الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ferhat ABBAS Sétif 1

UNIVERSITÉ FERHAT ABBAS - SETIF1

FACULTÉ DE SCIENCES

THÈSE

Présentée au Département de Mathématiques.

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques **Option: Algèbre**

Par

AZRA Souad

THÈME

Groupes dont les sous-groupes propres sont fini-par-hypercentraux

Soutenue le 09/03/2022

devant le Jury

N. Bensalem	Professeur	Univ. Ferhat Abbas Sétif 1	Président
N. Trabelsi	Professeur	Univ. Ferhat Abbas Sétif 1	Directeur de thèse
L. Noui	Professeur	Université Batna2	Examinateur
A. Badis	MC	Université de Khenchela	Examinateur
A. Amroune	Professeur	Université de M'sila	Examinateur
B .Daoud	Professeur	Univ.Ferhat Abbas Sétif 1	Invité

Remerciements

Au nom du DIEU le clément et le miséricordieux louange à ALLAH le tout puissant

Tout d'abord, nous remercions le dieu notre créateur. Nous tenons sincèrement à remercier notre encadreur le professeur ‘’ Nadir TRABELSI ‘’, université de sétif 1 de nous avoir encadré, encouragé, aidé et orienté tout long de ce travail.

Je remercie chaleureusement le professeur ‘’ N. BENSALEM ’’ université de sétif 1, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

J'adresse mes plus remerciements à le professeur ‘’L. NOUI ‘’ Université de Batna 2, Dr ‘’A.BADIS ‘’ Université de Khenchela et le professeur ‘’A. AMROUNE ’’, université de M'sila le professeur ‘’B. DAOUD ‘’ Université de sétif 1 pour avoir bien voulu s'intéresser à mon travail et accepter de faire partie du jury.

Nous remercions également les enseignants qui nous ont prodigué conseils et encouragements au cours de ces années d'étude.

Merci à toutes et à tous.

Table des matières

Notations

Soient G un groupe, n un entier positif, et x, y, deux éléments de G. On utilisera les notations suivantes :

* $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^{y}$;où $x^{y} = y^{-1}xy$.
* $G^{(0)} = G, G^{(1)} = G' = [G, G]$ le sous-groupe dérivé de G et $G^{(n)}$ le $(n+1)^{ème}$ terme de la série dérivée de G.
* $C_G(X)$ le centralisateur de H dans G.
* $Z_0(G) = 1, Z_1(G) = Z(G) = \{g \in G \mid xg = gx \quad \forall x \in G\}$ le centre de G et $Z_n(G)$ le $(n+1)^{éme}$ terme de la série central supérieure de G.
* $N_G(H)$ le normalisateur de H dans G.
* $H\,[G$ le sous-groupe H est caracteristique dans G.
* $HsnG$ le sous-groupe H est sous-normal dans G.
* $\mathcal{A}$ est la classe des groupes abéliens.
* $\mathcal{C}$ est la classe des groupes de Černikov.
* $C_{P^{\infty}}$ est le groupe quasicyclique.
* $\mathcal{F}$ est la classe des groupes finis.
* $\mathcal{LN}$ est la classe des groupes localement nilpotents.
* $\mathcal{N}$ est la classe des groupes nilpotents.
* $\mathcal{LF}$ est la classe des sous-groupes localment finis.
* $HascG$ le sous-groupe H est ascendant dans G.
* Si $\mathcal{X}$ est une classe des groupes, alors G est dit un $MN\mathcal{X}$-groupe s'il est minimal non-$\mathcal{X}$ groupe.
* Si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont deux classes de groupes, alors le produit $\mathcal{XY}$ désigne la classe des groupes G qui admettent un sous-groupe normal $N \in \mathcal{X}$ tel que $\frac{G}{N} \in \mathcal{Y}$.
* $\mathcal{ZA}$ est la classe des groupes hypercentraux.

Introduction

Soit $\mathfrak{X}$ une classe de groupes. On dit qu'un groupe G est un non-$\mathfrak{X}$-groupe minimal, si tous ses sous-groupes propres sont des $\mathfrak{X}$-groupes et si G lui-même n'appartient pas à $\mathfrak{X}$.

L'objectif est de chercher la structure des non-$\mathfrak{X}$- groupes minimaux. Plusieurs auteurs ont étudié ce problème dans le cas des groupes finis et les résultats les plus importants ont été obtenus par G. A. Miller et H. Moreno en 1903 [26], qui ont montré que tout groupe non-abélien minimal fini est métabélien d'ordre divisible par au plus deux nombres premiers. Aussi, en 1924 O.Yu. Schmidt [35] a Classifié les groupes finis non-nilpotents dont tous les sous-groupes propres sont nilpotents en démontrant que de tels groupes sont résolubles de longueur au plus égale à 3 et leurs ordres sont divisibles par deux nombres premiers distincts.

En suite, en 1964 l'étude des groupes non- $\mathfrak{X}$ minimaux a été réalisée pour la première fois dans le cas des groupes infinis avec la parution de l'article de M. F. Newman et Wiegold [29] où on trouve une classification des groupes non-nilpotents minimaux infinis. Cette dernière, et bien qu'elle ne fut pas complète, a incité plusieurs auteurs a étudier ce genre de problèmes et de nombreuses publications ont été faites dans ce sens et beaucoup de résultats sur les groupes infinis non-$\mathfrak{X}$ minimaux, pour diverses propriétés (ou classes) de groupes $\mathfrak{X}$, ont été obtenus. On pourra voir par exemple [5], [38], [1], [2], [41], [34], [17] et [28].

H. Smith dans son article [38] a étudié les groupes localement nilpotents non-nilpotents minimaux sans sous-groupes maximaux. Il a été prouvé en particulier qu'ils sont des $p-$ groupes localement finis et s'ils ne sont pas parfaits, alors tous leurs sous-groupes sont sous-normaux et leur abélianisation sont des groupes quasicycliques.

B. Bruno et R. E. Phillips [5], ont prouvé que chaque groupe non-(fini-par-abelien) minimal localement gradué est exactement une extension d'un produit direct d'un nombre fini de $q-$ groupes quasicycliques par un p-groupe cyclique fini, où p et q sont des nombres premiers qui ne sont pas nécessairement distincts.

En combinant le résultat de Asar [2] et celui de Napolitani et Pegoraro [28], nous avons qu'un groupe localement gradué dont les sous-groupes propres sont nilpotent-par-

Černikov est lui-même nilpotent-by-Černikov. Il résulte de ce résultat que les groupes non-nilpotents minimaux localement nilpotents sont résolubles. Par conséquent, le résultat de Xu [41] peut être mis à jour comme suit : les groupes non-(fini-par-nilpotents) minimaux localement gradués sont exactement les groupes qui sont soit des groupes non-(fini-par-abeliens) minimaux localement gradués, soit des groupes non-nilpotents minimaux localement nilpotents sans sous-groupes maximaux.

Arikan et Trabelsi [1] ont généralisé certains résultats obtenus par Xu [41] sur les groupes non-Baer minimaux résolubles à des groupes non-Baer minimaux localement gradués. En particulier, ils prouvent que si G est un groupe minimal non-Baer localement gradué infini, alors G est un $p-$ groupe non-parfait localement nilpotent dénombrable, pour un certain nombre premier p. De plus, si G', le sous-groupe dérivé de G, est non parfait, alors pour tous les entiers $n \geq 2$, $G/\gamma_n(G')$ est un groupe minimal non-nilpotent ayant un sous-groupe maximal.

D'autre part, un exemple simple de groupe non-superrésoluble minimal contenant des sous-groupes non-nilpotents appropriés peut être trouvé par Šatylo dans [34]

F. de Giovanni et M. Trombetti dans [17] ont étudié les groupes non-hypercentraux minimaux localement gradués et de nombreuses propriétés de ces groupes ont été prouvées. En particulier, ce sont des $p-$ groupes hyperabéliens localement finis, tous leurs sous-groupes sont ascendants et leur abélianisation sont des groupes triviaux ou quasicycliques. Aussi il a été prouvé que pour un groupe infini localement gradué, les propriétés d'être non-hypercentral minimal et non-hypercyclique minimal sont équivalentes.

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude des groupes dont tous les sous-groupes propres sont hypercentraux. Ces travaux ont quelque peu progressé, notamment dans le cas de type fini. De plus, on a obtenu quelques résultats dans le cas de type infini. Et aussi on a caractérisé les groupes minimaux non–(fini-par-hypercentraux). De plus on a obtenu quelques résultats sur les groupes non-(Černikov-par-hypercentraux) minimaux. La thèse se compose de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, on exposera une synthèse des plus importants résultats qui ont été obtenus dans cette direction. Notamment, nous exposerons des résultats sur les groupes non-nilpotents minimaux, non-(fini-par-nilpotents) minimaux, non-(fini-par-nilpotents de classe $\leq k$) minimaux, non-(abelien-par-finis) minimaux, non-(nilpotent-par-finis) minimaux, non-(Černikov-par-nilpotents de classe $\leq k$) minimaux, non-(nilpotent-par-Černikov) minimaux et non-hypercentraux minimaux.

Dans le deuxième chapitre, on expose nos résultats sur les groupes non-hypercentraux minimaux localement gradués de type fini et de type infini. Plus précisément, on établira que si G est un groupe non-hypercentral minimal, alors G est un groupe parfait de type fini n'admettant pas de sous-groupes propres d'indice fini et $\frac{G}{Frat(G)}$ est un groupe simple infini. Et nous prolongerons les résultats de H. Smith [38],Théorème 3.1. Aussi nous rappelons les résultats de F. de Giovanni et M. Trombetti [17] sur les groupes non-hypercentraux minimaux et les nombreuses propriétés prouvées sur ces groupes.

Dans le troisième chapitre, on expose nos résultats publiés [3] ainsi que d'autres résultats sur les groupes non-(finis-par-hypercentraux) minimaux de type fini. Les groupes non-(finis-par-hypercentraux) minimaux localement gradués seront exposés avec des démonstrations très complètes des différents lemmes, propositions et théorèmes.

Enfin, dans le quatrième chapitre, on s'intéressera aux groupes non-(Černikov-par-hypercentraux) minimaux localement gradués. On donnera des résultats sur les groupes non-(Černikov-par-hypercentraux) minimaux localements gradués de type fini et de type infini.

Chapitre 1

L'état de l'art

1.1 Introduction

L'étude des groupes possédant un système de sous-groupes vérifiant une propriété donnée est très ancienne, elle a commencé avec l'article de Miller et Moreno en 1903 [26] qui ont étudié et caractérisé les groupes finis non-abéliens dont tous les sous-groupes propres sont abéliens et ils ont établi, entre autres, que de tels groupes sont métabéliens. De plus, O.J. Schmidt en 1924[35], a classifié les groupes finis non-nilpotents dont tous les sous-groupes propres sont nilpotents en démontrant que de tels groupes sont résolubles de longueur ≤ 3 et leurs ordres sont divisibles par deux nombres premiers distincts. Il est naturel d'étendre ce type d'étude pour les groupes infinis. Dans ce chapitre nous donnerons une synthèse des résultats qui ont été obtenus dans cette direction par plusieurs auteurs. Notons que pour une classe de groupes $\mathfrak{X}$, un groupe G est dit non-$\mathfrak{X}$ minimal si tous ses sous-groupes propres sont dans la classe $\mathfrak{X}$, alors que G lui-même n'est pas un $\mathfrak{X}-$groupe.

1.2 Groupes non-nilpotents minimaux

Un groupe G est dit non-nilpotent minimal si tout ses sous-groupes propres sont nilpotents, alors que G lui même n'est pas nilpotent. M.F. Newman et J. Wiegold [29], se sont intéressé aux groupes non-nilpotents minimaux infinis. Nous donnerons les résultats qu'ils ont obtenu. Dans ce qui suit, nous désignons par $MN\mathcal{N}$ les groupes non-$\mathcal{N}$ minimaux et $MN\mathcal{N}_k$ les groupes non-$\mathcal{N}_k$ minimaux où $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}_k$ désignent respectivement les classes des groupes nilpotents et nilpotents de classe $\leq k$, où k est un entier positif.

1.2.1 Groupes non-$\mathcal{N}$ et non-$\mathcal{N}_k$ minimaux de type fini

Rappelons ce qu'est le sous-groupe de Frattini d'un groupe.

Définition 1.1 *Soit G un groupe. Le sous-groupe de Frattini, qu'on note $Frat(G)$, est défini comme l'intersection de tous les sous-groupes maximaux de G. Si G n'admet pas de sous-groupes maximaux, alors $Frat(G) = G$.*

Théorème 1.2 *Si G est un $MN\mathcal{N}-$groupe ou $MN\mathcal{N}_k$-groupe infini de type fini, alors $\frac{G}{Frat(G)}$ est un groupe simple infini.*

Ce théorème veut dire que si les $MN\mathcal{N}-$groupes et $MN\mathcal{N}_k$-groupes existent, alors de tels groupes simples existent aussi. Ce qui a amené Newman et Wiegold [29] à étudier les $MN\mathcal{N}$-groupes et $MN\mathcal{N}_k-$groupes simples.

Théorème 1.3 *Si G est un $MN\mathcal{N}-$groupe localement nilpotent, alors* :

(i) G est un groupe infini dénombrable.

(ii) $\frac{G}{G'}$ est un $p-$groupe localement cyclique et si $G \neq G'$, alors G est un $p-$groupe.

Ce sont les seuls résultats que M.F. Newman et J. Wiegold [29] ont obtenu sur les $MN\mathcal{N}-$groupes localement nilpotents. Ce qui les a amené à supposer de plus que les groupes en question possèdent des sous-groupes maximaux.

Les $MN\mathcal{N}-$groupes résolubles localement nilpotents n'ayant pas des sous-groupes maximaux existent. En effet, l'exemple de H. Heineken et I. J. Mohamed [23] est un $MN\mathcal{N}-$groupe métabélien localement nilpotent et n'ayant pas de sous-groupes maximaux.

M. F. Newman et J. Wiegold [29] ont obtenu une description complète des groupes non-nilpotents localement nilpotents possédant des sous-groupes maximaux et dont tous les sous-groupes propres sont nilpotents.

Soient p un nombre premier, n un entier positif et $r = 0, 1$. Notons B l'ensemble des groupes $B(p, n, r)$ où $B(p, n, r)$ est le groupe engendré par l'ensemble $\{b, h_1, h_2, ...\}$ tel que ces éléments vérifient les relations suivantes :

$[h_i,\ h_j] = [h_i,\ b^p] = 1$, où $i, j = 1, 2, ...$
$[h_{i+1},\ b] = h_i$, où $i = 1, 2, ...$
$[h_1,\ b] = 1$; $b^{p^n} = h_1^r$.

