

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة فرحات عباس، سطيف 1
Université Ferhat Abbas, Sétif 1

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Laboratoire de Mathématiques

Fondamentales et Numériques



كلية العلوم

قسم الرياضيات

مخبر الرياضيات الأساسية والعديدية

THÈSE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE DOCTORAT

DOMAINE : MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

SPÉCIALITÉ : Mathématiques Appliquées aux Sciences Biologiques et Médicales.

Présentée par :
Djellab Nadjate.

Thème

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ISSUS DE LA BIOLOGIE ET LA MÉDECINE

Soutenu Le: 20 / 10 / 2022

Devant le Jury composé de:

Nom et Prénom

Grade

| | | | |
|----------------------|-----|---|--------------|
| BENDJEDDOU Ahmed | Pr | Université Ferhat ABBAS, Sétif 1 | Président |
| BOUREGHDA Abdellatif | Pr | Université Ferhat ABBAS, Sétif 1 | Rapporteur |
| MESBAHI Salim | Pr | Université Ferhat ABBAS, Sétif 1 | Examinateur |
| KECHKAR Nasseridine | Pr | Université Frères Mentouri, Constantine 1 | Examinateur |
| BOUAKKAZ Ahlème | MCA | Université 20 Août 1955, Skikda | Examinatrice |

Année Universitaire : 2021-2022

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné assez de courage pour accomplir ce travail. Je tiens à remercier tout d'abord mon directeur de thèse Boureghda Abdellatif, professeur de mathématiques à l'Université Ferhat ABBAS Sétif 1, pour sa confiance et pour son aide, ses remarques, et ses conseils.

Je voudrais également remercier les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer ce travail.

Mes remerciements part aussi à toute l'équipe professorale de la faculté des sciences pour la qualité d'enseignement.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ma famille :
Mon père et ma mère, ma sœur Asmaa mes frères
Djaafer et Oussama.

À mon mari Mohamed pour son aide, pour ses
parents et ses sœurs.

À mes collègues qui m'ont accompagné dans le
parcours surtout mes amies Khaoula, Basma.

À tous ceux qui m'ont aidé directement ou
indirectement.

Pour tous ceux qui, à travers un mot, m'ont donné
la force de continuer ...

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Table des matières | v |
| Table des figures | vii |
| Liste des tableaux | viii |
| Introduction | 1 |
| 1 Problème de diffusion | 3 |
| 1.1 Problème : | 4 |
| 1.2 Développement Heuristique | 4 |
| 1.3 Conditions aux limites | 5 |
| 1.4 La condition de Neumann en 0 | 5 |
| 1.5 L'erreur de troncation | 6 |
| 1.6 Étude de la consistance du schéma explicite | 7 |
| 1.7 Stabilité pour le schéma de l'équation : | 9 |
| 1.8 Stabilité | 9 |
| 1.9 Critère de stabilité de Von Neumann | 10 |
| 1.10 Série de Fourier | 11 |
| 1.11 La condition de stabilité | 14 |
| 1.12 Discussion des résultats | 19 |
| 1.13 Stabilité pour le schéma de l'équation de diffusion | 20 |
| 1.14 Le procédure de calcul | 23 |
| 1.15 Conclusion | 24 |
| 2 Schéma des différences finies de DuFort-Frankel pour la résolution du problème de diffusion de l'oxygène | 27 |
| 2.1 Formulation physique | 28 |
| 2.2 Solution à court instant | 29 |
| 2.3 Schéma numérique | 30 |
| 2.4 Solution numérique | 31 |
| 2.5 Conclusion | 34 |
| 3 Un modèle à frontière mobile pour la diffusion de l'oxygène dans une cellule malade | 37 |
| 3.1 Introduction | 38 |
| 3.2 Modèle physique | 39 |
| 3.3 Un commentaire sur l'article de Seval Çatal | 39 |

| | | |
|-----|-------------------------------|-----------|
| 3.4 | Méthode de solution | 41 |
| 3.5 | conclusion | 48 |
| | Bibliographie | 50 |

Table des figures

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Evolution temporelle de u . | 18 |
| 1.2 | Le paramètre de stabilité. | 18 |
| 2.1 | Distributions de concentration pour $t = 0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05$. | 30 |
| 2.2 | Grille fixe | 32 |
| 2.3 | Distribution de la concentration pour l'état stationnaire ($t = 0$) pour $t = 0.06, 0.08, 0.10, 0.14, 0.18$. | 33 |
| 2.4 | Position de la frontière mobile par rapport au temps en utilisant les valeurs de la table 2.5 | 34 |
| 3.1 | Représentation de la diffusion de l'oxygène dans la cellule, la figure ci-dessus représente la première étape où l'oxygène est inséré jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint. Dans la deuxième étape vers le bas la surface extérieure est scellée et l'oxygène se diffuse et est absorbé à travers le milieu. | 46 |
| 3.2 | Position de la frontière mobile par rapport au temps. | 47 |
| 3.3 | Distributions de concentration pour la surface fixe ($x = 0$) et pour $t \geq 0.051$. | 47 |
| 3.4 | Distributions de concentration à cinq moments différents. | 48 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Un calcul stable | 25 |
| 1.2 | Un calcul instable | 26 |
| 2.1 | Comparaison entre les solutions analytiques (2.6) et numériques en utilisant la présente méthode pour les petits temps. L'entrée supérieure correspond à la solution analytique et l'entrée inférieure aux solutions numériques. Valeurs de $10^6 u$ et $\delta x = 0.05$ | 35 |
| 2.2 | Les valeurs de $10^6 u$ et les positions de la frontière mobile. Pour chaque temps, l'entrée la plus haute correspond à la solution analytique approchée actuelle pour les petits temps (basée sur le développement de Fourier (2.6)), la deuxième à la méthode numérique actuelle ($\delta x = 0.1$), la troisième à la méthode actuelle et la plus basse à la méthode de Crank et Gupta [11] ($\delta x = 0.05$) | 36 |
| 3.1 | Comparaison de la position de la frontière mobile $s(t)$ | 44 |
| 3.2 | Chiffres comparatifs pour la concentration à la surface scellée $u(0, t)$ | 44 |
| 3.3 | Valeurs tabulées pour la frontière mobile $s(t)$ et la température à la surface scellée $u(0, t)$ | 45 |

Introduction

Notre travail est de rechercher des problèmes de type à frontière libre dans un domaine biologique ou médicale. Nous donnons d'abord une brève explication de ce qu'est le problème de la frontière libre. Il nous a semblé que cette question était trop large et vague. Une étude complète des problèmes à frontières libres dans les domaines biologiques ou médicaux a conforté le problème du lien interdisciplinaire entre les mathématiques et le domaine médical.

Notre souci n'est pas de faire ressortir les outils mathématiques utilisés dans les articles mais bien plus les résultats obtenus dans les travaux de recherches. On devait trouver des résultats et des domaines liés par une méthode mathématique peu connue du monde biologique et médical.

On remarquait qu'il existe très peu de bases de données mathématiques exactes ou dans une base de données multidisciplinaire, les mots par exemple frontière libre ou frontière mobile ont des significations complètement différentes. Il était donc difficile de mener une étude approfondie pour plus de détails voir [1, 2, 3]. On a choisi de nous concentrer sur l'étude de la diffusion de l'oxygène dans une cellule malade, puis d'élargir la recherche à d'autres problèmes connus ou découverts lors de notre recherche, de plus nous n'avons pas voulu approfondir les recherches qui ont été faites sur plusieurs différentes formulations mathématiques des problèmes à frontières mobiles, mais mettre en évidence les éléments nécessaires aux mathématiciens pour travailler sur ces domaines, car nous ne pouvons pas sélectionner les travaux de recherches les plus pertinents, il est nécessaire d'utiliser des astuces pour faire la sélection. Un problème à frontière libre est considéré comme un problème non linéaire, et peut être défini comme étant une équation aux dérivées partielles dont les inconnues sont comme suit :

- la fonction, solution proprement dite de l'équation. Cette fonction est bien définie sur un domaine connu. En général cette fonction représente une grandeur classique comme concentration, déplacement, température, pression...
- La partie du domaine dans laquelle la fonction inconnue satisfait une contrainte supplémentaire est déterminée par sa frontière.

- La partie de la frontière qui est inconnue est appelée frontière libre.

Le problème modèle est appelé problème de Stefan qui est par exemple comme un glaçon dans l'eau ou on remarque que la surface du glaçon change constamment.

Il paraît très important que parmi beaucoup de problèmes à frontière libre on trouve les problèmes de diffusion d'un gaz ou d'un liquide gaz, d'interface liquide-liquide, liquide-gaz, gaz-gaz, de lubrification, de cavitation, voir [4, 5].

Enfin nous remarquons qu'il est évident qu'on trouve de nombreux problèmes liés au corps humain peuvent apparaître comme des problèmes aux frontières libres, un domaine dans lequel les mathématiques peuvent contribuer à de nombreuses avancées médicales.

Notre travail se compose de trois chapitres homogènes et structurés quant à leurs objectifs, précédés par une introduction générale qui met en évidence l'art du sujet et les questions abordées. Le travail s'articule essentiellement sur quelques méthodes numériques et analytiques pour la résolution de problèmes d'équations aux dérivées partielles. La première méthode utilisée est basée sur les différences finies, or la deuxième méthode analytique approximative est obtenue par un polynôme de troisième et quatrième degré.

Dans le premier chapitre, on a construit une méthode numérique pour résoudre un problème de diffusion non-linéaire pour lequel il n'existe pas une méthode de résolution numérique satisfaisante. On a poursuivi la possibilité de solution numérique sur la base d'un schéma explicite de différence finie.

Dans le second chapitre, on a également consacré une partie à la présentation d'un schéma bien connu des différences finies de Dufort-Frankel pour résoudre le problème de diffusion de l'oxygène à l'intérieur d'un milieu qui est modélisé par un problème initial de valeurs aux frontières mobiles pour une équation aux dérivées partielles unidimensionnelle dépendant du temps.

Dans le troisième chapitre, nous avons traité la résolution numérique d'un problème à frontière mobile unidimensionnelle. Son objectif principal consiste à suivre la frontière mobile qui représente la profondeur de pénétration de l'oxygène à l'intérieur d'une cellule malade en trouvant une solution qui est obtenue par un polynôme de troisième degré et quatrième degré en utilisant la méthode d'intégrale. Le travail de chaque chapitre se termine par une conclusion avec un résumé des principaux résultats obtenus.

Chapitre 1

Problème de diffusion

Dans ce chapitre on construit une méthode numérique pour résoudre un problème de diffusion non linéaire pour lequel il n'existe pas une méthode de résolution numérique satisfaisante.

Les méthodes existantes, applicables à ce problème, sont du type implicite qui nécessitent la solution d'un système algébrique, tel que dans la plupart des cas c'est un système non linéaire à chaque niveau de temps.

Dans les problèmes de diffusion typique, on a remarqué que les valeur du temps T se situe entre quelques minutes et plusieurs heures tandis que le pas de temps est d'ordre 0.1 seconde ou moins. Un schéma implicite de différence finie nécessite généralement plus de temps d'ordinateur que ce qui est pratiqué dans de tels cas. Ces considérations semblent nous indiquer que nous devons poursuivre la possibilité de solution numérique sur la base d'un schéma explicite de différence finie.

Nous proposons dans ce chapitre un schéma explicite analogue à (1.1) et étudions son efficacité dans la résolution du problème non linéaire ci dessous. En particulier nous montrons que cette méthode a une erreur de troncature d'ordre $k + h^2$ et que pour certains coefficients de diffusion $\alpha(u)$ notre schéma explicite satisfait la condition de stabilité de Von Neumann avec restrictions relativement mineurs sur k et h .

Ces résultats sont illustrées par des exemples numériques.

1.1 Problème :

Mathématiquement le problème de diffusion non linéaire est définie sous la forme non dimensionnelle suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial(\alpha(u) \frac{\partial u}{\partial x})}{\partial x} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.1)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad x = 0 \quad , \quad x = 1 \quad (1.2)$$

et la condition initial a $t = 0$ est :

$$u = f(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1.3)$$

Le coefficient de diffusion $\alpha(u)$ est une fonction de u seule, supposée avoir une drivée bornée dans la région de la solution. La fonction initiale $f(x)$ est supposée satisfaire

$$0 \leq f(x) \leq 1 \quad (1.4)$$

1.2 Développement Heuristique

On transforme notre problème de diffusion non linéaire d'équations aux dérivées partielles (EDP) par des équations de différences finies (EDF). L'idée du traitement numérique d'une équation aux dérivées partielles est d'obtenir un bon schéma de discrétisation permettant d'avoir une erreur de troncature contrôlée et petite pour que la solution approchée tende vers la solution exacte.

Écrivant l'équation (1.1) sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \alpha(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.5)$$

Nous proposons d'approcher l'équation (1.5) par une équation aux différences finies : On exprime la dérivée première temporelle à l'aide des différences finies en avant et les dérivées secondes au moyen de différence centrale, la substitution correspondante des première dérivées est une combinaison de différence en arrière et en avant.

Il est bien connu que si l'on combine l'opérateur de différence avant :

$$\Delta U_i^n = U_i^{n+1} - U_i^n$$

avec l'opérateur de différence arrière :

$$\nabla U_i^n = U_i^n - U_i^{n-1}$$

On obtient l'opérateur de la différence centrale :

$$\delta^2 U_i^n = U_i^{n+1} - 2U_i^n + U_i^{n-1}$$

c'est-à-dire :

$$\nabla(\Delta U_i^n) = \Delta(\nabla U_i^n) = \delta^2 U_i^n \quad (1.6)$$

Finalement sur la base de nos remarques heuristiques nous proposons d'approximer (1.6) par l'équation aux différences finies suivante :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k} = \alpha'(U_i^n) \left(\frac{\Delta_x U_i^n}{h} \right) \left(\frac{\nabla_x U_i^n}{h} \right) + \alpha(U_i^n) \frac{\delta_x^2 U_i^n}{h^2} \quad (1.7)$$

Ce type de schéma de différence constitue la base de notre méthode explicite pour la résolution du problème aux limites présenté dans ce chapitre. Ce schéma est bien explicite puisqu'on calcule la solution à l'instant t_{n+1} à partir de la solution à l'instant t_n , il convient de mentionner que ce schéma en arrière et avant conserve une certaine symétrie qui se perd en utilisant l'une ou l'autre différence à l'exclusion de l'autre.

Remarque 1.1. La relation (1.7) permet de calculer explicitement la solution au temps t_{n+1} en fonction de la solution au temps t_n aux nœuds du maillage, sauf pour les deux nœuds d'extrémités $i = 0$ et $i = 1$ pour ces deux nœuds, on utilise les conditions aux limites.

1.3 Conditions aux limites

Dans notre problème on a un mélange des conditions de Dirichlet et de Neumann (Les conditions aux limites sont mixtes), on a une condition de Neumann en 0 et en 1, une condition de Dirichlet en 0.

Pour l'approximation des conditions aux limites on utilise les mêmes techniques précédentes [6]. On introduit des points de grille (x_{i-1}, t_n) à gauche de la ligne $x = 0$ et (x_{i+1}, t_n) à la droite de la ligne $x = 1$.

1.4 La condition de Neumann en 0

On effectue un développement de Taylor en 0 (différence en arrière) on aura :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t_n) = \frac{u_0^n - u_{-1}^n}{h} = 0 \quad (1.8)$$

la condition de Neumann au long de la limite droite : on effectue un développement de Taylor au long de la limite droite (différence en avant) on aura :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(J, t_n) = \frac{u_{J+1}^n - u_J^n}{h} = 0 \quad (1.9)$$

ces conditions sont combinées avec l'équation aux différences (1.7) pour formuler l'analogie algébrique de notre problème aux limites.

La condition de Dirichlet en $t = 0$ nous donne :

$$U_i^0 = f(x_i), i = 0, 1, \dots, J \quad (1.10)$$

Alors

$$U_0^{n+1} = U_0^n + \bar{\alpha}(U_0^n)(\Delta U_0^n) \quad (1.11)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \bar{\alpha}(U_i^n)(\delta^2 U_i^n) + \bar{\alpha}'(U_i^n)(\Delta U_i^n)(\nabla U_i^n) \quad \text{avec } i = 1, \dots, J-1 \quad (1.12)$$

$$U_J^{n+1} = U_J^n - \bar{\alpha}(U_J^n)(\nabla U_J^n) \quad (1.13)$$

tel que

$$\bar{\alpha}(u) = \frac{k}{h^2} \alpha(u) \quad (1.14)$$

et

$$\bar{\alpha}'(u) = \frac{k}{h^2} \alpha'(u) \quad (1.15)$$

La solution numérique est alors obtenue en calculant U_i^{n+1} récursivement pour $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ par l'utilisation de (1.11), (1.12) et (1.13)

1.5 L'erreur de troncature

Nous tournons maintenant notre attention vers une étude quantitative de l'approximation faite en remplaçant le problème aux limites (1.1), (1.2) et (1.3) par l'analogie algébrique (1.10), (1.11), (1.12) et (1.13).

