quad (4.50)$$

$$u(0) = u_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (4.51)$$

Notre résultat principal d'existence et d'unicité, est le suivant

4.3 Résultat d'existence et d'unicité

Théorème 4.3.1 *Sous les hypothèses (4.13)-(4.26) le problème \mathcal{PV} admet une solution unique (u, θ, φ) satisfaisant*

$$\begin{aligned} u & \in W^{1,2}(0, T; V); \quad \varphi \in W^{1,2}(0, T; W), \\ \theta & \in W^{1,2}(0, T; E') \cap L^2(0, T; E) \cap C(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Un élément (u, φ, θ) qui résout \mathcal{PV} est appelé une *solution faible* du problème antiplan électro-viscoélastique \mathcal{P} .

La démonstration du Théorème 4.3.1 passe par plusieurs étapes. Elle est basée sur les arguments du point fixe.

Soit η et $\xi \in W^{1,2}(0, T; V)$, dans la première étape, nous considérons le problème variationnel intermédiaire suivant

Problème \mathcal{PV}_η^1 . Trouver le champ des déplacements $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$ tels que

$$\begin{aligned} a_\zeta(\dot{u}_\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t)) + (\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t))_V + j(\mathcal{S}_t(\dot{u}_\eta), v) - j(\mathcal{S}_t(\dot{u}_\eta), \dot{u}_\eta(t)) \\ \geq (f(t), v - \dot{u}_\eta(t))_V \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in [0, T], \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$u_\eta(0) = u_0. \quad (4.54)$$

Pour étudier le Problème \mathcal{PV}_η^1 on considère le problème variationnel suivant.

Problème $\mathcal{PV}_{\eta\xi}^1$. Trouver $v_{\eta\xi} : [0, T] \rightarrow V$ tel que

$$\begin{aligned} a_\zeta(v_{\eta\xi}(t), v - v_{\eta\xi}(t)) + (\eta(t), v - v_{\eta\xi}(t))_V + j(\mathcal{S}_t(\xi), v) - j(\mathcal{S}_t(\xi), v_{\eta\xi}(t)) \\ \geq (f(t), v - v_{\eta\xi}(t))_V \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in [0, T], \end{aligned} \quad (4.55)$$

La solution unique du problème $\mathcal{PV}_{\eta\xi}^1$ suit le résultat suivant :

Lemme 4.3.2 *Pour tout η et $\xi \in W^{1,2}(0, T; V)$, il existe une solution unique du problème $\mathcal{PV}_{\eta\xi}^1$ ayant la régularité*

$$v_{\eta\xi} \in W^{1,2}(0, T; V). \quad (4.56)$$

Preuve. Il découle des résultats classiques des inéquations variationnelles qu'il existe une solution unique $v_{\eta\xi}$ qui résout (4.55) p.p. $t \in [0, T]$.

En prenant $v = 0_V$ dans (4.55), on déduit que

$$a_\zeta(v_{\eta\xi}(t), -v_{\eta\xi}(t)) + (\eta(t), -v_{\eta\xi}(t))_V \geq (f(t), -v_{\eta\xi}(t))_V \text{ p.p. } t \in [0, T],$$

à partir de (4.41) on peut déduire que

$$\zeta \|v_{\eta\xi}\|_V \leq \|f(t)\|_V + \|\eta(t)\|_V, \quad \text{p.p. } t \in [0, T]. \quad (4.57)$$

En gardant à l'esprit (4.57), (4.32) et la régularité $\eta \in W^{1,2}(0, T; V)$, on obtient $v_{\eta\xi} \in W^{1,2}(0, T; V)$, ce qui conclut la preuve. ■

Maintenant, pour tout $\eta \in L^\infty(0, T; V)$, on considère l'opérateur $\Lambda_\eta : C([0, T]; V) \rightarrow C([0, T]; V)$ défini par l'égalité

$$\Lambda_\eta \xi = v_{\eta\xi}, \quad \forall \xi \in L^\infty(0, T; V). \quad (4.58)$$

On obtient le résultat suivant.

Lemme 4.3.3 *L'opérateur Λ_η admet un point fixe unique $\xi_\eta \in L^\infty(0, T; V)$.*

Preuve. Soit $\eta \in L^\infty(0, T; V)$ et $\xi_i \in L^\infty(0, T; V)$, $i = 1, 2$. Pour simplifier la notation, nous désignons par v_i la solution unique du problème $\mathcal{P}\mathcal{V}_{\eta\xi}^1$, pour $i = 1, 2$. Ainsi, à partir de (4.55), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} & a_\zeta(v_i(t), v - v_i(t)) + (\eta(t), v - v_i(t))_V + j(\mathcal{S}_t(\xi_i), v) - j(\mathcal{S}_t(\xi_i), v_i(t)) \\ & \geq (f(t), v - v_i(t))_V \quad \forall v \in V, \quad \text{p.p. } t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Après quelques calculs algébriques et à partir de (4.59), on trouve

$$\begin{aligned} & \zeta \|v_1(t) - v_2(t)\|_V^2 \leq j(\mathcal{S}_t(\xi_1), v_2(t)) - j(\mathcal{S}_t(\xi_2), v_2(t)) \\ & \quad + j(\mathcal{S}_t(\xi_2), v_1(t)) - j(\mathcal{S}_t(\xi_1), v_1(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.60)$$

En utilisant maintenant (3.85), (4.25), (4.28) et (4.29) il en résulte que

$$\begin{aligned} & j(\mathcal{S}_t(\xi_1), v_2(t)) - j(\mathcal{S}_t(\xi_2), v_2(t)) + j(\mathcal{S}_t(\xi_2), v_1(t)) - j(\mathcal{S}_t(\xi_1), v_1(t)) \\ & \leq C \int_0^t \|\xi_1(s) - \xi_2(s)\|_V ds \times \|v_1(t) - v_2(t)\|_V, \text{ p.p. } t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.61)$$

En utilisant (4.60), (4.61) on déduit que

$$\|v_1(t) - v_2(t)\|_V \leq C \int_0^t \|\xi_1(s) - \xi_2(s)\|_V ds, \text{ p.p. } t \in [0, T]. \quad (4.62)$$

Maintenant la définition (4.58) implique

$$\|\Lambda_\eta \xi_1(t) - \Lambda_\eta \xi_2(t)\|_V \leq C \int_0^t \|\xi_1(s) - \xi_2(s)\|_V ds, \text{ p.p. } t \in [0, T]; \quad (4.63)$$

définir

$$\|v\|_{\mathcal{L}} = \text{Inf} \{ M > 0 / e^{-\mathcal{L}t} \|v\|_V \leq M \text{ p.p. } t \in [0, T] \}, \quad \forall v \in L^\infty(0, T; V), \quad (4.64)$$

tel que $\mathcal{L} > 0$ à déterminé ultérieurement. La norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ est équivalente à la norme standard norme $\|\cdot\|_{L^\infty(0, T; V)}$. En utilisant maintenant (4.64) et la définition de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$, nous pouvons obtenir :

$$e^{-\mathcal{L}t} \|\Lambda_\eta \xi_1(t) - \Lambda_\eta \xi_2(t)\|_V \leq C e^{-\mathcal{L}t} \int_0^t e^{\mathcal{L}s} e^{-\mathcal{L}s} \|\xi_1(s) - \xi_2(s)\|_V ds, \quad (4.65)$$

alors

$$e^{-\mathcal{L}t} \|\Lambda_\eta \xi_1(t) - \Lambda_\eta \xi_2(t)\|_V \leq C e^{-\mathcal{L}t} \|\xi_1 - \xi_2\|_{\mathcal{L}} \int_0^t e^{\mathcal{L}s} ds, \quad (4.66)$$

on déduit

$$e^{-\mathcal{L}t} \|\Lambda_\eta \xi_1(t) - \Lambda_\eta \xi_2(t)\|_V \leq \frac{C}{\mathcal{L}} \|\xi_1 - \xi_2\|_{\mathcal{L}}, \text{ p.p. } t \in [0, T]. \quad (4.67)$$

Par conséquent, on déduit que

$$\|\Lambda_\eta \xi_1(t) - \Lambda_\eta \xi_2(t)\|_V \leq \frac{C}{\mathcal{L}} \|\xi_1 - \xi_2\|_{\mathcal{L}}. \quad (4.68)$$

En prenant tel que $\mathcal{L} > C$, on conclut que l'opérateur est une contraction sur l'espace $(L^\infty(0, T; V), \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$. Du théorème du point fixe de Banach, nous déduisons que l'opérateur a un point fixe unique $\xi_\eta \in L^\infty(0, T; V)$. ■

Dans ce qui suit, nous continuons d'écrire

$$v_\eta = v_{\eta\xi_\eta}, \quad \forall \eta \in L^\infty(0, T; V), \quad (4.69)$$

où ξ_η est le point fixe unique de l'opérateur Λ_η , alors à partir de (4.58) et (4.69) nous avons

$$v_\eta = \xi_\eta. \quad (4.70)$$

En utilisant (4.70) et le fait que v_η est l'unique solution de Problème $\mathcal{PV}_{\eta\xi_\eta}^1$, on peut écrire

$$\begin{aligned} a_\zeta(v_\eta(t), v - v_\eta(t)) + (\eta(t), v - v_\eta(t))_V + j(\mathcal{S}_t(v_\eta), v) - j(\mathcal{S}_t(v_\eta), v_\eta(t)) \\ \geq (f(t), v - v_\eta(t))_V \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Soit maintenant la fonction $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$ définie par

$$u_\eta(t) = \int_0^t v_\eta(s) ds + u_0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.72)$$

Dans l'étude du problème \mathcal{PV}_η^1 , nous avons le résultat suivant.

