الجمـــــهورية الجزائـــــرية الديمقراطيـــة الشعبيـــــــــة

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ FERHAT ABBAS - SETIF1
FACULTÉ DES SCIENCES

THÈSE

Présentée à la faculté des sciences

Département de Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES
Option : Mathématiques Appliquées

Par

KADRI YASMINA

THÈME

Étude asymptotique des EDP avec frottement : modèles bidimensionnels obtenus par réduction de dimension

Soutenue le . /. / 2023 devant le Jury :

A. MEROUANI	**Professeur**	**Univ. Ferhat Abbas Sétif 1**	**Président**
H. BENSERIDI	**Professeur**	**Univ. Ferhat Abbas Sétif 1**	**Rapporteur**
B. NOUIRI	**MCA**	**Université de M'sila**	**Examinateur**
B. GAGUI	**MCA**	**Université de M'sila**	**Examinateur**

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer mes vifs remerciements et ma profonde gratitude à mon directeur de thèse de doctorat, Mr Hamid Benseridi, professeur à l'université Ferhat Abbas-Sétif1, d'avoir dirigé ce mémoire, malgré toutes ses responsabilités et ses occupations. Qu'il soit aussi remercier pour sa gentillesse, sa patience, sa disponibilité et sur tout ses judicieux conseils, qui ont alimenté ma réflexion.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance à Mr Abdelkader Saadallah, maitre de conférence classe A, à l'université Ferhat Abbas-Sétif1, pour son aide et pour ses conseils, ses orientations et son soutien moral.

Je suis très reconnaissante à Mr A. Merouani, professeur à l'université Ferhat Abbas-Sétif1, qui a bien vouloir examiné mon mémoire et l'honneur qu'il me fait en étant président du jury.

J'aimerais aussi exprimer ma gratitude à Mr B. Nouiri, maitre de conférence classe A, à l'université de M'sila et Mr. B. Gagui, maitre de conférence classe A, à l'université de M'sila, qui me font l'honneur d'être membres du jury de soutenance.

Enfin je voudrais remercier tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce travail et sur tout Mr. Abdelmoumene Djabi, maitre de conférence classe B, à l'université Ferhat Abbas-Sétif1.

Dieu merci.

Table des matières

Introduction

Le contact roue-rail, les embrayages, les freins, les pneumatiques, les paliers et roulement à billes, les moteurs à combustion et les liaisons mécaniques ne sont que quelques exemples réelles quotidiens, parmi bien d'autres. Ces phénomènes sont des problèmes de contact avec ou sans frottement, entre deux corps élastiques, viscoélastiques ou plastiques, qui sont déformables ou non. La modélisation mathématique des phénomènes de contact mène à des problèmes aux limites, contenant des lois de comportement des matériaux c'est-à-dire, qu'elle s'interesse à la réaction des structures lorsqu'elle subissent des forces extérieures. Dans notre travail, on s'intéresse aux matériaux élastiques c'est-à-dire le cas où le solide reprend sa forme initiale dès que les forces appliquées sont supprimées.
Dans cette thèse de doctorat, nous étudions deux problèmes impliquant des conditions aux limites décrivant des phénomènes réels tels que le contact et le frottement, qui sont trés fréquent dans les applications et possédant les hypothèses de l'élasticité dans des domaines où la hauteur est plus petite que la longueur.

Le premier problème à étudier est décrit comme suit : on considère un corps élastique isotherme avec des conditions aux limites libres et des conditions de frottement non linéaire de type Coulomb en régime stationnaire. Plusieurs travaux ont été réalisé sur le contact mécanique avec les différentes lois de comportement et différentes conditions aux limites de frottement proche de notre problème. Cependant, ces travaux se sont limités aux seuls resultats de d'existence et d'unicité de la solution faible sous plusieurs hypothèses. Citons par exemple l'article de [31], dans lequel les auteurs ont étudié le modèle mathématique qui décrit le contact de frottement quasi-statique entre un corps piézoélectrique et une fondation déformable avec la condition de compliance normale et une version de la loi de frottement de Coulomb. L'évolution dynamique avec contact frottant d'un coprs élastique a été étudié dans [26] ; les auteurs ont prouvé l'existence d'une solution dans le cas bidimensionnel et l'unicité pour les problèmes de cisaillement unidimensionnel. Une excelente référence sur l'analyse des problèmes de contact impliquant des matériaux élastiques avec ou sans frottement se trouve dans [1] et [12]. Des résultats d'existence, d'unicité et de régularité ont été prouvés pour une nouvelle classe d'inégalités variationnel dans [33]. Dans [2] les auteurs ont étudié l'analyse asymptotique et numérique d'un problème de contact unilatéral avec frottement de Conlomb entre un corps élastique et une couche élastique fine et souple. Récemment l'analyse asymptotique d'un problème dynamique d'élasticité isothèrme et non-isothèrme avec frottement non linéaire de type Tresca a été étudié dans [5] et [31]. Une analyse asymptotique d'un fluide incompressible dans un domaine mince à trois dimension, lorsque'une dimension tend vers zéro a été étudié dans [9], [14] et [15].

Le deuxième problème étudié dans cette thèse est un problème de transmission ; plus précisément est un problème de contact avec frottement entre deux corps élastiques généraux en régime non stationnaire dans un domaine tridimentionnel avec la loi de frottement de Tresca. Plusieurs auteurs se sont intéressés à ce genre de problèmes (problèmes de transmissions), dans différents espaces avec diverses conditions aux limites, par exemple, dans [2], [23] et [35] ; les travaux des auteurs ont été consacré aux comportement asymptotique du système d'élasticité linéarisé avec différentes conditions aux limites. Les auteurs dans [29] et [30] démontrent la transition $3D - 1D$ en élasticité liéarisée hétérogène anisotrope, on mentionne ici que ce phénomène n'a été étudié que sur les solution fortes, sans loi de frottement. Les auteurs dans [28] ont étudié le comportement asymptotique d'un problème de contact avec frottement entre deux corps élastiques ou le tenseur des contraintes avec ses composantes sont donnés uniquement par la loi de Hooke (cas isotrope des matériaux élastiques). Les auteurs dans [4] ont étudié l'analyse théorique d'un contact avec frottement entre deux coprs élastiques généraux en régime stationnaire dans un domaine mince tridimensionnel avec frottement non linéaire de type Tresca, sans termes sources dissipitifs.

Alors notre travail fait suite à [4] et [28] pour étudier la situation hétérogène et anisotrope dans un domaine mince tridimensionnel avec la loi de frottement de Tresca.
La nouveauté de cette étude est d'abord qu'on prend le tenseur des contraintes dont ses composantes sont données par une loi généralisée par rapport à ce qui est donné dans [28]. Le deuxième point fort est que nous étudions le comportement asymptotique du problème de transmission avec des conditions de frottement aux limites libres de Tresca en régime dynamique avec les tremes sources non linéarisés par rapport à ce qui est donné dans [4].

Notre thèse est présentée comme suit :
Dans **le premier chapitre** : nous rappelons les outils mathématiques utilisés dans la suite du travail ; notamment, les espaces fonctionnelles (espaces de Sobolev et espaces de Hilbert) et quelques résultats de l'analyse fonctionnelle comme la théorie des traces, la formule de Green et quelques inégalités (Korn, Poincaré, Hölder et Cauchy-Schwartz). Nous rappelons aussi les lois générales de la mécanique des milieux continus, particulièrement l'équation de mouvement, la loi de comportement élastique et les conditions aux limites de contact de type Tresca et de type Coulomb.
Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du comportement asymptotique d'un problème aux limites dans un domaine borné, homogène, mince et tridimentionnel Ω^ε avec frottement non linéaire de type Coulomb dans un régime stationnaire. La frontière $\partial\Omega^\varepsilon$ est supposé composée de tois parties :
ω est la frontière inférieure de Ω^ε, qui est un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x_3 = 0$.
$\bar{\Gamma}_1^\varepsilon$ est la frontière supérieure d'équation $x_3 = \varepsilon h(x)$, où h est une fonction bornée définie sur ω telle que : $0 < h_* \leq h(x') \leq h^*$, $\forall (x', 0) \in \omega$.
$\bar{\Gamma}_L^\varepsilon$ est la frontière latérale.
Le problème est modélisé par le système d'équations :

Problème P^ε **:** trouver $u^\varepsilon = (u_i^\varepsilon)_{1\le i\le 3} : \Omega^\varepsilon \to \mathbb{R}^3$ telle que :

$$\mathrm{Div}\sigma^\varepsilon + f^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon,$$

$$\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon) = \mathcal{E}e(u^\varepsilon) \ \text{ dans } \Omega^\varepsilon,$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon,$$

$$u^\varepsilon = g \text{ avec } g_3 = 0 \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon,$$

$$u^\varepsilon.n = 0 \text{ sur } \omega,$$

$$\left.\begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < \mathcal{F}^\varepsilon|\sigma_n^\varepsilon| \implies u_\tau^\varepsilon = s, \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = \mathcal{F}^\varepsilon|\sigma_n^\varepsilon| \implies \exists\beta \geq 0 \text{ tel que } u_\tau^\varepsilon = s - \beta\sigma_\tau^\varepsilon, \end{array}\right\} \text{sur } \omega.$$

avec $\sigma^\varepsilon = \left(\sigma_{ij}^\varepsilon\right)_{1\le i,j\le 3}$ est le tenseur des contraintes défini par une loi générale

$$\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon) = \mathcal{E}e(u^\varepsilon)$$

$\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl})$: un tenseur d'ordre 4, $e\,(u^\varepsilon)$ est le tenseur des déformations et $u^\varepsilon = (u_i^\varepsilon)_{1\le i\le 3}$ est le déplacement du corps élastique. $\mathcal{F}^\varepsilon \geqslant 0$ est le coefficient de frottement et $f^\varepsilon = (f_i^\varepsilon)_{1\le i\le 3}$ est la distribution volumique des forces exterieures.
L'étude du problème se fait par la technique de changement d'échelle. Après avoir montré l'existence et l'unicité de la solution faible du problème variationnel, à l'aide d'un changement de variable, suivant la troisième composante, on se ramène à l'étude d'un problème variationnel défini sur un domaine fixe Ω indépendant du petit paramètre ε. Puis, on démontre une estimation à priori, ce qui nous permet de faire un passage à la limite pour obtenir notre résultat essentiel concernant le problème limite et l'équation faible généralisée dans le plan.

Le **dernier chapitre** est consacré à l'étude du comportement asymptotique d'un problème aux limites gouverné par un corps élastique non homogène occupant un domaine tridimensionnel Ω^ε $(0 < \varepsilon < 1)$ qui est supposé constitué de deux corps homogènes Ω_1^ε et Ω_2^ε. Pour facilité aux lecteurs, nous utilisons l'indice l pour indiquer qu'une quantité est liée au domaine Ω_l^ε, $l = 1, 2$. Considérons que la frontière $\partial\Omega_l^\varepsilon$ est de classe C^1 et elle est composée de trois parties mesurables et disjointes définies par :

$$\partial\Omega_l^\varepsilon = \overline{\omega} \cup \overline{\Gamma}_l^\varepsilon \cup \overline{\Gamma}_{L_l}^\varepsilon$$

où $\overline{\omega}$ est la partie commune des deux corps qui est un domaine fixe de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x_3 = 0$ pour tout $x' = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$.
$\bar{\Gamma}^{\varepsilon}_{L_l}$ est la frontière latérale de Ω^{ε}_l, $l = 1, 2$.
$\bar{\Gamma}^{\varepsilon}_1$ est la frontière supérieure de Ω^{ε}_1 $\left(\text{resp ; } \bar{\Gamma}^{\varepsilon}_2 \text{ est la frontière inférieure de } \Omega^{\varepsilon}_2\right)$ d'équation $x_3 = \varepsilon h(x')$ (resp ; $x_3 = -\varepsilon h(x')$).
Avec h est une fonction bornée définie sur ω telle que : $0 < h_* \leq h(x') \leq h^*$; $\forall (x', 0) \in \omega$ où h_*, $h^* \in \mathbb{R}^{*+}$.
Si pour toute fonction u^{ε} défini sur Ω^{ε}, on désigne par (u^{ε}_l)=$(\mathrm{u}^{\varepsilon}_{li})_{1 \leq i \leq 3} sarestrictionsur \Omega^{\varepsilon}_l$, $l = 1, 2$, le problème est défini par le système d'équations :

Problème P^{ε}. Trouver le champ de déplacement

$(u^{\varepsilon}_1, u^{\varepsilon}_2) = ((u^{\varepsilon}_{1i}, u^{\varepsilon}_{2i})_{1 \leq i \leq 3}$: $\Omega^{\varepsilon}_1 \times \Omega^{\varepsilon}_2 \times]0, T[\to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ *tel que :*

$$\begin{aligned}
\ddot{u}^{\varepsilon}_1(t) - Div\left(\mathcal{E}^1 e(u^{\varepsilon}_1)\right) + \delta^{\varepsilon}_1 g_1.\dot{u}^{\varepsilon}_1(t) &= f^{\varepsilon}_1 \quad \text{dans } \Omega^{\varepsilon}_1 \times]0, T[, \\
\ddot{u}^{\varepsilon}_2(t) - Div\left(\mathcal{E}^2 e(u^{\varepsilon}_2)\right) + \delta^{\varepsilon}_2 g_2.\dot{u}^{\varepsilon}_2(t) &= f^{\varepsilon}_2 \quad \text{dans } \Omega^{\varepsilon}_2 \times]0, T[, \\
\sigma^{\varepsilon}_1 (u^{\varepsilon}_1) &= \mathcal{E}^1 e(u^{\varepsilon}_1) \quad \text{dans } \Omega^{\varepsilon}_1 \times]0, T[, \\
\sigma^{\varepsilon}_2 (u^{\varepsilon}_2) &= \mathcal{E}^2 e(u^{\varepsilon}_2) \quad \text{dans } \Omega^{\varepsilon}_2 \times]0, T[, \\
u^{\varepsilon}_1 &= 0 \quad \text{sur } (\Gamma^{\varepsilon}_1 \cup \Gamma^{\varepsilon}_{L_1}) \times]0, T[, \\
u^{\varepsilon}_2 &= 0 \quad \text{sur } (\Gamma^{\varepsilon}_2 \cup \Gamma^{\varepsilon}_{L_2}) \times]0, T[, \\
\dot{u}^{\varepsilon}_1.\nu_1 - \dot{u}^{\varepsilon}_2.\nu_2 &= 0 \quad \text{sur } \omega \times]0, T[, \\
\left(\sigma^{\varepsilon}_1 (u^{\varepsilon}_1)\right).\nu_1 - \left(\sigma^{\varepsilon}_2 (u^{\varepsilon}_2)\right).\nu_2 &= 0 \quad \text{sur } \omega \times]0, T[,
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\sigma^{\varepsilon}_{\tau}| < \kappa^{\varepsilon} \Rightarrow (\dot{u}^{\varepsilon}_1)_{\tau} - (\dot{u}^{\varepsilon}_2)_{\tau} = s, \\ |\sigma^{\varepsilon}_{\tau}| = \kappa^{\varepsilon} \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \quad \forall \tau \in S_3, \ \forall \ x \in \Omega^{\varepsilon}_l \ ; \dot{u}^{\varepsilon}_1(t) - \dot{u}^{\varepsilon}_2(t) = s - \lambda \sigma^{\varepsilon}_{\tau} \end{array} \right. \quad \text{dans } \omega \times]0, T[.$$

Avec $\sigma^{\varepsilon}_l = (\sigma^{\varepsilon}_{lij})_{1 \leq i,j \leq 3}$, $l = 1, 2$; le tenseur des contraintes où σ^{ε}_l vérifie la loi :

$$\sigma^{\varepsilon}_l (u^{\varepsilon}_l) = \mathcal{E}^l e(u^{\varepsilon}_l), \ l = 1, 2.$$

La notation $e(u^{\varepsilon}_l)$, $l = 1, 2$ représente le tenseur des déformations linéarisé.
$\mathcal{E}^l = \left(\mathcal{E}^l_{ijpq}\right)_{1 \leq i,,j,p,q \leq 3}$ est un tenseur d'ordre 4. f^{ε}_1 (resp ; f^{ε}_2) est la densité des forces volumiques de Ω^{ε}_1 (resp ; de Ω^{ε}_2) .

L'étude asymptotique de ce problème se fait par les mêmes techniques utilisées dans le deuxième chapitre.

Notations

Soient Ω un domaine de $\mathbb{R}^d\,(d=2,3)$ et X un espace de Banach, nous utilisons les notations suivantes :

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω.
$\partial\Omega$	la frontière totale de Ω.
Γ	la frontière supérieure de Ω.
Γ_L	la frontière latérale de Ω.
n_l	la normale unitaire sortante sur $\Omega_l,\ l=1,2$.
v_n, v_τ	les composantes normales et tangentielles d'un vecteur v.
$\lvert.\rvert$	la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d,$ avec $\lvert.\rvert=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{d} x_i^2}$.
I_d	le tenseur identité du second ordre sur $\mathbb{R}^d$.
δ_{ij}	le symbole de Krönecker.
$\mathfrak{D}'(\Omega)$	l'espace de distributions sur Ω.
$C^1(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles continument dérivables sur Ω.
$H^1(\Omega)$	l'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω.
$H_0^1(\Omega)$	l'adhérence de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.
$H^{-1}(\Omega)$	l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.
$(L^2(\Omega))^d$	l'espace $\left\{u=(u_i)\,/\ u_i\in L^2(\Omega),\ i=\overline{1,d}\right\}$.
$(H^1(\Omega))^d$	l'espace $\left\{u=(u_i)\,/\ u_i\in H^1(\Omega),\ i=\overline{1,d}\right\}$.
$\lVert.\rVert_{0,\Omega}$	la norme de $(L^2(\Omega))^d$.
$\lVert.\rVert_{1,\Omega}$	la norme de $H^1(\Omega)^d$.
$\lVert.\rVert_X$	la norme de X.
X^d	l'espace $\left\{x=(x_i)\,/\ x_i\in X,\ i=\overline{1,d}\right\}$.
$x_n \rightharpoonup x$	la convergente faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans X.
$x_n \to x$	la convergente forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans X.
$\partial_i f$	la dérivée partielle de f par rapport à la composante x_i.
∇f	le gradient de f.
$\operatorname{div} f$	la divergence de f.

Si X est un espace de Banach et $d\in\mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes.

$\|.\|_X$	la norme de X.
X^d	l'espace $\left\{x = (x_i) \,/\, x_i \in X,\ i = \overline{1,d}\right\}$.
$x_n \to x$	la convergente forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans X.
$x_n \rightharpoonup x$	la convergente faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans X.
$L^p(0,T,X)$	l'espace des fonctions f mesurables de $[0,T]$ dans X, telles que $\int_0^T \|f(t)\|_X \, dt < \infty$ avec les modifications usuelles si $p = \infty$.
$\|.\|_{L^p(0,T,X)}$	la norme de $L^p(0,T,X)$.
$C(0,T,X)$	l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans X.

Pour une fonction f, on note par

dom f	le domaine de f.
supp f	le support de f.
$\partial_i f$	la dérivée partielle de f par rapport à la composante x_i.
∇f	le gradient de f.
$e(f)$	la partie symétrique du gradient de $f = \frac{1}{2}\left(\nabla f + \nabla^T f\right)$.
$Div\ f$	le divergence de f.
$\dot{f}$	la dérivation par rapport au temps.
$\frac{\partial f}{\partial \nu}$	la dérivée normale extérieure.
$\liminf$	la limite inférieure.
δ_{ij}	le symbole de Krönecker.
I_3	le tenseur identité de second ordre sur $\mathbb{R}^3$.
0	le zéro de $\mathbb{R}^d$.
C	une constante générique strictement positive.
$p.p$	presque par tout.
$\|.\|$	la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.
(u,v), $u.v$	le produit scalaire des vecteurs u et v.

CHAPITRE 1 Outils mathématiques

Ce premier chapitre est consacré aux notions mathématiques utilsées dans la suite de la thèse. Nous commençons par un rappel des espaces fonctionnelles ; notamment les espaces de Sobolev, les espaces de Hilbert et quelques résultas sur ces espaces comme le théorème des traces, la formule de Green, le théorème de Reisz-Fréchet et quelques inéquations. Par suite nous rappelons quelques résulats des espaces des fonctions à valeurs vectorielles.
Nous terminerons ce chapitre par la modélisation mathématiques du cadre physique ; en donnant l'équation du mouvement, la loi du comportement élastique et les condtions aux limites de contact avec frottement de type Coulomb et de type Tresca.

1.1 Rappel sur les espaces fonctionnelles

1.1.1 Espaces de Sobolev

Considérons Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\partial\Omega$ son bord.
Pour $p \in [1, \infty[$, $L^p(\Omega)$ désigne l'espace de Lebesgue (des classes) des fonctions u à valeurs réelles, mesurables avec $|u|^p$ intégrables.
$L^p(\Omega)$ est muni de la norme définie par

$$\|u\|_{L^P} = \left[\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = \infty$, on note

$$L^{\infty}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ u \text{ mesurable} ;\ \underset{x\in\Omega}{\sup ess}\ \ |u(x)| < +\infty\ \ \},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^{\infty}} = \underset{x\in\Omega}{\sup ess}\ \ |u(x)|\,,$$

où

$$\underset{x\in\Omega}{\sup ess}\ \ |u(x)| = \inf\left\{M > 0 :\ |u(x)| \leq M \text{ p.p.}\right\}$$

$\mathfrak{D}\left(\Omega\right)$ ou bien $C_c^{\infty}\left(\Omega\right)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact, inclus dans Ω.

Les éléments de $\mathfrak{D}\left(\Omega\right)$ sont dits fonctions tests.

Le dual topologique de $\mathfrak{D}\left(\Omega\right)$, noté $\mathfrak{D}'\left(\Omega\right)$ est l'espace des distributions.

Soit $T \in \mathfrak{D}'\left(\Omega\right)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

La dérivée aux sens des distributions de T, notée $D^{\alpha}T$ est définie par

$$\langle D^{\alpha}T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^{\alpha}\varphi\rangle\ \ ,\ \ \forall\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \text{ avec } |\alpha| = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i.$$

En particulier si $f \in L^1_{loc}\left(\Omega\right) = \left\{f \in L^1\left(K\right),\, K \text{ un compact inclus dans } \Omega\right\},$ alors f définit une distribution notée T_f ou bien simplement f donnée par

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle = \int\limits_{\Omega} f\left(x\right)\varphi\left(x\right)dx\ \ ,\ \ \forall\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

La dérivée aux sens des distributions de f est définie par

$$\int\limits_{\Omega} D^{\alpha}f\left(x\right)\varphi\left(x\right)dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\Omega} f\left(x\right)D^{\alpha}\varphi\left(x\right)dx\ \ ,\ \ \forall\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Définition 1.1.1 *Soit $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$.*

On appelle espace de Sobolev qu'on note $W^{m,p}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées aux sens des distributions d'ordre inférieur ou égale à m sont aussi des fonctions de $L^p\left(\Omega\right)$. On écrit

$$W^{m,p}\left(\Omega\right) = \left\{u \in L^p\left(\Omega\right) \diagup D^{\alpha}u \in L^p\left(\Omega\right),\ pour\ \ |\alpha| \leq m\right\}.$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme définie par

$$\|u\|_{w^{m,p}} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^P}^p \right)^{\frac{1}{p}} & si \quad p < \infty \\ \sum\limits_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} & si \quad p = \infty \end{cases}$$

ou bien de la norme équivalente

$$\|u\|_{w^{m,p}} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \left(\|D^\alpha u\|_{L^P}\right)^{\frac{1}{p}} \quad pour\ 1 \leq p \leq \infty.$$

Dans le cas où $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ est noté $H^m(\Omega)$ et est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}.$$

$W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme précédente est un espace de Banach et $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire précédent est un espace de Hilbert.
Les espaces produits $(L^2(\Omega))^n$ et $(H^1(\Omega))^n$ sont munis des normes

$$\begin{aligned} \|u\|_{(L^2(\Omega))^n} &= \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \|u\|_{(H^1(\Omega))^n} &= \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{H^1(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Avec

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|Du\|_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Pour $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ comme étant la fermeture de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ c'est-à-dire

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega)\ :\ u\,|_\Gamma = 0\}.$$

En particulier, on note par $H_0^1(\Omega)$ la fermeture de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ et par $H^{-1}(\Omega)$ son dual.

On note $L^2(\partial\Omega)$ l'espace des fonctions de carré sommable sur $\partial\Omega$ pour la mesure superficielle $d\sigma$. On munit l'espace $L^2(\partial\Omega)$ par la norme

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} = \left(\int_{\partial\Omega} |v(x)|^2 \, d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.1.2 Espaces de classe $\mathbf{C}^m$

On note

$$\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^*_+ = \left\{x = (x', x_n) \diagup x' \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ et } x_n > 0\right\}.$$

$$Q = \left\{ x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \text{ avec : } |x'| = \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} < 1 \text{ et } |x_n| < 1 \right\}.$$

$$Q_+ = Q \cap \mathbb{R}^n_+.$$

$$Q_0 = \{x = (x', x_n); |x'| < 1 \text{ et } x_n = 0\}.$$

On dit qu'un ouvert Ω est de classe C^m, m est un entier ≥ 1 si pour tout $x \in \partial\Omega$ il existe un voisinage U de x et une application $h : Q \to U$ bijective telle que $h \in C^m\left(\overline{Q}\right)$ et $h^{-1} \in C^m\left(\overline{U}\right)$, $h(Q_+) = U \cap \Omega$ et $h(Q_0) = U \cap \partial\Omega$.

Autrement dit, un ouvert Ω est de classe C^m, m est un entier ≥ 1, si au voisinage de tout point de $\partial\Omega$, il existe un difféomorphise de classe C^m qui redresse la frontière en un hyperplan de $\mathbb{R}^{n-1}$ et Ω en un des demi-espaces limité par cet hyperplan.

Théorème 1.1.1 *On suppose que Ω est de classe C^1. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

$$\begin{aligned} u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ u &\in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned}$$

Théorème 1.1.2 ***(Théorème des traces)***

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1. Alors il existe un opérateur linéaire continu appelé opérateur trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, noté γ et coïncide avec l'opérateur de restriction usuel pour les fonctions continues, c'est- à -dire

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & H^1(\Omega) & \to & L^2(\partial\Omega) \\ & u & \mapsto & \gamma(u) = u\,|\partial\Omega \end{array} \quad \textit{pour } u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right).$$

1.1.3 Formule de Green

L'intégration par parties

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1. Si $u, v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx + \int_{\partial\Omega} u v n_i d\sigma$$

La formule de Green

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1. Pour $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = -\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma.$$

avec $n = (n_i)_{1 \leq i \leq n}$ la normale extérieure à $\partial\Omega$ et $d\sigma$ est la mesure superfcielle de $\partial\Omega$.

1.1.4 Fonctions convexes-Semi-continuité inférieure

Soient V un espace vectoriel et φ une fonction définie sur V à valeurs dans $]-\infty, +\infty[$. La fonction φ est dite

semi-continue inférieure si et seulement si pour toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de V convergente vers $v \in V$, on a

$$\liminf_{n} \varphi(v_n) \geq \varphi(v),$$

propre s'il existe $u_0 \in V$ tel que :

$$\varphi(u_0) < +\infty,$$

c'est-à-dire qu'elle n'est pas identique à $+\infty$.

convexe si

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v) \qquad \forall u, v \in V \text{ et } t \in [0,1]$$

Remarque : Une partie $K \subset V$ est dite convexe si pour tout u, v de K :

$$tu + (1-t)v \in K, \forall t \in [0,1].$$

1.1.5 Les inégalités

Inégalité de Korn

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $u \in K$ où K un convexe fermé non vide de $H^1(\Omega)$, il existe une constante C telle que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|e(u)\|_{L^2(\Omega)}$$

avec $e(u) = (e_{ij}(u))_{1\leq i,j\leq n}$ et $e_{ij}(u) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$.

