REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS SETIF 1

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Thèse présentée pour l'obtention du diplôme de

Doctorat LMD 3ème Cycle

Option : Analyse non linéaire et EDP

Présentée par :

ZOUBAI Fayrouz

Thème

Etude d'un problème pour le système de l'élasticité non linéaire avec une loi de comportement généralisée

Soutenue Le : 09/12/2021

devant le jury composé de :

M. Hamid BENSERIDI	Prof.	Université Ferhat Abbas Sétif 1	Président
M. Boubakeur MEROUANI	Prof.	Université Ferhat Abbas Sétif 1	Rapporteur
M. Ali DJELLIT	Prof.	Université d'Annaba	Examinateur
M. Abdelhamid AYADI	Prof.	Université d'Oum El Bouaghi	Examinateur
M. Salah DRABLA	Prof.	Université Ferhat Abbas Sétif 1	Invité

Année universitaire : 2021/2022

Remerciements

Je remercie ALLAH le clément et le miséricordieux.

*Je voudrais exprimer toute ma gratitude à monsieur **MEROUANI Boubakeur**, professeur à l'université de Sétif 1 d'avoir accepté de diriger mon travail, ce fut un grand honneur pour moi. Je tiens à le remercier pour tout ce qu'il m'a apporté, pour ses conseils, sa présence, sa patience et pour m'avoir fait confiance. Je le remercie aussi vivement pour son excellente pédagogie et la rigueur scientifique qui restera un modèle pour moi.*

*Je remercie chaleureusement le professeur **H. BENSERIDI** d'avoir accepté de présider mon jury.*

*Je tiens à remercier monsieur **A. DJELLIT** professeur à l'université de Annaba et monsieur **A. AYADI** professeur à l'université de Oum El Bouaghi pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu accorder à ma thèse en acceptant de participer au jury.*

*Je remercie également monsieur **S. DRABLA** professeur au laboratoire de mathématiques appliquées (LaMA) d'avoir accepté d'assister à la soutenance.*

Merci à monsieur Mahdi Boukrouche professeur à l'université Jean Monnet Saint -Etinne pour toutes les facilités dont j'ai bénéficié pour mon séjour à laboratoire ICJ qui ont énormément contribué à l'achèvement de ce travail.

Mes remerciements vont aussi aux membres du laboratoire de mathématiques appliquées (LaMA), que j'ai côtoyé pendant cinq ans et qui m'ont toujours encouragé par leurs précieux conseils et leur soutien moral.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous mes collègues jeunes chercheurs du laboratoire avec lesquels j'ai partagé ces années.

Un grand merci de tout mon cœur à mes chers parents, sans qui je ne serais absolument pas où j'en suis aujourd'hui. Je les remercie sincèrement pour leur gentillesse et leur soutien inconditionnel et constant, pour m'avoir donné du courage et de l'espoir.

J'exprime mes remerciements à tous ceux qui de prés ou de loin ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

Table des matières

Notations **2**

Introduction générale **5**

1 Rappels et définitions **8**

1.1 Espaces fonctionnels 8

1.1.1 Espaces de Lebesgue et Sobolev classiques 8

1.1.2 Espaces de Lebesgue et de Sobolev généralisés 10

1.2 Degré topologique 14

1.2.1 Degré topologique de Brouwer : la dimension finie 14

1.2.2 Degré topologique de Leray-Schauder : la dimension infinie 15

1.2.3 Théorèmes de point fixe 15

1.3 Opérateurs monotones et pseudo-monotones 16

2 Étude du problème mêlé pour le système de l'élasticité non linéaire par degré topologique **18**

2.1 Notations et position du problème 18

2.2 Formulation faible du problème 19

2.3 Théorème d'existence 20

2.3.1 Existence avec le théorème de Schauder 20

2.3.2 Existence avec le degré topologique 22

3 Différents problèmes aux limites pour le système de l'élasticité non linéaire dans des espaces de Sobolev à exposants variables **31**

3.1 Notations et position du problème 31

3.2 Quelques propriétés des opérateurs E_{ij} 33

3.3 Théorème d'existence et d'unicité 38
3.3.1 Étude du problème de Dirichlet 38
3.3.2 Étude du problème de Neumann 48
3.3.3 Étude du problème de Robin 55

4 Le système de l'élasticité non linéaire avec frottement dans des espaces de Sobolev à exposants variables 62

4.1 Notations et position du problème 62
4.2 Formulation variationnelle du problème 66
4.3 Théorème d'existence et d'unicité 68

Conclusion et perspectives 75

Bibliographie 76

Notations

Soit Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^N$, tel que $N \geq 1$ on a les notations suivantes :

Γ	la frontière de Ω.
ε	tenseur de déformation linéarisée.
σ	tenseur des contraintes.
a_{ijkh}	coefficients de l'élasticité.
u	le champ de déplacement.
f	forces volumiques.
d	degré topologique.
Id	l'application identité.
E	tenseur de déformation non linéaire.
u_n	les composantes normales de u.
u_t	les composantes tangentielles de u.
σ_n	les composantes normales de σ.
σ_t	les composantes tangentielles de σ.
K	coefficient de frottement.
s.c.i.	semi-continue inférieurement.
p.p.	presque partout.
t.q.	tel que.

Espaces fonctionnels

$\mathcal{D}(\Omega)$	l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact sur Ω.
$L^p(\Omega) =$	$\left\{ u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \int_\Omega \|u\|^p \, dx < \infty \right\}, \; 1 \leq p < \infty.$
$L^\infty(\Omega) =$	$\{u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } \|u(x)\| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$
$W^{1,p}(\Omega) =$	$\left\{ u \in L^p(\Omega); \nabla u \in (L^p(\Omega))^N \right\}.$
$W_0^{1,p}(\Omega)$	adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Soit $p : \Omega \longrightarrow [1, +\infty[$ une fonction mesurable.

$L^{p(x)}(\Omega) =$	$\left\{ u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \int\limits_{\Omega} \lvert u\rvert^{p(x)}\, dx < \infty \right\}.$
$W^{1,p(x)}(\Omega) =$	$\left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega); \nabla u \in \left(L^{p(x)}(\Omega)\right)^N \right\}.$
$W_0^{1,p(x)}(\Omega)$	adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$.
$\rho_{p(x)}$	module convexe.

Introduction générale

En mathématiques, une équation aux dérivées partielles (parfois appelée équation différentielle) en abrégée EDP, est une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions inconnues dépendant de plusieurs variables vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles.

La plupart des phénomènes mécaniques, physiques, biologiques, économiques, etc., sont modélisés à l'aide des équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires.

L'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles nécessite un choix approprié des espaces fonctionnels et une définition claire de la notion de solution.

En physique, l'élasticité est la propriété d'un matériau solide à retrouver sa forme d'origine après avoir été déformé. La déformation élastique est une déformation réversible. Un matériau solide se déforme lorsque des forces lui sont appliquées. Un matériau élastique retrouve sa forme et sa taille initiales quand ces forces ne s'exercent plus, jusqu'à une certaine limite de la valeur de ces forces.

Les raisons physiques du comportement élastique diffèrent d'un matériau à un autre. Pour les métaux, le treillis atomique change de taille et de forme quand des forces leur sont appliquées (ajout d'énergie au système). Quand les forces sont supprimées, le système retourne à son état original où l'énergie est la plus faible. Pour le caoutchouc et autres polymères, l'élasticité est due à l'extension des chaînes de polymère lorsque les forces sont appliquées.

L'élasticité linéaire concerne les petites déformations proportionnelles à la sollicitation.

Aux plus grandes déformations, l'élasticité devient non linéaire pour certains matériaux.

Au cours des dernières décennies, l'élasticité est devenue l'objet d'un regain d'intérêt considérable, tant dans ses fondements physiques que dans sa théorie mathématique. L'une des raisons de cette récente attention est qu'il est de plus en plus reconnu que les modèles linéaires classiques d'élasticité, dont la théorie mathématique est désormais fermement établie, ont un domaine d'application limité, en dehors duquel ils devraient être remplacés par les véritables modèles non linéaires qu'ils en effet approximatif. Une autre raison, similaire dans son principe, est que la validité des modèles classiques de dimension inférieure, tels que les équations de von Karman à deux dimensions pour les plaques élastiques non linéaires, n'est plus laissée incontestée. Un besoin a été laissé pour une meilleure évaluation de leur relation avec les modèles tridimensionnels correspondants qu'ils sont censés approximer.

Il existe de nombreux traitements mathématiques de l'élasticité linéarisée, parmi lesquels le traité de Gurtin [1972] est classique. D'autres traitements modernes, orientés mathématiquement, sont donnés par Knops & Payne [1971], Fichera [1972a, 1972b], Duvaut & Lions [1972], Villagio [1977], Nečas & Hlaváček [1981], Dautray & Lions [1984], Grisvard [1987] et Merouani [1996].

Concernant les techniques utilisées, plusieurs auteurs ont étudié le système de l'élasticité avec des lois de comportement particulières en utilisant diverses techniques dans les espaces de Sobolev à exposant constant. Par exemple ; dans [5], Ciarlet a utilisé le théorème de fonction implicite pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution ; dans [7], Dautray-Lions ont étudié le problème linéaire dans un domaine à frontière régulière ; dans [26, 27, 28], ils ont étudié le système de Lamé (élasticité) dans un domaine à frontière polygonale ; dans [40], Zoubai et Merouani ont étudié l'existence et l'unicité des solutions faibles du problème mêlé pour système de l'élasticité non linéaire par les techniques de degré topologique.

La bibliographie citée ici ne prétend pas être exhaustive et les lacunes ne sont pas liées à l'ignorance et à la mauvaise volonté de l'auteur.

Ce travail a pour objectif d'étudier l'existence et l'unicité des solutions de quelques problèmes aux limites de type elliptique gouvernés par le système de l'élasticité non linéaire, avec une loi de comportement généralisée, dans des espaces de Sobolev à exposant constant ou variable.

Sur les espaces de Sobolev à exposant variable [9], il a été publié 15 articles avant 2000, 31 entre 2000 et 2004, et 242 entre 2005 et 2010. Ces chiffres illustrent bien un regain d'intérêt pour ces types d'espaces dont l'étude avait été initiée en 1931 par Orlicz (cf. [33]).

La première étude sur les espaces de Lebesgue à exposants varibales (généralisés) a été réalisée par Orlicz ([33]) en 1931. Dans les années 1950, l'étude de tels espaces prend de l'ampleur avec les travaux de Nakano (cf. [30]). Par la suite, Kováčik et J. Rákosník (cf.[22]) en 1991 ont approfondi l'analyse fonctionnelle des espaces de Lebesgue et de Sobolev à puissances variables. Ils montrent dans leurs travaux que les espaces de Lebesgue et de Sobolev à puissances constantes et ceux à puissances variables ont plusieurs propriétés communes, exceptée une : la notion de continuité. En effet l'espace $L^{p(x)}$ ($p(x)$ non constant) n'est pas stable par translation.

Notre thèse est composée de quatre chapitres.

Au premier chapitre, on introduit les éléments nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités. On commence par un rappel sur les espaces de Lebesgue et de Sobolev classiques et les espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposants variables. On présente également quelques rappels sur le degré topologique de Brouwer (dimension finie) et le degré topologique de Leray-Schauder (dimension infinie). Enfin, on rappelle quelques propriétés des opérateurs monotones et pseudo-monotones.

Au deuxième chapitre, on s'intéresse au problème mêlé pour le système de l'élasticité non linéaire avec une loi de comportement généralisée. Après l'interprétation physique de ce problème, une formulation variationnelle est d'abord établie, ensuite on étudie l'existence de la solution faible moyennant deux méthodes, la première en utilisant le théorème de Schauder et la deuxième via les techniques de degré topologique.

Au troisième chapitre, on étudie le problème de l'élasticité non linéaire avec des conditions au bord de type Dirichlet, Neumann et Robin dans des espaces de Sobolev à exposants variables. Pour chaque problème, on établit la formulation variationnelle. Ensuite, on démontre l'existence d'une solution approchée du problème. Puis, moyennant des estimations a priori sur la solution approchée, on effectue un passage à la limite sur les différents termes et surtout le terme non linéaire.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude du problème de l'élasticité non linéaire dans les espaces de Sobolev à exposant variable avec les conditions aux limites de Dirichlet sur une partie de la frontière et la condition non linéaire de Tresca sur l'autre partie du bord. On donne d'abord, l'interprétation physique du problème, puis la formulation variationnelle à savoir une inéquation variationnelle non linéaire. Ensuite, on démontre un théorème d'existence et d'unicité de la solution faible de cette inéquation variationnelle. Les techniques utilisées sont celles de J. L. Lions [25].

Enfin, on termine ce travail par une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Rappels et définitions

Dans ce chapitre, nous collectons plusieurs outils de base qui seront nécessaires tout au long de ce travail. Le lien commun entre ces outils, c'est qu'ils sont préparatoires pour les principaux résultats des différents chapitres.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces de Lebesgue et Sobolev classiques

Les espaces de Sobolev constituent un bon cadre fonctionnel dans l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques. Il s'avère donc judicieux d'en faire une brève présentation avant d'aborder l'étude de ces équations. Nous reprenons dans cette section certains énoncés de Brezis [3] et de Gallouët et Herbin [17], pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev, on pourra aussi voir Adams [1].

Soit Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^N$, $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact dans Ω.

Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ est défini par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \,;\ \int_\Omega |u|^p dx < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$u \mapsto \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

pour en faire un espace de Banach.

Pour $p = \infty$, on note

$$L^{\infty}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \, ; \, \underset{\Omega}{ess\,\sup} |u| < +\infty \right\},$$

avec

$$\underset{\Omega}{ess\,\sup} |u| = \inf \left\{ C > 0; \; |u(x)| \leq C \text{ p.p. dans } \Omega \right\}.$$

$L^{\infty}(\Omega)$ est muni de la norme suivante :

$$u \mapsto \|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \underset{\Omega}{ess\,\sup} |u|.$$

$L^p(\Omega)$ est réflexif et séparable pour $1 < p < +\infty$ et son dual est isomorphe à $L^{p'}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \; \nabla u \in \left(L^p(\Omega)\right)^N \right\},$$

qui, munit de la norme

$$u \mapsto \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

est un espace de Banach.

On note pour $1 \leq p < +\infty$, $W^{1,p}_0(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$.

Comme pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est par définition dense dans $W^{1,p}_0(\Omega)$, on peut identifier le dual de $W^{1,p}_0(\Omega)$ à un sous-espace de l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ par :

$$W^{-1,p'}(\Omega) = \left(W^{1,p}_0(\Omega)\right)', \; \left(p' = \frac{p}{p-1}\right).$$

Théorème 1.1.1 *[17]* ***(Rellich)*** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ et $1 \leq p < +\infty$. Toute partie bornée de $W^{1,p}_0(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$. Ceci revient à dire que de toute suite bornée de $W^{1,p}_0(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^p(\Omega)$.*

Le théorème précédent reste vrai avec $W^{1,p}(\Omega)$ à condition de supposer la frontière lipschitzienne.

Dans la manipulation des espaces de Sobolev, très souvent on fait appel à certaines injections dites de Sobolev. Nous rappelons ici quelques injections dans le théorème suivant.

Théorème 1.1.2 *[17] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ qui est soit borné à frontière lipschitzienne, soit égal à $\mathbb{R}^N$.*

1. Si $1 \leq p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, avec $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$, et l'injection est continue, c'est-à-dire qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ (ne dépendant que de p, N et Ω) tel que

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega),\ \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,,\ \text{ce qu'on note } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)\,;$$

on a en particulier

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)\,.$$

Pour $N = 1$, le cas $p = N$ est autorisé. On a donc aussi

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)\ \text{ si } N = 1.$$

2. Si $p > N$, alors

$$W^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega)$$

où, pour $\alpha > 0$, $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions höldériennes d'exposant α défini par

$$\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) = \left\{u \in \mathcal{C}(\Omega,\mathbb{R}) \backslash \exists k \in \mathbb{R};\ |u(x) - u(y)| \leq k\,\|x-y\|^{\alpha},\ \forall (x,y) \in \Omega^2\right\}.$$

3. Dans le cas où Ω est borné à frontière lipschitzienne, $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout q tel que $1 \leq q < +\infty$ (et le cas $q = \infty$ est autorisé si $N = 1$). Ce résultat est faux dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Si Ω est un ouvert borné sans hypothèse de régularité sur la frontière, les trois assertions précédentes restent vraies si l'on remplace l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ par l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$.

1.1.2 Espaces de Lebesgue et de Sobolev généralisés

Nous rappelons dans cette partie quelques définitions et propriétés des espaces de Lebesgue et Sobolev à exposant variable (voir par exemple [6], [8], [9], [10], [13], [14] pour les démonstrations et plus de détails).

Pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, soit $p : \Omega \longrightarrow [1, +\infty[$ une fonction mesurable, appelée l'exposant variable.

Dans toute la suite, nous adoptons les notations suivantes :

$$\mathcal{C}_+(\overline{\Omega}) = \left\{p |\, p \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}),\ p(x) \geq 1 \text{ pour tout } x \in \overline{\Omega}\right\},$$

et

$$p^- = ess\inf_{x\in\Omega} p(x),\ \ p^+ = ess\sup_{x\in\Omega} p(x).$$

On définit l'espace de Lebesgue généralisé $L^{p(x)}(\Omega)$, appelé aussi espace de Lebesgue à exposant variable, comme l'ensemble des fonctions $u:\Omega\to\mathbb{R}$ mesurables pour lesquelles le module convexe

$$\rho_{p(x)}(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx$$

est fini.

Pour $p(x)>1$, la fonction de $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ donnée par $Y\mapsto Y^p$ est convexe, donc aussi la fonction $u\mapsto\rho_{p(x)}(u)$. De plus pour $p^+<+\infty$, on pose la fonction

$$u\mapsto \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \inf\left\{\lambda>0:\ \rho_{p(x)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) = \int_\Omega\left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)}dx\le 1\right\}, \tag{1.1}$$

remarquons que $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}=0$ implique que $\lambda=0$ alors on doit avoir $u=0$, pour que cette borne inf soit finie.

Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ et $u\in L^{p(x)}(\Omega)$ utilisant la convexité de $\rho_{p(x)}$ on a

$$\begin{aligned}
\|\alpha u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} &= \inf\left\{\lambda>0:\ \rho_{p(x)}\left(\frac{\alpha u+(1-\alpha)0}{\lambda}\right)\le 1\right\}\\
&= \inf\left\{\lambda>0:\ |\alpha|\rho_{p(x)}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\le 1\right\}\\
&= |\alpha|\inf\left\{\lambda>0:\ \rho_{p(x)}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\le 1\right\} = |\alpha|\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Aussi soient u et v dans $L^{p(x)}(\Omega)$ tels que

$$\rho_{p(x)}\left(\frac{u}{\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right)\le 1,\quad \text{et}\quad \rho_{p(x)}\left(\frac{v}{\|v\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right)\le 1$$

alors

$$\begin{aligned}
\rho_{p(x)}\left(\frac{u+v}{\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}+\|v\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right) &\le \frac{\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}+\|v\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\rho_{p(x)}\left(\frac{u}{\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right)\\
&+\frac{\|v\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}+\|v\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\rho_{p(x)}\left(\frac{v}{\|v\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}\right)\le 1
\end{aligned}$$

d'où avec

$$\lambda = \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}+\|v\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$$

on obtient

$$\|u+v\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\le\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}+\|v\|_{L^{p(x)}(\Omega)},$$

donc la fonction donnée (1.1) définit bien une norme de $L^{p(x)}(\Omega)$, appelée la norme de Luxembourg [8].

L'espace $\left(L^{p(x)}(\Omega),\ \|.\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\right)$ est un espace de Banach et $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^{p(x)}(\Omega)$. De plus, si $p^- > 1$, $L^{p(x)}(\Omega)$ est uniformément convexe donc réflexif et son dual est isomorphe à $L^{p'(x)}(\Omega)$, où $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$.

On a aussi l'inégalité suivante appelée inégalité de type Hölder :

$$\left|\int_\Omega uvdx\right| \leqslant \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-}\right) \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \|v\|_{L^{p'(x)}(\Omega)} \leqslant 2\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \|v\|_{L^{p'(x)}(\Omega)}$$

pour tous $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ et tous $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$.

On définit à présent l'espace de Sobolev généralisé aussi appelé espace de Sobolev à exposant variable

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{u \in L^{p(x)}(\Omega);\ \nabla u \in \left(L^{p(x)}(\Omega)\right)^N\right\}$$

qui, munit de la norme

$$u \longrightarrow \|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$$

est un espace de Banach.

L'espace $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ désigne la fermeture de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Soit $p \in \mathcal{C}_+(\overline{\Omega})$, $p^- \geqslant 1$ et $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, on a l'inégalité de Poincaré

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)},$$

où C dépend de $p(x)$ et donc de Ω.

En particulier, si $p^- > 1$, l'espace $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable et réflexif. Son espace dual est noté par $W^{-1,p'(x)}(\Omega)$.

Dans l'écriture des formulations variationnelles apparaît en général le module convexe $\rho_{p(x)}$, ce qui nous amène à énoncer les résultats suivants :

Proposition 1.1.3 *[14] Si $u_n, u \in L^{p(x)}(\Omega)$ et $p^+ < +\infty$, les relations suivantes sont vraies :*

(i) $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < 1\,(resp, = 1, > 1) \Leftrightarrow \rho_{p(x)}(u) < 1\,(resp, = 1, > 1)$,

(ii) $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} > 1 \Rightarrow \|u\|^{p^-}_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \rho_{p(x)}(u) \leq \|u\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega)}$,

(iii) $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < 1 \Rightarrow \|u\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \rho_{p(x)}(u) \leq \|u\|^{p^-}_{L^{p(x)}(\Omega)}$,

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_{p(x)}(u_n) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = 0$.

Proposition 1.1.4 *[14] Si $q \in \mathcal{C}_+(\overline{\Omega})$ et si pour tout $x \in \overline{\Omega}$, $q(x) < p^*(x)$ alors l'injection de $W^{1,p(x)}(\Omega)$ dans $L^{q(x)}(\Omega)$ est continue et compacte, où*

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N-p(x)} & si\ p(x) < N, \\ \infty & si\ p(x) \geq N. \end{cases}$$

En particulier, l'injection de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ dans $L^{p(x)}(\Omega)$ est continue et compacte.