Théorème 1.4 *1) Tout $MN\mathcal{N}-$groupe localement nilpotent ayant des sous-groupes maximaux est isomorphe à un groupe de B.*

2) Tout groupe de B est un $MN\mathcal{N}$-groupe localement nilpotent ayant des sous-groupes maximaux.

3) Deux groupes de B ne peuvent pas être isomorphes.

Le théorème précédent admet la conséquence suivante :

Corollaire 1.5 *Si G est un $MN\mathcal{N}$-groupe localement nilpotent ayant des sous-groupes maximaux, alors G est un p-groupe métabélien de Černikov pour un certain premier p et $\frac{G}{G'}$ est cyclique d'ordre p^n, où n est un entier positif.*

Notons que M. F. Newman et J. Wiegold [29] n'ont pas traité le cas des $MN\mathcal{N}$-groupes localement nilpotents n'admettant pas des sous-groupes maximaux. Ce n'est qu'en 1997 que Howard Smith [36] a étudié de tels groupes en distinguant le cas parfait et le cas non-parfait. Plus précisément, il a démontré le résultat suivant.

Théorème 1.6 *Soit G un $MN\mathcal{N}$-groupe résoluble localement nilpotent n'ayant pas de sous-groupes maximaux. Alors on a :*

(i) G est un p-groupe dénombrable et $\frac{G}{G'} \simeq C_{p^\infty}$ pour un certain premier p.

(ii) Tout sous-groupe de G est sous-normal.

(iii) $(G')^p \neq G'$ et toute image hypercentrale de G est abélienne. En particulier, $G' = \gamma_n(G)$ pour tout $n \geq 2$.

(iv) Tout sous-groupe radicable de G est central.

(v) Le centralisateur de G' est abélien et G' est omissible (i.e. Si $H \leq G$ tel que $G = HG'$, alors $H = G$). En particulier, G n'admet pas de sous-groupes propres d'indice fini.

(vi) G' n'est pas la clôture normale d'un sous-groupe fini de G.

(vii) L'hypercentre de G coïncide avec le centre de G.

Les $MN\mathcal{N}-$groupes résolubles localement nilpotents n'ayant pas des sous-groupes maximaux existent. En effet, l'exemple de H. Heineken et I. J. Mohamed [23] est un $MN\mathcal{N}$-groupe métabélien localement nilpotent et n'ayant pas de sous-groupes maximaux.

1.3 Groupes non-(fini-par-abéliens) minimaux

V.V. Belyaev et N.F. Sesekin [4] ont donné une description complète des $MN\mathcal{F}\mathcal{A}-$groupes dans la classe des groupes localement finis. En particulier, on a le résultat suivant :

Théorème 1.7 *Si G est un $MN\mathcal{F}\mathcal{A}-$groupe localement fini, alors G est de Černikov.*

B. Bruno et R.E. Phillips [5], ont généralisé le resultat de V.V. Belyaev et N.F. Sesekin [4] aux groupes localement gradués. Rappelons d'abord la définition d'un groupe localement gradué.

Définition 1.8 *On dit qu'un groupe G est localement gradué, si tout sous-groupe non-trivial de type fini de G admet une image finie non-triviale ; c'est-à-dire, $\forall 1 \neq H \leq G$ où H est de type fini, $\exists N \lhd H$ tel que $N \neq H$ et $\frac{H}{N}$ soit fini.*

Théorème 1.9 *Soit G un groupe non-(fini-par-abélien) minimal localement gradué. Alors :*

i) Pour un certain premier p et pour un entier positif $n \geq 1$, il existe un sous-groupe normal A de G tel que $A \simeq C^n_{P^\infty}$ et un élément y dans G d'ordre une puissance d'un nombre premier q tel que $G = A\langle y \rangle$.

ii) $V = \frac{\langle y \rangle}{C_{\langle y \rangle}(A)}$ est d'ordre q et A est un V-module divisiblement irréductible.

1.4 Groupes non-(fini-par-nilpotents) minimaux

Notons $MN\mathcal{F}\mathcal{N}$ les groupes non-(fini-par-nilpotents) dont tous les sous-groupes propres sont finis-par-nilpotents. Dans un article paru en 1996, la classification des $MN\mathcal{F}\mathcal{N}-$groupes est donnée par M. Xu [41] en distinguant le cas de type fini et le cas de type infini.

1.4.1 MN$\mathcal{FN}$-Groupes de type fini

M.F. Newman et J. Wiegold ont montré qui si G est un $MN\mathcal{N}-$groupe de type fini, alors $\frac{G}{Frat(G)}$ est un groupe simple infini. M. Xu a prolongé ce résultat pour les $MN\mathcal{FN}-$groupes. Plus précisément, il a montré le résultat suivant :

Théorème 1.10 *Si G est un $MN\mathcal{FN}$-groupe de type fini, alors :*

(i) G est un groupe parfait.

(ii) G n'admet pas de sous-groupes propres d'indice fini.

(iii) $\frac{G}{Frat(G)}$ est un groupe simple infini.

Notons que l'exemple d'Olshanski affirme l'existence des $MN\mathcal{FN}-$groupes de type fini.

1.4.2 MN$\mathcal{FN}$-Groupes de type infini.

Notons $MN\mathcal{FA}$ les groupes non-(fini-par-abéliens) dont tous les sous-groupes propres sont fini-par-abéliens et HM les groupes non-nilpotents dont tous les sous-groupes propres sont sous-normaux et nilpotents.

Théorème 1.11 *G est un groupe de type infini dans la classe $MN\mathcal{FN}$ si, et seulement si, G vérifie l'une des conditions suivantes :*

(i) G est un $MN\mathcal{FA}-$groupe.

(ii) G est un HM-groupe.

1.5 Groupes non-(fini-par-nilpotents de classe $\leq k$) minimaux

B. Bruno et R.E. Phillips [5] ont classifié les groupes infinis dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $\mathcal{FN}_k$ en se restreignant aux groupes localement gradués.

Théorème 1.12 *Soit $k \geq 0$ un entier. Les conditions suivantes dans un groupe localement gradué G sont équivalentes :*

(i) G est un groupe non-$\mathcal{FN}_k$ minimal.

(ii) G est un groupe non-$\mathcal{FA}$ minimal.

(iii) G est un groupe non-$\mathcal{FA}$, de Černikov et dont tous les sous-groupes propres sont soit abéliens, soit finis.

1.6 Groupes non-(abélien-par-finis) minimaux

En 1984 B. Bruno a étudié les groupes dont tous les sous-groupes propres sont abélien-par-finis dans la classe des groupes localement gradués périodiques en distinguant les cas $p-$groupe et non-$p-$groupe. Plus précisément, elle a montré les résultats suivants :

Théorème 1.13 *(i) Soit G un groupe localement gradué périodique qui n'est pas un $p-$groupe pour tout premier p. Alors G est un $MN\mathcal{AF}-$groupe si, et seulement si, $G = G'A$, $G' \cap A = 1$, où $A \simeq C_{p^\infty}$ pour certain premier p et G' est un sous-groupe normal minimal dans G et un $q-$sous-groupe abélien élémentaire pour un certain premier $q \neq p$.*

(ii) Soit G un p-groupe localement gradué pour un certain premier p. Alors G est un $MN\mathcal{AF}-$groupe si, et seulement si, G' est abélien, $\frac{G}{G'} \simeq C_{p^\infty}$ et $HG' \lneq G$ pour tout sous-groupe propre H de G.

Le théorème précédent donne une bonne caractérisation des $MN\mathcal{AF}-$groupes localement gradués dans la classe des groupes périodiques.

Notons que l'exemple de H. Heineken et I.J. Mohamed [23] est un $p-$groupe minimal non-(abélien-par-fini).

B. Bruno [8] a conjecturé qu'un groupe non-parfait dont tous les sous-groupes sont dans la classe $\mathcal{AF}$ est périodique. Cette conjecture fut démontrée en 1995 par B. Bruno et R.E. Phillips [7]. Plus précisément, ils ont établi le résultat suivant :

Théorème 1.14 *Si G est un $MN\mathcal{AF}-$groupe non-parfait localement gradué, alors G est périodique.*

Notons que B. Bruno et R.E. Phillips ont conjecturé que le théorème précédent reste vrai si la condition " non-parfait" est enlevée. Cette conjecture est devenue une réalité et a été démontré en 1997 par F. Napolitani et E. Pegoraro [28]. Ainsi il n'existe pas de $MN\mathcal{FA}-$groupes localement gradués non périodiques. Plus précisément, ils ont établi le résultat suivant :

Théorème 1.15 *Si G est un $MN\mathcal{AF}-$groupe localement gradué, alors G est périodique.*

1.7 Groupes non-(nilpotent-par-finis) minimaux

B. Bruno dans [8] a étudié les groupes dont tous les sous-groupes propres sont nilpotent-par-finis dans la classe des groupes localement gradués en distinguant les cas localement nilpotents et non localement nilpotents. Plus précisément, elle a montré les résultats suivants :

Théorème 1.16 *Soit G un groupe périodique, localement gradué et non localement nilpotent. Alors G est un $MN\mathcal{NF}-$groupe si, seulement si, $G = VH$ et $V \cap H = 1$, où $H \simeq C_{P^\infty}$ pour certain premier p et V est un $q-$groupe special pour un certain premier $q \neq p$ tel que $H \subseteq C_G(V')$ et $\frac{V}{V'}$ est un sous-groupe normal minimal dans G/V'.*

Théorème 1.17 *Soit G un groupe localement nilpotent périodique. Si G est un $MN\mathcal{NF}-$groupe, alors G est un $p-$groupe pour certain premier p.*

Asar [2] en 2000 a obtenu le résultat suivant :

Théorème 1.18 *Soit G un $MN\mathcal{NF}-$groupe localement nilpotent. Alors $\frac{G}{G'} \simeq C_{p^\infty}$ pour un certain premier p.*

B. Bruno dans [8] a conjecturé qu'un groupe non-parfait dont tous les sous-groupes propres sont dans la classe $\mathcal{NF}$ est périodique. Cette conjecture fut démontrée en 1995 par B. Bruno et R.E. Phillips[7]. Plus précisément, ils ont établi le résultat suivant :

Théorème 1.19 *Si G est un $MN\mathcal{NF}-$groupe non-parfait localement gradué, alors G est périodique.*

Notons que B. Bruno et R.E. Phillips ont conjecturé que le théorème précédent reste vrai si la condition "non-parfait" est enlevée. Cette conjecture est devenue une réalité et a été démontré en 1997 par F. Napolitani et E. Pegoraro. Ainsi il n'existe pas de $MN\mathcal{NF}$-groupes localement gradués non périodiques. Plus précisément, ils ont établi le résultat suivant :

Théorème 1.20 *Si G est un $MN\mathcal{NF}-$groupe localement gradué, alors G est périodique.*

1.8 Groupes ayant des sous-groupes propres nilpotent-par-Černikov

En 1997, F. Napolitani et E. Pegoraro [28] ont étudié les groupes dont tous les sous-groupes propres sont nilpotents-par-Černikov. Il ont montré le résultat suivant :

Théorème 1.21 *Si G est un groupe localement gradué dont tous les sous-groupes propres sont nilpotent-par-Černikov, alors G est soit nilpotent-par-Černikov, soit un $p-$groupe parfait, dénombrable, localement fini et dont tous les sous-groupes propres sont nilpotents.*

A. O. Asar [2] a completé le résultat précédent en démontrant le théorème suivant :

Théorème 1.22 *Si G est un $p-$groupe localement nilpotent dont tous les sous-groupes propres sont nilpotent-par-Černikov, alors G est nilpotent-par-Černikov.*

En combinant les deux théorèmes précédents, on a le corollaire suivant :

Corollaire 1.23 *Si G est un groupe localement gradué dont tous les sous-groupes propres sont nilpotent-par-Černikov, alors G est nilpotent-par-Černikov.*

En 1988, Otal et Peña [31] ont montré que si G est un groupe périodique localement gradué dont tous les sous-groupes propres sont abélien-par-Černikov, alors G est abélien-par-Černikov. Ils ont soulevé la question si un tel résultat est vrai pour tous les groupes localement gradués. Ce n'est qu'en 1997 que F. Napolitani et E. Pegoraro [28] à l'aide du théorème 2.9.1 ont donné une réponse positive à cette question ; plus précisément, ils ont montré que si G est un groupe localement gradué dont tous les sous-groupes propres sont abélien-par-Černikov, alors G est abélien-par-Černikov. En 2003, B. Bruno et F. Napolitani [6] ont généralisé ce résultat aux groupes dont tous les sous-groupes propres sont (nilpotent de classe $\leq k$)-par-Černikov. Plus précisément ils ont établi le résultat suivant :

Théorème 1.24 *Soit $k \geq 0$ un entier. Si G est un groupe localement gradué dont tous les sous-groupes propres sont (nilpotent de classe $\leq k$)-par-Černikov, alors G est (nilpotent de classe $\leq k$)-par-Černikov.*

1.9 Groupes ayant des sous-groupes propres Černikov-par-nilpotents

J. Otal et J. M. Peña [31] ont caractérisé les groupes infinis dont tous les sous-groupes propres sont Černikov-par-nilpotents de classe $\leq k$ dans la classe des groupes localement gradués. Plus précisément, ils ont montré le résultat suivant :

Théorème 1.25 *Soit $k \geq 0$ un entier. Un groupe G localement gradué est Černikov-par-nilpotent de classe $\leq k$ si, et seulement si, tout sous-groupe propre de G est Černikov-par-nilpotent de classe $\leq k$.*

1.10 Groupes non-(hypercentraux) minimaux

Rappelons la définition d'un groupe hypercentral.

Définition 1.26 *i) On appelle "série ascendante " dans un groupe G, un ensemble de sous-groupes $\{H_\beta /\ \beta \leq \alpha\}$ indexés par des ordinaux inférieurs ou égaux à un ordinal α tel que :*

- *$H_0 = 1$, $H_\alpha = G$.*
- *Si $\beta_1 \leq \beta_2$, alors $H_{\beta_1} \leq H_{\beta_2}$.*
- *$H_\beta \lhd H_{\beta+1}$.*
- *Si λ est un ordinal limite, alors $H_\lambda = \underset{\beta \lneq \lambda}{\cup} H_\beta$.*

On note :$1 = H_0 \lhd H_1 \lhd ... \lhd H_\beta \lhd H_{\beta+1} \lhd ... \lhd H_\alpha = G$. De plus, si $H_\beta \lhd G$ pour tout ordinal $\beta \leq \alpha$, la série précédente est appelée " série normale ascendante".

ii) Un sous- groupe H d'un groupe G est dit ascendant s'il est un terme d'une série ascendante dans G.

Dans ce qui suit, on donnera une généralisation de la série centrale finie, et on introduira une généralisation de la classe des groupes nilpotents.