Inégalité de Poincaré

Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, *il existe une constante positive C telle que ; pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Corollaire 1.1.1 *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, il existe une constante positive C telle que*

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \left(1 + C^{\ 2}\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \ \in \ H_0^1(\Omega).$$

Corollaire 1.1.2 *Si Ω est borné, la semie -norme*

$$|v|_{1,\Omega} = \left(\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme induite par $\|.\|_{H^1}$.

L'inégalité de Hölder

Pour tout $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *on a* $uv \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz

C'est le cas particulier de l'inégalité de Hölder pour $p = 2$, c'est- à- dire : $\forall u, v \in L^2(\Omega)$ on a :

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega |uv|\, dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} .$$

L'inégalité de Young

$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $1 < p, q < +\infty$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, on a

$$a.b \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

1.2 Quelques éléments d'analyse dans les espaces de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(.,.)_H$ et la norme $\|.\|_H$. On note par H' l'espace dual de H et $(.,.)_{H'\times H}$ le produit de dualité entre H'et H.

1.2.1 Théorème de représentation de Reisz-Fréchet

Théorème 1.2.1 *Pour toute forme linéaire $\mathcal{L}$ sur H', il existe un élément $f \in H$ unique tel que :*

$$(\mathcal{L}, h)_{H'\times H} = (f, h)_H \quad , \quad \forall h \in H$$

avec

$$\|\mathcal{L}\|_{H'} = \|f\|_H .$$

1.2.2 Formes bilinéaires

Définition 1.2.1 *On dit que l'application* $a(.,.) : H \times H \to \mathbb{R}$ *est une forme bilinéaire si pour tout* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *et* $h, h_1, h_2 \in H$

$$\begin{aligned} a(\lambda h_1 + \mu h_2, h) &= \lambda a(h_1, h) + \mu a(h_2, h) \\ & \quad et \\ a(h, \lambda h_1 + \mu h_2) &= \lambda a(h, h_1) + \mu a(h, h_2). \end{aligned}$$

Une forme bilinéaire $a(.,.)$ *est dite :*
coercive*, s'il existe un réel* α *strictement positif tel que :* $a(h,h) \geq \alpha \|h\|_H^2$, *pour tout* $h \in H$.
continue*, s'il existe un réel* $C > 0$ *tel que :* $|a(h_1, h_2)| \leq C \|h_1\|_H \|h_2\|_H$, *pour tout* h_1, $h_2 \in H$.
symétrique*, si pour tout* $h_1,\ h_2 \in H$: $a(h_1, h_2) = a(h_2, h_1)$.

Théorème 1.2.2 (***Représentation des formes bilinéaires***) *Pour toute forme bilinéaire continue* $a(.,.)$ *sur* $H \times H$*, il existe un unique opérateur* A *défini de* H *dans* H'*, linéaire et borné tel que*

$$a(u,v) = (Au, v)_{H' \times H} \quad \forall u, v \in H$$

De plus

$$|a(.,.)| = \|A\|_H .$$

1.2.3 Opérateurs : monotones-lipschitziens-hémicontinus

Soit A un opérateur de H dans H'. A est dit :
monotone, si et seulement si

$$(Au - Av, u - v) \geq 0 \ \ \forall u, v \in H.$$

fortement monotone, s'il existe une constante $m \geq 0$ tel que :

$$(Au - Av, u - v)_{H' \times H} \geq m \|u - v\|_H^2 , \quad \forall u, v \in H.$$

de Lipschitz, s'il existe une constante $M \geq 0$ tel que :

$$\|Au - Av\|_{H'} \leq M \|u - v\|_H \,, \ \forall u, v \in H.$$

hémicontinue, si pour $u, v \in H$; l'application

$$\begin{array}{rccc} A_t : & \mathbb{R} & \rightarrow & H' \\ & t & \mapsto & A_t(t) = A(u + tv) \end{array} \quad \text{est continue.}$$

Théorème 1.2.3 (*voir[32] page 28*) *Soit K un convexe fermé non-vide d'un espace de Hilbert H. Pour toute fonctionnelle J de K dans $\bar{\mathbb{R}}$ convexe, semi-continue inférieurement et propre et pour tout opérateur A de H dans H' hémicontinu et fortement monotone, il existe un unique $u \in K$ tel que*

$$(Au, u - v)_H + J(v) - J(u) \geq (f, u - v)_H \quad \forall v \in K \quad et \quad \forall f \in H'.$$

1.3 Espaces des fonctions à valeurs véctorielles

Soit $0 < T < +\infty$ et soit V un espace de Banach réel de norme $\|.\|_V$. On définit les espaces à valeurs vectorielles suivants :

$$C(0, T; V) = \{u : [0, T] \rightarrow V \ \ \text{continue}\},$$
$$L^p(0, T; V) = \left\{u : [0, T] \rightarrow V \text{ mesurable} : \textstyle\int_0^T \|u(t)\|_V \, dt < \infty\right\}, 1 \leq p < \infty,$$
$$L^\infty(0, T; V) = \{u : [0, T] \rightarrow V \text{ mesurable} : \exists C > 0 \ \ \|u(t)\|_V \leq C, \ \forall t \in [0, T]\}$$

munis des normes

$$\|u\|_{C(0,T;V)} = \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_V \,,$$
$$\|u\|_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p \ dt\right)^{\frac{1}{p}} \,,$$
$$\|u\|_{L^\infty(0,T;V)} = \inf\{C > 0 \ ; \ \|u(t)\|_V \leq C \ \ \forall \ t \in [0, T] \ \}.$$

On note par $C_c^\infty(0, T; V)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans $]0, T[$ à valeurs dans V.

On note aussi par $H^1(0, T; V)$ l'espace de Sobolev sur $]0, T[$ à valeurs dans V, défini par

$$H^1(0, T; V) = \left\{u \ : \ \ u \in L^2(0, T; \ V) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; \ V) \ \right\},$$

tel que la dérivée $\dfrac{\partial}{\partial t}$ est définie par

$$\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(t)\,\phi(t)\ \ dt = -\int_0^T u(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\phi(t)\ \ dt\ ,\quad \forall \phi \in C_0^\infty(]0,T[).$$

Proposition 1.3.1 *$L^p(0,T;V)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ est un espace de Banach.*

$L^p(0,T;V) \subset L^q(0,T;V)$ avec injection continue $1 \leq q \leq p \leq \infty$.

Si V est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(.,.)_V$, alors :

$L^2(0,T;V)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire :

$$(u,v)_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T (u(t)\,, v(t))_V\,dt$$

$L^p(0,T;V)' = L^q(0,T;V)$ pour $1 < q,p < \infty$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

$L^1(0,T;V)' = L^\infty(0,T;V)$

avec $L^p(0,T;V)'$ est le dual de $L^p(0,T;V)$ pour $1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 1.3.1 *Soit V un espace de Banach réflexif et soit $u \in L^2(0,T;V)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

$u \in H^1(0,T;V)$.

Il existe $u_0 \in V$ et $g \in L^2(0,T;V)$, telle que $u(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t g(s)\,ds,\ \ \forall t \in [0,T]$.

Théorème 1.3.2 *Soit $(V,(.,.)_V)$ un espace de Hilbert et soit $u \in H^1(0,T;V)$. Alors :*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_V^2 = (\dot{u}(t)\,, u(t))_V,\ \ \forall\ t \in]0,T[\,,$$
$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_V^2 = \frac{1}{2}\|u(0)\|_V^2 + \int_0^t (\dot{u}(s)\,, u(s))_V\ \ ds,\ \ \forall\ t \in]0,T[\,.$$

Théorème 1.3.3 *Soient V, W deux espaces de Hilbert de normes respectives $\|.\|_V$, $\|.\|_W$ qui vérifient les hypothèses suivantes :*

$$\begin{cases} V \ \text{dense dans}\ W, \\ V \subset W \subset V', \end{cases}$$

et soit K un sous-ensemble fermé non vide et convexe de V. On se donne une forme bilinéaire $a(.,.) : K \times K \to \mathbb{R}$ continue sur K qui satisfait :

$$\begin{aligned} \text{il existe } \rho \text{ et } \alpha &> 0 \text{ tels que} \\ a(v,v) + \rho \|v\|_W^2 &\geq \alpha \|v\|_V^2, \ \forall v \in V. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0,T;V')$, il existe une unique fonction u qui satisfait

$$\begin{gathered} \langle \dot{u}(t), v - u(t) \rangle_{V' \times V} + a(u(t), v - u(t)) \geq \langle f, v - u(t) \rangle_{V' \times V}, \ \forall v \in K, \forall\, t \in [0,T], \\ u \in L^2(0,T;V) \cap C(0,T;W) \cap H^1(0,T;V'), \\ u(t) \in K, \forall t \in [0,T], \\ u(0) = u. \end{gathered}$$

En outre, si $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0,T;W)$, alors u vérifie

$$u \in L^2(0,T;V) \cap H^1(0,T;W).$$

1.4 Lemme de Gronwall

Lemme 1.4.1 *Soient $u, v \in C(0,T;\mathbb{R})$ telles que $u(t) \geq 0$ et $v(t) \geq 0$, $\forall t \in [0,T]$. Pour toute constante $c \geq 0$ et pour $\phi \in C(0,T;\mathbb{R})$ telle que :*

$$\phi(t) \leq c + \int_0^t u(s)\, ds + \int_0^t v(s)\, \phi(s)\, ds, \quad \forall t \in [0,T],$$

on a

$$\phi(t) \leq \left(c + \int_0^t u(s)\, ds \right) \exp\left(\int_0^t v(s)\, ds \right).$$

1.5 Modélisation mathématiques du cadre physique

La modélisation mathématique consiste à représenter un phénomène physique en un modèle mathématique (équations aux dérivées partielles) accéssible à l'analyse et au calcul.

1.5.1 Équation du mouvement

Considérons un milieu continu qui occupe un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^3$ pendant un intervalle de temps $[0,T]$ et soit $\dot{u}(x,t)$ le champ de vecteurs vitesse à l'instant $t \in [0,T]$ des points $x=(x_1,x_2,x_3) \in \Omega$ du milieu continu par rapport au repère (Ox).
L'évolution d'un corps matériel est décrite par l'équation de Cauchy suivante :

$$\operatorname{div}\sigma + f = \rho\ddot{u} \text{ dans } \Omega \times [0,T]$$

avec $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne la densité de la masse, $\ddot{u} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ est le champ des accélérations et $f=(f_1,f_2,f_3)$ est la distribution volumique des forces extérieures.
$\operatorname{div}\sigma = \left(\dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\right)_{1\leq i,j\leq 3}$ est la divergence du tenseur des contraintes $\sigma = (\sigma_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$. .
Dans le cas où le champ de vitesse $\dot{u}$ varie très lentement par rapport au temps, alors le terme $\rho\ddot{u}$ est négligeable et donc l'équation précédente devient :

$$\operatorname{div}\sigma + f = 0.$$

et elle est dite équation d'équilibre.

1.5.2 Loi de comportement élastique linéaire et isotrope

Soit un corps homogène élastique et isotrope. Si on note par $u=(u_i)_{1\leq i\leq 3}$ le déplacement de ce corps alors le comportement élastique est modélisé par :

$$\sigma(u) = \mathcal{E}e(u),$$

avec $(\mathcal{E}_{ijkl})_{1\leq i,j,k,l\leq 3}$ est un tenseur d'ordre 4, ses composantes $\mathcal{E}_{ijkl}$ s'appellent coefficients d'élasticité.
$e=(e_{ij}(u))_{1\leq i,j\leq 3}$ où

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\ 1\leq i,j\leq 3$$

est le tenseur des déformations linéarisées.

1.5.3 Conditions aux limites de contact avec frottement

Soient deux corps élastiques en contact et soit k le coefficient de frottement qui caractérise l'état entre les deux surfaces en contact. On suppose qu'il y a une force de contact entre les deux corps de composantes normale et tangentielle notée respectivement F_n, F_τ.

La loi de Tresca

On dit qu'il y a un glissement entre les deux corps si la force tangentielle a atteint un certain seuil. Le seuil suivant Tresca est fixé, connu et est égale à k et tant que la force tangentielle n'a pas atteint le seuil, les deux corps ne se déplacent pas et dans ce cas, on dit qu'il y a adhérence. On résume cette loi par

$$\begin{cases} \|F_\tau\| < k \implies \|u_\tau\| = s \qquad \text{adhérence} \\ \|F_\tau\| = k \implies \exists\beta \geq 0 \text{ tel que } u_\tau = s - \beta F_\tau \;\; \text{glissement.} \end{cases}$$

Dans le cas dynamique elle est donnée par

$$\begin{cases} \|F_\tau\| < k \implies \|\dot{u}_\tau\| = 0 \qquad \text{adhérence} \\ \|F_\tau\| = k \implies \exists\beta \geq 0 \text{ tel que } \dot{u}_\tau = -\beta F_\tau \;\; \text{glissement.} \end{cases}$$

Où u_τ est le déplacement tangentielle et $\dot{u_\tau}$ est la vitesse tangentielle entre les deux coprs.

La loi de Coulomb

Selon Coulomb, le seuil est variable et dépend de la force normale F_n et est donné par $k\|F_n\|$. La loi de Coulomb est donnée par les équations :

$$\begin{cases} \|F_\tau\| < k\|F_n\| \implies \|u_\tau\| = 0 \qquad \text{adhérence} \\ \|F_\tau\| = k\|F_n\| \implies \exists\beta \geq 0 \text{ tel que } u_\tau = -\beta F_\tau \;\; \text{glissement.} \end{cases}$$

ou bien par

$$\begin{cases} \|F_\tau\| < k\|F_n\| \implies \|\dot{u}_\tau\| = 0 \qquad \text{adhérence} \\ \|F_\tau\| = k\|F_n\| \implies \exists\beta \geq 0 \text{ tel que } \dot{u}_\tau = -\beta F_\tau \;\; \text{glissement.} \end{cases}$$

dans le cas dynamique.

CHAPITRE 2

Etude asymptotique d'un problème d'élasticité linéaire isotherme avec frottement de type Coulomb

Nous étudions dans ce chapitre, le comportement asymptotique d'un problème aux limites dans un domaine tridimensionnel, mince noté Ω^{ε} avec frottement non linéaire de type Coulomb où ε est un réel entre 0 et 1 ; en suivant les étapes suivantes : premièrement, nous allons établir une formulation variationnelle du problème et prouver l'existence et l'unicité de la solution faible.

Ensuite, on étudie le comportement asymptotique lorsque le petit paramètre ε tend vers zéro.

Finalement, à l'aide d'une estimation à priori, on donne le problème limite et l'équation faible généralisée dans le plan.

2.1 Description du problème

Soit un corps élastique homogène dont la configuration de référence est un ouvert borné lipschitzien de points $x = (x_1, x_2, x_3) = (\ x', x_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

Considérons ε un petit paramètre qui tend vers 0, alors l'ouvert précident est noté Ω^ε et sa frontière est donnée par $\Gamma^\varepsilon = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \bar{\Gamma}_L^\varepsilon$ avec :
ω est la frontière inférieure de Ω^ε, qui est un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x_3 = 0$.
$\bar{\Gamma}_1^\varepsilon$ est la frontière supérieure d'équation $x_3 = \varepsilon h(x)$ où h est une fonction bornée définie sur ω telle que : $0 < h_* \leq h(x') \leq h^*$, $\forall (x', 0) \in \omega$.
$\bar{\Gamma}_L^\varepsilon$ est la frontière latérale.
D'où Ω^ε est défini par :

$$\Omega^\varepsilon = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x', 0) \in \omega \ \text{ et } \ 0 < x_3 < \varepsilon h\,(x')\}.$$

Pour définir notre problème on a besoin des espaces suivants :
On note par S_3 l'espace des tenseurs symétriques du second ordre dans $\mathbb{R}^3$. $(.,.)$ et $|.|$ le produit scalaire et la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^3$ et S_3 respectivement avec :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^3, \ \ (u, v) = u.v = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i, \qquad |v| = (v.v)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\forall \sigma, \tau \in S_3, \ \ (\sigma, \tau) = \ \sigma.\tau = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}\tau_{ij}, \qquad |\tau| = (\tau.\tau)^{\frac{1}{2}}.$$

Considérons Q l'espace défini par :

$$Q = \left\{\tau = (\tau_{ij}) \in S_3 : \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega^\varepsilon), \, \forall i, j = 1, 2, 3\right\},$$

qui est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$(\sigma, \tau)_Q = \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma.\tau dx = \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}\tau_{ij} dx.$$

Soit Q_∞ l'espace du $4^{ième}$ ordre (voir [33] page 97) avec

$$Q_\infty = \{\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl}) : \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{jikl} = \mathcal{E}_{klij} \in L^\infty(\Omega^\varepsilon), \, 1 \leq i, j, k, l \leq 3\}$$

qui est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}_\infty} = \max_{0\leq i,j,k,l\leq 3} \|\mathcal{E}_{ijkl}\|_{L^\infty(\Omega^\varepsilon)},$$

telle que :

$$\|\mathcal{E}\tau\|_Q \leq 3\|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}_\infty}\|\tau\|_Q, \ \forall \mathcal{E} \in Q_\infty, \, \tau \in Q.$$

On note par $u^\varepsilon = (u_i^\varepsilon)_{1\leq i\leq 3}$ le déplacement du corps élastique et par $e\,(u^\varepsilon)$ le tenseur des déformations avec

$$\begin{array}{cccc} e & : H^1(\Omega^\varepsilon)^3 & \longrightarrow & Q \\ & u^\varepsilon & \mapsto & e\,(u^\varepsilon) = (e_{ij}\,(u^\varepsilon))_{1\leq i,,j\leq 3} \end{array}$$

où

$$e_{ij}\,(u^\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right), \ 1 \leq i,j \leq 3$$

On note aussi par $\sigma^\varepsilon = \left(\sigma_{ij}^\varepsilon\right)_{1\leq i,j\leq 3}$ le tenseur des contraintes où σ^εest modélisé par :

$$\sigma\,(u^\varepsilon) = \mathcal{E}e\,(u^\varepsilon)\,,$$

avec $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl})_{1\leq i,,j,k,l\leq 3}$ un tenseur d'ordre 4 de dimension 3 satisfaisant les conditions :

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{(a) } \mathcal{E} : \Omega^\varepsilon \times S_3 \to S_3. \\
\text{(b) Il existe } L_{\mathcal{E}} > 0 \text{ telle que :} \\
\quad |\mathcal{E}(x,\tau_1) - \mathcal{E}(x,\tau_2)| \leq L_{\mathcal{E}}\,|\tau_1 - \tau_2| \\
\quad\quad \forall\,\tau_1,\tau_2 \in S_3, \forall\ x \in \Omega^\varepsilon. \\
\text{(c) Il existe } m_{\mathcal{E}} > 0 \text{ telle que :} \\
\quad\quad (\mathcal{E}(x,\tau_1) - \mathcal{E}(x,\tau_2)).(\tau_1 - \tau_2) \geq m_{\mathcal{E}}|\tau_1 - \tau_2|^2, \\
\quad\quad \forall\,\tau_1,\tau_2 \in S_3, \ \forall \ \ x \in \Omega^\varepsilon. \\
\text{(d) la carte } x \longmapsto \mathcal{E}(x,0) \text{ est lebesgue mesurable dans } \Omega^\varepsilon, \ \forall \ \ \tau \in S_3, \\
\text{(e) La carte } x \longmapsto \mathcal{E}(x,0) \in Q.
\end{array}\right.$$

Dans le cas stationnaire, l'équation de la conservation de mouvement est donnée par l'équation d'équilibre

$$-Div\,(\sigma^\varepsilon) = f^\varepsilon \ \text{ dans } \Omega^\varepsilon.$$

avec $f^\varepsilon = (f_i^\varepsilon)_{1\leq i\leq 3}$ est la distribution volumique des forces exterieures.
Ce qui concerne les conditions aux limites, on suppose que :

$$u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon.$$

Sur Γ_L^ε on introduit une fonction $g = (g_i)_{1\leq i\leq 3}$ de $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\varepsilon)\right)^3$ (l'espace des fonctions traces des fonctions de $(H^1(\Omega^\varepsilon))^3$ dans Γ^ε) qui vérifie :

$$\begin{cases} \int_{\Gamma^\varepsilon} g.nd\sigma = 0 \\ g = 0 \text{ sur } \bar{\Gamma}_1^\varepsilon \\ g.n = 0 \text{ sur } \omega \end{cases} \tag{2.1.1}$$

$n = (n_i)_{1\leq i\leq 3}$ est le vecteur normale unitaire sur Γ^ε, donc $n = (0, 0, -1)$ sur ω.
La condition (2.1.1) assure l'existence d'une fonction $G^\varepsilon = (G_i^\varepsilon)_{1\leq i\leq 3} \in (H^1(\Omega^\varepsilon))^3$ telle que :

$$\operatorname{div}(G^\varepsilon) = 0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon \text{ et } G^\varepsilon = g \text{ sur } \Gamma^\varepsilon.$$

Pour définir les conditions aux limites sur la frontière infèrieure ω, on a besoin de ces notations

$$\begin{cases} u_n^\varepsilon = u^\varepsilon.n = (u_i^\varepsilon.n_i)_{1\leq i\leq 3}, \\ u_\tau^\varepsilon = \left(u_{\tau_i}^\varepsilon\right)_{1\leq i\leq 3} = (u_i^\varepsilon - u_n^\varepsilon n_i)_{1\leq i\leq 3}, \\ \sigma_n^\varepsilon = (\sigma.n)\, n = \left(\sigma_{ij}^\varepsilon n_i n_j\right)_{1\leq i,j\leq 3}, \\ \sigma_\tau^\varepsilon = \left(\sigma_{\tau_i}^\varepsilon\right)_{1\leq i\leq 3} = \left(\sigma_{ij}^\varepsilon n_j - \sigma_n^\varepsilon n_i\right)_{1\leq i,j\leq 3}. \end{cases}$$

On suppose que le contact est bilateral sur ω c'est-à-dire :

$$u^\varepsilon.n = 0 \text{ sur } \omega.$$

Cette dernière condition signifie qu'il y a un effort tangentiel exercé par la surface ω. Cet effort tangentiel ne peut pas dépasser un certain seuil.
Suivant la loi de Coulomb le seuil est donné par $\mathcal{F}^\varepsilon|\sigma_n^\varepsilon|$ avec $\mathcal{F}^\varepsilon \geqslant 0$ est le coefficient de frottementet. Tant que la contrainte tangentielle n'a pas atteint le seuil, le déplacement tangentiel est donné et on dit qu'il y adhérence. Lorsque le seuil est atteint, le corps se déplace tangentiellement par rapport à la contrainte tangentiel et donc il y a un glissement.

On résume alors par les équations :

$$\begin{cases} |\sigma_\tau^\varepsilon| < \mathcal{F}^\varepsilon |\sigma_n^\varepsilon| \implies u_\tau^\varepsilon = s \quad (\text{ adhérence }) \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = \mathcal{F}^\varepsilon |\sigma_n^\varepsilon| \implies \exists \beta \geq 0 \text{ tel que } u_\tau^\varepsilon = s - \beta \sigma_\tau^\varepsilon \ (\text{ glissement }) \end{cases}$$

avec $s \in \mathbb{R}$ est le déplacement sur la surface inférieure ω.

Finalement la formulation classique du problème mécanique du contact bilatéral de frottement est énoncé comme suit :

Problème P^ε : trouver $u^\varepsilon = (u_i^\varepsilon)_{1 \leq i \leq 3} : \Omega^\varepsilon \to \mathbb{R}^3$ telle que :

$$\text{Div}\sigma^\varepsilon + f^\varepsilon = 0, \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon, \tag{2.1.2}$$

$$\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon) = \mathcal{E} e(u^\varepsilon), \ \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \tag{2.1.3}$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon, \tag{2.1.4}$$

$$u^\varepsilon = g \text{ avec } g_3 = 0 \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon, \tag{2.1.5}$$

$$u^\varepsilon . n = 0 \text{ sur } \omega, \tag{2.1.6}$$

$$\left.\begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < \mathcal{F}^\varepsilon |\sigma_n^\varepsilon| \implies u_\tau^\varepsilon = s, \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = \mathcal{F}^\varepsilon |\sigma_n^\varepsilon| \implies \exists \beta \geq 0 \text{ tel que } u_\tau^\varepsilon = s - \beta \sigma_\tau^\varepsilon, \end{array}\right\} \text{sur } \omega. \tag{2.1.7}$$

Remarque : Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance de divers fonctions pour la variable $x \in \Omega^\varepsilon$.

Lemme 2.1.1 (*voir [16]*) *La condition* (2.1.7) *est équivalente à la relation :*

$$(u_\tau^\varepsilon - s)\, \sigma_\tau^\varepsilon + \mathcal{F}^\varepsilon |\sigma_n^\varepsilon| |u_\tau^\varepsilon - s| dx = 0 \ \textit{sur } \omega.$$

2.2 Formulation variationnelle du problème P^ε

2.2.1 Discription du problème variationnel

Pour trouver une formulation variationnelle du problème P^ε, considérons les espaces suivants :

$$H^1(\Omega^\varepsilon)^3 = \left\{ \varphi^\varepsilon \in \left(L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)^3 \ : \ \frac{\partial \varphi_i^\varepsilon}{\partial x_j} \in L^2\left(\Omega^\varepsilon\right), \ \forall i, j = 1, 2, 3 \right\},$$

qui est un espace de Hilbert muni de la norme $\|.\|_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^3}$ et du produit scalaire $(.,.)_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^3}$ définis respectivement par

$$\begin{aligned}
\|u^\varepsilon\|_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^3} &= \left(\sum_{i=1}^{3} \|u_i^\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2}}, \\
(u^\varepsilon, \varphi)_{(H^1(\Omega^\varepsilon))^3} &= \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega^\varepsilon} (u_i^\varepsilon(x)\varphi_i^\varepsilon(x) \; + \nabla u_i^\varepsilon(x).\nabla\varphi_i^\varepsilon(x))\; dx.
\end{aligned}$$

Le sous espace vectoriel de $(H^1(\Omega^\varepsilon))^3$ défini par

$$V^\varepsilon = \left\{\varphi^\varepsilon \in \left(H^1(\Omega^\varepsilon)\right)^3 \quad : \varphi^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon,\; \varphi^\varepsilon = G^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon \text{ et } \varphi^\varepsilon.n = 0 \text{ sur } \omega\right\}$$

est un convexe fermé non vide de $(H^1(\Omega^\varepsilon))^3$.

On définit aussi

$$H^1_{\Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon) = \left\{\varphi^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon) \quad : \; \varphi^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon\right\},$$

qui est un sous espace vectoriel de $H^1(\Omega^\varepsilon)$.