Lemme 4.3.4 *Le Problème \mathcal{PV}_η^1 admet une solution unique u_η satisfait la régularité (4.52).*

Preuve. La preuve de Lemme 4.3.4 est une conséquence de Lemme 4.3.2 et la relation (4.72). ■

Dans la deuxième étape, nous utilisons u_η la solution du problème \mathcal{PV}_η^1 pour formuler le second problème auxiliaire suivant.

Problème \mathcal{PV}_η^2 . Trouver un champ de température $\theta_\eta : [0, T] \rightarrow E$ tel que

$$\begin{cases} \dot{\theta}_\eta(t) + K\theta_\eta(t) = R\dot{u}_\eta(t) + Q(t) & \text{sur } E' \text{ p.p. } t \in [0, T] \\ \theta_\eta(0) = \theta_0. \end{cases} \quad (4.73)$$

Dans l'étude du problème \mathcal{PV}_η^2 , nous avons le résultat suivant.

Lemme 4.3.5 *pour tout $\eta \in W^{1,2}(0, T; V)$, il existe une solution unique du problème \mathcal{PV}_η^2 satisfaisant*

$$\theta_\eta \in W^{1,2}(0, T; E') \cap L^2(0, T; E) \cap C(0, T; L^2(\Omega)).$$

De plus, $\exists C > 0$ tel que

$$|\theta_{\eta_1} - \theta_{\eta_2}|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.74)$$

et

$$|\dot{\theta}_{\eta_1} - \dot{\theta}_{\eta_2}|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds \quad p.p. t \in [0, T]. \quad (4.75)$$

Preuve. La vérification du résultat d'existence et d'unicité (4.73) découle du résultat classique sur *l'équation d'évolution* du premier ordre (voir [9, 48]). Ici, le triplet de Gelfand est donné par

$$E \subset L^2(\Omega) \equiv L^2(\Omega)' \subset E'.$$

On vérifie que l'opérateur $K : E \rightarrow E'$ est linéaire, coercive. Maintenant, à partir de

l'expression de l'opérateur R ,

$$v_\eta \in W^{1,2}(0, T; V) \implies Rv_\eta \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)),$$

et comme $Q \in W^{1,2}(0, T; E)$ alors $Rv_\eta + Q \in W^{1,2}(0, T; E)$, on déduit (4.74) et (4.75), (voir [2]). ■

Dans la troisième étape, nous utilisons la solution u_η du problème \mathcal{PV}_η^1 et θ_η la solution du problème \mathcal{PV}_η^2 pour considérer le problème suivant.

Problème \mathcal{PV}_η^3 . Trouver le potentiel électrique $\varphi_\eta : [0, T] \rightarrow W$ tel que

$$a_\alpha(\varphi_\eta(t), \psi) - a_e(u_\eta(t), \psi) + a_P(\theta(t), \psi) = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T]. \quad (4.76)$$

La solution unique du problème intermédiaire \mathcal{PV}_η^3 suit le résultat suivant :

Lemme 4.3.6 *Il existe une solution unique du problème \mathcal{PV}_η^3 qui satisfait*

$$\varphi_\eta \in W^{1,2}(0, T; W), \quad (4.77)$$

De plus, si φ_{η_1} et φ_{η_2} sont les solutions de (4.76) correspondant à $\eta_1, \eta_2 \in C([0, T], V)$, alors il existe $C > 0$ tel que

$$\|\varphi_{\eta_1}(t) - \varphi_{\eta_2}(t)\|_W \leq C(\|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_V + \|\theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.78)$$

Preuve. Soit $t \in [0, T]$. On utilise les propriétés de la forme bilinéaire a_α et le lemme de Lax-Milgram pour voir qu'il existe un unique élément $\varphi_\eta(t) \in W$ qui résout (4.76) à n'importe quel moment $t \in [0, T]$. Considérez maintenant $t_1, t_2 \in [0, T]$; nous

utilisons (4.76), on a

$$\begin{aligned} a_\alpha(\varphi_\eta(t_1), \psi) - a_e(u_\eta(t_1), \psi) + a_{\mathcal{P}}(\theta(t), \psi) \\ = (q(t_1), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, t_1 \in [0, T], \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} a_\alpha(\varphi_\eta(t_2), \psi) - a_e(u_\eta(t_2), \psi) + a_{\mathcal{P}}(\theta(t), \psi) \\ = (q(t_2), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, t_2 \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.80)$$

En utilisant les relations (4.79), (4.80) et (4.40), on obtient donc

$$\begin{aligned} \alpha^* \|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\|_W^2 \leq (\|e\|_{L^\infty(\Omega)} \|u(t_1) - u(t_2)\|_V + \|q(t_1) - q(t_2)\|_W + \\ \|p\|_{L^\infty(\Omega)} \|\theta(t_1) - \theta(t_2)\|_{L^2(\Omega)}) \|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\|_W, \end{aligned}$$

il résulte de l'inégalité précédente que

$$\|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\|_W \leq C(\|u(t_1) - u(t_2)\|_V + \|\theta(t_1) - \theta(t_2)\|_{L^2(\Omega)} + \|q(t_1) - q(t_2)\|_W). \quad (4.81)$$

Alors, la régularité $u_\eta \in C^1([0, T]; V)$ combinée avec la relation (4.33) et (4.81) ce qui implique que $\varphi_\eta \in W^{1,2}(0, T; W)$ ce qui conclut la démonstration. Pour plus de détails, voir par exemple [18] ■

On définit aussi l'opérateur $\Lambda : L^\infty(0, T; V) \rightarrow L^\infty(0, T; V)$ par

$$\begin{aligned} \langle \Lambda \eta(t), w \rangle_V &= a_\mu(u_\eta(t), w) - a_{\mathcal{M}}(\theta_\eta(t), w) + a_e^*(\varphi_\eta(t), w) \\ \forall w &\in V, t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.82)$$

On obtient le résultat suivant.

Lemme 4.3.7 *L'opérateur Λ admet un point fixe unique $\eta^* \in L^\infty(0, T; V)$.*

Preuve. Soient $\eta_1, \eta_2 \in L^\infty(0, T; V)$ et $t \in [0, T]$. Dans ce qui suit, nous notons par u_i, θ_i et φ_i les fonctions $u_{\eta_i}, \theta_{\eta_i}$ et φ_{η_i} pour $i = 1, 2$. En utilisant la définition

(4.82) pour obtenir

$$\langle \Lambda \eta_1(t), w \rangle_V = a_\mu(u_1(t), w) - a_{\mathcal{M}}(\theta_1(t), w) + a_e^*(\varphi_1(t), w) \quad (4.83)$$

$$\langle \Lambda \eta_2(t), w \rangle_V = a_\mu(u_2(t), w) - a_{\mathcal{M}}(\theta_2(t), w) + a_e^*(\varphi_2(t), w) \quad (4.84)$$

$$\forall w \in V, t \in [0, T].$$

D'après (4.83)-(4.84), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} & \|\Lambda \eta_1(t) - \Lambda \eta_2(t)\|_V^2 \\ & \leq C \left(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 \right) \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Et tenons compte de (4.78) pour trouver

$$\|\Lambda \eta_1(t) - \Lambda \eta_2(t)\|_V^2 \leq C \left(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \quad (4.86)$$

et nous utilisons l'inégalité (4.74) dans (4.86) pour obtenir

$$\|\Lambda \eta_1(t) - \Lambda \eta_2(t)\|_V^2 \leq C \left(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 ds \right). \quad (4.87)$$

Nous utilisons l'inégalité (4.71) et la condition (4.28) des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve du Lemme 4.3.2, on obtient

$$\int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 ds \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V^2 ds, \quad \text{p.p. } t \in [0, T]. \quad (4.88)$$

D'un autre côté, on sait que

$$u_\eta(t) = \int_0^t v_\eta(s) ds + u_0 \quad \forall t \in [0, T],$$

et on a $u_1(0) = u_2(0) = u_0$ nous trouvons

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 ds,$$

et nous utilisons cette inégalité dans (4.88) pour obtenir

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V^2 ds, \quad \text{p.p. } t \in [0, T]. \quad (4.89)$$

Nous utilisons les deux inégalités (4.88), (4.89) dans (4.87) pour obtenir

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V^2 \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V^2 ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

En réitérant l'inégalité précédente n fois, nous constatons que

$$\|\Lambda^n\eta_1 - \Lambda^n\eta_2\|_{L^2(0,T,V)}^2 \leq \frac{C^n T^n}{n!} \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{L^2(0,T,V)}^2,$$

Pour n assez grand, cette dernière inégalité implique que Λ^n est un opérateur contractant dans l'espace $L^2(0, T, V)$. Alors Λ admet un point fixe unique. ■

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour prouver le Théorème 4.3.1

Démonstration

Existence.

