

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ FERHAT ABBAS SÉTIF 1**



Thèse

Présentée à la faculté des sciences
Département des Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Mathématiques

Option : Mathématiques appliquées

par

ABBAS DJOUAHAR

Thème

**Aperçu de méthodes de résolution des équations intégrales et équations
intégré-différentielles. Adaptation aux équations d'ordre fractionnaire non
linéaires.**

Soutenue publiquement le 26 – 09 – 2021, devant le jury composé de

Président	SELMANI MOHAMED	<i>Professeur</i> Université Ferhat Abbas Sétif 1
Directeur de thèse	KADEM ABDELOUAHAB	<i>Professeur</i> Université Ferhat Abbas Sétif 1
Examineur	AHCENE MERAD	<i>Professeur</i> Université d'Oum El-Bouaghi
Examineur	SALAH ZITOUNI	<i>M.C.A</i> Université de Souk Ahras
Invité	SALIM MESBAHI	<i>Professeur</i> Université Ferhat Abbas Sétif 1

TABLE DES MATIÈRES

Listes des Notations	IV
Introduction générale	1
1 Préliminaires	4
1.1 Fonctions utiles dans le calcul fractionnaire	4
1.1.1 La fonction Gamma	4
1.1.2 La fonction Bêta	5
1.1.3 La fonction Mittag-Leffler	6
1.2 Intégrales et dérivées fractionnaires	7
1.2.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	8
1.3 Dérivée fractionnaire	10
1.3.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	11
1.3.2 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	13
1.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	14
1.4.1 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Caputo	19
1.4.2 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo	20
1.5 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville au sens de Jumarie	21
1.6 Exemples d'applications de la dérivation fractionnaire :	27
2 Quelques méthodes pour résoudre l'équation de Burgers-Fisher généralisée temporelle d'ordre fractionnaire	29
2.1 Méthode de décomposition d'Adomian (ADM)	29
2.1.1 Description de la méthode	30
2.1.2 Les polynômes d'Adomian	31
2.1.3 Convergence de la méthode ADM	32
2.1.4 Application aux équations différentielles d'ordre fractionnaire	33
2.2 Méthode de la fonction-Exp	35
2.2.1 Description de la méthode	36
2.2.2 Application de la méthode Fonction Exp pour l'équation Burgers-Fisher généralisée temporelle d'ordre fractionnaire	37
2.3 La Méthode d'expansion- (G'/G^2)	40

2.3.1	Description de la méthode	41
2.3.2	Application de la méthode d' Expansion $-(G'/G^2)$	43
2.3.3	Conclusion	44
3	Méthode de sous-équation de Fan	46
3.1	Introduction	46
3.2	Description de la méthode	47
3.3	Application de la méthode	49
3.3.1	L'équation SF–NLSE avec quadratique-cubique non linéaire	49
3.3.2	L'équation dispersive non linéaire (1+1) dimensionnelle modifiée Benjamin-Bona-Mahony	53
3.3.3	L'équation généralisée de Zakharov	56
4	Calcul de la solution exacte de l'équation de Burgers-Fisher généralisée temporelle d'ordre fractionnaire	59
4.1	Introduction	59
4.2	Ondes progressives pour l'équation Burgers-Fisher généralisée temporelle d'ordre fractionnaire	60
4.2.1	Le premier cas	62
4.2.2	Le deuxième cas	63
4.2.3	Le troisième cas	66
	Conclusion générale et perspectives	68
	Bibliographie	69

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je remercie Allah, le tout puissant, de m'avoir donné la force pour **E**achever ce travail, ainsi que la force pour dépasser toutes les difficultés

J'aimerais tout d'abord remercier grandement mon directeur de thèse le Professeur **Abdelouahab KADEM** pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant de m'encadrer et pour ses conseils avisés. Sa rigueur scientifique m'a permis d'arriver aux objectifs fixés au départ de ma thèse.

J'adresse mes remerciements au Professeur **Mohamed SELMANI**, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Mes vifs remerciements vont également à Monsieur **Ahcene MERAD**, Professeur à Université Larbi Ben Mhidi d'Oum El-Bouaghi, et Monsieur **Salah ZITOUNI**, M.C.A à Université de Mohamed-Chérif Messaadia de Souk Ahras pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de faire partie de ce jury, Je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur **Salim Mesbahi**, Professeur à Université Ferhat Abbas Sétif 1, pour avoir accepté notre invitation.

Je tiens à remercier toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

DÉDICACES

Je dédie ce travail :

A mes parents et mes soeurs, surtout ma très chère **Chafia**

A mon cher mari **Mahmoude**, pour la patience et le soutien qu'il m'a donnés pendant toute la durée de cette thèse.

A mes enfants **Mereyem, Mohamed Bilal, Marame.**

A tous mes amis, surtout **Fatima, Hana** et **Aziza.**

Enfin, je dédie ce travail à toute la famille **ABBAS, DJEDOUALI.**

ملخص

في هذا العمل قدمنا طريقة المعادلة الفرعية لفان لحل معادلة برغر- فيشر ذات المشتقات الجزئية ذات رتبة كسرية زمنية حيث المشتق كسري، و المعادلات ذات المشتقات الجزئية غير الخطية تظهر بشكل طبيعي في المجالات العلمية مثل الفيزياء، اللزوجة، الطب، الخ. من أجل توضيح دقة و صحة هذه الطريقة من خلال تطبيقها على العديد من الأمثلة الملموسة، ومن المهم إيجاد حلول تحليلية أو تقريبية على الأقل لهذه المشكلات.

الكلمات المفتاحية : المعادلات ذات المشتقات الجزئية الغير خطية ذات رتبة كسرية ، طريقة المعادلة الفرعية لفان ، معادلة برغر- فيشر ذات المشتقات الجزئية غير الخطية ذات رتبة كسرية زمنية.

Résumé

Dans ce travail, la méthode sous-équation de Fan est proposée pour résoudre l'équation de Burgers-Fisher généralisée d'ordre fractionnaire temporelle, dans le cadre des dérivées fractionnaire, les équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaire qui est apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, la viscoélasticité, la médecine, etc. Afin d'illustrer la précision et la validité de cette méthode ont été démontrées en les appliquant à de nombreux exemples concrets, et il est important de trouver des solutions analytiques ou du moins approximatives à ces problèmes.

Mots-Clés : équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaire, la méthode sous-équation de Fan, EBFG-FT.

Abstract

In this work, the extended Fan sub-equation method is proposed to solve the generalized time fractional Burgers-fisher equation, in the frame of fractional derivatives, non-linear partial differential equations of a fractional order occur naturally in different scientific fields such as physics, viscoelasticity, medicine, etc. In order to illustrate the accuracy and validity of this method have been proven by applying them to many concrete examples, and it is important or even necessary to find analytical or at least approximate solutions to these problems.

Keywords : fractional order non-linear partial differential equations, the extended Fan sub-equation method, GTF-BF.

LISTES DES NOTATIONS

- \mathbb{N} : ensemble des nombres entiers naturels.
- \mathbb{R} : ensemble des nombres réels.
- \mathbb{C} : ensemble des nombres complexes.
- $L^p(\Omega)$: espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [0, +\infty[$ intégrables sur Ω .
- $C(\Omega)$: espace des fonctions continues sur Ω .
- $C^n(\Omega)$: espace des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables n fois et $f^{(n)}$ continues.
- $AC(\Omega)$: espace des fonctions absolument continues sur Ω .
- $AC^n(\Omega)$: espace des fonctions dérivables à l'ordre $n - 1$ et elle que $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$.
- $\Gamma(\cdot)$: la fonction Gamma.
- $B(\cdot, \cdot)$: la fonction Bêta.
- $E_\alpha(\cdot)$: la fonction de Mittag-Leffler.
- $I^\alpha f$: intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
- $D^\alpha f$: dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
- ${}^c D^\alpha f$: dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Quand on a introduit la notion de dérivée, on s'est rendu compte qu'on peut appliquer le concept de dérivée à la fonction dérivée elle-même et par la même introduire la dérivée seconde, puis les dérivées successives d'ordre entier. L'intégration opérateur inverse de la dérivée, peut éventuellement être comme une dérivée d'ordre " moins un". On peut aussi se demander si ces dérivées d'ordres successifs ont un équivalent d'ordre fractionnaire. La théorie de dérivée fractionnaire ou bien d'ordre fractionnaire est aussi ancienne que le calcul classique tel que connu de nos jours. Ses origines remontent à la fin du 17^{me} siècle, l'époque où Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz ont développés les fondements du calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a introduit le symbole $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour désigner la dérivée n^{me} d'une fonction f quand il a annoncé dans une lettre à Guillaume l'Hôpital datée du 30 septembre 1695, avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$ qui lui a répondu : que signifie $\frac{d^n f}{dx^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?

Sur ces questions des contributions de grands mathématiciens tels qu'Euler, Lagrange , Laplace, Fourier, Liouville (1832;1837) ou Riemann (1847), ainsi que Grünwald (1867-1872) et Letnikov (1868-1872). Il semble qu'une contradiction dans les définitions ait empêché un succès plus grand de la théorie qui n'est certes pas encore unifiée de plus, l'absence au début d'une interprétation géométrique ou physique claire de la dérivée fractionnaire d'une fonction a largement contribué à beaucoup de questions de recherche passionnantes demeurent sans réponse. Le paradoxe des définitions distinctes fut résolu par la compréhension du caractère non local de l'opérateur de dérivation non entière. Pendant ces trois dernières décennies, beaucoup d'intérêts ont été prêtés au calcul fractionnaire et les champs d'applications se sont diversifiés. Pendant ces trois dernières décennies, plus d'intérêts ont été prêtés au calcul fractionnaire et les champs d'application se sont diversifiés [12, 41], on peut citer à titre non exhaustif plusieurs domaines de recherches en relation avec la physique, la chimie, la mécanique, . . . le concept des opérateurs d'ordre fractionnaire a été défini aux 19^{me} siècle par Riemann-Liouville. Le but principal était de prolonger la dérivation ou l'intégration d'ordre fractionnaire en employant non seulement un ordre entier mais également des ordres non entiers.

Plusieurs définitions de la dérivée fractionnaire d'ordre α ont été données, les définitions les plus utilisées sont celles au sens de Riemann-Liouville [45] et la dérivée au sens de Caputo. La différence entre ces deux définitions réside dans l'ordre d'évaluation.

Le développement de cette théorie a été utilisé notamment pour l'étude des équations non linéaires d'ordre fractionnaire et plusieurs outils mathématiques ont été développés pour trouver les solutions exactes de ce type d'équations. On en citera à titre d'exemple, la méthode sinus-cosinus [42], méthode tanh [55], méthode de décomposition d'Adomian (ADM) [14], la méthode de sous-équation [18, 32], la méthode d'itération variationnelle (VIM) [23, 58] et la méthode d'intégrale première [7] ainsi que plusieurs travaux de recherches effectués par A. Kadem et son équipe [5, 22, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 35].

Parmi ces méthodes, la méthode-tanh fournit un algorithme efficace et simple pour obtenir comme des solutions particulières pour des équations non linéaires. La réussite de la méthode réside c'est que l'un des processus de contournement sur l'intégration pour obtenir des solutions explicites, le tanh et l'extension de la méthode-tanh appartenait à une classe des méthodes appelée les méthodes de sous-équation, cette dernière méthode a été proposée par Fan. Fan [16] récemment a développé une nouvelle méthode algébrique appelée la méthode de sous-équation de Fan pour obtenir des solutions analytiques exactes pour des équations non linéaires et des équations non linéaires d'ordre fractionnaire. l'idée principale de la méthode pour tirer pleinement profit de l'équation elliptique générale comportant cinq paramètres. Par ailleurs, la méthode est fiable et donner des solutions plus générales et précise que autres méthodes existantes. le puissant de la méthode sous-équation de Fan est largement appliquée dans de nombreux travaux, voir [4, 16, 61, 62] ainsi que les références y référant.

Pour illustration on applique la méthode proposée à l'équation Burgers-Fisher généralisée d'ordre fractionnaire temporelle. Dans notre cas on s'intéresse à l'équation Burger-Fisher (BF) [54] qui est très utile dans de nombreux domaines tels que la dynamique des fluides, la physique et l'ingénierie, etc Le modèle Burger-Fisher a été étudié notamment par de nombreux auteurs à la fois pour la compréhension conceptuelle des lois physiques et les tests diverses de méthodes numériques.

$$\frac{du(x,t)}{dt} + \beta u^\delta(x,t) \frac{du(x,t)}{dx} - \frac{d^2u(x,t)}{dx^2} = \gamma u(x,t) (1 - u^\delta(x,t)).$$

pour $0 < \delta < \infty$.

En 1986 Satzuma considérait l'équation Burgers-Fisher [46] qui est en fait une combinaison d'un terme de réaction, convection et de diffusion en d'autres termes, cette équation traduit les propriétés d'un phénomène convectif qui sont données par l'équation de Burgers d'une part et d'autre part le transport de diffusion traduit par l'équation de Fisher . l'équation Burgers-Fisher généralisée avec

d'ordre fractionnaire temporelle est donnée par

$$\frac{d^\alpha u(x, t)}{dt^\alpha} + \beta u^\delta(x, t) \frac{du(x, t)}{dx} - \frac{d^2 u(x, t)}{dx^2} = \gamma u(x, t) (1 - u^\delta(x, t)).$$

pour $0 < \alpha \leq 1$, où γ, β , et δ sont des constantes arbitraires.

Plusieurs travaux de recherche étaient axés sur l'étude de cette équation tant numériquement qu'analytiquement. On en citera à titre non exhaustif [56] les objectifs de ce travail généralisés les formes l'équation Burgers-Fisher, la méthode $(1/G')$ d'expansion M. Yavuz [60] et la méthode de Kudryashov généralisée [49] qui est une méthode analytique appliquant pour construire des solutions exactes.

Cette thèse est constituée d'une introduction générale qui présente l'importance du thème ainsi que les objectifs de notre travail dans quatre chapitres principaux. À la fin on donne une conclusion générale et des perspectives.

- Dans le premier chapitre, nous présentons brièvement les principes fondamentaux de la théorie du calcul fractionnaire ainsi que son application dans certains domaines scientifiques suivi d'un rappel des notions de base liées à la théorie de calcul fractionnaire.
- Le deuxième chapitre est dédié à quelques méthodes pour la résolution de l'équation Burgers-Fisher généralisée d'ordre fractionnaire temporelle, on en citera entre autre la méthode de décomposition d'Adomian (ADM), la méthode de la fonction-Exp et la méthode d'expansion (G'/G^2) et leurs efficacités sont prouvées pour résoudre l'équation BFG d'ordre fractionnaire temporelle.
- Quant au troisième chapitre, la méthode de sous-équation de Fan est appliquée pour trouver des solutions d'ondes progressives des EDF non linéaires. Ces EDF comprennent l'équation SF–NLSE avec quadratique-cubique non-linéaire, ainsi que d'autres équations d'ordre fractionnaire.
- Dans le quatrième chapitre, on donne notre résultat principal.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, on introduit les éléments nécessaires pour la bonne compréhension de ce manuscrit. Nous rappelons les définitions des intégrales et dérivées fractionnaires et quelques fonctions spéciales.

Il existe plusieurs définitions mathématiques de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour une large gamme de fonctions.

On donnera l'opérateur d'intégration fractionnaire ainsi que les trois définitions les plus utilisées des dérivées fractionnaires à savoir celle de Riemann-Liouville, Riemann-Liouville au sens de Jumarie et de Caputo, avec leurs propriétés les plus importantes.

1.1 Fonctions utiles dans le calcul fractionnaire

La compréhension des définitions et l'utilisation du calcul fractionnaire seront facilitées en donnant quelques définitions mathématiques nécessaires de quelques fonctions utiles telles que les fonctions Gamma, Bêta d'Euler et La fonction Mittag-Leffler puis on introduit quelques propriétés liées à ces fonctions. Pour plus de détails voir [41, 44].

1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma, par définition (voir l'intégrale fractionnaire), est intrinsèquement liée au calcul non entier. La fonction Gamma est une généralisation du factoriel pour tous les nombres réels. Elle a été obtenue par Euler en 1729.

Définition 1.1. La fonction Gamma Γ est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{tel que} \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (1.1)$$

$$\text{avec} \quad t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}.$$

Exemple 1.1.

1. $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0^+) = +\infty.$
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}.$ (on pose le changement de variable $t = \tau^2$.)
 $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z < 1.$

Quelques propriétés importantes de la fonction Gamma sont données ci-dessous

1. Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (1.2)$$

qu'on peut démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

En utilisant la relation (1.2), la fonction Gamma est étendue au demi-plan $\operatorname{Re}(z) \leq 0$ par

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + n)}{(z)_n}. \quad (\operatorname{Re}(z) > -n, n \in \mathbb{N}; z \notin \mathbb{Z}_-^- : \{0, -1, -2, \dots\}) \quad (1.3)$$

où le terme $(z)_n$ représente le symbole de Pochhammer défini pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{Z}$ et tout entier non négatif $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$(z)_0 = 1, \quad (z)_n = z(z + 1) \dots (z + n - 1) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

2. La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n + 1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$, en effet $\Gamma(1) = 1$ et en utilisant la relation (1.2) nous obtenons :

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)! = n!.$$

3. $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}.$ (par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$)

1.1.2 La fonction Bêta

Parmi les fonctions de base du calcul fractionnaire : La fonction Bêta. Cette fonction joue un rôle important spécialement avec une certaine combinaison avec la fonction Gamma.

Définition 1.2. La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour des nombres complexes α

et β par :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0. \quad (1.4)$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0. \quad (1.5)$$

Propriétés : La fonction Bêta possède les propriétés suivantes :

1. Il s'ensuit de (1.4) que :

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha), \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0.$$

$$2. B(\alpha, \beta) = B(\alpha + 1, \beta) + B(\alpha, \beta + 1).$$

$$3. B(\alpha + 1, \beta) = \frac{\beta}{\alpha} B(\alpha, \beta + 1) = \frac{\beta}{\alpha - \beta} B(\alpha, \beta).$$

1.1.3 La fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler introduite et étudiée par Mittag Leffler [43] est une généralisation directe des séries d'exponentielles. Son importance a été introduite au cours des deux dernières décennies en raison de son implication directe dans des problèmes de la physique, de la biologie, de l'ingénierie et des sciences appliquées. Dans ce qui suit, nous allons rappeler un certain nombre de définitions et certaines propriétés de la fonction Mittag-Leffler et ses généralisations.

Définition 1.3. Pour $x \in \mathbb{C}$ la fonction de Mittag-Leffler est définie par

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0 \quad (1.6)$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette dernière a été introduite pour la première fois par Wiman [57]. Elle a été étudiée en détail ensuite par Agarwal et Humbert et elle est définie par le développement en série suivant :

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (1.7)$$

Exemple 1.2.

$$1. E_0(z) = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

$$2. E_{2,2}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z} \sinh z.$$

Théorème 1.1. Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^n E_n(\lambda x^n) &= \lambda E_n(x_n), \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{\beta-1} E_{n,\beta}(\lambda x^n) &= \lambda x^{\beta-n-1} E_n(x_n). \end{aligned}$$

Proposition 1.2. Pour $\alpha, \beta > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$L\left[t^{\beta-1} E_{n,\beta}(\lambda t^n)\right](s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}, \quad s > 0, |\lambda s^\alpha| < 1.$$

Preuve. Grâce à la définition de la transformée de Laplace, on a

$$\begin{aligned} L\left[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\right](s) &= \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha k + \beta - 1} e^{-st} dt, \end{aligned}$$

posons le changement de variable $st = \tau$; on obtient

$$\begin{aligned} L\left[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\right](s) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k s^{-\alpha k - \beta}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^{+\infty} \tau^{\alpha k + \beta - 1} e^{-\tau} d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k s^{-\alpha k - \beta}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \Gamma(\alpha k + \beta) \\ &= s^{-\beta} \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda s^{-\alpha})^k, \end{aligned}$$

et pour $|\lambda s^\alpha| < 1$; on a $\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda s^{-\alpha})^k = \frac{1}{1 - \lambda s^{-\alpha}}$, donc

$$L\left[t^{\beta-1} E_{n,\beta}(\lambda t^n)\right](s) = \frac{s^{-\beta}}{1 - \lambda s^{-\alpha}} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}.$$

1.2 Intégrales et dérivées fractionnaires

Nous présentons dans cette partie les différentes définitions, qui ne coïncident pas en général. Nous citons quelques unes parmi celles existantes dans la littérature, sachant que les deux définitions les

plus utilisées sont celles de Riemann-Liouville et de l'opérateur défini par Caputo, y compris quelques unes de leurs propriétés ainsi que la relation entre ces deux approches.

1.2.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Dans ce paragraphe, nous rappelons la définition du calcul d'intégrale d'ordre non entier. Pour introduire le calcul d'intégrale d'ordre non entier, nous commençons par donner la formule de Cauchy pour l'intégration répétée d'une fonction analytique $f(t)$ d'une variable réelle t . La formule de Cauchy [44](1789 - 1857), qui est obtenue comme suit :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Une primitive de f est donnée par l'expression :

$$I^1 f(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

Pour une primitive seconde et d'après le théorème de Fubini on aura :

$$\begin{aligned} I^2 f(t) &= \int_a^t I^1 f(u) du = \int_a^t \left(\int_a^u f(\tau) d\tau \right) du = \int_a^t \left(\int_\tau^t du \right) f(\tau) d\tau \\ &= \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

En répétant n fois, on arrive à la n^{ime} primitive de la fonction f sous la forme :

$$I_a^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, n \in \mathbb{N}^* t > a. \quad (1.8)$$

avec $a, t \in \mathbb{R}, a < t$. Si n est remplacé par un nombre réel α et le terme $(n-1)!$ par sa généralisation qui est la fonction Gamma, l'équation (1.8) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il a défini l'intégrale fractionnaire de la manière suivante :

Définition 1.4. [34] Supposons que $\alpha > 0, a < t, \alpha, a, t \in \mathbb{R}$ et $f \in L^1([a, b])$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche de la fonction f pour un ordre non entier α est définie par :

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (1.9)$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma donnée par (1.1).

Remarque 1.1. Dans tout ce qui suit on utilise uniquement l'intégrale (à gauche).

Exemple 1.3. L'intégrale de $f(t) = (t - a)^\beta$ au sens de Riemann-Liouville.