Avec

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} = \left(\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)_{H^1(\Omega^\varepsilon)} = \int_{\Omega^\varepsilon} (u^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(x) \; + \nabla u^\varepsilon(x).\nabla\varphi^\varepsilon(x))\; dx.$$

En multipliant (2.1.2) par $(\varphi^\varepsilon - u^\varepsilon) \in V^\varepsilon$ et on intègre par partie sur Ω^ε avec l'utilisation de la formule de Green et les conditions aux limites $(2.1.4)-(2.1.7)$, on obtient le problème variationnel suivant :

Problème P_v^ε : trouver $u^\varepsilon \in V^\varepsilon$ telle que :

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon - u^\varepsilon) + \tilde{j}^\varepsilon(\varphi^\varepsilon) - \tilde{j}^\varepsilon(u^\varepsilon) \geq (f^\varepsilon, \varphi^\varepsilon - u^\varepsilon), \quad \forall \varphi^\varepsilon \in V^\varepsilon \tag{2.2.1}$$

avec

$$\begin{aligned}
a^\varepsilon\left(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon - u^\varepsilon\right) &= \int_{\Omega^\varepsilon} \mathcal{E}\left(e(\varphi^\varepsilon) - e(u^\varepsilon)\right) dx = \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon\left(e(\varphi^\varepsilon) - e(u^\varepsilon)\right) dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{ij}\left(e_{ij}(\varphi^\varepsilon) - e_{ij}(u^\varepsilon)\right) dx \\
\left(f^\varepsilon, \varphi^\varepsilon - u^\varepsilon\right) &= \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon . \left(\varphi^\varepsilon - u^\varepsilon\right) dx \\
\tilde{j}^\varepsilon(\varphi^\varepsilon) &= \int_\omega \mathcal{F}^\varepsilon \left|\sigma^\varepsilon_n\right| \left|\varphi^\varepsilon - s\right| dx'
\end{aligned}$$

2.2.2 Existence et unicité de la solution du problème variationnel

Remarque 2.2.1 *L'intégrale $\tilde{j}^\varepsilon(\varphi^\varepsilon)$ n'a pas de sens pour $\varphi^\varepsilon \in V^\varepsilon$. En effet, σ^ε_n est défini par dualité comme un élément de $H^{-\frac{1}{2}}(\omega)$. Par conséquent, $|\sigma^\varepsilon_n|$ n'est pas bien définie sur ω.*

*Par le même esprit de [**?**] et [18], on remplace σ^ε_n par sa régularisation $\mathfrak{R}(\sigma^\varepsilon_n)$, où $\mathfrak{R}$ est un opérateur de régularisation de $H^{-\frac{1}{2}}(\omega)$ dans $L^2(\omega)$ défini par :*

$$\forall \tau \in H^{-\frac{1}{2}}(\omega) \;:\; R(\tau) \in L^2(\omega), R(\tau)(x) = \langle \tau, \phi(x - .)\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\omega), H^{\frac{1}{2}}_{00}(\omega)}, \quad \forall x \in \omega.$$

Avec : $t \longmapsto \phi(x - t)$ est une fonction positive de classe C^∞ à support compact dans ω et $H^{-\frac{1}{2}}(\omega)$ est l'espace dual de

$$H^{\frac{1}{2}}_{00}(\omega) = \left\{\varphi^\varepsilon|\omega \;:\; v^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon) \;: \varphi^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma^\varepsilon_1 \cup \Gamma^\varepsilon_L\right\}.$$

Après cette régularisation, on obtient le nouveau problème suivant :

Problème $P^{\varepsilon,\phi}_v$. Trouver $u^\varepsilon \in V^\varepsilon$ telle que :

$$a^\varepsilon\left(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon - u^\varepsilon\right) + j^\varepsilon(\varphi^\varepsilon) - j^\varepsilon(u^\varepsilon) \geq \left\langle f^\varepsilon, \varphi^\varepsilon - u^\varepsilon\right\rangle, \quad \forall \varphi^\varepsilon \in V^\varepsilon, \tag{2.2.2}$$

où

$$j^\varepsilon(\varphi^\varepsilon) = \int_\omega \mathcal{F}^\varepsilon \left|\mathrm{R}\left(\sigma^\varepsilon_n\right)\right| \left|\varphi^\varepsilon - s\right| dx' \tag{2.2.3}$$

Théorème 2.2.1 *Pour $f^{\varepsilon} \in \left(L^2(\Omega^{\varepsilon})\right)^3$, le coefficient de frottement $\mathcal{F}^{\varepsilon}$ est une fonction non négative dans $L^{\infty}(\omega)$, alors il existe $u^{\varepsilon} \in V^{\varepsilon}$ solution du problème $P_v^{\varepsilon,\phi}$. De plus pour $\mathcal{F}^{\varepsilon}$ très petit, la solution est unique.*

Preuve. La preuve de l'existence et l'unicité du problème variationnel $P_v^{\varepsilon,\phi}$ est basée sur l'existence d'un point fixe de l'application définie de $L^2(\omega)$ dans lui même par :

$$k \mapsto -\mathcal{F}^{\varepsilon}\mathrm{R}\left(\sigma_n^{\varepsilon}\right)\left(\left(u^{\varepsilon},\varphi^{\varepsilon}\right)(k)\right).$$

On considère le problème intermédiaire :

$$a^{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon},\varphi^{\varepsilon}-u^{\varepsilon}\right)+\int_{\omega} k\left(\left|\varphi^{\varepsilon}-s\right|-\left|u^{\varepsilon}-s\right|\right)dx' \geq \left\langle f^{\varepsilon},\varphi^{\varepsilon}-u^{\varepsilon}\right\rangle, \quad \forall \varphi^{\varepsilon} \in V^{\varepsilon},$$

et on pose la fonction

$$j_k\left(\varphi^{\varepsilon}\right)=\int_{\omega} k\left(\left|\varphi^{\varepsilon}-s\right|\right)dx', \quad \forall u^{\varepsilon} \in V^{\varepsilon}. \tag{2.2.4}$$

Il est facile de voir que j_k est une fonction propre, convexe et continue sur V^{ε}. L'existence et l'unicité du résultat (2.2.4) découlent des inégalités variationnelles elliptiques (comme dans [2]).

Le reste de la preuve de l'existence est similaire à celle de [20]. D'autre part, l'unicité de la solution a été prouvé dans [33]. ■

2.2.3 Changement de domaine et quelques estimations

Afin d'étudier l'analyse asymptotique du problème initial P^{ε}, on transforme le domaine Ω^{ε} à un domaine Ω indépendant du paramètre ε, cela ce fait par le changement de variable $z=\dfrac{x_3}{\varepsilon}$. D'où

$$\Omega=\left\{x=(x',z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; (x',0)\in\omega \text{ et } 0<z<h(x')\right\},$$

et sa frontière est notée par $\Gamma=\bar{\omega}\cup\bar{\Gamma}_1\cup\bar{\Gamma}_L$.

Par conséquent la fonction inconnue $\hat{u}=\left(\hat{u}_i\right)_{1\leq i\leq 3}$ est définie par :

$$\begin{cases} u_i^{\varepsilon}(x',x_3)=\hat{u}_i(x',z), \quad i=1,2 \\ \varepsilon^{-1}u_3^{\varepsilon}(x',x_3)=\hat{u}_3(x',z) \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Les données du problème initial se tansforment comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon^2 f^{\varepsilon}(x', x_3) = \hat{f}(x', z) \\ g^{\varepsilon}(x', x_3) = \hat{g}(x', z) \\ \varepsilon \mathcal{F}^{\varepsilon} = \hat{\mathcal{F}} \end{cases} \tag{2.2.6}$$

En suite, nous définissons le tenseur des contraintes $\hat{\sigma}_{ij}^{\varepsilon}$ comme suit :

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{ij} = \varepsilon^2 \sigma_{ij}^{\varepsilon}, \ 1 \leq i, j \leq 2, \\ \hat{\sigma}_{i3} = \varepsilon \sigma_{i3}^{\varepsilon}, \ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Ainsi le relèvement G^{ε} de g est défini par :

$$\begin{cases} G_3^{\varepsilon}(x', x_3) = \varepsilon \hat{G}_3(x', z), \\ G_i^{\varepsilon}(x', x_3) = \hat{G}_i(x', z), \ i = 1, 2 \end{cases} \tag{2.2.7}$$

avec $\hat{f}$, $\hat{\mathcal{F}}$, $\hat{g}$ et $\hat{G}_i$ sont indépendantes de ε.

On définit alors le cadre fonctionnel sur Ω comme suit :

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \hat{\varphi} \in \left(H^1(\Omega)\right)^3 \ : \ \hat{\varphi} = \hat{G} \text{ sur } \Gamma_L, \ \hat{\varphi} = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \ \hat{\varphi}.n = 0 \text{ sur } \omega \right\}. \\ \Pi(V) &= \left\{ \hat{\varphi} \in \left(H^1(\Omega)\right)^2 \ : \ \hat{\varphi} = (\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2), \ \hat{\varphi}_i = 0 \text{ sur } \Gamma_L \cup \ \Gamma_1, \ i = 1, 2 \right\} \\ V_z &= \left\{ \hat{\varphi} = (\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) \in \left(L^2(\Omega)\right)^2 \ : \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} \in L^2(\Omega) \text{ et } \hat{\varphi} = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \ i = 1, 2 \right\}, \end{aligned}$$

où V_z est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{V_z} = \left(\sum_{i=1}^{2} \|v_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial v_i}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent, le problème $P_v^{\varepsilon,\phi}$ est équivalent au problème suivant :

Problème $\hat{P}_v$: trouver $\hat{u} \in V$ telle que :

$$\hat{a}(\hat{u}, \hat{\varphi} - \hat{u}) + \hat{\jmath}(\hat{\varphi}) - \hat{\jmath}(\hat{u}) \geq \sum_{i=1}^{2} \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \hat{u}_i \right) + \left(\hat{f}_3, \varepsilon\hat{\varphi}_3 - \varepsilon\hat{u}_3 \right), \ \forall \hat{\varphi} \in V \tag{2.2.8}$$

avec

$$\hat{\jmath}(\hat{\varphi}) = \int_{\omega} \hat{\mathcal{F}} \left| \mathrm{R}(\hat{\sigma}_n) \right| \left| \hat{\varphi} - s \right| dx'$$

$$\hat{a}(\hat{u}, \hat{\varphi} - \hat{u}) = \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \sigma^{\varepsilon}(e(\hat{\varphi}_i) - e(\hat{u}_i)) dx' dz + \varepsilon \int_{\Omega} \sigma^{\varepsilon}(e(\hat{\varphi}_3) - e(\hat{u}_3)) dx' dz.$$

En substituant l'expression de $\hat{a}(.,.)$, *on obtient :*

$$\begin{aligned}
\widehat{a}(\hat{u},\hat{\varphi}) &= \varepsilon^2 \int_{\Omega_l} \mathcal{E}_{ijkl} e_{kl}(\hat{u}) \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial x_j} dx' dz + 2\varepsilon \int_{\Omega_l} \mathcal{E}_{i3kl} e_{kl}(\hat{u}) \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} dx' dz \\
&\quad + 2\varepsilon^2 \int_{\Omega_l} \mathcal{E}_{ijk3} e_{k3}(\hat{u}) \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial x_j} dx' dz + 4\varepsilon \int_{\Omega_l} \mathcal{E}_{i3k3} e_{k3}(\hat{u}) \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} dx' dz \\
&\quad + \varepsilon^2 \int_{\Omega_l} \mathcal{E}_{ij33} e_{33}(\hat{u}) \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial x_j} dx' dz + \varepsilon^2 \int_{\Omega_l} \mathcal{E}_{33ij} e_{ij}(\hat{u}) \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial z} dx' dz \\
&\quad + 2\varepsilon \int_{\Omega_l} \mathcal{E}_{i333} \hat{e}_{33}(\hat{u}) \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} dx' dz + 2\varepsilon^2 \int_{\Omega_l} \mathcal{E}_{33i3} e_{i3}(\hat{u}) \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial z} dx' dz \\
&\quad + \varepsilon^2 \int_{\Omega_l} \mathcal{E}_{3333} e_{33}(\hat{u}) \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial z} dx' dz
\end{aligned}$$

avec :

$$e(\hat{u}) = (e_{ij}(\hat{u}))_{ij}, \; i,j = 1,2,$$

$$\begin{aligned}
e_{ij}(\hat{u}) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i}\right) && i,j = 1,2, \\
e_{i3}(\hat{u}) = \hat{e}_{3i}(\hat{u}) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_i}\right), && i = 1,2, \\
e_{33}(\hat{u}) &= \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial z}.
\end{aligned}$$

2.2.4 Estimation de la solution

Le résultat suivant est très important pour démonter la convergence du problème $\hat{P}_v$.

Théorème 2.2.2 *: Pour $\hat{f} \in (L^2(\Omega))^3$ et le coefficient $\widehat{\mathcal{F}} > 0$ dans $\mathbf{L}^{\infty}(\omega)$, il existe une constante positive C independente de ε, telle que :*

$$\varepsilon^2 \sum_{1\le i,j\le 2} \left\|\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2 \left\|\frac{\partial \hat{u}_3}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{1\le i\le 2}\left(\left\|\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^4 \left\|\frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \le C. \tag{2.2.9}$$

Preuve. Premièrement il faut remarquer que

$$\varepsilon^2 \sum_{1\le i,j\le 2} \left\|\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2 \left\|\frac{\partial \hat{u}_3}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{1\le i\le 2}\left(\left\|\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^4 \left\|\frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) = \varepsilon \|\nabla u^{\varepsilon}\|^2_{L^2(\Omega^{\varepsilon})}. \tag{2.2.10}$$

En effet

$$
\begin{aligned}
a\left(u^{\varepsilon},\varphi^{\varepsilon}-u^{\varepsilon}\right) &= \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega^{\varepsilon}}\sigma_{ij}^{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_i^{\varepsilon}-u_i^{\varepsilon}))dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega^{\varepsilon}}\mathcal{E}e(u_i^{\varepsilon})\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_i^{\varepsilon}-u_i^{\varepsilon}))dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega^{\varepsilon}}\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_i^{\varepsilon}-u_i^{\varepsilon}))dx
\end{aligned}
$$

En utilisant (2.2.5) , (2.2.6) et (2.2.7), on obtient :

$$
\begin{aligned}
a\left(u^{\varepsilon},\varphi^{\varepsilon}-u^{\varepsilon}\right) &= \sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j}{\partial x_i}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(\hat{\varphi}_i-\hat{u}_i))dx'\left(\varepsilon dz\right) \\
&\quad+\sum_{i=1}^{2/}\int_{\Omega}\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{u}_i}{\varepsilon dz}+\frac{\varepsilon\partial\hat{u}_3}{\partial x_i}\right)\right)\frac{\partial}{\varepsilon dz}(\hat{\varphi}_i-\hat{u}_i))dx'\left(\varepsilon dz\right) \\
&\quad+\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega}\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon\partial\hat{u}_3}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j}{\varepsilon dz}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(\varepsilon\hat{\varphi}_3-\varepsilon\hat{u}_3))dx'\left(\varepsilon dz\right) \\
&\quad+\int_{\Omega}\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon\partial\hat{u}_3}{\varepsilon dz}+\frac{\varepsilon\partial\hat{u}_3}{\varepsilon dz}\right)\right)\frac{\partial}{\varepsilon dz}(\hat{\varphi}_3-\hat{u}_3))dx'\left(\varepsilon dz\right) \\
&= \varepsilon\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j}{\partial x_i}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(\hat{\varphi}_i-\hat{u}_i))dx'dz \\
&\quad+\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{u}_i}{\varepsilon dz}+\frac{\varepsilon\partial\hat{u}_3}{\partial x_i}\right)\right)\frac{\partial}{dz}(\hat{\varphi}_i-\hat{u}_i))dx'dz \\
&\quad+\sum_{j=1}^{2/}\int_{\Omega}\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon^2\partial\hat{u}_3}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j}{dz}\right)\right)\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_j}(\hat{\varphi}_3-\hat{u}_3))dx'dz \\
&\quad+\varepsilon\int_{\Omega^{\varepsilon}}\mathcal{E}\left(\frac{\partial\hat{u}_3}{dz}\right)\frac{\partial}{dz}(\hat{\varphi}_3-\hat{u}_3))dx'dz
\end{aligned}
$$

En multipliant la dernière égalité par ε, on obtient :

$$\begin{aligned}
\varepsilon a\left(u^\varepsilon,\varphi^\varepsilon-u^\varepsilon\right) &= \varepsilon^2\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(\hat{\varphi}_i-\hat{u}_i))dx'dz\\
&+\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{dz}+\frac{\varepsilon^2\partial \hat{u}_3}{\partial x_i}\right)\right)\frac{\partial}{dz}(\hat{\varphi}_i-\hat{u}_i)dx'dz\\
&+\sum_{j=1}^{2}\int_\Omega \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon^2\partial \hat{u}_3}{\partial x_j}+\frac{\partial \hat{u}_j}{dz}\right)\right)\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x_j}(\hat{\varphi}_3-\hat{u}_3))dx'dz\\
&+\varepsilon^2\int_\Omega \mathcal{E}\left(\frac{\partial \hat{u}_3}{dz}\right)\frac{\partial}{dz}(\hat{\varphi}_3-\hat{u}_3))dx'dz\\
&= \varepsilon^2\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(\hat{\varphi}_i-\hat{u}_i))dx'dz\\
&+\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{dz}+\frac{\varepsilon^2\partial \hat{u}_3}{\partial x_i}\right)\right)\left(\frac{\partial}{dz}(\hat{\varphi}_i-\hat{u}_i)+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x_j}(\hat{\varphi}_3-\hat{u}_3)\right)dx'dz\\
&+\varepsilon^2\int_\Omega \mathcal{E}\left(\frac{\partial \hat{u}_3}{dz}\right)\frac{\partial}{dz}(\hat{\varphi}_3-\hat{u}_3))dx'dz
\end{aligned}$$

D'où l'égalité (2.2.10).

Revenons maintenant à l'inégalité (2.2.9). Soit u^ε la solution du problème variationnel $P_v^{\varepsilon,\phi}$, on a alors :

$$a\left(u^\varepsilon,\varphi^\varepsilon-u^\varepsilon\right)+j^\varepsilon(\varphi^\varepsilon)-j^\varepsilon(u^\varepsilon)\geq\int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon(\varphi^\varepsilon-u^\varepsilon)dx'dx_3,\ \forall\varphi^\varepsilon\in V^\varepsilon.$$

La linéarité de $a\left(.,.\right)$ donne :

$$a\left(u^\varepsilon,\varphi^\varepsilon\right)-a\left(u^\varepsilon,u^\varepsilon\right)+j^\varepsilon(\varphi^\varepsilon)-j^\varepsilon(u^\varepsilon)\geq\int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon\varphi dx'dx_3-\int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon u^\varepsilon dx'dx_3,\ \forall\varphi^\varepsilon\in V^\varepsilon$$

et donc

$$\begin{aligned}
-a\left(u^\varepsilon,u^\varepsilon\right) &\geq -a\left(u^\varepsilon,\varphi^\varepsilon\right)-j^\varepsilon(\varphi^\varepsilon)+j^\varepsilon(u^\varepsilon)\\
&+\textstyle\int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon\varphi^\varepsilon dx'dx_3-\int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon u^\varepsilon dx'dx_3,\forall\varphi^\varepsilon\in V^\varepsilon.
\end{aligned}$$

Mais comme $j^\varepsilon(u^\varepsilon)\geqslant 0$, il devient :

$$a\left(u^\varepsilon,u^\varepsilon\right)\quad\leq a\left(u^\varepsilon,\varphi^\varepsilon\right)+j^\varepsilon(\varphi^\varepsilon)-\int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon\varphi^\varepsilon dx'dx_3+\int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon u^\varepsilon dx'dx_3,\ \forall\varphi^\varepsilon\in V^\varepsilon\quad(2.2.11)$$

et donc :

$$\left|a\left(u^\varepsilon,u^\varepsilon\right)\ \right|\quad\leq\left|a\left(u^\varepsilon,\varphi^\varepsilon\right)\right|+\left|j^\varepsilon(\varphi^\varepsilon)\right|+\left|\int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon\varphi^\varepsilon dx'dx_3\right|+\left|\int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon u^\varepsilon dx'dx_3\right|,\ \forall\varphi^\varepsilon\in V^\varepsilon.$$

D'après l'inégalité de Korn, il existe une constante $C_k \geqslant 0$ indépendante de ε telle que :

$$a\left(u^\varepsilon, u^\varepsilon\right) \geq C_K \|\nabla u^\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)}. \tag{2.2.12}$$

De plus

$$\begin{aligned} a\left(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon - u^\varepsilon\right) &= \int_{\Omega^\varepsilon} \mathcal{E}(e(\varphi^\varepsilon) - e(u^\varepsilon)) dx' dx_3 \\ a\left(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon\right) &= a\left(u^\varepsilon, u^\varepsilon\right) + \int_{\Omega^\varepsilon} \mathcal{E}(e(\varphi^\varepsilon) - e(u^\varepsilon)) dx' dx_3. \end{aligned}$$

D'où

$$\left|a\left(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon\right)\right| \leq \int_{\Omega^\varepsilon} \|\mathcal{E}(e(\varphi^\varepsilon) - e(u^\varepsilon))\|^2_{\mathbf{S}_3}\, dx' dx_3.$$

En utilisant maintenant l'hypothèse (b), on trouve :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \|\mathcal{E}(e(\varphi^\varepsilon) - e(u^\varepsilon))\|^2_{\mathbf{S}_3}\, dx' dx_3 \leq \int_{\Omega^\varepsilon} L_{\mathcal{E}} \|(e(\varphi^\varepsilon) - e(u^\varepsilon))\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} dx' dx_3$$

Et comme $\sum_{i,j=1}^2 |e(u^\varepsilon)|^2 \leq \|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$, alors :

$$\left|a\left(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon\right)\right| \leq L_{\mathcal{E}} \left(\|\nabla \varphi^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \right) \tag{2.2.13}$$

D'autre part, par les inégalités de Cauchy-Schwartz, Poincaré et Young, on a :

$$\begin{aligned} \left| \langle f^\varepsilon, u^\varepsilon \rangle^{\frac{1}{2}} \right| &= \left| \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon u^\varepsilon dx' dx_3 \right| \leq \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \\ &\leq \varepsilon h^\star \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \,.\varepsilon h^\star \|\nabla f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \\ &\leq \frac{C_K}{2} \|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{(\varepsilon h^\star)^2}{2C_K} \|\nabla f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

De même pour

$$\left| \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon \varphi^\varepsilon dx' dx_3 \right| \leq \frac{C_K}{2} \|\nabla \varphi^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{(\varepsilon h^\star)^2}{2C_K} \|\nabla f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \tag{2.2.15}$$

De $(2.2.12) -$ $(2.2.15)$ et pour $\varphi^\varepsilon = G^\varepsilon$, $(2.2.11)$ devient :

$$\begin{aligned} C_K \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} &\leq a\left(u^\varepsilon, u^\varepsilon\right) \leq L_{\mathcal{E}} \left(\|\nabla G^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \right), \\ &\qquad + \frac{C_K}{2} \|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{(\varepsilon h^\star)^2}{2C_K} \|\nabla f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \\ &\quad + \frac{C_K}{2} \|\nabla G^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \frac{(\varepsilon h^\star)^2}{2C_K} \|\nabla f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)}, \end{aligned}$$

On assume que $L_{\mathcal{E}} < \dfrac{C_K}{2}$, alors

$$\left(\frac{C_K}{2} - L_{\mathcal{E}}\right) \|\nabla u^{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega^{\varepsilon})} \leq \frac{(\varepsilon h^{\star})^2}{C_K} \|\nabla f^{\varepsilon}\|^2_{L^2(\Omega^{\varepsilon})} + \left(L_{\mathcal{E}} + \frac{C_K}{2}\right) \|\nabla G^{\varepsilon}\|^2_{L^2(\Omega^{\varepsilon})} \tag{2.2.16}$$

En multipliant (2.2.16) par ε, on obtient

$$\varepsilon\left(\frac{C_K}{2} - L_{\mathcal{E}}\right) \|\nabla u^{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega^{\varepsilon})} \leq \frac{(h^{\star})^2}{C_K} \|\nabla \hat{f}\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(L_{\mathcal{E}} + \frac{C_K}{2}\right) \|(\nabla \hat{G}\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

D'où

$$\varepsilon \|\nabla u^{\varepsilon}\|^2_{L^2(\Omega^{\varepsilon})} \leq C$$

avec

$$C = \left(\frac{h^{\star 2}}{\mathcal{C}_K} \left\|\nabla \hat{f}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\mathcal{C}_K}{2} + L_{\mathcal{E}}\right) \left\|\nabla \hat{G}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \left(\frac{\mathcal{C}_K}{2} - L_{\mathcal{E}}\right)^{-1}$$

et

$$\varepsilon \|\nabla u^{\varepsilon}\|^2_{L^2(\Omega^{\varepsilon})} = \varepsilon^2 \sum_{1 \leq i,j \leq 2} \left\|\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2 \left\|\frac{\partial \hat{u}_3}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{1 \leq i \leq 2} \left(\left\|\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^4 \left\|\frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

Ce qui achève la démonstration du théorème (2.2.2). ■

2.3 Résultats de convergence et problème limite

Dans cette partie, on veut savoir le comportement asymptotique du déplacement $\hat{u}$, c'est-à-dire si $\hat{u}_i$ admet une limite lorsque ε tend vers 0.

Théorème 2.3.1 *Sous les hypothèses du théorème* (2.2.2) *; il existe* $\hat{u}^{\star} = (\hat{u}^{\star}_i)_{1 \leq i \leq 2}$ *dans* V_z *telle que :*

$$\hat{u}_i \rightharpoonup \hat{u}^{\star}_i \quad i = 1,2 \;\; \textit{faiblement dans} \;\; V_z, \tag{2.3.1}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \rightharpoonup 0 \quad i,j = 1,2 \;\; \textit{faiblement dans} \;\; L^2(\Omega), \tag{2.3.2}$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 \quad i = 1,2 \;\; \textit{faiblement dans} \;\; L^2(\Omega), \tag{2.3.3}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial z} \rightharpoonup 0 \quad \textit{faiblement dans} \;\; L^2(\Omega), \tag{2.3.4}$$

$$\varepsilon \hat{u}_3 \rightharpoonup 0 \quad \textit{faiblement dans} \; L^2(\Omega), \tag{2.3.5}$$

Preuve. D'après le théorème (2.3.1) ; il existe une constante C indépendante de ε tel que :

$$\left\| \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial z} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \qquad \text{pour } \ i = 1, 2$$

et d'après l'inégalité de Poincaré, on a

$$\| \hat{u}_i \|_{L^2(\Omega)} \leq h^\star \left\| \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)} ;$$

ce la signifie que $\hat{u}_i$ est borné dans V_z pour $i = 1, 2$, alors il existe $\hat{u}_i^* \in V_z$ tel que $\hat{u}_i$ converge faiblement vers $\hat{u}_i^\star$ dans $L^2(\Omega)$.

De même pour

$$\varepsilon^2 \sum_{1 \leq i,j \leq 2} \left\| \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

Alors $\varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j}$ converge faiblement vers $\dfrac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial x_j}$. De plus $\| \hat{u}_i \|_{L^2(\Omega)} \leq C$, ce qui donne aussi la convergence faible de $\dfrac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j}$ vers $\dfrac{\partial \hat{u}_i^\star}{\partial x_j}$, alors $\dfrac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j}$ converge faiblement vers 0.

On peut conclure aussi de l'estimation (2.2.9) et du même théorème (2.3.1) que :

$$\varepsilon^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C,$$

alors $\varepsilon^2 \dfrac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_i}$ converge faiblement vers $\dfrac{\partial \hat{u}_3^\star}{\partial x_i}$ et comme $\varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_i}$ converge faiblement vers $\dfrac{\partial \hat{u}_3^\star}{\partial x_i}$, on déduit alors que $\varepsilon^2 \dfrac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_i}$ converge faiblement vers 0.

