REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE SETIF

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre : Série :

THESE

présentée pour obtenir le diplôme de

Doctorat LMD

Spécialité : Physique

Option : Physique Théorique

par

Walid Koussa

THEME
Systèmes non-hermitiques Dépendants du Temps : Pseudo-Invariants et Etats Cohérents Pseudo-Fermioniques

Soutenue le : 22/05/2021

Devant le Jury :

Président :	K. Bencheikh	Prof.	UFA.Setif 1
Rapporteur :	M. Maamache	Prof.	UFA.Setif 1
Examinateurs :	M. Merad	Prof.	Université Oum el Bouaghi
	T. Boudjedaa	Prof.	Université de Jijel
	Y. Kasri	Prof.	Université de Béjaïa

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

mes parents qui sont les plus chers au monde

Mon frère Hassan, mes soeurs Soumia, Halima, Bouthaina

Tous mes amis, particulièrement : Sami, Taki, Ahssan

WALID

Remerciements

Je tiens à adresser mes profonds remerciements à l'égard de mon directeur de thèse M. **Mustapha Maamache**, Professeur à l'Université de Ferhat Abbas de Sétif, car outre son appui scientifique, il a toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l'élaboration de cette thèse. Sa capacité d'analyse et son enthousiasme m'ont montré que le monde de la recherche pouvait être un univers passionnant. Qu'il soit assuré de mon sincère respect et de ma profonde gratitude.

Je remercie également Pr. **Cem Yuce** pour son accueil, le temps passé ensemble et le partage de son expertise au quotidien lors du stage à Eskisehir Technical University en Turquie.

Je tiens à remercier Monsieur **Kamel Bencheikh**, Professeur à l'Université de Sétif, d'avoir bien voulu présider mon jury de thèse.

J'adresse tous mes remerciements aux membres du jury : Messieurs **M. Merad, T. Boudjedaa, Y. Kasri** et l'honneur qu'ils m'ont fait en étant les examinateurs de ce travail.

Je remercie Monsieur **Lakehal Halim**, chef de département de Physique à l'université de Ferhat Abbas de Sétif, qui m'a encouragé tout au long de la période de thèse, et Monsieur **Bouguerra Yacine** pour ses conseils durant ce travail.

Je tiens à remercier tous les enseignants de l'Université de Ferhat Abbas, qui ont répondu avec calme et patience aux questions quotidiennes dont je les accablais.

Je remercie vivement mes collègues : **Elaihar Lamine, Kecita Farouk, Khatir Abderrezak, Zaidi Omar, Cheniti Sara** qui m'ont soutenu durant cette thèse, et en particulier Mme. **Naima Mana** avec qui j'ai travaillé durant ces années avec respect mutuel et persévérance, et dont nos connaissances se sont agrandies au fil des jours.

Enfin Je remercie le groupe chargé de la bibliothèque centrale de l'université en particulier : **Benstiti A.Malek**, **Fradj A.Razek** , **Amrane Achour**, **Belhadi Hocine**, **Medjergui Amar** et **Fertas Mohamed Cherif.**

Table des matières

Introduction

La Mécanique Quantique est la branche de la physique théorique qui étudie et décrit les phénomènes fondamentaux à l'œuvre dans les systèmes physiques, plus particulièrement à l'échelle atomique et subatomique.

Le cœur de la Mécanique Quantique repose sur l'utilisation d'amplitudes de probabilité pour caractériser tous les processus physiques possibles en mécanique quantique. Ce sont ces processus qui peuvent se propager sous forme d'onde, mais les grandeurs physiques associées à ces processus sont souvent quantifiées et donc discrètes. C'est le cas de l'énergie des électrons dans un atome. L'équation fondamentale de la mécanique quantique est l'équation de Schrödinger.

Depuis l'origine de la formulation axiomatique de la Mécanique Quantique un problème est resté en suspens. C'est celui posé par la détermination des « observables quantiques » qui doivent correspondre aux grandeurs physiques classiques. Certes, le formalisme de la Mécanique Quantique permet de déterminer les observables quantiques qui correspondent aux coordonnées canoniques et la substitution des coordonnées par les observables est le seul principe que l'on peut appliquer : c'est la « règle de substitution ». Mais cette règle s'avère insuffisante et ambiguë. Par ailleurs, la physique classique décrit différemment un corpuscule (atome, particule) et une onde (lumière, électricité) tandis que la mécanique quantique ne distingue pas les deux descriptions : un photon, un électron, un atome ou même une molécule sont à la fois onde et corpuscule.

Si, en physique classique, l'état d'un système est parfaitement défini par la position et la vitesse de l'ensemble de ses composants, il ne peut être alors que dans un seul état à un moment et à un endroit donné, il n'en va pas de même en physique quantique.

Formulation axiomatique de la Mécanique Quantique [1]

Premier Postulat : **Description de l'état d'un système**

A un instant fixe t_0, l'état d'un système physique est défini en spécifiant un ket $|\psi(t_0)\rangle$ appartenant à l'espace de Hilbert.

Deuxième Postulat : **Description des quantités physiques**

Toute grandeur physique mesurable A est représentée par un opérateur $\hat{A}$ agissant dans l'espace de Hilbert ; cet opérateur est une observable.

Troisième Postulat : **Mesure des quantités physiques**

Le seul résultat possible de la mesure d'une grandeur physique A est l'une des valeurs propres de l'observable Â correspondante.

Quatrième Postulat : **Probabilité de la mesure**

Lorsque la grandeur physique A est mesurée sur un système à l'état normalisé $|\psi\rangle$, la probabilité $P(a_n)$ d'obtenir la valeur propre non dégénérée a_n de l'observable correspondante Â est

$$P(a_n) = |\langle u_n|\ \psi\rangle|^2, \tag{1}$$

où $|u_n\rangle$ est le vecteur propre normalisé de Â associé à la valeur propre a_n.

Cinqième Postulat :

Si la mesure de la quantité physique A sur le système dans l'état $|\psi\rangle$ donne le résultat a_n, l'état du système immédiatement après la mesure est la projection normalisée, $\frac{P_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_n|\psi\rangle}}$, de $|\psi\rangle$ sur le sous-espace associé à a_n.

Sixième Postulat : **Évolution temporelle des systèmes**

L'évolution temporelle du vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ est gouvernée par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = H(t)|\Psi(t)\rangle, \tag{2}$$

où l'opérateur Hamiltonien $H(t)$ est l'observable associée à l'énergie totale du système. La conservation de la norme du vecteur d'état, c-à-d

$$\frac{d}{dt}\|\Psi(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\langle\Psi(t)|\ \Psi(t)\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle\Psi(t)|\,H - H^+\,|\Psi(t)\rangle = 0, \tag{3}$$

est assurée par l'herméticité de $H = H^+$. En effet, l'hermiticité de l'opérateur Hamiltonien H assure aussi l'unitarité de l'opérateur d'évolution et la réalité du spectre d'énergie. Il est connu en algèbre que si un opérateur, défini sur un espace de Hilbert, est hermitique, ses valeurs propres sont toutes réelles et les fonctions propres correspondantes forment une base orthogonale. En revanche, s'il est non-hermitique, il n'est pas garanti que ses valeurs propres soient réelles mais plutôt elles sont en général complexes.

Néanmoins, il a été constaté que certains systèmes non-hermitiques peuvent avoir des spectres d'énergie réels et cela a été expliqué comme étant lié à la $\mathcal{PT}$ *symétrie* et *la pseudo-hermiticité,* ces deux concepts sont bien définis dans le **Chapitre 1**. Avant d'aborder les concepts de $\mathcal{PT}$ *symétrie* et *de pseudo-hermiticicité,* on présente un bref rappel sur les symétries continues en mécanique quantique.

Théorème de Wigner Le théorème de Wigner [2] est *à* la base de l'application de la théorie des groupes en mécanique quantique. Wigner a décrit les états quantiques sous forme de rayons unitaires dans un espace de Hilbert : $\{e^{i\theta}\psi\}$, où $|\psi|^2 = 1$ et θ varie de 0 à 2π. Notant que les prédictions physiques sont données par des probabilités de transition, $|\langle\psi|\phi\rangle|^2$, il a défini une transformation de symétrie

$$\mathcal{G} : \psi \rightarrow G\psi \quad \text{où } |\langle\psi|\phi\rangle| \text{ est préservé,} \tag{4}$$

où l'opérateur G, définit dans l'espace d'Hilbert, est

i. linéaire et unitaire : $\langle G\psi|G\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle$; ou

ii. anti-linéaire et anti-unitaire : $\langle G\psi|G\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^*$.

La première possibilité est le cas de la symétrie $\mathcal{P}$ alors que la deuxième possibilité est requise pour la description de l'invariance de l'inversion du temps $\mathcal{T}$.

En mécanique quantique, la transformation d'un système physique décrit par l'équation temporelle suivante

$$i\partial_t |\Psi(t)\rangle = H(t)|\Psi(t)\rangle, \tag{5}$$

en un système équivalent

$$i\partial_t \left|\tilde{\Psi}(t)\right\rangle = \tilde{H}(t)\left|\tilde{\Psi}(t)\right\rangle, \tag{6}$$

résulte de l'application d'un opérateur G linéaire possédant un inverse. Le vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ est transformé en vecteur $\left|\tilde{\Psi}(t)\right\rangle$ par G tel que

$$|\Psi(t)\rangle \xrightarrow{G} \left|\tilde{\Psi}(t)\right\rangle \equiv G|\Psi(t)\rangle. \tag{7}$$

On note que l'Hamiltonien transformé $\tilde{H}(t) = GH(t)G^{-1}$ est obtenu lorsque G est indépendant du temps, et si, au contraire, G est dépendant du temps alors $\tilde{H}(t) = GH(t)G^{-1} + i\dot{G}G^{-1}$.

La transformation effectuée par l'opérateur G est dite *transformation de symétrie* si l'Hamiltonien $H(t)$ est invariant par cette transformation, $\tilde{H}(t) = H(t)$, c'est à dire que les deux opérateurs $H(t)$ et G commutent : $[H(t), G] = 0$. Si la transformation de symétrie peut être construite en continu comme une série de transformations infinitésimales à partir de l'opérateur d'identité I, alors elle est appelée *symétrie continue*. Les symétries qui ne peuvent pas être construites de cette manière sont appelées *symétries discrètes*.

L'équivalence entre les transformations continues et les lois de conservation (d'invariances) est exprimée par le *théorème de Noether* [3] : **à toute loi de conservation correspond une symétrie continue et à toute symétrie correspond une loi de conservation**. Ce qui a été démontré pour

- la translation
  - dans l'espace : conservation de l'impulsion ;
  - dans le temps : conservation de l'énergie ;
- la rotation : conservation du moment angulaire ou cinétique.

Translations dans l'espace Soit $\psi(x)$ la fonction d'onde d'une particule au point x et soit la translation $x \to x + a$ qui translate la fonction d'onde $\psi(x)$ comme $T_a\psi(x) = \psi_a(x) = \psi(x - a)$. Ecrivons le développement de Taylor de $\psi_a(x)$

$$\psi_a(x) = \psi(x-a) \approx \psi(x) - a\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) + ... + (-1)^n \frac{a^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial^n x}\psi(x), \tag{8}$$

du fait que $p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, on obtient

$$\begin{aligned} \psi_a(x) &= \psi(x) - \frac{ia}{\hbar}p_x\psi(x) + ... + (-1)^n \left(\frac{ia}{\hbar}\right)^n \frac{p_x^n}{n!}\psi(x), \\ &= e^{-\frac{ia}{\hbar}p_x}\psi(x), \end{aligned} \tag{9}$$

donc la translation selon l'axe x est donnée par l'opérateur $T_a = e^{-\frac{ia}{\hbar}p_x}$. Une généralisation aux trois dimensions implique

$$T_a\psi(\vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}.\vec{p}}\psi(\vec{r}), \tag{10}$$

où $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ et $\vec{r} = (x, y, z)$. L'opérateur T_a est unitaire, $T_a^+ = T_a^{-1}$, et possède les propriétés suivantes

i. $T_a^{-1} = T_{-a}$;

ii. $T_{a'}T_{a"} = T_{a'+a"}$;

iii. $T_a^+ x T_a = x + a$.

Pour a infinitésimal, nous pouvons développer l'opérateur de translation comme suit

$$T_a \approx 1 - \frac{ia}{\hbar} p_x. \tag{11}$$

Il est donc indéniable que pour un système dont les équations de mouvement restent invariantes après une symétrie de translation, l'impulsion est conservée.

Translations dans le temps Pour les translations dans l'espace et lorsque'il n'y a pas d'*opérateur du temps*, c-à-d le temps t n'est pas une variable dynamique en mécanique quantique, on définit l'opérateur d'évolution $U(t)$ qui décrit l'évolution temporelle du système au temps t. L'opérateur $U\left(\delta t\right)$ translate l'état $\psi(t)$ en $\psi(t')$ de la manière suivante

$$U\left(\delta t\right)\psi(t) = \psi(t') = \psi(t+\delta t). \tag{12}$$

Le développement de Taylor de $\psi(t')$ implique

$$\begin{aligned} \psi(t') &= \psi(t+\delta t) \approx \psi(t) + \delta t \frac{\partial}{\partial t}\psi(t) + \mathcal{O}\left((\delta t)^2\right), \\ &\simeq (1+\delta t\frac{\partial}{\partial t})\psi(t), \end{aligned} \tag{13}$$

en remplaçant l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ par $\frac{-i}{\hbar}H$, l'opérateur $U\left(\delta t\right)$ est alors obtenu

$$U\left(\delta t\right) \simeq (1 - \frac{i}{\hbar}\delta t H) = e^{-\frac{i}{\hbar}\delta t H}. \tag{14}$$

Pour un système isolé, l'opérateur $U\left(t\right)$ est unitaire et l'Hamiltonien H est le générateur infinitésimal des translations du temps. Donc le fait que le système soit invariant en translation temporelle implique la conservation de l'énergie

$$\frac{dH}{dt} = 0. \tag{15}$$

Rotations Une rotation est une transformation géométrique qui peut être entièrement spécifiée par deux paramètres : un angle de rotation α et un axe de rotation u, l'axe autour duquel la rotation se produit. La rotation de la fonction d'onde $\psi(\alpha)$ avec un changement infinitésimal de la variable angulaire $\delta\alpha$ autour de l'axe z est donnée comme suit

$$R_z(\delta\alpha)\psi(\alpha) = \psi(\alpha') = \psi(\alpha+\delta\alpha), \tag{16}$$

où R_z est l'opérateur de rotation dont la forme peut être obtenue selon

$$\begin{aligned}\psi(\alpha') &= \psi(\alpha+\delta\alpha) \approx \psi(\alpha) + \delta\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\psi(\alpha) + \mathcal{O}\left((\delta\alpha)^2\right), \\ &= (1+\delta\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha})\psi(\alpha),\end{aligned} \tag{17}$$

alors

$$R_z(\delta\alpha) = (1+\delta\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}) = (1+\frac{i}{\hbar}\delta\alpha L_z), \tag{18}$$

avec $L_z = i\hbar\frac{\partial}{\partial\alpha} = i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$ est l'opérateur de moment cinétique dans la direction des z et ainsi appelé le générateur des rotations. L'application successive de l'opérateur de rotation R pour N fois ($N \to \infty$) donne une rotation d'angle fini α autour d'un axe spécifié u qu'on peut représenter par l'opérateur suivant

$$R_u(\alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\vec{u}.\vec{L}}, \tag{19}$$

du fait que le moment cinétique $\vec{L}$ est hermitique, l'opérateur de rotation est unitaire.

Afin de traiter certains aspects des systèmes non-hermitiques dépendants du temps, nous présenterons, au premier chapitre, un portrait de la mécanique quantique des Hamiltoniens $\mathcal{PT}$ symétriques et pseudo-hermitiques.

Au chapitre 2, nous présenterons un développement qui constitue une nouvelle façon d'obtenir l'état quantique $|\Psi(t)\rangle$ d'un système non-hermitique dépendant du temps. Cet outil est très utile pour étudier les solutions à l'aide des opérateurs invariants pseudo-hermitiques.

Au chapitre trois, nous appliquons la théorie des invariants pseudo-hermitiques pour étudier le mouvement d'une particule dans un potentiel linéaire complexe dépendant du temps, et les systèmes non-hermitiques obéissant à l'algèbre SU(1,1) et SU(2).

Nous finirons, au chapitre 4, par introduire en détail les états cohérents pseudo-fermioniques dépendants du temps à l'aide des opérateurs invariants linéaires considérés comme opérateurs d'annihilation et de création. Nous terminerons, ce chapitre, par vérifier nos conclusions en étudiant un système concret à deux niveaux non-hermitique dépant explicitement du temps pour lequel on peut résoudre exactement l'équation de Schrödinger.

Chapitre 1

$\mathcal{PT}$ symétrie et pseudo-hermiticité en Mécanique Quantique

Dans le but de construire une théorie cohérente pour les systèmes non-hermitiques, deux concepts ont émergé dans la littérature : la $\mathcal{PT}$ symétrie et la pseudo-hermiticité. L'utilisation de la métrique pseudo-unitaire dans la théorie quantique a été proposée par de nombreux scientifiques : Dirac, Pauli, Feynman et Sudarshan [4, 5, 6, 7, 8]. Plus tard, Scholz [9] a introduit la notion de quasi-hermiticité où un Hamiltonien non-hermitique peut être lié à son adjoint hermitique comme $H^{+} = \eta H \eta^{-1}$ où η est un opérateur linéaire hermitique et inversible. Cette notion a été généralisée par Mostafazadeh [10, 11, 12] aux Hamiltoniens non-hermitiques possèdant des spectres réels. En 1998, Bender et Boettecher [13] ont démontré que les Hamiltoniens ayant une symétrie $\mathcal{PT}$ possèdent des spectres réels et positifs.

1.1 $\mathcal{PT}$ symétrie

La symétrie parité-temps ($\mathcal{PT}$) consiste en la combinaison de l'opérateur parité $\mathcal{P}$ et l'opérateur renversement du temps $\mathcal{T}$ tel que ces deux opérateurs commutent $[\mathcal{P}, \mathcal{T}] = 0$ et leur carré est égal à l'unité $(\mathcal{PT})^2 = 1$, $\mathcal{P}^2 = \mathcal{T}^2 = 1$ mais $\mathcal{P} \neq \mathcal{T}$. Cependant, les deux opérateurs ont pour effet de transformer l'opérateur position x, l'impulsion p et le nombre imaginaire i comme

$$\mathcal{P}\left\{x \to -x \quad , \quad p \to -p \quad , \quad i \to i\right\}, \tag{1.1}$$

$$\mathcal{T}\left\{x \to x \quad , \quad p \to -p \quad , \quad i \to -i\right\}, \tag{1.2}$$

parfois certains auteurs adoptent le fait que l'opérateur $\mathcal{T}$ change aussi le signe du temps $t \to -t$ [14, 15, 16, 17, 18, 19]. Il a été démontré que la réalité du spectre des Hamiltoniens non-hermitiques est due à la présence de cette symétrie [13]. Tout d'abord, un Hamiltonien H est dit $\mathcal{PT}$ symétrique lorsque il commute avec l'opérateur $\mathcal{PT}$

$$[H, \mathcal{PT}] = 0, \tag{1.3}$$

en plus, si il y a des états propres de l'Hamiltonien H qui ne sont pas des états propres de l'opérateur $\mathcal{PT}$, la $\mathcal{PT}$ symétrie est brisée. Cependant, si tous les états de l'Hamiltonien $\mathcal{PT}$ symétrique sont aussi des états propres de l'opérateur $\mathcal{PT}$, la $\mathcal{PT}$ symétrie est dite non-brisée. A cette fin, écrivons l'équation aux valeurs propres de l'Hamiltonien H

$$H\left|\psi_n\right\rangle = E_n\left|\psi_n\right\rangle, \tag{1.4}$$

et de l'opérateur $\mathcal{PT}$

$$\mathcal{PT}\left|\psi_n\right\rangle = \lambda_n\left|\psi_n\right\rangle, \tag{1.5}$$

et comme

$$(\mathcal{PT})^2 = 1, \tag{1.6}$$

alors

$$\left|\lambda_n\right|^2 = 1. \tag{1.7}$$

La relation (1.3) permet d'écrire

$$H\left|\psi_n\right\rangle = \mathcal{PT}H\mathcal{PT}\left|\psi_n\right\rangle = \left|\lambda_n\right|^2 E_n^*\left|\psi_n\right\rangle = E_n\left|\psi_n\right\rangle, \tag{1.8}$$

on conclue que

$$E_n^* = E_n, \tag{1.9}$$

ce qui montre que les états propres de l'Hamiltonien H sont aussi des états propres de l'opérateur $\mathcal{PT}$ impliquant que les valeurs propres de H sont réelles.

On trouve parfois des Hamiltoniens $\mathcal{PT}$ symétriques dont la symétrie est brisée dans des intervalles spécifiés ; cette symétries est dite spontanément brisée. Dans ces intervalles, les valeurs propres de l'Hamiltonien qui étaient réelles ou complexes deviennent complexes ou réelles.

La transition entre le plan réel ($\mathcal{PT}$ symétrie non-brisée) et le plan complexe ($\mathcal{PT}$ symétrie brisée) des valeurs propres passe par des points de transition appelés *points exceptionnels* (PE). Un point exceptionnel d'ordre n est un point de l'espace des paramètres auquel les n valeurs propres et les états propres correspondants coalescent [21, 22, 23]. Par exemple, dans un système à deux niveaux à un PE d'ordre 2, les deux valeurs propres $E_\pm$ et leurs états propres correspondants $\psi_\pm$ coalescent

$$E_+ = E_- \text{ et } \psi_+ = \psi_-. \tag{1.10}$$

Afin d'avoir une théorie cohérente et unitaire, Bender et al. [20] ont défini le $\mathcal{PT}$ produit scalaire associé aux Hamiltoniens $\mathcal{PT}$ symétriques comme

$$(f, g) = \int_C dx\,[\mathcal{PT} f(x)]\, g(x), \tag{1.11}$$

où $\mathcal{PT} f(x) = f^*(-x)$. L'avantage de ce produit scalaire est que la norme associée (f, f), qui est indépendante de la phase globale de $f(x)$, est conservée dans le temps. L'application de cette définition aux états propres de H et $\mathcal{PT}$ implique

$$(\psi_m, \psi_n) = (-1)^n \delta_{mn}, \tag{1.12}$$

vu que la norme n'est pas toujours positive, la moité des états propres ont la norme $+1$ et l'autre ont la norme -1, ce qui constitue un obstacle à la formulation d'une théorie quantique cohérente. Pour résoudre ce problème, Bender et al. [20] ont observé que les Hamiltoniens $\mathcal{PT}$ symétriques avec une symétrie non-brisée possèdent une symétrie inaperçue liée au fait qu'il existe un nombre égal d'états de norme positive et de norme négative. C'est la symétrie de conjugaison de charge, dénotée par $\mathcal{C}$. L'introduction de l'opérateur $\mathcal{C}$ à l'opérateur $\mathcal{PT}$ donne ce qu'on appelle la $\mathcal{CPT}$ symétrie.

1.2 $\mathcal{CPT}$ symétrie

Pour surmonter le problème de la norme négative, Bender et al. [20] ont introduit l'opérateur linéaire $\mathcal{C}$ avec les valeurs propres ± 1, $\mathcal{C}^2 = 1$. Cet opérateur commute avec l'opérateur $\mathcal{PT}$

$$[\mathcal{C}, \mathcal{PT}] = 0, \tag{1.13}$$

mais pas avec $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ séparément

$$[\mathcal{C}, \mathcal{P}] \neq 0 \quad , \quad [\mathcal{C}, \mathcal{T}] \neq 0. \tag{1.14}$$

L'introduction de l'opérateur $\mathcal{C}$ a permis la définition du $\mathcal{CPT}$ produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_C dx\, [\mathcal{CPT} f(x)]\, g(x), \tag{1.15}$$

qui est défini positif car $\mathcal{C}$ contribue avec -1 quand il agit sur des états avec une norme $\mathcal{PT}$ négative. Eq.(1.12) devient

$$\langle \phi_m, \phi_n\rangle = \delta_{mn}\ . \tag{1.16}$$

1.2.1 Application

Considérons l'Hamiltonien suivant

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + ifx, \tag{1.17}$$

où m, ω et f sont des constantes réelles. Nous constatons que H est $\mathcal{PT}$ symétrique, c-à-d

$$H^{\mathcal{PT}} = (\mathcal{PT})\, H\, (\mathcal{PT}) = H. \tag{1.18}$$

L'équation aux valeurs propres associée à H s'écrit

$$H\, |\psi_n\rangle = E_n\, |\psi_n\rangle\, , \tag{1.19}$$

sur laquelle nous effectuons une transformation non-unitaire D

$$D = \exp\left(\frac{f}{m\omega^2} p\right), \tag{1.20}$$

l'équation (1.19) se transforme en

$$DHD^{-1}\, |\varphi_n\rangle = E_n\, |\varphi_n\rangle \ \text{ avec } \ |\varphi_n\rangle = D\, |\psi_n\rangle\, , \tag{1.21}$$

où

$$DHD^{-1} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}\frac{f^2}{m\omega^2}. \tag{1.22}$$

L'Hamiltonien transformé est hermitique, alors ses valeurs propres sont réelles et données par

$$E_n = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{f^2}{m\omega^2} \tag{1.23}$$

et les fonctions propres correspondantes sont

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{m\omega^2}{2}x^2\right) H_n\left(\sqrt{m\omega}x\right), \tag{1.24}$$

où H_n sont les polynômes d'Hermite, d'où les fonctions propres $|\psi_n\rangle$ ont la forme

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{f}{m\omega^2}p\right) \exp\left(-\frac{m\omega^2}{2}x^2\right) H_n\left(\sqrt{m\omega}x\right), \tag{1.25}$$

et sont orthonormées au sens du $\mathcal{CPT}$ produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle\psi_n(x)|\, \psi_m(x)\rangle_{\mathcal{CPT}} &= \int dx\, [\mathcal{CPT}\psi_n(x)]\, \psi_m(x) \\ &= \int dx \psi_m(x) \exp\left(\frac{2f}{m\omega^2}p\right) \psi_n^*(x) = \delta_{mn}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

où $\mathcal{CP} = \exp\left(\frac{2f}{m\omega^2}p\right)$.

1.3 Pseudo-hermiticité

La notion de pseudo-hermiticité a été introduite par Mostafazadeh dans [10, 11, 12] où il a montré que chaque Hamiltonien avec un spectre réel est pseudo-hermitique, et que tous les Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques admettant une base propre complète biorthonormée sont pseudo-hermitiques. Il a conclu donc que la pseudo-hermiticité est une généralization de la $\mathcal{PT}$ symétrie. En fait, dire que l'Hamiltonien H est pseudo-hermitique est équivalent à

$$H^+ = \eta H \eta^{-1}, \tag{1.27}$$

où η est un opérateur linéaire hermitique et inversible, et H^+ est l'Hamiltonien adjoint de H. L'Hamiltonien H et son adjoint vérifient les équations aux valeurs propres suivantes

$$H\,|\psi_n\rangle = E_n\,|\psi_n\rangle\,, \tag{1.28}$$

$$H^+\,|\chi_n\rangle = E_n^*\,|\chi_n\rangle\,. \tag{1.29}$$

Les vecteurs propres de H (1.28) et ceux de H^+ forment une base bi-orthonormée $\{|\psi_n\rangle, |\chi_n\rangle\}$, c'est-à-dire

$$\langle\chi_m\,|\psi_n\rangle = \delta_{mn}\,. \tag{1.30}$$

La relation de fermeture est donnée en fonction de $|\psi_n\rangle$ et $|\chi_n\rangle$ comme

$$\sum_n |\psi_n\rangle \langle\chi_n| = \sum_n |\chi_n\rangle \langle\psi_n| = 1, \tag{1.31}$$

en utilisant cette relation de fermeture, les Hamiltoniens H et H^+ s'écrivent, respectivement, comme suit

$$H = \sum_n E_n |\psi_n\rangle \langle\chi_n| \quad , \quad H^+ = \sum_n E_n^* |\chi_n\rangle \langle\psi_n| . \tag{1.32}$$

La pseudo-hermiticité relie également l'Hamiltonien pseudo-hermitique H à un Hamiltonien hermitique équivalent h

$$h = \rho H \rho^{-1}, \tag{1.33}$$

où l'opérateur de transformation de Dyson ρ est un opérateur linéaire, inversible et borné. En effet, à partir de cette dernière relation (1.33) on peut facilement obtenir la relation (1.27), de l'hermiticité de h on a

$$\rho H \rho^{-1} = \left(\rho^{-1}\right)^+ H^+ \rho^+, \tag{1.34}$$

multipliant du côté gauche par ρ^+ et du côté droite par $(\rho^+)^{-1}$ implique

$$\rho^+ \rho H \rho^{-1} \left(\rho^+\right)^{-1} = H^+, \tag{1.35}$$

notons que

$$\eta = \rho^+ \rho \quad , \quad \eta^{-1} = \rho^{-1} \left(\rho^+\right)^{-1} . \tag{1.36}$$

Considérons l'équation aux valeurs propres de l'Hamiltonien hermitique h

$$h |\varphi_n\rangle = E_n |\varphi_n\rangle . \tag{1.37}$$

Il est important de noter que la transformation ρ permet de faire passer des vecteurs propres de h aux vecteurs propres de H

$$|\varphi_n\rangle = \rho |\psi_n\rangle . \tag{1.38}$$

Les vecteurs propres $|\varphi_n\rangle$ forment une base orthonormée, i.e. préservent le produit scalaire

$$\langle\varphi_m |\varphi_n\rangle = \delta_{mn}, \tag{1.39}$$

l'utilisation de la relation (1.38) donne

$$\langle\psi_m| \rho^+ \rho |\psi_n\rangle = \langle\psi_m| \eta |\psi_n\rangle = \langle\psi_m| \psi_n\rangle_\eta = \delta_{mn}, \tag{1.40}$$

ce dernier est connu comme le *pseudo-produit scalaire* (η-produit scalaire) et a été introduit en 2007 [24, 25, 26].

1.3.1 Application

Reprenons toujours l'Hamiltonien non-hermitique (1.17)

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2+ifx. \tag{1.41}$$

Afin de déterminer les valeurs propres et les états propres (1.19) de H à l'aide de la notion de pseudo-hermiticité, nous introduisons l'opérateur métrique $\eta=\rho^+\rho$ sous la forme

$$\eta=\exp\left(\frac{2f}{m\omega^2}p\right), \tag{1.42}$$

il est facile de vérifier que η relie l'Hamiltonien H (1.41) à son adjoint H^+ par la relation de pseudo-hermiticité (1.27) et que $\rho=\eta^{1/2}$ donne l'équivalent hermitique (1.33)

$$h=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2+\frac{1}{2}\frac{f^2}{m\omega^2}, \tag{1.43}$$

dont les valeurs propres sont

$$E_n=\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\frac{f^2}{m\omega^2} \tag{1.44}$$

et les fonctions propres correspondantes sont

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{m\omega^2}{2}x^2\right)H_n\left(\sqrt{m\omega}x\right). \tag{1.45}$$

On obtient les fonctions propres associées à H (1.41) par la transformation inverse $\psi_n(x)=\rho^{-1}\varphi_n(x)$

$$\psi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{f}{m\omega^2}p\right)\exp\left(-\frac{m\omega^2}{2}x^2\right)H_n\left(\sqrt{m\omega}x\right), \tag{1.46}$$

Maintenant on calcule le pseudo-produit scalaire

$$\langle\psi_m|\,\eta\,|\psi_n\rangle=\int dx\psi_n^*(x)\eta\psi_m(x), \tag{1.47}$$

en faisant le changement de variable $x=\frac{1}{\sqrt{m\omega}}y$, on trouve que ces fonctions sont $\eta-$orthonormées

$$\langle\psi_m|\,\eta\,|\psi_n\rangle=\delta_{mn}. \tag{1.48}$$

Chapitre 2

Systèmes non-hermitiques dépendants du temps

2.1 Introduction

En mécanique quantique, la dynamique des systèmes fermés est gouvernée par l'équation de Schrödinger [27]

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi(t)\right\rangle = H(t)\left|\Psi(t)\right\rangle, \tag{2.1}$$

où $H(t)$ est l'Hamiltonien du système et $|\Psi(t)\rangle$, vecteur dans un espace de Hilbert, représente l'état quantique du système. La résolution de cette équation nous donne l'état du système $|\Psi(t)\rangle$, l'objet d'intérêt en mécanique quantique qui nous sert à prédire les résultats possibles lors d'une mesure (au temps t) d'une observable ainsi que les probabilités relatives associées à ces résultats. Dans un contexte général, le Hamiltonien $H(t)$ est un opérateur (lui peut dépendre du temps t, et l'équation de Schrödinger peut s'avérer très difficile à résoudre. En fait, avec un Hamiltonien qui dépend du temps, il existe très peu de systèmes réels pour lesquels on peut résoudre exactement l'équation. Par contre, dans certains cas, on peut utiliser des méthodes d'approximation pour trouver l'état $|\Psi(t)\rangle$. Trois d'entre elles sont la théorie des perturbations, l'approximation soudaine (lors d'un changement brusque du Hamiltonien, sur une courte durée) et l'approxirnation adiabatique. Dans certains cas (i.e. pour certains systèmes), on peut utiliser l'approche des invariant afin d'estimer l'état quantique du système $|\Psi(t)\rangle$. Ce travail, quant à lui, porte sur une autre de ces méthodes : la théorie des pseudo-invariant pour des systèmes non-hermitiques [28, 29, 31, 32].

2.2 Théorie des pseudo-invariants

Dans le cas hermitique, la théorie des invariants de Lewis et Riesenfeld est une technique très utile pour déterminer les solutions des systèmes quantiques décrits par des Hamiltoniens hermitiques dépendants explicitement du temps. La solution de l'équation de Schrödinger s'exprime en fonction des états propres [30] de l'invariant multiplié par une phase, d'où le problème se réduit à trouver la forme explicite de l'opérateur invariant et les phases associées à l'évolution.

Dans le cas non-hermitique où l'hamiltonien $H(t)$ dépend du temps, l'équation de Schrödinger est donnée par

$$i\hbar\partial_t \left|\Psi(t)\right\rangle = H(t) \left|\Psi(t)\right\rangle . \tag{2.2}$$

Nous supposons par ailleurs l'existence d'un invariant pseudo-hermitique $I^{PH}\ (t)$ explicitement dépendant du temps vérifiant l'équation de Von-Neumann

$$\frac{\partial I^{PH}(t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\left[I^{PH}\left(t\right), H(t)\right], \tag{2.3}$$

et en complète analogie avec le scénario indépendant du temps, la relation temporelle de la quasi-herméticité pour l'opérateur invariant s'écrit

$$I^{PH+}\left(t\right) = \eta(t) I^{PH}\left(t\right) \eta^{-1}(t) \ \Leftrightarrow I^{h}(t) = \rho(t) I^{PH}(t) \rho^{-1}(t) = I^{h+}(t), \tag{2.4}$$

ainsi l'opérateur métrique dépendant du temps $\eta(t) = \rho^{+}(t)\rho(t)$ connecte $I^{PH}(t)$ à son conjugué hermitique $I^{PH+}\ (t)$, et $I^{PH}(t)$ peut aussi être lié à l'opérateur invariant hermitique $I^{h}(t)$ au moyen de la transformation de similarité $\rho(t)$.

Nous constatons que l'action de l'opérateur invariant sur un vecteur d'état de Schrödinger est aussi une solution à l'équation de Schrödinger, c'est-à-dire

$$H(t)\left(I^{PH}\left(t\right)\left|\Psi(t)\right\rangle\right) = i\hbar\partial_t\left(I^{PH}\left(t\right)\left|\Psi(t)\right\rangle\right), \tag{2.5}$$

ce qui est un résultat valable pour tout opérateur invariant.