Soient $\alpha > 0, \beta > -1$, alors on a :

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^\beta d\tau. \quad (1.10)$$

En effectuant le changement de variable

$$\tau = a + s(t - a),$$

où $s = 0$ quand $\tau = a$ et $s = 1$ quand $\tau = t$ et $d\tau = tds$, alors (1.10) devient

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (t - a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t - a)^{\alpha-1} (1 - s)^{\alpha-1} s^\beta (t - a)^{\beta+1} ds \\ &= \frac{(t - a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-1} s^\beta ds, \\ &= \frac{(t - a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-1} s^{(\beta+1)-1} ds. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de la fonction Bêta (1.4) puis la relation (1.5), on arrive à :

$$\begin{aligned} I^\alpha f(t) &= \frac{(t - a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta + 1) \\ &= \frac{(t - a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (t - a)^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Donc l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = (t - a)^\beta$ est donnée par :

$$I^\alpha (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (t - a)^{\alpha+\beta}. \quad (1.11)$$

On voit bien que c'est une généralisation du cas $\alpha = 1$ où on a

$$I^1 (t - a)^\beta = \frac{1}{\beta + 1} (t - a)^{\beta+1}.$$

l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une constante est donnée par :

$$I_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)} (t - a)^\alpha.$$

En particulier, si $a = 0$,

$$I^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha.$$

Proposition 1.3. *pour $\alpha > 0, \beta > 0$, on a*

$$1. \left(I_a^\alpha (t - a)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t - a)^{\alpha+\beta-1}.$$

$$2. \left(I_b^\alpha (b - t)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (b - t)^{\alpha+\beta-1}.$$

Proposition 1.4. [34] Soient $\alpha > 0, \beta > 0$ pour toute fonction $f \in L^1([a, b])$ on a :

$$I_a^\alpha(I_a^\beta f(t)) = I_a^{\alpha+\beta} f(t) = I_a^\beta(I_a^\alpha f(t)),$$

pour presque tout $t \in [a, b]$. Si de plus $f \in C([a, b])$, alors cette identité est vraie $\forall t \in [a, b]$.

Démonstration. La preuve découle directement de la définition et supposons d'abord que $f \in L^1([a, b])$ on a :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha(I_a^\beta f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} I_a^\beta f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \int_a^\tau (\tau-\zeta)^{\beta-1} f(\zeta) d\zeta d\tau. \end{aligned}$$

Or $f \in C([a, b])$ et d'après le théorème de Fubini permet donc d'établir

$$I_a^\alpha(I_a^\beta f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\int_\zeta^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\zeta)^{\beta-1} d\tau \right) f(\zeta) d\zeta.$$

En effectuant le changement de variable

$$\tau = \zeta + (t-\zeta)s,$$

où $s = 0$ quand $\tau = \zeta$ et $s = 1$ quand $\tau = t$ et $d\tau = (t-\zeta)ds$, on obtient :

$$I_a^\alpha(I_a^\beta f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\zeta)^{\alpha+\beta-1} \left(\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds \right) f(\zeta) d\zeta.$$

Enfin, en tenant compte de la définition de la fonction Bêta (1.4) puis de la relation (1.5), on obtient :

$$I_a^\alpha(I_a^\beta f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_a^t (t-\zeta)^{\alpha+\beta-1} f(\zeta) d\zeta = (I_a^{\alpha+\beta} f)(t).$$

Ainsi, d'après ce qui précède, les deux fonctions continues $I_a^{\alpha+\beta} f, I_a^\alpha I_a^\beta f$ coïncident presque partout sur $[a, b]$, elles doivent donc coïncider partout sur $[a, b]$.

1.3 Dérivée fractionnaire

La différentiation d'ordre fractionnaire est une généralisation des concepts de la différentiation d'ordre entier. Il existe plusieurs définitions mathématiques pour la dérivation d'ordre fractionnaire. On va présenter trois approches Riemann-Liouville, Riemann-Liouville au sens de Jumarie, Caputo qui sont les plus utilisées.

1.3.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Si $\alpha > 0$, on note $[\alpha]$ la partie entière de α : $[\alpha]$ est l'unique entier vérifiant $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$.
 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$: En s'inspirant de la relation classique $\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}(I_a^1)$, on peut définir une dérivée fractionnaire d'ordre α , $0 \leq \alpha < 1$ par :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d}{dt}(I_a^{1-\alpha})$$

Plus généralement, si $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, on peut poser :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d^n}{dt^n}(I_a^{n-\alpha})$$

On obtient exactement la dérivée de Riemann-Liouville à gauche.

Définition 1.5. [34] Soit $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur $[a, b]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha > 0$ notée $D_a^\alpha f$ est définie par :

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], D_a^\alpha f(t) &= D^n I_a^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dt^n} \right) \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, t > a. \end{aligned} \quad (1.12)$$

où $n = [\alpha] + 1$

En particulier, si $\alpha = n - 1, \in \mathbb{N}^*, a = 0$, alors

$$D_0^{n-1} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d^n}{dt^n} \right) \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{d^n}{dt^n} f(\tau) d\tau = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(t) = f^{(n-1)}(t).$$

Ainsi la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

Si de plus $0 \leq \alpha < 1$, alors $n = 1$, d'où

$$D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau.$$

Exemple 1.4. 1/ La dérivée de $f(t) = (t-a)^\beta$ au sens de Riemann-Liouville.

$$D^\alpha (t-a)^\beta = \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\alpha} (t-a)^\beta$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $n - 1 < \alpha < n$ et $\beta > -1$, d'après (1.12), et la relation (1.11), (Voir l'exemple 1.3) on a :

$$D^\alpha (t-a)^\beta = \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\alpha} (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n-\alpha+\beta} \quad (1.13)$$

En tenant compte de

$$\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n-\alpha+\beta} = \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \quad (1.14)$$

On substitue le resultat (1.14), dans la formule (1.13), pour obtenir :

$$D^\alpha(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.$$

Donc la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$ est donnée par :

$$D^\alpha(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \quad (1.15)$$

On pose $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{3}{2}$. Alors,

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}}(t-a)^{\frac{3}{2}} &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1)}(t-a)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)}(t-a) \\ &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}(t-a) \end{aligned}$$

2/ la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante $f(t) = C$ est non nulle, sa valeur est :

$$D^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0$$

Proposition 1.5. *pour $\alpha \geq 0, \beta > 0$, on a*

1. $(D_a^\alpha(t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}$.
2. $(D_b^\alpha(b-t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-t)^{\beta-\alpha-1}$.

Lemme 1.6. *Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, et f une fonction vérifiant*

$$D_a^\alpha f(t) = 0 \iff f(t) = \sum_{j=1}^n c_j(t-a)^{\alpha-j}, \forall c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

En particulier, si $0 < \alpha < 1$, alors

$$D_a^\alpha f(t) = 0 \iff f(t) = c(t-a)^{\alpha-1}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.7. [34] *Soient $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n([a, b])$, alors la dérivée fractionnaire*

$D_a^\alpha f$ existe presque partout sur $[a, b]$, de plus elle est représentée sous la forme :

$$D_a^\alpha f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j - \alpha + 1)} (t - a)^{j - \alpha} + \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \quad (1.16)$$

Cas particulier pour : $0 < \alpha < 1$

$$D_a^\alpha f(t) = \frac{f(a)}{\Gamma(1 - \alpha)} (t - a)^{-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau.$$

La proposition précédente établit une condition suffisante d'existence de la dérivée fractionnaire.

1.3.2 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Nous nous intéressons dans cette section aux propriétés de différentiation fractionnaire, les plus souvent utilisées dans les applications.

1) Linéarité :

Pour $n - 1 < \alpha \leq n, m - 1 < \beta \leq m$, on a :

Soit f et g deux fonctions à $L^1([a, b])$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a alors la linéarité de l'opérateur de dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

$$D_a^\alpha (\lambda f + \mu g)(t) = \lambda (D_a^\alpha f)(t) + \mu (D_a^\alpha g)(t), \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Ceci résulte directement des propriétés de l'intégration. Cette relation peut être étendue. Soit f une suite de fonctions appartenant à $L^1([a, b])$ tel que $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} (D_a^\alpha f_k)$ convergent uniformément sur $[a, b]$, alors

$$D_a^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (D_a^\alpha f_k)(t)$$

2) En général

$$D_a^\alpha (D_a^\beta f(t)) \neq D_a^\beta (D_a^\alpha f(t)).$$

Preuve. On a :

$$D_a^\alpha (D_a^\beta f(t)) = D_a^{\alpha + \beta} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \left[D_a^{\beta - k} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t - a)^{-\alpha - k}}{\Gamma(1 - \alpha - k)}$$

et

$$D_a^\beta (D_a^\alpha f(t)) = D_a^{\alpha + \beta} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left[D_a^{\alpha - k} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t - a)^{-\beta - k}}{\Gamma(1 - \beta - k)}.$$

Par la suite les deux opérateurs de dérivation fractionnaire ne commutent que si $\left[D_a^{\alpha - k} f(t) \right]_{t=a} = 0$, pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ et $\left[D_a^{\beta - k} f(t) \right]_{t=a} = 0$, pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, m - 1$.

Ce qui complète la preuve.

Une des propriétés importantes de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville avec l'intégrale fractionnaire est la suivante :

Proposition 1.8. Soient $\alpha, \beta > 0$ tel que $n - 1 < \alpha \leq n, m - 1 < \beta \leq m$ tel que $n, m \in \mathbb{N}^*$.

1) Pour $f \in L^p([a, b]), (1 \leq p \leq \infty)$ alors :

$$(D_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = f(t),$$

est vraie pour presque tout $t \in [a, b]$.

2) Si $\beta > \alpha > 0$, alors pour $f \in L^p([a, b]), (1 \leq p \leq \infty)$ la relation :

$$D_a^\alpha (I_a^\beta f(t)) = I_a^{\beta-\alpha} f(t),$$

est vraie pour presque partout $t \in [a, b]$.

En particulier, lorsque $\alpha = p \in \mathbb{N}$ et $\beta > p$, alors :

$$D^p (I_a^\beta f(t)) = I_a^{\beta-p} f(t),$$

3) Si $f \in L^1([a, b]), (I_a^{n-\alpha} f) \in AC^n([a, b])$, alors

$$(I_a^\alpha D_a^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(I_a^{n-\alpha} f)^{(n-k)}(a)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} (t - a)^{\alpha-k}$$

En particulier si : $0 < \alpha \leq 1$

$$(I_a^\alpha D_a^\alpha f)(t) = f(t)$$

1.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La définition (1.12) de la différentiation fractionnaire de type Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires et pour son application dans les mathématiques pures (solution des équations différentielles d'ordre entier, définitions de nouvelles classes de fonctions, sommation des séries, etc...).

Cependant, la technologie moderne demande une certaine révision de l'approche mathématique pure bien connue. De nombreux travaux ont apparu, spécialement dans la théorie de la visco-élasticité et de la mécanique des solides, où les dérivées fractionnaires sont utilisées pour une bonne description des propriétés des matériaux. Une modélisation mathématique basée sur les modèles rhéologiques mène naturellement à des équations différentielles d'ordre fractionnaire, et à la nécessité de la formulation des conditions initiales de telles équations.

Les problèmes appliqués demandent des définitions de dérivées fractionnaires autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, lesquelles contiennent $f(a), f'(a)$, etc..., ce qui

n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

Malgré le fait que les problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement, la solution de ce problème a été proposée par M. Caputo dans sa définition qu'il a adapté avec F. Mainardi dans la structure de la théorie de viscoélasticité [9].

Dans cette section on donne la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ainsi que quelques propriétés essentielles.

Définition 1.6. La dérivée fractionnaire de Caputo ${}^c D_a^\alpha f(t)$ d'ordre $\alpha > 0$, sur l'intervalle $[a, b]$ est définie par l'intermédiaire de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville par :

$${}^c D_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right), \quad (1.17)$$

où

$$n = [\alpha] + 1 \text{ si } \alpha \notin \mathbb{N}, n = \alpha \text{ et } \alpha \in \mathbb{N}. \quad (1.18)$$

Si $\alpha = 0$, alors :

$$({}^c D^0)_a f(t) = f(t).$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$, la relation (1.17) prend la forme :

$${}^c D_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha (f(t) - f(a))$$

La dérivée fractionnaire de Caputo (1.17) est définie pour les fonctions f pour lesquelles la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville existe ; en particulier elle est définie pour les fonctions $f \in AC^n([a, b])$. On a le théorème suivant :

Théorème 1.9. Soit $\alpha \geq 0$ et soit n donné par (1.18). Si $f \in AC^n([a, b])$, alors la dérivée fractionnaire de Caputo ${}^c D_a^\alpha f(t)$ existe presque partout sur $[a, b]$.

a) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors ${}^c D_a^\alpha f(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} ({}^c D_a^\alpha f)(t) &= I_a^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.19)$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$ et $f \in AC([a, b])$, alors :

$$\begin{aligned}
 ({}^c D_a^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau, \\
 &= I_a^{1-\alpha} f'(t)
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

b) Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors :

$$({}^c D_a^\alpha f)(t) = f^{(n)}(t).$$

Démonstration. D'après (1.17) et (1.12) on a :

$$\begin{aligned}
 ({}^c D_a^\alpha f)(t) &= D_a^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right) \\
 &= D^n I_a^{n-\alpha} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right)
 \end{aligned}$$

Par :

$$\begin{aligned}
 D_a^\alpha f(t) &= D^n I_a^{n-\alpha} f(t). \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau,
 \end{aligned}$$

On pose :

$$\varphi(t) = I_a^{n-\alpha} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right)$$

D'après (1.9), on a :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \left(f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\tau-a)^k \right) d\tau,$$

En intégrant par partie, on aura :

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \left(f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\tau-a)^k \right) d\tau, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left\{ -\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \left(f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\tau-a)^k \right) \Big|_{\tau=a}^{\tau=t} \right. \\
 &\quad \left. + \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} D \left(f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\tau-a)^k \right) d\tau \right\} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1+1} \left(f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\tau-a)^k \right) d\tau \\
 &= I_a^{n-\alpha+1} D \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right).
 \end{aligned}$$

En répétant ce procédé n fois, on trouve :

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &= I_a^{n-\alpha+n} D^n \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right) \\
 &= I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right)
 \end{aligned}$$

Or, $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k$ est un polynôme de degré $n-1$, par conséquent

$$\varphi(t) = I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n f(t).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 ({}^c D_a^\alpha f)(t) &= D^n \varphi(t) \\
 &= D^n I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n f(t). \\
 &= I_a^{n-\alpha} D^n f(t). \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Théorème 1.10. [34] Soit $\alpha \geq 0$ et soit n donné par (1.18) et $f \in C^n([a, b])$. Alors la dérivée fractionnaire de Caputo $({}^c D_a^\alpha f)$ est continue sur $[a, b]$.

1. Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors ${}^c D_a^\alpha f(t)$ est donnée par (1.18). En particulier, elle prend la forme (1.19) pour $0 < \alpha < 1$.

2. Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors :

$$({}^c D_a^\alpha f)(t) = f^{(n)}(t).$$

La dérivée fractionnaire de Caputo (${}^c D_a^\alpha$), comme celle de Riemann-Liouville, représente l'opération inverse à gauche de l'intégrale fractionnaire I_a^α .

Exemple 1.5. 1. la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction $f(t) = e^{\lambda t}$.

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha(e^{\lambda t}) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\tau^n}(e^{\lambda\tau}) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\lambda^n e^{\lambda\tau}) d\tau \\ &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \tau^k}{k!} d\tau \\ &= \frac{\lambda^n t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_a^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha-1} \tau^k d\tau \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable

$$\tau = yt, \quad d\tau = t dy$$

où $y = \frac{a}{t}$ quand $\tau = a$ et $y = 1$ quand $\tau = t$.

On obtient

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha(e^{\lambda t}) &= \frac{\lambda^n t^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_{\frac{a}{t}}^1 (1-y)^{n-\alpha-1} y^{k+1-1} d\tau, \text{ (si } a=0) \\ &= \frac{\lambda^n t^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} B(n-\alpha, k+1) \end{aligned}$$

En utilisant la définition de la fonction Bêta (1.4) puis de la relation (1.5) on arrive à :

$$\begin{aligned}
 {}^c D_a^\alpha(e^{\lambda t}) &= \frac{\lambda^n t^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \Gamma(n-\alpha)\Gamma(k+1)}{k! \Gamma(n-\alpha+k+1)} \\
 &= \lambda^n t^{n-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^k}{\Gamma(k+n-\alpha+1)} \\
 &= \lambda^n t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(t\lambda).
 \end{aligned}$$

D'après la définition de la fonction Mittag-Leffler (1.6), donc on a la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction $f(t) = e^{\lambda t}$ donnée par :

$${}^c D^\alpha(e^{\lambda t}) = \lambda^n t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(t\lambda) \quad (1.21)$$

2. la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$ est donnée par :

$${}^c D^\alpha(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \quad (1.22)$$

En particulier, l'utilisation de la formule (1.19) pour calculer la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ d'une constante $C \in \mathbb{R}$ exprime que cette dérivée est nulle c'est-à-dire :

$$({}^c D^\alpha C) = 0.$$

1.4.1 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Un des intérêts du calcul fractionnaire est qu'il généralise aussi certaines propriétés des dérivées et intégrales classiques : la dérivée fractionnaire de l'intégrale du même ordre donne l'identité, la dérivée d'une dérivée redonne sous certaines conditions une dérivée, l'intégration par parties reste valable et les opérateurs fractionnaires se conjuguent très bien avec les transformées de Fourier et Laplace. Cette dernière propriété est omniprésente dans de nombreux domaines d'application présents dans la section précédente :

Linéarité

Soient les deux fonctions f et g telles que ${}^c D^\alpha f(t)$ et ${}^c D^\alpha g(t)$ existent. La dérivation fractionnaire de Caputo est un opérateur linéaire :

$${}^c D^\alpha(\lambda f + \mu g)(t) = \lambda({}^c D^\alpha f)(t) + \mu({}^c D^\alpha g)(t), \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad (\text{la démonstration est évidente})$$

Compositions entre opérateurs

Proposition 1.11. [44] Soit $\alpha > 0, \beta > 0, n = [\alpha] + 1$, on a les propriétés suivantes :

1. Si $f \in C^q([a, b])$, $q = [\alpha + \beta] + 1$, alors

$$({}^c D_a^\alpha \quad {}^c D_a^\beta f)(t) = ({}^c D_a^{\alpha+\beta} f)(t).$$

2. Si $f \in C^n([a, b])$, ou $f \in AC^n([a, b])$, alors

$$(I_a^\alpha ({}^c D_a^\alpha f)(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k$$

En particulier si $0 < \alpha \leq 1$

$$(I_a^\alpha ({}^c D_a^\alpha f)(t)) = f(t) - f(a)$$

3. Soient $\alpha > 0$ et $f \in L^\infty[a, b]$, alors

$${}^c D_a^\alpha (I_a^\alpha f(t)) = f(t).$$

4. On suppose que $n - 1 < \alpha < n, m, n \in \mathbb{N}^*$ et soit la fonction f telle que ${}^c D_a^\alpha f$ existe, alors :

$${}^c D_a^\alpha D_a^m f(t) = {}^c D_a^{\alpha+m} f(t) \neq D_a^{m\alpha} {}^c D_a^\alpha f(t).$$

L'avantage principal de l'approche Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier.

1.4.2 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivant établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 1.12. Soit $\alpha > 0$ avec $n - 1 < \alpha < n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, est une fonction telle que les dérivées fractionnaires ${}^c D_a^\alpha f$ et $D_a^\alpha f$ existent alors :

$$({}^c D_a^\alpha) f(t) = D_a^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (t-a)^{k-\alpha}. \quad (1.23)$$

En particulier, $0 < \alpha < 1$ on a :

$$({}^c D_a^\alpha) f(t) = D_a^\alpha f(t) - \frac{f(a)}{\Gamma(-\alpha + 1)} (t-a)^{-\alpha}.$$

Cette dernière relation peut aussi s'écrire

$$({}^c D_a^\alpha) f(t) = D_a^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right].$$

Remarque 1.2. 1/ Si $f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, la dérivée au sens de Caputo coïncide avec celle de Riemann-Liouville pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, C'est-à-dire :

$${}^c D_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha f(t)$$

2/ La définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le cas particulier des dérivées au sens de Riemann-Liouville. Si la fonction est absolument continue et si l'intégrale de sa dérivée existe, les opérations d'intégration et de dérivation peuvent être permutées : on calcule l'intégrale fractionnaire de la dérivée de la fonction. On dit alors que la dérivation fractionnaire obtenue ainsi est définie au sens de Caputo. Les dérivées au sens de Caputo sont plus familières du point de vue physique car elles conduisent à une valeur nulle pour la dérivée d'une constante. De plus, les conditions initiales d'une équation différentielle fractionnaire au sens de Caputo s'expriment en termes de dérivée d'ordre entier tandis que les conditions initiales d'une équation différentielle fractionnaire au sens de Riemann-Liouville s'expriment par des opérateurs fractionnaires qui n'ont pas de sens physique défini [34, 44].

1.5 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville au sens de Jumarie

Définition 1.7. [24] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et α un nombre réel strictement négatif. On appelle la dérivée fractionnaire au sens de Jumarie d'ordre α de f et on la note $D_t^\alpha f(t)$ la fonction définie par

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau, t > 0. \quad (1.24)$$

Exemple 1.6. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(t) = K,$$

où K est une constante réelle. Pour $\alpha < 0$ et $t > 0$; on a

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{-\alpha-1} K dx$$

Alors

$$\begin{aligned} D_t^\alpha f(t) &= K \frac{[(t-x)^{-\alpha}]_0^t}{-\alpha \Gamma(-\alpha)} \\ &= \frac{K}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \end{aligned}$$

Définition 1.8. [24] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $0 < \alpha < 1$. On appelle dérivée fractionnaire au sens de Jumarie d'ordre α de f et on la note $D_t^\alpha f$ la fonction définie par

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} (f(\tau) - f(0)) d\tau, t > 0. \quad (1.25)$$

Remarque 1.3. 1. Si $f(0) = 0$ alors $D_t^\alpha f$ est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de f .

