Table des matières

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE SETIF

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre : Série :

THESE

présentée pour obtenir le diplôme de

Doctorat LMD

Spécialité : Physique

Option : Physique Théorique

par

Sara Cheniti

THEME

Théorème adiabatique et phase géométrique pour les systèmes pseudo-hermitique

Soutenue le :02/10/2021

Devant le Jury :

Président :	A. Aibeche	Prof	UFA.Setif 1
Rapporteur :	M.Maamache	Prof.	UFA.Setif 1
Examinateurs :	A. Bounames	Prof	Univ. Jijel
	N. Ferkous	MCA	Univ. Jijel
	M. Diffalah	MCA	Univ. El Oued

Remerciements

Je ne saurais exprimer toute ma gratitude et mes sentiments les plus sincères à l'égard de mon directeur de thèse Prof. *MUSTAPHA MAAMACHE* qui m'a accompagné tout au long de ma thèse. Sa patience, ses judicieux conseils et ses capacités d'analyses rigoureuses seront pour moi un exemple à suivre. Je lui suis infiniment redevable du temps qu'il m'a consacré et infiniment honoré de la confiance dont il m'a portée.

Je voudrais remercier le Prof. *A. AIBECHE* qui a accepté de présider le jury de ma thèse.

J'adresse mes sincère remerciements à Messieurs *A. BOUNAMES, N. FERKOUS* et Mr. *M . DIFFALAH* , qui ont accepté d'examiner ma thèse sans oublier tous mes enseignants qui ont contribués à ma formation dés l'école primaire jusqu'à l'université.

Enfin, je suis reconnaissante à ma famille qui a été toujours à mes côtés.

Introduction

La mécanique quantique joue un rôle prépondérant dans le monde de la physique contemporaine. La puissance de la théorie quantique a prouvé au fil des années que les particules à l'échelle atomique, qui constituent la matière, agissent de telle façon que la mécanique quantique prévoit. L'avénement de cette théorie a suscité bien des controverses, des débats et qui a boulversé à jamais notre vision du monde et de nos sens, elle ne cesse de croitre et de se solidifier sans jamais être remise en cause près de cent ans plus tard et il n'est vraisemblablement plus nécéssaire d'en vanter les mérites.

Aujourd'hui la mécanique quantique constitue une partie importante pour la compréhension des phénomènes physique à l'échelle microscopique où l'évolution des grandeurs physique fait appel à la notion d'opérateurs et de valeures propres associées à ces opérateurs. La physique quantique est au cœur de la technologie moderne.

Nous pouvons d'emblée énoncer les postulats qui régissent les fondements de la mécanique quantique *[1]*;

Premier Postulat : Notion d'état d'un système

L'état d'un système à un instant t donné est complétement contenu dans un vecteur d'état représenté par un ket $|\psi(t)\rangle$ appartenant à l'espace des états.

Deuxième Postulat : Notion d'observable

Toute grandeur physique mesurable A est représentée par un opérateur Â agissant dans l'espace des états. Cet opérateur Â est une observable.

Troisième Postulat : Mesure d'une grandeur physique

La mesure d'une grandeur physique représentée par un opérateur Â ne peut donner que l'une des valeurs propres de l'opérateur Â corresepondant.

Quatrième Postulat : Principe de décomposition spectrale

La probabilité avec laquelle on peut trouver a_n comme résultat de la mesure de A, noté $P\left(a_n\right)$, dépend de l'état du système physique $|\psi\rangle$. L'état du système physique après la mesure est la projection normée de $|\psi\rangle$ sur $|u_n\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n \left|u_n\right\rangle, \qquad \left(\langle\psi \mid \psi\rangle = 1\right), \tag{1}$$

où $|u_n\rangle$ est un état propre de l'observable A associé à la valeur propre a_n

$$A\,|u_n\rangle = a_n\,|u_n\rangle\,, \tag{2}$$

la probabilité $P\,(a_n)$ d'obtenir la valeur propre non dégénérée a_n

$$P\,(a_n) = |\langle u_n|\ \psi\rangle|^2\,. \tag{3}$$

avec

$$\langle u_n|\ \psi\rangle = \langle u_n \left| \sum_m c_m u_m \right\rangle = c_n, \tag{4}$$

tel que la probabilité de mesure $P\,(a_n)$ est égale à

$$P\,(a_n) = |c_n|^2\,. \tag{5}$$

Cinquième Postulat : Réduction du paquet d'ondes

Si la mesure de l'observable Â donne le résultat a_m dans l'état $|\psi\rangle$, alors, immédiatemeent après cette mesure, l'état du système est la projection normalisée, $\frac{P_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_m|\psi\rangle}}$, de $|\psi\rangle$ sur le sous-espace assosciè à a_m.

Sixième Postulat : Evolution des systèmes dans le temps

L'évolution de l'état $|\psi(t)\rangle$ d'un système dans le temps est gouvernée par l'équation de Schrödinger, à savoir ;

$$i\hbar\frac{d}{dt}\,|\psi(t)\rangle = H(t)\,|\psi(t)\rangle\,, \tag{6}$$

où $H(t)$ est l'opérateur (observable) associé à l'énérgie totale du système.

En effet, si l'Hamiltonien est hermitien $H = H^+$, celui-ci assure l'unitarité de l'opérateur d'évolution et la réalité du spectre d'énergie. Nous pouvons parcourir quelques notions de base définis pour un Hamiltonien hermitien de la mécanique quantique usuelle.

- L'espace des états sur lequel agissent les vecteurs d'état $|\psi\rangle$ est un espace de Hilbert $\aleph$, de dimension finie ou infinie. Le produit scalaire est défini postive dans cet espace $\aleph$:

$$\langle\varphi\,|\psi\rangle = \int dx\,[\varphi(x)]^*\,\psi(x). \tag{7}$$

Ce produit scalaire hermitien adopte les propriétés suivantes :

$$\langle\varphi\,|\psi\rangle^* = \langle\psi\,|\varphi\rangle\,, \tag{8}$$

$$\langle \varphi | \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 \rangle = \lambda_1 \langle \varphi | \psi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \varphi | \psi_2 \rangle , \tag{9}$$

$$\langle \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 | \psi \rangle = \lambda_1^* \langle \varphi_1 | \psi \rangle + \lambda_2^* \langle \varphi_2 | \psi \rangle , \tag{10}$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = 0 \Longleftrightarrow |\psi\rangle = 0. \tag{11}$$

- Les états propres d'un Hamiltonien hermitien sont orthonormés. Autrement dit, le produit scalaire de deux vecteurs propres ayant différentes valeurs propres est nul :

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle = 0 \ , \ \ m \neq n. \tag{12}$$

- Ainsi, la norme des vecteurs propres d'un Hamiltonien hermitien est positive, c'est à dire qu'on peut normaliser tous les vecteurs propres de H de sorte que la norme soit égale à l'unité :

$$\langle \psi_n | \psi_n \rangle = 1. \tag{13}$$

- Les états propres d'un hamiltonien hermitien forment une base complète, elle engendre tout l'espace vectoriel. Ce qui signifie qu'un vecteur quelconque dans l'espace de Hilbert peut être exprimé comme une combinaison linéaire des états propres de H. La relation de fermeture est exprimée par :

$$\sum |\psi_n\rangle \langle \psi_n| = 1. \tag{14}$$

On peut utiliser la fonction delta de Dirac pour réecrire la relation de fermeture sous la forme suivante :

$$\sum_n [\psi_n(x)]^* \psi_n(y) = \delta(x-y) . \tag{15}$$

- La définition d'un opérateur adjoint A^+ d'un opérateur A quelconque est donnée par :

$$\left\langle A^+ \varphi | \psi \right\rangle = \langle \varphi | A \psi \rangle \ \ , \quad \forall |\varphi\rangle , |\psi\rangle . \tag{16}$$

Un opérateur A est dit hermitique si et seulement si $A = A^+$. Ce qui résulte :

$$\langle \varphi | A |\psi\rangle^* = \langle \psi | A^+ |\varphi\rangle . \tag{17}$$

La valeur moyenne d'une observable A est par définition :

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A |\psi\rangle , \tag{18}$$

et l'écart quadratique de A est donné par :

$$(\Delta A)^2 = \langle\psi| A^2 |\psi\rangle - \langle\psi| A |\psi\rangle^2 . \tag{19}$$

- Supposons que H est un Hamiltonien hermitien, à l'instant t_0 le vecteur $|\psi(t_0)\rangle$ évolue vers l'état $|\psi(t)\rangle$ dans l'espace de Hilbert qui est détérminé par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle \tag{20}$$

Si H est indépendant du temps, soit par intégration :

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\psi(t_0)\rangle , \tag{21}$$

où l'opérateur d'évolution $U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$ est unitaire.

Alors comme conséquence, le produit scalaire est conservé au cours du temps ;

$$\langle\psi(t) |\psi(t)\rangle = \langle\psi(t_0) |\psi(t_0)\rangle , \tag{22}$$

autrement dit, sa dérivée par rapport au temps est nulle, quel que soit l'état de départ :

$$\frac{d}{dt} ||\psi(t)||^2 = \frac{d}{dt} \langle\psi(t) |\psi(t)\rangle = 0. \tag{23}$$

D'où la nécéssité que la norme du vecteur d'état d'un système soit conservée au cours du temps ;

$$||\psi(t)||^2 = 1. \tag{24}$$

Maintenant que nous avons fait le tour de quelques concepts de base de la mécanique quantique hermitienne, introduisant les systèmes quantique dépendants du temps qui jouent un rôle de premier plan en physique.

Rappelons qu'en mécanique quantique, la dynamique des systèmes fermés est gouvernée par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H(t) |\psi\rangle \tag{25}$$

où $H(t)$ est le Hamiltonien du système et $|\psi\rangle$, vecteur dans un espace de Hilbert, représente l'état quantique du système. La résolution de cette équation nous donne l'état du système $|\psi(t)\rangle$, l'objet d'intérêt en mécanique quantique qui nous sert à prédire les résultats possibles lors d'une mesure (au temps t) d'une observable ainsi que les probabilités relatives associées à ces résultats.

Dans un contexte général, le Hamiltonien $H(t)$ est un opérateur qui peut dépendre du temps t, et l'équation de Schrödinger peut s'avérer très difficile à résoudre. En fait, avec un Hamiltonien qui dépend du temps, il existe très peu de systèmes réels pour lesquels on peut résoudre exactement l'équation. Par contre, dans certains cas, on peut utiliser des méthodes d'approximation pour trouver l'état $|\psi(t)\rangle$. Deux d'entre elles sont la théorie des perturbations et l'approximation soudaine (lors d'un changement brusque du Hamiltonien, sur une courte durée). Cette thèse, quant à elle, porte sur une autre de ces méthodes : l'approxirnation adiabatique dans les cas hermitique ou pseudo-hermitique.

Dans certains cas (i.e. pour certains systèmes), on peut utiliser l'approximation adiabatique afin d'estimer l'état quantique du système $|\psi(t)\rangle$. L'expression "dans certains cas" sous-entend qu'il existe un critère pour distinguer les systèmes pour lesquels ou peut utiliser l'approximation adiabatique des autres systèmes pour lesquels on ne peut pas.

Permettons-nous, afin d'aborder le coeur de cette thèse, de commencer par présenter un portrait du théorème et de l'approximation adiabatique,

Chapitre 1

Théorème adiabatique pour les systèmes hermitiens

1.1 Approximation adiabatique

L'approximation adiabatique est basée sur une propriété des systèmes quantiques nommée à toutes fins pratiques : le théorème adiabatique. Le théorème adiabatique est parfois attribué à Paul Ehrenfest, mais la première preuve du théorème dans le cadre de la mécanique quantique moderne fut donnée par Max Born et Vladimir Fock en 1928 [2]. Qualitativement, ce théorème stipule que : pour un système fermé dont le Hamiltonien varie infiniment lentement ("varie infiniment lentement" devra être précisé quantitativement,), l'évotution de l'état du système dans le temps préserve les sous-espaces spectraux associés à chaque valeur propre du Hamiltonien. Autrement dit, un état du système appartenant initialement (à $t = 0$) à un sous-espace spectral associé à une certaine valeur propre du Hamiltonien évoluera vers un état appartenant au sous-espace correspondant au temps t.

Dans les débuts de la mécanique quantique, dans une publication qui date de 1928, un concept très important en mécanique quantique concerne les systèmes quantiques décrits par un hamiltonien dépendant explicitement du temps c'est le théorème adiabatique, sa forme originale énoncée par Max Born et Vladimir Fock [2], qui l'ont montré pour les hamiltoniens bornés ayant des spectres purement discret et non dégénérés ; sa généralisation pour les systèmes quantiques décrits par un hamiltonien possèdant un spectre continu a été fait en 2008 par M. Maamache et Y. Saadi [3] .

1.2 Enoncé du théorème adiabatique

Mathématiquement, le théorème s'exprime comme suit, nous suivons l'argument de A. Messiah [5], ici.' Considérons un système décrit par un Hamiltonien $H(t)$ variant infiniment lentement. Cette condition peut s'écrire comme ceci. Soit $\tilde{H}(s)$, un Hamiltonien sans dimension, fonction d'un paramètre sans dimension s. Cet Hamiltonien sans dimension est relié au Hamiltonien du système de la façon suivante

$$H(t) = E\tilde{H}(t/T) \tag{1.1}$$

où E est une constante non nulle ayant une dimension d'énergie et T un paramètre ayant des unités de temps. Ici, le paramètre T est relié à l'échelle de temps sur laquelle l'opérateur change ou, autrement dit, à la “vitesse” avec laquelle l'opérateur $H(t)$ change dans le temps. En prenant la limite $T \to \infty$, on arrive à représenter un Hamiltonien $H(t)$ variant "infiniment lentement".

Maintenant., voici $E_1(t)$, $E_2(t)$, . . . , $E_j(t)$, . . . , l'ensemble des valeurs propres instantanées (en temps t) du Hamiltonien du système $H(t)$ et $P_1(t)$, $P_2(t)$, . . . , $P_j(t)$, . . . , les projecteurs sur les sous-espaces associés. (Quoi que pas nécessaire, nous faisons ici l'hypothèse d'un spectre discret pour simplifier.) Une preuve rigoureuse dans le cas du spectre continu se trouve dans [3, 4]. À ces quantités, on peut associer respectivement les quantités sans dimension $\epsilon_1(t/T)$, $\epsilon_2(t/T)$, . . . , $\epsilon_j(t/T)$, . . et $\tilde{P}_1(t)$, $\tilde{P}_2(t)$, . . . , $\tilde{P}_j(t)$, . . . , où $\epsilon_j(t/T) = E_j(t)/E$. Si on peut faire les deux hypothèses suivantes :

1) Les valeurs propres instantanées $\epsilon_j(s)$ de $H(s)$ sont des fonctions continues de s, et reste isolées distinctes les unes des autre pendant la période d'évolution $0 \leq s \leq 1$ i.e. $|E_n(s) - E_m(s)|\rangle 0 \ \forall m, n$.

2) Les dérivées $\frac{d}{ds}\tilde{P}_j(s)$, $\frac{d^2}{ds^2}\tilde{P}_j(s)$ sont définies et continues dans tout l'intervalle de $s \in [0, 1]$, alors, le théorème adiabatique dont une preuve rigoureuse se trouve dans [5] s'exprime comme

suit

$\forall j$:

$$\lim_{T\to\infty} \tilde{U}_T(s)\tilde{P}_j(0) = \tilde{P}_j(s) \lim_{T\to\infty} \tilde{U}_T(s) \tag{1.2}$$

où $\tilde{U}_T(t/T)$ est l'opérateur d'évolution associé au Hamiltonien sans dimension $\tilde{H}(t/T)$. Donc, si le système est initialement dans un état propre $|n(0)\rangle$ d'un tel Hamiltonien, associé à la valeur propre $E_n(0)$, le théorème adiabatique nous indique qu'il évoluera au temps t vers l'état $|\psi(t)\rangle$ associé à la valeur propre $E_n(t)$ qui se déduisent par continuité à partir de $|n(0)\rangle$ et $E_n(0)$. C'est à cette propriété que l'on se référera dans la suite en évoquant "un théorème adiabatique". Une des conditions pour avoir un tel théorème est que le sous-spectre en question reste isolé tout au long du temps du reste du spectre de l'Hamiltonien, c'est-'a-dire qu'il existe un gap minimum entre ce sous-spectre et son complémentaire. D'où le terme adiabatique : le système ne peut franchir ce gap.

Quoique très puissant, le théorème adiabatique en tant que tel est très peu utile car aucun système réel ne varie infiniment lentement. Par contre, si le Hamiltonien du système varie suffisament lentement, il est possible d'approximer l'évolution de l'état dans le sens du théorème adiabatique : c'est l'approximation adiabatique.

Il s'agit maintenant de savoir quelle est la forme de la fonction d'onde lorsque le système satisfait à l'hypothèse adiabatique (1.2). Nous verrons dans ce chapitre que la forme en question fait intervenir une quantité appelée phase de Berry, dont la généralisation va être un élément fondamental de notre modèle mathématique. La phase de Berry est un exemple de phase géométrique. Il existe des contextes différents de l'hypothèse adiabatique où apparaissent ces phases. En particulier, si on sait que l'évolution est cyclique (i.e. $|\psi(T)\rangle = e^{i\varphi}|\psi(0)\rangle$), il apparait une phase géométrique dite de Aharonov-Anandan [6]. Cette situation est assez similaire au cas adiabatique puisque l'équation (1.2) est vérifiée, mais pour $\tilde{P}_j(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$, qui n'a aucune raison d'être un projecteur spectral. La prochaine section de ce chapitre est consacrée à des rappels fondamentaux concernant la phase quantique de Berry qui se manifeste dans l'étude de systèmes quantiques en évolution adiabatique qui dépendent d'un certain nombre de paramètres classiques. Cette phase est reliée à de nombreux phénomènes physiques comme I'effet Aharonov-Bohm [7] par exemple. Elle a été mesurée pour la première fois en tant que telle en 1986 par Chiao et Tomita[8] dans l'étude de la rotation du plan de polarisation d'une onde se propageant dans une fibre optique "twistée". Depuis, elle a été mise en évidence de nombreuses fois, notamment dans des expériences de physique nucléaire [9].

1.2.1 La phase de Berry

En étudiant l'évolution des systèmes physiques quantiques régies par un Hamiltonien dépendant de paramètres qui varient très lentement en fonction du temps, Berry [10] a découvert un effet géométrique relatif à la phase des états stationnaires. Cet effet apporte un complément important à l'énoncé du théorème adiabatique [11] qui stipule qu'un système initialement dans un état stationnaire non dégénéré, repéré par un ensemble donné de nombres quantiques, restera dans un état spécifié par les mêmes nombres quantiques lors d'une évolution adiabatique. Pour fixer les notations soit $H(\overrightarrow{R}(t))$ un Hamiltonien admettant des vecteurs propres non dégénérés $\left\{\mid n, \vec{R}(t)\rangle\right\}$ et de valeurs propres $E_n(\vec{R}(t))$

$$H(\vec{R}(t)) \mid n, \vec{R}(t)\rangle = E_n(\vec{R}(t)) \mid n, \vec{R}(t)\rangle. \tag{1.3}$$

La formulation usuelle du théorème adiabatique exprime que l'état initial $|\psi(0)\rangle =\mid n, \vec{R}(0)\rangle$ état propre de l'Hamiltonien à l'instant zéro $H(\overrightarrow{R}(0))$, évolue en un état $|\psi(t)\rangle$ qui, à tout instant, reste état propre de l'Hamiltonien $H(\vec{R}(t))$. La remarque de Berry est que la phase φ_n de cet état, définit par rapport aux états de référence $\mid n, \vec{R}(t)$ par

$$|\psi(t)\rangle \simeq \exp\left(i\varphi_n(t)\right) \mid n, \vec{R}(t)\rangle, \tag{1.4}$$

est entièrement déterminée si on impose à $|\psi(t)\rangle$ de satisfaire l'équation de Schröndinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle = H(\vec{R}(t))\left|\psi(t)\right\rangle. \tag{1.5}$$

“en moyenne”, c'est-à-dire en projetant cette égalité sur l'état $|\psi(t)\rangle$ lui-même

$$\left\langle\psi(t)\right| i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle = \left\langle\psi(t)\right| H(\vec{R}(t))\left|\psi(t)\right\rangle. \tag{1.6}$$

On obtient alors une expression explicite pour φ_n

$$\varphi_n(t) = [\delta_n(t) + \gamma_n(t)]$$

qui contient deux termes. Le premier , appelé phase dynamique,

$$\delta_n(t) = -\hbar^{-1}\int_0^t E_n(t')dt'; \qquad E_n(t) = \langle n, \vec{R}(t) \mid H(\vec{R}(t) \mid n, \vec{R}(t)\rangle \tag{1.7}$$

est ''attendu" car il est présent même si les paramètres ne dépendent pas du temps. Le second est la phase de Berry donnée par

$$\gamma_n(t) = \int_{\vec{R}(0)}^{\vec{R}(t)} \overrightarrow{A}_n(\vec{R}(t))d\vec{R}; \qquad \overrightarrow{A}_n(\vec{R}(t)) = \langle n, \vec{R}(t) \mid i\nabla_{\vec{R}} \mid n, \vec{R}(t)\rangle. \tag{1.8}$$

(on vérifie que $\overrightarrow{A}_n$ et γ_n sont réels.) Cette phase est aussi appelée phase géométrique. Son caractère géométrique est justifié par le fait que, lorsque les paramètres effectuent (adiabatiquement) un cycle $\mathcal{C}$, γ_n ne dépendant que du chemin suivi dans l'espace des paramètres. En effet, même si on change la base des vecteurs propres de référence par une ''transformation de jauge" $\mid n, \vec{R}\rangle \longrightarrow e^{i\varphi_n(\vec{R})} \mid n, \vec{R}\rangle$, ce qui modifie le ''potentiel vecteur" par un terme de gradient $\vec{A}_n \longrightarrow \vec{A}_n - \nabla_{\vec{R}}\varphi_n(\vec{R})$. (et donc modifie $\gamma_n(t)$), la phase de Berry pour un cycle $\gamma_n(t) = \oint_c \vec{A}_n(\vec{R})d\vec{R}$ reste, elle, inchangée.