Proposition 1.1.5 *[39] On note*

$$p^\partial(x) = \begin{cases} \frac{(N-1)p(x)}{N-p(x)} & si\ p(x) < N, \\ \infty & si\ p(x) \geq N. \end{cases}$$

Soit $q \in \mathcal{C}_+(\partial\Omega)$. Si pour tout $x \in \partial\Omega$, $q(x) < p^\partial(x)$ alors l'injection de $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^\partial(x)}(\partial\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\partial\Omega)$ est continue et compacte.

Définition 1.1.6 *[12] La fonction continue $p : \overline{\Omega} \to [1, +\infty)$ satisfait la condition de continuité Höldérienne, s'il existe une constante C tel que*

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{-\log|x-y|}\ \forall x,\ y \in \overline{\Omega}\ avec\ |x-y| < \frac{1}{2}.$$

Remarque 1.1.7 *Bien que cette condition de régularité n'est pas nécessaire pour définir les espaces de Lebesgue et Sobolev à exposant variable, elle s'avère être très utile pour ces espaces pour introduire quelques propriétés, telle que $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$ et $W_0^{1,p(x)}(\Omega) = W^{1,p(x)}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega)$. De plus si $1 < p^- \leq p^+ < N$, alors l'injection de Sobolev de $W^{1,p(x)}(\Omega)$ dans $L^{q(x)}(\Omega)$ reste vraie pour $q(x) = p^*(x)$ (pour plus de détails voir [8]).*

Remarque 1.1.8 *D'après l'inégalité de Poincaré, il est évident que les normes* $u \longrightarrow \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$ *et* $u \longrightarrow \|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)}$ *sont équivalentes sur* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Remarque 1.1.9 *[2] Soient* $a \geq 0$, $b \geq 0$ *et soit* $1 \leq p^- \leq p^+ < +\infty$, *alors*

$$(a+b)^{p(x)} \leq 2^{p^+-1}\left(a^{p(x)} + b^{p(x)}\right).$$

1.2 Degré topologique

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, ou un ouvert borné d'un espace de Banach E. Soit $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega},\, \mathbb{R}^N)$ (ou $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega},\, E)$) et $y \in \mathbb{R}^N$ (ou $y \in E$). On cherche à montrer qu'il existe $x \in \overline{\Omega}$ solution de l'équation $f(x) = y$.

On commence par donner l'existence (et l'unicité) d'une application, appelée degré topologique, en dimension finie puis en dimension infinie. Cette application nous permet parfois d'obtenir le théorème d'existence de solution recherché.

1.2.1 Degré topologique de Brouwer : la dimension finie

Définition 1.2.1 *Soit* $N \geq 1$. *On note* $\mathcal{A}$ *l'ensemble des triplets* (f, Ω, y) *où* Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega},\, \mathbb{R}^N)$ *et* $y \in \mathbb{R}^N$ *t.q.* $y \notin \{f(x),\, x \in \partial\Omega\}$.

Théorème 1.2.2 *[20]* ***(Brouwer, 1933)*** *Soit* $N \geq 1$ *et* $\mathcal{A}$ *donné par la définition 1.2.1. Il existe une et une seule application* $d : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$, *appelée "degré topologique de Brouwer", vérifiant les propriétés suivantes :*

- ***(Normalisation)*** $d(Id,\, \Omega,\, y) = 1$ *si* $y \in \Omega$.
- ***(Additivité)*** $d(f,\, \Omega,\, y) = d(f,\, \Omega_1,\, y) + d(f,\, \Omega_2,\, y)$ *si* $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ *et* $y \notin \left\{f(x),\, x \in \overline{\Omega} \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2\right\}$.
- ***(Invariance par homotopie)*** *Si* $h \in \mathcal{C}\left([0,1] \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$, $y \in \mathcal{C}\left([0,1], \mathbb{R}^N\right)$ *et* $y(t) \notin \{h(t,\, x),\, x \in \partial\Omega\}$ *(pour tout* $t \in [0,1]$*), on a alors* $d(h(0,.),\, \Omega,\, y(0)) = d(h(t,.),\, \Omega,\, y(t))$ *pour tout* $t \in [0,\, 1]$.

Proposition 1.2.3 *Le degré topologique de Brouwer vérifie la propriété suivante : si* $d(f,\, \Omega,\, y) \neq 0$ *alors il existe* $x \in \Omega$ *tel que* $f(x) = y$.

Remarque 1.2.4 *La proposition 1.2.3 nous donne une méthode pour trouver des solutions à des problèmes non linéaires. Soit $N \geq 1$, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $y \in \mathbb{R}^N$. On cherche à montrer qu'il existe $x \in \Omega$ t.q. $f(x) = y$.*

Pour cela, on construit une application h de $[0,1] \times \overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^N$ t.q.

1. *$h(1,.) = f$,*

2. *$h(0,.) = g$ avec g linéaire inversible et $y \in \{g(x),\, x \in \Omega\}$.*

3. *$h(t,x) \neq y$ pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in \partial\Omega$.*

On obtient alors $d(f,\, \Omega,\, y) = d(g,\, \Omega,\, y) \neq 0$ et donc il existe $x \in \Omega$ t.q. $f(x) = y$.

1.2.2 Degré topologique de Leray-Schauder : la dimension infinie

Définition 1.2.5 *Soit E un espace de Banach (réel). On note $\mathcal{A}_c$ l'ensemble des triplets $(Id - f,\, \Omega,\, y)$ où Ω est un ouvert borné de E, f est une application compacte de $\overline{\Omega}$ dans E (ce qui est équivalent à dire que f est continue et $\left\{f(x),\, x \in \overline{\Omega}\right\}$ est une partie relativement compacte de E) et $y \in E$ t.q. $y \notin \{x - f(x),\, x \in \partial\Omega\}$.*

Théorème 1.2.6 *[20]* ***(Leray, Schauder, 1934)*** *Soit E un espace de Banach et $\mathcal{A}_c$ donné par la définition 1.2.5. Il existe une et une seule application $d : \mathcal{A}_c \to \mathbb{Z}$, appelée “degré topologique de Leray-Schauder”, vérifiant les propriétés suivantes :*

- ***(Normalisation)*** *$d(Id,\, \Omega,\, y) = 1$ si $y \in \Omega$.*
- ***(Additivité)*** *$d(Id - f,\, \Omega,\, y) = d(Id - f,\, \Omega_1,\, y) + d(Id - f,\, \Omega_2,\, y)$ si $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $y \notin \left\{x - f(x),\, x \in \overline{\Omega} \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2\right\}$.*
- ***(Invariance par homotopie)*** *Si h est une application compacte de $[0,1] \times \overline{\Omega} \to E$, $y \in \mathcal{C}([0,1],\, E)$ et $y(t) \notin \{x - h(t,x),\, x \in \partial\Omega\}$ (pour tout $t \in [0,1]$), on a alors $d(Id - h(0,.),\, \Omega,\, y(0)) = d(Id - h(t,.),\, \Omega,\, y(t))$ pour tout $t \in [0,\, t]$.*

Proposition 1.2.7 *Le degré topologique de Leray-Schauder vérifie la propriété suivante : si $d(Id - f,\, \Omega,\, y) \neq 0$ alors il existe $x \in \Omega$ tel que $x - f(x) = y$.*

1.2.3 Théorèmes de point fixe

Théorème 1.2.8 *[17, 35] (Point fixe de Brouwer) Soit $N \geq 1$, $R > 0$ et $f \in \mathcal{C}(B_R,\, B_R)$ avec $B_R = \left\{x \in \mathbb{R}^N,\, \|x\| \leq R\right\}$. Alors f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in B_R$ t.q. $f(x) = x$.*

Théorème 1.2.9 *[17, 35] (Point fixe de Schauder) Soit E un espace de Banach, $R > 0$, $B_R = \{x \in E, \|x\| \leq R\}$ et f une application compacte de B_R dans B_R. Alors f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in B_R$ t.q. $f(x) = x$.*

1.3 Opérateurs monotones et pseudo-monotones

Dans ce qui suit, V est un espace de Banach réflexif et séparable et A une application de V dans V'.

Définition 1.3.1 *On dit que*
i) A est monotone si :

$$\forall u, v \in V,\ \langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0.$$

ii) A est hémicontinue si : pour tous $u, v, w \in V$, l'application

$$t \mapsto \langle A(u + tv), w \rangle \text{ est continue de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.$$

iii) A est coercif si :

$$\lim_{\|u\|_V \longrightarrow +\infty} \frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|_V} = +\infty.$$

Définition 1.3.2 *[25] Un opérateur A de V dans V' est dit pseudo-monotone si :*
i) A est borné,
ii) lorsque $u_n \longrightarrow u$ dans V faible et $\limsup \langle A(u_n), u_n - u \rangle \leq 0$ alors

$$\liminf \langle A(u_n), u_n - v \rangle \geq \langle A(u), u - v \rangle,\ \forall v \in V.$$

Proposition 1.3.3 *[25] On a l'implication*
A borné, hémicontinu et monotone $\Rightarrow$ A pseudo-monotone.

Théorème 1.3.4 *[25] Soit A un opérateur pseudo-monotone non linéaire de V dans V' (V est un espace de Banach séparable et réflexif), φ une fonction convexe propre s.c.i., tel que*

$$\begin{cases} \text{il existe } v_0 \text{ tel que } \varphi(v_0) < \infty \text{ et} \\ \dfrac{(A(u), u - v_0) + \varphi(u)}{\|u\|} \longrightarrow \infty \text{ si } \|u\| \longrightarrow \infty. \end{cases}$$

Alors, pour f donné dans V', il existe $u \in V$ solution de

$$(A(u) - f, v - u) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0,\ \forall v \in V. \tag{1.2}$$

Définition 1.3.5 *[34] On dit qu'un opérateur A de V dans V' définit un opérateur de Leray-Lions, s'il vérifie les hypothèses suivantes :*

i) $A(u)$ est un opérateur borné, au sens où il transforme les bornés de V en des bornés de V'.

ii) $A(u)$ est continu de tout sous-espace de V de dimension finie dans V' faible.

iii) A est coercitif.

iv) A est monotone.

Ces hypothèses suffisent pour montrer que A est surjectif, aussi $A(u) = f$ admet une solution pour tout $f \in V'$.

Chapitre 2

Étude du problème mêlé pour le système de l'élasticité non linéaire par degré topologique

Dans ce chapitre, nous considérons le problème mêlé pour le système de l'élasticité non linéaire avec loi de comportement généralisée. Les coefficients de l'élasticité dépendent de x tandis que la densité des forces volumétriques dépend du déplacement. L'objectif principal de ce chapitre est d'appliquer le théorème de point fixe de Schauder et les techniques de degré topologique pour prouver un théorème d'existence et d'unicité des solutions faibles du problème variationnel correspondant.

2.1 Notations et position du problème

On va considérer un exemple de problème elliptique fondamental quant à ses applications à la théorie de la Mécanique des Solides : le système de l'élasticité [36].

Soit Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^N$ ($N = 3$ dans les applications), à frontière lipschitzienne Γ ; soit Γ_0 une partie de Γ de mesure superficielle strictement positive et soit Γ_1 le complémentaire de Γ_0 dans Γ. On note par $u = (u_1, u_2, u_3)$ le déplacement de la substance et σ le tenseur des contraintes dont les composantes $\sigma_{ij}(1 \leq i,\, j \leq 3)$ sont données par :

$$\sigma_{ij}(u(x)) = \sum_{k,h=1}^{3} a_{ijkh}(x)\varepsilon_{kh}(u(x)),\ 1 \leq i,\, j \leq 3. \tag{2.1}$$

L'équation (2.1) décrit une relation linéaire entre le tenseur des contraintes σ et tenseur de déformation linéarisée ε de composantes

$$\varepsilon_{ij}\left(u(x)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\ 1 \leq i,\ j \leq 3. \tag{2.2}$$

Les coefficients d'élasticité a_{ijkh} vérifient les propriétés suivantes :

1°) propriétés de symétrie :

$$a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{ijhk},\ \forall\, 1 \leq i,\ j,\ k,\ h \leq 3, \tag{2.3}$$

2°) propriété d'ellipticité :

$$\exists \alpha > 0,\ \forall \xi_{ij} \in \mathbb{R},\ \sum_{k,h=1}^{3} a_{ijkh}\ \xi_{ij}\ \xi_{kh} \geq \alpha \sum_{i,j=1}^{3} \xi_{ij}^2. \tag{2.4}$$

On considère alors le problème suivant : étant données des fonctions $f = (f_1, f_2, f_3)$ de $(L^2(\Omega))^3$ et $g = (g_1, g_2, g_3)$ de $(L^2(\Gamma_1))^3$, trouver une fonction $u = (u_1, u_2, u_3)$ solution de

$$-\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}\left(u\right) = f_i(x, u) \quad \text{dans} \quad \Omega; \quad \forall\, 1 \leq i \leq 3; \tag{2.5}$$

$$u_i = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0; \quad \forall\, 1 \leq i \leq 3; \tag{2.6}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\left(u\right) \eta_j = g_i(x) \quad \text{sur} \quad \Gamma_1; \quad \forall\, 1 \leq i \leq 3. \tag{2.7}$$

Les équations (2.5)-(2.7) décrivent les petits déplacements u à partir de l'état naturel d'un solide élastique non homogène soumis à une densité volumique de forces f dans Ω, et à une densité superficielle de forces g sur Γ_1, les déplacements u étant fixés et nuls sur Γ_0.

La loi (2.1) correspond à un matériau anisotrope. Lorsqu'en outre ce matériau est non homogène, les coefficients d'élasticité a_{ijkh} dépendent de x ; on suppose alors que les fonctions a_{ijkh} appartiennent à $L^\infty\left(\Omega\right)$; $1 \leq i,\ j,\ k,\ h \leq 3$, et que la propriété d'ellipticité est uniforme, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\alpha > 0$, indépendante de x, telle que (2.4) soit vérifié presque partout sur Ω.

2.2 Formulation faible du problème

On multiplie l'équation (2.5) par $v \in V$ et on intègre sur Ω, on aura :

$$-\sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}\left(u\right) v_i\left(x\right) dx = \int_\Omega f_i\left(x, u(x)\right) v_i\left(x\right) dx,$$

où

$$V = \left\{ v \in \left(H^1(\Omega)\right)^3 ; \; v = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \right\},$$

est un sous-espace vectoriel fermé de $(H^1(\Omega))^3$, muni de la norme $\|.\|_V = \|.\|_{(H^1(\Omega))^3}$.

On applique la formule de Green ; on obtient :

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Gamma} \sigma_{ij}(u) \eta_j v_i d\Gamma = \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} f_i(x, u(x)) v_i(x) dx,$$

de (2.7) et la symétrie du tenseur de déformation linéarisée on a :

$$\sum_{i,j=1}^{3} \sum_{k,h=1}^{3} \int_{\Omega} a_{ijkh}(x) \varepsilon_{kh}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx = \int_{\Omega} f(x, u(x)) v(x) dx + \int_{\Gamma_1} g(x) v(x) d\Gamma, \; \forall v \in V.$$

2.3 Théorème d'existence

2.3.1 Existence avec le théorème de Schauder

On travaille dans cette section avec les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} \exists \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0 \text{ t.q. } \alpha \leq a_{ijkh}(s) \leq \beta \text{ p.p. pour tout } s \in \mathbb{R}; \\ f \in (L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}))^3 ; \\ \varepsilon_{ij} \text{ est une fonction continue, } \forall\, 1 \leq i, \; j \leq 3. \end{cases} \tag{2.8}$$

Sous les hypothèses (2.8), on cherche à montrer l'existence de u, solution du problème non linéaire suivant :

$$\begin{cases} u \in V, \\ \sum\limits_{i,j=1}^{3} \sum\limits_{k,h=1}^{3} \int\limits_{\Omega} a_{ijkh}(x) \varepsilon_{kh}(u(x)) \varepsilon_{ij}(v(x)) dx = \\ \int\limits_{\Omega} f(x, u(x)) v(x) dx + \int\limits_{\Gamma_1} g(x) v(x) d\Gamma, \; \forall v \in V. \end{cases} \tag{2.9}$$

Théorème 2.3.1 *Sous les hypothèses (2.8), il existe u solution de (2.9).*

Preuve : Pour $\overline{u} \in (L^2(\Omega))^3$ fixé, on a l'existence et l'unicité de u solution du problème suivant :

$$\begin{cases} u \in V, \\ \sum\limits_{i,j=1}^{3} \sum\limits_{k,h=1}^{3} \int\limits_{\Omega} a_{ijkh}(x) \varepsilon_{kh}(u(x)) \varepsilon_{ij}(v(x)) dx = \\ \int\limits_{\Omega} f(x, \overline{u}(x)) v(x) dx + \int\limits_{\Gamma_1} g(x) v(x) d\Gamma, \; \forall v \in V. \end{cases} \tag{2.10}$$

Plus précisément, pour montrer l'existence et l'unicité de u solution de (2.10), on applique le lemme de Lax-Milgram [5].

On pose $T(\overline{u}) = u$. L'application T est donc une application de E dans E avec

$$E = \left(L^2(\Omega)\right)^3.$$

Un point fixe de T est une solution du problème (2.9).

Pour démontrer l'existence d'un tel point fixe, on va utiliser le théorème de point fixe de Schauder.

Tout d'abord, on va montrer que l'image de T est dans un borné de V.

En prenant $v = u$ dans (2.10), et en utilisant α cité dans les hypothèses (2.8), on aura par l'inégalité de Korn [36]

$$\alpha C_K \|u\|^2_{(H^1(\Omega))^3} \leq \int_\Omega f(x, \overline{u}(x))u(x)dx + \int_{\Gamma_1} g\,(x)\,u\,(x)\,d\Gamma, \tag{2.11}$$

où C_K est la constante de l'inégalité de Korn.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, la borne L^∞ de f et le théorème de trace on trouve :

$$\begin{aligned} \alpha C_K \|u\|^2_{(H^1(\Omega))^3} &\leq C_1 \|u\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|g\|_{(L^2(\Gamma_1))^3} \|u\|_{(L^2(\Gamma_1))^3} \\ &\leq C_1 \|u\|_{(H^1(\Omega))^3} + C_0 C \|u\|_{(H^1(\Omega))^3}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|u\|_V = \|u\|_{(H^1(\Omega))^3} \leq \frac{C_1 + C_0 C}{\alpha C_K} = R,$$

ainsi

$$\|u\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq R.$$

Donc

$$u \in B_R = \left\{ u \in \left(L^2(\Omega)\right)^3 / \ \|u\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq R \right\}.$$

Et par suite, l'image de T est dans un borné de $V \subset \left(H^1(\Omega)\right)^3$ et donc (par le théorème de Rellich) dans un compact de $\left(L^2(\Omega)\right)^3$. En prenant R assez grand, l'application T envoie donc B_R dans B_R et $\{T(\overline{u}),\ \overline{u} \in B_R\}$ est relativement compacte dans $\left(L^2(\Omega)\right)^3$.

Pour appliquer le théorème de point fixe de Schauder, il reste à montrer la continuité de T.

Soit $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\left(L^2(\Omega)\right)^3$ t.q. $\overline{u}_n \longrightarrow \overline{u}$ dans $\left(L^2(\Omega)\right)^3$, quand $n \longrightarrow +\infty$. On pose $u_n = T(\overline{u}_n)$. Après extraction d'une sous suite, on peut supposer que $\overline{u}_n \longrightarrow \overline{u}$ p.p. et qu'il existe $w \in V$ t.q. $u_n \longrightarrow w$ faiblement dans V (et donc aussi $u_n \longrightarrow w$ dans $\left(L^2(\Omega)\right)^3$). On va montrer que w est solution du problème (2.10). En effet, soit $v \in V$, on a

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)\varepsilon_{kh}(u_n(x))\varepsilon_{ij}(v(x))dx = \int_\Omega f(x,\overline{u}_n(x))v(x)dx + \int_{\Gamma_1} g\left(x\right)v\left(x\right)d\Gamma,\ \forall v \in V.$$

En passant à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ (en utilisant la convergence dominée), on aura

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)\varepsilon_{kh}(w)\varepsilon_{ij}(v(x))dx = \int_\Omega f(x,\overline{u}(x))v(x)dx + \int_{\Gamma_1} g\left(x\right)v\left(x\right)d\Gamma,\ \forall v \in V.$$

Ceci prouve que $w = T(\overline{u}) = u$. On a donc prouvé, après extraction d'une sous suite, que $T(\overline{u}_n) \longrightarrow T(\overline{u})$ dans $\left(L^2(\Omega)\right)^3$.

On a ainsi démontré la continuité de T. On peut donc appliquer le théorème de point fixe de Schauder et conclure à l'existence d'un point fixe de T, ce qui termine la démonstration.

2.3.2 Existence avec le degré topologique

On reprend le même problème précédent (2.9) :

$$\begin{cases} u \in V, \\ \sum\limits_{i,j=1}^{3}\sum\limits_{k,h=1}^{3}\int\limits_\Omega a_{ijkh}(x)\varepsilon_{kh}(u(x))\varepsilon_{ij}(v(x))dx = \\ \int\limits_\Omega f(x,u(x))v(x)dx + \int\limits_{\Gamma_1} g\left(x\right)v\left(x\right)d\Gamma,\ \forall v \in V. \end{cases}$$

qui est la formulation faible du problème (2.5)-(2.7).

On se place sous les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} (i)\ \varepsilon_{ij} \text{ est une fonction continue, } \forall\, 1 \leq i,\ j \leq 3, \\ (ii)\ \exists\alpha,\ \beta > 0;\ \alpha \leq a_{ijkh}(x) \leq \beta \text{ p.p. dans } \Omega, \\ (iii)\ f \text{ est une fonction de Carathéodory, et} \\ \quad \exists C_2 \geq 0 \text{ et } d \in \left(L^2(\Omega)\right)^3;\ \left|f(x,s)\right| \leq d(x) + C_2\left|s\right|, \\ (iv)\ \lim\limits_{s\longrightarrow\infty} \dfrac{f(x,s)}{s} = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Théorème 2.3.2 *Sous les hypothèses (2.12), il existe une solution u de (2.9). Si de plus f ne dépend pas de u alors la solution est unique.*

Preuve : La méthode de degré topologique demande des estimations a priori c'est-à-dire des estimations sur u, sans connaître son existence.

Supposons donc u solution de (2.9). Le gros avantage de considérer (2.9) plutôt que (2.10) est d'avoir uniquement u, et non pas u et $\overline{u}$, et ceci simplifie considérablement les estimations.