Définition 1.27 *i) Une série ascendante $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_\alpha = G$ dans un groupe G est dite centrale si*

$$G_\beta \lhd G \text{ et } G_{\beta+1}/G_\beta \leq Z\left(G/G_\beta\right) \quad \text{pour tout ordinal } \beta \lneq \alpha.$$

ii) Un groupe ayant une série centrale ascendante est dit hypercentral.

iii) La série centrale ascendante d'un groupe G, peut s'étendre de manière transfinie comme suite : $Z_0(G) = 1$, $Z_1(G) = Z(G)$, $Z_{\beta+1}(G) \diagup Z_\beta(G) = Z(G \diagup Z_\beta(G))$ pour tout ordinal β et $Z_\lambda(G) = \underset{\beta \lneq \lambda}{\cup} Z_\beta(G)$ pour tout ordinal limite λ.

iv) Il existe toujours un ordinal α tel que $Z_\alpha(G) = Z_{\alpha+1}(G)$. Ce terme où la série centrale ascendante s'arrête est appelé l'hypercentre de G.

Remarque 1.28 *Il est clair que tout groupe nilpotent est hypercentral, et aussi tout groupe hypercentral et fini est nilpotent, donc la classe des groupes hypercentraux est une classe de groupes nilpotents généralisée.*

La proposition suivante fourni une deuxième définition des groupes hypercentraux.

Proposition 1.29 *Un groupe est hypercentral si, et seulement si, il est égal à son hypercentre.*

Le théorème suivant montre la relation entre un groupe hypercentral et un groupe localement nilpotent.

Théorème 1.30 *Tout groupe hypercentral est localement nilpotent.*

Lemme 1.31 (Voir [10]) *Soit N un sous-groupe normal d'un groupe localement nilpotent G. Si N est hypercentral et si $\frac{G}{N}$ est de type fini, alors G est hypercentral.*

Lemme 1.32 *[21] Soit G un groupe localement gradué non périodique, dont tous les sous-groupes propres sont hypercentraux alors G est hypercentral*

La classe des groupes hypercentraux est stable par passage aux quotients, mais n'est pas stable par extension.

En 2010 on a commencé à étudier les groupes non-hypercentraux minimaux, nous avons obtenu des résultats sur les groupes dont tout les sous-groupes propres sont hypercentraux dans le cas de type fini, et en 2013 on a obtenu des résultats sur les groupes minimaux non-hypercentraux dans le cas de type infini, mais en 2015; F. de Giovanni et M. Trombetti ont publié dans [17] les mêmes résultats que nous avons obtenus.

Théorème 1.33 *Soit G un groupe non-hypercentral minimal localement gradué infini. Alors :*

(a) *G est un p-groupe localement fini dénombrable pour un certain premier p.*

(b) *G est hyperabelian.*

(c) *Si $G' \neq G$, alors $\frac{G}{G'} \simeq C_{p^\infty}$ pour un certain premier p.*

(d) *$Z(G)$ est le dernier terme de la série centrale supérieure de G, et $G\prime$ est le dernier terme de la série centrale inférieure de G*

(e) *Le centralisateur $C_G(G')$ est abélien*

(f) *Tout sous-groupe de G est ascendant*

(g) *Si N un sous groupe propre normal dans G, alors $XN \neq G$ pour tout sous groupe propre X de G*

(h) *G' n'est pas la clôture normale d'un sous-groupe fini de G.*

Chapitre 2

Groupes non-hypercentraux minimaux

2.1 Introduction

Soit $\mathcal{X}$ une classe de groupes. Un groupe G est dit non-$\mathcal{X}$ minimal (on note G est un groupe $MN\mathcal{X}$) , si tous ses sous-groupes propres sont dans la classe $\mathcal{X}$ et si G lui-même n'appartient pas à $\mathfrak{X}$.

L'étude des groupes $MN\mathcal{X}$ infinis a commencé avec l'article de M. F. Newman et J. Wiegold [29] qui ont étudié les groupes non-nilpotents minimaux infinis. En 2010 nous avons commencé à étudier les groupes non-hypercentraux minimaux infinis en distinguant le cas de type fini du cas de type infini. Dans ce chapitre, on va d'abord donner les propriétés des groupes non$-\mathcal{ZA}$ minimaux de type fini, où $\mathcal{ZA}$ désigne la classe des groupes hypercentraux. Plus précisément, on établira que si G est un groupe non-hypercentral minimal de type fini, alors G est un groupe parfait n'admettant pas de sous-groupes propres d'indice fini, et $\frac{G}{Frat(G)}$ est un groupe simple infini. Ensuite, dans la dernière section de ce chapitre, on exposera les résultats qu'on a obtenu sur les groupes non$-\mathcal{ZA}$ minimaux de type infini, en prenant pour modèle les résultats obtenus par H. Smith [35] sur les groupes minimaux non-nilpotents localement nilpotents n'ayant pas de sous-groupes maximaux. Malheureusement, on n'a pas pu mener à terme notre étude car F. de Giovanni et M. Trombetti ont résolu ce problème et ils ont publié leurs résultats en 2015 [17].

2.2 Groupes non-hypercentraux minimaux de type fini

Dans cette section, on présente les résultats qu'on a obtenu sur les groupes $MN\mathcal{ZA}$ infinis de type fini.

Avant de démontrer le principal résultat de cette section, établissons quelques lemmes préliminaires.

Lemme 2.1 *Si G est un groupe hypercentral de type fini et périodique, alors G est fini.*

Démonstration : Soit G un groupe hypercentral de type fini et périodique. D'où, G étant nilpotent de type fini et périodique, est fini. ■

Théorème 2.2 *Soit G est un groupe non-hypercentral infini et de type fini dont tous les sous-groupes propres sont hypercentraux, alors :*

i) G n'admet pas de sous-groupes propres d'indice fini.

ii) G est parfait.

iii) $G/Frat(G)$ est un groupe simple infini.

Démonstration : Soit G un groupe non-hypercentral infini et de type fini dont tous les sous-groupes propres sont hypercentraux.

i) Supposons que G admette un sous-groupe propre N, normal et d'indice fini. Puisque un sous-groupe d'indice fini dans un groupe de type fini est également de type fini, N est de type fini. Or N est propre dans G, donc N est hypercentral, d'où N est localement nilpotent de type fini donc est nilpotent de type fini. D'où G est localement gradué infini et de type fini, car tout groupe polycyclique-par-fini est localement gradué. On en déduit que G est périodique d'après [21, Lemma 2.2], donc G est fini, ce qui est contradictoire et le (i) est démontré.

ii) Supposons que G soit non-parfait ($G \neq G'$). Comme $\frac{G}{G'}$ est abélien, il est localement gradué. Par suite $\frac{G}{G'}$, étant de type fini, il admet une image finie non triviale, i.e il existe $\frac{H}{G'} \lhd \frac{G}{G'}$ tel que $\frac{H}{G'} \neq \frac{G}{G'}$ et $\frac{\frac{G}{G'}}{\frac{H}{G'}} \simeq \frac{G}{H}$ soit fini. D'ou' il existe $H \lhd G$ tel que $H \neq G$ et $\frac{G}{H}$ soit fini. On en déduit que G admet un sous groupe propre d'indice fini, ce qui contredit (i), donc G est parfait.

■

Avant de démontrer le troisième point, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3 *Soit G un groupe non-hypercentral minimal infini et de type fini, alors G ne possède aucun quotient hypercentral non-trivial.*

Démonstration : Supposons que G soit minimal non-hypercentral infini et de type fini admettant un sous-groupe N normal propre dans G, tel que $\frac{G}{N}$ soit hypercentral. Comme G est de type fini, $\frac{G}{N}$ est hypercentral de type fini, il est localement gradué de type fini. Par suite $\frac{G}{N}$ admet une image finie non-triviale, i.e il existe $\frac{H}{N} \lhd \frac{G}{N}$ tel que $\frac{H}{N} \neq \frac{G}{N}$ et $\frac{\frac{G}{N}}{\frac{H}{N}} \simeq \frac{G}{H}$ soit fini, d'où il existe $H \lhd G$ tel que $H \neq G$ et $\frac{G}{H}$ soit fini. On en déduit que G admet un sous-groupe propre d'indice fini, ce qui contredit (i).

iii) Maintenant on va montrer que $\frac{G}{Frat(G)}$ est infini et simple, Comme G est de type fini, $G \neq Frat(G)$, de plus, comme G n'admet pas de sous-groupes propres d'indice fini, on en déduit que $\frac{G}{Frat(G)}$ est infini. Reste à montrer que $\frac{G}{Frat(G)}$ est simple. Pour ce faire, soit $N \lhd G$ tel que

$$Frat(G) \lneq N \lneq G.$$

D'où N est hypercentral. D'autre part comme $Frat(G) \lneq N$, il existe donc un sous-groupe M maximal dans G tel que $N \nsubseteq M$, or M est propre dans G, donc M est hypercentral. De plus, on a

$$M \lneq NM \leq G,$$

par la maximalité de M, on en déduit que $G = NM$. D'autre part, on a

$$\frac{G}{N} \simeq \frac{MN}{N} \simeq \frac{M}{N \cap M}.$$

Il s'ensuit donc que $\frac{M}{N \cap M}$ est hypercentral, et par conséquent $\frac{G}{N}$ est hypercentral, ce qui contredit le lemme précédent.

■

Corollaire 2.4 *Soit G un groupe périodique dont tous les sous-groupes propres sont hypercentraux et sous-normaux. Alors G est résoluble et tous ses sous-groupes propres sont* *nilpotents. En particulier, si G est de type fini, alors G est nilpotent.*

Démonstration : Comme tous les sous-groupes de G sont sous-normaux, G est résoluble par le principal résultat de [27]. Montrons que tous les sous-groupes propres de G sont nilpotents ; soit H un sous-groupe propre de G, donc H est hypercentral et périodique. Comme tous les sous-groupes de G sont sous-normaux G, tous les sous-groupes de H sont sous-normaux dans H. On en déduit, par [27], que H est nilpotent. Maintenant, supposons que G soit de type fini et montrons qu'il est nilpotent. Il est clair que l'on peut supposer G infini. Si G n'est pas nilpotent, alors G est un groupe non-hypercentral minimal, donc il est parfait par Théorème 2.3, ce qui contredit le fait que G soit résoluble. $\blacksquare$

Corollaire 2.5 *Si G est un $MN\mathcal{ZA}$-groupe infini et de type fini, alors G est un $MN(\mathcal{ZA})\mathcal{F}$-groupe.*

Démonstration : Soit G un $MN\mathcal{ZA}$-groupe infini et de type fini et supposons que G soit $(\mathcal{ZA})\mathcal{F}$. Il existe donc un sous-groupe normal N tel que N soit hypercentral et $\frac{G}{N}$ soit fini, ce qui est contradictoire d'après Théorème 2.3. $\blacksquare$

Corollaire 2.6 *Si G est un $MN\mathcal{ZA}$-groupe infini et de type fini, alors G est $MN\mathcal{F}(\mathcal{ZA})$-groupe.*

Démonstration : Soit G un $MN\mathcal{ZA}$-groupe infini et de type fini et supposons que G soit $\mathcal{F}(\mathcal{ZA})$. Il existe donc un sous-groupe normal N tel que N soit fini et $\frac{G}{N}$ soit hypercentral, ce qui est contradictoire d'après Lemme 2.4. $\blacksquare$

2.3 Groupes non-hypercentraux minimaux de type infini.

Le but de cette section est d'étudier les groupes minimaux non-hypercentraux de type infini. Nos résultats sont une généralisation des résultats de Howard Smith [38] sur les groupes infinis minimaux non-nilpotents n'ayant pas de sous-groupes maximaux.

Dans nos preuves nous aurons besoin de quelques informations concernant les groupes de type infini non-parfait minimaux non-hypercentraux.

Lemme 2.7 *Soit G un groupe non-hypercentral minimal; G est localement gradué si, seulement si, G est de type infini.*

Démonstration : Soit G un groupe non-hypercentral minimal.Supposons que G soit localement gradué de type fini, donc G admet une image non-triviale finie, c'est-a-dire, il existe un sous-groupe propre N de G, normal et d'indice fini. Ce qui est contradictoire d'après Théorème 2.3. Réciproquement, si G est de type infini, alors les sous-groupes de type fini sont propres donc nilpotents, d'où G est localement nilpotent et donc localement gradué.

Corollaire 2.8 *[21, lemma 2.2]Soit G un groupe non-hypercentral minimal localement gradué, alors G est périodique*

■

Corollaire 2.9 *Si G est un groupe non-hypercentral minimal localement gradué, alors G est localement nilpotent.*

Démonstration : Soit G un groupe non-hypercentral minimal localement gradué. D'après Lemme 3.1, G est de type infini, d'où tous ses sous-groupes de type fini sont propres donc nilpotents. Par suite, G est localement nilpotent. ■

Lemme 2.10 (Théorème de P. Hall [22]) *Si H et K sont deux sous-groupes normaux hypercentraux d'un groupe G, alors HK est hypercentral.*

Lemme 2.11 *Si G est un groupe non-hypercentral minimal de type infini, alors G est F-parfait.*

Démonstration : Soit G un groupe non-hypercentral minimal de type infini et supposons que G admette un sous-groupe propre N, normal et d'indice fini. Donc N est hypercentral. Comme N est un sous groupe normal hypercentral d'un groupe localement nilpotent G tel que $\frac{G}{N}$ soit de type fini, d'après [10] G est hypercentral, contradiction. ■

Lemme 2.12 *Soit G un groupe non-hypercentral minimal de type infini et soit N un sous groupe propre normal dans G alors $G' \nleq N$ si, et seulement si, $\frac{G}{N}$ est un groupe non-hypercentral minimal.*

Démonstration : Soit G un groupe minimal non-hypercentral de type infini et soit N un sous-groupe propre normal dans G. On suppose que $\frac{G}{N}$ soit hypercentral. Comme $\frac{G}{N}$ est périodique (car G est périodique) et F-parfait i.e "n'admet pas de sous-groupes propres d'indice fini donc il est abélian d'après [32, Théorème 9.23], d'où $G' \leq N$. ■

Corollaire 2.13 *Soit G un groupe non-hypercentral minimal de type infini, alors G' n'admet pas de sous-groupe propre normal dans G et d'indice fini dans G'.*

Démonstration : On suppose que G' possède un sous-groupe propre N normal dans G tel que $\frac{G'}{N}$ soit fini. Comme $G' \nleq N$, $\frac{G}{N}$ est minimal non-hypercentral d'après Lemme 2.17, donc $\frac{G}{N}$ est F-parfait. Comme $\frac{G}{N}$ est fini-par-abélien, on en déduit qu'il est abélien, ce qui est contradictoire. ■

Proposition 2.14 *Soit G un groupe non-hypercentral minimal de type infini, alors $\frac{G}{G''}$ est minimal non-hypercentral.*