Nous supposons que l'opérateur invariant pseudo-hermitique $I^{PH}(t)$ admet un ensemble d'états propres $\left|\phi_n^H(t)\right\rangle$

$$I^{PH}(t)\left|\phi_n^H(t)\right\rangle = \lambda_n \left|\phi_n^H(t)\right\rangle, \tag{2.6}$$

en introduisant la métrique dépendante du temps $\eta(t)$, le produit scalaire des états propres devient

$$\left\langle\phi_n^H(t)\right|\eta(t)\left|\phi_n^H(t)\right\rangle = \delta_{m,n}. \tag{2.7}$$

Les valeurs propres λ_n sont également indépendantes du temps et peuvent être déduites de la manière suivante, en différenciant l'équation (2.6), il s'ensuit que

$$\frac{\partial I^{PH}}{\partial t}\left|\phi_n^H(t)\right\rangle + I^{PH}\frac{\partial\left|\phi_n^H(t)\right\rangle}{\partial t} = \frac{\partial\lambda_n}{\partial t}\left|\phi_n^H(t)\right\rangle + \lambda_n\frac{\partial\left|\phi_n^H(t)\right\rangle}{\partial t}, \tag{2.8}$$

en multipliant l'équation (2.8) par $\left\langle\phi_n^H(t)\right|\eta(t)$ et en utilisant l'équation (2.3), nous obtenons

$$\frac{\partial\lambda_n}{\partial t} = \left\langle\phi_n^H(t)\right|\eta(t)\frac{\partial I^{PH}}{\partial t}\left|\phi_n^H(t)\right\rangle = 0, \tag{2.9}$$

qui signifie que les valeurs propres λ_n sont des constantes.

La réalité des valeurs propres λ_n est garantie, puisque l'invariant hermitique $I^h(t)$ et l'invariant non-hermitique $I^{PH}(t)$ sont liés par une transformation de similarité (2.4), c'est-à-dire qu'ils ont les mêmes valeurs propres. Afin d'étudier la relation entre les états propres de $I^{PH}(t)$ et les solutions de l'équation de Schrödinger (2.2), nous projetons l'équation (2.8) sur $\left\langle\phi_m^H(t)\right|\eta(t)$ et en utilisant l'équation (2.9), nous obtenons

$$i\hbar\left\langle\phi_m^H(t)\right|\eta(t)\frac{\partial}{\partial t}\left|\phi_n^H(t)\right\rangle = \left\langle\phi_m^H(t)\right|\eta(t)H(t)\left|\phi_n^H(t)\right\rangle, \quad (m \neq n). \tag{2.10}$$

Pour $m = n$ on peut vérifier que $\left|\phi_n^H(t)\right\rangle$ est une solution de l'équation de Schrödinger. Cela pourrait être le cas si on utilisera le fait que les phases des états stationnaires ne sont pas fixées. En effet, on peut donc très bien multiplier $\left|\phi_n^H(t)\right\rangle$ par un facteur de phase dépendant du temps, les nouveaux états propres $\left|\Psi_n^H(t)\right\rangle$ de $I^{PH}(t)$ sont

$$\left|\Phi_n^H(t)\right\rangle = e^{i\gamma_n(t)}\left|\phi_n^H(t)\right\rangle, \tag{2.11}$$

qui doivent satisfaire l'équation de Schrödinger. C'est-à-dire, $\left|\Phi_n^H(t)\right\rangle$ est une solution particulière à l'équation de Schrödinger.

Cette condition permet d'obtenir l'équation différentielle de premier ordre satisfaite par la phase $\gamma_n(t)$

$$\frac{d\gamma_n(t)}{dt} = \left\langle \phi_n^H(t) \right| \eta(t) \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right] \left| \phi_n^H(t) \right\rangle . \tag{2.12}$$

Le premier terme de l'équation (2.12) correspond à la phase géométrique non-adiabatique, le second terme représente la phase dynamique. La somme de ces deux termes assure la réalité de la phase $\gamma_n(t)$.

En effet,

$$\dot{\gamma}_n^+ (t) = -i\hbar \left\langle \partial_t \phi_n^H (t) \right| \eta \left| \phi_n^H (t) \right\rangle - \left\langle \phi_n^H (t) \right| H^+ (t) \, \eta \left| \phi_n^H (t) \right\rangle , \tag{2.13}$$

par ailleurs ; la dérivée par rapport au temps du produit scalaire (2.7) donne

$$\left\langle \partial_t \phi_n^H (t) \right| \eta \left| \phi_n^H (t) \right\rangle = - \left\langle \phi_n^H (t) \right| \eta \eta^{-1} \dot{\eta} \left| \phi_n^H (t) \right\rangle - \left\langle \phi_n^H (t) \right| \eta \left| \partial_t \phi_n^H (t) \right\rangle , \tag{2.14}$$

en substituant le terme $\left\langle \partial_t \phi_n^H (t) \right| \eta \left| \phi_n^H (t) \right\rangle$ dans (2.13), on trouve

$$\dot{\gamma}_n^+ (t) = i\hbar \left\langle \phi_n^H (t) \right| \eta \eta^{-1} \dot{\eta} \left| \phi_n^H (t) \right\rangle + i\hbar \left\langle \phi_n^H (t) \right| \eta \left| \partial_t \phi_n^H (t) \right\rangle - \left\langle \phi_n^H (t) \right| \eta \eta^{-1} H^+ \eta \left| \phi_n^H (t) \right\rangle , \tag{2.15}$$

et en utilisant la relation

$$H^+ (t) = \eta H \eta^{-1} + i\hbar \dot{\eta} \eta^{-1} \Rightarrow H (t) = \eta^{-1} H^+ \eta - i\hbar \eta^{-1} \dot{\eta}, \tag{2.16}$$

on obtient alors $\dot{\gamma}_n^+ (t) = \dot{\gamma}_n(t)$.

Les solutions générales de l'équation de Schrödinger associées à un Hamiltonien $H(t)$ dépendant du temps non-hermitique sont comme suit

$$\left| \Psi^H(t) \right\rangle = \sum_n C_n e^{i\gamma_n(t)} \left| \phi_n^H(t) \right\rangle , \tag{2.17}$$

où les coefficients $C_n = \left\langle \phi_n^H(0) \right| \eta(0) \left| \Psi^H(0) \right\rangle$ sont indépendants du temps.

Chapitre 3

Applications de la théorie des pseudo-invariants

Nous utilisons la procédure des pseudo-invariants dans l'étude du mouvement d'une particule dans un potentiel liniaire et complexe dépendant du temps, et les systèmes non-hermitiques obéissant à l'algèbre SU(1,1) et SU(2) comme a été rapportée [31, 32].

3.1 Particule dans un potentiel complexe linéaire dépendant du temps

Dans notre article récent [32] nous avons appliqué la méthode des pseudo-invariants dans l'étude du mouvement d'une particule soumise à l'action d'un potentiel complexe linéaire dépendant du temps. Le même système a été traité par Ramos et al [33] en utilisant les invariants $\mathcal{PT}$-symétriques qui ont apporté des résultats non acceptables physiquement concernant le produit d'incertitude $\Delta x \Delta p$ et la norme du vecteur d'état, par contre en utilisant la méthode des pseudo-Invariants, nous avons obtenir des résultats satisfaisants, comme démontré dans [32].

Reprenons toujours l'Hamiltonien non-hermitique (1.17) mais cette fois-ci les paramètres $m(t)$ et $f(t)$ dépendent du temps tandis que $\omega = 0$

$$H(t) = \frac{p^2}{2m(t)} + if(t)x, \tag{3.1}$$

cet Hamilonien décrit le mouvement d'une particule soumise à l'action d'un potentiel linéaire complexe, où $m(t)$ est la masse de la particule et $f(t)$ est une fonction réelle dépendante du temps qui représente la force externe. Pour résoudre l'équation de Schrödinger dépendante du temps (5) avec $H(t)$ donné par (3.1), nous employons la méthode des invariants pseudo hermitiques présentée plus tôt en suivant les mêmes étapes.

Dans le cas d'une particule soumise à l'action d'un potentiel linéaire complexe dépendant du temps décrite par l'Hamiltonien (3.1), nous choisissons l'opérateur invariant pseudo-hermitique linéaire $I^{PH}(t)$ sous la forme

$$I^{PH}(t) = a(t)\left(x - \frac{i}{2}\alpha(t)\right) + b(t)\left(p - \frac{i}{2}\beta(t)\right) + c(t), \tag{3.2}$$

où $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont des paramètres réels, tandis que $a(t), b(t)$ et $c(t)$ sont des fonctions complexes dépendantes du temps à déterminer. La condition d'invariance (2.3) implique que

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= 0 \qquad , \\ \dot{b}(t) &= -\frac{a}{m(t)}, \\ \dot{c}(t) - \frac{i}{2}\left(\dot{\alpha}a + \dot{\beta}b + \beta\dot{b}\right) &= ibf(t) \quad , \end{aligned} \tag{3.3}$$

après avoir résolu ces équations, nous obtenons

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 \\ b(t) &= b_0 - a_0\int_0^t \frac{1}{m(t')}dt' \\ c(t) &= c_0 \\ f(t) &= -\frac{1}{2b(t)}\left(\dot{\alpha}(t)a_0 + \dot{\beta}(t)b(t) - \beta(t)\frac{a_0}{m(t)}\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Tant que l'opérateur $I^{PH}(t)$ est pseudo-hermitique, alors il vérifie la condition

$$I^{+PH}(t) = \eta(t)I^{PH}(t)\eta^{-1}(t), \tag{3.5}$$

nous choisissons un opérateur métrique $\eta(t)$ sous la forme

$$\eta(t) = \rho^{+}(t)\rho(t) = \exp\left[\beta(t)x - \alpha(t)p\right], \tag{3.6}$$

où

$$\rho(t) = e^{\frac{\beta(t)}{2}x}e^{-\frac{\alpha(t)}{2}p} \qquad \alpha(t), \beta(t) \in \mathbb{R}, \tag{3.7}$$

L'action de l'opérateur $\rho(t)$ fait déplacer les opérateurs position et impulsion comme

$$\rho(t)x\rho(t)^{-1} = \left(x + \frac{i}{2}\alpha(t)\right). \tag{3.8}$$

$$\rho(t)p\rho(t)^{-1} = \left(p + \frac{i}{2}\beta(t)\right). \tag{3.9}$$

En injectant cette métrique dans la condition (3.5) avec l'invariant (3.2), on obtient les solutions suivantes

$$\begin{aligned} a(t) &= a^*(t), \\ b(t) &= b^*(t), \\ c(t) &= c^*(t). \end{aligned} \tag{3.10}$$

La solution de l'équation de Schrödinger

$$\left[\frac{p^2}{2m(t)} + if(t)x \quad\right]\psi_\lambda(x,t) = i\partial_t\psi_\lambda(x,t), \tag{3.11}$$

s'écrit donc en termes des états propres de l'invariant (3.2) comme

$$\psi_\lambda(x,t) = e^{i\mu_\lambda(t)}\varphi_\lambda^{I^{PH}}(x,t) \tag{3.12}$$

où $\mu_\lambda(t)$ est la phase de Lewis-Reisenfield géneralisée [32]. Nous devons d'abord résoudre l'équation aux valeurs propres de l'invariant $I^{PH}(t)$

$$I^{PH}(t)\varphi_\lambda^{I^{PH}}(x,t) = \lambda\varphi_\lambda^{I^{PH}}(x,t) \tag{3.13}$$

où λ est un paramètre continu et indépendant du temps. Après quelques calculs de base, nous obtenons les solutions de l'équation aux valeurs propres (3.13) qui sont données par

$$\varphi_\lambda^{I^{PH}}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\exp\frac{i}{2b}\left[\left(2\left(\lambda - c\right) + i\beta b(t)\right)\left(x - \frac{i}{2}\alpha\right) - a_0\left(x - \frac{i}{2}\alpha\right)^2\right] \tag{3.14}$$

en remplaçant $\varphi_\lambda^{I^{PH}}(x,t)$ (3.14) multipliée par un facteur de phase $e^{i\mu_\lambda(t)}$ dans l'équation de Schrödinger $H(t)\psi_\lambda(x,t) = i\partial_t\psi_\lambda(x,t)$, on aura

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_\lambda\varphi_\lambda^{I^{PH}}(x,t) = &\left[-\frac{1}{2m(t)b^2}\left(\lambda - c\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\alpha f - \frac{\dot{\alpha}}{2}\beta + \frac{\beta^2}{4m(t)}\right)\right. \\ &\left. -\frac{i}{2b}\left(\frac{\beta}{m(t)} - \dot{\alpha}\right)\left(\lambda - c\right)\right]\varphi_\lambda^{I^{PH}}(x,t), \end{aligned} \tag{3.15}$$

cette phase doit être réelle, ce qui implique que $m\dot{\alpha} = \beta$,cela équivaut à $f(t) = -\dot{\beta}(t)/2$. La phase (3.15) se simplifie en

$$\dot{\mu}_\lambda = \left[-\frac{1}{2m(t)b^2} (\lambda - c)^2 - \frac{1}{4} \left(\dot{\beta}\alpha + \frac{\beta^2}{2m(t)} \right) \right]. \tag{3.16}$$

La solution générale $\Psi^H(x,t)$ s'écrit en combinaisant des solutions particulières (3.12) comme

$$\Psi^H(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{i\mu_\lambda} \varphi_\lambda^{I^{PH}}(x,t) d\lambda, \tag{3.17}$$

nous choisissons la fonction poids $g(\lambda)$ sous la forme

$$g(\lambda) = \sqrt{\frac{\sqrt{d}}{\pi\sqrt{2\pi}b_0}} \exp\left[-d(\lambda - I_0)^2 \right] \exp\left[-i\frac{d_0}{b_0}(\lambda - \frac{I_0}{2}) \right], \tag{3.18}$$

où d, d_0,et I_0 sont des constantes réelles positives.

Après un calcul direct, nous obtenons la solution d'expression générale sous la forme de paquet d'onde gaussien

$$\begin{aligned} \Psi^H(x,t) = &\sqrt{\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{2\pi}b(t)\left(i\int \frac{1}{2m(t')b(t')^2} + d\right)}} \exp\left\{ -i\int_0^t \frac{(c_0 - I_0)^2}{2m(t')b(t')^2} dt' \right\} \\ &\exp\left\{ -i\frac{I_0}{2}\frac{d_0}{b_0} \right\} \exp\left\{ -\frac{i}{4}\int_0^t \left(\dot{\beta}(t')\alpha(t') + \frac{\beta(t')^2}{2m(t')} \right) dt' \right\} \\ &\exp\left\{ \frac{i}{2b(t)} \left[(-2(c_0 - I_0) + i\beta b(t))(x - \frac{i}{2}\alpha) - a_0(x - \frac{i}{2}\alpha)^2 \right] \right\} \\ &\exp\left\{ -\frac{\left[(x - \frac{i}{2}\alpha) - b(t)\left(\frac{d_0}{b_0} - \int_0^t \frac{(c_0 - I_0)}{m(t')b(t')^2} dt' \right) \right]^2}{4b(t)^2 \left(i\int_0^t \frac{1}{2m(t')b(t')^2} dt' + d \right)} \right\}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

effectivement, en injectant (3.19) dans le pseudo produit scalaire $(\rho\Psi^H(x,t), \rho\Psi^H(x,t))$ pour trouver

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \rho\Psi^H(x,t) \right|^2 dx = 1. \tag{3.20}$$

Afin de vérifier la relation d'incertitude pour ce système, nous calculons les valeurs moyennes de x, p, x^2 et p^2 dans l'état gaussien $\Psi^H(x,t)$ comme

$$\langle x \rangle_\eta = \left\langle \Psi^H(t) \right| \eta x \left| \Psi^H(t) \right\rangle = d_0 - \frac{c_0}{b_0}\int_0^t \frac{dt'}{m(t')} + \frac{i}{2}\alpha, \tag{3.21}$$

$$\langle p \rangle_\eta = \left\langle \Psi^H(t) \right| \eta p \left| \Psi^H(t) \right\rangle = -\frac{c_0}{b_0} + \frac{i}{2}\beta, \tag{3.22}$$

ainsi que

$$\left\langle x^2\right\rangle_\eta = \frac{b^2}{d}\left[d^2+\left(\int_0^t \frac{dt'}{2m(t')b^2}\right)^2\right]+\left[d_0-\frac{c_0}{b_0}\int_0^t\frac{dt'}{m(t')}+\frac{i}{2}\alpha\right]^2, \tag{3.23}$$

$$\left\langle p^2\right\rangle_\eta = \frac{1}{\Delta x^2}\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4b_0db}\int_0^t\frac{dt'}{m(t')}-\frac{a_0}{b}\left(\Delta x\right)^2\right)^2\right]+\left[-\frac{c_0}{b_0}+\frac{i}{2}\beta\right]^2. \tag{3.24}$$

Nous évaluons également l'incertitude sur la position et l'impulsion

$$\Delta x=\sqrt{\left\langle x^2\right\rangle_\eta-\left(\left\langle x\right\rangle_\eta\right)^2}=\frac{b(t)}{\sqrt{d}}\sqrt{d^2+\left(\int_0^t\frac{dt'}{2m(t')b(t')^2}\right)^2}, \tag{3.25}$$

$$\Delta p=\sqrt{\left\langle p^2\right\rangle_\eta-\left(\left\langle p\right\rangle_\eta\right)^2}=\frac{1}{\Delta x}\sqrt{\frac{1}{4}+\left[\frac{1}{4b_0db(t)}\int_0^t\frac{dt'}{m(t')}-\frac{a_0}{b(t)}\left(\Delta x\right)^2\right]^2}. \tag{3.26}$$

effectivement le produit d'incertitude vérifie la fameuse relation

$$\Delta p\Delta x=\sqrt{\frac{1}{4}+\left[\frac{1}{4b_0db(t)}\int_0^t\frac{dt'}{m(t')}-\frac{a_0}{b(t)}\left(\Delta x\right)^2\right]^2}\geqslant\frac{1}{2}, \tag{3.27}$$

Cas particulier, lorsque les paramètres $f(t)$ et $m(t)$ de l'hamiltonien (3.1) sont constants, i.e. $f(t)=f_0$ et $m(t)=m_0$, on obtient les paramètres de la métrique

$$\alpha(t)=-\frac{f_0}{m_0}t^2, \tag{3.28}$$

$$\beta(t)=-2f_0t, \tag{3.29}$$

et la solution générale de l'équation d'évolution devient

$$\begin{aligned}\Psi^H(x,t)=&\sqrt{\frac{\sqrt{d}}{2\pi\left(b_0-\frac{a_0}{m_0}t\right)\left(i\frac{1}{2a_0}\left(\frac{1}{b_0-\frac{a_0}{m_0}t}-\frac{1}{b_0}\right)+d\right)}}\exp\left\{-i\frac{(c-I_0)^2}{2a_0}\left(\frac{1}{b_0-\frac{a_0}{m_0}t}-\frac{1}{b_0}\right)\right\}\\&\exp\left\{-i\frac{I_0}{2}\frac{d_0}{b_0}\right\}\exp\left\{-i\frac{f_0^2}{3m_0}t^3\right\}\\&\exp\left\{\frac{i}{2(b_0-\frac{a_0}{m_0}t)}\left[-2((c-I_0)+i(f_0t)(b_0-\frac{a_0}{m_0}t))(x+\frac{if_0}{2m_0}t^2)-a_0^2(x+\frac{if_0}{2m_0}t^2)\right]\right\}\\&\exp\left\{-\frac{\left[(x+\frac{if_0}{2m_0}t^2)-(b_0-\frac{a_0}{m_0}t)\left(\frac{d_0}{b_0}-(c-I_0)\left(\frac{1}{b_0-\frac{a_0}{m_0}t}-\frac{1}{b_0}\right)\right)\right]^2}{4(b_0-\frac{a_0}{m_0}t)^2\left(i\frac{1}{2a_0}\left(\frac{1}{b_0-\frac{a_0}{m_0}t}-\frac{1}{b_0}\right)+d\right)}\right\}.\end{aligned} \tag{3.30}$$

Les valeurs moyennes (3.21) et (3.22) sont simplifiées en

$$\langle x\rangle_\eta = \left\langle \Psi^H(t)\right| \eta x \left|\Psi^H(t)\right\rangle = d_0 - \frac{c_0}{b_0 m_0}t - \frac{if_0}{2}t^2, \tag{3.31}$$

$$\langle p\rangle_\eta = \left\langle \Psi^H(t)\right| \eta p \left|\Psi^H(t)\right\rangle = -\frac{c_0}{b_0} - if_0 t, \tag{3.32}$$

on déduit également l'incertitude sur la position et la dynamique

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle_\eta - \left(\langle x\rangle_\eta\right)^2} = \frac{\left(b_0 - \frac{a_0}{m_0}t\right)}{\sqrt{d}}\sqrt{d^2 + \left(\frac{1}{2a_0}\left(\frac{1}{b_0 - \frac{a_0}{m_0}t} - \frac{1}{b_0}\right)\right)^2}, \tag{3.33}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle_\eta - \left(\langle p\rangle_\eta\right)^2} = \frac{1}{\Delta x}\sqrt{\frac{1}{4} + \left[\frac{1}{4a_0 b_0 d\left(b_0 - \frac{a_0}{m_0}t\right)}\left(\frac{1}{b_0 - \frac{a_0}{m_0}t} - \frac{1}{b_0}\right) - \frac{a_0}{\left(b_0 - \frac{a_0}{m_0}t\right)}(\Delta x)^2\right]^2}, \tag{3.34}$$

ainsi que leur produit

$$\Delta p \Delta x = \sqrt{\frac{1}{4} + \left[\frac{1}{4a_0 b_0 d\left(b_0 - \frac{a_0}{m_0}t\right)}\left(\frac{1}{b_0 - \frac{a_0}{m_0}t} - \frac{1}{b_0}\right) - \frac{a_0}{\left(b_0 - \frac{a_0}{m_0}t\right)}(\Delta x)^2\right]^2} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{3.35}$$

En utilisant la méthode des invariants linéaires pseudo-hermitiques [32], nous avons trouvé la fonction d'onde d'une particule soumise à l'action d'un potentiel linéaire complexe dépendant du temps. De plus, nous avons construit un état de paquet d'ondes gaussien pour notre problème et montré que la densité de probabilité dépendante du temps associée à ce paquet est gaussienne. En outre, le produit d'incertitude $\Delta x \Delta p$ est physiquement acceptable (3.35), et la condition de normalisation pour la fonction d'onde est vérifiée.

3.2 Systèmes non-hermitiques obéissant à l'algèbre SU(1,1) et SU(2)

Les systèmes quantiques obeissant à l'algebre SU(1,1) et SU(2) est intéréssant, spécialement dans l'étude des systèmes quantiques dépendents du temps, tel qu'il offre des techniques de calculs simples et plus formelles que les modèles traditionnels. Le modèle SU(1,1) et SU(2) est basé sur des méthodes algèbriques, où le système quantique obéit à une algèbre de Lie, à travers des représentations de l'hamiltonien qui peut être écrit en termes d'opérateurs de cet algèbre, et chaque algèbre est définie par une loi de commutation entre ses éléments et leur propriétés. Le modèle SU(1,1) et SU(2) est présenté comme suit :

Nous considérons trois opérateurs $K_0 = K_0^+$ et $K_+ = (K_-)^+$ vérifiant les relations de commutation suivantes :

$$\begin{cases} [K_0, K_+] = K_+ \\ [K_0, K_-] = -K_- \\ [K_+, K_-] = DK_0 \end{cases} . \tag{3.36}$$

où K_0, K_+ et K_- sont appelés des générateurs du groupe correspondant. Lorsque $D = -2$ ces relations de commutation donnent le groupe SU(1, 1), tandis que $D = 2$ donne le groupe SU(2).

L'évolution des systèmes non-hermitiques obéissant à l'algèbre SU(1,1) et SU(2) sont des systèmes dont leur Hamiltonien est décomposé en termes des opérateurs K_0, K_+ et K_- comme

$$H(t) = 2\omega(t)K_0 + 2\alpha(t)K_- + 2\beta(t)K_+, \tag{3.37}$$

Où $\omega(t), \alpha(t)$, et $\beta(t)$ sont des fonctions complexes dépendantes du temps, et $H(t)^+ \neq H(t)$.

Dans le cas du modèle SU(1,1) et SU(2), il faut choisir une métrique convenable $\eta(t) = \rho^+(t)\rho(t)$, qui relie l'invariant pseudo hermitique $I^{PH}(t)$ avec son adjoint $I^{+PH}(t)$, tel que

$$\eta(t) = \exp\left\{4\left[\epsilon(t) K_0 + \mu(t) K_- + \mu^*(t) K_+\right]\right\}, \tag{3.38}$$

où

$$\rho(t) = \exp\left\{2\left[\epsilon(t) K_0 + \mu(t) K_- + \mu^*(t) K_+\right]\right\}, \tag{3.39}$$

selon [34, 35], l'opérateur $\rho(t)$ peut être décomposé de la façon suivante

$$\rho(t) = \exp\left[\vartheta_+(t) K_+\right] \exp\left[\ln\vartheta_0(t) K_0\right] \exp\left[\vartheta_-(t) K_-\right],$$

où

$$\begin{aligned} \vartheta_+(t) &= \frac{2\mu^*\sinh\theta}{\theta\cosh\theta - \epsilon\sinh\theta} = -\zeta(t)e^{-i\varphi(t)}, \\ \vartheta_0(t) &= \left(\cosh\theta - \frac{\epsilon}{\theta}\sinh\theta\right)^{-2} = -\frac{D}{2}\zeta^2(t) - \chi(t), \\ \vartheta_-(t) &= \frac{2\mu\sinh\theta}{\theta\cosh\theta - \epsilon\sinh\theta} = -\zeta(t)e^{i\varphi(t)}, \\ \chi(t) &= -\frac{\cosh\theta + \frac{\epsilon}{\theta}\sinh\theta}{\cosh\theta - \frac{\epsilon}{\theta}\sinh\theta} \quad , \quad \theta = \sqrt{\epsilon^2 + 2D\left|\mu\right|^2}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Cette factorisation est valable pour SU (1, 1) ($D = -2$) et pour SU(2) ($D = 2$). Pour construire l'opérateur invariant pseudo hermitique $I^{PH}(t)$ en utilisant l'opérateur $\rho(t)$, nous allons utiliser la formule de Baker-Campbell-Hausdorff qui nous permet de trouver les identités suivantes :

$$\begin{cases} \exp[\vartheta_- K_-] K_0 \exp[-\vartheta_- K_-] = K_0 + \vartheta_- K_- \\ \exp[\vartheta_+ K_+] K_0 \exp[-\vartheta_+ K_+] = K_0 - \vartheta_+ K_+ \end{cases}, \tag{3.41}$$

$$\begin{cases} \exp[\ln\vartheta_0 K_0] K_- \exp[-\ln\vartheta_0 K_0] = \frac{K_-}{\vartheta_0} \\ \exp[\vartheta_+ K_+] K_- \exp[-\vartheta_+ K_+] = K_- + D\vartheta_+ K_0 - \frac{D}{2}\vartheta_+^2 K_+ \end{cases}, \tag{3.42}$$

$$\begin{cases} \exp[\ln\vartheta_0 K_0] K_+ \exp[-\ln\vartheta_0 K_0] = \vartheta_0 K_+ \\ \exp[\vartheta_- K_-] K_+ \exp[\vartheta_- K_-] = K_+ - D\vartheta_- K_0 - \frac{D}{2}\vartheta_-^2 K_- \end{cases}. \tag{3.43}$$

Nous considérons l'invariant pseudo-hermitique $I^{PH}(t)$ sous la forme

$$I^{PH}(t) = 2\delta_1(t)K_0 + 2\delta_2(t)K_- + 2\delta_3(t)K_+, \tag{3.44}$$

où $\delta_1(t)$, $\delta_2(t)$, et $\delta_3(t)$ sont des paramètres réels dépendants du temps. Notons que l'invariant (3.44) est non-hermitique.

Notre méthode consiste dans la dérivation de l'invariant pseudo-hermitique $I^{PH}(t)$ par l'exigence de la relation de pseudo hermiticité

$$I^{PH+}(t) = \eta(t) I^{PH}(t)\,\eta^{-1}(t) \;\Leftrightarrow I^h(t) = \rho(t) I^{PH}(t)\rho^{-1}(t) = I^{h+}(t), \tag{3.45}$$

en utilisant les équations (3.39)-(3.40) et les identités (3.41)-(3.43), on obtient après un calcul algèbrique que l'opérateur invariant $I^{PH}(t)$ se transforme en son invariant hermitique équivalent $I^h(t) = \rho(t) I^{PH}(t)\rho^{-1}(t)$ comme

$$\begin{aligned} I^h(t) = {} & \frac{2}{\vartheta_0}\left[\left(\frac{D}{2}\vartheta_+\vartheta_- - \chi\right)\delta_1 + D\left(\vartheta_+\delta_2 + \chi\vartheta_-\delta_3\right)\right] K_0 \\ & + \frac{2}{\vartheta_0}\left[\vartheta_-\delta_1 + \delta_2 - \frac{D}{2}\vartheta_-^2\delta_3\right] K_- \\ & + \frac{2}{\vartheta_0}\left[\chi\vartheta_+\delta_1 - \frac{D}{2}\vartheta_+^2\delta_2 + \chi^2\delta_3\right] K_+ \end{aligned} \tag{3.46}$$

pour que l'opérateur $I^h(t)$ soit hermitique, nous exigeons que le coefficient de K_0 soit réel et que les coefficients de K_- et K_+ soient les conjugués complexes l'un de l'autre. De ces deux exigences, nous obtenons les contraintes

$$\begin{aligned}\left(\frac{D}{2}\vartheta_+\vartheta_- - \chi\right)\delta_1 + D\left(\vartheta_+\delta_2 + \chi\vartheta_-\delta_3\right) &= \left(\frac{D}{2}\vartheta_+\vartheta_- - \chi\right)\delta_1 + D\left(\vartheta_-\delta_2 + \chi\vartheta_+\delta_3\right)\\ \vartheta_-\delta_1 + \delta_2 - \frac{D}{2}\vartheta_-^2\delta_3 &= \chi\vartheta_-\delta_1 - \frac{D}{2}\vartheta_-^2\delta_2 + \chi^2\delta_3 \\ \chi\vartheta_+\delta_1 - \frac{D}{2}\vartheta_+^2\delta_2 + \chi^2\delta_3 &= \vartheta_+\delta_1 + \delta_2 - \frac{D}{2}\vartheta_+^2\delta_3\end{aligned} \tag{3.47}$$

ces contraintes impliquent les équations :

$$\delta_2 = \delta_3\chi, \tag{3.48}$$

Et

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \frac{\left(\frac{D}{2}\vartheta_-^2 - \chi\right)}{\vartheta_-}\delta_3,\\ \delta_1 &= \frac{\left(\frac{D}{2}\vartheta_+^2 - \chi\right)}{\vartheta_+}\delta_3,\end{aligned} \tag{3.49}$$

Ce qui conduit à la relation $\vartheta_+(t) = \vartheta_-(t) \equiv -\zeta(t)$ impliquant que le paramètre dépendant du temps $\mu(t)$ doit être réel, i.e. $\mu(t) = \mu^*(t)$, et donc l'invariant hermitique $I^h(t)$ (3.46) devient

$$I^h(t) = \frac{2}{\vartheta_0}\left[\left(\frac{D}{2}\zeta^2 - \chi\right)\delta_1 - 2D\chi\zeta\delta_3\right]K_0. \tag{3.50}$$

Soit $\left|\psi_n^h\right\rangle$ l'état propre de K_0 avec la valeur propre k_n i.e.

$$K_0\left|\psi_n^h\right\rangle = k_n\left|\psi_n^h\right\rangle. \tag{3.51}$$

Les états propres de $I^h(t)$ (3.50) sont évidemment donnés par

$$I^h(t)\left|\psi_n^h(t)\right\rangle = \frac{2}{\vartheta_0}\left[\left(\frac{D}{2}\zeta^2 - \chi\right)\delta_1 - 2D\chi\zeta\delta_3\right]k_n\left|\psi_n^h\right\rangle,$$

L'invariant hermitique $I^h(t)$ est une grandeur conservée dont les valeurs propres sont des constantes réelles [30], donc le facteur $\left[\left(D\zeta^2/2 - \chi\right)\delta_1 - 2D\chi\zeta\delta_3\right]/\vartheta_0$ doit être égal à 1 [28, 29, 31, 32].Il s'ensuit que l'état propre $\left|\phi_n^H(t)\right\rangle$ de $I^{PH}(t)$ peut être directement déduit *de l'état propre* $\left|\psi_n^h\right\rangle$ *de l'invariant hermitique* $I^h(t)$ par la transformation $\left|\phi_n^H(t)\right\rangle = \rho^{-1}(t)\left|\psi_n^h\right\rangle$ avec une valeur propre indépendante du temps k_n. Par conséquent l'invariant hermitique (3.50) se réduit à

$$I^h(t) = 2K_0 \tag{3.52}$$

En utilisant l'équation (3.45) avec $I^{h}\left(t\right)=2K_{0}$, l'invariant $I^{PH}(t)$ s'écrit sous la forme suivante

$$I^{PH}(t)=\frac{2}{\vartheta_{0}}\left[\left(\frac{D}{2}\zeta^{2}-\chi\right)K_{0}-\chi\zeta K_{-}-\zeta K_{+}\right]. \tag{3.53}$$

Maintenant, nous imposons la condition d'invariance ; $\frac{dI^{PH}(t)}{dt}=\frac{\partial I^{PH}(t)}{\partial t}-i\left[I^{PH}\left(t\right),H(t)\right]=0$ pour obtenir

$$\dot{\delta}_{1}=2iD\left(\alpha\delta_{3}-\beta\delta_{2}\right), \tag{3.54}$$

$$\dot{\delta}_{2}=2i\left(\omega\delta_{2}-\alpha\delta_{1}\right), \tag{3.55}$$

$$\dot{\delta}_{3}=2i\left(\beta\delta_{1}-\omega\delta_{3}\right). \tag{3.56}$$

En injectant (3.48) et (3.49) dans ces équations on trouve

$$\dot{\vartheta}_{0}=\frac{2\vartheta_{0}}{\zeta}\left[-2\zeta\left|\omega\right|\sin\varphi_{\omega}+\left|\alpha\right|\sin\varphi_{\alpha}+\left(\chi-D\zeta^{2}\right)\left|\beta\right|\sin\varphi_{\beta}\right], \tag{3.57}$$

$$\dot{\zeta}=-2\zeta\left|\omega\right|\sin\varphi_{\omega}+2\left|\alpha\right|\sin\varphi_{\alpha}-D\zeta^{2}\left|\beta\right|\sin\varphi_{\beta}, \tag{3.58}$$

$$\begin{gathered}\chi\left|\beta\right|\cos\varphi_{\beta}=\left|\alpha\right|\cos\varphi_{\alpha}\\ \left(\chi-\tfrac{D}{2}\zeta^{2}\right)\left|\alpha\right|\cos\varphi_{\alpha}=\chi\zeta\left|\omega\right|\cos\varphi_{\omega}\ ,\\ \zeta\left|\omega\right|\cos\varphi_{\omega}=\left(\chi-\tfrac{D}{2}\zeta^{2}\right)\left|\beta\right|\cos\varphi_{\beta}\end{gathered} \tag{3.59}$$

où $\varphi_{\omega}(t)$, $\varphi_{\alpha}(t)$, et $\varphi_{\beta}(t)$ sont les angles polaires de $\omega(t)$, $\alpha(t)$, et $\beta(t)$, respectivement.