On réécrit le problème sous la forme :

$$\begin{cases} u \in V, \\ \sum_{i,j=1}^{3} \sum_{k,h=1}^{3} \int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\varepsilon_{kh}(u(x))\varepsilon_{ij}(v(x))dx = \langle F(u), v\rangle_{V',V}, \end{cases}$$

où $F(u)$ est, pour $u \in \left(L^2(\Omega)\right)^3$, l'élément de V' défini par :

$$\langle F(u), v\rangle_{V',V} = \int_{\Omega} f(x, u(x))v(x)dx + \int_{\Gamma_1} g(x)\, v(x)\, d\Gamma.$$

D'après l'hypothèse (iii), l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le théorème de trace, on a :

$$\begin{aligned} |\langle F(u), v\rangle| &\leq \int_{\Omega} |f(x, u(x))|\; |v(x)|\, dx + \int_{\Gamma_1} |g(x)|\, |v(x)|\, d\Gamma \\ &\leq \int_{\Omega} |d|\, |v|\, dx + C_2 \int_{\Omega} |u|\, |v|\, dx + \int_{\Gamma_1} |g|\, |v|\, d\Gamma \\ &\leq \|d\|_{(L^2(\Omega))^3} \|v\|_{(L^2(\Omega))^3} + C_2 \|u\|_{(L^2(\Omega))^3} \|v\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|g\|_{(L^2(\Gamma_1))^3} \|v\|_{(L^2(\Gamma_1))^3} \\ &\leq \|d\|_{(L^2(\Omega))^3} \|v\|_{(H^1(\Omega))^3} + C_2 \|u\|_{(L^2(\Omega))^3} \|v\|_{(H^1(\Omega))^3} + C_0 C \|v\|_{(H^1(\Omega))^3} \\ &\leq \left(\|d\|_{(L^2(\Omega))^3} + C_2 R + C C_0 \right) \|v\|_{(H^1(\Omega))^3}. \end{aligned}$$

Donc

$$\|F(u)\|_{V'} \leq \|d\|_{(L^2(\Omega))^3} + C_2 R + C C_0. \tag{2.13}$$

Nous allons démontrer que

$$F : \left(L^2(\Omega)\right)^3 \longrightarrow V'$$

$$u \longmapsto F(u)$$

est continue, pour cela on a besoin du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Soient u, $\widetilde{u} \in \left(L^2(\Omega)\right)^3$, on a :

$$\begin{aligned} \langle F(u), v\rangle &= \int_{\Omega} f(x, u(x))v(x)dx + \int_{\Gamma_1} g(x)\, v(x)\, d\Gamma \\ \langle F(\widetilde{u}), v\rangle &= \int_{\Omega} f(x, \widetilde{u}(x))v(x)dx + \int_{\Gamma_1} g(x)\, v(x)\, d\Gamma \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\|F(u)-F(\widetilde{u})\|_{V'} &= \sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|_V=1}} \left|\langle F(u)-F(\widetilde{u}),v\rangle_{V',V}\right| \\
&= \sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|_V=1}} \left|\int_\Omega (f(u)-f(\widetilde{u}))\, v dx\right| \\
&\leq \sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|_V=1}} \left(\|f(u)-f(\widetilde{u})\|_{(L^2(\Omega))^3}\, \|v\|_{(L^2(\Omega))^3}\right) \\
&\leq \sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|_V=1}} \left(\|f(u)-f(\widetilde{u})\|_{(L^2(\Omega))^3}\, \|v\|_V\right) \\
&\leq \|f(u)-f(\widetilde{u})\|_{(L^2(\Omega))^3}.
\end{aligned}$$

Donc, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $(L^2(\Omega))^3$ telle que $u_n \longrightarrow \widetilde{u}$ dans $(L^2(\Omega))^3$, on a :

$$\|F(u_n)-F(\widetilde{u})\|_{V'} \leq \|f(u_n)-f(\widetilde{u})\|_{(L^2(\Omega))^3}.$$

Donc, $\exists\,(u_n)$ sous suite, telle que :

$$u_n \longrightarrow \widetilde{u} \text{ p.p. sur } \Omega,$$

et $\exists H \in (L^2(\Omega))^3$ telle que :

$$|u_n| \leq H \text{ p.p. sur } \Omega.$$

On remarque ensuite que $f(u_n) \longrightarrow f(\widetilde{u})$ car f est continue p.p. sur Ω.

D'après l'hypothèse (iii), $|f(u_n)| \leq d(x) + C_2\,|u_n|$, et comme $|u_n| \leq H$, on trouve :

$$|f(u_n)| \leq d(x) + C_2 H \text{ p.p. sur } \Omega,$$

et donc par le théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\|f(u_n)-f(\widetilde{u})\|_{(L^2(\Omega))^3} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty,$$

et par suite

$$\|F(u_n)-F(\widetilde{u})\|_{V'} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty,$$

d'où la continuité de F.

Pour $S \in V'$, le problème linéaire

$$\left\{\begin{array}{l}
w \in V, \\
\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)\varepsilon_{kh}(w(x))\varepsilon_{ij}(v(x))dx = \langle S,v\rangle_{V',V},
\end{array}\right. \tag{2.14}$$

admet une unique solution $w \in V$ (voir [5]). On note B_u l'opérateur qui à S dans V' associe w solution de (2.14).

L'opérateur B_u est linéaire continu de V' dans V et V s'injecte compactement dans $(L^2(\Omega))^3$. On en déduit que l'opérateur B_u est compact de V' dans $(L^2(\Omega))^3$.

Le problème (2.9) est équivalent à résoudre le problème de point fixe $u = B_u(F(u))$.

On va montrer, par degré topologique, que le problème suivant admet une solution

$$\begin{cases} u \in (L^2(\Omega))^3, \\ u = B_u(F(u)). \end{cases}$$

Pour $t \in [0,1]$, on pose l'application h telle que :

$$h : [0,1] \times \left(L^2(\Omega)\right)^3 \longrightarrow \left(L^2(\Omega)\right)^3,$$

$$(t,u) \longmapsto h(t,u) = B_u(tF(u)).$$

Pour $R > 0$, on pose $B_R = \left\{u \in (L^2(\Omega))^3 \text{ t.q. } \|u\|_{(L^2(\Omega))^3} < R\right\}$. On va montrer que

(1) $\exists R > 0; \left\{ \begin{array}{c} u - h(t,u) = 0 \\ t \in [0,1]\,,\ u \in (L^2(\Omega))^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \|u\|_{(L^2(\Omega))^3} < R\,;$

(2) h est continue de $[0,1] \times \overline{B}_R$ dans $\overline{B}_R$;

(3) $\left\{h(t,u),\ t \in [0,1]\,,\ u \in \overline{B}_R\right\}$ est relativement compact dans $(L^2(\Omega))^3$.

Si on suppose qu'on a démontré (1), (2) et (3), on n'a pas de solution à l'équation $u - h(t,u) = 0$ sur le bord de la boule B_R, et on peut donc définir le degré $d(Id - h(t,.), B_R, 0)$. Ce degré ne dépend pas de t, on a donc :

$$\begin{aligned} d(Id - h(t,.), B_R, 0) &= d(Id - h(0,.), B_R, 0) \\ &= d(Id, B_R, 0) = 1. \end{aligned}$$

On en déduit l'existence de $u \in B_R$ tel que $u - h(1,u) = 0$, c'est-à-dire

$$u = B_u(F(u)).$$

Donc u est solution de (2.9).

Il reste donc à montrer (1), (2) et (3). Commençons par démontrer (3) (pour tout $R > 0$).

On suppose que $\|u\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq R$. On a :

$$F(u) \in V', \text{ et } \langle F(u), v \rangle_{V',V} = \int_\Omega f(x,u(x))v(x)dx + \int_{\Gamma_1} g\,(x)\,v\,(x)\,d\Gamma,$$

et

$$\|F(u)\|_{V'} \leq \|d\|_{(L^2(\Omega))^3} + C_2R + CC_0.$$

Donc :

$$t\,\|F(u)\|_{V'} \leq \|d\|_{(L^2(\Omega))^3} + C_2R + CC_0 = \widetilde{R},\ \forall\, t \in [0,1]\,.$$

Posons $h(t,u) = B_u(tF(u)) = w$ et montrons qu'il existe $\overline{R}$ dépendant que de R, C_0, C, C_2, et α tel que

$$\|h(t,u)\|_V \leq \overline{R}.$$

Par définition, w est solution de

$$\begin{cases} w \in V, \\ \sum\limits_{i,j=1}^{3}\sum\limits_{k,h=1}^{3}\int\limits_{\Omega} a_{ijkh}(x)\varepsilon_{kh}(w(x))\varepsilon_{ij}(v(x))dx = \langle tF(u), v\rangle_{V',V}\,,\ \forall v \in V. \end{cases} \tag{2.15}$$

En prenant $v = w$ dans (2.15), on obtient par l'inégalité de Korn :

$$\alpha C_K\,\|w\|^2_{(H^1(\Omega))^3} \leq \|tF(u)\|_{V'}\,\|w\|_V \leq \widetilde{R}\,\|w\|_V\,.$$

Ce qui implique

$$\|h(t,u)\|_V = \|w\|_V \leq \overline{R},$$

avec

$$\overline{R} = \frac{\widetilde{R}}{\alpha C_K} = \frac{\|d\|_{(L^2(\Omega))^3} + C_2R + CC_0}{\alpha C_K}.$$

On en déduit par le théorème de Rellich que l'ensemble $\left\{h(t,u),\ t \in [0,1]\,,\ u \in \overline{B}_R\right\}$ est relativement compact dans $\left(L^2(\Omega)\right)^3$. Ce qui montre bien (3).

Montrons maintenant le point (2). Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ telle que $t_n \longrightarrow t$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \left(L^2(\Omega)\right)^3$ t.q. $u_n \longrightarrow u$ dans $\left(L^2(\Omega)\right)^3$. On veut montrer que $h(t_n,u_n) \longrightarrow h(t,u)$ dans $\left(L^2(\Omega)\right)^3$. Soit $w_n = h(t_n,u_n)$ et $w = h(t,u)$. Pour montrer que $w_n \longrightarrow w$ dans $\left(L^2(\Omega)\right)^3$, on cherche à passer à la limite sur l'équation suivante :

$$\begin{cases} w_n \in V, \\ \sum\limits_{i,j=1}^{3}\sum\limits_{k,h=1}^{3}\int\limits_{\Omega} a_{ijkh}(x)\varepsilon_{kh}(w_n)\varepsilon_{ij}(v)dx = \\ t_n\int\limits_{\Omega} f(u_n)v\,(x)\,dx + t_n\int\limits_{\Gamma_1} g\,(x)\,v\,(x)\,d\Gamma. \end{cases} \tag{2.16}$$

On sait déjà que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans V, car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $(L^2(\Omega))^3$ (c'est ce qu'on a montré à l'étape précédente : si $\|u_n\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq R$ alors $\|w_n\|_V \leq \overline{R}$).

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans V, et à une sous suite près, on a donc

$$\begin{aligned} w_n &\longrightarrow \overline{w} \text{ dans } V \text{ faible et } w_n \longrightarrow \overline{w} \text{ dans } \left(L^2(\Omega)\right)^3, \\ u_n &\longrightarrow u \text{ p.p. et } \exists H \in \left(L^2(\Omega)\right)^3; \; |u_n| \leq H \text{ p.p..} \end{aligned}$$

Comme $w_n \to \overline{w}$ dans $(L^2(\Omega))^3$, alors

$$w_n \longrightarrow \overline{w} \text{ p.p. et } \exists K \in \left(L^2(\Omega)\right)^3; \; |w_n| \leq K \text{ p.p..}$$

Soit $v \in V$ et comme ε_{ij} est continue alors $\varepsilon_{kh}(w_n) \to \varepsilon_{kh}(\overline{w})$ p.p., donc

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3} a_{ijkh}(x)\varepsilon_{kh}(w_n)\varepsilon_{ij}(v) \to \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3} a_{ijkh}(x)\varepsilon_{kh}(\overline{w})\varepsilon_{ij}(v) \text{ p.p.,}$$

on a aussi

$$\left|\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3} a_{ijkh}(x)\varepsilon_{kh}(w_n)\varepsilon_{ij}(v)\right| \leq \beta \sum_{k,h=1}^{3} |\varepsilon_{kh}(w_n)| \sum_{i,j=1}^{3} |\varepsilon_{ij}(v)| \in L^1(\Omega).$$

Donc par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3} \int_\Omega a_{ijkh}(x)\varepsilon_{kh}(w_n)\varepsilon_{ij}(v)dx \longrightarrow \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3} \int_\Omega a_{ijkh}(x)\varepsilon_{kh}(\overline{w})\varepsilon_{ij}(v)dx.$$

Et comme $f(u_n) \longrightarrow f(u)$ p.p. et $|f(u_n)| \leq |d| + C_2 |H|$. Alors $f(u_n) \longrightarrow f(u)$ dans $(L^2(\Omega))^3$ et par suite

$$\int_\Omega f(u_n)v dx \longrightarrow \int_\Omega f(u)v dx.$$

En passant à la limite dans (2.16), on obtient donc :

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3} \int_\Omega a_{ijkh}(x)\varepsilon_{kh}(\overline{w})\varepsilon_{ij}(v)dx = t\int_\Omega f(u)v dx + t\int_{\Gamma_1} g(x)\, v(x)\, d\Gamma,$$

et donc $\overline{w} = h(t,u) = w$.

L'application h est donc continue. Ce qui montre bien (2).

Il reste maintenant à démontrer (1). On veut montrer que :

$$\exists R > 0; \; \left\{ \begin{array}{c} u - h(t,u) = 0 \\ t \in [0,1],\, u \in (L^2(\Omega))^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \|u\|_{(L^2(\Omega))^3} < R.$$

Soit $t \in [0,1]$, et $u = h(t,u) = tB_u(F(u))$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} u \in V, \\ \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\varepsilon_{kh}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx = \\ t\int_{\Omega} f(u)vdx + t\int_{\Gamma_1} g(x)\, v(x)\, d\Gamma,\ \forall v \in V. \end{cases} \tag{2.17}$$

On choisit $v = u$ dans (2.17). Par l'hypothèse (ii) et l'inégalité de Korn, on a donc :

$$\alpha C_K \|u\|^2_{(H^1(\Omega))^3} \leq \int_\Omega |f(u)u|\, dx + \int_{\Gamma_1} |g(x)|\, |u(x)|\, d\Gamma.$$

On va déduire de cette inégalité l'existence de $R > 0$ t.q. $\|u\|_{(L^2(\Omega))^3} < R$. C'est ici qu'on utilise l'hypothèse (iv), i.e. $\lim\limits_{s \longrightarrow \pm\infty} \dfrac{f(x,s)}{s} = 0$.

On raisonne par l'absurde. Supposons qu'un tel R n'existe pas. Alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de V telle que

$$\|u_n\|_{(L^2(\Omega))^3} \geq n \text{ et } \alpha C_K \|u_n\|^2_{(H^1(\Omega))^3} \leq \int_\Omega |f(u_n)u_n|\, dx + \int_{\Gamma_1} |g(x)|\, |u_n(x)|\, d\Gamma.$$

Montrons que ceci est impossible. Posons $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_V}$. On a donc $\|v_n\|_V = 1$ et

$$\alpha C_K \|v_n\|^2_{(H^1(\Omega))^3} \leq \int_\Omega \left| \frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3}} v_n \right| dx + \int_{\Gamma_1} \left| \frac{g(x)}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3}} v_n \right| d\Gamma.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans V, et par suite, à une sous-suite près, $v_n \longrightarrow v$ dans $(L^2(\Omega))^3$.

On a aussi

$$\begin{array}{rcl} v_n & \longrightarrow & v \text{ p.p. dans } \Omega, \\ |v_n| & \leq & H \text{ avec } H \in \left(L^2(\Omega)\right)^3. \end{array}$$

Et comme $\|v_n\|_V = 1$, on a

$$\alpha C_K \leq \int_\Omega \left| \frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3}} v_n \right| dx + \int_{\Gamma_1} \left| \frac{g(x)}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3}} v_n \right| d\Gamma.$$

On pose

$$X_n = \int_\Omega \left| \frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3}} v_n \right| dx + \int_{\Gamma_1} \left| \frac{g(x)}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3}} v_n \right| d\Gamma,$$

et on montre maintenant que $X_n \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$, ce qui est impossible puisque X_n est minoré par la constante αC_K qui est strictement positive.

— Montrons que $\dfrac{|f(u_n)|\,|v_n|}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3}} \longrightarrow 0$ p.p. avec domination, on aura alors par le théorème de convergence dominée que

$$\int_\Omega \left| \frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3}} v_n \right| dx \to 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty.$$

On montre tout d'abord la domination. On a

$$\begin{aligned}
\frac{|f(u_n)|}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3}} &\leq \frac{|d| + C_2\,|u_n|}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega)^3}} \leq \frac{|d|}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega)^3}} + C_2\,|v_n| \\
&\leq \frac{|d|}{\|u_n\|_{(L^2(\Omega))^3}} + C_2\,|v_n| \\
&\leq |d| + C_2 H,
\end{aligned}$$

donc

$$\left| \frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3}} v_n \right| \leq (|d| + C_2 H)\, H \in \left(L^1(\Omega)\right)^3.$$

On montre maintenant la convergence p.p.. On a $v_n \longrightarrow v$ p.p. donc $\exists A$; $mes(A^c) = 0$ et $v_n(x) \longrightarrow v(x)\, \forall x \in A$.

1er cas : si $v(x) > 0$; $v_n(x) \longrightarrow v(x)$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n\|_{(L^2(\Omega))^3} = +\infty$ donc $u_n(x) = v_n(x)\,\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3} \longrightarrow +\infty$.

$$\frac{f(u_n(x))}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3}} v_n(x) = \frac{f(u_n(x))u_n(x)}{u_n(x)\,\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3}} v_n(x) = \frac{f(u_n(x))}{u_n(x)} \left(v_n(x)\right)^2 \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

On a utilisé ici $\lim\limits_{s\longrightarrow+\infty} f(s)/s = 0$.

2ème cas : si $v(x) < 0$; on a de même $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(u_n(x))}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3}} v_n(x) = 0$, car $\lim\limits_{s\longrightarrow-\infty} f(s)/s = 0$.

3ème cas : si $v(x) = 0$;

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(u_n(x))}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3}} v_n(x) \right| &\leq \frac{|d(x)| + C_2\,|u_n(x)|}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3}} |v_n(x)| \\
&\leq (|d(x)| + C_2\,|v_n(x)|)\,|v_n(x)| \\
&\longrightarrow 0 \text{ car } v(x) = 0.
\end{aligned}$$

En résumé on a $\dfrac{f(u_n)}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3}} v_n \longrightarrow 0$ p.p. sur Ω.

On a ainsi montré que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \left| \frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3}} v_n \right| dx = 0.$$

— Montrons maintenant que le terme

$$\int_{\Gamma_1} \left| \frac{g(x)}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3}} v_n \right| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty.$$

On a

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{\Gamma_1} \frac{|g(x)|\,|v_n|}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3}} d\Gamma &\leq \frac{\|g(x)\|_{(L^2(\Gamma_1))^3} \|v_n\|_{(L^2(\Gamma_1))^3}}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3}} \\ &\leq \frac{C_0 C \|v_n\|_{(H^1(\Omega))^3}}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3}} \\ &\leq \frac{C_0 C}{\|u_n\|_{(L^2(\Omega))^3}} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

car on a $\|u_n\|_{(L^2(\Omega))^3} \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Donc :

$$\lim_{n\rightarrow+\infty} \int_{\Gamma_1} \frac{|g(x)|\,|v_n|}{\|u_n\|_{(H^1(\Omega))^3}} d\Gamma = 0.$$

Ceci, est en contradiction avec $X_n \geq \alpha C_K$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On a donc montré qu'il existe $R > 0$ t.q. $(u = h(t,u)) \Rightarrow \|u\|_{(L^2(\Omega))^3} < R$. Ce qui montre (1). On a ainsi montré l'existence de solution à (2.9).

Chapitre 3

Différents problèmes aux limites pour le système de l'élasticité non linéaire dans des espaces de Sobolev à exposants variables

Plusieurs auteurs ont étudié le système de l'élasticité avec des lois de comportement particulières et en utilisant diverses techniques dans les espaces de Sobolev à exposants constants. Dans ce chapitre, nous considérons le problème de Robin pour le système de l'élasticité non linéaire avec loi de comportement généralisée. Les coefficients de l'élasticité dépendent de x et la densité des forces volumétriques dépend du déplacement. Nous considérons ce problème comme un opérateur de Leray-Lions et l'objectif principal de ce chapitre est d'appliquer les techniques de Galerkin et la théorie des opérateurs monotones pour prouver un théorème d'existence et d'unicité de la solution faible dans des espaces de Sobolev à exposants variables.

3.1 Notations et position du problème

Tout d'abord, nous introduisons les notations essentielles adoptées dans ce chapitre. Soit Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^N$ $(N = 3)$ à frontière lipschitzienne Γ. Pour un champ de déplacement donné u, on associe le tenseur de déformation non linéaire E défini par

$$E(\nabla u(x)) = \frac{1}{2}\left(\nabla u^T + \nabla u + \nabla u^T \nabla u\right),$$

dont les composants sont :

$$E_{ij}(\nabla u(x)) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right),\ 1 \le i,\ j \le 3. \tag{3.1}$$

Le tenseur des contraintes non linéaire correspondant $\sigma(u) = (\sigma_{ij}(u(x)))_{1\le i,\, j\le 3}$ est alors donné par :

$$\sigma_{ij}(u(x)) = \sum_{k,h=1}^{3} a_{ijkh}(x) E_{kh}(\nabla u(x)),\ 1 \le i,\ j \le 3, \tag{3.2}$$

qui décrit une relation non linéaire entre le tenseur des contraintes $(\sigma_{ij})_{i,\, j=1,\, 2,\, 3}$ et le tenseur de déformation $(E_{ij})_{i,\, j=1,\, 2,\, 3}$. Les coefficients de l'élasticité a_{ijkh} vérifient les propriétés de symétrie suivantes :

$$a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{ijhk},\ \forall\, 1 \le i,\ j,\ k,\ h \le 3.$$

Le but de ce chapitre, est de démontrer un théorème d'existence et d'unicité des solutions faibles du problème elliptique non linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(u(x)) = f_i(x, u(x)) \text{ dans } \Omega,\ 1 \le i \le 3, \\ \sigma_{ij}(u(x)) = \sum\limits_{k,h=1}^{3} a_{ijkh}(x) E_{kh}(\nabla u(x)) \text{ dans } \Omega,\ 1 \le i,\ j \le 3, \\ E_{ij}(\nabla u(x)) = \dfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum\limits_{m=1}^{3} \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right) \text{ dans } \Omega,\ 1 \le i,\ j \le 3, \\ \sum\limits_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(u(x))\,\eta_j + \mathbf{K} u_i = 0 \text{ sur } \Gamma,\ 1 \le i \le 3, \end{cases} \tag{3.3}$$

où $\mathbf{K}$ est un réel positif et $\eta = (\eta_j)$ est la normale unitaire extérieure à Γ.