Démonstration : Soit G un groupe non-hypercentral minimal de type infini. On a $G'' \trianglelefteq G$ et $G' \nleq G''$ donc $\frac{G}{G''}$ est minimal non-hypercentral d'après Lemme 2.17. ■

Proposition 2.15 *Si G est un groupe non-hypercentral minimal de type infini, alors G est un groupe non-(hypercentral-par-fini) minimal.*

Démonstration : Soit G un groupe non-hypercentral minimal de type infini et supposons que G soit hypercentral-par-fini. Comme G est F-parfait, on en déduit que G est hypercentral, ce qui est contradictoire. ■

Proposition 2.16 *Si G est un groupe non-hypercentral minimal de type infini, alors G est un groupe non-(fini-par-hypercentral) minimal.*

Démonstration : Soit G un groupe non-hypercentral minimal de type infini et supposons que G soit fini-par-hypercentral. Donc d'après [14], $\frac{G}{Z_\alpha(G)}$ est fini. Comme G est F-parfait, on en déduit que $G = Z_\alpha(G)$, donc G est hypercentral, contradiction. ■

Corollaire 2.17 *Soit G un groupe non-hypercentral minimal de type infini. Si $F \triangleleft G$, tel que F soit fini, alors $\frac{G}{F}$ est un groupe non-hypercentral minimal et $F \leq Z(G)$.*

Démonstration : Soit G un groupe non-hypercentral minimal de type infini et supposons que $\frac{G}{F}$ soit hypercentral. Comme F est un sous-groupe normal et fini, alors G est fini-par-hypercentral, ce qui contredit la proposition précédente. D'où $\frac{G}{F}$ non-hypercentral minimal. On sait que

$$\frac{G}{C_G(F)} = \frac{N_G(F)}{C_G(F)} \simeq \tau \leq Aut(F)$$

où $Aut(F)$ est le groupe des automorpgismes de F. Comme F est fini, alors $Aut(F)$ est fini aussi, d'où $\frac{G}{C_G(F)}$ est fini. On a G est non-hypercentral minimal, donc G n'admet pas de sous-groupes propres d'indice fini, d'où $G = C_G(F)$, ce qui donne que $F \leq Z(G)$. ■

Corollaire 2.18 *Si G est un groupe non-hypercentral minimal de type infini, alors G n'admet pas de sous-groupe maximal.*

Démonstration : Soit G un groupe non-hypercentral minimal de type infini. Donc G est localement nilpotent et F-parfait, d'où G n'admet pas de sous-groupe maximal. ■

Théorème 2.19 *Soit G un groupe non-hypercentral minimal localement gradué. Alors*

(i) *G est un p-groupe localement fini et si G est non-parfait, alors $\frac{G}{G'} \simeq C_{p^\infty}$ pour un certain premier p.*

(ii) *Toute image hypercentrale de G est abélienne. En particulier, $G' = \gamma_n(G)$ pour tout entier $n \geq 2$.*

(iii) *G n'admet pas de sous-groupe propre d'indice fini.*

(iv) *Le centralisateur de G' est abélien.*

(v) *G' n'admet pas de sous-groupe G-invariant propre d'indice fini. En particulier, G' ne peut pas être la clôture normale dans G d'un sous-groupe fini.*

Démonstration :

(i) Comme G est un groupe localement nilpotent et périodique d'après [21, Lemma 2.2], il est localement fini. Par Lemme 3.3, on en déduit que G est un p-groupe et $\frac{G}{G'} \simeq C_{p^\infty}$ d'après Lemme 2.12 pour certain premier p.

(ii) On démontre que toute image hypercentrale de G est abélienne. Soit N un sous-groupe normal de G tel que $\frac{G}{N}$ soit hypercentral. Comme G est F-parfait, $\frac{G}{N}$ est F-parfait aussi. D'autre part, on a G est périodique, donc $\frac{G}{N}$ est périodique, d'après [32, Theorem 9.23], on en déduit que $\frac{G}{N}$ est abélien. Il reste à montrer que $G' = \gamma_n(G)$ pour tout $n \geq 2$. On a $\frac{G}{\gamma_n(G)}$ est nilpotent pour tout $n \geq 2$, donc il est hypercentral. D'où, d'après ce qui précède, $\frac{G}{\gamma_n(G)}$ est abélien, i.e $G' \leq \gamma_n(G)$. Comme $\gamma_n(G) \leq \gamma_2(G) = G'$ pour tout $n \geq 2$, on en déduit que $G' = \gamma_n(G)$ pour tout $n \geq 2$.

(iii) D'après Lemme 2.12, G n'admet pas de sous-groupe propre d'indice fini.

(iv) Soit $x, y \in C_G(G')$. Comme

$$\frac{G}{G'} = C_{p^\infty} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \langle a_i G' \rangle$$

on en déduit que $\langle xG' \rangle$ et $\langle yG' \rangle$ sont des sous-groupes propres de $\frac{G}{G'}$. Donc il existe $r, s \in \mathbb{N}$ tel que

$$\langle xG' \rangle = \langle a_r G' \rangle \ \text{ et } \ \langle yG' \rangle = \langle a_s G' \rangle$$

Supposons que $s \leq r$, donc

$$\langle yG' \rangle \leq \langle xG' \rangle$$

ce qui implique que

$$yG' = x^n G'$$

i.e $y = x^n g$ pour un certain $g \in G'$ et $n \in \mathbb{N}$. Doù

$$[x, y] = [x, x^n g] = [x, g]\,[x, x^n]^g = 1$$

par suite $C_G(G')$ est abélien.

(v) D'après Corollaire 2.14, G' n'admet pas de sous-groupe propre G-invariant d'indice fini. Supposons qu'il existe un sous-groupe fini H de G, tel que $G' = H^G = H[G, H]$. D'où $[G, H] \lhd G$ et $G'/[G, H]$ est fini, ce qui est contradictoire.

■

Chapitre 3

Groupes non-(fini-par-hypercentraux) minimaux

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on va établir des résultats et quelques propriétés sur la classe des groupes $\mathcal{FZA}$. On va d'abord étudier les groupes non-$\mathcal{FZA}$ minimaux de type fini. Plus précisément, on établira que si G est un groupe non-(fini-par-hypercentral) minimal de type fini, alors G est un groupe parfait n'admettant pas de sous-groupes propres d'indice fini. De plus, on établira que $\frac{G}{Frat(G)}$ est un groupe simple infini.

Dans la deuxième section de ce chapitre on présentera les résultats qui ont été obtenus sur les groupes non-$\mathcal{FZA}$ minimaux localement gradués. Plus précisément on démontre que si G est un groupe localement gradué, alors G est un $MN\mathcal{FZA}$-groupe si, et seulement si, G est soit un $MN\mathcal{FA}$-groupe soit un $\mathcal{MNZA}$-groupe, où $\mathcal{FZA}$ et $\mathcal{FA}$ désignent respectivement les classes des groupes fini-par-hypercentraux et fini-par-abéliens.

3.2 Quelques propriétés de la classe $\mathcal{FZA}$

Dans cette section on va établir quelques propriétés de la classe $\mathcal{FZA}$.

Proposition 3.1 *Soient G un groupe, $H \leq G$ et $N \lhd G$. On a :*

(i) Si G est dans la classe $\mathcal{FZA}$, alors H est dans la classe $\mathcal{FZA}$.

(ii) Si G est dans la classe $\mathcal{FZA}$, alors $\frac{G}{N}$ est dans la classe $\mathcal{FZA}$.

(iii) Si N est dans la classe $\mathcal{F}$ et si $\frac{G}{N}$ est dans la classe $\mathcal{FZA}$, alors G est dans la classe $\mathcal{FZA}$.

Démonstration : Soient G un groupe, H un sous-groupe de G et N un sous-groupe normal dans G.

(i) Supposons que G soit dant la classe $\mathcal{FZA}$. Il existe donc un sous-groupe normal K dans G tel que K soit fini et $\frac{G}{K}$ soit hypercentral. Considérons le sous-groupe $K \cap H$; il est clair que $K \cap H$ est un sous-groupe fini normal dans H. D'autre part, on a

$$\frac{H}{K \cap H} \simeq \frac{HK}{K}$$

qui est un sous-groupe de $\frac{G}{K}$. Il s'ensuit donc que $\frac{H}{K \cap H}$ est hypercentral, et par conséquent H est fini-par-hypercentral.

(ii) Supposons que G soit fini-par-hypercentral et soit K un sous-groupe normal dans G tel que K soit fini et $\frac{G}{K}$ soit hypercentral.Considérons le sous-groupe

$$\frac{NK}{N} \simeq \frac{K}{N \cap K}$$

qui est fini,

$$\frac{NK}{N} \text{ est fini.}$$

De plus, on a

$$\frac{\frac{G}{N}}{\frac{NK}{N}} \simeq \frac{G}{NK},$$

d'autre part on a

$$\frac{G}{NK} \simeq \frac{\frac{G}{K}}{\frac{NK}{K}} \text{ est hypercentral,}$$

d'où $\frac{G}{NK}$ est hypercentral, et par conséquent $\frac{G}{N}$ est fini-par-hypercentral.

(iii) Supposons que N soit dans la classe $\mathcal{F}$ et que $\frac{G}{N}$ soit dans la classe $\mathcal{FZA}$. Il existe donc un sous-groupe normal $\frac{M}{N}$ dans $\frac{G}{N}$ tel que $\frac{M}{N}$ soit fini et $\frac{\frac{G}{N}}{\frac{M}{N}}$ soit hypercentral. Donc $\frac{G}{M}$ est hypercentral. Comme N et $\frac{M}{N}$ sont finis, M est fini aussi, Il s'ensuit que G est dans la classe $\mathcal{FZA}$.

■

La classe des groupes $\mathcal{FZA}$ n'est pas stable par extension.

Lemme 3.2 *Si G est un groupe fini-par-hypercentral, alors G admet un sous-groupe caractéristique N fini tel que $\frac{G}{N}$ soit hypercentral.*

Démonstration : Soit G un groupe fini-par-hypercentral. Il existe donc un sous-groupe normal et fini F tel que $\frac{G}{F}$ soit hypercentral. Considérons l'ensemble

$$K = \left\{ K \leq F : K \lhd G, \frac{G}{K} \in \mathcal{ZA} \right\}.$$

L'ensemble K est non vide car $F \in K$. Comme F est fini, il vérifie la condition minimale. Par la propriété min tout ensemble non vide de sous-groupes de K admet un élément minimal. Donc cet ensemble admet un élément minimal, qu'on note N. C'est-à-dire que $N \leq F$ et $N \lhd G$ avec N fini et $\frac{G}{N}$ est hypercentral. Si $\alpha \in Aut(G)$, alors $\alpha(N) \lhd G$ et

$$\frac{G}{\alpha(N)} \simeq \frac{G}{N} \in \mathcal{ZA},$$

donc

$$\frac{G}{N \cap \alpha(N)} \in \mathcal{ZA}.$$

Puisque

$$N \cap \alpha(N) \leq N,$$

on en déduit, par la minimalité de N, que

$$N \cap \alpha(N) = N.$$

D'où $N \leq \alpha(N)$, par conséquent N est caractéristique dans G. ■

Lemme 3.3 *Soit G un groupe $\mathcal{F}$-parfait. Si N est un sous-groupe normal dans G fini-par-hypercentral, alors il est hypercentral.*

Démonstration : Soit G un groupe $\mathcal{F}$-parfait et soit N un sous-groupe normal dans G fini-par-hypercentral. D'après [14] $\frac{N}{Z_\alpha(N)}$ est fini, où $Z_\alpha(N)$ est l'hypercentre de N. On sait que

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{G}{Z_\alpha(N)}}{C_{\frac{G}{Z_\alpha(N)}}\left(\frac{N}{Z_\alpha(N)}\right)} &= \frac{N_{\frac{G}{Z_\alpha(N)}}\left(\frac{N}{Z_\alpha(N)}\right)}{C_{\frac{G}{Z_\alpha(N)}}\left(\frac{N}{Z_\alpha(N)}\right)} \\
&\simeq \tau \leq Aut\left(\frac{N}{Z_\alpha\left(N\right)}\right)
\end{aligned}
$$

or $\frac{N}{Z_\alpha(N)}$ est fini, donc $Aut\left(\frac{N}{Z_\alpha(N)}\right)$ est fini aussi ; d'où

$$
\frac{\frac{G}{Z_\alpha(N)}}{C_{\frac{G}{Z_\alpha(N)}}\left(\frac{N}{Z_\alpha(N)}\right)} \text{ est fini.}
$$

D'autre part, on a G est $\mathcal{F}$-parfait donc $\frac{G}{Z_\alpha(N)}$ est $\mathcal{F}$-parfait aussi, donc

$$
\frac{G}{Z_\alpha\left(N\right)} = C_{\frac{G}{Z_\alpha(N)}}\left(\frac{N}{Z_\alpha\left(N\right)}\right)
$$

d'où

$$
\frac{N}{Z_\alpha\left(N\right)} \leq Z\left(\frac{G}{Z_\alpha\left(N\right)}\right),
$$

donc $\frac{N}{Z_\alpha(N)}$ est abélien, donc trivial car $Z_\alpha\left(N\right)$ est l'hypercentre de N. On en déduit que $N = Z_\alpha\left(N\right)$ est hypercentral. ■

Lemme 3.4 *La classe $\mathcal{FZA}$ des groupes fini-par-hypercentraux est N_0-fermée.*

Démonstration : Soit H et K deux sous-groupes normaux fini-par-hypercentraux d'un groupe G. D'après Lemme 3.2, il existe deux sous-groupes G-invariants N et M de H et K respectivement tels que $\frac{H}{N}$ et $\frac{K}{N}$ soient hypercentraux. D'où NM est un sous-groupe normal fini de HK et $\frac{HK}{NM} = \left(\frac{HM}{NM}\right)\left(\frac{NK}{NM}\right)$ est hypercentral, car la classe de groupes hypercentraux est $\{H, N_0\}$-fermée. Donc HK est fini-par-hypercentral. ■

Corollaire 3.5 *Si G est un groupe non-$\mathcal{FZA}$ minimal localement gradué, alors $\frac{G}{G'}$ est soit un groupe quasicyclique ou un p-groupe cyclique pour un certain premier p.*

Démonstration : Soit G un groupe non-(fini-par-hypercentral) minimal localement gradué. D'après Lemme 3.4, le produit de deux sous-groupes fini-par-hypercentraux normaux est un groupe fin-par-hypercentral. On en déduit que $\frac{G}{G'}$ est indécomposable, donc il est soit quasicyclique, soit un p-groupe cyclique pour certain premier p. ■

Il est bien connu qu'un groupe hypercentral G tel que $\frac{G}{G'}$ soit un p-groupe pour un certain nombre premier p, est lui-même un p-groupe. Comme conséquence, on a le corollaire suivant.