En suivant le même principe, on montre la convergence faible de $\varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_3}{\partial z}$ et $\varepsilon \hat{u}_3$ vres 0. ∎

Lemme 2.3.1 *Il existe une suite de* $R(\sigma_n^\varepsilon(\hat{u}))$ *convergente fortement vers* $R(\hat{\sigma}_n(\hat{u}^\star))$ *dans* $L^2(\omega)$.

Théorème 2.3.2 *Sous les mêmes hypothèses du théorème* (2.2.2) , $\hat{u}_i$ *converge fortement vers* $\hat{u}_i^\star$, $i = 1, 2$ *dans* V_z. *De plus, la solution* $\hat{u}^\star$ *satisfait :*

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{E}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\star}{\partial z}\right)\right) = \hat{f}_i,\ i = 1, 2 \ \ dans \ \ \left(L^2(\Omega)\right)^2, \tag{2.3.6}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \mathcal{E}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\star}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\star)dx'dz + \int_\omega \mathcal{F}^\varepsilon \left|R\left(\hat{\sigma}_n\left(\hat{u}^\star\right)\right)\right|\left(\left|\varphi^\varepsilon - s\right| - \left|\hat{u}^\star - s\right|\right)dx' \geq \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{f}_i(\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\star)d \tag{2.3.7}$$

Preuve. L'inéquation (2.2.8) peut être s'écrit sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{4} I_i\left(\varepsilon\right) + \hat{\jmath}(\hat{\varphi}) - \hat{\jmath}(\hat{u}) \geq \sum_{i=1}^{2}\left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \hat{u}_i\right) + \left(\hat{f}_3, \varepsilon\hat{\varphi}_3 - \varepsilon\hat{u}_3\right)$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1\left(\varepsilon\right) &= \varepsilon^2\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i))dx'dz \\
I_2\left(\varepsilon\right) &= \sum_{i=1}^{2/}\int_\Omega \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{dz} + \frac{\varepsilon^2\partial \hat{u}_3}{\partial x_i}\right)\right)\frac{\partial}{dz}(\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i)dx'dz \\
I_3\left(\varepsilon\right) &= \sum_{j=1}^{2/}\int_\Omega \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon^2\partial \hat{u}_3}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{dz}\right)\right)\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x_j}(\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3))dx'dz \\
I_4\left(\varepsilon\right) &= \varepsilon^2\int_\Omega \mathcal{E}\left(\frac{\partial \hat{u}_3}{dz}\right)\frac{\partial}{dz}(\hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3))dx'dz.
\end{aligned}$$

Par les résultats de convergence du théorème (2.3.1) , on trouve :

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\sum_{i=1}^{4} I_i\left(\varepsilon\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \mathcal{E}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\star}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\star)dx'dz$$

et

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\left(\hat{f}_3, \varepsilon\hat{\varphi}_3 - \varepsilon\hat{u}_3\right) = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\varepsilon\int_\Omega(\hat{f}_3, \hat{\varphi}_3 - \hat{u}_3)dx'dz = 0.$$

Comme $\hat{\jmath}$ semi-continue convexe c'est-à-dire

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\inf\int_\omega \hat{\mathcal{F}}\left|\mathrm{R}\left(\hat{\sigma}_n\right)\right|\left|\hat{u} - s\right|dx' \geq \int_\omega \hat{\mathcal{F}}\left|\mathrm{R}\left(\hat{\sigma}_n\right)\right|\left|\hat{u}^\star - s\right|dx',$$

alors

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \mathcal{E}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\star}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\varphi}_i - \hat{u}_i^\star)dx'dz + \int_\omega \hat{\mathcal{F}}\left|\mathrm{R}\left(\hat{\sigma}_n\left(\hat{u}^\star\right)\right)\right|\left(\left|\varphi^\varepsilon - s\right| - \left|\hat{u}^\star - s\right|\right)dx' \geq \sum_{i=1}^{2}\left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i - \hat{u}^\star\right). \tag{2.3.8}$$

Pour démontrer (2.3.6) on choisit dans (2.3.8) ; $\hat{\varphi}_i = \hat{u}^\star \mp \psi_i$, $\psi_i \in H_0^1(\Omega)$, $i = 1, 2$.

Pour $\hat{\varphi}_i = \hat{u}_i^\star + \psi_i$, on obtient

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \mathcal{E}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\star}{\partial z}\right)\frac{\partial \psi_i}{\partial z}dx'dz \geq \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{f}\psi_i dx'dz$$

et pour $\hat{\varphi}_i = \hat{u}_i^\star - \psi_i$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \mathcal{E}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\star}{\partial z}\right)\frac{\partial \psi_i}{\partial z}dx'dz \leq \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{f}_i\psi_i dx'dz,$$

Par la formule de Green, on aura :

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{E}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\star}{\partial z}\right)\right)\psi_i dx'dz = \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{f}_i\psi_i dx'dz,$$

ce qui donne :

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{E}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\star}{\partial z}\right)\right) = \hat{f}_i,\ i = 1,2 \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega) \text{ et donc dans } L^2(\Omega) \text{ car } \hat{f}_i \in L^2(\Omega).$$

■

Théorème 2.3.3 *Avec les mêmes hypothèses du théorème* (2.3.2) , *on a :*

$$\int_\omega \hat{\mathcal{F}}\left|R\left(\hat{\sigma}_n\left(s^\star\right)\right)\right|\left(|\hat{\varphi}+s^\star-s|-|s^\star-s|\right)dx' - \frac{1}{2}\int_\omega \tau^\star\hat{\varphi}dx' \geq 0, \forall\hat{\varphi}\in\left(L^2(\omega)\right)^2, \quad (2.3.9)$$

$$\left\{\begin{array}{l} |\tau^\star| < \hat{\mathcal{F}}\left|R\left(\hat{\sigma}_n\left(s^\star\right)\right)\right| \Rightarrow s^\star = s, \\ \\ |\tau^\star| = \hat{\mathcal{F}}\left|R\left(\hat{\sigma}_n\left(s^\star\right)\right)\right| \ \Rightarrow \exists\beta\geq 0, \quad \textit{tel que } s^\star = s+\beta\lambda\tau^\star, \end{array}\right. \quad \textit{dans } \omega, \qquad (2.3.10)$$

avec :

$$s^\star = \hat{u}^\star(x',0), \quad \tau^* = \mathcal{E}(x',0)\frac{\partial \hat{u}^\star}{\partial z}(x',0).$$

De plus, si les composantes de $\mathcal{E}_{i3j3}$, $1 \leq i,j \leq 2$ dépendent seulement de la variable x', alors $\hat{u}^\star$ et $s^\star$ satisfaient l'équation faible généralisée :

$$\int_\omega\left(\tilde{F}\left(x'\right)+\frac{1}{2}\int_0^h \mathcal{E}(x')\hat{u}_i^\star(x,z)dz - \frac{h}{2}\mathcal{E}(x')s^\star - \frac{h^2}{4}\tau^*\right)\nabla\hat{\varphi}\left(x'\right)dx' = 0,\ \forall\hat{\varphi}\in H^1(\omega) \qquad (2.3.11)$$

où

$$\tilde{F}(x') = \int_0^h\int_0^z\int_0^\xi \hat{f}_i\left(x',\alpha\right)d\alpha d\xi dz.$$

Preuve. Pour $\hat{\varphi}_i = \hat{u}^\star + \psi_i$, avec $\psi_i \in H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$, $i = 1, 2$ où

$$H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega) = \left\{\hat{\varphi} \in H^1(\Omega) \ : \ \hat{\varphi} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_L\right\}.$$

l'inéquation variationnelle (2.3.7) se ramène à :

$$\frac{1}{2}\sum_{1\leq i\leq 2}\int_\Omega \left(\mathcal{E}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\star}{\partial z}\right)\right)\frac{\partial \psi_i}{\partial z}dx'dz + \int_\omega \hat{\mathcal{F}}\left|\mathrm{R}\left(\sigma_n^\varepsilon\left(s^\star\right)\right)\right|\left(\left|\psi_i + s^\star - s\right| - \left|s^\star - s\right|\right)dx' \geq \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{f}_i\psi_i dx'dz.$$

En tenant compte de $n = (0, 0, -1)$ sur ω, la formule de Green permet de conclure que

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{E}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\star}{\partial z}\right)\right)\psi_i dx'dz + \frac{1}{2}\int_\omega \tau_i^\star\psi_i dx' + \int_\omega\int_\omega \hat{\mathcal{F}}\left|\mathrm{R}\left(\hat{\sigma}_n\left(s^\star\right)\right)\right|\left(\left|\psi_i + s^\star - s\right| - \left|s^\star - s\right|\right)d \\ \geq\ & \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{f}_i\psi_i dx'dz. \end{aligned}$$

D'autre part de (2.3.6) et pour $\hat{\psi} = \left(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2\right) \in H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$, on a

$$\int_\omega \hat{\mathcal{F}}\left|\mathrm{R}\left(\hat{\sigma}_n\left(s^\star\right)\right)\right|\left(\psi + s^\star - s\right| - \left|s^\star - s\right|)dx' - \frac{1}{2}\int_\omega \tau^\star\hat{\psi}dx' \geq 0, \ \forall\hat{\psi} \in \left(\mathfrak{D}(\omega)\right)^2$$

De la densité de $\mathfrak{D}(\omega)$ dans $L^2(\omega)$, on déduit que :

$$\int_\omega \hat{\mathcal{F}}\left|\mathrm{R}\left(\hat{\sigma}_n\left(s^\star\right)\right)\right|\left(\psi + s^\star - s\right| - \left|s^\star - s\right|)dx' - \frac{1}{2}\int_\omega \tau^*\hat{\psi}dx' \geq 0, \quad \forall\hat{\psi} \in \left(L^2(\omega)\right)^2.$$

Pour démontrer (2.3.11), on intègre deux fois (2.3.6) entre 0 et z, avec $\mathcal{E}_{i3j3}$, $1 \leq i, j \leq 2$ dépendent seulement de x', on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^z\int_0^\xi \hat{f}_i(x,\alpha)\,d\alpha d\xi &= \int_0^z\int_0^\xi -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\mathcal{E}\left(x'\right)\right)\frac{\partial \hat{u}_i^\star}{\partial\alpha}\left(x',\alpha\right)d\alpha d\xi \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^z \mathcal{E}\left(x'\right)\frac{\partial \hat{u}_i^\star}{\partial\xi}\left(x',\xi\right)d\xi + \frac{1}{2}\int_0^z \mathcal{E}\left(x'\right)\frac{\partial \hat{u}_i^\star}{\partial\xi}\left(x',0\right)d\xi \\ &= -\frac{1}{2}\mathcal{E}\left(x'\right)\left[\hat{u}_i^\star(x,z) - \hat{u}_i^\star(x,0)\right] + \frac{1}{2}\tau^\star(z-0). \end{aligned}$$

Alors

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}\left(x'\right)\hat{u}_i^\star(x,z) = \frac{1}{2}\mathcal{E}\left(x',0\right)\hat{u}_i^\star(x,0) - \int_0^z\int_0^\xi \hat{f}_i(x,\alpha)\,d\alpha d\xi + \frac{1}{2}z\tau^\star. \tag{2.3.12}$$

En remplaçant z par h et en utilisant le fait que $\hat{u}_i^\star(x',h)=0$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}(x',0)\,s^\star+\frac{1}{2}h(x')\,\tau^\star=\int_0^h\int_0^\xi \hat{f}_i(x,\alpha)\,d\alpha d\xi. \tag{2.3.13}$$

Intégrons (2.3.12) entre 0 et h, alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathcal{E}(x')\int_0^h \hat{u}_i^\star(x,z)\,dz &= \frac{1}{2}\mathcal{E}(x')\int_0^h \hat{u}_i^\star(x,0)\,dz+\frac{1}{2}\int_0^h z\tau^\star dz-\int_0^h\int_0^z\int_0^\xi \hat{f}_i(x,\alpha)\,d\alpha d\xi dz\\ &= \frac{h}{2}\mathcal{E}(x')\,s^\star+\frac{h^2}{4}\tau^\star-\int_0^h\int_0^z\int_0^\xi \hat{f}_i(x,\alpha)\,d\alpha d\xi dz.\end{aligned}$$

On déduit alors :

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}(x')\int_0^h \hat{u}_i^\star(x,z)\,dz-\frac{h}{2}\mathcal{E}(x')\,s^\star-\frac{h^2}{4}\tau^\star+\int_0^h\int_0^z\int_0^\xi \hat{f}_i(x,\alpha)\,d\alpha d\xi dz=0,$$

et donc

$$\int_\omega\left[\frac{1}{2}\mathcal{E}(x')\int_0^h \hat{u}_i^\star(x,z)\,dz-\frac{h}{2}\mathcal{E}(x')\,s^\star-\frac{h^2}{4}\tau^\star+\widetilde{\mathcal{F}}(x')\right]\nabla\hat{\varphi}dx'=0,\quad \forall\hat{\varphi}\in H^1(\omega).$$

■

Théorème 2.3.4 *Sous les mêmes hypothèses du théorème* (2.3.2), *il existe une constante positive* $\mathcal{F}^\star$ *(suffisamment petite) telle que* $\left\|\hat{\mathcal{F}}\right\|_{L^\infty(\omega)}\leq\mathcal{F}^\star$, *la solution du problème* $(2.3.6)-(2.3.7)$ *est unique dans* V_z.

Preuve. Supposons que $\hat{u}_1^\star$ et $\hat{u}_2^\star$ soient deux solutions du problème $(2.3.6)-(2.3.7)$ alors :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^2\int_\Omega \mathcal{E}\left(\frac{\partial\hat{u}_{1i}^\star}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\varphi}_i-\hat{u}_{1i}^\star)dx'dz+\int_\omega\hat{\mathcal{F}}\left|\mathrm{R}\left(\hat{\sigma}_n\left(\hat{u}_1^\star\right)\right)\right|\left(\left|\varphi^\varepsilon-s\right|-\left|\hat{u}_1^\star-s\right|\right)dx'\geq\sum_{i=1}^2\int_\Omega \hat{f}_i(\hat{\varphi}_i-\hat{u}_{1i}^\star)dx'dz$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^2\int_\Omega \mathcal{E}\left(\frac{\partial\hat{u}_{2i}^\star}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\varphi}_i-\hat{u}_{2i}^\star)dx'dz+\int_\omega\hat{\mathcal{F}}\left|\mathrm{R}\left(\hat{\sigma}_n\left(\hat{u}_2^\star\right)\right)\right|\left(\left|\varphi^\varepsilon-s\right|-\left|\hat{u}_2^\star-s\right|\right)dx'\geq\sum_{i=1}^2\int_\Omega \hat{f}_i(\hat{\varphi}_i-\hat{u}_{2i}^\star)dx'dz$$

Prenons $\hat{\varphi}_i=\hat{u_{2i}}^\star$ dans la première et $\hat{\varphi}_i=\hat{u_{1i}}^\star$ dans la deuxième inéquation et l'addition des deux inéquations, on obtient :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^2\int_\Omega \mathcal{E}\left(\frac{\partial\hat{u}_{1i}^\star}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial z}(\hat{u}_{2i}^\star-\hat{u}_{1i}^\star)dx'dz+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^2\int_\Omega \mathcal{E}\left(\frac{\partial\hat{u}_{2i}^\star}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial z}(\hat{u}_{1i}^\star-\hat{u}_{2i}^\star)dx'dz$$

$$+\int_{\omega}\hat{\mathcal{F}}\left(\left|\mathrm{R}\left(\hat{\sigma}_n\left(\hat{u}_2^\star\right)\right)\right|-\left|\mathrm{R}\left(\hat{\sigma}_n\left(\hat{u}_1^\star\right)\right)\right|\right)\left(\left|\hat{u}_1^\star-s\right|-\left|\hat{u}_2^\star-s\right|\right)dx'\geq 0$$

Alors

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\mathcal{E}\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{u}_{1i}^\star-\hat{u}_{2i}^\star\right)\right|^2 dx'dz\leq\int_{\omega}\hat{\mathcal{F}}\left(\left|\mathrm{R}\left(\hat{\sigma}_n\left(\hat{u}_2^\star\right)\right)\right|-\left|\mathrm{R}\left(\hat{\sigma}_n\left(\hat{u}_1^\star\right)\right)\right|\right)\left|\hat{u}_1^\star-\hat{u}_2^\star\right|dx',$$

ce qui implique que

$$\|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}\infty}\left\|\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{u}_1^\star-\hat{u}_2^\star\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\leq\int_{\omega}\hat{\mathcal{F}}\left(\left|\mathrm{R}\left(\hat{\sigma}_n\left(\hat{u}_2^\star\right)\right)\right|-\left|\mathrm{R}\left(\hat{\sigma}_n\left(\hat{u}_1^\star\right)\right)\right|\right)\left|\hat{u}_1^\star-\hat{u}_2^\star\right|dx'.$$

L'inégalité de poincaré, nous donne :

$$\|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}\infty}\left\|\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{u}_1^\star-\hat{u}_2^\star\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\leq\left(h^\star\right)^2\left\|\hat{\mathcal{F}}\right\|_{L^\infty(\omega)}\left(\int_{\omega}\hat{\mathcal{F}}\left|\mathrm{R}\left(\hat{\sigma}_n\left(\hat{u}_2^\star\right)\right)\right|-\left|\mathrm{R}\left(\hat{\sigma}_n\left(\hat{u}_1^\star\right)\right)\right|\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\hat{u}_1^\star-\hat{u}_2^\star\right\|_{L^2(\omega)}.$$

Comme $\left\|\hat{\mathcal{F}}\right\|_{L^\infty(\omega)}\leq\mathcal{F}^\star$, on a $\left\|\hat{u}_1^\star-\hat{u}_2^\star\right\|_{V_z}=0$ et par suite $\hat{u}_1^\star=\hat{u}_2^\star$. ■

CHAPITRE 3

Convergence asymptotique d'un problème de transmission dans un domaine mince de $\mathbb{R}^3$ avec frottement.

Dans ce chapitre, nous étudions le comportement asymptotique d'un problème aux limites gouverné par un corps élastique non homogène occupant un domaine tridimensionnel Ω^ε $(0 < \varepsilon < 1)$, qui est supposé constitué de deux coprs homogènes Ω_1^ε et Ω_2^ε, c'est-à-dire $\Omega^\varepsilon = \Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$. Pour facilité aux lecteurs, nous utilisons un indice l pour indiquer qu'une quantité est liée au domaine Ω_l^ε, $l = 1, 2$ où $0 < \varepsilon < 1$ un petit paramaitre qui tend vers 0.

L'idée générale de ce chapitre est grâce à un changement d'echelle, le problème inital considéré dans Ω^ε est transformé à un autre problème dans un domaine fixe indépendant du paramètre ε, et à l'aide d'une estimation à priori, on montre l'existence et l'unicité de la solution du problème limite lorsque ε tend vers 0.

3.1 Description du problème

Soit un corps élastique non homogène, dont la configuration de référence est un domaine de points $x = (x_1, x_2, x_3) = (x', x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ noté Ω^ε $(0 < \varepsilon < 1)$ composé de deux corps élastiques homogènes occupant le domaine Ω_l^ε , $l = 1, 2$. Les deux corps sont en contact bilatéral, le long de leur partie commune.

Considérons que la frontière $\partial\Omega_l^\varepsilon$ est de classe C^1 et elle est composée de trois parties mesurables et disjointes définies par :

$$\partial\Omega_l^\varepsilon = \overline{\omega} \cup \overline{\Gamma}_l^\varepsilon \cup \overline{\Gamma}_{L_l}^\varepsilon, \quad l = 1, 2,$$

où

ω est la partie commune des deux corps qui est un domaine fixe de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x_3 = 0$ pour tout $x' = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

$\bar{\Gamma}_1^\varepsilon$ $\left(\text{resp ; } \bar{\Gamma}_2^\varepsilon\right)$ est la frontière supérieure de Ω_1^ε (resp ; de Ω_2^ε) d'équation $x_3 = \varepsilon h(x')$ (resp ; $x_3 = -\varepsilon h(x')$).

Avec h est une fonction bornée définie sur ω telle que : $0 < h_* \leq h(x') \leq h^*$; $\forall (x', 0) \in \omega$ où h_*, $h^* \in \mathbb{R}^{*+}$.

$\bar{\Gamma}_{L_l}^\varepsilon$ est la frontière latérale de Ω_l^ε.

On écrit alors $\Omega^\varepsilon = \Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$ avec :

$$\begin{aligned}
\Omega_1^\varepsilon &= \left\{x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x', 0) \in \omega, \ 0 < x_3 < \varepsilon h(x')\right\}, \\
\Omega_2^\varepsilon &= \left\{x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x', 0) \in \omega, \ -\varepsilon h(x') < x_3 < 0\right\}.
\end{aligned}$$

Pour définir notre problème, on a besoin des notions suivantes.

On note par S_3 l'espace des tenseurs symétriques du second ordre dans $\mathbb{R}^3$, $(.,.)$ et $|.|$ le produit scalaire et la norme euclidiènne respectivement dans $\mathbb{R}^3$ et S_3 avec :

$$\begin{aligned}
\forall u, v &\in \mathbb{R}^3, (u, v) = u.v = \sum_{i=1}^{i=3} u_i v_i, \qquad |v| = (v.v)^{\frac{1}{2}}. \\
\forall \sigma, \tau &\in S_3, (\sigma, \tau) = \sigma.\tau = \sum_{i,j=1}^{i,j=3} \sigma_{ij}\tau_{ij}, \qquad |\tau| = (\tau.\tau)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Soit Q un espace de Hilbert définit par :

$$Q = \left\{ \tau = (\tau_{ij}) \in S_3 : \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega_l^\varepsilon), \forall i, j = 1, 2, 3 \right\}$$

avec le produit scalaire

$$(\sigma, \tau)_Q = \int_{\Omega_l^\varepsilon} \sigma.\tau dx = \sum_{i,j=1}^{i,j=3} \int_{\Omega_l^\varepsilon} \sigma_{ij}\tau_{ij} dx.$$

Considérons Q_∞ l'espace du $4^{ième}$ ordre (voir [33] page 97) avec

$$Q_\infty = \{\mathcal{E}^l = (\mathcal{E}^l_{ijpq}) : \mathcal{E}^l_{ijpq} = \mathcal{E}^l_{jipq} = \mathcal{E}^l_{pqij} \in L^\infty(\Omega_l^\varepsilon), \ 1 \le i, j, p, q \le 3\}$$

qui est un espace de Banach muni de la norme

$$\|\mathcal{E}^l\|_{Q_\infty} = \max_{0 \le i,j,p,q \le 3} \|\mathcal{E}^l_{ijpq}\|_{L^\infty(\Omega_l^\varepsilon)}$$

telle que

$$\|\mathcal{E}^l \tau\|_Q \le 3\|\mathcal{E}^l\|_{\mathbf{Q}_\infty} \|\tau\|_Q \qquad \forall \mathcal{E}^l \in Q_\infty, \ \tau \in Q. \tag{3.1.1}$$

Pour toute fonction u^ε définie sur Ω^ε, on note par $u_l^\varepsilon = (u_{li}^\varepsilon)_{1 \le i \le 3}$ sa restriction sur Ω_l^ε ; le champ de déplacement du corps Ω_l^ε, $l = 1, 2$. On note aussi par $\sigma_l^\varepsilon = (\sigma_{lij}^\varepsilon)_{1 \le i,j \le 3}$, $l = 1, 2$; le tenseur des contraintes modilisé par :

$$\sigma_l^\varepsilon(u_l^\varepsilon) = \mathcal{E}^l e(u_l^\varepsilon) \text{ où } (\sigma_l^\varepsilon)_{ij} (u_l^\varepsilon) = \mathcal{E}^l_{ijpq} \, e_{pq} (u_l^\varepsilon), \ 1 \le i, j, p, q \le 3 \ ; \ \ l = 1, 2.$$

Où $\mathcal{E}^l = \left(\mathcal{E}^l_{ijpq}\right)_{1 \le i,,j,p,q \le 3}$ est un tenseur d'ordre 4 de dimention 3 satisfaisant les conditions :

$$\begin{cases}
(\mathrm{H}_1) \ \mathcal{E}^l : \Omega_l^\varepsilon \times S_3 \to S_3. \\
(\mathrm{H}_2) \ \text{Il existe } L_{\mathcal{E}^l} > 0 \text{ telle que :} \\
\quad | \ \mathcal{E}^l (x, \tau_1) - \ \mathcal{E}^l (x, \tau_2) \, | \le L_{\ \mathcal{E}^l} \, |\tau_1 - \tau_2| \\
\qquad \forall \tau_1, \tau_2 \in S_3, \forall \ x \in \Omega_l^\varepsilon. \\
(\mathrm{H}_3) \ \text{Il existe } m_{\mathcal{E}} > 0 \text{ telle que :} \\
\qquad \mathcal{E}^l (x, \tau) . \tau \ge m_{\mathcal{E}} \, | \, \tau|^2 , \quad \forall \, \tau \in S_3, \ \forall \ \ x \in \Omega_l^\varepsilon. \\
(\mathrm{H}_4) \ \text{La carte } x \longmapsto \mathcal{E}^l(x, 0) \text{ est lebesgue mesurable dans } \Omega_l^\varepsilon \\
(\mathrm{H}_5) \ \text{La carte } x \longmapsto \mathcal{E}^l(x, 0) \in Q.
\end{cases}$$

La notation $e(u_l^\varepsilon)$, $l = 1,2$ est donnée au tenseur des déformations linéarisé avec

$$e\left(u_l^\varepsilon\right) = \left(e_{ij}\left(u_l^\varepsilon\right)\right)_{1\leq i,,j\leq 3}$$

et

$$e_{ij}\left(u_l^\varepsilon\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{li}^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{lj}^\varepsilon}{\partial x_i}\right),\ 1 \leq i,j \leq 3.$$

On assume que $\partial\Omega_l^\varepsilon$ est Lipschitien et continue, alors le vecteur normal extérieur

$$\nu_l = (\nu_{li})_{1\leq i\leq 3}$$

est bien définie sur $\partial\Omega_l^\varepsilon$. La normale unitaire sur ω est le vecteur $\nu\left(0,0,-1\right).$

Pour toute u_l^ε définie sur Ω_l^ε, on note aussi par u_l^ε sa trace sur $\partial\Omega_l^\varepsilon$ et par $u_{l\nu}^\varepsilon$ et $u_{l\tau}^\varepsilon$ ces composantes normales et tangentieles respectivement telles que :

$$u_{l\nu}^\varepsilon = u_l^\varepsilon.\nu_l, \quad u_{l\tau}^\varepsilon = u_{l\nu}^\varepsilon - u_l^\varepsilon \nu_l, \ \text{ avec } \quad \nu = \nu_1 = -\nu_2.$$

Dans ce cas, on note par $\sigma_{l\nu}^\varepsilon$ et $\sigma_{l\tau}^\varepsilon$, les composantes normales et tangentieles respectivement de σ_l^ε avec

$$\sigma_{l\nu}^\varepsilon = (\sigma_l^\varepsilon \nu_l).\nu_l, \quad \sigma_{l\tau}^\varepsilon = \sigma_l^\varepsilon \nu_l - \sigma_{l\nu}^\varepsilon.\nu_l.$$

Pour définir les conditions aux limites, nous adoptons les hypothèses suivantes :

• Sur $\Gamma_l^\varepsilon \times \left]0,T\right[$, $l = 1,2$; on a aucune condition de glissement et le matériau est supposé fixé, alors

$$u_l^\varepsilon = 0, \quad l = 1,2.$$

• Sur $\Gamma_{L_l}^\varepsilon \times \left]0,T\right[$, $l = 1,2$, le déplacement est connu et il est parallèle à ω ; c'est-à-dire

$$u_l^\varepsilon = 0, \quad l = 1,2.$$

• Sur la surface comune $\omega \times \left]0,T\right[$ des deux matériaux Ω_1^ε et Ω_2^ε , on suppose que la vitesse normale est bilatérale ce qui donne :

$$\dot{u}_1^\varepsilon.\nu_1 + \dot{u}_2^\varepsilon.\nu_2 = 0 \ \text{ sur } \omega \times \left]0,T\right[. \tag{3.1.2}$$

Donc

$$\sigma_1^\varepsilon.\nu_1 = -\sigma_2^\varepsilon.\nu_2 \ \text{ sur } \ \omega \times \left]0,T\right[\ \text{ car } \nu_1 = -\nu_2.$$

Par conséquent

$$\sigma_\nu^\varepsilon = \sigma_{1\nu}^\varepsilon = \sigma_{2\nu}^\varepsilon \text{ et } \sigma_\tau^\varepsilon = \sigma_{1\tau}^\varepsilon = -\sigma_{2\tau}^\varepsilon \text{ sur } \omega \times]0, T[\,.$$

La condition (3.1.2) signifie aussi qu'il y a un effort tangentiel exercé par ω sur les deux coprs. Cet effort ne peut pas dépasser un certain seuil.

