

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en-Sciences

Option : Mathématiques Appliquées

Par

Mr. RAHALI NOUREDDINE

Thème :

**Accélération de la convergence de quelques
Méthodes d'optimisation sans contraintes**

Thèse soutenue le

devant le jury composé de :

Président
Directeur de thèse
Examineurs :

Mr. Djamel BENTERKI
Mr. Rachid BENZINE
Mr. Naceurdine BENSALAM
Mr. Badreddine SELLAMI
Mr. Mohammed BELLOUFI

Prof. UFA. Sétif 1
Prof. ESTI. Annaba
Prof. UFA. Sétif 1
MCA. UMCM. Souk Ahras
MCA. UMCM. Souk Ahras

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَصَلَّى اللَّهُ عَلَى سَيِّدِنَا مُحَمَّدٍ وَعَلَى آلِهِ وَاصْحَابِهِ أَجْمَعِينَ

الإهداء

إِلَى وَالِدَيَّ الْكَرِيمَيْنِ

إِلَى مَنْ غَرَسَ فِي قَلْبِي مَحَبَّةَ اللَّهِ وَرَسُولِهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ ، مَشَائِخِي

إِلَى زَوْجَتِي وَأَوْلَادِي وَأَحْفَادِي وَكُلِّ عَائِلَتِي

إِلَى الْفُقَرَاءِ ، الشُّعَثَاءِ ، الْغُبَرَاءِ ، الْأَذِلَّةِ .

Remerciements

Je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde gratitude à mon encadreur Monsieur. R. Benzine, professeur à l'ESTI Annaba pour m'avoir proposé le sujet de cette thèse. C'est grâce à sa grande disponibilité, ses conseils, ses orientations, et ses encouragements que j'ai pu mener à bien ce travail.

Mes remerciements vont également à..Monsieur D. Benterki, Professeur à l'université de Sétif, pour avoir bien voulu me faire l'honneur d'accepter de présider le jury.

De même je remercie Mr N. Bensalem, Professeur à l'université de Sétif, Mr B. Sellami M.C.A université de Souk Ahras, pour l'honneur qu'ils m'ont fait de bien vouloir accepter de faire partie du jury de cette thèse. Je remercie également Mr MOHAMMED BELLOUFI M.C.A Université Souk Ahras de m'avoir aidé pour finaliser cette thèse et de participer comme invité dans le jury.

Enfin, je n'oublie pas de remercier toutes les personnes qui m'ont facilité la tâche et tous ceux que j'ai connu au département de mathématiques.

ملخص

تعتبر طريقة التدرج التي اكتشفها كوشي عام 1847 من بين أقدم وأنجع الطرق المستخدمة لحل مسائل الأمثلة دون قيود.

تتمتع هذه الطريقة بخاصية مميزة فهي تمكننا من الحصول على أفضل انحدار للدالة المدروسة انطلاقاً من النقطة x_k لكن في جوار الحل تكون هذه الطريقة بطيئة جداً

الهدف من هذه الرسالة هو تطوير خوارزميتين تعمل على معالجة هذه العيوب دون فقدان الخصائص الإيجابية لطريقة التدرج. هذا التطوير يعتمد على تطبيق بعض تقنيات تسريع التقارب وطريقة التدرج المترافق. ركزنا بشكل خاص على تطبيق خوارزمية تسريع التقارب الشهيرة المعروفة باسم ε -Algorithme وهذا باستخدام البحث الخطي غير الدقيق لـ أرميجو وفولف المعروفة.

بعد اثبات تقارب الخوارزميتين المقترحتين وباستخدام دوال تجريبية، أثبتنا من خلال أكثر من 700 تجربة عددية أن الخوارزميتين أكثر كفاءة ونجاعة عددياً مقارنة بخوارزميات أخرى من نفس العائلة.

الكلمات المفتاحية: الأمثلة بدون قيود، طريقة التدرج، خوارزمية، التقارب العام، البحث الخطي غير الدقيق، البحث الخطي غير الدقيق لـ أرميجو، البحث الخطي القوي غير الدقيق لـ فولف، البحث الخطي الضعيف غير الدقيق لـ فولف، طريقة إستبان إستيفال، طريقة فلتشر ريفز، طريقة بولاك ربيار بولايك، طريقة الهبوط المشتق، طريقة داي يوان، مزج طرق التدرج السلمي المشتق.

Abstract

We accelerate the convergence of the steepest descent method. To achieve this goal we use the epsilon algorithm and a new conjugate gradient method based on modified wolfe inexact line search .Descent property and global convergence results were established for the new method.

Experimental results provide evidence that our proposed method is in general superior to the classical steepest descent method

Key words : Optimization. Conjugate gradient, Algorithm, Global convergence, Inexact line search, Armijo line search, Strong Wolfe line search, Weak Wolfe line search, Hestenes-Stiefel Method, Fletcher-Reeves Method, Polak-Ribière-Polyak Method, Conjugate descent Method, Dai-Yuan Method , Hybrid Conjugate Gradient Method.

Résumé

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. On cherche à résoudre le problème de minimisation sans contraintes suivant :

$$(P) : \min \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} \quad (1)$$

Parmi les plus anciennes méthodes utilisées pour résoudre les problèmes du type (1), on peut citer la méthode du Gradient ou méthode de la plus forte pente qui fut découverte par Cauchy 1847. Cette méthode présente le grand avantage d'avoir la meilleure décroissance à partir d'un point x_k . Malgré cela, elle présente l'inconvénient majeur d'être très lente au voisinage des points stationnaires. Le but de cette thèse est d'élaborer deux algorithmes qui essayent d'y remédier à ces inconvénient sans perdre les avantages de la méthode de la plus forte pente. Pour cela on a appliqué de façon appropriée quelques techniques d'accélération de la convergence et la méthode du gradient conjugué. On s'est intéressé particulièrement à un algorithme célèbre d'accélération de la convergence qui est l' ε Algorithme. On a utilisé les recherches linéaires inexactes d'Armijö et de Wolfe forte.

Utilisant des fonctions tests de base, on a démontré à travers plus de 700 tests numériques que nos 2 nouveaux algorithmes accélèrent de façon significative la convergence de la méthode du gradient et sont numériquement plus performants que d'autres algorithmes de la même famille.

Des résultats de convergence théoriques sont aussi démontrés pour les deux algorithmes.

Mots clés : Optimisation sans contraintes, gradient Conjugué, Convergence globale, Recherche linéaire inexacte, Recherche linéaire d'Armijo, Recherche linéaire de Wolfe forte, Recherche linéaire de Wolfe faible, méthode d'Hestenes-Stiefel, méthode de Fletcher-Reeves, méthode de Polak-Ribière-Polyak, méthode de la descente conjuguée, méthode de Dai-Yuan, méthode hybride du gradient conjugué.

TABLE DES MATIÈRES

1	OPTIMISATION SANS CONTRAINTES	1
1.1	Définitions	1
1.2	Direction de descente	1
1.3	Schémas général des algorithmes d'optimisation sans contraintes	2
1.3.1	Exemples de choix de directions de descente	3
1.3.2	Exemple de choix de pas λ_k	3
1.4	Conditions nécessaires d'optimalité. Cas général	3
1.4.1	Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre	3
1.4.2	Condition nécessaire d'optimalité du second ordre	3
1.5	Conditions suffisantes d'optimalité	4
1.6	Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité. Cas convexe	5
1.7	Les modes de convergence	5
2	OPTIMISATION DANS $\mathbb{R}$. RECHERCHES LINÉAIRES INEXACTES	7
2.1	Introduction et rappels	7
2.2	Descente suffisante. Recherche linéaire inexacte d'Armijo	10
2.2.1	Principe de la méthode	10
2.2.2	Interprétation graphique de la règle d'Armijo	12
2.3	Recherche linéaire inexacte de Wolfe	14
2.3.1	Recherche linéaire inexacte de Wolfe	14
2.3.2	recherche linéaire inexacte de Wolfe-forte	15
2.3.3	L'algorithme de Wolfe	16

3	MÉTHODE DE LA PLUS FORTE PENTE	17
3.0.4	Introduction	17
3.0.5	Algorithme de la méthode de la plus forte pente	19
3.0.6	Inconvénients de la méthode de la plus forte pente	19
3.0.7	Quelques remèdes	20
4	MÉTÉHODES DU GRADIENT CONJUGUÉ	21
4.1	Optimisation quadratique sans contraintes	21
4.1.1	Calcul du pas obtenu par une recherche linéaire exacte	22
4.2	Méthode des directions conjuguées	23
4.2.1	L'Algorithme des directions conjuguées	23
4.3	Méthode du gradient conjugué. Cas quadratique	24
4.3.1	Introduction	25
4.3.2	Algorithme du gradient conjugué. Cas quadratique	25
4.3.3	Propriétés du gradient conjugué quadratique	26
4.4	Méthode du gradient conjugué. Cas non quadratique	27
4.4.1	Introduction et différentes formes du gradient conjugué non quadratique	27
4.4.2	Algorithme du gradient conjugué non quadratique	30
5	ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE DE LA MÉTHODE DU GRADIENT. CAS DES RECHERCHES LINÉAIRES INEXACTES D'ARMILJO	33
5.1	Introduction	33
5.2	L'epsilon steepest descent version Wynn	34
5.2.1	L'algorithme epsilon steepest descent version Wynn	34
5.3	L'epsilon steepest descent algorithme version F. Cordellier	35
5.3.1	L'algorithme epsilon steepest descent version F. Cordellier.	36
5.4	Convergence de l'epsilon steepest descent algorithme : cas des recherches linéaires inexactes <i>d'Armijo</i>	37
5.5	Résultats numériques et comparaisons	41
6	ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE DE LA METHODE DU GRADIENT PAR UTILISATION DU GRADIENT CONJUGUÉ	43
6.1	Introduction	43
6.2	Description de la méthode	44
6.3	Une nouvelle recherche linéaire	44
6.3.1	Recherche linéaire inexacte de Wolfe forte	44

6.3.2	Modification de la recherche linéaire inexacte de Wolfe forte	44
6.4	Le nouveau Algorithme CGBRB(Gradient Conjugué Belloufi-Rahali-Benzine)	45
6.5	Propriété de descente et convergence globale	45
6.6	Expériences numériques	48
6.6.1	<u>Principe :</u>	48
6.6.2	<u>Etapes :</u>	49
6.6.3	<u>Codes de programmation :</u>	49
6.6.4	<u>Résultats numériques :</u>	49
6.6.5	<u>Profils de performance numérique :</u>	49
7	ANNEXE. RÉSULTATS DES TESTS NUMÉRIQUES	52
7.1	Le programme qui génère les profils de performance numérique	52
7.2	Résultats numériques : Méthodes steepest descent et epsilon steepest descent	54
7.2.1	Codage	54
7.3	Résultats numériques : Méthodes CGBRB et autres méthodes du gradient conjugué	110
7.3.1	Table 1	110
7.3.2	Table 2	112
7.4	Conclusion générale et perspectives	115

Introduction

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et (PSC) le problème de minimisation non linéaire, sans contraintes, suivant :

$$\min \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} \quad (2)$$

L'optimisation non linéaire sans contraintes est souvent rencontrée dans des domaines variés, et l'étude des algorithmes et méthodes qui traitent ces problèmes, est importante pour plusieurs raisons :

1. Parfois pour résoudre un problème avec contraintes, on le remplace par une suite de problèmes sans contraintes.
2. Plusieurs techniques d'optimisation sans contraintes peuvent être prolongés d'une façon naturelle pour fournir et motiver des procédures pour résoudre des problème avec contraintes.

Parmi les plus anciennes méthodes utilisées pour résoudre les problèmes du type (2), on peut citer la méthode du Gradient ou méthode de la plus forte pente qui fut découverte par Cauchy 1847 ([9]). Cette méthode présente le grand avantage d'avoir la meilleure décroissance à partir d'un point x_k . Malgré cela, elle présente l'inconvénient majeur d'être très lente au voisinage des points stationnaires. Le but de cette thèse est d'élaborer deux algorithmes qui essayent d'y remédier à ces inconvénients sans perdre les avantages de la méthode de la plus forte pente. Pour cela on a appliqué de façon appropriée quelques techniques d'accélération de la convergence et la méthode du gradient conjugué. On s'est intéressé particulièrement à un algorithme célèbre d'accélération de la convergence qui est l' ε Algorithme. On a utilisé les recherches linéaires inexactes d'Armijö et de Wolfe forte.