Soit $\eta^* \in L^\infty(0, T; V)$, le point fixe de l'opérateur Λ et soit u_{η^*} , θ_{η^*} et φ_{η^*} les solutions des problèmes \mathcal{PV}_η^1 , \mathcal{PV}_η^2 et \mathcal{PV}_η^3 respectivement, pour $\eta^* = \eta$. Il suit de (4.82)

$$\begin{aligned} & a_\zeta(\dot{u}_{\eta^*}(t), v - \dot{u}_{\eta^*}(t)) + j(\mathcal{S}_t(\dot{u}_{\eta^*}(t)), v) - j(\mathcal{S}_t(\dot{u}_{\eta^*}(t)), \dot{u}_{\eta^*}(t)) \\ & \geq (f(t), v - \dot{u}_{\eta^*}(t))_V - (\eta^*(t), v - \dot{u}_{\eta^*}(t))_V, \quad \forall v \in V, \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \end{aligned} \quad (4.90)$$

et, alors (4.53)-(4.54), (4.73) et (4.76) implique que $(u_{\eta^*}, \theta_{\eta^*}, \varphi_{\eta^*})$ est une solution du problème \mathcal{PV} .

La régularité de la solution exprimée en (4.52) découle des Lemmes 4.3.4, 4.3.5 et 4.3.6.

Unicité.

L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur défini par (4.82) et de l'unicité dans les Lemmes 4.3.4, 4.3.5 et 4.3.6.

4.4 Résultat de convergence

Dans cette section nous étudions le comportement de la solution faible du problème antiplan de contact avec frottement quand la fonction g ne dépend pas du glissement et lorsque le coefficient de viscosité ζ tend vers zéro. Par conséquent, partout dans la suite, nous considérons la fonction g donnée qui satisfait

$$g \in L^\infty(\Gamma_3), \quad g \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3, \quad (4.91)$$

et, de plus, on considère la fonctionnelle $j : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ donnée par

$$j(v) = \int_{\Gamma_3} g |v| \, da, \quad \forall v \in V. \quad (4.92)$$

Donc nous reformulons le problème comme suit :

Problème \mathcal{PV}_ζ : trouver le champ des déplacements $u_\zeta : [0, T] \rightarrow V$, et le champ électrique $\varphi_\zeta : [0, T] \rightarrow W$ et le champ de température $\theta_\zeta : [0, T] \rightarrow E$ tels que

$$\begin{aligned} & a_\zeta(\dot{u}_\zeta(t), v - \dot{u}_\zeta(t)) + a_\mu(u_\zeta(t), v - \dot{u}_\zeta(t)) + a_e^*(\varphi_\zeta(t), v - \dot{u}_\zeta(t)) \\ & - a_{\mathcal{M}}(\theta_\zeta(t), v - \dot{u}_\zeta(t)) + j(v) - j(\dot{u}_\zeta(t)) \\ & \geq (f(t), v - \dot{u}_\zeta(t))_V \quad \forall v \in V, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (4.93)$$

$$a_\alpha(\varphi_\zeta(t), \psi) - a_e(u_\zeta(t), \psi) + a_{\mathcal{P}}(\theta_\zeta(t), \psi) = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T], \quad (4.94)$$

$$\dot{\theta}_\zeta(t) + K\theta_\zeta(t) = R\dot{u}_\zeta(t) + Q(t), \quad (4.95)$$

$$u_\zeta(0) = u_0, \quad \theta_\zeta(0) = \theta_0. \quad (4.96)$$

Nous considérons également que le problème obtenu pour $\zeta = 0$ soit comme suit :

Problème $\mathcal{PV}_{\zeta \rightarrow 0}$: trouver le champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow V$, et le champun électrique $\varphi : [0, T] \rightarrow W$ et le champ de température $\theta : [0, T] \rightarrow E$ tels que

$$\begin{aligned} a_\mu(u(t), v - \dot{u}(t)) + a_e^*(\varphi(t), v - \dot{u}(t)) - a_M(\theta(t), v - \dot{u}(t)) \\ + j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad \forall v \in V, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$a_\alpha(\varphi(t), \psi) - a_e(u(t), \psi) + a_P(\theta(t), \psi) = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T], \quad (4.98)$$

$$\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = R\dot{u}(t) + Q(t), \quad (4.99)$$

$$u(0) = u_0, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (4.100)$$

De toute évidence, le problème $\mathcal{PV}_{\zeta \rightarrow 0}$ représente la formulation variationnelle du problème de contact antiplan pour les matériaux élastiques linéaires, c'est-à-dire, Le problème obtenu quand (3.21) est remplacé par la loi constitutive élastique

$$\sigma = \lambda \text{tr} \varepsilon(\mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}).$$

Il résulte du théorème 4.3.1 que ce problème \mathcal{PV}_ζ ait une solution unique $(u_\zeta, \varphi_\zeta, \theta_\zeta)$ qui satisfait

$$\begin{aligned} u_\zeta &\in W^{1,2}(0, T; V); \quad \varphi_\zeta \in W^{1,2}(0, T; W), \\ \theta_\zeta &\in W^{1,2}(0, T; E') \cap L^2(0, T; E) \cap C(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned} \quad (4.101)$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème $\mathcal{PV}_{\zeta \rightarrow 0}$, nous avons besoin des hypothèses supplémentaires. Nous supposons donc que les coefficients sont

vérifies

$$\mu \in L^\infty(\Omega) \text{ et il existe } \mu^* > 0 \text{ tel que } \mu(\mathbf{x}) \geq \mu^* \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.102)$$

$$\mathcal{M} \in L^\infty(\Omega) \text{ et il existe } \mathcal{M}^* > 0 \text{ tel que } \mathcal{M}(\mathbf{x}) \geq \mathcal{M}^* \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.103)$$

$$p \in L^\infty(\Omega) \text{ et il existe } p^* > 0 \text{ tel que } p(\mathbf{x}) \geq p^* \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.104)$$

et notons que dans ce cas, les formes bilinéaires a_μ , $a_{\mathcal{M}}$, a_p sont coersives, c'est-à-dire

$$a_\mu(v, v) \geq \mu^* \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V, \quad (4.105)$$

$$a_{\mathcal{M}}(\theta, \theta) \geq \mathcal{M}^* \|\theta\|_E^2 \quad \forall \theta \in E, \quad (4.106)$$

$$a_p(\theta, \theta) \geq p^* \|\theta\|_E^2 \quad \forall \theta \in E. \quad (4.107)$$

Nous employons la coersivité de la forme bilinéaire a_α , et le Lemme de Lax-Milgram pour voir qu'il existe un élément unique $\varphi_0 \in W$ tel que

$$a_\alpha(\varphi_0, \psi) - a_e(u_0, \psi) + a_p(\theta_0, \psi) = (q(0), \psi)_W \quad \forall \psi \in W. \quad (4.108)$$

Nous utilisons l'élément φ_0 définit ci-dessus pour introduire la condition

$$a_\mu(u_0, v) + a_e^*(\varphi_0, v) - a_{\mathcal{M}}(\theta_0, v) + j(v) \geq (f(0), v)_V \quad \forall v \in V. \quad (4.109)$$

L'inégalité (4.109) représente une condition compatible sur la donnée initiale qui est nécessaire dans plusieurs problèmes quasistatique. Il suit que du Théorème 4.3.1 et, sous les hypothèses (4.21)-(4.26), (4.102)-(4.107), le problème thermo-électro-élastique $\mathcal{PV}_{\zeta \rightarrow 0}$ a une solution unique (u, θ, φ) ayant la régularité (4.52).

Considérons maintenant l'hypothèse suivante :

$$\frac{1}{\zeta^*} \|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \rightarrow 0. \quad (4.110)$$

Théorème 4.4.1 *Supposons que (4.21)-(4.26), (4.102)-(4.107) et (4.109) sont satisfaites. Alors la solution $(u_\zeta, \theta_\zeta, \varphi_\zeta)$ du problème \mathcal{PV}_ζ converge vers la solution (u, θ, φ) du problème $\mathcal{PV}_{\zeta \rightarrow 0}$ c'est-à-dire*

$$\|u_\zeta - u\|_{C([0,T];V)} \rightarrow 0, \quad \|\theta_\zeta - \theta\|_{C([0,T];E)} \rightarrow 0, \quad \|\varphi_\zeta - \varphi\|_{C([0,T];W)} \rightarrow 0, \quad (4.111)$$

Preuve. Les égalités et les inégalités ci-dessus sont satisfaites pour presque partout $t \in [0, T]$. Nous prenons $v = \dot{u}(t)$ dans (4.93), $v = \dot{u}_\zeta(t)$ dans (4.97) et en faisant la somme des deux inégalités obtenues, ce qui donne

$$\begin{aligned} & a_\zeta(\dot{u}_\zeta(t), \dot{u}(t) - \dot{u}_\zeta(t)) + a_\mu(u_\zeta(t) - u(t), \dot{u}(t) - \dot{u}_\zeta(t)) \\ & + a_e^*(\varphi_\zeta(t) - \varphi(t), \dot{u}(t) - \dot{u}_\zeta(t)) - a_{\mathcal{M}}(\theta_\zeta(t) - \theta(t), \dot{u}(t) - \dot{u}_\zeta(t)) \geq 0. \end{aligned}$$