Théorème 1.2. (LAX-RICHTMYER) *Ce qu'il faut, c'est la convergence de la solution de la méthode des différences finies, avec la solution de l'EDP. La convergence peut être compliquée et pas toujours possible mais la stabilité est plus facile de montrer, la stabilité est garantie que l'erreur d'arrondi ne détruit pas le calcul.*

L'importance des concepts de cohérence et de stabilité est vue dans le théorème d'équivalence de Lax-Richtmyer, qui est le théorème fondamental de la théorie des schémas aux différences finies pour le problème des valeurs initiales.

Théorème 1.3. *Un schéma aux différences finies cohérent (Consistance) pour une EDP pour laquelle le problème de la valeur est bien posé est convergent si et seulement s'il est stable.*

1.6 Étude de la consistance du schéma explicite

La consistance distingue la façon dont l'équation avec des différences finies s'approche de l'équation aux dérivées partielles.

La consistance : un schéma aux différences finies est consistant à l'équation exacte si l'EDF tend vers l'EDP lorsque les pas de discrétisation en temps et en espace tendent vers zéro indépendamment. Suivant Richtmeyer et Williamson [6], [7].

Nous définissons l'erreur de troncature de (1.7) comme suit :

$$E_t = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \alpha(u_i^n) \frac{\delta_x^2 u_i^n}{h^2} - \alpha'(u_i^n) \left(\frac{\Delta_x u_i^n}{h} \right) \left(\frac{\nabla_x u_i^n}{h} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n + \alpha(u_i^n) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n + \alpha'(u_i^n) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n \right]^2 \quad (1.16)$$

Pour calculer cette erreur de troncature ce dessus on exprime toute les quantités en fonction de U_i^n (la solution exacte aux nœuds du maillage) en effectuant des développements en série de Taylor au voisinage du point (ih, nk) .

Nous portons maintenant notre attention à une étude quantitative de l'approximation faite en remplaçant le problème aux limites (1.1), (1.2), (1.3) par l'analogie algébrique (1.10), (1.11), (1.12) et (1.13).

Pour toute fonction $U(x, t)$ ayant des dérivées continues de quatrième ordre dans la région de la solution nous obtenons du théorème de Taylor [8] :

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n + \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} \frac{k}{2} \\ \frac{\Delta u_i^n}{h} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n \frac{h}{2} + \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^3} \frac{h^2}{6} \\ \frac{\nabla u_i^n}{h} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n \frac{h}{2} + \frac{\partial^3 u^{**}}{\partial x^3} \frac{h^2}{6} \\ \frac{\delta^2 u_i^n}{h^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n + \frac{\partial^4 u^*}{\partial x^4} \frac{h^2}{12} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Où $\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^3 u^*}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 u^{**}}{\partial x^3}$ et $\frac{\partial^4 u^*}{\partial x^4}$ représentent les dérivées indiquées évaluées aux points de valeur moyenne appropriés.

Pour des raisons de commodité, nous supposons que toutes les dérivées non indiquées comme évaluations de valeur moyennes sont évaluées aux points (x_i, t_n) et nous supprimons l'indication explicite de dépendance sur u de $\alpha(u)$ et $\alpha'(u)$. Les substitutions indiquées par (1.17) impliquent :

$$E_t = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} - \alpha(u) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u^*}{\partial x^4} \right) - \alpha'(u) \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^3 u^{**}}{\partial x^3} + \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h^2}{4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^3 u^{**}}{\partial x^3} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^3} - \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^3} + \frac{h^4}{16} \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^3} \frac{\partial^3 u^{**}}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \alpha(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Nous combinons les termes similaires pour obtenir :

$$E_t = \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} + h^2 \left(\alpha' \frac{h}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^3 u^*}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u^{**}}{\partial x^3} \right) - \alpha' \frac{h^2}{36} \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^3} \frac{\partial^3 u^{**}}{\partial x^3} - \alpha' \left(\frac{1}{6} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 u^*}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u^{**}}{\partial x^3} \right) - \left(\frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)^2 \right) - \frac{\alpha}{12} \frac{\partial^4 u^*}{\partial x^4} \right) \quad (1.18)$$

Nous avons donc pour les bornes appropriés N_1 et N_2 :

$$E_t = N_1 k + N_2 h^2 \quad (1.19)$$

En notation d'ordre : $E_t = O(k + h^2)$.

Par un raisonnement similaire on peut montrer que les approximations utilisées aux frontières ont des erreurs de troncature de même ordre. Nous illustrons l'argument en montrant que E_0 l'erreur de troncature à la frontière gauche (1.2) est d'ordre $k + h^2$.

$$E_0 = \frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{k} - \alpha \frac{u_1^n - u_0^n}{h^2} - \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.20)$$

Nous utilisons les substitutions appropriés de (1.17) pour obtenir :

$$E_0 = \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{h} \left[\frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^3} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial^4 u^*}{\partial x^4} \right]$$

Nous avons utilisé la condition aux limites $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0^n = 0$ pour obtenir l'expression entre parenthèses. La même condition aux limites (1.2) implique :

$$\frac{u_0^n - u_{-1}^n}{h} = -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^3} - \frac{h^3}{24} \frac{\partial^4 u^{**}}{\partial x^4}$$

D'après la condition (1.8) on aura :

$$\frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial^4 u^*}{\partial x^4}$$

Alors

$$E_0 = \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} - \frac{\alpha h^2}{24} \left(\frac{\partial^4 u^{**}}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u^*}{\partial x^4} \right)$$

Donc nous avons :

$$E_0 = O(k + h^2) \quad (1.21)$$

Un argument symétrique montre que E_1 l'erreur de troncature de l'approximation utilisée à la frontière droite satisfait aussi :

$$E_1 = O(k + h^2) \quad (1.22)$$

Le fait que l'erreur de troncature soit d'ordre un ou plus dans chaque taille de maille signifie que le problème continu (1.1) et son analogue discret proposé dans la section 1.2 sont proches pour les petites valeurs de k et h . L'espoir est que les solutions seront également proches.

On remarque que l'étape suivante consiste à étudier les effets du calcul de la solution à partir de l'analogue algébrique et l'analyse de stabilité est entrepris dans ce qui suit :

1.7 Stabilité pour le schéma de l'équation :

On doit s'assurer que la solution discrète obtenue par un schéma aux différences finies donne une représentation correcte de la solution de l'EDP. Suivant le processus de discrétisation, l'analyse de stabilité est nécessaire, en particulier lorsqu'il s'agit d'une équation de différence explicite.

Ceci nous permet de s'assurer que l'équation conduit ou non à une solution stable.

Ces calculs sont effectués sur des ordinateurs avec une précision finie, il y a aussi des erreurs d'arrondi lors d'un calcul itératif. Le but de l'étude de stabilité est donc de déterminer quelle est l'implication des erreurs (Perturbations).

1.8 Stabilité

Un système ou un schéma est dite stable si les erreurs d'arrondi ou les perturbations de la solution numérique ne sont pas amplifiées au cours des itérations.

1.8.1 Discussion : Non linéarité

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \alpha(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.23)$$

et l'équation de différence correspondante :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \alpha'(u) \left(\frac{\Delta u_i^n}{h} \right) \left(\frac{\nabla u_i^n}{h} \right) - \alpha(u) \frac{\delta^2 u_i^n}{h^2} = 0 \quad (1.24)$$

On s'écarte du comportement linéaire de deux manières comme suit :

Il y a d'abord la présence de $\alpha(u)$ et de sa dérivée $\alpha'(u)$. Dans les problèmes de diffusion α est généralement un polynôme et donc ces fonctions donnent lieu à des produits de u et de ses dérivées.

La deuxième source de non-linéarité est le carré de la dérivée première de u par rapport à x dans (1.23).

Nous rappelons que ce terme nous a conduit à introduire le schéma de différence en avant et en arrière (avancé retardé) et apparaît en (1.24) comme le produit de différences.

Dans notre analyse de ces équations, nous traiterons ces deux sources de non-linéarité séparément.

Tout d'abord, nous considérons une équation simple impliquant uniquement la dernière source de comportement non-linéaire.

Considérons l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = 0 \quad (1.25)$$

et l'analogue de différence arrière-avant correspondant :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \gamma \frac{\delta^2 u_i^n}{h^2} - \beta \left(\frac{\Delta u_i^n}{h} \right) \left(\frac{\nabla u_i^n}{h} \right) = 0 \quad (1.26)$$

avec $\gamma = \alpha(u)$ et $\beta = \alpha'(u)$ sont constants. Ces équations ne contiennent que les effets non linéaires du terme de première dérivée dans (1.23) et par conséquent simplifier l'analyse de stabilité.

1.9 Critère de stabilité de Von Neumann

L'analyse de stabilité de Von Neumann est basée sur la décomposition des erreurs numériques des approximations en séries de Fourier, bien que cette méthode ne saisisse pas l'influence des conditions aux limites.

Nous écrivons d'abord (1.26) sous la forme de calcul :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \bar{\gamma}(\delta^2 u_i^n) + \bar{\beta}(\Delta u_i^n)(\nabla u_i^n) \quad (1.27)$$

où

$$\bar{\gamma} = \frac{k}{h^2}\gamma \text{ et } \bar{\beta} = \frac{k}{h^2}\beta$$

Suivant la technique introduite par Von Neumann et récemment utilisée par Williamson [6], pour analyser la stabilité des analogues aux différences finies pour diverses équations aux dérivées partielles linéaires, nous supposons que la solution de l'équation aux différences (1.27) a une représentation en série de Fourier.

1.10 Série de Fourier

Pour une fonction u continue de période $T = 2\pi$. On suppose que $\int_I |u| dt$ converge sur un intervalle I de longueur T .

On appelle série de Fourier associée à u , la série trigonométrique :

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{imt}$$

On appelle coefficients de Fourier exponentiels du u , les nombres complexes définis par :

$$C_m = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-imt}$$

Remarque 1.4. Il est possible dans certains cas, de faire de tels développements pour des fonctions quelconques. Soit u une fonction non périodique définie sur l'intervalle $[a, b]$ et f une fonction périodique de période $T \geq a - b$ telle que la restriction $f_{[a,b]} = u$

L'équation (1.27) a une représentation comme série de Fourier sous la forme :

$$u_i^n = u(ih, nk) = \sum_{m=1}^{\infty} u(n, m) e^{jmxi}$$

Afin de remplacer ceci dans (1.27) nous avons besoin des produits Cauchy suivants :

$$u_{i+1}^n u_i^n = \sum_{m=1}^{\infty} u(n, m) e^{jmxi+1} \sum_{p=1}^{\infty} u(n, p) e^{jpxi}$$

On a $x_{i+1} = x_i + h$ alors :

$$u_{i+1}^n u_i^n = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} u(n, m) u(n, p) e^{j[x_i(m+p)+mh]}$$

$$u_i^n u_i^n = \sum_{m=1}^{\infty} u(n, m) e^{jmxi} \sum_{p=1}^{\infty} u(n, p) e^{jpxi} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} u(n, m) u(n, p) e^{j[x_i(m+p)]}$$

$$u_{i+1}^n u_{i-1}^n = \sum_{m=1}^{\infty} u(n, m) e^{jm x_{i+1}} \sum_{p=1}^{\infty} u(n, p) e^{j p x_{i-1}}$$

On a aussi $x_{i-1} = x_i - h$ alors :

$$u_{i+1}^n u_{i-1}^n = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} u(n, m) u(n, p) e^{j[x_i(m+p)+h(m-p)]}$$

$$u_i^n u_{i-1}^n = \sum_{m=1}^{\infty} u(n, m) e^{j m x_i} \sum_{p=1}^{\infty} u(n, p) e^{j p x_{i-1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} u(n, m) u(n, p) e^{j[(m+p)x_i - p h]}$$

L'expansion du produit des différences dans (1.27) donne :

$$(\Delta u_i^n)(\nabla u_i^n) = (u_{i+1}^n - u_i^n)(u_i^n - u_{i-1}^n) = u_{i+1}^n u_i^n - (u_i^n)^2 - u_{i+1}^n u_{i-1}^n + u_i^n u_{i-1}^n$$

nous substituons les produits de Cauchy ci-dessus dans (1.27) pour obtenir :

$$u_i^{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} u(n, m) e^{j m x_i} + \bar{\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} u(n, m) (e^{j m(x_i+h)} - 2e^{j m x_i} + e^{j m(x_i-h)}) + \bar{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} u(n, m) u(n, p) (e^{j[x_i(m+p)+m h]} - e^{j[(m+p)x_i]} + e^{j[(m+p)x_i - p h]} - e^{j[x_i(m+p)]} e^{j h(m-p)})$$

$$u_i^{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} u(n, m) e^{j m x_i} + \bar{\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} u(n, m) e^{j m x_i} (e^{j m h} - 2 + e^{-j m h}) + \bar{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} u(n, m) u(n, p) e^{j x_i(m+p)} (e^{j m h} - 1 + e^{-j p h} - e^{j h(m-p)})$$

En posant $a = m h$ et en utilisant la relation trigonométrique $\cos(a) = \frac{e^{j a} + e^{-j a}}{2}$ l'équation devient :

$$u_i^{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} u(n, m) e^{j m x_i} + \bar{\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} u(n, m) e^{j m x_i} [2\cos(a) - 2] + \bar{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} u(n, m) u(n, p) e^{j x_i(m+p)} [e^{j m h} - 1 + e^{-j p h} - e^{j h(m-p)}]$$

$$u_i^{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} u(n, m) e^{j m x_i} + 2\bar{\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} u(n, m) e^{j m x_i} [\cos(a) - 1] + \bar{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} u(n, m) u(n, p) e^{j x_i(m+p)} [e^{j m h} - 1][1 - e^{-j h p}]$$

Nous fixons maintenant m et examinons le terme général dans cette série pour tout m :

$$u(n+1, m)e^{jmxi} = u(n, m)e^{jmxi} [1 + 2\bar{A}(\cos(a) - 1) + \bar{\beta} \sum_p^{\infty} u(n, p)(e^{jmh} - 1)(e^{jxi p} - e^{jp(x_i-h)})]$$

Alors :

$$u(n+1, m) = [1 + 2\bar{\gamma}(\cos(a) - 1) + \bar{\beta} \sum_p^{\infty} u(n, p)e^{jxi p}(e^{ja} - 1)(1 - e^{-jph})]u(n, m) \quad (1.28)$$

Le coefficient de $u(n, m)$ sur le coté droit de cette équation est appelé facteur d'amplification. Ce facteur détermine la quantité d'amplification des coefficients $u(n, m)$ lorsque nous passons du n ième niveau de temps au $(n+1)$ ième niveau de temps dans le calcul de la solution (1.27). Le critère de stabilité de Von Neumann exige que ces facteurs d'amplification soient limités par un en magnitude pour tous les m . Cette condition garantit qu'aucun composant de la solution ne peut croître en raison du processus de calcul.

On a $e^{ja} = \cos(a) + jsin(a)$ donc l'équation (1.28) peut également être écrite :

$$u(n+1, m) = u(n, m) [1 + 2\bar{\gamma}(\cos(a) - 1) + \bar{\beta}(\cos(a) + jsin(a) - 1) \left(\sum_p^{\infty} u(n, p)e^{jxi p} - \sum_p^{\infty} u(n, p)e^{j(x_i-h)p} \right)]$$

donc

$$\begin{aligned} u(n+1, m) &= u(n, m) [1 + 2\bar{\gamma}(\cos(a) - 1) + \bar{\beta}(\cos(a) + jsin(a) - 1)(u_i^n - u_{i-1}^n)] \\ &= u(n, m) [1 + 2\bar{\gamma}(\cos(a) - 1) + \bar{\beta}\nabla u_i^n(\cos(a) - 1) + j\bar{\beta}\nabla u_i^n sin(a)] \end{aligned}$$

et

$$G = 1 + 2\bar{\gamma}(\cos(a) - 1) + \bar{\beta}\nabla u_i^n(\cos(a) - 1) + j\bar{\beta}\nabla u_i^n sin(a) \quad (1.29)$$

si l'amplitude $u(n, m)$ de la perturbation diminue d'une itération à l'autre, l'erreur diminue et la perturbation finit par disparaître. Cela entraîne la condition :

$$|G| = \left| \frac{u(n+1, m)}{u(n, m)} \right| = |1 + 2\bar{\gamma}(\cos(a) - 1) + \bar{\beta}\nabla u_i^n(\cos(a) - 1) + j\bar{\beta}\nabla u_i^n sin(a)| \leq 1$$

Remarque 1.5. Au cas où le problème impliquerait des coefficients variables, des non-linéarités et des conditions aux limites compliquées. Dans de tel cas, l'analyse de Von Neumann ne peut être appliquée que localement. De plus, en raison de la base sur l'analyse de Fourier, la méthode n'est strictement valable que pour les points intérieurs, c'est-à-dire à l'exclusion des conditions aux limites.