Utilisant des fonctions tests de base, on a démontré à travers plus de 700 tests numériques que nos 2 nouveaux algorithmes accélèrent de façon significative la convergence de la méthode du gradient et sont numériquement plus performants que d'autres algorithmes de la même famille.

Des résultats de convergence théoriques sont aussi démontrés pour les deux algorithmes.

La thèse est divisée en six chapitres et une annexe . Les algorithmes nouveaux et les résultats originaux de cette thèse se trouvent dans les chapitres 5 et 6 .

On aborde dans le chapitre1 les propriétés fondamentales des problèmes d'optimisation sans contraintes, c'est à dire les problèmes de la forme (2).

On définira la notion de direction de descente, notion très importante qui nous servira par la suite à construire les algorithmes d'optimisation sans contraintes. Les conditions nécessaires et ou suffisantes seront aussi détaillées dans ce chapitre.

On consacre le chapitre 2 à l'étude des minimums des fonctions d'une variable réelle ou recherche linéaire. On donne d'abord le principe général des algorithmes qui traitent

ce problème. Ensuite on expose en détail les algorithmes et les propriétés de deux grandes classes de recherches linéaires inexactes. Il s'agit des recherches linéaires inexactes d'Armijoo qu'on utilisera au chapitre 5 et les recherches linéaires inexactes de Wolfe forte qu'on appliquera au chapitre 6.

Le chapitre 3 est consacré à la méthode du gradient ou steepest descent. On explique l'origine d'une telle appellation et on montre que son défaut principal est sa convergence très lente au voisinage des points stationnaires. Des tests numériques effectués sur la fonction test de Rosembrok viennent confirmer ces faits. On donnera quelques avantages et quelques inconvénients de cette méthode très célèbre.

On expose dans le chapitre 4 les différentes méthodes du gradient conjugué. On définit au début les problèmes d'optimisation sans contraintes quadratiques et leurs propriétés. La méthode des directions conjuguées est détaillée ensuite. Nous montrerons après que le gradient conjugué quadratique est une méthode à directions conjuguées et par conséquent elle converge en un nombre fini d'itérations. Les différentes méthodes du gradient conjugué non quadratique sont exposées à la fin du chapitre.

Le chapitre 5 contient le premier résultat original de cette thèse. On accélère la convergence de la méthode du gradient en utilisant l'épsilon algorithme et les recherches linéaires inexactes d'Armijoo. Des résultats originaux de convergence sont démontrés et des tests numériques montrant la performance de notre méthode sont exposés. On y traite plus de 600 tests numériques.

On y trouve dans le chapitre 6 le deuxième résultat original de cette thèse. Nous avons signalé avant que la méthode du gradient est performante dans les premières itérations, mais lorsqu'on s'approche d'un point stationnaire elle devient très lente. Pour y remédier à ce problème on accélère la convergence de la méthode du gradient en gardant la forme générale de la méthode. Ceci a été fait au chapitre 5 par l'utilisation de l'épsilon algorithme. Une autre méthode consiste à considérer des directions d_k de la forme

$$d_k = -\nabla f(x_k) + g_k$$

à la place de

$$d_k = -\nabla f(x_k)$$

g_k dépend de la méthode utilisée. Les méthodes du gradient conjugué font partie de cette classe. Dans ce chapitre, pour accélérer la convergence de la méthode du gradient on applique une nouvelle version du gradient conjugué. Ce nouveau algorithme nommé Gradient conjugué BRB (Belloufi-Rahali-Benzine) sera testé et comparé à d'autres versions classiques du gradient conjugué : Fletcher Reeves, Polak Ribière, et autres. Des résultats

théoriques de convergence seront démontrés. Donnons un peu plus de détail sur cette nouvelle méthode. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et (PSC) le problème de minimisation non linéaire, sans contraintes, suivant :

$$\min \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$$

Pour résoudre les problèmes du type (PSC) , on génère dans $\mathbb{R}^n$, une suite $\{x_k\}$ de la forme :

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k,$$

où $\alpha_k \in \mathbb{R}$ est le résultat d'une recherche linéaire inexacte du type Wolfe forte et d_k est une direction de descente vérifiant

$$d_{k+1} = \begin{cases} -\nabla f(x_k) & \text{si } k = 1 \\ -\nabla f(x_{k+1}) + \beta_k d_k & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

$\beta_k = \beta_k^{BRB}$ (BRB : Belloufi, Rahali, Benzine) est donné par :

$$\beta_k^{BRB} = \frac{\|\nabla f(x_{k+1})\|^2}{\|d_k\|^2}$$

L'annexe contient les tableaux des résultats numériques

CHAPITRE 1

OPTIMISATION SANS CONTRAINTES

1.1 Définitions

Théorème 1.1.1 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on appelle problème de minimisation sans contraintes le problème (P) suivant :

$$\min \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} \quad (P)$$

1) $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est un minimum global de (P) si et seulement si

$$f(\hat{x}) \leq f(x) : \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

2) $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est un minimum local de (P) si et seulement si il existe un voisinage $V_\varepsilon(\hat{x})$ tel que

$$f(\hat{x}) \leq f(x) : \quad \forall x \in V_\varepsilon(\hat{x})$$

3) $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est un minimum local strict de (P) si et seulement si il existe un voisinage $V_\varepsilon(\hat{x})$ tel que

$$f(\hat{x}) < f(x) : \quad \forall x \in V_\varepsilon(\hat{x}), \quad x \neq \hat{x}.$$

1.2 Direction de descente

Définition 1.2.1 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$ est dite direction de descente au point $\hat{x}$ si et seulement si il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(\hat{x} + \lambda d) < f(\hat{x}) : \quad \forall \lambda \in]0, \delta[$$

1.3. SCHÉMAS GÉNÉRAL DES ALGORITHMES D'OPTIMISATION SANS CONTRAINTES

Donnons maintenant une condition suffisante pour que d soit une direction de descente.

Théorème 1.2.1 *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable au point $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^n$ une direction vérifiant la condition suivante :*

$$f'(\hat{x}, d) = \nabla f(\hat{x})^t \cdot d < 0.$$

Alors d est une direction de descente au point $\hat{x}$.

Preuve. f est différentiable au point $\hat{x}$. Donc

$$f(\hat{x} + \lambda d) = f(\hat{x}) + \lambda \nabla f(\hat{x})^t \cdot d + \lambda \|d\| \alpha(\hat{x}, \lambda d),$$

avec

$$\alpha(\hat{x}, \lambda d) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0,$$

ceci implique que

$$f'(\hat{x}, d) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\hat{x} + \lambda d) - f(\hat{x})}{\lambda} = \nabla f(\hat{x})^t \cdot d < 0.$$

La limite étant strictement négative, alors il existe un voisinage de zéro $V(0) =]-\delta, +\delta[$ tel que

$$\frac{f(\hat{x} + \lambda d) - f(\hat{x})}{\lambda} < 0, \quad \forall \lambda \in]-\delta, +\delta[. \quad (1.1)$$

La relation (1.1) est particulièrement vraie pour tout $\lambda \in]0, +\delta[$. On obtient le résultat cherché en multipliant la relation (1.1) par $\lambda > 0$. ■

1.3 Schémas général des algorithmes d'optimisation sans contraintes

Supposons que d_k soit une direction de descente au point x_k , ceci nous permet de considérer le point x_{k+1} , successeur de x_k , de la manière suivante :

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k, \quad \lambda_k \in]0, +\delta[.$$

Vu la définition de direction de descente, on est assuré que

$$f(x_{k+1}) = f(x_k + \lambda_k d_k) < f(x_k).$$

1.4. CONDITIONS NÉCESSAIRES D'OPTIMALITÉ. CAS GÉNÉRAL

Un bon choix de d_k et de λ_k permet ainsi de construire une multitude d'algorithmes d'optimisation.

1.3.1 Exemples de choix de directions de descente

Par exemple si on choisit $d_k = -\nabla f(x_k)$ et si $\nabla f(x_k) \neq 0$, on obtient la méthode du gradient. La méthode de Newton correspond à $d_k = -(H(x_k))^{-1} \cdot \nabla f(x_k)$. Bien sur $-\nabla f(x_k)$ est une direction de descente ($\nabla f(x_k)^t \cdot d_k = -\nabla f(x_k)^t \cdot \nabla f(x_k) = -\|\nabla f(x_k)\|^2 < 0$). Pour la deuxième direction si la matrice hessienne $H(x_k)$ est définie positive alors $d_k = -(H(x_k))^{-1} \cdot \nabla f(x_k)$ est aussi une direction de descente.

1.3.2 Exemple de choix de pas λ_k

On choisit en général λ_k de façon optimale, c'est à dire que λ_k doit vérifier

$$f(x_k + \lambda_k d_k) \leq f(x_k + \lambda d_k) : \quad \forall \lambda \in [0, +\infty[.$$

En d'autres termes on est ramené à étudier à chaque itération un problème de minimisation d'une variable réelle. C'est ce qu'on appelle recherche linéaire.

1.4 Conditions nécessaires d'optimalité. Cas général

1.4.1 Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre

Théorème 1.4.1 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable au point $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. Si $\hat{x}$ est un minimum local de (P) alors $\nabla f(\hat{x}) = 0$.

Preuve. C'est une conséquence directe du théorème 1.2.1 et de la remarque 1.2.1. En effet, supposons que $\nabla f(\hat{x}) \neq 0$. Puisque la direction $d = -\nabla f(\hat{x})$ est une direction de descente, alors il existe $\delta > 0$ tel que :

$$f(\hat{x} + \lambda d) < f(\hat{x}) : \quad \forall \lambda \in]0, \delta[.$$

Ceci est contradiction avec le fait que $\hat{x}$ est une solution optimale locale de (P) . ■

1.4.2 Condition nécessaire d'optimalité du second ordre

Théorème 1.4.2 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable au point $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. Si $\hat{x}$ est un minimum local de (P) alors $\nabla f(\hat{x}) = 0$ et la matrice hessienne de f au point $\hat{x}$, qu'on

1.5. CONDITIONS SUFFISANTES D'OPTIMALITÉ

note $H(\hat{x})$, est semi définie positive.

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque, f étant deux fois différentiable au point $\hat{x}$. On a pour tout $\lambda \neq 0$

$$f(\hat{x} + \lambda x) = f(\hat{x}) + \frac{1}{2}\lambda^2 x^t H(\hat{x})x + \lambda^2 \|x^2\| \alpha(\hat{x}, \lambda x), \quad \alpha(\hat{x}, \lambda x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0.$$

Ceci implique

$$\frac{f(\hat{x} + \lambda x) - f(\hat{x})}{\lambda^2} = \frac{1}{2}x^t H(\hat{x})x + \|x^2\| \alpha(\hat{x}, \lambda x). \quad (1.2)$$

$\hat{x}$ est un optimum local, il existe alors $\delta > 0$ tel que

$$\frac{f(\hat{x} + \lambda x) - f(\hat{x})}{\lambda^2} \geq 0, \quad \forall \lambda \in]-\delta, +\delta[.$$

Si on prend en considération (1.2) et on passe à la limite quand $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda \neq 0$, on obtient

$$x^t H(\hat{x})x \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

■

1.5 Conditions suffisantes d'optimalité

Théorème 1.5.1 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable au point $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. Si $\nabla f(\hat{x}) = 0$ et $H(\hat{x})$ est définie positive alors $\hat{x}$ est un minimum local strict de (P) .

