République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ferhat ABBAS-SETIF 1

THÈSE

Pésentée à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Mathématiques Pures

Par

Lakhdar BENAISSA

Quelques Propriétés Algébriques et Spectrales des Opérateurs de Toeplitz et de Hankel sur des Espaces de Type Bergman

Soutenu le 02 février 2021
Devant le Jury

JURY

Nacerdine HEMICI	Professeur à l'université de Sétif 1	Président
Noureddine DAILI	Professeur à l'université de Sétif 1	Rapporteur
Hocine GUEDIRI	Maitre de conférence A à l'université de Riyadh	Co-Rapporteur
Hamid BENSERIDI	Professeur à l'université de Sétif 1	Examinateur
Fares MOKHTARI	Professeur à l'Université d'Alger 1	Examinateur
Amar GUESMIA	Professeur à l'université de Skikda	Examinateur

Année universitaire : 2020-2021

Dédicace

✰ Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut...

✰ ✰ Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect...
et la reconnaissance...

✰ ✰ ✰ Aussi, c'est tout simplement que je dédie ce travail à la personne, sans laquelle,
je n'existerais plus : à ma mère FATNA ♡

Remerciements

Les mots les plus simples étant les plus forts

Je tiens à remercier le Professeur Noureddine DAILI, professeur à l'université de Sétif 1, pour avoir accepté de diriger mon travail de thèse. Je lui en sais gré pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer le travail doctoral que je vous soumets dans ce manuscrit de thèse. J'ai beaucoup apprécié ses conseils et ses remarques constructives. J'ai été particulièrement touché par son côté humain très enrichissant et par son côté professionnel qui m'a permis d'avancer dans mon travail de recherche. Je voudrais lui témoigner mes sincères respects ainsi que de ma profonde gratitude.

Je veux également remercier le Docteur Hocine GUEDIRI, maître de conférence A à l'université du Roi Saud à Riyadh, qui a accepté de co-diriger mon travail de thèse. Je le remercie pour le temps qu'il m'a accordé et pour la qualité de ses conseils lors de nos fructueux échanges le plus souvent par voie électronique.

Toute ma reconnaissance au Professeur Nacerdine HEMICI pour avoir bien voulu accepter de présider le jury de cette thèse, je le remercie vivement.

Je remercie très sincèrement, pour l'honneur qu'ils me font, les membres de mon jury de thèse : le Professeur Hamid BENSERIDI, le Professeur Amar GUESMIA, le Professeur Fares MOKHTARI.

Je ne peux terminer ces remerciements sans avoir une pensée émue envers les membres de ma famille auxquels je serais éternellement reconnaissant et, en premier lieu mon épouse Selma et mes enfants Abdelaziz, Anes et Souheib, qui ont su être patients et compréhensifs pour le train de vie que je leur ai imposé et pour les manquements familiaux induits par les lourdes tâches de mon travail de recherche mais aussi pour les responsabilités professionnelles dont j'ai la charge. Je ne saurais suffisamment les remercier en dehors de l'amour éternel que je leur porte.

Résumé

Dans cette thèse, nous introduisons des opérateurs de Toeplitz duaux sur le complémentaire orthogonal de l'espace de Hardy sur le polydisque, et nous établissons les propriétés algébriques principales à l'aide d'une transformation auxiliaire des opérateurs. Cette transformation mystérieuse donne lieu à une intéressante caractérisation des opérateurs de Toeplitz duaux en termes d'équations d'opérateurs étroitement liées aux relations entrelacées. De plus, nous sommes en mesure de caractériser la commutativité et la normalité des opérateurs de Toeplitz, et d'étudier les produits des opérateurs de Toeplitz duaux. Plus précisément, nous établissons des théorèmes de type de Brown-Halmos et les exploitons pour caractériser les diviseurs de zéro entre opérateurs de Toeplitz duaux ainsi que les symboles donnant lieu à des opérateurs de Toeplitz duaux isométriques, idempotents et unitaires. Nous exploitons davantage cette mystérieuse transformation dans l'étude de la bornitude et de la compacité des produits de Hankel et des produits mixtes de Toeplitz-Hankel sur l'espace de Hardy sur le polydisque.

Mots Clés : Opérateur de Toeplitz dual, Espace de Hardy du polydisque, Commutativité, Brown-Halmos, Produits de Hankel, Produits mixtes de Toeplitz-Hankel.

Classification Mathématique par matières (AMS 2020) : 47B35 , 47 B47 , 32A36.

Abstract

In this thesis, we introduce dual Toeplitz operators on the orthogonal complement of the Hardy space of the polydisk and establish their main algebraic properties using an auxiliary transformation of operators. This mysterious transformation gives rise to an interesting characterization of dual Toeplitz operators in terms of operator equations that are closely related to the intertwining relations. Furthermore, we are able to characterize commuting dual Toeplitz operators as well as normal ones. Moreover, we investigate products of dual Toeplitz operators. In particular, we establish Brown-Halmos type theorems and exploit them to characterize the zero divisors among dual Toeplitz operators as well as symbols giving rise to isometric, idempotent and unitary dual Toeplitz operators. Furthermore, we exploit this mysterious transformation in the investigation of boundedness and compactness of Hankel products and mixed Toeplitz-Hankel products on the Hardy space of the polydisk.

Key words : Dual Toeplitz operator, Hardy space of the polydisk, Commuting, Brown-Halmos, Hankel products, Mixed Toeplitz-Hankel products.

2020 Mathematics Subject Classification (AMS) : 47B35 , 47 B47 , 32A36.

ملخص :

في هذه الرسَالة قمنَا بإِدخَال مفهوم مؤُثرَات توبليتز الإِزدوَاجية علَى المتمِمة العمودية لفضَاء هَاردي المعرف علَى الأَقرَاص المتعدِدة. كمَا قمنَا علَى إِثر ذلك بصيَاغة أَهم خوَاصهَا الجبرية و الطيفية بإِستخدَام تحويل ثَانوي لِلمُؤثرَات. ومن ضمن نتَائِجهَا، إِستطعنَا أَن نجد معَادلة مُؤثرَات تميز مُؤثرَات توبليتز الإِزدوَاجية هذه من بين المُؤثرَات الخطية المحدودة المعرفة علَى هذَا الفضَاء. كمَا تشمل دِرَاستنَا مسأَلة التبَادل بين هذه المُؤثرَات وتعطي وصفَا لعَائِلة مُؤثرَات توبليتز الإِزدوَاجية النَاظمية. وتطرقنَا لجدَاءَات مُؤثرَات توبليتز الإِزدوَاجية التي تنتج مُؤثرَات توبليتز إِزدوَاجية جديدة، فوجدنَا وصفَا دقيقَا لِلرموز التي تكون وحدوية أَو متسَاوية المقيَاس أَو متسَاوية القوة. كمَا قمنَا بإِستثمَار هذَا التحويل المذهل في درَاسة مسَائِل المحدودية و التَرَاص لجدَاءَات مُؤثرَات هَانكل و الجدَاءَات المختلطة من نوع توبليتز هَانكل علَى فضَاء هَاردي المعرف علَى متعدِد الأَقرَاص.

الكلمَات الدَالة : مؤُثرَات توبليتز الإِزدوَاجية، فضَاء هَاردي علَى الأَقرَاص المتعدِدة، مسأَلة التبَادل، جدَاءَات مُؤثرَات توبليتز الإِزدوَاجية و نظرية برَاون ـ هَالمُوس، جدَاءَات هَانكل، اَلجدَاءَات المختلطة من نوع توبليتز ـ هَانكل.

تَصنيف الموضوع (AMS 2020) : $32A36, 47B47, 47B35$.

Table des matières

Notations

$Aut(\mathbb{D}^n)$, Groupe d'automorphismes du polydisque.

$\mathfrak{B}(f)$, Transformation de Berezin d'une fonction f, (notée aussi $\widetilde{f}$).

$\mathscr{B}(\mathcal{H})$, Algèbre de tous les opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{H}$.

$\mathbb{C}$, Plan complexe.

$\mathbb{C}^n$, Espace unitaire complexe à n-dimensions.

$\mathscr{C}(\Omega)$, Espace de toutes les fonctions complexes continues sur un domaine Ω.

$\mathscr{C}^k$, Classe des fonctions continument différentiables d'ordre k.

$\mathbb{D}$, Disque unité du plan complexe.

$\mathbb{D}^n$, Polydisque unité.

$\partial^*\mathbb{D}^n$, Frontière distinguée du polydisque unité (voir aussi $\mathbb{T}^n$).

$D(z, R)$, Disque ouvert de centre z et de rayon R.

dA, Mesure de surface sur $\mathbb{D}$.

$\overline{f}$, Fonction conjuguée d'une fonction f.

f^*, Fonctions des valeures frontières d'une fonction f.

$\widehat{f}(n)$, Coefficient de Fourier d'une fonction f.

$f \otimes g$ Opérateur de rang 1.

$\mathcal{H}$, Espace de Hilbert.

$\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}^n)$, Espace des fonctions analytiques bornées sur $\mathbb{D}^n$.

H_f, Opérateur de Hankel à symbole f.

$\mathcal{H}^p(\mathbb{D}^n)$, Espace de Hardy du polydisque.

$h^p(\mathbb{D}^n)$, Espace de Hardy harmonique.

$\mathfrak{H}(\Omega)$, Enveloppe convexe d'un ensemble Ω.

$(\mathcal{H}^p(\mathbb{D}^n))^\perp$, Supplémentaire orthogonal de l'espace de Hardy du polydisque.

$\ker(T)$, Noyau d'un opérateur T.

K_w, Noyau reproduisant de $\mathcal{H}^p(\mathbb{D}^n)$.

k_w, Noyau reproduisant normalisé de $\mathcal{H}^p(\mathbb{D}^n)$.

L^1, Espace des fonctions intégrables.

L^2, Espace des fonctions de carrés intégrables.

L^p, Espace des fonctions p-intégrables.

L^∞, Espace des fonctions essentiellement bornées.

L^2_a, Espace de Bergman (cas hilbertien).

L^p_a, Espace de Bergman.

M_φ, Opérateur de multiplication à symbole φ.

$\mathcal{P}$, Projection orthogonale.

$P(z, \zeta)$, Noyau de Poisson.

$Ran(T)$, Image d'un opérateur T.

$\mathscr{R}(f)$, Image essentielle d'une fonction f.

$\mathbf{S}$, Opérateur de translation unilatérale.

S_f, Opérateur de Toeplitz dual à symbole f.

$\mathscr{S}_w$ Transformation d'opérateurs (voir Section 2.3).

$\mathbb{T}^n$, Le n-tore (la fontière distinguée du polydisque $\mathbb{D}^n$).

T^*, Adjoint d'un opérateur T.

T_f, Opérateur de Toeplitz à symbole f.

$\oplus$, Somme directe.

$\otimes$, Produit tensoriel.

Δ, Laplacien.

$\langle .,. \rangle$, Produit scalaire.

φ_a, Transformation de Möbius.

$\|.\|$, Norme.

$\sigma(T)$, Spectre d'un opérateur A.

$\sigma_e(T)$, Spectre essentiel d'un opérateur A.

Introduction

Nous commençons tout d'abord par introduire quelques notions élémentaires. Le plan complexe est génériquement défini par :

$$\mathbb{C} := \left\{ z = x + iy,\ x,\ y \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1} \right\}.$$

Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$ le disque unité du plan complexe $\mathbb{C}$ dont la frontière (le cercle unité) est notée $\mathbb{T} := \partial\mathbb{D}$. On note dA la mesure de Lebesgue normalisée sur le disque $\mathbb{D}$, et $d\sigma(t) = \frac{dt}{2\pi}$ la mesure de Lebesgue sur le cercle unité $\mathbb{T}$.

Pour $1 \leq p < \infty$, $L^p(\mathbb{D}, dA)$ désigne l'espace de Lebesgue des classes de fonctions p-sommables sur le disque $\mathbb{D}$, tandis que $L^p(\mathbb{T})$ est l'espace de Lebesgue sur le cercle unité relatif à $d\sigma$. L'espace $L^\infty(\mathbb{D})$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées muni de la norme sup : $||f||_\infty = \text{ess.} \sup\limits_{z\in\mathbb{D}}\{|f(z)|\}$. L'espace de Bergman $L^p_a(\mathbb{D})$ est le sous espace fermé de $L^p(\mathbb{D}, dA)$ des fonctions analytiques sur le disque $\mathbb{D}$, (les fonctions qui sont développables en série entière en $z \in \mathbb{D}$), i.e.

$$L^p_a(\mathbb{D}) := \left\{ f :\ \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C} :\ t.q.\ \ f \ \text{ est analytique sur } \ \mathbb{D}, \ \text{ et } \ ||f||_p = \int\limits_{\mathbb{D}} |f|^p dA < \infty \right\}.$$

L'espace de Hardy $H^p(\mathbb{T})$ est défini par

$$H^p(\mathbb{T}) := \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}),\ \widehat{f}(n) = 0,\ \text{pour } \ n < 0 \right\},$$

où $\widehat{f}(n) = \int\limits_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int} d\sigma(t),\ n \in \mathbb{Z},$ désigne le coefficient de Fourier de f.

Dans le cas particulier où $p = 2$, l'espace $L^2(\mathbb{D}, dA)$ devient un espace de Hilbert. Alors, étant fermé, l'espace de Bergman $\left(L_a^2(\mathbb{D}), \ <.\ ,\ .>\right)$ est lui même un espace de Hilbert, et il existe une projection orthogonale $\mathcal{P}: \ L^2(\mathbb{D}, dA) \longrightarrow L_a^2(\mathbb{D})$ appelée la projection de Bergman. De plus, l'espace de Bergman $L_a^2(\mathbb{D})$ admet un noyau reproduisant K_z, pour tout $z \in \mathbb{D}$, i.e.

$$f(z) =< f, K_z >, \forall z \in \mathbb{D}.$$

Pour un "symbole" $f \in L^\infty(\mathbb{D})$, l'opérateur de multiplication

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_f: \ L^2(\mathbb{D}, dA) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{D}, dA), \\ h & \longrightarrow & \mathcal{M}_f h = fh, \end{array}$$

est un opérateur linéaire borné, où fh désigne le produit ponctuel usuel $(fg)(z) = (f.g)(z) = f(z)g(z)$.

Le produit (en fait, la composition) $\mathcal{P}\mathcal{M}_f$ engendre un fameux opérateur linéaire borné noté T_f, appelé l'opérateur de Toeplitz et défini comme suit :

$$\begin{array}{rcl} T_f: \ L_a^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & L_a^2(\mathbb{D}), \\ h & \longrightarrow & T_f h = \mathcal{P}\mathcal{M}_f h = \mathcal{P}(fh). \end{array}$$

L'espace $L^2(\mathbb{D}, dA)$ admet la décomposition orthogonale suivante :

$$L^2(\mathbb{D}, dA) = L_a^2(\mathbb{D}) \oplus \left(L_a^2(\mathbb{D})\right)^\perp.$$

Ceci fait apparaitre d'autres opérateurs similaires à l'opérateur de Toeplitz ainsi défini, tels que l'opérateur de Hankel suivant :

$$\begin{array}{rcl} H_f: \ L_a^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & \left(L_a^2(\mathbb{D})\right)^\perp, \\ g & \longrightarrow & H_f g = (I - \mathcal{P})(fg), \end{array}$$

et l'opérateur de Toeplitz dual suivant :

$$\begin{array}{rcl} S_f: \ \left(L_a^2(\mathbb{D})\right)^\perp & \longrightarrow & \left(L_a^2(\mathbb{D})\right)^\perp \\ g & \longrightarrow & S_f g = (I - \mathcal{P})(fg). \end{array}$$

Les études menées sur les opérateurs de Toeplitz et de Hankel agissant sur l'espace de Hardy du cercle unité ont débuté dans les années soixante par Brown et Halmos [6]. Une étude algébrique et spectrale assez complète a été élaborée dans ce cadre [6, 13, 22, 23, 37, 44, 52]. En particulier, on a le résultat de commutativité suivant.

Théorème 1. *[6] Soient $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Alors, les deux opérateurs de Toeplitz T_ϕ et T_ψ commutent sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{T})$, (i.e. $T_\phi T_\psi = T_\psi T_\phi$), si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite.*

1. *ϕ et ψ sont analytiques.*
2. *ϕ et ψ sont antianalytiques.*
3. *Il existe deux constantes α et β telles que $\phi = a\psi + \beta$.*

D'autre part, le théorème de Brown-Halmos originel est le suivant [6] :

Théorème 2. *Soient $\phi, \psi \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$. Alors, le produit $T_\phi T_\psi$ de deux opérateurs de Toeplitz sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{T})$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si ϕ est antianalytique ou ψ est analytique. Si l'un de ces cas se présente, alors $T_\phi T_\psi = T_{\phi\psi}$.*

Dès lors, un nouvel concept dans ce contexte a été adopté à savoir :

Définition 3. *Dans la théorie des opérateurs de type Toeplitz sur les espaces de type-Bergman, souvent on adresse la question suivante : Quand-est-ce que le produit de deux opérateurs de Toeplitz, est encore un opérateur de Toeplitz ?*
Toute assertion répondant à de telle question, est dite "théorème de type Brown-Halmos".

Deux décennies plus tard, des études intensives ont été lancées sur ces classes d'opérateurs dans le cadre de l'epace de Bergman, et de nombreux résultats ont été établis [2, 4, 52], (voir section 2.2). En particulier, le théorème de type Brown-Halmos suivant a été établi par Ahern et Čučković [2].

Théorème 4. *Supposons que f et g soient deux fonctions harmoniques bornées sur $\mathbb{D}$, et que h soit une fonction bornée de classe $\mathscr{C}^2$ telle que son Laplacien invariant $\widetilde{\Delta}h = (1-|z|^2)^2\Delta h$ soit aussi borné dans $\mathbb{D}$. Si $T_fT_g = T_h$ sur $L^2_a(\mathbb{D})$, alors l'une des conditions suivantes est vérifiée.*

1. *f est antianalytique.*
2. *g est analytique.*

Dans l'un ou l'autre cas $h = fg$.

Tandis que le théorème de commutativité suivant a été établi par Axler et Čučković [4] :

Théorème 5. *Soient $f, g \in L^\infty(\mathbb{D})$ deux fonctions harmoniques sur $\mathbb{D}$. Alors T_f et T_g commutent sur $L^2_a(\mathbb{D})$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*
i) f et g sont analytiques.
ii) f et g sont antianalytiques.
iii) Une combinaison linéaire reliant f et g est constante.

Par suite, plusieurs auteurs ont réussi à généraliser ces résultats dans différentes directions. On peut mentionner à titre d'exemples l'espace de Bergman harmonique, l'espace de Segal-Bargmann, les espaces de Bergman et de Hardy de la boule unité et du polydisque de $\mathbb{C}^n$ [8, 10, 11, 12, 18, 20, 25, 27, 33, 35, 47, 52]. A ce propos, dans le chapitre 1, nous donnons un aperçu consistant sur la théorie des fonctions analytiques et harmoniques de plusieurs variables complexes de $\mathbb{C}^n$.

Une étude systématique des opérateurs de Toeplitz duaux sur le complémentaire orthogonal de l'espace de Bergman du disque unité a été élaborée par Storthoff et Zheng [45]. Dès lors, les opérateurs de Toeplitz duaux sur les complémentaires orthogonaux de divers espaces de fonctions analytiques de Hilbert deviennent à nos jours parmi les classes concrètes d'opérateurs qui attirent l'attention des chercheurs intéressés par la théorie des opérateurs. Les propriétés algébriques et spectrales de ces opérateurs dans différents contextes ont fait l'objet de nombreuses études au cours de la dernière décennie. Pour un compte rendu détaillé sur ce sujet, nous renvoyons le lecteur intéressé à [7, 19, 21, 31, 32, 34, 48, 49, 50] et aux références qui y figurent.

Cette thèse a pour but de montrer permièrement quelques propriétés algébriques fondamentales des opérateurs de Toeplitz duaux dans le cadre de l'espace de Hardy sur le polydisque. Le chapitre 2 est consacré à la présentation des concepts fondamentaux des espaces de Hardy et de Bergman en plusieurs dimensions et leurs opérateurs. En particulier, nous commençons dans la Section 2.1 par établir quelques notions générales. Nous introduisons les espaces de Hardy du polydisque, et les opérateurs de Toeplitz, de Hankel et de Toeplitz duaux définis sur ce type d'espaces ainsi que quelques propriétés correspondantes. Dans la Section 2.2, nous caractérisons les opérateurs de Toeplitz duaux en terme d'équations opératorielles. D'autre part, dans la Section 3.1, nous donnons une condition necéssaire et suffisante pour que deux opérateurs de Toeplitz duaux commutent, et déduisons une caractérisation des opérateurs de Toeplitz duaux qui sont normaux. Notons, que la propriété de commutativité dans des contextes similaires a fait l'objet de plusieurs travaux, voir [4, 6, 18, 19, 22, 27, 30, 31, 32, 45, 50].

Dans la Section 3.2, on étudie les produits des opérateurs de Toeplitz duaux . Plus précisément, on démontre des théorèmes de type Brown-Halmos et on les exploite pour caractériser les diviseurs de zéro entre opérateurs de Toeplitz duaux ainsi que les symboles donnant lieu à des opérateurs de Toeplitz duaux isométriques, idempotents et unitaires. On peut trouver ces résultats dans des contextes similaires par exemples dans [2, 6, 18, 19, 22, 34, 44, 45].

Tous les résultats ci-dessus reposent sur une cruciale transformation d'opérateurs (qui remonte à Stroethoff et Zheng [45]), plus précisèment sur l'opérateur $\mathscr{S}_w$ construit dans la Section 2.3, qui s'avère très approprié à de tels objectifs. Un opérateur analogue, dans le cadre de l'espace de Bergman sur le polydisque, est déjà présent dans le travail de Y.F. Lu et S.X. Shang [34]. Cette transformation révèle une caractérisation intéressante des opérateurs duaux de Toeplitz très liée aux relations imbriquées de ces opérateurs dans une dimension, voir [6, 10, 19, 20, 22, 25]. Pour un bref historique sur cette transformation puissante, nous renvoyons le lecteur à [19].

On étudie dans la Section 3.3 les produits de Hankel et les produits mixtes de Toeplitz-Hankel sur l'espace de Hardy du polydisque. En particulier, on utilise notre puissant opérateur $\mathscr{S}_w$ dans le but d'établir des conditions nécessaires pour la bonrnitude et pour la compacité de ces produits. Les produits d'opérateurs de Toeplitz dans le contexte actuel ont été étudiés par Ding dans [11, 12] ; pour le même problème dans des contextes similaires, nous nous référons à [20, 24, 46, 47] et aux références qui y figurent.
Nos résultats ont fait l'objet de la publication [5].

Chapitre 1

Notions générales d'analyse complexe et d'analyse fonctionnelle

1.1 Généralités sur les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes

Le but de cette section est d'introduire des notions élémentaires sur les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. Nous nous permettons d'omettre certaines preuves qui ne paraissent pas essentielles à la compréhension du sujet, renvoyant par conséquent le lecteur aux références citées ci-dessous. Pour plus de détails, on renvoie aux monographes [1, 26, 28, 29, 38, 40, 41, 51, 53].

On note $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Si $n \in \mathbb{N}$ est un entier strictement positif, l'ensemble $\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times .... \times \mathbb{C}}_{n\ fois}$ est le produit cartésien de n exemplaires de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire chaque point z de $\mathbb{C}^n$ est un n-uple ordonné qui s'écrit $z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$, $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$, $(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$, $j = 1, 2, ..., n$. $\mathbb{C}^n$ est muni de la structure habituelle d'espace vectoriel. Alors, la norme (module) de z est notée $|z| = \left(|z_1|^2 + ... + |z_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
Pour éviter toute sorte d'ambiguité, sauf si indiqué, on suppose que $n > 1$.

Si $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, $w = (w_1, w_2, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n$, alors on définit le produit suivant :

$$< z, w > := z_1\overline{w}_1 + z_2\overline{w}_2 + ... + z_n\overline{w}_n,$$

et on a de plus :

$$|z| = |(z_1, ..., z_n)| = \sqrt{< z, z >} = \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice et $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$, on note $z^\alpha = z_1^{\alpha_1}...z_n^{\alpha_n}$, $\alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!$ et $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, (appelée longueur de α).

On utilise aussi les notations suivantes : si $k = (k_1, ..., k_n)$ est un multi-indice, on dit que $k \geq 0$ si toutes les coordonnées de k satisfont $k_j \geq 0$, et on adopte les abréviations suivantes : $(z - w)^k = \prod_{j=1}^{n}(z_j - w_j)^{k_j}$, $dw = dw_1....dw_n$, et $\dfrac{1}{w - z} = \prod_{j=1}^{n} \dfrac{1}{w_j - z_j}$.

On définit un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriel entre $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{R}^{2n}$ en posant, pour $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$, $z_j = x_j + iy_j$ si $j = 1, ..., n$. Cela entraîne l'identification $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ de $\mathbb{C}^n$ à l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2n}$.

Les opérateurs de dérivations holomorphe et antiholomorphe sont définis respectivement par

$$\begin{cases} \partial_j = \dfrac{\partial}{\partial z_j} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j} - i\dfrac{\partial}{\partial y_j}\right), \ j = 1, 2, ..., n, \\ \overline{\partial_j} = \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j} + i\dfrac{\partial}{\partial y_j}\right), \ j = 1, 2, ..., n, \end{cases}$$

et si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right). \tag{1.1}$$

De plus, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, pour $|\alpha| \leq k$ on note

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1 + ... + \alpha_n} f}{\partial z_1^{\alpha_1}...\partial z_n^{\alpha_n}} \text{ et } \overline{\partial}^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \overline{z}^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1 + ... + \alpha_n} f}{\partial \overline{z}_1^{\alpha_1}...\partial \overline{z}_n^{\alpha_n}},$$

et aussi : $f^{(k)}(w) = \dfrac{\partial^k f}{(\partial z)^k}(w)$, $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{N}^n$, $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n$.

Par la suite, on aura besoin du concept suivant.

Définition 1.1. *La frontière distinguée d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est le plus petit ensemble fermé $\partial^*\Omega$ de la frontière euclidienne toute entière $\partial\Omega$ satisfaisant la propriété suivante :*

$$\sup\{|f(z)|,\ z \in \overline{\Omega}\} = \sup\{|f(z)|,\ z \in \partial^*\Omega\},$$

pour toute fonction f continue sur $\overline{\Omega}$ et analytique dans Ω.

Maintenant, on définit le polydisque (ouvert) de centre et multi-rayon quelconques.

Définition 1.2. *Soit $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$ et soit $r = (r_1, r_2, ..., r_n),\ r_j > 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$. On définit le polydisque de centre a et multi-rayons r l'ensemble*

$$D^n(a,r) := \{z \in \mathbb{C}^n,\ |z_j - a_j| < r_j,\ 1 \leq j \leq n\} = \prod_{j=1}^{n} D(a_j, r_j),$$

où $D(a_j, r_j)$ est le disque de centre a_j et de rayon r_j dans $\mathbb{C}$.
Le polydisque fermé $\overline{D^n(a,r)}$ de centre $a \in \mathbb{C}^n$ et de multi-rayon r est l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C}^n : \quad |z_j - a_j| \leq r_j, j = 1... = n\}.$$

Son intérieur est notre polydisque $D^n(a,r)$.
On note $\partial D^n(a,r)$ la frontière topologique d'un polydisque. Elle consiste en l'ensemble des points dans le polydisque fermé satisfaisants $|z_j - a_j| = r_j, 1 \leq j \leq n$, pour certain $r = (r_1, r_2, ..., r_n)$. Cepandant le bord distingué du polydisque $D^n(a,r)$ est donné par :

$$\begin{aligned} \partial^* D^n(a,r) &:= T^n(a,r) = (\partial D(a_1,r_1)) \times (\partial D(a_2,r_2)) \times \ .\ .\ .\ \times (\partial D(a_n,r_n)), \\ &= \{z \in \mathbb{C}^n,\ \ |z_j - a_j| = r_j,\ j = 1, 2, ..., n,\} \\ &= \{z,\ z_j = a + re^{i\theta_j}, 0 \leq \theta_j \leq 2\pi\}. \end{aligned}$$

Maintenant, soient $\mathbb{D}$ le disque unité (ouvert) du plan complexe $\mathbb{C}$, i.e. :

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C},\ \ |z| < 1\},$$

et

$$\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C},\ \ |z| = 1\}$$

sa frontière, (le cercle unité).