2. La dérivée fractionnaire au sens de Jumarie est une définition non locale.

3. La dérivée fractionnaire au sens de Jumarie pour $0 < \alpha < 1$ d'une constante est nulle.

Exemple 1.7. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^{\alpha k}, \quad 0 < \alpha < 1 \text{ et } k \in \mathbb{N}$$

Pour $x > 0$; on a

$$\begin{aligned} D_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} (t^{\alpha k} - 0) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} t^{\alpha k} dt \end{aligned}$$

Posons

$$t = xv.$$

Alors

$$\begin{aligned} D_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} x^{1+\alpha k-\alpha} \int_0^1 (1-v)^{-\alpha} v^{\alpha k} dv \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} x^{1+\alpha k-\alpha} B(1-\alpha, \alpha k + 1) \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} D_x^\alpha f(x) &= \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1 + 1 - \alpha)} \frac{d}{dx} x^{1 + \alpha k - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k - \alpha + 1)} x^{\alpha k - \alpha}. \end{aligned}$$

Définition 1.9. [24] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n \leq \alpha < n + 1$, la dérivée fractionnaire au sens de Jumarie est définie par

$$D_t^\alpha [f(t)] = (D_t^{\alpha-n} f(t))^{(n)}. \quad n \geq 1 \quad (1.26)$$

Exemple 1.8. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^\gamma, \quad n < \alpha < n + 1 \quad \text{et} \quad \gamma > 0$$

Calculons $D_x^\alpha f(x)$. Pour $x > 0$:

On pose

$$\beta = \alpha - n.$$

Alors

$$0 < \beta < 1.$$

C'est-à-dire

$$D_x^{\beta+n} [f(x)] = (D_x^\beta f(x))^{(n)}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} D_x^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\beta} (t^\gamma - 0) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\beta} t^\gamma dt \end{aligned}$$

Posons

$$t = xv.$$

Alors

$$\begin{aligned} D_x^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dx} x^{1+\gamma-\beta} \int_0^1 (1-v)^{-\beta} v^\gamma dv \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dx} x^{1+\gamma-\beta} B(1-\beta, \gamma+1) \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} D_x^\beta f(x) &= \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma + 1 + 1 - \beta)} \frac{d}{dx} x^{1+\gamma-\beta} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - \beta + 1)} x^{\gamma-\beta} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} D_x^{\beta+n} [f(x)] &= \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - \beta + 1)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n x^{\gamma-\beta} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - \beta - n + 1)} x^{\gamma-\beta-n} \end{aligned}$$

Par la suite

$$D_x^\alpha [x^\gamma] = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - \alpha + 1)} x^{\gamma-\alpha}.$$

Théorème 1.13. [24] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons que f admet une dérivée fractionnaire au sens de Jumarie d'ordre αk avec $0 < \alpha \leq 1$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors la formule de Taylor-Young d'ordre fractionnaire est donnée par

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^n \frac{h^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} D_x^{\alpha k} f(x) + h^{\alpha n} \varepsilon(h) \quad (1.27)$$

avec

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Corollaire 1.14. [24] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $0 < \alpha < 1$. Alors

$$D_x^\alpha f(x) = \Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h^\alpha}$$

Démonstration : Pour $n = 1$; On a

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h^\alpha D_x^\alpha f(x)}{\Gamma(\alpha + 1)} + h^\alpha \varepsilon(h)$$

C'est-à-dire

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h^\alpha} = \frac{D_x^\alpha f(x)}{\Gamma(\alpha + 1)} + \varepsilon(h)$$

Alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h^\alpha} = \frac{D_x^\alpha f(x)}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

C'est-à-dire

$$D_x^\alpha f(x) = \Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h^\alpha}$$

Théorème 1.15. [24] Soient $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues non différentiables et $0 < \alpha < 1$.

Alors

$$D_x^\alpha(uv)(x) = v(x)D_x^\alpha u(x) + u(x)D_x^\alpha v(x) \quad (1.28)$$

Démonstration : D'après le corollaire précédent, on a

$$\begin{aligned} D_x^\alpha(uv)(x) &= \Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h^\alpha} \\ &= \Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h^\alpha} \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} D_x^\alpha(uv)(x) &= \Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)[v(x+h) - v(x)]}{h^\alpha} \\ &\quad + \Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[u(x+h) - u(x)]v(x)}{h^\alpha} \\ &= v(x)D_x^\alpha u(x) + u(x)D_x^\alpha v(x) \end{aligned}$$

Théorème 1.16. Soient $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues, v est non différentiable et $u \circ v$ est différentiable, alors

$$D_x^\alpha[u(v(x))] = u'(v)D_x^\alpha v(x), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1.29)$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} D_x^\alpha[u(v(x))] &= \Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{h^\alpha} \\ &= \Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{v(x+h) - v(x)} \left(\frac{v(x+h) - v(x)}{h^\alpha} \right) \right]. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} D_x^\alpha[u(v(x))] &= \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{v(x+h) - v(x)} \right] \times \left[\Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h^\alpha} \right] \\ &= u'(v)D_x^\alpha v(x). \end{aligned}$$

Théorème 1.17. Soient $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues, v est différentiable et $u \circ v$ est non différentiable, alors

$$D_x^\alpha[u(v(x))] = D_x^\alpha u(v)(v'(x))^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1.30)$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} D_x^\alpha[u(v(x))] &= \Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{h^\alpha} \\ &= \Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{(v(x+h) - v(x))^\alpha} \left(\frac{(v(x+h) - v(x))^\alpha}{h^\alpha} \right) \right] \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} D_x^\alpha [u(v(x))] &= \left[\Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{(v(x+h) - v(x))^\alpha} \right] \times \left[\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right)^\alpha \right] \\ &= D_v^\alpha u(v) (v'(x))^\alpha. \end{aligned}$$

1.6 Exemples d'applications de la dérivation fractionnaire :

Le calcul fractionnaire apparait de plus en plus fréquemment dans les champs de recherche non seulement mathématique mais aussi physique.

Cependant, le problème posé au début est l'interprétation physique de la dérivation fractionnaire. L'absence d'une telle interprétation a été abordée lors de la première conférence internationale en 1974 qui a eu lieu à New Haven ainsi lors des autres conférences qui ont suivi en 1984 en Angleterre à l'université de Strathclyde et en Tokyo. Récemment, plusieurs études théoriques et expérimentales ont été consacrées à cette question. Ils ont trouvé que certains systèmes thermiques électrochimiques, viscoélastique sont régis par des équations différentielles fractionnaires.

Les domaines d'applications du calcul fractionnaire deviennent de plus en plus nombreux, par exemple l'électrochimie, la finance la mécanique, la biomédecine, etc. Dans la suite, on cite quelques modèles physiques qui sont décrits par la dérivation fractionnaire.

Rhéologie :

La dérivée fractionnaire procure un excellent instrument pour la description des propriétés de plusieurs matériaux et processus. Elle intervient lors de la modélisation mécanique des gommés et des caoutchoucs, plus généralement les matériaux à mémoire de forme, grâce à l'intégrale associée dans sa définition.

À titre d'exemple, dans [53] les auteurs ont introduit la dérivation fractionnaire pour modéliser l'amortissement dans les équations de mouvement où les matériaux employés comme isolateurs ou amortisseurs sont viscoélastiques. La nouveauté est que l'introduction de la dérivation fractionnaire réduit le nombre de paramètres du modèle, par exemple pour la modélisation du comportement contrainte-déformation d'un solide, Bagley et Torvik [53] ont introduit un modèle à quatre paramètres au lieu d'une dizaine,

$$(1 + bD_t^\alpha) \sigma(t) = (G_0 + G_1 D_t^\alpha) \varepsilon(t),$$

où σ et ε désignent respectivement la contrainte et la déformation et où b, G_0, G_1 et α sont les paramètres du modèle.

Mécanique : Diffusion anormale

Beaucoup d'auteurs ont affirmé que l'usage des opérateurs fractionnaires est souhaitable pour la description des milieux hétérogènes. Par exemple, dans 2004 ils ont remarqué que le milieu est capable de retenir une certaine mémoire, de plus le transport de masse n'obéit pas à la loi de diffusion normale. Pour modéliser ce phénomène, l'approche de dérivation fractionnaire est adaptée (voir Metzler et Klafter [40]) On présente deux possibilités pour la modélisation de la diffusion anormale dans les milieux où les particules des fluides subissent des retards irréguliers.

1. L'équation de Fokker-Planck fractionnaire :

Cette équation modélise le mouvement Brownien avec un champ des forces extérieures. Afin de décrire

le transport anormale, Metzler et Klafter [40] ont introduit une version fractionnaire en temps

$$\partial_t P(x, t) = D_t^{1-\gamma} \left(\partial_x F(x) + \frac{d}{2} \partial_x^2 \right) P(x, t),$$

où D_t^γ est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, $P(x, t)$, d , $F(x)$ sont respectivement la densité, le coefficient de la diffusion, la force extérieure.

2. Le modèle mobile/immobile (MIM) fractionnaire :

Le modèle classique MIM est basé sur l'existence des milieux avec des zones stagnantes. La version fractionnaire a été proposé par Schumer [47], l'utilisation de la dérivée fractionnaire est motivée par le fait que le MIM fractionnaire représente une combinaison entre les équations de transfert de masse dans les zones mobile et immobile, de plus ce modèle a des solutions qui décrivent fidèlement les caractéristiques importantes d'évolution du soluté. L'équation qui relie les densités des particules mobiles (dans une région E_1) et immobiles (dans E_2) est donnée par

$$(\partial_t + \lambda_1 I_{E_1}(x)^c D_t^{\gamma_1} + \lambda_2 I_{E_2}(x)^c D_t^{\gamma_2}) P(x, t) = \partial_x (d \partial_x - \nu) P(x, t)$$

où ${}^c D_t^{\gamma_i}$, $i = 1, 2$, représente la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, d , ν , $P(x, t)$ sont respectivement le coefficient de la diffusion, la vitesse d'advection et la densité. L'ordre de la dérivation γ_i est l'exposant de stabilité de la densité des particules (mobiles et immobiles) et λ_i représente l'intensité de stagnation dans la région E_i , $i = 1, 2$.

Outre les quelques exemples développés ci-dessus, il y a de nombreux phénomènes physiques qui sont régis par les opérateurs fractionnaires (dérivation et intégration), soit comme un outil de commande soit comme un outil de modélisation dans le domaine de biologie, mécanique, automatique, théorie du contrôle, finance. . .

Cependant, l'analyse théorique des équations différentielles fractionnaires n'a pas obtenue une attention importante. En particulier, la théorie d'explosion en temps fini n'a été étudiée qu'à partir des dernières décennies.

La principale motivation de nos contributions est l'étude théorique des équations différentielles fractionnaires en temps et/ou en espace. Pour mettre en lumière les points importantes, nous présentons les différents chapitres présentés ci-après.

CHAPITRE 2

QUELQUES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE L'ÉQUATION DE BURGERS-FISHER GÉNÉRALISÉE TEMPORELLE D'ORDRE FRACTIONNAIRE

Le présent chapitre est consacré à la présentation de quelques méthodes analytiques qui permettent de résoudre les équations différentielles d'ordre fractionnaire : la méthode de décomposition d'Adomian (ADM), la méthode de la fonction-Exp et la méthode (G'/G^2) -expansion.

2.1 Méthode de décomposition d'Adomian (ADM)

Dans la seconde partie du XXe siècle, George Adomian (21 mars 1922 - 1996) un mathématicien américain a proposé une nouvelle méthode [2] pour résoudre les équations différentielles et aux dérivées partielles linéaires et non linéaires, les problèmes algébriques, les équations intégrales, les équations intégrodifférentielles, les équations différentielles ordinaires d'ordre supérieur. La technique utilise une décomposition de l'opérateur non linéaire en une série de fonction, chaque terme de cette série est un polynôme généralisé appelé polynôme d'Adomian.

La méthode décompositionnelle consiste à calculer les solutions des équations sous la forme d'une série infinie convergente vers la solution du problème donné [11].

2.1.1 Description de la méthode

La technique est basée sur une décomposition d'une solution de l'équation fonctionnelle non linéaire suivante :

$$Fu = g, \quad (2.1)$$

où F représente un opérateur différentiel ordinaire ou partiel non linéaire comprenant des termes linéaires et non-linéaires et g est une fonction connue. La partie linéaire est généralement décomposée en $L + R$, et N est la partie non-linéaire. l'équation précédente peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Lu + Ru + Nu = g, \quad (2.2)$$

où

L : est un opérateur différentiel facilement inversible.

R : représente le reste de l'opérateur linéaire.

N : un opérateur différentiel non-linéaire.

Nous pouvons écrire l'équation (2.2) comme suit :

$$Lu = g - Ru - Nu. \quad (2.3)$$

En multipliant l'équation (2.3) par L^{-1} , on obtient :

$$L^{-1}(Lu) = L^{-1}g - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu), \quad (2.4)$$

où $L^{-1} = \int \int \dots \int (\cdot)(dt)^n$ est l'inverse de l'opérateur L .

Puisque

$$L^{-1}(Lu) = u - \phi,$$

et ϕ est la constante de l'intégration. Par conséquent, l'équation (2.4) devient :

$$u = \phi + L^{-1}g - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu). \quad (2.5)$$

La méthode d'Adomian consiste à rechercher la solution sous forme d'une série :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \quad (2.6)$$

Le terme non-linéaire de Nu sera décomposé par la série infinie des polynômes Adomian :

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (2.7)$$

Les termes A_n sont appelés polynômes d'Adomian et sont obtenus grâce à la relation suivante :

$$A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.8)$$

où λ est un paramètre réel introduit par convenance.

En substituant les équations (2.6) et (2.7) dans (2.5), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \phi + L^{-1}g - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (2.9)$$

D'où on déduit :

$$\begin{cases} u_0 = \phi + L^{-1}g \\ u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1 \\ \vdots \\ u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \end{cases} \quad (2.10)$$

Il est à noter que cette identification n'est pas unique mais c'est la seule qui permet de définir explicitement les u_n . La relation (2.10) permet de calculer tous les termes de la série sans ambiguïté car les A_n ne dépendent que de u_0, u_1, \dots, u_n .

En pratique, il est presque impossible de calculer la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ (sauf pour des cas très particuliers). Aussi se contente-t-on généralement d'une solution approchée φ_n , sous la forme de série tronquée :

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i, \quad n \geq 1$$

La question qu'on peut se poser est comment déterminer les $(A_n)_{n \geq 0}$ et à quelles conditions la méthode converge.

2.1.2 Les polynômes d'Adomian

L'étape la plus importante de la méthode est celle du calcul des polynômes d'Adomian.

Définition 2.1. Les polynômes d'Adomian sont définis par la formule :

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0) \\ A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}. \end{cases} \quad (2.11)$$

La formule proposée par G. Adomian pour le calcul des polynômes d'Adomian $(A_n)_{n \geq 0}$ est la suivante [3] :

$$\begin{aligned}
 A_0(u_0) &= N(u_0) \\
 A_1(u_0, u_1) &= u_1 \frac{\partial}{\partial u} N(u_0) \\
 A_2(u_0, u_1, u_2) &= u_2 \frac{\partial}{\partial u} N(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} N(u_0) \\
 A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) &= u_3 \frac{\partial}{\partial u} N(u_0) + u_2 u_1 \frac{\partial^2}{\partial u^2} N(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 \frac{\partial^3}{\partial u^3} N(u_0) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Cette formule s'écrit sous la forme :

$$A_n = \sum_{\nu=0}^n c(\nu, n) N^{(\nu)}(u_0), n \geq 1,$$

où $c(\nu, n)$ représente la somme de tous les produits (divisées par $m!$) des ν termes u_i dont la somme des indices i est égale à n , m étant le nombre de répétitions des mêmes termes dans le produit.

2.1.3 Convergence de la méthode ADM

A quelle condition $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} A_n$ convergent-elle ?

$\sum_{n \geq 0} u_n$ Est-elle solution de l'équation canonique ?

Pour pallier à ces difficultés on propose une forme structurale de la méthode qui sera mieux adaptée à une étude de la convergence

En effet, de la relation (2.10) on déduit :

Théorème 2.1. *Si la série $\sum_{n \geq 0} A_n$ converge, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et la réciproque est vraie.*

$$\text{Si } \sum_{n \geq 0} A_n < +\infty \text{ alors } \sum_{n \geq 0} u_n < +\infty, \quad (2.12)$$

Les premières preuves de convergence ont été citées par Yves Cherruault. Elles sont basées sur la méthode du point fixe.

Donnons les grandes lignes de la démonstration [10](voir pour plus de détails).

Notons d'abord que la méthode décompositionnelle appliquée à (2.1) se ramène à la recherche d'une suite :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

vérifiant la relation récurrente suivante :

$$\begin{cases} S_0 = 0, u_0 = g \\ S_{n+1} = N(u_0 + S_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.13)$$

D'où le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Si l'opérateur N est une contraction (i.e sa norme vérifie $\|N\| < \delta < 1$) alors la suite $(S_n)_n$ satisfaisant la relation de récurrence $S_{n+1} = N(u_0 + S)$ avec $S_0 = 0, n \geq 0$ converge vers S où S qui est la solution de $S = N(u_0 + S)$.*

Preuve. De la relation (2.13), on a :

$$\begin{aligned} \|S_n - S\| &= \|N(u_0 + S_n) - N(u_0 + S)\| \\ &\leq \|N\| \|S_n - S\| \\ &\leq \delta \|S_n - S\| \\ &\leq \delta^2 \|S_{n-1} - S\| \\ &\leq \delta^3 \|S_{n-2} - S\| \\ &\vdots \\ &\leq \delta^n \|S_1 - S\| \end{aligned}$$

D'où la convergence de la suite $(S_n)_n$ vers S .

Par ailleurs, on a :

$$\sum_{n \geq 0} A_n = \sum_{n \geq 1} u_n$$

et comme $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente d'après le Théorème 2.1, on a alors le résultat suivant :

Corollaire 2.3. *Si N est une contraction alors les séries des u_n et des A_n sont convergentes. De plus, $\sum_{n \geq 0} u_n$ est solution de l'équation :*

$$Fu = g.$$

2.1.4 Application aux équations différentielles d'ordre fractionnaire

Exemple 2.1. Soit l'équation de Burgers-Fisher d'ordre fractionnaire suivante [15] :

$$u_t^\alpha + pu^r u_x - u_{xx} = qu(1 - u^r), \quad 0 < \alpha < 1, \quad t > 0, \quad (2.14)$$

avec la condition initiale [33]

$$u(x, 0) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh(Kx)}, \quad (2.15)$$

où p et q sont des constantes alors que $K = \frac{1}{2}(1 + r)$.

Cette équation a été utilisée comme base pour une large variété de modèles pour l'espace du gène dans la population et propagation des ondes chimiques.

Encore une fois en appliquant la méthode de décomposition d'Adomian, l'équation (2.15) peut être écrite sous forme d'opérateur

$$D_t^\alpha u(x, t) = -[p(\Phi(u)/1 + r)_x - u_{xx} - qu + q\Phi(u)]. \quad (2.16)$$

Appliquons $D_t^{-\alpha}$ des deux côtés de l'équation (2.16) et en utilisant les conditions initiales (2.15) on aura

$$u(x, t) = u(x, 0) - D_t^{-\alpha}[p(\Phi(u)/1 + r)_x - u_{xx} - qu + q\Phi(u)], \quad (2.17)$$

où $\Phi(u) = u^{r+1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, u_2, \dots)$ sont appelés les polynômes d'Adomian. Ces polynômes peuvent être calculés pour toutes les formes de non-linéarité par Adomian.

D'après la formule (2.11) les polynômes d'Adomian $(A_n)_{n \geq 0}$ sont les suivants

$$\begin{aligned} A_0(u_0) &= u_0^{r+1}, \\ A_1(u_0, u_1) &= (r+1)u_0^r u_1, \\ A_2(u_0, u_1, u_2) &= (r+1)u_0^r u_2 + r(r+1)u_0^{r-1} \left(\frac{1}{2}u_1^2\right), \\ A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) &= (r+1)u_0^r u_3 + r(r+1)u_0^{r-1} u_2 u_1 + r(r+1)(r-1)u_0^{r-2} \left(\frac{1}{6}u_1^3\right). \end{aligned}$$

La méthode d'Adomian consiste à chercher la solution sous forme d'une série :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t).$$

Et par la suite l'analyse ADM de l'équation (2.17) donne

$$u_0 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh(Kx)}, \quad (2.18)$$

$$u_{n+1}(x, t) = -D_t^{-\alpha}[p(A_n/1 + r)_x - u_{nxx} - qu_n + qA_n]. \quad (2.19)$$

En utilisant la relation récursive ci-dessus, les trois premiers termes s'avèrent être

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= -D_t^{-\alpha}[p(A_0/1 + r)_x - u_{0xx} - qu_0 + qA_0], \\ u_2(x, t) &= -D_t^{-\alpha}[p(A_1/1 + r)_x - u_{1xx} - qu_1 + qA_1], \\ u_3(x, t) &= -D_t^{-\alpha}[p(A_2/1 + r)_x - u_{2xx} - qu_2 + qA_2], \end{aligned}$$

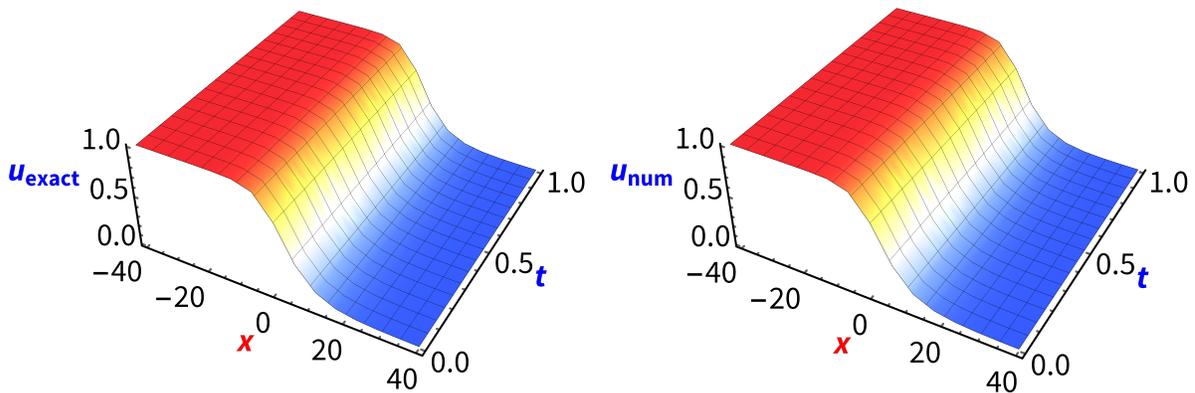
et ainsi de suite, le reste des composants de la série de décompositions peuvent être obtenus. Sachant, le composant u_0 , le reste des composantes u_n , peuvent être directement évalués et les solutions de sa séries sont calculées numériquement. Selon les formes longues de u_1 , u_2 et u_3 , nous n'écrivons pas ici leurs formes explicites. Cependant, il est clair que la détermination de plus de composants, bien que simple, est fastidieuse et donc nous utiliserons les quatre composants pour obtenir une solution approximative.