Preuve. f étant deux fois différentiable au point $\hat{x}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = f(\hat{x}) + \frac{1}{2}(x - \hat{x})^t H(\hat{x})(x - \hat{x}) + \|(x - \hat{x})\|^2 \alpha(\hat{x}, (x - \hat{x})), \quad \alpha(\hat{x}, (x - \hat{x})) \xrightarrow{x \rightarrow \hat{x}} 0, \quad (\nabla f(\hat{x}) = 0). \quad (1.3)$$

Supposons que $\hat{x}$ n'est pas un optimum local strict. Alors il existe une suite $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que $x_k \neq \hat{x} : \forall k$ et

$$x_k \neq \hat{x} : \forall k, \quad x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \hat{x} \quad \text{et} \quad f(x_k) \leq f(\hat{x}). \quad (1.4)$$

Dans (1.3) prenons $x = x_k$, divisons le tout par $\|(x_k - \hat{x})\|^2$ et notons $d_k = \frac{(x_k - \hat{x})}{\|(x_k - \hat{x})\|}$, on obtient

$$\frac{f(x_k) - f(\hat{x})}{\|(x_k - \hat{x})\|^2} = \frac{1}{2}d_k^t H(\hat{x})d_k + \alpha(\hat{x}, (x_k - \hat{x})), \quad \alpha(\hat{x}, (x_k - \hat{x})) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (1.5)$$

(1.4) et (1.5) impliquent

$$\frac{1}{2}d_k^t H(\hat{x})d_k + \alpha(\hat{x}, (x_k - \hat{x})) \leq 0, \quad \forall k.$$

D'autre part la suite $\{d_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ est bornée ($\|d_k\| = 1, \forall n$). Donc il existe une sous suite $\{d_k\}_{k \in N_1 \subset \mathbb{N}}$ telle que

$$d_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty, k \in N_1]{} \tilde{d}.$$

Finalement lorsque $k \rightarrow \infty, k \in N_1$, on obtient

$$\frac{1}{2}\tilde{d}H(\hat{x})\tilde{d} \leq 0.$$

La dernière relation et le fait que $\tilde{d} \neq 0$ ($\|\tilde{d}\| = 1$) impliquent que la matrice hessienne $H(\hat{x})$ n'est pas définie positive. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse. ■

1.6 Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité. Cas convexe

Théorème 1.6.1 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Supposons que f est différentiable au point $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. Alors

- i) Si $\hat{x}$ est un minimum local de (P) alors $\hat{x}$ est un minimum global de (P)
- ii) $\hat{x}$ est un minimum local de (P) si et seulement si $\nabla f(\hat{x}) = 0$

1.7 Les modes de convergence

Définition 1.7.1 Soit $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}^n$ qui converge vers x^* .

1- On dit que $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers x^* linéairement avec le taux α si

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} = \alpha < 1.$$

Lorsque $\|x_{k+1} - x^*\| \simeq \alpha \|x_k - x^*\|$, la convergence est dite linéaire asymptotique.

2- La convergence est dite superlinéaire d'ordre γ si

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|^\gamma} < +\infty, \quad \gamma > 1$$

1.7. LES MODES DE CONVERGENCE

3- On dit que $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers x^* de façon superlinéaire si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} = 0.$$

Lorsque $\|x_{k+1} - x^*\| \leq l \|x_k - x^*\|^\gamma$, la convergence est dite superlinéaire asymptotique.

CHAPITRE 2

OPTIMISATION DANS $\mathbb{R}$. RECHERCHES LINÉAIRES INEXACTES

2.1 Introduction et rappels

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. On considère le problème de minimisation sans contraintes (2.1) suivant :

$$\min \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} \quad (2.1)$$

Il existe deux grandes classes de méthodes qui contribuent à résoudre le problème (2.1) :

- a) les méthodes à direction de descente et recherche linéaire
- b) les méthodes à région de confiance.

Nous nous intéressons dans cette partie aux méthodes à recherche linéaire et à direction de descente dont le principe est le suivant :

Supposons qu'à l'itération k on ait un point $x_k \in \mathbb{R}^n$ et une direction de descente $d_k \in \mathbb{R}^n$, c'est à dire d_k vérifie :

$$\nabla f(x_k)^T d_k < 0 \quad (2.2)$$

Le successeur x_{k+1} de x_k est obtenu comme suit :

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \quad ; \quad \alpha_k \in \mathbb{R}_+^* \quad (2.3)$$

α_k s'appelle le pas . Le choix de d_k et α_k caractérisent l'algorithme.

Supposons que d_k est déterminée. Comment choisir le pas α_k ? Les méthodes qui s'intéressent au choix et au calcul de α_k s'appellent recherches linéaires.

2.1. INTRODUCTION ET RAPPELS

Il existe deux types de recherches linéaires :

- i) les recherches linéaires exactes.
- ii) les recherches linéaires inexactes ou économiques.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable au point $x_k \in \mathbb{R}^n$ et $d_k \in \mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\nabla f(x_k)^T d_k < 0. \quad (2.4)$$

Notons

$$\varphi_k(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k) \quad (2.5)$$

La condition (2.4) implique

$$\exists \delta > 0 : \forall \alpha \in]0, \delta[\quad f(x_k + \alpha d_k) < f(x_k) \quad (2.6)$$

c'est à dire

$$\exists \delta > 0 : \forall \alpha \in]0, \delta[\quad \varphi_k(\alpha) < \varphi_k(0)$$

On peut choisir $\alpha = \alpha^*$ de façon optimale, c'est à dire qu'en partant du point x_k et la direction d_k , f décroît le mieux possible au point $x_{k+1} = x_k + \alpha^* d_k$. Ceci est possible si on impose à α^* de vérifier la condition suivante :

$$\forall \alpha \in]0, +\infty[: \quad f(x_k + \alpha^* d_k) \leq f(x_k + \alpha d_k) \quad (2.7)$$

Notons $\varphi_k(\alpha)$ la fonction d'une variable réelle suivante :

$$\varphi_k(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k) : \quad \alpha \in]0, +\infty[\quad (2.8)$$

(2.7) et (2.8) donnent

$$\varphi_k(\alpha^*) \leq \varphi_k(\alpha), \quad \forall \alpha \in]0, +\infty[\quad (2.9)$$

ou encore α^* est solution optimale de :

$$\varphi_k(\alpha^*) = \min\{\varphi_k(\alpha) : \alpha \in]0, +\infty[\} \quad (2.10)$$

Trouvez α^* vérifiant (2.10) s'appelle recherche linéaire exacte. Ce travail s'effectue à chaque itération k .

Donc à chaque itération k , on doit résoudre un problème d'optimisation dans $\mathbb{R}$.

Avantages des recherches linéaires exactes

Le principal avantage des recherches linéaires exactes est de calculer α_k optimal, c'est $\alpha_k = \alpha^*$, vérifiant

$$\varphi_k(\alpha_k) = \varphi_k(\alpha^*) = \min\{\varphi_k(\alpha) : \alpha \in]0, +\infty[\}$$

En d'autres termes, si $\alpha_k = \alpha^*$ la fonction f décroît le mieux en passant du point x_k au point $x_k + \alpha_k d_k = x_k + \alpha^* d_k$, c'est à dire

$$\forall \alpha \in]0, +\infty[: [f(x_k) - f(x_k + \alpha_k d_k)] = [f(x_k) - f(x_k + \alpha^* d_k)] \geq [f(x_k) - f(x_k + \alpha d_k)] \quad (2.11)$$

Inconvénients des recherches linéaires exactes

Effectuer une recherche linéaire exacte à chaque itération, est difficilement réalisable en pratique et assez couteux en temps et en mémoire.

Problème1

Quelle méthode de calcul de α_k , pourrait on adopter pour remplacer les recherches linéaires exactes, tout en gardant l'essentiel des avantages des recherches linéaires exactes et éviter leurs inconvénients ?

Réponse au problème1

Les nouvelles méthodes de calcul de α_k adoptées doivent vérifier le conditions suivantes :

a) Le calcul de α_k doit être simple et peu coûteux en temps et en mémoire.

b) Sachant qu'on ne peut pas obtenir $\alpha_k = \alpha^*$ (celà exigerait le retour aux recherches linéaires exactes), on essaye donc de s'approcher le plus possible de α^* . Les meilleurs choix de α_k , sont les points α_k assez proches de α^* . Ceci se traduit par les deux conditions suivantes :

b1) la fonction f décroît strictement en passant du point x_k au point $x_k + \alpha_k d_k$, *i.e.*

$$f(x_k + \alpha_k d_k) < f(x_k) \quad (2.12)$$

b2) la fonction f décroît de **façon suffisante** en passant du point x_k au point $x_k + \alpha_k d_k$

La décroissance suffisante dépend d'une recherche linéaire inexacte à une autre. Si on compare deux recherches linéaires inexactes, celle qui possède la plus grande décroissance sera la meilleure. En d'autre termes, la recherche linéaire inexacte dont le α_k sera le plus proche de α^* , sera la meilleure.

Notons par $\tau(f, x_k, \alpha, d_k)$ le taux de décroissance de f , en partant du point x_k et

arrivant au point $x_k + \alpha d_k$, le nombre positif $\tau(f, x_k, \alpha, d_k)$ suivant :

$$\tau(f, x_k, \alpha, d_k) = f(x_k) - f(x_k + \alpha d_k) = \varphi_k(0) - \varphi_k(\alpha) \quad (\text{voir Figure 2.1})$$

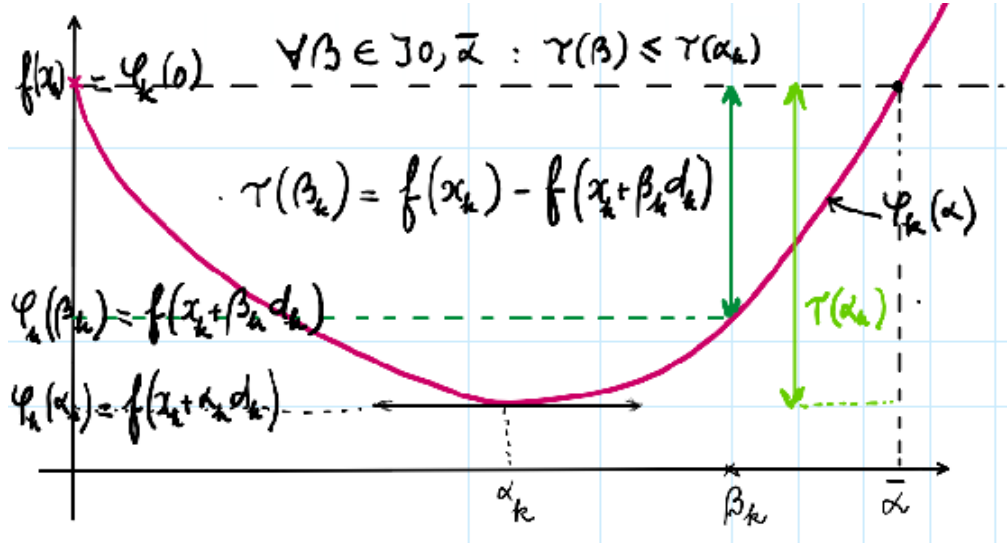


FIG. 2.1 – $\tau(f, x_k, \alpha, d_k)$

Ceci nous permet de donner la définition suivante :

Définition 2.1.1 Supposons qu'on a deux recherches linéaires inexactes qu'on note $RLI(1)$ (recherche linéaire inexacte1) et $RLI(2)$ (recherche linéaire inexacte2). On dit que $RLI(1)$ est meilleure que $RLI(2)$ si pour tout nombre α produit par la recherche linéaire inexacte $RLI(1)$ et pour tout nombre β produit par la recherche linéaire inexacte $RLI(2)$ on a :

$$\tau(f, x_k, \alpha, d_k) > \tau(f, x_k, \beta, d_k)$$

Remarque 2.1.1 Il est clair que si une $RLI(1)$ produit des points α plus proches de α^* que ceux produits par $RLI(2)$, alors $RLI(1)$ est meilleure que $RLI(2)$.

2.2 Descente suffisante. Recherche linéaire inexacte d'Armijo

2.2.1 Principe de la méthode

Comme on l'a signalé au paragraphe précédent, il ne suffit pas de choisir à chaque itération k , α_k tel que

$$f(x_k + \alpha_k d_k) < f(x_k)$$

pour que la suite $\{x_k\}$ converge vers la solution optimale ou vers un point stationnaire. En effet si la fonction décroît très peu en passant du point x_k vers le point $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, la suite $\{x_k\}$ diverge ou peut converger vers un point qui n'a rien à voir avec la solution optimale.

Pour éviter cet inconvénient, il faut imposer une condition caractérisant la notion de descente suffisante de la fonction. Il faut choisir α_k de sorte que la fonction f décroît de façon suffisante en passant du point x_k au point $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$.