Pour $n \geq 1$, le polydisque unité (ou tout simplement, le polydisque) $\mathbb{D}^n = \underbrace{\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \ \ldots \times \mathbb{D}}_{\text{n fois}}$ et son bord distingué $\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \ \ldots \times \mathbb{T}}_{\text{n fois}}$, (appelé aussi le n-tore), sont respctivement le produit cartésien de n exemplaires de $\mathbb{D}$ et de $\mathbb{T}$. C'est une généralisation du disque unité dans le cas multidimensionnel. Le polydisque unité $\mathbb{D}^n$ est un cas particulier du polydisque $D^n(a, r)$ pour le cas où $a = (0, 0, \ldots, 0)$ et $r = (1, 1, \ldots, 1)$, et donc il est défini comme suit :

$$\mathbb{D}^n := \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n, : |z_j| < 1, : j = 1, \ldots, n\}, \tag{1.2}$$

ainsi que sa frontière distinguée s'écrit

$$\mathbb{T}^n := \{\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n, : |\zeta_j| = 1, : j = 1, \ldots, n\}. \tag{1.3}$$

En fait, comme l'on a vu ci-dessus, $\mathbb{T}^n$ n'est qu'une partie du bord de $\mathbb{D}^n$.

Un autre domaine important de $\mathbb{C}^n$ qui généralize le disque unité $\mathbb{D}$ est la boule unité définie comme suit :

Définition 1.3. *Soit $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ et soit $r > 0$, la boule ouverte de centre z et de rayon r est l'ensemble*

$$\mathbb{B}_n(z, r) = \{w \in \mathbb{C}^n; |w - z| < r\}.$$

Pour $z = \mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$ et $r = 1$, on obtient la boule unité

$$\mathbb{B}_n = \mathbb{B}_n(\mathbf{0}, 1) = \{w \in \mathbb{C}^n; |w| < 1\}.$$

Notons que le seul domaine borné et symetrique $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ possédant la propriété $\partial^*\Omega = \partial\Omega$ est la boule unité $\mathbb{B}^n$ de $\mathbb{C}^n$, (i.e. sa frontière distinguée coïncide avec sa frontière toute entière).

Définition 1.4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$, et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction f est dite holomorphe sur Ω si pour tout $z \in \Omega$ on a :*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}(z) = 0, \ 1 \leq j \leq n. \tag{1.4}$$

Le système d'équations aux dérivées partielles (1.4) s'appelle système de Cauchy-Riemann homogène. On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'espace de toutes les fonctions holomorphes sur Ω.

Dans le cas d'une seule variable complexe (i.e. pour $n = 1$), le système (1.4) se réduit à une seule équation, à savoir $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$; et si en plus on pose $f = u + iv$, alors cette équation est équivalente aux conditions de Cauchy-Riemann classique

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x} \end{cases}.$$

On note $dz_j = dx_j + idy_j$, et $dz = \sum_{j=1}^{n} dz_j$. De même, on note $d\overline{z_j} = dx_j - idy_j$, et $d\overline{z} = \sum_{j=1}^{n} d\overline{z_j}$; et on définit les opérateurs différentiels suivants :

$$\partial = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j} dz_j \quad \text{et} \quad \overline{\partial} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j.$$

Donc, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, alors on a :

$$\partial f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j, \quad \overline{\partial} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j, \text{ et } df = \partial f + \overline{\partial} f.$$

Par conséquent, une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω est holomorphe si et seulement si $\overline{\partial} f = 0$.

Définition 1.5. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Si $z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \Omega$ est fixé, on pose*

$$\Omega_j = \{w \in \mathbb{C},\ (z_1, ..., z_{j-1}, w, z_{j+1}, ..., z_n) \in \Omega\}.$$

Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite séparément holomorphe sur Ω si, pour tout $1 \leq j \leq n$, la fonction $f_j : \Omega_j \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(w) = f(z_1, ..., z_{j-1}, w, z_{j+1}, ..., z_n)$ est holomorphe.

Il en résulte qu'une fonction holomorphe est séparément holomorphe. Il s'avère que la réciproque est aussi vraie : toute fonction séparément holomorphe est holomorphe.

Définition 1.6. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite analytique dans Ω si elle est développable en série entière multiple au voisinage de chaque point $a \in \Omega$, comme suit :*

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha(z-w)^\alpha := \sum_{\alpha_1=0}^{\infty}\sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} a_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(z_1-a_1)^{\alpha_1}(z_2-a_2)^{\alpha_2}\ldots(z_n-a_n)^{\alpha_n}.$$

Il s'en suit que si f est une fonction analytique dans Ω, alors elle est holomorphe dans Ω, avec $a_\alpha = \dfrac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(w)$.

Définition 1.7. *Soit $K \subset \mathbb{C}^n$ un ensemble quelconque. Une fonction $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite holomorphe sur K si tout point $a \in K$ admet un voisinage ouvert Ω tel que $\Omega\cap K$ est fermé et il existe une fonction f_Ω qui est holomorphe sur Ω telle que $f = f_\Omega$ sur $\Omega \cap K$.*

La proposition suivante résume quelques propriétés élémentaires des fonctions holomorphes [28, 29] :

Proposition 1.8. *1) Si f, g sont deux fonctions holomorphes dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, alors $f + g$, $f - g$ et $f \cdot g$ sont aussi holomorphes dans Ω. Et si $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$, alors $\dfrac{f}{g}$ est holomorphe dans Ω.*
2) Si f_n est une suite de fonctions holomorphes dans Ω qui converge uniformément vers f sur chaque sous-ensemble compact de Ω, alors f est holomorphe dans Ω.

Définition 1.9. *Une fonction $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est dite harmonique si*

$$\Delta u = 4\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\overline{z}_j} = 0,$$

où l'on a : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\overline{z}_j} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y_j^2}\right)$, $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2, ..., n$.

Définition 1.10. *Une fonction $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est dite pluriharmonique si*

$$i\partial\overline{\partial}u = \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\overline{z}_k} i dz_j \wedge d\overline{z}_k = 0,$$

où $dz_j \wedge d\overline{z}_k$ désigne le produit extérieur des formes différentielles dz_j, $d\overline{z}_k$. Donc u est pluriharmonique si et seulement si $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} = 0$ pour tout $j, k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Remarque 1.11. *Concernant les fonctions pluriharmoniques, on observe que :*

1. *La partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe de classe $\mathcal{C}^2$ sont pluriharmoniques.*
2. *Pour $n \geq 2$, une fonction pluriharmonique est harmonique mais la réciproque n'est pas vraie.*
3. *Toute fonction pluriharmonique est lacalement la partie réelle d'une fonction holomorphe.*
4. *Une fonction u de classe $\mathcal{C}^2$ est pluriharmonique si et seulement si sa restriction à toute droite complexe dans Ω est harmonique. En d'autres termes, pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n$ et tout $z_0 \in \Omega$, l'application $w \longmapsto u_\xi(w) := u(z_0 + w\xi)$ est harmonique sur l'ensemble $\Omega_{\xi, z_0} = \{w \in \mathbb{C}; z_0 + w\xi \in \Omega\}$.*

Maintenant, on démontre un résultat très important, à savoir la formule de Cauchy pour un polydisque [26, 28, 29] :

Théorème 1.12. *Soit f une fonction continue sur le plolydisque fermé $\overline{D}^n(a, r)$ et séparément holomorphe sur $D^n(a, r)$. Alors pour tout $z \in D^n(a, r)$ on a :*

$$f(z) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{T^n(a,r)} \frac{f(\xi_1, ..., \xi_n)}{(\xi_1 - z_1)...(\xi_n - z_n)} d\xi_1 ... d\xi_n. \tag{1.5}$$

En particulier, $f \in \mathscr{C}$ et est holomorphe, et on a :

$$f^{(k)}(z) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{T^n(a,r)} \frac{f(w)k!}{(w - z)^k} dw. \tag{1.6}$$

Démonstration. On raisonne par récurrence. Pour $n = 1$, (1.5) n'est que la formule intégrale de Cauchy classique. Supposons ensuite que la formule (1.5) a été démontrée pour la dimension $n - 1$. Alors, on définit la fonction holomorphe $g(z) = f(z, z_2, z_3, ..., z_n)$. D'après la formule intégrale de Cauchy pour une variable, appliquée à la fonction g sur le disque $\{|z_1 - a_1| < r_1\}$ on a

$$g(z_1) = f(z_1, z_2, ..., z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{T(a_1,r_1)} \frac{f(w_1, z_2, ..., z_n)}{w_1 - z_1} dw_1. \tag{1.7}$$

Si on fixe w_1, la fonction $(z_2, ..., z_n) \longrightarrow f(w_1, z_2, ..., z_n)$ est une fonction de $n-1$ variables. Par l'hypthèse de récurrence on obtient

$$f(w_1, z_2, ..., z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{T^{n-1}(a',r')} \frac{f(w_1, z_2, ..., z_n)}{(w_2 - z_2)...(w_n - z_n)} dw_2...dw_n, \tag{1.8}$$

où l'on a $a' = (a_2, ..., a_n)$, et $r = (r_2, ..., r_n)$.
En insérant (1.8) dans (1.7), on obtient la formule intégrale de Cauchy (1.5). $\square$

Une conséquence directe du théorème précédent est que les fonctions holomorphes sont lisses.

Corollaire 1.13. *Si f est une fonction holomorphe, alors $\dfrac{\partial f}{\partial z_j}$ est holomorphe. De plus, toutes les dérivées partielles $\frac{\partial^n f}{\partial z^n}$ existent.*

Corollaire 1.14. *Soit f une fonction continue et séparément holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Alors f est analytique sur Ω.*

Démonstration. Soit $a \in \Omega$. Alors, il existe un polydisque fermé $\overline{D}^n(a, r) \subset \Omega$. D'après le théorème précédent, pour tout $z \in \overline{D}(a, r)$ on a :

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n(a,r)} \frac{f(\xi_1, ..., \xi_n)}{(\xi_1 - z_1)...(\xi_n - z_n)} d\xi_1...d\xi_n.$$

Pour tout $1 \leq j \leq n$, on a

$$\frac{1}{\xi_j - z_j} = \frac{1}{(\xi_j - a_j)\left(1 - \frac{z_j - a_j}{\xi_j - a_j}\right)} = \frac{1}{\xi_j - a_j} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z_j - a_j}{\xi_j - a_j}\right)^k.$$

Donc, on obtient

$$f(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha (z - a)^\alpha, \qquad \text{avec } \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \tag{1.9}$$

et

$$a_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n(a,r)} \frac{f(\xi_1, ..., \xi_n)}{(\xi_1 - a_1)^{\alpha_1+1}...(\xi_n - a_n)^{\alpha_n+1}} d\xi_1...d\xi_n.$$

La série converge uniformément et absolument sur tout compact de $D^n(a,r)$. De plus on peut dériver terme-à-terme et on aura alors :

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha} = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n(a,r)} \frac{f(\xi_1, ..., \xi_n)}{(\xi_1 - a_1)^{\alpha_1+1} ... (\xi_n - a_n)^{\alpha_n+1}} d\xi_1 ... d\xi_n.$$

□

Remarque 1.15. *La formule de Cauchy permet la reproduction des fonctions analytiques dans un polydisque $\mathbb{D}^n(a,r)$ à l'aide d'un noyau $K(z,\xi)$, dont les singularités, au contraire de ce qui se passe en une variable ne sont pas portées sur la diagonale $z = \xi$ mais par l'union des hyperplans $\xi_1 = z_1, ..., \xi_n = z_n$. Les valeurs de f intervenant pour sa reproduction dans le polydique $\mathbb{D}^n(a,r)$ sont uniquement celles sur le bord distingué de $\mathbb{D}^n(a,r)$ qui est un sous ensemble n-dimensionnel. Alors que la frontière de $\mathbb{D}^n(a,r)$ est (2n-1)-dimensionnelle dans $\mathbb{R}^{2n}$. On va détailler ce point au Chapitre 2 vue son importance pour notre étude.*

Corollaire 1.16. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, (au sens de la définition 1.4).

ii) f est séparément holomorphe en $z_1, z_2, ..., z_n$, (au sens de la définition 1.5).

iii) f est analytique sur Ω, (au sens de la définition 1.6).

Un autre corollaire relatif à ce qu'on appelle l'inégalité de Cauchy [29] est le suivant :

Corollaire 1.17. *Soit f une fonction holomorphe sur $D^n(a,r) \subset \mathbb{C}^n$ et continue sur $\overline{D}^n(a,r)$, alors :*

$$\frac{1}{\alpha!} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} f(a) \right| \leq \frac{\sup_{T^n(a,r)} |f(z)|}{r^\alpha}, \tag{1.10}$$

et

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} f(a) \right| \leq \frac{\alpha!(\alpha_1 + 2)...(\alpha_n + 2)}{(2\pi)^n r^{\alpha + \mathbf{2}}} \int\limits_{D^n(a,r)} |f(w)| dw, \tag{1.11}$$

où $\mathbf{2} = (2, 2, ..., 2) \in \mathbb{N}^n$.

La propriété de la moyenne est aussi un corollaire très important de la formule de Cauchy :

Corollaire 1.18. *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, et soit $\overline{D^n(z,\mathbf{r})} \subset \Omega$, alors :*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi r)^n} \int\limits_{D^n(z,\mathbf{r})} f(w)dw, \tag{1.12}$$

et plus généralement on a

$$\partial^\alpha f(z) = \frac{\prod_{j=1}^n (\alpha_j+1)!}{r^{2|\alpha|}} \frac{1}{(2\pi r)^n} \int\limits_{D^n(z,\mathbf{r})} f(w)\overline{(w-z)^\alpha}dw. \tag{1.13}$$

Le principe du prolongement analytique suivant est aussi un corollaire de la formule de Cauchy [29]. Ça entraîne en particulier que si deux fonctions holomorphes dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ coïncident au voisinage d'un point, elles sont égales dans Ω tout entier.

Corollaire 1.19. *Soit f une fonction holomorphe sur un domaine Ω (ouvert connexe). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $f \equiv 0$ sur Ω.

ii) Il existe un ouvert non vide $V \subset \Omega$ tel que $f\,|_V \equiv 0$.

iii) Il existe un point $a \in \Omega$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha} f(a) = 0$.

Maintenant, on établie le principe de maximum assurant que le module d'une fonction holomorphe sur un domaine atteint son maximum sur sa frontière :

Corollaire 1.20. *Soit f une fonction holomorphe sur un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$. S'il existe un point $a \in \Omega$ tel que $|f(z)| \leq |f(a)|$ pour tout z dans un voisinage de a, alors f est constante sur Ω. Autrement dit, si f n'est pas constante, on a $|f(z)| \leq \sup\limits_{\xi \in \partial\Omega} |f(\xi)|$ pour tout $z \in \Omega$.*

Le corollaire suivant concerne le développement d'une fonction en série de Taylor [28, 29] :

Corollaire 1.21. *Si f est une fonction holomorphe sur le polydisque ouvert $D^n(a,r)$, alors*

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(z-a)^k.$$

Démonstration. La démonstration est la même que pour le cas d'une variable. En développant la fonction $z \longrightarrow \frac{1}{z-w}$ en série entière :

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{w^{k+1}},$$

et en utilisant les formules de Cauchy 1.5 et 1.6, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{f^k(a)}{k!}(z-a)^k &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n(a,r)} f(w) \sum_k \frac{(z-a)^k}{(w-a)^{k+1}} dw, \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw = f(z). \end{aligned}$$

□

Et on a aussi le théorème de l'application ouverte suivant [28, 29] :

Corollaire 1.22. *Soit Ω un domain de $\mathbb{C}^n$ et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante sur Ω, alors f est une application ouverte (i.e. l'image d'un ouvert de Ω par f est un ouvert de $\mathbb{C}$).*

Le résultat suivant est le fameux lemme de Schwarz [28, 29, 41] :

Théorème 1.23. *Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage du polydisque $\overline{D^n(\mathbf{0}, \mathbf{r})}$, où $\mathbf{r} = (r, ..., r)$ et $\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$. On suppose que $\mathbf{0}$ est un zéro de f d'ordre supérieur ou égale à k pour certain $k \in \mathbb{N}$, et que $|f| \leq M$ sur $\overline{D^n(\mathbf{0}, \mathbf{r})}$. Alors $|f(z)| \leq M \left|\frac{z}{r}\right|^k$, pour tout $z \in \overline{D^n(\mathbf{0}, \mathbf{r})}$.*

Démonstration. Comme $\mathbf{0}$ est un zéro d'ordre au moins k, on a $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$, le développement de f en série de polynômes homgènes. Soit $z \in D^n(\mathbf{0}, \mathbf{r}) \backslash \{\mathbf{0}\}$ fixé, on définit la fonction $g(t) = \dfrac{f\left(\frac{tz}{|z|}\right)}{t^k}$. La fonction g est holomorphe sur le disque $D(0, r)$ et $|g(t)| \leq \frac{M}{r^k}$ pour tout $|t| = r$. Alors, d'après le principe de maximum $\dfrac{|f(z)|}{|z|^k} = |g(|z|)| \leq \dfrac{M}{r^k}$, et donc $|f(z)| \leq M |\dfrac{z}{r}|^k$. □

Définition 1.24. *Soient Ω, Ω_1, $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^n$.*

1. *Une application $f = (f_1, ..., f_m) : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est dite holomorphe si chaque composante $f_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe.*
2. *Une application $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ est dite biholomorphe si elle est holomorphe et sa réciproque est aussi holomorphe.*
3. *S'il existe une application biholomorphe $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$, alors Ω_1 est dit biholomorphe à Ω_2.*
4. *Le groupe des applications biholomorphes d'un domain dans lui-même est appelé le groupe d'automorphismes de Ω, et est noté $Aut(\Omega)$.*
5. *Soient $a \in \Omega$, on peut former le sous-groupe $Aut_a(\Omega)$ des applications biholomorphes sur Ω qui laissent a invariant.*

À ce stade-là, une question fondamentale dans la théorie des fonctionsde plusieurs variables complexes consiste à savoir si la boule unité $\mathbb{B}_n$ et le polydisque unité $\mathbb{D}^n$ sont biholomorphes. Le Théorème de Poincaré suivant répond négativement à cette question [26, 28] :

Proposition 1.25. *Si $n \geq 2$, la boule unité $\mathbb{B}_n$ n'est pas biholomorphe au polydisque $\mathbb{D}^n$.*

Définition 1.26. *Pour un multi-indice k, une fonction f de la forme $f(z) = \sum_{|k|=N} a_k z^k$ est dite un polynôme homogène de degrée N.*

Maintenant, on établit le théorème d'unicité de Cartan suivant [28, 29] :

Proposition 1.27. *Soit Ω un domain borné de $\mathbb{C}^n$ et étant donné $a \in \Omega$. Si $f \in Aut_a(\Omega)$ satisfait $f'(a) = 1$, alors $f(z) = z$ pour tout $z \in \Omega$.*

Définition 1.28. *Un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dit circulaire s'il satisfait la propriété suivante : si $z \in \Omega$ alors $\left(e^{i\theta}z_1, e^{i\theta}z_2, ..., e^{i\theta}z_n\right) \in \Omega$ pour tout $z \in \Omega$ et tout $0 \leq \theta < 2\pi$.*

Corollaire 1.29. *Soit Ω un domain borné de $\mathbb{C}^n$, et supposons que $0 \in \Omega$ et que $f \in Aut_0(\Omega)$. Alors, f est linéaire.*

On arrive maintenant au résultat fondamental suivant :

Corollaire 1.30. *Toute fonction* $f = (f_1, ..., f_n) \in Aut(\mathbb{D}^n)$ *sécrit sous la forme*

$$f_j(z) = e^{i\theta_j} \frac{z_{p(j)} - a_j}{1 - \overline{a}_j z_{p(j)}}, \tag{1.14}$$

où $\theta_j \in \mathbb{R}, \;\; a \in \mathbb{D}^n$ *et* p *est une permutation de multi-indice* $j = (j_1, ..., j_n)$.

Démonstration. L'application définie dans l'équation (1.14) est clairement un automorphisme. On note σ_a de tel automorphisme, si $\theta_j = 0$ et $p = Id$. Étant donné $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}^n)$, l'automorphisme $\sigma_a \circ f$ laisse 0 invariant.
Donc, on peut supposer que $f \in \mathrm{Aut}_0(\mathbb{D}^n)$. Comme $\mathbb{D}^n$ est un domain circulaire, le corollaire précédent assure que f est linéaire : $f_k(z) = \sum A_{kj} z_j$. Comme $f(\mathbb{D}^n) \subset \mathbb{D}^n$, on a $\sum_{k=1}^n |A_{kj}| \leq 1$.
Cepandant, en choisissant une suite $z^{(n)} = (0, ..., 0, 1 - \frac{1}{n}, 0, ..., 0)$ convergeant vers le tore distinguée $\mathbb{T}^n$, on voit que $f(z^{(n)}) = (1 - \frac{1}{n})(A_{ij}, ..., A_{nj})$ converge aussi vers $\mathbb{T}^n$. On obtient donc $|A_{q(j)j}| := \max_{k=1,...,n} |A_{kj}| = 1$. Comme $\sum_{k=1}^n |A_{kj}| \leq 1$, on sait que A_{kj} est une matrice de permutation à coefficients non nuls de norme 1 seulement aux positions $A_{q(j)j}$. Si p est la permutation inverse de q, alors $f_k(z) = A_{k,p(k)} z_{p(k)}$ avec $|A_{k,p(k)}| = 1$. $\square$

On aura besoin de l'inégalité de Jensen suivante [28] :

Théorème 1.31. *Soit* f *une fonction holomorphe sur un voisinage du polydisque* $\overline{\mathbb{D}}^n(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, $(\mathbf{r} = (r_1, ..., r_n), r_j > 0)$. *Alors on a :*

$$\log |f(0)| \leq \frac{1}{\pi^n r_1^2 ... r_n^2} \int_{\overline{\mathbb{D}}^n(\mathbf{0}, \mathbf{r})} \log |f(z)| d\lambda(z),$$

avec $\log |f(0)| = -\infty$ *si* $f(\mathbf{0}) = 0$.

Le corollaire suivant affirme que le principe de continuation analytique, à savoir : "si Ω est un domain de $\mathbb{C}^n$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe qui est nulle sur un ouvert non vide de Ω, alors f est identiquement nulle", est encore valable en plusieurs dimensions :

Corollaire 1.32. *Soit* f *une fonction holomorphe non identiquement nulle sur un domaine* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, *alors l'ensemble* $\Lambda = \{z \in \Omega, \;\; f(z) = 0\}$ *est de mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. Λ est d'intérieur vide d'après le théorème du prolongement analytique, (Corollaire 1.19). $\Omega \setminus \Lambda$ est dense dans Ω, il s'ensuit qu'il existe une suite $z^{(k)} \in \Omega \setminus \Lambda$ et une suite $\overline{D}_k = \overline{D}_k(z^{(k)}, r^{(k)})$ de polydisque de centre $z^{(k)}$ telles que $\bigcup_k \overline{D}_k = \Omega$. Il en résulte du théorème de Jensen 1.31 précédent que $\int_{\overline{D}_k} \log|f(z)| d\lambda(z) > -\infty$; et donc f ne peut pas s'annuler sur un ensemble de mesure positive dans $\overline{D}_k$. Comme $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\Lambda \bigcap \overline{D}_k)$, alors Λ est de mesure nulle. □

On termine cette section par un problème de prolongement des fonctions holomorphes. En particulier, on établit les théorèmes de Hartogs et de Weierstrass respectivement. Pour plus de details, on renvoie le lecteur aux manuscrits [26, 28, 38, 29] :

Théorème 1.33. *Soit f une fonction holomorphe bornée sur l'ouvert*

$$\Omega = \mathbb{D}^n \setminus \{z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n; z_n = 0\},$$

avec $n \geq 2$. Alors f se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}^n$.

Théorème 1.34. *Soit Ω un voisinage de $\mathbf{0}$ dans $\mathbb{C}^n$ avec $n \geq 2$, et soit f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{\mathbf{0}\}$. Alors f se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω.*

On en déduit un résultat d'importance égale :

Corollaire 1.35. *Pour $n \geq 2$, les zéros d'une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ne sont pas isolés.*

1.2 Rappel d'analyse fonctionnelle

Dans cette section nous rappellons quelques notions générales sur les opérateurs linéaires bornés dans un espace de Hilbert quelconque, telles que : orthogonalité, espaces à noyau reproduisant, l'opérateur adjoint, les opérateurs auto-adjoints, les opérateurs normaux, les opérateurs unitaires, les opérateurs isométriques, les projecteurs, les opérateurs de rang fini et compacts. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [13, 37, 39, 52].

Définition 1.36. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de $\mathcal{H}$ est dite :*

- *orthogonale si $\langle e_i, e_j\rangle = 0, pour\ tout\ \ i, j \in I$ tels que $i \neq j$.*
- *orthonormée si $\langle e_i, e_j\rangle = 0, pour\ tout\ i, j \in I$ tels que $i \neq j$ et $\langle e_i, e_i\rangle = 1, pour\ tout\ i \in I$.*
- *totale si elle est dense dans $\mathcal{H}$, i.e. $\{e_j,\ j \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \{0\}$.*
- *base hilbertienne de $\mathcal{H}$ si c'est une famille orthonormée et totale de vecteur de $\mathcal{H}$.*

Proposition 1.37. *[13, 39]*
Pour tout sous-ensemble $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on note

$$\mathcal{M}^{\perp} := \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y\rangle = 0, pour\ tout\ \ y \in \mathcal{M}\},$$

l'orthogonal de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{H}$. Notons que $\mathcal{M}^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$, et on a de plus :

- *Si $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, alors $\mathcal{M}^{\perp} \subset \mathcal{N}^{\perp}$.*
- *$\mathcal{M} \subset (\mathcal{M}^{\perp})^{\perp}$.*
- *$\overline{\mathcal{M}}^{\perp} = \mathcal{M}^{\perp}$.*

Corollaire 1.38. *[13, 39]*
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Alors,

- *Si $\mathcal{M}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$, alors on a $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp} = \mathcal{H}$.*
- *Si $\mathcal{N}$ est un sous-espace de $\mathcal{H}$, alors on a*

$$\overline{\mathcal{N}} \oplus \mathcal{N}^{\perp} = \mathcal{H}\ et\ \left(\mathcal{N}^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{\mathcal{N}}.$$

Définition 1.39. *Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert et $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, ($\mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ étant l'algèbre de tous les opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$). L'opérateur adjoint de T est l'opérateur linéaire $T^* : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ caractérisé par*

$$\langle T^* y, x\rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle y, Tx\rangle_{\mathcal{H}_2},\ \forall x \in \mathcal{H}_1\ et\ y \in \mathcal{H}_2.$$

Théorème 1.40. *[52]*

Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert, et soit $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Alors, on a :

- $(T^*)^* = T$.
- $\|T^*\| = \|T\|$ *et* $\|T^*T\| = \|T\|^2$.
- *La fonction $f_* : \mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \to \mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ définie par $f_*(T) = T^*$ est continue.*

Lemme 1.41. *[13, 52]*

Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert, et soit $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Si le noyau de l'opérateur T est noté $Ker(T)$ et son image est notée $Ran(T)$, alors on a :

- $ker(T) = (Ran(T^*))^{\perp}$.
- $ker(T^*) = (Ran(T))^{\perp}$.
- $ker(T^*) = \{0\}$ *si et seulement si $Ran(T)$ est dense dans $\mathcal{H}_2$.*

On conclut que $\overline{Ran(T)} = \ker(T^*)^{\perp}$ et $\overline{Ran(T^*)} = \ker(T)^{\perp}$.

Définition 1.42. *On dit qu'un sous-espace fermé $\mathcal{M}$ d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ admet un supplémentaire (complémentaire) orthogonal s'il existe un sous-espace fermé $\mathcal{N}$ de $\mathcal{H}$ tel que $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$.*

De plus, on a le théorème de l'image fermée suivant [13, 39] :

Théorème 1.43. *Soient $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert. Alors pour tout $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ les assertions suivantes sont équivalentes.*

- *$Ran(T)$ est fermé.*
- $Ran(T) = (ker(T^*))^{\perp}$.
- *$Ran(T^*)$ est fermé.*
- $Ran(T^*) = (ker(T))^{\perp}$.

Définition 1.44. *Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$. Alors, on a*

$$\mathcal{H} = \mathcal{M} + \mathcal{M}^{\perp},$$

et, pour tout $x \in \mathcal{H}$, il existe $x_1 \in \mathcal{M}$ et $x_2 \in \mathcal{M}^{\perp}$ tels que $x = x_1 + x_2$. En posant $\mathcal{P}x = x_1$ et puisque $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$, on obtient un opérateur linéaire borné $\mathcal{P} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{M}$. L'opérateur $\mathcal{P}$ est appelé une projection orthogonale de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{M}$.