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t).$$

Comme nous l'avons déjà dit, il faut plus de termes pour améliorer le niveau d'approximation. Il est également montré à partir des Figs. a et b, la solution Adomian est d'accord avec la solution exacte de Burgers–Fisher équation [33].

$$u(x, t) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh(K(x - ct)) \right]^{\frac{1}{r}}, \quad (2.20)$$

dans le cas $\alpha = 1$ et $c = \frac{p^2 + q(1+r)^2}{p(1+r)}$.



(a) La solution exacte pour l'équation généralisée Burgers-Fisher (2.20) avec des valeurs fixes $r = 2$, $p = 0, 1$ et $q = -0,0025$

(b) Solution numérique pour l'équation fractionnaire généralisée Burgers-Fisher avec des valeurs fixes $r = 2$, $p = 0, 1$, $q = -0,0025$, et $\alpha = 1$

2.2 Méthode de la fonction-Exp

La méthode Fonction-Exp, a été proposée par [21] consiste à trouver des solutions solitaires, des solutions périodiques et des solutions de type compacton des équations différentielles non linéaires. L'équation KdV modifiée et l'équation Dodd–Bullough–Mikhailov ont été choisies pour illustrer l'efficacité et la commodité de la méthode suggérée, et à été systématiquement étudiée par He et Abdou, Bekir et Ahmet Boz, Wu, X.H., He, J.H. (2007), Noor et al. (2008), Navickas et al. (2010), [13] etc. . .

. La méthode de la fonction-Exp était proposée initialement pour résoudre les PDEs, cette méthode a déjà été suggérée pour évaluer une solution pour l'équations différentielles partielles. Toutefois, ses application au calcul fractionnaire sont rares, Zhang et ses collègues (2010) ont proposé une méthode de la fonction-Exp fractionnelle avec l'aide de la fonction Mittag-Leffler, qui est, cependant, insaisissable pour les non mathématiciens. En 2013 [20] cette méthode a été étendue avec succès au calcul fractionnaire est de simplicité extraordinaire avec laquelle nous pouvons facilement déduire solutions solitaire pour les équations d'ondes fractionnaires non linéaires et elle est devenue un outil efficace pour les équations différentielles fractionnaires [8]. La méthode de la fonction-Exp peut devenir une nouvelle méthode prometteuse et puissante pour les équations non linéaires.

Dans cette partie, les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville au sens de Jumarie et la méthode de la fonction-Exp utilisées pour la construction des solutions exactes de l'équation de Burgers-Fisher généralisée temporelle d'ordre fractionnaire.

2.2.1 Description de la méthode

Considérons les équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaires avec une fonction inconnue u , le polynôme G en fonction de u et ses dérivées partielles, impliquant les dérivées du plus haut ordre et les termes non linéaires,

$$G(u, D_t^\alpha u, D_x^\beta u, D_t^\alpha D_t^\alpha u, D_t^\alpha D_x^\beta u, D_x^\alpha D_x^\alpha u, \dots) = 0; \quad 0 < \alpha, \beta < 1 \quad (2.21)$$

La transformation fractionnaire complexe a été proposée par [38] pour convertir une fractale temporelle ou spatiale à son partenaire continu, la base physique a été illustrée par He dans sa récente revue articles ([38], He et al., 2012; Hu et He, 2016). Wu et Liang a donné une analyse mathématique très claire de la relation entre les dimensions fractales et calcul fractionnel dans [59].

La transformation complexe fractionnaire suivante avec des constantes arbitraires non nulles λ et ξ , nous transformons l'équation différentielle fractionnaire en une équation différentielle ordinaire :

$$u(x, t) = u(\zeta), \quad \zeta = \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{\xi x^\beta}{\Gamma(1 + \beta)} \quad (2.22)$$

Réduire Eq.(2.21) a une équation différentielle ordinaire (ODE) d'ordre entier suivante :

$$H(u, u', u'', \dots) = 0; \quad (2.23)$$

où prime désigne une dérivée par rapport à ξ .

Avec les nombres entiers positifs g, h, k , et j , ainsi avec les constantes inconnues a_q et b_p , la fonction-Exp

peut être écrite sous la forme :

$$u(\zeta) = \frac{\sum_{q=-g}^h a_q e^{q\zeta}}{\sum_{p=-k}^j b_p e^{p\zeta}} \quad (2.24)$$

Nous pouvons évaluer les valeurs de h , j et g , k respectivement en équilibrant l'ordre le plus élevé et l'ordre le plus bas dans la fonction Exp.

2.2.2 Application de la méthode Fonction Exp pour l'équation Burgers-Fisher généralisée temporelle d'ordre fractionnaire

Nous appliquons la transformation suivante pour résoudre l'équation Burgers-Fisher généralisée temporelle d'ordre fractionnaire en utilisant la méthode proposée [48]

En utilisant le changement de variable suivant ,

$$u(x, t) = u(\xi), \xi = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1 + \alpha]} \quad (2.25)$$

maintenant, en substituant (2.25) dans (2.14), on obtient

$$k^2 u'' + (\lambda - k\beta u^\delta) u' + \gamma u(1 - u^\delta) = 0 \quad (2.26)$$

Appliquer la transformation

$$u(\xi) = v^{\frac{1}{\delta}}(\xi) \quad (2.27)$$

on obtient l'équation différentielle ordinaire non-linéaire

$$k^2 \delta v v'' + k^2 (1 - \delta) v'^2 + (\lambda - k\beta v) \delta v v' + \gamma \delta^2 (1 - v) v^2 = 0 \quad (2.28)$$

Selon la méthode de la fonction-Exp, nous supposons que la solution de Eq.(2.28) peut être exprimée sous la forme

$$u(\zeta) = \frac{\sum_{q=-g}^h a_q e^{q\zeta}}{\sum_{p=-k}^j b_p e^{p\zeta}} = \frac{a_{-g} e^{-g\zeta} + \dots + a_h e^{h\zeta}}{b_{-j} e^{-j\zeta} + \dots + b_j e^{j\zeta}} \quad (2.29)$$

Équilibrer l'ordre le plus élevé en Eq.(2.28) pour vv'' et v^2v' , on obtient

$$vv'' = \frac{h_5 e^{(3k+2j)\zeta} + \dots}{h_6 e^{(5j)\zeta} + \dots} \quad (2.30)$$

et

$$v^2v' = \frac{h_9 e^{(3k+j)\zeta} + \dots}{h_{10} e^{(4j)\zeta} + \dots} = \frac{h_9 e^{(3k+2j)\zeta} + \dots}{h_{10} e^{(5j)\zeta} + \dots} \quad (2.31)$$

En équilibrant l'ordre le plus élevé de la fonction-Exp dans Eq.(2.30) et Eq.(2.31), nous obtenons

$$2k + 3j = 3k + 2j, \quad k = j$$

De même, en équilibrant l'ordre le plus bas dans Eq.(2.28) pour vv'' et v^2v' , nous avons

$$vv'' = \frac{a_5 e^{-(2g+3h)\zeta} + \dots}{a_6 e^{(-5h)\zeta} + \dots} \quad (2.32)$$

et

$$v^2v' = \frac{a_9 e^{-(3g+h)\zeta} + \dots}{a_{10} e^{(-4h)\zeta} + \dots} = \frac{a_9 e^{-(3g+2h)\zeta} + \dots}{a_{10} e^{(-5h)\zeta} + \dots} \quad (2.33)$$

En équilibrant l'ordre le plus bas de la fonction-Exp dans Eq.(2.32) et Eq.(2.33), nous obtenons

$$2g + 3h = 3g + 2h, \quad g = h$$

Pour les choix de $k = j = 1$ et $g = h = 1$, Eq.(2.29) devient,

$$v(\zeta) = \frac{a_1 e^{(\zeta)} + a_0 + a_{-1} e^{(-\zeta)}}{b_1 e^{(\zeta)} + b_0 + b_{-1} e^{(-\zeta)}}. \quad (2.34)$$

En remplaçant Eq.(2.34) par Eq.(2.28), nous obtenons les cas suivants avec différents choix paramétriques de a_{-1}, a_0, b_{-1}, b_0 et b_1 .

Cas 1 :

$$a_{-1} = 0, a_0 = 0, b_{-1} = 0, b_1 = 0, \lambda = \frac{-k^2 - \gamma\delta^2}{\delta}, k = \frac{-\gamma\delta}{\beta}$$

Eq.(2.28) devient

$$-\gamma\delta vv'' - \beta^2 v^2(1 + v') + \beta^2 v^3 + (\beta^2 + \gamma)vv' + \gamma(\delta - 1) = 0; \quad (2.35)$$

on obtient

$$v(x, t) = \frac{a_1 e^{\left(\frac{kx\Gamma[1+\alpha]-t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]}\right)}}{b_0} \quad (2.36)$$

alors la solution exacte est

$$u(x, t) = \left[\frac{a_1 e^{\left(\frac{kx\Gamma[1+\alpha]-t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]}\right)}}{b_0} \right]^{\frac{1}{\delta}} \quad (2.37)$$

Cas 2 :

$$a_{-1} = 0, a_0 = 0, b_{-1} = 0, a_1 = b_1, \gamma = \frac{2k^2}{\delta^2}, \lambda = \frac{-4k^2 - \gamma\delta^2}{2\delta}, k = \frac{-\beta\delta}{1 + \delta}$$

Eq.(2.28) devient

$$\delta vv'' + (2 + (1 + \delta)v')v^2 - (\delta - 1)v'^2 - 3vv' - 2v^3 = 0; \quad (2.38)$$

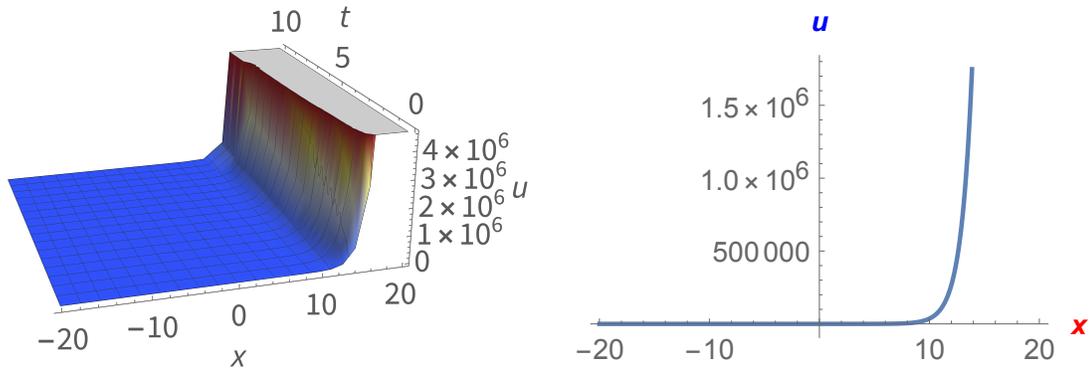


FIGURE 2.2 – Les tracés 2D et 3D montrent les solutions exactes pour les valeurs $\alpha = 0,25$, $\lambda = -3$, $\delta = 2$.

on obtient

$$v(x, t) = \frac{a_1 e^{\left(\frac{kx\Gamma[1+\alpha]-\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]}\right)}}{a_1 e^{\left(\frac{kx\Gamma[1+\alpha]-\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]}\right)} + b_0} \quad (2.39)$$

alors la solution exacte est

$$u(x, t) = \left[\frac{a_1 e^{\left(\frac{kx\Gamma[1+\alpha]-\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]}\right)}}{a_1 e^{\left(\frac{kx\Gamma[1+\alpha]-\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]}\right)} + b_0} \right]^{\frac{1}{\delta}} \quad (2.40)$$

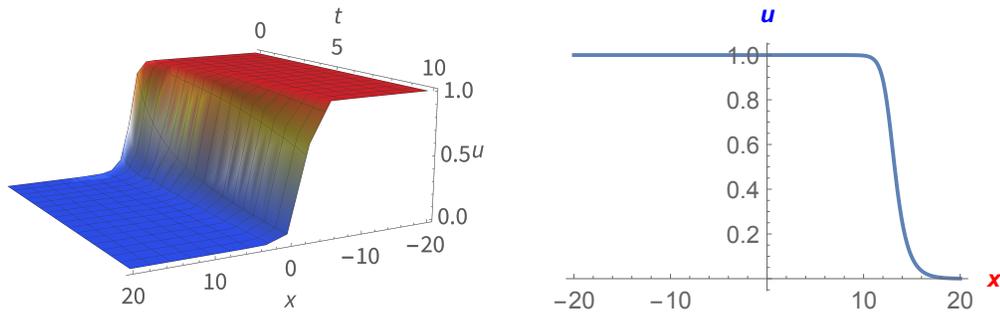


FIGURE 2.3 – Les tracés 2D et 3D montrent les solutions exactes pour les valeurs $\alpha = 0,5$, $\lambda = -3$, $\delta = 2$.

Cas 3 :

$$a_{-1} = 0, a_1 = 0, b_{-1} = 0, b_0 = 0, \lambda = \frac{\beta^2 \gamma \delta + \gamma^2 \delta}{\beta^2}, k = \frac{\gamma \delta}{\beta}$$

Eq.(2.28) devient

$$\gamma^2 \delta^2 v v'' - \gamma^2 \delta (\delta - 1) v'^2 + \beta^2 (\lambda - \gamma \delta v) v v' - \beta^2 \gamma \delta (v - 1) v^2 = 0; \quad (2.41)$$

nous avons

$$v(x, t) = \frac{a_0 e^{-\left(\frac{kx\Gamma[1+\alpha]-\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]}\right)}}{b_1} \quad (2.42)$$

alors la solution exacte est

$$u(x, t) = \left[\frac{a_0 e^{-\left(\frac{kx\Gamma[1+\alpha] - \lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]}\right)}}{b_1} \right]^{\frac{1}{\delta}}. \quad (2.43)$$

Cas 4 :

$$a_{-1} = 0, b_{-1} = 0, b_0 = 0, a_1 = b_1, \delta = 1, \lambda = \frac{\gamma^2 \delta}{\beta^2}, k = \frac{\gamma \delta}{\beta}$$

Eq.(2.28) devient

$$\gamma(v'' + v') - \beta^2(v' - 1)v - \beta^2 v^2 = 0; \quad (2.44)$$

on a

$$v(x, t) = 1 + \frac{a_0 e^{-\left(\frac{kx\Gamma[1+\alpha] - \lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]}\right)}}{a_1} \quad (2.45)$$

alors la solution exacte est

$$u(x, t) = \left[1 + \frac{a_0 e^{-\left(\frac{kx\Gamma[1+\alpha] - \lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]}\right)}}{a_1} \right]^{\frac{1}{\delta}} \quad (2.46)$$

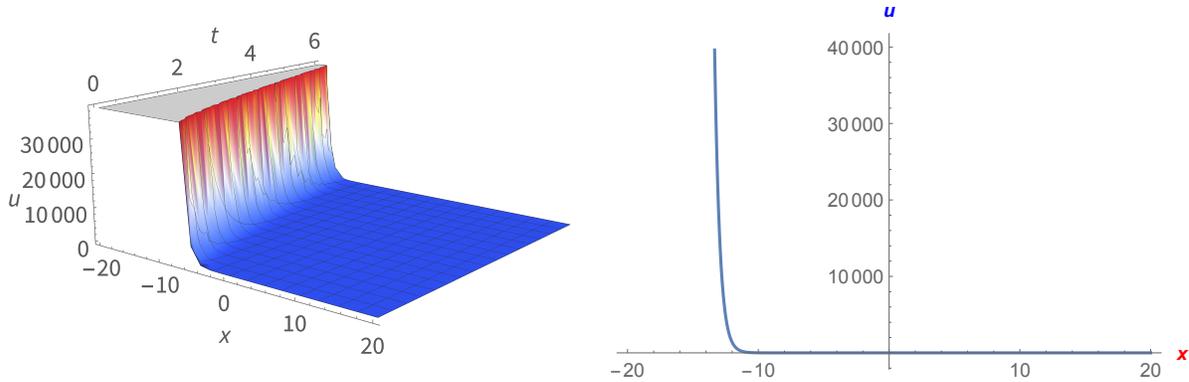


FIGURE 2.4 – Les tracés 2D et 3D montrent les solutions exactes pour les valeurs $\alpha = 0,78, \lambda = -8, \delta = 2$.

Remarque 2.1. Les solutions exactes de l'équation de Burgers-Fisher généralisée temporelle d'ordre fractionnaire ont été générées par la méthode de la fonction-Exp. Les tracés 2D et 3D illustrent les solutions exactes, ces chiffres montrent que quand x et t augmentent, la solution u diminue pour les solutions exactes correspondantes.

2.3 La Méthode d'expansion- (G'/G^2)

Récemment, Li et al. [36] ont présenté une nouvelle méthode pour extension des fonctions pour trouver les solutions des ondes mobiles d'une équation d'évolution non linéaire, appelée la méthode d'expansion $-(w/g)$ où w et g sont deux fonctions qui satisfont $\left(\left(\frac{w}{g}\right)' = a + b\left(\frac{w}{g}\right) + c\left(\frac{w}{g}\right)^2\right)$, où $(w'g - wg' = ag^2 + bwg + cw^2)$, telle que a, b, c sont des constantes arbitraires, si on prend $(w = g', a = -\mu, b = -\lambda,$

ceci n'est autre que la méthode d'expansion $-(G'/G)$ récemment proposée par Wang et al. (2007), les idées principales de la méthode proposée sont telle que les solutions d'ondes mobiles d'une équation d'évolution non linéaire peuvent être écrites sous la forme d'un polynôme qui est fonction de (G'/G) où $G = G(\xi)$ c'est une solution d'une EDO du deuxième ordre, $G' = \frac{dG(\xi)}{d\xi}$, le degré du polynôme peut être déterminé en tenant compte de l'homogénéité de l'équilibre entre les dérivées d'ordre supérieur et les termes non linéaires d'ordre supérieur dans EEN...

Dans cette section, nous appliquons la méthode d'expansion $-(G'/G^2)$, (si $w = G'/G, b = 0$) proposées par [36] pour découvrir une stratégie pour la solution approximative de l'équation Burgers-Fisher généralisée temporelle d'ordre fractionnaire. L'équation Burgers-Fisher TF donnée par substitution sont transformées d'équations différentielles ordinaires non linéaires pour la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville au sens de Jumarie. La solution à ondes mobiles est approximativement par la méthode d'expansion $-(G'/G^2)$ avec des paramètres inconnus qui peuvent être exprimés par des fonctions trigonométriques, fonctions exponentielles, fonctions rationnelles, ou fonctions hyperboliques. Ces résultats révèlent que la méthode proposée est très efficace et simple pour la solution de l'équation aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire non linéaire.

2.3.1 Description de la méthode

Dans cette section, nous donnons les principales étapes de la méthode d'expansion $-(G'/G^2)$ pour la résolution les équations différentielles partielles d'ordre fractionnaire non linéaire comme suit :

Étape 1. Nous considérons l'équation différentielle partielle d'ordre fractionnaire non linéaire suivante

$$P(u_1 \cdots u_k, \frac{\partial u_1}{\partial t} \cdots \frac{\partial u_k}{\partial t}, \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_k}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \cdots \frac{\partial u_k}{\partial x_n}, D_t^\alpha u_1 \cdots D_t^\alpha u_k, D_{x_1}^\beta u_1 \cdots D_{x_1}^\beta u_k, \dots, \quad (2.47)$$

$$D_{x_n}^\beta u_1 \cdots D_{x_n}^\beta u_k, \dots) = 0.$$

$$0 < \alpha < \beta < 1$$

où $u = u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ et P est polynomiale en fonction de u , la solutions d'ondes mobiles de Eq. (2.47) en utilisant la transformation

$$u = u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = U(\zeta), \zeta = \zeta(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.48)$$

Convertit l'équation différentielle partielle Eq. (2.47) en l'équation différentielle ordinaire non linéaire suivante :

$$Q(U_1 \cdots U_k, U'_1 \cdots U'_k, U''_1 \cdots U''_k, \dots) = 0 \quad (2.49)$$

Lorsque Q est un polynôme de $U(\zeta)$ et les déférentes dérivés, le premier désigne la dérivation par rapport à ζ .

Étape 2. Nous supposons que la solution de l'Eq. (2.49) peut être exprimée par un polynôme en (G'/G^2)

) tel que

$$U(\zeta) = a_0 + \sum_{i=1}^m \left[a_i \left(\frac{G'}{G^2} \right)^i + b_i \left(\frac{G'}{G^2} \right)^{-i} \right] \quad (2.50)$$

où a_0, a_i et $b_i (i = 1, 2, 3, \dots, m)$ sont constantes à déterminer, avec a_m ou b_m peut être nuls, ne peuvent pas être simultanément nuls, la valeur de m est un entier positif qui sera déterminé, le paramètre m est habituellement plus élevé en équilibrant les dérivés d'ordre supérieure avec les termes non linéaires Eq.(2.49).

Lorsque $G = G(\zeta)$ satisfait à une équation différentielle ordinaire de second ordre linéaire elle se met sous la forme

$$\left(\frac{G'}{G^2} \right)' = \mu + \lambda \left(\frac{G'}{G^2} \right)^2 \quad (2.51)$$

où $\mu \neq 1$ et $\lambda \neq 0$ sont des nombres entiers.

Substituer l'Eq. (2.50) en utilisant l'Eq. (2.51) à l'Eq. (2.49). Ensuite, en rassemblant tous les termes du même ordre que (G'/G^2) . En mettant chaque coefficient à zéro, on obtient un ensemble d'équations algébriques qui peuvent être résolues pour trouver les valeurs de a_0, a_i, b_i, λ et μ .

Etape 3. Ayant les valeurs a_0, a_i, b_i, λ et μ de (**Etape 2**) et la solution de Eq. (2.49), nous pouvons chercher la solution de l'équation d'évolution non linéaire Eq.(2.47).

Les solutions générales peuvent être catégorisées en trois cas avec A et B sont des constantes arbitraires non nulles .