L'idée est que la diminution jugée suffisante soit proportionnelle à la taille du pas α_k . Ainsi plus le pas sera grand, plus la diminution de la fonction f sera grande. Donc si $\gamma > 0$, on désire que

$$f(x_k) - f(x_k + \alpha_k d_k) \geq \alpha_k \gamma$$

ceci est équivalent à

$$-f(x_k + \alpha_k d_k) \geq \alpha_k \gamma - f(x_k)$$

ou encore

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) - \alpha_k \gamma.$$

Le facteur γ ne peut pas être choisi de façon arbitraire. Surtout il doit varier d'une itération à l'autre. Il est plus approprié de définir γ en fonction de la pente de la fonction au point x_k dans la direction d_k . En l'occurrence, nous choisirons

$$\gamma = -\beta \nabla f(x_k)^T d_k, \quad 0 < \beta < 1$$

Définition 2.2.1 (diminution suffisante : condition d'Armijo) Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable, $x_k \in \mathbb{R}^n$, $d_k \in \mathbb{R}^n$ une direction de descente, i.e. d_k vérifiant : $\nabla f(x_k)^T d_k < 0$. On dit que le pas $\alpha_k > 0$ vérifie la condition d'Armijo, si on a

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + \alpha_k \beta_1 \nabla f(x_k)^T d_k, \quad 0 < \beta_1 < 1 \quad (2.13)$$

Si on note

$$\varphi_k(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k) \quad (2.14)$$

alors on a

$$\varphi_k(0) = f(x_k), \quad (2.15)$$

$$\varphi'_k(\alpha) = \nabla f(x_k + \alpha d_k)^T d_k \quad (2.16)$$

et

$$\varphi'_k(0) = \nabla f(x_k)^T d_k < 0 \quad (2.17)$$

Ceci étant, la définition 2.2.1 prend la forme suivante :

Définition 2.2.2 (diminution suffisante : condition d'Armijo) Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable, $x_k \in \mathbb{R}^n$, $d_k \in \mathbb{R}^n$ une direction de descente, i.e. d_k vérifiant : $\nabla f(x_k)^T d_k < 0$. On dit que le pas $\alpha_k > 0$ vérifie la condition d'Armijo, si on a

$$\varphi_k(\alpha) \leq \varphi_k(0) + \alpha_k \beta_1 \varphi'_k(0), \quad 0 < \beta_1 < 1 \quad (2.18)$$

2.2.2 Interprétation graphique de la règle d'Armijo

Calculons l'équation de la tangente T_{M_0} au graphe de la fonction, et qui passe par le point $M_0(0, \varphi_k(0))$

$$T_{M_0} = \{(\alpha, y) : y - \varphi_k(0) = \varphi'_k(0)(\alpha - 0)\}$$

ou encore

$$T_{M_0} = \{(\alpha, y) : y = \varphi_k(0) + \alpha \varphi'_k(0)\} \quad (2.19)$$

soit en prenant en compte les relations (2.15) et (2.17)

$$T_{M_0} = \{(\alpha, y) : y = f(x_k) + \alpha \nabla f(x_k)^T d_k\} \quad (2.20)$$

Calculons maintenant l'équation de la droite notée Δ_{M_0} , de coefficient directeur $\beta_1 \varphi'_k(0)$ et qui passe par le point $M_0(0, \varphi_k(0))$. On a

$$\Delta_{M_0} = \{(\alpha, y) : y - \varphi_k(0) = \beta_1 \varphi'_k(0)(\alpha - 0)\}$$

ou encore

$$\Delta_{M_0} = \{(\alpha, y) : y = \varphi_k(0) + \alpha \beta_1 \varphi'_k(0)\} \quad (2.21)$$

soit en considérant (2.15) et (2.17)

$$\Delta_{M_0} = \{(\alpha, y) : y = f(x_k) + \alpha \beta_1 \nabla f(x_k)^T d_k\} \quad (2.22)$$

Les droites T_{M_0} et Δ_{M_0} passent par le même point $M_0(0, \varphi_k(0))$. Le coefficient directeur de Δ_{M_0} est égal à β_1 fois le coefficient directeur de T_{M_0} . Remarquons que $\varphi'_k(0) = \nabla f(x_k)^T d_k < 0$, alors

$$0 < \beta_1 < 1 \implies 0 > \varphi'_k(0) \beta_1 > \varphi'_k(0)$$

par conséquent, pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\alpha \varphi'_k(0) \beta_1 > \alpha \varphi'_k(0)$$

2.2. DESCENTE SUFFISANTE. RECHERCHE LINÉAIRE INEXACTE D'ARMIJO

soit en rajoutant aux deux membres de l'égalité précédente la même quantité $\varphi_k(0)$, on obtient

$$\varphi_k(0) + \alpha\varphi'_k(0)\beta_1 > \varphi_k(0) + \alpha\varphi'_k(0) \quad (2.23)$$

ou encore

$$f(x_k) + \alpha\beta_1\nabla f(x_k)^T d_k > f(x_k) + \alpha\nabla f(x_k)^T d_k \quad (2.24)$$

Les relations précédentes impliquent que pour $\alpha \in]0 + \infty[$, la droite Δ_{M_0} se trouve au dessus de la droite T_{M_0} . Par conséquent, il existe $\tau > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in]0, \tau[$, le graphe de $\varphi_k(\alpha)$ se trouve au dessous de la droite Δ_{M_0} . Ecrivons celà de façon analytique

$$\forall \alpha \in]0, \tau[: \varphi_k(\alpha) \leq f(x_k) + \alpha\beta_1\nabla f(x_k)^T d_k \quad (2.25)$$

Utilisons le fait que $\varphi_k(\alpha) = f(x_k + \alpha_k d_k)$, (2.25) devient

$$\forall \alpha \in]0, \tau[: f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + \alpha\beta_1\nabla f(x_k)^T d_k \quad (2.26)$$

(2.26) est exactement la condition "Armijo".

Conclusion

On peut prendre pour α_k , vérifiant la condition "Armijo", tout point $\alpha \in]0, \tau[$ (voir Figure 2.2).

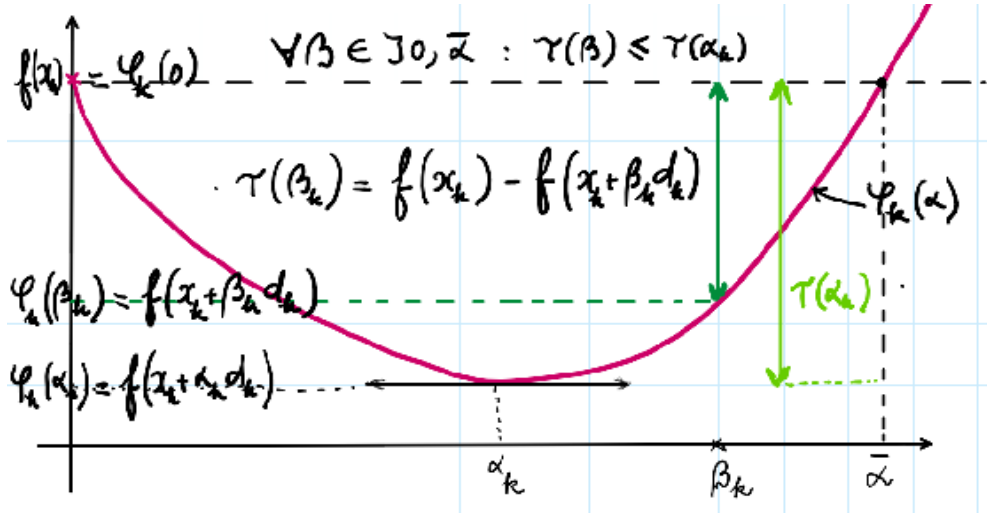


FIG. 2.2 – Armijo

Remarque 2.2.1 En general, on s'assure dans la règle d'Armijoo que α_k ne soit pas trop petit car celà va nuire à la convergence de l'algorithme qui pourrait converger prématurément vers un point qui n'est pas stationnaire. Celà se verra explicitement dans l'algorithme suivant

Algorihtme de la règle d'Armijo.

Initialisation

Choisir $\hat{\alpha} \in]0, +\infty[$ et $0 < \beta_1 < 1$. Calculez $\varphi_k(\hat{\alpha}) = f(x_k + \hat{\alpha}d_k)$, $\varphi_k(0) = f(x_k)$, $\varphi'_k(0) = \nabla f(x_k)^T d_k < 0$ et allez à Etape principale

Etape principale

Si $\varphi_k(\hat{\alpha}) \leq \varphi_k(0) + \hat{\alpha}\beta_1\varphi'_k(0)$, choisir le plus grand entier $n_0 \geq 0$ tel que :

$$\varphi_k(2^{n_0}\hat{\alpha}) \leq \varphi_k(0) + 2^{n_0}\hat{\alpha}\beta_1\varphi'_k(0), \text{ et prendre } \alpha_k = 2^{n_0}\hat{\alpha}$$

Sinon choisir le plus petit entier $m_0 \geq 0$ tel que :

$$\varphi_k\left(\frac{\hat{\alpha}}{2^{m_0}}\right) \leq \varphi_k(0) + \frac{\hat{\alpha}}{2^{m_0}}\beta_1\varphi'_k(0), \text{ et prendre } \alpha_k = \frac{\hat{\alpha}}{2^{m_0}}$$

Fin

Dans le théorème suivant on va assurer l'existence du pas d'Armijo en posant quelques conditions sur la fonction φ_k .

Théorème 2.2.1 *Considérons la fonction $\varphi_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$; définie par*

$$\varphi_k(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k)$$

Supposons que φ_k est continue et bornée inférieurement. Si d_k est une direction de descente en x_k ($\nabla f(x_k)^T d_k < 0$) et si $\beta_1 \in]0, 1[$, alors l'ensemble des pas vérifiant la règle d'Armijo est non vide.

2.3 Recherche linéaire inexacte de Wolfe

2.3.1 Recherche linéaire inexacte de Wolfe

α_k est acceptable par la recherche linéaire inexacte de Wolfe si α_k vérifie les deux condition (Wolfe1) et (Wolfe2) suivantes

$$\varphi_k(\alpha_k) \leq \varphi_k(0) + \rho\alpha_k\varphi'_k(0), \quad 0 < \rho < \frac{1}{2} \quad (2.27)$$

$$\varphi'_k(\alpha_k) \geq \sigma\varphi'_k(0), \quad 0 < \sigma < 1, \quad \sigma > \rho \quad (2.28)$$

ou en remplaçant $\varphi_k(\alpha_k)$, $\varphi_k(0)$, $\varphi'_k(0)$, $\varphi'_k(\alpha_k)$ par leurs expressions, on a

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + \rho\alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k, \quad 0 < \rho < \frac{1}{2} \quad (2.29)$$

$$\nabla f(x_k + \alpha_k d_k)^T d_k \geq \sigma \nabla f(x_k)^T d_k, \quad 0 < \sigma < 1, \quad \sigma > \rho \quad (2.30)$$

2.3.2 recherche linéaire inexacte de Wolfe-forte

Comme leur nom l'indique, les conditions de Wolfe-forte sont plus fortes que les conditions de Wolfe. En effet les conditions de wolfe-forte impliquent les conditions de Wolfe. Elles sont très utilisées en théorie et les grands résultats de convergence ont été prouvés en utilisant des recherches linéaires inexactes de Wolfe-forte.

Définition 2.3.1 α_k vérifie les conditions de Wolfe-forte si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\varphi_k(\alpha_k) \leq \varphi_k(0) + \rho \alpha_k \varphi'_k(0), \quad 0 < \rho < \frac{1}{2} \quad (2.31)$$

$$|\varphi'_k(\alpha_k)| \leq -\sigma \varphi'_k(0), \quad 0 < \sigma < 1, \quad \sigma > \rho \quad (2.32)$$

Théorème 2.3.1 Si α_k vérifie (2.31) et (2.32), alors α_k vérifie (2.27) et (2.28) .