L'appellation ''potentiel vecteur" pour $\vec{A}_n$ n'est pas innocente. Pour le voir, il faut remplacer l'intégrale de ligne par une intégrale de surface au moyen du théorème de Stokes :.

$$\begin{aligned} \gamma_n(C) &= \oint_c \vec{A}_n(\vec{R})d\vec{R} = -\operatorname{Im}\iint_s d\vec{S}.\vec{\nabla}\times\vec{A}_n \\ &= -\operatorname{Im}\iint_s d\vec{S}.\langle\vec{\nabla}_n, \vec{R} \mid \times \mid \vec{\nabla}_n, \vec{R}\rangle \end{aligned} \tag{1.9}$$

où $\times$ est le produit vectoriel habituel. La relation de fermeture donne

$$\gamma_n(C) = -\operatorname{Im}\iint_s d\vec{S}.\sum_{m\neq n}\langle\vec{\nabla}_n, \vec{R} \mid \times \mid m, \vec{R}\rangle \times \langle m, \vec{R} \mid \vec{\nabla} \mid n, \vec{R}\rangle$$

La réduction de la somme à $m \neq n$ est due au fait que l'état intermédiaire $m = n$ n'apporte aucune contribution puisque la connection $\langle n, \vec{R}(t) \mid \nabla_{\vec{R}} \mid n, \vec{R}(t)\rangle$ est purement imaginaire. Comme

$$\langle m, \vec{R} \mid \vec{\nabla}_{\vec{R}} \mid n, \vec{R}\rangle = \frac{\langle m, \vec{R}(t) \mid \vec{\nabla}_{\vec{R}}H(\vec{R}) \mid n, \vec{R}(t)\rangle}{E_n(t') - E_m(t')}, \qquad m \neq n \tag{1.10}$$

la phase de Berry peut s'écrire sous forme d'une expression analogue à celle du flux magnétique en électromagnétisme

$$\gamma_n(C) = \iint d\vec{S}.\vec{V}_n \tag{1.11}$$

où le champ $\vec{V}_n$ est l'analogue du champ magnétique et donc de la courbure dans l'espace des paramètres :

$$\vec{V}_n = -\operatorname{Im}\sum_{m\neq n} \frac{\langle n,\vec{R} \mid \vec{\nabla}_{\vec{R}}H(\vec{R}) \mid m,\vec{R}\rangle \times \langle m,\vec{R} \mid \vec{\nabla}_{\vec{R}}H(\vec{R}) \mid n,\vec{R}\rangle}{(E_m(\vec{R})-E_n(\vec{R}))^2}, \tag{1.12}$$

Signalons enfin qu'un tel potentiel avait aussi été introduit par Mead et Truhlar [40] pour décrire, dans le cadre de l'approximation de Born-Oppenheimer, la rétroaction sur les mouvements des noyaux de la phase induite sur les états électroniques par ce même mouvement. On le rencontre chaque fois que dans un problème quantique où il est possible de séparer des variables lentes et des variables rapides.

1.2.2 Exemple

L'exemple, déjà considéré par Berry, est celui d'un spin $\overrightarrow{J}$ placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}(t)$ et décrit par l'Hamiltonien

$$H(t) = \overrightarrow{B}(t).\overrightarrow{J}. \tag{1.13}$$

Comme la phase de Berry est une propriété des états stationnaires, et ne change donc pas si on remplace $H(t)$ par $\lambda(t)H(t)$ ($\lambda \neq 0$), on peut choisir pour espace des paramètres la sphère $\left\|\overrightarrow{B}\right\|^2 = 1$ et le paramètrer à l'aide des coordonnées sphériques (θ,φ). $H(t)$ étant alors déduit de l'Hamiltonien J_z par une rotation qui amène l'axe z dans la direction (θ,φ) du champ

$$H(\theta,\varphi) = \exp(-i\varphi J_z)\exp(-i\theta J_y).J_z.\exp(i\theta J_y)\exp(i\varphi J_z) \tag{1.14}$$

ses états propres sont déduits des états ''standards" $|J,m\rangle$ par cette rotation. Un choix possible d'états propres de référence est

$$|Jm,\theta\varphi\rangle = \exp(-i\varphi(J_z-m))\exp(-i\theta J_y)\,|Jm\rangle\,. \tag{1.15}$$

Ces états sont bien définis tant que θ est différent de π . Utilisant les relations $\langle Jm,\theta\varphi \mid i\partial_\varphi \; |Jm,\theta\varphi\rangle = m(\cos\theta-1)$ et $\langle Jm,\theta\varphi \mid i\partial_\theta \; |Jm,\theta\varphi\rangle = 0$ on déduit que, pour un cycle, la phase de Berry s'exprime en fonction de l'angle solide sous lequel est vu (du centre de la sphère) le chemin fermé $\mathcal{C}$ parcouru par les paramètres :

$$\gamma_m(C) = -m\Omega(\mathcal{C}). \tag{1.16}$$

Le cas $m = J$ correspond aux états cohérents atomiques dont les applications multiples dans la physique des interactions matière-rayonnement sont bien connues.

1.2.3 Phase de Berry un exemple expérimental

Le but de ce paragraphe n'est pas de présenter une revue exhaustive de la situation expérimentale relative à la mise en évidence des phases géométriques. Une telle revue, dépasse le cadre de cette thèse, mais montre que la phase de Berry se manifeste dans tous les domaines, de la physique nucléaire à l'optique guidée en passant par la physique atomique. Il s'agit ici, plus simplement, d'illustrer l'exposé purement théorique qui précède en décrivant une expérience, celle réalisée par Bitter et Dubbers [12], que nous avons choisie en raison de la simplicité de son principe et donc de son intérêt pédagogique. La présentation qui en est faite ci-dessous est largement inspirée de celle donnée par Berry [13] dans son cours à la ''Ferrara School of Theoretical Physics".

Cette expérience (comme beaucoup d'autres) consiste à vérifier la formule de l'angle solide $\gamma_m(C) = -m\Omega(\mathcal{C})$ établie au paragraphe précédent. Pour ce faire, un faisceau de neutrons ($m = 1/2$) lents polarisés est soumis, dans une région de longueur L, à l'action conjuguée de deux champs magnétiques statiques. Le premier $\overrightarrow{B}_1$ est un champ hélicoidal perpendiculaire à l'axe oy de propagation du faisceau. Le second B_y est un champ uniforme parallèle à oy. Le champ résultant $\overrightarrow{B}$, de module constant, est donc de la forme :

$$\overrightarrow{B}(y) = \left|\overrightarrow{B}\right| \left[\sin\theta\cos\frac{2\pi y}{L}, \cos\theta, \sin\theta\sin\frac{2\pi y}{L}\right] \qquad (0 \leq y \leq L).$$

Durant leur mouvement les neutrons ''voient" un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ tournant qui décrit un contour fermé $\mathcal{C}$ dans l'espace des paramètres (sphère de rayon $\left|\overrightarrow{B}\right|$). Lorsque B_y est nul, le contour $\mathcal{C}_0$ est un grand cercle qui est vu du centre de la sphère sous un angle solide $\Omega(\mathcal{C}_0) = 2\pi$.

Pour $B_y \neq 0$, la variation de l'angle solide $\Omega(\mathcal{C}) = 2\pi(1 - \cos\theta)$ est obtenue en faisant varier le rapport $\tan\theta =.\left|\overrightarrow{B}_1\right| / B_y$.

Dans une telle configuration de champ magnétique, la polarisation initiale $\overrightarrow{P}(0)$ d'un neutron va tourner pour devenir $\overrightarrow{P}(L)$ à la sortie du dispositif. La mesure de la phase géométrique γ se déduit alors directement de la mesure de la rotation du vecteur $\overrightarrow{P}$ (sans qu'il soit nécessaire de faire appel à un dispositif interférentiel comme dans de nombreuses autres expériences). En effet, considérons un neutron initialement polarisé suivant oz. Son état $|\psi(0)\rangle$ s'écrit dans la base des vecteurs propres $| \pm, \overrightarrow{B}(0)\rangle$ du Hamiltonien $H(0) = \mu \overrightarrow{\sigma} \overrightarrow{B}(0)$:

$$|\psi(0)\rangle = \cos\frac{\theta}{2} \mid +, \overrightarrow{B}(0)\rangle + \sin\frac{\theta}{2} \mid -, \overrightarrow{B}(0)\rangle. \tag{1.17}$$

L'évolution adiabatique cyclique des états $| \pm, \overrightarrow{B}(0)\rangle$ étant donnée par :

$$| \pm, \overrightarrow{B}(0)\rangle \rightarrow e^{\mp i\varphi} \mid \pm, \overrightarrow{B}(0)\rangle \tag{1.18}$$

avec :

$$\varphi = \frac{1}{2\hbar}\mu \left|\overrightarrow{B}\right| T + \frac{1}{2}\Omega(\mathcal{C}) \tag{1.19}$$

(T : durée du cycle égale au temps de vol des neutrons), on en déduit l'expression de l'état final $|\psi(L)\rangle$

$$|\psi(L)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \mid +, \overrightarrow{B}(0)\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{+i\varphi} \mid -, \overrightarrow{B}(0)\rangle. \tag{1.20}$$

En plaçant un analyseur suivant oz à la sortie des dispositifs, on mesure $P_z(L)$:

$$P_z(L) = \langle\psi(L)| \,\sigma_z\, |\psi(L)\rangle = \frac{1}{2}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos 2\varphi\right). \tag{1.21}$$

L'une des expériences réalisées par Bitter et Dubbers à l'aide de leur dispositif consiste précisément à étudier les variations de $P_z(L)$ en fonction de $\left|\overrightarrow{B}_1\right|$ lorsque $B_y = 0$. Dans ces conditions $\theta = \pi/2$ et $P_z(L) =. \frac{1}{2}\cos 2\varphi$.Comme dans l'expression de la phase totale φ seule la partie dynamique $\frac{\mu}{2\hbar}\left|\overrightarrow{B}\right| T$ dépend du champ appliqué, il est facile, à partir de détermination expérimentale des variations de $P_z(L)$, de remonter à celle de la phase géométrique γ (qui dans cette configuration doit être égale à π : $\Omega(\mathcal{C}_0) = 2\pi$).

1.2.4 Système à deux niveaux

Soit un système à deux niveaux est décrit par l'Hamiltonien hermitique suivant

$$H(t)=\begin{pmatrix}\varepsilon(t) & \gamma(t)\\ \gamma^*(t) & -\varepsilon(t)\end{pmatrix}\tag{1.22}$$

où les paramètres γ et ε sont dépendants lentement du temps et $\varepsilon(t)=\varepsilon^*(t)$. Les états propres de $H(t)$ sont donnés par

$$\left|\varphi_+\right\rangle = \frac{1}{\left[|\gamma|^2+(\varepsilon-\omega)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\begin{pmatrix}\gamma(t)\\ -(\varepsilon-\omega_+)\end{pmatrix}\tag{1.23}$$

$$\left|\varphi_-\right\rangle = \frac{1}{\left[|\gamma|^2+(\varepsilon+\omega)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\begin{pmatrix}\gamma(t)\\ -(\varepsilon+\omega_-)\end{pmatrix}\tag{1.24}$$

dont les valeurs propres correspondantes sont $E_\pm=\pm\omega=\pm\sqrt{\varepsilon^2+|\gamma|^2}$. avec $(\hbar=1)$

le calcul de la phase de Berry pour l'état $\left|\varphi_+\right\rangle$ conduit à

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_+(t) &= \left\langle\varphi_+\right| i\partial_t\left|\varphi_+\right\rangle = i\frac{1}{\left[|\gamma|^2+(\varepsilon-\omega)^2\right]}\left(\frac{\gamma^*\dot{\gamma}-\dot{\gamma}^*\gamma}{2}\right)\\ &= -i\frac{1}{\left[|\gamma|^2+(\varepsilon-\omega)^2\right]}\left(\frac{\dot{\gamma}^*\gamma-\gamma^*\dot{\gamma}}{2}\right)\\ &= -\frac{i}{2}\frac{\gamma^2}{\left[|\gamma|^2+(\varepsilon-\omega)^2\right]}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\gamma^*}{\gamma}\right)\end{aligned}\tag{1.25}$$

le calcul de la phase de Berry pour l'état $\left|\varphi_-\right\rangle$ conduit à

$$\dot{\beta}_-(t)=\left\langle\varphi_-\right| i\partial_t\left|\varphi_-\right\rangle = -\frac{i}{2}\frac{\gamma^2}{\left[|\gamma|^2+(\varepsilon+\omega)^2\right]}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\gamma^*}{\gamma}\right)$$

la phase de Berry

$$\dot{\beta}_\pm(t)=-\frac{i}{2}\frac{\gamma^2}{\left[|\gamma|^2+(\varepsilon\pm\omega)^2\right]}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\gamma^*}{\gamma}\right)\tag{1.26}$$

Notons que cette phase est réelle.

Chapitre 2

Les systèmes non hermitiens

2.1 Les hamiltoniens non hermitiens

2.1.1 Historique de la mécanique quantique non-hermitienne

En 1959, Wu Tai Tsun a publié un article [14] dont l'objectif était de calculer l'énergie de l'état fondamental des sphères de Bose. Wu avait constaté que cette énergie était divergente, afin de résoudre ce problème il avait utilisé un Hamiltonien non hermitien et non diagonalisable. Ce qui est impressionnant dans ce travail est que les valeurs propres de cet Hamiltonien sont réelles, quoique, le papier n'a offert aucune justification pour la représentation de tel Hamiltonien. En 1967, Jack Wong a publié un article [15] dans lequel il a fait la remarque que les Hamiltoniens des systèmes fermés sont décrits par des Hamiltoniens hermitiens, cependant, l'Hamiltonien perd son hermiticité lorsqu'une interaction externe est considérée. Ces Hamiltoniens peuvent avoir une partie du spectre qui est discrète, de plus, les valeurs propres qui sont complexes semblent être admis pourtant il n'y a pas d'explication de la façon dont elles pourraient probablement être physiquement raisonnable. Ces hamiltoniens seraient du type perturbé ayant la forme généralisée :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}^{(1)}$$

où $\hat{H}_0$ est hamiltonien hermitien et $\hat{H}^{(1)}$ est le terme de perturbation.

Tout au long des articles mentionnés ici, il n'y avait aucune base fondamentale ou analytique sur laquelle les théories non hermitiennes ont été choisir, c'est-à-dire, il n'existe aucune explication quant à la manière dont elle pourrait être physiquement raisonnable.

Les théories non-hermitiennes avec des spectres réels que ne possèdent aucune sorte de base analytique ne figuraient pas dans la littérature jusqu'en 1998 [16].

2.1.2 La PT-symétrie

Parmi les postulats élémentaires de la mécanique quantique remis en cause, on retrouve celui de l'hermiticité ; ce dernier stipule que si un hamiltonien H est hermitien, alors ces valeurs propres sont réelles, c'est-à-dire que les normes des fonctions propres (les probabilités) sont conservées.

En effet la condition d'hermiticité est généralisée à toutes les observables physiques du système en plus de son hamiltonien.

La question qui se pose : la notion de l'hermiticité peut-elle être remplacée par un autre concept physique ? Et cette substitution permettra t-elle d'obtenir les mêmes résultats obtenus par la mécanique quantique ? c'est-à-dire un spectre d'énergie défini réel et positif ?

Ce pendant, ces dernières années, un intérêt particulier a été porté aux hamiltoniens non hermitiens. Leur particularité est qu'ils ont un spectre en énergie réel malgré leur caractère complexe.

En 1998, Bender et collaborateurs [16, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 37] proposent pour la première fois une famille d'hamiltoniens à une dimension

$$H = P^2 + x^2(ix)^\varepsilon \tag{2.1}$$

Et montrent que toutes ses valeurs propres sont réelles pour $\varepsilon \geq 0$.

Dans le cas particulier ou $\varepsilon = 0$, l'hamiltonien (2.1) se réduit a celui d'un oscillateur harmonique, avec les niveaux énergétiques $E_n = 2n + 1$; et pour toutes les valeurs de ε il n'est pas nécessairement hermitien.

Pour les valeurs négatives de ε les calcules numériques montrent que le spectre et complexe.

La particularité essentielle de ces hamiltoniens réside dans l'invariance de la symétrie par rapport aux opérateurs simultanés de réflexion de l'espace ou parité P. et de renversement du temps T .

Les deux opérateurs P et$T$ vérifient les propriétés suivantes :

$$P \Rightarrow \begin{cases} PxP = -x, \\ PpP = -p \end{cases} ; \; T \Rightarrow \begin{cases} TxT = x, \\ TpT = -p, \\ TiT = -i \end{cases}$$

Et puisque P et T sont des opérateurs de réflexion, leurs carrés donnent l'opérateur unité :

$$P^2 = T^2 = 1$$

Et ils commutent entre eux :

$$[P, T] = 0$$

Cette double invariance est alors appelée la PT-symétrie et on dit qu'un Hamiltonien H est PT–Symétrique [16, 17, 21, 22, 23] s'il est invariant par la transformation PT, c'est-à-dire

$$H = PTHPT \tag{2.2}$$

Et comme $P^2 = T^2 = 1$

Donc

$$[H, PT] = 0 \tag{2.3}$$

où x et p sont les opérateurs de position et d'impulsion qui obéissent à la relation de commutation suivante

$$[p, x] = i\hbar \tag{2.4}$$

2.1.3 Valeurs propres des Hamiltoniens PT symétriques

Soit l'hamiltonien PT-symétrique H, l'équation aux valeurs propre s'écrit :

$$H\varphi_n(x) = E\varphi_n(x) \tag{2.5}$$

tel que $\varphi_n(x)$ sont les fonctions propres de H, et E_n valeurs propres correspondant.

Si en appliquant l'opérateur PT aux deux membres de (2.5) ;

$$PTH\varphi_n(x) = PTE_n\varphi_n(x) \tag{2.6}$$

Utilisant maintenant la propriété d'invariance de H par la transformation PT l'équation (3.12) devienne :

$$PTH\varphi_n(x) = HPT\varphi_n(x) = E_n^* PT\varphi_n(x) \tag{2.7}$$

Et comme $PT\varphi_n(x)= \varphi_n(x)$, l'équation (2.7)

$$H\varphi_n(x) = E_n^*\varphi_n(x) \tag{2.8}$$

Cette dernière relation, entraine que les valeurs propres sont réelles.

$$E_n = E_n^*$$

La PT-symétrie est donc considérée comme une condition nécessaire pour assurer la réalité du spectre des hamiltoniens non-hermitien.

2.1.4 PT produit scalaire

En mécanique quantique conventionnelle, avec des hamiltoniens hermitiens, la norme d'un vecteur dans l'espace de HILBERT doit être positive et le produit scalaire de deux vecteurs quelconques doit être constant au cours de l'évolution temporelle ; ces deux conditions constituent des propriétés fondamentales pour que la théorie quantique soit valable, trouvera une extension naturelle aux hamiltonien PT-symétrique.

Pour ce faire, il faut que les fonctions propres d'un hamiltonien PT-symétrique engendrent un espace de HILBERT $\aleph$ muni d'un produit scalaire dont la norme est définie positive. Par ailleurs, l'évolution temporelle des états de cet espace doit être unitaire.

Dans ce contexte, Bender a introduit dans un premier temps un produit scalaire [20, 22] dit $\ll$produit scalaire-PT $\gg$ associé aux hamiltonien PT-symétriques.Le produit scalaire de deux fonctions propres quelconques $\varphi_n(x)$ et $\varphi_m(x)$ a été défini, dans le nouveau espace de HILBERT$\aleph$, par

$$\begin{aligned}\langle\varphi_n,\varphi_m\rangle_{PT} &= \int_c dx\left[PT\varphi_n(x)\right]\varphi_m(x)=\int_c dx\varphi_n^*(-x)\varphi_m(x)\\ &= (-1)^n\,\delta_{mn}\end{aligned}\tag{2.9}$$

où C est un certain contour défini dans le plan complexe qui peut être choisi sur l'axe réel et δ_{mn} est le symbôle de KRÖNECKER. Le choix d'une définition pareille pour le produit scalaire des fonctions propres d'un hamiltonien PT-symétrique a été adopté deux raisons fondamentales :

La première est qu'il conduit à une norme indépendante de la phase globale pour toute fonction PT-symétrique et la second c'est justement l'indépendance de cette norme par rapport au temps.

Mais nous voyons que, lorsque $m = n$ les PT-norme des fonctions propres ne sont pas toujours positives [32] ; en effet

$$\begin{aligned}\langle\varphi_n,\varphi_n\rangle_{PT} &= \int dx\varphi_n^*(-x)\varphi_n(x)\\ &= (-1)^n\end{aligned}\tag{2.10}$$

La relation de Fermeture s'écrit en fonction de ces fonctions propres comme suit :

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left|\varphi_n\right\rangle\left\langle\varphi_n\right| = \int_C dx\varphi_n^*(-x)\varphi_n(x) = (-1)^n\tag{2.11}$$

Remarquons que lorsque n est un nombre impaire, la norme (2.10) est négative ; donc on peut dire que la relation (2.9) définissant le produit scalaire est insuffisante pour formuler une théorie quantique valable ; ceci a incité Bender à construire un nouveau produit scalaire avec une norme positive, en multipliant le produit discret PT par l'opérateur C, c'est le CPT produit scalaire.

2.1.5 L'opérateur C et le CPT produit scalaire

Par conséquent l'opérateur linéaire C a été présenté pour décrire cette symétrie.

La notation C de cet opérateur a été utilisé par ce que ses propriétés étaient presque identiques à ceux de l'opérateur de conjugaison de charge dans la théorie quantique des champs.

L'opérateur linéaire C est représente dans l'espace des coordonnées par la somme des fonctions propres de l'hamiltonien [20, 23] :

$$C\,(x,y)=\sum_{n\geq 0}\varphi_n(x)\varphi_n(y) \tag{2.12}$$

Cet opérateur satisfait donc :

$$[C,H]=[C,PT]=0 \tag{2.13}$$

et

$$C^2=1 \tag{2.14}$$

La dernière propriété ; telles que les valeurs propres de C sont ± 1, l'action de C sur les fonctions propres de H est donnée par :

$$C\varphi_n(x)=(-1)^n\,\varphi_n(x) \tag{2.15}$$

Et comme l'opérateur C commute avec l'opérateur PT,

$$\begin{aligned} CPT\varphi_n(x) &= (-1)^n\,C\varphi_n(x)=(-1)^{2n}\,\varphi_n(x) \\ &= \varphi_n(x). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Donc le problème de norme négative est bien résolu et le CPT produit scalaire [19, 23, 35] est :

$$\langle\varphi_n,\varphi_m\rangle_{CPT}=\int dx\,[CPT\varphi_n(x)]\,\varphi_m(x) \tag{2.17}$$

ou

$$CPT\varphi_n(x)=\int dyC\,(x,y)\,\varphi_n^*(-y) \tag{2.18}$$

donc

$$\langle\varphi_n,\varphi_m\rangle_{CPT}=\delta_{mn} \tag{2.19}$$

Le CPT produit scalaire est définit positif, et les fonctions propres de H sont orthogonales.

2.2 Pseudo hermiticité

En mécanique quantique l'hermiticité de l'hamiltonien est le moyen sure par excellence garantissant principalement la réalité du spectre d'énergie.

La question posée : est ce qu'il existe un notre moyen assure la réalité du spectre ?

On retrouve celle élaborée par Bender et al [16, 17, 18, 19, 20], ils ont réussi à remplacés la condition mathématique de l'hermiticité ($H = H^{+}$) par celle de la norme PT , qui est plus physique de créer des hamiltoniens non-hermitiens H^{PT} ayant des spectre réels.

Après, dans une série des travaux Mostafazadeh [25, 26, 27] a proposé un nouveau concept, baptisé : la pseudo-hermiticité. Il a montré que tout hamiltonien PT-symétrique H est pseudo-hermitique [25].

Il a démontré aussi l'existence des hamiltoniens PT-symétrique ayant des spectres non réels, donc la PT-symétrique ne garantit pas la réalité du spectre.