Dans notre travail on considère la loi de de Tresca c'est-à-dire que le seuil est fixé, connu et vaut κ^ε, qui est dit aussi le le coefficient de frottement, de plus tant que la containte tangentielle σ_τ^ε n'a pas atteint le seuil, le corps se déplace par une vitesse donnée s, qui est la vitesse de la surface inferieur ω. Lorsque le seuil est atteint, le corps se déplace par une vitesse tangentielle proportionnel à la containte tangentielle σ_τ^ε, cette vitesse est inconnue sur $\omega \times]0, T[$ et elle vérifie la condition de Tresca

$$\begin{cases} |\sigma_\tau^\varepsilon| < \kappa^\varepsilon \Rightarrow (\dot{u}_1^\varepsilon)_\tau - (\dot{u}_2^\varepsilon)_\tau = s & \text{adhérence} \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = \kappa^\varepsilon \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, (\dot{u}_1^\varepsilon)_\tau - (\dot{u}_2^\varepsilon)_\tau = s - \lambda\sigma_\tau^\varepsilon & \text{glissement} \end{cases} \quad \text{sur } \omega \times]0, T[\,.$$

Comme conditions initiales, on note :

$$\begin{array}{l} u_l^\varepsilon(x,0) = u_l^0(x) \\ \dot{u}_l^\varepsilon(x,0) = u_l^1(x) \end{array} \quad \forall x \in \Omega_l^\varepsilon, \;\; l = 1, 2.$$

Soient

$$\begin{array}{rcl} g_l \;: \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ v & \longmapsto & g_l\,(v) \end{array} \quad l = 1, 2 \qquad \text{et} \;\; g_1 \neq g_2$$

deux fonctions continues vérifiant les propriétées suivantes :

1. Les fonctions g_l, $l = 1, 2$ sont monotones c'est-à-dire :

$$(g_l(u) - g_l(v), u - v) \geq 0, \;\; \forall u, v \in \mathbb{R}^3.$$

2. g_l, $l = 1, 2$ sont nulles à l'origine et on écrit

$$g_l(0) = 0, \;\text{ pour } l = 1, 2.$$

3. Pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, (g_1, g_2) sont croissantes ; donc $g'_{li}(v) \geq 0 \quad 1 \leq i \leq 3,\ \ l = 1, 2.$

Finalement on suppose que les deux corps sont soumis à deux forces volumiques données de densités f_1^ε (resp ; f_2^ε) de Ω_1^ε (resp ; de Ω_2^ε) ; alors le problème est décrit par le système d'élasticité dynamique suivant :

Problème P^ε. Trouver un champ de déplacement $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) = (u_{1i}^\varepsilon, u_{2i}^\varepsilon)_{1\leq i\leq 3}$: $\Omega_1^\varepsilon \times \Omega_2^\varepsilon \times]0, T[\to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ *tel que :*

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_1^\varepsilon(t) - Div\left(\mathcal{E}^1 e(u_1^\varepsilon)\right) + \delta_1^\varepsilon g_1.\dot{u}_1^\varepsilon(t) &= f_1^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega_1^\varepsilon \times]0, T[, && (3.1.3)\\
\ddot{u}_2^\varepsilon(t) - Div\left(\mathcal{E}^2 e(u_2^\varepsilon)\right) + \delta_2^\varepsilon g_2.\dot{u}_2^\varepsilon(t) &= f_2^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega_2^\varepsilon \times]0, T[, && (3.1.4)\\
\sigma_1^\varepsilon(u_1^\varepsilon) &= \mathcal{E}^1 e(u_1^\varepsilon) \quad \text{dans } \Omega_1^\varepsilon \times]0, T[, && (3.1.5)\\
\sigma_2^\varepsilon(u_2^\varepsilon) &= \mathcal{E}^2 e(u_2^\varepsilon) \quad \text{dans } \Omega_2^\varepsilon \times]0, T[, && (3.1.6)\\
u_1^\varepsilon &= 0 \quad \text{sur } (\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_{L_1}^\varepsilon) \times]0, T[, && (3.1.7)\\
u_2^\varepsilon &= 0 \quad \text{sur } (\Gamma_2^\varepsilon \cup \Gamma_{L_2}^\varepsilon) \times]0, T[, && (3.1.8)\\
\dot{u}_1^\varepsilon.\nu_1 - \dot{u}_2^\varepsilon.\nu_2 &= 0 \quad \text{sur } \omega \times]0, T[, && (3.1.9)\\
\left(\sigma_1^\varepsilon(u_1^\varepsilon)\right).\nu_1 - \left(\sigma_2^\varepsilon(u_2^\varepsilon)\right).\nu_2 &= 0 \quad \text{sur } \omega \times]0, T[, && (3.1.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} |\sigma_\tau^\varepsilon| < \kappa^\varepsilon \Rightarrow (\dot{u}_1^\varepsilon)_\tau - (\dot{u}_2^\varepsilon)_\tau = s, \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = \kappa^\varepsilon \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \quad \forall \tau \in S_3,\ \forall\ x \in \Omega_l^\varepsilon \ ;\ \dot{u}_1^\varepsilon(t) - \dot{u}_2^\varepsilon(t) = s - \lambda \sigma_\tau^\varepsilon \end{cases} \quad \text{dans } \omega \times]0, T[, \tag{3.1.11}$$

$$u_l^\varepsilon(x, 0) = u_l^0(x), \quad \dot{u}_l^\varepsilon(x, 0) = u_l^1(x),\ \ \delta_l^\varepsilon \in \mathbb{R}_+, \quad l = 1, 2. \tag{3.1.12}$$

Lemme 3.1.1 *la condition* (3.1.11) *est équivalente à*

$$\left(\dot{u}_1^\varepsilon(t) - \dot{u}_2^\varepsilon(t) - s\right)\sigma_\tau^\varepsilon + \kappa^\varepsilon \left|\dot{u}_1^\varepsilon(t) - \dot{u}_2^\varepsilon(t) - s\right| = 0 \quad \textit{sur } \omega.$$

3.2 Formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}^\varepsilon$

3.2.1 Discription du problème variationnel

Pour trouver la solution faible du problème $\mathcal{P}^\varepsilon$, on introduit les espaces suivants :

$$H^1(\Omega_l^\varepsilon)^3 = \left\{ \varphi_l^\varepsilon \in \left(L^2(\Omega_l^\varepsilon)\right)^3 \ : \ \frac{\partial \varphi_{li}^\varepsilon}{\partial x_j} \in L^2(\Omega_l^\varepsilon), \forall i,j=1,2,3, \right\}, \ l=1,2$$
$$V(\Omega_l^\varepsilon) = \left\{ \varphi_l^\varepsilon \in \left(H^1(\Omega_l^\varepsilon)\right)^3 \ : \ \varphi_l^\varepsilon{=}0 \ \text{ sur } \ \Gamma_l^\varepsilon \cup \Gamma_{L_l}^\varepsilon \right\}, \ l=1,2$$

qui sont des espaces de Hilbert muni de la norme $\|.\|_{1,\Omega_l^\varepsilon}$ et du produit scalaire $(.,.)_{1,\Omega_l^\varepsilon}$ définis respectivement par :

$$\begin{aligned} \|u_l^\varepsilon\|_{1,\Omega_l^\varepsilon} &= \left(\sum_{i=1}^3 \|u_{li}^\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega_l^\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (u_l^\varepsilon, \varphi_l^\varepsilon)_{1,\Omega_l^\varepsilon} &= \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega^\varepsilon} (u_{li}^\varepsilon(x)\varphi_{li}^\varepsilon(x) \ + \nabla u_{li}^\varepsilon(x).\varphi_{li}^\varepsilon(x)) \ dx'dx_3. \end{aligned}$$

De plus

$$(u_l^\varepsilon, \varphi_l^\varepsilon)_{1,\Omega_l^\varepsilon} = (e(u_l^\varepsilon), e(\varphi_l^\varepsilon))_Q, \quad \forall u_l^\varepsilon, \varphi_l^\varepsilon \in V(\Omega_l^\varepsilon), \ l=1,2.$$

La norme de $(L^2(\Omega_l^\varepsilon))^3$ sera noté $\|.\|_{0,\Omega_l^\varepsilon}$.
On note par $\|(.,.)\|_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon}$ la norme de $(L^2(\Omega_1^\varepsilon))^3 \times \ (L^2(\Omega_2^\varepsilon))^3$ et par $\|(.,.)\|_{1,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon}$ la norme de $(H^1(\Omega_1^\varepsilon))^3 \times (H^1(\Omega_2^\varepsilon))^3$.
Soit V^ε l'espace définie par :

$$V^\varepsilon = \{(\varphi_1^\varepsilon, \varphi_2^\varepsilon) \in V(\Omega_1^\varepsilon) \times V(\Omega_2^\varepsilon) \ : \ \varphi_1^\varepsilon.\nu_1 + \varphi_2^\varepsilon.\nu_2 = 0 \ \text{ dans } \ \omega\},$$

qui est un espace de Hilbert muni du produit scalaire noté $(.,.)_{V^\varepsilon}$ et de la norme $\|.\|_{V^\varepsilon}$ definie par :

$$\|(\varphi_1^\varepsilon, \varphi_2^\varepsilon)\|_{V^\varepsilon} = \left(\|\varphi_1^\varepsilon\|^2_{V(\Omega_1^\varepsilon)} + \|\varphi_2^\varepsilon\|^2_{V(\Omega_2^\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 3.2.1 *Si $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$ est une solution du problème $\mathcal{P}^\varepsilon$, alors elle satisfait le problème variationnel suivant :*

Problème P_v^{ε}**.** *Trouver* $(u_1^{\varepsilon}, u_2^{\varepsilon})$ *avec* $(\dot{u}_1^{\varepsilon}(t), \dot{u}_2^{\varepsilon}(t)) \in V^{\varepsilon}$, $\forall t \in [0,T]$ *telle que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (\ddot{u}_1^{\varepsilon}(t), \varphi_1^{\varepsilon} - \dot{u}_1^{\varepsilon}(t)) + (\ddot{u}_2^{\varepsilon}(t), \varphi_2^{\varepsilon} - \dot{u}_2^{\varepsilon}(t)) + \sum\limits_{l=1}^{l=2} a(u_l^{\varepsilon}, \varphi_l^{\varepsilon} - \dot{u}_l^{\varepsilon}(t)) \\ +\sum\limits_{l=1}^{l=2} \left(\delta_l^{\varepsilon} g_l\left(\dot{u}_l^{\varepsilon}(t)\right), \left(\varphi_l^{\varepsilon} - \dot{u}_l^{\varepsilon}(t)\right)\right) + J^{\varepsilon}(\varphi_1^{\varepsilon}, \varphi_2^{\varepsilon}) - J^{\varepsilon}\left(\dot{u}_1^{\varepsilon}(t), \dot{u}_2^{\varepsilon}(t)\right) \geq \sum\limits_{l=1}^{l=2} \left(f_l^{\varepsilon}, \left(\varphi_l^{\varepsilon} - \dot{u}_l^{\varepsilon}(t)\right)\right) \\ \qquad u_l^{\varepsilon}(x,0) = u_l^{0}\left(x\right), \quad \dot{u}_l^{\varepsilon}(x,0) = u_l^{1}(x), \quad l = 1,2, \end{array} \right. \tag{3.2.1}$$

avec

$$\begin{aligned} a(u_l^{\varepsilon}, \varphi_l^{\varepsilon}) &= \int_{\Omega_l^{\varepsilon}} (\sigma_l^{\varepsilon}\left(u_l^{\varepsilon}\right))_{ij} e_{ij}(\varphi_l^{\varepsilon}) dx' dx_3 = \int_{\Omega_l^{\varepsilon}} \mathcal{E}_{ijpq}^{l}\; e_{pq}\left(u_l^{\varepsilon}\right) e_{ij}\left(\varphi_l^{\varepsilon}\right) dx' dx_3, \\ (\delta_l^{\varepsilon} g_l(\dot{u}_l^{\varepsilon}(t)), \varphi_l^{\varepsilon}) &= \int_{\Omega_l^{\varepsilon}} \delta_l^{\varepsilon} g_l . \dot{u}_l^{\varepsilon}(t) . \varphi_l^{\varepsilon} dx' dx_3, \\ (f_l^{\varepsilon}, \varphi_l^{\varepsilon}) &= \int_{\Omega_l^{\varepsilon}} f_l^{\varepsilon} . \varphi_l^{\varepsilon} dx' dx_{3,} \\ et \quad J^{\varepsilon}(\varphi_1^{\varepsilon}, \varphi_2^{\varepsilon}) &= \int_{w} \kappa^{\varepsilon} |\varphi_{1\tau}^{\varepsilon} - \varphi_{2\tau}^{\varepsilon} - s| dx'. \end{aligned}$$

où $\varphi^{\varepsilon} = (\varphi_1^{\varepsilon}, \varphi_2^{\varepsilon}) \in V^{\varepsilon}$ *est la fonction test.*

Remarque 3.2.1 *Il résulte des propriétés précédentes et de l'inégalité de Korn (voir[33] page 97), que la forme bilinéaire* $a(.,.)$ *est coercive et continue c'est-à-dire :*

$$a(u_l^{\varepsilon}, u_l^{\varepsilon}) \geq \mu_l C_K \left\| \nabla u_l^{\varepsilon} \right\|_{L^2\left(\Omega_l^{\varepsilon}\right)}^2, \quad \forall u_l^{\varepsilon} \in V(\Omega_l^{\varepsilon}), \; l = 1,2,$$

$$|a(u_l^{\varepsilon}, \varphi_l^{\varepsilon})| \leq M \left\| \nabla u_l^{\varepsilon} \right\|_{L^2\left(\Omega_l^{\varepsilon}\right)} \left\| \nabla \varphi_l^{\varepsilon} \right\|_{L^2\left(\Omega_l^{\varepsilon}\right)}, \quad \forall u_l^{\varepsilon}, \varphi_l^{\varepsilon} \in V(\Omega_l^{\varepsilon}).$$

Preuve. Supposons que $(u_1^{\varepsilon}, u_2^{\varepsilon})$ est une solution suffisamment régulière du problème $\mathcal{P}^{\varepsilon}$. On multiplie l'équation (3.1.3) par $(\varphi_1^{\varepsilon} - \dot{u}_1^{\varepsilon}(t))$ et (3.1.4) par $(\varphi_2^{\varepsilon} - \dot{u}_2^{\varepsilon}(t))$ et on intègre sur Ω_1^ε et Ω_2^ε.

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1^\varepsilon} \ddot{u}_1^\varepsilon(t)(\varphi_1^\varepsilon - \dot{u}_1^\varepsilon(t))dx'dx_3 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \ddot{u}_2^\varepsilon(t)(\varphi_2^\varepsilon - \dot{u}_2^\varepsilon(t))dx'dx_3 \\
&-\int_{\Omega_1^\varepsilon} Div\left(\mathcal{E}^1 e(u_1^\varepsilon)\right)(\varphi_1^\varepsilon - \dot{u}_1^\varepsilon(t))dx'dx_3 - \int_{\Omega_2^\varepsilon} Div\left(\mathcal{E}^2 e(u_2^\varepsilon)\right)(\varphi_2^\varepsilon - \dot{u}_2^\varepsilon(t))dx'dx_3 + \\
&\quad \int_{\Omega_1^\varepsilon} \delta_1^\varepsilon g_1.\dot{u}_1^\varepsilon(t)(\varphi_1^\varepsilon - \dot{u}_1^\varepsilon(t))dx'dx_3 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \delta_2^\varepsilon g_2.\dot{u}_2^\varepsilon(t)(\varphi_2^\varepsilon - \dot{u}_2^\varepsilon(t))dx'dx_3 \\
= &\int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1^\varepsilon.(\varphi_1^\varepsilon - \dot{u}_1^\varepsilon(t))dx'dx_3 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon.(\varphi_2^\varepsilon - \dot{u}_2^\varepsilon(t))dx'dx_3
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

avec $(\varphi_1^\varepsilon, \varphi_2^\varepsilon) \in V^\varepsilon$.

La la formule de Green pour le terme :

$$T = \int_{\Omega_1^\varepsilon} Div\left(\mathcal{E}^1 e(u_1^\varepsilon)\right)(\varphi_1^\varepsilon - \dot{u}_1^\varepsilon(t))dx'dx_3 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} Div\left(\mathcal{E}^2 e(u_2^\varepsilon)\right)(\varphi_2^\varepsilon - \dot{u}_2^\varepsilon(t))dx'dx_3,$$

nous donne

$$\begin{aligned}
T &= \int_{\Omega_1^\varepsilon} \mathcal{E}^1 \varepsilon(u_1^\varepsilon)\varepsilon(\varphi_1^\varepsilon - \dot{u}_1^\varepsilon(t))dx'dx_3 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \mathcal{E}^2 \varepsilon(u_2^\varepsilon)e(\varphi_2^\varepsilon - \dot{u}_2^\varepsilon(t))dx'dx_3 \\
&\quad -\int_{\partial\Omega_1^\varepsilon} \mathcal{E}^1 \varepsilon(u_1^\varepsilon)(\varphi_1^\varepsilon - \dot{u}_1^\varepsilon(t))\nu ds - \int_{\partial\Omega_2^\varepsilon} \mathcal{E}^2 \varepsilon(u_2^\varepsilon)(\varphi_2^\varepsilon - \dot{u}_2^\varepsilon(t))\nu ds
\end{aligned}$$

D'après les équations (3.1.5) et (3.1.6)

$$\begin{aligned}
T &= \int_{\Omega_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon(u_1^\varepsilon)\, e(\varphi_1^\varepsilon - \dot{u}_1^\varepsilon(t))dx'dx_3 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon(u_2^\varepsilon)\, e(\varphi_2^\varepsilon - \dot{u}_2^\varepsilon(t))dx'dx_3 \\
&\quad -\int_{\partial\Omega_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon(u_1^\varepsilon)(\varphi_1^\varepsilon - \dot{u}_1^\varepsilon(t))\nu ds - \int_{\partial\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon(u_2^\varepsilon)(\varphi_2^\varepsilon - \dot{u}_2^\varepsilon(t))\nu ds.
\end{aligned}$$

En tenant compte des conditions (3.1.7) et (3.1.8)

$$\begin{aligned}
T &= \int_{\Omega_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon(u_1^\varepsilon)\, e(\varphi_1^\varepsilon - \dot{u}_1^\varepsilon(t))dx'dx_3 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon(u_2^\varepsilon)\, e(\varphi_2^\varepsilon - \dot{u}_2^\varepsilon(t))dx'dx_3 \\
&\quad -\int_{\omega} \sigma_1^\varepsilon(u_1^\varepsilon)\, \nu(\varphi_1^\varepsilon - \dot{u}_1^\varepsilon(t))dx' - \int_{\omega} \sigma_2^\varepsilon(u_2^\varepsilon)\, \nu(\varphi_2^\varepsilon - \dot{u}_2^\varepsilon(t))dx'
\end{aligned}$$

mais on a

$$\begin{aligned}
\sigma_l^\varepsilon(u_l^\varepsilon)\,\nu &= \sigma_{l\tau}^\varepsilon(u_l^\varepsilon) + \sigma_{l\nu}^\varepsilon(u_l^\varepsilon)\,\nu, \ l = 1, 2 \\
\sigma_\tau^\varepsilon &= \sigma_{1\tau}^\varepsilon = -\sigma_{2\tau}^\varepsilon \quad \text{et} \\
\sigma_\nu^\varepsilon &= \sigma_{1\nu}^\varepsilon = \sigma_{2\nu}^\varepsilon.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
T &= \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} \sigma_1^{\varepsilon}\left(u_1^{\varepsilon}\right) e(\varphi_1^{\varepsilon} - \dot{u}_1^{\varepsilon}(t))dx'dx_3 + \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} \sigma_2^{\varepsilon}\left(u_2^{\varepsilon}\right) e(\varphi_2^{\varepsilon} - \dot{u}_2^{\varepsilon}(t))dx'dx_3 \\
&\quad - \int_{\omega} \sigma_{\tau}^{\varepsilon}\left[(\varphi_1^{\varepsilon} - \dot{u}_1^{\varepsilon}(t)) - (\varphi_2^{\varepsilon} - \dot{u}_2^{\varepsilon}(t))\right] dx' - \int_{\omega} \sigma_{\nu}^{\varepsilon}\nu\left[(\varphi_1^{\varepsilon} - \dot{u}_1^{\varepsilon}(t)) + (\varphi_2^{\varepsilon} - \dot{u}_2^{\varepsilon}(t))\right] dx'
\end{aligned}$$

Comme $(v_1, v_2) \in V^{\varepsilon}$ et d'après la condition (3.1.10)

$$\int_{\omega} \sigma_{\nu}^{\varepsilon}\nu\left[(\varphi_1^{\varepsilon} - \dot{u}_1^{\varepsilon}(t)) + (\varphi_2^{\varepsilon} - \dot{u}_2^{\varepsilon}(t))\right] dx' = 0.$$

On ajoute et on revanche à l'équation (3.2.2) le terme :

$$\int_{\omega} \kappa^{\varepsilon}\left[|\varphi_1^{\varepsilon} - \varphi_2^{\varepsilon} - s| - |\dot{u}_1^{\varepsilon}(t) - \dot{u}_2^{\varepsilon}(t) - s|\right] dx',$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} \ddot{u}_1^{\varepsilon}(t)(\varphi_1^{\varepsilon} - \dot{u}_1^{\varepsilon}(t))dx'dx_3 + \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} \ddot{u}_2^{\varepsilon}(t)(\varphi_2^{\varepsilon} - \dot{u}_2^{\varepsilon}(t))dx'dx_3 \\
& \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} \sigma_1^{\varepsilon}\left(u_1^{\varepsilon}\right) e(\varphi_1^{\varepsilon} - \dot{u}_1^{\varepsilon}(t))dx'dx_3 + \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} \sigma_2^{\varepsilon}\left(u_2^{\varepsilon}\right) e(\varphi_2^{\varepsilon} - \dot{u}_2^{\varepsilon}(t))dx'dx_3 \\
& \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} \delta_1^{\varepsilon} g_1.\dot{u}_1^{\varepsilon}(t)(\varphi_1^{\varepsilon} - \dot{u}_1^{\varepsilon}(t))dx'dx_3 + \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} \delta_2^{\varepsilon} g_2.\dot{u}_2^{\varepsilon}(t)(\varphi_2^{\varepsilon} - \dot{u}_2^{\varepsilon}(t))dx'dx_3 \\
& + \int_{\omega} \kappa^{\varepsilon}\left[|\varphi_1^{\varepsilon} - \varphi_2^{\varepsilon} - s| + |\dot{u}_1^{\varepsilon}(t) - \dot{u}_2^{\varepsilon}(t) - s|\right] dx' \\
& - \int_{\omega} \kappa^{\varepsilon}\left[|\varphi_1^{\varepsilon} - \varphi_2^{\varepsilon} - s| + |\dot{u}_1^{\varepsilon}(t) - \dot{u}_2^{\varepsilon}(t) - s|\right] dx' \\
& - \int_{\omega} \sigma_{\tau}^{\varepsilon}\left[(\varphi_1^{\varepsilon} - \varphi_2^{\varepsilon}) - (\dot{u}_1^{\varepsilon}(t) - \dot{u}_2^{\varepsilon}(t))\right] dx' \\
= \; & \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} f_1^{\varepsilon}(\varphi_1^{\varepsilon} - \dot{u}_1^{\varepsilon}(t))dx'dx_3 + \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} f_2^{\varepsilon}(\varphi_2^{\varepsilon} - \dot{u}_2^{\varepsilon}(t))dx'dx_3
\end{aligned}$$

Ajoutons $-s + s$ à

$$\int_{\omega} \sigma_{\tau}^{\varepsilon}\left[(\varphi_1^{\varepsilon} - \varphi_2^{\varepsilon}) - (\dot{u}_1^{\varepsilon}(t) - \dot{u}_2^{\varepsilon}(t))\right] dx'$$

et posons

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\omega} \sigma_{\tau}^{\varepsilon}\left[(\varphi_1^{\varepsilon} - \varphi_2^{\varepsilon} - s) - (\dot{u}_1^{\varepsilon}(t) - \dot{u}_2^{\varepsilon}(t) - s)\right] dx' + \\
&\quad \int_{\omega} \kappa^{\varepsilon}\left[|\varphi_1^{\varepsilon} - \varphi_2^{\varepsilon} - s| + |\dot{u}_1^{\varepsilon}(t) - \dot{u}_2^{\varepsilon}(t) - s|\right] dx'.
\end{aligned}$$

En tenant compte du (3.1.1)

$$A = \int_\omega \left(\sigma_\tau^\varepsilon(\varphi_1^\varepsilon - \varphi_2^\varepsilon - s) + \kappa^\varepsilon \left|\varphi_1^\varepsilon - \varphi_2^\varepsilon - s\right|\right) dx'$$

De la majoration

$$\sigma_\tau^\varepsilon \left(\varphi_1^\varepsilon - \varphi_2^\varepsilon - s\right) \geq - \left|\sigma_\tau^\varepsilon\right| \left|\varphi_1^\varepsilon - \varphi_2^\varepsilon - s\right|,$$

le terme A est positif, ce qui nous permet d'écrire le problème variationnel $\mathcal{P}_v^\varepsilon$. ■

3.2.2 L'unicité de la solution du problème variationnel $\mathcal{P}_v^\varepsilon$.

Théorème 3.2.2 *Sous les hypothèses*

$$\begin{cases} (f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon), \ \left(\dfrac{\partial f_1^\varepsilon}{\partial t}, \dfrac{\partial f_2^\varepsilon}{\partial t}\right), \ \left(\dfrac{\partial^2 f_1^\varepsilon}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 f_2^\varepsilon}{\partial t^2}\right) \in L^2(0,T; L^2(\Omega_1^\varepsilon)^3 \times L^2(\Omega_2^\varepsilon)^3) \\ \kappa^\varepsilon \in C_0^\infty(\omega), \quad \kappa^\varepsilon > 0 \quad \textit{est indépendant de } t \\ (u_1^0, u_2^0) \in H^2(\Omega_1^\varepsilon)^3 \times H^2(\Omega_2^\varepsilon)^3, \quad (u_1^1, u_2^1) \in H^1(\Omega_1^\varepsilon)^3 \times H^1(\Omega_2^\varepsilon)^3 \end{cases}$$

il existe une solution unique $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$ du problème $\mathcal{P}_v^\varepsilon$ avec :

$$\begin{aligned} (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), \ (\dot{u}_1^\varepsilon(t), \dot{u}_2^\varepsilon(t)) &\in L^\infty(0,T; H^1(\Omega_1^\varepsilon)^3 \times H^1(\Omega_2^\varepsilon)^3), \\ (\ddot{u}_1^\varepsilon(t), \ddot{u}_2^\varepsilon(t)) &\in L^\infty(0,T; L^2(\Omega_1^\varepsilon)^3 \times L^2(\Omega_2^\varepsilon)^3). \end{aligned}$$

Preuve. Premièrement, nous régularisons la fonction J^ε par J_ξ^ε, avec :

$$J_\xi^\varepsilon(\varphi_1^\varepsilon - \varphi_2^\varepsilon) = \int_\omega \kappa^\varepsilon(x) \psi_\xi(|\varphi_{1\tau}^\varepsilon - \varphi_{2\tau}^\varepsilon - s|^2) dx', \quad \text{et} \quad \psi_\xi(\beta) = \frac{1}{1+\xi} |\beta|^{(1+\xi)}, \ \xi > 0.$$

Ensuite, nous formulons le problème approché associé

$$\begin{cases} \left(\ddot{u}_{1\zeta}^\varepsilon(t), \varphi_1^\varepsilon\right) + \left(\ddot{u}_{2\zeta}^\varepsilon(t), \varphi_2^\varepsilon\right) + a(u_{1\zeta}^\varepsilon, \varphi_1^\varepsilon) + a(u_{2\zeta}^\varepsilon, \varphi_2^\varepsilon) + \\ \sum_{l=1}^{l=2} \left(\delta_l^\varepsilon g_l \left(\dot{u}_{1\zeta}^\varepsilon(t)\right), \varphi_l^\varepsilon\right) + \left((J_\zeta^\varepsilon)' \left(\dot{u}_{1\zeta}^\varepsilon(t), \dot{u}_{2\zeta}^\varepsilon(t)\right), (\varphi_1^\varepsilon - \varphi_2^\varepsilon)\right) = \sum_{l=1}^{l=2} \left(f_l^\varepsilon, \varphi_l^\varepsilon\right), \\ u_{l\zeta}^\varepsilon(x,0) = u_l^0, \quad \dot{u}_{l\zeta}^\varepsilon(t)(x,0) = u_l^1(x,0), \quad l = 1,2, \forall \varphi^\varepsilon \in V^\varepsilon, \ \forall t \in [0,T] \end{cases} \tag{3.2.3}$$

La preuve est basée sur la théorie des opérateurs non linéaires ; en utilisant la méthode de Galerkin (comme dans [21] et [30]) avec les hypothèses (H_1)-(H_5) de $\mathcal{E}^l$, on montre qu'il existe une solution unique $u_\zeta^\varepsilon = (u_{1\zeta}^\varepsilon, u_{2\zeta}^\varepsilon)$ de (3.2.3).