Ceci implique que :

$$\begin{aligned} & a_\zeta(\dot{u}_\zeta(t) - \dot{u}(t), \dot{u}_\zeta(t) - \dot{u}(t)) + a_\mu(u_\zeta(t) - u(t), \dot{u}_\zeta(t) - \dot{u}(t)) \\ & + a_{\mathcal{M}}(\theta_\zeta(t) - \theta(t), \dot{u}(t) - \dot{u}_\zeta(t)) \\ & \leq a_\zeta(\dot{u}(t), \dot{u}(t) - \dot{u}_\zeta(t)) + a_e^*(\varphi_\zeta(t) - \varphi(t), \dot{u}(t) - \dot{u}_\zeta(t)), \end{aligned} \quad (4.112)$$

Nous utilisons les hypothèses (4.13), (4.41) pour voir que

$$\begin{aligned} & \zeta^* \|\dot{u}_\zeta(t) - \dot{u}(t)\|_V^2 + a_\mu(u_\zeta(t) - u(t), \dot{u}_\zeta(t) - \dot{u}(t)) \\ & + a_{\mathcal{M}}(\theta_\zeta(t) - \theta(t), \dot{u}(t) - \dot{u}_\zeta(t)) \\ & \leq \|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)} \|\dot{u}(t)\|_V \|\dot{u}_\zeta(t) - \dot{u}(t)\|_V + a_e^*(\varphi_\zeta(t) - \varphi(t), \dot{u}(t) - \dot{u}_\zeta(t)), \end{aligned} \quad (4.113)$$

et nous combinons cette inégalité avec l'inégalité élémentaire pour obtenir

$$\begin{aligned} & \|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)} \|\dot{u}(t)\|_V \|\dot{u}_\zeta(t) - \dot{u}(t)\|_V \leq \\ & \frac{\|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{4\zeta^*} \|\dot{u}(t)\|_V^2 + \zeta^* \|\dot{u}_\zeta(t) - \dot{u}(t)\|_V^2. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Comme résultat nous obtenons

$$\begin{aligned} & a_\mu(u_\zeta(t) - u(t), \dot{u}_\zeta(t) - \dot{u}(t)) + a_{\mathcal{M}}(\theta_\zeta(t) - \theta(t), \dot{u}(t) - \dot{u}_\zeta(t)) \\ & \leq \frac{\|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{4\zeta^*} \|\dot{u}(t)\|_V^2 + a_e^*(\varphi_\zeta(t) - \varphi(t), \dot{u}(t) - \dot{u}_\zeta(t)). \end{aligned} \quad (4.115)$$

Dans un autre côté, nous dérivons (4.94) et (4.98) par rapport au temps, en soustraire les égalités obtenues et, nous utilisons la définition de la forme bilinéaire a_e pour obtenir

$$\begin{aligned} a_\alpha(\dot{\varphi}_\zeta(t) - \dot{\varphi}(t), \psi) + a_{\mathcal{P}}(\dot{\theta}_\zeta(t) - \dot{\theta}(t), \psi) &= a_e(\dot{u}_\zeta(t) - \dot{u}(t), \psi) \\ &= a_e(\psi, \dot{u}_\zeta(t) - \dot{u}(t)) \quad \forall \psi \in W. \end{aligned}$$

Nous prenons maintenant $\psi = \varphi(t) - \varphi_\zeta(t)$ dans l'égalité précédente pour trouver

$$\begin{aligned} a_\alpha(\dot{\varphi}_\zeta(t) - \dot{\varphi}(t), \varphi(t) - \varphi_\zeta(t)) + a_{\mathcal{P}}(\dot{\theta}_\zeta(t) - \dot{\theta}(t), \varphi(t) - \varphi_\zeta(t)) \\ = a_e(\varphi_\zeta(t) - \varphi(t), \dot{u}(t) - \dot{u}_\zeta(t)) \quad \forall \psi \in W. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Par ailleurs, nous réécrivons (4.94) et (4.98) au temps $t = 0$ et, nous utilisons les conditions initiales

$$u_\zeta(0) = u(0) = u_0, \quad \theta_\zeta(0) = \theta(0) = \theta_0.$$

Et l'unicité de la solution de l'équation variationnelle (4.109) pour voir que

$$\varphi_\zeta(0) = \varphi(0) = \varphi_0. \quad (4.117)$$

Nous combinons maintenant (4.115) et (4.116) pour obtenir

$$\begin{aligned} & a_\mu(u_\zeta(t) - u(t), \dot{u}_\zeta(t) - \dot{u}(t)) + a_{\mathcal{M}}(\theta_\zeta(t) - \theta(t), \dot{u}(t) - \dot{u}_\zeta(t)) \\ & \leq \frac{\|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{4\zeta^*} \|\dot{u}(t)\|_V^2 + a_\alpha(\dot{\varphi}_\zeta(t) - \dot{\varphi}(t), \varphi(t) - \varphi_\zeta(t)) \\ & \quad + a_{\mathcal{P}}(\dot{\theta}_\zeta(t) - \dot{\theta}(t), \varphi(t) - \varphi_\zeta(t)). \end{aligned} \quad (4.118)$$

Soit $s \in [0, T]$. Nous intégrons l'inégalité précédente sur l'intervalle $[0; s]$, en tenant compte de la donnée initiale (4.96), (4.100), (4.117) et, nous utilisons la coersivité des formes bilinéaires $a_{\mathcal{M}}$, a_{α} , $a_{\mathcal{P}}$ et (4.105) pour obtenir

$$\frac{\zeta^*}{2} \|u_{\zeta}(s) - u(s)\|_V^2 \leq \frac{\|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{2\zeta^*} \int_{\Gamma} \|\dot{u}\|_V^2 dt, \quad (4.119)$$

en faisant la somme de deux égalités (4.95), (4.99) et les conditions (4.19), (4.20) et l'égalité (4.119) pour trouver

$$\left\| \dot{\theta}_{\zeta}(t) - \dot{\theta}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{2\zeta^*} \int_{\Gamma} \|\dot{u}_{\zeta} - \dot{u}\|_V^2 dt. \quad (4.120)$$

Nous réécrivons (4.94) et (4.98) avec $t = s$, $\psi = \varphi_{\zeta}(s) - \varphi(s)$ et, en soustraire les égalités obtenues, ce qui donne

$$\begin{aligned} a_{\alpha}(\varphi_{\zeta}(s) - \varphi(s), \varphi_{\zeta}(s) - \varphi(s)) + a_{\mathcal{P}}(\theta_{\zeta}(s) - \theta(s), \varphi_{\zeta}(s) - \varphi(s)) \\ = a_e(u_{\zeta}(s) - u(s), \varphi_{\zeta}(s) - \varphi(s)). \end{aligned} \quad (4.121)$$

Alors, on utilise la coersivité de les formes bilinéaires a_{α} , $a_{\mathcal{P}}$ et, la continuité de la forme bilinéaire a_e on obtient

$$\|\varphi_{\zeta}(s) - \varphi(s)\|_W \leq \frac{\|e\|_{L^\infty(\Omega)}}{\alpha^*} \|u_{\zeta}(s) - u(s)\|_V + \frac{\|p\|_{L^\infty(\Omega)}}{\alpha^*} \|\theta_{\zeta}(s) - \theta(s)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.122)$$

Supposons que (4.110) est satisfaite. Alors (4.119), (4.120) et (4.122) donnent le résultat de convergence (4.111), ce qui conclut la démonstration. ■

Conclusion Nous concluons que la solution du problème antiplan viscoélastique de contact de type Tresca peut être approximée par la solution du problème antiplan élastique de contact avec frottement de type Tresca, quand le coefficient de viscosité est suffisamment petit. Ce résultat indique que, dans le contexte des problèmes antiplans, l'élasticité avec frottement de type Tresca peut être considéré comme un cas limite

de viscosité avec frottement de type Tresca.

Chapitre 5

Analyse d'un problème antiplan thermo-électro-viscoélastique avec mémoire longue

Ce chapitre, est consacré à l'étude mathématique d'un problème antiplan électro-viscoélastique de contact avec frottement entre un matériau électro-viscoélastique, supposé avec effet thermique, et une base. Après avoir établi la formulation variationnelle et avoir posé les hypothèses nécessaires, nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution.

Le contenu de ce chapitre a fait l'objet de la publication [11].

5.1 Formulation du problème-hypothèses

5.1.1 Formulation mécanique du problème

Dans cette section, nous recueillons les équations et les conditions dans le chapitre 3 pour maintenir la formulation classique du problème antiplan pour les matériaux viscoélastiques avec mémoire longue en contact de frottement avec une fondation.