Solution de l'équation de Schrödinger

Nous déterminons maintenant la solution de l'équation de Schrödinger

$$H(t)\left|\Phi_{n}(t)\right\rangle=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\Phi_{n}(t)\right\rangle \tag{3.60}$$

Selon Réf. [31], la solution $\left|\Phi_{n}(t)\right\rangle$ s'écrit en termes des états propres de l'invariant (3.53) multiplié par un facteur de phase dépendant du temps ;

$$\left|\Phi_{n}(t)\right\rangle=e^{i\varphi_{n}(t)}\left|\phi_{n}^{H}(t)\right\rangle \tag{3.61}$$

où $\varphi_{n}(t)$ est la phase de Lewis-Reisenfield géneralisée [28, 32]. Nous devons d'abord résoudre l'équation aux valeurs propres de l'invariant $I^{PH}(t)$

$$I^{PH}(t)\left|\phi_{n}^{H}(t)\right\rangle=k_{n}\left|\phi_{n}^{H}(t)\right\rangle \tag{3.62}$$

Comme nous l'avons bien vu, l'invariant $I^{PH}(t)$ est relié avec son invariant hermitique par ; $l^h(t) = \rho(t)I^{PH}(t)\rho^{-1}(t)$, donc les états propres $\left|\phi_n^H(t)\right\rangle$ sont l'action inverse $\rho^{-1}(t)$ sur les états propres $\left|\psi_n^h\right\rangle$ de $l^h(t)$;

$$\begin{aligned}\left|\phi_n^H(t)\right\rangle &= \rho^{-1}(t)\left|\psi_n^h\right\rangle \\ &= \exp\left[-\zeta(t)K_-\right]\exp\left[\ln\left(-\frac{D}{2}\zeta^2(t)-\chi(t)\right)K_0\right]\exp\left[-\zeta(t)K_+\right]\left|\psi_n^h\right\rangle \end{aligned} \tag{3.63}$$

En remplaçant $|\Phi_n(t)\rangle$ (3.63) multiplié par un facteur de phase $e^{i\varphi_n(t)}$ dans l'équation de Schrödinger $H(t)\left|\Phi_n(t)\right\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\Phi_n(t)\right\rangle$, on aura

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_n(t)}{dt} &= \left\langle\phi_n^H(t)\right|\eta(t)\left[i\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\right]\ \left|\phi_n^H(t)\right\rangle \\ &= \left\langle\psi_n^h\right|\left[i\rho\dot{\rho}^{-1}-\rho H\rho^{-1}\right]\ \left|\psi_n^h\right\rangle.\end{aligned} \tag{3.64}$$

En utilisant l'hamiltonien non-hermitique $H(t)$ (3.37) puis on dérive l'hamiltonien transformé $\left[i\rho\dot{\rho}^{-1}-\rho H\rho^{-1}\right]$ via l'opérateur métrique $\rho(t)$ (3.39), nous identifions en outre cet hamiltonien transformé comme

$$i\rho\dot{\rho}^{-1}-\rho H\rho^{-1} = 2W(t)K_0 + 2U(t)K_- + 2V(t)K_+, \tag{3.65}$$

où les coefficients $W(t)$, $U(t)$ et $V(t)$ sont donnés par

$$W(t) = -\frac{1}{\vartheta_0}\left[\omega\left(\frac{D}{2}\zeta^2-\chi\right) - D\zeta(\alpha+\beta\chi) + \frac{i}{2}\left(\dot{\vartheta}_0 + D\zeta\dot{\zeta}\right)\right], \tag{3.66}$$

$$U(t) = \frac{1}{\vartheta_0}\left[\omega\zeta - \alpha + \frac{D}{2}\beta\zeta^2 + i\frac{\dot{\zeta}}{2}\right], \tag{3.67}$$

$$V(t) = \frac{1}{\vartheta_0}\left[\omega\chi\zeta + \frac{D}{2}\alpha\zeta^2 - \beta\chi^2 - \frac{i}{2}\left(\zeta\dot{\vartheta}_0 - \vartheta_0\dot{\zeta} + \frac{D}{2}\vartheta^2\dot{\zeta}\right)\right]. \tag{3.68}$$

En utilisant les équations (3.59), les coefficients $U(t), V(t)$ sont identiquement égaux à zéro ($U(t) = V(t) = 0$), tandis que le coefficient $W(t)$ est réduit à

$$W(t) = -\frac{1}{\vartheta_0}\left\{\left(\frac{D}{2}\zeta^2-\chi\right)|\omega|\cos\varphi_\omega - 2D\zeta|\alpha|\cos\varphi_\alpha - i\frac{\vartheta_0}{\zeta}\left[\zeta|\omega|\sin\varphi_\omega - |\alpha|\sin\varphi_\alpha - \chi|\beta|\cos\varphi_\beta\right]\right\}. \tag{3.69}$$

Sachant que la phase $\varphi_n(t)$ (3.64) doit être réelle, il faut imposer que la fréquence $W(t)$ soit réelle. Ensuite, nous obtenons la phase exacte de l'état propre

$$\varphi_n(t) = -2k_n\int_0^t \frac{1}{\vartheta_0}\left[\left(\frac{D}{2}\zeta^2-\chi\right)|\omega|\cos\varphi_\omega - 2D\zeta|\alpha|\cos\varphi_\alpha\right]dt'. \tag{3.70}$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation de Schrödingr pour SU(1,1) et SU(2) est obtenue en combinant les solutions particulières (3.61) avec la phase (3.70)

$$\left|\Phi^H(t)\right\rangle = \sum_n C_n(0) \exp\left(-ik_n \int_0^t \frac{2}{\vartheta_0}\left[|\omega|\left(\frac{D}{2}\zeta^2 - \chi\right)\cos\varphi_\omega - 2D\zeta\,|\alpha|\cos\varphi_\alpha\right]dt'\right)\left|\phi_n^H(t)\right\rangle . \tag{3.71}$$

Nous avons déterminé une solution générale (3.71) qui décrit l'évolution quantique des systèmes obéissant à l'algèbre SU(1,1) et SU(2). Notons que cette solution s'écrit en termes des états propres de l'invariant pseudo-hermitique (3.53). L'évolution du spin dans un champ magnétique complexe dépendant du temps est obtenue en remplaçant ($k_n = m_j$, $D = 2$) dans l'état (3.71), tandis que l'évolution d'écrite par l'hamiltonien de Swanson non-hermitique dépendant du temps est obtenue en remplaçant ($k_n = (n + \frac{1}{2})$, $D = -2$) dans le même état i.e ; (3.71).

Chapitre 4

États cohérents pseudo-fermioniques

Les états cohérents fermioniques sont définis [36, 37, 38] d'une façon analogue à celle des états cohérents usuels (bosoniques). La différence par rapport aux états cohérents bosoniques, est que les variables de paramétrisation pour les états cohérents fermioniques ne sont pas des variables complexes ordinaires, mais sont des variables anticommutantes qui satisfont à l'Algèbre de Grassmann [37, 39].

Nous commencerons ce chapitre par un rappel sur les propriétés principales des états cohérents.

4.1 Définition des états cohérents

Les états cohérents, ou états semi-classiques, sont des états quantiques remarquables qui ont été utilisés dans diverses branches de la physique quantique (optique quantique, la physique de l'état nucléaires, atomiques et solides, l'électrodynamique quantique . . .). Dans la littérature, ces états sont liés à l'oscillateur harmonique auquel ils ont été introduits pour la première fois en 1926 par Schrödinger [27]. En 1963, Glauber a réintroduit les états cohérents pour décrire les radiations d'une émission laser [40]. Au cours de la même année, Klauder [36] a défini un système d'états similaires à ceux de Glauber, dont l'objectif est de voir, en terme des valeurs moyennes, la relation entre le système quantique et le système classique.

Pour définir les états cohérents de l'oscillateur harmonique, il existe trois approches équivalentes :

• **Première approche :** les états cohérents $|\alpha\rangle$ sont définis comme des états propres de l'opérateur d'annihilation $\hat{a} \equiv a$

$$a\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle\,, \tag{4.1}$$

où α est un paramètre complexe. Les états cohérents normalisés $|\alpha\rangle$ sont donnés par [40]

$$|\alpha\rangle = e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle\,, \tag{4.2}$$

et leurs conjugués hermitiques $\langle\alpha|$

$$\langle\alpha| = e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}}\,\langle n|\,. \tag{4.3}$$

• **Deuxième approche :** les états $|\alpha\rangle$ peuvent aussi s'obtenir à partir du vide $|0\rangle$ à l'aide de l'action de l'opérateur de déplacement $D(\alpha) = \exp(\alpha\ a^+ - \alpha^* a)$

$$D(\alpha)\,|0\rangle = \exp\left(\alpha\ a^+ - \alpha^* a\right)|0\rangle\,, \tag{4.4}$$

l'opérateur $D(\alpha)$ est unitaire

$$D^+(\alpha) = D(-\alpha) = [D(\alpha)]^{-1}\,, \tag{4.5}$$

$$D^+(\alpha)\,D(\alpha) = D(\alpha)\,D^+(\alpha) = 1. \tag{4.6}$$

On peut trouver d'autres expressions utiles pour l'opérateur $D(\alpha)$ en utilisant la formule de Baker-Campbell-Hausdorff. Si A et B sont deux opérateurs tels que

$$[[A,B]\,,A] = [[A,B]\,,B] = 0, \tag{4.7}$$

alors

$$e^{A+B} = e^{-[A,B]/2} e^A e^B = e^{[A,B]/2} e^B e^A, \tag{4.8}$$

et donc

$$e^A e^B = e^{[A,B]} e^B e^A. \tag{4.9}$$

En posant $A = \alpha\ a^+$ et $B = -\alpha^* a$, on trouve deux expressions équivalentes de l'opérateur $D(\alpha)$ (4.4)

$$D(\alpha) = e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\ a^+} e^{-\alpha^* a}, \tag{4.10}$$

et

$$D(\alpha) = e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha\, a^+}, \tag{4.11}$$

l'action de l'opérateur $D(\alpha)$ sur a et a^+ conduit à

$$D^+(\alpha)\, a D(\alpha) = a + \alpha, \tag{4.12}$$

$$D^+(\alpha)\, a^+ D(\alpha) = a^+ + \alpha^*, \tag{4.13}$$

on peut aussi montrer que

$$D(\alpha + \beta) = D(\alpha)\, D(\beta)\, e^{\mathbf{i}\,\mathrm{Im}\,\alpha\beta^*}. \tag{4.14}$$

Si on applique $D^+(\alpha)$ sur les deux membres de l'équation (4.1), on obtient

$$D^+(\alpha)\, a\, |\alpha\rangle = \alpha D^+(\alpha)\, |\alpha\rangle\,, \tag{4.15}$$

en utilisant la propriété (4.12), on trouve

$$a\left(D^+(\alpha)\, |\alpha\rangle\right) = 0, \tag{4.16}$$

on peut déduire, d'après (4.1), que

$$D^+(\alpha)\, |\alpha\rangle = |0\rangle\,, \tag{4.17}$$

cette relation est équivalente à

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)\, |0\rangle\,, \tag{4.18}$$

donc, l'action de l'opérateur $D(\alpha)$ sur les états de référence $|0\rangle$ (états du vide) génère les états cohérents $|\alpha\rangle$.

• **Troisième approche :** on peut aussi définir les états cohérents pour l'oscillateur harmonique comme des états qui minimisent la relation d'incertitude d'Heisenberg $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$. Sachant que les opérateurs position x et l'impulsion p sont donnés par

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}}\left(a^+ + a\right), \tag{4.19}$$

$$p = i\sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}}\left(a^+ - a\right), \tag{4.20}$$

et les variances par

$$(\Delta x)^2 = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2 , \qquad (4.21)$$

$$(\Delta p)^2 = \left\langle p^2 \right\rangle - \langle p \rangle^2 . \qquad (4.22)$$

Les valeurs moyennes des opérateurs x et p dans ces états sont

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \langle \alpha | \, x \, | \alpha \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \operatorname{Re} \alpha, & (4.23) \\ \langle p \rangle &= \langle \alpha | \, p \, | \alpha \rangle = \sqrt{2\hbar m\omega} \operatorname{Im} \alpha, & (4.24) \end{aligned}$$

et les fluctuations correspondantes

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \ , \ \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}, \qquad (4.25)$$

ainsi le produit est minimal

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}. \qquad (4.26)$$

En ce sens, les états cohérents se rapprochent des trajectoires classiques, d'où le nom d'états *quasi-classiques*. Ces approches ont été pleinement démontrées dans la littérature [27, 36, 40, 41, 42, 43, 44].

4.2 Propriétés et évolution temporelle des états cohérents

Les propriétés des états cohérents peuvent être résumées dans ce qui suit

1. Les états cohérents ne sont pas orthogonaux entre eux

$$\langle \beta | \, \alpha \rangle = \langle 0 | \, D^{+} (\beta) \, D (\alpha) \, | 0 \rangle , \qquad (4.27)$$

utilisant l'équation (4.2)

$$\langle \beta | \, \alpha \rangle = e^{\frac{-|\beta|^2}{2} - \frac{|\alpha|^2}{2} + \beta^* \alpha}, \qquad (4.28)$$

ce qui signifie que les états cohérents $|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$ ne sont pas mutuellement orthogonaux et le module au carré du produit $\langle \beta \, | \alpha \rangle$ représente la mesure de la distance entre les deux états cohérents.

2. L'état cohérent $|\alpha\rangle$ est normalisé et la démonstration est évidente si on pose $\alpha = \beta$ dans la formule précédente (4.28)
$$\langle\alpha|\,\alpha\rangle = \mathbf{1}. \tag{4.29}$$
3. Bien connu également est la propriété que ces états forment une base surcomplète
$$\frac{1}{\pi}\int |\alpha\rangle\langle\alpha|\, d^2\alpha = \mathbf{1}, \tag{4.30}$$
pour montrer cette identité, on pose $\alpha = \rho e^{i\theta} \Rightarrow d^2\alpha = \rho d\rho d\theta$ et à l'aide de la formule (4.2), on a
$$\frac{1}{\pi}\int |\alpha\rangle\langle\alpha|\, d^2\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\rho d\rho\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\pi}\frac{\rho^{n+m}}{\sqrt{n!m!}}e^{i(n-m)\theta}e^{-\rho^2}|n\rangle\langle m|, \tag{4.31}$$
en utilisant le fait que : $\int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta} = 2\pi\delta_{nm}$ et sous le changement de variable $\rho^2 = u$ l'intégrale prend la forme
$$\frac{1}{\pi}\int |\alpha\rangle\langle\alpha|\, d^2\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|n\rangle\langle n|}{n!}\int_0^{\infty} due^{-u}u^n, \tag{4.32}$$
après l'intégration $\int_0^{\infty} due^{-u}u^n = n!$, on obtient la relation de fermeture (4.32).
4. Les valeurs moyennes $\langle x\rangle, \langle p\rangle$ et $\langle H\rangle$ dans les états $|\alpha\rangle$, restent constamment égales aux grandeurs classiques correspondantes.

L'évolution temporelle d'un état décrit par l'équation de Schrödinger (5) s'intègre facilement dans le cas où H est stationnaire
$$|\psi(t)\rangle = U(t)\,|\psi(0)\rangle = e^{-iH(t-t_0)}\,|\psi(t_0)\rangle, \tag{4.33}$$
où $U(t) = e^{-iH(t-t_0)}$ est l'opérateur d'évolution.

Supposons que l'oscillateur harmonique à l'instant $t_0 = 0$ est dans l'état $|\psi(0)\rangle$
$$|\psi(0)\rangle = |\alpha(0)\rangle = e^{\frac{-|\alpha(0)|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(0)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \tag{4.34}$$
alors à un instant t, on a
$$\begin{aligned} |\alpha,t\rangle &= e^{-iHt}\,|\alpha(0)\rangle, \\ |\alpha,t\rangle &= e^{-\frac{i}{2}\omega t}e^{\frac{-|\alpha(0)|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[\alpha(0)e^{-i\omega t}\right]^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \end{aligned} \tag{4.35}$$

utilisant le fait que

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\left|\alpha(0)\right|^2\right] = \exp\left[-\frac{1}{2}\left|\alpha(0)e^{-i\omega t}\right|^2\right], \tag{4.36}$$

et posant $\alpha(t) = \alpha(0)e^{-i\omega t}$, l'équation (4.35) devient

$$|\alpha, t\rangle = e^{-\frac{i}{2}\omega t}\left|\alpha(t)\right\rangle . \tag{4.37}$$

Par conséquent, pour passer de l'état $|\alpha(0)\rangle$ à son évolué $|\alpha(t)\rangle$, il suffit de changer $\alpha \rightarrow \alpha(0)e^{-i\omega t}$ et de multiplier le ket obtenu par $e^{-\frac{i}{2}\omega t}$. Donc l'évolué d'un état cohérent reste toujours état cohérent et état propre de l'opérateur d'annihilation a au cours du temps, avec une valeur propre $\alpha(t) = \alpha(0)e^{-i\omega t}$,

$$a\left|\alpha(0)\right\rangle = \alpha\left|\alpha(0)\right\rangle , \tag{4.38}$$

$$a\left|\alpha(t), t\right\rangle = \alpha(t)\left|\alpha(t), t\right\rangle . \tag{4.39}$$

4.3 L'Algèbre de Grassmann

L'introduction des nombres anticommutants en physique liés à la description des fermions, remonte à 1955 [37]. Ensuite, l'utilisation des variables de Grassmann est devenue plus systématique après l'extension par Berezin en 1966 de la méthode de la fonctionnelle génératrice à la seconde quantification des fermions [39]. Ces variables qui sont utilisées traditionnellement dans la formulation des intégrales de chemin pour les fermions [38], sont devenues un outil très approprié à la description des systèmes fermioniques [45]. Ceci est dû en fait à leurs propriétés spécifiques, elles sont l'analogues classiques des opérateurs quantiques de Fermi, qui satisfont les relations d'anticommutation $\left\{B_i, B_j^+\right\} = \delta_{ij}$ et ils sont nilpotents : $(B_i)^2 = (B_j^+)^2 = 0$.Cette dernière relation est la formulation algébrique du principe d'exclusion de Pauli pour les fermions.

En effet, "l'espace des phases classique" de N fermions est généré par un ensemble $\{\xi_1^*, ., \xi_N^*, \xi_1, ., \xi_N\}$ de $2N$ variables de Grassmann complexes et indépendantes qui satisfont les relations d'anticommutation

$$\left\{\xi_i, \xi_j\right\} = \xi_i\xi_j + \xi_j\xi_i = 0 \tag{4.40}$$

$$\left\{\xi_i, \xi_j^*\right\} = 0 \ , \ \left\{\xi_i^*, \ \xi_j^*\right\} = 0 \tag{4.41}$$

Par analogie avec les opérateurs quantiques de Fermi, ces variables sont nilpotentes

$$\xi_i^2 = 0 \ , \ \xi_i^{*2} = 0 \tag{4.42}$$

On désigne par ξ un élément quelconque de l'ensemble $\{\xi_1^*, ., \xi_N^*, \xi_1, ., \xi_N\}$ des $2N$ éléments qui génèrent cette algèbre de Grassmann, alors ξ satisfait les propriétés suivantes :

- ξ commute avec les nombres complexes.
- ξ anticommute avec les opérateurs de Fermi B_i et B_i^+

$$\xi B_i = -B_i \xi \tag{4.43}$$

- Le conjugué hermitique renverse l'ordre de toutes les quantités fermioniques :

$$(B_i^+ \ \xi + \ \xi^* B_i)^+ = \xi^* B_i + B_i^+ \xi \tag{4.44}$$

- L'intégration est donnée par

$$\begin{aligned} \textstyle\int 1 d\xi &= 0 \ , \ \textstyle\int 1 d\xi^* = 0 \ , \ \textstyle\int \xi d\xi = \mathbf{1} \ , \ \textstyle\int \xi^* d\xi^* = \mathbf{1} \\ \int d\xi d\xi^* &= 0 \ , \int \xi d\xi d\xi^* = \mathbf{1} \ , \int \xi^* d\xi d\xi^* = \mathbf{1} \ , \int \xi \xi^* d\xi d\xi^* = \mathbf{1} \end{aligned} \tag{4.45}$$

- L' intégration et la différentiation sont identiques

$$\int d\xi \ f(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \ f(\xi) \tag{4.46}$$

- Pour une paire de variables ξ et ξ^*, on a

$$\textstyle\int d^2\xi = \int d\xi^* d\xi \tag{4.47}$$

- On note que les éléments différentiels $d\xi$ et $d\xi^*$ anticommutent entre eux, mais qui commutent avec les nombres complexes

$$d\xi d\xi^* = -d\xi^* d\xi \tag{4.48}$$

Ces variables de Grassmann vont nous permettre alors de définir les états cohérents fermioniques d'une manière équivalente à leurs analogues bosoniques [46, 47, 48, 49].

4.4 Les pseudo-fermions

Les pseudo-fermions ont été introduits dans la littérature dans le cadre de la mécanique quantique pseudo-hermitique [50, 51, 52, 53]. Ils résultent de l'extension pseudo-hermitique des relations d'anticommutation pour des fermions usuels. Avant de donner un aperçu général sur le formalisme des pseudo-fermions, nous rappelons d'abord la notion des fermions usuels. L'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ d'un système composé d'un seul fermion est un espace à deux dimensions engendré par les deux états notés $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle\}$. Les opérateurs de création et d'annihilation B^+ et B vérifent les relations d'anticommutation canoniques

$$\left\{B, B^+\right\} = \mathbf{1}, \quad \{B, B\} = \left\{B^+, B^+\right\} = 0 \tag{4.49}$$

et permettent des transitions entre les états

$$B|\psi_0\rangle = 0; \qquad B^+|\psi_1\rangle = 0; \qquad B|\psi_1\rangle = |\psi_0\rangle; \qquad B^+|\psi_0\rangle = |\psi_1\rangle \tag{4.50}$$

Les pseudo-fermions sont une extension pseudo-hermitique des fermions usuels. Ils sont obtenus à partir de la modification des relations d'anticommutation des fermions (4.49) de la façon suivante [52] :

$$\left\{B\,, \overline{B}\right\} = \mathbf{1}\ , B^2 = 0, \overline{B}^2 = 0 \tag{4.51}$$

B^+ et $\bar{B}^+$sont des opérateurs pseudo-adjoints de : B et $\bar{B}$.

(i) Il existe deux états non nuls dans $\mathcal{H}$ notés $|\psi_0\rangle$ et $\left|\phi_0\right\rangle$ tels que,

$$B|\psi_0\rangle = 0 \quad ; \quad \overline{B}^+|\phi_0\rangle = 0 \tag{4.52}$$

(ii) Il existe aussi dans $\mathcal{H}$ deux états excités $|\psi_1\rangle$ et $\left|\phi_1\right\rangle$ non nuls, définis par

$$\overline{B}|\psi_0\rangle = |\psi_1\rangle \quad ; \quad B^+|\phi_0\rangle = |\phi_1\rangle \tag{4.53}$$

tel que $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle$ sont des états associés à l'Hamiltonien H et $|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle$ sont des états associés à l'Hamiltonien H^+, où

$$\begin{aligned} \bar{B}_{anih}^{+\left(H^+\right)} &= \eta B_{anih}^{(H)}\eta^{-1} \\ B_{crè}^{+\left(H^+\right)} &= \eta \bar{B}_{crè}^{(H)}\eta^{-1} \end{aligned} \tag{4.54}$$

et η étant l'opérateur métrique.

4.5 Construction des états cohérents pseudo-fermioniques

Les états cohérents pseudo-fermioniques associés aux systèmes pseudo-hermitiques sont des états propres de l'opérateur d'annihilation B

$$B\left|\psi_{\xi}\right\rangle=\xi\left|\psi_{\xi}\right\rangle \tag{4.55}$$

et sont paramétrés par les variables de Grassmann complexes ξ.
D'une manière équivalente, ces états cohérents pseudo-fermioniques peuvent être obtenus par l'action de l'opérateur de déplacement $D(\xi)$ sur le vide $|\psi_0\rangle$

$$\left|\psi_{\xi}\right\rangle=D^{H}(\xi)\left|\psi_0\right\rangle \tag{4.56}$$

tel que

$$D^{H}(\xi)=e^{\bar{B}\xi-\xi^{*}B}=1+\bar{B}\xi-\xi^{*}B+\left(\bar{B}B-\frac{1}{2}\right)\xi^{*}\xi \tag{4.57}$$

d'où

$$\left|\psi_{\xi}\right\rangle=e^{-\frac{1}{2}\xi^{*}\xi}\left(|\psi_0\rangle-\xi|\psi_1\rangle\right) \tag{4.58}$$

Le pseudo-adjoint de $D^{H}(\xi)$ est donné par

$$\begin{aligned} D^{+H}(\xi) &= \eta D^{H}(\xi,t)\eta^{-1}=D^{H^{+}}(\xi) && (4.59)\\ D^{H^{+}}(\xi) &= e^{B^{+}\xi-\xi^{*}\bar{B}^{\dagger}}=1+B^{+}\xi-\xi^{*}\bar{B}^{\dagger}+\left(\bar{B}^{\dagger}B^{+}-\frac{1}{2}\right)\xi^{*}\xi && (4.60)\end{aligned}$$

Ces deux opérateurs satisfont les relations suivantes

$$\begin{aligned} D^{+H}(\xi)BD(\xi) &= B+\xi\mathbf{1} && (4.61)\\ D^{+H}(\xi)\bar{B}D(\xi) &= \bar{B}+\xi^{*}\mathbf{1} && (4.62)\end{aligned}$$

On définit l'état cohérent $\left|\phi_{\xi}\right\rangle$ associé à H^{+} par

$$\left|\phi_{\xi}(t)\right\rangle=D^{H^{+}}(\xi,t)\left|\phi_0(t)\right\rangle \tag{4.63}$$

tel que $D^{H^{+}}(\xi)$ est l'opérateur de déplacement agissant sur le vide $|\phi_0\rangle$ associé à H^{+} (4.60).

$$\left|\phi_{\xi}\right\rangle=e^{-\frac{1}{2}\xi^{*}\xi}\left(|\phi_0\rangle-\xi|\phi_1\rangle\right) \tag{4.64}$$

Le passage de $\left|\psi_{\xi}\right\rangle$ à $\left|\phi_{\xi}\right\rangle$ se fait à l'aide de la métrique η

$$\left|\phi_{\xi}\right\rangle=\eta\left|\psi_{\xi}\right\rangle$$

4.6 Opérateurs annihilation et création relatifs aux Hamiltoniens non-hermitiques H et H^+

Reprenons la théorie des pseudo-invariants introduite au Chapitre 2, mais cette fois-ci en considérant les deux opérateurs d'annihilation et de création pseudo-fermionique respectivement : $B(t)$ et $\bar{B}(t)$, comme étant des opérateurs invariants dépendants du temps associés á l'hamiltonien $H(t)$ qui dépendant du temps. D'autre part, on définit aussi les deux opérateurs d'annihilation et de création pseudo-fermionique sont respectivement : $\bar{B}^+(t)$ et $B^+(t)$, comme des invariants associés à $H^+(t)$, comme argumenté dans [54] ; Dans ce cas, la métrique $\eta(t)$ est dépendante du temps et permet de relier les opérateurs invariants de $H(t)$ à ceux de $H^+(t)$ via la relation suivante :

$$\bar{B}(t) = \eta^{-1}(t) B^+(t) \eta(t) \tag{4.65}$$

Les invariants pseudo-fermioniques $B(t)$ et $\bar{B}(t)$ associés à $H(t)$ vérifient les conditions suivantes :

1/ la condition d'invariance

$$\partial_t B(t) = i[B(t), H(t)] \tag{4.66}$$

$$\partial_t \bar{B}(t) = i\left[\bar{B}(t), H(t)\right] \tag{4.67}$$

2/ la relation d'anticommutation

$$\left\{B(t), \bar{B}(t)\right\} = 1 \tag{4.68}$$

3/ leur carré est nul

$$B^2(t) = \bar{B}^2(t) = 0 \tag{4.69}$$

Notons qu'il suffit de remplacer $B(t)$ et $\bar{B}(t)$ par $\bar{B}^+(t)$ et $B^+(t)$ et $H(t)$ par $H^+(t)$ pour retrouver les conditions qui sont vérifiées par les invariants pseudo-fermioniques $\bar{B}^+(t)$ et $B^+(t)$ associés à $H^+(t)$.

Par conséquent, l'état cohérent $\left|\psi_\xi(t)\right\rangle$ pseudo-fermionique qui est état propre de $B(t)$ avec la valeur propre ξ :

$$B(t)\left|\psi_\xi(t)\right\rangle = \xi\left|\psi_\xi(t)\right\rangle \tag{4.70}$$

peut être obtenu par l'action de l'opérateur déplacement D^H (4.57) sur le vide $|\psi_0(t)\rangle$

$$\left|\psi_{\xi}(t)\right\rangle = D^H(\xi,t)\,|\psi_0(t)\rangle \tag{4.71}$$

$$\left|\psi_{\xi}(t)\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi}\,(|\psi_0(t)\rangle - \xi|\psi_1(t)\rangle) \tag{4.72}$$

De la même manière, on peut définir l'état cohérent pseudo-fermionique $\left|\phi_\xi(t)\right\rangle = \eta\,(t)\left|\psi_\xi(t)\right\rangle$ qui est état propre de l'opérateur invariant $\bar{B}^+(t)$ (opérateur d'annihilation) associé à $H^+(t)$ tel que

$$\bar{B}^+(t)\left|\phi_\xi(t)\right\rangle = \xi\left|\phi_\xi(t)\right\rangle \tag{4.73}$$

$\left|\phi_\xi(t)\right\rangle$ peut être obtenu par l'action de l'opérateur déplacement D^{H^+}(4.60) sur le vide $|\phi_0(t)\rangle$

$$\left|\phi_\xi(t)\right\rangle = D^{H^+}(\xi,t)\,|\phi_0(t)\rangle \tag{4.74}$$

$$\left|\phi_{\xi}(t)\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi}\,(|\phi_0(t)\rangle - \xi|\phi_1(t)\rangle) \tag{4.75}$$

Les états cohérents pseudo-fermioniques $\left|\psi_\xi(t)\right\rangle$ vérifient la résolution de l'identité

$$\int \eta\left|\psi_\xi(t)\right\rangle\left\langle\psi_\xi(t)\right| d\xi^* d\xi = \mathbf{I} \tag{4.76}$$

En effet, en utilisant les relations d'intégrale de Grassmann, (4.76) s'écrit comme suit

$$\int d\xi^* d\xi\eta\left|\psi_\xi(t)\right\rangle\left\langle\psi_\xi(t)\right| = \int(1-\xi^*\xi)\left[(1+\zeta^*\zeta)\eta|\psi_0(t)\rangle\langle\psi_0(t)| + \zeta\zeta^*\mathbf{I}\right]d\zeta^*d\zeta \tag{4.77}$$

$$\int d\xi^* d\xi\eta\left|\psi_\xi(t)\right\rangle\left\langle\psi_\xi(t)\right| = \int \eta\,(t)\,|\psi_0(t)\rangle\langle\psi_0(t)|\,d\zeta^*d\zeta + \int \zeta\zeta^* d\zeta^* d\zeta = \mathbf{I} \tag{4.78}$$

4.7 Application : Système à deux niveaux

Soit un système à 2-niveaux décrit par l'Hamiltonien non-hermitique

$$H(t) = i\gamma\,(t)\,\sigma_z + \nu\,(t)\,\sigma_x \tag{4.79}$$

où les paramètres $\gamma\,(t)$ et $\nu\,(t) \in \mathbb{R}$ et σ_x ,σ_y, σ_z sont les matrices de pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.80}$$

$$\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y) \tag{4.81}$$

$H(t)$ peut s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$H(t)=\begin{pmatrix} i\gamma(t) & \nu(t) \\ \nu(t) & -i\gamma(t) \end{pmatrix}. \tag{4.82}$$

Les deux invariants pseudo-fermioniques $B(t)$ et $\bar{B}(t)$ associés à $H(t)$ sont respectivement choisis sous la forme suivante

$$B(t)=\begin{pmatrix} iR_3(t) & R_1(t) \\ R_2(t) & -iR_3(t) \end{pmatrix} \tag{4.83}$$

$$\bar{B}(t)=\begin{pmatrix} \bar{R}_3(t) & \bar{R}_2(t) \\ \bar{R}_1(t) & -\bar{R}_3(t) \end{pmatrix} \tag{4.84}$$

où les paramètres $(R_1(t), R_2(t), R_3(t))$ sont réels. et$\left(\bar{R}_1(t), \bar{R}_2(t), \bar{R}_3(t)\right)$ sont complexes.