Finallement, nous montrons que la limite de u_ζ^ε vers u^ε quand ζ tends vers zero est solution de (3.2.1). ■

3.3 Résultats de convergence et problème limite

Le problème variationnel dans un domaine fixe

L'idée générale de cette partie est de transformer le problème initial définit sur le domaine $\Omega^\varepsilon = \Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$ à un autre problème équivalent définit sur un domaine fixe $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ indépendant du paramètre ε. Pour le faire on introduit le changement de variable $z = \dfrac{x_3}{\varepsilon}$, alors pour (x', x_3) dans Ω_l^ε, on a (x', z) dans Ω_l, $l = 1, 2$ avec :

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{x = (x', z) \in \mathbb{R}^3 : (x', 0) \in \omega, \quad 0 < z < h(x')\}, \\
\Omega_2 &= \{x = (x', z) \in \mathbb{R}^3 : (x', 0) \in \omega, \quad -h(x') < z < 0\}
\end{aligned}$$

et sa frontière sera noté par $\partial\Omega_l = \overline{\omega} \cup \overline{\Gamma}_l \cup \overline{\Gamma}_{L_l}, l = 1, 2$.

Nous définissons maintenant par le changement de varible précédent, des nouvelles fonctions pour le problème variationnel.

Soient

$$\begin{cases}
\hat{u}_{li}(x', z, t) = u_{li}^\varepsilon(x', x_3, t), & i, \ l = 1, 2, \\
\hat{u}_{l3}(x', z, t) = \varepsilon^{-1} u_{l3}^\varepsilon(x', x_3, t), & l = 1, 2,
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\hat{f}_l(x', z, t) = \varepsilon^2 f_l^\varepsilon(x', x_3, t) & l = 1, 2, \\
\hat{\kappa} = \varepsilon \kappa^\varepsilon & \\
\hat{\delta}_l = \varepsilon^2 \delta_l^\varepsilon & l = 1, 2, \\
\hat{g}_l(x', z, t) = g_l^\varepsilon(x', x_3, t) & l = 1, 2
\end{cases}$$

avec $\hat{f}_l, \hat{\kappa}, \hat{\delta}_l$ et $\hat{g}_l$ sont indépendantes de ε.

Pour qu'on puisse travailler avec les nouvelles variables, il est nécessaire de définir un nouveau cadre fonctionnel sur $\Omega_1 \cup \Omega_2$. On note alors

$$\begin{aligned}
V(\Omega_l) &= \{\hat{\varphi}_l \in H^1(\Omega_l)^3 : \hat{\varphi}_l = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_l \cup \Gamma_{L_l}, \ l = 1, 2\}, \\
V &= \{(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) \in V(\Omega_1) \times V(\Omega_2) : \hat{\varphi}_1.\nu_1 + \hat{\varphi}_2.\nu_2 = 0 \quad \text{sur} \quad \omega\}, \\
\Pi(V) &= \{\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) \in H^1(\Omega_1)^2 \times H^1(\Omega_2)^2 : \hat{\phi} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_l \cup \Gamma_{L_l}, \ l = 1, 2\}, \\
H_z(\Omega_l) &= \{\hat{\varphi}_l = (\hat{\varphi}_{l1}, \hat{\varphi}_{l2}) \in L^2(\Omega_l)^2 : \frac{\partial \hat{\varphi}_{li}}{\partial z} \in L^2(\Omega_l), \quad \hat{\varphi}_l = 0 \ \text{sur} \ \Gamma_l, \ i, l = 1, 2\}, \\
H_z &= H_z(\Omega_1) \times H_z(\Omega_2).
\end{aligned}$$

$H_z(\Omega_l)$, $l=1,2$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|\hat{\varphi}_l\|^2_{H_z(\Omega_l)} = \sum_{i=1}^{2}\left(\|\hat{\varphi}_{li}\|^2_{L^2(\Omega_l)} + \|\frac{\partial \hat{\varphi}_{li}}{\partial z}\|^2_{L^2(\Omega_l)}\right),$$
$$\|(\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2)\|^2_{H_z} = \|\hat{\varphi}_1\|^2_{H_z(\Omega_1)} + \|\hat{\varphi}_2\|^2_{H_z(\Omega_2)}.$$

En multipliant l'inéquation (3.2.1) du problème variationnel $\mathcal{P}_v^\varepsilon$ par ε, en passant au domaine fixe $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$ et en tenant compte de la symétrie de $\mathcal{E}^l$; le problème $\mathcal{P}_v^\varepsilon$ est équivalent au problème suivant :

Probleme $\hat{\mathcal{P}}^\varepsilon$: Trouver $(\hat{u}_1,\hat{u}_2)$, où $\left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial t}(t), \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial t}(t)\right) \in V$, $\forall t\in[0,T]$, telle que :

$$\left\{\begin{array}{c}
\varepsilon^2 \sum\limits_{1\le i,l\le 2}\left(\frac{\partial^2 \hat{u}_{li}}{\partial t^2}, \hat{\varphi}_{li} - \frac{\partial \hat{u}_{li}}{\partial t}\right) + \varepsilon^4 \sum\limits_{1\le l\le 2}\left(\frac{\partial^2 \hat{u}_{l3}}{\partial t^2}, \hat{\varphi}_{l3} - \frac{\partial \hat{u}_{l3}}{\partial t}\right) \\
+\sum\limits_{1\le i,l\le 2}\hat{\delta}_l \hat{g}_{li}\left(\frac{\partial \hat{u}_{li}}{\partial t}, \hat{\varphi}_{li} - \frac{\partial \hat{u}_{li}}{\partial t}\right) + \varepsilon^2 \sum\limits_{1\le l\le 2}\hat{\delta}_l g_{l3}\left(\frac{\partial \hat{u}_{l3}}{\partial t}, \hat{\varphi}_{l3} - \frac{\partial \hat{u}_{l3}}{\partial t}\right) \\
+\sum\limits_{1\le l\le 2}\widehat{a}\left(\hat{u}_l, \hat{\varphi}_l - \frac{\partial \hat{u}_l}{\partial t}\right) + \hat{J}(\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2) - \hat{J}\left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial t}, \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial t}\right) \ge \\
\sum\limits_{1\le i,l\le 2}\left(\hat{f}_{li}, \hat{\varphi}_{1i} - \frac{\partial \hat{u}_{1i}}{\partial t}\right) + \varepsilon \sum\limits_{1\le l\le 2}\left(\hat{f}_{l3}, \hat{\varphi}_{l3} - \frac{\partial \hat{u}_{li}}{\partial t}\right), \forall(\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2)\in V, \\
\hat{u}_l = \hat{u}_l^0, \quad \frac{\partial \hat{u}_l}{\partial t}(x,0) = \hat{u}_l^1(x,0), \quad l=1,2,
\end{array}\right. \tag{3.3.1}$$

avec

$$\hat{J}(\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2) = \int_\omega \hat{\kappa}|\hat{\varphi}_{1\tau} - \hat{\varphi}_{2\tau} - s|dx',$$

$$\begin{aligned}
\widehat{a}\left(\hat{u}_l,\hat{\varphi}_l\right) &= \varepsilon^2\int_{\Omega_l}\mathcal{E}^l_{\alpha\beta\gamma\theta}\hat{e}_{\gamma\theta}\left(\hat{u}_l\right)\frac{\partial\hat{\varphi}_\alpha}{\partial x_\beta}dx'dz + 2\varepsilon\int_{\Omega_l}\mathcal{E}^l_{\alpha3\gamma\theta}\hat{e}_{\gamma\theta}\left(\hat{u}_l\right)\frac{\partial\hat{\varphi}_\alpha}{\partial z}dx'dz \\
&+2\varepsilon^2\int_{\Omega_l}\mathcal{E}^l_{\alpha\beta\gamma3}\hat{e}_{\gamma3}\left(\hat{u}_l\right)\frac{\partial\hat{\varphi}_\alpha}{\partial x_\beta}dx'dz + 4\varepsilon\int_{\Omega_l}\mathcal{E}^l_{\alpha3\gamma3}\hat{e}_{\gamma3}\left(\hat{u}_l\right)\frac{\partial\hat{\varphi}_\alpha}{\partial z}dx'dz \\
&+\varepsilon^2\int_{\Omega_l}\mathcal{E}^l_{\alpha\beta33}\hat{e}_{33}\left(\hat{u}_l\right)\frac{\partial\hat{\varphi}_\alpha}{\partial x_\beta}dx'dz + \varepsilon^2\int_{\Omega_l}\mathcal{E}^l_{33\alpha\beta}\hat{e}_{\alpha\beta}\left(\hat{u}_l\right)\frac{\partial\hat{\varphi}_3}{\partial z}dx'dz \\
&+2\varepsilon\int_{\Omega_l}\mathcal{E}^l_{\alpha333}\hat{e}_{33}\left(\hat{u}_l\right)\frac{\partial\hat{\varphi}_\alpha}{\partial z}dx'dz + 2\varepsilon^2\int_{\Omega_l}\mathcal{E}^l_{33\alpha3}\hat{e}_{\alpha3}\left(\hat{u}_l\right)\frac{\partial\hat{\varphi}_3}{\partial z}dx'dz \\
&+\varepsilon^2\int_{\Omega_l}\mathcal{E}^l_{3333}\hat{e}_{33}\left(\hat{u}_l\right)\frac{\partial\hat{\varphi}_3}{\partial z}dx'dz
\end{aligned}$$

où les indexes α,β,γ et θ varient entre 1 et 2.

$$e\left(\hat{u}_l\right) = \left(e_{ij}\left(\hat{u}_l\right)\right)_{1\le i,j\le 3}$$

sont donnés par les relations

$$\begin{aligned}
e_{ij}(\hat{u}_l) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{u}_{li}}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_{lj}}{\partial x_i}\right), && i,j,l=1,2\\
e_{i3}(\hat{u}_l) = e_{3i}(\hat{u}_l) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \hat{u}_{li}}{\partial z} + \varepsilon\frac{\partial \hat{u}_{l3}}{\partial x_i}\right), && i,l=1,2\\
e_{33}(\hat{u}_l) &= \frac{\partial \hat{u}_{l3}}{\partial z}, && l=1,2.
\end{aligned}$$

Le résultat suivant est très important pour démontrer la convergence de la solution faible.

Théorème 3.3.1 *Sous les hypothèses du théorème (3.2.2), il existe une constante C independente de ε, telle que :*

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\le i\le 2}\left(\left\|\left(\frac{\partial \hat{u}_{1i}}{\partial z},\frac{\partial \hat{u}_{2i}}{\partial z}\right)\right\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2} + \left\|\varepsilon\left(\frac{\partial \hat{u}_{1i}}{\partial t},\frac{\partial \hat{u}_{2i}}{\partial t}\right)\right\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2} + \left\|\varepsilon^2\left(\frac{\partial \hat{u}_{13}}{\partial x_i},\frac{\partial \hat{u}_{23}}{\partial x_i}\right)\right\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2}\right)\\
&+\sum_{1\le i,j\le 2}\left\|\varepsilon\left(\frac{\partial \hat{u}_{1i}}{\partial x_j},\frac{\partial \hat{u}_{2i}}{\partial x_j}\right)\right\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2} + \left\|\varepsilon\left(\frac{\partial \hat{u}_{13}}{\partial z},\frac{\partial \hat{u}_{23}}{\partial z}\right)\right\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2} + \left\|\varepsilon^2\left(\frac{\partial \hat{u}_{13}}{\partial t},\frac{\partial \hat{u}_{23}}{\partial t}\right)\right\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2}\\
&\le C,
\end{aligned}\tag{3.3.2}$$

$$\sum_{1\le l,i\le 2}\int_0^t\int_{\Omega_l} g_l\left(\frac{\partial \hat{u}_{li}}{\partial t}\right)\frac{\partial \hat{u}_{li}}{\partial t}dxd\theta + \sum_{l=1}^{2}\varepsilon\int_0^t\int_{\Omega_l} g_l\left(\varepsilon\frac{\partial \hat{u}_{l3}}{\partial t}\right)\frac{\partial \hat{u}_{l3}}{\partial t}dxd\theta \le C, \tag{3.3.3}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\le i\le 2}\left(\left\|\left(\frac{\partial^2 \hat{u}_{1i}}{\partial z\partial t},\frac{\partial^2 \hat{u}_{2i}}{\partial z}\right)\right\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2} + \left\|\varepsilon\left(\frac{\partial^2 \hat{u}_{1i}}{\partial t^2},\frac{\partial^2 \hat{u}_{2i}}{\partial t^2}\right)\right\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2} + \left\|\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 \hat{u}_{13}}{\partial x_i\partial t},\frac{\partial^2 \hat{u}_{23}}{\partial x_i\partial t}\right)\right\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2}\right)\\
&+\sum_{1\le i,j\le 2}\left\|\varepsilon\left(\frac{\partial^2 \hat{u}_{1i}}{\partial x_j\partial t},\frac{\partial^2 \hat{u}_{2i}}{\partial x_j\partial t}\right)\right\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2} + \left\|\varepsilon\left(\frac{\partial^2 \hat{u}_{13}}{\partial z\partial t},\frac{\partial^2 \hat{u}_{23}}{\partial z\partial t}\right)\right\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2} + \left\|\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 \hat{u}_{13}}{\partial t^2},\frac{\partial^2 \hat{u}_{23}}{\partial t^2}\right)\right\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2}\\
&\le C.
\end{aligned}\tag{3.3.4}$$

Preuve. Soit $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$ une solution du problème variationnel $\mathcal{P}_v^\varepsilon$, alors on a :

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^{2} \left(\ddot{u}_l^\varepsilon(t), \dot{u}_l^\varepsilon(t)\right) + \sum_{l=1}^{2} a\left(u_l^\varepsilon(t), \dot{u}_l^\varepsilon(t)\right) + \sum_{l=1}^{2} \delta_l^\varepsilon g_l\left(\dot{u}_l^\varepsilon(t), \dot{u}_l^\varepsilon(t)\right) \\
& - \sum_{l=1}^{2} \delta_l^\varepsilon g_l\left(\dot{u}_l^\varepsilon(t), \varphi_l^\varepsilon(t)\right) + J^\varepsilon\left(\dot{u}_1^\varepsilon(t), \dot{u}_2^\varepsilon(t)\right) \\
\leq\ & \sum_{l=1}^{2} \left(\ddot{u}_l^\varepsilon(t), \varphi_l^\varepsilon(t)\right) + \sum_{l=1}^{2} a\left(u_l^\varepsilon(t), \varphi_l^\varepsilon(t)\right) + J^\varepsilon(\varphi_1^\varepsilon, \varphi_2^\varepsilon) \\
& - \sum_{l=1}^{2} \left(f_l^\varepsilon, \dot{u}_l^\varepsilon(t)\right) + \sum_{l=1}^{2} \left(f_l^\varepsilon, \varphi_l^\varepsilon(t)\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\dot{u}_1^\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)}^2 + \|\dot{u}_2^\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega_2^\varepsilon)}^2 + \sum_{1\leq l\leq 2} a\left(u_l^\varepsilon(t), u_l^\varepsilon(t)\right) \right) \\
& + \delta_1^\varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} g_1 \left|\dot{u}_1^\varepsilon(t)\right|^2 dx'dx_3 + \delta_2^\varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} g_2 \left|\dot{u}_2^\varepsilon(t)\right|^2 dx'dx_3 \\
\leq\ & \left(\left(\ddot{u}_1^\varepsilon(t), \ddot{u}_2^\varepsilon(t)\right), (\varphi_1, \varphi_2)\right) + \sum_{1\leq l\leq 2} a\left(u_l^\varepsilon(t), \varphi_l^\varepsilon(t)\right) \qquad (3.3.5) \\
& + J^\varepsilon(\varphi_1^\varepsilon - \varphi_2^\varepsilon) + \sum_{l=1}^{2} \int_{\Omega_l^\varepsilon} f_l^\varepsilon \left(\dot{u}_l^\varepsilon(t) - \varphi_l^\varepsilon\right) dx'dx_3
\end{aligned}$$

Une intégration par partie sur $[0, t]$, nous donne :

$$\begin{aligned}
& \left[\|\dot{u}_1^\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)}^2 + \|\dot{u}_2^\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega_2^\varepsilon)}^2 + \sum_{1\leq l\leq 2} a\left(u_l^\varepsilon(t), u_l^\varepsilon(t)\right) \right] + 2\sum_{l=1}^{2} \delta_l^\varepsilon \int_0^t \int_{\Omega_l^\varepsilon} g_l \left|\dot{u}_l^\varepsilon(\theta)\right|^2 dx d\theta \\
\leq\ & \|\left(u_1^1, u_2^1\right)\|_{0,\Omega_1\times\Omega_2}^2 + \sum_{1\leq l\leq 2} a\left(u_l^\varepsilon(0), u_l^\varepsilon(0)\right) + 2\int_0^t \left(\left(\ddot{u}_1^\varepsilon(\theta), \ddot{u}_2^\varepsilon(\theta)\right), (\varphi_1^\varepsilon - \varphi_2^\varepsilon)\right) d\theta \\
& + 2\sum_{1\leq l\leq 2} \int_0^t a\left(u_l^\varepsilon(\theta), \varphi_l^\varepsilon(\theta)\right) d\theta + 2T J^\varepsilon(\varphi_1^\varepsilon - \varphi_2^\varepsilon) \\
& + 2\sum_{l=1}^{2} \int_0^t \int_{\Omega_l^\varepsilon} f_l^\varepsilon(\theta)\dot{u}_1^\varepsilon(\theta) dx d\theta - 2\sum_{l=1}^{2} \int_0^t \int_{\Omega_l^\varepsilon} f_l^\varepsilon(\theta)\varphi_l^\varepsilon dx d\theta
\end{aligned}$$

En utilisant la relation (3.1.1) et l'inégalité de Poincaré pour $\sum\limits_{1\leq l\leq 2} a\left(u_l^\varepsilon(0), u_l^\varepsilon(0)\right)$, on trouve :

$$\left[\|\dot{u}_1^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)} + \|\dot{u}_2^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega_2^\varepsilon)} + \sum_{1\leq l\leq 2} a\left(u_l^\varepsilon(t), u_l^\varepsilon(t)\right)\right] + 2\sum_{l=1}^{2}\delta_l^\varepsilon \int_0^t \int_{\Omega_l^\varepsilon} g_l \left|\dot{u}_l^\varepsilon(\theta)\right|^2 dxd\theta$$

$$\leq \|\left(u_1^1, u_2^1\right)\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2} + 3\sqrt{3}M\|\left(\nabla u_1^0, \nabla u_2^0\right)\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon} + 2\int_0^t \left(\left(\ddot{u}_1^\varepsilon(\theta), \ddot{u}_2^\varepsilon(\theta)\right), \left(\varphi_1^\varepsilon, \varphi_2^\varepsilon\right)\right) d\theta$$

$$+2\sum_{1\leq l\leq 2}\int_0^t a\left(u_l^\varepsilon(\theta), \varphi_l^\varepsilon(\theta)\right) d\theta + 2TJ^\varepsilon(\varphi_1^\varepsilon, \varphi_2^\varepsilon)$$

$$+2\sum_{l=1}^{2}\int_0^t \int_{\Omega_l^\varepsilon} f_l^\varepsilon(\theta)\dot{u}_1^\varepsilon(\theta)dxd\theta - 2\sum_{l=1}^{2}\int_0^t \int_{\Omega_l^\varepsilon} f_l^\varepsilon(\theta)\varphi_l^\varepsilon dxd\theta, \tag{3.3.6}$$

avec $M = \max\limits_{1\leq i,j,p,q\leq 3} \left\|\mathcal{E}^l_{ijpq}\right\|_{L^\infty\left(\Omega_l^\varepsilon\right)}$, $l = 1, 2$.

D'après l'inégalité de Korn, il existe une constante $C_k > 0$ independente de ε, telle que :

$$\sum_{1\leq l\leq 2} a\left(u_l^\varepsilon(t), u_l^\varepsilon(t)\right) \geq 2\mu_1 C_K \|\nabla u_1^\varepsilon\|^2_{H^1\left(\Omega_1^\varepsilon\right)} + 2\mu_2 C_K \|\nabla u_2^\varepsilon\|^2_{H^1\left(\Omega_2^\varepsilon\right)}. \tag{3.3.7}$$

D'autre part, pour l'inégalité de Young

$$ab \leq \eta^2\frac{a^2}{2} + \eta^{-2}\frac{b^2}{2}$$

et pour $\eta = \sqrt{\dfrac{\mu_l C_K}{2}}$, on trouve :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{1\leq l\leq 2} a\left(u_l^\varepsilon(t), \varphi_l^\varepsilon(t)\right)\right| \leq\ & \frac{C_K}{4}\left(\mu_1 \left\|\nabla u_1^\varepsilon\right\|^2_{L^2\left(\Omega_1^\varepsilon\right)} + \mu_2 \left\|\nabla u_2^\varepsilon\right\|^2_{L^2\left(\Omega_2^\varepsilon\right)}\right) + \\ & \frac{M}{C_K}\left(\mu_1 \left\|\nabla \varphi_1^\varepsilon(t)\right\|^2_{L^2\left(\Omega_1^\varepsilon\right)} + \mu_2 \left\|\nabla \varphi_2^\varepsilon(t)\right\|^2_{L^2\left(\Omega_2^\varepsilon\right)}\right)\end{aligned}$$

d'où

$$2\sum_{1\leq l\leq 2}\int_0^t a\left(u_l^\varepsilon(\theta), \varphi_l^\varepsilon(\theta)\right) d\theta \leq \frac{2TM}{C_K}\left(\mu_1 \left\|\nabla \varphi_1^\varepsilon(t\right\|^2_{L^2\left(\Omega_1^\varepsilon\right)} + \mu_2 \left\|\nabla \varphi_2^\varepsilon(t)\right\|^2_{L^2\left(\Omega_2^\varepsilon\right)}\right)$$

$$+\frac{C_K}{2}\int_0^t \left(\mu_1 \left\|\nabla u_1^\varepsilon\right\|^2_{L^2\left(\Omega_1^\varepsilon\right)} + \mu_2 \left\|\nabla u_2^\varepsilon\right\|^2_{L^2\left(\Omega_2^\varepsilon\right)}\right) d\theta \tag{3.3.8}$$

et

$$\begin{aligned}2\int_0^t \left(\left(\ddot{u}_1^\varepsilon(\theta), \ddot{u}_2^\varepsilon(\theta)\right), \left(\varphi_1^\varepsilon - \varphi_2^\varepsilon\right)\right) d\theta \leq\ & \frac{1}{2}\left\|\left(\dot{u}_1^\varepsilon(t), \dot{u}_2^\varepsilon(t)\right)\right\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2} + \frac{1}{2}\|\left(u_1^1, u_2^1\right)\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2} \\ & + \left\|\left(\varphi_1^\varepsilon - \varphi_2^\varepsilon\right)\right\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2}.\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Comme

$$2\int_0^t (f_l^\varepsilon(\theta), \dot{u}_l^\varepsilon(\theta))\, d\theta = 2(f_l^\varepsilon(t), u_l^\varepsilon(t)) - 2(f_l^\varepsilon(0), u_l^0(0)) - 2\int_0^t \left(\frac{\partial f_l^\varepsilon}{\partial t}(\theta), u_l^\varepsilon(\theta)\right) d\theta,\ l = 1,2$$

et en utilisant l'inégalité Hölder et de l'inégalité Poincaré :

$$\|u_l^\varepsilon\|_{L^2\left(\Omega_l^\varepsilon\right)} \leq \varepsilon h^\star \|\nabla u_l^\varepsilon\|_{L^2\left(\Omega_l^\varepsilon\right)}, \quad l = 1, 2,$$

on trouve :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^t (f_1^\varepsilon(\theta), \dot{u}_1^\varepsilon(\theta))\, d\theta + \int_0^t (f_2^\varepsilon(\theta), \dot{u}_2^\varepsilon(\theta))\, d\theta\right| &\leq \frac{\mu_1 C_K}{2}\|\nabla u_1^\varepsilon(t)\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon} + \frac{\mu_2 C_K}{2}\|\nabla u_2^\varepsilon(t)\|^2_{0,\Omega_2^\varepsilon} \\
+\frac{1}{2}\frac{(\varepsilon h^\star)^2}{C_K}\sum_{l=1}^2 \frac{1}{\mu_l}\|f_l^\varepsilon(t)\|^2_{0,\Omega_l^\varepsilon} + \frac{(\varepsilon h^\star)^2}{2}\|\left(f_1^\varepsilon(0), f_2^\varepsilon(0)\right)\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon} &+ \frac{1}{2}\|\left(\nabla u_1^0, \nabla u_2^0\right)\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon} \\
+\frac{C_K}{4}\sum_{l=1}^2 \mu_l \int_0^t \|\nabla u_l^\varepsilon(\theta)\|^2_{0,\Omega_l^\varepsilon} d\theta + \frac{(\varepsilon h^\star)^2}{C_K}\sum_{l=1}^2\frac{1}{\mu_l}\int_0^t \left\|\frac{\partial f_l^\varepsilon}{\partial t}(\theta)\right\|^2_{0,\Omega_l^\varepsilon} d\theta \qquad (3.3.10)
\end{aligned}$$

et on a aussi

$$\begin{aligned}
\left|-\int_0^t (f_1^\varepsilon(\theta), \varphi_1^\varepsilon) d\theta - \int_0^t (f_2^\varepsilon(\theta), \varphi_2^\varepsilon) d\theta\right| \quad &\leq \quad \frac{(\varepsilon h^\star)^2}{2C_K}\sum_{l=1}^2 \int_0^t \frac{1}{\mu_l}\|f_l^\varepsilon(\theta)\|^2_{0,\Omega_l^\varepsilon} d\theta \\
&+\frac{T}{2}\|\left(\nabla\varphi_1^\varepsilon, \nabla\varphi_2^\varepsilon\right)\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon}. \qquad (3.3.11)
\end{aligned}$$