1.11 La condition de stabilité

Théorème 1.6. Si :

1. $\bar{\gamma}^2 + \bar{\gamma}\bar{\beta}\nabla u_i^n > 0$
2. $0 \leq 2\bar{\gamma} + \bar{\beta}\nabla u_i^n \leq 1$

Pour chaque i à un n ième niveau de temps, alors (1.27) satisfait le critère de stabilité de Von Neumann pour le calcul de la solution au $(n + 1)$ ième niveau de temps.

Démonstration. Pour le nombre complexe G définie par (1.29), la condition $|G| \leq 1$ est équivalente à $|G|^2 \leq 1$.

Si nous développons $|G|^2$ et imposons cette condition :

$$|G|^2 = |1 + 2\bar{\gamma}(\cos(a) - 1) + \bar{\beta}\nabla u_i^n(\cos(a) - 1) + j\bar{\beta}\nabla u_i^n \sin(a)|^2 \leq 1$$

$$[1 + 2\bar{\gamma}(\cos(a) - 1) + \bar{\beta}\nabla u_i^n(\cos(a) - 1) + 2\bar{\gamma}(\cos(a) - 1) + 4\bar{\gamma}^2(\cos(a) - 1)^2 + 2\bar{\gamma}\bar{\beta}\nabla u_i^n(\cos(a) - 1)^2 + \bar{\beta}\nabla u_i^n(\cos(a) - 1) + 2\bar{\gamma}\bar{\beta}(\cos(a) - 1)^2 + \bar{\beta}^2(\nabla u_i^n)^2(\cos(a) - 1)^2 + \bar{\beta}^2 \sin^2(a)] \leq 1$$

$$\cos(a)[2\bar{\gamma} + \bar{\beta}\nabla u_i^n + 2\bar{\gamma} - 8\bar{\gamma}^2 - 4\bar{\gamma}\bar{\beta}\nabla u_i^n + \bar{\beta}\nabla u_i^n - 4\bar{\gamma}\bar{\beta}\nabla u_i^n - 2\bar{\beta}^2(\nabla u_i^n)^2] + \cos^2(a)[4\bar{\gamma}^2 + 4\bar{\gamma}\bar{\beta}\nabla u_i^n + \bar{\beta}^2(\nabla u_i^n)^2] - 2\bar{\gamma} - 2\bar{\beta}\nabla u_i^n - 2\bar{\gamma} + 4\bar{\gamma}^2 + 4\bar{\gamma}\bar{\beta}\nabla u_i^n + \bar{\beta}^2(\nabla u_i^n)^2 + \bar{\beta}^2(\nabla u_i^n)^2 \sin^2(a) \leq 0$$

On a $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$ on trouve :

$$\begin{aligned} & [4\bar{\gamma}^2 + 4\bar{\gamma}\bar{\beta}\nabla u_i^n] \cos^2(a) + [4\bar{\gamma} + 2\bar{\beta}\nabla u_i^n - 2\bar{\beta}^2(\nabla u_i^n)^2 - 8\bar{\gamma}^2 - 8\bar{\gamma}\bar{\beta}\nabla u_i^n] \cos(a) + 4\bar{\gamma}^2 \\ & - 4\bar{\gamma} - 2\bar{\beta}\nabla u_i^n + 4\bar{\gamma}\bar{\beta}\nabla u_i^n + 2\bar{\beta}^2(\nabla u_i^n)^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

Définir

$$M = [4\bar{\gamma}^2 + 4\bar{\gamma}\bar{\beta}\nabla u_i^n]$$

et

$$P = 4\bar{\gamma} + 2\bar{\beta}\nabla u_i^n - 2\bar{\beta}^2(\nabla u_i^n)^2$$

Avec ces substitutions, la condition (1.30) prend la forme :

$$\begin{aligned} M\cos^2(a) + (P - 2M)\cos(a) + M - P &\leq 0 \\ \cos(a)(M\cos(a) + P - M) - M\cos(a) + M - P &\leq 0 \end{aligned}$$

qui s'écrit comme suit :

$$(M\cos(a) + P - M)(\cos(a) - 1) \leq 0$$

C'est clair que le second facteur n'est pas positif car $\cos(a) \leq 1$, donc cette condition est équivalente à :

$$M\cos(a) + P - M \geq 0$$

On a $M > 0$ donc :

$$\cos(a) \geq 1 - \frac{P}{M} \tag{1.31}$$

Puisque $\cos(a) \geq -1$, nous pouvons assurer la condition (1.31) en exigeant

$$-1 \geq 1 - \frac{P}{M}$$

Ce qui équivaut à :

$$\frac{P}{2} - M \geq 0$$

D'après la définition de M et P on a :

$$\begin{aligned} \frac{4\bar{\gamma} + 2\bar{\beta}\nabla u_i^n - 2\bar{\beta}^2(\nabla u_i^n)^2}{4\bar{\gamma}^2 + 4\bar{\gamma}\bar{\beta}\nabla u_i^n} &\geq 2 \\ 2\bar{\gamma} + \bar{\beta}\nabla u_i^n - \bar{\beta}^2(\nabla u_i^n)^2 - 4\bar{\gamma}^2 - 4\bar{\gamma}\bar{\beta}\nabla u_i^n &\geq 0 \\ 2\bar{\gamma} + \bar{\beta}\nabla u_i^n - (2\bar{\gamma} + \bar{\beta}\nabla u_i^n)^2 &\geq 0 \\ (2\bar{\gamma} + \bar{\beta}\nabla u_i^n)(1 - 2\bar{\gamma} - \bar{\beta}\nabla u_i^n) &\geq 0 \end{aligned}$$

L'hypothèse que ces deux facteurs sont négatifs conduit à une contradiction, les deux facteurs seront positifs si :

$$2\bar{\gamma} + \bar{\beta}\nabla u_i^n \geq 0$$

$$1 - 2\bar{\gamma} - \bar{\beta}\nabla u_i^n \geq 0$$

Alors

$$0 \leq 2\bar{\gamma} + \bar{\beta}\nabla u_i^n \leq 1 \quad (1.32)$$

Cet argument peut maintenant être inversé. Nous voyons que (1.32) assure que (1.31) tient ce qui à son retour implique (1.30) et le théorème est prouvé. \square

Un commentaire sur l'hypothèse (1) semble être en ordre. Dans les problèmes réels $\bar{\gamma}$ et $\bar{\beta}$ sont généralement de la même amplitude approximative tandis que ∇u_i^n est inférieur à un en amplitude, généralement inférieur à 0.5. Le terme $\bar{\alpha}'^2$ est bien sur positif, donc l'hypothèse semble très raisonnable. Nous notons que la condition de stabilité (1.32) implique la solution u .

Ceci est une conséquence directe de la nature non linéaire de l'équation que nous résolvons. Une telle dépendance des conditions de stabilité à la solution inconnue ne se produit pas dans les problèmes linéaires.

Exemple :

Pour illustrer l'application du théorème 1.6 nous considérons l'équation différentielle suivante.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

avec les conditions aux limites :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } x = 0 \quad \text{et } x = 1$$

Un problème algébrique se compose des équations aux différences correspondantes :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{k}{h^2}\delta^2 u_i^n + \frac{k}{h^2}(\nabla u_i^n)(\Delta u_i^n)$$

Pour $x = 0$ on a $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ alors $\frac{u_0^n - u_{-1}^n}{h} = 0$ donc $u_0^n = u_{-1}^n$

Pour $x = 1$ on a aussi $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ alors $\frac{u_3^n - u_2^n}{h} = 0$ donc $u_3^n = u_2^n$

Remarque 1.7. Dans ce cas on s'est arrêté à l'étape $i = 3$ car notre intervalle $[0, 1]$ est séparé par $h = 0.5$

Pour $i = 0$ on a :

$$u_0^{n+1} = u_0^n + \frac{k}{h^2}(u_1^n - 2u_0^n + u_{-1}^n) + \frac{k}{h^2}(u_1^n - u_0^n)(u_0^n - u_{-1}^n) = u_0^n + \frac{k}{h^2}(u_1^n - u_0^n)$$

donc on trouve : $u_0^{n+1} = u_0^n + \frac{k}{h^2} \nabla u_1^n$

Pour $i = 1$ on a : $u_1^{n+1} = u_1^n + \frac{k}{h^2} \delta^2 u_1^n + \frac{k}{h^2} (\Delta u_1^n) (\nabla u_1^n)$

Pour $i = 2$ on a : $u_2^{n+1} = u_2^n - \frac{k}{h^2} (\Delta u_1^n)$

Le problème algébrique se compose pour $k = 0.1$ et $h = 0.5$ des équations aux différences

$$u_0^{n+1} = u_0^n + 0.4 \nabla u_1^n$$

$$u_1^{n+1} = u_1^n + 0.4 \delta^2 u_1^n + 0.4 (\nabla u_1^n) (\Delta u_1^n)$$

$$u_2^{n+1} = u_2^n - 0.4 (\Delta u_1^n)$$

Pour les valeurs initiales $u_0^0 = 0$, $u_1^0 = 0.5$, $u_2^0 = 1$ nous utilisons un algorithme explicite :

Algorithme 1.8. Schéma Explicite

$k = 0.1$; $h = 0.5$; $r = k/h^2$;

$u(1, 1) = 0$; $u(2, 1) = 0.5$; $u(3, 1) = 1$;

for $n = 1 : N$ **do**

$u(1, n+1) = u(1, n) + r * [u(2, n) - u(1, n)]$;

$G(n) = 2 * r + r * [u(2, n) - u(1, n)]$;

$u(2, n+1) = u(2, n) + r * [u(3, n) - 2 * u(2, n) + u(1, n)] + r * [u(3, n) - u(2, n)] * [u(2, n) - u(1, n)]$;

$u(3, n+1) = u(3, n) - r * [u(3, n) - u(2, n)]$;

endfor

$disp('La valeur de u')$

$disp(u)$;

$disp('La valeur de G')$

$disp(G)$;

pour N égal à 33 on obtient :

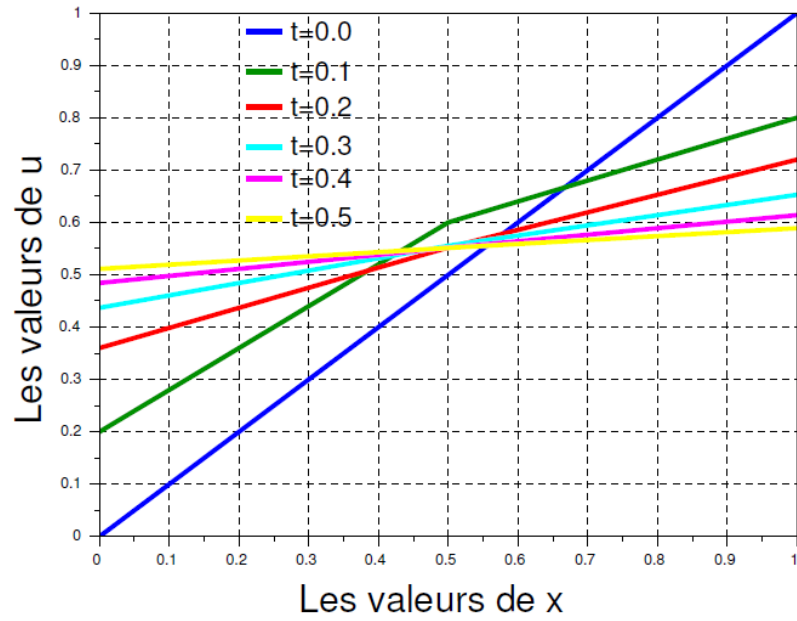
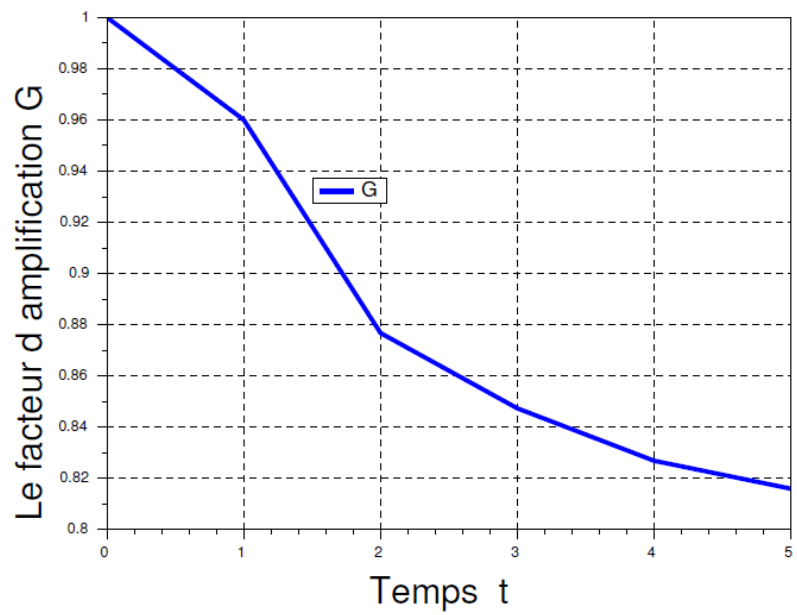
FIGURE 1.1 – Evolution temporelle de u .

FIGURE 1.2 – Le paramètre de stabilité.

1.12 Discussion des résultats

Nous remarquons pour chaque valeur de n à chaque instant de temps les perturbations ne sont pas amplifiées et le schéma explicite converge.

Le paramètre de stabilité G indique ici que la procédure de calcul est stable. La solution à l'exception pour l'oscillation initiale de la valeur de u_1^n se comporte d'une manière typique des processus de diffusion. Il s'installe progressivement à un état stable.

Si nous doublons maintenant le pas de temps, nous obtenons l'équations :

$$u_0^{n+1} = u_0^n + 0.8\nabla u_1^n$$

$$u_1^{n+1} = u_1^n + 0.8\delta^2 u_1^n + 0.8\Delta u_1^n \nabla u_1^n$$

$$u_2^{n+1} = u_2^n - 0.8\Delta u_1^n$$

Pour les mêmes valeurs initiales, nous utilisons un algorithme explicite :

Algorithme 1.9. Schéma Explicite

$k = 0.2; h = 0.5; r = k/h^2;$

$u(1, 1) = 0; u(2, 1) = 0.5; u(3, 1) = 1;$

for $n = 1 : N$ *do*

$u(1, n+1) = u(1, n) + r * [u(2, n) - u(1, n)];$

$G(n) = 2 * r + r * [u(2, n) - u(1, n)];$

$u(2, n+1) = u(2, n) + r * [u(3, n) - 2 * u(2, n) + u(1, n)] + r * [u(3, n) - u(2, n)] * [u(2, n) - u(1, n)];$

$u(3, n+1) = u(3, n) - r * [u(3, n) - u(2, n)];$

endfor

disp('La valeur de u')

disp(u);

disp('La valeur de G')

disp(G);

1.12.1 Résultat :

A l'opposé de notre premier calcul on remarque qu'il y a à chaque itération des oscillations en valeur. Le paramètre de stabilité indique un calcul instable et les résultats semblent le vérifier.

La nature oscillatoire et croissante des valeurs calculées est le type de comportement auquel nous attendons dans les procédures de calcul instables, il faut donc prendre un pas de temps petit.

Les résultats de cette partie indiquent que les non-linéarité du terme de la dérivée première peut être traité par calcul.

L'équation que nous avons traité (1.25) n'est pas une équation de diffusion. Afin de représenter un processus de diffusion, l'équation implique nécessairement le premier type de non-linéarité discuté dans la section 1.8.1 Car si le coefficient de diffusion est constant le terme faisant intervenir la dérivée première n'apparaît pas.

Dans la section suivante, nous étendons ces résultats à une équation de diffusion.

1.13 Stabilité pour le schéma de l'équation de diffusion

On remarque que le coefficient de diffusion $\alpha(u)$ est une propriété des matériaux en cours de diffusion dans tout problème physique. Dans cette section nous considérons une méthode de calcul pour résoudre l'équation de diffusion non-linéaire suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - (\gamma_1 u_i^n + \gamma_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.33)$$

ou γ_1 et γ_2 sont constants.