Théorème 1.45. *Soient $\mathcal{M}$ un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{P}$ un opérateur sur $\mathcal{H}$. Alors, $\mathcal{P}$ est une projection orthogonale de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{M}$ si et seulement si $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$ et $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ (il est idempotent), et de plus $\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{H},\ \mathcal{P}x = x\} = \mathcal{P}\mathcal{H}$.*

Théorème 1.46. *Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace fermé non-trivial de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors il existe une projection orthogonale $\mathcal{P}$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{M}$, qui est un opérateur linéaire borné de norme 1. De plus, l'opérateur $Q = I - P$ est aussi une projection orthogonale de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{M}^{\perp}$, et sa norme est aussi égale à 1, et on a $\mathcal{M}^{\perp} = \{x \in \mathcal{H},\ \mathcal{P}x = 0\}$.*

Proposition 1.47. *[13, 52]*
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\mathcal{P}$ une projection linéaire bornée sur $\mathcal{H}$. Alors

- *$I - \mathcal{P}$ est aussi une projection linéaire bornée.*
- *$Ran(\mathcal{P}) = ker(I - \mathcal{P})$ et $ker(\mathcal{P}) = Ran(I - \mathcal{P})$.*
- *$\mathcal{H} = ker(\mathcal{P}) \oplus Ran(\mathcal{P})$.*
- *$ker(\mathcal{P})$ et $Ran(\mathcal{P})$ sont des sous-espaces vectoriels fermés de $\mathcal{H}$.*
- *si $\mathcal{P} \neq 0$, alors $\|\mathcal{P}\| \geq 1$.*

Un résultat très important dans la théorie des espaces de Hilbert est le théorème de représentation de Riesz [13] :

Théorème 1.48. *L'application Ψ sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est une fonctionnelle linéaire bornée si et seulement s'il existe un élément $z \in \mathcal{H}$ tel que $\Psi(x) = \langle z, x \rangle$ pour tout $x \in \mathcal{H}$, et on a $\|\Psi\| = \|z\|$.*

Définition 1.49. *Soient $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ des espaces de Hilbert. Alors :*

1. *L'opérateur $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ est dit auto-adjoint si $A = A^*$.*

2. *L'opérateur* $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ *est dit normal si* $AA^* = A^*A$.

3. *L'opérateur* $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ *est dit isometrique si* $S^*S = I_{\mathcal{H}}$.

4. *L'opérateur* $U \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ *est dit unitaire si* $UU^* = I_{\mathcal{H}_2}$ *et* $U^*U = I_{\mathcal{H}_1}$, *i.e.* $U^* = U^{-1}$.

5. *L'opérateur* $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ *est dit positif, s'il est auto-adjoint et pour tout* $x \in \mathcal{H}, \langle Ax, x\rangle \geq 0$.

Maintenant on donne la définition d'opérateur anti-unitaire :

Définition 1.50. *Soient* $\mathcal{H}_1$ *et* $\mathcal{H}_2$ *deux espaces de Hilbert. Un opérateur* $A : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ *est dit anti-unitaire s'il satisfait les propriétés suivantes :*

1. $\langle Af, Ag\rangle_{\mathcal{H}_2} = \overline{\langle f, g\rangle}_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall f, g \in \mathcal{H}_1,$

2. $A(f+g) = Af + Ag, \quad \forall f, g \in \mathcal{H}_1,$

3. $A(\alpha f) = \overline{\alpha} Af, \quad \forall f \in \mathcal{H}_1,\ \alpha \in \mathbb{C},$

où $\langle ., .\rangle_{\mathcal{H}_i}$, $i = 1, 2$, *désigne le produit scalaire de l'espace en question.*

Selon la définition de similarité et d'équivalence unitaire de deux opérateurs, on peut établir la définition d'équivalence anti-unitaire de deux opérateurs :

Définition 1.51. *Sient* A_1 *et* A_2 *deux opérateurs agissant sur les deux espaces de Hilbert* $\mathcal{H}_1$ *et* $\mathcal{H}_2$ *respectivement. Alors, l'opérateur* A_1 *est dit anti-unitairement équivalent à* A_2 *s'il existe un opérateur anti-unitaire* V *de* $\mathcal{H}_1$ *dans* $\mathcal{H}_2$ *tel que* $A_2V = VA_1$.

Théorème 1.52. *Soit* $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert. Un opérateur* $A \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ *est normal si et seulement si* $||Ax|| = ||A^*x||$ *pour tout* $x \in \mathcal{H}$.

Théorème 1.53. *[13] Soient* $\mathcal{H}_1$ *et* $\mathcal{H}_2$ *deux espaces de Hilbert, et* $U \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. *Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *U est unitaire.*

2. $Ran(U) = \mathcal{H}_2$ *et* $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ *pour tous* $x, y \in \mathcal{H}_1$.

3. *$Ran(U) = \mathcal{H}_2$ et $\|Ux\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathcal{H}_1$.*

Définition 1.54. *Soient A et B deux opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors, on a les deux notions suivantes :*

1. *On dit que A et B commutent, si $AB = BA$.*
2. *L'opérateur $[A, B] = AB - BA$ est appelé le commutateur de A et B.*

Parmi tous les opérateurs continus sur un espace de Hilbert, on peut distinguer une classe importante d'opérateurs, dont les propriétés sont les plus proches de celles des opérateurs linéaires sur les espaces de dimensions finies. C'est la classe des opérateurs compacts, appelés aussi opérateurs complètement continus. Les deux exemples types des opérateurs compacts sont :

- Opérateurs de rang fini.
- Opérateurs de Hilbert-Schmidt.

On désigne par $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$ la boule unité fermée de $\mathcal{H}$, i.e. $\mathcal{B}_{\mathcal{H}} := \{x \in \mathcal{H},\ \|x\|_{\mathcal{H}} \leq 1\}$.
Nous commençons tout d'abord par rappeler la définition d'un opérateur compact :

Définition 1.55. *Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert. Un opérateur linéaire $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ est dit compact si pour tout sous-ensemble borné $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{H}_1$ son image $T(\mathfrak{B})$ est un sous-ensemble relativement compact de $\mathcal{H}_1$, c'est-à-dire que l'adhérence (fermeture) de $T(\mathfrak{B})$ est compact dans $\mathcal{H}_2$.*
L'ensemble des opérateurs compacts de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$ est noté $\mathscr{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$; et si $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, on le note tout simplement $\mathscr{K}(\mathcal{H})$.

Proposition 1.56. *[13] Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert.*

- *$\mathscr{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ est un propre sous-espace fermé de $\mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.*
- *Si $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, $S \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$, et S ou T est compact, alors $ST \in \mathscr{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$. En particulier, $\mathscr{K}(\mathcal{H})$ est donc un idéal bilatère de l'algèbre $\mathscr{B}(\mathcal{H})$.*

Proposition 1.57. *(Le théorème de Schauder [13]).*
Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert. L'opérateur $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ est compact si et seulement si son adjoint T^* est compact.

Théorème 1.58. *(Le théorème de Riesz [13])*
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Alors, sa boule unité fermée $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$ est compact si et seulement si $\mathcal{H}$ est de dimention finie.

Remarque 1.59. *Une conséquence directe du théorème de Riesz asserte que l'application identité sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est compact si et seulement si cet espace est de dimension finie.*

Maintenant, on va développer quelques propriétés de ces deux classes concrètes d'opérateurs compacts mentionnées ci-dessus.

Définition 1.60. *Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert, et soit $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. On dit que T est un opérateur de rang fini si $Ran(T)$ est de dimension finie ; i.e. le rang d'un opérateur est par définition la dimension de son image.*

Théorème 1.61. *Tout opérateur de rang fini est une combinaison linéaire d'opérateurs de rang* 1*.*

Proposition 1.62. *[13, 39, 52] Tout opérateur borné de rang fini est compact.*

Proposition 1.63. *[13, 39, 52] Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et soit $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *T est compact.*
- *Il existe une suite $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ d'opérateurs de rang fini telle que $T_n \to T$ en norme dans $\mathscr{B}(\mathcal{H})$.*

Théorème 1.64. *[13, 39, 52] Un opérateur borné T sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est de rang fini si et seulement si son adjoint T^* l'est aussi. Dans ce cas-là, T et T^* ont le même rang.*

Proposition 1.65. *[13, 39, 52] Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert, et soit $T \in \mathscr{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Alors, $Ran(T)$ est fermé si et seulement si T est de rang fini.*

Théorème 1.66. *Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert, et soit $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Alors* *(a)* *Si* $\dim T(\mathcal{H}_1) < \infty$*, alors* T *est compact.*

(b) *Si* $\dim \mathcal{H}_1 < \infty$*, alors l'opérateur* T *est compact.*

Définition 1.67. *Étant donné* f *et* g *deux éléments de l'espace de Hilbert* $\mathcal{H}$*, on définit l'opérateur* $f \otimes g$*, envoyant* $\mathcal{H}$ *dans lui même par :* $(f \otimes g)(h) = \langle h, g \rangle f$.

Théorème 1.68. *(i) Si* T *est un opérateur de rang* 1*, alors il existe* f *et* g *dans l'espace de Hilbert* $\mathcal{H}$ *tels que* $T = f \otimes g = \langle h, g \rangle f$.

(ii) $\|f \otimes g\| = \|f\| \, \|g\|$

(iii) $(f \otimes g)^* = g \otimes f$.

Démonstration. (i) Puisque l'image de T est uni-dimensionelle, il existe un élément $f \neq 0$ de Ran (T) et une fonctionnelle linéaire bornée Ψ tels que $T(h) = \Psi(h)f, \ \forall h \in \mathcal{H}$. D'après le théorème de représentation de Riesz, Théorème 1.48, il existe un $g \in H$ tel que $\Psi(h) = \langle h, g \rangle$ pour tout $h \in \mathcal{H}$. Par conséquent, on obtient $T(h) = \langle h, g \rangle f = (f \otimes g)(h)$.

(ii) Soit $h \in \mathcal{H}$. Alors $\|(f \otimes g)(h)\| = \|\langle h, g \rangle f\| \leq \|h\| \, \|g\| \, \|f\|$.

Il en résulte que $\sup\limits_{\|h\|=1} \|(f \otimes g)(h)\| \leq \|g\| \, \|f\|$, c'est à dire, $\|f \otimes g\| \leq \|f\| \, \|g\|$.

Et inversement, si $0 \neq g \in \mathcal{H}$, on a :

$$\|f \otimes g\| \geq \left\| (f \otimes g) \frac{g}{\|g\|} \right\| = \left\| \left\langle \frac{g}{\|g\|}, g \right\rangle f \right\| = \|g\| \, \|f\|.$$

Par conséquent, on obtient $(f \otimes g)^* = g \otimes f$.

(iii) Par définition d'un opérateur de rang 1, on a

$$\langle (f \otimes g)h, \ell \rangle = \langle \langle h, f \rangle g, \ell \rangle = \langle h, f \rangle \langle g, \ell \rangle = \langle h, \langle \ell, g \rangle f \rangle = \langle h, (g \otimes f)\ell \rangle.$$

Cela entraîne que $(f \otimes g)^* = g \otimes f$.

□

Remarque 1.69. *Si* T *et* S *sont deux opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$*, alors pour* f*,* $g \in \mathcal{H}$ *on a*

$$T(f \otimes g)S^* = (Tf) \otimes (Sg).$$

En effet, pour toute $h \in L^2(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}(T(f\otimes g)S^*)(h) &= (T(f\otimes g))(S^*(h)) = T((f\otimes g)(S^*(h))),\\ &= T(\langle S^*(h), g\rangle\, f) = \langle S^*(h), g\rangle\, T(f),\\ &= \langle h, S(g)\rangle\, T(f) = (T(f)\otimes S(g))(h).\end{aligned}$$

Maintenant, nous rappelons quelques notions de la théorie des noyaux reproduisants ; pour plus de details on renvoie á [15, 23]. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$. L'espace $\mathcal{H}(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur Ω est muni de la topologie de convergence uniforme sur les compacts. Un espace hilbertien de fonctions holomorphes sur Ω est une sous-espace $\mathscr{H}$ de $\mathcal{H}(\Omega)$ qui est muni d'une structure d'espace de Hilbert telle que l'injection $\mathscr{H} \hookrightarrow \mathcal{H}(\Omega)$ soit continue. En d'autres termes, pour tout compact $\Upsilon \subset \Omega$ il existe une constante C t.q. $|f(z)| \leq C\|f\|$, pour tout $f \in \mathscr{H}$ et tout $z \in \Upsilon$.
Si $\mathscr{H}$ est un espace hilbertien de fonctions holomorphes sur Ω, alors pour chaque $z \in \Omega$, l'application $\mu_z : f \in \mathscr{H} \longrightarrow f(z) \in \mathbb{C}$ est continue. Le théorème de représentation de Riesz 1.48 entraîne l'existence d'une unique fonction $K_z \in \mathscr{H}$ satisfaisant

$$f(z) = \langle f,\ K_z\rangle\,,\ \text{pour tout}\ \ f \in \mathscr{H}. \tag{1.15}$$

Cette fonction $K_z(w) = K(w,z)$ s'appelle le noyau reproduisant de $\mathscr{H}$; et on a l'assertion suivante :

Proposition 1.70. *Le noyau reproduisant K_z possède les propriétés suivantes :*

1. *K_z est hermitien, i.e. $\overline{K(z,w)} = K(w,z)$.*
2. *K_z est définit positif, i.e. $\displaystyle\sum_{j,k=1}^{N} K(z_k,z_j)\alpha_j\overline{\alpha}_k \geq 0,\ \forall z_1,...,z_N \in \Omega,\ \forall \alpha_1,...,\alpha_N \in \mathbb{C}$.*

En particulier, $K(z,z) \geq 0,\ \forall z \in \Omega$, et $K(z,z) = 0$ si et seulement si $f(z) = 0$ pour chaque fonction $f \in \mathscr{H}$.

Démonstration. Il résulte de la définition que :

$$K(z,w) = \langle K_w, K_z\rangle = \overline{\langle K_z, K_w\rangle} = \overline{K(w,z)}.$$

D'où on obtient $K(z,z) = \|K_z\|^2 \geq 0$. D'autre part, on a également

$$\sum_{j,k=1}^{N} K(z_k, z_j)\alpha_j\overline{\alpha}_k = \sum_{j,k=1}^{N} \left\langle K_{z_j}, K_{z_k} \right\rangle \alpha_j\overline{\alpha}_k = \left\| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j K_{z_j} \right\|^2 \geq 0.$$

□

Remarque 1.71. *1. $K(z,w)$ est holomorphe en z et anti-holomorphe en w.*

2. D'après le théorème de Hartogs, voir 1.16, $K(z,\overline{w})$ est holomorphe sur $\Omega \times \overline{\Omega}$. En particulier, $K(z,w)$ est continu sur $\Omega \times \overline{\Omega}$.

3. La norme de la fonctionnelle $\Psi_z : f \longrightarrow f(z)$, pour $z \in \Omega$ est égale à $\|K_z\|$. Il en résulte que

$$K(z,z) = \max_{f \in \mathscr{H}, ||f|| \leq 1} |f(z)|^2, \ z \in \Upsilon \Subset \Omega \ (compact).$$

Enfin, on termine avec le résultat suivant [15], (voir aussi [23]) :

Proposition 1.72. *L'espace hilbertien des fonctions holomorphes $\mathscr{H}$ est séparable, et pour toute base hilbertienne $\{\psi_m\}$ de $\mathscr{H}$ on a*

$$K(z,w) = \sum_{m} \psi_m(z)\overline{\psi_m(w)}. \tag{1.16}$$

La convergence étant absolue et uniforme sur tout compact de $\Omega \times \Omega$.

Chapitre 2

Opérateurs de type Toeplitz sur les espaces de Hardy et de Bergman

Le but de ce chapitre est d'introduire les espaces de Hardy et de Bergman sur le polydisque unité $\mathbb{D}^n$, et de donner leurs propriétés élémentaires, ainsi que les propriétés fondamentales de leurs opérateurs, à savoir les opérateurs de Toeplitz, de Hankel et de Toeplitz duaux. On renvoie le lecteur à [14, 17, 23, 37, 42, 43, 51, 52, 53] pour plus de détails.

2.1 Espaces de Hardy et de Bergman

Soit $d\sigma(\zeta)$ la mesure de Haar normalisée sur le n-tore $\mathbb{T}^n$ défini par (1.3). Il est obtenu en effectuant n-fois le produit de la mesure normalisée de Lebesgue sur $\mathbb{T}$, i.e. on a

$$d\sigma(\zeta) = \frac{d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n}{(2\pi)^n} \quad \text{où} \quad \zeta_j = e^{i\theta_j}, : j = 1, \dots, n,$$

et donc

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_n})\, d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n. \tag{2.1}$$

Ainsi, l'espace de Lebesgue $L^1(\mathbb{T}^n, d\sigma)$ est défini d'une manière usuelle comme suit :

$$L^1(\mathbb{T}^n, d\sigma) = \left\{ f : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C},\ \int_{\mathbb{T}^n} |f(\zeta)|\, d\sigma(\zeta) < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$||f||_1 := \int_{\mathbb{T}^n} |f(\zeta)|\, d\sigma(\zeta).$$

De même, pour $1 < p < \infty$, on définit les autres espaces $L^p(\mathbb{T}^n, d\sigma)$ comme suit :

$$L^p(\mathbb{T}^n, d\sigma) = \left\{ f : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C},\ \int_{\mathbb{T}^n} |f(\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta) < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$||f||_p := \left(\int_{\mathbb{T}^n} |f(\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $L^\infty(\mathbb{T}^n)$ est celui des fonctions essentiellement bornées muni de la norme sup :

$$||f||_\infty = \underset{z \in \mathbb{T}^n}{\text{ess. sup}} \{|f(z)|\}.$$

Pour cet espace, on a le résultat important suivant :

Lemme 2.1. *Soient $f, g \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$. Pour toute $i,\ i = 1, ..., n$, supposons que $\overline{f(z)}$ soit analytique en z_i ou bien $g(z)$ soit analytique en z_i. Alors $fg = 0$ entraîne que $f = 0$ ou bien $g = 0$.*

Le cas $p = 2$ est d'une importance particulière due à la structure hilbertienne de $L^2(\mathbb{T}^n)$. En effet, cet espace de Hilbert est défini comme suit :

$$L^2(\mathbb{T}^n, d\sigma) = \left\{ f : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C},\ ||f||_2 := \left(\int_{\mathbb{T}^n} |f(\zeta)|^2\, d\sigma(\zeta) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}, \tag{2.2}$$

avec le produit scalaire suivant :

$$< f,\ g >:= \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta)\overline{g(\zeta)} d\sigma(\zeta). \tag{2.3}$$

Rappelons les définitions (1.9) et (1.10) des fonctions harmoniques et pluri-harmoniques, et commençons tout d'abord par donner un apperçu sur les fonctions n-harmoniques. Une fonction n-harmonique u sur le polydisque $\mathbb{D}^n$ est une fonction harmonique pour toute variable séparément.

Notons par $h^p(\mathbb{D}^n)$ l'espace de toutes les fonctions n-harmoniques satisfaisant

$$\sup_{0 \le r < 1} \int_{\mathbb{T}^n} |u_r(\zeta)|^p d\sigma(\zeta) < \infty, \text{ où } u_r(\xi) = u(r\xi). \tag{2.4}$$

La p-ième racine de (2.4) définit une norme sur $h^p(\mathbb{D}^n)$ pour $p \geq 1$. Muni de cette norme, l'espace $h^p(\mathbb{D}^n)$ est un espace de Banach. On introduit aussi les notations suivantes. Pour $z = (z_1, ..., z_n)$ et $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n)$, posons

$$P(z, \zeta) = P(z_1, \zeta_1)...P(z_n, \zeta_n), \tag{2.5}$$

où $P(z_j, \zeta_j)$ est le noyau de Poisson en une variable, donné par

$$P(z_j, \zeta_j) = \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta_j + z_j}{\zeta_j - z_j}\right) = \frac{1 - |z_j|^2}{|\zeta_j - z_j|^2}, \qquad j = 1, ..., n. \tag{2.6}$$

C'est à dire que

$$P(z, \zeta) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - |z_j|^2}{|\zeta_j - z_j|^2} = \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - |z_j|^2}{|1 - z_j \overline{\zeta_j}|^2}, (\text{ puisque } \ |\zeta_j| = 1). \tag{2.7}$$

On note par $P[f]$ l'intégrale de Poisson de la fonction f, définie comme suit :

$$\left(P[f]\right)(z) := \widehat{f}(z) := \int_{\mathbb{T}^n} P(z, \zeta) f(\zeta) d\sigma(\zeta). \tag{2.8}$$

Et on a le résultat suivant à propos de la représentation intégrale des fonctions harmoniques sous la forme d'une intégrale de Poisson [14, 42, 43].

Théorème 2.2. *Soit $u \in h^p(\mathbb{D}^n)$, $p > 1$. Alors il existe une fonction $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ telle que*

$$u(z) = \int_{\mathbb{T}^n} P(z, \zeta) f(\zeta) d\sigma(\zeta).$$

Notons que le même résultat demeure valable pour $p = \infty$ [42] :

Théorème 2.3. *Si l'hypothèse du Théorème 2.2 est vérifiée pour $p = 1$, alors il existe une mesure finie signée μ sur $\mathbb{T}^n$ telle que*

$$u(z) = \int_{\mathbb{T}^n} P(z, \zeta) d\mu(\zeta).$$

On constate que toute fonction harmonique $u \in h^p(\mathbb{D}^n)$, $p > 1$, est l'intégrale de Poisson d'une fonction $f \in L^p(\mathbb{D}^n)$, et on se pose alors la question suivante : existe-t-il un lien entre u et f ?

À ce propos, on sait que pour $n = 1$, f est la valeur frontière de u, tandis que dans le cas $n > 1$ on a le résultat suivant [41, 42].

Théorème 2.4. *Soient $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ et ρ une mesure sur $\mathbb{T}^n$ qui est singulière par rapport à $d\sigma$. Si $u = P[f + d\rho]$, alors $u^*(\zeta) = f(\zeta)$ pour presque tout $\zeta \in \mathbb{T}^n$.*

D'autre part, rappelons que

$$u^*(\xi) := \lim_{r \to 1} u(r\xi)$$

est la limite radiale de u. Alors les valeurs de toute fonction n-harmonique satisfaisant l'estimation (2.4) pour $p > 1$ peuvent être récupérées via l'intégrale de Poisson à partir de ses valeurs au bord.

Pour $p = 1$, on a vu dans le Théorème 2.3 que $u(z) = P[d\mu](z)$. Donc, le Théorème de décomposition de Lebesgue entraîne que

$$d\mu = f d\sigma + d\rho$$

où ρ est singulière par rapport à σ et $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$. Alors on a $u^*(\xi) = f(\xi)$ mais u ne peut pas être récupérée à partir de sa valeur au bord en utilisant l'intégrale de Poisson, sauf si l'on a $P[d\rho] = 0$.

D'autre part, d'après Rudin [41], on sait que si $f \in L^p(\mathbb{T}^n), 1 \leq p < \infty$, et $u = P[f]$, alors u_r converge vers f par rapport à la norme L^p quand $r \to 1$, i.e. $\lim\limits_{r \to 1} \|u_r - f\|_{L^p} = 0$. Mais pour $p = 1$, on a que de la convergence faible-$*$ [42].

Théorème 2.5. *Soit $f(z) = P[d\mu](z)$ telle que μ est une mesure finie signée sur $\mathbb{T}^n$. Alors $f_r d\sigma \to d\mu$ faiblement-$*$ quand $r \to 1$.*

Maintenant, on se contente de décrire l'espace de Hardy analytique en question. Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace de Hardy $\mathcal{H}^p(\mathbb{D}^n)$ est défini comme étant l'ensemble de toutes les fonctions holomorphes $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ satisfaisants.

$$\sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{T}^n} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) < \infty, \tag{2.9}$$

muni de la norme

$$\|f\|_p := \left(\sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{T}^n} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.10}$$

Tandis que $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}^n)$ désigne l'espace (en fait l'algèbre) de toutes les fonctions holomorphes bornées sur $\mathbb{D}^n$, muni de la norme sup :

$$||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}^n}\{|f(z)|\}.$$

Puisque la fonction $|f|^p$ est sous-harmonique, dans (2.10) on peut remplacer le "*sup*" par la limite quand $r \to 1$. Le fait que chaque fonction f de l'espace de Hardy $\mathcal{H}^p(\mathbb{D}^n)$ possède une limite non-tangentielle presque à chaque point frontière de $\mathbb{T}^n$ est bien connu (voir [53] page 316) :

Théorème 2.6. *Si $f \in \mathcal{H}^p(\mathbb{D}^n)$, alors f admet une limite non-tangentielle en presque tout point de $\mathbb{T}^n$.*

Cela engendre une fonction f^* qu'on appelle "la fonction de valeurs frontières de f" ; et on résume tout cela dans le résultat suivant (voir 3.4.3 de [42]).

Théorème 2.7. *Si $f \in \mathcal{H}^p(\mathbb{D}^n)$, $1 \leq p < \infty$, alors $f^* \in L^p(\mathbb{T}^n)$ et on a de plus*

i) $\lim\limits_{r\longrightarrow 1}\int_{\mathbb{T}^n}|f_r|^p d\sigma = \int_{\mathbb{T}^n}|f^*|^p d\sigma = \|f\|_p.$

ii) $\lim\limits_{r\longrightarrow 1}\int_{\mathbb{T}^n}|f_r - f^*|^p d\sigma = 0.$

Maintenant, on formule explicitement le résultat fondamental suivant dû à Fatou [41, 43], dont l'idée est déjà rencontrée dans plusieurs reprises au début de ce chapitre.

Corollaire 2.8. *Soit $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$. Alors $\lim\limits_{r\longrightarrow 1} f_r(\zeta) = f^*(\zeta)$ p.p. sur $\mathbb{T}^n$.*

Si $p \geq 1$, une fonction dans $\mathcal{H}^p(\mathbb{D}^n)$ peut être représentée par l'intégrale de Poisson de sa fonction de valeur frontière. Le cas particulier $n = 1$ se trouve dans le monographe de Rudin [39].

Théorème 2.9. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{D}^n)$ on a*

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}^n} P(z,\zeta) f^*(\zeta) d\sigma.$$

Le résultat suivant est dû à F. et M. Riesz, dont le cas particulier $n = 1$ se trouve dans le monographe de Rudin [41].

Théorème 2.10. *Soit μ une mesure borélienne complexe sur $\mathbb{T}^n$. Si on a*

$$\int_{\mathbb{T}^n} e^{i(k\theta)} d\mu(\theta) = 0$$

pour $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$ avec au moins l'un des k_j, $j = 1, ..., n$ est positif, où $(k\theta) = k_1\theta_1 + ... + k_n\theta_n$, alors μ est absolument continue par rapport à $d\sigma$.

Une question cruciale qui se pose en ce moment, à savoir, est-ce que les valeurs au bord d'une fonction de $\mathcal{H}^p(\mathbb{D}^n)$ existent sur la partie non-distinguée de la frontière de $\mathbb{D}^n$?
Pour répondre à cette question, soient $\{j_1, . . . , j_k\}$ et $\{i_1, . . . , i_l\}$ deux ensembles disjoints d'indices tels que leur union est égale à $\{1, . . . , n\}$, et tels que $j_1 < j_2 < . . . . < j_k$ et $i_1 < i_2 < . . . . < i_l$. On définit les sections de $\mathbb{D}^n$ comme suit :

$$\mathbb{D}^n_{z_{j_1},....,z_{j_k}} = \{(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{D}^n : \ z_{j_1}, . . . , z_{j_k} \text{ sont fixés } \},$$

et on définit aussi $f_{z_{j_1},...,z_{j_k}} := f|_{\mathbb{D}^n_{z_{j_1},....,z_{j_k}}}$.
En fait, pour simplifier, on écrit $f_{z_{j_1},...,z_{j_k}}(z_{i_1}, ., . , . , z_{i_l})$ au lieu de $f_{z_{j_1},...,z_{j_k}}(z_1, ., . , . , z_n)$.
On va voir ci-dessous que pour toute $f \in \mathcal{H}^p(\mathbb{D}^n)$, $1 \le p < \infty$, la limite non-tangentielle de $f_{z_{j_1},...,z_{j_k}}$ existe presque en tous les points de la frontière distinguée de la section $\mathbb{D}^n_{z_{j_1},. . . ,z_{j_k}}$ qui est bien $\mathbb{T}^l$, et que la fonction $f_{z_{j_1},...,z_{j_k}}$ peut être récupérée par l'intégrale de Poisson de cette limite [42].

Théorème 2.11. *Soit $f \in \mathcal{H}^p(\mathbb{D}^n)$, $1 \le p < \infty$. Alors $f_{z_{j_1},...,z_{j_k}} \in \mathcal{H}^p(\mathbb{D}^l)$.*

Corollaire 2.12. *Si $f \in \mathcal{H}^p(\mathbb{D}^n)$, $1 \le p < \infty$, alors la limite non-tangentielle $f^*_{z_{j_1},...,z_{j_k}}$ de la fonction $f_{z_{j_1},...,z_{j_k}}$ existe presque partout sur $\mathbb{T}^l$ et appartient à $L^p(\mathbb{T}^l)$.*

Une conséquence directe des Théorèmes 2.7 et 2.9 est la suivante :

Théorème 2.13. *Si $1 \le p < \infty$ et $f \in \mathcal{H}^p(\mathbb{D}^n)$, alors*

i) $\lim_{r\longrightarrow 1} \int_{\mathbb{T}^l} |(f_{z_{j_1},...,z_{j_k}})_r|^p d\sigma_l = \int_{\mathbb{T}^l} |f^*_{z_{j_1},...,z_{j_k}}|^p d\sigma_l$.

ii) $\lim_{r\longrightarrow 1} \int_{\mathbb{T}^l} |(f_{z_{j_1},...,z_{j_k}})_r - f^*_{z_{j_1},...,z_{j_k}}|^p d\sigma_l = 0$, *où* $(f_{z_{j_1},...,z_{j_k}})_r(\zeta_{i_1}, ..., \zeta_{i_l}) = f_{z_{j_1},...,z_{j_k}}(r\zeta_{i_1}, ..., r\zeta_{i_l})$.