Le problème (3.3) modélise le comportement d'un matériau hétérogène avec la condition de Robin sur la frontière. La considération de ce matériau n'est en aucun cas restrictive. En effet, nous pouvons appliquer cette étude à d'autres matériaux élastiques plus particuliers, mais ce cas permet de décrire facilement les différentes étapes de ce travail. Le tenseur des contraintes considéré ici est non linéaire. Comme cas particuliers, certains modèles ont été étudiés dans des espaces de Sobolev à exposants constants, citons à titre d'exemple Ciarlet [5], Dautray-Lions [7] et Lions [25].

Citons quelques cas particuliers du problème (3.3) :

1. Le problème de déplacement pour un matériau homogène ou hétérogène de St. Venant-Kirchoff où :

   - Les forces volumétriques appliquées f sont mortes (ne dépendent pas de u),

   - Le tenseur des contraintes est sous la forme (matériau de St. Venant-Kirchoff) :

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(u(x)) = \lambda\,(trE(\nabla u(x))) + 2\mu E_{ij}(\nabla u(x)), \\ \qquad 1 \leq i,\, j \leq 3,\, \lambda > 0,\, \mu > 0, \end{cases}$$

2. Les coefficients d'élasticité ont la forme :

$$a_{ijpq} = \lambda\delta_{ij}\delta_{pq} + \mu(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp}),\, 1 \leq i,\, j,\, p,\, q \leq 3$$

   où λ et μ peuvent dépendre ou non de x,

3. Les forces volumétriques appliquées f ont la forme $f(\xi) = |\xi|^{p(x)-1}\,\xi$,

4. Certains modèles appelés “LES” (Large Eddy Simulations) utilisés en mécanique des fluides. Ces problèmes sont :

$$-div(\psi(x)a(\nabla u(x))) = f(x).$$

   Pour $\psi \equiv 1$ et $a(\xi) = |\xi|^{p(x)-2}\,\xi$, l'équation ci-dessus s'écrit :

$$-div(|\nabla u|^{p(x)-2}\,\nabla u) = f.$$

   L'opérateur $\Delta_{p(x)} : u \longrightarrow \Delta_{p(x)}(u) = div(|\nabla u|^{p(x)-2}\,\nabla u)$ s'appelle le $p\,(x)$-Laplacian.

Le cadre fonctionnel du problème considéré (3.3) est celui des espaces de Lebesgue et Sobolev avec exposants variables (voir paragraphe 1.1.2.). La nécessité de travailler avec le concept des espaces de Sobolev à exposants variables est motivée par l'apparition de ces espaces lors de la modélisation des fluides électrorhéologiques et thermorhéologiques (voir [37]) et en traitement d'images (voir [4]).

3.2 Quelques propriétés des opérateurs E_{ij}

Pour la suite de ce travail, nous aurons besoin de quelques propriétés du tenseur de déformation (3.1).

Pour cela, on a le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 *(quelques propriétés des opérateurs E_{ij})*

Pour $u \in \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega) = \left(W_0^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3 \cap \left(W^{2,p(x)}(\Omega)\right)^3$, *avec* $3 < p(x) < +\infty$.

Les composantes E_{kh} du tenseur de déformation de St. Venant-Kirchoff E vérifient les propriétés suivantes :

1) *(Continuité) les* $E_{kh}(\xi)$, $k,\, h = 1$ *à* 3, *sont des fonctions continues,*

2) *(Coercivité)* $\exists \alpha > 0$; *tel que* $E_{kh}(\xi)\,\xi_{ij} \geq \alpha\,|\xi|^{p(x)}$, $\forall\, i,\, j,\, k,\, h = 1$ *à* 3,

3) $E_{kh}(\nabla u)\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^1(\Omega), \forall\, i,\, j,\, k,\, h = 1$ *à* 3,

4) *(Monotonie) soient les fonctions* $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} : \Omega \longrightarrow \left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$, $x \longrightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)$ *et* $\frac{\partial u_j}{\partial x_i} : \Omega \longrightarrow \left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$, $x \longrightarrow \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x)$, $i,\, j = 1$ *à* 3; *alors les opérateurs*

$$E_{ij}(.) \text{ de } \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega) \text{ dans } \left(\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)\right)',\ i,\, j = 1 \text{ à } 3,$$

sont monotones.

Preuve du Théorème 3.2.1 :

1) La continuité de E_{kh} :

Pour $3 < p(x)$, l'espace $W^{1,p(x)}(\Omega)$ est une algèbre, donc

$$u,\, v \in W^{1,p(x)}(\Omega) \Rightarrow uv \in W^{1,p(x)}(\Omega).$$

On a donc pour $u \in \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega) = \left(W_0^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3 \cap \left(W^{2,p(x)}(\Omega)\right)^3$:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_h},\ \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \text{ et } \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial u_m}{\partial x_k}\frac{\partial u_m}{\partial x_h} \in W^{1,p(x)}(\Omega),$$

et par conséquent $E_{kh}(\nabla u) \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. En plus, pour $3 < p(x)$, on a l'injection continue $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$, donc E_{kh}, $k,\, h = 1$ à 3 sont continues.

2) La coercivité :

Pour la coercivité des composantes E_{kh} voir [32].

3) $E_{kh}(\nabla u)\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^1(\Omega), \forall\, i,\, j,\, k,\, h = 1$ à 3,

En utilisant la remarque 1.1.9, on a :

$$\begin{aligned}
|E_{kh}(\nabla u)|^{p(x)} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{p(x)} \left|\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k} + \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial u_m}{\partial x_k}\frac{\partial u_m}{\partial x_h}\right)\right|^{p(x)}, \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{p(x)} \times 2^{p^+-1} \left[\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k}\right|^{p(x)} + \left|\sum_{m=1}^{3} \frac{\partial u_m}{\partial x_k}\frac{\partial u_m}{\partial x_h}\right|^{p(x)}\right], \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{p(x)} \times 2^{p^+-1} \left[2^{p^+-1}\left(\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_h}\right|^{p(x)} + \left|\frac{\partial u_h}{\partial x_k}\right|^{p(x)}\right) + \left|\sum_{m=1}^{3} \frac{\partial u_m}{\partial x_k}\frac{\partial u_m}{\partial x_h}\right|^{p(x)}\right],
\end{aligned}$$

donc

$$E_{kh}\left(\nabla u\right) \in L^{p(x)}(\Omega),\; k,\; h = 1 \text{ à } 3,$$

et comme $p(x) > p'(x)$ dès que $p(x) > 3$, on a :

$$E_{kh}\left(\nabla u\right) \in L^{p'(x)}(\Omega),\; k,\; h = 1 \text{ à } 3.$$

Prenons alors $v \in \mathbf{W}^{p(x)}\left(\Omega\right)$, on a $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^{p(x)}(\Omega)$, $\forall\, 1 \leq i,\; j \leq 3$. On a donc par l'inégalité de Hölder :

$$E_{kh}\left(\nabla u\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^1(\Omega),\; i,\; j,\; k,\; h = 1 \text{ à } 3.$$

4) La monotonie :

En utilisant la règle $\frac{1}{2}(a^2+b^2) \geq -ab$, avec $a = \frac{\partial u_m}{\partial x_i}$ et $b = \frac{\partial u_m}{\partial x_j}$, on a :

$$E_{ij}(u) \geq \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \tfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \tfrac{1}{4}\sum_{m=1}^{3}\left(\left(\tfrac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial u_m}{\partial x_j}\right)^2\right) =$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \tfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \tfrac{1}{4}\left(\sum_{m=1}^{3}\left(\tfrac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_{m=1}^{3}\left(\tfrac{\partial u_m}{\partial x_j}\right)^2\right),\; i,\; j = 1 \text{ à } 3,$$

et par conséquence :

$$\begin{aligned}\langle E_{ij}(u) - E_{ij}(v), u - v\rangle &\geq \tfrac{1}{2}\left\langle\left(\tfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \tfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \left(\tfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \tfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), u - v\right\rangle \\ -\tfrac{1}{4}\left\langle\left(\sum_{m=1}^{3}\left(\tfrac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_{m=1}^{3}\left(\tfrac{\partial u_m}{\partial x_j}\right)^2\right) \right. &- \left.\left(\sum_{m=1}^{3}\left(\tfrac{\partial v_m}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_{m=1}^{3}\left(\tfrac{\partial v_m}{\partial x_j}\right)^2\right), u - v\right\rangle.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Pour conclure, il faut démontrer que le second membre de (3.4) est positif. Pour cela, on sépare le second membre de (3.4) en partie linéaire et non linéaire.

Soit la fonction linéaire $\Omega \xrightarrow{J_x} \mathbb{R}^{3\times 3} \xrightarrow{A_{ij}} \mathbb{R}$, définie par

$$(A_{ij}\circ J_x)(x) = A_{ij}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x), \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x)\right),\; i,\; j = 1 \text{ à } 3,$$

et la fonction non linéaire $\Omega \xrightarrow{J_x} \mathbb{R}^{3\times 3} \xrightarrow{B_{ij}} \mathbb{R}$, définie par

$$(B_{ij}\circ J_x)(x) = B_{ij}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x), \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right) = -\frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x)\right)^2 + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\right)^2\right),\; i,\; j = 1 \text{ à } 3.$$

Les fonctions A_{ij} et B_{ij} sont continues pour $p(x) > 3$. Reste à montrer que, $\forall i,\; j = 1$ à 3, les A_{ij} sont croissantes sur $\mathbb{R}$, les B_{ij} croissantes sur $\mathbb{R}^-$ et les $A_{ij} + B_{ij}$ croissantes sur $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$.

1. Démontrons que les A_{ij} sont croissantes : soit la fonction

$$\Omega \xrightarrow{J_x} \mathbb{R} \xrightarrow{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \mathbb{R}, \text{ définie par } \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \circ J_x\right)(x) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x),\ i,\ j = 1 \text{ à } 3.$$

On note

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = t_j \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \tau_i,$$

et

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) = t_{ij} \text{ et } \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x) = \tau_{ji},$$

la fonction $t \longmapsto \frac{1}{2}t$ de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, étant croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\rangle &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0. \end{aligned}$$

Donc, les A_{ij} sont croissantes.

2. Démontrons que les B_{ij} sont croissantes : soit la fonction

$$\Omega \xrightarrow{J_x} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \xrightarrow{B_{ij}} \mathbb{R},$$

définie par

$$(B_{ij} \circ J_x)(x) = B_{ij}(t_j, \tau_i) = -\frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x)\right)^2 + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\right)^2\right),\ i,\ j = 1 \text{ à } 3.$$

Comme au point 1., on note

$$t_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x),\ \ \tau_{ji} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x),\ \ \forall\, i,\ j = 1 \text{ à } 3,$$

$$B_{ij}(t_j, \tau_i) = -\frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x)\right)^2 + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\right)^2\right),$$

donc

$$\begin{aligned} B_{ij}(t_j, \tau_i) &= -\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{3} t_{ij}^2 + \sum_{j=1}^{3} \tau_{ji}^2\right) \\ &\geq -\frac{1}{4}\left(6 \times \underset{1\leq i,\ j\leq 3}{Max}\left(t_{ij}^2, \tau_{ji}^2\right)\right) = -\frac{3}{2}\varkappa^2. \end{aligned}$$

La fonction $f(\varkappa) = -\frac{3}{2}\varkappa^2$ étant continue et croissante sur $\mathbb{R}^-$, on en déduit que les B_{ij} sont croissantes sur $\mathbb{R}^-$.

3. Démontrons que les $A_{ij} + B_{ij}$ sont croissantes : les démonstrations des points 1. et 2. impliquent que la somme $A_{ij} + B_{ij}$, $\forall\, i,\, j = 1$ à 3, correspond à la somme des deux fonctions $f(\varkappa) + g(\varkappa) = \varkappa - \frac{3}{2}\varkappa^2$, $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, évidemment continue et croissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$, comme différentielle de la fonction convexe $h(x) = \frac{1}{2}\varkappa^2 - \frac{1}{2}\varkappa^3$ sur $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$. Donc, (3.4) est vérifiée et par conséquence

$$\langle E_{ij}(u) - E_{ij}(v), u - v\rangle \geq \langle (A_{ij} + B_{ij})(u) - (A_{ij} + B_{ij})(v), u - v\rangle \geq 0,\ \forall\, i,\, j = 1 \text{ à } 3.$$

Autrement dit, les $E_{ij}(u)$, $i,\, j = 1$ à 3, sont monotones de $\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)$ dans $\left(\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)\right)'$, $i,\, j = 1$ à 3.

Corollaire 3.2.2 *Sous les mêmes hypothèses, du théorème ci- dessus, l'opérateur*

$$-div(a_{ijkh}(x)E_{ij}(.)) \text{ est monotone de } \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega) \text{ dans } \left(\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)\right)'.$$

sous l'hypothèse

$$\exists\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}_+^*;\ \alpha \leq a_{ijkh}(x) \leq \beta,\ p.p., \forall i,\ j,\ k,\ h = 1 \text{ à } 3.$$

Démonstration

On a :

$$\forall(u,v) \in \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)^2,\ \langle -div(a_{ijkh}(x)E_{ij}(u)) - (-div(a_{ijkh}(x)E_{ij}(v)), u - v\rangle = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega a_{ijkh}(x)(E_{ij}(u) - E_{ij}(v)) \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial v}{\partial x_j}\right) dx.$$

Le point 4. du théorème 3.2.1 implique que

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega (E_{ij}(u) - E_{ij}(v)) \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial v}{\partial x_j}\right) dx \geq 0,$$

d'où le résultat désiré.

Remarque 3.2.3 *Le théorème 3.2.1 reste vrai pour $u \in \mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)$ ou $u \in \mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)$, tel que*

$$\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega) = \left\{u \in \left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3 \cap \left(W^{2,p(x)}(\Omega)\right)^3,\ \int_\Omega u(x)\, dx = 0\right\},$$

et

$$\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega) = \left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3 \cap \left(W^{2,p(x)}(\Omega)\right)^3.$$

3.3 Théorème d'existence et d'unicité

On distingue trois cas :

Le premier cas : K est suffisamment grand

Dans ce cas, on obtient le problème de Dirichlet [29] :

$$\begin{cases} -\sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u(x)) = f_i(x, u(x)) \text{ dans } \Omega,\ 1 \leq i \leq 3, \\ \sigma_{ij}(u(x)) = \sum\limits_{k,h=1}^{3} a_{ijkh}(x)\ E_{kh}(\nabla u(x)) \text{ dans } \Omega,\ 1 \leq i,\ j \leq 3, \\ E_{ij}\left(\nabla u(x)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum\limits_{m=1}^{3} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \text{ dans } \Omega,\ 1 \leq i,\ j \leq 3, \\ u_i = 0 \text{ sur } \Gamma,\ 1 \leq i \leq 3. \end{cases} \tag{3.5}$$

Le deuxième cas : K $= 0$

Dans ce cas, on obtient le problème de Neumann [41] :

$$\begin{cases} -\sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u(x)) = f_i(x, u(x)) \text{ dans } \Omega,\ 1 \leq i \leq 3, \\ \sigma_{ij}(u(x)) = \sum\limits_{k,h=1}^{3} a_{ijkh}(x)\ E_{kh}(\nabla u(x)) \text{ dans } \Omega,\ 1 \leq i,\ j \leq 3, \\ E_{ij}\left(\nabla u(x)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum\limits_{m=1}^{3} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \text{ dans } \Omega,\ 1 \leq i,\ j \leq 3, \\ \sum\limits_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\left(u\left(x\right)\right) \eta_j = 0 \text{ sur } \Gamma,\ 1 \leq i \leq 3. \end{cases} \tag{3.6}$$

Le troisième cas : K $\neq 0$

Dans ce cas, on obtient le problème de Robin (cas général) :

$$\begin{cases} -\sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u(x)) = f_i(x, u(x)) \text{ dans } \Omega,\ 1 \leq i \leq 3, \\ \sigma_{ij}(u(x)) = \sum\limits_{k,h=1}^{3} a_{ijkh}(x)\ E_{kh}(\nabla u(x)) \text{ dans } \Omega,\ 1 \leq i,\ j \leq 3, \\ E_{ij}\left(\nabla u(x)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum\limits_{m=1}^{3} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \text{ dans } \Omega,\ 1 \leq i,\ j \leq 3, \\ \sum\limits_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\left(u\left(x\right)\right) \eta_j + \mathbf{K} u_i = 0 \text{ sur } \Gamma,\ 1 \leq i \leq 3. \end{cases} \tag{3.7}$$

3.3.1 Étude du problème de Dirichlet

Cherchons une forme faible adéquate de (3.5). Soit $u \in \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega) = \left(W_0^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3 \cap \left(W^{2,p(x)}(\Omega)\right)^3$ muni de la norme définie par $\|.\|_{\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)} = \|.\|_{\left(W_0^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3}$.

On a d'après le théorème 3.2.1

$$a_{ijkh}(x)E_{kh}\left(\nabla u\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\in L^1(\Omega),\ i,\ j,\ k,\ h=1 \text{ à } 3,$$

vu que $a_{ijkh}\in L^\infty\left(\Omega\right).$

Il est donc naturel de chercher $u\in\mathbf{W}^{p(x)}\left(\Omega\right)$ et de prendre les fonctions test dans $\mathbf{W}^{p(x)}\left(\Omega\right)$.

On rappelle aussi que si $f(.,s)\in\left(L^{p'(x)}\left(\Omega\right)\right)^3$, l'application $v\rightarrow\int\limits_\Omega f(x,u(x))v\left(x\right)dx$ est linéaire continue de $\mathbf{W}^{p(x)}\left(\Omega\right)$ dans $\mathbb{R}$. C'est donc un élément du dual de $\mathbf{W}^{p(x)}\left(\Omega\right)$ (ce dual est noté $\left(\mathbf{W}^{p(x)}\left(\Omega\right)\right)'$), on note encore f cet élément de $\left(\mathbf{W}^{p(x)}\left(\Omega\right)\right)'$, c'est-à-dire que pour $f\in\left(L^{p'(x)}(\Omega)\right)^3$, on a

$$\langle f,v\rangle_{\left(\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)\right)',\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)}=\int_\Omega f\left(x,u(x)\right)v\left(x\right)dx,\ \forall v\in\mathbf{W}^{p(x)}\left(\Omega\right).$$

La forme faible de (3.5) que l'on considère est donc :

$$\left\{\begin{array}{c} u\in\mathbf{W}^{p(x)}\left(\Omega\right), \\ \sum\limits_{i,j=1}^{3}\sum\limits_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u(x))\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}dx \\ =\langle f,v\rangle_{\left(\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)\right)',\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)},\ \forall v\in\mathbf{W}^{p(x)}\left(\Omega\right). \end{array}\right. \tag{3.8}$$

On travaille avec les hypothèses suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} 1)\ a_{ijkh}\in L^\infty\left(\Omega\right);\ \exists\alpha_0>0;\ a_{ijkh}\geq\alpha_0 \text{ p.p. dans } \Omega, \\ 2)\ f=(f_1,f_2,f_3)\in\left(L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}\left(\Omega\right)\right)^3, \end{array}\right. \tag{3.9}$$

pour montrer l'existence de u, solution du problème (3.8).

Théorème 3.3.1 *Sous les hypothèses (3.9), il existe $u\in\mathbf{W}^{p(x)}\left(\Omega\right)$ solution de (3.8). Si de plus f ne dépend pas de u, et $\left(E_{kh}\left(\zeta\right)-E_{kh}\left(\eta\right)\right)\left(\zeta_{ij}-\eta_{ij}\right)>0$, $\forall\zeta,\ \eta\in\mathbb{R}^{3\times3}$, $\zeta_{ij},\ \eta_{ij}\in\mathbb{R}$, $\zeta_{ij}\neq\eta_{ij}$, alors il existe une unique solution u de (3.8).*

Pour la démonstration du théorème 3.3.1, nous aurons besoin des propriétés du tenseur de déformation E (théorème 3.2.1) et les lemmes suivants :

Lemme 3.3.2 *Soit $p:\Omega\rightarrow\,]1,+\infty[$. Si $f_n\rightarrow f$ dans $L^{p(x)}\left(\Omega\right)$ et $g_n\rightarrow g$ faiblement dans $L^{p'(x)}\left(\Omega\right)$. Alors*

$$\int_\Omega f_n\,g_n\,dx\rightarrow\int_\Omega f\,g\,dx \text{ lorsque } n\rightarrow\infty.$$

Lemme 3.3.3 ***(Opérateur coercif dans*** $\mathbb{R}^N$*)* *Soit $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continue. On suppose que T est coercif, c'est-à-dire que*

$$\frac{T(v).v}{|v|} \to +\infty \text{ quand } |v| \to +\infty.$$

Soit $b \in \mathbb{R}^N$. Alors, il existe $v \in \mathbb{R}^N$ t.q. $T(v) = b$. L'opérateur T est donc surjectif.

Démonstration du lemme 3.3.3 :

On utilise le degré topologique de Brouwer (ce qui possible car on est en dimension finie). On pose $h(t, v) = tT(v) + (1-t)v$. Pour $t = 0$, on a $h(0, v) = v$ (donc $h(0, v) = I$, où I est l'opérateur $v \to v$). Pour $t = 1$ on a $h(1, v) = T(v)$. Pour appliquer le degré, on remarque d'abord que l'application $h : [0,1] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est continue (car T est continue).

On veut ensuite montrer qu'il existe $R > 0$ t.q.

$$t \in [0,1], \ v \in \mathbb{R}^N \text{ et } h(t,v) = b \Rightarrow |v| < R. \tag{3.10}$$

On suppose qu'on a démontré (3.10). Quitte à augmenter R, on peut aussi supposer que $|b| < R$. On pose $B_R = \left\{x \in \mathbb{R}^N \text{ t.q. } |x| < R\right\}$. Par invariance par homotopie du degré, on a donc que $d(h(t,.), B_R, b)$ ne dépend pas de t, et donc :

$$d(T, B_R, b) = d(I, B_R, b).$$

Comme $b \in B_R$, on a $d(I, B_R, b) = 1$ et donc $d(T, B_R, b) = 1$. On en déduit l'existence de $v \in B_R$ tel que $T(v) = b$.

Il reste à démontrer qu'il existe $R > 0$ vérifiant (3.10).