Corollaire 3.6 *Si G est un $MN\mathcal{FZA}$-groupe localement gradué, alors tout image homomorphe hypercentrale de G est un $p-$groupe pour un certain premier p.*

Lemme 3.7 *Soit G un $MN\mathcal{FZA}$-groupe ; G est localement gradué si, et seulement si, G est n'est pas de type fini.*

Démonstration : Soit G un $MN\mathcal{FZA}$-groupe localement gradué et supposons que G soit de type fini. Donc G admet un sous-groupe propre N, normal et d'indice fini. Puisque N est un sous-groupe d'indice fini d'un groupe de type fini G, N est aussi de type fini. Or N est propre dans G, donc il est $\mathcal{FZA}$. D'où N est fini-par-nilpotent, et comme $\frac{G}{N}$ est fini alors G est fini-par-nilpotent-par-fini, donc il vérifie la condition maximale sur les sous-groupes. Par suite, tout sous-groupe propre de G est fini-par-nilpotent, donc G est fini-par-nilpotent (voir [5]), contradiction qui implique que G n'est pas de type fini. Supposons que G soit un groupe $MN\mathcal{FZA}$ qui n'est pas de type fini. Donc tout sous-groupe de type fini de G est fini-par-nilpotent, ainsi il admet un sous-groupe propre d'indice fini, ce qui implique que G est localement gradué. ■

Lemme 3.8 *Si G est un groupe $MN\mathcal{FZA}$ localement gradué, alors il est localement fini.*

Démonstration : Soit G un groupe $MN\mathcal{FZA}$ localement gradué, donc est localement (fini-par-nilpotent) d'après Lemme 3.7. Par conséquent l'ensemble T des élements d'ordre fini est un sous-groupe de G. Si T est un sous-groupe propre de G, alors $\frac{G}{T}$ est un groupe sans torsion non-trivial avec tous les sous-groupes propres hypercentraux, par conséquent $\frac{G}{T}$ est hypercentral puisque un $MN\mathcal{ZA}$-groupe localement gradué est périodique d'aprés [17]. Il en résulte que $\frac{G}{T}$ est périodique d'après Corollaire 3.6, contradiction. Donc $G = T$ est périodique, d'où G est localement fini. ■

Lemme 3.9 *Un groupe localement nilpotent fini-par-hypercentral est hypercentral. Donc G est un $MN\mathcal{FZA}$-groupe localement nilpotent si, et seulement si, il est un $MN\mathcal{ZA}$-groupe localement gradué.*

Démonstration : Soit G un $MN\mathcal{FZA}$-groupe localement nilpotent et soit H un sous-groupe propre de G. Donc H est fini-par-hypercentral et d'après Théorème de [14] $\frac{H}{\overline{Z(H)}}$ est fini, où $\overline{Z(H)}$ est l'hypercentre de H. Comme G est localement nilpotent, on en déduit que $\frac{H}{\overline{Z(H)}}$ est nilpotent. Il en résulte que $H = \overline{Z(H)}$, d'où H est hypercentral. Donc tous les sous-groupes propres de G sont hypercentraux. Comme G n'est pas un groupe hypercentral, G est un groupe non-hypercentral minimal localement gradué. Réciproquement, si G est un $MN\mathcal{ZA}$-groupe localement gradué, alors il est localement nilpotent et donc il ne peut pas être fini-par- hypercentral, d'où G est un $MN\mathcal{FZA}$-groupe localement nilpotent. ■

3.3 Groupes non-(fini-par-hypercentraux) minimaux de type fini

Dans cette section, on va étudier les groupes non-(fini-par-hypercentraux) minimaux de type fini.

Théorème 3.10 *Si G est un groupe non-$\mathcal{FZA}$ minimal infini et de type fini, alors :*
i) G n'admet pas de sous-groupes propres d'indice fini.
ii) G est parfait.
iii) $G/Frat(G)$ est un groupe simple infini.

Démonstration : Soit G un groupe non-(fini–par-hypercentral) minimal infini et de type fini. Donc G n'est pas fini-par- hypercentral, mais tous ses sous-groupes propres sont (fini-par-hypercentraux).

i) Supposons que G admette un sous-groupe propre N, normal et d'indice fini. Puisqu'un sous-groupe d'indice fini dans un groupe de type fini est également de type fini, N est de type fini. Or N est propre dans G, donc N est fini-par- hypercentral, d'où N est fini-par-localement nilpotent de type fini. Donc il existe un sous-groupe caracteristique M fini et $\frac{N}{M}$ est localement nilpotent de type fini donc hypercentral, alors G est fini-par-fini-hypercentral, d'où G est fini-par-hypercentral, et le (i) est démontré.

ii) Supposons que G soit non parfait $(G \neq G')$. Comme $\frac{G}{G'}$ est abélien, il est localement gradué. Par suite $\frac{G}{G'}$, étant de type fini, admet une image finie non triviale, i.e il existe $\frac{H}{G'} \lhd \frac{G}{G'}$ tel que $\frac{H}{G'} \neq \frac{G}{G'}$ et $\frac{\frac{G}{G'}}{\frac{H}{G'}}$ soit fini. D'où il existe $H \lhd G$ tel que $H \neq G$ et $\frac{G}{H}$ soit fini. On en déduit que G admet un sous-groupe propre d'indice fini. Ce qui contredit (i), d'où G est parfait.

iii) Maintenant on va montrer que $\frac{G}{Frat(G)}$ est infini et simple. Comme G est de type fini, $G \neq Frat(G)$; de plus, comme G n'admet pas de sous-groupes propres d'indice fini, on en déduit que $\frac{G}{Frat(G)}$ est infini. Reste à montrer que $\frac{G}{Frat(G)}$ est simple. Soit $N \lhd G$ tel que

$$Frat(G) \lneqq N \lneqq G.$$

D'où N est fini-par-hypercentral. D'autre part, comme $Frat(G) \lneqq N$, il existe donc un sous-groupe M maximal dans G tel que $N \nsubseteq M$. Or M est propre dans G, donc M est fini-par-hypercentral. De plus, on a

$$M \lneqq NM \leq G,$$

par la maximalité de M, on déduit que $G = NM$. D'autre part, on a

$$\frac{G}{N} \simeq \frac{MN}{N} \simeq \frac{M}{N \cap M}.$$

Il s'ensuit donc que $\frac{M}{N \cap M}$ est fini-par-hypercentral, et par conséquent $\frac{G}{N}$ est fini-par-hypercentral. Comme G est parfait et n'admet pas de sous-groupe propre d'indice fini, on en déduit la contradiction que $G = N$.

■

3.4 Groupes non-(fini-par-hypercentraux) minimaux de type infini

3.4.1 Groupes MN$\mathcal{FZA}$ de type infini non-parfaits

Dans cette section, nous considérons les $MN\mathcal{FZA}$-groupes non-parfaits, en commençant par le cas dans lequel $\frac{G}{G'}$est un groupe quasicyclique.

Théorème 3.11 *Soit G un groupe ; G est un $MN\mathcal{FZA}$-groupe tel que $\frac{G}{G'}$ soit quasicyclique si, et seulement si, G est un $MN\mathcal{ZA}$-groupe non-parfait infini.*

Démonstration : Soit G un $MN\mathcal{FZA}$-groupe tel que $\frac{G}{G'}$ soit quasicyclique. Donc G est un groupe non-parfait infini et de type infini. Si N est un sous-groupe propre normal dans G et d'indice fini, alors $G = NG'$ car $\frac{G}{G'}$ n'admet aucun sous-groupe propre d'indice fini. D'où $G \in \mathcal{FZA}$ d'après Lemme 3.4, ce qui est contradictoire. Donc G est $\mathcal{F}$-parfait. Il s'ensuit que tous les sous-groupes propres normaux de G sont hypercentraux d'après Lemme 3.3. Comme il est clair que $\langle G', x_1, ..., x_n \rangle$ est un sous-groupe propre normal dans G pour tout entier positif n et pour tous $x_1, ..., x_n \in G$, on en déduit que $\langle x_1, ..., x_n \rangle$ est nilpotent. Donc G est localement nilpotent. D'après Lemme 3.9, on conclut que G est un $MN\mathcal{ZA}$-groupe non-parfait de type infini. Réciproquement, soit G un $MN\mathcal{ZA}$-groupe non-parfait de type infini. D'après [17], G est localement nilpotent et $\frac{G}{G'}$ est quasicyclique. Par conséquent, G est un $MN\mathcal{FZA}$-groupe tel que $\frac{G}{G'}$ soit quasicyclique, d'après Lemme 3.9. ■

Nous considérons maintenant les $MN\mathcal{FZA}$-groupes non-parfaits G tels que $\frac{G}{G'}$ soit cyclique.

Lemme 3.12 *Soit G un $MN\mathcal{FZA}$-groupe tel que $\frac{G}{G'}$ soit un p-groupe cyclique non-trivial pour un certain nombre premier p. Si G' est hypercentral, alors G' est un q-groupe pour un certain nombre premier $q \neq p$.*

Démonstration : Soit G un $MN\mathcal{FZA}$-groupe tel que $\frac{G}{G'}$ soit un p-groupe cyclique, donc

$$\text{il existe } x \in G \text{ tel que } G = G' \langle x \rangle .$$

Comme G est périodique, G' s'écrit comme produit direct de ses $r-$sous-groupes de Sylow, d'où

$$G' = \underset{r\in\pi(G')}{Dr} G'_r \ ,$$

où $\pi(G')$ est l'ensemble de tous les nombres premiers divisant les ordres des éléments de G'. Supposons que G'_q soit fini pour un certain nombre premier $q \in \pi(G') \setminus \{p\}$ et soit

$$H = \langle G'_r : r \in \pi(G') \setminus \{q\} \rangle .$$

D'où $H\langle x \rangle$ est un sous-groupe propre de G et

$$\begin{aligned} G &= G'\langle x \rangle \\ &= \left(\underset{r\in\pi(G')}{Dr} G'_r \right) \langle x \rangle \\ &= G'_q \left(\underset{r\in\pi(G')\setminus\{q\}}{Dr} G'_r \right) \langle x \rangle \\ &= G'_q H \langle x \rangle \end{aligned}$$

comme $G'_q \lhd G$ donc $H \lneqq G$ d'ou $H\langle x \rangle$ est $\mathcal{FZA}$, donc

$$\begin{aligned} G &= G'_q H \ \langle x \rangle \\ &\Leftrightarrow \ \frac{G}{G'_q} = \frac{G'_q H \langle x \rangle}{G'_q} \\ &\simeq \ \frac{H\langle x \rangle}{G'_q \cap H \langle x \rangle} \text{ est } FZA, \end{aligned}$$

d'où $\frac{G}{G'_q}$ est $\mathcal{FZA}$, donc G est $\mathcal{FZA}$, ce qui est contradictoire. Par suite, G'_r est infini pour tous $r \in \pi(G') \setminus \{p\}$. Supposons que G'_p soit non-trivial et soit

$$K = \langle G'_r : r \in \pi(G') \setminus \{p\} \rangle ,$$

d'où $K\langle x \rangle$ est un sous-groupe propre de G et

$$G = G'_p K \langle x \rangle .$$

Par conséquent $\frac{G}{G'_p}$ est $\mathcal{FZA}$, d'où $\frac{G}{G'_p}$ est fini-par-(p-groupe) d'après Corollaire 3.6, et il en est de même que $\frac{KG'_p}{G'_p} \simeq K$. Mais comme K est soit trivial, soit un p'-groupe infini, on en déduit que K est trivial, ce qui implique que G est un p-groupe, donc localement nilpotent. Il en résulte que G est un $MN\mathcal{ZA}$-groupe d'après Lemme 3.9, ce qui est contradictoire car $\frac{G}{G'}$ n'est pas quasicyclique. Par conséquent G'_p est trivial. Maintenant soit $q \in \pi(G')$ et soit

$$L = \langle G'_r : r \in \pi(G') \setminus \{q\} \rangle ;$$

comme précédemment, on en déduit que $\frac{G}{G'_q}$ et $\frac{LG'_q}{G'_q} \simeq L$ sont fini-par-(p-groupes), ce qui implique que L est trivial et $G' = G'_q$ est un q-groupe pour un certain nombre premier $q \neq p$. ■

Corollaire 3.13 *Soit G un $MN\mathcal{FZA}$-groupe tel que $\frac{G}{G'}$ soit un p-groupe cyclique non-trivial pour un certain nombre premier p. Si G est de rang fini, alors G est un groupe de Černikov.*

Démonstration : Soit G un $MNF\mathcal{ZA}$-groupe de rang fini ; comme G' est $\mathcal{FZA}$, d'après Lemme 3.2, G' admet un sous-groupe caractéristique fini N tel que $\frac{G'}{N}$ soit $\mathcal{ZA}$. Comme $\frac{G}{N}$ est un $MN\mathcal{FZA}$-groupe, on en déduit que $\frac{G'}{N}$ est un q-groupe de rang fini pour un certain nombre premier q d'après Lemme 3.12, donc il est un groupe de Černikov, d'où G est un groupe de Černikov. ■

Lemme 3.14 *Soit G un $MN\mathcal{FZA}$-groupe tel que G' soit abelien et $\frac{G}{G'}$ soit un p-groupe cyclique non-trivial pour un certain nombre premier p. Si G est de rang infini, alors $Z(G)$ est de rang infini.*

Démonstration : Soit G un $MN\mathcal{FZA}$-groupe tel que $\frac{G}{G'}$ soit un p-groupe cyclique non-trivial, donc il existe un élement $x \in G$, tel que

$$G = G' \langle x \rangle$$

et G' est un q-groupe pour un certain nombre premier q d'après lemme 3.12. Supposons que G soit de rang infini, donc G' est de rang infini aussi. On a

$$Soc(G') = \langle N \ : \ N \text{ est normal minimal dans } G' \rangle$$

Comme G' est abélien de rang infini, $Soc\,(G')$ est de rang infini aussi, d'où $Soc\,(G')$ est le produit direct d'une infinité de sous-groupes cycliques d'ordre q, donc

$$\begin{aligned} S &= Soc\,(G') = \{x \in G' : x^q = 1\} \\ &\simeq \underset{i\in IN}{Dr} \langle b_i \rangle\,,\ où\ |\langle b_i \rangle| = q, \end{aligned}$$

d'où, d'après [13, Lemma 2.6], il existe une infinité d'éléments $(a_n)_{n\in IN}$ de S tel que

$$T = \langle a_i : i \in IN \rangle^G \simeq \underset{i\in IN}{Dr}\, a_i^G.$$

Posons $T_1 = \left\langle a_{2i}^G : i \in IN \right\rangle \simeq \underset{i\in IN}{Dr}\, a_{2i}^G$, donc T_1 est un sous-groupe propre de G' de rang infini normal dans G, d'où $T_1 \langle x \rangle \in \mathcal{FZA}$, donc il admet un sous-groupe fini normal F tel que $\frac{T_1\langle x\rangle}{F}$ soit hypercentral. On en déduit que

$$\frac{T_1 \langle x \rangle}{F} \simeq \frac{T_1 F}{F} \times \frac{\langle x \rangle F}{F}$$

est le produit direct de ses sous-groupes de sylow qui sont abeliens, donc $\frac{T_1\langle x\rangle}{F}$ est abelien. Il en résulte que $T_1 \langle x \rangle$ est fini-par-abelient. Comme $T_1 \langle x \rangle$ est aussi abélien-par-fini, on en déduit que

$$\frac{T_1 \langle x \rangle}{Z(T_1 \langle x \rangle)} \text{ est fini}$$

et donc

$$\frac{T_1 \langle x \rangle}{T_1 \cap Z(T_1 \langle x \rangle)} \text{ est fini aussi,}$$

par conséquent

$$T_1 \cap Z(T_1 \langle x \rangle) \text{ est de rang infini.}$$

Mais

$$T_1 \cap Z\,(T_1 \langle x \rangle) \leq C_{G'}\,(x) \leq Z(G),$$

donc $Z(G)$ est de rang infini. ■

Lemme 3.15 *Si G est un $MN\mathcal{FZA}$-groupe tel que G' soit hypercentral et $\frac{G}{G'}$ soit un p-groupe cyclique non-trivial pour un certain nombre premier p, alors G' n'admet pas de sous-groupe propre d'indice fini.*