2.2.1 Hamiltonien pseudo-hermitien :

On dit qu'un hamiltonien H est pseudo-hermitien, s'il est relié avec son adjoint H^{+} par [44, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35]

$$H^{+} = \eta H \eta^{-1} \tag{2.20}$$

Ou η est un opérateur, appelé métrique, il est défini positif, linéaire, réversible ($\eta = \eta^{-1}$) et hermiten ($\eta = \eta^{+}$) ; ceci implique que η a une racine carrée $\sqrt{\eta} = \rho$.

L'objectif de la pseudo-hermiticité est de réduire un hamiltonien pseudo-hermitique H à un hamiltonien hermitique h.

Mostafazadeh a prouvé que l'opérateur h est relié à H par :

$$h = \eta^{\frac{1}{2}} H \eta^{-\frac{1}{2}} = \rho H \rho^{-1} \tag{2.21}$$

Cette dernière relation permet de passer de la mécanique quantique ordinaire à la mécanique quantique pseudo-hermitienne.

La définition d'une métrique dans un espace de HILBERT muni d'un produit scalaire particulier.

2.2.2 Le pseudo produit scalaire

En mécanique quantique conventionnelle, l'hamiltonien hermitien h doit préserver le produit scalaire usuelle, tel que

$$h\left|\varphi_n\right\rangle = E_n\left|\varphi_n\right\rangle \tag{2.22}$$

et

$$\langle\varphi_m, \varphi_n\rangle = \delta_{mn}\ \forall m, n \in \mathbb{N}$$

La pseudo-hermiticité préserve le nouveau produit scalaire introduit par mostafazadeh [25] :

$$\langle\langle\Phi_m\left|\Phi_n\right\rangle\rangle = \left\langle\Phi_m\right|\Phi_n\rangle_\eta = \left\langle\Phi_m\right|\eta\Phi_n\rangle$$

Est-ce que se nouveau produit scalaire préserve la condition d'unitarité de l'évolution ?

Soit l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\Phi_n\right\rangle = H\left|\Phi_n\right\rangle$$

Pour les deux vecteurs d'états $\left|\Phi_n(t)\right\rangle$ et $\left|\Phi_m(t)\right\rangle$:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle\Phi_m\left|\Phi_n\right\rangle\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\Phi_m\right|\eta\Phi_n\rangle = \left\langle\Phi_m\right|\eta H - H^{+}\eta\left|\Phi_n\right\rangle$$

Et d'après (2.20) :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle\Phi_m\left|\Phi_n\right\rangle\rangle = 0$$

On déduit que $\langle\langle\Phi_m\left|\Phi_n\right\rangle\rangle$ est une constante.

Soit l'équation aux valeurs propres (2.22) et d'après la relation (2.21)

$$\rho H\rho^{-1}\left|\varphi_n\right\rangle = E_n\left|\varphi_n\right\rangle$$

Multipliant cette dernière équation par ρ^{-1}

$$H\rho^{-1}\left|\varphi_n\right\rangle = E_n\rho^{-1}\left|\varphi_n\right\rangle$$

Et en écrit

$$H\left|\Phi_n\right\rangle = E_n\left|\Phi_n\right\rangle$$

donc les états propres des deux Hamiltoniens sont reliés par :

$$\left|\Phi_n\right\rangle = \rho^{-1}\left|\varphi_n\right\rangle \tag{2.23}$$

2.2.3 La base bi-orthonormée

Soit H un hamiltonien η-pseudo-hermitien ayant pour base des vecteurs propres bi-orthonormée [25, 26, 44] et complète $(|\chi_n\rangle, |\Phi_n\rangle \ldots)$, et un spectre discret, par définition

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Phi_n\rangle = H|\Phi_n\rangle$$

et

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\chi_n\rangle = H^+|\chi_n\rangle$$

On a

$$\langle\chi_m|\Phi_n\rangle = \delta_{mn} \tag{2.24}$$

et la relation de fermeture

$$\sum_n |\chi_n\rangle\langle\Phi_n| = \sum_n |\Phi_n\rangle\langle\chi_n| = 1 \tag{2.25}$$

Dans le cas des valeurs propres non dégénérées on a

$$\eta = \sum_n |\chi_n\rangle\langle\chi_n| \tag{2.26}$$

et son inverse est

$$\eta^{-1} = \sum_n |\Phi_n\rangle\langle\Phi_n| \tag{2.27}$$

2.3 Les systèmes non Hermitiens dépendants du temps

L'évolution temporelle des systèmes Hamiltoniens est une question centrale et fondamentale en mécanique quantique, en particulier en ce qui concerne les applications physiques. Les principes clés sont très bien compris depuis longtemps pour les systèmes Hamiltoniens Hermitiques et peuvent être trouvés dans presque n'importe quel livre standard sur la mécanique quantique. Cependant, la situation est assez différente pour la classe de systèmes non Hermitiques qui possèdent des spectres de valeurs propres réels ou au moins partiellement réels. Pour les systèmes indépendants du temps, les principes directeurs sont maintenant bien compris et de nombreuses expériences existent pour confirmer les principales conclusions, par ex. [41, 42, 43].

Pour des revues récentes sur le sujet, voir par exemple [44, 45] ou [46] pour les numéros spéciaux récents.

En revanche, les systèmes non-Hermitiques dépendant du temps sont beaucoup moins étudiés et il semble que jusqu'à présent aucun consensus n'ait été atteint sur un certain nombre de questions centrales. Alors que le traitement des systèmes avec des Hamiltoniens non Hermitiques dépendant du temps avec des opérateurs métriques indépendants du temps [47, 48], est largement accepté, la généralisation aux opérateurs métriques dépendant du temps a soulevé des controverses [49, 50, 51, 45, 52, 53, 54, 55, 56]. Le débat de 2007 [49, 45, 46, 47, 48] et les résultats qui en découlent [51, 52] révèlent que l'unitarité de l'évolution temporelle peut être garantie mais le Hamiltonien (le générateur de l'évolution temporelle de Schrödinger) doit rester inobservable en général. Les derniers résultats qui ont été récemment illustrés dans [57, 58] font valoir qu'il est incompatible de maintenir une évolution temporelle unitaire pour les Hamiltoniens non-Hermitiques dépendant du temps lorsque l'opérateur métrique dépend explicitement du temps. Nous rappelons brièvement les différents points de vue concernant cette controverse.

Dans la Ref. [49], Mostafazadeh a affirmé qu'à l'aide d'un opérateur métrique dépendant du temps, on ne peut assurer l'unitarité de l'évolution temporelle en même temps que l'observabilité de l'Hamiltonien. Ce point de vue, est adopté par Fring et al [57, 58]. Tandis que, certains auteurs ont recours à une évolution temporelle non-unitaire [49, 50, 51, 54, 55] et insistent sur la relation de quasi-Hermiticité entre un «Hamiltonien» Hermitique et un «Hamiltonien» non Hermitique.

Dans ce chapitre, nous allons évoquer brièvement les systèmes quantiques non Hermitiques dont l'opérateur Hamiltonien $H(t)$ dépend explicitement du temps.

Dans le cas où l'Hamiltonien H est dépendant du temps, il y a deux points de vue différents pour la dépendance du temps de l'opérateur métrique. L'un est celui de Ali Mostafazadeh qui dit que : l'indépendance du temps de l'opérateur métrique est une condition nécessaire pour assurer la pseudo Hermiticité de l'Hamiltonien $H(t)$, et l'autre celui de Milozlav Znojil qui dit que l'indépendance du temps n'est pas une condition nécessaire pour garantir la pseudo-Hermiticité de $H(t)$.

2.3.1 Point de vue d'Ali Mostafazadeh

Nous résumons le point de vue de Mostafazadeh [49, 50, 51]. Soit $U^H(t)$ l'opérateur d'évolution associé à l'Hamiltonien non-Hermitiques $H(t)$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U^H(t) = H(t)U^H(t), U(0) = I, \tag{2.28}$$

et $\psi(t)$ et $\phi(t)$ des vecteurs d'état évoluant sous l'action de $U^H(t)$, par

$$\psi(t) = U^H(t)\psi(0), \quad \phi(t) = U^H(t)\phi(0), \tag{2.29}$$

Le pseudo produit scalaire $\langle ., . \rangle_{\eta(t)}$ valable pour $\eta(t)$ ainsi que l'unitarité de l'évolution confère au produit scalaire $\langle \psi(t), \phi(t) \rangle_{\eta(t)}$ son indépendance par-rapport au temps

$$\begin{aligned}
\langle \psi(t), \phi(t) \rangle_{\eta(t)} &= \langle \psi(t) | \eta(t)\phi(t) \rangle \\
&= \left\langle \psi(t) \left| U^{+H}(t)\eta(t)U^H(t) \right| \phi(0) \right\rangle \\
&= \langle \psi(0) | \eta(0) | \phi(0) \rangle,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

d'où, on déduit

$$U^{+H}(t)\eta(t)U^H(t) = \eta(0) \Rightarrow \eta(t) = \left[U^{+H}(t)\right]^{-1}\eta(0)U^H(t)^{-1} \tag{2.31}$$

qui nous permet d'obtenir

$$\eta(t)^{-1} = U^H(t)\eta(0)^{-1}U(t)^{+H}, \tag{2.32}$$

en utilisant (2.28), la différenciation de (2.32) donne

$$H^+(t) = \eta(t)H(t)\eta(t)^{-1} - i\hbar\eta(t)\frac{\partial}{\partial t}\eta(t)^{-1}. \tag{2.33}$$

L'équation (2.33) montre que $H(t)$ est $\eta-$pseudo-Hermitique si et seulement si η est indépendant du temps.

2.3.2 Point de vue de Milozlav Znojil

M. Znojil [52, 53, 59] a affirmé que l'évolution des systèmes quantiques quasi-Hermitiques est généré par un générateur d'évolution non observable H_{gen} différent de H .L'équation de Schrödinger dépendante du temps associée à l'Hamiltonien $h\left(t\right)$ équivalent Hermitique de l'Hamiltonien non-Hermitiques $H(t)$ est définie par

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\varphi(t)\right\rangle = h\left(t\right)\left|\varphi(t)\right\rangle \tag{2.34}$$

qui en terme d'opérateur d'évolution $U^{h}(t)$ s'écrit

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U^{h}\left(t\right) = h\left(t\right)U^{h}\left(t\right) \tag{2.35}$$

où

$$h(t) = \rho(t)H(t)\rho^{-1}(t), \tag{2.36}$$

La solution formelle de l'équation de Schrödinger ci dessus s'écrit alors

$$\left|\varphi(t)\right\rangle = U^{h}\left(t\right)\left|\varphi(0)\right\rangle, \tag{2.37}$$

et par conséquent elle satisfait à la relation

$$\left\langle\varphi(t)\right|\varphi(t)\rangle = \left\langle\varphi(0)\right|\varphi(0)\rangle, \tag{2.38}$$

qui montre que la norme reste constante à tout instant.

M Znojil [59] est alors en mesure de faire la distinction entre deux évolutions formelles définies par

$$\left|\phi\left(t\right)\right\rangle = U_{D}\left(t\right)\left|\phi\left(0\right)\right\rangle, \qquad U_{D}\left(t\right) = \ \rho^{-1}\left(t\right)U^{h}\left(t\right)\rho\left(0\right), \tag{2.39}$$

$$\left\langle\left\langle\phi\left(t\right)\right|\right. = \left\langle\left\langle\phi\left(0\right)\right|\right. U_{G}\left(t\right), \qquad U_{G}\left(t\right) = \ \rho^{-1}\left(0\right)U^{+h}\left(t\right)\rho\left(t\right), \tag{2.40}$$

où les opérateurs $U_{D}\left(t\right)$ et $U_{G}\left(t\right)$ agissent sur le ket $\left|\phi\right\rangle = \rho^{-1}\left(t\right)\left|\varphi(t)\right\rangle$ et le bra $\left\langle\phi(t)\right| = \left\langle\varphi(t)\right|\rho\left(t\right)$ respectivement. Cette convention reflète bien le fait qu'apparait deux manières différentes de représenter la fonction d'onde (2.37). Un calcul élémentaire conduit à la règle d'évolution de l'action à droite accompagnée de son parallèle action à gauche. Les équations différentielles relatives aux deux opérateurs d'évolution droit $U_{D}\left(t\right)$ et gauche $U_{G}\left(t\right)$ sont donc,

$$i\hbar\partial_t U_D(t) = -i\hbar\rho^{-1}(t)\left[\partial_t\rho(t)\right]U_D(t) + H(t)\,U_D(t)\,, \tag{2.41}$$

et

$$i\hbar\partial_t U_G^+(t) = H^+(t)\,U_G^+(t) + \left[i\hbar\partial_t\rho^+(t)\right]\left[\rho^{-1}(t)\right]^+U_G^+(t)\,. \tag{2.42}$$

Par conséquent les états $|\phi\rangle$ et $|\phi\rangle\rangle$ satisfont séparément aux équations de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\phi(t)\right\rangle = H_{(gen)}(t)\left|\phi(t)\right\rangle, \tag{2.43}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\phi(t)\right\rangle\rangle = H^+_{(gen)}(t)\left|\phi(t)\right\rangle\rangle, \tag{2.44}$$

où

$$\begin{aligned} H_{gen}(t) &= H(t) - i\hbar\rho^{-1}(t)\,\partial_t\rho(t)\,, \\ H^+_{gen}(t) &= H^+(t) + i\hbar\partial_t\rho^+(t)\left(\rho^{-1}\right)^+(t)\,. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Un calcul élémentaire montre que lorsque on effectue la différenciation de la norme $\langle\langle\phi|\,\phi\rangle$ par rapport au temps on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle\phi|\,\phi\rangle = 0 \tag{2.46}$$

qui, de ce point de vue, montre aussi que l'évolution par rapport au temps est unitaire.

Nous constatons que deux points de vue opposées émergent lorsqu'on traite les systèmes quantiques dépendants du temps et quasi-Hermitiques.

2.3.3 *Point de vue de Fring et Moussa*

Fring et al [57, 58] affirment que les relations de quasi-Hermiticité $h = \rho H\rho^{-1}$ et $H^+ = \eta H\eta^{-1}$, ne sont plus valable dans le cas d'une métrique $\eta(t)$ dépendante du temps et par conséquent approuvent le point de vue de Mostafazadah. Comme point de départ, nous prennent les deux équations de Schrödinger dépendantes du temps

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle = h(t)\left|\psi(t)\right\rangle, \qquad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\phi(t)\right\rangle = H(t)\left|\phi(t)\right\rangle, \tag{2.47}$$

$h(t)$ étant Hermitique alors que $H(t)$ est considéré comme non-Hermitique, c'est-à-dire que, $h(t) = h^{+}(t)$ et $H(t) \neq H^{+}(t)$. Ils insistent sur le fait que les opérateurs ne peuvent être appelés Hamiltoniens que s'ils génèrent l'évolution temporelle du système considéré, c'est-à-dire s'ils satisfont aux équations de Schrödinger dépendantes du temps. Ils supposent ensuite que les deux solutions $|\psi(t)\rangle$ et $|\phi(t)\rangle$ sont reliées par un opérateur inversible dépendant du temps $\rho(t)$ comme suit

$$|\psi(t)\rangle = \rho(t)\,|\phi(t)\rangle \tag{2.48}$$

Il s'ensuit immédiatement par substitution directe de (2.48) dans (2.47) que les deux Hamiltoniens sont reliés l'un à l'autre comme suit

$$h(t) = \rho(t)\,H(t)\,\rho^{-1}(t) - i\hbar\rho^{-1}(t)\,\partial_t\rho(t)\,, \tag{2.49}$$

Ainsi, $h(t)$et $H(t)$ ne sont plus liés par une transformation de similarité comme dans le scénario complètement indépendant du temps ou le scénario dépendant du temps avec une métrique indépendante du temps. Ils réfèrent l'équation (2.49) comme la relation Dyson dépendante du temps généralisant sa contrepartie indépendante du temps. En prenant le conjugué Hermitien de l'équation (2.49) et en utilisant l'Hermiticité de $h(t)$ nous permettra d'obtenir une relation entre $H(t)$ et son conjugué Hermitique

$$H^{+}(t)\,\eta(t) - \eta(t)\,H(t) = i\hbar\partial_t\eta(t)\,, \tag{2.50}$$

Interprétant $\eta(t)=\rho^{+}(t)\,\rho(t)$ en tant qu'opérateur métrique cette relation (2.50) remplace la relation quasi-Hermiticité standard bien connue dans le contexte quantique non-Hermitique indépendant du temps Mécanique [57, 58].

Comme déja indiqué précédement, il est difficile de résoudre, dans le cas Hermitique, l'équation de Schrödinger dépendante du temps de façon exacte. Dans le cas non-Hermitique dépendant du temps, qui est aussi difficile, on peut faire appel à la méthode des pseudo invariants [60, 61] ou à la théorie de Floquet pour les systèmes périodiques [62, 63].

Chapitre 3

Démonstration du théorème adiabatique pour les Hamiltoniens pseudo hermitiens

3.1 introduction

On a vu dans le premier chapitre que « si le système décrit par un Hamiltonien hermitien se trouve initialement dans un état propre de $H(s_0)$, il reste à tout instant dans le même état ».

Dans ce chapitre, on va démontrer cette énoncé lorsque le système est décrit par un Hamiltonien non hermitien ‹‹Pseudo-Hermitien›› qui vari lentement dans le temps, c'est-à-dire «si le système décrit par un Hamiltonien Pseudo-Hermitien se trouve initialement dans un état propre de $H(s_0)$, il reste à tout instant dans le même état ».

Avant de commencer la démonstration, on note qu'on va adopter, dans ce travail, le point de vue de Znojil.

3.2 L'équation aux valeurs propres des systèmes Pseudo-Hermitien dépendent du temps

Dans le cas adiabatique l'équation de Schrödinger pour un hamiltonian $H(s) \neq H^{+}(s)$ s'écrit comme suit

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial s} \left|\psi^{H}(s)\right\rangle = TH(s) \left|\psi^{H}(s)\right\rangle, \tag{3.1}$$

Ou T est le paramètre adiabatique, s est le temps microscopique [2]

avec

$$s = \frac{t - t_0}{T} \tag{3.2}$$

L'hamiltonien $H(s)$ ayant une base bi-orthonormée et complète $\left\{ \left|n^{H}(s)\right\rangle, \left|n^{H^{+}}(s)\right\rangle \right\}$ et a un spectre discret. Alors, les équations aux valeurs propre,

$$H(s) \left|n^{H}(s)\right\rangle = E_n(s) \left|n^{H}(s)\right\rangle, H^{+}(s) \left|n^{H^{+}}(s)\right\rangle = E_n(s) \left|n^{H^{+}}(s)\right\rangle,$$

Avec

$$\left\langle m^{H^{+}}(s) \middle| n^{H}(s)\right\rangle = \delta_{mn}, \tag{3.3}$$

Et

$$\sum_n \left|n^{H}(s)\right\rangle \left\langle n^{H^{+}}(s)\right| = 1, \tag{3.4}$$

Les hamiltoniens $H(s)$ et $H^{+}(s)$ s'écrivent [39] :

$$H(s) = \sum_n E_n(s) \left|n^{H}(s)\right\rangle \left\langle n^{H^{+}}(s)\right|, \tag{3.5}$$

$$H^{+}(s) = \sum_n E_n(s) \left|n^{H^{+}}(s)\right\rangle \left\langle n^{H}(s)\right|. \tag{3.6}$$

Dans le cas ou le système dépend du temps les opérateurs $\eta(s)$ et $\rho(s)$ sont,

$$\eta(s)=\sum_n\left|n^{H^+}(s)\right\rangle\left\langle n^{H^+}(s)\right| \ ,\ \eta^{-1}(s)=\sum_n\left|n^{H}(s)\right\rangle\left\langle n^{H}(s)\right|, \tag{3.7}$$

et

$$\rho\left(s\right)=\sum_n\left|n^{h}(s)\right\rangle\left\langle n^{H^+}(s)\right| \quad ,\rho^{-1}(s)=\sum_n\left|n^{H}(s)\right\rangle\left\langle n^{h}(s)\right| \tag{3.8}$$

Dans ce cas, on à l'équation

$$H\left(s\right)=\eta^{-1}(s)(\sum_n E_n(s)\left|n^{H^+}(s)\right\rangle\left\langle n^{H}(s)\right|)\eta(s) \tag{3.9}$$

Si on remplace (3.7) en trouve la relation de quasi-Hermiticité

$$H(s)=\eta^{-1}(s)H^+\left(s\right)\eta(s), \tag{3.10}$$

Les états propres $\left|n^H\left(s\right)\right\rangle$ de $H(s)$ et $\left|n^{H^+}(s)\right\rangle$ de $H^+\left(s\right)$, sont relié par

$$\left|n^{H^+}(s)\right\rangle=\eta\left(s\right)\left|n^H\left(s\right)\right\rangle. \tag{3.11}$$

et ceux de $H\left(s\right)$ et de $h\left(s\right)$

$$\left|n^h\left(s\right)\right\rangle=\rho\left(s\right)\left|n^H\left(s\right)\right\rangle. \tag{3.12}$$

L'équation (3.5) se transforme

$$H\left(s\right)=\rho^{-1}\left(s\right)(\sum_n E_n(s)\left|n^h(s)\right\rangle\left\langle n^h(s)\right|)\rho\left(s\right), \tag{3.13}$$

Et on sait que $h\left(s\right)=\sum_n E_n(s)\left|n^h(s)\right\rangle\left\langle n^h(s)\right|$ donc $h\left(s\right)$et $H\left(s\right)$ sont relient par

$$h\left(s\right)=\rho\left(s\right)H(s)\rho^{-1}\left(s\right) \tag{3.14}$$

L'état $\left|\psi^H\left(s\right)\right\rangle$ s'écrit en fonction de l'opérateur d'évolution $U_T\left(s\right)$ sous la forme

$$\left|\psi^H\left(s\right)\right\rangle=U_T\left(s\right)\left|\psi^H\left(0\right)\right\rangle$$

remplaçons dans l'équation Schrödinger (3.1)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}U_T\left(s\right)=TH\left(s\right)U_T\left(s\right). \tag{3.15}$$

soit $\left|\psi^{h_g}\left(s\right)\right\rangle$ état propre définit comme suit

$$\left|\psi^{h_g}\left(s\right)\right\rangle=\rho\left(s\right)\left|\psi^{H}\left(s\right)\right\rangle$$

remplaçons dans l'équation de Schrödinger (3.1)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}\left|\psi^{h_g}\left(s\right)\right\rangle=Th_g(s)\left|\psi^{h_g}\left(s\right)\right\rangle \tag{3.16}$$

Avec

$$h_g(s)=h\left(s\right)+\frac{i\hbar}{T}\frac{\partial\rho\left(s\right)}{\partial s}\rho^{-1}\left(s\right). \tag{3.17}$$

On peut exprimer l'opérateur hamiltonien $h_g(s)$ comme

$$h_g(s)=h_g^h\left(s\right)+h_g^a\left(s\right)$$

avec $h_g^h\left(s\right)$ est la partie hermitique, tel que

$$h_g^h\left(s\right)=h\left(s\right)+\frac{i\hbar}{2T}\left[\dot{\rho}\left(s\right)\rho^{-1}\left(s\right)-\rho^{-1}\left(s\right)^{+}\dot{\rho}\left(s\right)^{+}\right]$$

et $h_g^a\left(s\right)$ est la partie anti-hermitique,

$$h_g^a\left(s\right)=\frac{i\hbar}{2T}\left[\dot{\rho}\left(s\right)\rho^{-1}\left(s\right)+\rho^{-1}\left(s\right)^{+}\dot{\rho}\left(s\right)^{+}\right]$$

Le générateur d'évolution $h_g(s)$ (3.17) peuvent s'écrit : $h_g(s)=h(s)+\frac{i}{2}\frac{\hbar}{T}\left(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2\right)$ tel que

$$\mathcal{A}_1=\sum_n\left[\left\langle\dot{n}^{H^+}(s)\right|\left.n^H(s)\right\rangle+\left\langle n^h(s)\right|\left.\dot{n}^h(s)\right\rangle\right]\left|n^h(s)\right\rangle\left\langle n^h(s)\right| \tag{3.18}$$

Et

$$\mathcal{A}_2=\sum_{m\neq n}\left\langle\dot{n}^{H^+}(s)\right|\left.m^H(s)\right\rangle\left|n^h(s)\right\rangle\left\langle m^h(s)\right|. \tag{3.19}$$

En introduit le coefficient réel

$$\delta_n(s) = -\frac{1}{2}\int_0^s \left[\left\langle n^H(s')\right| \dot{n}^{H^+}(s')\right\rangle + \left\langle \dot{n}^{H^+}(s')\right| n^H(s')\right\rangle\right] ds' \tag{3.20}$$

Alors, la généralisation des définitions (3.7)

$$\tilde{\eta}(s) = \sum_n e^{2\delta_n(s)} \left|n^{H^+}(s)\right\rangle \left\langle n^{H^+}(s)\right|, \quad \tilde{\eta}^{-1}(s) = \sum_n e^{-2\delta_n} \left|n^H(s)\right\rangle \left\langle n^H(s)\right| \tag{3.21}$$

$$\tilde{\rho}(s) = \sum_n e^{\delta_n(s)} \left|n^h(s)\right\rangle \left\langle n^{H^+}(s)\right|, \quad \tilde{\rho}^{-1}(s) = \sum_n e^{-\delta_n(s)} \left|n^H(s)\right\rangle \left\langle n^h(s)\right|, \tag{3.22}$$

ou $\tilde{\eta}(s) = \tilde{\rho}^+(s)\,\tilde{\rho}(s)$ est l'opérateur métrique.