Preuve. (2.31) et (2.27) sont les mêmes conditions. Reste à montrer que

$$(Wolfe forte2) \implies (Wolfe2)$$

En effet. Supposons que α_k vérifie (2.32). Alors on a

$$\sigma \varphi'_k(0) \leq \varphi'_k(\alpha_k) \leq -\sigma \varphi'_k(0)$$

Par conséquent on a

$$\varphi'_k(\alpha_k) \geq \sigma \varphi'_k(0)$$

Ceci implique que α_k vérifie (2.28). ■

Utilité des recherches linéaires inexactes de Wolfe-forte

- a) Comme on l'a signalé avant, elles sont utilisées dans les théorèmes de convergence.
- b) Supposons que α_k vérifie les conditions de Wolfe-forte, donc on a

$$\sigma \varphi'_k(0) \leq \varphi'_k(\alpha_k) \leq -\sigma \varphi'_k(0) \quad (2.33)$$

Si on choisit σ très petit (on prend en général $\sigma = 10^{-4}$), alors (2.33) implique que $\varphi'_k(\alpha_k)$ devient proche de zéro. Si φ'_k est continue, alors α_k vérifiant (2.33) serait très proche de α^* vérifiant $\varphi'_k(\alpha^*) = 0$.

Conclusion

Dans la recherche linéaire inexacte de Wolfe forte, si on choisit σ très petit, on a beaucoup de chances de tomber sur α_k proche de α^* .

Remarque 2.3.1 *Considérons la condition (2.28)*

$$\varphi'_k(\alpha_k) \geq \sigma \varphi'_k(0) \quad (2.34)$$

Contrairement à (2.32), lorsque σ est très petit, $\varphi'(\alpha_k)$ peut ne pas être proche de 0.

2.3.3 L'algorithme de Wolfe

ALGORITHME

ETAPE 1 Initialisation

Prendre $\alpha_0 \in [0, 10^{99}]$, calculez $\varphi_k(0)$, $\varphi'_k(0)$. Prendre $\rho = 0.1$ (ou $\rho = 0.1$ ou $\rho = 0.001$ ou $\rho = 0.0001$)

$\sigma = 0.9$ (ou σ plus petit encore)

Poser $a_0 = 0$, $b_0 = 10^{99}$, $k = 0$ et allez à ETAPE 2

ETAPE 2 (test de (2.27))

Calculez $\varphi_k(\alpha_k)$. Si $\varphi_k(\alpha_k) \leq \varphi_k(0) + \rho \alpha_k \varphi'_k(0)$, aller à ETAPE 3.

Sinon

Poser $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = \alpha_k$ et allez à ETAPE 4

ETAPE 3 (test (2.28) ou (2.32))

Calculez $\varphi'_k(\alpha_k)$. Si $\varphi'_k(\alpha_k) \geq \sigma \varphi'_k(0)$ ($|\varphi'_k(\alpha_k)| \leq -\sigma \varphi'_k(0)$). STOP

Prendre $\bar{\alpha} = \alpha_k$.

Sinon

Poser $a_{k+1} = \alpha_k$, $b_{k+1} = b_k$ et allez à ETAPE 4

ETAPE 4 (calcul de α_{k+1})

$$\alpha_{k+1} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$$

Poser $k = k + 1$ et allez à ETAPE 2.

CHAPITRE 3

MÉTHODE DE LA PLUS FORTE PENTE

3.0.4 Introduction

Cette méthode fut découverte par Cauchy en 1847 ([9]). Il est naturel de se demander l'origine ou la justification d'une telle appellation (méthode de la plus forte pente). Considérons un point $x_k \in \mathbb{R}^n$, si $\nabla f(x_k) \neq 0$, alors la direction $d_k = -\nabla f(x_k)$ est une direction de descente (voir Théorème 4.1 et remarque 4.1). Le Théorème qui suit va nous montrer que c'est en fait la meilleure direction de descente. En d'autres termes la décroissance de la fonction sera la plus forte en suivant la direction : $-\nabla f(x_k)$.

Théorème 3.0.2 *Supposons que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, soit différentiable au point x , et supposons que $\nabla f(x) \neq 0$. Considérons le problème optimal*

$$\underset{\|d\| \leq 1}{\text{Minimiser}} \quad f'(x, d)$$

où $f'(x, d)$ est la dérivée directionnelle de f au point x et dans la direction d . Alors la solution optimale de ce problème est donnée par

$$\tilde{d} = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$$

Preuve. Puisque

$$f'(x, d) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \frac{f(x + \lambda d) - f(x)}{\lambda} = \nabla f(x)^t d.$$

Notre problème revient donc à minimiser $\nabla f(x)^t d$ dans $\{d : \|d\| \leq 1\}$.

L'inégalité de shwartz donne

$$|\nabla f(x)^t d| \leq \|\nabla f(x)\| \|d\|. \quad (3.1)$$

Si

$$\nabla f(x)^t d \geq 0,$$

on a bien sur

$$\nabla f(x)^t d \geq -\|\nabla f(x)\| \|d\|.$$

Si

$$\nabla f(x)^t d \leq 0,$$

(3.1) implique que

$$-\nabla f(x)^t d \leq \|\nabla f(x)\| \|d\|,$$

Par conséquent on a toujours

$$\nabla f(x)^t d \geq -\|\nabla f(x)\| \|d\|.$$

Pour $\|d\| \leq 1$, on a

$$\|\nabla f(x)\| \|d\| \leq \|\nabla f(x)\| \Rightarrow -\|\nabla f(x)\| \|d\| \geq -\|\nabla f(x)\|.$$

Donc : $\forall d : \|d\| \leq 1$ on a

$$\nabla f(x)^t d \geq -\|\nabla f(x)\|.$$

D'autre part on a : $\|\tilde{d}\| = 1$ et $\tilde{d}$ vérifie :

$$\nabla f(x)^t \tilde{d} = \nabla f(x)^t \left(-\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}\right) = -\|\nabla f(x)\|.$$

■

Interprétation du théorème 3.0.2 : Nous allons à partir du théorème 7.1 donner une idée intuitive sur l'appellation : méthode de la plus forte pente. En effet d'après le théorème 7.1 on a :

$$f'(x, d) \geq f'(x, \tilde{d}) : \quad \forall d, \quad \|d\| \leq 1.$$

Soit en utilisant la définition de la dérivée directionnelle.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0_+} \frac{f(x + \lambda d) - f(x)}{\lambda} \geq \lim_{\lambda \rightarrow 0_+} \frac{f(x + \lambda \tilde{d}) - f(x)}{\lambda}.$$

Cette dernière inégalité implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$[f(x + \lambda d) - f(x)] - [f(x + \lambda \tilde{d}) - f(x)] \geq 0, \quad \forall \lambda \in]-\delta, +\delta[,$$

ou encore

$$f(x + \lambda d) \geq f(x + \lambda \tilde{d}), \quad \forall \lambda \in]-\delta, +\delta[\quad \text{et} \quad \forall d, \quad \|d\| \leq 1.$$

3.0.5 Algorithme de la méthode de la plus forte pente

Cet algorithme est très simple. Il suit le schémas suivant.

Algorithme de la méthode de la plus forte pente

► **Etape initiale** : Choisir un $\varepsilon > 0$. Choisir un point initial x_1 . Poser $k = 1$ et aller à l'étape principale.

► **Etape principale** : Si $\|\nabla f(x)\| < \varepsilon$ stop. Sinon poser $d_k = -\nabla f(x_k)$ et soit λ_k la solution optimale de la recherche linéaire

$$\text{Min } \{f(x_k + \lambda d_k); \lambda \geq 0\}.$$

Poser $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$. Remplacer k par $k + 1$ et répéter l'étape principale.

3.0.6 Inconvénients de la méthode de la plus forte pente

Lenteur de la méthode au voisinage des points stationnaires

Cette méthode travaille de façon performante dans les premières étapes de l'algorithme. Malheureusement, dès qu'on s'approche du point stationnaire, la méthode devient très lente. On peut expliquer intuitivement ce phénomène par les considérations suivantes

$$f(x_k + \lambda d) = f(x_k) + \lambda \nabla f(x_k)^t d + \lambda \|d\| \alpha(x_k; \lambda d),$$

où $\alpha(x_k; \lambda d) \rightarrow 0$ quand $\lambda d \rightarrow 0$.

Si $d = -\nabla f(x_k)$, on obtient : $x_{k+1} = x_k - \lambda \nabla f(x_k)$ et par conséquent

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = \lambda [-\|\nabla f(x_k)\|^2 + \|\nabla f(x_k)\| \alpha(x_k; \lambda \nabla f(x_k))].$$

D'après l'expression précédente, on voit que lorsque x_k s'approche d'un point stationnaire, et si f est continuellement différentiable, alors $\|\nabla f(x_k)\|$ est proche de zéro. Donc le terme à droite s'approche de zéro, indépendamment de λ , et par conséquent $f(x_{k+1})$ ne s'éloigne pas beaucoup de $f(x_k)$ quand on passe du point x_k au point x_{k+1} .

Le phénomène de Zigzaguing

Il n'est pas facile de vérifier que pour la méthode du gradient on a toujours

$$d_k^T \cdot d_{k+1} = 0,$$

c'est à dire que la suite $\{x_k\}$ engendrée par l'algorithme de la méthode du gradient, zigzague. Ceci crée un phénomène de ralentissement dans l'acheminement des points x_k vers la solution optimale.

3.0.7 Quelques remèdes

Changement de direction

Au lieu de prendre comme direction de descente, la direction :

$$d_k = -\nabla f(x_k),$$

on prend des directions de la forme

$$d_k = -D \cdot \nabla f(x_k),$$

où D est une matrice choisie convenablement (D pourrait être par exemple l'inverse de la matrice hessienne au point x_k c'est à dire $(H(x_k))^{-1}$).

Un autre choix pourrait s'opérer de la façon suivante :

$$d_k = -\nabla f(x_k) + g_k,$$

où g_k est un vecteur approprié.

Accélération de la convergence

On peut aussi accélérer la convergence de la méthode du gradient. Pour cela on transforme grâce à un algorithme d'accélération de la convergence la suite $\{x_k\}$ en une suite $\{y_k\}$ qui convergerait vers la même limite que la suite $\{x_k\}$, mais convergerait plus rapidement. Si on note par x^* cette limite commune on exprime cette rapidité par la limite suivante :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_k - x^*}{x_k - x^*} = 0$$

CHAPITRE 4

MÉTÉHODES DU GRADIENT CONJUGUÉ

Cette méthode est surtout utilisée pour les problèmes de grande taille. Cette méthode a été découverte en 1952 par Hestenes et Steifel ([28]), pour la minimisation de fonctions quadratiques strictement convexes.

Plusieurs mathématiciens ont étendu cette méthode pour le cas non linéaire. Ceci a été réalisé pour la première fois, en 1964 par Fletcher et Reeves ([26]) (*méthode de Fletcher-Reeves*) puis en 1969 par Polak, Ribière ([41]) et Polyak ([40]) (*méthode de Polak-Ribière-Polyak*). Une autre variante a été étudiée en 1987 par Fletcher ([23]) (*Méthode de la descente conjuguée*).

Citons d'autres nouveaux algorithmes qu'on peut trouver dans ([15], [5], [32], [30], [20], [34], [48], [18], [12], [3], [19], [1], [22], [21], [4], [50])

4.1 Optimisation quadratique sans contraintes

Définition 4.1.1 Soit Q une matrice (n, n) symétrique et définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. On appelle problème de minimisation quadratique sans contraintes, le problème noté (PQSC) suivant :

$$\left\{ \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x \right\} \quad (4.1)$$

Théorème 4.1.1 Le problème (PQSC) a une solution unique $\hat{x}$,

solution du système linéaire $Qx = b$, c'est à dire que $\hat{x}$ vérifie

$$\hat{x} = Q^{-1}b \quad (4.2)$$

4.1.1 Calcul du pas obtenu par une recherche linéaire exacte

Soit Q est une matrice (n, n) symétrique et définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x$. Considérons le problème (PQSC)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x \right\} \quad (PQSC)$$

Les méthodes à directions de recherches linéaires génèrent des suites $\{x_k\}_{k=1,2,\dots}$ de la manière suivante. On démarre par $x_1 \in \mathbb{R}^n$. A l'itération k , si on a $x_k \in \mathbb{R}^n$, le successeur x_{k+1} de x_k est donné par la relation suivante

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \quad (4.3)$$

où $d_k \in \mathbb{R}^n$ est une direction de recherche et $\alpha_k \in \mathbb{R}^+$ est le pas de recherche obtenu par une recherche linéaire exacte ou inexacte. Dans le cas d'une recherche linéaire exacte α_k vérifie

$$f(x_k + \alpha_k d_k) = \min_{\alpha > 0} f(x_k + \alpha d_k) \quad (4.4)$$

Notons

$$g_k = \nabla f(x_k) = Qx_k - b \quad (4.5)$$

Théorème 4.1.2 Soit Q une matrice (n, n) symétrique et définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x$. Considérons le problème (PQSC)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x \right\} \quad (PQSC)$$

Supposons qu'à l'itération k on a une direction d_k de descente, c'est à dire que d_k vérifie

$$g_k^T d_k = (Qx_k - b)^T d_k < 0 \quad (4.6)$$

soit $\alpha_k > 0$ obtenue par une recherche linéaire exacte c'est à dire que α_k vérifie

$$f(x_k + \alpha_k d_k) = \min_{\alpha > 0} f(x_k + \alpha d_k)$$

Alors

$$\alpha_k = -\frac{g_k^T d_k}{d_k^T Q d_k} \quad (4.7)$$

4.2 Méthode des directions conjuguées

Définition 4.2.1 Soit Q une matrice (n, n) symétrique. Les directions $d_0, d_1, \dots, d_k$ sont dites Q conjuguées si on a

$$d_i^T Q d_j = 0, \quad 0 \leq i, j \leq k \quad (4.8)$$

Théorème 4.2.1 Soit Q une matrice (n, n) symétrique et définie positive. Si les directions $d_0, d_1, \dots, d_k$, avec $k \leq n-1$, sont non nuls et Q conjuguées, alors ils sont linéairement indépendants.