Théorème 2.14. *[42] Si $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{D}^n)$, alors*

$$f_{z_{j_1},...,z_{j_k}}(z_{i_1}, ..., z_{i_l}) = \int_{\mathbb{T}^l} P(z_{i_1}, \zeta_{i_1})...P(z_{i_l}, \zeta_{i_l}) f^*_{z_{j_1},...,z_{j_k}}(\zeta_{i_1}, ..., \zeta_{i_l}) d\sigma_l.$$

Le résultat suivant donne une condition suffisante pour qu'une fonction holomorphe soit une fonction de Hardy [42].

Théorème 2.15. *Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}^n$. Si $1 \leq p < \infty$ et*

$$\sup_{\substack{(z_{j_1},...,z_{j_k}) \\ |z_{j_1}|=...=|z_{j_k}|}} \|f_{z_{j_1},...,z_{j_k}}\|_{\mathcal{H}^p(\mathbb{D}^{n-k})} = C < \infty,$$

alors $f \in \mathcal{H}^p(\mathbb{D}^n)$.

Pour plus de détails sur la théorie des fonctions dans le polydisque, nous renvoyons au livre de Rudin [41], voir aussi l'article [43].

Après avoir introduit les espaces de Hardy du polydique $\mathcal{H}^p(\mathbb{D}^n)$, on va maintenant se concentrer sur le cas hilbertien $p = 2$. Pour cela, rappelons que l'espace "hilbertien" de Hardy du polydisque $\mathcal{H}^2(\mathbb{D}^n)$ est défini comme étant l'ensemble de toutes les fonctions holomorphes $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ satisfaisant :

$$\|f\|_2 := \left(\sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{T}^n} |f(r\zeta)|^2 \, d\sigma(\zeta) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Et que la collection suivante de tous les monômes analytiques sur $\mathbb{D}^n$:

$$\left\{ z^J = z_1^{j_1} z_2^{j_2} ......z_n^{j_n}, \; J = (j_1, j_2, ..., j_n) \in \mathbb{Z}^n \quad \text{où} \;\; j_k \geq 0, \; \text{pour } k = 0, 1, ..., n \right\} \quad (2.11)$$

constitue une base orthogonale de l'espace de Hardy $\mathcal{H}^2(\mathbb{D}^n)$.

D'autre part, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D}^n)$, la limite radiale $\lim_{r\to 1^-} f(r\zeta)$ existe pour presque tout $\zeta \in \mathbb{T}^n$. Notons ainsi cette limite radiale par $f(\zeta)$, l'espace de Hardy $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$ peut être considéré comme un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{T}^n, d\sigma) = L^2(\mathbb{T}^n)$, muni du produit scalaire induit par (2.3) :

$$< f, \; g >:= \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta)\overline{g(\zeta)} d\sigma(\zeta), \quad \text{pour } f, g \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n). \qquad (2.12)$$

En fait, si $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$ désigne la fermeture des polynômes analytiques dans $L^2(\mathbb{T}^n)$ (i.e. de la forme (2.11) pour $z \in \mathbb{T}^n$), alors toute fonction dans $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$ peut être identifiée avec son extension holomorphe à $\mathbb{D}^n$ via l'extension de Poisson. Nous utilisons donc la même notation pour $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$ et son extension holomorphe $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D}^n)$.

Maintenant, on va donner une caractérisation des espaces $L^2(\mathbb{T}^2)$ et $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^2)$ en termes de $L^2(\mathbb{T})$ et $\mathcal{H}^2(\mathbb{T})$ respectivement, et on en déduit des caractérisations analogues pour $L^2(\mathbb{T}^n)$ et $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$. Tout d'abord, on aura besoin des définitions suivantes.

Définition 2.16. *Soient $f, g \in L^2(\mathbb{T})$. On définit le produit tensoriel de f et g comme suit :*

$$(f \otimes g)(z_1, z_2) = f(z_1)g(z_2), \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{T}.$$

Dans ce cas on voit bien que $f \otimes g \in L^2(\mathbb{T}^2)$, avec $\|f \otimes g\|_2 = \|f\|_2 \|g\|_2$.

Bien entendu, cela a une relation avec la définition 1.67 et les propriétés qui la suivent.

Définition 2.17. *Pour $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset L^2(\mathbb{T})$, on définit l'ensemble*

$$\mathcal{X} \odot \mathcal{Y} := \left\{ \sum_{j=1}^{n} f_j \otimes g_j, \ f_j \in \mathcal{X}, \ g_j \in \mathcal{Y} \right\},$$

et on note sa fermeture dans $L^2(\mathbb{T}^2)$ par $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$.

Alors on a la proposition suivante :

Proposition 2.18. *Soient*

$$\mathscr{P} := \{P, \ P(z, \overline{z}) \ \text{ est un polynôme en } z \text{ et } \overline{z} \text{ avec } z \in \mathbb{T}\},$$

et

$$\mathscr{P}_+ := \{P, \ P(z) \ \text{ est un polynôme en } z \in \mathbb{T}\}.$$

Alors, on a

$$L^2(\mathbb{T}^2) = \mathscr{P} \otimes \mathscr{P} = L^2(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T}),$$

et

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^2) = \mathscr{P}_+ \otimes \mathscr{P}_+ = \mathcal{H}^2(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{H}^2(\mathbb{T}).$$

En utilisant cette identification (au sens d'isomorphisme) ainsi établie pour $n = 2$, on peut généraliser cette factorisation à plusieurs dimensions d'une manière naturelle par récurrence comme suit.

Pour $n = 2$, d'après la proposition précédente, on a :

$$L^2(\mathbb{T}^2) = L^2(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T}).$$

Pour $n = 3$, on pose :

$$L^2(\mathbb{T}^3) = L^2(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T}^2).$$

Étant obtenu $L^2(\mathbb{T}^{n-1})$, on définit $L^2(\mathbb{T}^n)$ comme suit :

$$L^2(\mathbb{T}^n) = L^2(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T}^{n-1}).$$

Ainsi on obtient :

$$L^2(\mathbb{T}^n) \cong L^2(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T}) \otimes \ \ldots\ \otimes L^2(\mathbb{T}). \tag{2.13}$$

On obtient également une factorisation similaire pour l'espace de Hardy du polydisuqe :

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n) \cong \mathcal{H}^2(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{H}^2(\mathbb{T}) \otimes \ \ldots\ \otimes \mathcal{H}^2(\mathbb{T}). \tag{2.14}$$

Ensuite, on va montrer que l'espace de Hardy et à noyau reproduisant.

Proposition 2.19. *Soit $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D}^n)$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{D}^n$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de f telle que :*

$$|f(z)| \leq C\|f\|_2 \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-|z_j|}}. \tag{2.15}$$

Démonstration. D'après [14] page 36, si $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$, alors on a

$$|f(z)| \leq \frac{C_2}{\sqrt{1-|z|}}\|f\|_{\mathcal{H}^2(\mathbb{D})}, z \in \mathbb{D}, \tag{2.16}$$

où C_2 est une constante dépendante de p seulement.

Si $f(z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D}^n)$, alors la fonction f est séparément analytique en vertu du

Corollaire 1.16. Alors, en raison de l'estimation (2.16), pour tout élément fixe $(\zeta_2, ..., \zeta_n) \in \mathbb{D}^{n-1}$ et tout $\zeta_1 \in r_1\mathbb{D}$, on a

$$\left|f(\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n)\right|^2 \leq \frac{C_2^2 r_1}{r_1 - |\zeta_1|} \int_0^{2\pi} \left|f(r_1 e^{i\theta_1}, \zeta_2, ..., \zeta_n)\right|^2 \frac{d\theta_1}{2\pi}. \tag{2.17}$$

De la même manière, pour tout élément $\left(r_1 e^{i\theta_1}, \zeta_3, ..., \zeta_n\right) \in \mathbb{D}^n$ fixe et tout $\zeta_2 \in r_2\mathbb{D}$, on a

$$\left|f(r_1 e^{i\theta_1}, \zeta_2, ..., \zeta_n)\right|^2 \leq \frac{C_2^2 r_2}{r_2 - |\zeta_2|} \int_0^{2\pi} \left|f(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}, \zeta_3, ..., \zeta_n)\right|^2 \frac{d\theta_2}{2\pi}. \tag{2.18}$$

En réepétant cet argument, on voit que pour tout élément $\left(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}, ..., r_{n-1} e^{i\theta_{n-1}}\right) \in \mathbb{D}^n$ et tout $\zeta_n \in r_n\mathbb{D}$, on a

$$\left|f(r_1 e^{i\theta_1}, ..., r_{n-1} e^{i\theta_{n-1}}, \zeta_n)\right|^2 \leq \frac{C_2^2 r_n}{r_n - |\zeta_n|} \int_0^{2\pi} \left|f(r_1 e^{i\theta_1}, ..., r_n e^{i\theta_n})\right|^2 \frac{d\theta_n}{2\pi}. \tag{2.19}$$

Maintenant, puisque $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D}^n)$, en combinant les inégalités (2.17), (2.18), (2.19) et (2.19), on obtient l'estimation (2.15). $\square$

Puisque l'evaluation ponctuelle $z \longrightarrow f(z)$ est une fonctionnelle linéaire bornée sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{D}^n)$, en raison de la formule (1.15), on constate que pour chaque $w \in \mathbb{D}^n$ il correspond une unique fonctions $K_w \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D}^n)$ ayant la propriété de reproduction suivante :

$$f(w) = \langle f,\ K_w \rangle, \quad f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D}^n). \tag{2.20}$$

Alors, en utilisant la base orthonormale (2.11) de $\mathcal{H}^2(\mathbb{D}^n)$ ainsi que la formule (1.16) de la Proposition 1.72, on peut établir une forme explicite du noyau reproduisant K_w de l'espace de Hardy $\mathcal{H}^2\left(\mathbb{D}^n\right)$.

Corollaire 2.20. *L'espace de Hilbert $\mathcal{H}^2\left(\mathbb{D}^n\right)$ est un espace hilbertien de fonctions holomorphes à noyau reproduisant donné, pour $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{D}^n$, par :*

$$K_w\left(z\right) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - \overline{w}_j z_j}, \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{D}^n. \tag{2.21}$$

Ainsi, le noyau reproduisant de $\mathcal{H}^2\left(\mathbb{T}^n\right)$, qui s'appelle aussi le noyau de Cauchy-Szegö, se présente comme suit :

$$K_w\left(\zeta\right) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - \overline{w}_j \zeta_j}, \quad \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{T}^n. \tag{2.22}$$

D'après la formule de reproduction (2.20), on constate que la norme du noyau reproduisant est donnée par :

$$\|K_w\|_2 = \langle K_w,\ K_w\rangle^{\frac{1}{2}} = (K_w\,(w))^{\frac{1}{2}} = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-|w_j|^2}}.$$

Cela entraîne que le noyau reproduisant normalisé est donné par :

$$k_w\,(\zeta) = \frac{K_w(\zeta)}{\|K_w\|_2} = \prod_{j=1}^{n} \frac{\sqrt{1-|w_j|^2}}{1-\overline{w}_j\zeta_j}, \quad \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{T}^n. \tag{2.23}$$

En se basant sur le Théorème 1.46, on note par $\mathcal{P}$ la projection orthogonale de $L^2\,(\mathbb{T}^n)$ sur son sous-espace fermé $\mathcal{H}^2\,(\mathbb{T}^n)$, (en fait dans $\mathcal{H}^2\,(\mathbb{D}^n)$ en premier lieu). En utilisant le noyau reproduisant K_w et la propriété de reproduction (2.20), la projection $\mathcal{P}$ s'écrit sous la forme intégrale suivante :

$$\mathcal{P}f(w) = \int\limits_{\mathbb{T}^n} f(\zeta)\overline{K_w}(\zeta)d\sigma(\zeta) = \int\limits_{\mathbb{T}^n} f(\zeta)\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-w_j\overline{\zeta_j}}d\sigma(\zeta), \quad w \in \mathbb{D}^n. \tag{2.24}$$

Remarque 2.21. *Concernant la projection $\mathcal{P}$ on a les observations suivantes :*

1. *La représentation intégrale (2.24) permet d'étendre $\mathcal{P}$ en un opérateur intégral de $L^P(\mathbb{T}^n), 1 \le p < \infty$, dans l'algèbre du polydisque $\mathcal{H}(\mathbb{D}^n) := \{f : \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{C}, f \quad analytique\}$.*
2. *En particulier, on a $\mathcal{P}f = f$ pour toute fonction $f \in \mathcal{H}^p(\mathbb{T}^n)$.*
3. *La projection $\mathcal{P} :\ L^p(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathcal{H}^p(\mathbb{T}^n)$ est bornée pour $p > 1$.*

En comparant la forme du noyau reproduisant normalisé (2.23) et le noyau de Poisson (2.7), on voit que l'extension de Poisson d'une fonction $f \in L^1\,(\mathbb{T}^n)$ peut s'écrire sous la forme intégrale suivante :

$$\widehat{f}(z) = \int_{\mathbb{T}^n} f\,(\zeta)\,|k_z(\zeta)|^2 d\sigma\,(\zeta) = \langle fk_z, k_z\rangle\,, \forall z \in \mathbb{D}^n. \tag{2.25}$$

Par ailleurs, on définit la transformation de Berezin $\mathfrak{B}(S)$ d'un opérateur $S \in \mathscr{B}\,(\mathcal{H}^2\,(\mathbb{T}^n))$ comme suit :

$$\mathfrak{B}(S)(z) = \widetilde{S}(z) := \int_{\mathbb{T}^n} (Sk_z(\zeta))\,\overline{k_z(\zeta)}d\sigma\,(\zeta)\,. \tag{2.26}$$

Également la transformation de Berezin d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ est définie pour tout $z \in \mathbb{D}^n$ par :

$$(\mathfrak{B}(f))(z) = \widetilde{f}(z) = \langle fk_z, k_z \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta) |k_z(\zeta)|^2 d\sigma(\zeta) . \tag{2.27}$$

Évidemment, elle coïncide avec l'extension de Poisson de f, i.e. $\widetilde{f}(z) \equiv \widehat{f}(z)$, d'après les formules (2.25) et (2.27).

Lemme 2.22. *Soient $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ et $\Psi \in Aut(\mathbb{D}^n)$. Alors, on a $P[f \circ \Psi](z) = P[f] \circ \Psi(z)$.*

Et on a la formule de changement de variable suivante.

Corollaire 2.23. *Pour tout $z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{D}^n$, on a*

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta)|k_z(\zeta)|^2 d\sigma(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^n} f \circ \Psi_z(\zeta) d\sigma(\zeta) \tag{2.28}$$

Ensuite, suivant les définitions 1.37 et 1.42, notons par $(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n))^{\perp}$ le complémentaire orthogonal de l'espace de Hardy $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$ dans $L^2(\mathbb{T}^n)$. Alors, on a la décomposition orthogonale suivante :

$$L^2(\mathbb{T}^n) = \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n) \oplus \left(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)\right)^{\perp}. \tag{2.29}$$

En vertu de la décomposition orthogonale (2.29), on note par $\mathcal{Q} = I - \mathcal{P}$ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T}^n)$ dans $(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n))^{\perp}$.

Puisque nos opérateurs agissent sur ce complémentaire orthogonal $(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n))^{\perp}$, il est indispensable d'étudier ces propriétés. Dans le cas $n = 1$, on a la caractérisation suivante :

Proposition 2.24. *Pour le complémentaire orthogonal de l'espace de Hardy $\mathcal{H}^2(\mathbb{T})$, on a :*

$$\left(\mathcal{H}^2(\mathbb{T})\right)^{\perp} = \overline{z\mathcal{H}^2(\mathbb{T})} = \overline{\mathcal{H}_0^2(\mathbb{T})},$$

où

$$\mathcal{H}_0^2(\mathbb{T}) = \left\{ f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}) : \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\theta = 0 \right\}.$$

Démonstration. Tout d'abord, on montre que $(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}))^\perp \subset \overline{z\mathcal{H}^2(\mathbb{T})}$.
Soit $h \in (\mathcal{H}^2(\mathbb{T}))^\perp$. Alors, h s'ecrit sous la forme $h(\theta) = \sum_{-\infty}^{-1} \alpha_m e^{im\theta}$ pour des constantes $\{\alpha_n\}_{-\infty}^{-1}$, et on a aussi $h(\theta) = \sum_{1}^{\infty} \beta_n e^{-in\theta}$, où $\beta_j = \alpha_{-j}$, $j \in \{1, 2, 3, ...\}$.
Maintenant, on voit bien que

$$h(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n+1} e^{-i(n+1)\theta} = e^{-i\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n+1} e^{-in\theta} = \overline{e^{i\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\beta_{n+1}} e^{in\theta}} = \overline{e^{i\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n e^{in\theta}},$$

où l'on a $\gamma_k = \overline{\beta}_{k+1}$, $k \in \{0, 1, 2, ...\}$, qui appartient à $\overline{z\mathcal{H}^2(\mathbb{T})}$.
Inversement, montrons que $\overline{z\mathcal{H}^2(\mathbb{T})} \subset (\mathcal{H}^2(\mathbb{T}))^\perp$. Pour cela, soit $h \in \overline{z\mathcal{H}^2(\mathbb{T})}$. Alors, pour des scalaires $\{\alpha_m\}_0^\infty$ on a

$$\begin{aligned} h(\theta) &= \overline{e^{i\theta} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m e^{im\theta}} = e^{-i\theta} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\alpha_m} e^{-im\theta} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\alpha_m} e^{-i(m+1)\theta} = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{\alpha_{m-1}} e^{-im\theta} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m e^{-im\theta}, \end{aligned}$$

où $\beta_j = \overline{\alpha_{j-1}}$, $j \in \{1, 2, 3, ...\}$; i.e.,

$$h(\theta) = \sum_{-\infty}^{-1} \gamma_n e^{in\theta},$$

où $\gamma_{-k} = \beta_k$, $k \in \{1, 2, 3, ...\}$, qui appartient à $(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}))^\perp$. □

De la même manière, pour le cas multidimensionnel $n > 1$, on définit $\mathcal{H}_0^2(\mathbb{T}^n)$ comme suit

$$\mathcal{H}_0^2(\mathbb{T}^n) := \left\{ f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n), \text{t.q.} \quad \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta) d\sigma(\zeta) = 0 \right\} = \{\mathbb{1}\}^\perp,$$

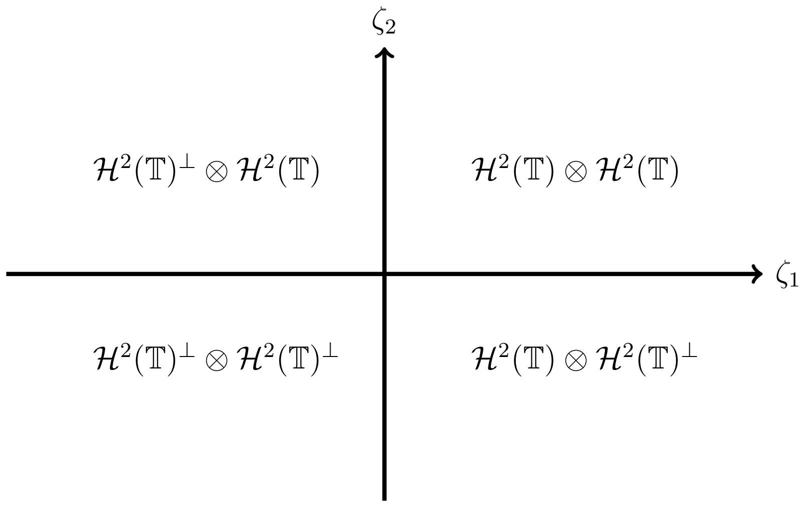
où $\mathbb{1}$ désigne la fonction constante égale à 1.
Mais contrairement au résultat de la proposition 2.24 (relative au cas $n = 1$), dans le cas où $n > 1$ on remarque que $\overline{\mathcal{H}_0^2(\mathbb{T}^n)}$ est un sous-espace propre de $(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n))^\perp$, c'est à dire :

$$\overline{\mathcal{H}_0^2(\mathbb{T}^n)} \subsetneqq \left(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)\right)^\perp. \tag{2.30}$$

Pour clarifier ce point, on considère par exemple le cas du tore ($n = 2$), [16]. Si on note par $e_n(z) = z^n, |z| = 1$ la base orthonormale générique de l'espace $L^2(\mathbb{T})$, alors en utilisant la transfomé de Fourier, toute fonction $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ corréspond à un élément de la forme

$$f \sim \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} a_{mn} e_m \otimes e_n \quad \text{avec} \quad \|f\|_2^2 = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} |a_{mn}|. \tag{2.31}$$

Vu l'identification $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = (\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+) \oplus (\mathbb{Z}^- \times \mathbb{Z}^+) \oplus (\mathbb{Z}^- \times \mathbb{Z}^-) \oplus (\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^-)$, la première somme dans (2.31) se décompose en quatre sommes partielles. En raison de (2.13), cela permet d'identifier l'espace $L^2(\mathbb{T}^2)$ comme étant un espace à quatre quadrants, qui peuvent à leur tour être identifiés via la caractérisation (2.14) et la décomposition (2.29), comme suit :



En particulier, on voit que $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^2) \cong \mathcal{H}^2(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{H}^2(\mathbb{T})$, et que chaque $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^2)$ correspond à une somme de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} e_n \otimes f_n$, où $f_n \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T})$ et $\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} ||f_n||_2^2$. De la même manière, chaque $g \in L^2(\mathbb{T}^2)$ qui est dans le quadrant $\left(\mathcal{H}^2(\mathbb{T})\right)^\perp \otimes \mathcal{H}^2(\mathbb{T})$ peut être identifiée à un élément de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} e_{-n} \otimes g_n$ où $g_n \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T})$ et $\|g\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} ||g_n||_2^2$; et ainsi de suite. Maintenant, il est devenu clair que $\left(\mathcal{H}^2(\mathbb{T})^2\right)^\perp$ contient proprement $\mathcal{H}^2(\mathbb{T})^\perp \otimes \mathcal{H}^2(\mathbb{T})^\perp$, et cela justifie la propiété (2.30).

En fait, c'est ce phénomène qui nous a bien motivé pour introduire et étudier les opérateurs de Toeplitz duaux associés à cet espace, puisque le complément orthogonale $\left(\mathcal{H}^2(\mathbb{T})\right)^\perp$ est assez large. Pour une explication de cet effet on renvoie à [19].

Retournons maintenant à l'espace de Bergman. Soit ν la mesure volume de Lebesgue sur $\mathbb{D}^n$, normalisée de sorte que $\nu(\mathbb{D}^n) = 1$. Pour $p \geq 1$, l'espace de Lebesgue des fonctions p-intégrable sur le polydisque $\mathbb{D}^n$ par rapport à la mesure ν est noté $L^p(\mathbb{D}^n)$, et il est définit par :

$$L^p(\mathbb{D}^n) := \left\{ f : \ \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \ ||f||_p^p := \int\limits_{\mathbb{D}^n} |f(z)|^p d\nu(z) < \infty \right\}.$$

Pour $p = 2$ on obtient bien un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire

$$< f, \ g >:= \int\limits_{\mathbb{D}^n} f(z)\overline{g(z)} d\nu(z).$$

L'espace de Bergman, noté $L_a^2(\mathbb{D}^n)$, est le sous espace fermé de $L^p(\mathbb{D}^n)$ consistant de fonctions analytiques dans $\mathbb{D}^n$, i.e.

$$L_a^p(\mathbb{D}^n) = L^p(\mathbb{D}^n) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D}^n),$$

où $\mathcal{H}(\mathbb{D}^n)$ désigne la classe de toutes les fonctions analytiques dans $\mathbb{D}^n$. Dans notre étude on s'interesse beaucoup plus au cas Hilbertien $p = 2$. Pour plus d'information, on renvoie à [1, 40, 51]

Puisque toute évaluation ponctuelle $z \longrightarrow f(z)$ est une fonctionnelle linéaire bornée sur $L_a^2(\mathbb{D}^n)$, on constate que pour chaque $w \in \mathbb{D}^n$ il correspond une unique fonctions $K_w \in L_a^2(\mathbb{D}^n)$ ayant la propriété de reprodution

$$f(w) = \langle f, \ K_w \rangle, \quad f \in L_a^2(\mathbb{D}^n). \tag{2.32}$$

En fait, en utilisant la base orthogonale de $L_a^2(\mathbb{D}^n)$, on peut établir une forme explicite du noyau reproduisant K_w comme suit

$$K_w(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(1 - \overline{w_j} z_j)^2}, \quad z, w \in \mathbb{D}^n.$$

Tandis que le noyau reproduisant normalisé s'écrit

$$K_w(z) = \frac{K_w(z)}{||K_w||} = \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - |w_j|^2}{(1 - \overline{w_j} z_j)^2}, \quad z, w \in \mathbb{D}^n.$$

La projection de Bergman $\mathcal{P}$ est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{D}^n)$ dans son sous espace fermé $L^2_a(\mathbb{D}^n)$. Ce qui fait que, d'après la formule (2.20), $\mathcal{P}$ possède la représentation intégrale suivante

$$\mathcal{P}f(w) = \int_{\mathbb{D}^n} f(z)\overline{K_w}(z)d\nu(z) = \int_{\mathbb{D}^n} f(z)\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(1-\overline{z_j}w_j)^2}d\nu(z), \quad w \in \mathbb{D}^n, \tag{2.33}$$

pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{D}^n)$.

Remarque 2.25. *À propos de la projection de Bergman, on a les propriétés suivantes.*

1. *La représentation intégrale (2.33) permet d'étendre $\mathcal{P}$ en un opérateur intégral de $L^1(\mathbb{D}^n)$ dans $\mathcal{H}(\mathbb{D}^n)$.*
2. *$\mathcal{P}f = f$ pour toute fonction $f \in L^1_a(\mathbb{D}^n)$.*
3. *La projection $\mathcal{P}: \ L^p(\mathbb{D}^n) \longrightarrow L^p_a(\mathbb{D}^n)$ est bornée pour $p > 1$.*

2.2 Opérateurs de Toeplitz, de Hankel et de Toeplitz duaux

Dans cette section, on introduit les opérateurs de Toeplitz, de Hankel et de Toeplitz duaux sur l'espace de Hardy du polydisque ; pour plus de détails on renvoie à [3, 25, 36]. On commence tout d'abord par l'opérateur de multiplication (appelé aussi l'opérateur de Laurent).

Les opérateurs de Laurent (de multiplication)

Définition 2.26. *Pour $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, l'opérateur de Laurent (ou de multiplication) M_φ est défini comme la multiplication par φ, c'est à dire*

$$M_\varphi f = \varphi f, \ \forall f \in L^2(\mathbb{T}^n).$$

Pour un symbole borné presque partout $\varphi \in L^{\infty}(\mathbb{T}^n)$, l'opérateur de multiplication (Laurent) sur $L^2(\mathbb{T}^n)$ est défini comme suit :

$$\begin{aligned} M_{\varphi} : \quad L^2(\mathbb{T}^n) &\longrightarrow L^2(\mathbb{T}^n) \\ f \quad &\longmapsto M_{\varphi} f = \varphi f. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Remarque 2.27. *Pour l'opérateur de multiplication on observe les assertions suivantes :*

1. *Pour $\varphi \in L^{\infty}(\mathbb{T}^n)$, on peut montrer facilement que $M_{\varphi}^* = M_{\overline{\varphi}}$.*
2. *Soit j un entier tel que $1 \leq j \leq n$. Si $\varphi(z) = z_j$, alors $M_{\varphi} f = z_j f, \ \forall f \in L^2(\mathbb{T}^n)$. Dans ce cas on note M_{φ} par M_{z_j}.*

On définit maintenant la matrice de Laurent de niveau n :

Définition 2.28. *Considérons les scalaires $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$. Une matrice de type*

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{(0,k_2,\ldots,k_n)} & a_{(-1,k_2,\ldots,k_n)} & a_{(-2,k_2,\ldots,k_n)} & \cdots \\ \cdots & a_{(1,k_2,\ldots,k_n)} & \boxed{a_{(0,k_2,\ldots,k_n)}} & a_{(-1,k_2,\ldots,k_n)} & \cdots \\ \cdots & a_{(2,k_2,\ldots,k_n)} & a_{(1,k_2,\ldots,k_n)} & a_{(0,k_2,\ldots,k_n)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

est dite matrice de Laurent de niveau 1 et on la note $L^{(1)}_{k_2,\ldots,k_n}$.
Une matrice par blocs de type

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & L^{(1)}_{0,k_3,\ldots,k_n} & L^{(1)}_{-1,k_3,\ldots,k_n} & L^{(1)}_{-2,k_3,\ldots,k_n} & \cdots \\ \cdots & L^{(1)}_{1,k_3,\ldots,k_n} & \boxed{L^{(1)}_{0,k_3,\ldots,k_n}} & L^{(1)}_{-1,k_3,\ldots,k_n} & \cdots \\ \cdots & L^{(1)}_{2,k_3,\ldots,k_n} & L^{(1)}_{1,k_3,\ldots,k_n} & L^{(1)}_{0,k_3,\ldots,k_n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

est dite matrice de Laurent de niveau 2 et on la note par $L^{(2)}_{k_2,\ldots,k_n}$.