Il est facile de vérifier la relation de quasi-Hermiticity standard $\tilde{\eta}(s)H(s) = H^+(s)\ \tilde{\eta}(s)$ et $\tilde{\rho}(s)\,H(s) = h(s)\,\tilde{\rho}(s)$

$$\tilde{\eta}(s)H(s)\tilde{\eta}(s)^{-1} = \sum_{m,n} e^{2(\delta_n-\delta_m)} \left|n^{H^+}(s)\right\rangle \left\langle n^{H^+}(s)\right| H(s) \left|m^H(s)\right\rangle \left\langle m^H(s)\right| \tag{3.23}$$

D'après la relation de bi-orthonormalization $\left\langle m^{H^+}(s)\right| n^H(s)\right\rangle = \delta_{mn}$, et l'équation aux valeurs propres $H(s)\left|m^H(s)\right\rangle = E_m(s)\left|m^H(s)\right\rangle$ on trouve

$$\tilde{\eta}(s)H(s)\tilde{\eta}(s)^{-1} = \sum_n E_n(s) \left|n^{H^+}(s)\right\rangle \left\langle n^H(s)\right| = H^+(s). \tag{3.24}$$

Et aussi la relation $\tilde{\rho}(s)\,H(s)\tilde{\rho}^{-1}(s)$ peut être vérifiée facilement

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(s)\,H(s)\tilde{\rho}^{-1}(s) &= \sum_{m,n} e^{(\delta_n-\delta_m)} \left|n^h(s)\right\rangle \left\langle n^{H^+}(s)\right| H(s) \left|m^H(s)\right\rangle \left\langle m^h(s)\right| \\ &= \sum_n E_n(s) \left|n^h(s)\right\rangle \left\langle n^h(s)\right| = h(s).\end{aligned} \tag{3.25}$$

La relation (3.12), entre les états propres de $H(s)$ et $h(s)$

$$\tilde{\rho}^{-1}(s)\left|n^h(s)\right\rangle = \sum_n e^{-\delta_m(s)} \left|m^H(s)\right\rangle \left\langle m^h(s)\right| n^h(s)\right\rangle = \sum_n e^{-\delta_m(s)} \left|m^H(s)\right\rangle \delta_{mn}$$

$$\tilde{\rho}^{-1}(s)\left|n^h(s)\right\rangle = e^{-\delta_n} \left|n^H(s)\right\rangle \tag{3.26}$$

donc les états propres de l'hamiltonien hermitien $h(s)$ et l'hamiltonien pseudo-hermitien $H(s)$ sont reliés par la relation suivante :

$$\tilde{\rho}^{-1}(s)\left|n^{h}(s)\right\rangle = e^{-\delta_n}\left|n^{H}(s)\right\rangle \tag{3.27}$$

vérifions est ce que les états propres de $H(s)$ sont bi-orthonormé

$$\left\langle m^{h}(s)\middle|n^{h}(s)\right\rangle = \left\langle m^{H}(s)\right|\tilde{\rho}^{+}(s)\,e^{-\delta_m}\tilde{\rho}(s)\,e^{-\delta_n}\left|n^{H}(s)\right\rangle = \delta_{mn} \tag{3.28}$$

Et si en remplace (3.22), on trouve la relation de bi-orthonormé

$$\left\langle m^{H^{+}}(s)\middle|n^{H}(s)\right\rangle = \delta_{mn}\text{ C.Q.F.D}$$

le pseudo-produit scalaire dans le cas des systèmes quantique décrient par un hamiltonien pseudo-hermitien dépend du temps est

$$\left\langle m^{H}(s)\middle|n^{H}(s)\right\rangle_{\tilde{\eta}} = \left\langle m^{H}(s)\middle|\tilde{\eta}(s)\,e^{-2\delta_n}\middle|\,n^{H}(s)\right\rangle = \delta_{mn}.$$

si en remplace (3.22) dans (3.17), $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont

$$\mathcal{A}_1 = \sum_n \frac{1}{2}\left[\left[\left\langle \dot{n}^{H^{+}}(s)\middle|\, n^{H}(s)\right\rangle - c.c\right] + \left[\left\langle n^{h}(s)\middle|\, \dot{n}^{h}(s)\right\rangle\right]\right]\left|n^{h}(s)\right\rangle\left\langle\, n^{h}\,(s)\right| \tag{3.29}$$

et

$$\mathcal{A}_2 = \sum_{m\neq n} e^{(\delta_n(s)-\delta_m(s))}\left\langle \dot{n}^{H^{+}}(s)\middle|\, m^{H}(s)\right\rangle\left|n^{h}(s)\right\rangle\left\langle m^{h}(s)\right| \tag{3.30}$$

dans ce cas $h_g(s)$ est un observable car la valeur $\left\langle n^{h}(s)\middle|\, h_g(s)\middle|n^{h}(s)\right\rangle$ est réel.

L'état propre $\left|\psi^{h_g}(s)\right\rangle$ transforme sous cette forme

$$\left|\psi^{h_g}(s)\right\rangle = \Phi_T(s)\left|\psi^{h_g}(0)\right\rangle.$$

Avec $\Phi_T(s)$ est l'opérateur d'évolution

$$\Phi_T(s) = \tilde{\rho}(s)\,U_T(s)\,\tilde{\rho}^{-1}(0) \tag{3.31}$$

Donc l'équation d'évolution (3.15)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}\Phi_T(s) = Th_g(s)\Phi_T(s) \tag{3.32}$$

Dans le cas adiabatique, pour les systèmes hermitique, les projecteur dans la base de sous espace de Hilbert $(\aleph^h)$ sont définis comme suit

$$p_n^h(s) = \left|n^h(s)\right\rangle \left\langle n^h(s)\right| \tag{3.33}$$

Les projecteurs des hamiltoniens pseudo-Hermitien $H(s)$ dans la base de sous éspace de Hilbert $(\aleph^H)$, sont reliés par les projecteurs des Hamiltoniens Hermitien $h(s)$ définirent par l'équation (3.33)

comme

$$p_n^H(s) = \tilde{\rho}^{-1}(s)\, p_n^h(s)\, \tilde{\rho}(s) = \left|n^H(s)\right\rangle \left\langle n^{H^+}(s)\right| \tag{3.34}$$

ils vérifient les propriétés suivantes

$$\begin{cases} p_n^H(s)^2 = p_n^H(s) \\ p_n^H(s)^+ \neq p_n^H(s) \end{cases}$$

Et l'hamiltonien pseudo-hermitien est exprimé comme suit

$$H(s) = \sum_n E_n(s)\, p_n^H(s). \tag{3.35}$$

3.3 Théorème adiabatique

L'objectif est de montrer la relation

$$\lim_{T\to\infty} U_T(s)\, p_n^H(0) = \lim_{T\to\infty} p_n^H(s)\, U_T(s). \tag{3.36}$$

Les axes propres de l'hamiltonien $H(s)$ sont animés d'un certain mouvement de rotation dans l'espace de Hilbert $(\aleph^H)$, c'est à dire on ne peut plus intégrer l'équation de Schrödinger, pour cela, on va tout d'abord essayer d'éliminer le mouvement de rotation des axes. La représentation obtenue est dite des axes tournants.

3.3.1 Représentation des axes tournants

On se met dans la représentation des axes tournants en utilisant l'opérateur unitaire $A(s)$ vérifiant

$$p_n^h(s) = A(s)\, p_n^h(0)\, A^+(s) \tag{3.37}$$

De l'autre côté, le projecteur correspondant à l'Hamiltonien $H(s)$ vérifie

$$p_n^H(s) = \tilde{\rho}^{-1}(s) p_n^h(s) \tilde{\rho}(s) = B(s)\, p_n^H(0)\, B^{-1}(s) \tag{3.38}$$

avec

$$B(s) = \tilde{\rho}^{-1}(s)\, A(s)\, \tilde{\rho}(0) \tag{3.39}$$

et

$$B^{-1}(s) = \tilde{\rho}^{-1}(0)\, A^+(s)\, \tilde{\rho}(s) \tag{3.40}$$

avec

$$B(s)B^{-1}(s) = B^{-1}(s)B(s) = 1 \tag{3.41}$$

L'opérateur $A(s)$ vérifies l'équation différentielle

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial s} A(s) = K(s)\, A(s) \tag{3.42}$$

dont le conjugué hermitien est donné par

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial s} A^+(s) = A^+(s) K(s) \tag{3.43}$$

et $A(s) \neq A^+(s)$

Remplaçons (3.39) dans l'équation (3.42) on trouve

$$i\hbar \tilde{\rho}(s) \frac{\partial}{\partial s} B(s) \tilde{\rho}^{-1}(0) + i\hbar \dot{\tilde{\rho}}(s) B(s) \tilde{\rho}^{-1}(0) = K(s) \tilde{\rho}(s) B(s) \tilde{\rho}^{-1}(0)$$

alors

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial s} B(s) = \left\{ \tilde{\rho}^{-1}(s) K(s) \tilde{\rho}(s) - i\hbar \tilde{\rho}^{-1}(s) \dot{\tilde{\rho}}(s) \right\} B(s) \tag{3.44}$$

donc

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}B\left(s\right)=\tilde{K}\left(s\right)B\left(s\right) \tag{3.45}$$

avec

$$\tilde{K}\left(s\right)=\tilde{\rho}^{-1}\left(s\right)K\left(s\right)\tilde{\rho}\left(s\right)-i\hbar\left(\tilde{\rho}^{-1}\left(s\right)\dot{\tilde{\rho}}\left(s\right)\right) \tag{3.46}$$

En dérivant (3.37), on obtient

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}p_n^h(s)=i\hbar\frac{\partial}{\partial s}\left\{A(s)p_n^h(0)A(s)\right\}=i\hbar\left\{\frac{\partial}{\partial s}A(s)\right\}p_i^h(0)A(s)+i\hbar A(s)p_i^h(0)\frac{\partial}{\partial s}A(s) \tag{3.47}$$

ce qui donne d'après (3.42) et (3.43)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}p_i^h(s)=K(s)p_n^h(s)-p_n^h(s)^{+}K^{+}(s) \tag{3.48}$$

et comme

$$p_n^h(s)=p_n^h(s)^{+} \tag{3.49}$$

et K(s) est un opérateur hermitien approprié, alors

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}p_n^h\left(s\right)=\left[K\left(s\right),p_n^h\left(s\right)\right] \tag{3.50}$$

D'après la relation (3.34), l'équation (3.50) s'écrit comme

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}\left\{\tilde{\rho}(s)p_n^H(s)\tilde{\rho}^{-1}(s)\right\}=\left[K(s),\tilde{\rho}(s)p_n^H(s)\tilde{\rho}^{-1}(s)\right] \tag{3.51}$$

Cette dernière implique

$$i\hbar\dot{\tilde{\rho}}(s)p_n^H(s)\tilde{\rho}^{-1}(s)+\tilde{\rho}(s)i\hbar\left\{\frac{\partial}{\partial s}p_n^H(s)\right\}\tilde{\rho}^{-1}(s)+i\hbar\tilde{\rho}(s)p_n^H(s)\dot{\tilde{\rho}}^{-1}(s) \tag{3.52}$$

$$=\quad K(s)\tilde{\rho}(s)p_n^H(s)\tilde{\rho}^{-1}(s)-\tilde{\rho}(s)p_n^H(s)\tilde{\rho}^{-1}(s)K(s) \tag{3.53}$$

Multiplions par $\tilde{\rho}^{-1}(s)$ à gauche et par $\tilde{\rho}(s)$ à droite on trouve

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}p_n^H(s)+i\hbar\tilde{\rho}^{-1}(s)\dot{\tilde{\rho}}(s)p_n^H(s)+i\hbar p_n^H(s)\dot{\tilde{\rho}}^{-1}(s)\tilde{\rho}(s)=\tilde{\rho}^{-1}(s)K(s)\tilde{\rho}(s)p_n^H(s)-p_n^H(s)\tilde{\rho}^{-1}(s)K(s)\tilde{\rho}(s) \tag{3.54}$$

La dérivée de $\tilde{\rho}^{-1}(s)\tilde{\rho}(s) = 1$ donne

$$\dot{\tilde{\rho}}^{-1}(s)\tilde{\rho}(s) = -\tilde{\rho}^{-1}(s)\dot{\tilde{\rho}}(s) \tag{3.55}$$

D'après (3.55), on obtient

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}p_n^H(s) = \left\{\tilde{\rho}^{-1}(s)K(s)\tilde{\rho}(s) - i\hbar\tilde{\rho}^{-1}(s)\dot{\tilde{\rho}}(s)\right\}p_n^H(s) - p_n^H(s)\left\{\tilde{\rho}^{-1}(s)K(s)\tilde{\rho}(s) - i\hbar\tilde{\rho}^{-1}(s)\dot{\tilde{\rho}}(s)\right\} \tag{3.56}$$

alors

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}p_n^H(s) = \left[\tilde{\rho}^{-1}(s)K(s)\tilde{\rho}(s) - i\hbar\tilde{\rho}^{-1}(s)\dot{\tilde{\rho}}(s)K(s), p_n^H(s)\right] \tag{3.57}$$

donc

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}p_n^H(s) = \left[\tilde{K}(s), p_n^H(s)\right] \tag{3.58}$$

Dans la représentation des axes tournants, l'Hamiltonien $H(s)$ se transforme notamment en

$$H^{(B)}(s) = B^{-1}(s)\,H(s)\,B(s) = \sum_n E_n(s)\,p_n^H(0) \tag{3.59}$$

et le générateur $K(s)$ se transforme en

$$K^{(A)}(s) = A^{+}(s)K(s)A(s) \tag{3.60}$$

et le générateur d'évolution $\tilde{K}^{(B)}(s)$ se transforme en

$$\tilde{K}^{(B)}(s) = B^{-1}(s)\,\tilde{K}(s)\,B(s)$$

D'après (3.39) et (3.40) et (3.46) on a

$$\tilde{K}^{(B)}(s) = \tilde{\rho}^{-1}(0)A^{+}(s)K(s)A(s)\tilde{\rho}(0) - i\hbar\tilde{\rho}^{-1}(0)A^{+}(s)\dot{\tilde{\rho}}(s)\tilde{\rho}^{-1}(s)A(s)\tilde{\rho}(0) \tag{3.61}$$

L'équation (3.61) s'écrit

$$\tilde{K}^{(B)}(s) = \tilde{\rho}^{-1}(0)\left[K^{(A)}(s) - i\hbar\left(A^{+}(s)\,\dot{\tilde{\rho}}\tilde{\rho}^{-1}(s)\,A(s)\right)\right]\tilde{\rho}(0) \tag{3.62}$$

L'opérateur d'évolution de cette nouvelle représentation est donné par

$$U_T^{(B)}(s) = B^{-1}(s)\,U_T(s) \tag{3.63}$$

D'après (3.40)

$$U_T^{(B)}(s) = \tilde{\rho}^{-1}(0)A^+(s)\tilde{\rho}(s)U_T(s) \tag{3.64}$$

on a

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}B(s)U_T^{(B)}(s) = TH(s)B(s)U_T^{(B)}(s) \tag{3.65}$$

$$i\hbar\left\{\frac{\partial}{\partial s}B(s)\right\}U_T^{(B)}(s) + B(s)i\hbar\frac{\partial}{\partial s}U_T^{(B)}(s) = TH(s)B(s)U_T^{(B)}(s) \tag{3.66}$$

En effet, multiplions (3.66) par $B^{-1}(s)$ et utilisons (3.41) on trouve

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}U_T^{(B)}(s) = TB^{-1}(s)H(s)B(s)U_T^{(B)}(s) - B^{-1}(s)\widetilde{K}(s)B(s)U_T^{(B)}(s) \tag{3.67}$$

donc

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}U_T^{(B)}(s) = \left[TH^{(B)}(s) - \tilde{K}^{(B)}(s)\right]U_T^{(B)}(s) \tag{3.68}$$

En utilisant (3.39), (3.40), (3.62) l'équation (3.67) devient

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}U_T^{(B)}(s) = \left[\begin{array}{c} T\tilde{\rho}^{-1}(0)A^+(s)\tilde{\rho}(s)H(s)\tilde{\rho}^{-1}(0)A(s)\tilde{\rho}(s) - \\ \left(\tilde{\rho}^{-1}(0)K^{(A)}(s)\tilde{\rho}(0) - \tilde{\rho}^{-1}(0)A^+(s)\dot{\tilde{\rho}}(s)\tilde{\rho}^{-1}(s)A(s)\tilde{\rho}^{-1}(0)\right)\end{array}\right]U_T^{(B)}(s) \tag{3.69}$$

Multiplions par $\tilde{\rho}(0)$ à gauche

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\rho}(0)U_T^{(B)}(s) = \left[TA^+(s)\left\{h(s) + \frac{i\hbar}{T}\dot{\tilde{\rho}}(s)\tilde{\rho}^{-1}(s)\right\}A(s) - K^{(A)}(s)\right]\tilde{\rho}(0)U_T^{(B)}(s) \tag{3.70}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\rho}(0)U_T^{(B)}(s) = \left[Th_g^{(A)}(s) - K^{(A)}(s)\right]\tilde{\rho}(0)U_T^{(B)}(s) \tag{3.71}$$

avec

$$h_g^{(A)}(s) = A^+(s)h_g(s)A(s) = A^+(s)\left\{h(s) + \frac{i\hbar}{T}\dot{\tilde{\rho}}(s)\tilde{\rho}^{-1}(s)\right\}A(s) \tag{3.72}$$

On a aussi

$$\tilde{\rho}(0)U_T^{(B)}(s) = A^+(s)\Phi_T(s)\tilde{\rho}(0) = \Phi_T^{(A)}(s) \tag{3.73}$$

donc

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}\Phi_T^{(A)}(s) = \left[Th_g^{(A)}(s) - K^{(A)}(s)\right]\Phi_T^{(A)}(s)$$

3.3.2 La limite adiabatique

Pour $T \to \infty$, on obtient

$$\lim_{T\to\infty} i\hbar \frac{\partial}{\partial s} U_T^{(B)}(s) \to TH^{(B)}(s)\, U_T^{(B)}(s)\,. \tag{3.74}$$

d'ailleurs, l'équation (3.15) s'intègre exactement dans ce cas particulier et donne

$$\lim_{T\to\infty} U_T^{(B)}(s) \to \sum e^{\frac{-iT}{\hbar}\int \varepsilon_i(s)ds} p_i^H(0) \tag{3.75}$$

D'après (3.63) on a

$$\lim_{T\to\infty} U_T(s) \to \sum e^{\frac{-iT}{\hbar}\int \varepsilon_i(s)ds} B(s) p_i^H(0) \tag{3.76}$$

$\dot{\tilde{\rho}}(s)\tilde{\rho}^{-1}(s)$ ne dépend pas de T et est très petit devant $Th(s)$ donc, on peut négliger $K^{(A)}$(s) et $\dot{\tilde{\rho}}(s)\tilde{\rho}^{-1}(s)$ à coté de $Th(s)$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial s} \Phi_T^{(A)}(s) = Th^{(A)}(s)\Phi_T^{(A)}(s) \tag{3.77}$$

avec

$$h^{(A)}(s) = A^{+}(s)h(s)A(s) \tag{3.78}$$

donc

$$\lim_{T\to\infty} \Phi_T^{(A)}(s) \to \sum e^{\frac{-iT}{\hbar}\int \varepsilon_i(s)ds} p_i^h(0) \tag{3.79}$$

et

$$\lim_{T\to\infty} \Phi_T(s) \to \sum e^{\frac{-iT}{\hbar}\int \varepsilon_i(s)ds} A(s) p_i^h(0) \tag{3.80}$$

On à

$$\Phi_T(s) = A(s)\Phi_T^{(A)}(s)A^{+}(s) \tag{3.81}$$

Pour le montrer, on passe à une nouvelle représentation en appliquant la transformation unitaire

$$W(s) = \tilde{\rho}(0)\Phi_T^{(A)}(s)A^{+}(s)\Phi_T(s) \tag{3.82}$$

Des équations (3.77) et (3.32) et (3.43) il est facile de déduire l'équation d'évolution de ce nouveau opérateur unitaire

$$i\hbar\frac{d}{ds}W(s) = \overline{K}(s)W(s) \tag{3.83}$$

Sous sa forme intégrale, cette équation s'écrit

$$W(s) = 1 + \frac{i}{\hbar}\int_0^s \overline{K}(\sigma)W(\sigma)d\sigma \tag{3.84}$$

avec

$$\overline{K}(s) = \tilde{\rho}(0)\Phi_T^{(A)}(s)^+ A^+(s)K(s)A(s)\Phi^{(A)}(s)\tilde{\rho}(0) + i\hbar\tilde{\rho}(0)\Phi^{(A)}(s)^+ A^+(s)\tilde{\rho}(s)\dot{\tilde{\rho}}^{-1}(s)A(s)\Phi^{(A)}(s)\tilde{\rho}^{-1}(0) \tag{3.85}$$

ou bien

$$\overline{K}(s) = \tilde{\rho}(0)\Phi^{(A)}(s)^+ \left\{K^A(s) + i\hbar V^A(s)\right\}\Phi^{(A)}(s)\tilde{\rho}^{-1}(0) \tag{3.86}$$

avec

$$V^{(A)}(s) = A^+(s)\tilde{\rho}(s)\dot{\tilde{\rho}}^{-1}(s)A(s) = A^+(s)V(s)A(s) \tag{3.87}$$