Si $\lambda\mu > 0$, on obtient alors la solution générale

$$\frac{G'(\zeta)}{G^2(\zeta)} = \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} \left[\frac{A \cos \sqrt{\lambda\mu}\zeta + B \sin \sqrt{\lambda\mu}\zeta}{B \cos \sqrt{\lambda\mu}\zeta - A \sin \sqrt{\lambda\mu}\zeta} \right] \quad (2.52)$$

Si $\lambda\mu < 0$, on obtient alors la solution générale

$$\frac{G'(\zeta)}{G^2(\zeta)} = \frac{1}{2\lambda} \left[\sqrt{2|\lambda\mu|} - \frac{4A \sqrt{|\lambda\mu|} e^{2\zeta \sqrt{|\lambda\mu|}}}{4A \sqrt{|\lambda\mu|} e^{2\zeta \sqrt{|\lambda\mu|}} - B} \right] \quad (2.53)$$

ce qui équivaut à

$$\frac{G'(\zeta)}{G^2(\zeta)} = -\frac{\sqrt{|\lambda\mu|}}{\lambda} \left[\frac{A \cos h(2\sqrt{|\lambda\mu|}\zeta) + A \sin h(2\sqrt{|\lambda\mu|}\zeta) + B}{A \cos h(2\sqrt{|\lambda\mu|}\zeta) + A \sin h(2\sqrt{|\lambda\mu|}\zeta) - B} \right] \quad (2.54)$$

Si $\lambda \neq 0, \mu = 0$, on obtient alors la solution générale

$$\frac{G'(\zeta)}{G^2(\zeta)} = -\frac{A}{\lambda(B + A\zeta)}$$

2.3.2 Application de la méthode d'Expansion $-(G'/G^2)$

Dans cette section, nous utilisons la méthode d'expansion $-(G'/G^2)$ à l'équation Burger-Fisher généralisée temporelle d'ordre fractionnaire [19]. Considérons l'équation fractionnaire de Burger-Fisher

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + pu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \beta u(1 - u) \quad (2.55)$$

où p et β sont des paramètres et $0 < \alpha < 1$.

Nous supposons la transformation fractionnaire

$$u(x, t) = U(\zeta), \zeta = kx + \frac{\sigma t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \quad (2.56)$$

où k et σ sont des constantes arbitraires, celle-ci permet de réduire l'éq. (2.55) en une équation différentielle ordinaire suivante :

$$\sigma U' + pkUU' - k^2 U'' - \beta U + \beta U^2 = 0 \quad (2.57)$$

avec $U' = \frac{dU}{d\zeta}$. En équilibrant le terme non linéaire U^2 avec U'' on aura $m = 2$ et qui ne conduit à aucune solution mais l'équilibrage UU' avec U'' donne $m = 1$,

$$U(\zeta) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G^2} \right) + b_1 \left(\frac{G'}{G^2} \right)^{-1} \quad (2.58)$$

où a_0, a_1 et b_1 sont des constantes arbitraires.

En substituant les équations (2.58) et (2.51) dans l'équation (2.57) et en rassemblant tous les termes de même puissance de (G'/G^2) et en mettant chaque coefficient de (G'/G^2) égal à zéro, ce qui donne un système des équations algébriques et la résolution de ces équations algébriques donne un ensemble de solutions.

Cas 1 :

$$k = 0, \mu = \mu, \lambda = -\frac{\beta^2}{4\sigma^2\mu}, \sigma = \sigma, a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = 0, b_1 = \frac{\sigma\mu}{\beta} \quad (2.59)$$

Cas 2 :

$$k = 0, \mu = \frac{\beta}{16\sigma a_1}, \lambda = -\frac{\beta a_1}{\sigma}, \sigma = \sigma, a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = a_1, b_1 = \frac{1}{16a_1} \quad (2.60)$$

Cas 3 :

$$k = 0, \mu = -\frac{\beta^2}{4\sigma^2\lambda}, \lambda = \lambda, \sigma = \sigma, a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = -\frac{\sigma\lambda}{\beta}, b_1 = 0 \quad (2.61)$$

Cas 4 :

$$k = k; \mu = -\frac{p^2}{16k^2\lambda}, \lambda = \lambda, \sigma = -\frac{k(p^2 + 4\beta)}{2p}, a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{2k\lambda}{p}, b_1 = 0 \quad (2.62)$$

En remplaçant Eq. (2.59) par Eq. (2.54) dans Eq. (2.58) et en simplifiant, nous obtenons ce qui suit.

$$U_1(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{A \cos h\left(\frac{\beta t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right) + A \sinh\left(\frac{\beta t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right) + B}{A \cos h\left(\frac{\beta t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right) + A \sin h\left(\frac{\beta t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right) - B} \right]^{-1} \quad (2.63)$$

En remplaçant Eq. (2.60) par Eq. (2.54) dans Eq. (2.58) et en simplifiant, nous obtenons ce qui suit.

$$U_2(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[\frac{A \cos h\left(\frac{\beta t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right) + A \sinh\left(\frac{\beta t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right) + B}{A \cos h\left(\frac{\beta t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right) + A \sin h\left(\frac{\beta t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right) - B} \right] \\ + \frac{1}{4} \left[\frac{A \cos h\left(\frac{\beta t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right) + A \sin h\left(\frac{\beta t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right) + B}{A \cos h\left(\frac{\beta t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right) + A \sin h\left(\frac{\beta t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}\right) - B} \right]^{-1} \quad (2.64)$$

En remplaçant Eq. (2.61) par (2.54) dans Eq. (2.58) et en simplifiant, nous obtenons ce qui suit.

$$U_3(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{A \cos h\left(\frac{\beta t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right) + A \sinh\left(\frac{\beta t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right) + B}{A \cos h\left(\frac{\beta t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right) + A \sin h\left(\frac{\beta t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right) - B} \right] \quad (2.65)$$

En remplaçant Eq. (2.62) par Eq. (2.54) dans Eq. (2.58) et en simplifiant, nous obtenons ce qui suit.

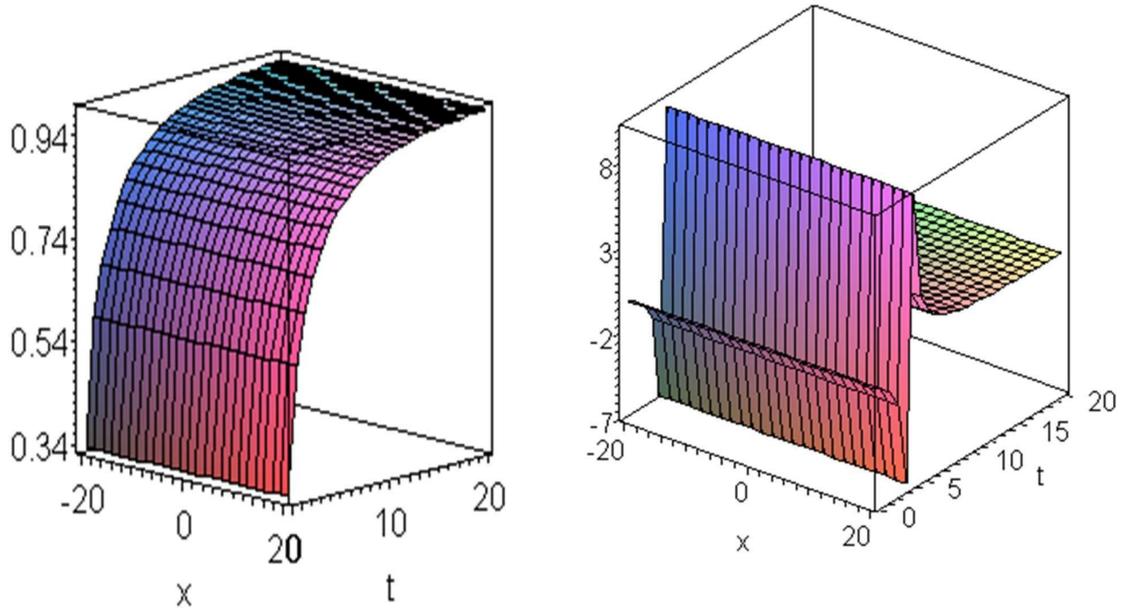
$$U_4(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{A \cos h\left(\frac{px}{2} - \frac{(p^2+4\beta)t^\alpha}{4\Gamma(1+\alpha)}\right) + A \sin h\left(\frac{px}{2} - \frac{(p^2+4\beta)t^\alpha}{4\Gamma(1+\alpha)}\right) + B}{A \cos h\left(\frac{px}{2} - \frac{(p^2+4\beta)t^\alpha}{4\Gamma(1+\alpha)}\right) + A \sin h\left(\frac{px}{2} - \frac{(p^2+4\beta)t^\alpha}{4\Gamma(1+\alpha)}\right) - B} \right] \quad (2.66)$$

Représentation graphique des solutions de l'équation Burger-Fisher généralisée temporelle d'ordre fractionnaire

Remarque 2.2. On conclut que la méthode d'expansion- (G'/G^2) est concise, directe, très efficace et puissante pour la résolution des équations non linéaires de physique mathématique.

2.3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposés quelques méthodes pour construire différents types de solutions exactes d'ondes progressives d'une équation Burguer-Fisher d'ordre fractionnaire. L'efficacité des méthodes (la méthode de décomposition d'Adomian (ADM), la méthode de la fonction-Exp et la méthode d'expansion $-(G'/G^2)$) peut être démontrée sur une grande variété d'équations différentielles non-linéaires d'ordre fractionnaire pour obtenir de nombreux types de solutions exactes d'ondes progressives. Ces solutions peuvent être utiles pour décrire certains phénomènes non linéaires. La procédure de calcul de ces méthodes et d'autres montrent qu'un programme informatique tel que Mathematica ou Maple joue un rôle important dans la résolution précise des équations différentielles



(a) $\beta = 1, A = 3, B = 6, \alpha = 0,5$

(b) $\beta = 0,5, A = 3, B = 6, \alpha = 0,5$

FIGURE 2.5 – La solution exacte $U_1(x, t), U_2(x, t)$ pour $0 \leq t \leq 20, -20 \leq x \leq 20$

non-linéaires d'ordre fractionnaire.

CHAPITRE 3

MÉTHODE DE SOUS-ÉQUATION DE FAN

3.1 Introduction

La méthode tanh fournit un algorithme simple et efficace pour obtenir des solutions particulières pour larges variétés d'équations non linéaires. La réussite de la méthode consiste dans le fait qu'on contourne l'intégration pour obtenir des solutions explicites basé sur le fait que les solutions de soliton sont essentiellement localisées. L'écriture des solutions de soliton d'une équation non linéaire comme les polynômes des fonctions hyperboliques, l'équation peut changer en un système non linéaire d'équations algébriques. Dans ce chapitre, nous présentons une extension effective à la méthode tanh et développer une nouvelle méthode algébrique proposée par Fan et Hon [17] appartenant à la sous-équation de Fan rechercher des nouvelles solutions pour des équations différentielles non-linéaires d'ordre fractionnaire qui peut être exprimé en polynôme dans une fonction élémentaire qui satisfait un plus général sous-équation, appelée sous-équation de Fan [61], que d'autres sous-équations comme équation de Riccati, équation ordinaire auxiliaire, équation elliptique et équation de Riccati généralisée, il est donc très important de trouver des nouvelles solutions à la sous-équation. Heureusement, la sous-équation de Fan peut construire des solutions exactes plus générales à la sous-équation qui peut capturer toutes les solutions des équations susmentionnées.

La méthode sous-équation de Fan trouve des nouvelles solutions d'onde progressive d'équations différentielles non-linéaires d'ordre fractionnaire et les solutions obtenues comprennent des solutions polynomiales, solutions exponentielles, solutions rationnelles, solutions triangulaires à ondes périodiques, hyperboliques et solitons Jacobi et Weierstrass doublement des solutions d'ondes périodiques. Les idées principales de la méthode proposée ont supposé que les solutions d'ondes progressives d'une équation différentielle non-linéaire d'ordre fractionnaire peuvent être exprimées par un polynôme de $\Psi(\xi)$, où $\Psi(\xi)$ satisfait une équation différentielle ordinaire (voir 3.5) dans la section (3.2)), le degré du polynôme peut être déterminé en considérant l'équilibre homogène entre les dérivées d'ordre supérieur

et les termes non linéaires d'ordre supérieur apparaissant dans une équation différentielle non-linéaires d'ordre fractionnaire donnée et les coefficients du polynôme issus du processus d'utilisation de la méthode proposée. La méthode sous-équation de Fan est présentée et appliquée pour trouver des solutions d'onde progressive des équations différentielles non-linéaires d'ordre fractionnaire. Ces équations différentielles non-linéaires comprennent l'équation de (1+1)-dimensionnelle dispersion non linéaire modifiée Benjamin-Bona-Mahony équation avec évolution fractionnaire, L'équation SF–NLSE avec quadratique-cubique non-linéaire, l'équation généralisée de Zakharov.

3.2 Description de la méthode

Considérons une équation différentielle non-linéaire d'ordre fractionnaire générale de deux variables indépendantes x et t qui est donnée par

$$P(u, D_t^\alpha u, u_x, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (3.1)$$

Où $u(x, t)$ est une fonction inconnue, P est un polynôme de $u(x, t)$ et de ses dérivées partielles où l'ordre le plus élevé des dérivées et des termes non linéaires est impliqué. De plus, $D^\alpha(\cdot)$ est la dérivée fractionnaire modifiée de Riemann Liouville. Cette méthode s'effectue par les étapes suivantes :

Étape 1. En combinant les variables indépendantes x et t en une seule variable ξ , nous supposons la transformation de l'onde progressive [37]

$$u(x, t) = u(\xi), \xi = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1 + \alpha]} \quad (3.2)$$

où k et λ sont des constantes arbitraires, elle nous permet de réduire l'éq. (3.1) en une équation différentielle ordinaire suivante :

$$N(u, u', u'', u''', \dots) = 0 \quad (3.3)$$

N est un polynôme de $u(\xi)$ et ses dérivées, avec $u'(\xi) = \frac{du}{d\xi}$, $u''(\xi) = \frac{d^2u}{d\xi^2}$, etc...

Étape 2 . Supposons que la solution de (3.3) soit décrite comme suit

$$u(\xi) = \frac{A_{-n}}{\Psi(\xi)^n} + \dots + \frac{A_{-1}}{\Psi(\xi)} + A_0 + A_1\Psi(\xi) + \dots + A_n\Psi(\xi)^n; A_n \neq 0 \quad (3.4)$$

Ici $A_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ sont des constantes à déterminer ultérieurement. De plus, $\Psi = \Psi(\xi)$ satisfait l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\Psi'(\xi) = \epsilon \sqrt{\sum_{i=0}^4 w_i \Psi^i}, \quad (3.5)$$

où $\epsilon = \pm 1$ et w_i sont des constantes. Ainsi, les dérivées par rapport à ξ peuvent être calculées par rapport à la variable Ψ comme suit

$$\frac{du}{d\xi} = \epsilon \sqrt{\sum_{i=0}^4 w_i \Psi^i} \frac{du}{d\Psi}, \quad (3.6)$$

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^4 i w_i \Psi^{i-1} \frac{du}{d\Psi} + \sum_{i=0}^4 w_i \Psi^i \frac{d^2u}{d\Psi^2}, \dots \quad (3.7)$$

Les solutions de l'équation (3.5) sont :

$$\Psi = \varrho\left(\frac{\sqrt{w_3}}{2}\xi, g_2, g_3\right), \quad w_2 = w_4 = 0, \quad w_3 > 0, \quad (3.8)$$

$$g_2 = \frac{-4w_1}{w_3} \quad \text{et} \quad g_3 = \frac{-4w_0}{w_3}$$

$$\Psi = -\frac{w_1}{2w_2} + \frac{\epsilon w_1}{2w_2} \sinh(2\sqrt{w_2}\xi); \quad w_0 = w_3 = w_4 = 0, \quad w_2 > 0 \quad (3.9)$$

$$\Psi = -\frac{w_1}{2w_2} + \frac{\epsilon w_1}{2w_2} \sin(\sqrt{-w_2}\xi); \quad w_0 = w_3 = w_4 = 0, \quad w_2 < 0 \quad (3.10)$$

$$\Psi = -\frac{w_2}{w_3} \sec^2\left(\frac{\sqrt{w_2}}{2}\xi\right); \quad w_0 = w_1 = w_4 = 0, \quad w_2 > 0 \quad (3.11)$$

$$\Psi = -\frac{w_2}{w_3} \sec^2\left(\frac{\sqrt{-w_2}}{2}\xi\right); \quad w_0 = w_1 = w_4 = 0, \quad w_2 < 0 \quad (3.12)$$

$$\Psi = \frac{1}{w_3 \xi^2}; \quad w_0 = w_1 = w_2 = w_4 = 0 \quad (3.13)$$

$$\Psi = -\frac{w_1}{2w_2} + \exp(\epsilon \sqrt{w_2}\xi); \quad w_3 = w_4 = 0, \quad w_0 = \frac{w_1^2}{4w_2}, \quad w_2 > 0 \quad (3.14)$$

$$\Psi = -\frac{w_0}{w_1} + \frac{1}{4} w_1 \xi^2; \quad w_2 = w_3 = w_4 = 0, \quad w_1 \neq 0 \quad (3.15)$$

Etape 3. Nous déterminons l'entier positif n apparu dans (3.4) en équilibrant les dérivées d'ordre supérieur et les termes non linéaires d'ordre supérieur dans l'éq.(3.3) Plus précisément, nous définissons le degré de $u(\xi)$ comme $D(u(\xi)) = n$, ce qui donne lieu à un degré d'expressions différentes comme suit :

Principe d'équilibre :

$$\begin{cases} n + N - 2 = qN + p(n + s), & N \text{ impair} \\ N + n = qn + p(n + s), & N \text{ pair} \end{cases}$$

$$D\left(\frac{d^N u}{dx^N}\right) = N + n,$$

$$D(u^q \left(\frac{d^s u}{dx^s}\right)^p) = qn + p(n + s).$$

Étape 4. Quand n est déterminé, on remplace (3.5)-(3.7) dans l'équation (3.3), et on collecte tous les termes ayant les mêmes pouvoirs d'ensemble, le côté gauche de l'équation (4.5) est converti en polynôme. Dans ce polynôme, nous rassemblons tous les termes de même puissance et les mettons à zéro, ce qui donne un système d'équations algébriques impliquant les paramètres $A_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$. Après avoir déterminé ces paramètres, ensuite on substitue les résultats et les solutions générales de (3.8)-(3.15) dans l'équation (3.5), ce qui donne des solutions de l'équation (3.4) et nous obtenons les solutions exactes de (3.1). Pour montrer l'efficacité de la méthode décrite dans la partie précédente, nous présentons quelques exemples.

3.3 Application de la méthode

3.3.1 L'équation SF–NLSE avec quadratique-cubique non linéaire

Dans cette section, notre but est de trouver les différents types des solutions d'ondes optiques pour l'équation Schrodinger non linéaire d'ordre fractionnaire spatiale et temporelle (SF–NLSE) par la méthode de la sous-équation de Fan (E-FAN). Les dérivés classiques sont de nature locale, i.e en utilisant des dérivés classiques, nous pouvons décrire des changements dans un voisinage d'un point mais l'utilisation des dérivés fractionnaire peut décrire des changements dans un intervalle. Explicitement, la dérivé fractionnaire est de nature non locale. Cette propriété rend ces dérivés compatible pour en simulation un assez grand nombre de phénomènes physique tels que les vibrations sismiques, théorie de solitons etc Donc, il est impératif d'étudier les solitons avec des dérivés d'ordre fractionnaire. L'équation SF–NLSE avec quadratique-cubique non linéaire est de la forme

$$i\{\delta\phi_x - i\gamma\phi_{xxx} - i\sigma\phi_{xxxx} + \lambda(|\phi|^2\phi)_x + \theta(|\phi|^2)_x\phi\} = iD_t^\alpha\phi + a\phi_{xx} + (b_1|\phi| + b_2|\phi|^2)\phi, \quad (3.16)$$

tel que D_t^α représente l'opérateur fractionnaire temporelle d'ordre $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, les variables spatiales et temporelles x, t respectivement. La fonction $\phi(x, t)$ nous donne du profil ondulé. Les coefficients $a, b_1, b_2, \delta, \gamma, \sigma, \lambda$, et θ sont toutes des constantes réelles.

Nous utilisons la transformation

$$\phi(x, t) = \Omega(\xi)e^{i\psi(x,t)}, \quad (3.17)$$

où $\Omega(\xi)$ n'est autre que la forme de l'impulsion

$$\xi = x - \frac{\nu}{\alpha}t^\alpha, \quad (3.18)$$

et le composant de l'impulsion est

$$\psi(x, t) = -kx + \frac{\nu}{\omega}t^\alpha + \theta, \quad (3.19)$$

où k est la fréquence du soliton, ω est le numéro d'onde du soliton et θ est le constante de phase. En utilisant (3.17)-(3.19) dans (3.16) et en comparant les parties réelles et imaginaires

$$\sigma\Omega^{iv} - \rho_2\Omega'' + \rho_1\Omega - (b_1\Omega + (b_2 - \lambda k)\Omega^2)\Omega = 0 \quad (3.20)$$

$$(\nu + 2ak + \delta + 3\gamma k^2 + 4\sigma k^3)\Omega' - (\gamma + 4\sigma k)\Omega'' + (3\lambda + 2\theta)\Omega^2\Omega' = 0, \quad (3.21)$$

où

$$\rho_1 = \omega + \delta k + ak^2 + \gamma k^3 + \sigma k^4, \quad (3.22)$$

$$\rho_2 = a + 3\gamma k + 6\sigma k^3. \quad (3.23)$$

Les fonctions linéairement indépendantes dans l'eq (3.21),

$$\nu = -2ak - \sigma - 3\gamma k^2 - 4\sigma k^4, \quad \gamma + 4\sigma k = 0, \quad 3\lambda + 2\theta = 0. \quad (3.24)$$

Ainsi, Eq. (3.24) donne la vitesse du soliton en présence de termes de la perturbation et les contraintes sur les paramètres de perturbation.

La méthode de la sous-équation de Fan suggère la solution sous la forme [62]

$$u = u(\xi) = \sum_{j=0}^n a_j \phi^j(\xi), \quad (3.25)$$

De plus, $\phi = \phi(\xi)$ satisfait l'équation elliptique générale suivante

$$(\phi'(\xi))^2 = \xi_0 + \xi_1\phi(\xi) + \xi_2\phi^2(\xi) + \xi_3\phi^3(\xi) + \xi_4\phi^4(\xi), \quad (3.26)$$

où $\xi_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ sont des constantes réelles.

En appliquant l'équilibre homogène à (3.20), nous avons $n = 2$, et la solution sera sous la forme

$$\Omega = a_0 + a_1\phi(\xi) + a_2\phi^2(\xi), \quad (3.27)$$

En substituant les équations (3.26) et (3.27) à l'équation (3.20), nous rassemblons tous les termes de même puissance $\phi^j\phi^k$ et les mettons à zéro, ce qui donne un système d'équations algébriques impliquant les paramètres a_0, a_1, a_2 .