La condition d'invariance (4.66) conduit à :

$$\begin{cases} \dot{R}_1(t)=2\left[\gamma(t)R_1(t)-\nu(t)R_3(t)\right] \\ \dot{R}_2(t)=2\left[\nu(t)R_3(t)-\gamma(t)R_2(t)\right] \\ \dot{R}_3(t)=\nu(t)\left[R_1(t)-R_2(t)\right)] \end{cases} \tag{4.85}$$

à partir des équations (4.85) on voit que

$$\dot{R}_1(t)R_2(t)+R_1(t)\dot{R}_2(t)-2\dot{R}_3(t)R_3(t)=0 \tag{4.86}$$

on peut déduire que :

$$R_1(t)R_2(t)-R_3^2(t)=C^{te} \tag{4.87}$$

En posant $R_2(t)=\rho^2(t)$, les équations (4.85) conduisent à l'équation auxiliaire suivante :

$$\ddot{\rho}(t)-\left(\frac{\dot{\nu}(t)}{\nu(t)}\right)\dot{\rho}(t)+\left(\dot{\gamma}(t)-\frac{\gamma(t)}{\nu(t)}\dot{\nu}(t)+\nu^2(t)-\gamma^2(t)\right)\rho(t)-\nu(t)\rho^{-3}(t)=0 \tag{4.88}$$

où

$$\begin{cases} R_1(t)=\frac{1}{\rho^2}\left[1+\frac{1}{\nu^2(t)}\left(\rho(t)\dot{\rho}(t)+\gamma(t)\rho^2(t)\right)^2\right] \\ R_2(t)=\rho^2(t) \\ R_3(t)=\frac{1}{\nu(t)}\left[\rho(t)\dot{\rho}(t)+\gamma(t)\rho^2(t)\right] \end{cases} \tag{4.89}$$

Maintenant, l'idée est de choisir ces invariants $B(t)$ et $\bar{B}(t)$ comme étant des opérateurs d'annihilation et de création obéissant aux équations (4.51). De ce fait on obtient les contraintes suivantes

$$\left\{B(t)\ ,\bar{B}(t)\right\} = R_1(t)\bar{R}_1(t) + R_2(t)\bar{R}_2(t) + 2iR_3(t)\bar{R}_3(t) = \mathbf{1} \tag{4.90}$$

ainsi que

$$B^2(t) = R_1(t)R_2(t) - R_3^2(t) = 0 \tag{4.91}$$

et

$$\bar{B}^2(t) = \bar{R}_1(t)\bar{R}_2(t) + \bar{R}_3^2(t) = 0 \tag{4.92}$$

l'opérateur création $\bar{B}(t)$ sera déterminé à partir de la relation de la pseudo-hermiticité 4.65. Le choix de la métrique $\eta(t)$ sous la forme suivante:

$$\eta(t) = \frac{1}{\sqrt{\vartheta_0(t)}}\begin{pmatrix} -\chi(t) & \vartheta_+(t) \\ \vartheta_-(t) & 1 \end{pmatrix} \tag{4.93}$$

où les fonctions $\vartheta_\pm(t)$, $\vartheta_0(t)$, $\chi(t)$ dépendantes du temps sont données par

$$\vartheta_+(t) = -\zeta(t)e^{-i\varphi(t)} \tag{4.94}$$

$$\vartheta_-(t) = -\zeta(t)e^{i\varphi(t)} \tag{4.95}$$

$$\vartheta_0(t) = -(\vartheta_+(t)\vartheta_-(t) + \chi(t))$$

montre que $\bar{B}(t)$ s'écrit

$$\bar{B}(t) = \frac{1}{\vartheta_0}\begin{pmatrix} -iR_3(\vartheta_+\vartheta_- - \chi) + R_2\vartheta_- + \chi\vartheta_+R_1 & -2iR_3\vartheta_+ + R_2 - \vartheta_+^2R_1 \\ -2iR_3\vartheta_-\chi - \vartheta_-^2R_2 + \chi^2R_1 & iR_3(\vartheta_+\vartheta_- - \chi) - R_2\vartheta_- - \chi\vartheta_+R_1 \end{pmatrix} \tag{4.96}$$

on déduit que

$$\left\{\begin{array}{c} \bar{R}_1(t) = \frac{1}{\vartheta_0(t)}\left[2\vartheta_-(t)\chi(t)(-iR_3(t)) - \vartheta_-^2(t)R_2(t) + \chi^2(t)R_1(t)\right] \\ \bar{R}_2(t) = \frac{1}{\vartheta_0(t)}\left[2\vartheta_+(t)(-iR_3(t)) + R_2(t) - \vartheta_+^2(t)R_1(t)\right] \\ \bar{R}_3(t) = \frac{1}{\vartheta_0}\left[(\vartheta_+(t)\vartheta_-(t) - \chi(t))(-iR_3(t)) + \vartheta_-(t)R_2(t) + \chi(t)\vartheta_+(t)R_1(t)\right] \end{array}\right. \tag{4.97}$$

L'état cohérent $\left|\psi_\xi(t)\right\rangle$ est une combinaison linéaire du vide $|\psi_0(t)\rangle$ et de l'état exité $|\psi_1(t)\rangle$ vérifiant les deux conditions suivantes

$$B(t)|\psi_0(t)\rangle = 0 \tag{4.98}$$

$$|\psi_1(t)\rangle = \bar{B}(t)|\psi_0(t)\rangle \tag{4.99}$$

la résolution des équations (4.98) et (4.99) conduit à:

$$|\psi_0(t)\rangle = \begin{pmatrix} i\sqrt{R_1(t)} \\ \sqrt{R_2(t)} \end{pmatrix} \tag{4.100}$$

$$|\psi_1(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\vartheta_0(t)}}\begin{pmatrix} \sqrt{R_2(t)} - i\vartheta_+(t)\sqrt{R_1(t)} \\ -\vartheta_-(t)\sqrt{R_2(t)} - i\chi(t)\sqrt{R_1(t)} \end{pmatrix}. \tag{4.101}$$

L'état cohérent $\left|\psi_\xi(t)\right\rangle$ s'écrit

$$\left|\psi_\xi(t)\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi}\left[\begin{pmatrix} i\sqrt{R_1(t)} \\ \sqrt{R_2(t)} \end{pmatrix} - \xi\frac{1}{\sqrt{\vartheta_0(t)}}\begin{pmatrix} \sqrt{R_2(t)} - i\vartheta_+(t)\sqrt{R_1(t)} \\ -\vartheta_-\sqrt{R_2(t)} - i\chi(t)\sqrt{R_1(t)} \end{pmatrix}\right]. \tag{4.102}$$

L'état cohérent $\left|\phi_\xi(t)\right\rangle$, état propre de l'opérateur invariant $\bar{B}^+(t)$ (opérateur d'annihilation) associé à $H^+(t)$, est obtenu en faisant agir l'opérateur métrique $\eta(t)$ sur l'état cohérent pseudo-fermionique $\left|\psi_\xi(t)\right\rangle$; i.e., $\left|\phi_\xi(t)\right\rangle = \eta(t)\left|\psi_\xi(t)\right\rangle$

$$\left|\phi_\xi(t)\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi}\left[\frac{1}{\sqrt{\vartheta_0(t)}}\begin{pmatrix} -i\chi(t)\sqrt{R_1(t)} + \vartheta_+(t)\sqrt{R_2(t)} \\ i\vartheta_-(t)\sqrt{R_1(t)} + \sqrt{R_2(t)} \end{pmatrix} - \xi\begin{pmatrix} \sqrt{R_2(t)} \\ i\sqrt{R_1(t)} \end{pmatrix}\right] \tag{4.103}$$

Notons que

$$\langle\psi_0(t)|\eta(t)|\psi_0(t)\rangle = \langle\psi_1(t)|\eta(t)|\psi_1(t)\rangle = 1 \tag{4.104}$$

$$\langle\psi_0(t)|\eta(t)|\psi_1(t)\rangle = \langle\psi_1(t)|\eta(t)|\psi_0(t)\rangle = 0 \tag{4.105}$$

alors on déduit le pseudo produit scalaire

$$\langle\psi_\xi(t)|\eta(t)|\psi_\xi(t)\rangle = e^{-\xi^*\xi}\left[\langle\psi_0(t)|\eta(t) + \xi^*\langle\psi_1(t)|\eta(t)\right]\left[|\psi_0(t)\rangle - \xi|\psi_1(t)\rangle\right] \tag{4.106}$$

$$\langle\psi_\xi(t)|\eta(t)|\psi_\xi(t)\rangle = e^{-\xi^*\xi}(1+\xi^*\xi) = e^{-\xi^*\xi}e^{\xi^*\xi} = 1 \tag{4.107}$$

L'évolué d'un état cohérent, état propre de l'invariant $B(t)$, reste un état propre multiplié par une phase [30]

$$|\Psi_\xi(t)\rangle \equiv \exp i\alpha_\xi(t)|\psi_\xi(t)\rangle \tag{4.108}$$

cette phase est donnée par [29, 31]

$$\dot{\alpha}_\xi(t) = \left\langle\psi_\xi(t)\right|\eta\left[i\frac{\partial}{\partial t} - H(t)\right]\left|\psi_\xi(t)\right\rangle \tag{4.109}$$

qui s'écrit en utilisant l'équation (4.58) comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_{\xi}(t) &= e^{-\xi^*\xi}\{\langle\psi_0(t)|\,\eta\left[i\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\right]|\psi_0(t)\rangle+\xi\,\langle\psi_0(t)|\,\eta\left[i\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\right]|\psi_1(t)\rangle \\ &+\xi^*\,\langle\psi_1(t)|\,\eta\left[i\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\right]|\psi_0(t)\rangle+\xi^*\xi\,\langle\psi_1(t)|\,\eta\left[i\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\right]|\psi_1(t)\rangle\}\end{aligned} \quad (4.110)$$

Nous pouvons montrer que les valeurs moyennes $\langle\psi_1(t)|\,\eta\left[i\frac{\partial}{\partial t}\right]|\psi_0(t)$ et $\langle\psi_1(t)|\,\eta\,[-H(t)]\,|\psi_0(t)$ se compensent exactement, ainsi que les termes $\langle\psi_0(t)|\,\eta\left[i\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\right]|\psi_1(t)\rangle$. On constate que les termes non-diagonaux sont identiquement nuls, donc la phase contient uniquement que les termes diagonaux qui sont calculés comme suit :

1-Calcule du terme $\langle\psi_0(t)|\,\eta\left[i\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\right]|\psi_0(t)\rangle$,avec:

$$\begin{aligned}\langle\psi_0(t)|\,\eta i\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi_0(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\vartheta_0}}\{[\nu(t)\,\vartheta_+(t)-i\chi(t)\,\gamma(t)]\,R_1(t)+[\nu(t)\,\vartheta_-(t)-i\gamma(t)]\,R_2(t) \\ &+[i\nu(t)\,(1+\chi(t))-\gamma(t)\,(\vartheta_+(t)+\vartheta_-(t))]\,R_3(t)\}\end{aligned} \quad (4.111)$$

et

$$\begin{aligned}\langle\psi_0(t)|\,\eta H(t)|\psi_0(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\vartheta_0}}\{[\nu(t)\,\vartheta_+(t)-i\chi(t)\,\gamma(t)]\,R_1(t)+[\nu(t)\,\vartheta_-(t)-i\gamma(t)]\,R_2(t) \\ &+[i\nu(t)\,(1+\chi(t))-\gamma(t)\,(\vartheta_+(t)+\vartheta_-(t))]\,R_3(t)\}\end{aligned} \quad (4.112)$$

on voit que le terme diagonal

$$\langle\psi_0(t)|\,\eta\left[i\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\right]|\psi_0(t)\rangle=0 \quad (4.113)$$

est nul.

2-de même, le terme $\langle\psi_1(t)|\,\eta\left[i\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\right]|\psi_1(t)\rangle$ donne un résultat nul, en effet

$$\begin{aligned}\langle\psi_1(t)|\,\eta i\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{\vartheta_0}}\{R_2(t)\,(i\gamma(t)-\nu(t)\,\vartheta_-(t))+R_3(t)\,(\gamma(t)\,(\vartheta_+(t)+\vartheta_-(t)) \\ &-i\nu(t)\,(1+\chi(t)))+R_1(t)\,(i\gamma(t)\,\chi(t)-\nu(t)\,\vartheta_+(t))\}\end{aligned} \quad (4.114)$$

et

$$\begin{aligned}\langle\phi_1(t)|\,H(t)|\psi_1(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\vartheta_0}}\{R_2(t)\,(i\gamma(t)-\nu(t)\,\vartheta_-(t))+R_3(t)\,\gamma(t)\,(\vartheta_+(t)+\vartheta_-(t)) \\ &-i\nu(t)\,(1+\chi(t)))+R_1(t)\,(-\nu(t)\,\vartheta_+(t)+i\gamma(t)\,\chi(t))\}\end{aligned} \quad (4.115)$$

donc

$$\langle\phi_1(t)|\left[i\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\right]|\psi_1(t)\rangle=0. \quad (4.116)$$

Finalement, nous avons trouvé que la phase totale est nulle.

Conclusion

Au cours de cette thèse :

• Nous avons examiné la notion des systèmes quantiques non-hermitiques : pseudo-hermitiques et $\mathcal{PT}$ symétriques.

• Nous avons introduit la méthode d'invariants pseudo-hermitiques pour résoudre des systèmes quantiques non-hermitiques, et nous avons constaté que cette méthode est efficace pour l'étude des systèmes non-hermitiques dépendants du temps et qui préserve les postulats de la mécanique quantique.

• La théorie des pseudo-invariants a été illustrée par l'étude des systèmes physiques concrets comme : une particule dans un potentiel linéaire complexe dépendant du temps et les systèmes non-hermitiques obéissant à l'algèbre SU(1,1) et SU(2).

• Nous avons construits des états cohérents pseudo-fermioniques pour les systèmes non-hermitiques dépendants du temps.

• Nous avons étudié un système à deux niveaux non-hermitique dépedant explicitement du temps, auquel nous avons construit des opérateurs invariants dépendants du temps comme étant des opérateurs d'annihilation et de crèation. Ainsi, ces invariants pseudo-fermioniques sont liés par une transformation de similarité à travers une métrique $\eta(t)$ dépendante du temps. Les opérateurs invariants pseudo-fermioniques nous ont permis de construire des états cohérents pseudo-fermioniques qui évoluent avec une phase nulle.

Bibliographie

[1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, Quantum mechanics, vol.1, Willey (1977).

[2] D. J. Gross, Symmetry in Physics : Wigner's Legacy, Phys. Today **48** (12), 46 (1995).

[3] E. Noether, (1918). Invariante Variationsprobleme. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse. 1918 : 235–257.

[4] P. A. M. Dirac, Bakerian Lecture - The physical interpretation of quantum mechanics, Proc. Roy. Soc. A **180** (1942).

[5] W. Pauli, On Dirac's New Method of Field Quantization, Rev. Mod. Phys. **15**, 175-207 (1943).

[6] R. P. Feynman, Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics, Phys. Rev **76,** 769 (1949).

[7] E. C. G. Sudarshan, Quantum Mechanical Systems with Indefinite Metric, Phys. Rev. **123**, 2183-2193 (1961).

[8] T. D. Lee and G. C. Wick, Negative metric and the unitarity of the S-matrix, Nucl. Phys. B **9**, 209-243 (1969).

[9] F. G. Scholz, H. B. Geyer and F. J. Hahne, Quasi-Hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle, Ann. Phys. **213**, 74 (1992).

[10] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus $\mathcal{PT}$ symmetry : The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian, J. Math. Phys. **43**, 205-214 (2002).

[11] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus $\mathcal{PT}$ symmetry.II. A complete characterization of non-Hermitian Hamiltonians with real spectrum, J. Math. Phys. **43**, 2814-2816 (2002).

[12] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus $\mathcal{PT}$ symmetry.III. Equivalence of Pseudo Hermiticity and the presence of antilinear symmetries, J. Math. Phys. **43**, 3944-3951 (2002).

[13] C. M. Bender and S. Boettcher, Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having $\mathcal{PT}$ Symmetry, Phys. Rev. Lett. **80**, 5243 (1998).

[14] O. E. Alon, Dynamical symmetries of time-periodic Hamiltonians, Phys. Rev. A 66, 013414 (2002).

[15] A. de Sousa Dutra, M. B. Hott and V. G. C. S. dos Santos, Time-dependent non-Hermitian Hamiltonians with real energies, Europhys. Lett. 71, 166 (2005).

[16] C. Yuce, Time-dependent $\mathcal{PT}$ symmetric problems, Phys. Lett. A 336, 290 (2005).

[17] C. Yuce, Complex spectrum of a spontaneously unbroken $\mathcal{PT}$ symmetric Hamiltonian, arXiv :quant-ph/0703235v1.

[18] N. Moiseyev, Crossing rule for a $\mathcal{PT}$-symmetric two-level time-periodic system, Phys. Rev. A 83, 052125 (2011).

[19] X. Luo, J. Huang, H. Zhong, X. Qin, Q. Xie, Y. S. Kivshar and C. Lee, Pseudo-Parity-Time Symmetry in Optical Systems, Phys. Rev. Lett. 110, 243902 (2013).

[20] C. M. Bender, Dorje C. Brody, and Hugh F. Jones, Complex Extension of Quantum Mechanics, Phys. Rev. Lett., **89**, 270401 (2002).

[21] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators (Springer-Verlag, Berlin, 1966).

[22] Ingrid Rotter, A non-Hermitian Hamilton operator and the physics of open quantum systems, J. Phys. A : Math. Theor. 42, 153001 (2009).

[23] W. D. Heiss, The physics of exceptional points, J. Phys. A : Math. Theor. 45, 444016 (2012).

[24] A. Mostafazadeh, Time-Dependent Pseudo-Hermitian Hamiltonians Defining a Unitary Quantum System and Uniqueness of the Metric Operator, Phys Lett B. **650**, 208 (2007).

[25] A. Mostafazadeh, Comment on "Time-dependent quasi-Hermitian Hamiltonians and the unitary quantum evolution"0711.0137v1 [quant-ph] (2007).

[26] A. Mostafazadeh, Comment on "Reply to Comment on Time-dependent Quasi-Hermitian Hamiltonians and the Unitary Quantum Evolution"0711.1078v2 [quant-ph] (2007).

[27] E. Schrödinger, Der stetige Übergang von der Mikro-zur Makromechanik, Naturwissenschaften **14**, 664 (1926).

[28] B. Khantoul, A. Bounames and M. Maamache, On the pseudo-Hermitian invariant method for the time-dependent non-Hermitian Hamiltonians, Eur. Phys. J. Plus. 132, 258 (2017).

[29] M. Maamache, O.-K. Djeghiour, N. Mana and W. Koussa, Pseudo-invariants theory and real phases for systems with non-Hermitian time-dependent Hamiltonians, Eur. Phys. J. Plus 132, 383 (2017).

[30] H. R. Lewis and W. B. Riesenfeld, An Exact Quantum Theory of the Time-Dependent Harmonic Oscillator and of a Charged Particle in a Time-Dependent Electromagnetic Field, J. Math. Phys. **10**, 1458 (1969).

[31] W. Koussa, N. Mana, O- K. Djeghiour, and M. Maamache, The pseudo Hermitian invariant operator and time-dependent non-Hermitian Hamiltonian exhibiting a SU(1,1) and SU(2) dynamical symmetry, J. Math. Phys. **59**, 072103 (2018).

[32] W. Koussa, M. Maamache, Pseudo-Invariant Approach for a Particle in a Complex Time-Dependent Linear Potential, Int. J. Theor. Phys. **59**, 1490–1503 (2020).

[33] B.F. Ramos, I.A. Pedrosa, and Alberes Lopes de Lima, Lewis and Riesenfeld approach to time-dependent non-Hermitian Hamiltonians having $\mathcal{PT}$ symmetry, Eur. Phys. J. Plus **133**, 449 (2018).

[34] A. B. Klimov and S. M. Chumakov, A Group-Theoretical Approach to Quantum Optics : Models of Atom-Field Interactions (Wiley-VCH, Weinheim, 2009).

[35] S. M. Barnett and P. Radmore, Methods in Theoretical Quantum Optics (Oxford University Press, New York, 1997).

[36] J. R. Klauder, Continuous-Representation Theory. II. Generalized Relation between Quantum and Classical Dynamics, J. Math. Phys. **4,** 1058 (1963).

[37] P. T. Matthews, A. Salam, Propagators of quantized field, Nuovo Cimento **2**, 120-134 (1955).

[38] J. L. Martin, The Feynman principle for a Fermi system, Proc. Roy. Soc. London A **251**, 543-549 (1959).

[39] F. A. Berezin, The Method of Second Quantization, (Academic Press, New York, 1966).

[40] R. J. Glauber, The Quantum Theory of Optical Coherence, Phys. Rev.130 (1963) 2529 ; Photon Correlations, Phys. Rev. Lett. 10 (1963) 84 ; Coherent and Incoherent States of the Radiation Field, Phys. Rev. 131 (1963) 2766 .

[41] M. M. Nieto and Jr. L. M. Simmons, Phys. Rev. Lett. 41 (1968) 207, ibid. Phys. Rev. A19 (1979) 438, ibid. Phys. Rev. D20 (1979) 1342, ibid. Phys. Rev. D22 (1980) 391.

[42] J. R. Ray, Minimum Uncertainty Coherebt States for Certain Time-Dependent Systems, Phys. Rev. D25 (1982) 3417.1963).

[43] P. Carruthers and M. M. Nieto, Phase and Angle Variables in Quantum Mechanics, Rev. Mod. Phys. **40,** 411 (1968).

[44] J. G. Hartley and J. R. Ray, Coherent states for the time-dependent harmonic oscillator, Phys. Rev. D **25,** 382 (1982).

[45] F. A. Berezin, M. S. Marinov, Particle spin dynamics as the grassmann variant of classical mechanics, Ann. Phys. **104**, 336-362 (1977).

[46] J. Ohnuki, T. Kashiwa, Coherent States of Fermi Operators and the Path Integral, Prog. Theo. Phys. **60**, 548-564 (1978).

[47] S. Abe, Adiabatic holonomy and evolution of fermionic coherent state, Phys. Rev. D **39**, 2327-2331 (1989).

[48] C. J. Lee, Covariance and uniqueness of the canonical fermion coherent state, Phys. Rev. A **46**, 6049-6051 (1992).

[49] K. E. Cahill, R J. Glauber, Density operators for fermions, Phys. Rev. A **59**, 1538-1555 (1999).

[50] A. Mostafazadeh, Fermionic coherent states for pseudo-Hermitian two-level systems, J. Phys. A : Math. Gen. **37,** 10193 (2004).

[51] O. Cherbal, M. Drir, M. Maamache and D. A. Trifonov, Fermionic coherent states for pseudo-Hermitian two-level systems, J. Phys. A : Math. Theor. 40, 1835 (2007).

[52] F. Bagarello, Linear pseudo-fermions, J. Phys. A 45, 444002 (2012).

[53] F. Bagarello, Model pseudo-fermionic systems : Connections with exceptional points, Phys. Rev. A **89,** 032113 (2014).

[54] W. Koussa, M. Attia, and M. Maamache, Pseudo-fermionic coherent states with time-dependent metric, J. Math. Phys. **61**, 042101 (2020).

Articles publiés

The pseudo Hermitian invariant operator and time-dependent non-Hermitian Hamiltonian exhibiting a SU(1,1) and SU(2) dynamical symmetry

Walid Koussa, Naima Mana, Oum Kaltoum Djeghiour, and Mustapha Maamache

Citation: Journal of Mathematical Physics **59**, 072103 (2018); doi: 10.1063/1.5041718
View online: https://doi.org/10.1063/1.5041718
View Table of Contents: http://aip.scitation.org/toc/jmp/59/7
Published by the American Institute of Physics

JOURNAL OF MATHEMATICAL PHYSICS **59**, 072103 (2018)

The pseudo Hermitian invariant operator and time-dependent non-Hermitian Hamiltonian exhibiting a SU(1,1) and SU(2) dynamical symmetry

Walid Koussa,[1,a)] Naima Mana,[1,b)] Oum Kaltoum Djeghiour,[1,2,c)] and Mustapha Maamache[1,d)]

[1]*Laboratoire de Physique Quantique et Systèmes Dynamiques, Faculté des Sciences, Université Ferhat Abbas Sétif 1, Sétif 19000, Algeria*

[2]*Département de Physique, Université de Jijel, BP 98 Ouled Aissa, 18000 Jijel, Algeria*

(Received 4 May 2017; accepted 20 May 2018; published online 11 July 2018)

We study the time evolution of quantum systems with a time-dependent non-Hermitian Hamiltonian exhibiting a SU(1,1) and SU(2) dynamical symmetry. With a time-dependent metric, the pseudo-Hermitian invariant operator is constructed in the same manner as for both the SU(1,1) and SU(2) systems. The exact common solutions of the Schrödinger equations for both the SU(1,1) and SU(2) systems are obtained in terms of eigenstates of the pseudo-Hermitian invariant operator. Finally some interesting physical applications are suggested and discussed. *Published by AIP Publishing.*
https://doi.org/10.1063/1.5041718

I. INTRODUCTION

In the literature, the study of quantum systems is devoted to the conventional Hermitian theories in which the energies are assumed to be real and the evolution is unitary. However, in the last few years, a large attention is paid to the non-Hermitian quantum systems where the evolving quantum systems are unitarily (cf., e.g., Refs. 1 and 2). Using the generalized stationary non-Hermitian Schrödinger picture,[3,4] several specific results associated with non Hermitian evolution equations were found. And therefore, quantum systems described by non-Hermitian stationary Hamiltonians $H \neq H^+$ with real spectra and some unusual characteristics like quasi-Hermiticity,[2] PT-symmetry,[3] pseudo-Hermiticity,[4] etc., have been successfully studied. It has been clarified[4] that a non-Hermitian Hamiltonian having all eigenvalues real is connected to its Hermitian conjugate, $H^+ = \eta H \eta^{-1}$, through a linear, Hermitian, invertible, and bounded metric operator $\eta = \rho^+ \rho$ with a bounded inverse; i.e., H is Hermitian with respect to a positive definite inner product defined by $\langle ., . \rangle_\eta = \langle . | \eta | . \rangle$ and is called η-pseudo-Hermitian. It is also established[4] that the non Hermitian Hamiltonian H can be transformed to an equivalent Hermitian one given by $h = \rho H \rho^{-1}$, where h is the equivalent Hermitian analog of H with respect to the standard inner product $\langle ., . \rangle$.

Although the treatment for time-dependent non-Hermitian Hamiltonians with time-independent metric operators has been studied,[6,7] for an introduction to the non-stationary theory, the most recent monograph[5] can be consulted. The generalization to time-dependent metric operators which are introduced in Refs. 8 and 9 has advanced the ground for treating time-dependent systems and opened new venues for further studies,[8–24] where some of them were in the past subject of debate.[8–18] Recently, the work of Znojil[25] has shed more light on the debated questions raised by the authors therein. Nevertheless, the existence of invariants (constants of the motion or first integral) introduced by Lewis-Riesenfeld[26] is a factor of central importance in the study of time-dependent systems.

a)E-mail: koussawalid@yahoo.com
b)E-mail: na3ima_mn@hotmail.fr
c)E-mail: k.djeghiourjijel@gmail.com
d)E-mail: maamache@univ-setif.dz

In complete analogy to the time independent scenario, a self-adjoint invariant operator $I^h(t)$, i.e., an observable, in the Hermitian system which has an observable counterpart $I^{PH}(t)$ in the non-Hermitian system are related between them as $I^h(t) = \rho(t)I^{PH}(t)\rho^{-1}(t) \Leftrightarrow I^{PH\dagger}(t) = \eta(t)I^{PH}(t)\eta^{-1}(t)$ was introduced and addressed in detail in Refs. 19 and 20 that we will briefly recall. Given a non-Hermitian time-dependent Hamiltonian operator $H(t)$, it is possible to build a pseudo-invariant operator $I^{PH}(t)$ verifying

$$\frac{dI^{PH}(t)}{dt} = \frac{\partial I^{PH}(t)}{\partial t} - i\left[I^{PH}(t), H(t)\right] = 0, \tag{1}$$

which obeys the eigenvalue equation,

$$I^{PH}(t)\left|\phi_n^H(t)\right\rangle = \lambda_n\left|\phi_n^H(t)\right\rangle, \tag{2}$$

where the eigenvalues λ_n are time-independent and the eigenstates $\left|\phi_n^H(t)\right\rangle$ of $I^{PH}(t)$ are orthonormal,

$$\left\langle\phi_m^H(t)\middle|\eta(t)\middle|\phi_n^H(t)\right\rangle = \delta_{m,n}. \tag{3}$$

The solutions of the Schrödinger equation

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\Phi^H(t)\right\rangle = H(t)\left|\Phi^H(t)\right\rangle \tag{4}$$

can be written in terms of the eigenfunctions $\left|\phi_n^H(t)\right\rangle$ as

$$\left|\Phi_n^H(t)\right\rangle = e^{i\varphi_n(t)}\left|\phi_n^H(t)\right\rangle, \tag{5}$$

where the phase functions $\varphi_n(t)$ are found from the equation

$$\frac{d\varphi_n(t)}{dt} = \left\langle\phi_n^H(t)\middle|\eta(t)\left[i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{H(t)}{\hbar}\right]\middle|\phi_n^H(t)\right\rangle. \tag{6}$$

In light of the above discussion, one important question motivates our work here: How can we treat non-Hermitian SU(1, 1) and SU(2) time-dependent quantum problems and investigate the possibility of finding the solution of the Schrödinger equation in terms of the pseudo-invariant operator eigenstates as well the associated real phases? We answer this question from a new perspective by studying the time-dependent non-Hermitian Hamiltonian systems given by a linear combination of su(1, 1) and su(2) Lie algebra generators using a pseudo-invariant operator theory which is constructed in a manner as for both the SU(1, 1) and SU(2) systems. An advantage of the pseudo-invariant operator is that it allows obtaining the solution of the Schrödinger equation in terms of eigenstates of the invariant operator as well as the time-evolution operator.

This paper is organized as follows. In Sec. II, we summarize the properties of the Lie algebra su(1, 1) and su(2) and its factorization which seems necessary to obtain in Sec. III the derivation of the pseudo invariant operator. The exact time evolution of a quantum non-Hermitian system possessing a dynamical pseudo-invariant operateur with real parameters is obtained in Sec. IV. In Sec. V, we consider two particular systems: the non-Hermitian Swanson Hamiltonian and a spin σ-particle in a rotating magnetic field. We also show that, when considering the time-dependent coefficients of the non-Hermitian $H(t)$ to be real functions, the quasi-Hermiticity relation with time-independent metric operators $\eta H(t) = H^\dagger(t)\eta$ for the Hamiltonian $H(t)$ itself is recovered in complete analogy with the time-independent scenario. Finally, in Sec. VI and the Appendix, we shall conclude and give a technical appendix.

II. THE SU(1, 1) AND SU(2) LIE ALGEBRA OPERATORS AND THEIR FACTORIZATION

We consider the operators $K_0 = K_0^+$ and $K_+ = (K_-)^+$ verifying the following commutation relations:

$$\begin{cases} [K_0, K_+] = K_+ \\ [K_0, K_-] = -K_- \\ [K_+, K_-] = DK_0 \end{cases}. \tag{7}$$

when $D = -2$ and 2 in the commutation relations (7), these operators yield an unitary realization of the triparametric algebras su(1, 1) and su(2), respectively.

As is well known, Refs. 27–29, an element of the SU(1, 1) or SU(2) group can be obtained by exponentiation of an element of the corresponding algebra. It is also well known that we can write down this element in many equivalent factorized ways. The Baker–Hausdorff–Campbell formula allows us to express all elements of SU(1, 1) or of SU(2) obtained by exponentiation of an hermitic element of SU(1, 1) or of SU(2) as

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \exp\{2[\epsilon(t)K_0 + \mu(t)K_- + \mu^*(t)K_+]\},\\ &= \exp[\vartheta_+(t)K_+]\exp[\ln\vartheta_0(t)K_0]\exp[\vartheta_-(t)K_-],\end{aligned} \tag{8}$$

where

$$\begin{aligned}\vartheta_+(t) &= \frac{2\mu^*\sinh\theta}{\theta\cosh\theta - \epsilon\sinh\theta} = -\zeta(t)e^{-i\varphi(t)},\\ \vartheta_0(t) &= \left(\cosh\theta - \frac{\epsilon}{\theta}\sinh\theta\right)^{-2} = -\frac{D}{2}\zeta^2(t) - \chi(t),\\ \vartheta_-(t) &= \frac{2\mu\sinh\theta}{\theta\cosh\theta - \epsilon\sinh\theta} = -\zeta(t)e^{i\varphi(t)},\\ \chi(t) &= -\frac{\cosh\theta + \frac{\epsilon}{\theta}\sinh\theta}{\cosh\theta - \frac{\epsilon}{\theta}\sinh\theta}, \quad \theta = \sqrt{\epsilon^2 + 2D|\mu|^2}.\end{aligned} \tag{9}$$

This factorization is valid for SU(1, 1) ($D = -2$) and for SU(2) ($D = 2$). The main idea for constructing the pseudo invariant operator $I^{PH}(t)$ is to use the following identities:

$$\begin{cases}\exp[\vartheta_-K_-]K_0\exp[-\vartheta_-K_-] = K_0 + \vartheta_-K_-\\ \exp[\vartheta_+K_+]K_0\exp[-\vartheta_+K_+] = K_0 - \vartheta_+K_+\end{cases}, \tag{10}$$

$$\begin{cases}\exp[\ln\vartheta_0K_0]K_-\exp[-\ln\vartheta_0K_0] = \frac{K_-}{\vartheta_0}\\ \exp[\vartheta_+K_+]K_-\exp[-\vartheta_+K_+] = K_- + D\vartheta_+K_0 - \frac{D}{2}\vartheta_+^2K_+\end{cases}, \tag{11}$$

$$\begin{cases}\exp[\ln\vartheta_0K_0]K_+\exp[-\ln\vartheta_0K_0] = \vartheta_0K_+\\ \exp[\vartheta_-K_-]K_+\exp[\vartheta_-K_-] = K_+ - D\vartheta_-K_0 - \frac{D}{2}\vartheta_-^2K_-\end{cases}. \tag{12}$$

III. DERIVATION OF THE PSEUDO-INVARIANT OPERATOR

In this section, we present the results of the pseudo-Hermitian invariant operator $I^{PH}(t)$ for the non-Hermitian SU(1, 1) and SU(2) time-dependent systems whose Hamiltonian is given by

$$H(t) = 2\omega(t)K_0 + 2\alpha(t)K_- + 2\beta(t)K_+, \tag{13}$$

where $(\omega(t), \alpha(t), \beta(t)) \in C$ are arbitrary functions of time. In what follows, we investigate the quantum dynamics of our time-dependent systems (4) associated with the Hamiltonian (13). To this end, we consider the most general invariant $I^{PH}(t)$ in the form

$$I^{PH}(t) = 2\delta_1(t)K_0 + 2\delta_2(t)K_- + 2\delta_3(t)K_+, \tag{14}$$

where $\delta_1(t)$, $\delta_2(t)$, $\delta_3(t)$ are time dependent complex parameters. The invariant (14) is of course non-Hermitian.

The key point of our method is to solve the standard quasi-Hermiticity relation

$$I^{PH\dagger}(t) = \eta(t)I^{PH}(t)\eta^{-1}(t) \Leftrightarrow I^h(t) = \rho(t)I^{PH}(t)\rho^{-1}(t) = I^{h\dagger}(t). \tag{15}$$

By using Eqs. (8) and (9) and identities (10)–(12), we obtain after some algebra the transformed invariant operator $I^h(t) = \rho(t)I^{PH}(t)\rho^{-1}(t)$ as

$$\begin{aligned} I^h(t) = \frac{2}{\vartheta_0}\left[\left(\frac{D}{2}\vartheta_+\vartheta_- - \chi\right)\delta_1 + D(\vartheta_+\delta_2 + \chi\vartheta_-\delta_3)\right]K_0 + \\ + \frac{2}{\vartheta_0}\left[\vartheta_-\delta_1 + \delta_2 - \frac{D}{2}\vartheta_-^2\delta_3\right]K_- + \\ + \frac{2}{\vartheta_0}\left[\chi\vartheta_+\delta_1 - \frac{D}{2}\vartheta_+^2\delta_2 + \chi^2\delta_3\right]K_+. \end{aligned} \tag{16}$$

For $I^h(t)$ to be Hermitian, we require that the coefficient of K_0 is real and the coefficients of K_- and K_+ are the complex conjugates of one another. From these two requirements, we get

$$\begin{aligned} \left(\frac{D}{2}\vartheta_+\vartheta_- - \chi\right)\delta_1 + D(\vartheta_+\delta_2 + \chi\vartheta_-\delta_3) = \left(\frac{D}{2}\vartheta_+\vartheta_- - \chi\right)\delta_1^* + D\left(\vartheta_-\delta_2^* + \chi\vartheta_+\delta_3^*\right) \\ \vartheta_-\delta_1 + \delta_2 - \frac{D}{2}\vartheta_-^2\delta_3 = \chi\vartheta_-\delta_1^* - \frac{D}{2}\vartheta_-^2\delta_2^* + \chi^2\delta_3^*, \\ \chi\vartheta_+\delta_1 - \frac{D}{2}\vartheta_+^2\delta_2 + \chi^2\delta_3 = \vartheta_+\delta_1^* + \delta_2^* - \frac{D}{2}\vartheta_+^2\delta_3^*. \end{aligned} \tag{17}$$

The first requirement gives

$$\left(\chi - \frac{D}{2}\phi^2\right)|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1} - D\phi\left[|\delta_2|\sin(\varphi - \varphi_{\delta_2}) - \chi|\delta_3|\sin(\varphi + \varphi_{\delta_3})\right] = 0. \tag{18}$$

The second requirement leads to

$$\begin{cases} \phi(1-\chi)|\delta_1|\cos\varphi_{\delta_1} - \left(1 + \frac{D}{2}\phi^2\right)|\delta_2|\cos(\varphi - \varphi_{\delta_2}) + \left(\chi^2 + \frac{D}{2}\phi^2\right)|\delta_3|\cos(\varphi + \varphi_{\delta_3}) = 0, \\ \phi(1+\chi)|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1} + \left(1 - \frac{D}{2}\phi^2\right)|\delta_2|\sin(\varphi - \varphi_{\delta_2}) - \left(\chi^2 - \frac{D}{2}\phi^2\right)|\delta_3|\sin(\varphi + \varphi_{\delta_3}) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Using Eqs. (18) and (19), the Hermitian invariant $I^h(t)$ (15) becomes

$$\begin{aligned} I^h(t) = \frac{1}{\vartheta_0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{D}{2}\vartheta_+\vartheta_- - \chi\right)\left(\delta_1 + \delta_1^*\right) + \frac{D}{2}\left(\vartheta_+\delta_2 + \vartheta_-\delta_2^*\right) + \frac{D}{2}\chi\left(\vartheta_-\delta_3 + \vartheta_+\delta_3^*\right)\right]K_0 + \\ + \frac{2}{\vartheta_0}\left[\vartheta_-\delta_1 + \delta_2 - \frac{D}{2}\vartheta_-^2\delta_3\right]K_- + \\ + \frac{2}{\vartheta_0}\left[\vartheta_+\delta_1^* + \delta_2^* - \frac{D}{2}\vartheta_+^2\delta_3^*\right]K_+. \end{aligned} \tag{20}$$

By imposing the pseudo-Hermiticity condition

$$I^{\dagger PH}(t) = \rho(t)I^h(t)\rho^{-1}(t) \tag{21}$$

and setting

$$\delta_1 = |\delta_1|e^{i\varphi_{\delta_1}}, \quad \delta_2 = |\delta_2|e^{i\varphi_{\delta_2}}, \quad \delta_3 = |\delta_3|e^{i\varphi_{\delta_3}}, \tag{22}$$

we can deduce that the pseudo-invariant (14) takes the form

$$\begin{aligned} I^{PH}(t) = 2\left[|\delta_1|\cos\varphi_{\delta_1} + i\frac{(1-\chi)}{\vartheta_0}\left[|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1} + D\phi|\delta_3|\sin(\varphi + \varphi_{\delta_3})\right]\right]K_0 + \\ + \frac{2e^{i\varphi}}{\vartheta_0^2}\left[\vartheta_0^2|\delta_2|\cos(\varphi - \varphi_{\delta_2}) - i\left(\frac{D}{2}\phi^2 + \chi^2\right)\left[\phi|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1} + +\right.\right. \\ \left.\left. + |\delta_2|\sin(\varphi - \varphi_{\delta_2}) + \frac{D}{2}\phi^2|\delta_3|\sin(\varphi + \varphi_{\delta_3})\right]\right]K_- + \\ + \frac{2e^{-i\varphi}}{\vartheta_0^2}\left[\vartheta_0^2|\delta_3|\cos(\varphi + \varphi_{\delta_3}) + i\left(\frac{D}{2}\phi^2 + 1\right)\left[\phi|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1} + \right.\right. \\ \left.\left. + |\delta_2|\sin(\varphi - \varphi_{\delta_2}) + \frac{D}{2}\phi^2|\delta_3|\sin(\varphi + \varphi_{\delta_3})\right]\right]K_+. \end{aligned} \tag{23}$$

Now we impose the invariance condition (1) to obtain

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_1 &= 2iD(\alpha\delta_3 - \beta\delta_2),\\ \dot{\delta}_2 &= 2i(\omega\delta_2 - \alpha\delta_1),\\ \dot{\delta}_3 &= 2i(\beta\delta_1 - \omega\delta_3).\end{aligned} \tag{24}$$

These last three relations will lead to complicated equations, Eqs. (A4)–(A9) in the Appendix, that are difficult to be solved. In order to cover simple and more meaningful results, we examine the case where the time dependent coefficients of the pseudo-invariant (14) are real.