Tout opérateur Q possède la décomposition

$$Q = \sum_i \sum_k p_i(0)Qp_K(0) \tag{3.88}$$

On a ainsi

$$\overline{K}(s) = \tilde{\rho}(0)\Phi^{(A)}(s)^+ A^+(s)\left\{K(s) + i\hbar V(s)\right\}A(s)\Phi^{(A)}(s)\tilde{\rho}^{-1}(0) \tag{3.89}$$

d'après (3.79) on trouve

$$\begin{aligned}
\overline{K}(s) &= \tilde{\rho}(0)\sum_i\sum_k e^{i\hbar^{-1}T\int_0^s \varepsilon_i(s)ds}p_i^h(0)A^+(s)\left\{K(s) + i\hbar V(s)\right\}A(s)e^{-i\hbar^{-1}T\int_0^s \varepsilon_K(s)ds}p_K^h(0)\tilde{\rho}^{-1}(0) \\
&= \tilde{\rho}(0)\sum_i\sum_k e^{i\hbar^{-1}T\int_0^s(\varepsilon_i(s)-\varepsilon_K(s))ds}p_i^h(0)A^+(s)\left\{K(s) + i\hbar V(s)\right\}A(s)p_K^h(0)\tilde{\rho}^{-1}(0) \\
&= \tilde{\rho}(0)\sum_i\sum_k e^{i\hbar^{-1}T\int_0^s(\varepsilon_i(s)-\varepsilon_K(s))ds}A^+(s)p_i^h(s)\left\{K(s) + i\hbar V(s)\right\}p_K^h(s)A(s)\tilde{\rho}^{-1}(0)
\end{aligned}$$

$$\overline{K_{ik}}(s) = \tilde{\rho}(0)e^{i\hbar^{-1}T\int_0^s(\varepsilon_i(s)-\varepsilon_K(s))ds}\left\{K_{iK}^{(A)}(s) + i\hbar V_{iK}^{(A)}(s)\right\}\tilde{\rho}^{-1}(0) \tag{3.90}$$

avec

$$K_{ik}^{(A)}(s) = A^+(s)p_i^h(s)K(s)p_K^h(s)A(s) \tag{3.91}$$

et

$$V_{ik}^{(A)}(s) = A^{+}(s)p_i^h(s)V(s)p_K^h(s)A(s) \tag{3.92}$$

Considérons l'opérateur

$$F(s) \equiv \int_0^s \overline{K}(\sigma)d\sigma \tag{3.93}$$

Les éléments non diagonaux ont pour expression

$$F_{ik} = \int_0^s \tilde{\rho}(0)e^{i\hbar^{-1}T\int_0^s(\varepsilon_i(\sigma)-\varepsilon_K(\sigma))d\sigma}\left\{K_{iK}^{(A)}(\sigma) + i\hbar V_{iK}^{(A)}(\sigma)\right\}\tilde{\rho}^{-1}(0)d\sigma \tag{3.94}$$

En intégrant par partie, il vient d'ailleurs

$$F_{ik} = \frac{\hbar}{iT}\left[\begin{array}{c} \left.\frac{\left(K_{iK}^{(A)}(s)+i\hbar V_{iK}^{(A)}(s)\right)e^{i\hbar^{-1}T\int_0^s(\varepsilon_i(\sigma)-\varepsilon_K(\sigma))d\sigma}}{\varepsilon_i(\sigma)-\varepsilon_K(\sigma)}\right|_0^s \\ -\int_0^s \frac{e^{i\hbar^{-1}T\int_0^s(\varepsilon_i(\sigma)-\varepsilon_K(\sigma))d\sigma}}{i\hbar^{-1}T(\varepsilon_i(\sigma)-\varepsilon_K(\sigma))}\left(\frac{\partial K_{iK}^{(A)}(\sigma)}{d\sigma} + i\hbar\frac{\partial V_{iK}^{(A)}(\sigma)}{d\sigma}\right)d\sigma \end{array}\right] \tag{3.95}$$

En conclusion, lorsque $T \to \infty$ on a

$$F(s) = O\left(\frac{1}{T}\right) \tag{3.96}$$

Or, l'intégrale du second membre de l'équation (3.84) s'écrit, après intégration par parties

$$\int_0^s \overline{K}(\sigma)W(s)d\sigma = F(s)W(s) - \int_0^s F(\sigma)\frac{\partial W(\sigma)}{\partial\sigma}d\sigma \tag{3.97}$$

Comme $F(s) = O\left(\frac{1}{T}\right)$

donc

$$W(s) = 1 + O\left(\frac{1}{T}\right) \tag{3.98}$$

En se reportant à la définition de W, on en tire le résultat suivant

$$\Phi_T(s) = A(s)\Phi_T^{(A)}(s)\tilde{\rho}^{-1}(0)W(s) \tag{3.99}$$

$$\Phi_T(s) = A(s)\Phi_T^{(A)}(s)\tilde{\rho}^{-1}(0)\left\{1 + O\left(\frac{1}{T}\right)\right\} \tag{3.100}$$

Théorème adiabatique :

Comme $\Phi_T(s)$ commute avec les projecteurs $p_i^h(0)$ et que l'opérateur A(s) possède la propriété (3.37) on à

$$A(s)\Phi_T^{(A)}(s)\tilde{\rho}^{-1}(0)p_i^h(0) = A(s)\tilde{\rho}(0)U_T^{(B)}(s)p_i^H(0)\tilde{\rho}^{-1}(0) = A(s)\tilde{\rho}(0)p_i^H(0)U_T^{(B)}(s)\tilde{\rho}^{-1}(0) \tag{3.101}$$

$$= A(s)p_i^h(0)\tilde{\rho}(0)U_T^{(B)}(s)\tilde{\rho}^{-1}(0) = p_i^h(0)A(s)\tilde{\rho}(0)U_T^{(B)}(s)\tilde{\rho}^{-1}(0) \tag{3.102}$$

$$A(s)\Phi_T^{(A)}(s)\tilde{\rho}^{-1}(0)p_i^h(0) = p_i^h(s)A(s)\Phi_T^{(A)}(s)\tilde{\rho}^{-1}(0) \tag{3.103}$$

$$A(s)\Phi_T^{(A)}(s)\tilde{\rho}^{-1}(0)p_i^h(0) = p_i^h(s)A(s)\Phi_T^{(A)}(s)\tilde{\rho}^{-1}(0) \tag{3.104}$$

D'après l'équation (3.38) on

$$\tilde{\rho}(s)B(s)\tilde{\rho}^{-1}(0)\tilde{\rho}(0)U_T^{(B)}(s)\tilde{\rho}^{-1}(0)p_i^h(0) = p_i^h(s)\tilde{\rho}(s)B(s)\tilde{\rho}^{-1}(0)\tilde{\rho}(0)U_T^{(B)}(s)\tilde{\rho}^{-1}(0) \tag{3.105}$$

Multipliant l'équation (3.105) par $\tilde{\rho}^{-1}(s)$ à gauche et par $\tilde{\rho}(0)$ à droite on trouve

$$B(s)U_T^{(B)}(s)p_i^H(0) = p_i^H(s)\tilde{\rho}(s)B(s)U_T^{(B)}(s) \tag{3.106}$$

D'après la relation (3.63) en peut écrire

$$U_T(s)p_i^H(0) = p_i^H(s)U_T(s) \tag{3.107}$$

Donc l'opérateur d'évolution du système possède cette propriété asymptotique, c'est le théorème adiabatique des systèmes quantique décrivent par un hamiltonien pseudo-hermitien varient lentement en fontion du temps.

3.4 La phase de Berry des systèmes pseudo-hermitique

3.4.1 Solution de l'équation de schrödinger

Considérons la solution suivante

$$\left|\psi^H(s)\right\rangle = C_n\left(s\right)\left|n^H(s)\right\rangle \tag{3.108}$$

En insérant (3.108) dans l'équation de Schrödinger on trouve

$$i\dot{C}_n\left(s\right)\left|n^H(s)\right\rangle + C_n\left(s\right)i\frac{\partial}{\partial s}\left|n^H(s)\right\rangle = C_n\left(s\right)TE_n(s)\left|n^H(s)\right\rangle \tag{3.109}$$

d'aprés (3.2) on à

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial s} = T\frac{\partial}{\partial t}$$

donc l'équation (3.109) devient

$$i\dot{C}_n\left(t\right)\left|n^H(t)\right\rangle + C_n\left(t\right)i\frac{\partial}{\partial t}\left|n^H(t)\right\rangle = C_n\left(t\right)E_n(t)\left|n^H(t)\right\rangle \tag{3.110}$$

multiplions l'équation (3.110) par $\left\langle n^{H^+}(s)\right| = \left\langle n^H(s)\right| e^{-2\delta_n(s)}\tilde{\eta}\left(s\right)$ à gauche on obtient

$$i\dot{C}_n\left(t\right) + C_n\left(t\right)e^{-2\delta_n(t)}\left\langle n^H(t)\right|\eta(t)i\frac{\partial}{\partial t}\left|n^H(t)\right\rangle = C_n\left(t\right)E_n(t) \tag{3.111}$$

calcul de $\frac{\partial}{\partial t}\left|n^H(t)\right\rangle$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left|n^H(t)\right\rangle &= \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\rho}^{-1}\left(s\right)e^{\delta_n}\left|n^h\left(s\right)\right\rangle \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\rho}^{-1}\left(s\right)\right]e^{\delta_n}\left|n^h\left(s\right)\right\rangle + \tilde{\rho}^{-1}\left(s\right)\left[\frac{\partial}{\partial t}e^{\delta_n}\right]\left|n^h\left(s\right)\right\rangle + \tilde{\rho}^{-1}\left(s\right)e^{\delta_n}\frac{\partial}{\partial t}\left|n^h\left(s\right)\right\rangle\end{aligned} \tag{3.112}$$

et d'après la définition (3.27), $\tilde{\eta}\left(t\right) = \tilde{\rho}^{+}\left(t\right)\tilde{\rho}\left(t\right)$ et

$$\frac{\partial\delta_n}{\partial t} = -\frac{1}{2}\left\langle n^h(t)\right|\frac{\partial\rho\left(t\right)}{\partial t}\rho^{-1}\left(t\right) + \left(\frac{\partial\rho\left(t\right)}{\partial t}\rho^{-1}\left(t\right)\right)^{+}\left|n^h(t)\right\rangle$$

nous permet d'écrire l'équation (3.110) comme

$$i\dot{C}_n\left(t\right) + C_n\left(t\right)\left\langle n^h(t)\right|\frac{i}{2}\left[\frac{\partial\rho\left(t\right)}{\partial t}\rho^{-1}\left(t\right) - \left(\frac{\partial\rho\left(t\right)}{\partial t}\rho^{-1}\left(t\right)\right)^{+}\right] + i\frac{\partial}{\partial t}\left|n^h(t)\right\rangle = C_n\left(t\right)E_n(t) \tag{3.113}$$

Ainsi, on obtient,

$$C_n\left(s\right) = C_n\left(0\right)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\gamma_n^D\left(s\right) + \gamma_n^G\left(s\right)\right]\right\}$$

où $\gamma_n^D\left(s\right) = -\int_0^s E_n\left(s'\right)ds'$ est la phase dynamique et la phase $\gamma_n^G\left(s\right)$

$$\gamma_n^G\left(s\right) = i\hbar\int_0^s\left\langle n^h(s')\right|\partial_{s'} - \left(\frac{\dot{\tilde{\rho}}(s')\tilde{\rho}^{-1}\left(s'\right)}{2} - \frac{\left(\dot{\tilde{\rho}}(s')\tilde{\rho}^{-1}\left(s'\right)\right)^{+}}{2}\right)\left|n^h(s')\right\rangle ds' \tag{3.114}$$

Est la phase géométrique réelle généralisée correspondant au hamiltonien pseudo-hermitien $H(s)$, qui s'écrit en termes de la phase de Berry originale du cas hermitien [10] plus d'un nouveau terme qui résulte de la contribution de l'opérateur métrique que nous appelons "la phase géométrique métrique". Ceci constitue le deuxième résultat important de cet thèse après le premier qui n'est autre que la démonstration du théorème adiabatique. La phase géométrique généralisée peut être exprimée en termes d'états propres $\left|n^{H}(s)\right\rangle$ de $H(s)$ comme suit :

$$\gamma_n^G(s) = -\frac{i\hbar}{2}\int_0^s \left[\left\langle \dot{n}^{H^+}(s')\right| n^H(s')\rangle - \langle n^H(s')\left| \dot{n}^{H^+}(s')\right\rangle\right] ds'.$$

3.5 Application : Brachistochrone généralisé

Le brachistochrone est l'un des problèmes les plus adapté à l'étude des systèmes pseudo hermitiens. Il est connu en mécanique classique et a été généralisé en mécanique quantique.

Considérons le brachistochrone généralisé décrit par l'Hamiltonien pseudo hermitien

$$H(t) = \begin{pmatrix} r(t)\,e^{i\theta(t)} & \tau(t)\,e^{i\varphi(t)} \\ \lambda(t)\,e^{-i\varphi(t)} & r(t)\,e^{-i\theta(t)} \end{pmatrix} \tag{3.115}$$

où r, θ, τ, λ, et φ sont des paramètres réels lentement variables en fonction du temps.

Ce Hamiltonien H admet les valeurs propres réelles $\varepsilon_\pm$ déterminées par l'équation caractéristique

$$E_\pm(t) = r\cos\theta \pm \sqrt{\lambda\tau - r^2\sin^2\theta}, \tag{3.116}$$

avec la condition principale qui doit être vérifiée $\lambda\tau \geq r^2\sin^2\theta$

on pose

$$\sin\alpha = \frac{r}{\sqrt{\lambda\tau}}\sin\theta$$

les valeurs propres sont

$$E_\pm(t) = r\cos\theta \pm \sqrt{\lambda\tau}\cos\alpha$$

l'Hamiltonien $H(t)$ possède deux états propre

$$\left|+^H, t\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\cos\alpha}}\begin{pmatrix} \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\alpha}{2}} \\ \left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-i\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \tag{3.117}$$

$$\left|-^H, t\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\cos\alpha}}\begin{pmatrix} \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-i\frac{\alpha}{2}} \\ -\left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \tag{3.118}$$

l'opérateur métrique $\tilde{\eta}(t) = \tilde{\rho}^{+}(t)\,\tilde{\rho}(t)$ qui par son action transforme H en H^{+} est donné par

$$\tilde{\eta} = \frac{1}{\cos\alpha}\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\tau}{\lambda}} & -i\sin\alpha e^{i\varphi} \\ i\sin\alpha e^{-i\varphi} & \sqrt{\frac{\lambda}{\tau}} \end{pmatrix}. \tag{3.119}$$

On peut vérifier que l'opérateur $\tilde{\rho}$ est donné par

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2\cos\alpha}}\begin{pmatrix} \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\varphi}{2}} & \left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\varphi}{2}} & -\left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \tag{3.120}$$

et l'inverse $\tilde{\rho}^{-1}(t)$ est donnés par

$$\tilde{\rho}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\cos\alpha}}\begin{pmatrix} \left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\varphi}{2}} & \left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\varphi}{2}} & -\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \tag{3.121}$$

Par ailleurs nous pouvons déduire facilement que l'hamiltonien H se transforme en un Hamiltonien hermitien h via la relation $h = \tilde{\rho}H\tilde{\rho}^{-1}$

$$h(s) = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -\sqrt{\lambda\tau}\cos\alpha e^{i\varphi} \\ -\sqrt{\lambda\tau}\cos\alpha e^{-i\varphi} & r\cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.122}$$

Le terme $\left(\dot{\tilde{\rho}}(t)\tilde{\rho}^{-1}(t) - \left(\dot{\tilde{\rho}}(t)\tilde{\rho}^{-1}(t)\right)^{+}\right)$ issu de la phase géométrique métrique est donné par

$$\dot{\tilde{\rho}}(t)\tilde{\rho}^{-1}(t) - \left(\dot{\tilde{\rho}}(t)\tilde{\rho}^{-1}(t)\right)^{+} = \frac{i}{2\cos\alpha}\begin{pmatrix} \sin\alpha\ln\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) & -2\dot{\varphi} \\ -2\dot{\varphi} & \sin\alpha\partial_s\ln\left(\frac{\lambda}{\tau}\right) \end{pmatrix} \tag{3.123}$$

Ainsi la phase géométrique peut être déduite comme suit

$$\dot{\gamma}_{\pm}^{\tilde{\eta}}(t) = \frac{i\hbar}{2}\left\langle n_{\pm}^{h}(t)\right|\dot{\tilde{\rho}}(t)\tilde{\rho}^{-1}(t) - \left(\dot{\tilde{\rho}}(t)\tilde{\rho}^{-1}(t)\right)^{+}\left|n_{\pm}^{h}(t)\right\rangle = \mp\hbar\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}\dot{\varphi} \tag{3.124}$$

et la phase de Berry correspondante $\dot{\gamma}_{\pm}^{B}(t)$ est

$$\dot{\gamma}_{\pm}^{B}(t) = \left\langle n^{h}(t)|\dot{n}^{h}(t)\right\rangle = \pm\hbar\dot{\varphi}/2. \tag{3.125}$$

l'évolution adiabatique des états propres gouvernés par l'hamiltonien, nous trouvons la solution de l'équation de Schrödinger comme

$$\left|\psi_{\pm}^{H}(s)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\cos\alpha}} \exp\left(\pm i\hbar \int_0^s \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}\right)\dot{\varphi}ds'\right) \begin{pmatrix} \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\pm i\frac{\alpha}{2}} \\ \pm\left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\mp i\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi} \end{pmatrix}.$$

une fois intégrée sur un contour fermé, la phase géométrique ressemble à ce qui suit

$$\gamma_{\pm}^{G}(t) = \pm\hbar \oint_{\mathcal{C}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}\right) d\varphi \tag{3.126}$$

Conclusion

Dans ce travail on est arrivé à démontrer le théorème adiabatique pour les Hamiltoniens non hermitien (pseudo hermitien) c'est-à-dire lorsque le système varie lentement dans le temps. En effet, on a montré que si le système décrit par un Hamiltonien pseudo hermitien se trouve dans un état initial il reste à tout instant dans un état défini par le même nombre quantique à une phase géométrique et réel près. On a montré que cette phase comporte deux contributions ; la première n'est autre que la phase géométrique habituelle de Berry et la deuxième provient de l'opérateur métrique $\tilde{\rho}(t)$; cette nouvelle contribution a pour origine la non hermiticité du système, ainsi elle disparaît pour les systèmes hermitiens. A titre d'application, on a résolu l'exemple d'un hamiltonien non hermitien qui représente le système à deux niveaux de sa forme plus générale que le Brachistochrone où on a calculé les états propres ainsi de la phase de Berry en plus de la nouvelle phase géométrique qui est très importante dans le cadre des systèmes dépendant du temps.

Bibliographie

[1] C. C. Tannoudji, B. Diu et F. Laloë, Mécanique Quantique T1, Hermann, Paris, nouvelle édition revue, corrigée et augmentée, (1977).

[2] M. Born and V. Fock, *Beweis des Adiabatensatzes,* Z. Phys. 51, 165-169 (1928).

[3] M. Maamache and Y. Saadi, *Adiabatic Theorem and Generalized Geometrical Phase in the Case of Continuous Spectra,* Phys. Rev. Lett. 101, 150407 (2008).

[4] M. Maamache and Y. Saadi, *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes in the case of continuous spectra,* Phys. Rev. A 78, 052109 (2008).

[5] A. Messiah, Quantum Mécanics (tome 2), Dunod, (1995).

[6] Y. Aharanov and J. Anandan, *Phase change during a cyclic quantum evolution,* Phys. Rev. Lett. 58, 1593-1596 (1987).

[7] Y. Aharanov and D. Bohm, *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory,* Phys. Rev. Lett. 115, 485-491 (1959).

[8] A. Tomita and R. Y. Chiao, *Observation of Berry topological phase by use of an optical fiber*, Phys. Rev. Lett. 57, 937 (1986).

[9] R. Tycko, *Adiabatic rotational splittings and Berry's phase in nuclear quadrupole resonance,* Phys. Rev. Lett. 58, 2281 (1987).

[10] M. V. Berry, *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes,* Proc. R. Soc. A 392, 45 (1984).

[11] A. Messiah, Quantum Mécanics (North-Holland, Amsterdam, 1962).

[12] T. Bitter and D. Dubbers, *Manifestation of Berry tipological phase in neutron spin rotation,* Phys. Rev. Lett. 59, 251 (1987).

[13] M. V. Berry, *Anticipations of the geometric phase,* Physics Today. 43(12), 34-40 (1990).

[14] T. T. Wu, *Ground state of a Bose system of hard spheres,* Phys. Rev. 115, 1390-1404 (1959).

[15] J.Wong, *Results on certain Non-Hermitian Hamiltonians,* J. Math. Phys. 8, 2039 (1967).

[16] C. M. Bender and S. Boettcher, *Real Spectra in Non-Hermitians Having PT-Symmetry*, Phys. Rev. Lett. 80, 5243-5246 (1998).

[17] C. M. Bender, S. Boettcher and P. N. Meisinger, *PT-Symmetric Quantum Mechanics*, J. Math. 40, 2201 (1999).

[18] C. M. Bender and Q. Wang, *Comment on "Some properties of eigenvalues and eigenfunctions of the cubic oscillator with imaginary coupling constant"*, J. Phys. A 34, 3325 (2001).

[19] C. M. Bender, D. C. Brody and H. F. Jones, *Complex Extension of Quantum Mechanics*, Phys. Rev. Lett. 89, 270401 (2002).

[20] C. M. Bender, *Making sense of Non-Hermitian Hamiltonians*, Rep. Prog. Phys. 70, 947 (2007).

[21] C. M. Bender, G. V. Dunne and P. N. Meisinger, *Complex periodic potentials with real band spectra*, Phys. Lett. A 252, 272 (1999).

[22] C. M. Bender, S. Boettcher and V. M. Savage, *Conjecture on the interlacing of zeros in comlex Sturm-Liouville problems*, J. Math. Phys. 41, 6381 (2000).

[23] A. Zafar, *C, PT and CPT-invariance of pseudo-Hermitian Hamiltonians*, J. Phys. A : Math. Gen. 36, 9711 (2003) .