Soit $t \in [0,1]$ et $v \in \mathbb{R}^N$ t.q. $h(t,v) = b$, c'est-à-dire $tT(v) + (1-t)v = b$.

On a donc $tT(v).v + (1-t)v.v = b.v \le |b||v|$ et donc, si $v \neq 0$,

$$t\frac{T(v).v}{|v|} + (1-t)|v| = t\frac{T(v).v}{|v|} + (1-t)\frac{v.v}{|v|} \le |b|.$$

Comme $\frac{T(w).w}{|w|} \to +\infty$ lorsque $|w| \to +\infty$, il existe $R > 0$ t.q.

$$|w| \ge R \Rightarrow \min\left(\frac{T(w).w}{|w|}, \ |w|\right) > |b|.$$

On en déduit que $|v| < R$. Ceci termine la démonstration.

Ce lemme se généralise à n'importe quel espace de dimension finie :

Lemme 3.3.4 ***(Opérateur coercif en dimension finie)*** *Soit V un espace de dimension finie, et $T : V \to V'$ continue (noter que $\dim V' = \dim V < +\infty$). On suppose que T est coercif, c'est-à-dire :*

$$\frac{\langle T(v).v\rangle_{V',V}}{\|v\|_V} \to +\infty \text{ quand } \|v\|_V \to +\infty.$$

Alors, pour tout $b \in V'$ il existe $v \in V$ t.q. $T(v) = b$.

Démonstration du lemme 3.3.4 :

On se ramène à $\mathbb{R}^N$. Soit $N = \dim V$. On choisit une base de V, notée $(e_1, ..., e_N)$, et on note $(e_1^*, ..., e_N^*)$ la base duale de V' (c'est-à-dire $\langle e_i^*, e_j\rangle_{V',V} = \delta_{ij}$). On définit une application I de $\mathbb{R}^N$ dans V et une application J de $\mathbb{R}^N$ dans V' par

$$I(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i \text{ et } J(\beta) = \sum_{i=1}^{N} \beta i e_i^* \text{ pour } \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^N.$$

L'opérateur I est une bijection linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans V et l'opérateur J est une bijection linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans V'.

Soit $\widetilde{T} = J^{-1} \circ T \circ I$. L'opérateur $\widetilde{T}$ est continu de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^N$. On pose $v = I(\alpha)$ et $\beta = \widetilde{T}(\alpha)$ (donc $\beta = J^{-1}(T(v))$). On a donc

$$\begin{aligned} \widetilde{T}(\alpha).\alpha &= \beta.\alpha = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \alpha_i = \left\langle \sum_{j=1}^{N} \beta_j e_j^*, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i \right\rangle_{V',V} = \\ \langle J(\beta), I(\alpha)\rangle_{V',V} &= J(\beta)\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i\right) = \langle T(v), v\rangle_{V',V}. \end{aligned}$$

En prenant comme norme sur $\mathbb{R}^N$, $\|\alpha\| = \|I(\alpha)\|_V$, l'hypothèse de coercivité sur T donne alors

$$\lim_{\|\alpha\| \to +\infty} \frac{\widetilde{T}(\alpha).\alpha}{\|\alpha\|} = +\infty.$$

Par équivalence des normes en dimension finie, on a donc aussi

$$\lim_{|\alpha| \to +\infty} \frac{\widetilde{T}(\alpha).\alpha}{|\alpha|} = +\infty.$$

On peut donc appliquer le lemme 3.3.3 à $\widetilde{T}$.

Soit $b \in V'$. On pose $\beta = J^{-1}(b)$. Le lemme 3.3.3 donne l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}^N$ t.q. $\widetilde{T}(\alpha) = \beta$. On pose $v = I(\alpha)$ et on a alors $T(v) = T \circ I(\alpha) = J \circ \widetilde{T}(\alpha) = J(\beta) = b$. On a ainsi montré l'existence de v dans V t.q. $T(v) = b$.

Démonstration du théorème 3.3.1

Existence de la solution en dimension finie

L'espace $\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)$ est séparable. Il existe donc une famille dénombrable $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dense dans $\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)$. Soit $V_n = Vect\{f_i,\ i = 1, ..., n\}$ l'espace vectoriel engendré par les n premières fonctions de cette famille. On a donc $\dim V_n \leq n$, $V_n \subset V_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on a $\overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n} = \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)$. On en déduit que pour tout $v \in \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)$, il existe $v_n \in V_n$, telle que $v_n \to v$ dans $\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)$ lorsque $n \to +\infty$.

Dans cette étape, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on cherche u_n solution du problème suivant, posé en dimension finie :

$$\begin{cases} u_n \in V_n, \\ \sum\limits_{i,j=1}^{3}\sum\limits_{k,h=1}^{3}\int\limits_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_n(x))\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}dx \\ = \langle f, v\rangle_{\left(\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)\right)',\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)},\ \forall v \in V_n. \end{cases} \tag{3.11}$$

L'application $v \to \langle f, v\rangle_{\left(\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)\right)',\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)}$ est une application linéaire de V_n dans $\mathbb{R}$ (elle est donc aussi continue car $\dim V_n < +\infty$). On note b_n cette application. On a donc $b_n \in V_n'$ et

$$\langle b_n, v\rangle_{V_n',V_n} = \langle f, v\rangle_{\left(\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)\right)',\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)}.$$

Soit $u \in V_n$. On note $T_n(u)$ l'application de V_n dans V_n' qui a $v \in V_n$ associe

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u(x))\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx.$$

Cette application est linéaire, c'est donc aussi un élément de V_n' et on a

$$\langle T_n(u), v\rangle_{V_n',V_n} = \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u(x))\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx.$$

On a ainsi défini une application T de V_n dans V_n'. On va montrer que T est continue et coercive. On pourra ainsi en déduire, par le lemme 3.3.4, que T est surjectif, et donc qu'il existe $u_n \in V_n$ vérifiant $T(u_n) = b_n$, c'est-à-dire u_n solution du problème (3.11).

a- Continuité de T_n. Pour simplifier les notations, on note $V = V_n$ et $T = T_n$. On munit V de la norme définie par $\|.\|_V = \|.\|_{\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)}$. Soit u et $\overline{u} \in V$, on a :

$$\begin{aligned}
\|T(u) - T(\overline{u})\|_{V'} &= \max_{v\in V,\ \|v\|_V=1} \left|\langle T(u) - T(\overline{u}), v\rangle_{V',V}\right| \\
&= \max_{v\in V,\ \|v\|_{\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)}=1} \left|\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)(E_{kh}(\nabla u) - E_{kh}(\nabla\overline{u}))\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx\right| \\
&\leq \max_{v\in \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega),\ \|v\|_{\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)}=1} \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\left|\int_\Omega a_{ijkh}(x)(E_{kh}(\nabla u) - E_{kh}(\nabla\overline{u}))\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx\right|.
\end{aligned}$$

On pose

$$a = \|a_{ijkh}\|_{L^\infty(\Omega)},$$

on obtient alors par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
\|T(u) - T(\overline{u})\|_{V'} &\leq \max_{v\in \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega),\ \|v\|_V=1} 2a\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\|E_{kh}(\nabla u) - E_{kh}(\nabla\overline{u})\|_{L^{p'(x)}(\Omega)}\left\|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \\
&\leq \max_{v\in \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega),\ \|v\|_V=1} 18a\sum_{k,h=1}^{3}\|E_{kh}(\nabla u) - E_{kh}(\nabla\overline{u})\|_{L^{p'(x)}(\Omega)}\|v\|_{\mathbf{W}^{p(x)}} \\
&\leq 18a\sum_{k,h=1}^{3}\|E_{kh}(\nabla u) - E_{kh}(\nabla\overline{u})\|_{L^{p'(x)}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Donc si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de V t.q. $u_n \to \overline{u}$ dans V, on a

$$\|T(u_n) - T(\overline{u})\|_{V'} \leq 18a\sum_{k,h=1}^{3}\|E_{kh}(\nabla u_n) - E_{kh}(\nabla\overline{u})\|_{L^{p'(x)}(\Omega)}.$$

Du théorème 3.2.1, on a E_{kh} est continue, et par suite $E_{kh}(\nabla u_n) \to E_{kh}(\nabla\overline{u})$ p.p., on a aussi d'après la remarque 1.1.9, $E_{kh}(\nabla u)$ est bornée dans $L^{p(x)}(\Omega)$, donc elle est bornée dans $L^{p'(x)}(\Omega)$ car $p(x) > p'(x)$, dès que $p(x) > 3$. Donc par le théorème de convergence dominée de Lebesgue $E_{kh}(\nabla u_n) \to E_{kh}(\nabla\overline{u})$ dans $L^{p'(x)}(\Omega)$, $\forall\, k,\ h = 1$ à 3. On a ainsi montré que $T(u_n) \to T(\overline{u})$ dans V', et donc que T est continue.

b- Coercivité de T_n

Grâce à l'hypothèse (1) de (3.9), et la coercivité de E_{kh} (voir théorème 3.2.1),

$$\begin{aligned}
\langle T(u).u\rangle_{V',V} &= \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u(x))\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx \\
&\geq 81\alpha\alpha_0\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx,
\end{aligned}$$

en utilisant maintenant (ii) et (iii) de la proposition 1.1.3, on trouve

$$\begin{aligned}
\langle T(u).u\rangle_{V',V} &\geq 81\alpha\alpha_0\min\left\{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-},\ \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^+}\right\} \\
&\geq C_1\min\left\{\|u\|_V^{p^-},\ \|u\|_V^{p^+}\right\},
\end{aligned}$$

avec $C_1 = 81\alpha\alpha_0$.

On a ainsi montré que T est coercive. On peut donc appliquer le lemme 3.3.4. Il donne l'existence d'une solution au problème en dimension finie (3.11).

Existence de la solution en dimension infinie

On a montré l'existence d'une solution au problème (3.11). On va maintenant tenter un passage à la limite sur ce problème lorsque $n \mapsto +\infty$ pour montrer l'existence d'une solution au problème (3.8). Pour cela nous allons :

(a) obtenir une estimation sur u_n.

(b) un passage à la limite sur le problème (3.11) de manière à avoir l'existence d'une solution u du problème (3.8) comme limite des solutions u_n de problème (3.11).

(c) astuce pour montrer que la limite du terme non linéaire est bien le terme qu'on veut.

(a) Estimation sur u_n

Par la coercivité de E_{kh}, si on prend $v = u_n$ dans (3.11), on obtient :

$$C_1 \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} \, dx \leq \|f\|_{\left(\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)\right)'} \|u_n\|_{\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)} .$$

D'après la proposition 1.1.3 on a :

$$C_1 \min \left\{ \|u_n\|^{p^-}_{\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)} , \|u_n\|^{p^+}_{\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)} \right\} \leq C_1 \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} \, dx,$$

d'où

$$C_1 \min \left\{ \|u_n\|^{p^-}_{\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)} , \|u_n\|^{p^+}_{\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)} \right\} \leq \|f\|_{\left(\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)\right)'} \|u_n\|_{\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)} .$$

(b) Passage à la limite

D'après **(a)** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)$, qui est réflexif. On en déduit qu'il existe une sous-suite encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to u$ faiblement dans $\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)$.

La suite $(E_{kh}(\nabla u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{p'(x)}(\Omega)$, qui est réflexif. Donc il existe $\rho \in L^{p'(x)}(\Omega)$ telle que, à une sous-suite près,

$$E_{kh}(\nabla u_n) \to \rho \text{ faiblement dans } L^{p'(x)}(\Omega) .$$

Soit $v \in \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)$, donc il existe $v_n \in V_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ t.q.

$$v_n \to v \text{ dans } \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega) ,$$

$$\nabla v_n \to \nabla v \text{ dans } \left(L^{p(x)}(\Omega)\right)^9 .$$

On remplace v par v_n dans (3.11), on obtient :

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_n(x))\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_j}(x)dx = \langle f, v_n\rangle .$$

Puisque $\langle f, v_n\rangle \to \langle f, v\rangle$, $E_{kh}(\nabla u_n) \to \rho$ faiblement dans $L^{p'(x)}(\Omega)$ et $\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_j} \to \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ fortement dans $L^{p(x)}(\Omega)$ (car $\nabla v_n \to \nabla v$ dans $\left(L^{p(x)}(\Omega)\right)^9$ fortement), donc par le lemme 3.3.2, on a

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx = \\ \langle f, v\rangle_{\left(\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)\right)',\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)}, \ \forall v \in \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega) . \end{cases} \tag{3.12}$$

On a ainsi prouvé l'existence de $u \in \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)$ t.q. u est la limite faible dans $\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et t.q. la limite faible dans $L^{p'(x)}(\Omega)$ de la suite $(E_{kh}(\nabla u_n))_{n\in\mathbb{N}}$, notée ρ, vérifie (3.12). Si ρ était égal à $E_{kh}(\nabla u)$, on aurait terminé. Malheureusement, ceci n'est pas évident car E_{kh} est non linéaire.

(c) Limite du terme non linéaire

Pour terminer, il reste à démontrer que

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx = \tag{3.13}$$

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u(x))\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx, \ \forall v \in \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega) .$$

(I) Pour montrer (3.13), on commence par étudier la limite de

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_n(x))\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_j}dx.$$

L'astuce consiste à utiliser (3.12). En effet

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_n(x))\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_j}dx = \langle f, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle ,$$

car

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega) \text{ faiblement.}$$

Mais on sait que u satisfait (3.12), et donc :

$$\langle f, u\rangle = \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\rho\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx.$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega}a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_n(x))\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_j}dx$$
$$=\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega}a_{ijkh}(x)\rho\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx.$$

(II) Démonstration de (3.13)

Soit $v\in\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)$, il existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $v_n\in V_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $v_n\to v$ dans $\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)$ lorsque $n\to+\infty$. On va passer à la limite dans le terme

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega}a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_n(x))\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_j}dx,$$

grâce à l'hypothèse (1) de (3.9) et la monotonie de E_{kh} (voir théorème 3.2.1).

En effet,

$$0\le\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega}a_{ijkh}(x)(E_{kh}(\nabla u_n(x))-E_{kh}(\nabla v_n(x)))\left(\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_j}-\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_j}\right)dx=$$
$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega}a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_n(x))\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_j}dx-\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega}a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_n(x))\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_j}dx$$
$$-\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega}a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla v_n(x))\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_j}dx+\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega}a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla v_n(x))\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_j}dx$$
$$=T_{1,n}-T_{2,n}-T_{3,n}+T_{4,n}.$$

On a vu que en **(I)** :

$$\lim_{n\to+\infty}T_{1,n}=\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega}a_{ijkh}(x)\rho\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty}T_{2,n}=\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega}a_{ijkh}(x)\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx,$$

par produit d'une convergence forte dans $L^{p(x)}(\Omega)$ et d'une convergence faible dans $L^{p'(x)}(\Omega)$ (lemme 3.3.2).

De même,

$$\lim_{n\to+\infty}T_{3,n}=\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega}a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla v)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx,$$

par le produit d'une convergence forte dans $L^{p'(x)}(\Omega)$ et d'une convergence faible dans $L^{p(x)}(\Omega)$.

Enfin, on a aussi

$$\lim_{n\to+\infty} T_{4,n} = \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)E_{kh}\left(\nabla v\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx,$$

par le produit d'une convergence forte dans $L^{p'(x)}(\Omega)$ et d'une convergence forte dans $L^{p(x)}(\Omega)$.

Le passage à la limite dans l'inégalité donne donc :

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)\left(\rho - E_{kh}\left(\nabla v\right)\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)dx \geq 0 \text{ pour tout } v\in \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega).$$

On choisit maintenant astucieusement la fonction test v. On prend $v = u + \frac{1}{n}w$, avec $w \in \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On obtient ainsi :

$$-\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)\left(\rho - E_{kh}\left(\nabla u + \frac{1}{n}\nabla w\right)\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}dx \geq 0,$$

donc

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)\left(\rho - E_{kh}\left(\nabla u + \frac{1}{n}\nabla w\right)\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}dx \leq 0,$$

mais $u + \frac{1}{n}w \to u$ dans $\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)$, donc

$$E_{kh}\left(\nabla u + \frac{1}{n}\nabla w\right) \to E_{kh}\left(\nabla u\right) \text{ dans } L^{p'(x)}(\Omega).$$

En passant à la limite lorsque $n\to+\infty$, on obtient alors

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)\left(\rho - E_{kh}\left(\nabla u\right)\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}dx \leq 0,\ \forall w\in\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega).$$

Par linéarité (on peut changer w en $-w$), on a donc :

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)\left(\rho - E_{kh}\left(\nabla u\right)\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}dx = 0,\ \forall w\in\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega).$$

On en déduit que

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)\rho\frac{\partial w_i}{\partial x_j}dx = \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)E_{kh}\left(\nabla u\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}dx,\ \forall w\in\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega).$$

On a donc bien démontré que u est solution de (3.8).

Unicité

Supposons que f ne dépend pas de u, et $(E_{kh}(\zeta) - E_{kh}(\eta))(\zeta_{ij} - \eta_{ij}) > 0$, $\forall \zeta, \eta \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, ζ_{ij}, $\eta_{ij} \in \mathbb{R}$, si et seulement si $\zeta_{ij} \neq \eta_{ij}$. Soient u_1 et u_2 deux solutions de (3.8), donc

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_1(x))\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx\\&= \langle f, v\rangle_{\left(\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)\right)', \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)}, \forall v \in \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega),\end{aligned} \tag{3.14}$$

et

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_2(x))\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx\\&= \langle f, v\rangle_{\left(\mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)\right)', \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega)}, \forall v \in \mathbf{W}^{p(x)}(\Omega).\end{aligned} \tag{3.15}$$

On fait la différence des deux équations (3.14) et (3.15), et on remplace v par $u_1 - u_2$. On obtient :

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)\left(E_{kh}(\nabla u_1) - E_{kh}(\nabla u_2)\right)\left(\frac{\partial u_{1i}}{\partial x_j} - \frac{\partial u_{2i}}{\partial x_j}\right)dx = 0.$$

Or

$$M = a_{ijkh}(x)\left(E_{kh}(\nabla u_1) - E_{kh}(\nabla u_2)\right)\left(\frac{\partial u_{1i}}{\partial x_j} - \frac{\partial u_{2i}}{\partial x_j}\right) \geq 0,$$

et $M > 0$, si $\dfrac{\partial u_{1i}}{\partial x_j} \neq \dfrac{\partial u_{2i}}{\partial x_j}$, on a donc $\nabla u_1 = \nabla u_2$ dans $\left(L^{p(x)}(\Omega)\right)^9$, et par l'inégalité de Poincaré $u_1 = u_2$ dans $(L^{p(x)}(\Omega))^3$, et par suite $u_1 = u_2$ dans $\left(W_0^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3$.

3.3.2 Étude du problème de Neumann

Le problème (3.6) étant celui de Neumann, on doit imposer les conditions nécessaires d'existence a savoir la condition de compatibilité :

$$\int_\Omega f dx = 0.$$

Cherchons maintenant une forme faible de (3.6). Remarquons que si $u \in \mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)$, alors,

$$E_{kh}(\nabla u)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^1(\Omega),\ i,\ j,\ k,\ h = 1 \text{ à } 3,$$

grâce le théorème 3.2.1.

Où

$$\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega) = \left\{u \in \left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3 \cap \left(W^{2,p(x)}(\Omega)\right)^3,\ \int_\Omega u(x)\,dx = 0\right\},$$

est un sous espace fermé de $\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3 \cap \left(W^{2,p(x)}(\Omega)\right)^3$, muni de la norme définie par $\|u\|_{\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$ qu'équivalente à la restriction de la norme de $\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3$ à $\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)$.

En outre, si $f \in \left(L^{p'(x)}(\Omega)\right)^3$, alors l'application $v \to \int_\Omega f(x,u(x))v(x)\,dx$ est un élément de $(\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega))'$, on note encore f cet élément de $(\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega))'$, c'est-à-dire que pour $f \in \left(L^{p'(x)}(\Omega)\right)^3$, on a

$$\langle f, v\rangle_{(\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega))',\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)} = \int_\Omega f\left(x,u(x)\right)v\left(x\right)dx,\ \forall v \in \mathbf{H}^{p(x)}(\Omega).$$

Donc la forme faible de (3.6) est :

$$\begin{cases} u \in \mathbf{H}^{p(x)}(\Omega), \\ \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u(x))\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx = \langle f, v\rangle_{(\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega))',\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)},\ \forall v \in \mathbf{H}^{p(x)}(\Omega). \end{cases} \tag{3.16}$$

On travaille avec les hypothèses (3.9) pour montrer l'existence de u, solution du problème (3.16).

Théorème 3.3.5 *Sous les hypothèses (3.9), il existe $u \in \mathbf{H}^{p(x)}$ solution de (3.16). Si de plus f ne dépend pas de u, et $\left(E_{kh}(\zeta) - E_{kh}(\eta)\right)(\zeta_{ij} - \eta_{ij}) > 0$, $\forall \zeta,\ \eta \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\zeta_{ij},\ \eta_{ij} \in \mathbb{R}$, $\zeta_{ij} \neq \eta_{ij}$, alors il existe une unique solution u de (3.16).*

Pour la démonstration du théorème 3.3.5, on utilise le lemme 3.3.2, le lemme 3.3.4 et les propriétés du tenseur de déformation E (théorème 3.2.1).

Démonstration du théorème 3.3.5

Existence de la solution en dimension finie

L'espace $\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)$ est séparable comme un sous espace vectoriel fermé d'un espace séparable. Il existe donc une famille dénombrable $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dense dans $\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)$. Soit $Y_n = Vect\{f_i,\ i = 1, ..., n\}$ l'espace vectoriel engendré par les n premières fonctions de cette famille. On a donc $\dim Y_n \leq n$, $Y_n \subset Y_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on a $\overline{\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} Y_n} = \mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)$. On en déduit que pour tout $v \in \mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)$ il existe $v_n \in Y_n$, telle que $v_n \to v$ dans $\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)$ lorsque $n \to +\infty$.