Différentiation décentrée retardée avancée pour (1.28) est :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \gamma_1 \left(\frac{\Delta u_i^n}{h} \right) \left(\frac{\nabla u_i^n}{h} \right) - (\gamma_1 u_i^n + \gamma_2) \frac{\delta^2 u_i^n}{h^2} = 0 \quad (1.34)$$

Pour l'analyse de stabilité, nous réécrivons cette équation sous la forme de calcul.

$$u_i^{n+1} - u_i^n - \bar{\gamma}_1 (\Delta u_i^n) (\nabla u_i^n) - (\bar{\gamma}_1 u_i^n + \bar{\gamma}_2) \delta^2 u_i^n = 0 \quad (1.35)$$

En associant le rapport $\frac{k}{h^2}$ avec les coefficients comme avant :

$$\bar{\gamma}_1 = \frac{k}{h^2} \gamma_1 \text{ et } \bar{\gamma}_2 = \frac{k}{h^2} \gamma_2$$

En suivant la même procédure d'écrite au dessus, nous supposons :

$$u_i^n = u(ih, nk) = \sum_{m=1}^{\infty} u(n, m) e^{jmxi}$$

Nous avons besoin du produit de Cauchy suivant :

$$u_i^n u_{i+1}^n = \sum_{m=1}^{\infty} u(n, m) e^{jmxi} \sum_{p=1}^{\infty} u(n, p) e^{jpx_{i+1}}$$

On a $x_{i+1} = x_i + h$ alors :

$$u_i^n u_{i+1}^n = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} u(n, m) u(n, p) e^{j[x_i(m+p)+ph]}$$

En remplaçant dans (1.35) on trouve :

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= \sum_{m=1}^{\infty} u(n, m) e^{jmxi} + \bar{\gamma}_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} u(n, m) u(n, p) [e^{j[(m+p)x_i+ph]} - 2e^{j(m+p)x_i} + e^{j[(m+p)x_i-ph]}] \\ &+ \bar{\gamma}_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} u(n, m) u(n, p) [e^{j[x_i(m+p)+mh]} - e^{j[(m+p)x_i]} + e^{j[(m+p)x_i-ph]} - e^{j[x_i(m+p)]} e^{jh(m-p)}] \\ &+ \bar{\gamma}_2 \sum_{m=1}^{\infty} u(n, m) [e^{jm(x_i+h)} - 2e^{jmxi} + e^{jm(x_i-h)}] \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= \sum_{m=1}^{\infty} u(n, m) e^{jmxi} + \bar{\gamma}_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} u(n, m) u(n, p) e^{j(m+p)x_i} [e^{jph} - 2 + e^{-jph}] + \bar{\gamma}_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} u(n, m) \\ &u(n, p) e^{j(m+p)x_i} [e^{jmh} - 1 - e^{j(m-p)h} + e^{-jph}] + \bar{\gamma}_2 \sum_{m=1}^{\infty} u(n, m) e^{jmxi} [2\cos(a) - 2] \end{aligned}$$

nous avons défini $mh - a = 0$

Le seul terme de cette équation qui n'apparaissait pas dans notre expansion de (1.27) est le premier terme impliquant $\bar{\gamma}_1$.

Les autres termes sont identiques à ceux analysés ci dessus. Un terme typique de ce développement a la forme.

$$\begin{aligned} u(n+1, m) e^{jmxi} &= u(n, m) e^{jmxi} + \bar{\gamma}_1 u(n, m) e^{jmxi} \sum_{p=1}^{\infty} u(n, p) e^{jpx_i} [e^{jph} - 2 + e^{-jph}] + 2\bar{\gamma}_2 u(n, m) e^{jmxi} (\cos(a) - \\ &1) + \bar{\gamma}_1 u(n, m) \nabla u_i^n e^{jmxi} (\cos(a) - 1) + i\bar{\gamma}_1 u(n, m) \nabla u_i^n e^{jmxi} \sin(a) \end{aligned}$$

Encore une fois, la somme qui reste peut être interprétée au moyen de l'expansion originale comme une différence de la solution. Le facteur exponentiel se divise et nous obtenons maintenant :

$$u(n+1, m) = [1 + 2\bar{\gamma}_2(\cos(a) - 1) + \bar{\gamma}_1\delta^2 u_i^n + \bar{\gamma}_1\nabla u_i^n(\cos(a) - 1) + i\bar{\gamma}_1\nabla u_i^n \sin(a)] u(n, m) \quad (1.36)$$

Le facteur d'amplification pour (1.35) est :

$$G = 1 + 2\bar{\gamma}_2(\cos(a) - 1) + \bar{\gamma}_1\delta^2 u_i^n + \bar{\gamma}_1\nabla u_i^n(\cos(a) - 1) + i\bar{\gamma}_1\nabla u_i^n \sin(a) \quad (1.37)$$

Nous somme intéressés par la condition $|G| \leq 1$ ou de façon équivalente $|G|^2 \leq 1$.

si nous développons la magnitude de G et collectons les termes, nous obtenons l'expression :

$$|G|^2 = [1 + 2\bar{\gamma}_2(\cos(a) - 1) + \bar{\gamma}_1\delta^2 u_i^n + \bar{\gamma}_1\nabla u_i^n(\cos(a) - 1)]^2 + [\bar{\gamma}_1\nabla u_i^n \sin(a)]^2 \leq 1$$

Donc :

$$|G|^2 = 1 + 4\bar{\gamma}_2^2(\cos(a) - 1)^2 + 4\bar{\gamma}_2(\cos(a) - 1) + \bar{\gamma}_1^2\delta^4(u_i^n)^2 + 2\bar{\gamma}_1\delta^2 u_i^n + 4\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2\delta^2(\cos(a) - 1) + \bar{\gamma}_1^2(\nabla u_i^n)^2(\cos(a) - 1)^2 + 2\bar{\gamma}_1\nabla u_i^n(\cos(a) - 1) + 4\bar{\gamma}_2\bar{\gamma}_2\nabla u_i^n(\cos(a) - 1)^2 + 2\bar{\gamma}_1^2\delta^2 u_i^n \nabla u_i^n(\cos(a) - 1) + \bar{\gamma}_1^2(\nabla u_i^n)^2(\sin(a))^2 \leq 1$$

$$|G|^2 = 1 + 4\bar{\gamma}_2^2 \cos^2(a) + 4\bar{\gamma}_2^2 - 8\bar{\gamma}_2^2 \cos(a) + 4\bar{\gamma}_2 \cos(a) - 4\bar{\gamma}_2 + \bar{\gamma}_1^2 \delta^4 (u_i^n)^2 + 2\bar{\gamma}_1 \delta^2 u_i^n + 4\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 \delta^2 u_i^n \cos(a) - 4\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 \delta^2 u_i^n + \bar{\gamma}_1^2 (\nabla u_i^n)^2 \cos^2(a) + \bar{\gamma}_1^2 (\nabla u_i^n)^2 - 2\bar{\gamma}_1^2 (\nabla u_i^n)^2 \cos(a) + 2\bar{\gamma}_1 (\nabla u_i^n) \cos(a) - 2\bar{\gamma}_1 (\nabla u_i^n) + 4\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 (\nabla u_i^n) \cos^2(a) + 4\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 (\nabla u_i^n) - 8\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 \nabla u_i^n \cos(a) + 2\bar{\gamma}_1^2 \delta^2 u_i^n \nabla u_i^n \cos(a) - 2\bar{\gamma}_1^2 \delta^2 u_i^n \nabla u_i^n + \bar{\gamma}_1^2 (\nabla u_i^n)^2 \sin^2(a) \leq 1$$

$$|G|^2 = \cos^2(a)[4\bar{\gamma}_2^2 + 4\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2(\nabla u_i^n)] + \cos(a)[-8\bar{\gamma}_2^2 + 4\bar{\gamma}_2 + 4\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2\delta^2 u_i^n - 2\bar{\gamma}_1^2(\nabla u_i^n)^2 + 2\bar{\gamma}_1(\nabla u_i^n) - 8\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2\nabla u_i^n + 2\bar{\gamma}_1^2\delta^2 u_i^n \nabla u_i^n] + 1 + 4\bar{\gamma}_2^2 - 4\bar{\gamma}_2 + \bar{\gamma}_1^2\delta^4(u_i^n)^2 + 2\bar{\gamma}_1\delta^2 u_i^n - 4\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2\delta^2 u_i^n + 2\bar{\gamma}_1^2(\nabla u_i^n)^2 - 2\bar{\gamma}_1(\nabla u_i^n) + 4\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2(\nabla u_i^n) - 2\bar{\gamma}_1^2\delta^2 u_i^n \nabla u_i^n$$

Nous définitions :

$$L = 4\bar{\gamma}_2^2 + 4\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2\nabla u_i^n$$

$$N = 4\bar{\gamma}_2 + 2\bar{\gamma}_1\nabla u_i^n + 4\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2\delta^2 u_i^n - 2\bar{\gamma}_1^2(\nabla u_i^n)^2 + 2\bar{\gamma}_1^2(\nabla u_i^n)\delta^2 u_i^n$$

et imposons la condition de **Von-Neumann** pour obtenir :

$$L\cos^2(a) + (N - 2L)\cos(a) + \bar{\gamma}_1^2(\delta^2 u_i^n)^2 + 2\bar{\gamma}_1\delta^2 u_i^n + L - N \leq 0 \quad (1.38)$$

Malheureusement cette expression ne se prête pas à la procédure de factorisation utilisée dans la section ci dessus, cependant (1.38) fournit une condition de stabilité. Si nous considérons le côté gauche de (1.38) comme une fonction de $\cos(a)$, nous pouvons examiner la valeur maximale de cette fonction. En exigeant que ce maximum satisfasse la condition de Von-Neumann, nous obtenons un moyen de tester la stabilité d'un processus de calcul.

On a désigné le coefficient de $\cos^2(a)$ par L qui est similaire à la quantité M dans la preuve du théorème 1.6. On suppose que $L > 0$ et justifions cette hypothèse sur la base $\bar{\gamma}_1$ et $\bar{\gamma}_2$ sont susceptibles d'être du même ordre de magnitude et ∇u_i^n est presque certainement inférieur à un en magnitude.

Enfin sous cette hypothèse, le maximum doit se produire à l'un des points terminaux de l'intervalle $-1 \leq \cos(a) \leq 1$ et donc l'évaluation de la fonction à ces points conduit aux conditions suivantes.

$$4L - 2N + \bar{\gamma}_1^2(\delta^2 u_i^n)^2 + 2\bar{\gamma}_1 \delta^2 u_i^n \leq 0$$

$$\bar{\gamma}_1^2(\delta^2 u_i^n)^2 + 2\bar{\gamma}_1 \delta^2 u_i^n \leq 0$$

En termes de coefficients de l'équation

$$\begin{aligned} a16(\bar{\gamma}_2)^2 + 16(\bar{\gamma}_1)(\bar{\gamma}_2)\nabla u_i^n - 8(\bar{\gamma}_2) - 4(\bar{\gamma}_1)\nabla u_i^n + 4(\bar{\gamma}_1)^2(\nabla u_i^n)^2 - 8(\bar{\gamma}_1)(\bar{\gamma}_2)\delta^2 u_i^n \\ - 4(\bar{\gamma}_1)^2\nabla u_i^n \delta^2 u_i^n + (\bar{\gamma}_1)^2(\delta^2 u_i^n)^2 + 2(\bar{\gamma}_1)\delta^2 u_i^n \leq 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

et

$$(\bar{\gamma}_1)^2(\delta^2 u_i^n)^2 + 2\bar{\gamma}_1 \delta^2 u_i^n \leq 0 \quad (1.40)$$

Les conditions (1.39) et (1.40) fournissent les critères de stabilité pour le calcul de la solution (1.35).

1.14 Le procédure de calcul

Les conditions (1.39) et (1.40) et la condition (1.32) pour la stabilité de l'équation la plus simple impliquent la fonction solution dans la condition de stabilité.

Ceci est à prévoir car il est bien connu que la stabilité d'une équation non linéaire dépend de la solution elle même [6], [9], [10]

Les conditions de stabilité obtenues ici suggèrent que nous calculons les paramètres de stabilité à chaque niveau de temps lors du calcul de la solution.

Pour cette raison, il n'est pas possible de suivre la procédure de calcul habituellement utilisée dans la solution des équations linéaires. Dans le cas linéaire, nous choisissons

les maillages sur la base d'une condition de stabilité dépendant des coefficients de l'équation mais pas de la solution. Nous pouvons ensuite continuer tout au long de ce maillage fixe. La stabilité est donc à priori une condition pour les équations linéaires.

Nous savons avant d'obtenir la solution si le processus de calcul est stable ou non.

Les conditions de stabilité obtenues ici suggèrent une autre procédure. A savoir que nous calculons les paramètres de stabilité à chaque niveau de temps lors du calcul de la solution. Étant donné que les différences qui apparaissent dans les conditions de stabilité sont également nécessaires pour la solution de l'équation de différence, cela nécessiterait peu de temps d'ordinateur. Si ces paramètres de stabilité indiquent que la procédure de calcul devient instable, le pas de temps peut être diminué. Si d'autre part, la procédure est bien dans les limites de la stabilité on pourrait tenter d'augmenter le rythme de calcul en augmentant le pas de temps, ce type de processus n'est pas sans précédent.

Dans la solution numérique des équations différentielles ordinaires, il est courant de calculer à chaque pas de temps, un paramètre indicatif de la croissance d'erreur dans la solution. Le pas de temps est ajusté lors du calcul sur la base de ce paramètre. Si une croissance d'erreur est indiquée, le pas de temps est diminué. Si le pas de temps peut être augmenté sans sacrifier la précision, cela se fait. La procédure décrite ci-dessus pour les équations aux dérivées partielles est similaire, sauf que nous suivons la stabilité au lieu de l'erreur.

1.15 Conclusion

Nous notons en résumé que l'utilisation du schéma de différence en arrière et en avant a gagné un ordre de précision en h . L'utilisation de différence en arrière ou la différence en avant seule dans l'approximation de la dérivée première du terme (1.5) entraîne une erreur de troncature d'ordre $(k + h)$.

Dans la solution numérique des équations aux dérivées partielles, il est courant de calculer à chaque pas de temps, un paramètre indicatif de croissance d'erreur dans la solution.

On pourra exposer des schémas des différences similaires pour des équations non-linéaires plus générales et montrons qu'ils conduisent à des erreurs de troncature d'ordre $k^2 + h$

En plus la méthode explicite peut être appliquée pour résoudre un problème de diffusion non-linéaire sauf que nous n'utilisons un maillage non régulier, cela signifie que le pas de temps change car nous devons changer d'étape au cas où la stabilité n'existerait pas.

TABLE 1.1 – Un calcul stable

| n | u_0^n | u_1^n | u_2^n | $2\bar{\gamma} + \bar{\beta}\nabla u_1^n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|---|
| 0 | 0.0 | 0.5 | 1.0 | 1.0 |
| 1 | 0.2 | 0.6 | 0.8 | 0.96 |
| 2 | 0.36 | 0.5552 | 0.72 | 0.87808 |
| 3 | 0.4368 | 0.5553024 | 0.6528 | 0.8474010 |
| 4 | 0.484201 | 0.551522 | 0.613801 | 0.8269284 |
| 5 | 0.51113 | 0.555119 | 0.58889 | 0.8175956 |
| 6 | 0.528726 | 0.551626 | 0.575382 | 0.80916 |
| 7 | 0.537886 | 0.552186 | 0.56588 | 0.80572 |
| 8 | 0.54361 | 0.552022 | 0.560403 | 0.8033648 |
| 9 | 0.54675 | 0.55204 | 0.557051 | 0.802116 |
| 10 | 0.549001 | 0.55203 | 0.55505 | 0.8012116 |
| 11 | 0.550213 | 0.55203 | 0.553842 | 0.8007268 |
| 12 | 0.55094 | 0.55203 | 0.55312 | 0.800436 |
| 13 | 0.55138 | 0.552031 | 0.55284 | 0.8002604 |
| 14 | 0.55164 | 0.552032 | 0.552423 | 0.8001568 |
| 15 | 0.5518 | 0.55203 | 0.55227 | 0.800092 |
| 16 | 0.551892 | 0.552034 | 0.552174 | 0.8000568 |
| 17 | 0.551949 | 0.55207 | 0.552118 | 0.8000484 |
| 18 | 0.551997 | 0.55206 | 0.5520988 | 0.8000252 |
| 19 | 0.551998 | 0.5519903 | 0.5520833 | 0.7999969 |
| 20 | 0.551995 | 0.5520306 | 0.5520622 | 0.8000142 |
| 21 | 0.5520092 | 0.552029 | 0.5520496 | 0.8000079 |
| 22 | 0.5520171 | 0.5520293 | 0.5520414 | 0.8000049 |
| 23 | 0.552022 | 0.5520293 | 0.5520366 | 0.8000029 |
| 24 | 0.5520249 | 0.5520293 | 0.5520337 | 0.8000018 |
| 25 | 0.552027 | 0.5520293 | 0.5520319 | 0.8000009 |
| 26 | 0.5520277 | 0.5520294 | 0.5520309 | 0.7999993 |
| 27 | 0.5520284 | 0.5520293 | 0.5520303 | 0.8000004 |
| 28 | 0.5520288 | 0.5520293 | 0.5520299 | 0.8000002 |
| 29 | 0.552029 | 0.5520293 | 0.5520297 | 0.8000001 |
| 30 | 0.5520291 | 0.5520293 | 0.5520295 | 0.8000001 |
| 31 | 0.5520292 | 0.5520293 | 0.5520294 | 0.8000000 |
| 32 | 0.5520293 | 0.5520293 | 0.5520293 | 0.8 |
| 33 | 0.5520293 | 0.5520293 | 0.5520293 | 0.8 |
| 34 | 0.5520293 | 0.5520293 | 0.5520293 | 0.8 |
| 35 | 0.5520293 | 0.5520293 | 0.5520293 | 0.8 |
| 36 | 0.5520293 | 0.5520293 | 0.5520293 | 0.8 |
| 37 | 0.5520293 | 0.5520293 | 0.5520293 | 0.8 |
| 38 | 0.5520293 | 0.5520293 | 0.5520293 | 0.8 |
| 39 | 0.5520293 | 0.5520293 | 0.5520293 | 0.8 |
| 40 | 0.5520293 | 0.5520293 | 0.5520293 | 0.8 |