Démonstration : Soit G un $MN\mathcal{FZA}$-groupe et supposons G' hypercentral, comme $\frac{G}{G'}$ est un p-groupe cyclique, il existe $x \in G$ tel que

$$G = G' \langle x \rangle .$$

Supposons que G' admette un sous-groupe propre L d'indice fini, d'après Lemme 3.12, L est un q-groupe pour un certain premier $q \neq p$. On peut supposer que L soit normal dans G. Soit F un sous-groupe fini de G' tel que $G' = LF$, donc $L \langle x \rangle$ est un sous-groupe propre de G, d'où il est fini-par-hypercentral. On en déduit qu'il existe un sous-groupe normal fini S de $L \langle x \rangle$ tel que $\frac{L\langle x \rangle}{S}$ soit hypercentral. Il s'ensuit que les sous-groupes de Sylow de $L(x)/S$ commute, donc $[L, x] \leq S$ est fini. Il en résulte que

$$x^L = \langle x \rangle [L, x]$$

est fini, ce qui implique que

$$x^G = x^{LF\langle x \rangle} = x^{LF} = (x^L)^F$$

est fini. Donc $G = G'x^G$ est fini-par-hypercentral, une contradiction qui donne que G' est F-parfait. ■

Lemme 3.16 *Soit G un $MN\mathcal{FZA}$-groupe tel que $\frac{G}{G'}$ soit un p-groupe cyclique non-trivial pour un certain nombre premier p. Alors G est de rang fini.*

Démonstration : Soit G un $MN\mathcal{FZA}$-groupe. Puisque G'est fini-par-hypercentral, il admet un sous-groupe caractéristique fini N tel que $\frac{G\prime}{N}$ soit hypercentral d'après Lemme 3.2. Il suffit de montrer que $\frac{G}{N}$ est de rang fini, on peut donc supposer que N est trivial et G' est hypercentral. Il s'ensuit, par Lemme 3.12, que G' est un q-groupe pour un certain nombre premier $q \neq p$. Puisque G' est F-parfait par Lemme 3.15, nous en déduisons que G' est abélien. Supposons, pour une contradiction, que G soit de rang infini. Si $\frac{G}{Z(G)}$ est fini-par-hypercentral, alors $\frac{G}{Z(G)}$ est fini-par-(p-groupe) par Corrollaire 3.6, donc $\frac{G'Z(G)}{Z(G)}$ est aussi fini-par-(p-groupe). Il s'ensuit que $\frac{G'Z(G)}{Z(G)}$est fini car c'est un q-groupe. Par conséquent, $\frac{G}{Z(G)}$ est fini. Cela donne, par [14], la contradiction que G est fini-par-hypercentral. Donc $\frac{G}{Z(G)}$ est un $MN\mathcal{FZA}$-groupe de centre trivial, donc il est de rang fini d'après Lemme 3.14. D'après Corollaire 3.13, on en déduit que $\frac{G}{Z(G)}$ est un groupe de Černikov. Ainsi G est un groupe Černikov-par-hypercentral d'après [24]. Soit M un sous-groupe de Černikov normal dans G tel que $\frac{G}{M}$ soit hypercentral. Donc $\frac{G}{M}$ et $\frac{G'M}{M}$ sont des p-groupes. Nous en déduisons que $\frac{G'M}{M}$ est trivial car c'est un q-groupe, donc $\frac{G}{M}$ est fini. Par conséquent, G est un groupe de Černikov, ce qui contredit notre hypothèse sur le rang de G. Il en résulte que G a un rang fini. ■

Nous sommes maintenant prêts à caractériser les groupes non-(finis-par-hypercentraux) minimaux avec une abélianisation cyclique non-triviale.

Théorème 3.17 *Soit G un groupe ; G est un $MNF\mathcal{Z}\mathcal{A}$-groupe tel que $\frac{G}{G'}$ soit un groupe cyclique non-trivial si, est seulement si, G est un $MN\mathcal{F}\mathcal{A}$-groupe localement gradué tel que $\pi(G)$ contienne deux nombres premiers.*

Démonstration : Soit G un groupe. Supposons d'abord que G soit un $MN\mathcal{F}\mathcal{Z}\mathcal{A}$-groupe tel que $\frac{G}{G'}$ soit un p-groupe cyclique non-trivial pour certain un premier p. Donc G est localement gradué et G' est fini-par-hypercentral, donc il admet un sous-groupe fini caractéristique N tel que $\frac{G'}{N}$ soit hypercentral d'après Lemme 3.2. Il est clair que si $\frac{G}{N}$ est un $MN\mathcal{F}\mathcal{A}$-groupe tel que $\pi(G/N)$ contienne deux nombres premiers, alors il en est de même pour G par [5]. On peut donc supposer que G' soit hypercentral et donc c'est un q-groupe pour certain un premier $q \neq p$ d'après Lemme 3.12. Il s'ensuit que G est un groupe de Černikov d'après Lemme 3.16, et que G'est un groupe abélien divisible d'après Lemme 3.15. Soit H un sous-groupe propre de G, donc H est fini-par-hypercentral et par conséquent il admet un sous-groupe fini normal F tel que $\frac{H}{F}$ soit hypercentral. Puisque, comme G, H aussi est un (q-groupe abélien)-par-(p-groupe cyclique), nous avons que $H = A\langle y\rangle$ pour un sous-groupe abélien normal A de H et un certain $y \in H$. On en déduit que $\frac{H}{F} \simeq \frac{AF}{F} \times \langle yF\rangle$ est abélien, donc H est fini-par-abélien. Par conséquent, G est un $MN\mathcal{F}\mathcal{A}$-groupe tel que $\pi(G) = \{p, q\}$. Réciproquement, soit G un $MN\mathcal{F}\mathcal{A}$-groupe localement gradué tel que $\pi(G) = \{p, q\}$. D'après [5], G' est un q-groupe abélien divisible de rang fini et $\frac{G}{G'}$ est un p-groupe cyclique non-trivial. Il est clair que les sous-groupes propres de G sont fini-par-hypercentraux. Supposons que G soit fini-par-hypercentral et soit X un sous-groupe fini normal dans G tel que $\frac{G}{X}$ soit hypercentral. Donc $\frac{G}{X}$ est le produit direct de ses deux sous-groupes de sylow, tous deux sont abéliens. D'où $\frac{G}{X}$ est abélien, ce qui donne la contradiction que G est fini-par-abélien. Par conséquent, G est un $MN\mathcal{FZA}$-groupe tel que $\frac{G}{G'}$ soit un p-groupe cyclique non trivial. ■

3.4.2 Groupes MN$\mathcal{FZA}$ de type infini parfaits

Dans cette section, nous considérons le cas des $MN\mathcal{FZA}$-groupes parfaits localement gradués et nous prouvons qu'ils sont exactement les $MN\mathcal{ZA}$-groupes parfaits localement gradués.

Lemme 3.18 *Si G est un $MN\mathcal{FZA}$-groupe parfait et localement gradué, alors il est $\mathcal{F}$-parfait.*

Démonstration : Supposons que le résultat soit faux et soit G un contre-exemple. Donc G est un $MN\mathcal{FZA}$-groupe parfait et localement gradué ayant un sous-groupe propre N, normal et d'indice fini. Comme $\frac{G}{N}$ est fini, G admet un sous-groupe F fini tel que

$$G = NF.$$

Or N est propre dans G, donc N est fini-par-hypercentral. De plus, N admet un sous-groupe X caractéristique fini tel que $\frac{N}{X}$ soit hypercentral. Notons que $\frac{G}{X}$ est aussi un contre-exemple, car si $\frac{G}{X}$ est fini-par-hypercentral et si X est fini, il en résulte que G est fini-par-hypercentral, contradiction. Nous pouvons supposer que X est trivial et que N est hypercentral. Ainsi

$$N \simeq \underset{q\in\pi(N)}{D_r} N_q$$

est le produit direct de ses sous-groupes de Sylow. Supposons que tout sous-groupe de Sylow de N soit fini et soit $p \in \pi(N) \diagdown \pi(F)$ et soit

$$H = \{N_q : q \in \pi(N) \setminus \{p\}\}$$

Donc

$$\begin{aligned} G &= NF \\ &= \left(\underset{q\in\pi(N)}{Dr} N_q \right) F \\ &= N_p \left(\underset{q\in\pi(N)\setminus\{p\}}{Dr N_q} \right) F \\ &= N_p H F \end{aligned}$$

et HF est un sous-groupe propre de G. Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \frac{G}{N_p} &= \frac{N_p HF}{N_p} \\ &= \frac{HF}{N_p \cap HF} \text{ est fini-par-hypercentral} \end{aligned}$$

d'où $\frac{G}{N_p}$ est fini-par-hypercentral et donc il est fini car G est parfait, ce implique que G est fini, contradiction. Par conséquent, il existe $p \in \pi(N)$ tel que N_p soit infini. Soit

$$K = \langle N_q : q \in \pi(N) \diagdown \{p\} \rangle$$

donc KF est un sous-groupe propre de G et

$$\begin{aligned} G &= NF \\ &= \left(\underset{q\in\pi(N)}{Dr} N_q \right) F \\ &= N_p \left(\underset{q\in\pi(N)\setminus\{p\}}{Dr N_q} \right) F \\ &= N_p K F; \end{aligned}$$

Comme précédemment, nous obtenons que $\frac{G}{N_p}$ est fini et donc $\frac{N_p K}{N_p} \simeq K$ est fini. Par conséquent, $\frac{G}{K}$ est un aussi un contre-exemple et donc on peut supposer que K soit trivial et que $N = N_p$ soit un p-groupe. Notons que si F est un p-groupe, alors G/N est nilpotent donc nous obtenons la contradiction que $G = N$ car G est parfait. Soit Q un q-sous-groupe de Sylow de F tel que $p \neq q$. Puisque G est parfait, NQ est un sous-groupe propre de G, donc il est fini-par-hypercentral. Soit S un sous-groupe normal fini de NQ tel que $\frac{NQ}{S}$ soit hypercentral. Il s'ensuit que $\frac{QS}{S}$ est normal dans $\frac{NQ}{S}$, donc

$$(QS)^{NQ} = Q^N S = QS$$

qui implique que Q^N est fini. Ainsi

$$Q^G = \left(Q^N\right)^F \text{ est fini}$$

Supposons que $\pi(F) \smallsetminus \{p\} = \{q_1, ...q_r\}$ et soit

$$M = NQ_1^G...Q_r^G$$

où Q_i est un q_i-sous-groupe de sylow de F pour chaque $i \in \{1, ..., r\}$. Donc M, étant le produit d'un nombre fini de sous-groupes propres normaux, est un sous-groupe normal fini-par-hypercentral de G. Par conséquent, il est admet un sous-groupe T caractéristique fini tel que $\frac{M}{T}$ soit hypercentral. On en déduit que $\frac{G}{T}$ est aussi un contre-exemple, on peut donc supposer que M soit hypercentral et que $G = NF$, où $\pi(F) \setminus \{p\} \subseteq \{q_1, ...q_r\}$. Il s'ensuit que $Q_1^G...Q_r^G$ est nilpotent et que chaque $Q_i^G = Q_i$ est un q_i-sous-groupe normal dans G. Donc $Q_1...Q_r$ est un sous-groupe normal fini de G tel que $\frac{F}{Q_1...Q_r}$ soit un p-groupe fini. Puisque $\frac{G}{Q_1...Q_r}$ est aussi un contre-exemple, nous obtenons la contradiction que $G = N$. Par conséquent G est F-parfait. ■

Lemme 3.19 *Si G est un $MN\mathcal{FZA}$-groupe parfait localement gradué, alors il n'est pas simple.*

Démonstration : Soit G un $MN\mathcal{FZA}$-groupe parfait localement gradué et supposons que G soit un groupe simple. Comme tous les sous-groupes propres de G sont fini-par-hypercentraux, ils sont hypercentral-par-finis d'après [14] et donc ils sont (localement résoluble)-par-finis. Il s'ensuit d'après [25], que $G \simeq PSL(2, K)$ ou $G \simeq Sz(K)$ pour un certain corps infini K. Mais ces deux groupes admettent des sous-groupes propres non-$\mathcal{ZAF}$ d'après [30], ce qui est contradictoire. ■

Dans le résultat suivant, nous caractérisons les $MN\mathcal{FZA}$-groupes localement gradués parfaits.

Théorème 3.20 *Soit G un groupe parfait localement gradué ; G est un $MN\mathcal{FZA}$-groupe si, et seulement si, G est un $MN\mathcal{ZA}$-groupe.*

Démonstration : Soit G un groupe parfait localement gradué. Si G est un $MN\mathcal{FZA}$-groupe, alors chaque quotient propre de G est aussi un $MN\mathcal{FZA}$-groupe d'après Lemme 3.18. On en déduit d'après Lemme 3.19 que G est l'union d'une chaîne infinie de sous-groupes normaux propres qui sont hypercentraux d'après Lemme 3.4. Donc G est localement nilpotent et il est un $MN\mathcal{ZA}$-groupe d'après Lemme 3.9. Réciproquement, supposons que G soit un $MN\mathcal{ZA}$-groupe. Donc G est localement nilpotent, d'où il ne peut pas être fini-par-hypercentral d'après Lemme 3.9. Puisque les sous-groupes propres de G sont fini-par-hypercentraux, on en déduit que G est un $MN\mathcal{FZA}$-groupe. ■

Chapitre 4

Groupes non-(Černikov-par-hypercentraux) minimaux

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on va étudier les groupes non-$\check{\mathcal{C}}\mathcal{Z}\mathcal{A}$ minimaux. Plus précisément, on établira que si G est un groupe non-$\check{\mathcal{C}}\mathcal{Z}\mathcal{A}$ minimal, alors G est un groupe parfait de type fini n'admettant pas de sous-groupes propres d'indice fini. De plus, on établira que $\frac{G}{Frat(G)}$ est un groupe simple infini.