Dans cette étape, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on cherche u_n solution du problème suivant :

$$\begin{cases} u_n \in Y_n, \\ \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_n(x))\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx = \langle f, v\rangle_{(\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega))',\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)},\ \forall v \in Y_n. \end{cases} \tag{3.17}$$

L'application $v \to \langle f, v\rangle_{(\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega))',\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)}$ est une application linéaire de Y_n dans $\mathbb{R}$, donc elle est continue. On note c_n cette application. Donc $c_n \in Y_n'$ et

$$\langle c_n, v\rangle_{Y_n',Y_n} = \langle f, v\rangle_{(\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega))',\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)} .$$

Soit $u \in Y_n$. On note $S_n(u)$ l'application de Y_n dans Y_n' qui a $v \in Y_n$ associe

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u(x))\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx.$$

Cette application est linéaire, donc c'est un élément de Y_n' et on a

$$\langle S_n(u), v\rangle_{Y_n',Y_n} = \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u(x))\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx.$$

On a défini une application S de Y_n dans Y_n'. On va montrer que S est continue et coercive. On pourra ainsi en déduire, par le lemme 3.3.4, qu'il existe $u_n \in Y_n$ solution du problème (3.17).

a- Continuité de S_n

On pose $Y = Y_n$ muni de la norme définie par $\|u\|_Y = \|u\|_{\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)}$ et on pose $S = S_n$. Soit u et $\overline{u} \in Y$, on a :

$$\begin{aligned}\|S(u) - S(\overline{u})\|_{Y'} &= \max_{v\in Y,\ \|v\|_Y=1}\left|\langle S(u) - S(\overline{u}), v\rangle_{Y',Y}\right|\\ &\le \max_{v\in\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega),\ \|v\|_{\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)}=1}\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\left|\int_\Omega a_{ijkh}(x)\left(E_{kh}(\nabla u) - E_{kh}(\nabla\overline{u})\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx\right|.\end{aligned}$$

En utilisant maintenant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}\|S(u) - S(\overline{u})\|_{Y'} &\le \max_{v\in\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega),\ \|v\|_{\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)}=1} 2a\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\|E_{kh}(\nabla u) - E_{kh}(\nabla\overline{u})\|_{L^{p'(x)}}\left\|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\\ &\le 18a\sum_{k,h=1}^{3}\|E_{kh}(\nabla u) - E_{kh}(\nabla\overline{u})\|_{L^{p'(x)}(\Omega)},\end{aligned}$$

avec

$$a = \|a_{ijkh}\|_{L^\infty(\Omega)} .$$

Donc si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Y t.q. $u_n \to \overline{u}$ dans Y, on a

$$\|S(u_n) - S(\overline{u})\|_{Y'} \le 18a\sum_{k,h=1}^{3}\|E_{kh}(\nabla u_n) - E_{kh}(\nabla\overline{u})\|_{L^{p'(x)}(\Omega)} .$$

Puisque E_{kh} est continue et bornée dans $L^{p'(x)}(\Omega)$, dès que $p(x) > 3$, alors $E_{kh}(\nabla u_n) \to E_{kh}(\nabla \overline{u})$ dans $L^{p'(x)}(\Omega)$, $\forall k,\ h = 1$ à 3. Donc S est continue.

b- Coercivité de S_n

On a :

$$\begin{aligned}
\langle S(u).u\rangle_{Y',Y} &= \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u(x))\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx,\\
&\geq 81\alpha_0\alpha\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}dx,\\
&\geq C_1\min\left\{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-},\ \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^+}\right\},\\
&\geq C_1\min\left\{\|u\|_Y^{p^-},\ \|u\|_Y^{p^+}\right\}.
\end{aligned}$$

D'où, l'opérateur S est coercive. Cela donne l'existence d'une solution au problème (3.17).

Existence de la solution en dimension infinie

(a) Estimation sur u_n

Si on substitue v par u_n dans (3.17), on obtient :

$$C_1\int_{\Omega}|\nabla u_n|^{p(x)}dx \leq \|f\|_{(\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega))'}\|u_n\|_{\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)},$$

par la coercivité de E_{kh}.

D'autre part

$$C_1\min\left\{\|u_n\|_{\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)}^{p^-},\ \|u_n\|_{\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)}^{p^+}\right\} \leq C_1\int_{\Omega}|\nabla u_n|^{p(x)}dx,$$

donc

$$C_1\min\left\{\|u_n\|_{\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)}^{p^-},\ \|u_n\|_{\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)}^{p^+}\right\} \leq \|f\|_{(\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega))'}\|u_n\|_{\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)}.$$

(b) Passage à la limite

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)$ qui est réflexif, donc il existe une sous-suite notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to u$ faiblement dans $\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)$.

La suite $(E_{kh}(\nabla u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{p'(x)}(\Omega)$, donc il existe $\rho \in L^{p'(x)}(\Omega)$ telle que, à une sous-suite près, $E_{kh}(\nabla u_n) \to \rho$ faiblement dans $L^{p'(x)}(\Omega)$.

Soit $v \in \mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)$, donc il existe $v_n \in Y_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ t.q.

$$\begin{aligned}
v_n &\to v \text{ dans } \mathbf{H}^{p(x)}(\Omega),\\
\nabla v_n &\to \nabla v \text{ dans } \left(L^{p(x)}(\Omega)\right)^9.
\end{aligned}$$

On remplace v par v_n dans (3.17), on obtient :

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_n(x))\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_j}dx = \langle f, v_n\rangle . \tag{3.18}$$

En passant à la limite dans (3.18), en utilisant le lemme 3.3.2 , on obtient alors

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx = \langle f, v\rangle_{(\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega))',\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)} , \ \forall v \in \mathbf{H}^{p(x)}(\Omega) . \tag{3.19}$$

(c) Limite du terme non linéaire

Il reste à démontrer que

$$\left\{ \begin{array}{c} \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx = \\ \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u(x))\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx, \ \forall v \in \mathbf{H}^{p(x)}(\Omega) . \end{array} \right. \tag{3.20}$$

(I) Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_n(x))\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_j}dx \\ &= \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\rho\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx. \end{aligned}$$

En effet,

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_n(x))\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_j}dx = \langle f, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle .$$

(II) Démonstration de (3.20)

Maintenant on va passer à la limite dans le terme

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_n(x))\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_j}dx.$$

En effet,

$$\begin{aligned} 0 \leq &\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\left(E_{kh}\left(\nabla u_n\right) - E_{kh}\left(\nabla v_n\right)\right)\left(\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_j} - \frac{\partial v_{ni}}{\partial x_j}\right)dx = \\ &\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}\left(\nabla u_n\right)\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_j}dx - \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}\left(\nabla u_n\right)\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_j}dx \\ &- \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}\left(\nabla v_n\right)\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_j}dx + \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}\left(\nabla v_n\right)\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_j}dx \\ &= T_{1,n} \ - T_{2,n} - T_{3,n} + T_{4,n}. \end{aligned}$$

D'après **(I)** et le lemme 3.3.2, on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} T_{1,n} &= \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\rho\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx,\\
\lim_{n\to+\infty} T_{2,n} &= \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx,\\
\lim_{n\to+\infty} T_{3,n} &= \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}\left(\nabla v\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx,\\
\lim_{n\to+\infty} T_{4,n} &= \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}\left(\nabla v\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx.
\end{aligned}$$

D'où le passage à la limite dans l'inégalité donne :

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\left(\rho - E_{kh}\left(\nabla v\right)\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)dx \geq 0,\ \forall v \in \mathbf{H}^{p(x)}.$$

Maintenant on prend $v = u + \frac{1}{n}w$, avec $w \in \mathbf{H}^{p(x)}\left(\Omega\right)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient :

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\left(\rho - E_{kh}\left(\nabla u + \frac{1}{n}\nabla w\right)\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}dx \leq 0,$$

mais $u + \frac{1}{n}w \to u$ dans $\mathbf{H}^{p(x)}\left(\Omega\right)$, donc

$$E_{kh}\left(\nabla u + \frac{1}{n}\nabla w\right) \to E_{kh}\left(\nabla u\right) \text{ dans } L^{p'(x)}\left(\Omega\right).$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on trouve :

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\left(\rho - E_{kh}\left(\nabla u\right)\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}dx \leq 0,\ \forall w \in \mathbf{H}^{p(x)}\left(\Omega\right).$$

Par linéarité, on obtient :

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\left(\rho - E_{kh}\left(\nabla u\right)\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}dx = 0,\ \forall w \in \mathbf{H}^{p(x)}\left(\Omega\right),$$

d'où

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\rho\frac{\partial w_i}{\partial x_j}dx = \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}\left(\nabla u\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}dx,\ \forall w \in \mathbf{H}^{p(x)}\left(\Omega\right).$$

Donc u est une solution de (3.16).

Unicité

Supposons que f ne dépend pas de u et $(E_{kh}(\zeta) - E_{kh}(\eta))(\zeta_{ij} - \eta_{ij}) > 0$, $\forall \zeta, \eta \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, ζ_{ij}, $\eta_{ij} \in \mathbb{R}$, si et seulement si $\zeta_{ij} \neq \eta_{ij}$. Soient u_1 et u_2 deux solutions de (3.16), donc

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_1(x))\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx = \\ &\langle f, v\rangle_{(\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega))',\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)}\,,\ \forall v \in \mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)\,, \end{aligned} \tag{3.21}$$

et

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_2(x))\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx = \\ &\langle f, v\rangle_{(\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega))',\mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)}\,,\ \forall v \in \mathbf{H}^{p(x)}(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{3.22}$$

On remplace v par $u_1 - u_2$ dans (3.21) et (3.22). On obtient :

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\left(E_{kh}(\nabla u_1) - E_{kh}(\nabla u_2)\right)\left(\frac{\partial u_{1i}}{\partial x_j} - \frac{\partial u_{2i}}{\partial x_j}\right)dx = 0.$$

D'où $\nabla u_1 = \nabla u_2$ dans $\left(L^{p(x)}(\Omega)\right)^9$, et par suite $u_1 = u_2$ p.p..

Remarque 3.3.6 *Dans le cas* $1 < p(x) \leq 3$ *et*

$$H = \left\{u \in \left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3,\ \int_{\Omega} u(x)\,dx = 0\right\},$$

muni de la norme $\|u\|_H = \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$, *le problème variationnel du problème (3.6) suivant*

$$\begin{cases} u \in H, \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u(x))\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx = \langle f, v\rangle_{H',H}\,,\ \forall v \in H. \end{cases}$$

admet une solution sous les hypothèses suivantes

$$\begin{cases} \forall i,\ j,\ k,\ h = 1 \text{ à } 3, \\ 1)\ E_{kh} \text{ sont des fonctions continues et monotones}, \\ 2)\ (\text{Croissance})\ \exists C \in \mathbb{R};\ |E_{kh}(\xi)| \leq C\left(1 + |\xi|^{p(x)-1}\right),\ \forall \xi \in \mathbb{R}^9, \\ 3)\ a_{ijkh} \in L^{\infty}(\Omega);\ \exists \alpha_0 > 0;\ a_{ijkh} \geq \alpha_0 \text{ p.p. dans } \Omega, \\ 4)\ f \in \left(L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(\Omega)\right)^3. \end{cases} \tag{3.23}$$

3.3.3 Étude du problème de Robin

Comme pour les problèmes (3.5) et (3.6), la formulation faible du problème (3.7) est :

$$\begin{cases} u \in \mathbf{X}^{p(x)}(\Omega), \\ \sum\limits_{i,j=1}^{3}\sum\limits_{k,h=1}^{3}\int\limits_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u(x))\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx - \sum\limits_{i,j=1}^{3}\int\limits_{\Gamma}\sigma_{ij}(u(x))\eta_j v_i d\Gamma \\ = \langle f, v\rangle_{\left(\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)\right)', \mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)}, \ \forall v \in \mathbf{X}^{p(x)}(\Omega), \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} u \in \mathbf{X}^{p(x)}(\Omega), \\ \sum\limits_{i,j=1}^{3}\sum\limits_{k,h=1}^{3}\int\limits_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u(x))\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx + \mathbf{K}\int\limits_{\Gamma} u(x)v(x)d\Gamma \\ = \langle f, v\rangle_{\left(\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)\right)', \mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)}, \ \forall v \in \mathbf{X}^{p(x)}(\Omega), \end{cases} \tag{3.24}$$

puisque

$$\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(u(x))\eta_j = -\mathbf{K}u_i \text{ sur } \Gamma.$$

Avec $\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega) = \left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3 \cap \left(W^{2,p(x)}(\Omega)\right)^3$ muni de la norme définie par $\|.\|_{\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)} = \|.\|_{\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3}$.

Sous les hypothèses (3.9), on montre l'existence de u, solution du problème (3.24).

Théorème 3.3.7 *Sous les hypothèses (3.9), il existe $u \in \mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)$ solution de (3.24). Si de plus f ne dépend pas de u, et $(E_{kh}(\zeta) - E_{kh}(\eta))(\zeta_{ij} - \eta_{ij}) > 0$, $\forall \zeta,\ \eta \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\zeta_{ij},\ \eta_{ij} \in \mathbb{R}$, $\zeta_{ij} \neq \eta_{ij}$, alors la solution est unique.*

Démonstration du théorème 3.3.7

Existence de la solution en dimension finie

L'espace $\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)$ est séparable. Donc il contient une partie dénombrable $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dense dans $\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)$. Soit $Z_n = Vect\{f_i,\ i = 1, ..., n\}$ l'espace vectoriel engendré par les n premières fonctions de cette partie. On a donc $\overline{\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} Z_n} = \mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)$. On en déduit que pour tout $v \in \mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)$, il existe $v_n \in Z_n$, telle que $v_n \to v$ dans $\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)$ lorsque $n \to +\infty$.

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on cherche u_n solution du problème (3.25), posé en dimension finie :

$$\begin{cases} u_n \in Z_n, \\ \sum\limits_{i,j=1}^{3}\sum\limits_{k,h=1}^{3}\int\limits_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_n(x))\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx + \mathbf{K}\int\limits_{\Gamma} u_n(x)v(x)d\Gamma \\ = \langle f, v\rangle_{\left(\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)\right)', \mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)}, \ \forall v \in Z_n. \end{cases} \tag{3.25}$$

L'application $v \to \langle f, v \rangle_{\left(\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)\right)', \mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)}$ est linéaire de Z_n dans $\mathbb{R}$, donc elle est continue. On note d_n cette application. D'où $d_n \in Z_n'$ et

$$\langle d_n, v \rangle_{Z_n', Z_n} = \langle f, v \rangle_{\left(\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)\right)', \mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)}.$$

Soit $u \in Z_n$. On note $\chi_n(u)$ l'application de Z_n dans Z_n' qui a $v \in Z_n$ associe

$$\sum_{i,j=1}^{3} \sum_{k,h=1}^{3} \int_\Omega a_{ijkh}(x) E_{kh}(\nabla u(x)) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx + \mathbf{K} \int_\Gamma u(x)\, v(x)\, d\Gamma.$$

Cette application est linéaire, donc c'est un élément de Z_n' et on a

$$\langle \chi_n(u), v \rangle_{Z_n', Z_n} = \sum_{i,j=1}^{3} \sum_{k,h=1}^{3} \int_\Omega a_{ijkh}(x) E_{kh}(\nabla u(x)) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx + \mathbf{K} \int_\Gamma u(x)\, v(x)\, d\Gamma.$$

On a ainsi défini une application χ de Z_n dans Z_n'. On va montrer que χ est continue et coercive dans le but d'appliquer le lemme 3.3.4 pour montrer que le problème (3.25) admet une solution u_n.

a- Continuité de χ_n

On note $Z = Z_n$ muni de la norme définie par $\|.\|_Z = \|.\|_{\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)}$. Et on note $\chi = \chi_n$. Soit u et $\overline{u} \in Z$, on a :

$$\begin{aligned}
\|\chi(u) - \chi(\overline{u})\|_{Z'} &= \max_{v \in Z,\ \|v\|_Z = 1} \left| \langle \chi(u) - \chi(\overline{u}), v \rangle_{Z', Z} \right| \\
&\leq \max_{v \in \mathbf{X}^{p(x)}(\Omega),\ \|v\|_{Z=1}} \sum_{i,j=1}^{3} \sum_{k,h=1}^{3} \int_\Omega \left| a_{ijkh}(x) \left(E_{kh}(\nabla u) - E_{kh}(\nabla \overline{u}) \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| dx \\
&\qquad + \mathbf{K} \int_\Gamma |(u - \overline{u})\, v|\, d\Gamma,
\end{aligned}$$

de l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned}
\|\chi(u) - \chi(\overline{u})\|_{Z'} &\leq \max_{v \in \mathbf{X}^{p(x)}(\Omega),\ \|v\|_{Z=1}} 2a \sum_{i,j=1}^{3} \sum_{k,h=1}^{3} \|E_{kh}(\nabla u) - E_{kh}(\nabla \overline{u})\|_{L^{p'(x)}(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \\
&\quad + 2\mathbf{K} \|u - \overline{u}\|_{\left(L^{p'(x)}(\Gamma)\right)^3} \|v\|_{\left(L^{p(x)}(\Gamma)\right)^3}, \\
&\leq \max_{v \in \mathbf{X}^{p(x)}(\Omega), \|v\|_{Z=1}} 6a \sum_{i=1}^{3} \sum_{k,h=1}^{3} \|E_{kh}(\nabla u) - E_{kh}(\nabla \overline{u})\|_{L^{p'(x)}(\Omega)} \|v_i\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} \\
&\quad + 2\mathbf{K} \|u - \overline{u}\|_{\left(L^{p'(x)}(\Gamma)\right)^3} \|v\|_{\left(L^{p(x)}(\Gamma)\right)^3},
\end{aligned}$$

maintenant, en utilisant la proposition 1.1.5, il existe une constante C_2 t.q.

$$\begin{aligned}
\|\chi(u) - \chi(\overline{u})\|_{Z'} &\leq 18a \sum_{k,h=1}^{3} \|E_{kh}(\nabla u) - E_{kh}(\nabla \overline{u})\|_{L^{p'(x)}(\Omega)} \\
&\quad + 2\mathbf{K} C_2 \|u - \overline{u}\|_{\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3} \|v\|_{\left(L^{p(x)}(\Gamma)\right)^3},
\end{aligned}$$

avec $p'(x) < \infty$, $\forall x \in \Gamma$.

Donc si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Z t.q. $u_n \to \overline{u}$ dans Z, on a

$$\begin{aligned}\|\chi(u_n) - \chi(\overline{u})\|_{Z'} \leq 18a \sum_{k,h=1}^{3} \|E_{kh}(\nabla u_n) - E_{kh}(\nabla \overline{u})\|_{L^{p'(x)}(\Omega)} \\ + 2\mathbf{K}C_2 \|u_n - \overline{u}\|_{\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3} \|v\|_{\left(L^{p(x)}(\Gamma)\right)^3},\end{aligned}$$

comme E_{kh} est continue et bornée dans $L^{p'(x)}(\Omega)$, alors $E_{kh}(\nabla u_n) \to E_{kh}(\nabla \overline{u})$ dans $L^{p'(x)}(\Omega), \forall\, k,\ h =$ 1 à 3. Donc χ est continue.

b- Coercivité de χ_n

On a

$$\begin{aligned}\langle \chi(u), u\rangle_{Z',Z} &= \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3} \int_\Omega a_{ijkh}(x) E_{kh}(\nabla u(x)) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx + \mathbf{K}\int_\Gamma |u|^2 \, d\Gamma, \\ &\geq 81\alpha_0\alpha \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\, dx + \mathbf{K}\int_\Gamma |u|^2 \, d\Gamma, \\ &\geq 81\alpha_0\alpha \min\left\{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-}, \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^+}\right\} + \mathbf{K}\int_\Gamma |u|^2 \, d\Gamma, \\ &\geq 81\alpha_0\alpha \min\left\{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-}, \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^+}\right\}, \\ &\geq C_1 \min\left\{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-}, \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^+}\right\}.\end{aligned}$$

Si $\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} > 1$ alors

$$\begin{aligned}\langle \chi(u), u\rangle_{Z',Z} &\geq C_1 \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-} \\ &\geq C_1 \frac{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-}}{\|u\|_Z^{p^-}} \|u\|_Z^{p^-},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\langle \chi(u), u\rangle_{Z',Z}}{\|u\|_Z} &\geq C_1 \left(\frac{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\|u\|_Z}\right)^{p^-} \|u\|_Z^{p^- -1} \\ &\geq C_1 C_3^{p^-} \|u\|_Z^{p^- -1} = C_1\ C_3^{p^-} \|u\|_{\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3}^{p^- -1},\end{aligned}$$

avec $0 < C_3 = \frac{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\|u\|_Z} < 1$.

De même si $\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < 1$, alors

$$\frac{\langle \chi(u), u\rangle_{Z',Z}}{\|u\|_Z} \geq C_1 C_3^{p^+} \|u\|_Z^{p^+ -1}.$$

Donc l'opérateur χ est coercive. Et par suite le problème (3.25) admet une solution u_n dans Z_n.

Existence de la solution en dimension infinie

(a) Estimation sur u_n

On prend $v = u_n$ dans (3.25), on obtient :

$$C_1 \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} dx + \mathbf{K} \int_\Gamma |u_n|^2 d\Gamma \leq \|f\|_{\left(\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)\right)'} \|u_n\|_{\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)}.$$

Si $\|\nabla u_n\|_{L^{p(x)}(\Omega)} > 1$, on a

$$C_1 C_3^{p^-} \|u_n\|^{p^-}_{\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)} \leq C_1 \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} dx + \mathbf{K} \int_\Gamma |u_n|^2 d\Gamma,$$

d'où

$$C_1 C_3^{p^-} \|u_n\|^{p^-}_{\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)} \leq \|f\|_{\left(\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)\right)'} \|u_n\|_{\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)},$$

si $\|\nabla u_n\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < 1$, on a

$$C_1 C_3^{p^+} \|u_n\|^{p^+}_{\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)} \leq \|f\|_{\left(\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)\right)'} \|u_n\|_{\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)}.$$

(b) Passage à la limite

D'après l'étape précédente la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)$, donc il existe une sous-suite notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to u$ faiblement dans $\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)$.

La suite $(E_{kh}(\nabla u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{p'(x)}(\Omega)$, donc il existe $\rho \in L^{p'(x)}(\Omega)$ telle que, à une sous-suite près,

$$E_{kh}(\nabla u_n) \to \rho \text{ faiblement dans } L^{p'(x)}(\Omega).$$

On utilise alors (3.25) avec $v = v_n$ on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{i,j=1}^{3} \sum\limits_{k,h=1}^{3} \int\limits_\Omega a_{ijkh}(x) E_{kh}(\nabla u_n(x)) \dfrac{\partial v_{ni}}{\partial x_j}(x) dx + \mathbf{K} \int_\Gamma u_n v_n d\Gamma \\ \qquad = \langle f, v_n \rangle_{\left(\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)\right)', \mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)}, \ \forall v \in Z_n. \end{array} \right. \tag{3.26}$$

D'après le lemme 3.3.2 et le théorème de convergence dominée de Lebesgue on a

$$\sum_{i,j=1}^{3} \sum_{k,h=1}^{3} \int\limits_\Omega a_{ijkh}(x) E_{kh}(\nabla u_n(x)) \frac{\partial v_{ni}}{\partial x_j} dx \to \sum_{i,j=1}^{3} \sum_{k,h=1}^{3} \int\limits_\Omega a_{ijkh}(x) \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx,$$

et

$$\mathbf{K} \int_\Gamma u_n v_n d\Gamma \to \mathbf{K} \int_\Gamma u v d\Gamma.$$

De plus on a $\langle f, v_n \rangle \to \langle f, v \rangle$.