TABLE 1.2 – Un calcul instable

| n | u_0^n | u_1^n | u_2^n | $2\bar{\gamma} + \bar{\beta}\nabla u_1^n$ |
|----|-------------|-------------|-------------|---|
| 0 | 0 | 0.5 | 1 | 2 |
| 1 | 0.4 | 0.7 | 0.6 | 1.84 |
| 2 | 0.64 | 0.356 | 0.68 | 1.3728 |
| 3 | 0.4128 | 0.76879 | 0.4208 | 1.884792 |
| 4 | 0.69759 | 0.105012 | 0.99192 | 1.127129 |
| 5 | 0.2247216 | 0.7732589 | 0.2250416 | 2.0388298 |
| 6 | 0.6635514 | - 0.3447189 | 0.6636154 | 0.7933838 |
| 7 | - 0.1430648 | 0.4552260 | - 0.1430520 | 2.0786326 |
| 8 | 0.3355678 | - 0.7883844 | 0.3355704 | 0.7008382 |
| 9 | - 0.5635940 | - 0.0006760 | - 0.5635934 | 2.0503344 |
| 10 | - 0.1132596 | - 1.1548454 | - 0.1132595 | 0.7667314 |
| 11 | - 0.9465282 | - 0.3562289 | - 0.9465282 | 2.0722394 |
| 12 | - 0.4742888 | - 1.5794704 | - 0.4742888 | 0.7158547 |
| 13 | - 1.3584341 | - 0.7883209 | - 1.3584341 | 2.0560906 |
| 14 | - 0.9023435 | - 1.9605253 | - 0.9023435 | 0.7534546 |
| 15 | - 1.7488889 | - 1.1632334 | - 1.7488889 | 2.0685244 |
| 16 | - 1.2803645 | - 2.3746761 | - 1.2803645 | 0.7245507 |
| 17 | - 2.1558138 | - 1.5817918 | - 2.1558138 | 2.0592176 |
| 18 | - 1.6965962 | - 2.763828 | - 1.6965962 | 0.7462146 |
| 19 | - 2.5503816 | - 1.9674441 | - 2.5503816 | 2.06635 |
| 20 | - 2.0840316 | - 3.171997 | - 2.0840316 | 0.7296277 |
| 21 | - 2.9544039 | - 2.3781873 | - 2.9544039 | 2.0609733 |
| 22 | - 2.4934306 | - 3.5657543 | - 2.4934306 | 0.7421410 |
| 23 | - 3.3512896 | - 2.7699389 | - 3.3512896 | 2.0650806 |
| 24 | - 2.886209 | - 3.9704749 | - 2.886209 | 2.061973 |
| 25 | - 3.2916487 | - 4.3668752 | - 3.2916487 | 0.7398188 |
| 26 | - 4.1518299 | - 3.5714024 | - 4.1518299 | 2.064342 |
| 27 | - 3.6874879 | - 4.7696033 | - 3.6874879 | 0.7343077 |
| 28 | - 4.5531802 | - 3.9749977 | - 4.5531802 | 2.062546 |
| 29 | - 4.0906342 | - 5.1675257 | - 4.0906342 | 0.7384868 |
| 30 | - 4.9521474 | - 4.3722555 | - 4.9521474 | 2.0639135 |
| 31 | - 4.4882339 | - 5.5691022 | - 4.4882339 | 0.7353054 |
| 32 | - 5.3529285 | - 4.7743339 | - 5.3529285 | 2.0628757 |
| 33 | - 4.8900528 | - 5.9679026 | - 4.8900528 | 0.7377202 |
| 34 | - 5.7523326 | - 5.1727511 | - 5.7523326 | 2.0636652 |
| 35 | - 5.2886674 | - 6.3688133 | - 5.2886674 | 0.7358833 |
| 36 | - 6.1527841 | - 5.573952 | - 6.1527841 | 2.0630657 |
| 37 | - 5.6897184 | - 6.7681206 | - 5.6897184 | 0.7372782 |
| 38 | - 6.5524402 | - 5.9730381 | - 6.5524402 | 2.0635217 |
| 39 | - 6.0889185 | - 7.1686469 | - 6.0889185 | 0.7362173 |
| 40 | - 6.9527012 | - 6.3737322 | - 6.9527012 | 2.0631752 |

Chapitre 2

Schéma des différences finies de DuFort-Frankel pour la résolution du problème de diffusion de l'oxygène

Dans ce chapitre, nous utilisons le schéma bien connu des différences finies de DuFort-Frankel pour résoudre le problème de diffusion de l'oxygène à l'intérieur d'un milieu qui est modélisé par un problème initial de valeurs aux frontières mobiles pour une équation aux dérivées partielles unidimensionnelle dépendant du temps.

Le problème principal consiste à suivre la frontière mobile qui représente la profondeur de pénétration de l'oxygène à l'intérieur du milieu. Quelques expériences numériques sont également fournies avec des comparaisons avec la solution analytique. L'analyse théorique est donnée pour le schéma numérique.

Il est montré que tous les résultats obtenus par cette méthode sont comparés aux travaux des auteurs antérieurs.

2.1 Formulation physique

Le modèle mathématique du problème de diffusion biologique a d'abord été réalisé par Grank-Gupta [11]. Ils ont créé le modèle mathématique du problème de diffusion biologique pour la première fois.

Tout d'abord, l'oxygène est autorisé à se diffuser dans un milieu, et une partie de l'oxygène est absorbée par le milieu, étant ainsi retirée du processus de diffusion.

Le processus est supposé être composé mathématiquement de deux niveaux.

Au premier niveau, la condition stable est que la surface du milieu est isolée après l'injection d'oxygène dans le milieu et que le transfert d'oxygène ne se produit ni de l'intérieur du milieu ni de l'extérieur du milieu.

Au deuxième niveau l'absorption de l'oxygène injecté par les tissus commence. Cette condition provoque le problème à frontière mobile.

L'objectif de ce processus est de trouver la position d'équilibre et de définir la position de la frontière mobile pendant cette phase et de déterminer la répartition de l'oxygène à travers le milieu en fonction du temps. Hansen et Hougaard [12], Ferris et Hill [13, 14], Berger et al [15], Gupta et Kumar [16], Baines MJ et Miller JV et Morton KW [17], Furzeland [18], Bourghda [19, 20, 21], se sont intéressés au problème de la diffusion de l'oxygène.

Le problème à frontière mobile de type parabolique est décrit mathématiquement comme suit :

Si $C(X, T)$ désigne la concentration d'oxygène libre de diffuser à une distance X de la surface extérieure du milieu au temps T , D est un coefficient de diffusion constant et m le taux de consommation d'oxygène par unité de volume du milieu est aussi supposé constant pour $C(X, T) > 0$, l'état stationnaire est défini par une solution de :

$$D \frac{d^2 C}{dX^2} - m = 0$$

qui satisfait les conditions :

$$C = C_0 = \text{Constant}, \quad X = 0, \quad t \geq 0$$

On voit facilement que la solution recherchée est donnée par :

$$C = \frac{m}{2D}(X - X_0)^2, \quad X_0 = \sqrt{\frac{2DC_0}{m}}$$

Après que la surface $X = 0$ a été scellée, la position de la frontière reculée est désignée par $X_0(T)$ et le problème à résoudre devient :

$$\frac{\partial C}{\partial T} - D \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + m = 0, \quad 0 \leq X \leq X_0(T)$$

$$\frac{\partial C}{\partial X} = 0 \quad , \quad X = 0 \quad , \quad T \geq 0$$

$$C = \frac{\partial C}{\partial X} = 0 \quad , \quad X = X_0(T) \quad , \quad T \geq 0$$

$$C = \frac{m}{2D}(X - X_0(T))^2 \quad , \quad 0 \leq X \leq X_0 \quad , \quad T = 0$$

Où $T = 0$ est le moment lorsque la surface est scellée.

En faisant les changements de variables :

$$x = \frac{X}{X_0} \quad , \quad t = \frac{CD}{X_0^2} = \frac{C}{2C_0}$$

et notant $s(t)$ la valeur de x correspondant à $X_0(T)$, le système ci-dessus est réduit à la forme non-dimensionnelle suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 1 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq s(t) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad x = 0 \quad t \geq 0 \quad (2.2)$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad x = s(t) \quad (2.3)$$

$$u - \frac{1}{2}(1 - x)^2 = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad t = 0 \quad (2.4)$$

avec

$$s(0) = 1 \quad (2.5)$$

Où u est la concentration d'oxygène libre de diffuser. Parfois, nous laisserons tomber le x et le t pour plus de simplicité, sauf si nécessaire.

2.2 Solution à court instant

Comme discuté dans Boureghda [19, 21, 22] Crank et Gupta [11, 23], la condition initiale (2.4) montre qu'à l'état stationnaire un gradient unitaire négatif de concentration existe en surface, les méthodes numériques basées sur les différences finies sont susceptibles de donner des solutions imprécises au voisinage de la surface pour des temps petits.

Il y aura un intervalle de temps, cependant avant que la perturbation en surface ait un effet sur la solution au voisinage $x = 1$ à tout degré de précision spécifié. Ainsi une solution analytique approximative trouvée par Boureghda [19] en utilisant le développement de Fourier, peut être utilisé pour s'éloigner de la singularité à $x = 0, t = 0$ en supposant qu'il n'y a pas de mouvement de la frontière du temps. Ainsi, l'expression :

$$u(x, t) = \frac{1}{6} - t - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \exp[-(k^2 \pi^2 t)] \cos[k\pi(1 - x)] \quad 0 \leq x \leq 1 \quad t \leq 0.020 \quad (2.6)$$

est suffisamment précis dans la plupart des cas. Ce problème peut être résolu exactement en utilisant la méthode de séparation des variables ou transformée de Laplace. Donc le premier donne :

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2} \exp\left[-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \pi^2 t\right] \cos\left[\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi x\right] \quad (2.7)$$

tandis que le plus tard donne :

$$u(x, t) \simeq \frac{1}{2}(1 - x^2) - 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left[\frac{-x^2}{4t}\right] + \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \quad (2.8)$$

On calcule $u(x, t)$ à partir de (2.6) pour divers petits temps voir table 2.5 : Comparaison entre solutions analytiques et numériques. Les courbes typiques de la Figure 2.1 démontrent la forme générale et confirment que la concentration n'a pas changé dans la précision du tracé près de la frontière à $x = 1$. On voit que la convergence de la série infinie est très rapide.

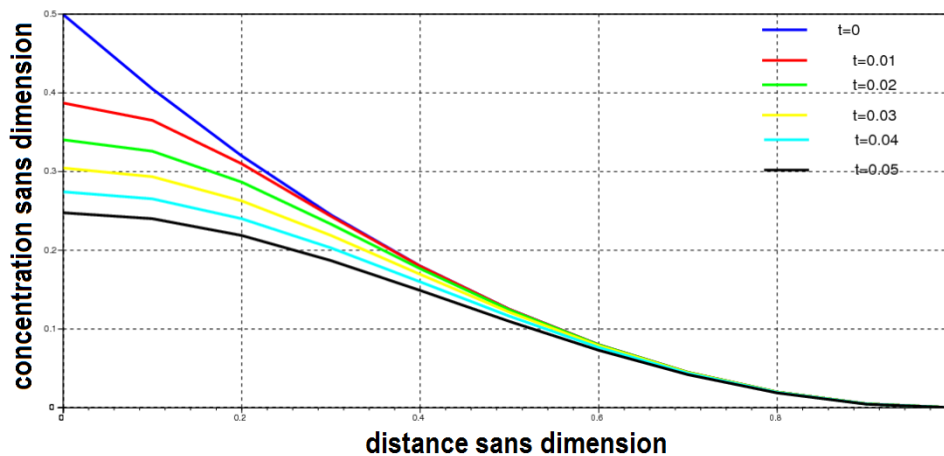


FIGURE 2.1 – Distributions de concentration pour $t = 0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05$.

2.3 Schéma numérique

Nous résolvons maintenant le problème posé par Crank [1]. Dans la présente analyse, les concentrations aux points intermédiaires entre les deux frontières ont été calculées en utilisant la technique d'application du schéma de Dufort-Frankel pour la solution numérique d'un problème à frontière mobile unidimensionnel. Ce schéma a l'avantage d'être explicite et encore inconditionnellement stable.

Cependant la condition de consistance exige que δt tende vers zéro plus vite que δx , mais l'exigence n'est en pratique pas trop sévère si le coefficient de la dérivée

second est petit. Le schéma explicite à trois niveaux le plus simple pour la solution de l'équation de diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.9)$$

prend la forme suivante

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\delta t} - \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\delta x^2} = 0 \quad (2.10)$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$u_{i,j+1} - 2r\delta_x^2 u_{i,j} - u_{i,j-1} = 0 \quad \text{ou} \quad r = \frac{\delta t}{\delta x^2} \quad (2.11)$$

DuFort-Frankel [24] a proposé de réécrire $\delta_x^2 u_{i,j}$ sous la forme $u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}$ dans (2.11) et $u_{i,j}$ modifié pour donner $\frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{2}$ cela conduit au schéma

$$(1 + 2r)u_{i,j+1} - 2r(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + (2r - 1)u_{i,j-1} = 0 \quad (2.12)$$

revenant à notre problème, afin de résoudre le premier ensemble d'équations pour $u_{i,2}$, nous calculons la solution le long du premier niveau de temps en utilisant les schémas explicites suivantes :

où

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\delta t} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\delta x)^2}$$

$$\frac{u_0^1 - u_0^0}{\delta t} - \frac{2}{\delta x^2}(u_1^0 - u_0^0) + 1 = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{u_k^1 - u_k^0}{\delta t} - \frac{u_{k-1}^0 - 2u_k^0 + u_{k+1}^0}{(\delta x)^2} + 1 = 0 \quad k = 1, \dots; i - 1 \quad (2.14)$$

2.4 Solution numérique

Pour les solutions numérique du problème (2.1)-(2.5), nous utilisons le développement de la série de Taylor près de la frontière mobile dans la direction de l'espace, où Crank [1] a utilisé la formule de type Lagrange dans le problème cartésien voir Figure 2.2 . Une formule d'interpolation Lagrangienne à trois points peut être écrit comme suit :

$$u(x) = \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{(\alpha_0 - \alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_2)}u(\alpha_0) + \frac{(x - \alpha_0)(x - \alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_2)}u(\alpha_1) + \frac{(x - \alpha_0)(x - \alpha_1)}{(\alpha_2 - \alpha_0)(\alpha_2 - \alpha_1)}u(\alpha_2)$$

En différenciant ce qui précède par rapport a x , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = & \frac{2x - (\alpha_1 + \alpha_2)}{(\alpha_0 - \alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_2)} u(\alpha_0) + \frac{2x - (\alpha_0 + \alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_2)} u(\alpha_1) \\ & + \frac{2x - (\alpha_0 + \alpha_1)}{(\alpha_2 - \alpha_0)(\alpha_2 - \alpha_1)} u(\alpha_2) \end{aligned} \quad (2.15)$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = & \frac{2u(\alpha_0)}{(\alpha_0 - \alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_2)} + \frac{2u(\alpha_1)}{(\alpha_1 - \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_2)} \\ & + \frac{2u(\alpha_2)}{(\alpha_2 - \alpha_0)(\alpha_2 - \alpha_1)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

L'application de (2.16) aux points $(i - 1)\delta x$, $i\delta x$ et au point mobile, et en se souvenant de la condition aux limites (2.3) donne :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{(\delta x)^2} \left(\frac{u_{i-1}}{p+1} - \frac{u_i}{p} + \frac{u_B}{p(p+1)} \right) = \frac{2}{(\delta x)^2} \left[\frac{u_{i-1}}{p+1} - \frac{u_i}{p} \right]$$

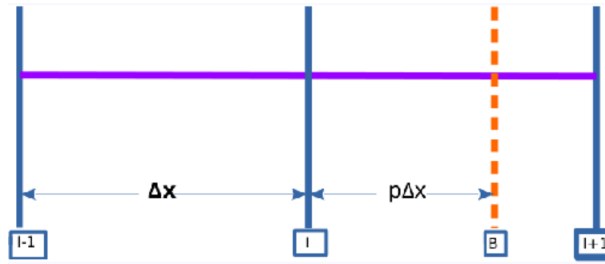


FIGURE 2.2 – Grille fixe

car $u_B = 0$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\delta x} \left(\frac{-pu_{i-1}}{p+1} + \frac{(p-1)u_i}{p} - \frac{pu_B}{p(p+1)} \right) = \frac{1}{\delta x} \left(\frac{-pu_{i-1}}{p+1} + \frac{(p-1)u_i}{p} \right)$$

Où u_B est les concentration de l'oxygène sur le frontière mobile.