Dans la deuxième section de ce chapitre on étudie les $MN\check{\mathcal{C}}\mathcal{Z}\mathcal{A}$ groupes de type infini, où $\check{\mathcal{C}}\mathcal{Z}\mathcal{A}$ et $\check{\mathcal{C}}$ désignent respectivement les classes des groupes Černikov-par-hypercentraux et de Černikov.

4.2 Quelques propriétés de la classe $\check{\mathcal{C}}\mathcal{Z}\mathcal{A}$

Dans cette section on va établir quelques propriétés de la classe $\check{C}ZA$

Proposition 4.1 *Soit G un groupe, $H \leq G$ et $N \lhd G$. On a :*

(i) Si G est dans la classe $\check{\mathcal{C}}\mathcal{Z}\mathcal{A}$, alors H est dans $\check{\mathcal{C}}\mathcal{Z}\mathcal{A}$.

(ii) Si G est dans la classe $\check{\mathcal{C}}\mathcal{Z}\mathcal{A}$, alors $\frac{G}{N}$ est dans $\check{\mathcal{C}}\mathcal{Z}\mathcal{A}$.

(iii) Si N est dans la classe $\check{\mathcal{C}}$ et si $\frac{G}{N}$ est dans la classe $\check{\mathcal{C}}\mathcal{Z}\mathcal{A}$, alors G est dans la classe $\check{\mathcal{C}}\mathcal{Z}\mathcal{A}$.

Démonstration : Soit G un groupe, H un sous-groupe de G et N un sous-groupe normal dans G. ■

(i) Supposons que G soit dans la classe $\check{\mathcal{C}}\mathcal{Z}\mathcal{A}$. Il existe donc un sous-groupe normal L dans G tel que L soit de Černikov et $\frac{G}{L}$ soit hypercentral. Considérons le sous-groupe $L \cap H$; il est clair que $L \cap H$ est un sous-groupe de Černikov normal dans H. D'autre part, on a

$$\frac{H}{L \cap H} \simeq \frac{HL}{L}$$

qui est un sous-groupe de $\frac{G}{L}$. Il s'ensuit donc que $\frac{H}{L \cap H}$ est hypercentral et par conséquent H est Černikov-par-hypercentral.

(ii) Supposons que G soit Černikov-par-hypercentral et soit L un sous-groupe normal dans G tel que L soit de Černikov et $\frac{G}{L}$ soit hypercentral. Considérons le sous-groupe $\frac{NL}{N}$de $\frac{G}{L}$. Comme

$$\frac{NL}{N} \simeq \frac{L}{N \cap L}$$

qui est de Černikov car la classe des groupes de Černikov est stable par passage aux quotients, $\frac{NL}{N}$ est de Černikov. De plus, on a

$$\frac{\frac{G}{N}}{\frac{NL}{N}} \simeq \frac{G}{NL},$$

d'autre part on a

$$\frac{G}{NL} \simeq \frac{\frac{G}{L}}{\frac{NL}{L}}$$

est hypercentral. D'où $\frac{G}{NL}$ est hypercentral et par conséquent $\frac{G}{N}$ est de Černikov-par-hypercentral.

(iii) Suposons que N soit dans la classe $\check{C}$ et que $\frac{G}{N}$ soit dans la classe $\check{\mathcal{C}}\mathcal{Z}\mathcal{A}$. Il existe donc un sous-groupe normal $\frac{M}{N}$ dans $\frac{G}{N}$ tel que $\frac{M}{N}$ soit de Černikov et $\frac{\frac{G}{N}}{\frac{M}{N}}$ soit hypercentral. On en déduit que $\frac{G}{M}$ est hypercentral. Comme N et $\frac{M}{N}$ sont de Černikov, M est de Černikov aussi. Il en résulte que G est dans la classe $\check{\mathcal{C}}\mathcal{Z}\mathcal{A}$.

4.2.1 Groupes non-(Černikov-par-hypercentraux) minimaux de type fini

Dans cette sous-section on va étudier les groupes non-(Černikov-par-hypercentraux) minimaux de type fini.

Théorème 4.2 *Si G est un groupe non-$\check{C}(ZA)$ minimal de type fini, alors :*

i) G n'admet pas de sous-groupes propres d'indice fini.

ii) G est parfait.

iii) $G/Frat(G)$ est un groupe simple infini.

Démonstration : Soit G un groupe non-(Černikov–par-hypercentral) minimal de type fini. Donc G n'est pas-(Černikov-par- hypercentral), mais tous ses sous-groupes propres sont (Černikov-par- hypercentraux).

i) Supposons que G admette un sous-groupe propre N, normal et d'indice fini. Puisque un sous-groupe d'indice fini dans un groupe de type fini est également de type fini, N est de type fini. Or N est propre dans G, donc N est Černikov-par-hypercentral, d'où N est fini-par-localement nilpotent de type fini donc il existe dans N un sous-groupe caractéristique M fini tel que $\frac{N}{M}$ soit localement nilpotent de type fini donc hypercentral, d'où G est fini-par-fini-par-hypercentral, donc G est fini-par-hypercentral, et le (i) est démontré.

ii) Supposons que G soit non-parfait ($G \neq G'$) ; comme $\frac{G}{G'}$ est abélien, il est localement gradué. Par suite $\frac{G}{G'}$, étant de type fini, admet une image finie non triviale, i.e il existe $\frac{H}{G'} \lhd \frac{G}{G'}$ tel que $\frac{H}{G'} \neq \frac{G}{G'}$ et $\frac{\frac{G}{G'}}{\frac{H}{G'}}$ soit fini. D'où il existe $H \lhd G$ tel que $H \neq G$ et $\frac{G}{H}$ soit fini, on en déduit que G admet un sous-groupe propre d'indice fini, ce qui contredit (i).

■

Avant de démontrer le troixième point, nous besoin du lemme suivant.

Lemme 4.3 *Si G est un groupe non-$\check{\mathcal{C}}(\mathcal{ZA})$ minimal de type fini, alors G ne possède aucun quotient non trivial qui soit Černikov-par-hypercentral.*

Démonstration : Supposons que G soit non-$\check{\mathcal{C}}(\mathcal{ZA})$ minimal de type fini ayant un sous-groupe N normal dans G tel que $\frac{G}{N}$ soit Černikov-par-hypercentral. Comme G est de type fini, $\frac{G}{N}$ est Černikov-par-hypercentral de type fini, d'où il est Černikov-par-nilpotent, donc il admet un sous-groupe normal $\frac{M}{N}$ tel que $\frac{M}{N}$ soit de Černikov et $\frac{G}{M}$ soit nilpotent de type fini. Comme G est parfait d'après (ii), il en est de même de G/M, donc $G = M$. On en déduit $\frac{G}{N}$ est de Černikov. Comme G est parfait et F-parfait, on obtient que G/N est trivial, ce montre le point (iii).

iii) Maintenant, on va montrer que $\frac{G}{Frat(G)}$ est infini et simple. Comme G est de type fini, $G \neq Frat(G)$; de plus, comme G n'admet pas de sous-groupes propres d'indice fini, on déduit que $\frac{G}{Frat(G)}$ est infini. Reste à montrer que $\frac{G}{Frat(G)}$ est simple. Pour ce faire, soit $N \lhd G$ tel que

$$Frat(G) \lneq N \lneq G.$$

Donc N est Černikov-par-hypercentral. D'autre part, comme $Frat(G) \lneq N$, il existe un sous-groupe M maximal dans G tel que $N \nsubseteq M$. Or M est propre dans G, donc M est Černikov-par-hypercentral. De plus on a

$$M \lneq NM \leq G,$$

par la maximalité de M, on déduit que $G = NM$. D'autre part on a

$$\frac{G}{N} \simeq \frac{MN}{N} \simeq \frac{M}{N \cap M}.$$

Il s'ensuit donc que $\frac{M}{N \cap M}$ est Černikov-par-hypercentral, et par conséquent $\frac{G}{N}$ est Černikov-par-hypercentral, ce qui contredit le lemme précédent.

■

4.2.2 Groupes non-(Černikov-par-hypercentraux) minimaux de type infini.

Dans cette sous-section on va étudier les groupes non-(Černikov-par-hypercentraux) minimaux de type infini.

Lemme 4.4 *Soit G un groupe non-(Černikov-par-hypercentral) minimal, et soit N un sous-groupe normal dans G. Si N est un groupe de Černikov, alors $\frac{G}{N}$ est un groupe* *non-(Černikov-par-hypercentral) minimal.*

Démonstration : Soit G un groupe non-(Černikov-par-hypercentral) minimal de type infini et soit N un sous-groupe normal de Černikov du groupe G. Supposons que $\frac{G}{N}$ soit Černikov-par-hypercentral, il existe donc un sous-groupe normal $\frac{K}{N}$ dans $\frac{G}{N}$ tel que $\frac{K}{N}$ soit de Černikov et $\frac{\frac{G}{N}}{\frac{K}{N}}$ soit hypercentral, donc $\frac{G}{K}$ est hypercentral. Comme N et $\frac{K}{N}$ sont de Černikov, K est de Černikov aussi. Par suite, il exite un sous-groupe normal K dans G, tel que K soit de Černikov et $\frac{G}{K}$ soit hypercentral, ce qui nous permet de conclure que G est de Černikov-par-hypercentral, contradiction. ■

Lemme 4.5 *Si G est un groupe non-(Černikov-par-hypercentral) minimal de type infini, alors G admet un sous-groupe de torsion T; c'est-à-dire que l'ensemble $T = \{x \in G \setminus o(x) \lneqq \infty\}$ est un sous-groupe de G.*

Démonstration : Soit G un groupe non-(Černikov-par-hypercentral) minimal de type infini et soit x, y deux eléments G d'ordre fini. Comme G est de type infini, le sous-groupe de type fini $\langle x, y\rangle$ est un sous-groupe propre de G, d'où $\langle x, y\rangle$ est Černikov-par-hypercentral. Il existe donc un sous-groupe N de Černikov normal dans $\langle x, y\rangle$ tel que $\frac{\langle x,y\rangle}{N}$ soit nilpotent, d'où xyN est d'ordre fini. Comme N est de Černikov, il est périodique, d'où xy est d'ordre fini. Cela nous permet de conclure que l'ensemble T des éléments de G d'ordres finis forme un sous-groupe de G, donc G admet un sous-groupe de torsion. ■

Proposition 4.6 *Soit G un groupe de $\check{C}\mathcal{ZA}$, alors il est admet un sous-groupe caractéristique de Černikov tel que $\frac{G}{M}$ soit hypercentral.*

Démonstration : Soit G un groupe dans la classe $\check{C}\mathcal{ZA}$. Il existe donc un sous-groupe normal N, tel que N soit de Černikov et $\frac{G}{N}$ soit hypercentral. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{H} = \left\{ H \leq N : H \lhd G,\ H \in \check{C} \text{ et } \frac{G}{H} \in \mathcal{ZA} \right\};$$

l'ensemble $\mathcal{H}$ est non vide car $N \in H$, comme N est de Černikov, il vérifie la condition minimale. Donc l'ensemble $\mathcal{H}$ admet un élément minimal, qu'on note M. C'est-à-dire que $M \leq N$, $M \lhd G$, M est de Černikov et $\frac{G}{M}$ est hypercentral. Si $\alpha \in Aut\,(G)$, alors

$\alpha(M) \lhd G$ et
$$\frac{G}{\alpha(M)} \simeq \frac{G}{M} \in \mathcal{ZA}$$
donc
$$\frac{G}{M \cap \alpha(M)} \in \mathcal{ZA}$$
Puisque
$$M \cap \alpha(M) \leq M$$
On en déduit que
$$M \cap \alpha(M) = M$$
D'où $M \leq \alpha(M)$, par conséquent M est caractéristique dans G. ■

Lemme 4.7 *Soit G un groupe. Si H et K sont deux sous-groupes normaux Černikov-par-hypercentraux d'un groupe G, alors HK est Černikov-par-hypercentral.*

Démonstration : Soit G un groupe et soient H et K deux sous-groupes normaux Černikov-par-hypercentraux, donc normaux ((abélien–par-fini)-par-localement nilpotents). Il existe donc deux sous groupes abélien-par-fini, N et M de H et K respectivement tels que N et M soient de Černikov et $\frac{H}{N}$ et $\frac{K}{M}$ soient hypercentraux. D'où il existe deux sous-groupes caractéristiques N_1 et M_1 abéliens vérifiant min dans N et M respectivement tels que $\frac{N}{N_1}$ et $\frac{M}{M_1}$ soient finis. Comme
$$\begin{aligned} \frac{HM_1}{N_1M_1} &\simeq \frac{H}{H \cap N_1M_1} \simeq \frac{\frac{H}{N_1}}{\frac{H \cap N_1M_1}{N_1}}, \\ et\ \frac{KN_1}{N_1M_1} &\simeq \frac{K}{K \cap N_1M_1} \simeq \frac{\frac{K}{M_1}}{\frac{K \cap N_1M_1}{M_1}} \end{aligned}$$
sont fini-par-hypercentraux, car $\frac{H}{N_1}$ et $\frac{K}{M_1}$ sont finis-par-hypercentraux, $\frac{HK}{N_1M_1}$ est le produit de deux sous groupes normaux finis-par-hypercenraux, il est fini-par-hypercentral. Comme N_1M_1 est de Černikov, HK est Černikov-par-(fini-par-hypercentral), donc HK est (Černikov-par-fini)-par-hypercentral, d'où HK est Černikov-par-hypercentral. ■

Corollaire 4.8 *Si G est un groupe non-$\check{C}\mathcal{ZA}$ minimal localement gradué, alors $\frac{G}{G'}$ est soit un groupe quasicyclique ou un p-groupe cyclique pour un certain premier p.*

Démonstration : Soit G un groupe non-(Černikov-par-hypercentral) minimal localement gradué. D'après Lemme 4.9, le produit de deux sous-groupes Černikov-par-hypercentraux normaux est un groupe Černikov-par-hypercentral. On en déduit que $\frac{G}{G'}$ est indécomposable, donc il est soit quasicyclique, soit un p-groupe cyclique pour certain premier p. ■

Théorème 4.9 *Si G est un groupe non-(Černikov-par-hypercentral) minimal de type infini, alors G est périodique.*