Notre problème antiplan peut se formuler comme suit :

Problème \mathcal{P} : Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ de température $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\operatorname{div}(\mu \nabla u) + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \operatorname{div}(\nabla u(s)) ds + \operatorname{div}(e \nabla \varphi) - \operatorname{div}(\theta \mathcal{M}_c) + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (5.1)$$

$$\operatorname{div}(e \nabla u - \alpha \nabla \varphi) - \operatorname{div}(\theta \mathcal{P}) = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (5.2)$$

$$\dot{\theta} - \operatorname{div}(K \nabla \theta) = -\mathcal{M}_c \nabla \dot{u} + h(t) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (5.3)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T], \quad (5.4)$$

$$\mu \partial_\nu u + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \partial_\nu u(s) ds + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T], \quad (5.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\mu \partial_\nu u + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \partial_\nu u(s) ds + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \nu| \leq g \\ |\mu \partial_\nu u + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \partial_\nu u(s) ds + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \nu| < g \Rightarrow \dot{u} = 0 \\ |\mu \partial_\nu u + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \partial_\nu u(s) ds + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \nu| = g \Rightarrow \exists \beta \geq 0 \\ \text{tel que } \mu \partial_\nu u + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \partial_\nu u(s) ds + e \partial_\nu \varphi - \theta \mathcal{M}_c \cdot \nu = -\beta \dot{u} \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (5.6)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times [0, T], \quad (5.7)$$

$$e \partial_\nu u - \alpha \partial_\nu \varphi = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times [0, T], \quad (5.8)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times [0, T]. \quad (5.9)$$

$$e\partial_\nu u - \alpha\partial_\nu \varphi - \theta\mathcal{P}.\nu = k(\varphi - \varphi_F) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (5.10)$$

$$-k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} n_i = k_e(\theta - \theta_R) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (5.11)$$

$$u(0) = u_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (5.12)$$

Nous notons que (5.1) et (5.2) représentent les équations d'équilibre, l'équation (5.3) décrit l'évolution du champ de température, où $K := (k_{ij})$ représente le tenseur de conductivité thermique, $h(t)$ la densité de la source thermique. La condition aux limites de température associée est donnée par (5.11), où θ_R est la température de la fondation, et k est le coefficient de l'échange entre le corps et l'obstacle. L'équation (5.7) signifie que la température disparaît sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times [0, T]$. Les équations (5.4) - (5.5) sont les conditions de déplacement-traction. L'équation (5.6) représente la loi de frottement de Tresca. (5.8) représente la condition aux limites de la charge surfaciques. La condition (5.10) représente la condition électrique que nous avons défini dans (3.73) et qui décrit l'échange du potentiel entre le corps piézoélectrique et la fondation Dans (5.12), u_0 , est le déplacement initial et θ_0 est la température initiale.

Nous passons maintenant à la construction de la formulation variationnelle du problème.

5.1.2 Hypothèses

Pour étudier le Problème \mathcal{P} , on suppose que la fonction de relaxation \mathcal{G} possède la régularité

$$\mathcal{G} \in W^{1,2}(0, T), \quad (5.13)$$

et le coefficient de permittivité électrique vérifie :

$$\alpha \in L^\infty(\Omega) \text{ et il existe } \alpha^* > 0 \text{ tel que } \alpha(\mathbf{x}) \geq \alpha^* \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5.14)$$

Souvent, on suppose que le coefficient de Lamé et le coefficient piézoélectrique satisfaites :

$$\mu \in L^\infty(\Omega) \text{ et } \mu(\mathbf{x}) > 0 \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5.15)$$

$$e \in L^\infty(\Omega) \quad (5.16)$$

Les tenseurs thermiques satisfont

$$\mathcal{M}_c = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{c_1} \\ \mathcal{M}_{c_2} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } \mathcal{M}_{c_i}(x_1, x_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{M}_{c_i} \in L^\infty(\Omega), \quad (5.17)$$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } p_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, p_i \in L^\infty(\Omega).$$

Les données thermiques aux limites satisfont

$$\theta_R \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_3)), \quad k_e \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+), \quad h \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)). \quad (5.18)$$

Le tenseur de conductivité thermique vérifie la symétrie et l'ellipticité usuelles : pour certains $c_k > 0$ et pour tous $\xi_i \in \mathbb{R}^d$

$$K = (k_{ij}), \quad k_{ij} = k_{ji} \in L^2(\Omega), \quad \forall c_k > 0, \quad \xi_i \in \mathbb{R}^d; \quad k_{ij}\xi_i \cdot \xi_j \leq c_k \xi_i \cdot \xi_j. \quad (5.19)$$

On suppose que les forces volumiques f_0 et de tractions f_2 sont supposées avoir la régularité

$$f_0 \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \text{ et } f_2 \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_2)). \quad (5.20)$$

Le champ électrique de densité volumique q_0 et les charges électriques de densité surfacique q_2 satisfont

$$q_0 \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \quad \text{et} \quad q_2 \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_b)). \quad (5.21)$$

Le coefficient de conductivité électrique et le seuil de frottement g vérifient les propriétés :

$$k \in L^\infty(\Gamma_3) \quad \text{et} \quad k(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \quad (5.22)$$

$$g \in L^\infty(\Gamma_3) \quad \text{et} \quad g(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (5.23)$$

De plus, nous supposons que le potentiel électrique de la fondation est tel que :

$$\varphi_F \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_3)). \quad (5.24)$$

Enfin, nous supposons que les données initiales vérifient :

$$u_0 \in V, \quad \theta_0 \in L^2(\Omega), \quad (5.25)$$

et de plus,

$$a_\mu(u_0, v)_V + j(v) \geq (f(0), v)_V, \quad \forall v \in V. \quad (5.26)$$

On considère la fonctionnelle $j : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ donnée par

$$j(v) = \int_{\Gamma_3} g |v| \, da \quad \forall v \in V. \quad (5.27)$$

Souvent nous définissons les applications $f : [0, T] \rightarrow V$ et $q : [0, T] \rightarrow W$, respectivement, par

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t)v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t)v \, da, \quad (5.28)$$

$$(q(t), \psi)_W = \int_{\Omega} q_0(t)\psi \, dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t)\psi \, da + \int_{\Gamma_3} k\varphi_F(t)\psi \, da, \quad (5.29)$$

$$\forall v \in V, \psi \in W, \forall t \in [0, T].$$

La définition des opérateurs f et q sont basées sur le théorème de *représentation de Riesz* ; de plus, il suit des hypothèses (5.20) et (5.21), nous en déduisons que les intégrales ci-dessus sont bien définies et

$$f \in W^{1,2}(0, T; V), \quad (5.30)$$

$$q \in W^{1,2}(0, T; W). \quad (5.31)$$

Par la suite, on définit les formes bilinéaires les égalités :

$$a_{\mu} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_{\mu}(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad (5.32)$$

$$a_e : V \times W \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_e(u, \varphi) = \int_{\Omega} e \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = a_e^*(\varphi, u), \quad (5.33)$$

$$a_{\alpha} : W \times W \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_{\alpha}(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \alpha \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{\Gamma_3} k\varphi\psi \, da, \quad (5.34)$$

$$a_{\mathcal{M}} : E \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_{\mathcal{M}}(\theta, v) = \int_{\Omega} \mathcal{M}_c \theta \cdot \nabla v \, dx, \quad (5.35)$$

$$a_{\mathcal{P}} : E \times W \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_{\mathcal{P}}(\theta, \psi) = \int_{\Omega} \mathcal{P} \theta \cdot \nabla \psi \, dx, \quad (5.36)$$

pour tout $u, v \in V$, $\varphi, \psi \in W$.

Les hypothèses (5.27)–(5.29) impliquent que les intégrales précédentes sont bien

définies et, en utilisant la relation (3.85) et (3.86), il suit que les formes bilinéaires $a_\mu, a_e, a_e^*, a_{\mathcal{M}}, a_{\mathcal{P}}$ sont continues; de plus, les formes a_μ et a_α sont symétriques et, la forme a_α est W-elliptique, alors on obtient :

$$a_\alpha(\psi, \psi) \geq \alpha^* \|\psi\|_W^2 \quad \forall \psi \in W. \quad (5.37)$$

De plus, on définit les opérateurs suivants $Q : [0, T] \rightarrow E', K : E \rightarrow E'$ et $R : V \rightarrow E'$ par

$$\begin{aligned} \langle Q(t), \mu \rangle_{E' \times E} &= \int_{\Gamma_3} k_c \theta_R \mu \, ds + \int_{\Omega} h(t) \mu \, dx, \\ \langle K\tau, \mu \rangle_{E' \times E} &= \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} k_{ij} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Gamma_3} k_c \tau \mu \, ds, \\ \langle Rv, \mu \rangle_{E' \times E} &= \int_{\Gamma_3} h_\tau (|v_\tau|) \mu \, ds - \int_{\Omega} (\mathcal{M}_c \nabla v) \mu \, dx, \end{aligned}$$

pour tout $\forall v \in V, \forall \tau \in E, \forall \mu \in E$

5.2 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle du problème \mathcal{P} obtenue à l'aide de la formule de Green (3.88) est la suivante :

Problème \mathcal{P}_V : trouver le champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow V$, un potentiel électrique $\varphi : [0, T] \rightarrow W$ et le champ de température $\theta : [0, T] \rightarrow E$ tels que

$$\begin{aligned} a_\mu(u(t), v - \dot{u}(t)) + \left(\int_0^t \mathcal{G}(t-s) u(s) \, ds, v - \dot{u}(t) \right)_V + a_e^*(\varphi(t), v - \dot{u}(t)) \\ - a_{\mathcal{M}}(\theta, v - \dot{u}(t)) + j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad \forall v \in V, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$a_\alpha(\varphi(t), \psi) - a_e(u(t), \psi) - a_{\mathcal{P}}(\theta, \psi) = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T], \quad (5.39)$$

$$\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = R\dot{u}(t) + Q(t) \quad \text{dans } E', \quad (5.40)$$

$$u(0) = u_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (5.41)$$

5.3 Résultat d'existence et d'unicité

Théorème 5.3.1 *Sous les hypothèses (5.13)-(5.31) le problème \mathcal{P}_V admet une solution unique (u, θ, φ) satisfaisant*

$$\begin{aligned} u &\in W^{1,2}(0, T; V); \quad \varphi \in W^{1,2}(0, T; W), \\ \theta &\in W^{1,2}(0, T; E') \cap L^2(0, T; E) \cap C(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Un élément (u, φ, θ) qui résout \mathcal{P}_V est appelé *une solution faible* du problème mécanique \mathcal{P} . On conclut par le Théorème 5.3.1 que le problème de contact antiplan \mathcal{P} a une *unique solution faible*, à condition que (5.13)-(5.31) soit vérifiée.