Une matrice par blocs de type

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & L^{(2)}_{0,k_4,\dots,k_n} & L^{(2)}_{-1,k_4,\dots,k_n} & L^{(2)}_{-2,k_4,\dots,k_)} & \cdots \\ \cdots & L^{(2)}_{1,k_4,\dots,k_n} & \left[L^{(2)}_{0,k_4,\dots,k_n}\right] & L^{(2)}_{-1,k_4,\dots,k_n} & \cdots \\ \cdots & L^{(2)}_{2,k_4,\dots,k_n} & L^{(2)}_{1,k_4,\dots,k_n} & L^{(2)}_{0,k_4,\dots,k_n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

est dite matrice de Laurent de niveau 3 *et on la note* $L^{(3)}_{k_4,\dots,k_n}$.

En continuant de cette manière, on obtient une matrice par blocs de type

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & L^{(n-1)}_0 & L^{(n-1)}_{-1} & L^{(n-1)}_{-2} & \cdots \\ \cdots & L^{(n-1)}_1 & \left[L^{(n-1)}_0\right] & L^{(n-1)}_{-1} & \cdots \\ \cdots & L^{(n-1)}_2 & L^{(n-1)}_1 & L^{(n-1)}_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

qui est appelée matrice de Laurent de niveau n *et on la note* $L^{(n)}$.

Par exemple, pour $n = 4$, on considère la suite $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^4}$ donnée par

$$a_{(k_1,k_2,k_3,k_4)} = \begin{cases} 1, \text{ si } k_1 \text{ est pair;} \\ 2, \text{ si } k_1 \text{ est impair}, k_2 \text{ est pair;} \\ 3, \text{ si } k_1, k_2 \text{ sont impairs}, k_3 \text{ est pair;} \\ 4, \text{ si } k_1, k_2, k_3 \text{ sont impairs}, k_4 \text{ est pair;} \\ 5, \text{ si } k_1, k_2, k_3, k_4 \text{ sont impairs.} \end{cases}$$

Alors

$$L^{(1)}_{k_2,k_3,k_4} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 1 & j & 1 & \cdots \\ \cdots & j & [1] & j & \cdots \\ \cdots & 1 & j & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

où

$$j = \begin{cases} 2, \text{ si } k_2 \text{ est pair;} \\ 3, \text{ si } k_2 \text{ est impair}, k_3 \text{ est pair;} \\ 4, \text{ si } k_2, k_3 \text{ sont impairs}, k_4 \text{ est pair;} \\ 5, \text{ si } k_2, k_3, k_4 \text{ sont impairs.} \end{cases}$$

Si on note $L^{(1)}_{k_2,k_3,k_4}$ par A, B, C, D pour j prenant les valeurs $2, 3, 4, 5$ respectivement, on obtient alors

$$L^{(2)}_{k_3,k_4} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & A & B & A & \cdots \\ \cdots & B & [A] & B & \cdots \\ \cdots & A & B & A & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

si k_3 est pair ;

$$L^{(2)}_{k_3,k_4} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & A & C & A & \cdots \\ \cdots & C & [A] & C & \cdots \\ \cdots & A & C & A & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

si k_3 est impair mais k_4 est pair ; et

$$L^{(2)}_{k_3,k_4} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & A & D & A & \cdots \\ \cdots & D & [A] & D & \cdots \\ \cdots & A & D & A & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

si k_3 et k_4 sont tous les deux impairs. Notons ces trois matrices par E, F, G respectivement.

Alors on a

$$L_{k_4}^{(3)} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & E & F & E & \cdots \\ \cdots & F & [E] & F & \cdots \\ \cdots & E & F & E & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

si k_4 est pair ; et

$$L_{k_4}^{(3)} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & E & G & E & \cdots \\ \cdots & G & [E] & G & \cdots \\ \cdots & E & G & E & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

si k_4 est impair. Si on note ces deux matrices par I et J respectivement, alors on a

$$L^{(3)} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & I & J & I & \cdots \\ \cdots & J & [I] & J & \cdots \\ \cdots & I & J & I & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Notons que les matrices de Laurent dans le cas uni-dimensionnelle ont été bien elaborées dans [6].

Pour $j \in [1, n] \cap \mathbb{Z}$, posons $\epsilon_j := (x_1, ..., x_n)$ où $x_i = \delta_{ij}$. On a les résultats suivants dont les démonstrations peuvent être trouvées dans [25, 35].

Théorème 2.29. *Pour* $i = 1, ..., n$, $M_{z_i}^* = M_{\bar{z}_i}$ *et* $M_{z_i}^* e_k = e_{k-\epsilon_i} \forall k \in \mathbb{Z}^n$.

Remarque 2.30.

1. $M_{z_i} e_k = e_{k+\epsilon_i}$, *pour* $1 \leq i \leq n$ *et* $k \in \mathbb{Z}^n$.
2. $M_{z_i} M_{z_i}^* = I = M_{z_i}^* M_{z_i}$ $\forall 1 \leq i \leq n$.

Théorème 2.31. *Un opérateur linéaire borné A sur $L^2(\mathbb{T}^n)$ peut être représenté comme une matrice de Laurent de niveau n si et seulement si*

$$< Ae_{k+\epsilon_j}, e_{t+\epsilon_j} >=< Ae_k, e_t >, \ \forall k,t \in \mathbb{Z}^n, 1 \leq j \leq n.$$

Théorème 2.32. *Soit A un opérateur linéaire borné sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{T}^n)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *A peut être représenté comme une matrice de Laurent de niveau n.*
2. *A commute avec M_{z_j} pour $1 \leq j \leq n$.*
3. *$M_{z^k}A = AM_{z^k}$, $\forall k \in \mathbb{Z}^n$.*

Théorème 2.33. *Un opérateur linéaire borné A sur $L^2(\mathbb{T}^n)$ est un opérateur de Laurent si et seulement s'il peut être représenté comme une matrice de Laurent de niveau n.*

Le corollaire suivant découle immédiatement des Théorèmes 2.33 et 2.31.

Corollaire 2.34. *Soit A un opérateur linéaire borné sur $L^2(\mathbb{T}^n)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est un opérateur de Laurent.*
2. *$< Ae_{k+\epsilon_j}, e_{t+\epsilon_j} >=< Ae_k, e_t >$, pour tout $k,t \in \mathbb{Z}^n$, $1 \leq j \leq n$.*
3. *$M_{z_i}A = AM_{z_i}$ $\forall 1 \leq i \leq n$.*
4. *$M_{z^k}A = AM_{z^k}$ $\forall k \in \mathbb{Z}^n$.*

Opérateurs de Toeplitz

On commence par définir l'opérateur de Toeplitz.

Définition 2.35. *Pour un symbole $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, l'opérateur de Toeplitz T_φ est défini comme la compression de M_φ à $\mathcal{H}^2(\mathbb{D}^n)$. C'est à dire $T_\varphi f = \mathcal{P}(\varphi f)$, $\forall f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D}^n)$. Ainsi l'opérateur de Toeplitz sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$ est défini comme suit :*

$$\begin{aligned} T_\varphi : \ \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n) &\longrightarrow \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n), \\ f &\longmapsto T_\varphi f = \mathcal{P}(\varphi f) = \mathcal{P}M_\varphi(f). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Sous une forme intégrale, il s'écrit :

$$T_\varphi(f) = \int_{\mathbb{T}^n} \varphi(\zeta) f(\zeta) \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1-\overline{\zeta_j} w_j} d\sigma(\zeta), \quad \forall f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n).$$

Pour $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, il est clair que T_φ est borné de $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$ dans lui même. En fait on a :

$$\begin{aligned} \|T_\varphi(f)\|_2 &= \|P(\varphi f)\|_2 \leq \|P\| \, \|\varphi f\|_2 \,, \\ &\leq \|\varphi f\|_2 \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_2 \,, \text{ pour tout } f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n). \end{aligned}$$

En fait on a la proposition suivante [35] :

Proposition 2.36. *Supposons que $\phi \in L^2(\mathbb{T}^n)$. Alors, T_ϕ est borné si est seulement si ϕ est bornée ; et dans ce cas, on a $\|T_\phi\| = \|\phi\|_\infty$.*

Notons aussi que si le symbole $\varphi \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$, alors l'opérateur de Toeplitz T_φ coïncide avec la restriction de l'opérateur de multiplication M_φ à $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$. Dans ce cas T_φ est dit analytique.

Les opérateurs de Toeplitz sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{D}^n)$ ont été déjà étudiés par plusieurs auteurs. Nous citons ici quelques références significatives [11, 12, 18, 25, 27, 30, 35, 36]. Nous donnons une définition matricielle des opérateurs de Toeplitz sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{D}^n)$. D'autre part, dans [35] nous rencontrons une représentation matricielle par blocs des opérateurs de Toeplitz et de Hankel sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$. Ces références motivent la définition d'une matrice de Tœplitz de niveau n. Nous proposons d'abord la définition d'une matrice de Toeplitz de niveau n puis nous montrons qu'un opérateur sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{D}^n)$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement s'il peut être représenté comme une matrice de Toeplitz de niveau n. Les matrices de Toeplitz dans le cas uni-dimensionnel ont été bien étudiées dans [6].

On commence par introduire la notion d'une matrice de Toeplitz de niveau n.

Définition 2.37. *Considérons les scalaires $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$. Une matrice de type*

$$\begin{pmatrix} a_{(0,k_2,\ldots,k_n)} & a_{(-1,k_2,\ldots,k_n)} & a_{(-2,k_2,\ldots,k_n)} & \cdots \\ a_{(1,k_2,\ldots,k_n)} & a_{(0,k_2,\ldots,k_n)} & a_{(-1,k_2,\ldots,k_n)} & \cdots \\ a_{(2,k_2,\ldots,k_n)} & a_{(1,k_2,\ldots,k_n)} & a_{(0,k_2,\ldots,k_n)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

est dite matrice de Toeplitz de niveau 1*, et on la note* $T^{(1)}_{k_2,\ldots,k_n}$.
Une matrice par blocs de type

$$\begin{pmatrix} T^{(1)}_{0,k_3,\ldots,k_n} & T^{(1)}_{-1,k_3,\ldots,k_n} & T^{(1)}_{-2,k_3,\ldots,k_n} & \cdots \\ T^{(1)}_{1,k_3,\ldots,k_n} & T^{(1)}_{0,k_3,\ldots,k_n} & T^{(1)}_{-1,k_3,\ldots,k_n} & \cdots \\ T^{(1)}_{2,k_3,\ldots,k_n} & T^{(1)}_{1,k_3,\ldots,k_n} & T^{(1)}_{0,k_3,\ldots,k_n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

est dite matrice de Toeplitz de niveau 2 *et on la note* $T^{(2)}_{k_3,\ldots,k_n}$.
Par réccurence, on construit une matrice par blocs de type

$$\begin{pmatrix} T^{(n-1)}_{0} & T^{(n-1)}_{-1} & T^{(n-1)}_{-2} & \cdots \\ T^{(n-1)}_{1} & T^{(n-1)}_{0} & T^{(n-1)}_{-1} & \cdots \\ T^{(n-1)}_{2} & T^{(n-1)}_{1} & T^{(n-1)}_{0} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

qui est appelée matrice de Toeplitz de niveau n *et on la note* $T^{(n)}$.

La preuve du résultat suivant est similaire à celle du théorème 2.31 et est donc omise (voir [25, 35]).

Théorème 2.38. *Un opérateur linéaire borné* A *sur* $\mathcal{H}^2(\mathbb{D}^n)$ *peut être représenté comme une matrice de Toeplitz de niveau* n *si et seulement si*

$$< Ae_{k+\epsilon_j}, e_{t+\epsilon_j} >=< Ae_k, e_t >,\ \forall k,t \in \mathbb{Z}^n_+ \text{ et } 1 \leq j \leq n.$$

De plus on cite également les résultats suivants (voir [25, 35]).

Théorème 2.39. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur sur* $\mathcal{H}^2(\mathbb{D}^n)$ *soit un opérateur de Toeplitz est qu'il peut être représenté comme une matrice de Toeplitz de niveau* n.

Définition 2.40. *Pour* $1 \leq j \leq n$*, on définit l'opérateur de translation* $U_{z_j} : \mathcal{H}^2(\mathbb{D}^n) \to \mathcal{H}^2(\mathbb{D}^n)$ *comme suit*

$$U_{z_j} f(z) = z_j f(z),\ \forall f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D}^n), z \in \mathbb{T}^n.$$

Remarque 2.41. $U_{z_j} = e_k = e_{k+\epsilon_j}, \ \ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n, 1 \leq j \leq n.$

Théorème 2.42. *Pour $1 \leq j \leq n$ et $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, on a*

$$U_{z_j}^* e_k = \begin{cases} e_{k-\epsilon_j} \ \ si \ k_j \neq 0, \\ 0 \ \ sinon. \end{cases}$$

Remarque 2.43. *Pour $1 \leq j \leq n$ et $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, on a $U_{z_j}^* U_{z_j} e_k = e_k$ et*

$$U_{z_j} U_{z_j}^* e_k = \begin{cases} e_k & si \ k_j \neq 0, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

De plus, les opérateurs de Toeplitz sont caractérisés par le système d'équations opératorielles suivant [25, 36] :

Lemme 2.44 (2)**.** *Soit A un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$. Alors A est un opérateur de Toeplitz si et seulement si $U_{z_j}^* A U_{z_j} = A$, $\forall 1 \leq j \leq n$.*

On peut aussi donner quelques propriétés élémentaires d'un opérateur de Toeplitz :

Proposition 2.45. *Soient a, b deux nombres complexes et φ, ψ deux fonctions de $L^\infty(\mathbb{T}^n)$. Alors, les propriétés algébriques suivantes des opérateurs de Toeplitz ont lieu.*

1. $T_{a\varphi+b\psi} = aT_\varphi + bT_\psi$.
2. $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$.
3. *T_φ est auto-adjoint si est seulement si φ est réelle.*
4. *De plus, si $\varphi \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$, alors T_φ est analytique et on a :*
   (a) $T_\psi T_\varphi = T_{\psi\varphi}$.
   (b) $T_{\overline{\varphi}} T_\psi = T_{\overline{\varphi}\psi}$.

Démonstration. 1) Pour $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$, on a

$$\begin{aligned} T_{a\varphi+b\psi}(f) &= P((a\varphi + b\psi)f) = P(a\varphi f + b\psi f), \\ &= P(a\varphi f) + P(b\psi f) = aP(\varphi f) + bP(\psi f), \end{aligned}$$

$$= aT_\varphi(f) + bT_\psi(f) = (aT_\varphi + bT_\psi)(f).$$

2) Pour $f, h \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$, on a

$$\left\langle T^*_\varphi(f), h \right\rangle = \langle f, T_\varphi(h) \rangle = \langle f, P(\varphi h) \rangle,$$
$$= \langle f, \varphi h \rangle = \langle \overline{\varphi} f, h \rangle = \langle P(\overline{\varphi} f), h \rangle = \langle T_{\overline{\varphi}}(f), h \rangle.$$

Alors $T^*_\varphi = T_{\overline{\varphi}}$.

3) T_φ est auto-adjoint veut dire que $T_\varphi = T^*_\varphi$. Alors d'après (2) on obtient $T_\varphi = T^*_\varphi = T_{\overline{\varphi}}$. Doù $\varphi = \overline{\varphi}$, et donc φ est réelle. L'inverse est évident.

4)-(a) Pour $g \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$, on a

$$T_\psi T_\varphi(g) = T_\psi(P(\varphi g)) = T_\psi(\varphi g) = P(\psi(\varphi g)) = T_{\psi\varphi}(g).$$

4)-(b) Il est clair que

$$[T_{\overline{\varphi}} T_\psi]^{**} = [T^*_\psi T^*_{\overline{\varphi}}]^* = [T_{\overline{\psi}} T_\varphi]^* = [T_{\overline{\psi}\varphi}]^* = [T_{\overline{\overline{\psi}\varphi}}] = T_{\psi\overline{\varphi}} = T_{\overline{\varphi}\psi}. \qquad \square$$

Pour la commutativité des opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$, on a le théorème suivant [27, 30].

Théorème 2.46. *Soient $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$. Alors :*

1. *T_ϕ, T_ψ commutent, i.e. $T_\phi T_\psi = T_\phi T_\psi$ si et seulement si $\mathfrak{B}\left([T_\phi, T_\psi]\right)(z)$ est pluri-harmonique sur $\mathbb{D}^n$, où $\mathfrak{B}(.)$ désigne la transformation de Berezin définie ci-dessus.*
2. *Si de plus on a $\psi = \psi_1 + \overline{\psi_2}$, où ψ_1, ψ_2 sont analytiques sur $\mathbb{T}^n$, alors on a : $T_\phi T_\psi = T_\psi T_\phi$ sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$ si et seulement si $\widehat{\phi}\left(\psi_1 - \overline{\psi_2}\right)$ est pluriharmonique sur $\mathbb{D}^n$, où $\widehat{\phi}$ désigne l'intégrale de Poisson de ϕ.*

En particulier, on retombe sur des résultats connus [6], et [9, 12, 18].

Corollaire 2.47. *Soient $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$. Alors :*

1. *Si ψ est analytique, alors $T_\phi T_\psi = T_\phi T_\psi$ sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$ si et seulement si pour tout $k = 1, 2, ..., n$, $\psi(\zeta)$ est constante ou $\phi(\zeta)$ est analytique par rapport à ζ_k.*
2. *Si $\psi = \psi_1 + \overline{\psi_2}$ et $\phi = \phi_1 + \overline{\phi_2}$, où $\psi_1, \psi_2, \phi_1, \phi_2$ sont analytiques sur $\mathbb{T}^n$, alors $T_\phi T_\psi = T_\psi T_\phi$ sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$ si et seulement si $\psi_1 \overline{\phi_2} - \phi_1 \overline{\psi_2}$ est pluriharmonique sur $\mathbb{D}^n$.*

3. *$T_\phi T_\psi = T_\psi T_\phi$ sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{T})$ si et seulement si ϕ et ψ sont toutes les deux analytiques, ou bien ϕ et ψ sont toutes les deux antianalytiques, ou bien une combinaison non-triviale de ϕ et ψ est constante sur le cercle unité $\mathbb{T}$.*

Théorème 2.48. *[18] Soient $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$. Alors, l'opérateur produit $T_\phi T_\psi$ sur l'espace de Hardy $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$ est de rang fini si et seulement si $\phi = 0$ ou $\psi = 0$.*

Le théorème suivant est un théorème de type Brown-Halmos au sens de la définition 3 :

Théorème 2.49. *[18] Soient $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$. Alors, l'opérateur produit $T_\phi T_\psi$ sur l'espace de Hardy $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si $T_\phi T_\psi = T_{\phi\psi}$ et pour toute i, $i = 1, 2, ..., n$, soit $\overline{f(z)}$ est analytique en z_i ou bien $g(z)$ est analytique en z_i.*

Corollaire 2.50. *[18] Soit $\phi \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$. Alors, pour l'opérateur de Toeplitz T_ϕ sur l'espace de Hardy $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$, on a*

1. *Si T_ϕ est inversible, alors T_ϕ^{-1} est aussi un opérateur de Toeplitz si et seulement si pour toute i, $i = 1, 2, ..., n$, soit $\overline{\phi(z)}$ est analytique en z_i ou bien $\phi(z)$ est analytique en z_i.*
2. *T_ϕ est isométrique si et seulement si ϕ est analytique et $|\phi| = 1$ sur $\mathbb{T}^n$.*
3. *T_ϕ est unitaire si et seulement si ϕ est une fonction constante de module égale à 1.*
4. *Les seuls opérateurs de Toeplitz idempotents sont les opérateurs de Toeplitz triviaux 0 et I.*

Les deux résultats suivants dus à Ding [12] sont comparables au résultat de Gu reporté ci-dessus (Théorème 2.48).

Théorème 2.51. *Soient $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$. Si l'opérateur produit $T_\phi T_\psi$ sur l'espace de Hardy $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$ est compact, alors $\phi(\zeta)\psi(\zeta) = 0$ pour tout $\zeta \in \mathbb{T}^n$.*

Théorème 2.52. *Soient $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{T}^n)$. Alors, l'opérateur produit $T_\phi T_\psi$ sur l'espace de Hardy $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$ est de rang fini si et seulement si $\phi = 0$ ou $\psi = 0$.*

Ding [12] a également établi le résultat suivant sur le problème de produit nul.

Théorème 2.53. *Soient $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{T}^n)$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. $T_\phi T_\psi = 0$.
2. $T_\phi T_\psi$ *est de rang fini.*
3. *L'un des symboles ϕ ou ψ est nul.*

En ce qui concerne le semi-commutateur, Ding [12] a prouvé le résultat suivant.

Théorème 2.54. *Soient $f, g \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$. S'il existe une fonction $h \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ telle que $T_f T_g - T_h$ est compact, alors $f(\zeta)g(\zeta) = h(\zeta)$ pour presque tout $z \in \mathbb{T}^n$.*

Opérateurs de Hankel

De même, le "gros" opérateur de Hankel est défini par

$$\begin{array}{rccl} H_\phi : & \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n) & \longrightarrow & (\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n))^\perp, \\ & f & \longrightarrow & H_\phi f = \mathcal{Q}(\phi f) = \mathcal{Q}M_\phi(f) = \mathcal{Q}(\phi f). \end{array} \tag{2.36}$$

où $\mathcal{Q} = I - \mathcal{P}$ est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T}^n)$ dans $(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n))^\perp$.
Pour un opérateur de Hankel, on a bien évidemment

$$\|H_\phi(f)\|_2 \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_2, \ \forall f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n). \tag{2.37}$$

P. Ahern, E. Youssfi et K.H. Zhu dans [3] ont exploité l'action des rotations sur l'espace $L^2(\mathbb{T}^n)$ pour étudier l'opérateur de Hankel. En effet, pour tout $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in \mathbb{T}^n$, on définit l'opérateur de rotation par ζ

$$\begin{array}{rccl} U_\zeta : & L^2(\mathbb{T}^n) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{T}^n), \\ & f & \longrightarrow & U_\zeta(f)(z_1, ..., z_n) = f(\zeta_1 z_1, ..., \zeta_n z_n). \end{array} \tag{2.38}$$

Cet opérateur est unitaire, et vérifie $U_\zeta^* = U_{\overline{\zeta}}$. De plus, l'epace de Hardy $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$ est invariant sous l'action de U_ζ et U_ζ^*. En particulier, U_ζ commute avec la projection de Cauchy-Szegö. Et on a le lemme suivant :

Lemme 2.55. *[3] Si $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ et H_f est un opérateur de Hankel borné sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$, alors*

$$U_\zeta H_f U_\zeta^* = H_{U_\zeta f}, \quad \textit{pour tout} \;\; \zeta \in \mathbb{T}^n.$$

Théorème 2.56. *[3] Supposons que* $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ *et que* H_f *soit un opérateur de Hankel borné sur* $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$. *Alors, pour toute* $g \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$, *l'application* $\zeta \longmapsto H_{U_\zeta f}(g)$ *est continue de* $\mathbb{T}^n$ *dans* $L^2(\mathbb{T}^n)$.
En particulier, l'application $\zeta \longmapsto \left\|H_{U_\zeta f}(g)\right\|$ *est continue de* $\mathbb{T}^n$ *dans* $[0,\infty)$.

Théorème 2.57. *[3] Supposons que* $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$, *pour* $n > 1$. *Si l'opérateur de Hankel* H_f *est compact sur* $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$, *alors,* $H_f = 0$ *; en d'autres termes* $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$.

Une représentation importante des opérateurs de Toeplitz et de Hankel due à Stroethoff et Zheng [46] sera utile pour la suite :

Proposition 2.58. *Soit* $\phi \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$. *Alors, pour tout* $w \in \mathbb{D}^n$ *on a*

$$T_\phi(K_w) = \left(\mathcal{P}(\phi \circ \varphi_w) \circ \varphi_w\right) K_w, \tag{2.39}$$

et

$$H_\phi(K_w) = \left(\phi - \mathcal{P}(\phi \circ \varphi_w) \circ \varphi_w\right) K_w. \tag{2.40}$$

Pour les produits de Hankel on a le résultat suivant :

Théorème 2.59. *[18] Soient* $\phi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, *où* $n \geq 2$. *Alors, sur l'espace de Hardy* $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le produit de Hankel* $H^*_{\overline{\phi}} H_\psi$ *est de rang fini.*
2. *Pour toute* i, $i = 1, 2, ..., n$, *soit* $\overline{\phi(z)}$ *est analytique en* z_i *ou bien* $\phi(z)$ *est analytique en* z_i.
3. $H^*_{\overline{\phi}} H_\psi = 0$.

Quelques résultats reliants les produits de Toeplitz et les semi-commutateurs aux produits de Hankel sont dus à Ding [12] :

Théorème 2.60. *Soient* $f, g \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$. *Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une fonction* $h \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ *telle que* $T_f T_g = T_h$.
2. *Il existe une fonction* $h \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ *telle que* $T_f T_g - T_h$ *est un opérateur de rang fini.*

3. *Le produit de Hankel* $H^*_{\overline{f}}H_g$ *est de rang fini.*
4. *Pour toute* i, $i = 1, 2, ..., n$, *soit* $\overline{f}$ *est analytique en* z_i *ou bien* $\phi(z)$ *est analytique en* z_i.

Théorème 2.61. *Soient* f *et* g *deux fonctions pluriharmoniques bornées sur* $\mathbb{D}^n$. *Alors, les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. $T_fT_g - T_{fg} = 0$.
2. *Le semi-commutateur* $T_fT_g - T_{fg}$ *est compact.*
3. $\left\|H^*_{\overline{f}}H_gk_z\right\| \longrightarrow 0$ *quand* $z \longrightarrow \partial\mathbb{D}^n$.
4. $\lim\limits_{z\to\partial\mathbb{D}^n} \left\langle H^*_{\overline{f}}H_gk_z, k_z\right\rangle = 0$, *i.e.* $\mathfrak{B}\left(H^*_{\overline{f}}H_g\right)(z) \longrightarrow 0$ *quand* $z \longrightarrow \partial\mathbb{D}^n$.
5. *Pour toute* i, $i = 1, 2, ..., n$, *soit* $\overline{f}$ *est analytique en* z_i *ou bien* $\phi(z)$ *est analytique en* z_i.

Opérateurs de Toeplitz duaux

Tout d'abord, on commençe par définir les opérateurs de Toeplitz duaux sur l'espace de Bergman $(L^2_a)^\perp$, qui ont été introduits et étudiés pour la première fois par Stroethoff et Zheng [45].

Pour $f \in L^\infty(\mathbb{D})$, on définit l'opérateur de Toeplitz dual S_f à symbole f comme étant une multiplication par ce symbole suivi d'une projection sur le supplémentaire orthogonal $(L^2_a)^\perp$ de l'espace de Bergman L^2_a dans $L_2(\mathbb{D})$, comme suit :

$$\begin{aligned} S_f : (L^2_a)^\perp &\longrightarrow (L^2_a)^\perp, \\ u &\longrightarrow S_f(u) = (I - \mathcal{P})(fu), \quad \forall u \in (L^2_a)^\perp. \end{aligned}$$

Ici $I - \mathcal{P}$ est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{D}, dA)$ dans $(L^2_a)^\perp$ déjà rencontrée dans l'introduction.

Pour établir des propriétés algébriques fondamentales de ces opérateurs, Stroethoff et Zheng [45] ont introduit une transformation d'opérateurs, à savoir la transformation $\mathscr{S}(w)$ définie comme suit.

Pour un opérateur $T \in \left(\mathscr{B}\left(L_a^2\right)^{\perp}\right)$, $w \in \mathbb{D}$ et l'automorphisme du disque unité $\varphi_w(z) = \dfrac{w-z}{1-\overline{w}z}, \forall z \in \mathbb{D}$, on pose

$$\mathscr{S}_w(T) := T - 2S_{\varphi_w} T S_{\overline{\varphi_w}} + S_{\varphi_w}^2 T S_{\overline{\varphi_w}}^2 \tag{2.41}$$

En utilisant cette transformation, ils ont établi, entre autres, les théorèmes de commutativité et de Brown-Halmos suivants.

Théorème 2.62. *Soient f et g dans $L^\infty(\mathbb{D})$. Alors, S_f et S_g commutent si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite.*

i) f et g sont toutes les deux analytiques.

ii) f et g sont toutes les deux anti-analytiques.

iii) Il existe deux constantes α, β (non nulles à la fois) t.q. $\alpha f + \beta g$ est constante.