En appliquant les différences finies à (2.1) on calcule la concentration à partir du deuxième niveau pour $j = 1, 2, 3$ en utilisant les équations suivantes :

$$u_{0,j+1} = \frac{1}{1+2r} [(1-2r)u_{0,j-1} + 4ru_{1,j} - 2\delta t] \quad r = \frac{\delta t}{(\delta x)^2} \quad (2.17)$$

$$u_{n,j+1} = \frac{1}{1+2r} [2r(u_{n-1,j} + u_{n+1,j}) + (1-2r)u_{n,j-1} - 2\delta t] \quad n = 1, 2, \dots, i-1 \quad (2.18)$$

et

$$u_{i,j+1} = u_{i,j-1} + 4r \left[\frac{u_{i-1,j}}{p_{j+1}} - \frac{u_{i,j}}{p_j} \right] - 2\delta t \quad (2.19)$$

Dans la Figure 2.3 Les profils de concentration à plusieurs moments calculés par la présente méthode sont présentés, on voit qu'au fur et à mesure que le temps augmente, les profils deviennent plus plats.

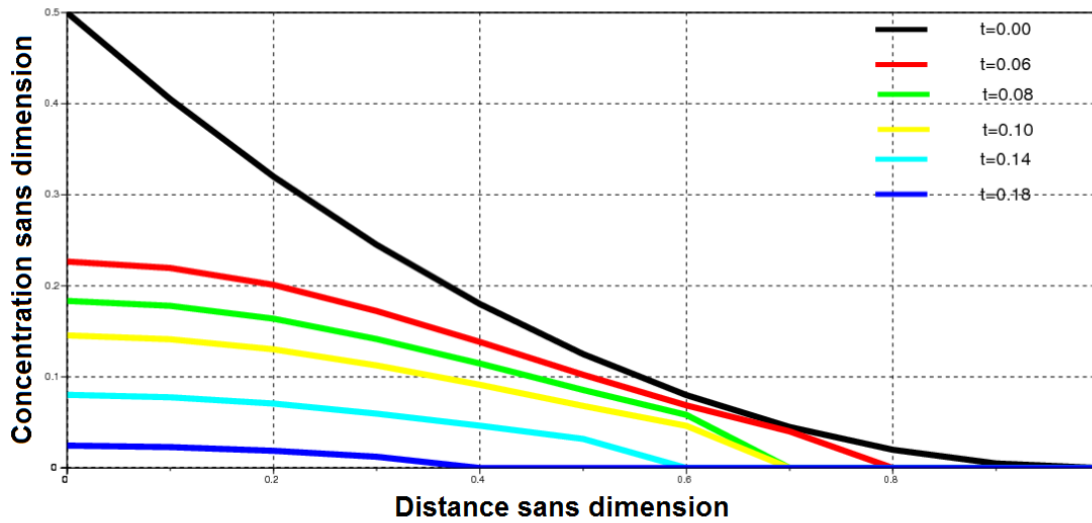


FIGURE 2.3 – Distribution de la concentration pour l'état stationnaire ($t = 0$) pour $t = 0.06, 0.08, 0.10, 0.14, 0.18$.

Nous savons que les concentrations aux points intermédiaires entre les deux frontières ont été calculées par les équations (2.17) et (2.18) mais près de la frontière mobile par (2.19) l'emplacement du point frontière mobile et les conditions traversant le maillage sont développées par Boureghda [19, 20, 22], où $p = \frac{\sqrt{2u_i}}{\delta x}$ et u va en diminuant on a $u_{i,j+1} \leq 0$ ou est physiquement impossible ou $u_{i,j+1} > u_{i,j}$ pourrait être causée par une instabilité alors la formule est appliquée à $u_{i-1,j}$ en utilisant $p_{j-1} = p_{j-1} + 1$.

Les résultats sont donnés dans les tables qui montrent qu'une solution précise peut être obtenue et comparée aux résultats des auteurs précédents. Les calculs ont été effectués avec $\delta x = 0.05$ et $\delta t = 0.001$ sont donnés dans la table 1 qui montre que les valeurs obtenus sont en très bon accord avec celles calculées à partir de la solution de Fourier pour les petits temps et celles de la présente méthode numérique actuelle.

Un graphe a été tracé pour montrer la progression de la frontière mobile par rapport au temps en utilisant les valeurs de la table 2.5 : valeurs de $10^6 u$ et la position de la frontière mobile.

Dans la Figure 2.4 la position de la frontière mobile à différents instants t , un résultat intéressant est observé à mesure que le temps augmente, le processus d'absorption dépasse sensiblement la diffusion la frontière mobile se déplace lentement.

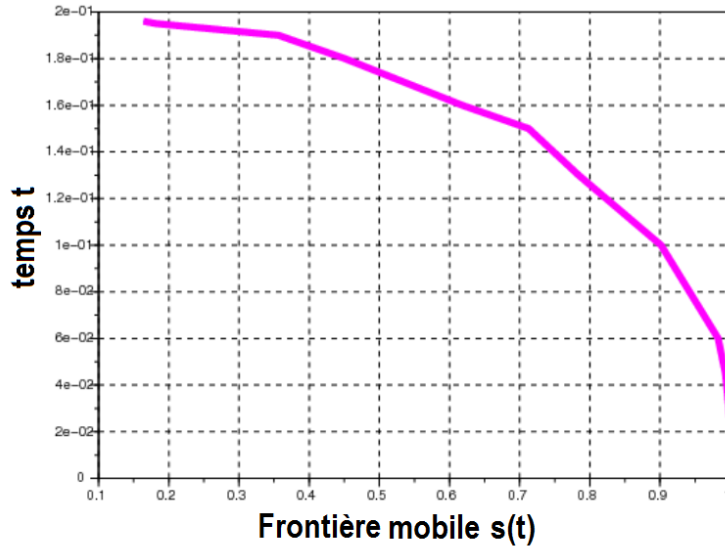


FIGURE 2.4 – Position de la frontière mobile par rapport au temps en utilisant les valeurs de la table 2.5

2.5 Conclusion

Nous insistons sur l'importance d'utiliser la solution analytique approchée pour les premières étapes pour traiter la singularité aux $x = 1, t = 0$ ainsi qu'une frontière mobile. On note que la taille de maille diminue, la position de la frontière mobile étant donnée par Crank et Gupta [11], Boureghda [19]. De plus, les procédures numériques ne peuvent pas être utilisées jusqu'à la fin du processus d'absorption en raison du manque de points de maillage nécessaires lorsque la frontière mobile est proche de la surface scellée.

En conclusion des approches ont été discutées qui peuvent utiliser les prédictions du modèle dans le développement d'un traitement radioactif variant dans le temps des tumeurs cancéreuses.

| t / x | 0.0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.001 | 464317 | 320000 | 180000 | 080000 | 020000 |
| | 460000 | 320000 | 180000 | 080000 | 020000 |
| 0.002 | 449537 | 319973 | 180000 | 080000 | 020000 |
| | 455556 | 320000 | 180000 | 080000 | 020000 |
| 0.003 | 438196 | 319760 | 180000 | 080000 | 020000 |
| | 435309 | 320000 | 180000 | 080000 | 020000 |
| 0.004 | 428635 | 319212 | 180000 | 080000 | 020000 |
| | 433059 | 320000 | 180000 | 080000 | 020000 |
| 0.005 | 420211 | 318302 | 179999 | 080000 | 020000 |
| | 471933 | 31439 | 180000 | 080000 | 020000 |
| 0.010 | 37162 | 309949 | 179804 | 079999 | 020000 |
| | 390020 | 311433 | 179932 | 080000 | 020000 |
| 0.015 | 36102 | 298690 | 178766 | 079977 | 020000 |
| | 360477 | 298302 | 178847 | 079987 | 020000 |
| 0.020 | 340423 | 286674 | 176604 | 079847 | 019997 |
| | 342456 | 288149 | 177093 | 079906 | 019999 |

TABLE 2.1 – Comparaison entre les solutions analytiques (2.6) et numériques en utilisant la présente méthode pour les petits temps. L'entrée supérieure correspond à la solution analytique et l'entrée inférieure aux solutions numériques. Valeurs de $10^6 u$ et $\delta x = 0.05$

| t / x | 0.0 | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 0.7 | 0.9 | frontière libre |
|-------|--------|--------|--------|--------|-------|------|-----------------|
| 0.010 | 387162 | 365072 | 243276 | 124986 | 45000 | 5000 | --- |
| | 395408 | 368880 | 242951 | 124951 | 44999 | 5000 | 1.00000 |
| | 390020 | 367525 | 24350 | 125000 | 45000 | 5000 | 1.00000 |
| | 387497 | 365668 | 243726 | 125000 | 45000 | 5000 | 1.00000 |
| 0.020 | 340423 | 325881 | 233277 | 124198 | 44977 | 5000 | --- |
| | 345862 | 329518 | 233523 | 124008 | 44949 | 0 | 0.99994 |
| | 342456 | 327763 | 234228 | 124394 | 44990 | 5000 | 1.00000 |
| | 340661 | 326222 | 233793 | 124370 | 44991 | 5000 | 1.00000 |
| 0.040 | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| | 278070 | 268216 | 204128 | 116199 | 43650 | 0 | 0.99517 |
| | 275766 | 266751 | 204065 | 116727 | 44085 | 0 | 0.99643 |
| | 274496 | 265576 | 203430 | 116556 | 43901 | 4918 | 0.99934 |
| 0.060 | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| | 226641 | 219567 | 172287 | 102319 | 40152 | 0 | 0.98276 |
| | 224783 | 21316 | 171927 | 102950 | 0 | 0 | 0.97278 |
| | 223746 | 217330 | 171251 | 102227 | 39645 | 4186 | 0.99220 |
| 0.100 | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| | 145578 | 141296 | 112548 | 68115 | 0 | 0 | 0.90136 |
| | 144332 | 140539 | 113127 | 0 | 0 | 0 | 0.85485 |
| | 143287 | 139414 | 110966 | 66112 | 23232 | 619 | 0.93518 |
| 0.120 | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| | 111493 | 108074 | 85295 | 50195 | 0 | 0 | 0.81408 |
| | 110797 | 10774 | 86325 | 0 | 0 | 0 | 0.74343 |
| | 109228 | 106125 | 83265 | 47115 | 13324 | 0 | 0.87885 |
| 0.140 | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| | 80331 | 77612 | 59640 | 31936 | 0 | 0 | 0.75031 |
| | 80188 | 77810 | 60225 | 0 | 0 | 0 | 0.64197 |
| | 77937 | 75442 | 57105 | 28536 | 4249 | 0 | 0.79756 |
| 0.170 | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| | 37843 | 35935 | 23554 | 0 | 0 | 0 | 0.56514 |
| | 37063 | 35023 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.43242 |
| | 35118 | 33378 | 20898 | 4079 | 0 | 0 | 0.60029 |
| 0.190 | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| | 11824 | 10435 | 2286 | 0 | 0 | 0 | 0.35641 |
| | 8535 | 6700 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.19750 |
| | 9039 | 7827 | 750 | 0 | 0 | 0 | 0.33878 |
| 0.195 | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| | 5544 | 4535 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.18235 |
| | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| | 2880 | 1909 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.16128 |

TABLE 2.2 – Les valeurs de $10^6 u$ et les positions de la frontière mobile. Pour chaque temps, l'entrée la plus haute correspond à la solution analytique approchée actuelle pour les petits temps (basée sur le développement de Fourier (2.6)), la deuxième à la méthode numérique actuelle ($\delta x = 0.1$), la troisième à la méthode actuelle et la plus basse à la méthode de Crank et Gupta [11] ($\delta x = 0.05$)

Chapitre 3

Un modèle à frontière mobile pour la diffusion de l'oxygène dans une cellule malade

Dans ce chapitre, nous utilisons une méthode analytique approximative pour la résolution numérique d'un problème à frontière mobile unidimensionnel.

Nous considérons le problème de diffusion de l'oxygène où l'oxygène est autorisé à se diffuser dans une cellule malade qui absorbe et immobilise l'oxygène à un taux constant.

Notre principal problème consiste à suivre la frontière mobile qui représente la profondeur de pénétration de l'oxygène à l'intérieur de la cellule malade. Nous pouvons trouver une solution précise qui est obtenue par un polynôme de troisième et quatrième degré et nous montrons quelques erreurs dans l'article publié par Seval Çatal dans (App.Math.Comput 145 :361-369,2003), Voir Djellab et Bouregghda [25].

3.1 Introduction

Un problème à frontière mobile peut être défini comme une équation aux dérivées partielles dont les inconnues sont : La fonction qui est proprement solution de l'équation. Généralement cette fonction représente une grandeur classique, déplacement, température, pression, concentration.

Cette fonction est définie sur le domaine connu. La partie du domaine dans laquelle la fonction inconnue satisfait une contrainte supplémentaire.

Cette région est déterminée par sa frontière mobile et la position de la frontière mobile doit être déterminée dans le cadre de la solution. Les problèmes à frontière mobile dans lesquels la frontière du domaine n'est pas connue surviennent dans des sujets tels que la lubrification, la diffusion d'un gaz, d'un liquide ou d'un liquide-gaz.

Nous savons que les problèmes à frontière mobile sont souvent appelés problèmes de Stefan, en référence aux travaux de J. Stefan qui a étudié la fonte de la calotte glaciaire Stefan [26]. Dans la littérature, il existe de nombreuses méthodes bien connues pour résoudre le problème de Stefan voir Douglas et Gallie [27]. Pour mener une recherche approfondie sur les problèmes à frontière mobile dans plusieurs domaines était confronté à un bon problème interdisciplinaire entre les mathématiques et d'autres domaines pour plus de détails voir J.R.Ockendon et W.R.Hodgkins [28], Crank [1] et Bouregghda [19, 21, 22, 29].

L'objectif de ce travail est de présenter le problème de la diffusion unidimensionnelle de l'oxygène et d'obtenir une solution approchée.

Le problème de diffusion de l'oxygène dans les tissus est un problème parabolique qui apparaît dans de nombreuses applications telles que les cellules cancéreuses qui absorbent plus d'oxygène que les cellules normales. Ce problème a été étudié pour la première fois par Crank et Gupta [11], où un modèle mathématique de diffusion biologique simule l'injection d'oxygène dans une cellule infectée. La présence d'oxygène favorise l'absorption des rayonnements dans les tissus, de sorte qu'une première phase du problème permet à l'oxygène de diffuser dans le milieu, et la concentration d'oxygène de surface est laissée constante. Cette phase continue jusqu'à un état d'équilibre dans lequel l'équilibre est atteint et l'oxygène cesse de pénétrer.

Dans la deuxième phase, la surface est scellée et l'oxygène est confiné au domaine. Le milieu continue d'absorber de l'oxygène et par conséquent la limite indiquant la pénétration maximale d'oxygène commence à reculer vers la surface scellée.

Notre défi principal est de déterminer la position de la frontière mobile ainsi que la distribution d'oxygène au cours du temps. Ce type de problème est connu sous le nom de problème à frontière mobile implicite. Certaines méthodes numériques et analytiques ont déjà été utilisées pour trouver une solution à ce problème, une méthode

semi-analytique a été proposée dans Hansen et Hougaard [12], Baines et Miller [17], Dahmardah et Mayers [30] et Bouregghda [19, 20, 22], le problème de diffusion de l'oxygène a été étudié analytiquement.

Pour se familiariser avec certaines de ces techniques et méthodes, on peut se référer aux travaux Abbaszadeh [31], Abbaszadeh et Dehghan [32].