Donc le passage à la limite dans (3.26) donne :

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx + \mathbf{K}\int_{\Gamma} u(x)\,v(x)\,d\Gamma = \\ \langle f, v\rangle_{\left(\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)\right)', \mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)}, \ \forall v \in \mathbf{X}^{p(x)}(\Omega). \end{cases} \tag{3.27}$$

(c) Limite du terme non linéaire

Maintenant on démontre que

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx + \mathbf{K}\int_{\Gamma} u(x)\,v(x)\,d\Gamma =$$

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u(x))\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx + \mathbf{K}\int_{\Gamma} u(x)\,v(x)\,d\Gamma,\ \forall v \in \mathbf{X}^{p(x)}(\Omega),$$

ou bien

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx = \\ &\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u(x))\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx,\ \forall v \in \mathbf{X}^{p(x)}(\Omega). \end{aligned} \tag{3.28}$$

(I) On a :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_n(x))\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_j}dx = \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\rho\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx.$$

En effet,

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_n(x))\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_j}dx + \mathbf{K}\int_{\Gamma}|u_n|^2\,d\Gamma = \langle f, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle,$$

c'est -à -dire

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_n(x))\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_j}dx + \mathbf{K}\int_{\Gamma}|u_n|^2\,d\Gamma \\ &= \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\rho\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx + \mathbf{K}\int_{\Gamma}|u|^2\,d\Gamma, \end{aligned}$$

mais

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{K}\int_{\Gamma}|u_n|^2\,d\Gamma = \mathbf{K}\int_{\Gamma}|u|^2\,d\Gamma,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_n(x))\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_j}dx = \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\rho\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx.$$

(II) Démonstration de (3.28)

Maintenant on va étudier la limite de

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_n(x))\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_j}dx.$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\left(E_{kh}\left(\nabla u_n\right)-E_{kh}\left(\nabla v_n\right)\right)\left(\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_j}-\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_j}\right)dx =$$
$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\left(\rho-E_{kh}\left(\nabla v\right)\right)\left(\frac{\partial u_{i}}{\partial x_j}-\frac{\partial v_{i}}{\partial x_j}\right)dx \geq 0,\ \forall v\in \mathbf{X}^{p(x)}\left(\Omega\right).$$

On prend $v=u+\dfrac{1}{n}w$ avec $w\in \mathbf{X}^{p(x)}\left(\Omega\right)$ et $n\in\mathbb{N}^{*}$, et en passant à la limite lorsque $n\to+\infty$ (comme on a fait dans le deux premiers problèmes), on trouve

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\rho\frac{\partial w_i}{\partial x_j}dx=\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}\left(\nabla u\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}dx, \forall w\in \mathbf{X}^{p(x)}\left(\Omega\right),$$

d'où la solution de (3.24).

Unicité

Supposons que f ne dépend pas de u et $\left(E_{kh}\left(\zeta\right)-E_{kh}\left(\eta\right)\right)\left(\zeta_{ij}-\eta_{ij}\right)>0$, $\forall\zeta,\eta\in\mathbb{R}^{3\times3}$, ζ_{ij}, $\eta_{ij}\in\mathbb{R}$, $\zeta_{ij}\neq\eta_{ij}$. Soient u_1 et u_2 deux solutions de (3.24), donc

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_1(x))\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx+\mathbf{K}\int_{\Gamma}u_1\left(x\right)v\left(x\right)d\Gamma\\ = \ &\langle f,v\rangle_{\left(\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)\right)',\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)},\ \forall v\in \mathbf{X}^{p(x)}\left(\Omega\right),\end{aligned}\tag{3.29}$$

et

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_2(x))\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx+\mathbf{K}\int_{\Gamma}u_2\left(x\right)v\left(x\right)d\Gamma\\ = \ &\langle f,v\rangle_{\left(\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)\right)',\mathbf{X}^{p(x)}(\Omega)},\ \forall v\in \mathbf{X}^{p(x)}\left(\Omega\right).\end{aligned}\tag{3.30}$$

On prend $v=u_1-u_2$ dans (3.29) et (3.30) on obtient alors

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\left(E_{kh}\left(\nabla u_1\right)-E_{kh}(\nabla u_2)\right)\left(\frac{\partial u_{1i}}{\partial x_j}-\frac{\partial u_{2i}}{\partial x_j}\right)dx\\ &+\mathbf{K}\int_{\Gamma}\left|u_1-u_2\right|^2 d\Gamma=0,\end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\left(E_{kh}\left(\nabla u_1\right)-E_{kh}\left(\nabla u_2\right)\right)\left(\frac{\partial u_{1i}}{\partial x_j}-\frac{\partial u_{2i}}{\partial x_j}\right)dx=0$$

et

$$\mathbf{K}\int_{\Gamma}|u_1-u_2|^2 d\Gamma=0,$$

car

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3} a_{ijkh}(x)(E_{kh}\left(\nabla u_1\right)-E_{kh}(\nabla u_2))\left(\frac{\partial u_{1i}}{\partial x_j}-\frac{\partial u_{2i}}{\partial x_j}\right)\geq 0,$$

et

$$\mathbf{K}\left|u_1-u_2\right|^2\geq 0.$$

On a donc $\nabla u_1=\nabla u_2$ dans $\left(L^{p(x)}(\Omega)\right)^9$, d'où $u_1=u_2$ p.p..

Remarque 3.3.8 *Dans le cas* $1<p(x)\leq 3$ *et*

$$\mathbf{X}^{p(x)}\left(\Omega\right)=\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3,$$

le problème variationnel du problème (3.7) suivant

$$\left\{\begin{array}{c} u\in\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3, \\ \sum\limits_{i,j=1}^{3}\sum\limits_{k,h=1}^{3}\int\limits_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}\left(\nabla u(x)\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx+\mathbf{K}\int\limits_{\Gamma}u\left(x\right)v\left(x\right)d\Gamma \\ =\langle f,v\rangle_{\left(\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3\right)',\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3},\ \ \forall v\in\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3, \end{array}\right.$$

admet une solution dans $\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3$ *sous les hypothèses (3.23).*

Chapitre 4

Le système de l'élasticité non linéaire avec frottement dans des espaces de Sobolev à exposants variables

Dans ce chapitre nous considérons le système de l'élasticité non linéaire dans un domaine borné et connexe, de frontière Γ. On décompose Γ en trois parties : inférieure, supérieure et latérale. Le déplacement de la substance, qui représente l'inconnu du problème, est supposé satisfaire les conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur la partie supérieure, et non homogènes sur la partie latérale, tandis que sur la partie inférieure, les conditions de frottement sont considérées. De plus, le problème est gouverné par une loi de comportement généralisée du système de l'élasticité avec un tenseur de déformation fortement non linéaire. Le cadre fonctionnel dans lequel on résoudra ce problème est celui des espaces de Sobolev avec des exposants variables. La formulation variationnelle du problème conduit à une inégalité variationnelle, pour laquelle nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution dans notre théorème principal 4.3.1 dans la section 4.3.

4.1 Notations et position du problème

Soit w un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ situe dans le plan d'équation $x_3 = 0$. On suppose que w représente la surface inférieure du domaine occupé par la substance. La surface supérieure Γ_1 est définie par

$$\left\{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3,\, x_3 = h(x') \text{ et } x' \in w\right\},$$

où h est une fonction définie et bornée sur w, c'est -à- dire il existe h_* et h^* réels tel que

$$0 < h_* \leq h(x') \leq h^*, \ \forall (x', 0) = (x_1, x_2, 0) \in w.$$

On étudie le déplacement d'une substance dans

$$\Omega = \left\{ (x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x', 0) \in w \ \text{ et } \ 0 < x_3 < h(x') \right\}$$

de frontière $\Gamma = \overline{w} \cup \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_L}$, où Γ_L est la surface latérale de Ω.

On note par $u = (u_1, u_2, u_3)$ le déplacement de la substance et σ le tenseur des contraintes dont les composantes $\sigma_{ij} (1 \leq i, \, j \leq 3)$ sont données par la loi de comportement suivante

$$\sigma_{ij}(u(x)) = \sum_{k,h=1}^{3} a_{ijkh}(x) E_{kh}(\nabla u(x)), \, 1 \leq i, \, j \leq 3, \tag{4.1}$$

où les a_{ijkh} vérifient les propriétés de symétrie suivantes :

$$a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{ijhk}, \, \forall 1 \leqslant i, \, j, \, k, \, h \leqslant 3.$$

La loi de comportement (4.1) décrit une relation non linéaire entre le tenseur des contraintes σ et le tenseur de déformation E de composantes

$$E_{ij}(\nabla u(x)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right), \, 1 \leq i, \, j \leq 3. \tag{4.2}$$

La normale extérieure unitaire sur Γ est notée $n = (n_1, n_2, n_3)$. La normale unitaire sur w est le vecteur $(0, 0, -1)$.

La convention d'Einstein, qui consiste à effectuer la somme sur les indices répétés, sera utilisée sauf mention contraire.

On définit les composantes normales et tangentielles u_n et $u_t = (u_{t_1}, u_{t_2}, u_{t_3})$ de déplacement u par

$$u_n = u.n = u_i n_i, \ \ u_{t_i} = u_i - u_n n_i. \tag{4.3}$$

Les composantes normales et tangentielles σ_n et $\sigma_t = (\sigma_{t_1}, \sigma_{t_2}, \sigma_{t_3})$, du tenseur des contraintes, sont définies par :

$$\sigma_n = (\sigma.n).n = \sigma_{ij} n_i n_j, \ \ \sigma_{t_i} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i. \tag{4.4}$$

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude du système suivant :

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u(x)) = f_i(x), \, i = 1, \, 2, \, 3, \tag{4.5}$$

où $f = (f_1, f_2, f_3)$ représente une densité massique des forces extérieures.

Pour les conditions aux limites, on suppose que :

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \tag{4.6}$$

$$u = g \text{ sur } \Gamma_L, \tag{4.7}$$

$$u.n = 0 \text{ sur } w. \tag{4.8}$$

La condition (4.8) signifie qu'il y a un effort tangentiel exercé par la surface w sur la substance. Cet effort tangentiel ne peut pas dépasser un certain seuil. La loi de Tresca suppose que ce seuil est fixé et connu

$$|\sigma_t| \leq K \text{ sur } w, \tag{4.9}$$

où K est une fonction positive donnée appelée coefficient de frottement et $|\sigma_t|$ est le module de la contrainte tangentielle définie sur w par (4.4).

Tant que le seuil K n'est pas atteint par la contrainte tangentielle σ_t, la substance se déplace avec un déplacement donné s, qui est le déplacement de la surface inférieure w. Lorsque le seuil K est atteint, la substance et la surface se déplacent tangentiellement l'un par rapport à l'autre et il y a glissement proportionnel. Ce qui peut se résumer comme suit [11]

$$\left.\begin{array}{r} |\sigma_t| < K \Rightarrow u_t = s, \\ |\sigma_t| = K \Rightarrow \exists \lambda \geqslant 0 \text{ tel que } u_t = s - \lambda \sigma_t, \end{array}\right\} \text{sur } w \tag{4.10}$$

où le réel positif λ est inconnu.

Remarque 4.1.1 *Sur w la troisième composante de u est nulle :*

$$u_3 = 0 \;\; sur \;\; w. \tag{4.11}$$

En effet, d'après la condition (4.8) on a

$$u.n = u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3 = 0 \;\; sur \; w,$$

où $n = (n_1, n_2, n_3) = (0, 0, -1)$ est le vecteur normal unitaire extérieur à w . Donc

$$u_3 = 0 \;\; sur \;\; w.$$

Le problème complet consiste donc à trouver le champ de déplacement u, vérifiant l'équation et les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{\begin{array}{c} -\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(u(x)) = f_i(x)\,\text{dans }\ \Omega,\ 1 \leq i \leq 3, \\ \sigma_{ij}(u(x)) = \sum\limits_{k,h=1}^{3} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u(x))\,\text{dans }\ \Omega,\ 1 \leq i,\ j \leq 3, \\ E_{ij}\left(\nabla u(x)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum\limits_{m=1}^{3}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right)\ \text{dans }\Omega,\ 1 \leq i,\ j \leq 3, \\ u = 0\ \text{sur}\,\Gamma_1, \\ u = g\ \text{sur}\,\Gamma_L, \\ u.n = 0\ \text{sur}\,w, \\ \left.\begin{array}{c} |\sigma_t| < K \Rightarrow u_t = s, \\ |\sigma_t| = K \Rightarrow \exists\lambda \geqslant 0 \text{ tel que } u_t = s - \lambda\sigma_t, \end{array}\right\} \text{sur } w. \end{array}\right. \tag{4.12}$$

Pour la formulation variationnelle du problème (4.12), on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 4.1.2 *La condition (4.10) est équivalente à la relation scalaire suivante :*

$$(u_t - s).\sigma_t + K|u_t - s| = 0 \ \textit{sur}\ w. \tag{4.13}$$

Preuve (Adaptée de [24])

— Si $|\sigma_t| < K$ alors $u_t = s$, d'où (4.13). Si $|\sigma_t| = K$ alors il existe $\lambda \geq 0$ tel que $u_t = s - \lambda\sigma_t$, d'où

$$(u_t - s).\sigma_t + K|u_t - s| = -\lambda|\sigma_t|^2 + \lambda|\sigma_t|^2 = 0.$$

— Inversement, on suppose que (4.13) ait lieu.

- Si $|\sigma_t| = K$, alors

$$(u_t - s).\sigma_t = -|u_t - s||\sigma_t|,$$

donc il existe $\lambda \geq 0$ tel que

$$u_t - s = -\lambda\sigma_t.$$

- Si $|\sigma_t| < K$, alors

$$\begin{aligned} (u_t - s).\sigma_t + K|u_t - s| = 0 \ &\geq \ -|u_t - s||\sigma_t| + K|u_t - s| \\ &= \ |u_t - s|(K - |\sigma_t|) \end{aligned}$$

donc

$$|u_t - s| = 0,$$

soit

$$u_t = s.$$

D'où le résultat.

Remarque 4.1.3 *Sur w, on a*

$$u.n = 0,$$

donc d'après (4.3)

$$u_t = u.$$

Par conséquent, la relation scalaire (4.13) s'écrit

$$(u - s).\sigma_t + K|u - s| = 0 \ sur \ w. \tag{4.14}$$

C'est cette relation que nous utiliserons pour formuler le problème variationnel de (4.12).

4.2 Formulation variationnelle du problème

On introduit le cadre fonctionnel suivant :

$$V(\Omega) = \left\{\varphi \in \left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3 \cap \left(W^{2,p(x)}(\Omega)\right)^3 : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_L,\ \varphi.n = 0 \text{ sur } w\right\},$$

muni de la norme $\|.\|_{V(\Omega)} = \|.\|_{\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3}$.

Soit $G \in \left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3 \cap \left(W^{2,p(x)}(\Omega)\right)^3$ telle que $G|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L} = g$ et $G.n = 0$ sur w.

Et soit $f_i \in L^{p'(x)}(\Omega)$, on multiplie l'équation (4.5) par $\varphi_i - (u_i - G_i)$ où $\varphi \in V(\Omega)$, on intègre sur Ω et on utilise la formule de Green. On obtient :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \sigma_{ij}(u)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varphi_i - (u_i - G_i)\right) dx'dx_3 - \int_\Gamma \sigma_{ij}n_j\left(\varphi_i - (u_i - G_i)\right) d\sigma \\ = &\int_\Omega f_i\left(\varphi_i - (u_i - G_i)\right) dx'dx_3. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Comme $\varphi - (u - G) \in V(\Omega)$, alors

$$\int_\Gamma \sigma_{ij}n_j\left(\varphi_i - (u_i - G_i)\right) d\sigma = \int_w \sigma_{ij}n_j\left(\varphi_i - (u_i - G_i)\right) dx',$$

or d'après (4.4) on a $\sigma_{ij}n_j = \sigma_{t_i} + \sigma_n n_i$ et donc

$$\int_\Gamma \sigma_{ij}n_j\left(\varphi_i - (u_i - G_i)\right) d\sigma = \int_w \sigma_{t_i}\left(\varphi_i - (u_i - G_i)\right) dx' + \int_w \sigma_n\left(\varphi_i - (u_i - G_i)\right) n_i dx'.$$

De même $(\varphi_i - (u_i - G_i))\, n_i = 0$ sur w alors

$$\int_\Gamma \sigma_{ij} n_j \left(\varphi_i - (u_i - G_i)\right) d\sigma = \int_w \sigma_t . \left(\varphi - (u - G)\right) dx'.$$

En revenant à (4.15) on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sigma_{ij}(u) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi_i - (u_i - G_i)\right) dx' dx_3 - \int_w \sigma_t . \left(\varphi - (u - G)\right) dx' \\
= &\int_\Omega f_i \left(\varphi_i - (u_i - G_i)\right) dx' dx_3. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Dans (4.16) on ajoute et on retranche le terme

$$\int_w K \left(|\varphi - s| - |(u - G) - s|\right) dx',$$

on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sigma_{ij}(u) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi_i - (u_i - G_i)\right) dx' dx_3 + \int_w K \left(|\varphi - s| - |(u - G) - s|\right) dx' - \\
&\int_w \sigma_t . \left(\varphi - (u - G)\right) dx' - \int_w K \left(|\varphi - s| - |(u - G) - s|\right) dx' \\
= &\int_\Omega f_i \left(\varphi_i - (u_i - G_i)\right) dx' dx_3.
\end{aligned}$$

Posons

$$A = \int_w \sigma_t . \left(\varphi - (u - G)\right) dx' + \int_w K \left(|\varphi - s| - |(u - G) - s|\right) dx'.$$

En utilisant la remarque 4.1.3 le terme A devient

$$A = \int_w \left(\sigma_t .(\varphi - s) + K|\varphi - s|\right) dx'.$$

Il faut remarquer que

$$\sigma_t .(\varphi - s) \geq -|\sigma_t| . |\varphi - s| \geq -K|\varphi - s| \text{ sur } w,$$

donc

$$A \geq 0.$$

On a alors l'inéquation suivante

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sigma_{ij}(u) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi_i - (u_i - G_i)\right) dx' dx_3 + \int_w K \left(|\varphi - s| - |(u - G) - s|\right) dx' \\
\geq &\int_\Omega f_i \left(\varphi_i - (u_i - G_i)\right) dx' dx_3.
\end{aligned}$$

On remplace σ_{ij} par son expression (4.1) et on trouve

$$\sum_{k,h=1}^{3} \int_{\Omega} a_{ijkh}(x) E_{kh}(\nabla u) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi_i - (u_i - G_i) \right) dx' dx_3 + \int_{w} K \left(|\varphi - s| - |(u - G) - s| \right) dx'$$
$$\geq \int_{\Omega} f_i \left(\varphi_i - (u_i - G_i) \right) dx' dx_3, \forall \varphi \in V(\Omega),$$

d'où la formulation variationnelle du problème (4.12) est de trouvé u vérifiant le problème suivant :

$$\begin{cases} u - G \in V(\Omega), \\ \sum_{i,j=1}^{3} \sum_{k,h=1}^{3} \int_{\Omega} a_{ijkh}(x) E_{kh}(\nabla u) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi_i - (u_i - G_i) \right) dx' dx_3 \\ + \int_{w} K \left(|\varphi - s| - |(u - G) - s| \right) dx' \\ \geq \int_{\Omega} f (\varphi - (u - G)) dx' dx_3, \ \forall \varphi \in V(\Omega). \end{cases} \tag{4.17}$$

4.3 Théorème d'existence et d'unicité

On travaille dans cette section avec les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} \forall i,\ j,\ k,\ h = 1 \text{ à } 3 \text{ et } 3 < p(x) < +\infty : \\ (H_1)\ \exists \alpha_0 > 0;\ \beta > 0 \text{ t.q. } \alpha_0 \leq a_{ijkh}(x) \leq \beta \text{ p.p. dans } \Omega, \\ (H_2)\ f = (f_1, f_2, f_3) \in \left(L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}} (\Omega) \right)^3 . \end{cases} \tag{4.18}$$

Sous les hypothèses (4.18), nous voulons montrer l'existence de u solution du problème (4.17).

Théorème 4.3.1 *Soit $G \in \left(W^{1,p(x)}(\Omega) \right)^3 \cap \left(W^{2,p(x)}(\Omega) \right)^3$ vérifient $G|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L} = g$ et $G.n = 0$ sur w. Sous les hypothèses (4.18), il existe une solution u de (4.17). Si de plus $\left(E_{kh}(\zeta) - E_{kh}(\eta) \right) (\zeta_{ij} - \eta_{ij}) > 0$, $\forall \zeta,\ \eta \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\zeta_{ij},\ \eta_{ij} \in \mathbb{R}$, $\zeta_{ij} \neq \eta_{ij}$, alors la solution est unique.*

Pour démontrer ce théorème, on utilise le théorème 1.3.4.

Preuve :

Tout d'abord, nous essayons de réécrire le problème (4.17) sous la forme (1.2), puis on applique le théorème 1.3.4.

— On a $V(\Omega)$ est un espace de Banach séparable et réflexif, car $V(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3 \cap \left(W^{2,p(x)}(\Omega)\right)^3$ et $\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3 \cap \left(W^{2,p(x)}(\Omega)\right)^3$ est un espace de Banach séparable et réflexif.