La preuve du Théorème 5.3.1, s'effectue en plusieurs étapes que nous prouvons dans ce qui suit, partout dans cette section on suppose que les hypothèses du Théorème 5.3.1. sont vraies et on note $C > 0$ une constante générique, dont la valeur peut changer de lignes en lignes .

Dans la première étape de la preuve, nous introduisons l'ensemble

$$\mathcal{W} = \{ \eta \in W^{1,2}(0, T; X) \mid \eta(0) = 0_X \}, \quad (5.43)$$

et nous prouvons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Lemme 5.3.2 *pour tout $\eta \in \mathcal{W}$, il existe un élément unique $u_\eta \in W^{1,2}(0, T; V)$ tels que*

$$\begin{aligned} a_\mu(u_\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t)) + (\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t))_X + j(v) - j(\dot{u}_\eta(t)) \\ \geq (f(t), v - \dot{u}_\eta(t))_X \quad \forall v \in X, \quad a.e. \ t \in [0, T], \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$u_\eta(0) = u_0. \quad (5.45)$$

Ici X est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et a_μ une forme bilinéaire continue et symétrique.

Preuve. Nous utilisons un résultat d'existence et d'unicité abstrait qui peut être trouvé dans [3]. ■

Dans la deuxième étape, nous utilisons le champ des déplacements u_η obtenu au Lemme 5.3.2 et nous considérons le lemme suivant.

Lemme 5.3.3 *pour tout $\eta \in \mathcal{W}$, il existe une unique solution*

$$\theta_\eta \in W^{1,2}(0, T; E') \cap L^2(0, T; E) \cap C(0, T; L^2(\Omega)), \quad c > 0 \quad \forall \eta \in L^2(0, T, V'),$$

satisfaisant

$$\begin{cases} \dot{\theta}_\eta(t) + K\theta_\eta(t) = R\dot{u}_\eta(t) + Q(t) & \text{in } E' \text{ p.p. } t \in [0, T] \\ \theta_\eta(0) = \theta_0, \end{cases}, \quad (5.46)$$

$$|\theta_{\eta_1} - \theta_{\eta_2}|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t |\dot{u}_{\eta_1}(s) - \dot{u}_{\eta_2}(s)|_V^2 ds \quad \forall t \in [0, T], \quad (5.47)$$

et

$$|\dot{\theta}_{\eta_1} - \dot{\theta}_{\eta_2}|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t |\dot{u}_{\eta_1}(s) - \dot{u}_{\eta_2}(s)|_V^2 ds \quad \text{p.p. } t \in [0, T]. \quad (5.48)$$

Preuve. La vérification du résultat d'existence et d'unicité (5.46) découle du résultat classique sur l'équation d'évolution du premier ordre, appliqué au triplet de Gelfand

$$E \subset L^2(\Omega) \equiv L^2(\Omega)' \subset E'.$$

On vérifie que l'opérateur $K : E \rightarrow E'$ est linéaire, coercive. Maintenant, à partir de l'expression de l'opérateur R , $v_\eta \in W^{1,2}(0, T; V) \implies Rv_\eta \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega))$, comme $Q \in W^{1,2}(0, T; E)$ alors $Rv_\eta + Q \in W^{1,2}(0, T; E)$, on déduit (5.47) et (5.48) (voir [2]).

■

Dans la troisième étape, on utilise le champ des déplacements u_η obtenu au Lemme 5.3.2 et θ_η obtenu au Lemme 5.3.3 on considère le Lemme suivant.

Lemme 5.3.4 *pour tout $\eta \in \mathcal{W}$, il existe un unique solution $\varphi_\eta \in W^{1,2}(0, T; W)$ qui satisfait*

$$a_\alpha(\varphi_\eta(t), \psi) - a_e(u_\eta(t), \psi) + a_{\mathcal{P}}(\theta_\eta, \psi) = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, t \in [0, T]. \quad (5.49)$$

De plus, si φ_{η_1} et φ_{η_2} sont des solutions de (5.49) correspondant à $\eta_1, \eta_2 \in C([0, T], V)$, alors il existe $c > 0$ tel que

$$\|\varphi_{\eta_1}(t) - \varphi_{\eta_2}(t)\|_W \leq c \left(\|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_V + \|\theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Omega)} \right) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.50)$$

Preuve. Soit $t \in [0, T]$. On utilise la propriété de la forme bilinéaire a_α et le lemme de Lax-Milgram pour voir qu'il existe un unique élément $\varphi_\eta(t) \in W$ qui résout (5.49) à n'importe quel moment $t \in [0, T]$.

Considérez maintenant $t_1, t_2 \in [0, T]$; nous utilisons (5.49), on a

$$\begin{aligned} a_\alpha(\varphi_\eta(t_1), \psi) - a_e(u_\eta(t_1), \psi) + a_{\mathcal{P}}(\theta_\eta(t_1), \psi) \\ = (q(t_1), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, t_1 \in [0, T], \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} a_\alpha(\varphi_\eta(t_2), \psi) - a_e(u_\eta(t_2), \psi) + a_{\mathcal{P}}(\theta_\eta(t_2), \psi) \\ = (q(t_2), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, t_2 \in [0, T]. \end{aligned} \quad (5.52)$$

En utilisant les relations (5.51), (5.52) et (5.37), on obtien donc

$$\begin{aligned} \alpha^* \|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\|_W^2 \leq & (\|e\|_{L^\infty(\Omega)} \|u(t_1) - u(t_2)\|_V + \|q(t_1) - q(t_2)\|_W + \\ & \|p\|_{L^\infty(\Omega)} \|\theta(t_1) - \theta(t_2)\|_{L^2(\Omega)}) \|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\|_W, \end{aligned}$$

il résulte de l'inégalité précédente que

$$\|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\|_W \leq c(\|u(t_1) - u(t_2)\|_V + \|q(t_1) - q(t_2)\|_W + \|\theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}). \quad (5.53)$$

Alors, la régularité $u_\eta \in W^{1,2}(0, T; V)$ combinée avec la relation (5.31) et (5.53) ce qui implique que $\varphi_\eta \in W^{1,2}(0, T; W)$ ce qui conclut la démonstration. ■

Maintenant, pour tout $\eta \in \mathcal{W}$ on note par u_η , θ_η et φ_η obtenu en Lemme 5.3.2, Lemme 5.3.3 et Lemme 5.3.4 respectivement

Dans la quatrième étape, on considère l'opérateur $\Lambda : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$.

Nous utilisons maintenant le *théorème de représentation de Riesz* pour définir l'élément $\Lambda\eta(t) \in \mathcal{W}$ par l'égalité

$$\begin{aligned} \langle \Lambda\eta(t), w \rangle_{\mathcal{W}} &= \left(\int_0^t \mathcal{G}(t-s)u_\eta(s)ds, w \right)_V + a_{\mathcal{M}}(\theta(t), w) + a_e^*(\varphi_\eta(t), w) \quad (5.54) \\ \forall \eta &\in \mathcal{W}, w \in \mathcal{W}, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Il est clair, pour $\eta \in \mathcal{W}$ donné, la fonction $t \rightarrow \Lambda\eta(t)$ se prolonge dans \mathcal{W} . Dans cette étape, nous pouvons voir que l'opérateur $\Lambda : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ admet un seul point-fixe.