Démonstration : Soit G un groupe minimal non-(Černikov-par-hypercentral) de type infini. Supposons G non périodique et soit $\frac{H}{T}$ un sous-groupe propre dans $\frac{G}{T}$, où T est le sous-groupe de torsion de G. Donc $\frac{H}{T}$ est Černikov-par-hypercentral, il existe un sous-groupe normal $\frac{N}{T}$ de $\frac{H}{T}$ tel que $\frac{N}{T}$ soit de Černikov et $\frac{\frac{H}{T}}{\frac{N}{T}}$ soit hypercentral. Comme $\frac{G}{T}$ est sans torsion, $\frac{N}{T}$ est sans torsion et de Černikov, donc $\frac{N}{T}$ est trivial. Il en résulte que $\frac{H}{T}$ est hypercentral donc $\frac{G}{T}$ est hypercentral aussi car les groupes non-hypercentraux minimaux localement gradués sont périodiques d'après ([21], lemme 2.1). On en déduit que $\frac{G}{T}$, et donc G, est non-parfait. Comme G/G' est périodique, il en est de même de $\frac{G}{T}$, ce qui donne la contradiction que $G = T$. ■

Corollaire 4.10 *Si G est un groupe non-(Černikov-par-hypercentral) minimal de type infini, alors G est localement fini.*

Démonstration : Soit G un groupe non-(Černikov-par-hypercentral) minimal de type infini et soit H un sous groupe de G de type fini. Donc H est propre, d'où H est un groupe Černikov-par-nilpotent périodique, donc fini. ■

Lemme 4.11 *Si G est un $MN\mathcal{F}(\mathcal{ZA})$-groupe de type infini, $\mathcal{F}$-parfait, alors G est $MN\check{C}\mathcal{ZA}$.*

Démonstration : Soit G un groupe n'est pas fini-par-hypercentral dont tous les sous-groupes propres sont fini-par-hypercentraux. Comme tout les groupes finis sont de Cernikov, tous les sous-groupe propres de G sont Černikov-par-hypercentraux. Supposons que G soit de Černikov-par-hypercentral, donc $\exists N \lhd G$ tel que N soit de Černikov et $\frac{G}{N}$ soit hypercentral. Donc $\exists A \lhd G$ tel que A soit abelien de Černikov et $\frac{N}{A}$ soit fini et

$\frac{\frac{G}{A}}{\frac{N}{A}} \simeq \frac{G}{N}$ soit hypercentral, donc $\frac{G}{A}$ est fini-par-hypercentral. Comme $A \lhd G$ est abélien de Černikov et G est périodique, on en déduit que $\frac{G}{C_G(A)}$ est fini [32, corollaire du Théorème 3.29], donc $A \leq Z(G)$ car G est F-parfait. D'où

$$\frac{G}{Z(G)} \simeq \frac{\frac{G}{A}}{\frac{Z(G)}{A}}$$

est fini-par-hypercentral, donc G est fini-par-hypercentral, contradiction. ■

Proposition 4.12 *Si G est un groupe non-(Černikov-par-hypercentral) minimal de type infini, non-parfait et F-parfait, alors G' est hypercentral.*

Démonstration : Soit G un groupe non-(Černikov-par-hypercentral) minimal de type infini, n'admettant pas de sous-groupes propres d'indice fini, on a G' est $\check{\mathcal{C}}\mathcal{Z}\mathcal{A}$. Il existe donc un sous-groupe N caractéristique de Černikov tel que $\frac{G'}{N}$ soit hypercentral. Comme N est de Černikov, il admet un sous-groupe caractéristique R abélien divisible de Černikov, donc $\frac{G}{C_G(R)}$ est fini car G est périodique, donc $G = C_G(R)$ car G est $F-$parfait, d'où $R \leq Z(G)$. On a

$$\begin{aligned} \frac{N}{R} \text{ est fini } &\Longrightarrow \frac{\frac{G}{R}}{C_{\frac{G}{R}}\left(\frac{N}{R}\right)} \text{ est fini} \\ &\Longrightarrow \frac{G}{R} = C_{\frac{G}{R}}\left(\frac{N}{R}\right) \\ &\Longrightarrow \frac{N}{R} \leq Z\left(\frac{G}{R}\right) \end{aligned}$$

donc

$$\frac{G}{Z(G)} \simeq \frac{\frac{G}{R}}{\frac{Z(G)}{R}} \Longrightarrow \frac{G'}{Z_2(G')} \simeq \frac{\frac{G'}{N}}{\frac{Z_2(G')}{N}} \in ZA$$

d'où G' est hypercentral. ■

Proposition 4.13 *Soit G un groupe non-$\check{\mathcal{C}}\mathcal{Z}\mathcal{A}$ minimal de type infini, $F-$parfait, alors G est localement nilpotent.*

Démonstration : Soit G un groupe non-$\check{\mathcal{C}}\mathcal{Z}\mathcal{A}$ minimal de type infini ; comme

$$\begin{aligned} \frac{G}{G'} &\simeq C_{p^\infty} \\ &= \bigcup_{i \in IN} \langle a_i G' \rangle , \end{aligned}$$

$G = \bigcup_{i \in IN} \langle a_i, G' \rangle$, on en déduit que $\langle G', x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ est un sous-groupe propre normal dans G pour tout entier positif n, et pour tout $x_1,\ x_2, ..., x_n \in G$. Il en résulte que $\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ est nilpotent, donc G est localement nilpotent. ■

Bibliographie

[1] A. Arikan and N.Trabelsi, On minimal non-Baer groups ;Communications in Algebra, 39 :2489-2497, (2011).

[2] A. O. Asar, Locally nilpotent p-groups whose proper subgroups are hypercentral or nilpotent-by-Černikov. J. London. Math. Soc. (2) 61, 412-422(2000).

[3] S. Azra and N. Trabelsi, On Locally Graded Minimal Non-(finite-by-hypercentral) Groups, Bull.Malays. Math.Sci.Soc Doi 10.1007/s40840-020-00931-w.

[4] V. V. Belyaev, and N. F. Sesekin, Infinite groups of Miller-Moreno type, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 26, n°3-4,(1975),369-376.

[5] B. Bruno and R.E. Phillips, On minimal conditions related to Miller-Moreno type groups. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 69, 153-168 (1983).

[6] B. Bruno and F. Napolitani, A note on nilpotent-by-Černikov groups, Glasgow Math. J. 46 (2004), 211-215.

[7] B. Bruno and R. E. Phillips, A note on groups withh nilpotent-by-finite proper groups, Arch. Math. 65, (1995), 369-374.

[8] B. Bruno, On groups with Abelian-by-finite proper subgroups, Bollettion U. M. I. (6). 3-B, (1984), 797-807.

[9] B. Bruno, On p-groups with nilpotent-by-finite proper subgroups, Boll. U. M. I. VI. Ser. A3, n° 1, (1989), 45-51.

[10] C. Casolo, Groups with all subgroups subnormal, Dipartimento di Matematica "Ulisse Dini", Universit'a di Firenze, I-50134 Firenze Italy,Otranto, 4 - 8 giugno (2007).

[11] C. Casolo, Groups in which all subgroups are subnormal, Rend. Accad. Sci. Detta XL, V. Men. Mat. 10, n°1, (1986), 247-249.

[12] C. Casolo, Torsion-free groups with all subgroups subnormal, Rend. Circ. Mat. palermo 250 (2001), 321-324.

[13] F. De Giovanni, M. De Falco, F. Musella, Groups whose proper subgroup of infinite rank have a transitive normality relation. Mediterr. J. Math. 10, 199-2006 (2013).

[14] F. De Giovanni, M. De Falco, M. Musella, Y. P. Sysak, On the upper central series of infinite groups. Proc. Amer. Math. Soc. 139,385-389 (2011).

[15] M. De Falco, F. De Giovanni, C. Musella, Y. P. Sysak, Groups with many abelian subgroups, J. Algebra 347 (2011) 83-95.

[16] F. De Giovanni and A. Russo, On hypercentral subgroups of infinite groups. Math. Slovaca, 52 (2002), No. 3, 397-307.

[17] F. De Giovanni, and M. Trombetti, Infinite minimal non-hypercyclic groups. J. Algebra App. 14, no. 10, 1550143, 15 pp (2015).

[18] R. Dixon, R. Martyn, Ya. Igor, Subbotin, Groups with finiteness conditions on some subgroup systems : a contemporary stage ; Algebra and Discrete Mathematics. Number 4 (2009). pp. 29-54.

[19] K . Doerk, Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen, Math. Z. 91(1966), 198-205.

[20] Derek, J. S. Robinson, On the homology of hypercentral groups, Arch. Math, Vol. 32, (1979).

[21] S. Franciosi, F. De Giovanni, Y. P. Sysak, Groups with many polycyclic-by-nilpotent subgroups.Ricerche di Matematica. Vol. XLVIII, fasc. 2°,(1999),361-378.

[22] P. Hall, The Edmonton notes on nilpotent groups, Queen. Mary. College. Math. Notes (1969).

[23] H. Heineken and I. J. Mohamed, A Group with Trivial Centre Satisfying the Normalizer Condition, Journal of Algebra 10,368-376(1968).

[24] L. Kurdachenko, J. Otal, : Groups with Chernikov factor group by hypercentral. Rev. R.Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser . A Mat. RACSAM 109, 569-579 (2015).

[25] P. B. Kleidman, R . A. Wilson, A characterization of some locally finite simple groups of Lie type. Arch. Math. (Basel) 48, 10-14 (1987).

[26] G. A. Miller and H.C. Moreno, Non-abelian groups in which every subgroup is abelian. Trans. Amer. Math. Soc. 4, 398-404 (1903).

[27] W. Möhres, Auflösbarkeit von Gruppen, deren Untergruppen alle subnormalsind, Archiv Math ; 54(1990), 232-235.

[28] F. Napolitani. E . Pegoraro, On groups with nilpotent-by-nilpotent-by-Černikov proper subgroups. Arch. Math. 69, 89-94 (1997).

[29] M. F. Newman, J. Wiegold, Groups with many nilpotent subgroups. Arch. Math. 15, 241-250 (1964).

[30] J. Otal, M. Peña, Infinite lacaly finite groups of type PSL(2,K) or Sz(K) are not minimal under certain conditions. Publ. Mat. 32, 43-47 (1988).

[31] J. Otal, J. M. Peña, Groups in which every proper subgroup is Černikov-by-nilpotent or nilpotent-by-Černikov. Arch. Math, Vol. 51, 193-197 (1988).

[32] D. J .S. Robinson, Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups, Part I, II. Springer-Verlag, Berlin, (1972).

[33] D. J.S.Robinson, A course in the theory of groups, (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1982).

[34] E. I. Šatylo, Biprimary minimal nonsupersoluble groups, Ukrain. Math. Sind, Mat. Sbornik 31 (1924), 366-372.

[35] O. J . Schmidt, Über Gruppen, deren sämtliche Teiler spezielle Gruppen sind. Mat. Sbornik 31,366-372 (1924).

[36] H. Smith, Groups with few non-nilpotent subgroups. Glasgow Math. J. 39 (1997) 141-151.

[37] H. Smith, Hypercentral groups with all subgroups subnormal, Bull. London Math. Soc. 15, (1983), 229-234

[38] H. Smith, Groups with few non-nilpotent subgroups. J. Pure Appl. Algebra 213, 1320-1324 (2009).

[39] N. Trabelsi, On minimal non-(torsion-by-nilpotent) and (locally finite)-by-nilpotent) groups ; C.R. Acad. Sci. Paris, Ser I 344 (2007) 353-356.

[40] B. A. F. Wehrfritz*, On hypercentral groups, Central European journal of Mathematics, Doi : 10.2478/ s 11533-007-0015-3. CEJM 5(3) 2007 596-606.

[41] M. Xu, Groups whose proper subgroups are finite-by-nilpotent. Arch. Math. (Basel) 66, 353-359 (2009).

[42] M. Xu, Groups, Whose proper subgroups are Baer groups. Acta Mathematica Sinica, New Series 1996, Vol.12, No.1 PP, 10-17.

Résumé

L’objet de cette thèse concerne l’étude des groupes minimaux non-**Ω**, où **Ω** est une classe de groupes donnée, c’est-à-dire l’étude des groupes n’appartenant pas à **Ω** mais dont tous les sous-groupes propres sont dans **Ω**. Beaucoup de résultats sur les groupes minimaux non-**Ω**, pour diverses classes de groupes **Ω**, ont été obtenus par différents auteurs. Dans cette thèse, on se propose de décrire les groupes minimaux non-(fini-par-hypercentraux). Le principal résultat de cette thèse démontre que les groupes non-(fini-par-hypercentraux) minimaux localement gradués sont exactement soit les groupes non-(fini-par-abéliens) minimaux localement gradués, soit les groupes non-hypercentraux minimaux localement gradués.

Mots et phrases clés : hypercentral, fini-par-abélien, fini-par-hypercentral, minimal non-Ω

Classification AMS : (2010). 20F19, 20E07

ملخص

هدف موضوع هذه الأطروحة دراسة الزمر التي لا تنتمي الي صنف الزمر ***Ω*** غير ان كل زمرها الجزئيه الذاتيه تنتمي الي صنف الزمر ***Ω*** حيث ***Ω*** صنف من زمر معطي الظهور نتائج كثيرة حصل عليها بتنوع صفوف الزمر ***Ω*** من طرف عدد من المؤلفين في هذه الاطروحة نعرض تميز للزمر ذات زمر جزئية ذاتية تنتمي كلها الي صف الزمر الحد الادني غير مكتمل بواسطة مركزيه مفرطة تؤكد النتيجة الرئيسية لهذه الأطروحة أن الزمر الحد الأدنى المتدرجة محليًا غير (المنتهية بواسطة مركزية مفرطة) إما متدرجة محليًا بحد أدنى غير(منتهية بواسطة أبليان) أوزمر متدرجة محليًا غير مركزية مفرطة

الكلمات المفتاحية والعبارات: مركزية مفرطة ، متناهية بواسطة أبليان ، متناهية بواسطة مركزية مفرطة ، حد أدنى غير ***Ω***

تصنيف الجمعية الامريكية : 20F19. 20E07 (2010)

Abstract.

The aim of this thesis concerns the study of minimal non-***Ω*** groups, where **Ω** is a given class of groups, i.e. the study of groups not belonging to Ω but all of proper subgroups are in ***Ω***. Many results on infinite minimal non-***Ω*** groups, for various classes of ***Ω*** groups, have been obtained by different authors. In this thesis, we propose to describe the minimal non-(finite-by-hypercentral) groups. The main result of this thesis asserts that the locally graded minimal non-(finite-by-hypercentral) groups are exactly either locally graded minimal non-(finite-by-abelian), or locally graded minimal non-hypercentral groups.

Keywords and phrases: hypercentral, finite-by-abelian, finite-by-hypercentral, minimal non-x

2010 AMS Object Classification: 20E07. 20F19