[24] M. Znojil, *PT-Symmetric model with an interplay between kinematical and dynamical non-localities*, J. Phys. A : Math. Theor, 48, 195303 (2015).

[25] A. Mostafazadeh, *Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry : The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian*, J. Math. Phys. 43, 205 (2002).

[26] A. Mostafazadeh, *Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry. II. A complete characterization of non-Hermitian Hamiltonians with real spectrum,* J. Math. Phys. 43, 2814 (2002).

[27] A. Mostafazadeh, *Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry. III. Equivalence of Pseudo-Hermiticity and the presence of antilinear symmetries,* J. Math. Phys. 43, 3944 (2002).

[28] A. Mostafazadeh, *pseudo-Hermiticity for a class of non diagonalisable Hamiltonians*, J. Math. Phys. 43, 6343 (2002).

[29] A. Mostafazadeh,*On the pseudo-Hermiticity of a class of PT-Symmetric Hamiltonians in One Dimension,* Mod. Phys. Lett. A 17, 1973 (2002).

[30] A. Mostafazadeh,*Conceptual Aspects of PT-Symmetry and pseudo-Hermiticity : A status Report,* Phys, Scr. 82, 038110 (2010).

[31] A. Mostafazadeh, *pseudo-Hermiticity and generalized PT and CPT -symmetries,* J. Math. Phys. 44, 974 (2003).

[32] A. Mostafazadeh, *Exact PT-Symmetry is Equivalent to Hermiticity,* J. Math. Phys. 44, 974-989 (2003).

[33] A. Mostafazadeh, *Is Weak Pseudo-Hermiticity weaker than Pseudo-Hermiticity*, J. Math. Phys. 47, 092101 (2006).

[34] A. Mostafazadeh, *Pseudo-Hermitian Description of PT-symmetric Systems Defined on a Complex Contour*, J. Phys. A 38, 3213 (2005).

[35] A. Mostafazadeh and A. Batal, *Physical Aspects of Pseudo-Hermitian on PT-Symmetric Quantum Mechanics*, J. Phys. A : Math. Gen. 37, 11645 (2004).

[36] P. Dorey, C. Dunning and R. Tateo, *Supersymmetry and the spontaneous breakdown of PT symmetry*, J. Phys. A 34, L391 (2001).

[37] B. Bagchi, C. Quesne and M. Znojil, *Generalized Continuity Equation and Modified N ormalization in PT-Symmetric Quantum Mecahnics,* Mod. Phys. Lett. A 16, 2047 (2001).

[38] P. A. M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics (Oxford : Oxford University press, 1958).

[39] G. Nenciu and G. Rasche, *On the adiabatic theorem for nonself-adjoint Hamiltonians,* J. Phys. A : Math. Gen. 25, 5741 (1992).

[40] C. A. Mead and D. G. Truhlar, *On the determination of Born-Oppenheimer nuclear motion wave functions including complications due to conical intersections and identical nuclei*, J. Chem. Phys. 70, 2284 (1979).

[41] Z. H. Musslimani, K. G. Makris, R. El-Ganainy, and D. N. Christodoulides, *Optical Solitons in PT Periodic Potentials,* Phys. Rev. Lett. 100, 030402 (2008).

[42] K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, and Z. H. Musslimani, *PT-symmetric optical lattices*, Phys. Rev. A. 81, 063807 (2010).

[43] A. Guo, G. J. Salamo, D. Duchesne, R.Morandotti, M. Volatier- Ravat, V. Aimez, G. A. Siviloglou, and D. N. Christodoulides, *Observation of PT-Symmetry Breaking in Complex Optical Potentials,* Phys. Rev. Lett. 103, 093902 (2009).

[44] A. Mostafazadeh, *Pseudo-Hermitian representation of quantum mechanics,* Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 07, 1191 (2010).

[45] C. M. Bender, *Making sense of non-Hermitian Hamiltonians,* Rep. Prog. Phys. 70, 947-1018 (2007).

[46] M. Znojil, *Special issue "Pseudo-Hermitian Hamiltonians in quantum physics in 2014",* Int. J. Theor. Phys. 54, 3867 (2015).

[47] C. Figueira de Morisson Faria and A. Fring, *Time evolution of nonHermitian Hamiltonian systems,* J. Phys. A. 39, 9269 (2006).

[48] C. Figueira de Morisson Faria and A. Fring, *Non-Hermitian Hamiltonians with real eigenvalues coupled to electri fields : From the time-independent to the time dependent quantum mechanical formulation,* Laser Phys. 17, 424 (2007).

[49] A.Mostafazadeh, *Time-Dependent Pseudo-Hermitian Hamiltonians Defining a Unitary Quantum System and Uniqueness of the Metric Operator*, Phys. Lett. B. 650, 208 (2007).

[50] A. Mostafazadeh, *Comment on "Time-dependent quasi-Hermitian Hamiltonians and the unitary quantum evolution"* 0711.0137v1 [quant-ph] (2007)A.

[51] A.Mostafazadeh, *Comment on "Reply to Comment on Time-dependent Quasi-Hermitian Hamiltonians and the Unitary Quantum Evolution"* 0711.1078v2 [quant-ph] (2007).

[52] M. Znojil, *Time-dependent quasi-Hermitian Hamiltonians and the unitary quantum evolution,* 0710.5653v1 [quant-ph] (2007).

[53] M. Znojil, *Reply to Comment on "Time-dependent quasi-Hermitian Hamiltonians and the unitary quantum evolution,* 0711.0514v1 [quant-ph] (2007).

[54] M. Znojil, *Time-dependent version of crypto-Hermitian quantum theory,* Phys. Rev. D. 78, 085003 (2008).

[55] J. Gong and Q.-H. Wang, *Geometric phase in PT-symmetric quantum mechanics,* Phys. Rev. A. 82, 012103 (2010) ; *Time-dependent PT -symmetric quantum mechanics,* J. Phys. A. 46, 485302 (2013).

[56] M. Maamache, *Periodic pseudo-Hermitian Hamiltonian : Nonadiabatic geometric phase,* Phys. Rev. A. 92, 032106 (2015).

[57] A.Fring and M.H.Y.Moussa, *Unitary quantum evolution for time-dependent quasi-Hermitian systems with non observable Hamiltonians,* Phy.Rev. A. 93, 042114 (2016).

[58] A.Fring and M.H.Y.Moussa, *Non-Hermitian Swanson model with a time-dependent metric,* Phy. Rev. A. 94, 042128 (2016).

[59] M. Znojil, *Which operator generates time evolution in Quantum Mechanics ?,* 0711.0535v1[quant-ph] (2007).

[60] B. Khantoul, A. Bounames and M. Maamache, *On the invariant methodfor the time-dependent Non-Hermitian Hamiltonians,* Eur. Phys. J. Plus. 132 (2017)

[61] M. Maamache, O. K. Djeghiour, N. Mana and W. Koussa, *Pseudo-invariants theory and real phases for systems with non-Hermitian time-dependent Hamiltonians,* Eur. Phys. J. Plus 132-383 (2017).

[62] X. Luo, J. Huang, H. Zhong, X. Qin, Q. Xie, Y.S. Kivshar and C. Lee, *Pseudo-Parity-Time Symmetry in Optical Systems,* Phys. Rev. Lett. 110, 243902 (2013) .

[63] M. Maamache , S. Lamri and O. Cherbal, *Pseudo PT-symmetry in time periodic non-Hermitian Hamiltonians systems,* Annals of Physics. 378, 150–161 (2017).

IOP Publishing Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical

J. Phys. A: Math. Theor. **53** (2020) 405302 (18pp) https://doi.org/10.1088/1751-8121/abad79

Adiabatic theorem and generalized geometrical phase in the case of pseudo-Hermitian systems

S Cheniti, W Koussa, A Medjber and M Maamache[1]

Laboratoire de Physique Quantique et Systèmes Dynamiques, Faculté des Sciences, Université Ferhat Abbas Sétif 1, Sétif 19000, Algeria

E-mail: maamache@univ-setif.dz

Received 27 January 2020, revised 4 August 2020
Accepted for publication 7 August 2020
Published 1 September 2020

Abstract

A generalization of the adiabatic theorem for quantum systems governed by pseudo-Hermitian Hamiltonians and details of its demonstration are given. Introducing a modified time-dependent metric giving a precise description of the quantum unitary evolution where the obtained effective Hamiltonian is observable because it is mean value is real. We show that an eigenstate of a pseudo-Hermitian Hamiltonian slowly transported will acquire a real generalized geometrical phase factor which contains two contributions: the first one corresponds to the conventional Berry's phase as expected and a new geometrical term that we call the metric geometrical phase. We will apply our results in the cases of the famous time dependent brachistochrone problem and a non-Hermitian displaced harmonic oscillator.

Keywords: pseudo-Hermitian, adiabatic theorem, geometrical phase, quantum brachistochrone

1. Introduction

Predicting the time evolution of a Hamiltonian system is a key importance for the most practical physical problems [1]. When the Hamiltonian is explicitly time dependent the situation becomes more complicated. One way to overcome this difficulty is the recourse to approximation methods such as the adiabatic theorem which is concerned with quantum systems described by an explicitly, but slowly varying, time-dependent Hamiltonian where the hermiticity of the operators is an essential condition to ensure the validity of the demonstration of the theorem [2–5].

The adiabatic theorem is one of the basic results in quantum theory [2, 3]. It is concerned with quantum systems described by an explicitly, but slowly varying, time-dependent

[1]Author to whom any correspondence should be addressed.

Hamiltonians. In the Hermitian case, this adiabatic theorem concerns states $\left|\psi^{h}(t)\right\rangle$ satisfying the time-dependent Schrödinger equation and asserts that if a quantum system with a time-dependent non degenerate Hamiltonian $h(t)$ is initially in the nth eigenstates of $h(0)$, and if $h(t)$ evolves slowly enough, then the state at time t remains in the nth instantaneous eigenstates of $h(t)$ up to a multiplicative phase factor.

As one of the most important results of the adiabatic approximation, geometrical phases attracted considerable interest in both theoretical and experimental physics. The first general treatment of geometric phases is due to Berry [6] who have considered Hermitian Hamiltonians $h(t)$ undergoing adiabatic changes. It is natural to refer these changes to the adiabatic basis, that is, the basis of eigenstates $\left|n^{h}(t)\right\rangle$ of the instantaneous ('frozen') $h(t)$. As announced earlier, the familiar adiabatic theorem [1] guarantees that if the system starts in one of the instantaneous eigenstates, and if the state remains non-degenerate, then it will follow this state closely by acquiring a phase factor $\varphi_n(t) = \left\langle n^{h}(t)\right| \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} - h(t)\left| n^{h}(t)\right\rangle$ consisting of a dynamical and a geometrical part. Berry's phase knew many generalizations [7–10]. There have also been attempts to extend geometric phases to systems described by non-Hermitian Hamiltonians [11–19].

Quantum theories whose evolution was driven by a non-Hermitian Hamiltonian H have a long history emerging in the early times of quantum physics [20, 21] and have many applications in both theoretical and applied physics. Depending on the nature of their eigenvalues, non-Hermitian Hamiltonian systems can be investigated in various fundamental different ways. When the corresponding energy eigenvalues are complex one may essentially keep the standard framework and accept the fact that the non-Hermitian nature of the Hamiltonian leads to decaying states and wave functions.

Almost 90 years ago, von Neumann and Wigner [22] indicated that non-Hermitian Hamiltonian systems could possess discrete eigenstates with real positive energies. Recently, it was shown that certain manifestly non-Hermitian Hamiltonians might also have a purely real spectrum of bound-state energies, for more details see the review article [23]. Initially the reality of the spectrum was attributed to the $\mathcal{PT}$-symmetry of the Hamiltonian [23] and then to its quasi-Hermiticity (for more details see the review article [24]).

The standard machinery goes as follows: if we relax the Hermiticity of the Hamiltonian h, then additional requirements should be imposed to ensure a real spectrum of the system. At first, one takes the time-independent non-Hermitian Hamiltonian H and check whether it has real spectrum. Since the Hamiltonian H is supposed to be diagonalizable, we denote the eigenvalues of H by E_n $(n \in N)$ and the corresponding eigenvectors by $\left|n^{H}\right\rangle$. It has been proven [24] that the necessary and sufficient conditions for a non-Hermitian but diagonalizable Hamiltonian to have real eigenvalues is the existence of a linear positive-definite operator of the form $\eta = \rho^{+}\rho$ such that $H^{+}\eta = \eta H$ is fulfilled. If this is the case, then H is called η-pseudo-Hermitian. Due to the last relation ($H^{+}\eta = \eta H$), one can construct another set of state vectors $\left|n^{H^{+}}\right\rangle = \eta\left|n^{H}\right\rangle$ such that $H^{+}\left|n^{H^{+}}\right\rangle = E_n\left|n^{H^{+}}\right\rangle$ with the following orthonormalization conditions and completeness relation $\left\langle m^{H}\right|\eta\left| n^{H}\right\rangle = \delta_{mn}$, $\sum\limits_{n}\left|n^{H^{+}}\right\rangle\left\langle n^{H}\right| = 1$.

Using the above completeness relation and the definition $\left|n^{H^{+}}\right\rangle = \eta\left|n^{H}\right\rangle$, we can find the positive-definite metric operator η and its inverse η^{-1} as [24]

$$\eta = \sum_{n}\left|n^{H^{+}}\right\rangle\left\langle n^{H^{+}}\right|, \quad \eta^{-1} = \sum_{n}\left|n^{H}\right\rangle\left\langle n^{H}\right|. \tag{1}$$

Obviously, these results are of practical use to construct η and η^{-1}. Then the spectrum of H is real if and only if there is an invertible linear operator ρ such that H is related to a Hermitian

Hamiltonian h as $h = \rho H \rho^{-1}$ where

$$\rho = \sum_n \left|n^h\right\rangle \left\langle n^{H^+}\right|, \quad \rho^{-1} = \sum_n \left|n^H\right\rangle \left\langle n^h\right| \tag{2}$$

and the state vectors $\left|n^h\right\rangle$ are the corresponding eigenvectors of the Hermitian Hamiltonian h.

Now, we are in the position to investigate the time evolution of the state vectors $\left|\psi^H(t)\right\rangle$ in the non-Hermitian framework. Similar to ordinary quantum mechanics, the state vector $\left|\psi^H(t)\right\rangle$ evolves in time according to the Schrödinger equation. Using the condition $H^+\eta = \eta H$, one can show that the time derivative of the pseudo-norm $\left\langle \psi^H(t)|\psi^H(t)\right\rangle_\eta \equiv \left\langle \psi^H(t)\left|\eta\right|\psi^H(t)\right\rangle$ vanishes. Therefore, the norms of state vectors with respect to the η-inner product are time-independent. Scholtz *et al* [21] were probably the first physicists who redefined the scalar product enables to re-establish the consistent probabilistic interpretation of the theory.

Given the importance of the time-dependent Schrödinger equation in conventional quantum mechanics, it is necessary to seek a general equation of motion in time-dependent pseudo-quantum mechanics. It is evident that once the metric is time-dependent [25–35], we encounter an entirely new and difficult situation because a time-dependent metric leads to an additional term, proportional to its time derivative, in the generator of the evolution of the Schrödinger equation. Serious problems arise in connection with the probabilistic and unitary-evolution interpretation (for more details see reference [32]).

Attempts to extend the notion of geometrical phases to pseudo-Hermitian systems were discussed [27–29], [36]. Moreover, they applied the adiabatic approximation like an ansatz. However, it is asserted that the very presence of non-Hermiticity prevents a general application of the adiabatic theorem [38–41] and the inevitability of nonadiabatic transitions leads to new effects.

In our work, we generalize and present a straightforward, yet rigorous, proof of the adiabatic theorem for systems whose Hamiltonians are pseudo-Hermitian. For this purpose, we consider a physical system described by a slowly varying time-dependent pseudo-Hermitian Hamiltonian $H(s)$ associated with time-dependent Hermitian metric operator $\eta(s)$. If the Hamiltonian is time-dependent, then so are (the) its eigenfunctions and eigenvalues. The work is organized as follows: we give the relation between the original pseudo-Hermitian system and the corresponding Hermitian system. We give the statement of the adiabatic theorem for the case of a pseudo-Hermitian Hamiltonian. Then we present the outlines of the demonstration of the adiabatic theorem. We find the general solution of the Schrödinger equation and the related geometrical phase written in the Hermitian base and connected to the original Berry's phase. As illustrations, we apply our results in the case of the time-dependent brachistochrone problem and a non-Hermitian displaced harmonic oscillator.

2. Schrödinger equation of motion: pseudo-Hermitian time dependent systems

Given a non-Hermitian Hamiltonian $H(s) \neq H^+(s)$, involving real eigenvalues $E_n(s)$.Then, there is a complete biorthonormal set of eigenvectors $\left\{\left|n^H(s)\right\rangle, \left|n^{H^+}(s)\right\rangle\right\}$ obeying

$$H(s)\left|n^H(s)\right\rangle = E_n(s)\left|n^H(s)\right\rangle, \quad H^+(s)\left|n^{H^+}(s)\right\rangle = E_n(s)\left|n^{H^+}(s)\right\rangle,$$

$$\left\langle m^{H^+}(s)\middle|n^H(s)\right\rangle = \delta_{mn}, \tag{3}$$

and

$$\sum_n \left|n^H(s)\right\rangle \left\langle n^{H^+}(s)\right| = 1, \tag{4}$$

We write $H(s)$ and $H^+(s)$ in the form given in [39]:

$$H(s) = \sum_n E_n(s) \left|n^H(s)\right\rangle \left\langle n^{H^+}(s)\right|, \tag{5}$$

$$H^+(s) = \sum_n E_n(s) \left|n^{H^+}(s)\right\rangle \left\langle n^H(s)\right|. \tag{6}$$

the time dependence of operators $\eta(s)$ and $\rho(s)$ defined in equation (1) come also from the eigenstates $\left\{\left|n^H(s)\right\rangle, \left|n^h(s)\right\rangle\right\}$ such as

$$\eta(s) = \sum_n \left|n^{H^+}(s)\right\rangle \left\langle n^{H^+}(s)\right|, \quad \eta^{-1}(s) = \sum_n \left|n^H(s)\right\rangle \left\langle n^H(s)\right|, \tag{7}$$

and

$$\rho(s) = \sum_n \left|n^h(s)\right\rangle \left\langle n^{H^+}(s)\right| \quad , \quad \rho^{-1}(s) = \sum_n \left|n^H(s)\right\rangle \left\langle n^h(s)\right| \tag{8}$$

In this way, these equations show that

$$H(s) = \eta^{-1}(s) \left(\sum_n E_n(s) \left|n^{H^+}(s)\right\rangle \left\langle n^H(s)\right|\right) \eta(s) \tag{9}$$

which is a generalization of the standard quasi-Hermiticity relation in the adiabatic case

$$H(s) = \eta^{-1}(s) H^+(s)\, \eta(s), \tag{10}$$

and thus, the set of state eigenvectors are linked as follows

$$\left|n^{H^+}(s)\right\rangle = \eta(s) \left|n^H(s)\right\rangle. \tag{11}$$

In fact, the spectrum of $H(s)$ is real if and only if there is an invertible linear operator $\rho(s)$ such that $H(s)$ is $\eta(s)$-pseudo-Hermitian. Therefore, the relation between the eigenstates $\left|n^h(s)\right\rangle$ of the Hermitian Hamiltonian $h(s)$ and $\left|n^H(s)\right\rangle$ of the pseudo-Hermitian Hamiltonian $H(s)$ is given as

$$\left|n^h(s)\right\rangle = \rho(s) \left|n^H(s)\right\rangle. \tag{12}$$

It is important to note that the equation (5) can be also transformed as

$$H(s) = \rho^{-1}(s) \left(\sum_n E_n(s) \left|n^h(s)\right\rangle \left\langle n^h(s)\right|\right) \rho(s), \tag{13}$$

which leads to the relationship between $H(s)$ and $h(s) = \sum_n E_n(s) \left|n^h(s)\right\rangle \left\langle n^h(s)\right|$ in the following form

$$h(s) = \rho(s) H(s) \rho^{-1}(s) \tag{14}$$

It should be noted that the standard relation between the Hamiltonians $h(s)$ and $H(s)$ remains valid when we process the adiabatic theory.

We would like to emphasize from the start that, in general, an instantaneous eigenstate $\left|n^H(s)\right\rangle$ is not a solution of the time dependent Schrödinger equation. As it turns out, it is a useful tool to construct approximate solutions for the Schrödinger equation.

Let us try to understand the relation between $\left|n^H(s)\right\rangle$ and the solution to the Schrödinger equation $\left|\Psi^H(s)\right\rangle$,

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial s}\left|\Psi^H(s)\right\rangle = TH(s)\left|\Psi^H(s)\right\rangle, \tag{15}$$

where T is the adiabatic parameter, s is the microscopic time scale [2]. The Schrödinger equation (15) can be written in terms of the evolution operator $\left|\Psi^H(s)\right\rangle = U_T(s)\left|\Psi^H(0)\right\rangle$ as

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial s}U_T(s) = TH(s)\,U_T(s). \tag{16}$$

We point out that the Schrödinger equation (15) is mapped by means of the time-dependent invertible operator $\rho(s)$ into the Schrödinger equation

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial s}\left|\Psi^{h_{\mathrm{g}}}(s)\right\rangle = Th_{\mathrm{g}}(s)\left|\Psi^{h_{\mathrm{g}}}(s)\right\rangle \tag{17}$$

where the corresponding evolved states are transformed as $\left|\Psi^{h_{\mathrm{g}}}(s)\right\rangle = \rho(s)\left|\Psi^H(s)\right\rangle$ and the Hamiltonians are related by means

$$h_{\mathrm{g}}(s) = h(s) + \frac{\mathrm{i}\hbar}{T}\frac{\partial\rho(s)}{\partial s}\rho^{-1}(s). \tag{18}$$

The key feature in this equation is the fact that $h_{\mathrm{g}}(s)$ is no longer quasi-Hermitian, i.e., related to $h(s)$ by means of a similarity transformation, due to the presence of the last term. Consequently, the effective Hamiltonian $h_{\mathrm{g}}(s)$ is not observable and can be divided into a Hermitian $h_{\mathrm{g}}^h(s) = h(s) + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2T}\left[\dot{\rho}(s)\rho^{-1}(s) - \rho^{-1}(s)^+\dot{\rho}(s)^+\right]$ and an anti-Hermitian $h_{\mathrm{g}}^a(s) = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2T}\left[\dot{\rho}(s)\rho^{-1}(s) + \rho^{-1}(s)^+\dot{\rho}(s)^+\right]$ parts. The anti-Hermitian part causes the non unitarity of the evolution.