3.2 Modèle physique

Cette section présente le modèle physique de la diffusion de l'oxygène dans une cellule. Pour la simplicité, on suppose que le milieu absorbe et immobilise l'oxygène à une vitesse constante. La frontière mobile indique la limite de pénétration de l'oxygène. Voir Figure 3.1. Dans les variables sans dimension, le processus d'absorption devient le problème à frontière libre suivant qui est donné par Seval Çatal [34] dans (App.Math.Comput 145 :361-369, 2003).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq s(t) \quad (3.1)$$

la condition limite

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{à la surface scellé} \quad x = 0 \quad t \geq 0 \quad (3.2)$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{à la frontière mobile} \quad x = s(t) \quad t \geq 0 \quad (3.3)$$

et les conditions initiales à $t = 0$ sont :

$$u = \frac{1}{2}(1 - x)^2 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.4)$$

avec

$$u = 0 \quad , \quad x = s(t) = 1 \quad \text{and} \quad t \geq 0 \quad (3.5)$$

On note que $u(x, t)$ est la concentration d'oxygène libre de diffuser en un point x , à l'instant t et la position de la frontière mobile est $s(t)$.

3.3 Un commentaire sur l'article de Seval Çatal

Seval Çatal propose une solution analytique approchée du système (3.1) - (3.5), il suppose qu'un polynôme du quatrième degré est sélectionné contenant cinq paramètres inconnus, qui sont en général des fonctions du temps, comme suit :

$$u(x, s) = \alpha_1 + \alpha_2(x - s) + \alpha_3(x - s)^2 + \alpha_4(x - s)^3 + \alpha_5(x - s)^4 \quad (3.6)$$

Où $\alpha_1 = \alpha_1(t)$, $\alpha_2 = \alpha_2(t)$, $\alpha_3 = \alpha_3(t)$, $\alpha_4 = \alpha_4(t)$, $\alpha_5 = \alpha_5(t)$ sont des paramètres inconnus à déterminer en fonction du temps t .

Avec une condition supplémentaire comme dans Crank et Gupta [11] et Gupta et Banik [33] à la frontière mobile est donnée par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 1 = 0 \quad , \quad x = s(t) \quad (3.7)$$

On écrit la concentration surfacique $u(0, t)$ par u_0 et l'équation du polynôme devient :

$$u(x, u_0, s) = 0.5(x - s)^2 + \left(\frac{s^2 - 4u_0}{s^3}\right)(x - s)^3 + 0.5\left(\frac{s^2 - u_0}{s^4}\right)(x - s)^4 \quad (3.8)$$

qui satisfait les conditions (3.2), et (3.3) c'est-à-dire l'équation (15) dans l'article de Seval Çatal [34] est fautive parce que la condition (2) n'est pas satisfaite dans l'article de Seval Çatal. Pour obtenir $u_0 = u(0, t)$ et $s(t)$ en fonction du temps t , Seval Çatal [34] préconise l'utilisation du zéro et des premiers moment de l'équation (3.1), c'est-à-dire :

$$\int_0^s \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_0^s \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 1\right) dx \quad (3.9)$$

et

$$\int_0^s (x - s) \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_0^s (x - s) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 1\right) dx \quad (3.10)$$

On intègre les deux membres, on applique la règle intégrale de Leibniz au membre de gauche et on peut écrire l'équation (3.9) comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^s u dx \right) - u(s, t) \frac{ds}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - x \right)_0^s = -s(t) \quad (3.11)$$

qui après substitution des équations (3.9), (3.2) et (3.3) et quelques manipulations nous donnent :

$$8s \frac{du_0}{dt} + (s^2 + 8u_0) \frac{ds}{dt} = -20s \quad (3.12)$$

De même, nous pouvons écrire l'équation (3.10) comme :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^s x u(x, t) dx \right) - s \frac{d}{dt} \left(\int_0^s u(x, t) dx \right) = \int_0^s \left(x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \right) dx - s \int_0^s \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 1 \right) dx \quad (3.13)$$

qui aussi après substitution des équations (3.10), (3.2) et (3.3) et quelques manipulations nous donne :

$$9s^2 \frac{du_0}{dt} + (s^3 + 18su_0) \frac{ds}{dt} = -15(2u_0 + s^2) \quad (3.14)$$

Respectivement les équations (3.12) et (3.14) fournissent

$$\frac{ds}{dt} = \frac{60(4u_0 - s^2)}{s(s^2 - 72u_0)} \quad (3.15)$$

$$\frac{du_0}{dt} = \frac{5(s^4 - 48u_0^2 + 42s^2u_0)}{s^2(s^2 - 72u_0)} \quad (3.16)$$

Enfin nous constatons que les équations (15), (16), (17), (18), et (19) dans l'article de Seval Çatal [34] sont faux. Nous remarquons que malgré la correction des erreurs de l'article publié par Seval [34], nous confirmons que les résultats obtenus ne sont pas bons en les comparant avec les résultats des auteurs précédents et qui prouvent que les erreurs de Seval [34] sont des erreurs fondamentales qui ne semblent pas être des fautes de frappe ou des erreurs de calcul, ce qui signifie que la méthode la moins précise était la méthode de Seval Çatal [34], non seulement l'erreur commise mais aussi parce qu'il n'a pas pu obtenir un résultat plus proche de la solution des autres auteurs comme indiqué dans la table 3.1 et pour cette raison, nous avons choisi différents profils polynômiaux comme dans la méthode suivante.

3.4 Méthode de solution

Dans ce chapitre, nous proposons deux nouveaux profils polynômiaux du troisième et quatrième degré comme suit pour la concentration superficielle.

3.4.1 Profil polynomial du troisième degré pour la concentration surfacique

Choisir un profil polynomial du troisième degré dans la variable spatiale x contenant quatre paramètres inconnus qui sont en général des fonctions du temps comme suit :

$$u(x, s) = a_1(t) \left(\frac{1-x}{1-s} \right)^3 + a_2(t) \left(\frac{1-x}{1-s} \right)^2 + a_3(t) \left(\frac{1-x}{1-s} \right) + a_4(t) \quad (3.17)$$

Qui sont déterminés en utilisant (3.2) et (3.3). En écrivant u_0 pour $u(0, t)$ l'équation du polynôme devient :

$$u(x, u_0, s) = \frac{-2u_0}{s^3}(1-x)^3 + \frac{3u_0(2-s)}{s^3}(1-x)^2 - \frac{6u_0(1-s)}{s^3}(1-x) + \frac{u_0(1-s)^2(2+s)}{s^3} \quad (3.18)$$

Pour obtenir u_0 et $s(t)$ on prend le zéro et les premiers moments de (3.1) qui sont donnés respectivement par :

$$\int_0^{s(t)} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx = \int_0^{s(t)} \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - 1 \right) dx \quad (3.19)$$

et

$$\int_0^{s(t)} (1-x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx = \int_0^{s(t)} (1-x) \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - 1 \right) dx \quad (3.20)$$

On peut écrire $u(x, u_0, s(t))$ de (3.18) dans (3.19) et (3.20) et en tenant compte des conditions aux limites (3.2) et (3.3) et quelques manipulations, on obtient :

$$\frac{s}{2} \frac{du_0}{dt} + \frac{u_0}{2} \frac{ds}{dt} = -s \quad (3.21)$$

et

$$\left(\frac{s}{2} - \frac{3s^2}{20} \right) \frac{du_0}{dt} + \left(\frac{u_0}{2} - \frac{3u_0 s}{10} \right) \frac{ds}{dt} = -u_0 - s + \frac{s^2}{2} \quad (3.22)$$

on résout (3.21) et (3.22), on aura le système différentiel suivant :

$$\frac{du_0(t)}{dt} = \frac{-2s^2(t) - 20u_0(t)}{3s^2(t)} \quad (3.23)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-20u_0(t) + 4s^2(t)}{-3u_0(t)s(t)} \quad (3.24)$$

Enfin si u_0 et $s(0)$ sont connus on peut avoir la solution numérique du système (3.23)-(3.24) par des méthodes connues.

3.4.2 Profil polynomial du quatrième degré pour la concentration surfacique

Choisir un profil polynomial de quatrième degré dans la variable spatiale x contenant cinq paramètres inconnus comme suit :

$$u(x, s) = a_1(t) \left(\frac{1-x}{1-s} \right)^4 + a_2(t) \left(\frac{1-x}{1-s} \right)^3 + a_3(t) \left(\frac{1-x}{1-s} \right)^2 + a_4(t) \frac{1-x}{1-s} + a_5(t) \quad (3.25)$$

Qui sont déterminés à l'aide de (3.2), (3.3) et d'une condition supplémentaire à la frontière mobile donnée par $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1$, $x = s(t)$ avec $t > 0$ déduite de (3.1) et (3.3). En écrivant u_0 pour $u(0, t)$ l'équation du polynôme devient :

$$\begin{aligned}
 u(x, u_0, s) = & \left(\frac{-3u_0}{s^4} + \frac{1}{2s^2} \right) (1-x)^4 + \left(\frac{4u_0(3-2s)}{s^4} - \frac{2-s}{s^2} \right) (1-x)^3 + \left(\frac{6u_0(1-s)(-3+s)}{s^4} \right. \\
 & + \left. \frac{6+s^2-6s}{2s^2} \right) (1-x)^2 + \left(\frac{12u_0(1-s)^2}{s^4} - \frac{(1-s)(2-s)}{s^2} \right) (1-x) \\
 & + \left(\frac{-u_0(1-s)^3(3+s)}{s^4} + \frac{(1-s)^2}{2s^2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Pour obtenir u_0 et $s(t)$, nous prenons respectivement le zéro et les premiers moments Eq (3.19) et (3.20) respectivement. Nous écrivons $u(x, u_0, s)$ à partir de l'équation (3.25) dans les équations (3.19) et (3.20) et en utilisant les conditions (3.2), (3.3) nous obtenons :

$$\frac{2s}{5} \frac{du_0}{dt} + \left(\frac{2u_0}{5} + \frac{s^2}{20} \right) \frac{ds}{dt} = -s \tag{3.27}$$

$$\left(\frac{2u_0}{5} - \frac{su_0}{5} - \frac{s^3}{30} + \frac{s^2}{20} \right) \frac{ds}{dt} + \left(\frac{2s}{5} - \frac{s^2}{10} \right) \frac{du_0}{dt} = -u_0 - s + \frac{s^2}{2} \tag{3.28}$$

on résout (3.27) et (3.28), on aura le système différentiel suivant :

$$\frac{du_0(t)}{dt} = \frac{30u_0s^2 + 240u_0^2 + 5s^4}{-24u_0s^2 - 5s^4} \tag{3.29}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-240u_0 + 60s^2}{-24u_0s - 5s^3} \tag{3.30}$$

Enfin si u_0 et $s(0)$ sont connus on peut avoir la solution numérique du système (3.29)-(3.30) par des méthodes connues.

TABLE 3.1 – Comparaison de la position de la frontière mobile $s(t)$

| temps t | Crank et Gupta (1972) | Hansen et Hougaard (1974) | Baines et al (1978) | Dahmardah et Mayers (1983) | Gupta et Banik (1989) | Présent 4ème degré | Présent 3ème degré |
|---------|-----------------------|---------------------------|---------------------|----------------------------|-----------------------|--------------------|--------------------|
| 0.051 | 0.9967 | 0.9964 | — | — | 1.0000 | 1.0000 | 1.000000 |
| 0.060 | 0.9922 | 0.9918 | 0.9920 | — | 0.9969 | 0.9969 | 1.0000 |
| 0.080 | 0.9719 | 0.9716 | 0.9717 | — | 0.9756 | 0.9756 | 1.00000 |
| 0.100 | 0.9352 | 0.9350 | 0.9356 | 0.9350 | 0.9350 | 0.9350 | 0.9822 |
| 0.120 | 0.88789 | 0.8792 | 0.8796 | 0.8792 | 0.8743 | 0.8743 | 0.9285 |
| 0.140 | 0.7976 | 0.7989 | 0.7992 | 0.7989 | 0.7896 | 0.7896 | 0.8438 |
| 0.150 | 0.7449 | 0.7467 | 0.7467 | — | 0.7356 | 0.7356 | 0.7875 |
| 0.160 | 0.813 | 0.6834 | 0.6832 | 0.6835 | 0.6710 | 0.6710 | 0.7200 |
| 0.180 | 0.4961 | 0.5011 | 0.4985 | 0.5013 | 0.4879 | 0.4879 | 0.5368 |
| 0.190 | 0.3388 | 0.3454 | 0.3397 | 0.3460 | 0.3300 | 0.3300 | 0.4023 |
| 0.195 | 0.1613 | 0.2065 | — | 0.2085 | 0.1708 | 0.1708 | 0.3110 |
| 0.1955 | — | 0.1871 | — | — | 0.1380 | — | — |
| 0.200 | — | — | — | — | — | — | 0.1749 |
| 0.202 | — | — | — | — | — | — | 0.0628 |

Remarque : les tirets (—) indiquent que les chiffres correspondants ne sont pas disponibles.

TABLE 3.2 – Chiffres comparatifs pour la concentration à la surface scellée $u(0, t)$

| temps t | Crank et Gupta (1972) | Hansen et Hougaard (1974) | Baines et al (1978) | Dahmardah et Mayers (1983) | Gupta et Banik (1989) | Présent 4ème degré | Présent 3ème degré |
|---------|-----------------------|---------------------------|---------------------|----------------------------|-----------------------|--------------------|--------------------|
| 0.051 | 0.245176 | 0.245176 | — | — | 0.245176 | 0.245176 | 0.245176 |
| 0.060 | 0.223605 | 0.223605 | — | — | 0.223778 | 0.223778 | 0.225200 |
| 0.100 | 0.143175 | 0.143177 | 0.143150 | 0.143177 | 0.142312 | 0.142312 | 0.149439 |
| 0.150 | 0.062981 | 0.063078 | 0.063020 | — | 0.060392 | 0.060392 | 0.071838 |
| 0.180 | 0.021269 | 0.021781 | — | 0.021781 | 0.018827 | 0.018827 | 0.029966 |
| 0.190 | 0.008151 | 0.009021 | 0.008930 | 0.009021 | 0.006417 | 0.006417 | 0.016448 |
| 0.195 | 0.001721 | 0.002884 | — | 0.002883 | 0.000744 | 0.000744 | 0.009742 |
| 0.200 | — | — | — | — | — | — | 0.003062 |
| 0.202 | — | — | — | — | — | — | 0.000395 |

Remarque : les tirets (—) indiquent que les chiffres correspondants ne sont pas disponibles.

TABLE 3.3 – Valeurs tabulées pour la frontière mobile $s(t)$ et la température à la surface scellée $u(0, t)$

| $s(t)$ | | | |
|---------|--------------|-----------------------|--------------------|
| temps t | çatal (2003) | Gupta et Banik (1989) | Présent 4ème degré |
| 0.051 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 0.060 | 1.0023 | 0.9969 | 0.9969 |
| 0.070 | 1.0100 | 0.9887 | 0.9887 |
| 0.080 | 1.0258 | 0.9756 | 0.9756 |
| 0.090 | 1.0554 | 0.9577 | 0.9577 |
| 0.100 | 1.1143 | 0.9350 | 0.9350 |
| 0.109 | 1.2977 | 0.9104 | 0.9104 |
| 0.110 | | 0.9074 | 0.9074 |
| 0.120 | | 0.8743 | 0.8743 |

| $u_0(t)$ | | | |
|----------|--------------|-----------------------|--------------------|
| temps t | çatal (2003) | Gupta et Banik (1989) | Présent 4ème degré |
| 0.051 | 0.245176 | 0.245176 | 0.245176 |
| 0.060 | 0.221849 | 0.223778 | 0.223778 |
| 0.070 | 0.194307 | 0.201553 | 0.201553 |
| 0.080 | 0.164530 | 0.180698 | 0.180698 |
| 0.090 | 0.131503 | 0.161005 | 0.161005 |
| 0.100 | 0.092529 | 0.142312 | 0.142312 |
| 0.109 | 0.033332 | 0.126241 | 0.126241 |
| 0.110 | | 0.124496 | 0.124496 |
| 0.120 | | 0.107462 | 0.107462 |

Remarque : les tirets (– – –) indiquent que les chiffres correspondants ne sont pas disponibles.

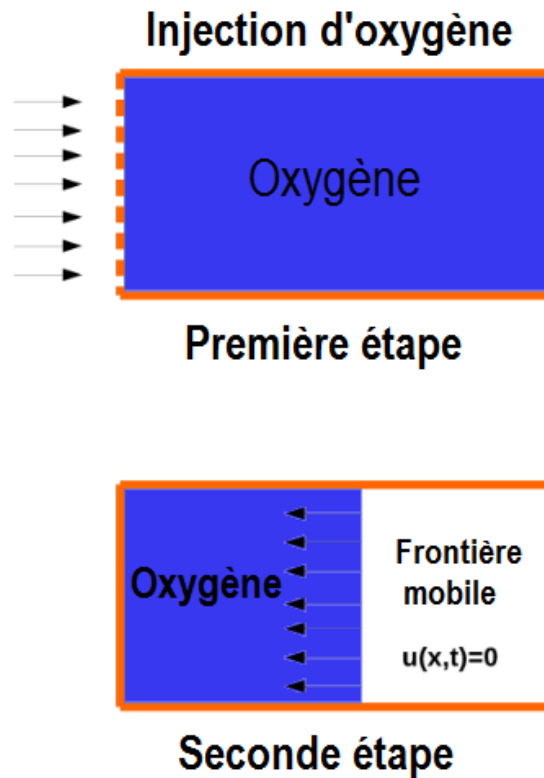


FIGURE 3.1 – Représentation de la diffusion de l’oxygène dans la cellule, la figure ci-dessus représente la première étape où l’oxygène est inséré jusqu’à ce que l’équilibre soit atteint. Dans la deuxième étape vers le bas la surface extérieure est scellée et l’oxygène se diffuse et est absorbé à travers le milieu.