IV. PSEUDO-INVARIANT $I^{PH}(t)$ WITH REAL PARAMETERS AND EVOLUTION OF NON-HERMITIAN SU(1, 1) AND SU(2) TIME-DEPENDENT SYSTEMS

When considering the time-dependent parameters $\delta_1(t), \delta_2(t) \neq \delta_3(t)$ to be real functions instead of complex ones, the equations in Sec. III and the Appendix considerably simplify. It follows from Eq. (22) that $\varphi_{\delta_1} = \varphi_{\delta_2} = \varphi_{\delta_3} = 0$, and from Eqs. (17), we derive the following equations:

$$\delta_2 = \delta_3\chi \tag{25}$$

and

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \frac{\left(\frac{D}{2}\vartheta_-^2 - \chi\right)}{\vartheta_-}\delta_3,\\ \delta_1 &= \frac{\left(\frac{D}{2}\vartheta_+^2 - \chi\right)}{\vartheta_+}\delta_3,\end{aligned} \tag{26}$$

which leads to the relation $\vartheta_+(t) = \vartheta_-(t) \equiv -\zeta(t)$, implying that the time dependent parameter $\mu(t)$ must be real, i.e., $\mu(t) = \mu^*(t)$, and therefore the invariant $I^h(t)$ is given by

$$I^h(t) = \frac{2}{\vartheta_0}\left[\left(\frac{D}{2}\zeta^2 - \chi\right)\delta_1 - 2D\chi\zeta\delta_3\right]K_0. \tag{27}$$

Let $\left|\psi_n^h\right\rangle$ be the eigenstate of K_0 with eigenvalue k_n, i.e.,

$$K_0\left|\psi_n^h\right\rangle = k_n\left|\psi_n^h\right\rangle. \tag{28}$$

The eigenstates of $I^h(t)$ (27) are obviously given by

$$I^h(t)\left|\psi_n^h(t)\right\rangle = \frac{2}{\vartheta_0}\left[\left(\frac{D}{2}\zeta^2 - \chi\right)\delta_1 - 2D\chi\zeta\delta_3\right]k_n\left|\psi_n^h\right\rangle. \tag{29}$$

Because of the time-dependence, the invariant $I^h(t)$ is a conserved quantity whose eigenvalues are real constants. However, without loss of generality, the factor $\left[\left(D\zeta^2/2 - \chi\right)\delta_1 - 2D\chi\zeta\delta_3\right]/\vartheta_0$ can be taken equal to 1. It follows that the eigenstate $\left|\phi_n^H(t)\right\rangle$ of $I^{PH}(t)$ can be directly deduced from the basis $\left|\psi_n^h\right\rangle$ of its Hermitian counterpart $I^h(t)$ through the similarity transformation $\left|\phi_n^H(t)\right\rangle = \rho^{-1}(t)\left|\psi_n^h\right\rangle$ with time-independent eigenvalue k_n.

Using Eq. (15), the pseudo Hermitian invariant operator $I^{PH}(t)$ is written in the following form:

$$I^{PH}(t) = \frac{2}{\vartheta_0}\left[\left(\frac{D}{2}\zeta^2 - \chi\right)K_0 - \chi\zeta K_- - \zeta K_+\right]. \tag{30}$$

Equations (A4)–(A9) in the Appendix obtained by imposing the invariance condition (1) are simplified into

$$\dot{\vartheta}_0 = \frac{2\vartheta_0}{\zeta}\left[-2\zeta|\omega|\sin\varphi_\omega + |\alpha|\sin\varphi_\alpha + \left(\chi - D\zeta^2\right)|\beta|\sin\varphi_\beta\right], \tag{31}$$

$$\dot{\zeta} = -2\zeta|\omega|\sin\varphi_\omega + 2|\alpha|\sin\varphi_\alpha - D\zeta^2|\beta|\sin\varphi_\beta, \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\chi|\beta|\cos\varphi_\beta &= |\alpha|\cos\varphi_\alpha \\ \left(\chi-\tfrac{D}{2}\zeta^2\right)|\alpha|\cos\varphi_\alpha &= \chi\zeta|\omega|\cos\varphi_\omega, \\ \zeta|\omega|\cos\varphi_\omega &= \left(\chi-\tfrac{D}{2}\zeta^2\right)|\beta|\cos\varphi_\beta\end{aligned} \tag{33}$$

where φ_ω, φ_α, and φ_β are the polar angles of ω, α, and β, respectively.

Now we determine the Schrodinger solution (4) which is an eigenstate of the pseudo Hermitian invariant (30) multiplied by a time-dependent factor (6)

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_n(t)}{dt} &= \left\langle\phi_n^H(t)\middle|\eta(t)\left[i\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\right]\middle|\phi_n^H(t)\right\rangle \\ &= \left\langle\psi_n^h\middle|\left[i\rho\dot\rho^{-1}-\rho H\rho^{-1}\right]\middle|\psi_n^h\right\rangle.\end{aligned} \tag{34}$$

Using the non-Hermitian Hamiltonian $H(t)$ (13) and then deriving the transformed Hamiltonian $\left[i\rho\dot\rho^{-1}-\rho H\rho^{-1}\right]$ through the metric operator $\rho(t)$ (8), we further identify this transformed Hamiltonian as

$$i\rho\dot\rho^{-1}-\rho H\rho^{-1} = 2W(t)K_0+2U(t)K_-+2V(t)K_+, \tag{35}$$

where the coefficient functions are

$$W(t) = -\frac{1}{\vartheta_0}\left[\omega\left(\frac{D}{2}\zeta^2-\chi\right)-D\zeta(\alpha+\beta\chi)+\frac{i}{2}\left(\dot\vartheta_0+D\zeta\dot\zeta\right)\right], \tag{36}$$

$$U(t) = \frac{1}{\vartheta_0}\left[\omega\zeta-\alpha+\frac{D}{2}\beta\zeta^2+i\frac{\dot\zeta}{2}\right], \tag{37}$$

$$V(t) = \frac{1}{\vartheta_0}\left[\omega\chi\zeta+\frac{D}{2}\alpha\zeta^2-\beta\chi^2-\frac{i}{2}\left(\zeta\dot\vartheta_0-\vartheta_0\dot\zeta+\frac{D}{2}\vartheta^2\dot\zeta\right)\right]. \tag{38}$$

By using Eqs. (33), the above time-dependent coefficients U, V are identically equal to zero ($U = V = 0$), whereas the coefficient W is reduced to

$$W(t) = -\frac{1}{\vartheta_0}\left\{\left(\frac{D}{2}\zeta^2-\chi\right)|\omega|\cos\varphi_\omega-2D\zeta|\alpha|\cos\varphi_\alpha-i\frac{\vartheta_0}{\zeta}\left[\zeta|\omega|\sin\varphi_\omega-|\alpha|\sin\varphi_\alpha-\chi|\beta|\cos\varphi_\beta\right]\right\}. \tag{39}$$

Knowing that the phase $\varphi_n(t)$ (34) must be real, we need to impose that the frequency $W(t)$ is real. Then, we obtain the exact phase of the eigenstate

$$\varphi_n(t) = -2k_n\int_0^t \frac{1}{\vartheta_0}\left[\left(\frac{D}{2}\zeta^2-\chi\right)|\omega|\cos\varphi_\omega-2D\zeta|\alpha|\cos\varphi_\alpha\right]dt'. \tag{40}$$

Therefore, the general solution of the Schrödinger equation is given by

$$\left|\Phi^H(t)\right\rangle = \sum_n C_n(0)\exp\left(-ik_n\int_0^t\frac{2}{\vartheta_0}\left[|\omega|\left(\frac{D}{2}\zeta^2-\chi\right)\cos\varphi_\omega-2D\zeta|\alpha|\cos\varphi_\alpha\right]dt'\right)\left|\phi_n^H(t)\right\rangle. \tag{41}$$

V. FEW SPECIAL EXAMPLES

A. Generalized time dependent non-Hermitian Swanson Hamiltonian

We now consider first the SU(1,1) case where $D = -2$. The su(1,1) Lie algebra has a realization in terms of boson creation and annihilation operators a^+ and a such that

$$K_0 = \frac{1}{2}\left(a^+a+\frac{1}{2}\right),\quad K_- = \frac{1}{2}a^2,\quad K_+ = \frac{1}{2}a^{+2}. \tag{42}$$

When the Hamiltonian (13) is expressed in terms of position x and momentum p, it describes the generalized quadratic time-dependent non-Hermitian harmonic oscillator. The celebrated model of a non-Hermitian PT-symmetric Hamiltonian quadratic in position and momentum was studied first by Ahmed[30] and made popular by Swanson[31] when it was expressed in terms of the usual harmonic oscillator creation a^+ and annihilation a operators with time-independent real parameters ω, α and β such that $\alpha \neq \beta$ and $\omega^2 - 4\alpha\beta > 0$. This Hamiltonian has been studied extensively in the literature by several authors.[32–37]

We construct here, by employing the Lewis-Riesenfeld method of invariants, the solutions for the generalized version of the non-Hermitian Swanson Hamiltonian with time-dependent coefficients[18]

$$H(t) = \omega(t)\left(a^+a + \frac{1}{2}\right) + \alpha(t)a^2 + \beta(t)a^{+2}, \tag{43}$$

where $(\omega(t), \alpha(t), \beta(t)) \in C$ are time-dependent parameters. The form for $I^{PH}(t)$, which is both convenient for calculations, is

$$\begin{aligned} I^{PH}(t) = \exp\left[\frac{\zeta}{2}a^2\right] \exp\left[-\frac{\ln\vartheta_0}{2}\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)\right] \exp\left[\frac{\zeta}{2}a^{+2}\right]\left(a^+a + \frac{1}{2}\right) \\ \times \exp\left[-\frac{\zeta}{2}a^{+2}\right] \exp\left[\frac{\ln\vartheta_0}{2}\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)\right] \exp\left[-\frac{\zeta}{2}a^2\right], \end{aligned} \tag{44}$$

which brings out the Hamiltonian $2K_0 = \left(a^+a + \frac{1}{2}\right)$ of the usual harmonic oscillator whose eigenstates $|n\rangle$ $(n = 0, 1, 3\ldots)$ and eigenvalues $\left(n + \frac{1}{2}\right)$ are well known. As eigenstates of $I^{PH}(t)$, one can then take

$$\left|\phi_n^H(t)\right\rangle = \exp\left[\frac{\zeta}{2}a^2\right] \exp\left[-\frac{\ln\vartheta_0}{2}\left\{\left(a^+a + \frac{1}{2}\right) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right\}\right] \exp\left[\frac{\zeta}{2}a^{+2}\right]|n\rangle. \tag{45}$$

The corresponding phase (40) $\varphi_n(t)$ is

$$\varphi_n(t) = (n + \frac{1}{2})\int_0^t \frac{1}{\vartheta_0}\left[\left(\zeta^2 + \chi\right)|\omega|\cos\varphi_\omega - 4\zeta|\alpha|\cos\varphi_\alpha\right]dt'. \tag{46}$$

B. A spinning particle in a time-varying magnetic field

Now, we consider $D = 2$ where the Hamiltonian (13) and the invariant (30) possess the dynamical symmetry SU(2). There is substantial literature on the time evolution of the two-level system governed by a non-Hermitian Hamiltonian $H(t) = \mathbf{B}(t)\sigma$,[38–44] where σ is the vector of Pauli and the components of the field $\mathbf{B}(t)$ are complex.

Knowing this, the ferromagnetic materials like cobalt and iron produce magnetic fields whose magnitudes are measured by real numbers. Imaginary or complex fields are, however, essential in the fundamental theory that underlies the statistical physics of phase transitions, such as those associated with the onset of magnetization. Long thought to be merely mathematical constructs, a realization of these imaginary fields has now been observed in magnetic resonance experiments performed on the spins of a molecule,[45] following an earlier theoretical proposal. A spin in a time-varying complex magnetic field is a practical example for the case $D = 2$. Let

$$K_0 = J_z, \quad K_- = J_-, \quad K_+ = J_+,$$

and the Hamiltonian and the invariant be

$$H(t) = 2\left[\omega(t)J_z + \alpha(t)J_- + \beta(t)J_+\right], \tag{47}$$

$$I^{PH}(t) = \frac{2}{\vartheta_0}\left[\left(\zeta^2 - \chi\right)J_z - \chi\zeta J_- - \zeta J_+\right], \tag{48}$$

where $\mathbf{J}$ is the spin angular momentum of the particle. The form of $I^{PH}(t)$, which is convenient for calculations, is

$$I^{PH}(t) = \exp[\zeta J_-]\exp[-\ln\vartheta_0 J_z]\exp[\zeta J_+]J_z\exp[-\zeta J_+]\exp[\ln\vartheta_0 J_z]\exp[-\zeta J_-]. \tag{49}$$

The instantaneous eigenstates of $I^{PH}(t)$ can be written in terms of J_z eigenstates denoted by $|m\rangle$, as

$$\left|\phi_m^H(t)\right\rangle = \exp[\zeta J_-]\exp[-\ln\vartheta_0(J_z - m)]\exp[\zeta J_+]|m\rangle. \tag{50}$$

The corresponding eigenvalues are m. With the factor of $\exp[m\ln\vartheta_0]$ included in the definition of $\left|\phi_m^H(t)\right\rangle$, the vector potential is singular only at the south pole.

For this case, the phase (40) $\varphi_m(t)$ is easy to calculate and is given by

$$\varphi_m(t) = -m\int_0^t \frac{2}{\vartheta_0}\left[\left(\zeta^2 - \chi\right)|\omega|\cos\varphi_\omega - 4\zeta|\alpha|\cos\varphi_\alpha\right]dt'. \tag{51}$$

Before concluding this paper, we give a particular case when the parameters of $H(t)$ are reals; i.e., $(\omega(t), \alpha(t), \beta(t)) \in R$.

C. The Hamiltonian $H(t)$ with real coefficients $\omega(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$

When considering the time-dependent coefficients $\omega(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ to be real functions instead of complex ones, the polar angles φ_ω, φ_α, and φ_β of ω, α, and β vanish. By imposing that $\varphi_\omega = \varphi_\alpha = \varphi_\beta = 0$, Eqs. (31)–(33) are simplified to

$$\dot{\vartheta}_0 = 0, \tag{52}$$

$$\dot{\zeta} = 0, \tag{53}$$

$$\begin{gathered} \chi|\beta| = |\alpha| \\ \left(\chi - \tfrac{D}{2}\zeta^2\right)|\alpha| = \chi\zeta|\omega|. \\ \zeta|\omega| = \left(\chi - \tfrac{D}{2}\zeta^2\right)|\beta| \end{gathered} \tag{54}$$

As one can see from the last equations that the metric parameters (9) ζ, ϑ_0 are constants. Thus, the time-dependent real coefficients $\omega(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ of $H(t)$ provide a time-independent metric and consequently the gaugelike term $i\hbar\dot{\eta}(t)\eta^{-1}(t)$ equal to zero and the standard quasi-Hermiticity relation $\eta H(t) = H^\dagger(t)\eta$ for the Hamiltonian $H(t)$ itself recovered in complete analogy with the time-independent scenario. Thus $H(t)$ is a self-adjoined operator and therefore observable and can be written in the following simple form:

$$H(t) = 2\frac{\omega(t)}{\left(\frac{D}{2}\zeta^2 - \chi\right)}\left\{\left(\frac{D}{2}\zeta^2 - \chi\right)K_0 - \chi\zeta K_- - \zeta K_+\right\} = \frac{\omega(t)\vartheta_0}{\left(\frac{D}{2}\zeta^2 - \chi\right)}I^{PH}(t), \tag{55}$$

which it reveals its self-adjoined character and therefore its observability. From Eqs. (54), we derive the metric parameter ζ in terms of parameters of the Hamiltonian $H(t)$,

$$\zeta = \frac{1}{2|\beta|}\left(-\frac{D}{2}|\omega| \pm \sqrt{|\omega|^2 + 2D|\alpha||\beta|}\right).$$

VI. CONCLUSION

The use of invariants theory to solve quantum systems, whose Hamiltonian is an explicit function of time, has the advantage to offer an exact solution for problems solved by the traditional time-dependent perturbation theory. The existence of invariants (constants of the motion or first integral) introduced by Lewis-Riesenfeld[26] is a factor of central importance in the study of such systems. The invariants method is very simple due to the relationship between the eigenstates of the invariant operator and the Schrödinger equation solutions by means of the phases; in this case, the problem is reduced to find the explicit form of the invariant operator and the phases.

The results that we have presented offer a general and comprehensive treatment of a time-dependent non-Hermitian dynamics of SU(1,1) and SU(2) quantum systems. Non-Hermitian Hamiltonian operators have been the subject of considerable interest during the last years within the framework of the PT symmetry and pseudo-Hermiticity theories. It has been established[8,9] that the general framework for a description of unitary time evolution for time-dependent non-Hermitian Hamiltonians can be based on the use of a time-dependent metric operator.

In this work, using the standard quasi-Hermiticity relation (15) between a non-Hermitian invariant operator $I^{PH}(t)$ and a Hermitian one $I^{h}(t)$, we have considered the dynamical behavior of SU(1,1) and SU(2) non-Hermitian time-dependent quantum systems by presenting an alternative approach to solve it. We investigated in detail the main frames of time-dependent non-Hermitian SU(1,1) and SU(2) systems in the framework of the Lewis and Riesenfeld method which ensures that a solution of the Schrödinger equation governed by a time-dependent non-Hermitian Hamiltonian is an eigenstate of an associated pseudo-Hermitian invariant operator $I^{PH}(t)$ with a time-dependent global real phase factor $\varphi_n(t)$.

The properties derived here help us to understand better systems described by time-dependent non-Hermitian Hamiltonians and should play a central role in time-dependent non-Hermitian quantum mechanics. After going through these properties, we then have presented two illustrative examples: the generalized Swanson model and a spinning particle in a time-varying magnetic field. When the time dependent parameters $\omega(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ are supposed real, the standard quasi-Hermiticity relation for the time dependent Hamiltonian $H(t)$ occurs and the metric operator becomes time-independent.

ACKNOWLEDGMENTS

One of the authors (M. Maamache) wishes to thank the Chief Executive Officer of Safcer Ammar Seklouli for his support of No. PHHQP14.

APPENDIX: THE INVARIANT $I^{PH}(t)$ WITH COMPLEX COEFFICIENTS $\delta_1(t)$, $\delta_2(t)$, $\delta_3(t)$

The time derivatives in Eqs. (24) of the parameters for the pseudo-invariant $I^{PH}(t)$ (23) can be written as

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_1 =& \left|\dot{\delta}_1\right| \cos\varphi_{\delta_1} - |\delta_1|\dot{\varphi}_{\delta_1}\sin\varphi_{\delta_1} + i\frac{(1-\chi)}{\vartheta_0}\Big[\left|\dot{\delta}_1\right|\sin\varphi_{\delta_1} + |\delta_1|\dot{\varphi}_{\delta_1}\cos\varphi_{\delta_1} \\ &+ D\phi\Big(\left|\dot{\delta}_3\right|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3}) + (\dot{\varphi}+\dot{\varphi}_{\delta_3})|\delta_3|\cos(\varphi+\varphi_{\delta_3})\Big) + D\dot{\phi}|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\Big] + \\ &+ \frac{i}{\vartheta_0^2}\left[D\dot{\phi}\phi\vartheta_0 - \left(\frac{D}{2}\phi^2+1\right)\dot{\vartheta}_0\right]\left[|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1} + D\phi|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\right],\end{aligned} \tag{A1}$$

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_2 =& \frac{i\dot{\varphi}e^{i\varphi}}{\vartheta_0^2}\Big\{\vartheta_0^2|\delta_2|\cos(\varphi-\varphi_{\delta_2}) - i\left(\frac{D}{2}\phi^2+\chi^2\right)\Big[\phi|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1} + \\ &+ |\delta_2|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2}) + \frac{D}{2}\phi^2|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\Big]\Big\} + \frac{e^{i\varphi}}{\vartheta_0^2}\Big\{\vartheta_0^2\Big[\left|\dot{\delta}_2\right|\cos(\varphi-\varphi_{\delta_2}) - \\ &- |\delta_2|(\dot{\varphi}-\dot{\varphi}_{\delta_2})\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})\Big] - i\left(\frac{D}{2}\phi^2+\chi^2\right)\Big[\phi\Big(\left|\dot{\delta}_1\right|\sin\varphi_{\delta_1} + |\delta_1|\dot{\varphi}_{\delta_1}\cos\varphi_{\delta_1}\Big) + \\ &+ \Big(\left|\dot{\delta}_2\right|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2}) + |\delta_2|(\dot{\varphi}-\dot{\varphi}_{\delta_2})\cos(\varphi-\varphi_{\delta_2})\Big) + \\ &+ \frac{D}{2}\phi^2\Big(\left|\dot{\delta}_3\right|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3}) + |\delta_3|(\dot{\varphi}+\dot{\varphi}_{\delta_3})\cos(\varphi+\varphi_{\delta_3})\Big)\Big]\Big\} + \\ &- i\frac{e^{i\varphi}}{\vartheta_0^2}\Big\{\Big[\phi\Big(D\phi\dot{\phi}(1-2\chi) - 2\chi\dot{\vartheta}_0\Big) + \left(\dot{\phi} - 2\phi\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\right)\left(\frac{D}{2}\phi^2+\chi^2\right)\Big]|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1} + \\ &+ \Big[D\phi\dot{\phi}(1-2\chi) - 2\chi\dot{\vartheta}_0 - 2\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\left(\frac{D}{2}\phi^2+\chi^2\right)\Big]|\delta_2|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2}) + |\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\times \\ &\times \Big[\frac{D}{2}\phi^2\Big(D\phi\dot{\phi}(1-2\chi) - 2\chi\dot{\vartheta}_0\Big) + D\phi\left(\dot{\phi} - \phi\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\right)\left(\frac{D}{2}\phi^2+\chi^2\right)\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{A2}$$

and

$$\begin{aligned}
\dot{\delta}_3 =& -i\dot{\varphi}\frac{e^{-i\varphi}}{\vartheta_0^2}\left\{\vartheta_0^2|\delta_3|\cos(\varphi+\varphi_{\delta_3})+i\left(\frac{D}{2}\phi^2+1\right)[\phi|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1}++\right.\\
&\left.+|\delta_2|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+\frac{D}{2}\phi^2|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\right]+\frac{e^{-i\varphi}}{\vartheta_0^2}\left\{\vartheta_0^2\left(\left|\dot{\delta}_3\right|\cos(\varphi+\varphi_{\delta_3})-\right.\right.\\
&+-|\delta_3|(\dot{\varphi}+\dot{\varphi}_{\delta_3})\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})+i\left(\frac{D}{2}\phi^2+1\right)\left[\phi\left(\left|\dot{\delta}_1\right|\sin\varphi_{\delta_1}+|\delta_1|\dot{\varphi}_{\delta_1}\cos\varphi_{\delta_1}\right)\right.\\
&+\left|\dot{\delta}_2\right|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+|\delta_2|(\dot{\varphi}-\dot{\varphi}_{\delta_2})\cos(\varphi-\varphi_{\delta_2})+\\
&\left.\left.+\frac{D}{2}\phi^2\left(\left|\dot{\delta}_3\right|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})+|\delta_3|(\dot{\varphi}+\dot{\varphi}_{\delta_3})\cos(\varphi+\varphi_{\delta_3})\right)\right]\right\}\\
&+i\frac{e^{-i\varphi}}{\vartheta_0^2}\left\{\left[D\phi^2\dot{\phi}+\left(\dot{\phi}-2\phi\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\right)\left(\frac{D}{2}\phi^2+1\right)\right]|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1}+\right.\\
&+\left(D\phi\dot{\phi}-2\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\left(\frac{D}{2}\phi^2+1\right)\right)|\delta_2|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+\\
&\left.+D\phi\left[\frac{D}{2}\phi^2\dot{\phi}+\left(\dot{\phi}-\phi\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\right)\left(\frac{D}{2}\phi^2+1\right)\right]|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\right\}. \qquad \text{(A3)}
\end{aligned}$$

By substituting Eqs. (A1)–(A3) in Eqs. (24) and then separating the real part from the imaginary part, one obtains the following:

First: from the first equation of (24), we have

$$\begin{aligned}
&\left|\dot{\delta}_1\right|\cos\varphi_{\delta_1}-|\delta_1|\dot{\varphi}_{\delta_1}\sin\varphi_{\delta_1}\\
&=\frac{2D}{\vartheta_0^2}\left\{\vartheta_0^2[|\alpha||\delta_3|\sin(\varphi-\varphi_\alpha)\cos(\varphi+\varphi_{\delta_3})]+|\delta_2||\beta|\cos(\varphi-\varphi_{\delta_2})\sin\left(\varphi+\varphi_\beta\right)-\right.\\
&-\left[\phi|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1}+|\delta_2|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+\frac{D}{2}\phi^2|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\right]\times\\
&\left.\times\left[\left(\frac{D}{2}\phi^2+1\right)|\alpha|\cos(\varphi-\varphi_\alpha)+\left(\frac{D}{2}\phi^2+\chi^2\right)|\beta|\cos\left(\varphi+\varphi_\beta\right)\right]\right\} \qquad \text{(A4)}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\frac{(1-\chi)}{\vartheta_0}\left[\left|\dot{\delta}_1\right|\sin\varphi_{\delta_1}+|\delta_1|\dot{\varphi}_{\delta_1}\cos\varphi_{\delta_1}+D\phi\left(\left|\dot{\delta}_3\right|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})+(\dot{\varphi}+\dot{\varphi}_{\delta_3})|\delta_3|\cos(\varphi+\varphi_{\delta_3})\right)+\right.\\
&\left.+D\dot{\phi}|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\right]+\frac{1}{\vartheta_0^2}\left[D\dot{\phi}\phi\vartheta_0-\left(\frac{D}{2}\phi^2+1\right)\dot{\vartheta}_0\right][|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1}+D\phi|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})]\\
&=\frac{2D}{\vartheta_0^2}\left\{\vartheta_0^2\left[|\alpha||\delta_3|\cos(\varphi-\varphi_\alpha)\cos(\varphi+\varphi_{\delta_3})-|\delta_2||\beta|\cos(\varphi-\varphi_{\delta_2})\cos\left(\varphi+\varphi_\beta\right)\right]+\right.\\
&+\left[\phi|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1}+|\delta_2|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+\frac{D}{2}\phi^2|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\right]\times\\
&\left.\times\left[\left(\frac{D}{2}\phi^2+1\right)|\alpha|\sin(\varphi-\varphi_\alpha)-\left(\frac{D}{2}\phi^2+\chi^2\right)|\beta|\sin\left(\varphi+\varphi_\beta\right)\right]\right\}. \qquad \text{(A5)}
\end{aligned}$$

Second: from the second equation of (24), we obtain

$$\dot{\varphi}\Bigg\{-\sin\varphi|\delta_2|\cos(\varphi-\varphi_{\delta_2})+\frac{\cos\varphi}{\vartheta_0^2}\left(\frac{D}{2}\phi^2+\chi^2\right)\Big[\phi|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1}+|\delta_2|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+$$
$$+\ \frac{D}{2}\phi^2|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\Big]\Bigg\}+\cos\varphi\Big[\left|\dot{\delta}_2\right|\cos(\varphi-\varphi_{\delta_2})-|\delta_2|(\dot{\varphi}-\dot{\varphi}_{\delta_2})\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})\Big]+$$
$$+\ \frac{\sin\varphi}{\vartheta_0^2}\Bigg\{\left(\frac{D}{2}\phi^2+\chi^2\right)\Big[\phi\Big(\left|\dot{\delta}_1\right|\sin\varphi_{\delta_1}+|\delta_1|\dot{\varphi}_{\delta_1}\cos\varphi_{\delta_1}\Big)+\left|\dot{\delta}_2\right|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+$$
$$+|\delta_2|(\dot{\varphi}-\dot{\varphi}_{\delta_2})\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+\frac{D}{2}\phi^2\Big(\left|\dot{\delta}_3\right|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})+|\delta_3|(\dot{\varphi}+\dot{\varphi}_{\delta_3})\cos(\varphi+\varphi_{\delta_3})\Big)\Big]+$$
$$+\ \left[\phi\Big(D\phi\dot{\phi}(1-2\chi)-2\chi\dot{\vartheta}_0\Big)+\left(\dot{\phi}-2\phi\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\right)\left(\frac{D}{2}\phi^2+\chi^2\right)\right]|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1}+$$
$$+\ \left[D\phi\dot{\phi}(1-2\chi)-2\chi\dot{\vartheta}_0-2\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\left(\frac{D}{2}\phi^2+\chi^2\right)\right]|\delta_2|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+$$
$$+\ \left[\frac{D}{2}\phi^2\Big(D\phi\dot{\phi}(1-2\chi)-2\chi\dot{\vartheta}_0\Big)+D\phi\left(\dot{\phi}-\phi\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\right)\left(\frac{D}{2}\phi^2+\chi^2\right)\right]|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\Bigg\}$$
$$=2\left[|\alpha||\delta_1|\cos\varphi_{\delta_1}\sin\varphi_\alpha-|\omega||\delta_2|\cos(\varphi-\varphi_{\delta_2})\sin(\varphi+\varphi_\omega)\right]+\frac{2}{\vartheta_0^2}\left(\frac{D}{2}\phi^2+\chi^2\right)|\omega|\cos(\varphi+\varphi_\omega)\times$$
$$\times\left[\phi|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1}+|\delta_2|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+\frac{D}{2}\phi^2|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\right]+$$
$$+\ \frac{2}{\vartheta_0}(1-\chi)|\alpha|\cos\varphi_\alpha\left[|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1}+D\phi|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\right] \tag{A6}$$

and

$$\dot{\varphi}\Bigg\{\cos\varphi|\delta_2|\cos(\varphi-\varphi_{\delta_2})+\frac{\sin\varphi}{\vartheta_0^2}\left(\frac{D}{2}\phi^2+\chi^2\right)\Big[\phi|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1}+$$
$$+\ |\delta_2|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+\frac{D}{2}\phi^2|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\Big]\Bigg\}+\sin\varphi\Big[\left|\dot{\delta}_2\right|\cos(\varphi-\varphi_{\delta_2})-$$
$$-|\delta_2|(\dot{\varphi}-\dot{\varphi}_{\delta_2})\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})\Big]-\frac{\cos\varphi}{\vartheta_0^2}\Bigg\{\left(\frac{D}{2}\phi^2+\chi^2\right)\Big[\phi\Big(\left|\dot{\delta}_1\right|\sin\varphi_{\delta_1}+|\delta_1|\dot{\varphi}_{\delta_1}\cos\varphi_{\delta_1}\Big)+$$
$$+\left|\dot{\delta}_2\right|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+|\delta_2|(\dot{\varphi}-\dot{\varphi}_{\delta_2})\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+$$
$$+\frac{D}{2}\phi^2\Big(\left|\dot{\delta}_3\right|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})++|\delta_3|(\dot{\varphi}+\dot{\varphi}_{\delta_3})\cos(\varphi+\varphi_{\delta_3})\Big)\Big]+$$
$$+\ \left[\phi\Big(D\phi\dot{\phi}(1-2\chi)-2\chi\dot{\vartheta}_0\Big)+\left(\dot{\phi}-2\phi\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\right)\left(\frac{D}{2}\phi^2+\chi^2\right)\right]|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1}+$$
$$+\ \left[D\phi\dot{\phi}(1-2\chi)-2\chi\dot{\vartheta}_0-2\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\left(\frac{D}{2}\phi^2+\chi^2\right)\right]|\delta_2|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+$$
$$+\ \left[\frac{D}{2}\phi^2\Big(D\phi\dot{\phi}(1-2\chi)-2\chi\dot{\vartheta}_0\Big)+D\phi\left(\dot{\phi}-\phi\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\right)\left(\frac{D}{2}\phi^2+\chi^2\right)\right]|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\Bigg\}$$
$$=2\left[|\omega||\delta_2|\cos(\varphi-\varphi_{\delta_2})\cos(\varphi+\varphi_\omega)-|\alpha||\delta_1|\cos\varphi_{\delta_1}\cos\varphi_\alpha\right]+\frac{2}{\vartheta_0^2}\left(\frac{D}{2}\phi^2+\chi^2\right)|\omega|\sin(\varphi+\varphi_\omega)\times$$
$$\times\left[\phi|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1}+|\delta_2|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+\frac{D}{2}\phi^2|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\right]+$$
$$+\ \frac{2}{\vartheta_0}(1-\chi)|\alpha|\sin\varphi_\alpha\left[|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1}+D\phi|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\right]. \tag{A7}$$