De $(3.3.5) - (3.3.11)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2}\|(\dot{u}_1^\varepsilon(t), \dot{u}_2^\varepsilon(t))\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon} + \sum_{1\leq l\leq 2}\mu_l C_K \|\nabla u_l^\varepsilon(t)\|^2_{0,\Omega_l^\varepsilon}\right] + 2\sum_{l=1}^2 \delta_l^\varepsilon \int_0^t \int_{\Omega_l^\varepsilon} g_l\, |\dot{u}_l^\varepsilon(\theta)|^2\, dx d\theta \\
&\quad\leq \frac{3}{2}\|\left(u_1^1, u_2^1\right)\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2} + \left(1 + 3\sqrt{3}M\right)\|\left(\nabla u_1^0, \nabla u_2^0\right)\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon} + \\
&\left(1 + \frac{2M\mu^*}{C_K}\right) T\|\left(\nabla\varphi_1^\varepsilon, \nabla\varphi_2^\varepsilon\right)\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2} + 2T\,|J^\varepsilon(\varphi_1^\varepsilon, \varphi_2^\varepsilon)| + (\varepsilon h^\star)^2\|\left(f_1^\varepsilon(0), f_2^\varepsilon(0)\right)\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon} + \\
&\frac{(\varepsilon h^\star)^2}{C_K}\sum_{l=1}^2\frac{1}{\mu_l}\|f_l^\varepsilon(t)\|^2_{0,\Omega_l^\varepsilon} + \frac{2(\varepsilon h^\star)^2}{C_K}\sum_{l=1}^2\frac{1}{\mu_l}\int_0^t \left(\left\|\frac{\partial f_l^\varepsilon}{\partial t}(\theta)\right\|^2_{0,\Omega_l} + \|f_l^\varepsilon(\theta)\|^2_{0,\Omega_l^\varepsilon} d\theta\right) d\theta \\
&+\int_0^t \left[\frac{1}{2}\|(\dot{u}_1^\varepsilon(\theta), \dot{u}_2^\varepsilon(\theta))\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon} + \sum_{1\leq l\leq 2}\mu_l C_K\|\nabla u_l^\varepsilon(\theta)\|^2_{0,\Omega_l^\varepsilon}\right] d\theta. \qquad (3.3.12)
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon^2\|f_l^\varepsilon\|^2_{0,\Omega_l^\varepsilon} = \varepsilon^{-1}\|\hat{f}_{\mathbf{1}}\|^2_{0,\Omega_l^\varepsilon}$, $l = 1, 2$, $J^\varepsilon(\varphi_1^\varepsilon, \varphi_2^\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\hat{J}(\varphi_1^\varepsilon, \varphi_2^\varepsilon)$ et en multipliant (3.3.12) par ε on obtient :

$$\begin{aligned} &\varepsilon\left[\frac{1}{2}\,\|(\dot{u}_1^\varepsilon(t), \dot{u}_2^\varepsilon(t))\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon} + \sum_{1\le l\le 2} \mu_l C_K \|\nabla u_l^\varepsilon(t)\|^2_{0,\Omega_l^\varepsilon}\right] + \\ &2\varepsilon\sum_{l=1}^{2}\delta_l^\varepsilon \int_0^t\int_{\Omega_l^\varepsilon} g_l\,|\dot{u}_l^\varepsilon(\theta)|^2\,dxd\theta \\ \le\ & B + \int_0^t \varepsilon\left[\frac{1}{2}\,\|(\dot{u}_1^\varepsilon(\theta), \dot{u}_2^\varepsilon(\theta))\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon} + \sum_{1\le l\le 2}\mu_l C_K\|\nabla u_l^\varepsilon(\theta)\|^2_{0,\Omega_l^\varepsilon}\right] d\theta, \quad (3.3.13) \end{aligned}$$

avec $\mu_* = \min(\mu_1, \mu_2)$, $\mu^* = \max(\mu_1, \mu_2)$ et

$$\begin{aligned} B = \ & \frac{3}{2}\|\left(\hat{u}_1^1, \hat{u}_2^1\right)\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2} + \left(1 + 3\sqrt{3}M\right)\|\left(\nabla\hat{u}_1^0, \nabla\hat{u}_2^0\right)\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon} \\ & + \left(1 + \frac{2M\mu^*}{C_K}\right)T\|\left(\nabla\hat{\varphi}_1, \nabla\hat{\varphi}_2\right)\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2} + 2T\left|\hat{J}(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2)\right| + \\ & (h^\star)^2\|\left(\hat{f}_1(0), \hat{f}_2(0)\right)\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon} + \frac{(h^\star)^2}{C_K\mu_*}\|\left(\hat{f}_1(t), \hat{f}_1(t)\right)\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon} \\ & + \frac{2(\varepsilon h^\star)^2}{C_K\mu_*}\left\|\left(\frac{\partial\hat{f}_1}{\partial t}(\theta), \frac{\partial\hat{f}_2}{\partial t}(\theta)\right)\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega_1)^3\times L^2(\Omega_2)^3)} \\ & + \frac{2(\varepsilon h^\star)^2}{C_K\mu_*}\|\left(\hat{f}_1(\theta), \hat{f}_2(\theta)\right)\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1)^3\times L^2(\Omega_2)^3)} \end{aligned}$$

où B ne dépend pas de ε.

En utilisant le lemme de Gronwall on trouve (3.3.2) et (3.3.3). La démonstration de (3.3.4) est basée sur les techniques utilisées pour démontrer (3.3.2) $-$ (3.3.3). En effet, premièrement, on dérive par rapport à t le problème approché associé (3.2.3). Ensuite, on choisit $(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) = \left(\dot{u}_{1\varsigma}^\varepsilon(t), \dot{u}_{2\varsigma}^\varepsilon(t)\right)$ dans l'expression trouvée et en appliquant les hypothèses (1) $-$ (3) des termes g_l et de l'inégalité de Korn, on obtient l'analogue de (3.3.13). Finalement le lemme de Gronwall assure l'existence d'une constante C indépendante de ε et satisfaisant (3.3.4), ce qui achève la démonstration du théorème (3.3.1). ■

La convergence du problème variationnel

Théorème 3.3.2 *Sous les hypothèses du théorème (3.2.2) et le théorème (3.3.1), il existe* $(u_1^\star, u_2^\star) = (u_{1\alpha}^\star, u_{2\alpha}^\star)$ *dans* $L^2(0,T,H_z) \cap L^\infty(0,T,H_z)$, $\alpha = 1,2$, *telle que :*

$$\left.\begin{array}{l} (\hat{u}_{1\alpha}, \hat{u}_{2\alpha}) \rightharpoonup (u_{1\alpha}^\star, u_{2\alpha}^\star), \\ \left(\dfrac{\partial \hat{u}_{1\alpha}}{\partial t}, \dfrac{\partial \hat{u}_{2\alpha}}{\partial t}\right) \rightharpoonup (\dot{u}_{1\alpha}^\star, \dot{u}_{2\alpha}^\star) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega_1)\times L^2(\Omega_2)) \\ \textit{faiblement}\star \textit{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1)\times L^2(\Omega_2)) \end{array} \tag{3.3.14}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon\left(e_{\alpha\beta}(\hat{u}_1), e_{\alpha\beta}(\hat{u}_2)\right) \rightharpoonup (0,0) \\ \varepsilon\left(\dfrac{\partial}{\partial t}e_{\alpha\beta}(\hat{u}_1), \dfrac{\partial}{\partial t}e_{\alpha\beta}(\hat{u}_2)\right) \rightharpoonup (0,0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega_1)\times L^2(\Omega_2)) \\ \textit{faiblement } \star \textit{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1)\times L^2(\Omega_2)) \end{array} \tag{3.3.15}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon\left(\dfrac{\partial \hat{u}_{1\alpha}}{\partial t}, \dfrac{\partial \hat{u}_{2\alpha}}{\partial t}\right) \rightharpoonup (0,0) \\ \varepsilon\left(\dfrac{\partial^2 \hat{u}_{1\alpha}}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 \hat{u}_{2\alpha}}{\partial t^2}\right) \rightharpoonup (0,0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega_1)\times L^2(\Omega_2)) \\ \textit{faiblement } \star \textit{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1)\times L^2(\Omega_2)) \end{array} \tag{3.3.16}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon^2\left(\dfrac{\partial \hat{u}_{13}}{\partial x_\alpha}, \dfrac{\partial \hat{u}_{23}}{\partial x_\alpha}\right) \rightharpoonup (0,0) \\ \varepsilon^2\left(\dfrac{\partial \hat{u}_{13}}{\partial t}, \dfrac{\partial \hat{u}_{23}}{\partial t}\right) \rightharpoonup (0,0) \\ \varepsilon^2\left(\dfrac{\partial^2 \hat{u}_{13}}{\partial x_\alpha \partial t}, \dfrac{\partial^2 \hat{u}_{23}}{\partial x_\alpha \partial t}\right) \rightharpoonup (0,0) \\ \varepsilon\left(e_{33}(\hat{u}_1), e_{33}(\hat{u}_2)\right) \rightharpoonup (0,0) \\ \varepsilon\left(\dfrac{\partial}{\partial t}e_{33}(\hat{u}_1), \dfrac{\partial}{\partial t}e_{33}(\hat{u}_2)\right) \rightharpoonup (0,0) \\ \varepsilon^2\left(\dfrac{\partial^2 \hat{u}_{13}}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 \hat{u}_{23}}{\partial t^2}\right) \rightharpoonup (0,0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega_1)\times L^2(\Omega_2)) \\ \textit{faiblement } \star \textit{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1)\times L^2(\Omega_2)) \end{array} \tag{3.3.17}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(g_{1\alpha}\dfrac{\partial \hat{u}_{1\alpha}}{\partial t}, g_{2\alpha}\dfrac{\partial \hat{u}_{2\alpha}}{\partial t}\right) \rightharpoonup \left(g_{1\alpha}\dfrac{\partial u_{1\alpha}^\star}{\partial t}, g_{2\alpha}\dfrac{\partial u_{2\alpha}^\star}{\partial t}\right) \\ \varepsilon^2\left(g_{13}\dfrac{\partial \hat{u}_{13}}{\partial t}, g_{23}\dfrac{\partial \hat{u}_{23}}{\partial t}\right) \rightharpoonup (0,0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{faiblement dans} \\ L^2(0,T;L^2(\Omega_1)\times L^2(\Omega_2)) \textit{ et faiblement} \star \\ \textit{dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1)\times L^2(\Omega_2)) \end{array} \tag{3.3.18}$$

Preuve. La démonstration du théorème (3.3.2) est une conséquence du théorème (3.3.1). En effet, d'aprés le théorème (3.3.1) on a :

$$\left\| \left(\frac{\partial \hat{u}_{1\alpha}}{\partial z}, \frac{\partial \hat{u}_{2\alpha}}{\partial z} \right) \right\|^2_{0,\Omega_1 \times \Omega_2} \leq C \qquad , \alpha = 1,2$$

avec C une constante indépendante de ε.

De plus l'inégalité de Poincaré nous donne :

$$\|(\hat{u}_{1\alpha}, \hat{u}_{2\alpha})\|_{0,\Omega_1 \times \Omega_2} \leq h^* \left\| \left(\frac{\partial \hat{u}_{1\alpha}}{\partial z}, \frac{\partial \hat{u}_{2\alpha}}{\partial z} \right) \right\|_{0,\Omega_1 \times \Omega_2}, \ \alpha = 1,2,$$

c'est-à-dire $(\hat{u}_{1\alpha}, \hat{u}_{2\alpha})$ est borné dans H_z pour $\alpha = 1, 2$, ceci implique l'existence de $(u^\star_{1\alpha}, u^\star_{2\alpha})$ dans H_z telle que $(\hat{u}_{1\alpha}, \hat{u}_{2\alpha})$ converge faiblement vers $(u^\star_{1\alpha}, u^\star_{2\alpha})$ dans H_z.

D'autre part on a

$$\left\| \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_{1\alpha}}{\partial z \partial t}, \frac{\partial^2 \hat{u}_{2\alpha}}{\partial z \partial t} \right) \right\|^2_{0,\Omega_1 \times \Omega_2} \leq C,$$

ce qui donne la convergence simple de $\left(\frac{\partial \hat{u}_{1\alpha}}{\partial t}, \frac{\partial \hat{u}_{2\alpha}}{\partial t} \right)$ vers $(\dot{u}^\star_{1\alpha}, \dot{u}^\star_{2\alpha})$.

De la définition de $e_{i,j}(\hat{u}_l)$, $l = 1, 2$ et de l'inégalité (3.3.2), on a :

$$\left\| \varepsilon \left(\frac{\partial \hat{u}_{1i}}{\partial x_j}, \frac{\partial \hat{u}_{2i}}{\partial x_j} \right) \right\|^2_{0,\Omega_1 \times \Omega_2} \leq C$$

donc

$$\|\varepsilon \left(e_{\alpha\beta}(\hat{u}_1), \hat{e}_{\alpha\beta}(\hat{u}_2) \right)\|^2_{0,\Omega_1 \times \Omega_2} \leq C,$$

alors $\varepsilon \left(e_{\alpha\beta}(\hat{u}_1), e_{\alpha\beta}(\hat{u}_2) \right)$ converge vers un élément l_l de $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$, mais comme $\left(e_{\alpha\beta}(\hat{u}_1), e_{\alpha\beta}(\hat{u}_2) \right)$ converge vers $\left(e_{\alpha\beta}(u^\star_{1\alpha}), e_{\alpha\beta}(u^\star_{2\alpha}) \right)$ on a :

$$\int_{\Omega_l} \varepsilon e_{\alpha\beta}(\hat{u}_l) \hat{\varphi}_l dx' dz = \varepsilon \int_{\Omega_l} e_{\alpha\beta}(\hat{u}_l) l_l dx' dz$$

lorsque ε tend vers 0, on obtient :

$$\int_{\Omega_l} l_l \hat{\varphi}_l dx' dz = 0,$$

d'où $l_l = 0$.

De plus

$$\left\| \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} e_{\alpha\beta}(\hat{u}_1), \frac{\partial}{\partial t} e_{\alpha\beta}(\hat{u}_2) \right) \right\|^2 \leq C,$$

c'est-à-dire $\varepsilon\left(\dfrac{\partial}{\partial t}e_{\alpha\beta}\left(\hat{u}_1\right),\dfrac{\partial}{\partial t}e_{\alpha\beta}\left(\hat{u}_2\right)\right)$ est borné dans $L^2\left(0.T,V_z\right)$ et donc convergente vers $\left(l_1,l_2\right)$, mais $\left(\varepsilon\hat{u}_1,\varepsilon\hat{u}_2\right)_\varepsilon$ converge fort vers $(0,0)$ dans $L^2\left(0.T,V_z\right)$, alors

$$\left(l_1,l_2\right)=(0,0)\,.$$

Par le même principe on montre (3.3.16), (3.3.17) et (3.3.18).

■

Théorème 3.3.3 *Avec les même hypothèses du théorème* (3.3.1), $(u_1^\star,u_2^\star)$ *satisfait :*

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_1}\overset{\star,1}{\mathcal{E}}\left(\dfrac{\partial u_{1\alpha}^\star}{\partial z}\right).\dfrac{\partial}{\partial z}(\hat{\varphi}_{1\alpha}-\dfrac{\partial u_{1\alpha}^\star}{\partial t})dx+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_2}\overset{\star,2}{\mathcal{E}}\left(\dfrac{\partial u_{2\alpha}^\star}{\partial z}\right).\dfrac{\partial}{\partial z}(\hat{\varphi}_{2\alpha}-\dfrac{\partial u_{2\alpha}^\star}{\partial t})dx\\ +\sum_{\alpha,l=1}^{2}\hat{\delta}_l\int_{\Omega_l}\hat{g}_{l\alpha}\left(\dfrac{\partial u_{l\alpha}^\star}{\partial t}\right)\left(\hat{\varphi}_{l\alpha}-\dfrac{\partial u_{l\alpha}^\star}{\partial t}\right)dx+\int_\omega\hat{\kappa}|\hat{\varphi}_{1\tau}-\hat{\varphi}_{2\tau}-s|dx'-\int_\omega\hat{\kappa}|\dot{u}_{1\tau}^\star-\dot{u}_{1\tau}^\star-s|dx'\\ \geq\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_1}\hat{f}_{1\alpha}(\hat{\varphi}_{1\alpha}-\dfrac{\partial u_{1\alpha}^\star}{\partial t})dx+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_2}\hat{f}_{2\alpha}(\hat{\varphi}_{2\alpha}-\dfrac{\partial u_{2\alpha}^\star}{\partial t})dx,\quad\forall(\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2)\in\Pi(V).\end{array}\right. \tag{3.3.19}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial z}\left[\overset{\star,1}{\mathcal{E}}\dfrac{\partial u_1^\star}{\partial z}\right]+\hat{\delta}_1\hat{g}_1\left(\dfrac{\partial u_1^\star}{\partial t}\right),-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial z}\left[\overset{\star,2}{\mathcal{E}}\dfrac{\partial u_2^\star}{\partial z}\right]+\hat{\delta}_2\hat{g}_2\left(\dfrac{\partial u_2^\star}{\partial t}\right)\right)=(\hat{f}_1,\hat{f}_2)\\ \textit{dans }(L^2(\Omega_1))^2\times(L^2(\Omega_2))^2,\end{array}\right. \tag{3.3.20}$$

$$u^\star(0)=(u_1^\star(0),u_2^\star(0))=\underline{\widehat{u}}(0)=(\underline{\widehat{u}}_1^0,\underline{\widehat{u}}_2^0). \tag{3.3.21}$$

Remark 5.1. *Du théorème* (3.3.2), la matrice $\widehat{\mathcal{E}}^l$, $l=1,2$ converge pour $\varepsilon\to0$ vers

$$\overset{\star,l}{\mathcal{E}}=\begin{pmatrix}\mathcal{E}_{1313}^l & \mathcal{E}_{1323}^l\\ \mathcal{E}_{2313}^l & \mathcal{E}_{2323}^l\end{pmatrix}.$$

Preuve. En substitiant la convergence du théorème (3.3.2) dans l'inéquation (3.3.1) et le fait que $\hat{J}$ est convêxe, continue et semi-continue inferieurement, nous obtenons la formule (3.3.19) .

Pour la preuve de (3.3.20), on choisit dans (3.3.19) ; $\hat{\varphi}_{1\alpha}=\dfrac{\partial u_{1\alpha}^\star}{\partial t}\pm\hat{\psi}_{1\alpha}$, $\hat{\varphi}_{2\alpha}=\dfrac{\partial u_{2\alpha}^\star}{\partial t}\pm\hat{\psi}_{2\alpha}$, avec $(\hat{\psi}_{1\alpha}, \hat{\psi}_{2\alpha}) \in H_0^1(\Omega_1) \times H_0^1(\Omega_2)$, $\alpha = 1, 2$, on trouve :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_1} \overset{\star,1}{\mathcal{E}}\left(\frac{\partial u_{1\alpha}^{\star}}{\partial z}\right).\frac{\partial \hat{\psi}_{1\alpha}}{\partial z}dx + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_2} \overset{\star,2}{\mathcal{E}}\left(\frac{\partial u_{2\alpha}^{\star}}{\partial z}\right).\frac{\partial \hat{\psi}_{2\alpha}}{\partial z}dx \\
&+\sum_{\alpha,=1}^{2}\hat{\delta}_1\int_{\Omega_1}\hat{g}_{1\alpha}\left(\frac{\partial u_{1\alpha}^{\star}}{\partial t}\right)\hat{\psi}_{1\alpha}dx + \sum_{\alpha,=1}^{2}\hat{\delta}_2\int_{\Omega_1}\hat{g}_{2\alpha}\left(\frac{\partial u_{2\alpha}^{\star}}{\partial t}\right)\hat{\psi}_{2\alpha}dx \\
= \;& \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_1}\hat{f}_{1\alpha}\hat{\psi}_{1\alpha}dx + \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_2}\hat{f}_{2\alpha}\hat{\psi}_{2\alpha}dx.
\end{aligned}$$

Comme $\psi_{i\alpha}$ est nulle sur le bord de Ω_l ; la formule de Green nous donne :

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\overset{\star,1}{\mathcal{E}}\left(\frac{\partial u_{1\alpha}^{\star}}{\partial z}\right)\right).\hat{\psi}_{1\alpha}dx - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\overset{\star,2}{\mathcal{E}}\left(\frac{\partial u_{2\alpha}^{\star}}{\partial z}\right)\right).\hat{\psi}_{2\alpha}dx \\
&+\sum_{\alpha=1}^{2}\hat{\delta}_1\int_{\Omega_1}\hat{g}_{1\alpha}\left(\frac{\partial u_{1\alpha}^{\star}}{\partial t}\right)\hat{\psi}_{1\alpha}dx + \sum_{\alpha=1}^{2}\hat{\delta}_2\int_{\Omega_2}\hat{g}_{2\alpha}\left(\frac{\partial u_{2\alpha}^{\star}}{\partial t}\right)\hat{\psi}_{2\alpha}dx \\
= \;& \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_1}\hat{f}_{1\alpha}\hat{\psi}_{1\alpha}dx + \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_2}\hat{f}_{2\alpha}\hat{\psi}_{2\alpha}dx,
\end{aligned}$$

Alors, on déduit que

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z}\left[\overset{\star,1}{\mathcal{E}}\frac{\partial u_1^{\star}}{\partial z}\right] + \hat{\delta}_1\hat{g}_1\left(\frac{\partial u_1^{\star}}{\partial t}\right), -\frac{\partial}{\partial z}\left[\overset{\star,2}{\mathcal{E}}\frac{\partial u_2^{\star}}{\partial z}\right] + \hat{\delta}_2\hat{g}_2\left(\frac{\partial u_2^{\star}}{\partial t}\right)\right) = (\hat{f}_1, \hat{f}_2), \qquad (3.3.22)$$

$$\text{dans } L^2\left(0, T;\, H^{-1}(\Omega_1) \times H^{-1}(\Omega_2)\right).$$

Comme $\left(\hat{f}_{1\alpha}, \hat{f}_{2\alpha}\right) \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)\right)$, alors (3.3.22) est vraie dans $L^2\left(0, T; L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)\right)$.

La condition (3.3.21) est une conséquence immédiate de la seconde équation de (3.3.1) et (3.3.14). ■

Théorème 3.3.4 *Supposons que les hypothèses du théorème* (3.2.2) *et du théorème* (3.3.1) *soient vérifiées, nous avons l'égalité suivante :*

$$\theta_1^{\star}(x', t) = \theta_2^{\star}(x', t) \quad \textit{dans} \;\; L^2(\omega)^2, \quad \forall t \in \,]0, T[\,, \qquad (3.3.23)$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\omega}\hat{\kappa}\left(\left|\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2 + \frac{\partial q_1^{\star}}{\partial t} - \frac{\partial q_2^{\star}}{\partial t}\right| - \left|\frac{\partial q_1^{\star}}{\partial t} - \frac{\partial q_2^{\star}}{\partial t} - s\right|\right)dx' \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{\omega}(\theta_1^{\star}\hat{\phi}_1 - \theta_2^{\star}\hat{\phi}_2)dx' \geq 0, \; \forall \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2 \in \left(L^2(\omega)\right)^2, \forall t \in \,]0, T[\,, \qquad (3.3.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} |\theta_l^\star| < \hat{\kappa} \Rightarrow \dfrac{\partial q_1^\star}{\partial t} - \dfrac{\partial q_2^\star}{\partial t} = s, \\ |\theta_l^\star| = \hat{\kappa} \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \;\; \textit{telle que } \dfrac{\partial q_1^\star}{\partial t} - \dfrac{\partial q_2^\star}{\partial t} = s + \lambda \theta_l^\star, \end{cases} \qquad \textit{dans } \; \omega \times]0, T[\,, \tag{3.3.25}$$

avec

$$q_l^\star(x', t) = \hat{u}_l^\star(x', 0, t), \qquad \theta_l^\star(x', t) = \overset{*,l}{\mathcal{E}}(x', 0) \frac{\partial \hat{u}_l^\star}{\partial z}(x', 0, t), \quad l = 1, 2.$$

Preuve. Pour tout $t \in]0, T[$, on choisit dans l'inéquation variationel (3.3.19) $\hat{\varphi}_{1\alpha} = \dfrac{\partial u_{1\alpha}^\star}{\partial t} + \hat{\phi}_{1\alpha}, \hat{\varphi}_{2\alpha} = \dfrac{\partial u_{2\alpha}^\star}{\partial t} + \hat{\phi}_{2\alpha}$ pour $\alpha = 1, 2$, avec

$$(\hat{\phi}_{1\alpha}, \hat{\phi}_{2\alpha}) \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_{L_1}(\Omega_1)} \times H^1_{\Gamma_2 \cup \Gamma_{L_2}(\Omega_2)}.$$

On a alors

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Omega_1} \overset{\star,1}{\mathcal{E}} \left(\dfrac{\partial u_{1\alpha}^\star}{\partial z} \right) . \dfrac{\partial \hat{\phi}_{1\alpha}}{\partial z} dx + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Omega_2} \overset{\star,2}{\mathcal{E}} \left(\dfrac{\partial u_{2\alpha}^\star}{\partial z} \right) . \dfrac{\partial \hat{\phi}_{2\alpha}}{\partial z} dx \\ + \sum_{\alpha,l=1}^2 \hat{\delta}_l \int_{\Omega_l} \hat{g}_{l\alpha} \left(\dfrac{\partial u_{l\alpha}^\star}{\partial t} \right) \hat{\phi}_{1\alpha} dx + \int_\omega \hat{\kappa} \left(\left| \phi_{1\alpha} - \phi_{2\alpha} + \dfrac{\partial q_1^\star}{\partial t} - \dfrac{\partial q_2^\star}{\partial t} - s \right| - \left| \dfrac{\partial q_1^\star}{\partial t} - \dfrac{\partial q_2^\star}{\partial t} - s \right| \right) dx' \\ \geq \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Omega_1} \hat{f}_{1\alpha}(x', t) \hat{\phi}_{1\alpha}(x', t) dx' dz + \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Omega_2} \hat{f}_{2\alpha}(x', t) \hat{\phi}_{2\alpha}(x', t) dx' dz, \end{cases}$$