Théorème 2.63. *Soient $f, g \in L^\infty(\mathbb{D})$. Alors le produit $S_f S_g$ est un opérateur de Toeplitz dual si et seulement si f est analytique sur $\mathbb{D}$ ou bien g est antianalytique sur $\mathbb{D}$. Si l'un de ces cas se présente, alors $S_f S_g = S_{fg}$.*

D'autres résultats d'importance égale, concernant la compacité, la commutativité essentielle, les algèbres engendrées par les opérateurs de Toeplitz duaux ainsi que des propriétés spectrales, ont été établis dans [45]. À titre d'exemples, on a les résultats spectraux suivants. Pour plus de details, on renvoie le lecteur à [45], et à [13] pour les notions associées, (voir aussi [7, 19]) :

Proposition 2.64. *Soit $f \in L^\infty(\mathbb{D})$. Si S_f est inversible, alors f est aussi inversible dans $L^\infty(\mathbb{D})$.*

Théorème 2.65. *Si $f \in L^\infty(\mathbb{D})$, alors $\mathscr{R}(f) \subset \sigma(S_f)$, où $\mathscr{R}(f)$ désigne l'image essentielle de la fonction essentiellement bornée f, et $\sigma(S_f)$ désigne le spectre de l'opérateur S_f.*

Théorème 2.66. *L'application ξ définie par :*

$$\begin{aligned} \xi : \ L^\infty(\mathbb{D}) &\longrightarrow \mathscr{B}\left(\left(L_a^2\right)^{\perp}\right), \\ f &\longrightarrow \xi(f) = S_f, \end{aligned}$$

est une isométrie de $L^\infty(\mathbb{D})$ dans $\mathscr{B}\left((L_a^2)^{\perp}\right)$, i.e. $||S_f|| = ||f||_\infty$

Proposition 2.67. *Si f est une fonction inversible de $L^\infty(\mathbb{D})$ dont l'image $\mathscr{R}(f)$ est contenue dans le demi plan droit ouvert, alors S_f est inversible.*

Théorème 2.68. *Pour toute $f \in L^\infty(\mathbb{D})$, on a $\sigma(S_f) \subset \mathfrak{H}(\mathscr{R}(f))$, où $\mathfrak{H}(\mathscr{R}(f))$ désigne l'enveloppe convexe de $\mathscr{R}(f)$.*

Proposition 2.69. *Si $f \in L^\infty(\mathbb{D})$ est telle que S_f est un opérateur de Fredholm, alors f est inversible dans $L^\infty(\mathbb{D})$.*

Théorème 2.70. *Si $f \in L^\infty(\mathbb{D})$, alors $\mathscr{R}(f) \subset \sigma_e(S_f)$, où $\sigma_e(S_f)$ désigne le spectre essentiel de S_f.*

Théorème 2.71. *Si $f \in L^\infty(\mathbb{D})$ est telle que les opérateurs de Hankel H_f et $H_{\overline{f}}$ sont compacts, alors $\sigma_e(S_f) = \mathscr{R}(f)$.*

Proposition 2.72. *Si f est une fonction simple non-constante, mesurable et à valeures réelles sur $\mathbb{D}$ telle que H_f est compact, alors les deux spectres $\sigma(S_f)$ et $\sigma_e(S_f)$ sont non connexes.*

Proposition 2.73. *Soit f une fonction continue à valeures réelles sur $\mathbb{D}$, alors on a $\sigma(S_f) = \sigma_e(S_f) = \overline{f(\mathbb{D})}$ est connexe.*

Théorème 2.74. *Soit f une fonction bornée. Si f est analytique ou antianalytique sur $\mathbb{D}$, alors $\sigma(S_f) = \sigma_e(S_f) = \overline{f(D)}$.*

D'autre part, les opérateurs de Toeplitz duaux sur le supplémentaire orthogonal de l'espace de Bergman du polydisque défini ci-dessus ont été étudiés par plusieurs auteurs, on cite par exemple [7, 34]. Des résultats analogues aux résultats décrits ci-dessus ont été bien établis. Notamment, une transformation $\mathscr{S}_w$ analogue à celle de Stroethoff et Zheng [45] a été construite, et des résultats de commutativité, de type Brown-Halmos et spéctraux ont été établis.

Théorème 2.75. *Soient f et g dans $L^\infty(\mathbb{D}^n)$. Alors, S_f et S_g commutent sur $(L^2_a(\mathbb{D}^n))^\perp$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite.*

i) f *et* g *sont toutes les deux analytiques.*

ii) f *et* g *sont toutes les deux anti-analytiques.*

iii) Il existe deux constantes α, β *(non nulles à la fois) t.q. :* $\alpha f + \beta g$ *est constante.*

Théorème 2.76. *Soient* $f, g \in L^\infty(\mathbb{D}^n)$*. Alors le produit* $S_f S_g$ *est un opérateur de Toeplitz dual sur* $(L^2_a(\mathbb{D}^n))^\perp$ *si et seulement si* f *est analytique sur* $\mathbb{D}^n$ *ou bien* g *est antianalytique sur* $\mathbb{D}^n$*. Si l'un de ces cas se présente, alors* $S_f S_g = S_{fg}$*.*

Cependant, l'opérateur de Toeplitz dual à symbole $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, sur le supplémentaire orthogonal de l'espace de Hardy du cercle unité, $\mathcal{H}^2(\mathbb{T})$ peut être défini d'une manière similaire comme suit :

$$\begin{aligned} S_\phi : \ \left(\mathcal{H}^2(\mathbb{T})\right)^\perp & \longrightarrow \left(\mathcal{H}^2(\mathbb{T})\right)^\perp, \\ f & \longrightarrow S_\phi f = (I - \mathcal{P})(\phi f). \end{aligned}$$

Cependant, comme l'on a déjà mentionné dans l'introduction, ce n'est plus intéressant d'étudier les opérateurs de Toeplitz duaux dans le cas de l'espace de Hardy du cercle unité $\mathcal{H}^2(\mathbb{T})$ (i.e. dans le cas $n = 1$ en section 2.1). Ceci a été déjà signalé par Stroethoff et Zheng eux même dans [45]. En effet, en utilisant la caractérisation de la Proposition 2.24 du supplémentaire orthogonal $(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}))^\perp$ de l'espace de Hardy, à savoir $\mathcal{H}^2(\mathbb{T})^\perp = \overline{z\mathcal{H}^2(\mathbb{T})}$, on peut montrer que ces opérateurs se réduisent à des opérateurs de Toeplitz. En fait, cette dernière identification veut dire que cahque $g \in (\mathcal{H}^2(\mathbb{T}))^\perp$ est de la forme $\overline{zf}$ pour une certaine $f \in H^2$. Cela suggère l'introduction de l'opérateur anti-unitaire $\mathcal{J}$ sur $L^2(\mathbb{T})$ défini par $\mathcal{J}(f) = \overline{zf}$; (qui vérifie évidemment les conditions de la Définition 1.50).
Cet opérateur anti-unitaire $\mathcal{J}$ possède de belles propriétés, telles que $\mathcal{J}^{-1}(I - P)\mathcal{J} = P$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}^{-1}$ ainsi que $\mathcal{J}^{-1} H_f \mathcal{J} = H_f^*$. De plus, remaquons que $\mathcal{J}(\mathcal{H}^2(\mathbb{T})) = (\mathcal{H}^2(\mathbb{T}))^\perp$ et $\mathcal{J}\left((\mathcal{H}^2(\mathbb{T}))^\perp\right) = \mathcal{H}^2(\mathbb{T})$. Aussi, on a $\mathcal{J}^{-1} M_\psi = M_{\overline{\psi}} \mathcal{J}$. En effet,

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{J}^{-1} M_\psi h\right)(w) &= (\mathcal{J}(\psi h))(w) = e^{-i\theta}\overline{\psi(w)h(w)}, \\ &= \overline{\psi(w)} e^{-i\theta}\overline{h(w)} = \overline{\psi(w)}(\mathcal{J}(h))(w) = \left(M_{\overline{\psi}}\mathcal{J}(h)\right)(w). \end{aligned}$$

Maintenant, puisque $\mathcal{J}^{-1}(I - P)\mathcal{J} = P$, on voit que $\mathcal{J}^{-1}(I - P)\mathcal{J} M_\psi = P M_\psi$. En utilisant cette dernière proporiété ainsi prouvée, on obtient $\mathcal{J}^{-1}(I - P) M_{\overline{\psi}} \mathcal{J} = P M_\psi$. D'après les définitions des opérateurs de Toeplitz et de Toplitz dual, on obtient

$$S_{\psi}^{*}\mathcal{J} = \mathcal{J}T_{\psi}.$$

Et puisque $S_f^* = S_{\overline{f}}$, on conclut que

$$\mathcal{J}T_{\psi} = S_{\overline{\psi}}\mathcal{J}.$$

Cela veut dire que l'opérateur de Toeplitz T_{ψ} est anti-unitairement équivalent à l'opérateur de Toeplitz dual $S_{\overline{\psi}}$. On peut résumer ce qu'on vient de démontrer dans la proposition suivante [19].

Proposition 2.77. *L'opérateur de Toeplitz dual S_{ψ} défini sur le supplémentaire orthogonal $(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}))^{\perp}$ de l'espace de Hardy est anti-unitairement équivalent à l'opérateur de Toeplitz $T_{\overline{\psi}}$ sur l'espace de Hardy $\mathcal{H}^2(\mathbb{T})$.*

Remarque 2.78. *En vertu de (2.30), la conclusion de la Proposition 2.77 n'est plus valable si $n > 1$.*

Cette dernière remarque nous a motivé pour introduire et détudier les opérateurs de Toeplitz duaux dans le cas du polydisque pour $n > 1$.

Alors nous procédons maintenant à la définition de cette nouvelle classe d'opérateurs dans ce cadre là. Un opérateur de Toeplitz dual à symbole $\phi \in L^{\infty}(\mathbb{T}^n)$ est défini de la même manière comme étant une multiplication suivie d'une projection de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccl} S_{\phi}: & (\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n))^{\perp} & \longrightarrow & (\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n))^{\perp}, \\ & f & \longrightarrow & S_{\phi}f = \mathcal{Q}(\phi f) = \mathcal{Q}M_{\phi}(f). \end{array} \tag{2.42}$$

Ici la projection $\mathcal{Q} = I - \mathcal{P}$ est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T}^n)$ dans $(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n))^{\perp}$ définie dans (2.24).

Pour un symbole $\phi \in L^{\infty}(\mathbb{T}^n)$, l'opérateur de multiplication vérifie $||M_{\phi}|| = ||\phi||_{\infty}$, et puisque la projection $\mathcal{Q}$ est de norme 1, on obtient donc :

$$\|S_{\phi}(f)\|_2 = \|\mathcal{Q}M_{\phi}(f)\|_2 \leq \|\phi\|_{\infty}\|f\|_2, \ \forall f \in \left(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)\right)^{\perp}. \tag{2.43}$$

À coté des opérateurs de Toeplitz et de Hankel définis ci-dessus, les opérateurs de Toeplitz duaux apparaissent d'une façon naturelle en vertu de la décomposition (2.29).
En effet, pour un symbole $f \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, l'opérateur de multiplication M_f, $f \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ s'écrit sous la forme :

$$M_f = \begin{pmatrix} T_f & H^*_{\overline{f}} \\ H_f & S_f \end{pmatrix}.$$

Et pour $h \in L^2(\mathbb{T}^n)$, on a $h = h_1 + h_2$ où $h_1 \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$ et $h_2 \in (\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)^\perp$ et donc on a

$$\begin{aligned} M_f(h) &= fh = f(h_1+h_2) = fh_1 + fh_2, \\ &= P(fh_1) + Q(fh_1) + P(fh_2) + Q(fh_2), \\ &= P(fh_1) + P(fh_2) + Q(fh_1) + Q(fh_2), \\ &= T_f(h_1) + H^*_{\overline{f}}(h_2) + H_f(h_1) + S_f(h_2), \\ &\cong \Big(T_f(h_1) + H^*_{\overline{f}}(h_2)\ ,\ H_f(h_1) + S_f(h_2)\Big), \\ &\cong \begin{pmatrix} T_f & H^*_{\overline{f}} \\ H_f & S_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

puisque pour tout $h_2 \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$ on a $P(fh_2) = H^*_{\overline{f}}(h_2)$, comme

$$\Big\langle H^*_{\overline{f}}(h_2), g \Big\rangle = \big\langle h_2, H_{\overline{f}}(g) \big\rangle = \big\langle h_2, Q(\overline{f}g) \big\rangle = \big\langle h_2, \overline{f}g \big\rangle = \langle fh_2, g \rangle = \langle P(fh_2), g \rangle .$$

Cette représentation engendre le nouveau type d'opérateurs qu'on vient de définir.
Maintenant, en utilisant la decomposition (2.29), i.e. $L^2(\mathbb{T}^n) = \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n) \oplus (\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n))^\perp$, pour $f, g \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, l'équation produit $M_{fg} = M_f M_g$ peut s'écrire sous une forme matricielle, comme suit :

$$\begin{pmatrix} T_{fg} & \mathcal{H}^*_{\overline{fg}} \\ \mathcal{H}_{fg} & S_{fg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_f & \mathcal{H}^*_{\overline{f}} \\ \mathcal{H}_f & S_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_g & \mathcal{H}^*_{\overline{g}} \\ \mathcal{H}_g & S_g \end{pmatrix},$$

ce qui donne les équations algébriques suivantes :

$$T_{fg} = T_f T_g + H^*_{\overline{f}} H_g, \tag{2.44}$$

$$\mathcal{S}_{fg} = H_f H^*_{\overline{g}} + \mathcal{S}_f \mathcal{S}_g, \tag{2.45}$$

$$H_{fg} = H_f T_g + \mathcal{S}_f H_g. \tag{2.46}$$

Il s'en suit que le commutateur $[\ \mathcal{S}_f,\ \mathcal{S}_g] = \ \mathcal{S}_f\mathcal{S}_g - \mathcal{S}_g\ \mathcal{S}_f$ peut s'écrire sous la forme

$$[\ \mathcal{S}_f,\ \mathcal{S}_g] = H_g H_{\overline{f}}^* - H_f H_{\overline{g}}^*. \tag{2.47}$$

Comme le "gros" opérateur de Hankel est trivial si le symbole est analytique, de telles identités se réduisent aux équations suivantes [19] :

Lemme 2.79. *Soient $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$ et $g \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, alors on a*
i) $H_g T_f = \mathcal{S}_f H_g$.
ii) $T_{\overline{f}} H_g^* = H_g^* \mathcal{S}_{\overline{f}}$.
iii) $\mathcal{S}_{fg} = \mathcal{S}_f \mathcal{S}_g$.
iv) $\mathcal{S}_{g\overline{f}} = \mathcal{S}_g \mathcal{S}_{\overline{f}}$.

Démonstration. i)- Pour tout $h \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$, on a

$$H_g T_f(h) = H_g(\mathcal{P}(fh)) = H_g(fh) = \mathcal{Q}(gfh) = H_{gf}(h),$$

et

$$H_f T_g(h) = H_f(\mathcal{P}(gh)) = \mathcal{Q}(P(gh)) = 0.$$

Alors, en raison de (2.46), on voit que

$$H_g T_f = S_f H_g. \tag{2.48}$$

ii)- En considérant l'adjoint de l'équation (2.48), on obtient

$$T_{\overline{f}} H_g^* = H_g^* S_{\overline{f}}. \tag{2.49}$$

iii)- Puisque $H_f(h) = \mathcal{Q}(fh) = 0$, pour tout $h \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$, (i.e. H_f est l'application triviale 0 si $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$), alors (2.45) se réduit à l'equation

$$S_{fg} = S_f S_g. \tag{2.50}$$

iv)- Pour $g \in L^\infty(\mathbb{T})^n$, on a aussi $\overline{g} \in L^\infty(\mathbb{T})^n$. Alors, par (2.50), on obtient

$$S_{f\overline{g}} = S_f S_{\overline{g}}. \tag{2.51}$$

En considérant l'adjoint de cette dernière, on obtient

$$S_{g\overline{f}} = S_g S_{\overline{f}}. \tag{2.52}$$

□

Proposition 2.80. *Les propriétés algébriques suivantes des opérateurs de Toeplitz duaux seront utilisées à plusieurs reprises dans ce qui suit :*

$$S_f^* = S_{\overline{f}}, \tag{2.53}$$

$$S_{\alpha f+\beta g} = \alpha S_f + \beta S_g, \tag{2.54}$$

pour $f \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Démonstration. En effet, pour tout $u, v \in \left(\mathcal{H}^2\left(\mathbb{T}^n\right)\right)^\perp$, on a

$$\begin{aligned}\left\langle\ S_f^*(u), v\right\rangle &= \langle u,\ S_f(v)\rangle = \langle u, \mathcal{Q}(fv)\rangle \\ &= \langle u, fv\rangle = \left\langle \overline{f}u, v\right\rangle = \left\langle \mathcal{Q}(\overline{f}u), v\right\rangle = \left\langle S_{\overline{f}}(u), v\right\rangle.\end{aligned}$$

Et pour tout $h \in \left(\mathcal{H}^2\left(\mathbb{T}^n\right)\right)^\perp$, on a

$$\begin{aligned}S_{\alpha f+\beta g}(h) &= \mathcal{Q}((\alpha f + \beta g)h) = \mathcal{Q}(\alpha fh + \beta gh) \\ &= \mathcal{Q}(\alpha fh) + \mathcal{Q}(\beta gh) = \alpha\mathcal{Q}(fh) + \beta\mathcal{Q}(gh) \\ &= \alpha S_f h + \beta S_g h = (\alpha S_f + \beta S_g)h.\end{aligned}$$

□

2.3 La transformation $\mathscr{S}_w$

Pour $\lambda \in \mathbb{D}$, soit φ_λ la transformation linéaire fractionnaire de $\mathbb{D}$ dans lui-même donnée par

$$\varphi_\lambda(u) = \frac{\lambda - u}{1 - \overline{\lambda}u}, u \in \mathbb{D}.$$

Chaque application φ_λ est un automorphisme du disque unité $\mathbb{D}$ satisfaisant l'identité $\varphi_\lambda^{-1} = \varphi_\lambda$.

Pour $\tau \in \mathbb{T}$, l'application $\varphi_\lambda(\tau) = \dfrac{\lambda - \tau}{1 - \overline{\lambda}\tau}$ demeure bien définie sur le cercle unité $\mathbb{T}$, et on a de plus $|\varphi_\lambda(\tau)| = 1$. Ainsi, pour $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{D}^n$, l'application $\varphi_w(\zeta) = (\varphi_{w_1}(\zeta_1), \ldots, \varphi_{w_n}(\zeta_n))$, $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n) \in \mathbb{T}^n$ est aussi bien définie sur le n-tore $\mathbb{T}^n$, et on a également $\varphi_w \circ \varphi_w = id$ est l'application identité. Pour plus de détails nous référons à la section 1.2, et aux références [41, 43].

Pour f et g dans $L^2(\mathbb{T}^n)$, on considère l'opérateur de rang 1 défini sur $L^2(\mathbb{T}^n)$ par

$$(f \otimes g)h =< h, g > f, \ \forall f \in L^2(\mathbb{T}^n), \tag{2.55}$$

et notons que sa norme est donnée par $\|f \otimes g\| = \|f\|\|g\|$.

Pour $w \in \mathbb{D}^n$, on définit l'opérateur unitaire $\mathbb{U}_w$ sur $L^2(\mathbb{T}^n)$ par

$$\mathbb{U}_w f = (f \circ \varphi_w)k_w, \ \forall f \in L^2(\mathbb{T}^n). \tag{2.56}$$

Ainsi, pour un opérateur de Toeplitz T_f sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$, on a

$$\mathbb{U}_w T_f \mathbb{U}_w = T_{f \circ \varphi_w}, \tag{2.57}$$

Rappelons d'après la section 1.1 que pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$,, on a

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ \ldots \ + \alpha_n \ \ ; \ \ \alpha! = \alpha_1! \ \ldots \ \alpha_n! \ \ ; \ \ z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \ \ldots \ z_n^{\alpha_n}. \tag{2.58}$$

D'autre part, on sait que pour tous $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{D}^n$, et $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{D}^n$, on a

$$\prod_{j=1}^{n} (1 - z_j \overline{w}_j)^m = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha_j=0}^{m} C_{m,\alpha} z^\alpha \overline{w}^\alpha, \tag{2.59}$$

où les coefficients sont donnés par

$$C_{m,\alpha} = (-1)^{|\alpha|} \begin{pmatrix} m \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} m \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} m \\ \alpha_j \end{pmatrix} = \frac{m!}{\alpha_j!(m - \alpha_j)!}.$$

En particulier, pour le noyau reproduisant, on obtient

$$K_w^{-1}(z) = \prod_{j=1}^{n} (1 - z_j \overline{w}_j) = \sum_{|\alpha|=0}^{n} (-1)^{|\alpha|} z^\alpha \overline{w}^\alpha. \tag{2.60}$$

Finalement, pour deux opérateurs $\mathbf{T},\ \mathbf{S} \in \mathscr{B}(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n))$ et pour toutes fonctions $f, g \in L^2(\mathbb{T}^n)$, on peut vérifier facilement que :

$$\mathbf{T}(f \otimes g)\mathbf{S}^* = \mathbf{T}f \otimes \mathbf{S}g. \tag{2.61}$$

En rassemblant tous ces éléments, nous arrivons à la représentation cruciale suivante.

Proposition 2.81. *Sur l'espace de Hardy du polydisque $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$, on a l'identité d'opérateurs suivante :*

$$k_w \otimes k_w = \sum_{|\alpha|=0}^{n} (-1)^{|\alpha|} T_{\varphi_w^\alpha} T_{\overline{\varphi_w}^\alpha},\ \forall w \in \mathbb{D}^n. \tag{2.62}$$

Démonstration. Soit f dans $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}^n)$. La propriété de valeur moyenne invariante (1.12) implique que

$$f(0) = \int_{\mathbb{D}^n} f(w)dA(w).$$

En rajourant $K_w(z)K_w^{-1}(z)$ et remarquant que $f(0) = (1 \otimes 1)f$, on obtient

$$(1 \otimes 1)f = \int_{\mathbb{D}^n} K_w^{-1}(z)K_w(z)f(w)dA(w). \tag{2.63}$$

En utilisant (2.60), on obtient

$$(1 \otimes 1)f = \sum_{|\alpha|=0}^{n} (-1)^{|\alpha|} z^\alpha \int_{\mathbb{D}^n} \overline{w}^\alpha \overline{K_z(w)} f(w)dA(w) = \sum_{|\alpha|=0}^{n} (-1)^{|\alpha|} z^\alpha \left(T_{\overline{w}^\alpha} f\right)(z).$$

Ainsi, nous arrivons à l'identité d'opérateurs sur $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{D}^n)$ suivante :

$$(1 \otimes 1) = \sum_{|\alpha|=0}^{n} (-1)^{|\alpha|} T_{z^\alpha} T_{\overline{z}^\alpha}.$$

En faisant appel à l'opérateur unitaire $\mathbb{U}_w$, on aura

$$\mathbb{U}_w(1 \otimes 1)\mathbb{U}_w = \sum_{|\alpha|=0}^{n} (-1)^{|\alpha|} \left(\mathbb{U}_w T_{z^\alpha} \mathbb{U}_w\right) \left(\mathbb{U}_w T_{\overline{z}^\alpha} \mathbb{U}_w\right). \tag{2.64}$$

En utilisant (2.56) et le fait que $\mathbb{U}_w 1 = k_w$, d'après (2.61) on obtient

$$\mathbb{U}_w(1 \otimes 1)\mathbb{U}_w = (\mathbb{U}_w 1) \otimes (\mathbb{U}_w 1) = k_w \otimes k_w. \tag{2.65}$$

Maintenant, (2.57), (2.64) et (2.65) donnent l'identité d'opérateurs sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{D}^n)$ suivante :

$$k_w \otimes k_w = \sum_{|\alpha|=0}^{n} (-1)^{|\alpha|} T_{\varphi_w^\alpha} T_{\overline{\varphi_w}^\alpha}, \ \forall w \in \mathbb{D}^n,$$

qui est évidemment valable aussi sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$. □

Cette dernière assertion clé donne lieu à une primordiale transformation d'opérateurs notée $\mathscr{S}_w(T)$ comme suit.

Si on opère l'opérateur de Hankel $H_{\varphi_w^\alpha}$ et son adjoint $H^*_{\varphi_w^\alpha}$ sur l'identité d'opérateurs (2.62) tout en utilisant (i) et (ii) du Lemme 2.79 ainsi que (2.61), on obtient

$$\begin{aligned}
\left(H_{\varphi_w^\alpha} k_w\right) \otimes \left(H_{\varphi_w^\alpha} k_w\right) &= H_{\varphi_w^\alpha} \left(k_w \otimes k_w\right) H^*_{\varphi_w^\alpha}, \\
&= H_{\varphi_w^\alpha} \left(\sum_{|\alpha|=0}^{n} (-1)^{|\alpha|} \ T_{\varphi_w^\alpha} T_{\overline{\varphi_w}^\alpha} \right) H^*_{\varphi_w^\alpha}, \\
&= \sum_{|\alpha|=0}^{n} (-1)^{|\alpha|} \ \left(H_{\varphi_w^\alpha} T_{\varphi_w^\alpha}\right) \left(T_{\overline{\varphi_w}^\alpha} H^*_{\varphi_w^\alpha}\right), \\
&= \sum_{|\alpha|=0}^{n} (-1)^{|\alpha|} \ \mathcal{S}_{\varphi_w^\alpha} \left(H_{\varphi_w^\alpha} H^*_{\varphi_w^\alpha}\right) \mathcal{S}_{\overline{\varphi_w}^\alpha}. \qquad (2.66)
\end{aligned}$$

Maintenant, remarquons que l'opération sur le produit de Hankel $H_{\varphi_w^\alpha} H^*_{\varphi_w^\alpha}$ dans le membre droit de cette dernière formule (2.66) réduit ce produit en un opérateur de rang 1 à savoir $\left(H_{\varphi_w^\alpha} k_w\right) \otimes \left(H_{\varphi_w^\alpha} k_w\right)$. Alors, si on remplace cet opérateur produit $H_{\varphi_w^\alpha} H^*_{\varphi_w^\alpha}$ par un opérateur quelconque T agissant sur $(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n))^\perp$, on obtient la transformation désirée, définit comme suit :

Définition 2.82. *Pour un opérateur linéaire borné T sur $(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n))^\perp$ et pour $w \in \mathbb{D}^n$, on définit une transformation d'opérateurs $\mathscr{S}_w(T)$ comme suit.*

$$\mathscr{S}_w(T) = \sum_{|\alpha|=0}^{n} (-1)^{|\alpha|} \ \mathcal{S}_{\varphi_w^\alpha} T \mathcal{S}_{\overline{\varphi_w}^\alpha}. \qquad (2.67)$$

Pour un petit historique sur ce type de transformations, on fait référence à [19].

Remarque 2.83. *Pour $n = 1$, on retombe sur l'identité d'opérateurs obtenue dans [22].*

L'opérateur $\mathscr{S}_w$ fournit une belle caractérisation à nos deux opérateurs deToeplitz duaux.

Proposition 2.84. *Si $\mathcal{S}_f$ est un opérateur de Toeplitz dual dans $\left(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)\right)^{\perp}$, alors*

$$\mathscr{S}_w(\mathcal{S}_f) = 0, \quad \textit{pour tout } w \in \mathbb{D}^n.$$

Démonstration. Soit $w \in \mathbb{D}^n$ et considérons l'opérateur de Toeplitz dual $\mathcal{S}_f$ agissant sur $\left(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)\right)^{\perp}$ à symbole $f \in L^{\infty}(\mathbb{T}^n)$. En appliquant $\mathscr{S}_w$ sur $\mathcal{S}_f$, on obtient

$$\mathscr{S}_w(\mathcal{S}_f) = \sum_{|\alpha|=0}^{n} (-1)^{|\alpha|}\ \mathcal{S}_{\varphi_w^\alpha}\mathcal{S}_f\mathcal{S}_{\overline{\varphi_w}^\alpha} = \sum_{|\alpha|=0}^{n} (-1)^{|\alpha|}\ \mathcal{S}_{|\varphi_w^\alpha|^2 f} = \mathcal{S}_{\Theta},$$

avec

$$\Theta = f \sum_{|\alpha|=0}^{n} (-1)^{|\alpha|}\ |\varphi_w^\alpha|^2.$$

Remplaçons z et w dans la formule (2.60) par $\varphi_w(\zeta)$ avec $\zeta \in \mathbb{T}^n$ et puisque $|\varphi_{w_j}| = 1$ sur le cercle unité $\mathbb{T}$, on trouve

$$\sum_{|\alpha|=0}^{n} (-1)^{|\alpha|} |\varphi_w^\alpha(z)|^2 = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - |\varphi_{w_j}|^2\right) = 0.$$

Alors, nous déduisons que $\mathscr{S}_w(\mathcal{S}_f) = 0$ pour tout opérateur de Toeplitz dual $\mathcal{S}_f$. □

La propriété suivante de l'opérateur $\mathscr{S}_w$ sera nécessaire dans la suite.