Lemme 5.3.5 *L'opérateur Λ admet un point fixe unique $\eta^* \in \mathcal{W}$ tel que $\Lambda\eta^* = \eta^*$.*

Preuve. Soit $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{W}$ et $t \in [0, T]$. Dans ce qui suit, nous notons par u_i , θ_i et φ_i les fonctions u_{η_i} , θ_{η_i} et φ_{η_i} obtenues dans les Lemmes 5.3.2, 5.3.3 et 5.3.4, pour $i = 1, 2$. Nous utilisons (5.54) et (5.33), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_X^2 \quad (5.55) \\ &\leq C \left(\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X^2 ds + \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 \right) \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

La constante C représente un nombre positif qui dépend des paramètres $\|\mathcal{G}\|_{W^{1,2}(0,T)}$, T , m_{ij} et e , avec leurs valeurs changent de temps en temps. De plus $u_\eta \in W^{1,2}(0, T; V)$ et $\varphi_\eta \in W^{1,2}(0, T; W)$, alors nous pouvons déduire de l'inégalité (5.55) que $\Lambda_\eta \in$

$W^{1,2}(0, T; X)$. D'autre part, (5.50) et par des arguments similaires comme les paramètres utilisés dans la démonstration du (5.53), on obtient :

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W \leq C \left(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V + \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^2(\Omega)} \right). \quad (5.56)$$

Nous utilisons maintenant (5.47), (5.56) dans (5.55), nous aurons

$$\begin{aligned} & \|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_X^2 \\ \leq & C \left(\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X^2 ds + \int_0^t \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_X^2 ds + \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \right). \end{aligned}$$

Utilisation de la norme sur l'espace $W^{1,2}(0, T, X)$ on en déduit que

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_X^2 \leq C \|u_1(s) - u_2(s)\|_X^2 ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.57)$$

Nous tenons compte de (5.38), on aura l'inégalité :

$$\begin{aligned} & a(u_1(t), v - \dot{u}_1(t)) + (\eta_1(t), v - \dot{u}_1(t))_X + j(v) - j(\dot{u}_1(t)) \\ & \geq (f(t), v - \dot{u}_1(t))_X \quad \forall v \in X, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & a(u_2(t), v - \dot{u}_2(t)) + (\eta_2(t), v - \dot{u}_2(t))_X + j(v) - j(\dot{u}_2(t)) \\ & \geq (f(t), v - \dot{u}_2(t))_X \quad \forall v \in X, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

pour tout $v \in X$, a.e. $s \in [0, T]$. Nous choisissons $v = \dot{u}_2(s)$ dans la première inégalité et $v = \dot{u}_1(s)$ dans la deuxième inégalité, et nous ajoutons le nouveau résultat obtenu, alors nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \|u_1(s) - u_2(s)\|_X^2 \leq -(\eta_1(s) - \eta_2(s), \dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s))_X \quad \text{a.e. } s \in [0, T].$$

Soit $t \in [0, T]$. Nous intégrons l'inégalité précédente de 0 jusqu'au t et nous utilisons

la relation (5.42), nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \|u_1(t) - u_2(t)\|_X^2 \leq -(\eta_1(t) - \eta_2(t), u_1(t) - u_2(t))_X + \int_0^t (\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s), u_1(s) - u_2(s))_X ds.$$

Nous déduisons que :

$$C \|u_1(t) - u_2(t)\|_X^2 \leq \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_X \|u_1(t) - u_2(t)\|_X + \int_0^t \|\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)\|_X \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds.$$

Nous utilisons l'inégalité de Young, nous avons :

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_X^2 \leq C(\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_X^2 + \int_0^t \|\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)\|_X^2 ds + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X^2 ds). \quad (5.58)$$

D'autre part, on a :

$$\eta_1(t) - \eta_2(t) = \int_0^t \dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s) ds,$$

nous pouvons obtenir

$$\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_X^2 \leq C \int_0^t \|\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)\|_X^2 ds. \quad (5.59)$$

Maintenant, nous utilisons (5.59) dans (5.58), Nous avons :

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_X^2 \leq C \left(\int_0^t \|\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)\|_X^2 ds + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X^2 ds \right).$$

En tenant compte de l'inégalité de Gronwall, on en déduit :

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_X^2 \leq C \int_0^t \|\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)\|_X^2 ds. \quad (5.60)$$

De (5.57) et (5.60), on obtient :

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_X^2 \leq C \int_0^t \|\dot{\eta}_1(s) - \dot{\eta}_2(s)\|_X^2 ds.$$

Par itération de la dernière inégalité m fois, nous obtenons donc :

$$\|\Lambda^m\eta_1(t) - \Lambda^m\eta_2(t)\|_X^2 \leq C^m \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{m-1}} \|\dot{\eta}_1(s_m) - \dot{\eta}_2(s_m)\|_X^2 ds_m \dots ds_1,$$

où Λ^m désigne la puissance de l'opérateur Λ . La dernière inégalité donne :

$$\|\Lambda^m\eta_1(t) - \Lambda^m\eta_2(t)\|_{W^{1,2}(0,T;X)}^2 \leq \frac{C^m T^m}{m!} \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_{W^{1,2}(0,T;X)}^2,$$

ce qui implique que l'opérateur Λ^m est contractant dans l'espace de Banach puisque

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{C^m T^m}{m!} = 0,$$

il suit maintenant du théorème de point-fixe de Banach qu'il existe un seul élément noté $\eta^* \in \mathcal{W}$ tel que $\Lambda^m\eta^* = \eta^*$. De plus, puisque

$$\Lambda^m(\Lambda\eta^*) = \Lambda(\Lambda^m\eta^*) = \Lambda\eta^*,$$

nous pouvons déduire que $\Lambda\eta^*$ est un point-fixe de l'opérateur noté Λ^m . Par l'unicité du point-fixe, Nous concluons que $\Lambda\eta^* = \eta^*$, ce qui montre que η^* est un point-fixe de Λ , ce qui conclut que $\Lambda\eta^* = \eta^*$. ■

Dans la cinquième étape de notre démonstration, nous avons maintenant tous les ingrédients pour fournir le Théorème 5.3.1.

Existence.

Soit $\eta^* \in W^{1,2}(0, T; X)$ un point fixe de l'opérateur Λ , et soit u_{η^*} , θ_{η^*} et φ_{η^*} être les solutions définies dans les Lemmes 5.3.2, 5.3.2 et 5.3.4, respectivement, pour $\eta = \eta^*$.

Il découle de (5.54) que :

$$\langle \eta^*(t), w \rangle_V = \left(\int_0^t \mathcal{G}(t-s) u_{\eta^*}(s) ds, w \right)_V - a_{\mathcal{M}}(\theta_{\eta^*}(t), w) + a_e^*(\varphi_{\eta^*}(t), w) \quad \forall w \in V, t \in [0, T]. \quad (5.61)$$

et, alors, (5.38), (5.40), et (5.50) implique que $(u_{\eta^*}, \theta_{\eta^*}, \varphi_{\eta^*})$ est une solution du problème \mathcal{P}_V . La régularité (5.42) de la solution suit directement à partir des Lemmes 5.3.2, 5.3.3 et 5.3.4.

Unicité.

L'unicité de la solution suit de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ . Il est possible aussi d'obtenir cette unicité par des arguments similaires utilisés dans les références [19] et [36].

Conclusion et Perspective

Dans cette thèse nous avons étudié quelques problèmes aux limites en mécanique de contact. Nous nous sommes placés dans le cadre des déformations antiplans et nous avons étudié des processus quasistatiques pour des matériaux thermo-électro-viscoélastiques, i.e. le couplage entre l'effet thermique et l'effet électrique, ce qui constitue l'originalité des modèles étudiés dans cette thèse. Les résultats que nous avons obtenu concernent l'existence et l'unicité des solutions faibles, ainsi que le comportement des solutions viscoélastiques lorsque la viscosité converge vers zéro. Il nous reste de trouver l'existence et l'unicité des problèmes thermo-électro-viscoélastiques dans le cas dynamique ainsi que l'étude numérique de ces problèmes.

Bibliographie

- [1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] S. Adly and O. Chau, *On some dynamic thermal non clamped contact problems*, Math. Programm., Ser. B (2013)139 :5-26.
- [3] F. Andreu, J. M. Mazón and M. Sofonea : *Entropy solutions in the study of antiplane shear deformations for elastic solids*. Math Models Methods Appl. Sci. 10 (2000), 99–126.
- [4] K. T. Andrews, A. Klarbring, M. Shillor and S. Wright, *A Dynamic Thermoviscoelastic Contact Problem with Friction and Wear*, Int. J. Eng. Sci, Vol 35, No 14, 1291-1309. (1997).
- [5] K. T. Andrews, M. Shillor and K. L. Kuttler (1997), *On the dynamic behavior of a thermoviscoelastic body in frictional contact with a rigid obstacle*, Euro. J. Appl. Math. 8, 417-436.
- [6] M. Barboteu and M. Sofonea, *Solvability of a dynamic contact problem between a piezoelectric body and a conductive foundation*. Appl. Math. Comput. Vol 215, p2978-2991 (2009).
- [7] M. Barboteu and M. Sofonea, *Modelling and analysis of the unilateral contact of a piezoelectric body with a conductive support*. J. Math. Anal. Appl. 358, 110-124 (2009).
- [8] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, Editura Academiei, Bucharest-Noordhoff, Leyden, (1976).