Third: from the third equation of (24), we get

$$\dot{\varphi}\Bigg\{-\sin\varphi|\delta_3|\cos(\varphi+\varphi_{\delta_3})+\frac{\cos\varphi}{\vartheta_0^2}\left(\frac{D}{2}\phi^2+1\right)\Big[\phi|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1}+|\delta_2|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+$$
$$+\frac{D}{2}\phi^2|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\Big]\Bigg\}+\cos\varphi\Big[\left|\dot{\delta}_3\right|\cos(\varphi+\varphi_{\delta_3})-|\delta_3|(\dot{\varphi}-\dot{\varphi}_{\delta_3})\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\Big]+$$
$$+\frac{\sin\varphi}{\vartheta_0^2}\Bigg\{\left(\frac{D}{2}\phi^2+1\right)\Big[\phi\left(\left|\dot{\delta}_1\right|\sin\varphi_{\delta_1}+|\delta_1|\dot{\varphi}_{\delta_1}\cos\varphi_{\delta_1}\right)+\left|\dot{\delta}_2\right|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+$$
$$+|\delta_2|(\dot{\varphi}-\dot{\varphi}_{\delta_2})\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+\frac{D}{2}\phi^2\left(\left|\dot{\delta}_3\right|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})+|\delta_3|(\dot{\varphi}+\dot{\varphi}_{\delta_3})\cos(\varphi+\varphi_{\delta_3})\right)\Big]+$$
$$+\left[D\phi^2\dot{\phi}+\left(\dot{\phi}-2\phi\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\right)\left(\frac{D}{2}\phi^2+1\right)\right]|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1}+$$
$$+\left(D\phi\dot{\phi}-2\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\left(\frac{D}{2}\phi^2+1\right)\right)|\delta_2|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+$$
$$+D\phi\left[\frac{D}{2}\phi^2\dot{\phi}+\left(\dot{\phi}-\phi\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\right)\left(\frac{D}{2}\phi^2+1\right)\right]|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\Bigg\}$$
$$=-2\Big[|\beta||\delta_1|\cos\varphi_{\delta_1}\sin\varphi_\beta-|\omega||\delta_3|\cos(\varphi+\varphi_{\delta_3})\sin(\varphi-\varphi_\omega)\Big]\frac{1}{\vartheta_0^2}\left(\frac{D}{2}\phi^2+1\right)|\omega|\cos(\varphi-\varphi_\omega)\times$$
$$\times\left[\phi|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1}+|\delta_2|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+\frac{D}{2}\phi^2|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\right]$$
$$-\frac{(1-\chi)}{\vartheta_0}|\beta|\cos\varphi_\beta[|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1}+D\phi|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})] \tag{A8}$$

and

$$-\dot{\varphi}\Bigg\{\cos\varphi|\delta_3|\cos(\varphi+\varphi_{\delta_3})+\frac{\sin\varphi}{\vartheta_0^2}\left(\frac{D}{2}\phi^2+1\right)\Big[\phi|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1}+|\delta_2|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+$$
$$+\frac{D}{2}\phi^2|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\Big]\Bigg\}-\sin\varphi\Big[\left|\dot{\delta}_3\right|\cos(\varphi+\varphi_{\delta_3})-|\delta_3|(\dot{\varphi}-\dot{\varphi}_{\delta_3})\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\Big]+$$
$$+\frac{\cos\varphi}{\vartheta_0^2}\Bigg\{\left(\frac{D}{2}\phi^2+1\right)\Big[\phi\left(\left|\dot{\delta}_1\right|\sin\varphi_{\delta_1}+|\delta_1|\dot{\varphi}_{\delta_1}\cos\varphi_{\delta_1}\right)+\left|\dot{\delta}_2\right|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+$$
$$+|\delta_2|(\dot{\varphi}-\dot{\varphi}_{\delta_2})\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+\frac{D}{2}\phi^2\left(\left|\dot{\delta}_3\right|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})+|\delta_3|(\dot{\varphi}+\dot{\varphi}_{\delta_3})\cos(\varphi+\varphi_{\delta_3})\right)\Big]+$$
$$+\left[D\phi^2\dot{\phi}+\left(\dot{\phi}-2\phi\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\right)\left(\frac{D}{2}\phi^2+1\right)\right]|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1}+$$
$$+\left(D\phi\dot{\phi}-2\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\left(\frac{D}{2}\phi^2+1\right)\right)|\delta_2|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+$$
$$+D\phi\left[\frac{D}{2}\phi^2\dot{\phi}+\left(\dot{\phi}-\phi\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\right)\left(\frac{D}{2}\phi^2+1\right)\right]|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\Bigg\}$$
$$=2\Big[|\beta||\delta_1|\cos\varphi_{\delta_1}\cos\varphi_\beta-|\omega||\delta_3|\cos(\varphi+\varphi_{\delta_3})\cos(\varphi-\varphi_\omega)\Big]-\frac{1}{\vartheta_0^2}\left(\frac{D}{2}\phi^2+1\right)|\omega|\sin(\varphi-\varphi_\omega)\times$$
$$\times\left[\phi|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1}+|\delta_2|\sin(\varphi-\varphi_{\delta_2})+\frac{D}{2}\phi^2|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})\right]-$$
$$-\frac{(1-\chi)}{\vartheta_0}|\beta|\sin\varphi_\beta[|\delta_1|\sin\varphi_{\delta_1}+D\phi|\delta_3|\sin(\varphi+\varphi_{\delta_3})]. \tag{A9}$$

[1] F. J. Dyson, Phys. Rev. **102**, 1217 (1956).
[2] F. G. Scholz, H. B. Geyer, and F. J. Hahne, Ann. Phys. **213**, 74 (1992).
[3] C. M. Bender, Rep. Prog. Phys. **70**, 947 (2007).
[4] A. Mostafazadeh, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **7**, 1191 (2010).
[5] F. Bagarello, J.-P. Gazeau, F. H. Szafraniec, and M. Znojil, *Non-Selfadjoint Operators in Quantum Physics: Mathematical Aspects* (Wiley, Hoboken, 2015).
[6] C. Figueira de Morisson Faria and A. Fring, J. Phys. A: Math. Theor. **39**, 9269 (2006).
[7] C. Figueira de Morisson Faria and A. Fring, Laser Phys. **17**, 424 (2007).
[8] M. Znojil, Phys. Rev. D **78**, 085003 (2008).
[9] M. Znojil, SIGMA **5**, 001 (2009); e-print overlay arXiv:0901.0700.
[10] M. Znojil, "Time-dependent quasi-Hermitian Hamiltonians and the unitary quantum evolution," e-print arXiv:0710.5653; "Reply to Comment on 'Time-dependent quasi-Hermitian Hamiltonians and the unitary quantum evolution,'" e-print arXiv:0711.0514; "Which operator generates time evolution in quantum mechanics?," e-print arXiv:0711.0535.
[11] A. Mostafazadeh, Phys. Lett. B **650**, 208 (2007).
[12] A. Mostafazadeh, "Comment on 'Time-dependent quasi-Hermitian Hamiltonians and the unitary quantum evolution,'" e-print arXiv:0711.0137; "Comment on 'Reply to comment on time-dependent quasi-Hermitian Hamiltonians and the unitary quantum evolution,'" e-print arXiv:0711.1078.
[13] H. Bíla, "Adiabatic time-dependent metrics in PT-symmetric quantum theories," e-print arXiv:0902.0474.
[14] J. Gong and Q. H. Wang, Phys. Rev. A **82**, 012103 (2010).
[15] J. Gong and Q. H. Wang, J. Phys. A: Math. Theor. **46**, 485302 (2013).
[16] M. Maamache, Phys. Rev. A **92**, 032106 (2015).
[17] A. Fring and M. H. Y. Moussa, Phys. Rev. A **93**, 042114 (2016).
[18] A. Fring and M. H. Y. Moussa, Phys. Rev. A **94**, 042128 (2016).
[19] B. Khantoul, A. Bounames, and M. Maamache, Eur. Phys. J. Plus **132**, 258 (2017).
[20] M. Maamache, O.-K. Djeghiour, N. Mana, and W. Koussa, Eur. Phys. J. Plus **132**, 383 (2017).
[21] A. Fring and T. Frith, Phys. Rev. A **95**, 010102(R) (2017).
[22] F. S. Luiz, M. A. Pontes, and M. H. Y. Moussa, "Unitarity of the time-evolution and observability of non-Hermitian Hamiltonians for time-dependent Dyson maps," e-print arXiv:1611.08286.
[23] F. S. Luiz, M. A. Pontes, and M. H. Y. Moussa, "Gauge linked time-dependent non-Hermitian Hamiltonians," e-print arXiv:1703.01451.
[24] M. Maamache, Acta Polytech. **57**, 424 (2017).
[25] M. Znojil, Ann. Phys. **385**, 162 (2017).
[26] H. R. Lewis and W. B. Riesenfeld, J. Math. Phys. **10**, 1458 (1969).
[27] C. M. Cheng and P. C. W. Fung, J. Phys. A: Math. Gen. **21**, 4115 (1988).
[28] A. B. Klimov and S. M. Chumakov, *A Group-Theoretical Approach to Quantum Optics: Models of Atom-Field Interactions* (Wiley-VCH, Weinheim, 2009).
[29] S. M. Barnett and P. Radmore, *Methods in Theoretical Quantum Optics* (Oxford University Press, New York, 1997).
[30] Z. Ahmed, Phys. Lett. A **294**, 287 (2002).
[31] M. S. Swanson, J. Math. Phys. **45**, 585 (2004).
[32] H. F. Jones, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 1741 (2005).
[33] B. Bagchi, C. Quesne, and R. Roychoudhury, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, L647 (2005).
[34] D. P. Musumbu, H. B. Geyer, and W. D. Heiss, J. Phys. A: Math. Theor. **40**, F75 (2007).
[35] C. Quesne, J. Phys. A: Math. Theor. **40**, F745 (2007).
[36] A. Sinha and P. Roy, J. Phys. A: Math. Theor. **40**, 10599 (2007).
[37] E.-M. Graefe, H. Jurgen Korsch, A. Rush, and J. Roman Schubert, J. Phys. A: Math. Theor. **48**, 055301 (2015).
[38] J. C. Garrison and E. M. Wright, Phys. Lett. A **128**, 177 (1988).
[39] G. Dattoli, R. Mignani, and A. Torre, J. Phys. A: Math. Gen. **23**, 5795 (1990).
[40] C. Miniature, C. Sire, J. Baudon, and J. Bellissard, Europhys. Lett. **13**, 199 (1990).
[41] A. Mondragon and E. Hernandez, J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 2567 (1996).
[42] A. Mostafazadeh, Phys. Lett. A **264**, 11 (1999).
[43] X.-C. Gao, J.-B. Xu, and T.-Z. Qian, Phys. Rev. A **46**, 3626 (1992).
[44] H. Choutri, M. Maamache, and S. Menouar, J. Korean Phys. Soc. **40**, 358 (2002), http://www.jkps.or.kr/journal/view.html?uid=4860&vmd=Full.
[45] X. Peng, H. Zhou, B.-B. Wei, J. Cui, J. Du, and R.-B. Liu, Phys. Rev. Lett. **114**, 010601 (2015).

International Journal of Theoretical Physics
https://doi.org/10.1007/s10773-020-04417-0

ORIGINAL RESEARCH

Pseudo-Invariant Approach for a Particle in a Complex Time-Dependent Linear Potential

Walid Koussa[1] · **Mustapha Maamache**[1]

Received: 5 October 2019 / Accepted: 12 February 2020 / Published online: 03 March 2020

Abstract

The Lewis and Riesenfeld method is used by Ramos et al. (Eur. Phys. J. Plus **133**, 449 2018) to study quantum systems governed by time-dependent $\mathcal{PT}$ symmetric Hamiltonians and particularly where the quantum system is a particle submitted to the action of a complex time-dependent linear potential. They have misleadingly claim that the $\mathcal{PT}$ invariant eigenstates are normalized with the Dirac delta function and obtained non physical observable expectation values of the position and the momentum operators x and p, as a consequence there is no uncertainty product for this system. We discuss and correct their results using the pseudo-invariant approach. To this end, we introduce a linear pseudo hermitian invariant operator which allows us to solve analytically the time-dependent Schrödinger equation for this problem and to construct a Gaussian wave packet solution. The normalization condition for the invariant eigenfunctions with the Dirac delta function is obtained. Then, using this Gaussian wave packet, we calculate the expectation values of the position and the momentum as well as the uncertainty product. We find that these expectation values of x and p are complex numbers but describe the classical motion. Also, we show that the uncertainty relation is physically acceptable.

Keywords Non-Hermitian quantum mechanics · $\mathcal{PT}$ time-dependent Hamiltonians · $\mathcal{PT}$ invariant operator · Pseudo-Hermitian invariant operator

1 Introduction

One of the “principles” of quantum theory is the association of a Hermitian operator with any physical quantity, a property that guarantees the reality of eigenvalues. In reality, the condition of hermiticity is a sufficient condition, which is by no means necessary, since there

✉ Mustapha Maamache
maamache@univ-setif.dz

Walid Koussa
koussawalid@yahoo.com

[1] Laboratoire de Physique Quantique et Systèmes Dynamiques, Faculté des Sciences, Université Ferhat Abbas Sétif 1, Sétif 19000, Algeria

are non hermitic operators whose spectrum is real. The central idea is to replace the condition of hermiticity by a weaker condition obviously also ensures the reality of eigenvalues. This led Bender and Boettcher [2] to propose replacing the condition of hermiticity by the parity-time ($\mathcal{PT}$) symmetry, the invariance under simultaneous parity and time reversal transformation, that plays an important role in non-Hermitian quantum mechanics, optics physics, condensed matter and quantum field theory. Starting in quantum mechanics, the concept of $\mathcal{PT}$ symmetry found applications in many areas of physics [3–5]. In particular, there is a lot of interest in optics due to experimental realizations of paraxial $\mathcal{PT}$ symmetric optics [6, 7]. Recent applications include single-mode $\mathcal{PT}$ lasers [8, 9] and unidirectional reflectionless $\mathcal{PT}$ -symmetric metamaterials at optical frequencies [10]. $\mathcal{PT}$ symmetric systems demonstrate many nontrivial non-conservative wave interactions and phase transitions, which can be employed for signal ltering and switching, opening new prospects for active control of light [11].

Parity $\mathcal{P}$ has the effect to change the sign of the momentum operator p and the position operator x. The anti-linear operator $\mathcal{T}$ has the effect to change the sign of the momentum operator p and the pure imaginary complex number i. When an eigenstate of the Hamiltonian is simultaneously an eigenstate of $\mathcal{PT}$, the eigenvalues are real we call the symmetry unbroken; otherwise the symmetry is broken and the eigenvalues come in complex conjugate pairs and violates the unitarity of the theory. Replacing the standard Hermitian inner product with the obvious choice

$$\langle \phi \,|\psi\rangle_{\mathcal{PT}} = \int_{\mathrm{C}} dx \left[\mathcal{PT}\phi(x)\right] \psi(x) \tag{1}$$

where $\mathcal{PT}\phi(x) = \phi^*(-x)$ and the integral is taken over the contour in the complex-x plane.The advantage of this inner product is that the associated norm $\langle \phi \,|\phi\rangle$ is conserved in time. On unbroken eigenstates $|\phi_n\rangle$ of a $\mathcal{PT}$ -symmetric Hamiltonian, the inner product (1) is (under appropriate assumptions) pseudo-orthonormal:

$$\langle \phi_m \,|\phi_n\rangle_{\mathcal{PT}} = (-)^m \delta_{mn} \tag{2}$$

Since the $\mathcal{PT}$-norm is not positive-definite, to render the energy eigenstates orthonormal is to redefine the inner product (1) by introducing a new symmetry, denoted $\mathcal{C}$ [12, 13] , having properties very similar to the charge conjugation operator, inherent in all $\mathcal{PT}$-symmetric Hamiltonians that possess an unbroken $\mathcal{PT}$ symmetry. This has allowed to introduce an inner-product structure associated with $\mathcal{CPT}$ conjugation for which the norms of quantum states are positive definite and unitary-invariant. In particular, $\mathcal{CPT}$ symmetry is shown to generalize the conventional Hermiticity requirement by replacing it with a dynamically determined inner product (one that is defined by the Hamiltonian itself). Several authors have studied time independent quantum systems governed by non-Hermitian Hamiltonians [14–21].

Even before the discovery of $\mathcal{PT}$ -symmetry and the introduction of the $\mathcal{CPT}$ -inner product, there have been very general considerations [22] addressing the question of how a consistent quantum mechanical framework can be constructed from the non-Hermitian Hamiltonian systems. It was understood at that time that quasi-Hermitian systems [22] would lead to positive inner products. It has been clarified [23–26] that a non-Hermitian Hamiltonian having all eigenvalues real is connected to its Hermitian conjugate,

$$H^\dagger = \eta H \eta^{-1} \tag{3}$$

through a linear, Hermitian, invertible and bounded metric operator $\eta = \rho^{+}\rho$ with a bounded inverse, i.e. H is Hermitian with respect to a positive definite inner product $\langle .,. \rangle_{\eta} = \langle . \left| \eta \right| . \rangle$ defined as

$$\langle \phi_m^H \left| \phi_n^H \right\rangle_{\eta} = \langle \phi_m^H \right| \eta \left| \phi_n^H \right\rangle = \delta_{mn} \tag{4}$$

and called η -pseudo-Hermitian inner product. It is also established [23–26] that the non Hermitian Hamiltonian (or a pseudo-Hermitian Hamiltonian) H can be transformed to an equivalent Hermitian one given by

$$h = \rho H \rho^{-1} \tag{5}$$

where h is the equivalent Hermitian analog of H with respect to the standard inner product $\langle .,. \rangle$. ρ is often called the Dyson map [27]. Thus, although the eigenvalue spectra of h and H are identical, relations between their eigenvectors will differ

$$\left| \psi_n^h \right\rangle = \rho \left| \phi_n^H \right\rangle \tag{6}$$

Note that the CPT inner product is close to the η inner product with $\eta = PC$.

All these efforts have been devoted to study time-independent non-Hermitian systems. Whereas the treatement for time-dependent Hamiltonian systems with time-independent [28–30] or time-dependent metric [31–44] operators have been extensively studied to investigate time evolution [45], adiabatic [46–52] and non-adiabatic [53] geometric phases, time-dependent Dyson relation [54–57], pseudo-invariant theory [58–60] .....and so on. Nevertheless, the existence of invariants (constants of the motion or first integral) introduced by Lewis- Riesenfeld [61] is a factor of central importance in the study of time-dependent systems.

While research on $\mathcal{PT}$-symmetry has focused on time-independent Hamiltonians, very few works using a $\mathcal{PT}$-symmetric time-dependent Hamiltonians, where the time-reversal operator $\mathcal{T}$ has also the effect to change the sign of the time $t \to -t$ and whose action on the wave function defined as [62–64]

$$\mathcal{T}\psi(x,t) = \psi^{*}(x,-t) \tag{7}$$

is barely found in the literature [65–71].

In a recent paper, Ramos et al. [1] extend the well-known Lewis and Riesenfeld invariant method [61] to $\mathcal{PT}$-symmetric time-dependent non-Hermitian Hamiltonians and apply it to the quantum motion of a particle in the presence of a complex time-dependent linear potential with $\mathcal{PT}$- symmetry. They have misleadingly claim that the invariant eigenstates normalization condition associated with the Dirac delta function is verified.

The main objective in this paper is to give, in Section 2, a brief recall of results discussed by Ramos et al. [1] on the motion of a particle under the action of a complex time dependent $\mathcal{PT}$ -symmetric linear potential. After that, we discuss the misleadingly results concerning the $\mathcal{PT}$- inner product of the simultaneously eigenstates of the $\mathcal{PT}$ operator and the $\mathcal{PT}$ -symmetric invariant operator $I^{\mathcal{PT}}(t)$. In Section 3, we use the pseudo-Hermitian invariant operator introduced rather in Refs. [58–60] to find the solutions for a particle submitted to the action of a complex time-dependent linear potential. Finally, we construct the Gaussian wave packet state for this problem. Despite that the expectation values of the x and p operators are complex, they are identical to the classical variables x_c , p_c. In addition, we obtain that the uncertainty product is physically acceptable.

2 $\mathcal{PT}$-Symmetric Invariant Operator $I^{\mathcal{PT}}(t)$ for Complex Time-Dependent Linear Potential

B.F. Ramos et al. [1] have investigated the motion quantum of a particle with time-dependent mass subject to the action of a complex time-dependent linear potential described as

$$H(t) = \frac{p^2}{2m(t)} + if(t)x \tag{8}$$

where $f(t)$ is a real time-dependent function. The classical variables describing the equations of motion are given by

$$\dot{p}_c = -\frac{\partial H}{\partial x_c} = -if(t) \tag{9}$$

and

$$\dot{x}_c = \frac{\partial H}{\partial p_c} = \frac{p_c}{m(t)} \tag{10}$$

By solving the above two equations, the space and momentum operators can be obtained in terms of the initial conditions, given by

$$p_c = p_0 - i\int_0^t f(t')dt' \tag{11}$$

and

$$x_c = x_0 + p_0\int_0^t \frac{dt'}{m(t')} - i\left(\int_0^t \frac{dt'}{m(t')}\int_0^{t'} f(\tau)d\tau\right) \tag{12}$$

By extending the well-known Lewis and Riesenfeld invariant method, they looked for a $\mathcal{PT}$ symmetric non-Hermitian time-dependent linear operator given by

$$I(t) = a(t)x + b(t)p + c(t) \tag{13}$$

where $a(t)$, $b(t)$ and $c(t)$ are complex time-dependant c-number functions.

Inserting the invariant $I(t)$ in the Van-Neumann equation

$$i\frac{\partial I(t)}{\partial t} = [H(t), I(t)] \tag{14}$$

and after some algebra, gives

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 \\ b(t) &= -a_0\int_0^t \frac{d\tau}{m(\tau)} \\ c(t) &= -ia_0\int_0^t d\tau f(\tau)\int_0^\tau \frac{d\tau'}{m(\tau')} \end{aligned} \tag{15}$$

on the other hand, the$\mathcal{PT}$ symmetric invariant operator condition

$$I^{\mathcal{PT}}(t) = (\mathcal{PT})\, I(t)\, (\mathcal{PT}) = I(t) \tag{16}$$

provides

$$\begin{aligned} a_0 &= -a_0^* \\ b^*(t) &= -b(t) \\ c^*(t) &= c(t) \end{aligned} \tag{17}$$

Using the transformation

$$\varphi_\lambda(x,t) \rightarrow \phi_\lambda(x,t) = e^{-i\frac{\theta_\lambda}{2}}\varphi_\lambda(x,t) \tag{18}$$

and solving the eigenequation

$$I^{\mathcal{PT}}(t)\phi_\lambda(x,t) = \lambda\phi_\lambda(x,t) \tag{19}$$

so that the eigenfunctions ((39) of Ref. [1]) are given by

$$\begin{aligned}\phi_\lambda(x,t) &= \sqrt{\frac{\sigma_\lambda}{2\pi\hbar b(t)}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar b(t)}\left[(\lambda - c(t))\,x - \frac{a_0}{2}x^2\right]\right\},\\ \sigma_\lambda &= \pm 1.\end{aligned} \tag{20}$$

Without loss of generalities, we drop the phase factor $e^{-i\frac{\theta_\lambda}{2}}$. Thus, the eigenstates $\phi_\lambda(x,t)$ of $I^{\mathcal{PT}}(t)$ are eigenstates of the $\mathcal{PT}$ operator with eigenvalue 1, when the action of $\mathcal{PT}$ operator on the wave function is as follows

$$\begin{aligned}\mathcal{PT}\phi_\lambda(x,t) &= \phi_\lambda^*(-x,-t)\\ &= \sqrt{\frac{\sigma_\lambda}{2\pi b^*(-t)}}\exp\left\{\frac{-i}{b^*(-t)}\left[\left(\lambda - c^*(-t)\right)(-x) - \frac{a_0^*}{2}x^2\right]\right\}\\ &= \sqrt{\frac{\sigma_\lambda}{2\pi b(t)}}\exp\left\{\frac{i}{b(t)}\left[(\lambda - c(t))\,x - \frac{a_0}{2}x^2\right]\right\} = \phi_\lambda(x,t).\end{aligned} \tag{21}$$

On the other hand, the authors of Ref. [1] claim, incorrectly, that the normalization condition (41) in [1]) associated with the Dirac delta function is verified. To see that their assertion is not correct, it is enough to calculate explicitly the $\mathcal{PT}$ inner product defined as

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\phi_{\lambda'}(x,t)\right]^{\mathcal{PT}}\phi_\lambda(x,t)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\lambda'}^*(-x,-t)\,\phi_\lambda(x,t)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\lambda'}(x,t)\,\phi_\lambda(x,t)dx\\ &= \frac{\sqrt{\sigma_{\lambda'}\sigma_\lambda}}{2\pi b(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\frac{i}{b(t)}\left[\left((\lambda+\lambda') - 2c(t)\right)x - a_0x^2\right]\right\}\\ &\quad dx \neq \delta(\lambda - \lambda').\end{aligned} \tag{22}$$

According to the invariant operator theory, the time-dependent Schrödinger equation takes the form

$$\psi_\lambda(x,t) = e^{i\mu_\lambda(t)}\phi_\lambda(x,t), \tag{23}$$

where the phase functions are given by

$$\mu_\lambda(t) = -\frac{1}{2\hbar}\int_0^t \frac{(\lambda - c(\tau))^2}{m(\tau)b^2(\tau)}d\tau. \tag{24}$$

So, they construct a Gaussian wave packet solution

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\psi_\lambda(x,t)d\lambda \tag{25}$$

where the Gaussian weight function $g(\lambda)$ is given by

$$g(\lambda) = \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{d^2}{4}\lambda^2\right]. \tag{26}$$

Thus, the general solution (25) is given by equation (47) of Ref.[1]. Using this wave packet solution, they calculate the expectation values of the position $\langle x\rangle_{\mathcal{PT}}$ and the momentum $\langle p\rangle_{\mathcal{PT}}$ as well as the uncertainty product $\Delta x.\Delta p$, where the expectation value $\langle O\rangle_{\mathcal{PT}}$ of an operator O is defined as

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi(x,t)^{\mathcal{PT}}\, O\, \Psi(x,t)$$

They state that the $\mathcal{PT}$ operator acts on the wave function as follows[1]

$$\mathcal{PT}\Psi(x,t) = \Psi(x,t)^{\mathcal{PT}} = \Psi^*(-x,t), \tag{29}$$

which is in contrast with the definition (21) employed to show that the eigenstates of the linear invariant are also eigenstates of the $\mathcal{PT}$ operator.

However, knowing that the wave function is a scalar and taking into account that $\mathcal{T}$ is antilinear and antiunitary operator, we obtain the time reversal rule for the wave function $\mathcal{T}\Psi(x,t) = \Psi^*(x,-t)$. That is the general rule for time reversal in quantum mechanics: if a certain state is described by the wave function $\Psi(x,t)$, then the "time-reversed" state is described by the function $\Psi^*(x,-t)$. The change to the complex conjugate function is necessary because the "correct" time dependence must be restored, after being lost through the change in the sign of t [62].

Finally, they find that the expectation values $\langle x\rangle_{\mathcal{PT}}$, $\langle p\rangle_{\mathcal{PT}}$ are imaginary numbers so that the position, momentum operators are not observables. As a consequence, the uncertainty relation $\Delta x.\Delta p$, which is a complex number, is physically unacceptable.

In the next section, using the pseudo-Hermitian invariant operator approach [59, 60] we get an accepted physical quantities for a "Particle in a complex time-dependent linear potential". We show that the expectation values of x and p are complex numbers that describe the classical motion while the uncertainty relation is physically acceptable. On the other hand, the normalization condition for the invariant eigenfunctions with the Dirac delta function is verified.

[1]The authors of Ref. [1] wrote (29), this means that eigenstates $\phi_\lambda(x,t)$ of the invariant operator $I(t)$ are transformed under the $\mathcal{PT}$ action as $\mathcal{PT}\phi_\lambda(x,t) = \phi_\lambda^*(-x,t)$. This implies that the eigenstates $\phi_\lambda(x,t)$ of $I(t)$ are **NOT** eigenstates of the $\mathcal{PT}$ operator as claimed by the authors of Ref. [1]. One can see that in the following

$$\begin{aligned} PT\phi_\lambda(x,t) &= \sqrt{\frac{\sigma_\lambda}{2\pi b^*(t)}} \exp\left\{\frac{-i}{b^*(t)}\left[\left(\lambda-\gamma^*(t)\right)(-x) - \frac{a_0^*}{2}x^2\right]\right\} \\ &= \sqrt{\frac{\sigma_\lambda}{-2\pi b(t)}} \exp\left\{\frac{-i}{b(t)}\left[\left(\lambda-c(t)\right)x - \frac{a_0}{2}x^2\right]\right\} \\ &\neq \phi_\lambda(x,t). \end{aligned} \tag{27}$$

Morever these eigenstates of $I(t)$ will not also satisfy the normalization condition with the Dirac delta function

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\lambda'}^{PT}(x,t)\phi_\lambda(x,t)dx = \frac{\sqrt{\sigma_{\lambda'}\sigma_\lambda}}{2\pi}\left[\exp\frac{(\lambda-\lambda')}{|b(t)|}x\right]_{-\infty}^{+\infty} \tag{28}$$

where $b(t) = i\,|b(t)|$ is purely imaginary.

3 The Complex Time-Dependent Linear Potential: Pseudo-Invariant Method

The beginning of this section briefly recalls the results of the pseudo-invariant operator technique [59, 60]. In complete analogy to the time independent scenario a self-adjoint invariant operator $I^h(t)$, i.e., an observable, in the Hermitian system which has an observable counterpart $I^{PH}(t)$ in the non-Hermitain system are related to each other as $I^h(t) = \rho(t)I^{PH}(t)\rho^{-1}(t) \Leftrightarrow I^{PH\dagger}(t) = \eta(t)I^{PH}(t)\eta^{-1}(t)$ was introduced and adressed in details in Ref. [59, 60] that we will briefly recall. Given a non-Hermitian time-dependent Hamiltonian operator $H(t)$, it is possible to build a pseudo-invariant operator $I^{PH}(t)$ verifying

$$\frac{dI^{PH}(t)}{dt} = \frac{\partial I^{PH}(t)}{\partial t} - i\left[I^{PH}(t), H(t)\right] = 0, \tag{30}$$

and obeys the eigenvalue equation:

$$I^{PH}(t)\left|\phi_\lambda^H(t)\right\rangle = \lambda\left|\phi_\lambda^H(t)\right\rangle, \tag{31}$$

where the eigenvalues λ are time-independent and the eigenstates $\left|\phi_\lambda^H(t)\right\rangle$ of $I^{PH}(t)$ are orthonormal

$$\left\langle\phi_\lambda^H(t)\right|\eta(t)\left|\phi_{\lambda'}^H(t)\right\rangle = \delta_{\lambda,\lambda'}. \tag{32}$$

The solutions of the Schrödinger equation

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\Phi^H(t)\right\rangle = H(t)\left|\Phi^H(t)\right\rangle \tag{33}$$

can be written in terms of the eigenfunctions $\left|\phi_\lambda^H(t)\right\rangle$ as

$$\left|\Phi_\lambda^H(t)\right\rangle = e^{i\varphi_\lambda(t)}\left|\phi_\lambda^H(t)\right\rangle, \tag{34}$$

where the phase functions $\varphi_\lambda(t)$ are found from the equation:

$$\frac{d\varphi_\lambda(t)}{dt} = \left\langle\phi_\lambda^H(t)\right|\eta(t)\left[i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{H(t)}{\hbar}\right]\left|\phi_\lambda^H(t)\right\rangle. \tag{35}$$

For a particle with time-dependent mass subject to the action of a complex time-dependent linear potential described by the Hamilonian (8) , we choose a linear pseudo-Hermitian invariant operator $I^{PH}(t)$ in the form

$$I^{PH}(t) = a(t)\left(x - \frac{i}{2}\alpha(t)\right) + b(t)\left(p - \frac{i}{2}\beta(t)\right) + c(t) \tag{36}$$

where $\alpha(t)$ and $\beta(t)$ are real parameters while $a(t), b(t)$ and $c(t)$ are time-dependent c-number functions to be determined.

The condition (30) implies that

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= 0 \\ \dot{b}(t) &= -\frac{a}{m(t)} \\ \dot{c}(t) - \frac{i}{2}\left(\dot{\alpha}a + \dot{\beta}b + \beta\dot{b}\right) &= ibf(t) \end{aligned} \tag{37}$$

after solving these equations, we get

$$\begin{aligned}
a(t) &= a_0 \\
b(t) &= b_0 - a_0 \int_0^t \frac{1}{m(t')} dt' \\
c(t) &= c_0 \\
f(t) &= -\frac{1}{2b} \left(\dot{\alpha} a_0 + \dot{\beta} b - \beta \frac{a_0}{m(t)} \right)
\end{aligned} \tag{38}$$

Since the operator $I^{PH}(t)$ is pseudo-Hermitian, then it fulfills the condition

$$I^{+PH}(t) = \eta(t) I^{PH}(t) \eta^{-1}(t) \tag{39}$$

where the operator metric $\eta(t)$ is chosen as

$$\eta = \rho^{+} \rho = \exp\left[\beta(t) x - \alpha(t) p\right]. \tag{40}$$

The condition (39) provides

$$\begin{aligned}
a(t) &= a^*(t) \\
b(t) &= b^*(t) \\
c(t) &= c^*(t)
\end{aligned} \tag{41}$$

To find a solution of the Schrödinger equation of $H(t)$

$$H(t) \Psi^H(x, t) = i \partial_t \Psi^H(x, t), \tag{42}$$

where $\Psi^H(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) \psi_\lambda(x, t) d\lambda$ and $\psi_\lambda(x, t) = e^{i\mu_\lambda(t)} \varphi_\lambda^{I^{PH}}(x, t)$; $\mu_\lambda(t)$ should be real, we have first to solve the eigenvalue equation of the invariant $I^{PH}(t) \varphi_\lambda^{I^{PH}}(x, t) = \lambda \varphi_\lambda^{I^{PH}}(x, t)$. After some basic calculations, we get that the orthonormalized solutions of the invariant eigenvalue equation are given by

$$\varphi_\lambda^{I^{PH}}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \exp \frac{i}{2b} \left[(2(\lambda - c) + i\beta b(t)) \left(x - \frac{i}{2}\alpha \right) - a_0 \left(x - \frac{i}{2}\alpha \right)^2 \right] \tag{43}$$

by subtituting $\varphi_\lambda^{I^{PH}}(x, t)$ (43) multiplied by a phase factor $e^{i\mu_\lambda(t)}$ in the Schrödinger equation $H(t) \psi_\lambda(x, t) = i \partial_t \psi_\lambda(x, t)$, we get

$$\begin{aligned}
\dot{\mu}_\lambda \varphi_\lambda^{I^{PH}}(x, t) = \Big[&-\tfrac{1}{2m(t) b^2} (\lambda - c)^2 + \tfrac{1}{2} \left(\alpha f - \tfrac{\dot{\alpha}}{2} \beta + \tfrac{\beta^2}{4m(t)} \right) \\
&- \tfrac{i}{2b} \left(\tfrac{\beta}{m(t)} - \dot{\alpha} \right) (\lambda - c) \Big] \varphi_\lambda^{I^{PH}}(x, t),
\end{aligned} \tag{44}$$

since this phase should be real, it implies that $m\dot{\alpha} = \beta$, this is equivalent to $f(t) = -\dot{\beta}(t)/2$. The phase (44) is simplified into

$$\dot{\mu}_\lambda = \left[-\frac{1}{2m(t) b^2} (\lambda - c)^2 - \frac{1}{4} \left(\dot{\beta} \alpha + \frac{\beta^2}{2m(t)} \right) \right]. \tag{45}$$

So that the general solution can written as

$$\Psi^H(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{i\mu_\lambda} \varphi_\lambda^{I^{PH}}(x, t) d\lambda \tag{46}$$

we choose the weight function $g(\lambda)$ in the form

$$g(\lambda)=\sqrt{\frac{\sqrt{d}}{\pi\sqrt{2\pi}b_0}}\exp\left[-d(\lambda-I_0)^2\right]\exp\left[-i\frac{d_0}{b_0}(\lambda-\frac{I_0}{2})\right] \tag{47}$$

where d, d_0, I_0 are positive real constants.