Théorème 2.85. *Soit T un opérateur compact sur $\left(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)\right)^{\perp}$, alors $\|\mathscr{S}_w(T)\| \longrightarrow 0$ quand $w \to \mathbb{T}^n$.*

Démonstration. Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on utilise la notation $\alpha' = (\alpha_2, ..., \alpha_n)$, et nous observons que :

$$\begin{aligned} \mathscr{S}_w(T) &= \sum_{|\alpha|=0}^{n} (-1)^{|\alpha|} \mathcal{S}_{\varphi_w^\alpha} T \mathcal{S}_{\overline{\varphi_w}^\alpha} = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=0}^{1} (-1)^{|\alpha|} \mathcal{S}_{\varphi_{w_1}^{\alpha_1}} \ldots \mathcal{S}_{\varphi_{w_n}^{\alpha_n}} T \mathcal{S}_{\overline{\varphi}_{w_1}^{\alpha_1}} \ldots \mathcal{S}_{\overline{\varphi}_{w_n}^{\alpha_n}}, \\ &= \sum_{|\alpha'|=0}^{n-1} (-1)^{|\alpha'|} \mathcal{S}_{\varphi_{w_2}^{\alpha_2}} \ldots \mathcal{S}_{\varphi_{w_n}^{\alpha_n}} \left(T - \mathcal{S}_{\varphi_{w_1}} T \mathcal{S}_{\overline{\varphi}_{w_1}}\right) \mathcal{S}_{\overline{\varphi}_{w_2}^{\alpha_2}} \ldots \mathcal{S}_{\overline{\varphi}_{w_n}^{\alpha_n}}. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Par conséquent, il suffit de vérifier que pour tout opérateur compact T, on a

$$\left\| T - \mathcal{S}_{\varphi_{w_1}} T \mathcal{S}_{\overline{\varphi}_{w_1}} \right\| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \mathbb{D}^n \ni w = (w_1, \ldots, w_n) \longrightarrow \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{T}^n. \tag{2.69}$$

Comme la collection des opérateurs de rangs finis est dense dans l'ensemble des opérateurs compacts, il suffit de vérifier cette dernière propriété (2.69) pour les opérateurs de rang 1. Soient $f, g \in \left(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)\right)^{\perp}$, alors par (2.61) nous obtenons

$$\begin{aligned} \left\| f \otimes g - \mathcal{S}_{\varphi_{w_1}} (f \otimes g) \mathcal{S}_{\overline{\varphi}_{w_1}} \right\| &= \left\| (\zeta_1 f) \otimes (\zeta_1 g) - \left(\mathcal{S}_{\varphi_{w_1}} f\right) \otimes \left(\mathcal{S}_{\varphi_{w_1}} g\right) \right\|, \\ &\leq \left\| \left(\zeta_1 f - \mathcal{S}_{\varphi_{w_1}} f\right) \otimes (\zeta_1 g) \right\| + \left\| \left(\mathcal{S}_{\varphi_{w_1}} f\right) \otimes \left(\zeta_1 g - \mathcal{S}_{\varphi_{w_1}} g\right) \right\|. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Maintenant, nous savons que, pour $w_1 \in \mathbb{D}$ et $\tau \in \mathbb{T}$, $w_1 - \varphi_{w_1}(\tau) \longrightarrow 0$ *p.p.* quand $|w_1| \to 1^-$. En faisant appel au théorème de la convergence dominée, nous déduisons que pour $f \in \left(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)\right)^{\perp}$ on a

$$\|w_1 f - \varphi_{w_1} f\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}^n} |w_1 f(\xi) - \varphi_{w_1}(\xi) f(\xi)|^2 \, d\sigma(\xi) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad |w_1| \longrightarrow 1^-.$$

Par conséquent, on voit que $\|\zeta_1 f - \varphi_{w_1} f\|_2 \longrightarrow 0$ quand $\mathbb{D} \ni w_1 \longrightarrow \zeta_1 \in \mathbb{T}$. Comme on a l'identité $(I - \mathcal{P})(\zeta_1 f(\xi)) = \zeta_1 f(\xi)$, on obtient

$$\left\| \zeta_1 f - \mathcal{S}_{\varphi_{w_1}} f \right\|_2 = \|(I - \mathcal{P})(\zeta_1 f - \varphi_{w_1} f)\|_2 \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \mathbb{D}^n \ni w \longrightarrow \zeta \in \mathbb{T}^n.$$

En utilisant cette dernière égalité avec l'inégalité (2.70), il s'en suit que

$$\left\| f \otimes g - \mathcal{S}_{\varphi_{w_1}} (f \otimes g) \mathcal{S}_{\overline{\varphi_{w_1}}} \right\| \longrightarrow 0 \text{ quand } \mathbb{D}^n \ni w \longrightarrow \zeta \in \mathbb{T}^n. \qquad \square$$

Chapitre 3

Propriétés algébriques des opérateurs de Toeplitz duaux

3.1 Commutativité des opérateurs de Toeplitz duaux

Tout d'abord, notons que les opérateurs de Toeplitz duaux hermitiens peuvent être caractérisés assez facilement, comme le montre le lemme suivant. Cependant, caractériser les opérateurs de Toeplitz duaux normaux n'est pas une tâche immédiate. C'est en fait une conséquence de notre principal résultat dans cette section, comme nous le verrons plus tard.

Lemme 3.1. *$\mathcal{S}_f$ est auto-adjoint si et seulement si f est réelle.*

Démonstration. $\mathcal{S}_f$ est auto-adjoint signifie que $\mathcal{S}_f = \mathcal{S}_f^*$, ce qui équivaut à $f = \overline{f}$. Ainsi, f doit avoir des valeurs réelles. □

Rappelons que le Lemme 2.79 montre que si f et g sont tous les deux analytiques ou tous les deux antianalytiques, alors $\mathcal{S}_f$ et $\mathcal{S}_g$ commutent. Si une combinaison linéaire non triviale de f et g est constante, ils commutent également. Nous cherchons donc à savoir si ce sont les seuls cas où la commutativité a lieu. En utilisant des arguments similaires à ceux de [19, 34, 45], nous arrivons au théorème suivant :

Théorème 3.2. *Soient f, g des fonctions bornées sur $\mathbb{T}^n$. Alors, les opérateurs de Toeplitz duaux $\mathcal{S}_f$ et $\mathcal{S}_g$ commutent dans $(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n))^\perp$, i.e. $\mathcal{S}_f\mathcal{S}_g = \mathcal{S}_g\mathcal{S}_f$, si et seulement si f et g satisfont l'une des conditions suivantes :*

1. *ils sont tous les deux analytiques sur $\mathbb{T}^n$.*
2. *ils sont tous les deux antianalytiques sur $\mathbb{T}^n$.*
3. *une combinaison linéaire non triviale les reliant est constante sur $\mathbb{T}^n$.*

Démonstration. La condition suffisante est triviale en vertu du Lemme 2.79. En ce qui concerne la condition nécessaire, on observe que par la Proposition 2.81 et les parties (i) et (ii) du Lemme 2.79 on a

$$H_f(k_w \otimes k_w)H_{\overline{g}}^* = \sum_{|\alpha|=0}^{n} (-1)^{|\alpha|} \left(\mathcal{S}_{\varphi_w^\alpha} H_f\right)\left(H_{\overline{g}}^*\mathcal{S}_{\overline{\varphi_w}^\alpha}\right) = \mathscr{S}_w(H_f H_{\overline{g}}^*). \tag{3.1}$$

D'une manière similaire, on obtient

$$H_g(k_w \otimes k_w)H_{\overline{f}}^* = \mathscr{S}_w(H_g H_{\overline{f}}^*). \tag{3.2}$$

En combinant les équations, (2.47), (2.4), (3.1) et (3.2), on trouve que

$$(H_g k_w) \otimes (H_{\overline{f}} k_w) - (H_f k_w) \otimes (H_{\overline{g}} k_w) = \mathscr{S}_w([\mathcal{S}_f, \mathcal{S}_g]).$$

L'hypothèse du théorème réduit cette dernière égalité à

$$(H_g k_w) \otimes (H_{\overline{f}} k_w) = (H_f k_w) \otimes (H_{\overline{g}} k_w), \forall w \in \mathbb{D}^n.$$

En particulier, pour $w = 0$ on a $k_0 = 1$; d'où $H_g 1 \otimes H_{\overline{f}} 1 = H_f 1 \otimes H_{\overline{g}} 1$, qui peut être réécrit sous la forme

$$< h, H_{\overline{f}} 1 > H_g 1 =< h, H_{\overline{g}} 1 > H_f 1, \forall h \in \left(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)\right)^\perp.$$

Enfin, nous distinguons trois cas.

1) Si $H_g 1 \neq 0$ et $H_{\overline{g}} 1 \neq 0$, alors il existe un nombre complexe $\rho \neq 0$ tel que $H_f 1 = \rho H_g 1$ et $H_{\overline{f}} 1 = \overline{\rho} H_{\overline{g}} 1$. C'est-à-dire $\mathcal{Q}(f - \rho g) = \mathcal{Q}(\overline{f} - \overline{\rho g}) = 0$; d'où $f - \rho g$ et $\overline{f} - \overline{\rho g}$ sont tous les deux analytiques. Donc $f - \rho g$ est constante, ce qui correspond à la condition (3).

2) Si $H_g 1 = 0$, alors g est analytique. Nous devons avoir soit $H_f 1 = 0$ soit $H_{\overline{g}} 1 = 0$, ce qui signifie que f est analytique, (ce qui correspond à la condition (1)), ou g est co-analytique (dans ce cas g doit être constante, ce qui correspond à la condition (3)).
3) Si $H_{\overline{g}} 1 = 0$, alors g est antianalytique. Nous voyons aussi que $H_g 1 = 0$ ou $H_{\overline{f}} 1 = 0$. Cela signifie que soit g est analytique (ce qui implique que g est constante et ça correspond à la condition (3)), ou soit f est antianalytique (ce qui est conforme à la condition (2)). □

Maintenant, grâce au Théorème 3.2, les opérateurs de Toeplitz duaux normaux peuvent être facilement caractérisés :

Corollaire 3.3. *Supposons que $f \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$. Alors, l'opérateur de Toeplitz dual $\mathcal{S}_f$ est normal si et seulement si l'image de son symbole f est située sur une ligne du plan complexe.*

Démonstration. Comme f et son conjugué $\overline{f}$ ne peuvent être simultanément analytique ou antianalytique à moins que f ne soit constante, d'après le Théorème 3.2, $\mathcal{S}_f$ et $\mathcal{S}_f^* = \mathcal{S}_{\overline{f}}$ commutent si et seulement s'il y a des constantes γ, β et μ qui ne sont pas toutes nulles telles que $\gamma f + \beta \overline{f} = \mu$. En en déduit que $\mathcal{S}_f$ et $\mathcal{S}_f^*$ se commutent si et seulement si l'image de f est située sur une ligne du plan complexe. □

3.2 Produits d'opérateurs de Toeplitz duaux

Pour les opérateurs de Toeplitz duaux sur l'espace de Bergman du polydisque, un théorème de Brown-Halmos au sens de la définition 3 a été prouvé par Y.F. Lu et S.X. Shang dans [34], voir la section 2.2. Notre objectif dans cette section est d'établir un théorème de type Brown-Halmos pour nos opérateurs de Toeplitz duaux. Avant de le faire, prouvons tout d'abord une version plus générale de ce fameux théorème. Cette généralisation a été donnée dans un contexte apparent, d'abord par K. Stroethoff [44], puis par C. Gu [18] et par Lee [30], et aussi par Guediri [19] dans des contextes différents.

Théorème 3.4. *Soient f, g, h et k dans $L^\infty(\mathbb{T}^n)$. Alors $S_f S_g + S_h S_k$ est un opérateur de Toeplitz dual borné si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite.*

1. *f et h sont tous les deux analytiques.*

2. *g et k sont tous les deux antianalytiques.*

3. *f est analytique et k est antianalytique.*

4. *h est analytique et g est antianalytique.*

5. *il existe une constante $\gamma \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, telle que $h - \gamma f$ est analytique et $g + \gamma k$ est antianalytique.*

Dans tous les cas précédents on a $S_f S_g + S_h S_k = S_{fg+hk}$.

Démonstration. La suffisance des conditions (1), (2), (3) et (4) découle immédiatement du Lemme 2.79. Pour prouver que la condition (5) est suffisante, supposons qu'il existe une fonction analytique ϕ et une fonction antianalytique ψ telles que $h - \gamma f = \phi$, et $g + \gamma k = \psi$. On voit que

$$\begin{aligned} S_f S_g + S_h S_k &= S_f S_{(\psi - \gamma k)} + S_{(\varphi + \gamma f)} S_k \\ &= S_f (S_\psi - \gamma S_k) + (S_\varphi + \gamma S_f) S_k \\ &= S_{f\psi} + S_{k\varphi} = S_{fg+\gamma fk + hk - \gamma fk} = S_{fg+hk}, \end{aligned}$$

ce qui signifie que $S_f S_g + S_h S_k$ est un opérateur de Toeplitz dual.
Pour démontrer la nécessité, on suppose que $S_f S_g + S_h S_k = S_\vartheta$, pour certain $\vartheta \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$.

En utilisant les identités (2.44), (2.45) et (2.46), on obtient

$$S_{fg+hk-\vartheta} = H_f H_{\overline{g}}^* + H_h H_{\overline{k}}^*. \tag{3.3}$$

Donc, en introduisant l'opérateur $\mathscr{S}_w$, par la Proposition 2.81 et les parties (i) et (ii) du Lemme 2.79, on observe que

$$H_f (k_w \otimes k_w) H_{\overline{g}}^* = \sum_{|\alpha|=0}^{n} (-1)^{|\alpha|} \left(\mathcal{S}_{\varphi_w^\alpha} H_f\right) \left(H_{\overline{g}}^* \mathcal{S}_{\overline{\varphi_w}^\alpha}\right) = \mathscr{S}_w (H_f H_{\overline{g}}^*). \tag{3.4}$$

De même, on a

$$H_h (k_w \otimes k_w) H_{\overline{k}}^* = \mathscr{S}_w (H_h H_{\overline{k}}^*). \tag{3.5}$$

En combinant les trois dernières identités et en tenant compte de l'identité (2.4), on voit que

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_w(S_{fg+hk-\vartheta}) &= \mathscr{S}_w(H_f H^*_{\overline{g}}) + \mathscr{S}_w(H_h H^*_{\overline{k}}) \\ &= H_f(k_w \otimes k_w)H^*_{\overline{g}} + H_h(k_w \otimes k_w)H^*_{\overline{k}} \\ &= (H_f(k_w)) \otimes (H_{\overline{g}}(k_w)) + (H_h(k_w)) \otimes (H_{\overline{k}}(k_w)). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Comme $S_{fg+hk-\vartheta}$ est un opérateur de Toeplitz dual, par la Proposition 2.84, nous déduisons que :

$$H_f(k_w)) \otimes (H_{\overline{g}}(k_w)) + (H_h(k_w)) \otimes (H_{\overline{k}}(k_w)) = 0.$$

En particulier, si $w = 0 \in \mathbb{D}^n$ on aura $k_0 = 1$; et par suite on obtient

$$H_f 1 \otimes H_{\overline{g}} 1 = -H_h 1 \otimes H_{\overline{k}} 1. \tag{3.7}$$

Ainsi, on en déduit que

$$\langle v, H_{\overline{g}} 1\rangle\, H_f 1 = -\langle v, H_{\overline{k}} 1\rangle\, H_h 1, \quad \forall v \in \left(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)\right)^{\perp}. \tag{3.8}$$

On distingue maintenant, plusieurs cas (exactement nous avons 2^4 = seize cas) :

1. Si $H_{\overline{g}}1 = 0$, alors l'un des cas suivants doit être satisfait :
   (a) $H_f 1 = 0, H_{\overline{k}} 1 = 0$ et $H_h 1 = 0$ (cas possible). Cela implique que f et h sont analytiques et que g et k sont antianalytiques. Ceci correspond aux conditions (1), (2), (3) et (4).
   (b) $H_f 1 = 0, H_{\overline{k}} 1 = 0$ et $H_h 1 \neq 0$ (cas possible). Cela implique que f est analytique et que g et k sont antianalytiques ; d'où les conditions (2) et (3) sont remplies.
   (c) $H_f 1 = 0, H_{\overline{k}} 1 \neq 0$ et $H_h 1 = 0$ (cas possible). Cela implique que f et h sont analytiques et que g est antianalytique ; d'où les conditions (1) et (4) sont remplies.
   (d) $H_f 1 = 0, H_{\overline{k}} 1 \neq 0$ et $H_h 1 \neq 0$ (cas impossible).
   (e) $H_f 1 \neq 0, H_{\overline{k}} 1 \neq 0$ et $H_h 1 \neq 0$ (cas impossible).

(f) $H_f 1 \neq 0, H_{\overline{k}} 1 \neq 0$ et $H_h 1 = 0$ (cas possible). Cela implique que h est analytique et g est antianalytique ; d'où la condition (4) est vérifiée.

(g) $H_f 1 \neq 0, H_{\overline{k}} 1 = 0$ et $H_h 1 \neq 0$ (cas possible). Cela signifie que g et k sont antianalytiques ; d'où la condition (2) est vérifée.

(h) $H_f 1 \neq 0, H_{\overline{k}} 1 = 0$ et $H_h 1 = 0$ (cas possible). Cela signifie que h est analytique et que g et k sont antianalytiques ; d'où les conditions (2) et (4) sont remplies.

2. Si $H_{\overline{g}} 1 \neq 0$, alors l'un des cas suivants doit être satisfait :

(a) $H_f 1 = 0, H_{\overline{k}} 1 = 0$ et $H_h 1 = 0$ (cas possible). Cela signifie que f et h sont analytiques et que k est antianalytique ; d'où les conditions (1) et (3) sont remplies.

(b) $H_f 1 = 0, H_{\overline{k}} 1 = 0$ et $H_h 1 \neq 0$ (cas possible). Cela implique que f est analytique et k est antianalytique ; d'où la condition (3) est remplie.

(c) $H_f 1 = 0, H_{\overline{k}} 1 \neq 0$ et $H_h 1 = 0$ (cas possible). Cela implique que f est analytique et h est analytique ; cela correspond à la condition (1).

(d) $H_f 1 = 0, H_{\overline{k}} 1 \neq 0$ et $H_h 1 \neq 0$ (cas impossible).

(e) $H_f 1 \neq 0, H_{\overline{k}} 1 = 0$ et $H_h 1 \neq 0$ (cas impossible).

(f) $H_f 1 \neq 0, H_{\overline{k}} 1 = 0$ et $H_h 1 = 0$ (cas impossible).

(g) $H_f 1 \neq 0, H_{\overline{k}} 1 \neq 0$ et $H_h 1 = 0$ (cas impossible).

(h) $H_f 1 \neq 0, H_{\overline{k}} 1 \neq 0$ et $H_h 1 \neq 0$ (cas possible). C'est en fait le seul cas non trivial. On en déduit qu'il y a une constante $\rho \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, telle que $\rho = -\dfrac{\langle v_0, H_{\overline{g}} 1\rangle}{\langle v_0, H_{\overline{k}} 1\rangle}$, pour certain $v_0 \in (\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n))^{\perp}$. Donc pour v_0, l'équation (3.8) entraîne $H_h 1 = \lambda H_f 1$. Substituons ce dernier dans le membre droite de l'équation (3.8), encore une fois, on aura $\langle v, H_{\overline{g}} 1\rangle H_f 1 = \left\langle v, -\overline{\lambda} H_{\overline{k}} 1\right\rangle H_f 1$. Ainsi, on obtient $H_{\overline{g}} 1 = -\overline{\lambda} H_{\overline{k}} 1$; d'où $(h - \lambda f) \in (\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n))^{\perp}$ et $\overline{g} + \overline{\lambda k} \in (\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n))^{\perp}$. Donc, $(h - \lambda f)$ est analytique et $(g + \lambda k)$ est antianalytique ; ce qui correspond à la condition (3).

Cela achève la démonstration du théorme. □

Un corollaire immédiat et intéressant sur les commutateurs peut également être énoncé :

Corollaire 3.5. *Si f et g sont dans $L^\infty(\mathbb{T}^n)$. Alors, le commutateur $[S_f, S_g]$ est un opérateur de Toeplitz dual si et seulement si S_f et S_g commutent, i.e. $[S_f, S_g] = 0$.*

Démonstration. Supposons que $S_f S_g - S_g S_f$ soit un opérateur de Toeplitz dual. D'après le Théorème 3.4, l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. f et g sont analytiques.
2. f et g sont antianalytiques.
3. f est constante.
4. g est constante.
5. il existe une constante $\gamma \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, telle que $g + \gamma f$ est constante.

Ainsi, d'après le Théorème 3.2, nous voyons que S_f et S_g commutent. Inversement, si S_f et S_g commutent, alors $S_f S_g - S_g S_f = 0 = S_0$; qui est bien l'opérateur de Toeplitz dual trivial. □

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre résultat principal dans cette section, à savoir le Théorème de Brown-Halmos ; qui peut maintenant être obtenu en tant que corollaire du Théorème 3.4 en prenant $h \equiv k \equiv 0$:

Théorème 3.6. *Soient f et g dans $L^\infty(\mathbb{T}^n)$. Alors, le produit de Toeplitz dual $\mathcal{S}_f\mathcal{S}_g$ est aussi un opérateur de Toeplitz dual si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. *f est analytique.*
2. *g est antianalytique.*

Dans les deux cas on aura $\mathcal{S}_f\mathcal{S}_g = \mathcal{S}_{fg}$.

Un premier corollaire concerne ce qu'on appelle "le problème de produit nul". Il asserte qu'il n'y a pas de diviseurs de zéro parmi la classe des opérateurs de Toeplitz duaux sur le complément orthogonal de l'espace de Hardy sur le polydisque.

Corollaire 3.7. *Le produit $\mathcal{S}_f\mathcal{S}_g$ de deux opérateurs de Toeplitz duaux dans $\left(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)\right)^\perp$ est nul si et seulement si l'un des symboles f ou g est identiquement nulle.*

Démonstration. Si $\mathcal{S}_f = 0$ ou $\mathcal{S}_g = 0$, alors on aura immédiatement $\mathcal{S}_f\mathcal{S}_g = 0$. Inversement, supposons que $\mathcal{S}_f\mathcal{S}_g = 0$. Alors $\mathcal{S}_f\mathcal{S}_g$ est un opérateur de Toeplitz dual à symbole nul.

Le Théorème 3.6 implique que f est analytique ou que g est antianalytique et que $\mathcal{S}_f\mathcal{S}_g = \mathcal{S}_{fg} = 0$. Donc $fg = 0$ p.p. sur $\mathbb{T}^n$. Nous distingons ensuite deux cas :

1. Si f est analytique, alors, dans le cas où $g = 0$ p.p., le résultat est immédiat. Mais si $g \neq 0$, alors f doit s'annuler sur un sous-ensemble de mesure positive ; d'où, étant analytique, $f \equiv 0$ sur $\mathbb{T}^n$.
2. Si g est co-analytique. Alors, dans le cas où $f = 0$ p.p., le résultat est immédiat. Mais si $f \not\equiv 0$, alors la fonction analytique g doit s'annuler sur un sous-ensemble de mesure positive ; d'où $\overline{g} \equiv 0$, et donc g s'anuule sur $\mathbb{T}^n$.

Nous concluons que soit $\mathcal{S}_f = 0$ soit $\mathcal{S}_g = 0$. □

Corollaire 3.8. *Soient f, g et h dans $L^\infty(\mathbb{T}^n)$ avec $f \not\equiv 0$. Si $\mathcal{S}_f\mathcal{S}_g = \mathcal{S}_f\mathcal{S}_h$, alors, on a $g = h$.*

Démonstration. Si $\mathcal{S}_f\mathcal{S}_g = \mathcal{S}_f\mathcal{S}_h$, on a $\mathcal{S}_f(\mathcal{S}_{g-h}) = 0$. En utilisant le Corollaire 3.7, on déduit que $f(g-h) = 0$; d'où $g = h$. □

Le corollaire suivant caractérise les idempotents parmi les opérateurs de Toeplitz duaux :

Corollaire 3.9. *Les seuls opérateurs de Toeplitz duaux idempotents sont les opérateurs triviaux ; c'est à dire soit l'opérateur trivial* 0*, soit l'opérateur identité I.*

Démonstration. Si $\mathcal{S}_f^2 = \mathcal{S}_f$, alors $\mathcal{S}_f^2 - \mathcal{S}_f = \mathcal{S}_f(\mathcal{S}_f - I) = \mathcal{S}_f(\mathcal{S}_f - \mathcal{S}_1) = \mathcal{S}_f\mathcal{S}_{f-1} = 0$. Par le Corollaire 3.7, on obtient $\mathcal{S}_f = 0$ ou $\mathcal{S}_{f-1} = 0$. Par suite, $\mathcal{S}_f = 0$ ou $\mathcal{S}_f = \mathcal{S}_1 = I$. □

Nous pouvons également caractériser les opérateurs de Toeplitz duaux isométriques :

Corollaire 3.10. *Un opérateur de Toeplitz dual $\mathcal{S}_f$ est une isométrie si et seulement si f est antianalytique dans $\mathbb{D}^n$ et unimodulaire sur $\mathbb{T}^n$.*

Démonstration. Si $\mathcal{S}_f$ est une isométrie, alors $\mathcal{S}_{\overline{f}}\mathcal{S}_f = \mathcal{S}_1$. Ainsi, le Théorème 3.6 implique que f est antianalytique. De plus, nous devrions avoir $\overline{f}f = |f|^2 = 1$ sur $\mathbb{T}^n$. Inversement, si f est une fonction antianalytique de module égal à 1 sur le bord $\mathbb{T}^n$, il est clair que $\mathcal{S}_f^*\mathcal{S}_f = \mathcal{S}_{\overline{f}}\mathcal{S}_f = \mathcal{S}_{|f|^2} = I$. Donc $\mathcal{S}_f$ est une isométrie ; et la preuve est achevée. □

De même, on peut aussi caractériser les opérateurs de Toeplitz duaux unitaires :

Corollaire 3.11. *Un opérateur de Toeplitz dual $\mathcal{S}_f$ est unitaire si et seulement si f est une fonction constante unimodulaire.*

Démonstration. Si $\mathcal{S}_f$ est unitaire, alors $\mathcal{S}_f^*\mathcal{S}_f = \mathcal{S}_f\mathcal{S}_f^* = I$, c'est-à-dire $\mathcal{S}_{\overline{f}}\mathcal{S}_f = \mathcal{S}_f\mathcal{S}_{\overline{f}} = \mathcal{S}_1$. Ainsi, d'après le Théorème 3.6, f doit être simultanément analytique et antianalytique ; d'où f est constante dans $\mathbb{D}^n$. De plus, nous avons $\overline{f}f = |f|^2 = 1$. Inversement, si f est une fonction constante de module 1, alors $\mathcal{S}_{\overline{f}}\mathcal{S}_f = \mathcal{S}_f\mathcal{S}_{\overline{f}} = \mathcal{S}_1$ pour certaine constante complexe unimodulaire λ ; d'où $\mathcal{S}_f^*\mathcal{S}_f = \mathcal{S}_f\mathcal{S}_f^* = I$. Par conséquent, $\mathcal{S}_f$ est unitaire ; ce qui achève la preuve. □

Corollaire 3.12. *Supposons que l'opérateur de Toeplitz dual $\mathcal{S}_f$ soit inversible et que son inverse $\mathcal{S}_f^{-1}$ est un opérateur de Toeplitz dual. Alors, f doit être analytique ou bien antianalytique.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{S}_f^{-1}$ soit un opérateur de Toeplitz dual noté $\mathcal{S}_g$, disant, pour un certain symbole borné g. Puisque $\mathcal{S}_f^{-1}\mathcal{S}_f = \mathcal{S}_g\mathcal{S}_f = I = \mathcal{S}_1$, qui est un opérateur de Toeplitz dual, le Théorème 3.6 implique, d'une part, que soit f est antianalytique soit g est analytique, et d'autre part, comme on a $\mathcal{S}_f\mathcal{S}_f^{-1} = \mathcal{S}_f\mathcal{S}_g = I = \mathcal{S}_1$, alors encore une fois par le Théorème 3.6, nous voyons que soit g est antianalytique soit f est analytique. Maintenant, si f est analytique, alors on obtient la conclusion. Mais si f n'est pas analytique, alors g doit être antianalytique et non constante (car si g est constante, alors $\mathcal{S}_g = \mathcal{S}_f^{-1} = \lambda I$, ce qui signifie que $\mathcal{S}_f = \frac{1}{\lambda}I$, c'est-à-dire $f = \frac{1}{\lambda}$ qui est analytique). Ainsi, g n'est pas analytique et donc f doit être antianalytique (d'après le premier cas), ce qui achève la preuve. □

3.3 Produits de Hankel et produit mixte de Toeplitz-Hankel

Dans cette section, nous utilisons notre transformation redoutable $\mathscr{S}_w$ afin d'établir des conditions nécessaires pour la bornitude et la compacité des produits de Hankel et des produits mixtes de Toeplitz-Hankel sur l'espace de Hardy du polydisque. Ce problème a été étudié dans le cadre de l'espace de Bergman par Y.F. Lu et S.X. Shang in [33], qui est en fait notre principale référence dans cette section. Pour le même problème dans des contextes similaires, nous nous référons à [20, 24, 46]. Le théorème suivant fournit une condition nécessaire pour la bornitude d'un produit de Hankel $H_f H_g^*$:

Théorème 3.13. *Supposons que $f,\ g \in L^2(\mathbb{T}^n)$. Si le produit de Hankel $H_f H_g^*$ est borné dans $\left(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)\right)^{\perp}$, alors*

$$\sup_{w\in\mathbb{D}^n} \|f\circ\varphi_w - \mathcal{P}(f\circ\varphi_w)\|_2 \, \|g\circ\varphi_w - \mathcal{P}(g\circ\varphi_w)\|_2 < \infty. \tag{3.9}$$

Démonstration. En combinant la Proposition 2.58 (voir la Proposition 1 de Stroethoff et Zheng [46] et Lemme 2.3 dans Lu et Shang [33]), et la formule de changement de variable (2.28), (voir le Corollaire 1.2 dans Ding [12]), nous obtenons

$$\|H_f k_w\|_2 \, \|H_g k_w\|_2 = \|f\circ\varphi_w - \mathcal{P}(f\circ\varphi_w)\|_2 \, \|g\circ\varphi_w - \mathcal{P}(g\circ\varphi_w)\|_2 . \tag{3.10}$$

En utilisant la formule de la norme des opérateurs de rang 1, (voir Théorème 1.68), et l'équation (2.4), nous aurons

$$\|H_f k_w\|_2 \, \|H_g k_w\|_2 = \|(H_f k_w)\otimes(H_g k_w)\| = \left\|H_f(k_w\otimes k_w)H_g^*\right\| . \tag{3.11}$$

Ainsi, il suffit de vérifier que le membre droite de cette dernière est borné. Comme $\varphi_w \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$, on déduit par le Lemme 2.79 que $H_f T_{\varphi_w} = \mathcal{S}_{\varphi_w} H_f$ et $T_{\overline{\varphi_w}} H_g^* = H_g^* \mathcal{S}_{\overline{\varphi_w}}$. Ainsi, d'une manière similaire à l'identité (3.1), en injectant H_f et H_g^* dans la formule (2.62), on obtient la formule suivante

$$H_f(k_w\otimes k_w)H_g^* = \sum_{|\alpha|=0}^{n} (-1)^{|\alpha|} \mathcal{S}_{\varphi_w^\alpha} \left(H_f H_g^*\right) \mathcal{S}_{\overline{\varphi_w}^\alpha}.$$

D'autre part, nous avons $\|\mathcal{S}_{\overline{\varphi_w}^\alpha}\| = \left\|\mathcal{S}_{\varphi_w^\alpha}\right\| \leq \|\varphi_w^\alpha\|_\infty \leq 1$. Ainsi, nous en déduisons que

$$\left\|H_f(k_w \otimes k_w)H_g^*\right\| \leq \sum_{|\alpha|=0}^{n} \left\|\mathcal{S}_{\varphi_w^\alpha}\right\| \left\|H_f H_g^*\right\| \|\mathcal{S}_{\overline{\varphi_w}^\alpha}\| \leq \sum_{|\alpha|=0}^{n} \left\|H_f H_g^*\right\| < \infty;$$

d'où, le théorème est prouvé. □

Le résultat suivant donne une condition nécessaire pour la compacité d'un produit de Hankel $H_f H_g^*$.