4.2.1 L'Algorithme des directions conjuguées

Soit Q une matrice (n, n) symétrique et définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. Considérons le problème de minimisation quadratique sans contraintes, (PQSC), suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x \right\}$$

Algorithme des directions conjuguées

► Initialisation

On se donne $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque et $(d_0, d_1, \dots, d_{n-1})$, Q conjuguées. Poser $k = 0$ et allez à **Etape principale**

► Etape principale

Pour $k \geq 0$

Calculez

$$g_k = \nabla f(x_k) = Q x_k - b$$

Si $g_k = 0$. Stop.

Sinon calculez

$$\alpha_k = -\frac{g_k^T d_k}{d_k^T Q d_k}$$

et

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

Poser $k = k + 1$ et allez à **Etape principale**.

Théorème 4.2.2 Partant d'un point initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque, l'algorithme des directions conjuguées précédent converge vers la solution optimale unique $\hat{x}$ du problème

4.3. MÉTHODE DU GRATIENT CONJUGUÉ. CAS QUADRATIQUE

(PQSC) dans n iterations, c'est à dire qu'on a

$$x_n = \hat{x} \text{ et } Qx_n = Q\hat{x} = b \quad (4.9)$$

Remarque 4.2.1 Si on démarre du point x_1 , alors la solution optimale est atteinte au point x_{n+1} , c'est à dire qu'on aura

$$\hat{x} = x_{n+1}$$

Théorème 4.2.3 Soit Q une matrice (n, n) symétrique et définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x$. Considérons la suite $\{x_k\}_{k=1,2,\dots}$ de la manière suivante. On démarre par $x_1 \in \mathbb{R}^n$. A l'itération k , Le successeur x_{k+1} de x_k est donné par la relation suivante

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

où $d_k \in \mathbb{R}^n$ est une direction de recherche et $\alpha_k \in \mathbb{R}^+$ est le pas de recherche obtenu par une recherche linéaire exacte, α_k vérifie

$$f(x_k + \alpha_k d_k) = \min_{\alpha > 0} f(x_k + \alpha d_k) \quad (4.10)$$

Notons

$$g_{k+1} = \nabla f(x_{k+1}) = Qx_{k+1} - b \quad (4.11)$$

Alors

$$g_{k+1} = g_k + \alpha_k Qd_k \quad (4.12)$$

et

$$g_{k+1} d_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.13)$$

Théorème 4.2.4 Dans la méthode des direction conjuguées, on a

$$g_{k+1}^T d_i = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad i = 0, \dots, k \quad (4.14)$$

4.3 Méthode du gradient conjugué. Cas quadratique

Soit Q une matrice (n, n) , symétrique et définie positive. On considère dans ce paragraphe le problème (PQSC) suivant

$$\min \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} = \min \left\{ \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x : x \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (\text{PQSC})$$

4.3.1 Introduction

Dans la méthode des directions conjuguées, les directions $d_0, \dots, d_{n-1}$ sont données à l'avance.

Dans la méthode du gradient conjugué, On démarre d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $d_0 = -g_0 = -\nabla f(x_0) = Qx_0 - b$. Les directions d_k , $k = 1, \dots, n-1$ sont calculées à chaque itération.

A l'itération k

$$d_k = -g_k + \beta_{k-1}d_{k-1}$$

β_{k-1} est obtenu de sorte que d_k soit Q conjugué avec les autres vecteurs d_i , $i = 0, \dots, k-1$. En d'autres termes on doit avoir

$$d_k^T Q d_i = 0 \quad i = 0, \dots, k-1. \quad (4.15)$$

Dans l'appellation gradient conjugué, on trouve les deux mots : gradient et conjugué.

a) Le mot gradient est utilisé car d_k est calculée à partir du gradient au point x_k .

b) Le mot conjugué est aussi justifié, car et comme on le verra plus loin, les directions $\{d_k\}_{k=0}^{n-1}$ sont Q conjugués.

4.3.2 Algorithme du gradient conjugué. Cas quadratique

Principe de l'Algorithme

On démarre d'un point quelconque $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Calculez $d_0 = -g_0 = b - Qx_0$, $\alpha_0 = -\frac{g_0^T d_0}{d_0^T Q d_0}$

Supposons qu'à l'itération k on ait : x_k et d_k . Ceci nous permettra de calculer

$$g_k = Qx_k - b, \quad \alpha_k = -\frac{g_k^T d_k}{d_k^T Q d_k}, \quad x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \quad g_{k+1} = Qx_{k+1} - b, \quad d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k \quad (4.16)$$

β_k est choisi de sorte que

$$d_{k+1}^T Q d_k = 0 \quad (4.17)$$

Puisque $d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k$, alors (4.17) donne

$$(-g_{k+1} + \beta_k d_k)^T Q d_k = 0$$

ou encore

$$\beta_k d_k^T Q d_k = g_{k+1}^T Q d_k \quad (4.18)$$

et finalement

$$\beta_k = \frac{g_{k+1}^T Q d_k}{d_k^T Q d_k} \quad (4.19)$$

Algorithme

Algorithme du gradient conjugué. Cas quadratique

1. choisir $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
2. Calculez $g_0 = Qx_0 - b$. Si $g_0 = 0$ stop. Sinon poser $d_0 = -g_0$. Poser $k = 0$
3. Calculez $\alpha_k = -\frac{g_k^T d_k}{d_k^T Q d_k}$.
4. Calculez $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$.
5. Calculez $g_{k+1} = Qx_{k+1} - b$. si $g_{k+1} = 0$ stop.
6. Calculez $\beta_k = \frac{g_{k+1}^T Q d_k}{d_k^T Q d_k}$.
7. Calculez $d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k$.
8. Poser $k = k + 1$ et allez à 3 .

4.3.3 Propriétés du gradient conjugué quadratique

La propriété fondamentale du gradient conjugué cas quadratique est que les directions $\{d_k\}_{k=0}^{n-1}$ sont Q conjugués. Ces directions vérifient comme on l'a vu dans l'algorithme

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k,$$

avec

$$\beta_k = \frac{g_{k+1}^T Q d_k}{d_k^T Q d_k}$$

D'après le théorème 4.2.2, l'algorithme du gradient conjugué, version quadratique converge vers la solution optimale en n itérations. Résumons ces deux résultats dans les deux théorèmes suivants :

Théorème 4.3.1 *Les directions $\{d_0, d_1, \dots, d_{n-1}\}$ engendrées par l'algorithme du gradient conjugué quadratique sont Q conjuguées.*

Théorème 4.3.2 *Soit Q une matrice (n, n) , symétrique et définie positive et (PQSC) le problème de minimisation sans contraintes quadratique suivant*

$$\min \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} = \min \left\{ \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x : x \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (\text{PQSC})$$

4.4. MÉTHODE DU GRADIENT CONJUGUÉ. CAS NON QUADRATIQUE

Démarrant d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque, considérons la suite $\{x_k\}$ générée par l'algorithme du gradient conjugué quadratique définie par

$$g_k = \nabla f(x_k) = Qx_k - b, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\beta_k = \frac{g_{k+1}^T Q d_k}{d_k^T Q d_k}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.20)$$

$$d_k = \begin{cases} -g_0 & \text{si } k = 0 \\ -g_k + \beta_{k-1} d_{k-1} & \text{si } k \geq 1 \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\alpha_k = -\frac{g_k^T d_k}{d_k^T Q d_k} \quad (4.22)$$

et

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \quad (4.23)$$

Alors la suite $\{x_k\}$ converge en n itérations vers la solution optimale $\hat{x}$ du problème (PQSC), c'est à dire que x_n vérifie $x_n = \hat{x}$ et

$$Q\hat{x} = Qx_n = b \quad (4.24)$$

4.4 Méthode du gradient conjugué. Cas non quadratique

4.4.1 Introduction et différentes formes du gradient conjugué non quadratique

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ non quadratique. On cherche à résoudre le problème non quadratique sans contraintes (PNQSC) suivant :

$$\min \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} \quad (4.25)$$

Parmi les plus anciennes méthodes utilisées pour résoudre les problèmes du type (PNQSC), on peut citer la méthode du Gradient conjugué. Cette méthode est surtout utilisée pour les problèmes de grande taille.

Cette méthode a été découverte en 1952 par Hestenes et Steifel ([28]), pour la minimisation des fonctions quadratiques strictement convexes.

Plusieurs mathématiciens ont étendu cette méthode pour le cas non quadratique. Ceci a été réalisé pour la première fois, en 1964 par Fletcher et Reeves ([26]) (méthode de

4.4. MÉTHODE DU GRADIENT CONJUGUÉ. CAS NON QUADRATIQUE

Fletcher-Reeves) puis en 1969 par Polak, Ribière ([41]) et Poyak ([40]) (*méthode de Polak-Ribière-Poyak*). D'autres variantes ont été étudiées plus tard ([24],[57],[27]) Une autre variante a été étudiée en 1987 par Fletcher ([25]) (*Méthode de la descente conjuguée*).

Toutes ces méthodes génèrent une suite $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \quad (4.26)$$

Le pas $\alpha_k \in \mathbb{R}$ est déterminé par une optimisation unidimensionnelle ou recherche linéaire exacte ou inexacte du type Armijo, Goldstein ou Wolfe.

Les directions d_k sont calculées de façon récurrente par les formules suivantes :

$$d_k = \begin{cases} -g_0 & \text{si } k = 0 \\ -g_k + \beta_{k-1} d_{k-1} & \text{si } k \geq 1 \end{cases} \quad (4.27)$$

avec $g_k = \nabla f(x_k)$ et $\beta_k \in \mathbb{R}$.

Les différentes valeurs attribuées à β_k définissent les différentes formes du gradient conjugué.

Si on note

$$y_{k-1} = g_k - g_{k-1}, \quad s_k = x_{k+1} - x_k \quad (4.28)$$

on obtient les variantes suivantes :

1952 ([28])- Gradient conjugué variante Hestenes - Stiefel(HS)

$$\beta_k^{HS} = \frac{g_{k+1}^T y_k}{d_k^T y_k} \quad (4.29)$$

1964 ([26])-Gradient conjugué variante Fletcher Reeves(FR)

$$\beta_k^{FR} = \frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2} \quad (4.30)$$

1969 ([41],[40])- Gradient conjugué variante Polak-Ribière-Polyak(PRP)

$$\beta_k^{PRP} = \frac{g_{k+1}^T y_k}{\|g_k\|^2} \quad (4.31)$$

1987 ([25])- Gradient conjugué variante descente conjuguée – Fletcher (CD)

$$\beta_k^{CD} = -\frac{\|g_k\|^2}{d_{k-1}^T g_{k-1}} \quad (4.32)$$

4.4. MÉTHODE DU GRADIENT CONJUGUÉ. CAS NON QUADRATIQUE

1991 ([36])- Gradient conjugué variante Liu - Storey(LS)

$$\beta_k^{LS} = -\frac{g_{k+1}^T y_k}{d_k^T g_k} \quad (4.33)$$

1999 ([11])- Gradient conjugué variante de Dai-Yuan(DY)

$$\beta_k^{DY} = \frac{\|g_k\|^2}{d_{k-1}^T y_{k-1}} \quad (4.34)$$

2005([27])- Gradient conjugué variante Hager-Zhang(HZ)

$$\beta_k^{HZ} = \left(y_k - 2d_k \frac{\|y_k\|^2}{d_k^T y_k} \right)^T \frac{g_{k+1}}{d_k^T y_k} \quad (4.35)$$

2012([42])- Gradient conjugué variante Rivaie-Mustafa-Ismail-Leong(RMIL)[60]

$$\beta_{k-1}^{RMIL} = \frac{g_k^T (g_k - g_{k-1})}{\|d_{k-1}\|^2} \quad (4.36)$$

Remarque 4.4.1 Dans le cas où f n'est pas quadratique on a

$$\beta_k^{HS} \neq \beta_k^{FR} \neq \beta_k^{PRP} \neq \beta_k^{CD} \neq \beta_k^{LS} \neq \beta_k^{DY} \neq \beta_k^{HZ} \neq \beta_k^{RMIL} \quad (4.37)$$

Par conséquent, en appliquant l'algorithme du gradient conjugué non quadratique, en utilisant les coefficients β_k figurant dans (4.37), on obtient des suites $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ différentes.