Then the generator of evolution $h_{\mathrm{g}}(s)$ (18) can be written as $h_{\mathrm{g}}(s) = h(s) + \mathrm{i}\frac{\hbar}{T}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)$ with

$$\mathcal{A}_1 = \sum_n\left[\left\langle\dot{n}^{H^+}(s)\middle|n^H(s)\right\rangle + \left\langle n^h(s)\middle|\dot{n}^h(s)\right\rangle\right]\left|n^h(s)\right\rangle\left\langle n^h(s)\right| \tag{19}$$

and

$$\mathcal{A}_2 = \sum_{m\neq n}\left\langle\dot{n}^{H^+}(s)\middle|m^H(s)\right\rangle\left|n^h(s)\right\rangle\left\langle m^h(s)\right|. \tag{20}$$

The complex factor $\left\langle\dot{n}^{H^+}(s)\middle|n^H(s)\right\rangle$, which can also be decomposed into Hermitian and anti-Hermitian parts, confers to $h_{\mathrm{g}}(s)$ its unobservability. To remedy this situation and to obtain an observable physical quantity, if we manage to eliminate the non-Hermitian part $\frac{1}{2}\left[\left\langle\dot{n}^{H^+}(s)\middle|n^H(s)\right\rangle + \left\langle n^H(s)\middle|\dot{n}^{H^+}(s)\right\rangle\right]$ and in consequence the mean value of $h_{\mathrm{g}}(s)$ in the eigenstates $\left|n^h(s)\right\rangle$ of $h\,(s)$ becomes real and therefore observable. To this end, we introduce a real coefficient

$$\delta_n(s) = -\frac{1}{2}\int_0^s \left[\left\langle n^H(s')\right|\dot{n}^{H^+}(s')\right\rangle + \left\langle \dot{n}^{H^+}(s')\left| n^H(s')\right\rangle\right] \mathrm{d}s' \tag{21}$$

that allows us to generalize the definitions of equation (7) as follows

$$\tilde{\eta}(s) = \sum_n \mathrm{e}^{2\delta_n(s)} \left|n^{H^+}(s)\right\rangle \left\langle n^{H^+}(s)\right|, \quad \tilde{\eta}^{-1}(s) = \sum_n \mathrm{e}^{-2\delta_n} \left|n^H(s)\right\rangle \left\langle n^H(s)\right| \tag{22}$$

$$\tilde{\rho}\,(s) = \sum_n \mathrm{e}^{\delta_n(s)} \left|n^h(s)\right\rangle \left\langle n^{H^+}(s)\right|, \quad \tilde{\rho}^{-1}\,(s) = \sum_n \mathrm{e}^{-\delta_n(s)} \left|n^H(s)\right\rangle \left\langle n^h(s)\right|, \tag{23}$$

where $\tilde{\eta}(s) = \tilde{\rho}^+\,(s)\,\tilde{\rho}\,(s)$ is the metric operator. One can verify that the standard quasi-Hermiticity relation $\tilde{\eta}(s)H\,(s) = H^+\,(s)\;\tilde{\eta}(s)$ and $\tilde{\rho}\,(s)\,H(s) = h\,(s)\,\tilde{\rho}\,(s)$ remains valid. To convince ourself, just calculate

$$\tilde{\eta}(s)H(s)\tilde{\eta}(s)^{-1} = \sum_{m,n} \mathrm{e}^{2(\delta_n-\delta_m)} \left|n^{H^+}(s)\right\rangle \left\langle n^{H^+}(s)\right| H(s) \left|m^H(s)\right\rangle \left\langle m^H(s)\right| \tag{24}$$

using the eigenequation $H(s)\left|m^H(s)\right\rangle = E_m(s)\left|m^H(s)\right\rangle$ and the biorthonormalization relation $\left\langle m^{H^+}(s)\right| n^H(s)\right\rangle = \delta_{mn}$, we obtain

$$\tilde{\eta}(s)H(s)\tilde{\eta}(s)^{-1} = \sum_n E_n(s) \left|n^{H^+}(s)\right\rangle \left\langle n^H(s)\right| = H^+(s). \tag{25}$$

In the same way the term $\tilde{\rho}\,(s)\,H(s)\tilde{\rho}^{-1}\,(s)$ give

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}\,(s)\,H(s)\tilde{\rho}^{-1}\,(s) &= \sum_{m,n} \mathrm{e}^{(\delta_n-\delta_m)} \left|n^h(s)\right\rangle \left\langle n^{H^+}(s)\right| H(s) \left|m^H(s)\right\rangle \left\langle m^h(s)\right| \\ &= \sum_n E_n(s) \left|n^h(s)\right\rangle \left\langle n^h(s)\right| = h\,(s)\,.\end{aligned} \tag{26}$$

It is important to note that the relation (12), between the eigenstates of $H(s)$ and those of $h\,(s)$, is transformed as

$$\tilde{\rho}^{-1}\,(s)\left|n^h\,(s)\right\rangle = \mathrm{e}^{-\delta_n}\left|n^H\,(s)\right\rangle \tag{27}$$

which obey the biorthonormalization relations

$$\left\langle m^h\,(s)\,|n^h\,(s)\right\rangle = \left\langle m^{H^+}\,(s)\,|n^H\,(s)\right\rangle = \delta_{mn}, \tag{28}$$

thus inducing the following pseudo scalar product

$$\left\langle m^H\,(s)\,|n^H\,(s)\right\rangle_{\tilde{\eta}} = \left\langle m^H\,(s)\left|\tilde{\eta}\,(s)\,\mathrm{e}^{-2\delta_n}\right| n^H\,(s)\right\rangle = \delta_{mn}. \tag{29}$$

We thus recognize the pseudo inner product being not $\left\langle m^H\,(s)\left|\tilde{\eta}\,(s)\right| n^H\,(s)\right\rangle$ but $\left\langle m^H\,(s)\left|\tilde{\eta}\,(s)\,\mathrm{e}^{-2\delta_n}\right| n^H\,(s)\right\rangle$. Both results (28) and (29) are crucial in the following.

It follows by direct substitution of (23) into (18) that the terms $\mathcal{A}_1$ and $\mathcal{A}_2$ of the generator of the evolution $h_g(s)$ in the new Hilbert space are now given as a sum of a Hermitian term

$$\mathcal{A}_1 = \sum_n \frac{1}{2}\left[\left[\left\langle \dot{n}^{H^+}(s)\middle| n^H(s)\right\rangle - \text{c.c}\right] + \left[\left\langle n^h(s)\middle|\dot{n}^h(s)\right\rangle\right]\right]\left|n^h(s)\right\rangle\left\langle n^h\ (s)\right| \tag{30}$$

and another term

$$\mathcal{A}_2 = \sum_{m\neq n} \mathrm{e}^{(\delta_n(s)-\delta_m(s))}\left\langle \dot{n}^{H^+}(s)\middle|\ m^H(s)\right\rangle\left|n^h(s)\right\rangle\left\langle m^h(s)\right|. \tag{31}$$

Consequently, $h_g(s)$ becomes observable because its mean value $\left\langle n^h(s)\right| h_g(s)\left|n^h(s)\right\rangle$ in the eigenstates $\left|n^h(s)\right\rangle$ of $h(s)$ is real.

Let us note that, in the adiabatic limit $T\rightarrow\infty$, the sum $\mathrm{i}\frac{\hbar}{T}(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2)$ vanishes and the generator $h_g(s)$ is reduced to the Hermitian Hamiltonian $h(s)$. This important remark allows us to import all of the results known for the Hermitian systems to our pseudo-Hermitian system, especially, writing the solution of the Schrödinger equation (15) in terms of the eigenfunctions of $h(s)$ and comparing the geometrical phase with the original definition of Berry's phase in the Hermitian case.

Formally, we can evolve a wavefunction forward in time by applying the time-evolution operator. Indeed, the evolution equation (16) becomes

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial s}\Phi_T(s) = Th_g(s)\Phi_T(s) \tag{32}$$

where the corresponding wave functions are transformed as

$$\left|\Psi^{h_g}(s)\right\rangle = \tilde{\rho}(s)\,U_T(s)\,\tilde{\rho}^{-1}(0)\left|\Psi^{h_g}(0)\right\rangle. \tag{33}$$

the new evolution operator is related to the old one by

$$\Phi_T(s) = \tilde{\rho}(s)\,U_T(s)\,\tilde{\rho}^{-1}(0). \tag{34}$$

Before giving the statement of the adiabatic theorem and its demonstration, we define the projector

$$p_n^h(s) = \left|n^h(s)\right\rangle\left\langle n^h(s)\right| \tag{35}$$

on the basis of the Hilbert space $\left(\aleph^h\right)$ related to the Hermitian Hamiltonian $h(s)$. Hence, the projector on the basis of the Hilbert space $\left(\aleph^H\right)$ related to the pseudo-Hermitian Hamiltonian $H(s)$ can be obtained from equation (35) as

$$p_n^H(s) = \tilde{\rho}^{-1}(s)\,p_n^h(s)\,\tilde{\rho}(s) = \left|n^H(s)\right\rangle\left\langle n^{H^+}(s)\right| \tag{36}$$

which has the properties of $p_n^H(s)^2 = p_n^H(s)$ and $p_n^H(s)^+ \neq p_n^H(s)$. And then the Hamiltonian of the system is given by

$$H(s) = \sum_n E_n(s)\,p_n^H(s). \tag{37}$$

Now let us generalize and present a straightforward, yet rigorous, proof of the adiabatic theorem for systems whose Hamiltonians are pseudo Hermitian.

3. Adiabatic theorem

If the following conditions are fulfilled:

(a) The eigenvalues are assumed differentiable in the parameter s, (in the original version of the adiabatic theorem one has to add the noncrossing condition of the different level, this condition is no more necessary after the works of Avron *et al* [42] and Maamache and Saadi [10]).
(b) The derivatives $\frac{\partial}{\partial s} p_n^H(s)$ and $\frac{\partial^2}{\partial s^2} p_n^H(s)$ are well defined and continuous in the interval $0 \leqslant s \leqslant 1$.

The adiabatic theorem for the pseudo-Hermitian system reads: 'If the quantum system with time-dependent Hamiltonian having a non degenerate spectrum is initially in an eigenstate $\left|n^H(0)\right\rangle$ of $H(0)$ and if $H(s)$ evolves slowly enough then the system at any time s remain in the eigenstate $\left|n^H(s)\right\rangle$'.

The adiabatic theorem can be formally written, at the first order, in terms of the evolution operator as [1–4]

$$\lim_{T\to\infty} U_T(s)\, p_i^H(0) = \lim_{T\to\infty} p_i^H(s)\, U_T(s)\,. \tag{38}$$

The substitution of the evolution operator $U_T(s) = \tilde{\rho}^{-1}(s)\,\Phi_T(s)\,\tilde{\rho}(0)$, equations (34) and (36) in equation (38) leads to

$$\begin{gathered}\lim_{T\to\infty} \tilde{\rho}^{-1}(s)\,\Phi_T(s)\,p_i^h(0)\,\tilde{\rho}(0) = \lim_{T\to\infty} \tilde{\rho}^{-1}(s)\,p_i^h(s)\,\Phi_T(s)\,\tilde{\rho}(0)\\ \tilde{\rho}^{-1}(s)\left(\lim_{T\to\infty} \Phi_T(s)\,p_i^h(0)\right)\tilde{\rho}(0) = \tilde{\rho}^{-1}(s)\left(\lim_{T\to\infty} p_i^h(s)\,\Phi_T(s)\right)\tilde{\rho}(0)\,,\end{gathered} \tag{39}$$

which implies that

$$\lim_{T\to\infty} \Phi_T(s)\,p_n^h(0) = \lim_{T\to\infty} p_n^h(s)\,\Phi_T(s)\,. \tag{40}$$

It is easy to see that the equations (38) and (40) are equivalent. The last equation (40) is related to the Hermitian projector p_n^h, which means that we can use the demonstration following closely Messiah [4] where the Hermiticity condition plays an essential role. But before starting, we want to stress here that there is a big difference between our equation (40) and the equation known in the literature. Indeed, in the literature, the evolution operator $\Phi_T(s)$ is governed by $h(s)$ itself, but in our case it is governed by the generator $h_g(s)$ (see equation (32)).

To eliminate as much as possible the rotational movement of eigenvectors, we introduce, in rotating axis representation, a unitary adiabatic operator $A(s)$ on the Hilbert space $\left(\aleph^h\right)$ having the property

$$p_n^h(s) = A(s)\,p_n^h(0)\,A^+(s) \tag{41}$$

then the corresponding transformation on $\left(\aleph^H\right)$ is

$$p_n^H(s) = B(s)\,p_n^H(0)\,B^{-1}(s) \tag{42}$$

where

$$B(s) = \tilde{\rho}^{-1}(s)\,A(s)\,\tilde{\rho}(0) \tag{43}$$

and its inverse is

$$B^{-1}(s) = \tilde{\rho}^{-1}(0) A^{+}(s) \tilde{\rho}(s) .$$

The operator $A(s)$ verifies $\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial s}A(s) = K(s)A(s)$ by using the unitarity of $A(s)$ then the generator $K(s)$ is shown to be a Hermitian operator. In $\left(\aleph^{H}\right)$ the operator $B(s)$ verifies then

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial s}B(s) = \tilde{K}(s) B(s) \tag{44}$$

with

$$\tilde{K}(s) = \tilde{\rho}^{-1}(s) K(s) \tilde{\rho}(s) - \mathrm{i}\hbar\left(\tilde{\rho}^{-1}(s) \dot{\tilde{\rho}}(s)\right) . \tag{45}$$

By calculating the derivative of (41) one finds

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial s}p_n^h(s) = \left[K(s), p_n^h(s)\right] \tag{46}$$

which can be written in terms of $p_n^H(s)$ as

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial s}p_n^H(s) = \left[\tilde{K}(s), p_n^H(s)\right] . \tag{47}$$

In the rotating axis frame, the Hamiltonian H becomes (using (37) and (42))

$$H^{(B)}(s) = B^{-1}(s) H(s) B(s) = \sum_n E_n(s) p_n^H(0) \tag{48}$$

and the generator $\tilde{K}^{(B)}(s) = B^{-1}(s) \tilde{K}(s) B(s)$ gets the form

$$\tilde{K}^{(B)}(s) = \tilde{\rho}^{-1}(0)\left[K^{A}(s) - \mathrm{i}\hbar\left(A^{+}(s)\frac{\partial\rho(s)}{\partial s}\rho^{-1}(s)A(s)\right)\right]\tilde{\rho}(0) \tag{49}$$

where $K^{(A)}(s) = A^{+}(s) K(s) A(s)$. Then, our pseudo-Hermitian operator $U_T^{(B)}(s) = B^{-1}(s) U_T(s)$ verifies

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial s}U_T^{(B)}(s) = \left[TH^{(B)}(s) - \tilde{K}^{(B)}(s)\right] U_T^{(B)}(s) . \tag{50}$$

For $T \to \infty$, one gets

$$\lim_{T\to\infty}\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial s}U_T^{(B)}(s) \to TH^{(B)}(s) U_T^{(B)}(s) . \tag{51}$$

Moreover, equation (16) can be integrated exactly in this particular case and gives

$$\lim_{T\to\infty} U_T(s) \to \sum_n \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}T}{\hbar}\int_0^s \varepsilon_n(s')\mathrm{d}s'} B(s) p_n^H(0) . \tag{52}$$

We come back to the evolution operator $\Phi_T^{(A)}(s) = A^{+}(s)\Phi_T(s)$ which is equivalent, in the adiabatic limit $T \to \infty$, to the evolution operator obtained in equation (52). In effect the evolution operator $\Phi_T^{(A)}(s)$ verifies

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial s}\Phi_T^{(A)}(s) = \left[Th_{\mathrm{g}}^{(A)}(s) - K^{(A)}(s)\right]\Phi_T^{(A)}(s) \tag{53}$$

where

$$h_{\mathrm{g}}^{(A)}(s) = A^{+}(s)\, h_{\mathrm{g}}(s)\, A(s) \tag{54}$$

and when we take the limit $T \to \infty$, the operator $\Phi_T^{(A)}(s)$ obeys the equation

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial s} \Phi_T^{(A)}(s) = T h^{(A)}(s)\, \Phi_T^{(A)}(s) \tag{55}$$

where now $h^{(A)}(s) = A^{+}(s)\, h(s)\, A(s)$. Thus,

$$\lim_{T\to\infty} \Phi_T(s) \to \sum_n \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}T}{\hbar}\int_0^s E_n(s')\mathrm{d}s'} A(s)\, p_n^h(0)\,. \tag{56}$$

We can easily verify, by using (34), (43) and (36), that equations (52) and (56) are equivalent.

Since everything is well defined, we focus from now on the relations corresponding to $(\aleph^H)$: we introduce a unitary transformation $W(s) = \left(\Phi_T^{(A)}(s)\right)^{-1} U_T^{(B)}\, U_T(s)$ so that, in this new representation, $U_T(s)$ is

$$U_T(s) = \sum_n \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}T}{\hbar}\int_0^s E_n(s')\mathrm{d}s'} B(s)\, p_n^H(0)\, W(s)\,. \tag{57}$$

As we shall see, the demonstration of (38) is equivalent to showing that $[W(s), p_i(0)] = 0$, i.e.,

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty} \sum \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}T}{\hbar}\int E_n(t)\,\mathrm{d}t} B(s)\, p_n(0)\, W(s)\, p_m(0)\\
&\quad= \lim_{T\to\infty} p_m(s) \sum \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}T}{\hbar}\int E_n(t)\mathrm{d}t} B(s)\, p_{in}(0)\, W(s) \Rightarrow \left[W(s), p_j(0)\right] = 0.
\end{aligned}$$

Let us start with the demonstration of the adiabatic theorem: to do this, we insert $U_T(s)$ (57) in the evolution equation (16) which lead to

$$\begin{aligned}
&\sum_n \left(T E_n(s)\, \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}T}{\hbar}\int E_n(t)\,\mathrm{d}t} B(s)\, p_n(0)\, W(s) + \sum_n \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}T}{\hbar}\int E_n(t)\,\mathrm{d}t} \tilde{K}(s)\, B(s)\, p_n(0)\, W(s) \right.\\
&\quad \left. + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}T}{\hbar}\int E_n(t)\,\mathrm{d}t} B(s)\, p_n(0)\, \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial s} W(s) \right) = \sum_n \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}T}{\hbar}\int E_n(t)\,\mathrm{d}t} T E_i(s)\, p_n(s)\, B(s)\, W(s)
\end{aligned} \tag{58}$$

where we have used (44). By using equation (42), this last equation is simplified as

$$p_m(0)\, \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial s} W(s) = -\sum_n \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}T}{\hbar}\int [\varepsilon_n(t) - \varepsilon_m(t)]\,\mathrm{d}t} p_m(0)\, \tilde{K}^{(B)}(s)\, p_n(0)\, W(s)$$

which implies that the evolution equation of this new unitary operator $W(s)$ is given as

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial s}W(s) = \bar{K}(s)\,W(s)\,, \tag{59}$$

where

$$\bar{K}(s) = -\sum_{n,m} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}T}{\hbar}\int_0^s [E_n(s')-E_m(s')]\mathrm{d}s'} p_m^H(0)\,\tilde{K}^{(B)}(s)\,p_n^H(0)\,. \tag{60}$$

In its integral form, the equation (59) is written as

$$W(s) = I + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}F(s)\,W(s) + \frac{1}{\hbar^2}\int_0^s F\left(s'\right)\bar{K}(s)\,W\left(s'\right)\mathrm{d}s', \tag{61}$$

where

$$F(s) = \int_0^s \bar{K}\left(s'\right)\mathrm{d}s'. \tag{62}$$

We see that $F(s)$ is a sum of oscillating functions whose frequencies increase indefinitely with T, and consequently the two last terms on the right-hand side of equation (61) tend to zero when $T\to\infty$. Indeed, from (49) $p_n^H(0)\,\tilde{K}^{(B)}(s)\,p_m^H(0)$ is a continuous function of s and independent of T. The phase of the exponential, however does depend on T and $F(s)$ is therefore of the form $\int_0^s \mathrm{e}^{\mathrm{i}T\alpha(s')/\hbar}f\left(s'\right)\mathrm{d}s'$, where f is a continuous function of s and α is a continuous monotonic function of s. After integrating by part such an integral converges asymptotically to zero as $1/T$. Summarizing, as $T\to\infty$ we have $F(s) = O\left(1/T\right)$. Since the two last terms in equation (61) contain the factor $F(s)$, then for $T\to\infty$ we obtain

$$U_T(s) \simeq \sum_n \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}T}{\hbar}\int_0^s E_n(s')\mathrm{d}s'} B(s)\,p_n^H(0)\left[I + O\left(\frac{1}{T}\right)\right]. \tag{63}$$

By using (42) we easily verify that

$$\lim_{T\to\infty} U_T(s)\,p_n^H(0) = \lim_{T\to\infty} p_n^H(s)\,U_T(s) \tag{64}$$

which closes the demonstration of the adiabatic theorem.

4. Solution of the Schrödinger equation

Before finding the solutions of our initial Schrödinger equation (15), let us recall the steps followed to calculate the Berry's phase in standard quantum mechanics:

(a) We calculate the eigenfunctions $\left|n^H(s)\right\rangle$ of the stationary Hamiltonian H.
(b) These eigenfunctions are normalized in the sense of pseudo-scalar product relations

$$\left\langle m^H(s)\left|\tilde{\eta}(s)\,\mathrm{e}^{-2\delta_n(s)}\right|n^H(s)\right\rangle = \delta_{mn}. \tag{65}$$

(c) We reintroduce the time s in the wavefunction again.
(d) Finally, we calculate the Berry's phase.

As it was mentioned in the beginning, we show below that the reality of the geometrical phase is guaranteed by the use of the metric operator $\tilde{\eta}(s) = \tilde{\rho}^{+}(s)\,\tilde{\rho}(s)$.

Notice that the previous adiabatic theorem asserts that the evolved eigenstate $\left|n^{H}(0)\right\rangle$ of a Hamiltonian $H(0)$ at time 0 remains at any time in the eigenstate $\left|n^{H}(s)\right\rangle$ of $H(s)$, thus the limit $T \to \infty$ (38) implies that the solution of equation (15) takes the form

$$\left|\Psi^{H}(s)\right\rangle = U(s)\left|n^{H}(0)\right\rangle = C_{n}(s)\left|n^{H}(s)\right\rangle. \tag{66}$$

The adiabatic evolution described by the equation (66) suffers from no ambiguity because it describes the solution of the Schrödinger equation (15) governed by the pseudo-Hermitian Hamiltonian $H(t)$.

Having demonstrated the adiabatic theorem for pseudo-Hermitian system, we will discuss shortly an important point regarding the probability density $\left\langle \Psi^{H}(s)\left|\tilde{\eta}(s)\right|\Psi^{H}(s)\right\rangle$ to be time invariant, i.e.; the time derivative of the pseudo-inner product of an evolved eigenstate $\left|\Psi^{H}(s)\right\rangle$ with itself vanishes. Therefore, equation (22) is a necessary condition for the probability to be conserved.