Nous sélectionnons les variables de façon appropriée, afin d'avoir le plus de $\xi_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)$. [52], qui donne

$$a_0 = \frac{4\sqrt{30}\sqrt{a_2^4\rho_2^2(-\sigma)(k\lambda - b_2)^3 - 5a_2\sigma(k\lambda - b_2)(3a_1^2(b_2 - k\lambda) + 2a_2b_1)}}{60a_2^2\sigma(b_2 - k\lambda)^2},$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{30}\xi_3\sqrt{-\frac{\xi_4^4\rho_2^2\sigma^3(k\lambda - b_2)^3}{(b_2 - k\lambda)^2}}}{\xi_4^2\rho_2\sigma(b_2 - k\lambda)},$$

$$a_2 = \frac{2\sqrt{30}\xi_4\sqrt{\sigma}}{\sqrt{b_2 - k\lambda}}$$

Nous avons les solutions de solitons suivantes

Cas I :

Si $\xi_0 = \vartheta_3^2$, $\xi_1 = 2\vartheta_1\vartheta_3$, $\xi_2 = 2\vartheta_2\vartheta_3$, $\xi_3 = 2\vartheta_1\vartheta_2$, $\xi_4 = \vartheta_2^2$ il peut exister les paramètres ϑ_1, ϑ_2 qui satisfont ϑ_3 , les solutions de (3.16) sont ϕ_η^I , ($\eta = 1, 2, \dots, 24$).

Certains des solitons importants sont énumérés ci-dessous.

Type 1 : mais quand $\vartheta_1^2 - 4\vartheta_2\vartheta_3 > 0$, $\vartheta_1\vartheta_2 \neq 0$, $\vartheta_2\vartheta_3 \neq 0$. La famille de solitons optiques sombres est obtenu comme

$$\phi_1^I(x, t) = \left[a_0 + a_1 \left(-\frac{\sqrt{\vartheta_1^2 - 4\vartheta_2\vartheta_3} \tanh\left(\frac{1}{2}\xi \sqrt{\vartheta_1^2 - 4\vartheta_2\vartheta_3}\right) + \vartheta_1}{2\vartheta_2} \right) \right] e^{i\varPsi} \quad (3.28)$$

$$+ a_2 \left(-\frac{\sqrt{\vartheta_1^2 - 4\vartheta_2\vartheta_3} \tanh\left(\frac{1}{2}\xi \sqrt{\vartheta_1^2 - 4\vartheta_2\vartheta_3}\right) + \vartheta_1}{2\vartheta_2} \right)^2 e^{i\varPsi}.$$

Type 2 : mais quand $\vartheta_1^2 - 4\vartheta_2\vartheta_3 < 0$, $\vartheta_1\vartheta_2 \neq 0$, $\vartheta_2\vartheta_3 \neq 0$. Les familles suivantes de solitons périodiques obtenus :

$$\phi_{13}^I(x, t) = \left[a_0 + a_1 \left(-\frac{\sqrt{4\vartheta_2\vartheta_3 - \vartheta_1^2} \tan\left(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4\vartheta_2\vartheta_3 - \vartheta_1^2}\right) - \vartheta_1}{2\vartheta_2} \right) \right] e^{i\varPsi} \quad (3.29)$$

$$+ a_2 \left(-\frac{\sqrt{4\vartheta_2\vartheta_3 - \vartheta_1^2} \tan\left(\frac{1}{2}\xi \sqrt{4\vartheta_2\vartheta_3 - \vartheta_1^2}\right) - \vartheta_1}{2\vartheta_2} \right)^2 e^{i\varPsi}.$$

Cas II : Si $\xi_0 = \vartheta_3^2$, $\xi_1 = 2\vartheta_1\vartheta_3$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 2\vartheta_1\vartheta_2$, $\xi_4 = \vartheta_2^2$ est l'un des ϕ_η^{II} , ($\eta = 1, 2, \dots, 12$). On obtient une famille de solitons optiques sombres :

$$\phi_1^{II}(x, t) = \left[a_0 + a_1 \left(-\frac{\sqrt{-6\vartheta_2\vartheta_3} \tanh\left(\frac{1}{2}\xi \sqrt{-6\vartheta_2\vartheta_3}\right) + \sqrt{-6\vartheta_2\vartheta_3}}{2\vartheta_2} \right) \right] e^{i\varPsi} \quad (3.30)$$

$$+ a_2 \left(-\frac{\sqrt{-6\vartheta_2\vartheta_3} \tanh\left(\frac{1}{2}\xi \sqrt{-6\vartheta_2\vartheta_3}\right) + \sqrt{-6\vartheta_2\vartheta_3}}{2\vartheta_2} \right)^2 e^{i\varPsi}.$$

Cas III : Si $\xi_0 = \xi_1 = 0$, nous avons la solution suivante de (3.16) de la forme ϕ_η^{III} , ($\eta = 1, 2, \dots, 10$).

Cas IV : Si $\xi_1 = \xi_3 = 0$, nous avons la solution suivante de (3.16) de la forme ϕ_η^{IV} , ($\eta = 1, 2, \dots, 16$).

Pour $\xi_0 = \frac{1}{4}$, $\xi_2 = \frac{1-2m^2}{2}$, $\xi_4 = \frac{1}{4}$,

$$\phi_3^{IV}(\xi) = \left[a_0 + a_1 \operatorname{cn}(\xi) + a_2 \operatorname{cn}(\xi)^2 \right] e^{i\Psi}, \quad (3.31)$$

qui donne le soliton optique lumineux vive pour $m \rightarrow 1$,

$$\phi_3^{IV}(\xi) = \left[a_0 + a_1 \operatorname{sech}(\xi) + a_2 (\operatorname{sech}(\xi))^2 \right] e^{i\Psi}, \quad (3.32)$$

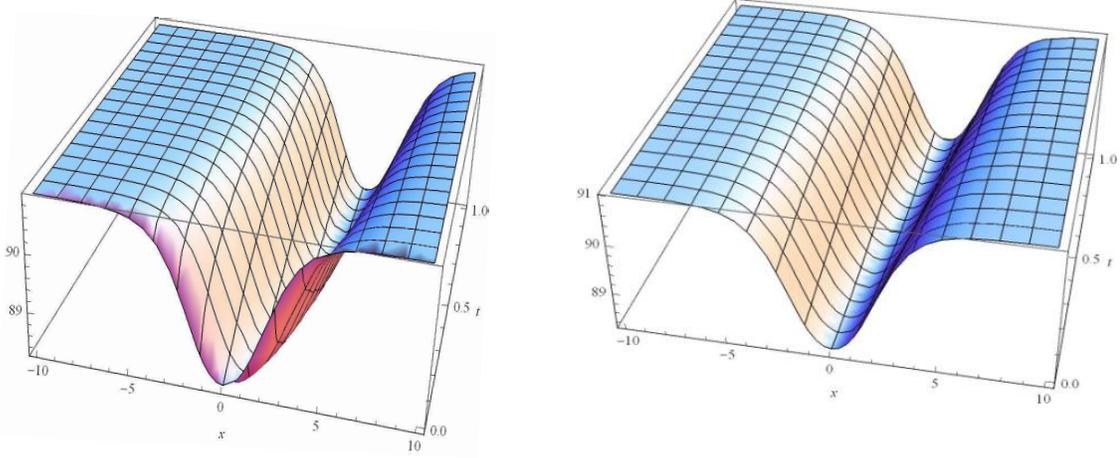
et les solutions singulières périodiques pour $m \rightarrow 0$,

$$\phi_3^{IV}(\xi) = \left[a_0 + a_1 \cos(\xi) + a_2 (\cos(\xi))^2 \right] e^{i\Psi}, \quad (3.33)$$

Conclusion :

Dans cette étude, nous avons construit de nouvelles familles différentes de solitons et de solitons optique combiné avec l'aide de cinq paramètres. Les familles des solitons simple sous la forme lumineux, solitons sombres et quelques solutions périodiques, alors les familles de solitons optiques combinés sont sous la forme des solitons brillant-sombre et solitons sombre-singulier.

La visualisation et le comportement dynamique des solitons ont été démontrés dans la figure 1, avec l'aide de Mathematica, avec les différentes valeurs des paramètres.



(a) $b_1 = 5, b_2 = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, \alpha = 0.5, \gamma = 5, k = 4, \sigma = 4, \delta = 2, \theta = 3, \lambda = -2, \omega = 3, \nu = 2$ (b) $b_1 = 5, b_2 = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, \alpha = 1, \gamma = 5, k = 4, \sigma = 4, \delta = 2, \theta = 3, \lambda = -2, \omega = 3, \nu = 2$

FIGURE 3.1 – La solution de la famille des ténèbres solitons optiques $\phi_1'(x, t)$

3.3.2 L'équation dispersive non linéaire (1+1) dimensionnelle modifiée Benjamin-Bona-Mahony

L'équation proposée qui peut être écrite [6], comme

$$\frac{d^\beta u}{dt^\beta} + u_x - \alpha u^2 u_{xx} + u_{xxx} = 0, 0 \leq \beta < 1 \quad (3.34)$$

où α représente le coefficient de non linéarité et β est un paramètre décrivant l'ordre du dérivé fractionnaire temporel. La méthode de la sous-équation du Fan est utilisée pour construire les solutions exactes des solitons de l'Eq. (3.34). L'idée principale derrière la méthode est d'utiliser quelques relations de base entre les équations d'évolution compliquées et quelques équations différentielles ordinaires non linéaires, simples et solubles. Les solitons simples et mixtes sont obtenus.

Selon la méthode sous-équation de Fan Yomba [62], la solution d'onde peut être exprimée, par

$$u = u(\zeta) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \Psi^i(\zeta) \quad (3.35)$$

où α_i sont des constantes à déterminer ultérieurement et $\Psi(\zeta)$ satisfait l'équation elliptique générale donnée, par

$$\left(\Psi'(\zeta)\right)^2 = \sum_{i=0}^4 h_i \Psi^i(\zeta) \quad (3.36)$$

En particulier, si $h_0, h_1, h_2, h_3, h_4 \neq 0$, les trois paramètres r, p et q existent, tels que

$$\left(\frac{d\Psi}{d\zeta}\right)^2 = h_0 + h_1\Psi + h_2\Psi^2 + h_3\Psi^3 + h_4\Psi^4 = (r + p\Psi + q\Psi^2)^2 \quad (3.37)$$

Application de la transformation complexe fractionnaire définie [38], comme

$$u(x, t) = u(\zeta), \zeta = kx - \frac{ct^\alpha}{\Gamma[1 + \beta]} \quad (3.38)$$

Eq. (3.34) pour convertir en ODE non linéaire

$$U'(k - c) - \alpha U^2 U' + k^3 U''' = 0. \quad (3.39)$$

Intégration de Eq (3.39), on obtient

$$3(k - c)U - k\alpha U^3 + 3k^3 U'' + d = 0 \quad (3.40)$$

où d est une constante d'intégration. Équilibrer l'ordre de U'' et U^3 dans (3.40), on peut trouver la valeur de $n = 1$, donc la solution prend la forme,

$$U(\zeta) = \alpha_0 + \alpha_1 \Psi(\zeta), \quad (3.41)$$

où α_0, α_1 sont des constantes à déterminer et Ψ satisfait à l'équation (3.36). En substituant les équations (3.41) et (3.36) à l'équation (3.40), nous rassemblons tous les termes de même puissance et les mettons à zéro, ce qui donne un système d'équations algébriques impliquant les paramètres $\alpha_i (i = 0, 1)$

$$\begin{aligned} \text{constante : } & 3(k - c)\alpha_0 - k\alpha\alpha_0^3 + \frac{3}{2}k^3\alpha_1 h_1 + d = 0, \\ \Psi : & 3(k - c)\alpha_1 - 3k\alpha\alpha_0^2\alpha_1 + 3k^3\alpha_1 h_2 = 0, \\ \Psi^2 : & -3k\alpha\alpha_0\alpha_1^2 + \frac{9}{2}k^3\alpha_1 h_3 = 0, \\ \Psi^3 : & -k\alpha\alpha_1^3 + 6k^3\alpha_1 h_4 = 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Les variables peuvent être choisies de manière appropriée afin d'avoir le maximum de $h_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ arbitraire. Pour cela α_0, α_1, c et d sont considérés comme des variables. Après la résolution du système

(3.42) les valeurs de α_0, α_1, c et d est :

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \pm \frac{kh_3}{4} \sqrt{\frac{6}{h_4\alpha}}, \\ \alpha_1 &= \pm k \sqrt{\frac{6h_4}{\alpha}}, \\ d &= \pm \frac{3k^4}{16h_4} \sqrt{\frac{6}{h_4\alpha}} (8h_1h_4^2 - 4h_2h_3h_4 + h_3^3), \\ c &= \frac{k}{8h_4} (8k^2h_2h_4 - 3k^2h_3^2 + 8h_4).\end{aligned}\tag{3.43}$$

Les solutions pour d'ondes progressives de Eq (3.34) peuvent être obtenues, comme (voir les détails dans l'article [6])

$$u(x, t) = U(\zeta) = \alpha_0 + \alpha_1 \Psi(\zeta)\tag{3.44}$$

Pour les valeurs spéciales de h_i , il existe différents types de solutions Yomba [61], comme

Cas I :

Si

$$h_0 = r^2, h_1 = 2rp, h_2 = 2rq + p^2, h_3 = 2pq, h_4 = q^2,$$

alors Ψ est l'un des vingt-quatre $\Psi_l^I (l = 1, 2, 3, \dots, 24)$. Dans ce cas, deux autres types de solutions peuvent être obtenues.

Type 1 :

Si $p^2 - 4rq > 0$ et $pq \neq 0, (qr \neq 0)$,

$$U_1(\zeta) = \mp \sqrt{\frac{3}{2\alpha}} k \sqrt{p^2 - 4qr} \left(\tanh \left(\frac{\sqrt{p^2 - 4qr}}{2} \zeta \right) \right),\tag{3.45}$$

$$U_2(\zeta) = \mp \sqrt{\frac{3}{2\alpha}} k \sqrt{p^2 - 4qr} \left(\coth \left(\frac{\sqrt{p^2 - 4qr}}{2} \zeta \right) \right),\tag{3.46}$$

$$U_3(\zeta) = \mp \sqrt{\frac{3}{2\alpha}} k \sqrt{p^2 - 4qr} \left\{ \tanh \left(\sqrt{p^2 - 4qr} \zeta \right) \pm i \operatorname{sech} \left(\sqrt{p^2 - 4qr} \zeta \right) \right\},\tag{3.47}$$

Type 2 :

Lorsque $p^2 - 4rq < 0$ et $pq \neq 0, (qr \neq 0)$,

$$U_4(\zeta) = \pm \sqrt{\frac{3}{2\alpha}} k \sqrt{4qr - p^2} \left(\tan \left(\frac{\sqrt{4qr - p^2}}{2} \zeta \right) \right),\tag{3.48}$$

$$U_5(\zeta) = \pm \sqrt{\frac{3}{2\alpha}} k \sqrt{4qr - p^2} \left\{ \tan \left(\sqrt{4qr - p^2} \zeta \right) \pm \sec \left(\sqrt{4qr - p^2} \zeta \right) \right\},\tag{3.49}$$

$$U_6(\zeta) = \pm \sqrt{\frac{3}{2\alpha}} k \left\{ \frac{\sqrt{(A^2 - B^2)(4qr - p^2)} - A \sqrt{4qr - p^2} \cos(\sqrt{4qr - p^2} \zeta)}{A \sin(\sqrt{4qr - p^2} \zeta) + B} \right\}. \quad (3.50)$$

Cas II :

Si

$$h_0 = r^2, h_1 = 2rp, h_2 = 0, h_3 = 2pq, h_4 = q^2,$$

$$U_7(\zeta) = \mp k \sqrt{\frac{3}{2\alpha}} \left(\sqrt{-6qr} \coth\left(\frac{\sqrt{-6qr}}{2} \zeta\right) \right), \quad (3.51)$$

$$U_8(\zeta) = \mp k \sqrt{\frac{3}{2\alpha}} \left\{ \sqrt{-6qr} \left(\tanh(\sqrt{-6qr} \zeta) \pm i \operatorname{sech}(\sqrt{-6qr} \zeta) \right) \right\}. \quad (3.52)$$

3.3.3 L'équation généralisée de Zakharov

Nous appliquons la méthode de sous-équation de Fan pour résoudre l'équation de Zakharov généralisée [32] La forme de l'équation généralisée de Zakharov est

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} - 2\alpha |u|^2 u + 2uv = 0, \\ v_{tt} - v_{xx} + (|u|^2)_{xx} = 0. \end{cases} \quad (3.53)$$

Ici le coefficient α est une constante réelle arbitraire. L'auto-interaction non linéaire dans le sous-système à haute fréquence, tel qu'un terme correspondant à un effet d'auto-focalisation dans le plasma la physique peut être décrite via le troisième terme de la première équation de (3.53).

Pour obtenir des solutions exactes de (3.53), nous utilisons la transformation

$$u(x, t) = \rho(x, t) e^{i(kx + \lambda t)}, \quad (3.54)$$

où k, λ sont des constantes qui doivent être déterminées ultérieurement. En utilisant l'expression (3.54) dans l'équation (3.53), nous obtenons

$$i(\rho_t + 2k\rho_x) + \rho_{xx} - (\lambda + k^2)\rho - 2\alpha\rho^3 + 2\rho v = 0 \quad (3.55)$$

$$v_{tt} - v_{xx} + \rho_{xx}^2 = 0. \quad (3.56)$$

nous supposons la transformation de l'onde progressive

$$\rho = \rho(\xi), \quad v = v(\xi), \quad \xi = \omega(x - 2kt),$$

où ω est une constante qui doit être déterminée ultérieurement. Elle nous permet de réduire (3.55) et (3.56) en une équation différentielle ordinaire (EDOs)

$$\omega^2 \rho'' - (\lambda + k^2)\rho - 2\alpha\rho^3 + 2\rho v = 0 \quad (3.57)$$

$$(4k^2 - 1)v'' + (\rho^2)'' = 0, \quad (3.58)$$

en intégrant l'éq. (3.58) par rapport à ξ on obtient

$$v = \frac{\rho^2}{1 - 4k^2}. \quad (3.59)$$

En substituant l'équation (3.59) à (3.57) on trouve

$$\omega^2 \rho'' - (\lambda + k^2)\rho - 2\alpha\rho^3 + \frac{2}{1 - 4k^2}\rho^3 = 0. \quad (3.60)$$

En équilibrant ρ'' et ρ^3 , on obtient $n = 1$. la méthode de la sous-équation de Fan admet la solution suivante

$$\rho(\xi) = \frac{A_{-1}}{\Psi(\xi)} + A_0 + A_1\Psi(\xi), \quad (3.61)$$

où A_{-1}, A_0, A_1 sont des constantes à déterminer et Ψ satisfait l'équation (3.5).

En substituant les équations (3.61) et (3.5) à l'équation (3.60), nous rassemblons tous les termes de même puissance Ψ^i et les mettons à zéro, ce qui donne un système d'équations algébriques.

En résolvant le système ci-dessus, et en utilisant Mathematica [50] nous obtenons les résultats suivants (voir les détails dans l'article [32])

•

$$A_0 = 0, A_1 = \frac{\omega \sqrt{\omega_4 \beta}}{\sqrt{1 + \alpha\beta}}, A_{-1} = \frac{[(\lambda + k^2) - \omega^2 \omega_2] \sqrt{\beta}}{6\omega \sqrt{\omega_4} (1 + \alpha\beta)}, \beta = -1 + 4k^2, \quad (3.62)$$

$$\omega_0 = \omega_0, \omega_1 = \omega_3 = 0, \omega_2 = \omega_2, \omega_4 \neq 0.$$

•

$$A_0 = \frac{\sqrt{\beta\gamma}}{4\sqrt{3}}, A_1 = \frac{\sqrt{3\beta\gamma}\omega^2\omega_3}{2[5\omega^2\omega_2 - 2(\lambda + k^2)]}, A_{-1} = \frac{\sqrt{\beta\gamma}[-2(\lambda + k^2) - \omega^2\omega_2]}{24\sqrt{3}\omega^2\omega_3}, \quad (3.63)$$

$$\gamma = 10\omega^2\omega_2 - (1 + 4k), \omega_0 = \omega_0, \omega_1 = 0, \omega_2, \omega_3 \neq 0, \omega_4 = \omega_4.$$

En utilisant (3.62), (3.61) et les cas (7-13) dans la page 153 [32], nous obtenons

$$p_1(x, t) = \frac{\left[(\lambda + k^2) - \omega^2 \omega_2 \right] \sqrt{\beta}}{6\omega \sqrt{-\omega_2} (1 + \alpha\beta)} \cosh \left[\sqrt{\omega_2} (\omega (x - 2kt)) \right] + \frac{\omega \sqrt{-\omega_2 \beta}}{\sqrt{1 + \alpha\beta}} + \sec h \left[\sqrt{\omega_2} (\omega (x - 2kt)) \right] \quad (3.64)$$

$$p_2(x, t) = \frac{\left[(\lambda + k^2) - \omega^2 \omega_2 \right] \sqrt{\beta}}{6\omega \sqrt{-\omega_2} (1 + \alpha\beta)} \cos \left[\sqrt{-\omega_2} (\omega (x - 2kt)) \right] + \frac{\omega \sqrt{-\omega_2 \beta}}{\sqrt{1 + \alpha\beta}} + \sec \left[\sqrt{\omega_2} (\omega (x - 2kt)) \right] \quad (3.65)$$

$$p_3(x, t) = -\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{1 + \alpha\beta}} \left\{ \frac{\left[(\lambda + k^2) - \omega^2 \omega_2 \right] (\omega (x - 2kt))}{6\varepsilon\omega} + \frac{\varepsilon\omega}{\omega (x - 2kt)} \right\} \quad (3.66)$$