Que se passe t'il si f est quadratique strictement convexe et si α_k est obtenue par une recherche linéaire exacte. La réponse à cette question se trouve dans le théorème suivant.

Théorème 4.4.1 Si $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x$, avec Q symétrique définie positive, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$ et si α_k est obtenue par une recherche linéaire exacte. Notons

$$\beta_k = \frac{g_{k+1}^T Q d_k}{d_k^T Q d_k},$$

alors on a

$$\beta_k = \beta_k^{HS} = \beta_k^{FR} = \beta_k^{PRP} = \beta_k^{CD} = \beta_k^{LS} = \beta_k^{DY} = \beta_k^{HZ} = \beta_k^{RMIL} \quad (4.38)$$

et l'algorithme du gradient conjugué quadratique génère la même suite $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

4.4.2 Algorithme du gradient conjugué non quadratique

Introduction

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ non quadratique et (PNQSC) le problème de minimisation non quadratique sans contraintes suivant :

$$\min \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} \quad (\text{PNQSC})$$

Pour construire l'algorithme du gradient conjugué cas non quadratique, on peut s'inspirer de l'algorithme du gradient conjugué quadratique établi au chapitre précédent. Contrairement au cas quadratique, on n'a pas de matrice Q . Par conséquent on n'a pas de directions Q conjuguées. Comme dans le cas quadratique, l'algorithme du gradient conjugué cas non quadratique génère une suite $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

L'algorithme démarre d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque.

A l'itération k

Supposons qu'on ait le vecteur $x_k \in \mathbb{R}^n$ et la direction d_{k-1} . Ceci nous permet de calculer $\nabla f(x_k)$ au lieu $g_k = Qx_k - b$ dans le cas quadratique. Pour avoir x_{k+1} , on a besoin de calculer α_k et d_k .

Calcul de d_k :

$$d_k = -\nabla f(x_k) + \beta_{k-1} d_{k-1} \quad (4.39)$$

On a huit façons pour calculer β_{k-1}

$$\beta_{k-1}^{HS} = \frac{\nabla f(x_k)^T (\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1}))}{d_{k-1}^T (\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1}))}$$

$$\beta_{k-1}^{PR} = \frac{\nabla f(x_k)^T (\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1}))}{\|\nabla f(x_{k-1})\|^2}$$

$$\beta_{k-1}^{FR} = \frac{\|\nabla f(x_k)\|^2}{\|\nabla f(x_{k-1})\|^2}$$

$$\beta_{k-1}^{DY} = \frac{\|\nabla f(x_k)\|^2}{d_{k-1}^T (\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1}))}$$

$$\beta_{k-1}^{LS} = -\frac{\nabla f(x_k)^T (\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1}))}{d_{k-1}^T \nabla f(x_{k-1})}$$

4.4. MÉTHODE DU GRADIENT CONJUGUÉ. CAS NON QUADRATIQUE

$$\beta_{k-1}^{CD} = -\frac{\|\nabla f(x_k)\|^2}{d_{k-1}^T \nabla f(x_{k-1})}$$
$$\beta_{k-1}^{HZ} = \left((\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1})) - 2d_{k-1} \frac{\|\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1})\|^2}{d_{k-1}^T (\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1}))} \right)^T \frac{\nabla f(x_k)}{(\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1}))^T y_{k-1}}$$
$$\beta_{k-1}^{RMIL} = \frac{(\nabla f(x_k))^T (\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1}))}{\|d_{k-1}\|^2}$$

Calcul de α_k

Ayant obtenu d_k , rappelons que α_k vérifie

$$f(x_k + \alpha_k d_k) = \min \{f(x_k + \alpha d_k) : \alpha \in]0, +\infty[\}. \quad (4.40)$$

Dans le cas où $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b$, Q symétrique définie positive, α_k solution de (4.40), est donnée par la relation suivante

$$\alpha_k = -\frac{g_k^T d_k}{d_k^T Q d_k}. \quad (4.41)$$

Dans le cas où f n'est pas quadratique, α_k ne peut pas être calculée par la formule (4.41). On calcule dans ce cas α_k par d'autres méthodes. On utilise par exemple la méthode du nombre d'or ou la méthode de dichotomie. Comme on le verra plus loin, α_k peut être calculée par une recherche linéaire inexacte d'Armijo ou Goldstein ou Wolfe.

Algorithme du Gradient conjugué non quadratique

► Etape1

Choisir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque et $\varepsilon > 0$

► Etape2

Poser $k = 0$

Calculez $g_0 = \nabla f(x_0)$. Posez $d_0 = -g_0$

► Etape3

Calculez α_k en utilisant une recherche linéaire exacte ou inexacte d'Armijo ou de Goldstein ou de Wolfe ou de Wolfe Forte

Calculez $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$

► Etape4

Si $\|\nabla f(x_{k+1})\| < \varepsilon$, Stop, $x^* = x_{k+1}$. Sinon allez à Etape5

► Etape5

Calculez $g_{k+1} = \nabla f(x_{k+1})$

4.4. MÉTHODE DU GRADIENT CONJUGUÉ. CAS NON QUADRATIQUE

Calculez β_k par l'une des manières suivantes

$$\begin{aligned} \beta_k &= \beta_k^{HS} \text{ ou } \beta_k = \beta_k^{FR} \text{ ou } \beta_k = \beta_k^{PRP} \text{ ou } \beta_k = \beta_k^{CD} \\ \text{ou } \beta_k &= \beta_k^{LS} \text{ ou } \beta_k = \beta_k^{DY} \text{ ou } \beta_k = \beta_k^{HZ} \text{ ou } \beta_k = \beta_k^{RMIL} \end{aligned}$$

Calculez

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k$$

Posez $k = k + 1$ et allez à Etape3.

CHAPITRE 5

ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE DE LA MÉTHODE DU GRADIENT. CAS DES RECHERCHES LINÉAIRES INEXACTES D'ARMIJO

5.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre 3, que la méthode de la plus forte pente, malgré sa simplicité, présente l'inconvénient d'être très lente au voisinage des points stationnaires. Pour y remédier à cet inconvénient nous essayerons dans cette section, qui constitue l'une des parties originales de cette thèse, d'accélérer la convergence de la méthode du gradient. Pour cela nous appliquons à la suite générée par la méthode du gradient, l' ε -algorithme, version Florent Cordellier.

Nous appellerons le nouveau algorithme l'épsilon steepest descent version Cordellier. La recherche linéaire utilisée dans cette étude est la recherche linéaire inexacte d'Armijoo rencontrée au chapitre 2.

Une étude semblable à notre étude a été établie par Benzine et Djeghaba ([16]) où les deux auteurs ont utilisé une recherche linéaire exacte.

5.2 L'epsilon steepest descent version Wynn

Pour les notions concernant les méthodes d'accélération de la convergence, voir le livre de Brezinski ([8]). Etant donnée une suite $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, Wynn a considéré la suite $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\varepsilon_n = \frac{s_n s_{n+2} - (s_{n+1})^2}{s_{n+2} - 2s_{n+1} + s_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.1)$$

Remarque 5.2.1 Pour calculer la quantité ε_n , il suffit d'avoir les éléments : s_n, s_{n+1} et s_{n+2} de la suite $\{s_n\}$.

5.2.1 L'algorithme epsilon steepest descent version Wynn

► **Initialisation** : Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. L'algorithme commence par un point initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, les composantes de x_0 seront notées comme suit :

$$x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^i, \dots, x_0^n),$$

poser $k = 0$ et aller à l'étape principale.

► **Etape principale** : Supposons qu'à l'étape k on ait le point x_k ,

$$x_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^i, \dots, x_k^n),$$

si $\|\nabla f(x_k)\| = 0$ stop ; sinon poser

$$\begin{aligned} r_k &= x_k, \\ r_k &= (r_k^1, r_k^2, \dots, r_k^i, \dots, r_k^n), \end{aligned}$$

* Calculer par la méthode steepest descent les successeurs s_k et t_k de r_k , c'est à dire

$$s_k = (s_k^1, s_k^2, \dots, s_k^i, \dots, s_k^n),$$

$$t_k = (t_k^1, t_k^2, \dots, t_k^i, \dots, t_k^n),$$

$$s_k = r_k - \lambda_k \nabla f(r_k),$$

λ_k solution optimale de la recherche linéaire inexacte d'Armijo (voir Chapitre 2, relation 2.13), c'est à dire que λ_k vérifie la relation d'Armijo suivante

$$f(x_k - \lambda_k \nabla f(x_k)) \leq f(x_k) - \lambda_k \mu \|\nabla f(x_k)\|^2, \quad 0 < \mu < 1$$

$$t_k = s_k - \beta_k \nabla f(s_k),$$

β_k solution optimale de la recherche linéaire inexacte d'Armijo (voir Chapitre 2, relation 2.13), c'est à dire β_k vérifie :

$$f(x_k - \beta_k \nabla f(x_k)) \leq f(x_k) - \beta_k \mu \|\nabla f(x_k)\|^2, \quad 0 < \mu < 1$$

* Calculer

$$t_k^i - 2s_k^i + r_k^i; \quad i = 1, \dots, n$$

Si

$$t_k^i - 2s_k^i + r_k^i \neq 0; \quad i = 1, \dots, n$$

calculer

$$\varepsilon_2^k = \left(\varepsilon_2^{k,1}, \varepsilon_2^{k,2}, \dots, \varepsilon_2^{k,i}, \dots, \varepsilon_2^{k,n} \right),$$

avec

$$\varepsilon_2^{k,i} = \frac{r_k^i t_k^i - (s_k^i)^2}{t_k^i - 2s_k^i + r_k^i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Si $f(\varepsilon_2^k) < f(t_k)$ poser

$$x_k = \varepsilon_2^k.$$

Remplacer k par $k + 1$ et aller l'étape principale.

Si $f(\varepsilon_2^k) \geq f(t_k)$ ou si $t_k^{i_0} - 2s_k^{i_0} + r_k^{i_0} = 0; \quad i_0 \in \{1, \dots, n\}$, poser

$$x_k = t_k.$$

Remplacer k par $k + 1$ et aller à l'étape principale.

5.3 L'epsilon steepest descent algorithm version F. Cordellier

Etant donnée une suite $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, F. Cordellier ([10]) propose une autre formule pour l'epsilon algorithm. Les quantites ε_n peuvent être calculées de la façon suivante :

$$\varepsilon_n = S_{n+1} + \left[\frac{1}{S_{n+2} - S_{n+1}} - \frac{1}{S_{n+1} - S_n} \right]^{-1} \quad (5.2)$$

Les calculs numériques ont montré que l'epsilon algorithm avec la formule (5.2) est plus stable qu'avec la formule (5.1).

5.3.1 L'algorithme epsilon steepest descent version F. Cordellier.

► **Initialisation** : L'algorithme commence par un point initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, les composantes de x_0 seront notées comme suit :

$$x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^i, \dots, x_0^n),$$

poser $k = 0$ et aller à l'étape principale.