After a straighforward calculation, we obtain the general expression solution in form of the Gaussian wave-packet

$$\begin{aligned}\Psi^H(x,t) \;=\; &\sqrt{\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{2\pi}b(t)\left(i\int\frac{1}{2m(t')b(t')^2}+d\right)}}\exp\left\{-i\int_0^t\frac{(c_0-I_0)^2}{2m(t')b(t')^2}dt'\right\}\\ &\exp\left\{-i\frac{I_0}{2}\frac{d_0}{b_0}\right\}\exp\left\{-\frac{i}{4}\int_0^t\left(\dot{\beta}(t')\alpha(t')+\frac{\beta(t')^2}{2m(t')}\right)dt'\right\}\\ &\exp\left\{\frac{i}{2b(t)}\left[(-2\,(c_0-I_0)+i\beta b(t))(x-\frac{i}{2}\alpha)-a_0(x-\frac{i}{2}\alpha)^2\right]\right\}\\ &\exp\left\{-\frac{\left[(x-\frac{i}{2}\alpha)-b(t)\left(\frac{d_0}{b_0}-\int_0^t\frac{(c_0-I_0)}{m(t')b(t')^2}dt'\right)\right]^2}{4b(t)^2\left(i\int_0^t\frac{1}{2m(t')b(t')^2}dt'+d\right)}\right\}\end{aligned} \tag{48}$$

Now, we calculate the expectation values of x, p, x^2 and p^2 in the Gaussian state $\Psi^H(x,t)$

$$\langle x\rangle_\eta \;=\left\langle\Psi^H(t)\right|\eta x\left|\Psi^H(t)\right\rangle=d_0-\frac{c_0}{b_0}\int_0^t\frac{dt'}{m(t')}+\frac{i}{2}\alpha \tag{49}$$

$$\langle p\rangle_\eta \;=\left\langle\Psi^H(t)\right|\eta p\left|\Psi^H(t)\right\rangle=-\frac{c_0}{b_0}+\frac{i}{2}\beta \tag{50}$$

$$\left\langle x^2\right\rangle_\eta=\frac{b^2}{d}\left[d^2+\left(\int_0^t\frac{dt'}{2m(t')b^2}\right)^2\right]+\left[d_0-\frac{c_0}{b_0}\int_0^t\frac{dt'}{m(t')}+\frac{i}{2}\alpha\right]^2 \tag{51}$$

$$\left\langle p^2\right\rangle_\eta=\frac{1}{\Delta x^2}\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4b_0db}\int_0^t\frac{dt'}{m(t')}-\frac{a_0}{b}\,(\Delta x)^2\right)^2\right]+\left[-\frac{c_0}{b_0}+\frac{i}{2}\beta\right]^2 \tag{52}$$

it is obvious that $\langle x\rangle_\eta$ and $\langle p\rangle_\eta$ are identical to the classical variables x_c , p_c

$$\langle x\rangle_\eta=x_c\;\langle p\rangle_\eta=p_c \tag{53}$$

We also evaluate the uncertainty in the position and the momentum

$$\Delta x=\sqrt{\left\langle x^2\right\rangle_\eta-\left(\langle x\rangle_\eta\right)^2}=\frac{b(t)}{\sqrt{d}}\sqrt{d^2+\left(\int_0^t\frac{dt'}{2m(t')b(t')^2}\right)^2} \tag{54}$$

$$\Delta p=\sqrt{\left\langle p^2\right\rangle_\eta-\left(\langle p\rangle_\eta\right)^2}=\frac{1}{\Delta x}\sqrt{\frac{1}{4}+\left[\frac{1}{4b_0db(t)}\int_0^t\frac{dt'}{m(t')}-\frac{a_0}{b(t)}\,(\Delta x)^2\right]^2} \tag{55}$$

as well as the uncertainty product

$$\Delta p\Delta x=\sqrt{\frac{1}{4}+\left[\frac{1}{4b_0db(t)}\int_0^t\frac{dt'}{m(t')}-\frac{a_0}{b(t)}\,(\Delta x)^2\right]^2}\geqslant\frac{1}{2}, \tag{56}$$

which is real and greater than (or equal to) 1/2 and therefore physically acceptable (Fig. 1b).

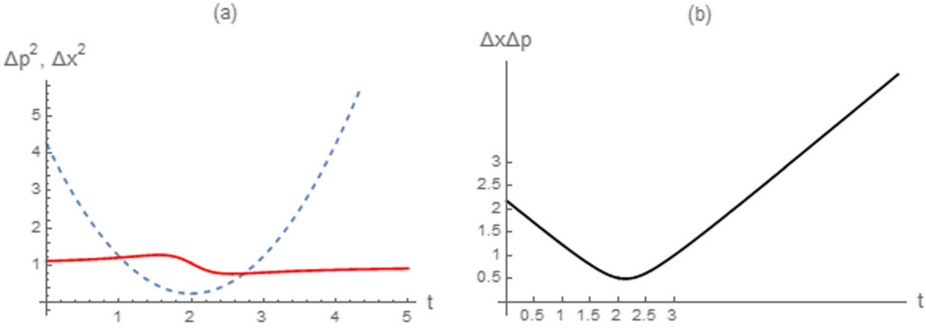


Fig. 1 Variances of the physical position $(\Delta x)^2$ (Dashed-blue) and momentum $(\Delta p)^2$ (solid-red), with the following parameters:($q_0 = p_0 = a_0 = m = d = 1$, $b_0 = 2$ and $\hbar = 1$), and $\Delta x^2 = \frac{17}{16}t^2 + \frac{1}{4}(t-1)$. The uncertainty product with the same parameters as in Fig. 1a

The density $\left|\rho\Psi^H(x,t)\right|^2$ can be written in function of $\langle x\rangle_\eta$ and Δx as

$$\left|\rho\Psi^H(x,t)\right|^2 = \left|\sqrt{\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{2\pi}b(t)\left(i\int_0^t \frac{dt'}{2m(t')b(t')^2} + d\right)}}\right|^2 \exp - \frac{\left[x - (x_c - \frac{i}{2}\alpha)\right]^2}{2\Delta x^2} \tag{57}$$

and represents a Gaussian with center in $\left(\langle x\rangle_\eta - \frac{i}{2}\alpha\right) = \left(x_0 + p_0 \int \frac{1}{m}\right)$ and time-dependent width Δx and therefore

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\rho\Psi^H(x,t)\right|^2 dx = 1 \tag{58}$$

In summary, using the time-dependent pseudo-Hermitian linear invariant method, we have found the solutions for a particle submitted to the action of a complex time-dependent linear potential. Furthermore, we have constructed a Gaussian wave packet state for our problem and shown that the time-dependent probability density associated with this packet is Gaussian and remains Gaussian for all time (Fig. 2). In addition, the expected values of the operators x and p , even though that are complex numbers, represent the classical solutions. We have found that the uncertainty product is physically acceptable. Also, the normalization condition for the invariant eigenfunctions with the Dirac delta function is correctly obtained.

As a particular case, when the parameters $f(t)$ and $m(t)$ of $H(t)$ are constant, i.e. $f(t) = f_0$ and $m(t) = m_0$, we get the metric parameters of the form

$$\alpha(t) = -\frac{f_0}{m_0}t^2$$
$$\beta(t) = -2f_0 t$$

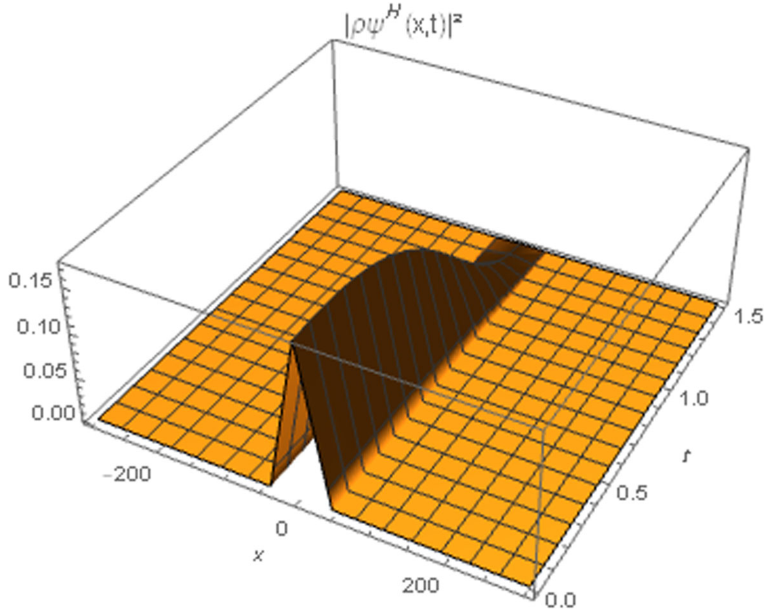


Fig. 2 Probability density $\left|\rho\Psi^H(x,t)\right|^2$ as function of time t and position x with $q_0 = p_0 = a_0 = m = d = 1$, $b_0 = 2$ and $\hbar = 1$, and $\Delta x^2 = \frac{17}{16}t^2 + \frac{1}{4}(t-1)$

and the pseudo-expectation values of the position and the momentum operators in the bounded Gaussian state

$$\begin{aligned}\Psi^H(x,t) = &\sqrt{\frac{\sqrt{d}}{2\pi\left(b_0 - \frac{a_0}{m_0}t\right)\left(i\frac{1}{2a_0}\left(\frac{1}{b_0-\frac{a_0}{m_0}t} - \frac{1}{b_0}\right) + d\right)}}\exp\left\{-i\frac{(c-I_0)^2}{2a_0}\left(\frac{1}{b_0 - \frac{a_0}{m_0}t} - \frac{1}{b_0}\right)\right\}\\
&\exp\left\{-i\frac{I_0}{2}\frac{d_0}{b_0}\right\}\exp\left\{-i\frac{f_0^2}{3m_0}t^3\right\}\\
&\exp\left\{\frac{i}{2\left(b_0 - \frac{a_0}{m_0}t\right)}\left[-2\left((c-I_0)+i(f_0t)\left(b_0 - \frac{a_0}{m_0}t\right)\right)\left(x+\frac{if_0}{2m_0}t^2\right) - a_0^2\left(x+\frac{if_0}{2m_0}t^2\right)\right]\right\}\\
&\exp\left\{-\frac{\left[\left(x+\frac{if_0}{2m_0}t^2\right) - \left(b_0 - \frac{a_0}{m_0}t\right)\left(\frac{d_0}{b_0} - (c-I_0)\left(\frac{1}{b_0-\frac{a_0}{m_0}t} - \frac{1}{b_0}\right)\right)\right]^2}{4(b_0 - \frac{a_0}{m_0}t)^2\left(i\frac{1}{2a_0}\left(\frac{1}{b_0-\frac{a_0}{m_0}t} - \frac{1}{b_0}\right) + d\right)}\right\}\end{aligned} \tag{59}$$

are written as

$$\langle x\rangle_\eta = \left\langle\Psi^H(t)\middle|\,\eta x\,\middle|\Psi^H(t)\right\rangle = d_0 - \frac{c_0}{b_0 m_0}t - \frac{if_0}{2}t^2 \tag{60}$$

$$\langle p\rangle_\eta = \left\langle\Psi^H(t)\middle|\,\eta p\,\middle|\Psi^H(t)\right\rangle = -\frac{c_0}{b_0} - if_0 t \tag{61}$$

We also deduce the uncertainty in the position and the momentum

$$\Delta x=\sqrt{\left\langle x^2\right\rangle_\eta-\left(\langle x\rangle_\eta\right)^2}=\frac{\left(b_0-\frac{a_0}{m_0}t\right)}{\sqrt{d}}\sqrt{d^2+\left(\frac{1}{2a_0}\left(\frac{1}{b_0-\frac{a_0}{m_0}t}-\frac{1}{b_0}\right)\right)^2} \tag{62}$$

$$\Delta p=\sqrt{\left\langle p^2\right\rangle_\eta-\left(\langle p\rangle_\eta\right)^2}=\frac{1}{\Delta x}\sqrt{\frac{1}{4}+\left[\frac{1}{4a_0b_0d\left(b_0-\frac{a_0}{m_0}t\right)}\left(\frac{1}{b_0-\frac{a_0}{m_0}t}-\frac{1}{b_0}\right)-\frac{a_0}{\left(b_0-\frac{a_0}{m_0}t\right)}(\Delta x)^2\right]^2} \tag{63}$$

as well as their product

$$\Delta p\Delta x=\sqrt{\frac{1}{4}+\left[\frac{1}{4a_0b_0d\left(b_0-\frac{a_0}{m_0}t\right)}\left(\frac{1}{b_0-\frac{a_0}{m_0}t}-\frac{1}{b_0}\right)-\frac{a_0}{\left(b_0-\frac{a_0}{m_0}t\right)}(\Delta x)^2\right]^2}\geqslant\frac{1}{2}, \tag{64}$$

References

1. Ramos, B.F., Pedrosa, I.A., de Lima, A.L.: Lewis and Riesenfeld approach to time-dependent non-Hermitian Hamiltonians having $\mathcal{PT}$ symmetry. Eur. Phys. J. Plus **133**, 449 (2018)
2. Bender, C.M., Boettcher, S.: Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having $\mathcal{PT}$ symmetry. Phys. Rev. Lett. **80**, 5243–5246 (1998)
3. Bender, C.M., Berntson, B., Parker, D., Samuel, E.: Observation of $\mathcal{PT}$ phase transition in a simple mechanical system. Am. J. Phys. **81**, 173–179 (2013)
4. Rubinstein, J., Sternberg, P., Ma, Q.: Bifurcation diagram and pattern formation of phase slip centers in superconducting wires driven with electric currents. Phys. Rev. Lett. **99**, 167003 (2007)
5. Schindler, J., Lin, Z., Lee, J.M., Ramezani, H., Ellis, F.M., Kottos, T.: $\mathcal{PT}$ - symmetric electronics. J. Phys. A. **45**, 444029 (2012)
6. Makris, K.G., El-Ganainy, R., Christodoulides, D.N., Musslimani, Z.H.: Beam dynamics in $\mathcal{PT}$ symmetric optical lattices. Phys. Rev. Lett. **100**, 103904 (2008)
7. Musslimani, Z.H., Makris, K.G., El-Ganainy, R., Christodoulides, D.N.: Optical solitons in $\mathcal{PT}$ periodic potentials. Phys. Rev. Lett. **100**, 030402 (2008)
8. Feng, L., Wong, Z.J., Ma, R., Wang, Y., Zhang, X.: Single-mode laser by parity time symmetry breaking. Science **346**, 972 (2014)
9. Hodaei, H., Miri, M.-A., Heinrich, M., Christodoulides, D.N., Khajavikhan, M.: Parity-time-symmetric microring lasers. Science **346**, 975 (2014)
10. Feng, L., Xu, Y.-L., Fegadolli, W.G., Lu, M.-H., Oliveira, J.E.B., Almeida, V.R., Chen, Y.-F., Scherer, A.: Experimental demonstration of a unidirectional reflectionless parity-time metamaterial at optical frequencies. Nat. Matter **12**, 108 (2013)
11. Suchkov, S.V., Sukhorukov, A.A., Huang, J., Dmitriev, S.V., Lee, C., Kivshar, Y.S.: Nonlinear switching and solitons in $\mathcal{PT}$-symmetric photonic systems. Laser Photonics Rev. **10**, 177 (2016)
12. Bender, C.M., Brody, D.C., Jones, H.F.: Complex extension of quantum mechanics. Phys. Rev. Lett. **89**, 270401 (2002)
13. Bender, C.M.: Making sense of non-Hermitian Hamiltonians. Rep. Prog. Phys. **70**, 947 (2007)
14. Bagchi, B., Quesne, C., Znojil, M.: Generalized continuity equation and modified normalization in $\mathcal{PT}$-symmetric quantum mechanics. Mod. Phys. Lett. A **16**, 2047 (2001)
15. Ahmed, Z.: Real and complex discrete eigenvalues in an exactly solvable one-dimensional complex $\mathcal{PT}$-invariant potential. Phys. Lett. A **282**, 343 (2001)
16. Znojil, M.: Solvable simulation of a double-well problem in PT -symmetric quantum mechanics. J. Phys. A **36**, 7639 (2003)
17. Weigert, S.: Completeness and orthonormality in $\mathcal{PT}$-symmetric quantum systems. Phys. Rev. A **68**, 062111 (2003)

18. Ahmed, Z.: $\mathcal{P}$-, $\mathcal{T}$-, $\mathcal{PT}$-, and $\mathcal{CPT}$-invariance of Hermitian Hamiltonians. Phys. Lett. A **310**, 139 (2003)
19. Weigert, S.: Detecting broken $\mathcal{PT}$-symmetry. J. Phys. A. **39**, 10239 (2006)
20. Ahmed, Z.: Eigenvalue problems for the complex $\mathcal{PT}$-symmetric potential $V(x) = igx$. Phys. Lett. A **364**, 12 (2007)
21. da Providência, J., Bebiano, N., da Providência, J.P.: Non-Hermitian Hamiltonians with real spectrum in quantum mechanics. Braz. J. Phys. **41**, 78 (2011)
22. Scholtz, F.G., Geyer, H.B., Hahne, F.J.W.: Quasi-Hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle. Ann. Phys. **213**, 74–101 (1992)
23. Mostafazadeh, A.: Pseudo-Hermiticity versus $\mathcal{PT}$ symmetry: the necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian. J. Math. Phys. **43**, 205 (2002)
24. Mostafazadeh, A.: Pseudo-Hermiticity versus $\mathcal{PT}$-symmetry. II. A complete characterization of non-Hermitian Hamiltonians with a real spectrum. J. Math. Phys. **43**, 2814 (2002)
25. Mostafazadeh, A.: Pseudo-Hermiticity versus $\mathcal{PT}$-symmetry III: equivalence of pseudo-Hermiticity and the presence of antilinear symmetries. J. Math. Phys. **43**, 3944 (2002)
26. Mostafazadeh, A.: Pseudo-Hermitian representation of quantum mechanics. J. Geom. Methods Mod. Phys. **07**, 1191 (2010)
27. Dyson, F.J.: Thermodynamic behavior of an ideal ferromagnet. Phys. Rev. **102**, 1230 (1956)
28. Figueira de Morisson Faria, C., Fring, A.: Time evolution of non-Hermitian Hamiltonian systems. J. Phys. A: Math. Theor. **39**, 9269 (2006)
29. Figueira de Morisson Faria, C., Fring, A.: Non-Hermitian Hamiltonians with real eigenvalues coupled to electric fields: from the time-independent to the time-dependent quantum mechanical formulation. Laser Phys. **17**, 424 (2007)
30. Mostafazadeh, A.: Time-dependent pseudo-Hermitian Hamiltonians defining a unitary quantum system and uniqueness of the metric operator. Phys. Lett. B **650**, 208 (2007)
31. Znojil, M.: Time-dependent version of crypto-Hermitian quantum theory. Phys. Rev. D **78**, 085003 (2008)
32. Znojil, M.: Three-Hilbert-space formulation of quantum mechanics. SIGMA **5**, 001 (2009)
33. Znojil, M.: Crypto-unitary forms of quantum evolution operators. Int. J. Theor. Phys. **52**, 2038 (2013)
34. Znojil, M.: Non-Hermitian Heisenberg representation. Phys. Lett. A **379**, 2013 (2015)
35. Fring, A., Moussa, M.H.Y.: Unitary quantum evolution for time-dependent quasi-Hermitian systems with nonobservable Hamiltonians. Phys. Rev. A **93**, 042114 (2016)
36. Fring, A., Moussa, M.H.Y.: Non-Hermitian Swanson model with a time-dependent metric. Phys. Rev. A **94**, 042128 (2016)
37. Miao, Y.-G., Xu, Z.-M.: Investigation of non-Hermitian Hamiltonians in the Heisenberg picture. Phys. Lett. A **380**, 1805 (2016)
38. Luiz, F.S., Pontes, M.A., Moussa, M.H.Y.: Unitarity of the time-evolution and observability of non-Hermitian Hamiltonians for time-dependent Dyson maps. arXiv:1611.08286 (2016)
39. Fring, A., Frith, T.: Exact analytical solutions for timedependent Hermitian Hamiltonian systems from static unobservable non-Hermitian Hamiltonians. Phys. Rev. A **95**, 010102(R) (2017)
40. Luiz, F.S., de Pontes, M.A., Moussa, M.H.Y.: Gauge linked time-dependent non-Hermitian Hamiltonians. arXiv:1703.01451 (2017)
41. Maamache, M.: Non-unitary transformation of quantum time-dependent non-Hermitian systems. Acta Polytech. **57**, 424 (2017)
42. Znojil, M.: Non-Hermitian interaction representation and its use in relativistic quantum mechanics. Annals Phys. **385**, 162 (2017)
43. Fring, A., Frith, T.: Time-dependent metric for the two-dimensional, non-Hermitian coupled oscillator. arXiv:1812.02862 (2018)
44. Fring, A., Frith, T.: Solvable two-dimensional time dependent non-Hermitian quantum systems with infinite dimensional Hilbert space in the broken PT -regime. J. Phys. A **51**, 265301 (2018)
45. Bagchi, B.: Evolution operator for time-dependent non-Hermitian Hamiltonians. Lett. High. Energy. Phys. **3**, 04 (2018)
46. Bíla, H.: Adiabatic time-dependent metrics in PT-symmetric quantum theories. arXiv:0902.0474 (2009)
47. Gong, J., Wang, Q.H.: Geometric phase in PT -symmetric quantum mechanics. Phys. Rev. A **82**, 012103 (2010)
48. Gong, J., Wang, Q.H.: Timedependent PT -symmetric quantum mechanics. J. Phys. A **46**, 485302 (2013)
49. Gong, J., Wang, Q.-H.: Piecewise adiabatic following in non-Hermitian cycling. Phys. Rev. A. **97**, 052126 (2018)
50. Gong, J., Wang, Q.-H.: Piecewise adiabatic following: general analysis and exactly solvable models. Phys. Rev. A. **99**, 012107 (2019)

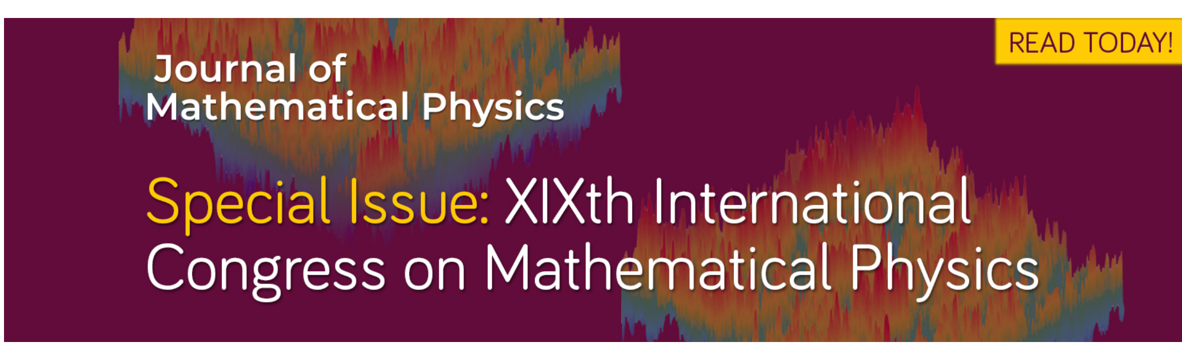
51. Zhang, D.-J., Wang, Q.-H., Gong, J.: Quantum geometric tensor in $\mathcal{PT}$-symmetric quantum mechanics. Phys. Rev. A **99**, 042104 (2019)
52. Zhang, D.-J., Wang, Q.-H., Gong, J.: Time-dependent $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$-symmetric quantum mechanics in generic non-Hermitian systems. arXiv:1906.03431 (2019)
53. Maamache, M.: Periodic pseudo-Hermitian Hamiltonian: nonadiabatic geometric phase. Phys. Rev. A **92**, 032106 (2015)
54. Fring, A., Frith, T.: Mending the broken PT -regime via an explicit time-dependent Dyson map. Phys. Lett. A **381**, 2318 (2017)
55. Fring, A., Frith, T.: Metric versus observable operator representation, higher spin models. Eur. Phys. J. **133**, 57 (2018)
56. Fring, A., Frith, T.: Quasi-exactly solvable quantum systems with explicitly time-dependent Hamiltonians. Phys. Lett. A **383**, 158 (2019)
57. de Ponte, M.A., Luiz, F.S., Duarte, O.S., Moussa, M.H.Y.: All-creation and all-annihilation time-dependent $\mathcal{PT}$-symmetric bosonic Hamiltonians: an infinite squeezing degree at a finite time. Phys. Rev. A. **100**, 012128 (2019)
58. Khantoul, B., Bounames, A., Maamache, M.: On the invariant method for the time-dependent non-Hermitian Hamiltonians. Eur. Phys. J. Plus **132**, 258 (2017)
59. Maamache, M., Djeghiour, O.-K., Mana, N., Koussa, W.: Pseudo-invariants theory and real phases for systems with non-Hermitian time-dependent Hamiltonians. Eur. Phys. J. Plus **132**, 383 (2017)
60. Koussa, W., Mana, N., Djeghiour, O.-K., Maamache, M.: The pseudo Hermitian invariant operator and time-dependent non-Hermitian Hamiltonian exhibiting a SU(1,1) and SU(2) dynamical symmetry. J. Math. Phys. **59**, 072103 (2018)
61. Lewis, H.R., Riesenfeld, W.B.: An exact quantum theory of the time dependent harmonic oscillator and of a charged particle time dependent electromagnetic field. J. Math. Phys. **10**, 1458 (1969)
62. Wigner, E.: Group Theory and its Application to Quantum Mechanics of Atomic Spectra. Academic Press, New York (1959)
63. Berestetskii, V.B., Lifshitz, E.M., Pitaevskii, L.P.: Quantum Electrodynamics. Pergamon Press, Oxford (1982)
64. Chern, B., Tubis, A.: Invariance principles in classical and quantum mechanics. Am. J. Phys. **35**, 254 (1967)
65. de Sousa Dutra, A., Hott, M.B., dos Santos, V.G.C.S.: Time-dependent non-Hermitian Hamiltonians with real energies. Europhys. Lett. **71**, 166 (2005)
66. Yuce, C.: Time-dependent PT-symmetric problems. Phys. Lett. A **336**, 290 (2005)
67. Yuce, C.: Complex spectrum of a spontaneously unbroken PT symmetric hamiltonian. arXiv:0703235v1 (2007)
68. Moiseyev, N.: Crossing rule for a PT -symmetric two-level time-periodic system. Phys. Rev. A **83**, 052125 (2011)
69. Luo, X., Huang, J., Zhong, H., Qin, X., Xie, Q., Kivshar, Y.S., Lee, C.: Pseudo-parity-time symmetry in optical systems. Phys. Rev. Lett. **110**, 243902 (2013)
70. Luo, X., Wu, D., Luo, S., Guo, Y., Yu, X., Hu, Q.: Pseudo-parity–time symmetry in periodically high-frequency driven systems: perturbative analysis. J. Phys. A **47**, 345301 (2014)
71. Maamache, M., Lamri, S., Cherbal, O.: Pseudo PT-symmetry in time periodic non-Hermitian Hamiltonians systems. Annals Phys. **378**, 150 (2017)

Journal of Mathematical Physics

Pseudo-fermionic coherent states with time-dependent metric

Cite as: J. Math. Phys. **61**, 042101 (2020); https://doi.org/10.1063/1.5145269
Submitted: 16 January 2020 . Accepted: 16 March 2020 . Published Online: 15 April 2020

W. Koussa, M. Attia, and M. Maamache



Journal of Mathematical Physics ARTICLE scitation.org/journal/jmp

Pseudo-fermionic coherent states with time-dependent metric

Cite as: J. Math. Phys. 61, 042101 (2020); doi: 10.1063/1.5145269
Submitted: 16 January 2020 • Accepted: 16 March 2020 •
Published Online: 15 April 2020

View Online Export Citation CrossMark

W. Koussa,[a] M. Attia, and M. Maamache

AFFILIATIONS

Laboratoire de Physique Quantique et Systèmes Dynamiques, Faculté des Sciences, Université Ferhat Abbas Sétif 1, Sétif 19000, Algeria

[a] Author to whom correspondence should be addressed: koussawalid@yahoo.com

ABSTRACT

In this paper, we construct time-dependent pseudo-fermionic coherent states for non-Hermitian Hamiltonian systems. Our construction of pseudo-fermionic coherent states is based on an introduction of time-dependent pseudo-fermionic creation and annihilation operators subjected to time-dependent metrics such that the latter are integrals of motion. As an illustration, we study a time-dependent non-Hermitian two-level system.

I. INTRODUCTION

Coherent states play an important role in modern quantum theory due to their fundamental theoretical importance and wide range of applications, for example, in semiclassical descriptions of quantum systems, in quantization theory, in condensed matter physics, in radiation theory, in quantum computations, and so on (see Refs. 1–9). Coherent states are also a concept used to connect quantum solutions to classical ones.[1–3] The first example of coherent states was given by Schrödinger for the harmonic oscillator[1] whose mathematics are motivated by a simple relation, namely,

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{1}$$

This equation tells us that coherent states $|\alpha\rangle$ are eigenstates of the destruction operator a with eigenvalues $\alpha \in \mathbb{C}$. The operator called the displacement operator

$$D(\alpha) = \exp\left[\alpha^* a^+ - \alpha a\right] \tag{2}$$

can be used to generate the coherent state from the vacuum state $|0\rangle$ as

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle. \tag{3}$$

Fermion-like coherent states are obtained in the analogous form of the Glauber coherent states for a boson field, and the two sets of states have an interesting correspondence. We recall briefly the formalism for fermions which follows closely that of bosons while accounting the anti-commuting nature of fermionic operators, i.e., the Pauli principle.

Anticommuting numbers used in the description of fermions were introduced in 1955.[10] After Berezin's extension in 1966,[11] the use of Grassmann variables became more systematic. These variables which are traditionally used to formulate path integrals for fermions[12] became a suitable tool in the description of fermionic systems.[13] This is because of their special properties, and they are the classical analog of Fermi quantum operators that satisfy the anticommutation relations

$$\left\{B, B^+\right\} = \mathbf{1}, \quad \left\{B, B\right\} = \left\{B^+, B^+\right\} = 0. \tag{4}$$

In addition, they are nilpotents, $B^2 = B^{+2} = 0$; this last relation is the algebraic formulation of Pauli's exclusion principal for fermions. The Hilbert space $\mathcal{H}$ of a fermionic system is a two dimensional space described by two states $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle\}$. The creation and annihilation operators B^+ and B satisfy the canonical anticommutation relations (4) and allow transitions between the states

$$B|\psi_0\rangle = 0, \quad B^+|\psi_1\rangle = 0, \quad B|\psi_1\rangle = |\psi_0\rangle, \quad B^+|\psi_0\rangle = |\psi_1\rangle. \tag{5}$$

Before defining fermionic coherent states, let us give some properties of Grassmann variables. Let (ξ_i^*, ξ_i) with $i = 1, \ldots, N$ be a set of $2N$ Grassmann variables (which are also known as the generators of Grassmann algebra). The Grassmann variables, by definition, satisfy the following properties

$$\{\xi_i, \xi_j\} = \{\xi_i^*, \xi_j^*\} = \{\xi_i, \xi_j^*\} = \xi_i^2 = \xi_i^* = 0 \tag{6}$$

and anti-commute with any fermion operator

$$(B^\dagger \xi_i)^\dagger = \xi_i^* B = -B\xi_i^*. \tag{7}$$

The Grassmann integration and differentiation over the complex Grassmann variables are given by

$$\int d\xi\, 1 = 0, \quad \int d\xi \xi = 1, \quad \int d\xi^*\, 1 = 0, \quad \int d\xi^* \xi^* = 1, \quad \int d^2\xi = \int d\xi^* d\xi, \tag{8}$$

$$\frac{d}{d\xi} 1 = 0, \quad \frac{d}{d\xi}\xi = 1, \quad \frac{d}{d\xi^*} 1 = 0, \quad \frac{d}{d\xi^*}\xi^* = 1, \quad d\xi d\xi^* = -d\xi^* d\xi. \tag{9}$$

Thus, for Grassmann variables, differentiation and integration are exactly equivalent,

$$\int d\xi\, f(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi). \tag{10}$$

Usual coherent states are generally endowed with a self-adjoint Hamiltonian (i.e., $H = H^\dagger$) and are studied in the Hilbert space ($\mathcal{H}$). The condition of Hermiticity of the Hamiltonian guarantees the reality of the energy spectrum and the unitarity of the evolution. However, other conditions preserve the reality of the energy in the absence of the Hermiticity condition such as the quasi-Hermiticity,[14] $\mathcal{PT}$ symmetry,[15] or pseudo-Hermiticity.[16] It has been established[16] that a non-Hermitian Hamiltonian can be connected to its Hermitian conjugate, $H^\dagger = \eta H \eta^{-1}$, through a linear and Hermitian metric operator $\eta = \rho^\dagger \rho$, i.e., H is η-pseudo-Hermitian with respect to a positive-definite inner product defined by $\langle .,. \rangle_\eta = \langle .|\eta|. \rangle$. The Hamiltonian H can also be transformed to an equivalent Hermitian one by $h = \rho H \rho^{-1}$ with respect to the standard inner product $\langle .,. \rangle$. Recently, a considerable attention is being paid to an alternative formalism for the description of non-Hermitian systems, based on the concept of the so-called pseudo-bosons[17–21] and pseudo-fermions.[22–25,43]

In a time-dependent scenario where the system is described by a time-dependent Hermitian Hamiltonian $h(t)$, coherent states were constructed in Refs. 26–30 using the main idea of Lewis and Riesenfeld,[31] who showed that solutions to the nonstationary problem can be found as eigenstates multiplied by a phase factor of some time-dependent integrals of motion (quantum invariants), i.e., operators $I(t)$ satisfying the equation $i\partial I(t)/\partial t - \frac{1}{\hbar}[I(t), h(t)] = 0$. They found quadratic invariants (with respect to the coordinates and momentum operators) for the quantum oscillator with a time-dependent frequency and the charged particle in a time-dependent homogeneous magnetic field. The next important step was made by Malkin, Man'ko, and Trifonov,[26–29] who showed that the calculations can be greatly simplified, if one looks for linear integrals of motion. This idea was further developed in Refs. 32–45.

Using the method of linear non-Hermitian integrals of motion, different kinds of coherent states have been constructed where the creation and annihilation operators have been introduced as integrals of motion.[28,32,34,41–43] Below, we, in the same manner, construct some kinds of generalized (fermionic) coherent states for non-Hermitian systems and present a simple example.

The concept of coherent states for non-Hermitian systems has attracted a great deal of interest over the last 15 years.[46–52] The pseudo-fermionic and bosonic coherent states have been studied in Refs. 17, 18, 20, 21, and 23. Using the Lewis and Riesenfeld invariants method, Cherbal and Maamache[25] have constructed the coherent states for time-dependent pseudo-fermionic systems. To our knowledge, coherent states associated with time-dependent non-Hermitian Hamiltonians admitting time-dependent invariants as annihilation operators with time-dependent metric operators $\eta(t)$ were not addressed in the literature until now. This is due to the difficulty in dealing with dynamics of time-dependent non-Hermitian Hamiltonians with time-dependent metric operators $\eta(t)$, which remains an open problem so far.[53–68] Nevertheless, by adapting the Lewis–Riesenfeld[31] approach to time-dependent non-Hermitian systems, the solutions of the time-dependent Schrödinger equation in terms of eigenstates of pseudo-Hermitian invariant operators $I^{PH}(t)$ have been established.[63,64]

In this paper, we construct time-dependent coherent states for time-dependent non-Hermitian systems, by defining time-dependent pseudo-fermionic operators. In the literature, the pseudo-fermions resulting from the pseudo-Hermitian extension of the usual fermion anticommutation relations have been introduced[20,22,23,69] in the pseudo-Hermitian quantum mechanics.

The paper is organized as follows: In Sec. II, we show, when the metric $\eta(t)$ is time-dependent, how to construct ladder invariant operators and coherent states for time-dependent pseudo-fermionic systems. We discuss the properties of the constructed coherent states in detail, including completeness relations. We study in Sec. III an example for systems with finite dimensional Hilbert spaces, namely, a time-dependent two-level system.