Then, using equation (15), quasi-Hermiticity relation (10) and (66), we proceed to verify the preservation of probability. The elementary differentiation of $\left\langle \Psi^{H}(s)\left|\tilde{\eta}\right|\Psi^{H}(s)\right\rangle$ with respect to s gives

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\langle \Psi^{H}(s)\left|\tilde{\eta}(s)\right|\Psi^{H}(s)\right\rangle = \left|C_{n}(s)\right|^{2}\left\langle n^{H}(s)\left|\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\eta}(s)\right|n^{H}(s)\right\rangle. \tag{67}$$

Using the equation (21), the derivative of the metric (22) leads to

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\tilde{\eta}(s) = \sum_{n} \mathrm{e}^{2\delta_{n}(s)} \Bigg(&- \left[\left\langle n^{H}(s)\right|\frac{\partial}{\partial s}n^{H^{+}}(s)\right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial s}n^{H^{+}}(s)\left|\, n^{H}(s)\right\rangle\right] \\ &+ \left|\frac{\partial}{\partial s}n^{H^{+}}(s)\right\rangle\left\langle n^{H^{+}}(s)\right| + \left|n^{H^{+}}(s)\right\rangle\left\langle \frac{\partial}{\partial s}n^{H^{+}}(s)\right|\Bigg).\end{aligned} \tag{68}$$

Now just take the mean value of $\partial\eta(s)/\partial s$ in the states $\left|n^{H}(s)\right\rangle$ to get the expected result

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\langle \Psi^{H}(s)\left|\tilde{\eta}(s)\right|\Psi^{H}(s)\right\rangle = 0. \tag{69}$$

In other words, the adiabatic time-evolution of the system specified by the quasi-Hermitian and time-dependent Hamiltonian $H(s)$ is unitary.

Since the Berry phase in conventional quantum mechanics is well known and its experimental verification has been done, it is natural to compare any phase obtained in the non-Hermitian (or pseudo-Hermitian) theory with that of the Hermitian theory in order to be able to identify clearly the Berry phase.

In the adiabatic limit, $h_{\mathrm{g}}(s) \to h(s)$, the natural adiabatic representation should comprise instantaneous eigenstates of $h(s)$. By inserting the solution (66) into the equation (15) one obtains

$$\mathrm{i}\dot{C}_{n}(t)\left|n^{H}(t)\right\rangle + C_{n}(t)\,\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\left|n^{H}(t)\right\rangle = C_{n}(t)\,E_{n}(t)\left|n^{H}(t)\right\rangle. \tag{70}$$

Nevertheless, the projection of equation (70) with $\left\langle n^{H^{+}}(s)\right| = \left\langle n^{H}(s)\right|\ \mathrm{e}^{-2\delta_n(s)}\tilde{\eta}(s)$ (27), and in this case,

$$\mathrm{i}\dot{C}_n(t) + C_n(t)\,\mathrm{e}^{-2\delta_n(t)}\left\langle n^{H}(t)\right|\eta(t)\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\left|n^{H}(t)\right\rangle = C_n(t)\,E_n(t). \tag{71}$$

The definitions: $\left|n^{H}(t)\right\rangle = \mathrm{e}^{\delta_n}\tilde{\rho}^{-1}(t)\left|n^{h}(t)\right\rangle$, $\tilde{\eta}(t) = \tilde{\rho}^{+}(t)\,\tilde{\rho}(t)$, and $\frac{\partial\delta_n}{\partial t} = -\frac{1}{2}\left\langle n^{h}(t)\right|\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}\rho^{-1}(t) + \left(\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}\rho^{-1}(t)\right)^{+}\left|n^{h}(t)\right\rangle$ allows us to write the equation (70) as

$$\mathrm{i}\dot{C}_n(t) + C_n(t)\left\langle n^{h}(t)\right|\frac{\mathrm{i}}{2}\left[\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}\rho^{-1}(t) - \left(\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}\rho^{-1}(t)\right)^{+}\right] + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\left|n^{h}(t)\right\rangle = C_n(t)\,E_n(t). \tag{72}$$

Thus, one obtains, $C_n(s) = C_n(0)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\gamma_n^{D}(s) + \gamma_n^{G}(s)\right]\right\}$, where $\gamma_n^{D}(s) = -\int_0^s TE_n(s')\,\mathrm{d}s'$ is the well-known dynamical phase and

$$\gamma_n^{G}(s) = \mathrm{i}\hbar\int_0^s \left\langle n^{h}(s')\right|\partial_{s'} - \left(\frac{\dot{\tilde{\rho}}(s')\tilde{\rho}^{-1}(s')}{2} - \frac{\left(\dot{\tilde{\rho}}(s')\tilde{\rho}^{-1}(s')\right)^{+}}{2}\right)\left|n^{h}(s')\right\rangle\mathrm{d}s' \tag{73}$$

is the generalized real geometrical phase corresponding to the pseudo-Hermitian Hamiltonian $H(s)$, which is written in terms of the original Berry's phase [6] of the Hermitian case plus a new term that results from the contribution of the metric operator that we call 'the metric geometrical phase'. This constitutes the second important result of this paper following the first one which is none other than the demonstration of the adiabatic theorem. Using the equation (27), the generalized geometrical phase (73) can be expressed in terms of the eigenstates $\left|n^{H}(s)\right\rangle$ of $H(s)$ as

$$\gamma_n^{G}(s) = -\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\int_0^s \left[\left\langle \dot{n}^{H^{+}}(s')\middle| n^{H}(s')\right\rangle - \left\langle n^{H}(s')\middle|\dot{n}^{H^{+}}(s')\right\rangle\right]\mathrm{d}s'. \tag{74}$$

The original argument of references [11–17, 39], giving the geometric phase for general non Hermitian operators in terms of right-eigenvectors $\left|n^{H}(t)\right\rangle$ and left-eigenvectors $\left\langle n^{H}(t)\right|$ of $H(t)$ (provided that the complex eigenvalues are not degenerate), shows that the phases need not be real: the state returns with a different amplitude as well as a different phase: the geometric phase with biorthogonal normalization can be complex.

Since the norms of eigenvectors $\left|n^{H}(t)\right\rangle$ are not equal to 1, the authors of reference [16] use the projection of equation (70) with $\frac{\left\langle n^{H}(t)\right|}{\left\langle n^{H}(t)|n^{H}(t)\right\rangle}$, and in this case, the associated geometric phases deals also with changes of both the phase and norm. The difference between our results (73) and those of references [11–17, 39] is due to the used normalization.

4.1. First application: the generalized brachistochrone

Berry [6] showed that the geometrical phase is most easily illustrated in two-states systems. So for the purpose of illustration and simplicity, we examine a system which can be formulated easily in a two-dimensional Hilbert space, namely the non-Hermitian quantum brachistochrone problem. As its name indicates, it is a quantum version of the classical brachistochrone problem, which consists of determining the curve that minimizes the time it takes for an object to go between points in different heights along a vertical plane under the action of the gravitational field without friction. Consider then, the time-dependent generalized brachistochrone described by the pseudo-Hermitian Hamiltonian

$$H(t) = \begin{pmatrix} r(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)} & \tau(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)} \\ \lambda(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi(t)} & r(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(t)} \end{pmatrix} \tag{75}$$

where r, θ, τ, λ, and φ depends slowly on time t. When the parameters are time-independent, this Hamiltonian has been suggested and studied thoroughly by Bender *et al* [43] in the context of the PT-symmetric quantum mechanics. We point out that in reference [43] the Hamiltonian operator is not obviously PT-symmetric when parity operator is defined as the Pauli matrix σ_x.

The Hamiltonian operator $H(t)$ has two eigenstates

$$\left|+^{H}, t\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\cos\alpha}} \begin{pmatrix} \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}} \\ \left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \end{pmatrix} \tag{76}$$

$$\left|-^{H}, t\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\cos\alpha}} \begin{pmatrix} \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}} \\ -\left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \end{pmatrix}, \tag{77}$$

corresponding to the real eigenvalues

$$E_{\pm}(t) = r\cos\theta \pm \sqrt{\lambda\tau}\cos\alpha, \tag{78}$$

where $\lambda\tau > r^2\sin^2\theta$ and $\sin\alpha = \frac{r}{\sqrt{\lambda\tau}}\sin\theta$. For adiabatic evolution of the eigenstates, we can find $\gamma_n^G(s)$ by using (73), where the time-dependent operator $\tilde{\rho}(t)$ is identified with

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2\cos\alpha}} \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\tau}{\lambda}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} & \left(\dfrac{\lambda}{\tau}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} \\ \left(\dfrac{\tau}{\lambda}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} & -\left(\dfrac{\lambda}{\tau}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \tag{79}$$

and the inverse $\tilde{\rho}^{-1}(t)$ and the metric operator $\tilde{\eta}(t) = \tilde{\rho}^{+}(t)\,\tilde{\rho}(t)$ are given as

$$\tilde{\rho}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\cos\alpha}} \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\lambda}{\tau}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} & \left(\dfrac{\lambda}{\tau}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} \\ \left(\dfrac{\tau}{\lambda}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} & -\left(\dfrac{\tau}{\lambda}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \tag{80}$$

$$\tilde{\eta} = \frac{1}{\cos\alpha} \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{\tau}{\lambda}} & -\mathrm{i}\sin\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \\ \mathrm{i}\sin\alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} & \sqrt{\dfrac{\lambda}{\tau}} \end{pmatrix}. \tag{81}$$

Then it is easily verified that the general Hamiltonian (26) is Hermitian, namely,

$$h(s) = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -\sqrt{\lambda\tau}\cos\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \\ -\sqrt{\lambda\tau}\cos\alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} & r\cos\theta \end{pmatrix} \tag{82}$$

having as eigenfunctions

$$\left|n_{+}^{h}(t)\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\end{pmatrix},\quad\left|n_{-}^{h}(t)\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\end{pmatrix}.\tag{83}$$

The term $\left(\dot{\rho}(t)\rho^{-1}(t)-\left(\dot{\rho}(t)\rho^{-1}(t)\right)^{+}\right)$ that comes from the metric geometrical phase (73) is given by

$$\dot{\tilde{\rho}}(t)\tilde{\rho}^{-1}(t)-\left(\dot{\tilde{\rho}}(t)\tilde{\rho}^{-1}(t)\right)^{+}=\frac{\mathrm{i}}{2\ \cos\ \alpha}\begin{pmatrix}\sin\ \alpha\ \ln\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) & -2\dot{\varphi}\\ -2\dot{\varphi} & \sin\ \alpha\ \partial_s\ \ln\left(\frac{\lambda}{\tau}\right)\end{pmatrix}.\tag{84}$$

Thus the metric geometrical phase (73) can be deduced as follow

$$\dot{\gamma}_{\pm}^{\tilde{\eta}}(t)=\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\left\langle n_{\pm}^{h}(t)\right|\dot{\tilde{\rho}}(t)\tilde{\rho}^{-1}(t)-\left(\dot{\tilde{\rho}}(t)\tilde{\rho}^{-1}(t)\right)^{+}\left|n_{\pm}^{h}(t)\right\rangle=\mp\hbar\frac{\cos\ \varphi}{\cos\ \alpha}\dot{\varphi}\tag{85}$$

and the corresponding Berry's phase $\dot{\gamma}_{\pm}^{B}(t)$ is

$$\dot{\gamma}_{\pm}^{B}(t)=\left\langle n^{h}(t)|\dot{n}^{h}(t)\right\rangle=\pm\hbar\dot{\varphi}/2.\tag{86}$$

For adiabatic evolution of the eigenstates (66) ruled by the Hamiltonian (75), we find the solution of the Schrödinger equation (15) as

$$\left|\Psi_{\pm}^{H}(s)\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\ \cos\ \alpha}}\exp\left(\pm\mathrm{i}\hbar\int_0^s\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos\ \varphi}{\cos\ \alpha}\right)\dot{\varphi}\mathrm{d}s'\right)\begin{pmatrix}\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{\frac{1}{4}}\ \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}\\ \pm\left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^{\frac{1}{4}}\ \mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\end{pmatrix}.\tag{87}$$

Now, if we consider a cyclic evolutions in a time T around a closed circuit $\mathcal{C}$ such that $\{r(T),\ \lambda(T),\ \tau(T),\ \theta(T),\ \varphi(T)\}=\{r(0),\ \lambda(0),\ \tau(0),\ \theta(0),\ \varphi(0)\}$ then the geometrical phase looks like the following

$$\gamma_{\pm}^{G}(t)=\pm\hbar\oint_{\mathcal{C}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos\ \varphi}{\cos\ \alpha}\right)\mathrm{d}\varphi.\tag{88}$$

4.2. Second application: a non-Hermitian displaced harmonic oscillator

Let us consider the pseudo-Hermitian displaced harmonic oscillator described by the Hamiltonian

$$H(t)=\frac{(p-\mathrm{i}\alpha(t))^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2(q-\mathrm{i}\beta(t))^2\tag{89}$$

where $\alpha(t)$ and $\beta(t)$ are real time dependent functions and m and ω are constants.

The metric operator is given by

$$\tilde{\eta}(t)=\tilde{\rho}(t)^{+}(t)\,\tilde{\rho}(t)=\mathrm{e}^{2(\alpha(t)q-\beta(t)p)}\tag{90}$$

corresponding to

$$\tilde{\rho}(t)=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\alpha(t)\beta(t)}\ \mathrm{e}^{\alpha(t)q}\ \mathrm{e}^{-\beta(t)p}\tag{91}$$

and

$$\tilde{\rho}^{-1}(t) = \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}}{2}\alpha(t)\beta(t)}\ \mathrm{e}^{+\beta(t)p}\ \mathrm{e}^{-\alpha(t)q}. \tag{92}$$

Using the following properties

$$\tilde{\rho}(t)\, p\tilde{\rho}^{-1}(t) = p + \mathrm{i}\alpha(t) \tag{93}$$

$$\tilde{\rho}(t)\, q\tilde{\rho}^{-1}(t) = q + \mathrm{i}\beta(t). \tag{94}$$

Equation (26) gives the ordinary Hermitian Hamiltonian of the harmonic oscillator

$$h(t) = \tilde{\rho}(t)\, H\tilde{\rho}^{-1}(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{95}$$

where its eigenfunctions and eigenvalues are respectively

$$\langle q | n_{\pm}^{h}(t)\ \rangle = \zeta(q) = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(\frac{1}{(\sqrt{(2^n n!)})}\right) H_n\left(\sqrt{m\omega}q\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}m\omega q^2} \tag{96}$$

$$E_n(s) = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \tag{97}$$

H_n denote the Hermite polynomials. Using the Hermite polynomials properties [4], one finds that the metric geometrical phase (73) can be deduced as follow

$$\gamma_n^{\tilde{\eta}}(t) = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\int_0^t \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(q)\left(\dot{\tilde{\rho}}(t)\tilde{\rho}^{-1}(t) - \left(\dot{\tilde{\rho}}(t)\tilde{\rho}^{-1}(t)\right)^{+}\right)\zeta(q)\,\mathrm{d}q \tag{98}$$

$$= \int_0^t \mathrm{d}t'\left(\alpha\left(t'\right)\dot{\beta}\left(t'\right) - \dot{\alpha}\left(t'\right)\beta\left(t'\right)\right) \tag{99}$$

and the corresponding Berry's phase $\gamma_n^B(t) = \mathrm{i}\hbar\int_0^t \mathrm{d}t' \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(q)\left(\frac{\partial}{\partial t'}\tilde{\eta}(s)\right)\zeta(q)\,\mathrm{d}q$ is equal to zero. For a cyclic path, the geometrical phase (73) is given as

$$\gamma_n^G(T) = \gamma_n^{\tilde{\eta}}(T) = \oint (\alpha(t)\, d\beta(t) - \mathrm{d}\alpha(t)\,\beta(t)). \tag{100}$$

Then the solution of the Schrödinger equation (15) is given as

$$\left|\Psi_n^H(T)\right\rangle = \exp\left(\mathrm{i}\hbar\oint(\alpha(t)\,\mathrm{d}\beta(t) - \mathrm{d}\alpha(t)\,\beta(t))\right)\zeta(q). \tag{101}$$

5. Conclusion

We have presented a simple and practical form of the generalized adiabatic theorem in pseudo-Hermitian case and examined in a direct manner its demonstration, similar to the one used in the Hermitian case. We have showed that the generalized geometrical phase is the sum of the well-known Berry phase in the Hermitian case and a metric geometrical phase. We strongly emphasize on the fact that the adiabatic evolution of a quantum state is described by the Schrödinger (15) equation associated to the pseudo-Hamiltonian $H(t)$.

To illustrate the theory, the generalized brachistochrone and a non-Hermitian displaced harmonic oscillator are treated and the adiabatic solutions are found for the pseudo-Hermitian Hamiltonian $H(t)$ considered as the time-evolution operator satisfying the Schrödinger equation (15).

Finally, in order to make the comparison with Gong and Wang's work [29], let us try to briefly recall the main result of their work. In [29] the authors expand the solution $|\Psi(t)\rangle$ of the Schrödinger-like equation ruled by the generator of time displacement $\Lambda(t) = H(t) - \frac{i\hbar}{2}\eta^{-1}(t)\dot{\eta}(t)$, in terms of the instantaneous eigenstates $|n^H(t)\rangle$ of $H(t)$ and they make the adiabatic approximation as an ansatz (a precise adiabatic condition is out of the scope of their work), ignoring thereby the transitions between distinct eigenstates. The geometric phase was obtained as

$$\gamma_n^G(t) = i\hbar \int_0^t \left[\langle n^H(t')| \eta(t')\partial_{t'} |n^H(t')\rangle + \frac{1}{2} \langle n^H(t')| \partial_{t'}\eta(t') |n^H(t')\rangle \right] dt'. \tag{102}$$

This gives, in addition to the complex Berry's phase $\gamma_n^B(t) = i\hbar\int_0^t \langle n^H(t')| \eta(t')\partial_{t'} |n^H(t')\rangle dt'$, a GEOMETRICAL AMPLITUDE (purely imaginary) $\frac{i\hbar}{2}\int_0^t \langle n^H(t')| \partial_{t'}\eta(t') |n^H(t')\rangle dt'$ which represents a geometrical effects due to the time-dependent metric resulting from the generator Λ. But only the combination of these two terms ensure that $\gamma_n^G(t)$ is real. Note that, the geometrical phase (73) is similar to the equation (102) derived by Gong and Wang in [29]. Although the fact that the phases are identical, the evolved states do not obey the same Schrödinger equation. Compared with the usual Schrödinger equation (15), a geometric additional term $-\frac{i\hbar}{2}\eta^{-1}(t)\dot{\eta}(t)$ emerges in [29].

The expression that we can find in the literature concerning the adiabatic geometric phases of non-Hermitian Hamiltonians [11–17, 39] are generally not real, hence unobservables. The difference is due to the different normalization used. The complex Berry phase arises as a consequence of the biorthogonal eigenvector and deals with changes of both the phase and geometric amplitude. However, the real part standing for the phase factor can be really detected by the inference experiment.

The reader must have noticed that our approach is different from that of the reference [29]. Indeed, we first demonstrated the adiabatic theorem, and then we mainly obtained the solution of the Shrödinger equation (15) governed by a slowly varying time-dependent pseudo-Hermitian Hamiltonian $H(t)$. It should be emphasized that the resulting geometrical phase is obtained directly as sum of two real terms, one of which is the well-known phase established by Berry, the second represents a geometrical effect due to the metric that could be detected experimentally. This decomposition of the phase constitutes the second main result of this paper.

ORCID iDs

M Maamache https://orcid.org/0000-0002-3960-064X

References

[1] Dirac P A M 1958 *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford: Oxford University Press)
[2] Born M and Fock V 1928 *Z. Phys.* **51** 165
[3] Kato T 1950 *J. Phys. Soc. Japan* **5** 435
[4] Messiah A 1962 *Quantum Mechanics* (Amsterdam: North-Holland)

[5] Galindo A and Pascual P 1991 *Quantum Mechanics* (Berlin: Springer)
[6] Berry M V 1984 *Proc. R. Soc.* A **392** 45
[7] Aharonov Y and Anandan J 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 1593
[8] Wilczek F and Zee A 1984 *Phys. Rev. Lett.* **52** 2111
[9] Samuel J and Bhandari R 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 2339
[10] Maamache M and Saadi Y 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 150407
Maamache M and Saadi Y 2008 *Phys. Rev.* A **78** 052109
[11] Garrison J C and Wright E M 1988 *Phys. Lett.* A **128** 177
[12] Dattoli G, Mignani R and Torre A 1990 *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** 5795
[13] Miniature C, Sire C, Baudon J and Bellissard J 1990 *Europhys. Lett.* **13** 199
[14] Mondragon A and Hernandez E 1996 *J. Phys.* A **29** 2567
[15] Mostafazadeh A 1999 *Phys. Lett.* A **264** 11
[16] Viennot D, Leclerc A, Jolicard G and Killingbeck J P 2012 *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** 335301
[17] Hayward R and Biancalana F 2018 *Phys. Rev.* A **98** 053833
[18] Gao X-C, Xu J-B and Qian T-Z 1992 *Phys. Rev.* A **46** 3626
[19] Choutri H, Maamache M and Menouar S 2002 *J. Korean Phys. Soc.* **40** 358
[20] Pauli W 1943 *Rev. Mod. Phys.* **15** 175
[21] Scholtz F G, Geyer H B and Hahne F J W 1992 *Ann. Phys.* **213** 74
[22] Von Neumann J and Wigner E 1929 *Z. Phys.* **30** 465–70
[23] Bender C M 2007 *Rep. Prog. Phys.* **70** 947
[24] Mostafazadeh A 2010 *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **7** 1191
[25] Mostafazadeh A 2007 *Phys. Lett.* B **650** 208
[26] Znojil M 2008 *Phys. Rev.* D **78** 085003
[27] Bıla H 2009 arXiv:0902.0474
[28] Gong J and Wang Q H 2010 *Phys. Rev.* A **82** 012103
[29] Gong J and Wang Q H 2013 *J. Phys.* A **46** 485302
[30] Zhang D-J, Wang Q-H and Gong J 2019 *Phys. Rev.* A **100** 062121
[31] Maamache M 2015 *Phys. Rev.* A **92** 032106
[32] Fring A and Moussa M H Y 2016 *Phys. Rev.* A **93** 042114
Fring A and Moussa M H Y 2016 *Phys. Rev.* A **94** 042128
[33] Khantoul B, Bounames A and Maamache M 2017 *Eur. Phys. J. Plus* **132** 258
[34] Maamache M, Djeghiour O-K, Mana N and Koussa W 2017 *Eur. Phys. J. Plus* **132** 383
[35] Fring A and Frith T 2017 *Phys. Lett.* A **381** 2318
[36] Mehri-Dehnavi H and Mostafazadeh A 2008 *J. Math. Phys.* **49** 082105
[37] Hayward R and Biancalana F 2018 *Phys. Rev.* A **98** 053833
[38] Kvitsinsky A and Putterman S 1991 *J. Math. Phys.* **32** 1403
[39] Nenciu G and Rasche G 1992 *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** 5741
[40] Dridi G, Guérin S, Jauslin H R, Viennot D and Jolicard G 2010 *Phys. Rev.* A **82** 022109
[41] Milburn T J, Doppler J, Holmes C A, Portolan S, Rotter S and Rabl P 2015 *Phys. Rev.* A **92** 052124
[42] Avron J E and Elgart A 1999 *Commun. Math. Phys.* **203** 445
[43] Bender C M, Brody D C and Jones H F 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 270401