— On a l'application

$$\begin{aligned} &V(\Omega) \to \mathbb{R} \\ &\varphi \mapsto \sum_{i,j=1}^{3} \sum_{k,h=1}^{3} \int\limits_{\Omega} a_{ijkh}(x) E_{kh}(\nabla u) \tfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx' dx_3 \end{aligned}$$

est linéaire et continue, donc est un élément de $V'(\Omega)$, on note par $T(u-G)$ cette application, on a donc

$$\langle T(u-G), \varphi \rangle_{V'(\Omega),V(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{3} \sum_{k,h=1}^{3} \int_{\Omega} a_{ijkh}(x) E_{kh}(\nabla u) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx' dx_3.$$

— De même, on a l'application

$$\begin{aligned} &V(\Omega) \to \mathbb{R} \\ &\varphi \mapsto \int\limits_{\Omega} f \varphi dx' dx_3 \end{aligned}$$

est linéaire et continue, donc est un élément de $V'(\Omega)$, on note par f cette application, on a donc

$$\langle f, \varphi \rangle_{V'(\Omega),V(\Omega)} = \int_{\Omega} f \varphi dx' dx_3,$$

donc, le problème (4.17) devient :

$$\langle T(u-G), \varphi - (u-G) \rangle_{V'(\Omega),V(\Omega)} + J(\varphi) - J(u-G) \geqslant \langle f, \varphi - (u-G) \rangle_{V'(\Omega),V(\Omega)},$$

où bien

$$\langle T(u-G) - f, \varphi - (u-G) \rangle_{V'(\Omega),V(\Omega)} + J(\varphi) - J(u-G) \geqslant 0, \ \forall \varphi \in V(\Omega),$$

où

$$J(\varphi) = \int_{w} K|\varphi - s| dx'.$$

— L'opérateur T est pseudo-monotone, car

a) T **est borné,**

en effet, soit u borné dans $V(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
\|T(u)\|_{V'(\Omega)} &= \sup_{\substack{\varphi\in V(\Omega)\\ \|\varphi\|_{V(\Omega)=1}}} |\langle T(u),\varphi\rangle| \\
&= \sup_{\substack{\varphi\in V(\Omega)\\ \|\varphi\|_{V(\Omega)=1}}} \left|\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)\,E_{kh}(\nabla u)\,\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx'dx_3\right| \\
&\leq \sup_{\substack{\varphi\in V(\Omega)\\ \|\varphi\|_{V(\Omega)=1}}} \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\left|\int_\Omega a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u)\,\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx'dx_3\right|.
\end{aligned}$$

Comme $u\in V(\Omega)$ et $p(x)>p'(x)$ dès que $p(x)>3$, et Ω borné, alors

$$E_{kh}(\nabla u)\in L^{p'(x)}(\Omega),\ \forall 1\leqslant k,\ h\leqslant 3. \tag{4.19}$$

En utilisant maintenant l'hypothèse (H_1) et l'inégalité de Hölder avec (4.19) on obtient

$$\begin{aligned}
\|T(u)\|_{V'(\Omega)} &\leq 2\beta \sup_{\substack{\varphi\in V(\Omega)\\ \|\varphi\|_{V(\Omega)=1}}} \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\|E_{kh}(\nabla u)\|_{L^{p'(x)}(\Omega)}\left\|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \\
&\leq 6\beta \sup_{\substack{\varphi\in V(\Omega)\\ \|\varphi\|_{V(\Omega)=1}}} \sum_{i=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\|E_{kh}(\nabla u)\|_{L^{p'(x)}(\Omega)}\|\varphi_i\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} \\
&\leq 18\beta \sup_{\substack{\varphi\in V(\Omega)\\ \|\varphi\|_{V(\Omega)=1}}} \sum_{k,h=1}^{3}\|E_{kh}(\nabla u)\|_{L^{p'(x)}(\Omega)}\|\varphi\|_{(W^{1,p(x)}(\Omega))^3} \\
&\leq 18\beta \sup_{\substack{\varphi\in V(\Omega)\\ \|\varphi\|_{V(\Omega)=1}}} \sum_{k,h=1}^{3}\|E_{kh}(\nabla u)\|_{L^{p'(x)}(\Omega)}\|\varphi\|_{V(\Omega)} \\
&\leq 18\beta \sum_{k,h=1}^{3}\|E_{kh}(\nabla u)\|_{L^{p'(x)}(\Omega)}
\end{aligned}$$

de (4.19) on obtient

$$\int_\Omega |E_{kh}(\nabla u)|^{p'(x)}dx<\infty,\ \forall 1\leqslant k,\ h\leqslant 3,$$

et de (ii) et (iii) de la proposition 1.1.3 on a :

$$\min\left\{\|E_{kh}\|^{p'^-}_{L^{p'(x)}(\Omega)},\ \|E_{kh}\|^{p'^+}_{L^{p'(x)}(\Omega)}\right\}\leq\int_\Omega|E_{kh}(\nabla u)|^{p'(x)}dx<\infty,$$

donc, $\forall(k,h)\in\{1,2,3\}$, $\|E_{kh}\|_{L^{p'(x)}(\Omega)}$ est bornée, par conséquence $\|T(u)\|_{V'(\Omega)}$ est bornée.

b) T est hémicontinu

Soient $u,\ v,\ w\in V(\Omega)$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Montrons que l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $\lambda\longrightarrow\langle T(u+\lambda v),w\rangle$ est continue.

Soit $\{\lambda_n\}$ une suite de $\mathbb{R}$ qui converge vers λ.

Posons :

$$\mathcal{F}_n(x) = \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u + \lambda_n \nabla v)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}$$

et

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u + \lambda \nabla v)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}.$$

Les E_{kh} étant continues, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} E_{kh}(\nabla u + \lambda_n \nabla v) = E_{kh}(\nabla u + \lambda \nabla v),$$

alors pour tout h et tout $k \in \{1,2,3\}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n(x) \quad = \quad & \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u + \lambda_n \nabla v)\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \text{ converge vers} \\ & \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u + \lambda \nabla v)\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \text{ p.p. dans } \Omega,\end{aligned}$$

et on a aussi avec l'hypothèse (H_1) et la définition des E_{kh} :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u + \lambda_n \nabla v)\tfrac{\partial w_i}{\partial x_j}\right| \quad & \leq \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3} \beta\left|E_{kh}(\nabla u + \lambda_n \nabla v)\right|\left|\tfrac{\partial w_i}{\partial x_j}\right| \\ & \leq \tfrac{1}{2}\beta\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\left(\left|\tfrac{\partial u_h}{\partial x_k} + \lambda_n\tfrac{\partial v_h}{\partial x_k}\right| + \left|\tfrac{\partial u_k}{\partial x_h} + \lambda_n\tfrac{\partial v_k}{\partial x_h}\right|\right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{3}\left|\tfrac{\partial u_m}{\partial x_k} + \lambda_n\tfrac{\partial v_m}{\partial x_k}\right|\left|\tfrac{\partial u_m}{\partial x_h} + \lambda_n\tfrac{\partial v_m}{\partial x_h}\right|\right)\left|\tfrac{\partial w_i}{\partial x_j}\right|,\end{aligned}$$

comme λ_n est convergente dans $\mathbb{R}$ alors $\exists m \in \mathbb{R} : |\lambda_n| \leq m$, donc

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}_n(x)| \quad & \leq \tfrac{1}{2}\beta\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\left(\left(\left|\tfrac{\partial u_h}{\partial x_k}\right| + m\left|\tfrac{\partial v_h}{\partial x_k}\right|\right) + \left(\left|\tfrac{\partial u_k}{\partial x_h}\right| + m\left|\tfrac{\partial v_k}{\partial x_h}\right|\right)\right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{3}\left(\left|\tfrac{\partial u_m}{\partial x_k}\right| + m\left|\tfrac{\partial v_m}{\partial x_k}\right|\right)\left(\left|\tfrac{\partial u_m}{\partial x_h}\right| + m\left|\tfrac{\partial v_m}{\partial x_h}\right|\right)\right)\left|\tfrac{\partial w_i}{\partial x_j}\right|.\end{aligned}$$

On définit maintenant la fonction L par :

$$\begin{aligned}L(x) \quad = \quad & \frac{1}{2}\beta\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\left(\left(\left|\frac{\partial u_h}{\partial x_k}\right| + m\left|\frac{\partial v_h}{\partial x_k}\right|\right) + \left(\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_h}\right| + m\left|\frac{\partial v_k}{\partial x_h}\right|\right)\right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{3}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_k}\right| + m\left|\frac{\partial v_m}{\partial x_k}\right|\right)\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_h}\right| + m\left|\frac{\partial v_m}{\partial x_h}\right|\right)\right)\left|\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right|.\end{aligned}$$

On en déduit que $L \in L^{p(x)}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

Donc du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on en déduit que :

$$\langle T(u+\lambda_n v), w\rangle \longrightarrow \langle T(u+\lambda v), w\rangle,$$

ce qui montre que T est hémicontinu.

c) T est monotone

Grâce à l'hypothèse (H_1) et la monotonie des E_{kh} (voir théorème 3.2.1) on a :

$$\langle T(u)-T(v), u-v\rangle = \sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_\Omega a_{ijkh}(x)\left(E_{kh}(\nabla u)-E_{kh}(\nabla v)\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)dx'dx_3 \geqslant 0,$$

donc T est monotone.

Comme T est borné, hémicontinu et monotone alors T est pseudo-monotone.

— La fonctionnelle J est propre, convexe et semi-continue inférieurement sur $V(\Omega)$. En effet, soient u et v deux éléments de $V(\Omega)$ et $\lambda \in [0,1]$ on a

d) J est convexe, car

$$\begin{aligned}
J(\lambda u+(1-\lambda)v) &= \int_w K\left(|\lambda u+(1-\lambda)v-s|\right)dx' \\
&= \int_w K(|\lambda u+(1-\lambda)v-\lambda s-s+\lambda s|)dx' \\
&= \int_w K(|\lambda(u-s)+(1-\lambda)(v-s)|)dx' \\
&\leq \int_w K(|\lambda(u-s)|)dx'+\int_w K(|(1-\lambda)(v-s)|)dx' \\
&\leq \lambda\int_w K|u-s|dx'+(1-\lambda)\int_w K|v-s|dx' \\
&\leq \lambda J(u)+(1-\lambda)J(v).
\end{aligned}$$

e) J est semi-continue inférieurement, car

$$\begin{aligned}
|J(u)-J(v)| &= \left|\int_w K\left(|u-s|-|v-s|\right)dx'\right| \\
&\leq \int_w |K||u-v|dx' \\
&\leq \|K\|_{L^\infty(w)}|w|^{\frac{1}{p(x)}}\|u-v\|_{(L^{p'(x)}(w))^2} \\
&\leq \|K\|_{L^\infty(w)}|w|^{\frac{1}{p(x)}}C\|u-v\|_{(W^{1,p(x)}(\Omega))^3} \\
&\leq C\|K\|_{L^\infty(w)}|w|^{\frac{1}{p(x)}}\|u-v\|_{V(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Où C est la constante de l'injection continue de $V(\Omega)$ dans $(L^{p'(x)}(w))^2$. Ainsi, J est lipschitzienne donc a fortiori semi-continue inférieurement sur $V(\Omega)$. En appliquant le théorème 1.3.4, on obtient alors l'existence des éléments $u-G$ dans $V(\Omega)$ satisfaisant l'inéquation variationnelle (4.17).

Unicité :

Supposons maintenant que l'inéquation variationnelle (4.17) à deux solutions u_1 et u_2. On a donc :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_1)\tfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\varphi_i-(u_{1i}-G_i)\right)dx'dx_3+\\
&\int_{w} K\left(|\varphi-s|-|(u_1-G)-s|\right)dx' \geq\\
&\int_{\Omega} f\left(\varphi-(u_1-G)\right)dx'dx_3,\ \forall\varphi\in V(\Omega),
\end{aligned}\tag{4.20}$$

et

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)E_{kh}(\nabla u_2)\tfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\varphi_i-(u_{2i}-G_i)\right)dx'dx_3+\\
&\int_{w} K\left(|\varphi-s|-|(u_2-G)-s|\right)dx' \geq\\
&\int_{\Omega} f\left(\varphi-(u_2-G)\right)dx'dx_3,\ \forall\varphi\in V(\Omega).
\end{aligned}\tag{4.21}$$

On prend $\varphi=u_2-G$ dans (4.20) et $\varphi=u_1-G$ dans (4.21), d'où

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\left(E_{kh}(\nabla u_1)-E_{kh}(\nabla u_2)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left((u_{1i}-G_i)-(u_{2i}-G_i)\right)\leqslant 0,$$

mais

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\left(E_{kh}(\nabla u_1)-E_{kh}(\nabla u_2)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_{1i}-u_{2i}\right)\geqslant 0,$$

d'après l'hypothèse (H_1) et la monotonie de E_{kh}.

D'où

$$\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{k,h=1}^{3}\int_{\Omega} a_{ijkh}(x)\left(E_{kh}(\nabla u_1)-E_{kh}(\nabla u_2)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_{1i}-u_{2i}\right)=0.$$

Donc $\nabla u_1=\nabla u_2$ dans $(L^{p(x)}(\Omega))^9$, et par l'inégalité de Poincaré on obtient $u_1=u_2$ dans $(L^{p(x)}(\Omega))^3$, et donc $u_1=u_2$ dans $\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3$.

Remarque 4.3.2 *Dans le cas* $1 < p(x) \leq 3$ *et*

$$V(\Omega) = \left\{ \varphi \in \left(W^{1,p(x)}(\Omega) \right)^3 : \varphi = 0 \text{ } sur \text{ } \Gamma_1 \cup \Gamma_L, \, \varphi.n = 0 \text{ } sur \text{ } w \right\},$$

muni de la norme $\|.\|_{V(\Omega)} = \|.\|_{\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)^3}$, *le problème variationnel du problème (4.12) admet une solution sous les hypothèses (3.23).*

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons étudié des questions d'existence et d'unicité des solutions faibles dans les espaces de Sobolev à exposants constants ou variables de quelques problèmes aux limites gouvernés par le système de l'élasticité non linéaire. La nécessité de travailler dans les espaces de Sobolev à exposants variables pour résoudre ce type des problèmes, est motivée par l'apparition de ces espaces dans la modélisation des fluides électrorhéologiques et thermorhéologiques [37] et dans le traitement d'image [4].

Les techniques utilisées pour étudier ce type des problèmes sont de :

- degré topologique,

- compacité,

- monotonie.

En utilisant ces techniques, nous avons démontré un théorème d'existence et d'unicité des problèmes suivants :

- Au deuxième chapitre, le problème mêlé, dans des espaces de Sobolev à exposants constants, par les techniques de degré topologique,

- Au troisième chapitre, les problèmes de Dirichlet, Neumann et Robin dans des espaces de Sobolev à exposants variables, par les techniques de monotonie et compacité.

- Au quatrième chapitre, le problème de Tresca.

Les perspectives de ce travail, dans un premier temps, nous étudierons les mêmes problèmes cités ci-dessus avec second membre dans $L^1(\Omega)$ ou mesure, et deuxièmement, comme extension possible, nous étudierons également ces problèmes dans le cas dynamique.

Bibliographie

[1] R. Adams, Sobolev spaces, vol. 65, Academic Press, 1975.

[2] M.B. Benboubker, Sur certains problèmes elliptiques quasilinéaires non homogènes de type Dirichlet ou Neumann, Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, 2013.

[3] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, 1983.

[4] Y. Chen, S. Levine, M. Rao, Variable exponents, linear growth functionals in image restoration, SIAM J. Appl. Math., 66 (2006), $1383-1406$.

[5] P.G. Ciarlet, Mathematical elasticity, Vol. I : Three-Dimensional Elasticity, North-Holland, Amsterdam (1988).

[6] D.V. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, Variable Lebesgue Spaces : Foundations and Harmonic Analysis, Birkhäuser, Basel (2013).

[7] R. Dautray, J.L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Vol. 1, Masson (1984).

[8] L. Diening, Riesz potential and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{k,p(\cdot)}$, Math. Nachr. 268 (2004), $31-43$.

[9] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö & M. Růžička, Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2017, Springer, Heidelberg, 2011.

[10] L. Diening, P. Hästö and A. Nekvinda, Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces. In : FSDONA04 Proceedings (Milovy, Czech Republic), 2004 pp. $38-58$.

[11] G. Duvaut, J.L. Lions, Les inéquations en mécanique et physique. Dunod, Gauthiers-Villars, Paris, (1972).

[12] A. El Hachimi, S. Maatouk, Existence of periodic solutions for some quasilinear parabolic problems with variable exponents. Arab. J. Math. (2017) $6 : 263-280$ DOI $10.1007/s40065-017-0178-0$.

[13] X. Fan, J. Shen and D. Zhao, Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(.)}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl. 262 (2001), $749 - 760$.

[14] X. Fan and D. Zhao, On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{k,p(.)}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl. 263 (2001), $424 - 446$.

[15] G. Fichera, Existence theorems in elasticity, Handbuch der physik, VIa/2, pp. $347-389$, Springer-Verlag, Berlin, (1972a).

[16] G. Fichera, Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints, Handbuch der physik, VIa/2, $391 - 424$, Springer-Verlag, Berlin, (1972b).

[17] T. Gallouët, R. Herbin, Equations aux dérivées partielles, Université Aix Marseille, 2013.

[18] P. Grisvard, Le problème de Dirichlet pour les équations de lamé, C.R.A.S, T.304, série I , No 3, (1987),p. $71 - 73$.

[19] M.E. Gurtin, The linear theory of elasticity, in Handbuch der physik, pp. 1-295, Vol. VIa/2 (S.Flügge and C. Truesdell, Editors), Springer-Verlag, Berlin.(1972).

[20] D. Jérôme, Degré topologique et application, Université Montpellier II, France, 2006.

[21] R.J. Knops, L.E. Payne, Uniqueness theorems in linear elasticity, Springer Tracts in natural philosophy,Vol. 19, 1971.

[22] O. Kováčik & J. Rákosník, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$, Czechoslovak Math, J. 41(116)(1991), $592 - 618$.

[23] J. Leray, J.L. Lions, Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder, Bull. Soc. Math. France 93 (1965), $97 - 107$.

[24] K. Lhalouani, Analyse asymptotique et numérique de couhes mines en élasticité. Thèse, Université Claude Bernard de Lyon, 1996.

[25] J. L. Lions, Quelques méthode de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris (1969).

[26] B. Merouani, Quelques problèmes aux limites pour le système de Lamé dans un secteur plan, C.R.A.S., T. 304, série I, no. 13, 1987.

[27] B. Merouani, Solutions singulières du système de l'élasticité dans un polygone pour différentes conditions aux limites, Maghreb math, Rev, Vol 5, Nos 1 & 2, 1996, pp.$95 - 112$.

[28] B. Merouani and R. Boufenouche, Trigonometric series adapted for the study of Dirichlet boundary-value problems of Lamé systems ; Electron. J. Differential Equations, vol. 2015 (2015), no. 181, pp. $1-6$. issn : $1072-6691$.

[29] B. Merouani, F. Zoubai, A nonlinear elasticity system in Sobolev spaces with variable exponents, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, Tome 64 (112) No. 1, 2021, $17-33$.

[30] H. Nakano, Modulared semi-ordered linear spaces. Maruzen Co., Ltd., Tokyo, 1950.

[31] J. Nečas, I. Hlaváček, Mathematical theory of elastic and Elasto-plastic bodies : An introduction, Elsevier, Amsterdam, 1981.

[32] J. T. Oden, Existence theorems for a class of problems in nonlinear elasticity, Journal of mathematical analysis and applications, $69, 51-83$ (1979).

[33] W. Orlicz, Über konjugierte Exponentenfolgen, Studia Math., $3 : 200-211$, 1931.

[34] A. Prignet, Problèmes elliptiques et paraboliques dans un cadre non variationnel, UMPA-ENS Lyon, 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France, 1997.

[35] P.H. Rabinowitz, Théorie du degré topologique et application à des problèmes aux limites non linéaires (Lecture note by H. Berestycki), Report 75010, Laboratoire d'analyse Numériqe, Université Pierre et et Marie Curie, Paris (1989).

[36] P.A. Raviart, J.M. Tomas, Introduction à l'analyse numériques des équations aux dérivées partielles, Masson, Paris (1983).

[37] M. Růžička, Electrorheological Fluids : Modeling and Mathematical Theory, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1784, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[38] P. Villaggio, Qualitative methods in elasticity, Noordhoff, Leyden, 1977.

[39] J. Yao, Solutions for Neumann boundary value problems involving $p(x)$-Laplace operators, Nonlinear Anal. 68 (2008), pp.$1271-1283$.

[40] F. Zoubai, B. Merouani, Study of a mixed problem for a nonlinear elasticity system by topological degree, Stud. Univ. Babeş–Bolyai Math., 66(2021), No. $3, 537-551$.

[41] F. Zoubai, B. Merouani, On a pure traction problem for the nonlinear elasticity system in Sobolev spaces with variable exponents, Stud. Univ. Babeş–Bolyai Math., (2019), (accepted).

الملخص

تتعلق المسائل المطروحة في هذه الأطروحة بدراسة جملة المرونة اللاخطية مع قانون سلوك معمم و بشروط حدية مختلفة. تتمثل النتائج التي تم الحصول عليها في وجود و وحدانية الحل للمسائل التغيرية المقابلة لها. الطرق المستخدمة للحصول على هذه النتائج هي نظرية الدرجة الطوبولوجية، نظرية المؤثرات الرتيبة و نظرية المتراجحات التغيرية.

النقطة الإيجابية في هذا العمل، هي وجود الحلول في الإطار الدالي المكون من فضاءات لوباج و سوبوليف ذات الأس المتغير.

الكلمات المفتاحية

المرونة اللاخطية، قانون سلوك معمم، الدرجة الطوبولوجية، نظرية المؤثرات الرتيبة، نظرية المتراجحات التغيرية، فضاءات لوباج و سوبوليف ذات الأس المتغير.

Abstract:

The problems presented in this thesis, relate to the study of nonlinear elasticity system with a generalized constitutive law and with various boundary conditions. The obtained results consist in the existence and the uniqueness of solution of the corresponding variational problems. The methods used to show these results are the theory of topological degree, the theory of monotonic operators and the theory of variational inequalities.

The positive point in this work, is the existence of the solutions in the functional framework constitutes Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponent.

Keywords:

Nonlinear elasticity, Generalized constitutive law, Topological degree, Theory of monotonic operators, Theory of variational inequalities, Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponent.

Résumé :

Les problèmes présentés dans cette thèse, portent sur l'étude de système de l'élasticité non linéaire avec une loi de comportement généralisée et avec différentes conditions aux limites. Les résultats obtenus consistent en l'existence et l'unicité de solution des problèmes variationnels correspondants. Les méthodes utilisées pour montrer ces résultats sont la théorie de degré topologique, la théorie des opérateurs monotones et la théorie des inéquations variationnelles.

Le point positif dans ce travail, est l’existence des solutions dans le cadre fonctionnel constitue des espaces de Lebesgue et Sobolev à exposant variable.

Mots clés :

Elasticité non linéaire, Loi de comportement généralisée, Degré topologique, Théorie des opérateurs monotones, Théorie des inéquations variationnelles, Espaces de Lebesgue et Sobolev à exposant variable.