II. TIME-DEPENDENT PSEUDO-FERMIONS AND PSEUDO-FERMIONIC COHERENT STATES

Pseudo-fermions are a pseudo-Hermitian extension of usual fermions. They are obtained from the modification of fermion anticommutation relations (4) as follows:[20]

$$\left\{B(t)\,,\overline{B}(t)\right\} = \left\{\overline{B}^{+}(t)\,,B^{+}(t)\right\} = \mathbf{1}, \tag{11}$$

and their square is zero,

$$B^{2}(t) = 0,\ \overline{B}^{2}(t) = 0,\ \overline{B}^{+2}(t) = 0\,,\ B^{+2}(t) = 0. \tag{12}$$

Note that $\overline{B}^{+}(t)$ and $B^{+}(t)$, which are the annihilation and creation operators associated with $H^{+}(t)$, are also the pseudo-adjoint operators of annihilation and creation operators associated with $H(t)$, $B(t)$ and $\overline{B}(t)$, respectively, i.e.,

$$\begin{aligned}\overline{B}^{+}(t) &= \eta(t)B(t)\eta^{-1}(t),\\ B^{+}(t) &= \eta(t)\overline{B}(t)\eta^{-1}(t).\end{aligned} \tag{13}$$

Let $|\psi_0(t)\rangle$ and $|\phi_0(t)\rangle$ be two states in $\mathcal{H}$ such that

$$B(t)|\psi_0(t)\rangle = 0, \quad \overline{B}^{+}(t)|\phi_0(t)\rangle = 0, \tag{14}$$

whereas $|\psi_1(t)\rangle$ and $|\phi_1(t)\rangle$ are two excited states,

$$\overline{B}(t)|\psi_0(t)\rangle = |\psi_1(t)\rangle, \quad B^{+}(t)|\phi_0(t)\rangle = |\phi_1(t)\rangle, \tag{15}$$

with $|\psi_0(t)\rangle$ and $|\psi_1(t)\rangle$ being associated with the Hamiltonian $H(t)$ whereas $|\phi_0(t)\rangle$ and $|\phi_1(t)\rangle$ being associated with $H^{+}(t)$.

We consider the two pseudo-fermionic annihilation and creation operators $B(t)$ and $\overline{B}(t)$ as time-dependent invariant operators associated with the time-dependent Hamiltonian $H(t)$. We define as well the two pseudo-fermionic annihilation and creation operators $\overline{B}^{+}(t)$ and $B^{+}(t)$ as invariants associated with $H^{+}(t)$.

The pseudo-fermionic invariants $B(t)$ and $\overline{B}(t)$ satisfy the invariance condition

$$\frac{\partial B(t)}{\partial t} = i\left[B(t)\,,H(t)\right], \tag{16}$$

$$\frac{\partial \overline{B}(t)}{\partial t} = i\left[\overline{B}(t), H(t)\right]. \tag{17}$$

By replacing $B(t)$ and $\overline{B}(t)$ with $\overline{B}^{+}(t)$ and $B^{+}(t)$, and also $H(t)$ with $H^{+}(t)$, one gets the conditions satisfied by the pseudo-fermionic invariants $\overline{B}^{+}(t)$ and $B^{+}(t)$.

The Schrödinger equation associated with the time-dependent non-Hermitian Hamiltonian $H(t)$ is

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = H(t)|\Psi(t)\rangle. \tag{18}$$

The eigenstates of the annihilation operator $B(t)$ that obey the Schrödinger equation (18) are time-dependent pseudo-fermionic coherent states defined as

$$B(t)|\psi_\xi(t)\rangle = \xi|\psi_\xi(t)\rangle \tag{19}$$

and can be found from the action of the displacement operator $D^{H}(\xi,t)$ on the vacuum state $|\psi_0(t)\rangle$,

$$|\psi_\xi(t)\rangle = D^{H}(\xi,t)|\psi_0(t)\rangle, \tag{20}$$

where

$$|\psi_\xi(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi}(|\psi_0(t)\rangle - \xi|\psi_1(t)\rangle) \tag{21}$$

such that the operator $D^H(\xi,t)$ is

$$D^H(\xi,t) = \exp[\overline{B}(t)\xi - \xi^* B(t)] \tag{22}$$

and can also be written

$$D^H(\xi,t) = 1 + \overline{B}(t)\xi - \xi^* B(t) + \left(\overline{B}(t)B(t) - \frac{1}{2}\right)\xi^*\xi. \tag{23}$$

The pseudo-adjoint of $D^H(\xi,t)$ is obtained from the relation $D^{H^+}(\xi,t) = \eta(t)D^H(\xi,t)\eta^{-1}(t)$ and given as

$$D^{H^+}(\xi,t) = \exp\left[B^+(t)\xi - \xi^*\overline{B}^\dagger(t)\right] \tag{24}$$

or as

$$D^{H^+}(\xi,t) = 1 + B^+(t)\xi - \xi^*\overline{B}^\dagger(t) + \left(\overline{B}^\dagger(t)B^+(t) - \frac{1}{2}\right)\xi^*\xi. \tag{25}$$

The two operators $B(t)$ and $\overline{B}(t)$ satisfy the following relations:

$$D^{H^+}(\xi,t)B(t)D(\xi,t) = B(t) + \xi\mathbf{1}, \tag{26}$$

$$D^{H^+}(\xi,t)\overline{B}(t)D(\xi,t) = \overline{B}(t) + \xi^*\mathbf{1}. \tag{27}$$

Applying the same steps, we define the pseudo-fermionic coherent states $|\phi_\xi(t)\rangle$ as eigenstates of $\overline{B}^+(t)$ such that

$$\overline{B}^+(t)|\phi_\xi(t)\rangle = \xi|\phi_\xi(t)\rangle. \tag{28}$$

These states can also be obtained from the action of the displacement operator $D^{H^+}(\xi,t)$ on the vacuum state $|\phi_0(t)\rangle$,

$$|\phi_\xi(t)\rangle = D^{H^+}(\xi,t)|\phi_0(t)\rangle, \tag{29}$$

where

$$|\phi_\xi(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi}(|\phi_0(t)\rangle - \xi|\phi_1(t)\rangle), \tag{30}$$

or by means of the time-dependent metric operator $\eta(t)$,

$$|\phi_\xi(t)\rangle = \eta(t)|\psi_\xi(t)\rangle. \tag{31}$$

The pseudo-fermionic coherent states $|\psi_\xi(t)\rangle$ verify the resolution identity

$$\int \eta|\psi_\xi(t)\rangle\langle\psi_\xi(t)|d\xi^* d\xi = \mathbf{I}. \tag{32}$$

Indeed, from the definition Grassmann integral, relation (32) is written as

$$\int d\xi^* d\xi\eta|\psi_\xi(t)\rangle\langle\psi_\xi(t)| = \int (1-\xi^*\xi)\left[(1+\zeta^*\zeta)\eta|\psi_0(t)\rangle\langle\psi_0(t)| + \zeta\zeta^*\mathbf{I}\right]d\zeta^* d\zeta, \tag{33}$$

$$\int d\xi^* d\xi\eta|\psi_\xi(t)\rangle\langle\psi_\xi(t)| = \int \eta(t)|\psi_0(t)\rangle\langle\psi_0(t)|d\zeta^* d\zeta + \int \zeta\zeta^* d\zeta^* d\zeta = \mathbf{I}. \tag{34}$$

In fact, the solutions to the Schrödinger equation (18) can be written in terms of the eigenfunctions $|\psi_\xi(t)\rangle$ of the operator $B(t)$ multiplied by a phase factor[31] as

$$|\Psi_\xi(t)\rangle \equiv e^{i\alpha_\xi(t)}|\psi_\xi(t)\rangle, \tag{35}$$

where the phase $\alpha_\xi(t)$ is given as[63,64]

$$\dot{\alpha}_\xi(t) = \langle\psi_\xi(t)|\eta\left[i\frac{\partial}{\partial t} - H(t)\right]|\psi_\xi(t)\rangle, \tag{36}$$

which is equal to zero for fermionic systems. This last statement is demonstrated in Ref. 70 for a time-independent metric. The same approach is valid when the metric is time-dependent.

III. APPLICATION: TIME-DEPENDENT NON-HERMITIAN TWO-LEVEL SYSTEM

Consider a two-level system described by the non-Hermitian Hamiltonian,

$$H(t) = \begin{pmatrix} i\gamma(t) & \nu(t) \\ \nu(t) & -i\gamma(t) \end{pmatrix}, \tag{37}$$

where the parameters $\gamma(t)$ and $\nu(t)$ are real. The two pseudo-fermionic invariants $B(t)$ and $\overline{B}(t)$ associated with $H(t)$ are chosen in the form

$$B(t) = \begin{pmatrix} iR_3(t) & R_1(t) \\ R_2(t) & -iR_3(t) \end{pmatrix}, \tag{38}$$

$$\overline{B}(t) = \begin{pmatrix} \overline{R}_3(t) & \overline{R}_2(t) \\ \overline{R}_1(t) & -\overline{R}_3(t) \end{pmatrix}, \tag{39}$$

where the parameters $R_1(t)$, $R_2(t)$, and $R_3(t)$ are real, whereas $\overline{R}_1(t)$, $\overline{R}_2(t)$, and $\overline{R}_3(t)$ are complex.

The invariance condition (16) leads to

$$\begin{cases} \dot{R}_1(t) = 2(\gamma R_1 - \nu R_3), \\ \dot{R}_2(t) = 2(\nu R_3 - \gamma R_2), \\ \dot{R}_3(t) = \nu(R_1 - R_2). \end{cases} \tag{40}$$

From Eq. (40), one sees that

$$\dot{R}_1 R_2 + R_1 \dot{R}_2 - 2\dot{R}_3 R_3 = 0. \tag{41}$$

This equation is compatible with Eq. (12), which also gives

$$R_1 R_2 - R_3^2 = 0 \tag{42}$$

and

$$\overline{R}_1 \overline{R}_2 + \overline{R}_3^2 = 0. \tag{43}$$

From Eq. (11), one deduces that

$$R_1 \overline{R}_1 + R_2 \overline{R}_2 + 2iR_3 \overline{R}_3 = \mathbf{1}. \tag{44}$$

The creation operator $\overline{B}(t)$ can be determined from the pseudo-Hermiticity relation (13).

The choice of the time-dependent metric operator $\eta(t)$ as

$$\eta(t) = \frac{1}{\sqrt{\vartheta_0(t)}} \begin{pmatrix} -\chi(t) & \vartheta_+(t) \\ \vartheta_-(t) & 1 \end{pmatrix}, \tag{45}$$

where the time-dependent functions $\vartheta_\pm(t)$, $\vartheta_0(t)$ and $\chi(t)$ are given by

$$\begin{aligned} \vartheta_\pm(t) &= -\zeta(t) e^{\mp i\varphi(t)}, \\ \vartheta_0(t) &= -(\zeta^2(t) + \chi(t)), \\ \chi(t) &= -\big(\zeta^2(t) + \vartheta_0(t)\big), \end{aligned} \tag{46}$$

shows that $\overline{B}(t)$ has the form

$$\overline{B}(t) = \frac{1}{\vartheta_0} \begin{pmatrix} -iR_3\big(\zeta^2 - \chi\big) + R_2\vartheta_- + \chi\vartheta_+ R_1 & -2iR_3\vartheta_+ + R_2 - \vartheta_+^2 R_1 \\ -2iR_3\vartheta_-\chi - \vartheta_-^2 R_2 + \chi^2 R_1 & iR_3\big(\zeta^2 - \chi\big) - R_2\vartheta_- - \chi\vartheta_+ R_1 \end{pmatrix}, \tag{47}$$

with

$$\begin{cases} \overline{R}_1 = -\dfrac{1}{\vartheta_0}\big[2i\vartheta_-\chi R_3 + \vartheta_-^2 R_2 - \chi^2 R_1\big], \\ \overline{R}_2 = -\dfrac{1}{\vartheta_0}\big[2i\vartheta_+ R_3 - R_2 + \vartheta_+^2 R_1\big], \\ \overline{R}_3 = \dfrac{1}{\vartheta_0}\big[\big(\chi - \zeta^2\big) iR_3 + \vartheta_- R_2 + \chi\vartheta_+ R_1\big]. \end{cases} \tag{48}$$

Knowing that the operator $\overline{B}(t)$ is also an integral of motion, i.e., obeying relation (17), substituting representation (47) into (17), and then separating the real part from the imaginary part, one obtains the following coupled equations for the parameters $\chi(t)$, $\zeta(t)$, and $\varphi(t)$.

From the real parts, we have

$$\begin{aligned}&\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\left(2\zeta\chi\sin\varphi R_3+\zeta^2\cos 2\varphi R_2-\chi^2R_1\right)-2\chi\left(\dot{\zeta}\sin\varphi+\zeta\dot{\varphi}\cos\varphi\right)R_3\\&-2\zeta\left(\dot{\zeta}\cos 2\varphi-\zeta\dot{\varphi}\sin 2\varphi\right)R_2+2(\chi R_1-\zeta\sin\varphi R_3)\dot{\chi}\\&=4\gamma\chi(\zeta\sin\varphi R_3-\chi R_1)-2\zeta\nu\sin\varphi(\chi+1)R_2+2\nu\left[\chi^2+\zeta^2\cos 2\varphi+(\chi-\zeta)\right]R_3,\end{aligned}\tag{49}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\left[2\zeta\sin\varphi R_3+R_2+\zeta^2\cos 2\varphi R_1\right]-2\left(\dot{\zeta}\sin\varphi+\zeta\dot{\varphi}\cos\varphi\right)R_3\\&-2\zeta\left[\dot{\zeta}\cos 2\varphi-\zeta\dot{\varphi}\sin 2\varphi\right]R_1\\&=2\nu\zeta\sin\varphi(1+\chi)R_1+2\nu\left[(1-\chi)+\zeta^2(1-\cos 2\varphi)\right]R_3-4\gamma(R_2+\zeta\sin\varphi R_3),\end{aligned}\tag{50}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\zeta\cos\varphi(R_2-\chi R_1)+\left(\zeta\dot{\varphi}\sin\varphi-\dot{\zeta}\cos\varphi\right)(R_2+\chi R_1)+\zeta\dot{\chi}\cos\varphi R_1\\&=2\zeta\cos\varphi[2\nu R_3-\gamma(\chi R_1+R_2)]+\zeta^2\nu\sin 2\varphi(R_1+R_2)).\end{aligned}\tag{51}$$

From the imaginary part, we get

$$\begin{aligned}&\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\left(\zeta^2\sin 2\varphi R_2-2\chi\zeta\cos\varphi R_3\right)+2\left(\dot{\chi}\zeta\cos\varphi+\chi\dot{\zeta}\cos\varphi-\chi\zeta\dot{\varphi}\sin\varphi\right)R_3\\&-2\zeta\left[\zeta\dot{\varphi}\cos 2\varphi+\dot{\zeta}\sin 2\varphi\right]R_2\\&=2\nu(1+\chi)\zeta\cos\varphi R_2+2\nu\zeta^2\sin\varphi R_3-4\zeta\cos\varphi(\gamma R_3+\nu R_1),\end{aligned}\tag{52}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\left(2\zeta\cos\varphi R_3+\zeta^2\sin 2\varphi R_1\right)-2\left(\zeta\dot{\varphi}\sin\varphi-\dot{\zeta}\cos\varphi\right)R_3+2\zeta\left(\dot{\zeta}\sin 2\varphi+\zeta\dot{\varphi}\cos 2\varphi\right)R_1\\&=2\zeta\cos\varphi[\nu(\chi-1)R_1+2\gamma R_3]+2\nu\zeta^2\sin 2\varphi R_3,\end{aligned}\tag{53}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{\dot{\vartheta}_0}{\vartheta_0}\left[\left(\chi-\zeta^2\right)R_3-\zeta\sin\varphi R_2-\zeta\chi\sin\varphi R_1\right]+\left(\dot{\chi}-2\dot{\zeta}\zeta\right)R_3\\&-\left(\zeta\dot{\varphi}\cos\varphi+\dot{\zeta}\sin\varphi\right)(\chi R_1+R_2)-\zeta\dot{\chi}\sin\varphi R_1\\&=4\nu\zeta\sin\varphi(1-\chi)R_3+\nu\left[\zeta^2\cos 2\varphi-\left(\chi-\zeta^2\right)\right](R_1-R_2)\\&+\nu\left(R_2+\chi^2R_1\right)+2\gamma\zeta\sin\varphi(\chi R_1-R_2).\end{aligned}\tag{54}$$

The vacuum state $|\psi_0(t)\rangle$ and the excited state $|\psi_1(t)\rangle$ satisfying the two conditions (14) and (15) are

$$|\psi_0(t)\rangle=\begin{pmatrix}i\sqrt{R_1}\\\sqrt{R_2}\end{pmatrix},\tag{55}$$

$$|\psi_1(t)\rangle=\frac{1}{\sqrt{\vartheta_0}}\begin{pmatrix}\sqrt{R_2}-i\vartheta_+\sqrt{R_1}\\-\vartheta_-\sqrt{R_2}-i\chi\sqrt{R_1}\end{pmatrix}.\tag{56}$$

The coherent state $|\psi_\xi(t)\rangle$, which is a linear combination of $|\psi_0(t)\rangle$ and $|\psi_1(t)\rangle$, is written as

$$|\psi_\xi(t)\rangle=e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi}\left[\begin{pmatrix}i\sqrt{R_1}\\\sqrt{R_2}\end{pmatrix}-\xi\frac{1}{\sqrt{\vartheta_0}}\begin{pmatrix}\sqrt{R_2}-i\vartheta_+\sqrt{R_1}\\-\vartheta_-\sqrt{R_2}-i\chi\sqrt{R_1}\end{pmatrix}\right].\tag{57}$$

The coherent state $|\phi_\xi(t)\rangle$, eigenstate of $\overline{B}^+(t)$, is obtained from (31) as

$$|\phi_\xi(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi}\left[\frac{1}{\sqrt{\vartheta_0}}\begin{pmatrix}-i\chi\sqrt{R_1}+\vartheta_+\sqrt{R_2}\\ i\vartheta_-\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}\end{pmatrix} - \xi\begin{pmatrix}\sqrt{R_2}\\ i\sqrt{R_1}\end{pmatrix}\right]. \tag{58}$$

Stressing that

$$\begin{aligned}\langle\psi_0(t)|\eta(t)|\psi_0(t)\rangle &= \langle\psi_1(t)|\eta(t)|\psi_1(t)\rangle = \mathbf{I},\\ \langle\psi_0(t)|\eta(t)|\psi_1(t)\rangle &= \langle\psi_1(t)|\eta(t)|\psi_0(t)\rangle = \mathbf{0},\end{aligned} \tag{59}$$

one gets the pseudo-inner product

$$\langle\psi_\xi(t)|\eta(t)|\psi_\xi(t) = \mathbf{I}. \tag{60}$$

The phase $\alpha_\xi(t)$ (36) is equal to

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_\xi(t) = e^{-\xi^*\xi}\Big\{&\langle\psi_0(t)|\eta\Big[i\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\Big]|\psi_0(t)\rangle + \xi\langle\psi_0(t)|\eta\Big[i\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\Big]|\psi_1(t)\rangle\\ &+\xi^*\langle\psi_1(t)|\eta\Big[i\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\Big]|\psi_0(t)\rangle + \xi^*\xi\langle\psi_1(t)|\eta\Big[i\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\Big]|\psi_1(t)\rangle\Big\}.\end{aligned} \tag{61}$$

It is easy to demonstrate that the non-diagonal terms of the phase are identically zero, and there remain from the phase only diagonal terms which are calculated as follows:

$$\begin{aligned}\langle\psi_0(t)|\eta i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_0(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\vartheta_0}}\{&[\nu\vartheta_+ - i\chi\gamma]R_1 + [\nu\vartheta_- - i\gamma]R_2\\ &+[i\nu(1+\chi)-\gamma(\vartheta_+ + \vartheta_-)]R_3\}\end{aligned} \tag{62}$$

and

$$\begin{aligned}\langle\psi_0(t)|\eta H(t)|\psi_0(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\vartheta_0}}\{&[\nu\vartheta_+ - i\chi\gamma]R_1 + [\nu\vartheta_- - i\gamma]R_2\\ &+[i\nu(1+\chi)-\gamma(\vartheta_+ + \vartheta_-)]R_3\}.\end{aligned} \tag{63}$$

$$\langle\psi_0(t)|\eta\Big[i\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\Big]|\psi_0(t)\rangle = 0. \tag{64}$$

The second diagonal term $\langle\psi_1(t)|\eta\big[i\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\big]|\psi_1(t)\rangle$ gives also zero; indeed,

$$\begin{aligned}\langle\psi_1(t)|\eta i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\vartheta_0}}\{&R_2(i\gamma-\nu\vartheta_-) + R_3[\gamma(\vartheta_+ + \vartheta_-) - i\nu(1+\chi)]\\ &+R_1(i\gamma\chi - \nu\vartheta_+)\}\end{aligned} \tag{65}$$

and

$$\begin{aligned}\langle\phi_1(t)|H(t)|\psi_1(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\vartheta_0}}\{&R_2(i\gamma-\nu\vartheta_-) + R_3[\gamma(\vartheta_+ + \vartheta_-) - i\nu(1+\chi)]\\ &+R_1(-\nu\vartheta_+ + i\gamma\chi)\}.\end{aligned} \tag{66}$$

Therefore,

$$\langle\phi_1(t)|\Big[i\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\Big]|\psi_1(t)\rangle = 0. \tag{67}$$

The total phase is equal to zero, and consequently, the pseudo-fermionic coherent states evolve without a phase. Note that the coherent state $|\psi_\xi(t)\rangle$ (57) is an eigenstate of the annihilation operator $B(t)$ with the eigenvalue $R_1R_2 - R_3^2 = 0$; therefore, for this specific example, the coherent state $|\psi_\xi(t)\rangle$ can also be considered as a vacuum state.

IV. CONCLUSION

In this paper, we have constructed time-dependent pseudo-fermionic coherent state solutions of the Schrödinger equation for non-Hermitian Hamiltonians. Our construction of pseudo-fermionic coherent states is based on the introduction of time-dependent pseudo-fermionic creation and annihilation operators subjected to time-dependent metrics such that the latter are integrals of motion. These pseudo-fermionic coherent states form a quasi-normalized and quasi-overcomplete set of states in the Hilbert space and are eigenfunctions of the introduced pseudo-annihilation operators. Thus, the coherent state solution of the Schrödinger equation evolves without a phase. As an illustration, we have treated in detail the non-Hermitian time-dependent two-level system. Thus, we have introduced a set of linear integrals of motion that are pseudo-creation and pseudo-annihilation operators. With the help of these operators, we have constructed pseudo-fermionic coherent states, which are eigenfunctions of the introduced pseudo-annihilation operators and can also be interpreted as a vacuum state.

ACKNOWLEDGMENTS

One of the authors (M.M.) dedicates this work to the memory Tayeb Belatar, who died on 29 March 2020.

REFERENCES

[1] E. Schrödinger, "Der stetige Übergang von der Mikro-zur Makromechanik," Naturwissenschaften **14**, 664 (1926).
[2] R. J. Glauber, "The quantum theory of optical coherence," Phys. Rev. **130**, 2529 (1963); "Photon correlations," Phys. Rev. Lett. **10**, 84 (1963); "Coherent and incoherent states of the radiation field," Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
[3] J. R. Klauder, "Continuous-representation theory. I. Postulates of continuous-representation theory," J. Math. Phys. **4**, 1055 (1963); "Continuous-representation theory. II. Generalized relation between quantum and classical dynamics," **4**, 1058 (1963).
[4] A. M. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications* (Springer, New York, 1986).
[5] W.-M. Zhang, D. H. Feng, and R. Gilmore, "Coherent states: Theory and some applications," Rev. Mod. Phys. **62**, 867 (1990).
[6] V. V. Dodonov, "Nonclassical states in quantum optics: A squeezed review of the first 75 years," J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt. **4**, R1–R33 (2002).
[7] J. P. Gazeau, *Coherent States in Quantum Physics* (Wiley, Berlin, 2009).
[8] O. Cherbal, M. Drir, M. Maamache, and D. A. Trifonov, "Invariants and coherent states for a nonstationary fermionic forced oscillator," Phys. Lett. A **374**, 535 (2010).
[9] V. V. Dodonov, "Coherent states in a magnetic field and their generalizations," in Coherent States and their Applications: A Contemporary Panorama, Proceedings of the CIRM Workshop (November 2016) (Springer Proceedings in Physics, 2018), see also arXiv:1711.04034 [quant-ph].
[10] P. T. Matthews and A. Salam, "Propagators of quantized field," Il Nuovo Cimento **2**, 120–134 (1955).
[11] F. A. Berezin, *The Method of Second Quantization* (Academic Press, New York, 1966).
[12] J. L. Martin, "Generalized classical dynamics, and the 'classical analogue' of a Fermioscillator," Proc. R. Soc. London, Ser. A **251**, 536–542 (1959).
[13] F. A. Berezin and M. S. Marinov, "Particle spin dynamics as the Grassmann variant of classical mechanics," Ann. Phys. **104**, 336–362 (1977).
[14] F. G. Scholz, H. B. Geyer, and F. J. W. Hahne, "Quasi-Hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle," Ann. Phys. **212**, 193 (1992).
[15] C. M. Bender, "Making sense of non-Hermitian Hamiltonians," Rep. Prog. Phys. **70**, 947 (2007).
[16] A. Mostafazadeh, "Pseudo-Hermitian representation of quantum mechanics," Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **7**, 1191 (2010).
[17] D. A. Trifonov, "Pseudo-boson coherent and Fock states," in Differential Geometry, Complex Analysis and Mathematical Physics, edited by K. Sekigawa *et al.* (World Scientific, Singapore, 2009), pp. 241–250; arXiv:0902.3744.
[18] F. Bagarello, "Pseudobosons, Riesz bases, and coherent states," J. Math. Phys. **51**, 023531 (2010).
[19] F. Bagarello, "(Regular) pseudo-bosons versus boson," J. Math. Phys. **44**, 015205 (2011).
[20] F. Bagarello, "Linear pseudo-fermions," J. Phys. A: Math. Theor. **45**, 444002 (2012).
[21] F. Bagarello, "Intertwining operators for non-self-adjoint Hamiltonians and bicoherent states," J. Math. Phys. **57**, 103501 (2016).
[22] A. Mostafazadeh, "Statistical origin of pseudo-Hermitian supersymmetry and pseudo-Hermitian fermions," J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 10193 (2004).
[23] O. Cherbal, M. Drir, M. Maamache, and D. A. Trifonov, "Fermionic coherent states for pseudo-Hermitian two-level systems," J. Phys. A: Math. Theor. **40**, 1835 (2007).
[24] G. Najarbashi, M. A. Fasihi, and H. Fakhri, "Generalized Grassmannian coherent states for pseudo-Hermitian n-level systems," J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 325301 (2010).
[25] O. Cherbal and M. Maamache, "Time-dependent pseudofermionic systems and coherent states," J. Math. Phys. **57**, 022102 (2016).
[26] I. A. Malkin, V. I. Man'ko, and D. A. Trifonov, "Invariants and evolution of coherent states for charged particle in time-dependent magnetic field," Phys. Lett. A **30**, 414 (1969).
[27] I. A. Malkin, V. I. Man'ko, and D. A. Trifonov, "Evolution of coherent states of a charged particle in a variable magnetic field," Zh. Eksp. Teor. Fiz. **58**, 721 (1970) [Sov. Phys. JETP **31**, 386–390 (1970) (in English)].
[28] I. A. Malkin, V. I. Man'ko, and D. A. Trifonov, "Coherent states and transition probabilities in a time-dependent electromagnetic field," Phys. Rev. D **2**, 1371 (1970).
[29] I. A. Malkin and V. I. Man'ko, "Coherent states and Green's function of a charged particle in variable electric and magnetic fields," Zh. Eksp. Teor. Fiz. **59**, 1746 (1970) [Sov. Phys. JETP **32**, 949–953 (1971) (in English)].
[30] V. V. Dodonov, I. A. Malkin, and V. I. Man'ko, "Coherent states of a charged particle in a time-dependent uniform electromagnetic field of a plane current," Physica **59**, 241 (1972).
[31] H. R. Lewis and W. B. Riesenfeld, "An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field," J. Math. Phys. **10**, 1458 (1969).
[32] I. A. Malkin, V. I. Man'ko, and D. A. Trifonov, "Linear adiabatic invariants and coherent states," J. Math. Phys. **14**, 576–582 (1973).
[33] V. V. Dodonov, I. A. Malkin, and V. I. Man'ko, "Integrals of the motion, Green functions and coherent states of dynamical systems," Int. J. Theor. Phys. **14**, 37 (1975).
[34] V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, "Coherent states and the resonance of a quantum damped oscillator," Phys. Rev. A **20**, 550 (1979).
[35] I. Guedes, "Solution of the Schrödinger equation for the time-dependent linear potential," Phys. Rev. A **63**, 034102 (2001).
[36] M. Feng, "Complete solution of the Schrödinger equation for the time-dependent linear potential," Phys. Rev. A **64**, 034101 (2001).
[37] J. Bauer, "Comment on "Solution of the Schrödinger equation for the time-dependent linear potential"," Phys. Rev. A **65**, 036101 (2002).
[38] H. Bekkar, F. Benamira, and M. Maamache, "Comment on "Solution of the Schrödinger equation for the time-dependent linear potential"," Phys. Rev. A **68**, 016101 (2003).
[39] P.-G. Luan and C.-S. Tang, "Lewis-Riesenfeld approach to the solutions of the Schrödinger equation in the presence of a time-dependent linear potential," Phys. Rev. A **71**, 014101 (2005).

[40] M. Maamache, Y. Saadi, J. R. Choi, and K. H. Yeon, "Gaussian wave packet solution of the Schrödinger equation in the presence of a time-dependent linear potential," J. Korean Phys. Soc. **56**, 1063 (2010).
[41] V. G. Bagrov, D. M. Gitman, E. S. Macedo, and A. S. Pereira, "Coherent states of inverse oscillators and related problems," J. Phys. A: Math. Theor. **46**, 325305 (2013).
[42] V. G. Bagrov, D. M. Gitman, and A. S. Pereira, "Coherent and semiclassical states of a free particle," Phys.-Usp. **57**, 891–896 (2014).
[43] V. G. Bagrov, D. M. Gitman, and A. S. Pereira, "Coherent states of systems with quadratic Hamiltonians," Braz. J. Phys. **45**, 369–375 (2015).
[44] M. Maamache, Y. Bouguerra, and J. R. Choi, "Time behavior of a Gaussian wave packet accompanying the generalized coherent state for the inverted oscillator," Prog. Theor. Exp. Phys. **2016**, 063A01.
[45] M. Maamache, A. Khatir, H. Lakehal, and J. R. Choi, "Analyzing generalized coherent states for a free particle," Sci. Rep. **6**, 30538 (2016).
[46] B. Roy and P. Roy, "Coherent states of non-Hermitian quantum systems," Phys. Lett. A **359**, 110 (2006).
[47] E.-M. Graefe and R. Schubert, "Complexified coherent states and quantum evolution with non-Hermitian Hamiltonians," J. Phys. A: Math. Theor. **45**, 244033 (2012).
[48] J. Beckers, N. Debergh, J. F. Cariñena, and G. Marmo, "Non-Hermitian oscillator-like Hamiltonians and λ-coherent states revisited," Mod. Phys. Lett. A **16**, 91 (2001).
[49] N. Kandirmaz and R. Sever, "Coherent states for $\mathcal{PT}$-/ non-$\mathcal{PT}$-symmetric and non-Hermitian Morse potentials via the path integral method," Phys. Scr. **81**, 035302 (2010).
[50] S.-A. Yahiaoui and M. Bentaiba, "New position-dependent effective mass coherent states for a generalized shifted harmonic oscillator," J. Phys. A: Math. Theor. **47**, 025301 (2013).
[51] J. Guerrero, "Non-Hermitian coherent states for finite-dimensional systems," in Coherent States and their Applications: A Contemporary Panorama, Proceedings of the CIRM Workshop (November 2016) (Springer Proceedings in Physics, 2018), see also arXiv:1804.00051.
[52] S. Dey, A. Fring, and V. Hussin, "A squeezed review on coherent states and nonclassicality for non-Hermitian systems with minimal length," in Coherent States and their Applications: A Contemporary Panorama, Proceedings of the CIRM Workshop (November 2016) (Springer Proceedings in Physics, 2018), pp. 209–242, see also arXiv:1801.01139.
[53] M. Znojil, "Time-dependent version of crypto-Hermitian quantum theory," Phys. Rev. D **78**, 085003 (2008).
[54] M. Znojil, "Three-Hilbert-space formulation of quantum mechanics," SIGMA **5**, 001 (2009); arXiv:0901.0700.
[55] A. Mostafazadeh, "Time-dependent pseudo-Hermitian Hamiltonians defining a unitary quantum system and uniqueness of the metric operator," Phys. Lett. B **650**, 208 (2007).
[56] H. Bíla, "Adiabatic time-dependent metrics in $\mathcal{PT}$-symmetric quantum theories," arXiv:0902.0474.
[57] J. Gong and Q. H. Wang, "Geometric phase in $\mathcal{PT}$-symmetric quantum mechanics," Phys. Rev. A **82**, 012103 (2010).
[58] J. Gong and Q.-H. Wang, Time-dependent $\mathcal{PT}$-symmetric quantum mechanics, J. Phys. **A** **46**, 485302 (2013).
[59] M. Maamache, "Periodic pseudo-Hermitian Hamiltonian: Nonadiabatic geometric phase," Phys. Rev. A **92**, 032106 (2015).
[60] A. Fring and M. H. Y. Moussa, "Unitary quantum evolution for time-dependent quasi-Hermitian systems with non-observable Hamiltonians," Phys. Rev. A **93**, 042114 (2016).
[61] A. Fring and M. H. Y. Moussa, "Non-Hermitian Swanson model with a time-dependent metric," Phys. Rev. A **94**, 042128 (2016).
[62] B. Khantoul, A. Bounames, and M. Maamache, "On the invariant method for the time-dependent non-Hermitian Hamiltonians," Eur. Phys. J. Plus **132**, 258 (2017).
[63] M. Maamache, O.-K. Djeghiour, N. Mana, and W. Koussa, "Pseudo-invariants theory and real phases for systems with non-Hermitian time-dependent Hamiltonians," Eur. Phys. J. Plus **132**, 383 (2017).
[64] W. Koussa, N. Mana, O. K. Djeghiour, and M. Maamache, "The pseudo Hermitian invariant operator and time-dependent non-Hermitian Hamiltonian exhibiting a $SU(1, 1)$ and $SU(2)$ dynamical symmetry," J. Math. Phys. **59**, 072103 (2018).
[65] A. Fring and T. Frith, "Exact analytical solutions for time-dependent Hermitian Hamiltonian systems from static unobservable non-Hermitian Hamiltonians," Phys. Rev. A **95**, 010102(R) (2017).
[66] F. S. Luiz, M. A. Pontes, and M. H. Y. Moussa, "Unitarity of the time-evolution and observability of non-Hermitian Hamiltonians for time-dependent Dyson maps," arXiv:1611.08286.
[67] F. S. Luiz, M. A. Pontes, and M. H. Y. Moussa, "Gauge linked time-dependent non-Hermitian Hamiltonians," arXiv:1703.01451.
[68] M. Maamache, "Non-unitary transformation of quantum time-dependent non-Hermitian systems," Acta Polytech. **57**, 424 (2017).
[69] F. Bagarello, "Model pseudofermionic systems: Connections with exceptional points," Phys. Rev. A **89**, 032113 (2014).
[70] M. Zenad, F. Z. Ighezou, O. Cherbal, and M. Maamache, "Ladder invariants and coherent states for time-dependent non-Hermitian Hamiltonians," Int. J. Theor. Phys. **59**, 1214–1226 (2020).