Théorème 3.14. *Soient f et g dans $L^2(\mathbb{T}^n)$. Si le produit de Hankel $H_f H_g^*$ est compact, alors*

$$\lim_{w \to \mathbb{T}^n} \|f \circ \varphi_w - \mathcal{P}(f \circ \varphi_w)\|_2 \|g \circ \varphi_w - \mathcal{P}(g \circ \varphi_w)\|_2 = 0. \tag{3.12}$$

Démonstration. En utilisant les équations (3.10), (3.11) et (3.12), on voit que

$$\|f \circ \varphi_w - \mathcal{P}(f \circ \varphi_w)\|_2 \|g \circ \varphi_w - \mathcal{P}(g \circ \varphi_w)\|_2 = \left\|\mathscr{S}_w\left(H_f H_g^*\right)\right\|. \tag{3.13}$$

Par conséquent, si $H_f H_g^*$ est compact, par le Théorème 2.85 nous en déduisons que

$$\lim_{w \to \mathbb{T}^n} \left\|\mathscr{S}_w\left(H_f H_g^*\right)\right\| = 0,$$

ce qui achève la preuve de l'assertion. □

En raison de la représentation alternative (2.47) du commutateur de deux opérateurs de Toeplitz duaux, nous pouvons caractériser sa compacité :

Théorème 3.15. *Soient f et g deux fonctions mesurables et bornées sur $\mathbb{T}^n$. Si le commutateur $[\ \mathcal{S}_f,\ \mathcal{S}_g]$ est compact, alors on a*

$$\left\|(H_g k_w) \otimes \left(H_{\overline{f}} k_w\right) - (H_f k_w) \otimes (H_{\overline{g}} k_w)\right\| \longrightarrow 0 \quad as \quad |w| \to 1^-.$$

Démonstration. En utilisant les formules (2.47) et (3.12), on obtient :

$$\mathscr{S}_w([\ \mathcal{S}_f,\ \mathcal{S}_g]) = (H_g k_w) \otimes \left(H_{\overline{f}} k_w\right) - (H_f k_w) \otimes (H_{\overline{g}} k_w).$$

Donc, si le commutateur est compact, alors le résultat découle du Théorème 2.85. □

Des caractérisations analogues de la bornitude et de la compacité des produits mixtes de Toeplitz-Hankel (Haplitz), $T_f H_g^*$ et $H_g T_f$ peuvent également être déduites :

Théorème 3.16. *Soient f dans $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$ et g dans $L^2(\mathbb{T}^n)$. Si l'un des produits mixtes de Haplitz $T_f H_g^*$ ou $H_g T_{\overline{f}}$ est borné, alors*

$$\sup_{w\in\mathbb{D}^n} \|f\circ\varphi_w\|_2 \|g\circ\varphi_w - \mathcal{P}(g\circ\varphi_w)\|_2 < \infty.$$

Démonstration. En s'appuyant sur le fait que $\varphi_w \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$ et en raison de l'analyticité de f, nous voyons par le Lemme 2.79 que $T_f T_{\varphi_w} = T_{\varphi_w} T_f$ et $T_{\overline{\varphi_w}} H_g^* = H_g^* \mathcal{S}_{\overline{\varphi_w}}$. Ainsi, comme dans la preuve du Théorème 3.13, en intégrant T_f et H_g^* dans la formule (2.62), on trouve que

$$T_f(k_w\otimes k_w)H_g^* = \sum_{|\alpha|=0}^{n} (-1)^{|\alpha|} T_{\varphi_w^\alpha}\left(T_f H_g^*\right)\mathcal{S}_{\overline{\varphi_w}^\alpha}. \tag{3.14}$$

En estimant les normes des opérateurs de Toeplitz et les opérateurs de Toeplitz duaux à symboles automorphes, nous obtenons

$$\left\|T_{\varphi_w^m}\right\| \leq 1 \quad \text{et} \quad \|\mathcal{S}_{\overline{\varphi_w}^m}\| \leq 1.$$

Donc, si $T_f H_g^*$ est borné, on en déduit que

$$\left\|T_f(k_w\otimes k_w)H_g^*\right\| \leq \sum_{|\alpha|=0}^{n} \left\|T_f H_g^*\right\| < \infty.$$

Par conséquent, comme dans les équations (3.10) et (3.11), nous obtenons l'estimation désirée. Un argument similaire peut être utilisé pour traiter le second cas. □

La compacité des produits mixtes de Haplitz peut êre également caractérisée de la même manière :

Théorème 3.17. *Soient $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$ et $g \in L^2(\mathbb{T}^n)$. Si l'un des produits mixtes de Haplitz $T_f H_g^*$ ou $H_g T_{\overline{f}}$ est compact, alors on a*

$$\lim_{w\to\mathbb{T}^n} \|f\circ\varphi_w\|_2 \|g\circ\varphi_w - \mathcal{P}(g\circ\varphi_w)\|_2 = 0.$$

Démonstration. Comme dans la preuve du Théorème 2.85, pour tout opérateur A : $(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n))^{\perp} \longrightarrow \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$, on a

$$\sum_{|\alpha|=0}^{n}(-1)^{|\alpha|}T_{\varphi_w^\alpha}A\mathcal{S}_{\overline{\varphi_w}^\alpha} = \sum_{|\alpha'|=0}^{n-1}(-1)^{|\alpha'|}T_{\varphi_{w_2}^{\alpha_2}}\ \ldots\ T_{\varphi_{w_n}^{\alpha_n}}\left(A - T_{\varphi_{w_1}}A\mathcal{S}_{\overline{\varphi}_{w_1}}\right)\mathcal{S}_{\overline{\varphi}_{w_2}^{\alpha_2}}\ \ldots\ \mathcal{S}_{\overline{\varphi}_{w_n}^{\alpha_n}}. \tag{3.15}$$

Nous allons montrer que si A est compact, alors

$$\lim_{w\to\mathbb{T}^n}\sum_{|\alpha|=0}^{n}(-1)^{|\alpha|}T_{\varphi_w^\alpha}A\mathcal{S}_{\overline{\varphi_w}^\alpha} = 0. \tag{3.16}$$

Alors, en utilisant l'identité (3.15), on trouve qu'il suffit de vérifier que

$$\left\|A - T_{\varphi_{w_1}}A\mathcal{S}_{\overline{\varphi_{w_1}}}\right\| \longrightarrow 0 \ \text{ quand } \ |w_1| \longrightarrow 1^-. \tag{3.17}$$

En utilisant la densité des opérateurs de rang finis dans l'ensemble des opérateurs compacts, il suffit de vérifier cette dernière identité pour les opérateurs de rang 1 agissant de $(\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n))^{\perp}$ dans $\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$. Soient $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$ et $g \in (\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n))^{\perp}$. On a

$$\begin{aligned}\left\|f\otimes g - T_{\varphi_{w_1}}(f\otimes g)\mathcal{S}_{\overline{\varphi_{w_1}}}\right\| &\leq \left\|\left(\zeta_1 f - T_{\varphi_{w_1}}f\right)\otimes(\zeta_1 g)\right\| + \left\|\left(T_{\varphi_{w_1}}f\right)\otimes\left(\zeta_1 g - \mathcal{S}_{\varphi_{w_1}}g\right)\right\| \\ &= \left\|\zeta_1 f - T_{\varphi_{w_1}}f\right\|_2\|\zeta_1 g\|_2 + \left\|T_{\varphi_{w_1}}f\right\|_2\left\|\zeta_1 g - \mathcal{S}_{\varphi_{w_1}}g\right\|_2\end{aligned} \tag{3.18}$$

Maintenant, pour $\tau \in \mathbb{T}$ et $w_1 \in \mathbb{D}$, nous observons que $w_1 - \varphi_{w_1}(\tau) \longrightarrow 0$ quand $|w_1| \to 1^-$. En utilisant le Théorème de convergence dominé, nous déduisons que pour $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n)$ et $g \in (\mathcal{H}^2(\mathbb{T}^n))^{\perp}$ on a

$$\|w_1 f - \varphi_{w_1}f\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}^n}|w_1 f(\xi) - \varphi_{w_1}(\xi)f(\xi)|^2\, d\sigma(\xi) \longrightarrow 0 \ \text{ quand } \ |w_1| \longrightarrow 1^-,$$

et

$$\|w_1 g - \varphi_{w_1}g\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}^n}|w_1 g(\xi) - \varphi_{w_1}(\xi)g(\xi)|^2\, d\sigma(\xi) \longrightarrow 0 \ \text{ quand } \ |w_1| \longrightarrow 1^-.$$

Par conséquent, on a $\|\zeta_1 f - \varphi_{w_1}f\|_2 \longrightarrow 0$ et $\|\zeta_1 g - \varphi_{w_1}g\|_2 \longrightarrow 0$ quand $\mathbb{D} \ni w_1 \longrightarrow \zeta_1 \in \mathbb{T}$. En utilisant les identités $\mathcal{P}(\zeta_1 f(\xi)) = \zeta_1 f(\xi)$ et $(I-\mathcal{P})(\zeta_1 g(\xi)) = \zeta_1 g(\xi)$, on trouve que

$$\left\|\zeta_1 f - T_{\varphi_{w_1}}f\right\|_2 = \|\mathcal{P}\left(\zeta_1 f - \varphi_{w_1}f\right)\|_2 \longrightarrow 0 \ \text{ quand } \ \mathbb{D}^n \ni w \longrightarrow \zeta \in \mathbb{T}^n,$$

et

$$\left\|\zeta_1 g - \mathcal{S}_{\varphi_{w_1}} g\right\|_2 = \|(I-\mathcal{P})\,(\zeta_1 g - \varphi_{w_1} g)\|_2 \longrightarrow 0 \ \text{ quand } \mathbb{D}^n \ni w \longrightarrow \zeta \in \mathbb{T}^n.$$

En combinant les deux dernières limites avec l'inégalité (3.18), on en déduit que

$$\left\|f \otimes g - T_{\varphi_{w_1}}(f \otimes g)\mathcal{S}_{\overline{\varphi_{w_1}}}\right\| \longrightarrow 0 \ \text{ quand } \ \mathbb{D}^n \ni w \longrightarrow \zeta \in \mathbb{T}^n;$$

ce qui prouve (3.16). Ensuite, supposons par exemple que $T_f H_g^*$ est compact (l'autre cas lié à $H_g T_{\overline{f}}$ peut être traité de la même manière), alors par (3.14) et (3.16), on voit que

$$\left\|T_f(k_w \otimes k_w) H_g^*\right\| \longrightarrow 0 \ \text{ quand } \mathbb{D}^n \ni w \longrightarrow \zeta \in \mathbb{T}^n.$$

Ainsi, comme dans les équations (3.10) et (3.11), nous obtenons la condition désirée. $\square$

Conclusion générale et perspectives

Grâce à la fameuse transformation auxiliaire $\mathscr{S}_w$ on a pu mener une étude assez complète des propriétés algébriques et spectrales des opérateurs de Toeplitz duaux associés à l'espace de Hardy du polydisque de $\mathbb{C}^n$. En particulier, on est arrivé à caractériser ces opérateurs parmi les opérateurs linéaires bornés sur le complémentaire orthogonal de l'espace de Hardy du polydisque en termes d'équations opératorielles.

La commutativité et la normalité de ces opérateurs n'auraient pas été possibles en l'absence d'une telle transformation. D'autre part, un théorème de type Brown-Halmos, ainsi établi ci-dessus, décrivant le caractère des produits de ces opérateurs se repose principalement sur cette transformation. On a aussi utilisé ces techniques pour caractériser les diviseurs de zéro parmi ces opérateurs ainsi que les symboles donnant lieu à des opérateurs de Toeplitz duaux isométriques, idempotents ou unitaires.

D'autres résultats d'importance égale, relatifs à la bonrnitude et à la compacité des produits de Hankel et aux produits mixtes de Toeplitz-Hankel sur l'espace de Hardy du polydisque, font appel aussi à la fameuse transformation auxiliaire $\mathscr{S}_w$.

Ceci dit, nos résultats peuvent être considérés comme un premier pas vers l'élaboration d'une théorie entière des opérateurs de Toeplitz duaux associés à l'espace de Hardy du polydisque. Cependant, pas mal de questions relatives à l'étude de la structure du spectre de ces opérateurs et à la caractérisation des symboles φ pour lesquels S_φ soit inversible, Fredholm, compact ou dans la p-classe de Schatten, restent ouvertes. Également, l'étude de la structure de certaines C*-algèbres générées par des classes spécifiques de ces opérateurs est d'une grande importance.

Bibliographie

[1] Aleksandrov, A.B. : *Function theory in the ball*, in : G.M. Khenkin, A.G. Vitushkin (Eds.), Encyclopaedia Math. Sci. **8** (Several Complex Variables. II), Springer-Verlag, Berlin, 1994, pp. 107-178.

[2] Ahern, P. and Čučković, Ž. : *A theorem of Brown-Halmos type for Bergman space Toeplitz operators*, J. Funct. Anal., **187** (2001), 200–210.

[3] Ahern, P. ; Youssfi, E. and Zhu, K.H. : *Compactness of Hankel operators on Hardy-Sobolev spaces of the polydisk*, J. Operator Theory, **61 (2)** (2009), 301–312.

[4] Axler, S. and Čučković, Ž. : *Commuting Toeplitz operators with harmonic symbols*, Integr. Equat. Oper. Th., **14** (1991), 1–12.

[5] Benaissa, L. and Guediri, H. : *Properties of dual Toeplitz operators with applications to Haplitz products on the Hardy space of the polydisk*, Taiwanese J. of Math., **19 (1)**, (2015), 31–49.

[6] Brown, A. and Halmos, P.R. : *Algebraic properties of Toeplitz operators*, J. Reine Angew. Math., **213** (1963/1964), 89–102.

[7] Cheng, G.Z. and Yu, T. : *Dual Toeplitz algebra on the polydisk.* J. Math. Res. Exposition, **28 (2)**, (2008), 366- -370.

[8] Chen, Y. and Yu, T. : *Essentially commuting dual Toeplitz operators on the unit ball.* Advances in Mathematics (China), **38 (4)**, (2009), 453- -464.

[9] Choe, B.R. ; Koo, H.G. and Lee, Y.J. : *Commuting Toeplitz operators on the polydisk.* Trans. Amer. Math. Soc., **356 (5)** (2004), 1727–1749.

[10] Davie, A.M. and Jewell, N.P. : Toeplitz operators in several complex variables, J. Funct. Anal., **26**, 356–368 (1977)

[11] Ding, X.H. : *The finite sum of finite products of Toeplitz operators on the polydisk*, J. Math. Anal. Appl., **320** (2006), 464–481.

[12] Ding, X.H. : *Products of Toeplitz operators on the polydisk*, Integr. Equ. Oper. Theory, **45** (2003), 389–403.

[13] Douglas, R. : *Banach algebra techniques in operator theory.* Decond Edition, Springer-Verlag New York, Berlin, Heidelberg, 1998.

[14] Duren, P.L. : *Theory of H^p spaces.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 38, Academic Press, New York-London, 1970.

[15] Faraut, J. : *Espaces hilbertiens invariants de fonctions holomorphes.* Analyse sur les groupes de Lie et théorie des représentations (Kénitra, 1999), 101–167, Sémin. Congr., 7, Soc. Math. France, Paris, 2003.

[16] Ferguson, S.H. : *The Nehari problem for the Hardy space on the torus.* J. Operator Theory, **40** (1998), 309–321.

[17] Garnett, J : *Bounded analytic functions*, Academic Press, Inc. New York, 1981.

[18] Gu, C. : *Some algebraic properties of Toeplitz and Hankel operators on polydisk*, Arch. Math., **80** (2003), 393–405.

[19] Guediri, H. : *Dual Toeplitz operators on the sphere*, Acta Mathematica Sinica, English Series, **29 (9)** (2013), 1791- -1808.

[20] Guediri, H. : *Products of Toeplitz and Hankel Operators on the Hardy Space of the Unit Sphere*, Operator Theory : Advances and Applications, Vol. **236** (2014), 243–256.

[21] Guediri, H. : *Quasinormality and numerical ranges of certain classes of dual Toeplitz operators*, Abstract and Applied Analysis, **2010** (2010), Article ID 426319.

[22] Guediri, H. : *New function theoretic proofs of Brown-Halmos theorems*, Arab J. Math. Sc., **13** (2007), 15–26.

[23] Halmos, P. : *A Hilbert space problem book.* Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, 19. Encyclopedia of Math. and its Appl., 17. Springer-Verlag, 1982.

[24] Hamada, M. : *Remark on application of distribution function inequality for Toeplitz and Hankel operators*, Hokkaido Math. J., **32** (2003), 193–208.

[25] Hazarika, M. and Marik, S. : *Toeplitz and slant Toeplitz operators on the polydisk*, Arab J. Nath. Sci., Published online : https ://doi.org/10.1016/j.ajmsc.2019.02.003, To appear 2021.

[26] Hörmander, L. : *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Third Edition, North Holland Math. Library, 1990.

[27] Kong, L.H. and Lu, Y.F. : *Commuting Toeplitz operators on the Hardy space of the polydisk*, Acta Math. Sinica (Eng. Ser.), **31 (4)** (2015), 695–702.

[28] Krantz, S. : *Function Theory of Several Complex Variables*, Second Edition, AMS Chelsea Publishing, 2001.

[29] Laurent-Thiébaut, C. : *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables*, Savoirs Actuels, Inter Editions/CNRS Editions, Paris, 1997.

[30] Lee, Y.J. : *Commuting Toeplitz operators on the Hardy space of the polydisk*, Proc. Amer. Math. Soc., **138 (1)** (2010), 189–197.

[31] Lu, Y. : *Commuting dual Toeplitz operators with pluriharmonic symbols.* J. Math. Anal. Appl., **302 (1)**, (2005), 149- -156.

[32] Lu, Y.F. ; Azari Key, F. ; Yang, H.W. and Liu, L. : *Algebraic properties of dual Toeplitz operators on harmonic Hardy space over polydisc*, J. Math. Research with Appl., **36 (6)** (2016), 703–710.

[33] Lu, Y.F. and Shang, S.X. : *Bounded Hankel products on the Bergman space of the polydisk*, Cand. J. Math., **61 (1)** (2009), 190–204.

[34] Lu, Y.F. and Shang, S.X. : *Commuting dual Toeplitz operators on the polydisk*, Acta Math. Sinica (Eng. Ser.), **23 (5)** (2006), 857–868.

[35] Lu, Y.F. and Shi, Y.Y. : *Hyponormal Toeplitz operators on the polydisk*, Acta Math. Sinica (Eng. Ser.), **28 (2)** (2012), 333–348.

[36] Maji, A. ; Sarkar, J. and Sarkar, S. : *Toeplitz and asymptotic Toeplitz operators on $H^2(\mathbb{D}^n)$*, Bulletin des Sciences Mathématiques, **146** (2018), 33–49.

[37] Martínez-Avendaño, R.A. and Rosenthal, P. : *An introduction to operators on the Hardy-Hilbert space*. Springer, NY, 2007.

[38] Range, M.R. : *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*. Springer Verlag, New York, 1986.

[39] Rudin, W. : *Real and Complex Analysis*. Third Edition, McGraw Hill, 1987.

[40] Rudin, W. : *Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$*. Springer, Berlin, 1980.

[41] Rudin, W. : *Function Theory in the Polydiscs*, W. A. Benjamin, New York, 1969.

[42] Shrestha, K.R. : *Hardy spaces on the polydisk*, European J. on Pure Appl. Math., **9 (3)** (2016), 292–304.

[43] Shvedenko, S.V. : *Hardy classes and related spaces of analytic functions in the unit circle, polydisk and ball*, J. Sov. Math., **39 (6)** (1987), 3011–3087.

[44] Stroethoff, K. : *Algebraic properties of Toeplitz operators on the Hardy space via the Berezin transform*, Contemporary Math., **232** (1999), 313–319.

[45] Stroethoff, K. and Zheng, D. : *Algebraic and spectral properties of dual Toeplitz operators*, Trans. Amer. Math. Soc., **354 (6)** (2002), 2495–2520.

[46] K. Stroethoff and D. Zheng, Toeplitz and Hankel operators on Bergman spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **329 (2)** (1992), 773–794.

[47] Xia, J. : *On the compactness of the product of Hankel operators on the sphere*. Proc. Amer. Math. Soc., **136 (2)**, (2008), 1375- -1384.

[48] Yu, T. : *Operators on the orthogonal complement of the Dirichlet space.* J. Math. Anal. Appl., **357 (1)**, (2009), 300- -306.

[49] Yu, T. and Wu, S.Y. : *Commuting dual Toeplitz operators on the orthogonal complement of the Dirichlet space.* Acta Math. Sinica (Eng. Ser.), **25 (2)**, (2009), 245- -252.

[50] Yu, T. and Wu, S.Y. : *Algebraic properties of dual Toeplitz operators on the orthogonal complement of the Dirichlet space.* Acta Math. Sinica (Eng. Ser.), **24 (11)**, (2008), 1843--1852.

[51] Zhu, K.H. : *Spaces of holomorphic functions in the unit ball.* Grad. Texts in Math., Vol. 226, Springer-Verlag, New York, 2005.

[52] Zhu, K.H. : *Operator theory in function spaces.* Second ed., Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 138, American Mathematical Society, Providence, R.I. 2007.

[53] Zygmund, A. : *Trigonometric series.* Third Edition, Cambridge University Press, 2002.

Abstract :

In this thesis, we introduce dual Toeplitz operators on the orthogonal complement of the Hardy space of the polydisk and establish their main algebraic properties using an auxiliary transformation of operators. This mysterious transformation gives rise to an interesting characterization of dual Toeplitz operators in terms of operator equations that are closely related to the intertwining relations. Furthermore, we are able to characterize commuting dual Toeplitz operators as well as normal ones. Moreover, we investigate products of dual Toeplitz operators. In particular, we establish Brown-Halmos type theorems and exploit them to characterize the zero divisors among dual Toeplitz operators as well as symbols giving rise to isometric, idempotent and unitary dual Toeplitz operators. Furthermore, we exploit this mysterious transformation in the investigation of boundedness and compactness of Hankel products and mixed Toeplitz-Hankel products on the Hardy space of the polydisk.

Key words : Dual Toeplitz operator, Hardy space of the polydisk, Commuting, Brown-Halmos, Hankel products, Mixed Toeplitz-Hankel products.

ملخص :

في هذه الرسَالة قمنَا بإِدخَال مفهوم مؤُثرَات توبليتز الإِزدوَاجية علَى المتمِمة العمودية لفضَاء هَاردي المعرف علَى الأَقرَاص المتعدِدة. كمَا قمنَا علَى إِثر ذلك بصيَاغة أَهم خوَاصهَا الجبرية و الطيفية بإِستخدَام تحويل ثَانوي لِلمُؤثرَات. ومن ضمن نتَائِجهَا، إِستطعنَا أَن نجد معَادلة مُؤثرَات تميز مُؤثرَات توبليتز الإِزدوَاجية هذه من بين المُؤثرَات الخطية المحدودة المعرفة علَى هذَا الفضَاء. كمَا تشمل دِرَاستنَا مسأَلة التبَادل بين هذه المُؤثرَات وتعطي وصفَا لعَائِلة مُؤثرَات توبليتز الإِزدوَاجية النَاظمية. وتطرقنَا لجدَاءَات مُؤثرَات توبليتز الإِزدوَاجية التي تنتج مُؤثرَات توبليتز إِزدوَاجية جديدة، فوجدنَا وصفَا دقيقَا لِلرموز التي تكون وحدوية أَو متسَاوية المقيَاس أَو متسَاوية القوة. كمَا قمنَا بإِستثمَار هذَا التحويل المذهل في درَاسة مسَائِل المحدودية و التَرَاص لجدَاءَات مُؤثرَات هَانكل و الجدَاءَات المختلطة من نوع توبليتز هَانكل علَى فضَاء هَاردي المعرف علَى متعدِد الأَقرَاص.

الكلمَات الدَالة : مؤُثرَات توبليتز الإِزدوَاجية، فضَاء هَاردي علَى الأَقرَاص المتعدِدة، مسأَلة التبَادل، جدَاءَات مُؤثرَات توبليتز الإِزدوَاجية و نظرية برَاون ـ هَالمُوس، جدَاءَات هَانكل، اَلجدَاءَات المختلطة من نوع توبليتز ـ هَانكل.

Résumé :

Dans cette thèse, nous introduisons des opérateurs de Toeplitz duaux sur le complémentaire orthogonal de l'espace de Hardy sur le polydisque, et nous établissons les propriétés algébriques principales à l'aide d'une transformation auxiliaire des opérateurs. Cette mystérieuse transformation donne lieu à une intéressante caractérisation des opérateurs de Toeplitz duaux en termes d'équations opératorielles étroitement liées aux relations entrelacées. De plus, nous sommes en mesure de caractériser la commutativité et la normalité des opérateurs de Toeplitz, et d'étudier les produits des opérateurs de Toeplitz duaux. Plus précisément, nous établissons des théorèmes de type de Brown-Halmos et les exploitons pour caractériser les diviseurs de zéro entre opérateurs de Toeplitz duaux ainsi que les symboles donnant lieu à des opérateurs de Toeplitz duaux isométriques, idempotents et unitaires. Nous exploitons davantage cette mystérieuse transformation dans l'étude de la bornitude et de la compacité des produits de Hankel et des produits mixtes de Toeplitz-Hankel sur l'espace de Hardy sur le polydisque.

Mots Clés : Opérateur de Toeplitz dual, Espace de Hardy du polydisque, Commutativité, Brown-Halmos, Produits de Hankel, Produits mixtes de Toeplitz-Hankel.