- [9] V. Barbu, *Optimal Control of Variational Inequalities*, Pitman Advanced Pub. Program. (1984).
- [10] R.C. Batra , J.S. Yang, *Saint Venant's principle in linear piezoelectricity*, Journal of Elasticity,38(1995), 209-218.
- [11] L. Benziane and N. Lebri, *Analysis of an Antiplane Thermo-Electro-Viscoelastic Contact Problem with long-term Memory*. Nonlinear Dynamic and Systems Theory. Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 22 (5) (2022) 473–488
- [12] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson, Paris (1987).
- [13] H. Brézis, *Equations et Inéquations Non Linéaires dans les Espaces en Dualité*, Annale de l'Institut Fourier, Tome 18, n 1, (1968), p. 115-175.
- [14] O. Chau, *On a class of second order evolution inequality and application*, Int. J. of Appl. Math. and Mech. 4 (1) : 24-48, (2008).
- [15] O. Chau, J. R. Fernández, M. Shillor and M. Sofonea, *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion*, J. Comput. Appl. Math 159 (2003), No 2, 431–465.
- [16] R. Chougui and N. Lebri, *A Quasistatic Antiplane Thermal contact problem*. Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol. 8(2) July 2020, pp. 60-70.
- [17] R. Chougui and N. Lebri, *Analysis of a thermo-viscoelastic antiplane contact problem with long-term memory*. An. Științ. Univ. Al. I. Cuza Iași Mathematics. (2021), Vol. 67 Issue 1, p97-111. 15p.
- [18] M. Dalah, *Thèse de Doctorat, Etude des problème paraboliques à données manquantes*, Université de Constantine, Année (2008).
- [19] M. Dalah and M. Sofonea, *Antiplane Frictional Contact of Electro-Viscoelastic Cylinders*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2007(2007), No. 161, pp. 1–14. ISSN : 1072-6691.

- [20] S. Djabi, *Méthodes fonctionnelles en viscoplasticité*, thèse de Doctorat d'Etat en Mathématiques Appliquées, Université de Sétif, 1994.
- [21] A. Djabi, A. Merouani, *A fixed point method for a class of nonlinear evolution systems modeling a mechanical phenomenon*, Int.J.Open problems Compt. Math., Vol. 8, No. 1(2015), p 1-13.
- [22] A. Djabi, A. Merouani, *Bilateral contact problem with friction and wear for an electro elastic-viscoplastic materials with damage*, Taiwanese J. Math. Vol.19, No.4, pp. 1161-1182, August 2015.
- [23] S. Djabi, *A Monotony Method in Quasi-Static Process for Viscoplastic Materials with Internal Variables*. Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquees, (1997).
- [24] G. Duvaut and J. L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod (1976).
- [25] M. Frémond, *Non-Smooth Thermomechanics*, Springer, Berlin, 2002.
- [26] R. J. Gu and M. Shillor(2001), *Thermal and wear analysis of an elastic beam in sliding contact*, Int. J. Solids Structures 38(14), 2323-2333.
- [27] R. Guettaf and A. Touzaline, *Analysis of a contact problem with adhesion for electro-viscoelastic materials with long memory*. Rev. Roum.Math. Appl. 58(1), 67-84 (2013).
- [28] W. Han and M. Sofonea, *Quasistatic contact problems in viscoelasticity and viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI-International Press, 2002.
- [29] I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Necăs and J. Lovíšek, *Solutions of Variational Inequalities in Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [30] C. O. Horgan and K. L. Miller. *Antiplane shear deformations for homogeneous and inhomogeneous anisotropic linearly elastic solids*. J. Appl. Mech. 61 (1994), 23–29.

- [31] A. Klarbring, A. Mikelic and M. Shillor, *A global existence result for the quasi-static frictional contact problem with normal compliance in Unilateral Problems in Structural Analysis* Vol. 4, Eds.
- [32] N. Lebri, S. Djabi and S. Boutechebak, *Bilateral Contact with Tresca's Friction Law with Internal State Variables*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 2no. 10, 479 – 488 (2008).
- [33] N. Lebri and S. Djabi *Frictional bilateral contact in viscoplasticity*. Far East J. Math. Sci. (FJMS) 29 (2), 467-479(2008).
- [34] N. Lebri, *Thèse de doctorat, Etude variationnelle et numérique de quelques problèmes en viscoplasticité*, Université Sétif, 2008.
- [35] N. Lebri, *Existence resultat for quasistatic contact problem with internal state variable*, ij pam.eu, Vol 87, No. 2 ; pp. 205-217 ; 2013.
- [36] Z. Lerguet, *Thèse de doctorat, Analyse de quelques problèmes de contact avec frottement et adhésion*, Université de Sétif, (2008).
- [37] G. Leszek, A. Ochala and M. Shillor, *Quasistatic thermoviscoelastic problem with normal compliance, multivalued friction and wear diffusion*. *Nonlinear Analysis : R. W. A* (27), 183-202. (2016).
- [38] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod et Gauthier-Villars, Paris 1969.
- [39] A. Matei, V. Motreanu and M. Sofonia, *A Quasistatic Antiplane Contact Problem With Slip Dependent Friction*, *Advances in Nonlinear Variational Inequalities* 4 (2001).
- [40] R. D. Mindlin ; *Continuum and lattice theories of influence of electromechanical coupling on capacitance of thin dielectric films*, *Int. J. Solids* Vol 5 (1969),1197-1208.
- [41] R D. Mindlin, *Elasticity, Piezoelectricity and Crystal lattice dynamics*, *J. of Elasticity* 2 (1972), 217-282.

- [42] J. Nečas, I Hlaváček, *Mathematical Theory of Elastic and Elasto-Plastic Bodies : An Introduction*, Elsevier, Amsterdam - Oxford - New York, 1981.
- [43] E. Rabinowicz (2003), *Friction and Wear of Materials*, (2nd edition.)-Wiley.
- [44] M. Shillor, M. Sofonea and J. J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, Lecture Notes in Physics, Springer, Berlin, (2004).
- [45] S. Smata and N. Lebri, *A dynamic electroviscoelastic problem with thermal effects*. Studia Univ. Babeş bolayai, Mathematica. Dec2021, Vol. 66 Issue 4, p769-781. 24p.
- [46] M. Sofonea and EL- H. Essoufi, *A piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction*, Mathematical Modelling and Analysis 9, 2010, 229-242.
- [47] M. Sofonea and EL- H. Essoufi, *Quasistatic frictional contact of a viscoelastic piezoelectric body*, Adv. Math. Sci. Appl.14 (1) (2004) 25–40.
- [48] M. Sofonea, W. Han and M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics, (Boca Raton) 276, Chapman, Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006. <https://doi.org/10.1201/9781420034837>.
- [49] M. Sofonea and A. Matei, *Variational Inequalities with Applications, A Study of Antiplane Frictional Contact Problems*, Springer, New York. 2009.
- [50] M. Sofonea and A. Matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, London Mathematical Society Lecture Note Series : 398 (2012).
- [51] M. Sofonea, C. P. Niculescu and A. Matei, *An antiplane contact problem for viscoelastic materials with long-term memory*, (2006) Math. Model. Anal. 11(2), 213-228.
- [52] N. Strömberg, *Continuum Thermodynamics of Contact Friction and Wear*, Thesis No, 491, Departement of Mechanical Engineering, Linkoping Institute of Technology, Linkoping, Sweden, (1995).

ملخص

الغرض من هذه المذكرة هو دراسة بعض مسائل شبه سكونيه لتماس مع احتكاك في إطار التشوهات antiplans. نعتبر قانون السلوك من أجل أجسام حرارية كهروإيضية لزجة. لدراسة هذه المسألة نحصل أولاً على صيغة تغيرية متبوعة بنتائج وجود ووحداية الحلول الضعيفة. هذا العمل يتكون من جزأين. الجزء الأول مخصص للتذكير ببعض نتائج التحليل الدالي والمعادلات التفاضلية الجزئية اللازمة لاستكمال هذه الأطروحة. الجزء الثاني موجه لنمذجة ودراسة مسائل التماس المقترحة.

الكلمات المفتاحية: جسم حراري كهروإيضي- مرن، ذكوة طويلة المدى، احتكاك تريستا، سياق شبه سكوني، حل ضعيف، نقطة ثابتة.

Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude de quelques problèmes aux limites de contact, avec frottement de Tresca, entre un corps déformable et une fondation. Nous nous plaçons dans le cadre des déformations antiplanes et nous étudions des processus quasistatiques pour des matériaux thermo-électro-viscoélastiques. Les résultats que nous obtenons concernant l'existence et l'unicité des solutions faibles. La thèse comporte deux parties. La première partie rappelle quelques résultats préliminaires d'analyse fonctionnelle et d'équations aux dérivées partielles nécessaires pour réaliser la suite de cette thèse. La deuxième partie est consacrée à la modélisation et à l'étude mathématique des problèmes de contact considérés.

Mots clés : matériaux thermo-electro-viscoélastiques, mémoire longue, frottement de Tresca, processus quasistatique, solution faible, point fixe.

Abstract

The aim of this thesis is the study of some boundary value contact problems, with friction, between a body and a foundation. We consider the case of antiplane deformations and we study quasistatic process thermo-electro-viscoelastic materials. The results obtained concern the existence and uniqueness of weak solution. The thesis is divided into two parts. The first part concerns some preliminary results on functional analysis and partial differential equations necessary to carry out the continuation of this thesis. The second part is devoted to the modeling and the mathematical study of the contact problems considered.

Key words : thermo-electro-viscoelastic material, longue memory, Tresca's friction law, quasistatic process, weak solution, fixed point.