En remplaçant (3.64)-(3.66) dans (3.59) et (3.54) respectivement, nous avons

$$u_1(x, t) = \left\{ \frac{\left[(\lambda + k^2) - \omega^2 \omega_2 \right] \sqrt{\beta}}{6\omega \sqrt{-\omega_2} (1 + \alpha\beta)} \cosh \left[\sqrt{\omega_2} (\omega (x - 2kt)) \right] + \frac{\omega \sqrt{-\omega_2 \beta}}{\sqrt{1 + \alpha\beta}} \right. \\ \left. \sec h \left[\sqrt{\omega_2} (\omega (x - 2kt)) \right] \right\} e^{i(kx + \lambda t)},$$

$$v_1(x, t) = \frac{1}{1 - 4k^2} \left\{ \frac{\left[(\lambda + k^2) - \omega^2 \omega_2 \right] \sqrt{\beta}}{6\omega \sqrt{-\omega_2} (1 + \alpha\beta)} \cosh \left[\sqrt{\omega_2} (\omega (x - 2kt)) \right] + \frac{\omega \sqrt{-\omega_2 \beta}}{\sqrt{1 + \alpha\beta}} \right. \\ \left. \sec h \left[\sqrt{\omega_2} (\omega (x - 2kt)) \right] \right\}^2,$$

$$u_2(x, t) = \left\{ \frac{\left[(\lambda + k^2) - \omega^2 \omega_2 \right] \sqrt{\beta}}{6\omega \sqrt{-\omega_2} (1 + \alpha\beta)} \cos \left[\sqrt{-\omega_2} (\omega (x - 2kt)) \right] + \frac{\omega \sqrt{-\omega_2 \beta}}{\sqrt{1 + \alpha\beta}} \right. \\ \left. \sec \left[\sqrt{\omega_2} (\omega (x - 2kt)) \right] \right\} e^{i(kx + \lambda t)},$$

$$v_2(x, t) = \frac{1}{1 - 4k^2} \left\{ \frac{\left[(\lambda + k^2) - \omega^2 \omega_2 \right] \sqrt{\beta}}{6\omega \sqrt{-\omega_2} (1 + \alpha\beta)} \cos \left[\sqrt{-\omega_2} (\omega (x - 2kt)) \right] + \frac{\omega \sqrt{-\omega_2 \beta}}{\sqrt{1 + \alpha\beta}} \right. \\ \left. \sec \left[\sqrt{\omega_2} (\omega (x - 2kt)) \right] \right\}^2,$$

$$u_3(x, t) = \left\{ -\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{1 + \alpha\beta}} \left\{ \frac{\left[(\lambda + k^2) - \omega^2 \omega_2 \right] (\omega (x - 2kt))}{6\varepsilon\omega \sqrt{-\omega_2} (1 + \alpha\beta)} + \frac{\varepsilon\omega}{\omega (x - 2kt)} \right\} \right\} e^{i(kx + \lambda t)},$$

$$v_3(x, t) = \frac{1}{1 - 4k^2} \left\{ -\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{1 + \alpha\beta}} \left\{ \frac{\left[(\lambda + k^2) - \omega^2 \omega_2 \right] (\omega (x - 2kt))}{6\varepsilon\omega \sqrt{-\omega_2} (1 + \alpha\beta)} + \frac{\varepsilon\omega}{\omega (x - 2kt)} \right\} \right\}^2.$$

CHAPITRE 4

CALCUL DE LA SOLUTION EXACTE DE L'ÉQUATION DE BURGERS-FISHER GÉNÉRALISÉE TEMPORELLE D'ORDRE FRACTIONNAIRE

4.1 Introduction

Plusieurs articles ont été publiés pour résoudre l'équation différentielle fractionnaire non linéaire telles que la méthode de sous-équation fractionnaire [4, 18], la méthode de la fonction-Exp [8, 20], la méthode d'itération variationnelle fractionnaire [58], la méthode d'approximation cubique B-spline [39], etc

Dans ce chapitre on présente la méthode sous-équation de Fan qui a fourni de nouvelles solutions analytiques par rapport aux autres méthodes. Dans notre travail [1] l'étude porte sur l'équation Burgers-Fisher généralisée temporelle d'ordre fractionnaire d'un point de vue plus général afin d'extraire de nouvelles solutions exactes d'une classe générale de l'équation Burgers-Fisher généralisée temporelle d'ordre fractionnaire, qui a la formule suivante

$$u_t^\alpha + \beta u^\delta u_x - u_{xx} = \gamma u(1 - u^\delta), \quad (4.1)$$

où $0 < \alpha \leq 1$, α désigne la dérivée fractionnaire au sens Riemann–Liouville et β, γ et δ sont des constantes arbitraires.

Cette méthode consiste à transformer l'équation différentielle partielle d'ordre fractionnaire en équations différentielles ordinaires et cette méthode peut être appliquée à des nombreuses équations non linéaires.

Dans ce travail, nous utilisons Mathematica pour les calculs et la programmation.

4.2 Ondes progressives pour l'équation Burgers-Fisher généralisée temporelle d'ordre fractionnaire

Dans cette section, on détermine les solutions exactes d'ondes progressives de l'équation Burgers-Fisher généralisée temporelle d'ordre fractionnaire qui est considérée sous la forme (4.1) En utilisant [38],

$$u(x, t) = u(\xi), \xi = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1 + \alpha]} \quad (4.2)$$

on obtient

$$k^2 u'' + (\lambda - k\beta u^\delta) u' + \gamma u(1 - u^\delta) = 0. \quad (4.3)$$

On applique la transformation

$$u(\xi) = v^{\frac{1}{\delta}}(\xi). \quad (4.4)$$

Nous obtenons l'équation suivante qui est similaire à la forme la plus générale de l'équation d'oscillateur non linéaire de deuxième ordre avec beaucoup de paramètres arbitraires. Sous quelques restrictions sur les paramètres, on a trouvé de nouvelles équations intégrables [51].

$$k^2 \delta v v'' + k^2 (1 - \delta) v'^2 + (\lambda - k\beta v) \delta v v' + \gamma \delta^2 (1 - v) v^2 = 0 \quad (4.5)$$

Moyennant la méthode de sous-équation de Fan et d'après le principe d'équilibre on équilibre $v'' v$ avec $v^2 v'$, on obtient $n = 1$. Ainsi, la solution de (4.5) est de la forme

$$v(\xi) = \frac{A_{-1}}{\Psi(\xi)} + A_0 + A_1 \Psi(\xi), \quad (4.6)$$

où A_{-1}, A_0 et A_1 sont des constantes à déterminer et Ψ satisfait l'équation (3.5). En substituant les équations (4.6) et (3.5) dans l'équation (4.5) et en rassemblant tous les termes de même puissance et en les mettant égaux à zéro ce qui donne un système des équations algébriques impliquant les paramètres $A_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$. En utilisant (4.6), (3.5), (3.6) et (3.7), on obtient

$$v'(\xi) = \left(-A_{-1} \frac{1}{\Psi^2(\xi)} \right) \left(\epsilon \sqrt{w_0 + w_1 \Psi(\xi) + w_2 \Psi^2(\xi) + w_3 \Psi^3(\xi) + w_4 \Psi^4(\xi)} + A_1 \left(\epsilon \sqrt{w_0 + w_1 \Psi(\xi) + w_2 \Psi^2(\xi) + w_3 \Psi^3(\xi) + w_4 \Psi^4(\xi)} \right) \right)$$

$$v''(\xi) = \left(\frac{1}{2}w_1 + w_2\Psi(\xi) + \frac{3}{2}w_3\Psi^2(\xi) + 2w_4\Psi^3(\xi)\right)\left(-A_{-1}\frac{1}{\Psi^2(\xi)} + A_1\right) + \left(w_0 + w_1\Psi(\xi) + w_2\Psi^2(\xi) + w_3\Psi^3(\xi) + w_4\Psi^4(\xi)\right)\left(2A_{-1}\frac{1}{\Psi^3(\xi)}\right),$$

en remplaçant v' et v'' dans (4.5) en faisant correspondre les coefficients de Ψ^i à zéro, nous trouvons le système des équations pour A_i et w_i

$$\begin{aligned} k\beta\delta A_{-1}^3 + k^2 A_{-1}^2 w_0 + k^2 \delta A_{-1}^2 w_0 &= 0 \\ -\delta\lambda A_{-1}^2 - \gamma\delta^2 A_{-1}^3 + 2k\beta\delta A_{-1}^2 w_0 + 2k^2\delta A_{-1}A_0 w_0 + k^2 A_{-1}^2 w_1 + \frac{1}{2}k^2\delta A_{-1}^2 w_1 &= 0 \\ \gamma\delta^2 A_{-1}^2 - \delta\lambda A_{-1}A_0 - 3\gamma\delta^2 A_{-1}^2 A_0 + k\beta\delta A_{-1}A_0^2 + k\beta\delta A_{-1}^2 A_1 - 2k^2 A_{-1}A_1 w_0 + \\ 4k^2\delta A_{-1}A_1 w_0 + \frac{3}{2}k^2\delta A_{-1}A_0 w_1 + k^2 A_{-1}^2 w_2 &= 0 \\ 2\gamma\delta^2 A_{-1}A_0 - 3\gamma\delta^2 A_{-1}A_0^2 - 3\gamma\delta^2 A_{-1}^2 A_1 - 2k^2 A_{-1}A_1 w_1 + 4k^2\delta A_{-1}A_1 w_1 + \\ k^2\delta A_{-1}A_0 w_2 + k^2 A_{-1}^2 w_3 - \frac{1}{2}k^2\delta A_{-1}^2 w_3 &= 0 \\ \gamma\delta^2 A_0^2 - \gamma\delta^2 A_0^3 + 2\gamma\delta^2 A_{-1}A_1 + \delta\lambda A_0 A_1 - 6\gamma\delta^2 A_{-1}A_0 A_1 - k\beta\delta A_0^2 A_1 - k\beta\delta A_1^2 A_{-1} + \\ k^2 A_1^2 w_0 - k^2\delta A_1^2 w_0 + \frac{1}{2}k^2\delta A_0 A_1 w_1 - 2k^2 A_{-1}A_1 w_2 + 4k^2\delta A_{-1}A_1 w_2 + \frac{1}{2}k^2\delta A_0 A_{-1} w_3 + \\ k^2 A_{-1}^2 w_4 - k^2\delta A_{-1}^2 w_4 &= 0 \\ 2\gamma\delta^2 A_0 A_1 - 3\gamma\delta^2 A_1 A_0^2 + \delta\lambda A_1^2 - 3\gamma\delta^2 A_{-1}A_1^2 - 2k\beta\delta A_0 A_1^2 + k^2 A_1^2 w_1 - \frac{1}{2}k^2\delta A_1^2 w_1 + \\ k^2\delta A_0 A_1 w_2 - 2k^2 A_{-1}A_1 w_3 + 4k^2\delta A_{-1}A_1 w_3 &= 0 \\ \gamma\delta^2 A_1^2 - 3\gamma\delta^2 A_0 A_1^2 - k\beta\delta A_1^3 + k^2 A_1^2 w_2 + \frac{3}{2}k^2\delta A_1 A_0 w_3 - 2k^2 A_{-1}A_1 w_4 + 4k^2\delta A_{-1}A_1 w_4 &= 0 \\ -\gamma\delta^2 A_1^3 + k^2 A_1^2 w_3 + \frac{1}{2}k^2\delta A_1^2 w_3 + 2k^2\delta A_0 A_1 w_4 &= 0 \\ k^2 A_1^2 w_4 + k^2\delta A_1^2 w_4 &= 0 \end{aligned}$$

En résolvant le système ci-dessus et en utilisant Mathematica [50] nous obtenons les résultats suivants :

•

$$\begin{aligned} A_{-1} = w_4 = 0 \\ A_0 = \frac{2 + \delta}{3}, \quad A_1 = \frac{k^2(2 + \delta)w_3}{2\gamma\delta^2}, \quad w_3 = \frac{2\gamma\delta^2 A_1}{k^2(2 + \delta)} \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} w_0 &= -\frac{(2\delta + \delta^2)(-4\gamma\delta + \gamma\delta^3 + 12k\beta A_1 - 3k\beta\delta^2 A_1 - 18\lambda A_1)}{27k^2(-2 + \delta)A_1^2} \\ w_1 &= \frac{2(-4k\beta\delta + k\beta\delta^3 + 3\lambda\delta)}{3k^2(-2 + \delta)} \\ w_2 &= \frac{\gamma\delta^2 + k\beta\delta A_1}{k^2}, \end{aligned}$$

avec $A_0, A_1 \neq 0$ et w_0, w_2 étant des constantes arbitraires.

•

$$\begin{aligned} A_{-1} = A_0 = 0, \quad w_0 = w_4 = 0 & \tag{4.8} \\ A_1 = \frac{\gamma\delta^2 + k^2 w_2}{k\beta\delta}, \quad w_2 = \frac{-\gamma\delta^2 + k\beta\delta A_1}{k^2} \\ w_1 = \frac{2\delta\lambda}{k^2(-2 + \delta)}, \quad w_3 = \frac{2\gamma\delta^2 A_1}{k^2(2 + \delta)}, \end{aligned}$$

avec $w_2, A_1 \neq 0$ et w_1, w_3 étant des constantes arbitraires.

•

$$\begin{aligned} A_1 = A_0 = 0, \quad w_4 = w_3 = 0 & \tag{4.9} \\ A_{-1} = -\frac{k w_0(1 + \delta)}{\beta\delta}, \quad w_0 = -\frac{\beta\delta A_{-1}}{k(1 + \delta)} \\ w_1 = \frac{2(\delta\lambda + \gamma\delta^2 A_{-1})}{k^2(2 + \delta)}, \quad w_2 = -\frac{\gamma\delta^2}{k^2} \end{aligned}$$

avec $w_1, A_{-1} \neq 0$ et w_0, w_2 étant des constantes arbitraires.

4.2.1 Le premier cas

Posons $w_2 = 0$ dans (4.7), alors

$$\begin{aligned} A_{-1} = w_4 = w_2 = 0 \\ A_0 = \frac{2 + \delta}{3}, \quad A_1 = \frac{-\gamma\delta}{k\beta}, \quad w_3 = \frac{-2\gamma^2\delta^3}{k^3(2 + \delta)} \\ w_0 = -\frac{(4\beta + 2\delta\beta)(2k\beta(-4 + \delta^2) + 9\lambda)}{27k\gamma(-2 + \delta)} \\ w_1 = \frac{2(-4k\beta\delta + k\beta\delta^3 + 3\lambda\delta)}{3k^2(-2 + \delta)}. \end{aligned}$$

Donc, on a $w_2 = w_4 = 0$, d'après (3.8) nous obtenons une solution de fonction Weierstrass elliptic

$$v_1(\xi) = A_0 + A_1 \wp \left(\frac{\sqrt{w_3}}{2} \xi, g_2, g_3 \right), \quad w_3 > 0,$$

tel que $g_2 = \frac{-4w_1}{w_3}$ et $g_3 = \frac{-4w_0}{w_3}$ sont appelés invariants de Weierstrass fonction elliptique.

On remplace $A_{-1} = 0$, $A_0 = \frac{2+\delta}{3}$, $A_1 = \frac{-\gamma\delta}{k\beta}$, ξ et w_3 dans l'équation (4.6) nous obtenons

$$v_1(x, t) = \left(\frac{2+\delta}{3} \right) - \frac{\gamma\delta}{k\beta} \wp \left(\sqrt{\frac{-\gamma^2\delta^3}{2k^3\beta(2+\delta)}} \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right), g_2, g_3 \right), \quad (4.10)$$

en substituant (4.10) dans (4.4), on obtient

$$u_1(x, t) = \left[\left(\frac{2+\delta}{3} \right) - \frac{\gamma\delta}{k\beta} \wp \left(\sqrt{\frac{-\gamma^2\delta^3}{2k^3\beta(2+\delta)}} \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right), g_2, g_3 \right) \right]^{\frac{1}{\delta}}$$

$$g_2 = \frac{4k\beta(2+\delta)[k\beta(-4+\delta^2)+3\lambda]}{3\gamma^2(-2+\delta)\delta^2}, \quad g_3 = -\frac{4k^2\beta^2(2+\delta)^2[2k\beta(-4+\delta^2)+9\lambda]}{27\gamma^3(-2+\delta)\delta^3}.$$

4.2.2 Le deuxième cas

Cas 2.1 : Si nous restreignons $w_3 = 0$ en (4.8), on trouve

$$A_{-1} = A_0 = 0, \quad w_0 = w_3 = w_4 = 0$$

$$A_1 = \frac{\gamma\delta^2 + k^2 w_2}{k\beta\delta}, \quad w_2 = \frac{-\gamma\delta^2 + k\beta\delta A_1}{k^2}, \quad w_1 = \frac{2\delta\lambda}{k^2(-2+\delta)},$$

on remplace $A_{-1} = A_0 = 0$ et $A_1 = \frac{\gamma\delta^2 + k^2 w_2}{k\beta\delta}$ dans l'équation (4.6) et en utilisant (3.9) et (3.10) nous obtenons une solution de type triangulaire et une solution de type hyperbolique successivement ($w_2 < 0$ et $w_2 > 0$).

$$v_2(x, t) = \frac{\delta\lambda A_1}{(-2+\delta)(-\gamma\delta^2 + k\beta\delta A_1)} \left[-1 \pm \sin \left(\left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \sqrt{\frac{\gamma\delta^2 - k\beta\delta A_1}{k^2}} \right) \right]. \quad (4.11)$$

$$v_3(x, t) = \frac{\delta\lambda A_1}{(-2+\delta)(-\gamma\delta^2 + k\beta\delta A_1)} \left[-1 \pm \sinh \left(2 \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \sqrt{\frac{-\gamma\delta^2 + k\beta\delta A_1}{k^2}} \right) \right], \quad (4.12)$$

en substituant (4.11) et (4.12) dans (4.4) on obtient

$$u_2(x, t) = \left[\frac{\delta \lambda A_1}{(-2 + \delta)(-\gamma \delta^2 + k \beta \delta A_1)} \left[-1 \pm \sin \left(\left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \right) \sqrt{\frac{\gamma \delta^2 - k \beta \delta A_1}{k^2}} \right) \right] \right]^{\frac{1}{\delta}},$$

$$u_3(x, t) = \left[\frac{\delta \lambda A_1}{(-2 + \delta)(-\gamma \delta^2 + k \beta \delta A_1)} \left[-1 \pm \sinh \left(2 \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \right) \sqrt{\frac{-\gamma \delta^2 + k \beta \delta A_1}{k^2}} \right) \right] \right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

Cas 2.2 : Si nous restreignons $w_1 = 0$ en (4.8), on trouve

$$A_{-1} = A_0 = 0, \quad w_0 = w_1 = w_4 = 0$$

$$A_1 = \frac{\gamma \delta^2 + k^2 w_2}{k \beta \delta}, \quad w_2 = \frac{-\gamma \delta^2 + k \beta \delta A_1}{k^2}, \quad w_3 = \frac{2 \gamma \delta^2 A_1}{k^2(2 + \delta)},$$

on remplace $A_{-1} = A_0 = 0$ et $A_1 = \frac{\gamma \delta^2 + k^2 w_2}{k \beta \delta}$ dans l'équation (4.6) et en utilisant (3.11) et (3.12) nous obtenons une solution d'ondes solitaires en forme de cloche ($w_2 > 0$)

$$v_4(x, t) = \frac{(\gamma \delta - k \beta A_1)(2 + \delta)}{2 \gamma \delta} \operatorname{sech}^2 \left[\left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \right) \sqrt{\frac{-\gamma \delta^2 + k \beta \delta A_1}{4k^2}} \right] \quad (4.13)$$

et une solution de type triangulaire ($w_2 < 0$)

$$v_5(x, t) = \frac{(\gamma \delta - k \beta A_1)(2 + \delta)}{2 \gamma \delta} \operatorname{sec}^2 \left[\left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \right) \sqrt{\frac{\gamma \delta^2 - k \beta \delta A_1}{4k^2}} \right] \quad (4.14)$$

En substituant (4.13) et (4.14) dans (4.4) on obtient

$$u_4(x, t) = \left[\frac{(\gamma \delta - k \beta A_1)(2 + \delta)}{2 \gamma \delta} \operatorname{sech}^2 \left[\left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \right) \sqrt{\frac{-\gamma \delta^2 + k \beta \delta A_1}{4k^2}} \right] \right]^{\frac{1}{\delta}},$$

$$u_5(x, t) = \left[\frac{(\gamma \delta - k \beta A_1)(2 + \delta)}{2 \gamma \delta} \operatorname{sec}^2 \left[\left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \right) \sqrt{\frac{\gamma \delta^2 - k \beta \delta A_1}{4k^2}} \right] \right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

représentation graphique de la solution analytique exacte $u_2(x, t)$ présentée pour des valeurs $\delta = \frac{1}{2}$ et intervalle $(x, t) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dans Fig 4.1.

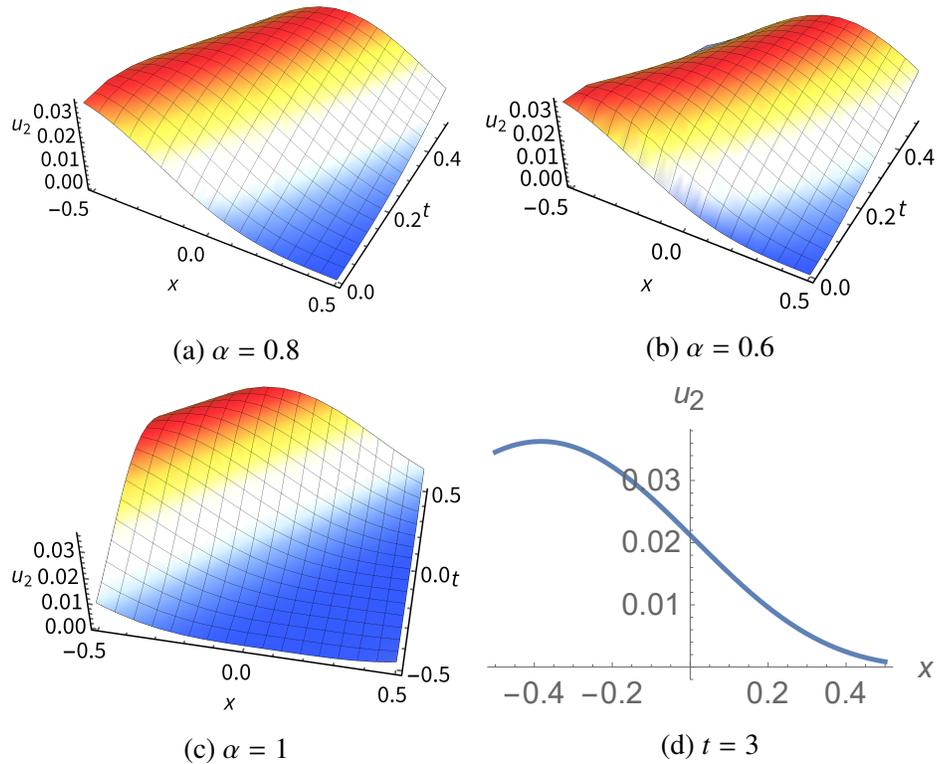


FIGURE 4.1 – La solution de type triangulaire $u_2(x, t)$ de Eq.(4.1) en substituant les valeurs $\delta = \frac{1}{2}$, $A_1 = -1$, $\gamma = 4$ et $\beta = 6$ dans Eq.(4.11).

représentation graphique de la solution analytique exacte $u_4(x, t)$ présentée pour des valeurs $\delta = \frac{1}{3}$ et intervalle $(x, t) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dans Fig 4.2.