En utilisant la formule de Green ; on obtient

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\overset{\star,1}{\mathcal{E}}(x', z, t) \; \frac{\partial u_{1\alpha}^\star(x', t)}{\partial z} \right) \hat{\phi}_{1\alpha}(x', t) dx' dz \\ & -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\overset{\star,2}{\mathcal{E}}(x', z, t) \; \frac{\partial u_{2\alpha}^\star(x', t)}{\partial z} \right) \hat{\phi}_{2\alpha}(x', t) dx' dz \\ & +\frac{1}{2} \int_\omega \left(\overset{\star,1}{\mathcal{E}}(x', 0) \; \frac{\partial u_{1\alpha}^\star(x', t)}{\partial z} \hat{\phi}_1(x', 0, t) + \overset{\star,2}{\mathcal{E}}(x', 0) \; \frac{\partial u_{2\alpha}^\star(x', t)}{\partial z} \hat{\phi}_2(x', 0, t) \right) dx' \\ & + \int_\omega \hat{\kappa} \left(\left| \hat{\phi}_{1\alpha} - \hat{\phi}_{2\alpha} + \frac{\partial q_1^\star}{\partial t} - \frac{\partial q_2^\star}{\partial t} - s \right| - \left| \frac{\partial q_1^\star}{\partial t} - \frac{\partial q_2^\star}{\partial t} - s \right| \right) dx' \\ & + \sum_{\alpha=1}^2 \hat{\delta}_1 \int_{\Omega_1} \hat{g}_{1\alpha} \left(\frac{\partial u_{1\alpha}^\star(x', t)}{\partial t} \right) \hat{\phi}_{1\alpha}(x', t) dx' dz + \sum_{\alpha=1}^2 \hat{\delta}_2 \int_{\Omega_1} \hat{g}_{2\alpha} \left(\frac{\partial u_{2\alpha}^\star(x', t)}{\partial t} \right) \hat{\phi}_{2\alpha}(x', t) dx' dz \\ \geq \; & \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Omega_1} \hat{f}_{1\alpha}(x', t) \hat{\phi}_{1\alpha}(x', t) dx' dz + \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Omega_2} \hat{f}_{2\alpha}(x', t) \hat{\phi}_{2\alpha}(x', t) dx' dz, \end{aligned}$$

D'autre part, de (3.3.20), on déduit que :

$$\begin{aligned} & \int_\omega \hat{\kappa} \left(\left| \hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2 + \frac{\partial q_1^\star}{\partial t} - \frac{\partial q_2^\star}{\partial t} \right| - \left| \frac{\partial q_1^\star}{\partial t} - \frac{\partial q_2^\star}{\partial t} - s \right| \right) dx' \\ & \qquad -\frac{1}{2} \int_\omega \left(\theta_1^\star(x', t) . \hat{\phi}_1(x', 0) - \theta_2^\star(x', t) . \hat{\phi}_2(x', 0) \right) dx' \geq 0, \; \forall \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2 \in (\mathfrak{D}(\omega))^2. \end{aligned}$$

De la densité de $\mathfrak{D}(\omega)$ dans $L^2(\omega)$, on déduit que :

$$\int_\omega \hat{\kappa}\left(\left|\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2 + \frac{\partial q_1^\star}{\partial t} - \frac{\partial q_2^\star}{\partial t} - s\right| - \left|\frac{\partial q_1^\star}{\partial t} - \frac{\partial q_2^\star}{\partial t} - s\right|\right) dx'$$
$$-\frac{1}{2}\int_\omega \left(\theta_1^\star(x',t).\hat{\phi}_1(x',0) - \theta_2^\star(x',t).\hat{\phi}_2(x',0)\right) dx' \geq 0, \forall\ \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2 \in (L^2(\omega))^2.$$

Dans le cas particulier $\phi_1 = \phi_2 = \pm\phi$, on obtient :

$$\int_\omega \left(\theta_1^\star(x',t) - \theta_2^\star(x',t)).\hat{\phi}(x',0)\right) dx' = 0,\ \forall\ \hat{\phi} \in (L^2(\omega))^2.$$

Ce qui donne les formules (3.3.23) et (3.3.24) . La preuve de (3.3.25) est similaire à celles données dans le cas du problème des fluides (voir[2]) . ■

Théorème 3.3.5 *Supposons que les composantes de* $\overset{\star,1}{\mathcal{E}}_{\alpha 3\beta 3}$ *et* $\overset{\star,2}{\mathcal{E}}_{\alpha 3\beta 3}$ *pour* $1 \leq \alpha, \beta \leq 2$ *dépendent seulement de la variable* x', *alors on a :*

$$\begin{aligned}&\int_\omega \left(\int_0^h [F_1(x',z,t) + F_2(x',-z,t)]\, dz - h\,[F_1(x',h,t) + F_2(x',-h,t)]\right).\nabla\hat{\psi}(x')dx'\\
&+\int_\omega \left(h\,[G_1(x',h,t) + G_2(x',-h,t)] - \int_0^h [G_1(x',z,t) + G_2(x',-z,t)]\, dz +\right).\nabla\hat{\psi}(x')dx'\\
&+\frac{1}{2}\int_\omega \left(\int_0^h \overset{\star,1}{\mathcal{E}}(x')\hat{u}_1^\star(x',z,t)dz + \int_{-h}^0 \overset{\star,2}{\mathcal{E}}(x')\hat{u}_2^\star(x',z,t)dz\right).\nabla\hat{\psi}(x')dx' = 0,\ \forall\hat{\psi}(x') \in H^1(\omega)\end{aligned} \tag{3.3.26}$$

avec

$$\begin{aligned}
F_1(x',z,t) &= \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_1(x',\theta,t)d\theta d\zeta,\\
G_1(x',z,t) &= \hat{\delta}_1 \int_0^z \int_0^\zeta \hat{g}_1\left(\frac{\partial u_1^\star(x',t)}{\partial t}\right) d\theta d\zeta,\\
F_2(x',z,t) &= \int_z^0 \int_\zeta^0 \hat{\mathbf{f}}_2(x',\theta,t)d\theta d\zeta,\\
G_2(x',z,t) &= \hat{\delta}_2 \int_z^0 \int_\zeta^0 \hat{g}_2\left(\frac{\partial u_2^\star(x',t)}{\partial t}\right) d\theta d\zeta.
\end{aligned}$$

Preuve. On intègre deux fois les deux équations de (3.3.20) ; la première dans $[0,z]$ et seconde entre z et 0, et on considère que $\overset{\star,l}{\mathcal{E}}_{\alpha 3\beta 3}$, $l = 1, 2$ dépend seulement de x', on trouve :

$$\int_0^z \left[\int_0^\zeta -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\overset{\star,1}{\mathcal{E}}(x')\,\frac{\partial u_1^\star(x',\theta,t)}{\partial\theta}\right] d\theta\right] d\zeta + \int_0^z \int_0^\zeta \hat{\delta}_1\hat{g}_1\left(\frac{\partial u_1^\star(x',t)}{\partial t}\right) d\theta d\zeta$$

$$= \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}_1(x',\theta,t)d\theta d\zeta,$$

d'où

$$\int_0^z \left[-\frac{1}{2}\overset{\star,1}{\mathcal{E}}(x')\,\frac{\partial u_1^\star(x',\xi,t)}{\partial \zeta} + \frac{1}{2}\overset{\star,1}{\mathcal{E}}(x')\,\frac{\partial u_1^\star(x',0,t)}{\partial \zeta} \right] d\zeta + G_1(x',z,t) = F_1(x',z,t),$$

ce qui donne :

$$-\frac{1}{2}\overset{\star,1}{\mathcal{E}}(x')\,u_1^\star(x',z,t) + \frac{1}{2}\overset{*,1}{\mathcal{E}}(x')\,u_1^\star(x',0,t) + \frac{1}{2}\overset{\star,1}{\mathcal{E}}(x')\,\frac{\partial u_1^\star(x',0,t)}{\partial z}(z-0) + G_1(x',z,t)$$
$$= F_1(x',z,t).$$

Alors

$$-\frac{1}{2}\overset{\star,1}{\mathcal{E}}(x')\hat{u}_1^\star(x',z,t) + \frac{1}{2}\overset{\star,1}{\mathcal{E}}(x')q_1^\star(x',t) + \frac{1}{2}z\theta_1^\star(x',t) + G_1(x',z,t) = F_1(x',z,t). \quad (3.3.27)$$

De même pour la seconde équation de (3.3.20) , on trouve :

$$-\frac{1}{2}\overset{\star,2}{\mathcal{E}}(x')\hat{u}_2^\star(x',z,t) + \frac{1}{2}\overset{\star,2}{\mathcal{E}}(x')q_2^\star(x',t) + \frac{1}{2}z\theta_2^\star(x',t) + G_2(x',z,t) = F_2(x',z,t). \quad (3.3.28)$$

Pour tout $t \in [0,T]$, en replaçant z par $h(x')$ dans (3.3.27) et par -$h(x')$ dans (3.3.28) et en tenant compte de $\hat{u}_1^\star(x',h(x'),t) = \hat{u}_2^\star(x',-h(x'),t) = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\overset{\star,1}{\mathcal{E}}(x')q_1^\star(x',t) + \frac{1}{2}h\theta_1^\star(x',t) + G_1(x',h(x'),t) &= F_1(x',h(x'),t), & (3.3.29)\\ \frac{1}{2}\overset{\star,2}{\mathcal{E}}(x')q_2^\star(x',t) - \frac{1}{2}h\theta_2^\star(x',t) + G_2(x',-h(x'),t) &= F_2(x',-h(x'),t). & (3.3.30) \end{aligned}$$

En utilisant (3.3.23) , et la somme des deux équations (3.3.29) et (3.3.30) , on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\overset{\star,1}{\mathcal{E}}(x')q_1^\star(x',t) + \overset{\star,2}{\mathcal{E}}(x')q_2^\star(x',t)\right) &= -G_1(x',h(x'),t) - G_2(x',-h(x'),t) + \\ &\quad F_1(x',h(x'),t) + F_2(x',-h(x'),t) \quad (3.3.31) \end{aligned}$$

En suite on intègre (3.3.27) entre 0 et $h(x')$ et (3.3.28) entre $-h(x')$ et 0, alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\overset{\star,1}{\mathcal{E}}(x')\int_0^{h(x')} \hat{u}_1^\star(x',z,t)dz &= \frac{h(x')}{2}\overset{\star,1}{\mathcal{E}}(x')q_1^\star(x',t) + \frac{h^2(x')}{4}\theta_1^\star(x',t) + \\ &\quad \int_0^{h(x')} G_1(x',z,t)dz + \int_0^{h(x')} F_1(x',z,t)dz, \quad (3.3.32)\\ \frac{1}{2}\overset{\star,2}{\mathcal{E}}(x')\int_{-h(x')}^0 \hat{u}_2^\star(x',z,t)dz &= \frac{h(x')}{2}\overset{\star,2}{\mathcal{E}}(x')q_2^\star(x',t) - \frac{h^2(x')}{4}\theta_2^\star(x',t) + \\ &\quad \int_{-h(x')}^0 G_2(x',z,t)dz + \int_{-h(x')}^0 F_2(x',z,t)dz. \quad (3.3.33) \end{aligned}$$

La somme de ces dèrnières équations et l'équation (3.3.31) , nous permet d'écrire ;

$$\frac{1}{2}\overset{*,1}{\mathcal{E}}(x')\int_0^{h(x')}\hat{u}_1^\star(x',z,t)dz+\frac{1}{2}\overset{*,2}{\mathcal{E}}(x')\int_{-h(x')}^0\hat{u}_2^\star(x',z,t)dz$$
$$= h(-G_1(x',h(x'),t)-G_2(x',-h(x'),t)+F_1(x',h(x'),t)+F_2(x',-h(x'),t))$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&\int_0^h [F_1(x',z,t)+F_2(x',-z,t)]\,dz - h\,[F_1(x',h,t)+F_2(x',-h,t)]\\
&+h\,[G_1(x',h,t)+G_2(x',-h,t)] - \int_0^h [G_1(x',z,t)+G_2(x',-z,t)] +\\
&\frac{1}{2}\int_0^h \overset{\star,1}{\mathcal{E}}(x')\hat{u}_1^\star(x',z,t)dz + \int_{-h}^0 \overset{\star,2}{\mathcal{E}}(x')\hat{u}_2^\star(x',z,t)dz\\
=\;& 0,
\end{aligned}$$

et finalement, on déduit (3.3.26) . ■

Théorème 3.3.6 *Le problème* (3.3.19) − (3.3.21) *admet une solution unique* $u^\star = (u_1^\star, u_2^\star)$ *dans* $L^2(0,T,H_z)\cap L^\infty(0,T,H_z)$.

Preuve. Supposons que $u^\star = (u_1^\star, u_2^\star)$ et $\phi^\star = (\phi_1^\star, \phi_2^\star)$ soient deux solutions du problème (3.3.19) − (3.3.21) et soit $t \in [0,T]$.
Prenons dans (3.3.19), $\hat{\varphi} = \left(\frac{\partial \phi_1^\star}{\partial t}, \frac{\partial \phi_2^\star}{\partial t}\right)$ en suite, on prend $\hat{\varphi} = \left(\frac{\partial u_1^\star}{\partial t}, \frac{\partial u_2^\star}{\partial t}\right)$. La somme de ces deux inéquations et pour $\mathbb{T}_1 = u_1^\star - \hat{\varphi}_1$ et $\mathbb{T}_2 = u_2^\star - \hat{\varphi}_2$, nous donne :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_1}\overset{\star,1}{\mathcal{E}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{T}_{1\alpha}\right).\frac{\partial}{\partial z}\mathbb{T}_{1\alpha}dx+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_2}\overset{\star,2}{\mathcal{E}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{T}_{2\alpha}\right).\frac{\partial}{\partial z}\mathbb{T}_{2\alpha}dx\\
&\quad+\sum_{\alpha,l=1}^{2}\hat{\delta}_l\int_{\Omega_l}\left[\hat{g}_{l\alpha}\left(\frac{\partial u_{l\alpha}^\star}{\partial t}\right)-\hat{g}_{l\alpha}\left(\frac{\partial \phi_{l\alpha}^\star}{\partial t}\right)\right]\left[\frac{\partial u_{l\alpha}^\star}{\partial t}-\frac{\partial \phi_{l\alpha}^\star}{\partial t}\right]dx \le 0
\end{aligned}\tag{3.3.34}$$

Le fait que $\hat{g}_l$ est monotone, on déduit que :

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_1}\overset{\star,1}{\mathcal{E}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{T}_{1\alpha}\right).\frac{\partial}{\partial z}\mathbb{T}_{1\alpha}dx+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_2}\overset{\star,2}{\mathcal{E}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{T}_{2\alpha}\right).\frac{\partial}{\partial z}\mathbb{T}_{2\alpha}dx \le 0. \tag{3.3.35}$$

Comme $\mathbb{T}_1(0) = \mathbb{T}_2(0) = 0$, l'intégrale de (3.3.35) entre 0 et T, nous donne :

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\left\langle \overset{*,1}{\mathcal{E}}\frac{\partial}{\partial z}\mathbb{T}_{1\alpha}(t),\frac{\partial}{\partial z}\mathbb{T}_{1\alpha}(t)\right\rangle_{\Omega_1}+\sum_{\alpha=1}^{2}\left\langle \overset{*,2}{\mathcal{E}}\frac{\partial}{\partial z}\mathbb{T}_{2\alpha}(t),\frac{\partial}{\partial z}\mathbb{T}_{2\alpha}(t)\right\rangle_{\Omega_2} \le 0. \tag{3.3.36}$$

Montrons maintenant que la matrice $\overset{\star,l}{\mathcal{E}}$ est elliptique. Soit $\eta = (\eta_\alpha)_{\alpha=1,2} \in \mathbb{R}^2$. En retournant aux hypothèses (3.1.1) et (H_3) et par le choix du tenseur symétrique $e = (e_{\alpha\beta})$ qui est donné par $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta_1 \\ 0 & 0 & \eta_2 \\ \eta_1 & \eta_2 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{E}}^l_{ijkl} e_{kl} e_{ij} &= 2\widehat{\mathcal{E}}^l_{\alpha 3\beta 3}\left(e_{\beta 3}\right)\left(e_{\alpha 3}\right) + 2\widehat{\mathcal{E}}^l_{\alpha 333}\left(e_{33}\right)\left(e_{\alpha 3}\right) + 2\widehat{\mathcal{E}}^l_{33\alpha 3}\left(e_{\alpha 3}\right)\left(e_{33}\right) + \widehat{\mathcal{E}}^l_{3333}\left(e_{33}\right)\left(e_{33}\right) \\ &= \overset{\star,l}{\mathcal{E}}_{\alpha\beta\eta_\beta\eta_\alpha}, \text{ pour } \alpha, \beta, l = 1, 2. \end{aligned}$$

Mais comme $|e|^2 = 2\,|\eta|^2$, on a :

$$\overset{\star,l}{\mathcal{E}}\eta.\eta \geq 2m_{\mathcal{E}^l}\,|\eta|^2, \quad \text{pour tout } l = 1, 2,\ \eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Par conséquent (3.3.36) devient :

$$2m_{\mathcal{E}^1}\left\|\frac{\partial}{\partial z}\mathbb{T}_1(t)\right\|^2_{0,\Omega_1} + 2m_{\mathcal{E}^2}\left\|\frac{\partial}{\partial z}\mathbb{T}_2(t)\right\|^2_{0,\Omega_2} \leq 0.$$

D'où

$$\left\|\frac{\partial}{\partial z}\mathbb{T}_1(t)\right\|^2_{0,\Omega_1} = 0 \text{ et } \left\|\frac{\partial}{\partial z}\mathbb{T}_2(t)\right\|^2_{0,\Omega_1} = 0$$

car $\mathbb{T}_1(0) = \mathbb{T}_2(0) = 0$, et $m_{\mathcal{E}^1}$, $m_{\mathcal{E}^2} > 0$.

L'inégalité de Poincaré, nous donne :

$$\left\|\left(\mathbb{T}_1(t), \mathbb{T}_2(t)\right)\right\|^2_{L^2(0,T;H_z)} = \left\|\left(\mathbb{T}_1(t), \mathbb{T}_2(t)\right)\right\|^2_{L^\infty(0,T;H_z)} = 0$$

On peut conclure alors que $(u_1^\star, u_2^\star) = (\phi_1^\star, \phi_2^\star)$ dans $L^2(0,T;H_z) \cap L^\infty(0,T,H_z)$ et donc l'unicité de la solution du problème $(3.3.19) - (3.3.21)$. ∎

Conclusion générale

En guise de conclusion, afin d'aborder l'étude de la convergence asymptotique des problèmes des EDP, en régimes stationnaire ou dynamique dans des domaines bornés et minces en 3D, avec frottement non linéaire de type Tresca ou Coulomb, on transporte le problème variationnel à l'aide d'un changement d'échelle à un problème équivalent défini sur un domaine indépendant du paramètre ε et par suite on obtient le problème limite et les équations faibles généralisés du problème initial.

Bibliographie

[1] C. Baiocchi and A. Capelo, Variational and Quasivariational Inequalities: Applications to Free-Boundary Problems, John Wiley, Chichester, 1984

[2] G. Bayada and K. Lhalouani, Asymptotic and numerical analysis for unilateral contact problem with Coulomb's friction between an elastic body and a thin elastic soft layer, *Asymptot. Anal.* **25** (2001), pp. 329–362.

[3] G. Bayada, M. Boukouche, On a free boundary problem for Reynolds equation derived from the Stokes system with Tresca boundary conditions. *J. Math. Anal. Appl*, 382(2003), 212-231.

[4] A. Benseghir, H. Benseridi and M. Dilmi, On the asymptotic study of transmission problem a thin domain, *J. Inv. Ill-Posed. Prob*, **27**(1) (2019), pp. 53-67. DOI: https://doi.org/10.1515/jiip-2017-0085.

[5] H. Benseridi and M. Dilmi, Some inequalities and asymptotic behavior of dynamic problem of linear elasticity. *Georgian Mathematical Journal*, 20(1), (2013), 25-41.

[6] H. Benseridi, Y. Letoufa, M. Dilmi, On the Asymptotic Behavior of an interface Problem in a Thin Domain, *M. Proc. Natl. Acad. Sci., India, Sect. A Phys. Sci.,* Vol. 89, Issue 2 (2019), pp. 1-10

[7] M. Boukrou che and G. Lukaszewicz, Asymptotic analysis of solutions of a thin lm lubrication problem with Coulomb uisolid interface law. International Journal of Engineering Science 41(2003) , pp.521-537.

[8] M. Boukrouche and R. El Mir, Asymptotic analysis of non-Newtonian fluid in a thin domain with Tresca law, *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.,* Vol. 59 (2004), pp. 85–105.

[9] M. Boukrouche and R. El mir, On a non-isothermal, non-Newtonian lubrication problem with Tresca law: Existence and the behavior of weak solutions, Nonlinear Analysis: Real World Applications 9 (2008), 674-692.

[10] M. Boukrouche and G. Lukaszewicz, On a lubrication problem with Fourier and Tresca boundary conditions, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 14(6) (2004), 913-941.

[11] M. Boukrouche and F. Saidi, Non-isothermal lubrication problem with Tresca fluid-solid interface law. Part I, Nonlinear Analysis: Real World Applications 7 (2006), 1145-1166.

[12] H. Brezis, Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier 18 (1968), pp. 115–175.

[13] L.Consiglieri, Stationary solutions for a Bingham flow with nonlocal friction, Pitman Research Notes in Mathematics Series 274(1992)237-243.

[14] M. Dilmi, H. Benseridi and A. Saadallah, *Asymptotic Analysis of a Bingham Fluid in a Thin Domain with Fourier and Tresca Boundary Conditions,* Adv. Appl. Math. Mech., **6** (2014), 797-810.

[15] M. Dilmi, M. Dilmi and H. Benseridi, Study of generalized Stokes operator in a thin domain with friction law (case p <2), Math Meth Appl Sci. 2018;41: 9027–9036.

[16] G. Duvaut, J.L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique des Fluides*, Dunod, 1969.

[17] G. Duvant, J. L. Lions, Les Inéquations en Mécanique et en physique, Dunod, Paris, (1972).

[18] G. Duvant, Equilibre d'un solide élastique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 290 (1980) 263-265.

[19] G. Duvant, Loi de frottement non locale, J, Mec. Theor. Appl. (1982), pp. 7378, numero special.

[20] E. Essoufi, E. Benkhira, R. Fakhar, Analysis and numerical approximation of an electro-elastic frictional contact problem, Mathematical Modelling of Natural Phenomena 5 (2007) 84-90.

[21] N. Hemici and A. Matei, A frictionless contact problem with adhesion between two elastic bodies, *Anals of University of Cairova, Math. Comp. Sci. Ser*, 30(2) (2003), 90-99.

[22] I. R. Ionescu, Q. L. Nguyen and S. Wolf, *Slip-dependent friction in dynamic elasticity*, Nonlinear Analysis **53** (2003), 375–390.

[23] H.Irago, J.M.Viano, A, Rodrguez-Areos, Asymptotic derivation of frictionless contact models for elastic rods on a foundation with normal compliance, *Nonlinear Analysis,* Vol. 14, Issue 1 (2013), pp. 852–866.

[24] Y. Kadri, H. Benseridi, M. Dilmi and A. Benseghir, Behavior of the Isotermal Elasticity Operator with Non-linear Friction in a Thin Domain, Bol. Soc. Paran. Mat, 41(2023), pp. 1-12.

[25] H.L. Lahlah, Y. Latoufa, H. Benseridi and M. Dilmi, Study of Non-Isothermal Hooke Operator in Thin Domain With Friction on the Bottom Surface, Nonliear Dynamics and Systems Theory, 21(4) (2021) , 393-409.

[26] Z. Lerguet, Z. Zellagui, H. Benseridi and S. Drabla, *Variational analysis of an electro viscoelastic contact problem with friction*, Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences, **14 (Issue 1)** (2013), 93-100.

[27] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Paris, Dunod (1969).

[28] S. Manaa, H. Benseridi and M. Dilmi, 3D-2D asymptotic analysis of an interface problem with a dissipative term in a dynamic regime. Bol. Soc. Mat. Mex. 27, 10 (2021). https://doi.org/10.1007/s40590-021-00320-8.

[29] R Monneau, F Murat, A Sili, Error estimate for the transition 3d-1d in anisotropic heterogeneous linearized elasticity, Preprint (2002).

[30] F. Murat, A. Sili, Asymptotic behavior of solutions of the anisotropic heterogeneous linearized elasticity system in thin cylinders, C.R. Acad. Sci. Paris, SÂ´ erie, I, Vol. 328, Issue 2 (1999), pp. 179-184

[31] A. Saadallah, H. Benseridi, M. Dilmi and S. Drabla, Estimates for the asymptotic convergence of a non-isothermal linear elasticity with friction, *Georgian Math. J*, **23** (2016), no. 3, pp 435–446.

[32] F. Saidi, Sur quelques problèmes de lubrification par des fluides newtoniens non isothermes et incompressibles avec des conditions aux bords non linéaires. Etude mathématique et numérique, Thèse, Université Jean Monnet - Saint-Etienne, (2004) .

[33] M. Sofonea and A. Matei, Mathematical Models in Contact Mechanics, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[34] M. Sofonea and A. Matei, Variational inequalities with applications : a study of antiplane frictional contact problems, Vol. 18, Springer Science and Business 265 Media, 2009.

[35] J.M.Viano, A, Rodrguez-Areos, M. Sofonea, Asymptotic derivation of quasistatic frictional contact models with wear for elastic rods, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* Vol. 401, Issue 2, (2013), pp. 641-653.

الملخص : تدخل أطروحة الدكتوراه هذه في إطار التقارب التقاربي لبعض المسائل الحدودية للمعادلات التفاضلية الجزئية في النظام المستقر أو الديناميكي في المجالات المحدودة ثلاثية الأبعاد مع شروط حدية غير خطية للاحتكاك من نوع تريسكا أو كولومب على الحافة. للحصول على الهدف المنشود ، وبعد الصياغة المتغيرة لكل مشكلة باستخدام تغيير المقياس والمجاهيل الجديدة لإجراء الدراسة على مجال لا يرتبط ب ε. أخيرًا ، نبحث عن بعض التقديرات ، ثم بالمرور إلى النهاية ، نحصل على المسائل الحدودية والمعادلات الضعيفة العامة للمشكلات المقدمة.
الكلمات المفتاحية : المرونة ، المعادلة الضعيفة العامة ،قانون كولومب ، قانون تريسكا ،الحل الضعيف.

Abstract. The object of this doctoral thesis falls within the framework of the asymptotic convergence of various problems of PDEs in stationary or dynamic regime in bounded 3D domains with nonlinear frictional conditions of the Tresca or Coulomb type on the edge. To obtain the desired goal, and after the variational formulation of each problem using the change of scale and new unknowns to conduct the study on a domain does not depend on ε. Finally, we look for a priori estimates then by passing to the limit, we obtain the limit problems and the generalized weak equations of the considered problems.
Keywords: Elasticity, Generalized weak equation, Coulomb's Law, Tresca's Law, Weak solution.

Résumé. L'objet de cette thèse de doctorat entre dans le cadre de la convergence asymptotique des différents problèmes des EDP en régime stationnaire ou dynamique dans des domaines bornés en 3D avec les conditions de frottement non linéaires de type Tresca ou de Coulomb sur le bord. Pour obtenir le but désiré, et après la formulation variationnelle de chaque problème en utilisant le changement d'échelle et des nouvelles inconnus pour mener l'étude sur un domaine ne dépend pas de ε. Enfin, on cherche des estimations a priori puis en passant à la limite, on obtient les problèmes limites et les équations faibles généralisées des problèmes considérés.
Mots-clés : Elasticité, Equations faible généralisée, Loi de Coulomb, Loi de Tresca, Solution faible.