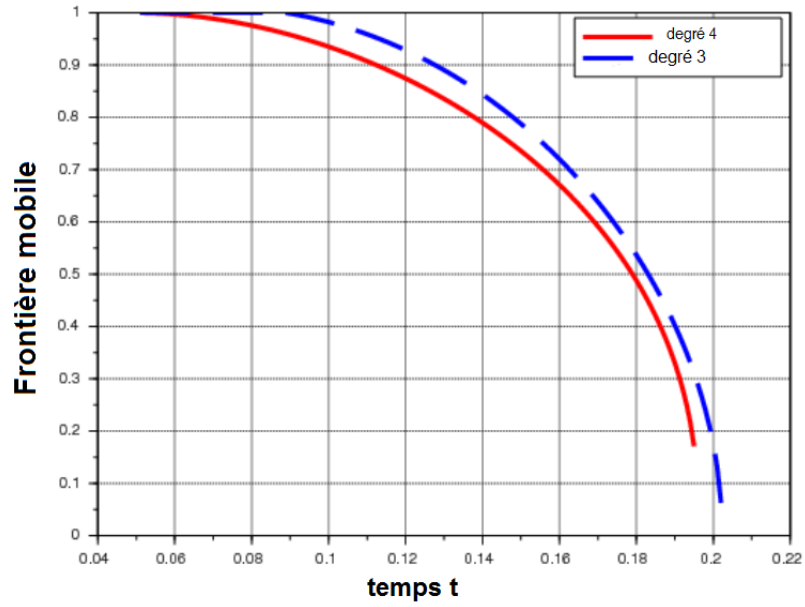


FIGURE 3.2 – Position de la frontière mobile par rapport au temps.

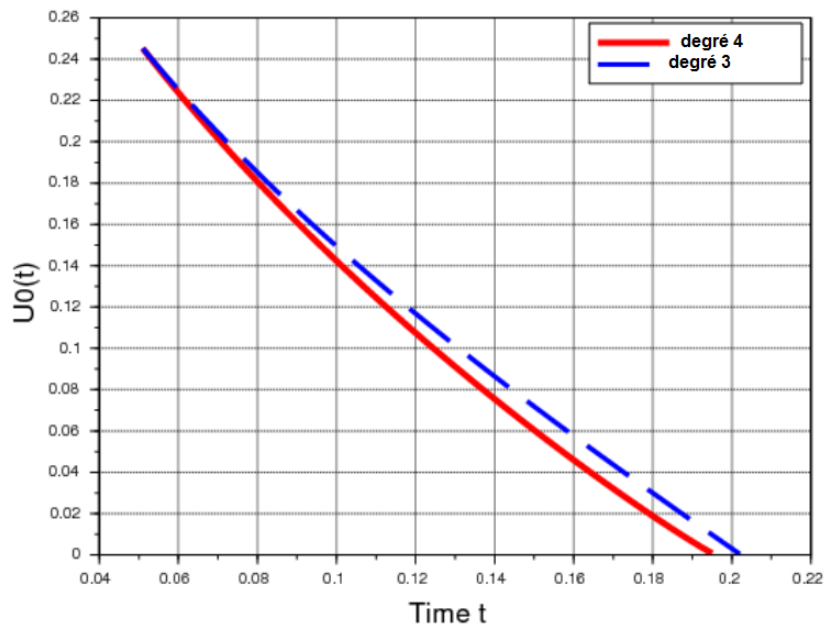


FIGURE 3.3 – Distributions de concentration pour la surface fixe ($x = 0$) et pour $t \geq 0.051$.

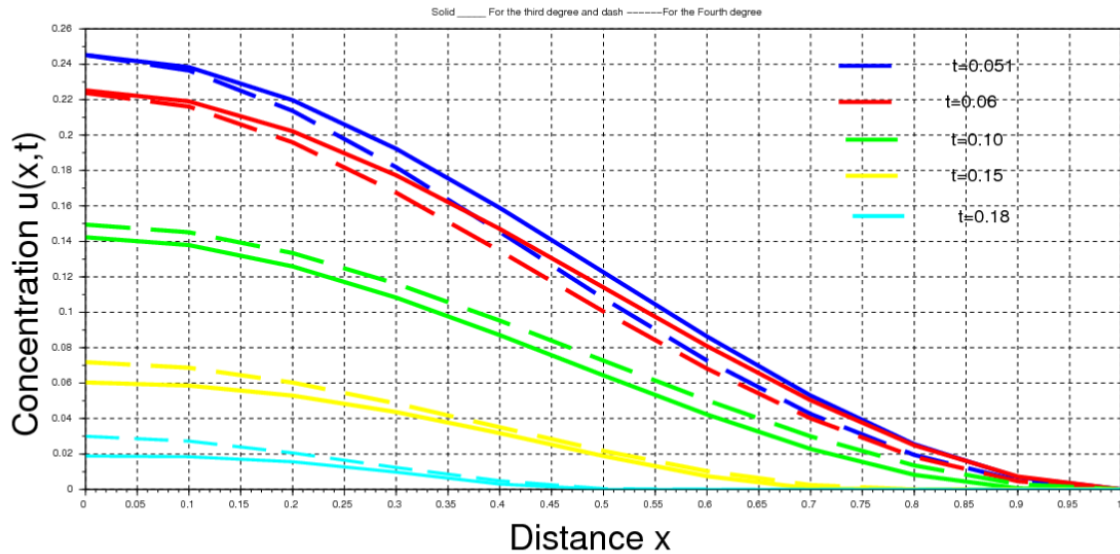


FIGURE 3.4 – Distributions de concentration à cinq moments différents.

3.5 conclusion

Il est évident que bon nombre des (3.1)-(3.5) et des problèmes associés au corps humain apparaissent comme des problèmes à frontières mobiles, ce domaine dans lequel les mathématiques peuvent contribuer à de nombreuses avancées médicales. Beaucoup de ces problèmes présentent des difficultés analytiques et numériques telles que la détermination d'une frontière mobile qui entrave leur résolution.

Dans ce chapitre, nous montrons quelques erreurs dans les solutions données par Seval Çatal [34] et nous avons trouvé de nouvelles solutions approchées à frontière mobile (3.17) et (3.25) correspondant à la diffusion de l'oxygène dans une cellule malade avec une absorption simultanée à taux constant en choisissant les polynômes du troisième et du quatrième ordre. Dans cette étude, nous observons qu'une solution analytique approximative est obtenue, celle-ci contient la position des points s , qui doivent être déterminés, puis un système d'équations linéaires est également obtenu, où la solution numérique du système conduit aux fonctions inconnues dans le polynôme supposé, nous pouvons obtenir la solution numérique du système par des méthodes connues pour résoudre l'équation différentielle si u_0 et $s(0)$ sont connus. Nous savons d'après la physique du problème que $\frac{ds}{dt}$ ce n'est pas positif et donc d'après (3.24) nous obtenons :

$$20u_0 - 4s^2 \leq 0 \quad (3.31)$$

et de (3.30) nous obtenons

$$-240u_0 + 60s^2 \geq 0 \quad (3.32)$$

pour $0 \leq s(t) \leq 1$.

Selon la position initiale de la frontière mobile $s(0) = 1$ condition (3.5) et les conditions (3.31) et (3.32), nous avons pris la concentration surfacique $u_0 = 0.245176$, au temps $t = 0.051$ de Grank et Gupta [11] et des valeurs numériques pour s et u_0 ont été calculées pour $\delta t = 0.001$. Nous montrons également une comparaison avec d'autres méthodes utilisées pour résoudre le problème de diffusion de l'oxygène dans une cellule. Voir les tables 3.1 et 3.2, les résultats numériques obtenus montrent un accord avec certains autres résultats des travaux antérieurs. La frontière mobile $s(t)$ et la variation de concentration $u_0(t)$ à la surface fixe présentées dans les tables 3.1 et 3.2 sont données sous forme de profil dans les Figures 3.2 et 3.3. Les distributions de concentration avec la variable d'espace sont calculées et les résultats à cinq moments différents sont représentés à la Figure 3.4.

Enfin, nous mentionnons que la présente méthode est faible en termes de précision tout en utilisant le polynôme du quatrième degré et le temps CPU écoulé est de 0.000029 sur un processeur Intel © CoreTM i3-2310M CPU @ 2.10 GHZ \times 2 table 3.3.

Bibliographie

- [1] J.Crank, Free and moving boundary problems Clarendon Press, Oxford, (1984).
- [2] A.Fasano and M.Primicerio, Free boundary problems : theory and applications vol 2 Pitman Advanced Pub.Program 1983.
- [3] R.M. Furzeland, A survey of the formulation and solution of free and moving boundary (Stefan) problems, Brunel Univ.Tech.Rept. Tr/76 (1977).
- [4] G.H.Meyer, The Numerical solution of Stefan problems with front-tracking and smoothing methods Brunel University, Tr/62(1976).
- [5] D.G. Wilson, A Solomon and P.T. Boggs (Editors). Moving Boundary Problems Academic Press, New York, 1978.
- [6] D. Williamson, Stability of difference approximations to certain partial differential equations of fluid dynamics. Journal of Computational Physics 1 : 51-7.1966.
- [7] R.D. Richtmeyer, Difference methods for initial value problems. New York, N.Y, Interscience Publishers 1957.
- [8] D.V.Widder, Advanced calculus. 2nd ed. Englewood cliffs,N.J, Prentice- Hall, Inc.1961.
- [9] W.F.Ames, Numerical Methods for partial differential equations, academic press, Thomas nelsonk sons (1977).
- [10] G.D.Smith, Numerical solution of partial differential equations. New York,N.Y., Oxford University Press.1985.
- [11] J.Crank and R.S.Gupta, A moving boundary problem arising from the diffusion of oxygen in absorbing tissue. IMA J Appl Math. 10(1) :19–33. (1972)
- [12] E.Hansen and P.Hougaard, "On a moving boundary problem from biomechanics", in : IMA Journal of Applied Mathematics 13 (1974), pp. 385-398.
- [13] M. Ferris and J.Pang, Engineering and economic applications of complementarity problems, SIAM Review, 39 (1997), pp.669-713
- [14] J.M. Hill, One-dimensionel Stefan problems : An introduction. Longman scientific and technical : Essex 1987.

- [15] A.E Berger et al, Numerical solution of a diffusion consumption problem with a free boundary, *SIAM J.Numer.Anal* 12(1975) 646-672.
- [16] R.S. Gupta et D.Kumar, Complete numerical solution of the oxygen diffusion problem involving a moving boundary comput. *Meths- Appl. Mech-Engrg.*29(1981)233-239.
- [17] MJ. Baines, JV. Miller, KW. Morton, 1978. A finite element moving boundary computation with an adaptive mesh. *IMA J Appl Math.* 22(4) :467–477.
- [18] R.M.Furzeland, A comparative study of numerical methods for moving boundary *J.Inst.Maths.Applics* 26 (1980), pp.411-429.
- [19] A.Bouregghda, "Numerical solution of the oxygen diffusion in absorbing tissue with a moving boundary". In : *Commun. Numer. Meth. Engng* 22 (2006), pp. 933-942.
- [20] A.Bouregghda, "Numerical solution of the oxygen diffusion problem in cylindrically shaped sections of tissue". In : *Int.J.Numer.Meth.Fluids* 56 (2008), pp. 1945-1960.
- [21] A.Bouregghda, "Solution of an ice melting problem using a fixed domain method with a moving boundary". In : *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie.* 62 (2019), pp. 341-353.
- [22] A.Bouregghda, "Moving boundary value problems, Doctorat en Sciences Mathématiques". Ph.D thesis. between Department of Mathematics, Ferhat ABBAS University Sétif Algeria and LMIA Haute Alsace University Mulhouse France, 2008.
- [23] J.Crank and R.S.Gupta, A method for solving moving boundary problems in heat flow using cubic splines or polynomials *J.Inst. Maths. Applics.* 10 (1972), pp.296-304.
- [24] E.C.Du Fort and S.P.Frankel, Conditions in the Numerical Treatment of Parabolic Differential Equations, *Mathematical Tables and Other Aids to Computation.* 7 (1953). pp.135-152.
- [25] N. Djellab and A. Bouregghda (2022), A moving boundary model for oxygen diffusion in a sick cell, *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, DOI : 10.1080/10255842.2021.2024168. 25(12) pp 1402-1408
- [26] J.Stefan, "Ueber einige Probleme der Theorie der Waermeleitung, S.-B. Wien". In :*Akad. Mat. Na-tur* 98 (1889), pp. 173-184.
- [27] J. Douglas and T.M Gallie, "On the Numerical Integration of a Parabolic Differential Equation Subject to a Moving Boundary Condition", in : *Duke.Math.J* 22 (1955),pp. 557-571.
- [28] J.R.Ockendon and W.R.Hodgkins, eds. *Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion.* Proc.Oxford Conf.March 1974. Clarendon Press Oxford, 1975.

- [29] A.Bouregghda, "A modified variable time step method for solving melting problem". In : Journal of Difference Equations and Application 1.(9) (Sept. 2012) pp. 1443-1455.
- [30] D.F. Mayers H.O. Dahmardah, "A fourier-series solution of the Crank-Gupta equation". In : IMA J. Numer. Anal 3 (1983), pp. 81-85.
- [31] M .Abbaszadeh, 2019. Error estimate of second-order finite difference scheme for solving the riesz space distributed-order diffusion equation. Appl. Math. Lett. 88 :179–185.
- [32] M. Abbaszadeh, M. Dehghan, 2015. A meshless numerical procedure for solving fractional reaction subdiffusion model via a new combination of alternating direction implicit (adi) approach and interpolating element free galerkin (EFG) method. Comput. Math. Appl. 70(10) : 2493–2512.
- [33] R.S.Gupta and N.C.Banik, Approximate method for the oxygen diffusion problem Int.J. Heat Mass Transfer. 32 (1989), pp.781-783.
- [34] S.Çatal, Numerical approximation for the oxygen diffusion problem Appl.Math.comp. 145 (2003), pp.361-369.

العنوان: الحل العددي لمسائل المعادلات التفاضلية الجزئية من علم الأحياء والطب.

ملخص : يتم الحصول على الحلول التحليلية التقريبية والحلول العددية للمعادلة التفاضلية الجزئية التي تصف انتشار الأكسجين في وسط ماص. ترتبط الصعوبات الرياضية الأساسية بوجود حد متحرك يشير إلى أقصى تغلغل للأكسجين في الوسط وأيضاً بالحاجة إلى السماح بالتوزيع الأولي للأكسجين عبر الوسط. النتائج المحسوبة من طرق مختلفة يتم مقارنتها مع بعضها البعض ووجد أنها في توافق جيد للغاية.

كلمات مفتاحية: مسألة الحدود الحرة، مسألة الحدود المتحركة، مسألة ستيفان، طريقة التكامل المقيدة، طريقة الفروق المحدودة، امتصاص، انتشار الأكسجين.

Title: NUMERICAL RESOLUTION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS PROBLEMS FROM BIOLOGY AND MADICINE.

Abstract

Approximate analytical solutions and numerical solutions of a partial differential equation are obtained which describe the diffusion of oxygen in an absorbing medium. Essential mathematical difficulties are linked with the presence of a moving boundary which marks the furthest penetration of oxygen into the medium and also with the need to allow an initial distribution of oxygen through the medium. The results calculated from different methods are compared with each other and found to be in very good agreement.

Keywords: Free boundary problem, Moving boundary problem, Stefan problem, Constrained integral method, Finite difference method, Absorption, Oxygen diffusion.

Titre : RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ISSUS DE LA BIOLOGIE ET LA MÉDECINE.

Résumé : Les solutions analytiques approximatives et les solutions numériques d'une équation aux dérivées partielles sont obtenus qui décrivent la diffusion de l'oxygène dans un milieu absorbant. Des difficultés mathématiques essentielles sont liées avec la présence d'une frontière mobile qui marque la plus éloignée pénétration de l'oxygène dans le milieu et aussi avec la nécessité de permettre une distribution initiale d'oxygène à travers le milieu. Les résultats calculés à partir de différentes méthodes sont comparés les uns aux autres et s'avèrent être en très bon accord.

Mots-clés: Problème à frontière libre, Problème à frontière mobile, Problème de Stefan, Méthode intégrale contrainte, Méthode des différences finies, Absorption, Diffusion d'oxygène.