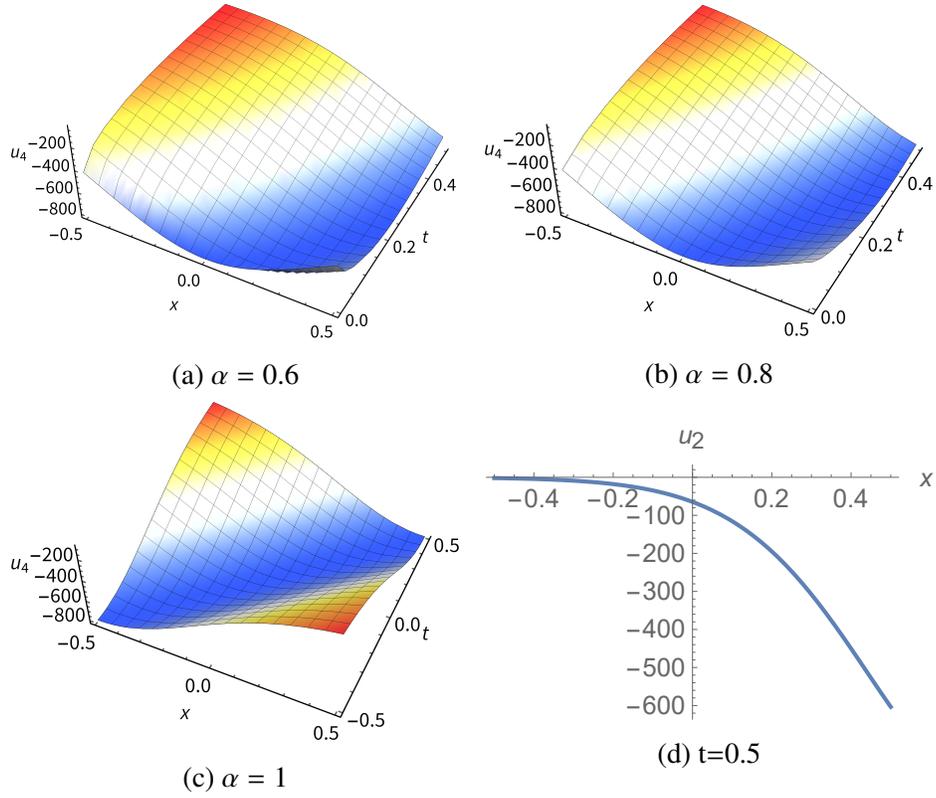


FIGURE 4.2 – Solution d'ondes solitaires en forme de cloche $u_4(x, t)$ de Eq.(4.1) en substituant les valeurs $\delta = \frac{1}{3}, A_1 = 1, k = 2$ et $\lambda = 2$ dans Eq.(4.13).

4.2.3 Le troisième cas

Cas 3.1 : Si nous restreignons $w_0 = \frac{w_1^2}{4w_2}$ en (4.9) on trouve

$$\begin{aligned} A_1 = A_0 = 0, \quad w_4 = w_3 = 0, \\ A_{-1} = -\frac{k(1+\delta)w_1^2}{4\beta\delta w_2}, \quad w_0 = -\frac{k^2 w_1^2}{4\gamma\delta^2} \\ w_1 = \frac{2(\delta\lambda + \gamma\delta^2 A_{-1})}{k^2(2+\delta)}, \quad w_2 = -\frac{\gamma\delta^2}{k^2} \end{aligned}$$

on remplace $A_1 = A_0 = 0$ et $A_{-1} = -\frac{k(1+\delta)w_1^2}{4\beta\delta w_2}$ dans l'équation (4.6) et en utilisant (3.14) nous obtenons la solution de type exponentiel comme suit

$$v_6(x, t) = \frac{k w_1^2 (1 + \delta)}{2\beta\delta \left[w_1 - 2e^{\pm \sqrt{w_2} \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right)} w_2 \right]}, \quad w_2 > 0 \quad (4.15)$$

En substituant (4.15) dans (4.4) on obtient

$$u_6(x, t) = \left[\frac{k w_1^2 (1 + \delta)}{2 \beta \delta \left[w_1 - 2 e^{\pm \sqrt{w_2} \left(k x - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right)} w_2 \right]} \right]^{\frac{1}{\delta}} \cdot \quad w_2 > 0$$

représentation graphique de la solution analytique exacte $u_6(x, t)$ présentée pour des valeurs $\delta = \frac{1}{2}$ et intervalle $(x, t) \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ dans Fig 4.3.

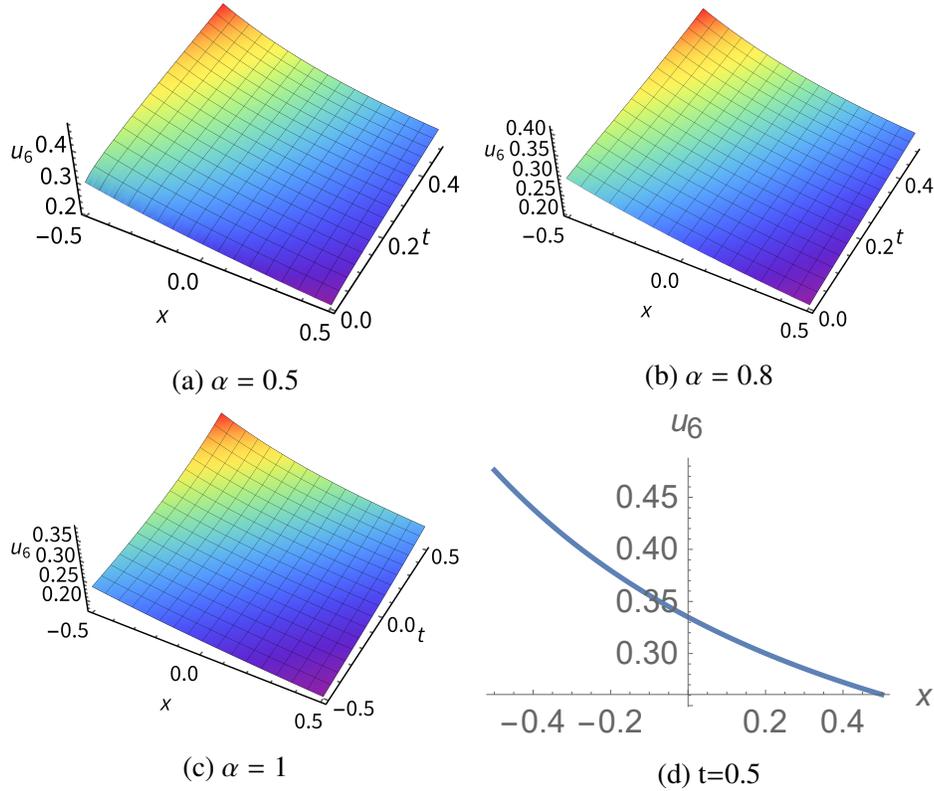


FIGURE 4.3 – la solution de type exponentiel $u_6(x, t)$ of Eq(4.1) en substituant les valeurs $\delta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{-1}{3}$, $k = 2$ et $\lambda = 2$ in Eq.(4.15).

Cas 3.2 : Si nous restreignons $w_2 = 0$ et $w_1 \neq 0$ dans (4.9) on remplace $A_1 = A_0 = 0$ et $A_{-1} = \frac{-2\delta\lambda + 2k^2w_1 + k^2\delta w_1}{2\gamma\delta^2}$ dans l'équation (4.6) et en utilisant (3.15) nous obtenons une solution de type polynomial

$$v_7(x, t) = \frac{-2\delta\lambda + 2k^2w_1 + k^2\delta w_1}{2\gamma\delta^2 \left[\frac{1}{4}w_1 \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right)^2 - \frac{w_0}{w_1} \right]}, \quad (4.16)$$

En substituant (4.16) dans (4.4) on obtient

$$u_7(x, t) = \left[\frac{-2\delta\lambda + 2k^2w_1 + k^2\delta w_1}{2\gamma\delta^2 \left[\frac{1}{4}w_1 \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right)^2 - \frac{w_0}{w_1} \right]} \right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

Cas 3.3 : Si nous restreignons $w_0 = 0$ en (4.9) de cette façon (4.9) devient

$$A_1 = A_0 = 0, \quad w_4 = w_3 = w_0 = 0$$

$$A_{-1} = \frac{-2\delta\lambda + 2k^2w_1 + k^2w_1\delta}{2\gamma\delta^2}, \quad w_1 = \frac{2(\delta\lambda + \gamma\delta^2 A_{-1})}{k^2(2 + \delta)}, \quad w_2 = -\frac{\gamma\delta^2}{k^2}$$

on remplace $A_1 = A_0 = 0$ et $A_{-1} = \frac{-2\delta\lambda + 2k^2w_1 + k^2w_1\delta}{2\gamma\delta^2}$ dans l'équation (4.6) et en utilisant (3.9) et (3.10) nous obtenons une solution de type triangulaire et une solution de type hyperbolique

$$v_8(x, t) = \frac{-2\delta\lambda + 2k^2w_1 + k^2w_1\delta}{2\gamma\delta^2 \frac{w_1}{2w_2} \left[-1 \pm \sin \left(\left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \sqrt{-w_2} \right) \right]}, \quad w_2 < 0 \quad (4.17)$$

$$v_9(x, t) = \frac{-2\delta\lambda + 2k^2w_1 + k^2w_1\delta}{2\gamma\delta^2 \frac{w_1}{2w_2} \left[-1 \pm \sinh \left(2 \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \sqrt{w_2} \right) \right]}, \quad w_2 > 0 \quad (4.18)$$

En substituant (4.17) et (4.18) dans (4.4) on obtient

$$u_8(x, t) = \left[\frac{-2\delta\lambda + 2k^2w_1 + k^2w_1\delta}{2\gamma\delta^2 \frac{w_1}{2w_2} \left[-1 \pm \sin \left(\left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \sqrt{-w_2} \right) \right]} \right]^{\frac{1}{\delta}}, \quad w_2 < 0$$

$$u_9(x, t) = \left[\frac{-2\delta\lambda + 2k^2w_1 + k^2w_1\delta}{2\gamma\delta^2 \frac{w_1}{2w_2} \left[-1 \pm \sinh \left(2 \left(kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) \sqrt{w_2} \right) \right]} \right]^{\frac{1}{\delta}}, \quad w_2 > 0$$

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

La théorie de calcul fractionnaire attire de plus en plus d'attention dans les communautés mathématiques, scientifiques et d'ingénierie en raison de leurs vastes applications dans la vie réelle dans la modélisation mathématique des systèmes physiques, ingénierie, biologiques, et dans de nombreux autres domaines.

En général, il est difficile de résoudre certains types d'équations non linéaires d'ordre fractionnaire en raison de leur complexité. Par contre ce qui est très intéressant c'est que ces équations d'ordre fractionnaire dont les solutions permettent de comprendre facilement les problèmes de la vie réelle et peuvent être appliquées aux disciplines de l'ingénierie et des sciences. .

Dans cette thèse, la méthode sous-equation de Fan étendue est appliquée avec succès afin de trouver la solution de l'équation de Burgers-Fisher d'ordre fractionnaire temporelle. Les résultats montrent que cette méthode est un outil mathématique puissant pour résoudre une équation fractionnaire non linéaire pour un ordre de dérivation , $0 < \alpha < 1$. Moyennant cette méthode, il est possible de la généraliser en considérant deux ordres de dérivation " α et β ", $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < 1$ d'une manière similaire à celle présentée dans cette thèse. C'est également une méthode prometteuse pour résoudre d'autres équations fractionnaires non linéaires.

Nous examinerons des géométries plus complexes dans de futures études, au cours desquelles nous vérifierons l'adaptation et l'utilité de cette méthode pour des problèmes dimensionnels spatio-temporels plus importants.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. Abbas and A. Kadem. Application of the extended fan sub-equation method to time fractional burgers-fisher equation. *Tatra Mt. Math. Publ.*, 79 :1–12, 2021.
- [2] G. Adomian. A review of the decomposition method in applied mathematics. *Journal of mathematical analysis and applications*, 135(2) :501–544, 1988.
- [3] G. Adomian. *Solving frontier problems of physics : the decomposition method*, volume 60. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] J. Alzaidy. Fractional sub-equation method and its applications to the space-time fractional differential equations in mathematical physics. *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*, pages 153–163, 2013.
- [5] D. Baleanu, A. Saadatmandi, A. Kadem, and M. Dehghan. The fractional linear systems of equations within an operational approach. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 8 (2), 2013.
- [6] F. Batool and G. Akram. Application of extended fan sub-equation method to (1+1)-dimensional nonlinear dispersive modified benjamin-bona-mahony equation with fractional evolution. *Optical and Quantum Electronics*, 49(11) :1–9, 2017.
- [7] A. Bekir, O. Güner, and O. Ünsal. The first integral method for exact solutions of nonlinear fractional differential equations. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 10(2), 2015.
- [8] A. Bekir, O. Guner, and A. Cevikel. The exp-function method for some time-fractional differential equations. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 4(2) :315–321, 2016.
- [9] M. Caputo and F. Mainardi. Linear models of dissipation in anelastic solids. *La Rivista del Nuovo Cimento (Ser. II)*, 1(2) :161–198, 1971.

- [10] Y. Cherruault. Convergence of adomian's method. *Kybernetes*, 1989.
- [11] Y. Cherruault, G. Saccomandi, and B. Some. New results for convergence of adomian's method applied to integral equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 16(2) :85–93, 1992.
- [12] S. Dugowson. *Les Différentielles Métaphysiques : Histoire et Philosophie de la Généralisation de l'Ordre de Dérivation*, volume number 94 PA13 2047. PHD thesis, Université de Paris XIII, Villetaneuse , France, 1994.
- [13] A. Ebaid. An improvement on the exp-function method when balancing the highest order linear and nonlinear terms. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 392(1) :1–5, 2012.
- [14] A.M.A. El-Sayed and M. Gaber. The adomian decomposition method for solving partial differential equations of fractal order in finite domains. *Physics Letters A*, 359(3) :175–182, 2006.
- [15] S.A. El-Wakil, A. Elhanbaly, and M.A. Abdou. Adomian decomposition method for solving fractional nonlinear differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 182(1) : 313–324, 2006.
- [16] E. Fan. Uniformly constructing a series of explicit exact solutions to nonlinear equations in mathematical physics. *Chaos, Solitons and Fractals*, 16(5) :819–839, 2003.
- [17] E. Fan and Y.C. Hon. A series of travelling wave solutions for two variant boussinesq equations in shallow water waves. *Chaos, Solitons and Fractals*, 15(3) :559–566, 2003.
- [18] S. Guo, L. Mei, Y. Li, and Y. Sun. The improved fractional sub-equation method and its applications to the space–time fractional differential equations in fluid mechanics. *Physics Letters A*, 376(4) :407–411, 2012.
- [19] A. A. Hassaballa. The (g'/g^2) -expansion method for solving fractional burgers-fisher and burgers equations. *Applied and Computational Mathematics*, 9(3) :56–63, 2020.
- [20] J.H. He. Exp-function method for fractional differential equations. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 14(6), 2013.
- [21] J.H. He and X.H. Wu. Exp-function method for nonlinear wave equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 30(3) :700–708, 2006.
- [22] H. Jafari, A. Kadem, and T. Baleanu, D.and Yilmaz. Solutions of the fractional davey-stewartson equations with variational iteration method. *Romanian Reports on Physics*, 64 :337–346, 04 2012.
- [23] H. Jafari, A. Kadem, and D. Baleanu. Variational iteration method for a fractional-order brusselator system. In *Abstract and Applied Analysis*, volume 2014. Hindawi, 2014.

- [24] G. Jumarie. Table of some basic fractional calculus formulae derived from a modified riemann–liouville derivative for non-differentiable functions. *Applied Mathematics Letters*, 22(3) :378–385, 2009.
- [25] A. Kadem and D. Baleanu. On fractional coupled whitham-broer-kaup equations. 2011.
- [26] A. Kadem and D. Baleanu. Homotopy perturbation method for the coupled fractional lotka-volterra equations. 2011.
- [27] A. Kadem and D. Baleanu. Solution of a fractional transport equation by using the generalized quadratic form. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(8) :3011–3014, 2011.
- [28] A. Kadem and A. Kilicman. Note on the solution of transport equation by tau method and walsh functions. In *Abstract and Applied Analysis*, volume 2010, page 13. Hindawi, 2010.
- [29] A. Kadem and A. Kilicman. The approximate solution of fractional fredholm integrodifferential equations by variational iteration and homotopy perturbation methods. In *Abstract and Applied Analysis*, volume 2012, page 10. Hindawi, 2012.
- [30] A. Kadem, Y. Luchko, and D. Baleanu. Spectral method for solution of the fractional transport equation. *Reports on Mathematical Physics*, 66(1) :103–115, 2010.
- [31] A. Kadem, M. Kirane, C.M. Kirk, and W. E. Olmstead. Blowing-up solutions to systems of fractional differential and integral equations with exponential non-linearities. *The IMA Journal of Applied Mathematics*, 79(6) :1077–1088, 2014.
- [32] N. Kadkhoda. Application of extended fan sub-equation method to generalized zakharov equation. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 19(1-SI) :151–159, 2019.
- [33] D. Kaya and S. M. El-Sayed. A numerical simulation and explicit solutions of the generalized burgers–fisher equation. *Applied Mathematics and Computation*, 152(2) :403–413, 2004.
- [34] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204. elsevier, North-Holland, 2006.
- [35] M. Kirane, A. Kadem, and A. Debbouche. Blowing-up solutions to two-times fractional differential equations. *Mathematische Nachrichten*, 286(17-18) :1797–1804, 2013.
- [36] W-A. Li, H. Chen, and G-C. Zhang. The (ω/g) -expansion method and its application to vakhnenko equation. *Chinese Physics B*, 18(2) :400–404, 2009.
- [37] Z. B. Li. An extended fractional complex transform. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 11 :335–338, 2010.

- [38] Z.B. Li and J.H. He. Fractional complex transform for fractional differential equations. *Mathematical and Computational Applications*, 15(5) :970–973, 2010.
- [39] A. Majeed, M. Kamran, M.K. Iqbal, and D. Baleanu. Solving time fractional burgers’ and fisher’s equations using cubic b-spline approximation method. *Adv Differ Equ*, 175(2020) :1–15, 2020.
- [40] R. Metzler and J. Klafter. The restaurant at the end of the random walk : recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 37(31) :R161, 2004.
- [41] K. S. Miller and B. Ross. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. John Wiley, Sons Inc, New York, 1993.
- [42] M. Mirzazadeh, M. ESlami, E. Zerrad, M.F. Mahmood, A. Biswas, and M. Belic. Optical solitons in nonlinear directional couplers by sine–cosine function method and bernoulli’s equation approach. *Nonlinear Dynamics*, 81(4) :1933–1949, 2015.
- [43] G. Mittag-Leffler. Sur la représentation analytique d’une branche uniforme d’une fonction monogène : cinquième note. *Acta mathematica*, 29 :101–181, 1905.
- [44] I. Podlubny. *Fractional differential equations*. Academic Press, New York, 1999.
- [45] A.A. Samko, S.G. Kilbas and O.I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives : Theory and applications*. Gordon And Breach Science Publishers., Switzerland, 1993.
- [46] J. Satsuma. *In soliton theory and exact solvable nonlinear equations*. 1987.
- [47] R. Schumer, D. A. Benson, M. M. Meerschaert, and B. Baeumer. Fractal mobile/immobile solute transport. *Water Resources Research*, 39(10), 2003.
- [48] R. Selvaraj and S. Venkatraman. Exact solutions of time fractional generalized burgers–fisher equation using exp function and exponential rational function methods. *arXiv preprint arXiv :2008.01695*, 2020.
- [49] R. Selvaraj, V. Swaminathan, A. Durga Devi, and K. Krishnakumar. Exact solutions of time-fractional generalised burgers–fisher equation using generalised kudryashov method. *arXiv :2003.05295v[nlin.SI]10 MAR*, 94(1) :1–8, 2020.
- [50] I. P. Stavroulakis and S. A. Tersian. *Partial differential equations : An introduction with Mathematica and MAPLE*. World Scientific Publishing Company, Singapore, 2004.
- [51] K.M. Tamizhmani, K. Krishnakumar, and P. G. L. Leach. Symmetries and reductions of order for certain nonlinear third-and second-order differential equations with arbitrary nonlinearity. *Journal of Mathematical Physics*, 56(11) :113503–1–113503–11, 2015.

- [52] K. U. Tariq, M. Younis, Hadi Rezazadeh, STR Rizvi, and MS Osman. Optical solitons with quadratic–cubic nonlinearity and fractional temporal evolution. *Modern Physics Letters B*, 32(26) :1850317, 2018.
- [53] P.J. Torvik and R.L. Bagley. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials. 1984.
- [54] X. Wang and Y. Lu. Exact solutions of the extended burgers-fisher equation. *Chinese Physics Letters*, 7(4) :145–147, 1990.
- [55] A.M. Wazwaz. The tanh method : exact solutions of the sine-gordon and the sinh-gordon equations. *Applied Mathematics and Computation*, 167(2) :1196–1210, 2005.
- [56] A.M. Wazwaz. The tanh method for generalized forms of nonlinear heat conduction and burgers–fisher equations. *Applied Mathematics and Computation*, 169(1) :321–338, 2005.
- [57] A. Wiman. Über den fundamentalsatz in der theorie der funktionen $e_a(x)$. *Acta Mathematica*, 29(1) :191–201, 1905.
- [58] G.C. Wu. A fractional variational iteration method for solving fractional nonlinear differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(8) :2186–2190, 2011.
- [59] X. E. Wu and Y. S. Liang. Relationship between fractal dimensions and fractional calculus. *Nonlinear Sci. Lett. A*, 8(1) :77–89, 2017.
- [60] A. Yavuz, M. Yokus. Novel comparison of numerical and analytical methods for fractional burger-fisher equation. *discrete and continuous dynamical systems series S*, pages 1–15, 2019.
- [61] E. Yomba. The extended fan’s sub-equation method and its application to kdv–mkdv, bkk and variant boussinesq equations. *Physics Letters A*, 336(6) :463–476, 2005.
- [62] E. Yomba. The extended fan sub-equation method and its application to the $(2+ 1)$ -dimensional dispersive long wave and whitham-broer-kaup equations. *Chinese Journal of Physics*, 43(4) : 789–805, 2005.