► **Etape principale** : Supposons qu'à l'étape k on ait le point x_k ,

$$x_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^i, \dots, x_k^n),$$

si $\|\nabla f(x_k)\| = 0$ stop ; sinon poser

$$\begin{aligned} r_k &= x_k, \\ r_k &= (r_k^1, r_k^2, \dots, r_k^i, \dots, r_k^n), \end{aligned}$$

* Calculer par la méthode de steepest descent les successeurs s_k et t_k de r_k , c'est à dire

$$\begin{aligned} s_k &= (s_k^1, s_k^2, \dots, s_k^i, \dots, s_k^n), \\ t_k &= (t_k^1, t_k^2, \dots, t_k^i, \dots, t_k^n), \\ s_k &= r_k - \lambda_k \nabla f(r_k), \end{aligned}$$

λ_k solution optimale de la recherche linéaire inexacte d'Armijoo (voir Chapitre2, relation 2.13), c'est à dire que λ_k vérifie la relation d'Armijo suivante

$$f(x_k - \lambda_k \nabla f(x_k)) \leq f(x_k) - \lambda_k \mu \|\nabla f(x_k)\|^2, \quad 0 < \mu < 1$$

$$t_k = s_k - \beta_k \nabla f(s_k),$$

β_k solution optimale de la recherche linéaire inexacte d'Armijoo (voir Chapitre2, relation), c'est à dire β_k vérifie :

$$f(x_k - \beta_k \nabla f(x_k)) \leq f(x_k) - \beta_k \mu \|\nabla f(x_k)\|^2, \quad 0 < \mu < 1$$

* Calculer

$$s_k^i - r_k^i ; t_k^i - s_k^i ; \frac{1}{t_k^i - s_k^i} - \frac{1}{s_k^i - r_k^i}, i = 1, \dots, n$$

Si $s_k^i - r_k^i \neq 0$, $t_k^i - s_k^i \neq 0$ et $\frac{1}{t_k^i - s_k^i} - \frac{1}{s_k^i - r_k^i} \neq 0$

Calculer

$$\varepsilon_2^{k,i} = s_k^i + \frac{1}{\frac{1}{t_k^i - s_k^i} - \frac{1}{s_k^i - r_k^i}}, i = 1, \dots, n$$

Si $f(\varepsilon_2^k) < f(t_k)$

Poser $x_k = \varepsilon_2^k$, remplacer k par $k + 1$ et aller à l'étape 1.

Si $f(\varepsilon_2^k) \geq f(t_k)$ ou $s_k^{i_0} - r_k^{i_0} = 0$ ou $t_k^{i_0} - s_k^{i_0} = 0$ ou $\frac{1}{t_k^{i_0} - s_k^{i_0}} - \frac{1}{s_k^{i_0} - r_k^{i_0}} = 0, i_0 \in \{1, \dots, n\}$

Poser $x_k = t_k$, remplacer k par $k + 1$ et aller à l'étape 1.

5.4 Convergence de l'epsilon steepest descent algorithme : cas des recherches linéaires inexactes *d'Armijo*

Théorème 5.4.1 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\nabla f(x)$ est continument Lipschitzien de constante G dans l'ensemble $\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_0)\}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque. Considérons l'algorithme de la méthode ε steepest descent avec la recherche linéaire inexacte *d'Armijo*. Soit $\{x_k\}$ une suite générée par cet algorithme. Alors ou bien il s'arrête après un nombre fini d'itérations en un point x_{k_0} tel que $\nabla f(x_{k_0}) = 0$, ou bien il génère une suite infinie $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\nabla f(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Preuve. Supposons que l'algorithme Armijo epsilon steepest descent génère une suite infinie $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Dans l'étape principale de l'algorithme, les vecteurs s_k et t_k sont obtenus en utilisant deux fois la méthode de la plus forte pente avec la recherche linéaire inexacte *d'Armijo*. Les vecteurs s_k et t_k sont les successeurs de x_k , et sont utilisés pour calculer x_{k+1} (voir Etape principale de l'algorithme). Notons que

$$s_k = x_k - \lambda_k \nabla f(x_k),$$

$\lambda_k = \frac{\bar{\alpha}}{2^t}$ ($\bar{\alpha} > 0$ est une constante définie par la recherche linéaire inexacte *d'Armijo*) vérifiant la condition *d'Armijo* suivante :

$$\varphi\left(\frac{\bar{\alpha}}{2^t}\right) \leq \hat{\varphi}\left(\frac{\bar{\alpha}}{2^t}\right) \quad (5.3)$$

avec

$$\varphi\left(\frac{\bar{\alpha}}{2^t}\right) = f\left(x_k - \frac{\bar{\alpha}}{2^t} \nabla f(x_k)\right), \quad (5.4)$$

et

$$\widehat{\varphi}\left(\frac{\overline{\alpha}}{2^t}\right) = f(x_k) - \frac{\overline{\alpha}}{2^t} c \nabla f(x_k)^t \nabla f(x_k), \quad (5.5)$$

$c \in]0, 1[$, $\overline{\alpha} > 0$, $t \in \mathbb{N}$, telle que l'inégalité (5.3) soit satisfaite. Prenant en considération les relations (5.3), (5.4) et (5.5), on obtient :

$$\begin{aligned} f(s_k) &= f\left[x_k - \frac{\overline{\alpha}}{2^t} \nabla f(x_k)\right] \\ &\leq f(x_k) - c \frac{\overline{\alpha}}{2^t} \|\nabla f(x_k)\|^2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

(5.6) implique

$$f(s_k) - f(x_k) \leq -c \frac{\overline{\alpha}}{2^t} \|\nabla f(x_k)\|^2. \quad (5.7)$$

D'un autre coté et en utilisant le théorème de la moyenne on obtient :

$$f(s_k) - f(x_k) = (s_k - x_k)^T \nabla f(\tilde{x}); \quad \tilde{x} = \lambda s_k + (1 - \lambda)x_k, \quad \lambda \in]0, 1[. \quad (5.8)$$

Dans la mesure où

$$s_k = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k), \quad \alpha_k = \frac{\overline{\alpha}}{2^t}, \quad (5.9)$$

alors

$$\begin{aligned} f(s_k) - f(x_k) &= -\alpha_k \nabla f(x_k)^t \cdot \nabla f(\tilde{x}) \\ &= -\alpha_k \nabla f(x_k)^t [\nabla f(x_k) - \nabla f(x_k) + \nabla f(\tilde{x})] \\ &= -\alpha_k \|\nabla f(x_k)\|^2 + \alpha_k \nabla f(x_k)^t [\nabla f(x_k) - \nabla f(\tilde{x})]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

$\tilde{x} = \lambda s_k + (1 - \lambda)x_k$, $\lambda \in]0, 1[$. Notons que la suite $\{f(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$, est décroissante, donc

$$x_k \in \delta(x_0), \quad k = 0, 1, \dots$$

Maintenant et en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz inequality et le fait que le gradient de f est Lipschitzien de constante K , on a :

$$\begin{aligned} f(s_k) - f(x_k) &\leq -\alpha_k \|\nabla f(x_k)\|^2 + \alpha_k \|\nabla f(x_k)\| \|\nabla f(x_k) - \nabla f(\tilde{x})\| \\ &\leq -\alpha_k \|\nabla f(x_k)\|^2 + \alpha_k \|\nabla f(x_k)\| K \|x_k - \tilde{x}\| \end{aligned} \quad (5.11)$$

Notons que $\tilde{x} = \lambda s_k + (1 - \lambda)x_k$, $\lambda \in]0, 1[$, alors

$$\|x_k - \tilde{x}\| = \|(1 - \lambda)(x_k - x_s)\| \leq |(1 - \lambda)| \|x_k - x_s\| < \|x_k - x_s\|. \quad (5.12)$$

(5.11) et (5.12) impliquent

$$f(s_k) - f(x_k) \leq -\alpha_k \|\nabla f(x_k)\|^2 + \alpha_k \|\nabla f(x_k)\| K \|x_s - x_k\|$$

Remarquons que $x_s - x_k = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) - x_k = -\alpha_k \nabla f(x_k)$, $\alpha_k = \frac{\bar{\alpha}}{2^t}$, alors on a

$$f(s_k) - f(x_k) \leq -\alpha_k \|\nabla f(x_k)\|^2 + \alpha_k \|\nabla f(x_k)\| K \alpha_k \|\nabla f(x_k)\|. \quad (5.13)$$

Par conséquent, on obtient :

$$f(s_k) - f(x_k) \leq -\frac{\bar{\alpha}}{2^t} \|\nabla f(x_k)\|^2 \left[1 - K \frac{\bar{\alpha}}{2^t} \right]. \quad (5.14)$$

Maintenant choisissons $t > 0$, le plus petit entier tel que l'inégalité suivante soit vérifiée (voir l'algorithme d'Armijo, Chapitre 2)

$$2^t \geq \frac{K\bar{\alpha}}{1-c} \quad (5.15)$$

(5.15) implique

$$1 - K \frac{\bar{\alpha}}{2^t} \geq c. \quad (5.16)$$

donc

$$1 - K \frac{\bar{\alpha}}{2^{t-1}} < c. \quad (5.17)$$

(5.16) implique

$$-\frac{\bar{\alpha}}{2^t} \|\nabla f(x_k)\|^2 \left[1 - K \frac{\bar{\alpha}}{2^t} \right] \leq -\frac{\bar{\alpha}}{2^t} c \|\nabla f(x_k)\|^2, \quad c \in]0, 1[, \quad (5.18)$$

et (5.17) donne

$$-K \frac{\bar{\alpha}}{2^{t-1}} < c - 1 \Rightarrow K \frac{\bar{\alpha}}{2^{t-1}} > 1 - c.$$

par conséquent

$$-\frac{\bar{\alpha}}{2^t} c < -\frac{c(1-c)}{2K}. \quad (5.19)$$

Notons que le choix de $t > 0$ satisfaisant (5.15) implique que l'inégalité (5.7) est vraie. Par conséquent et prenant en considération les relations (5.14), (5.16), (5.17), (5.18), (5.19), on obtient :

$$f(s_k) - f(x_k) \leq -\frac{c(1-c)}{2K} \|\nabla f(x_k)\|^2. \quad (5.20)$$

Notons $G = -\frac{c(1-c)}{2K}$. Il est clair que $G < 0$ et (5.20) donne

$$f(s_k) - f(x_k) \leq G \|\nabla f(x_k)\|^2. \quad (5.21)$$

Considérons maintenant t_k le successeur de s_k , $t_k = s_k - \beta_k \nabla f(s_k)$. Faisant de même avec t_k , on obtient

$$f(t_k) - f(s_k) \leq G \|\nabla f(s_k)\|^2. \quad (5.22)$$

Nous allons montrer maintenant que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0.$$

En effet. Considerons

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f(\varepsilon_2^k) - f(t_k) + f(t_k) - f(s_k) + f(s_k) - f(x_k)$$

Notons que

$$f(\varepsilon_2^k) - f(t_k) < 0 \quad (\text{voir (4)}).$$

alors

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) < f(t_k) - f(s_k) + f(s_k) - f(x_k)$$

Les relations (5.21) et (5.22) impliquent

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) < G (\|\nabla f(x_k)\|^2 + \|\nabla f(s_k)\|^2). \quad (5.23)$$

Notons que $\{f(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante et par conséquent a une limite (autrement $\inf f(x) = -\infty$). Donc la relation (5.23) implique

$$\|\nabla f(x_k)\|^2 + \|\nabla f(s_k)\|^2 < \frac{1}{G} [f(x_{k+1}) - f(x_k)]. \quad (5.24)$$

Prenant $\overline{\lim}$ quand $k \rightarrow \infty$, on obtient

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (\|\nabla f(x_k)\|^2 + \|\nabla f(s_k)\|^2) \leq 0 \quad (5.25)$$

D'autre part, on a

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (\|\nabla f(x_k)\|^2 + \|\nabla f(s_k)\|^2) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (\|\nabla f(x_k)\|^2 + \|\nabla f(s_k)\|^2) \quad (5.26)$$

et

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} (\|\nabla f(x_k)\|^2 + \|\nabla f(s_k)\|^2) \quad (5.27)$$

Les inégalités (5.25), (5.26) and (5.27) impliquent

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} (\|\nabla f(x_k)\|^2 + \|\nabla f(s_k)\|^2) \\ &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (\|\nabla f(x_k)\|^2 + \|\nabla f(s_k)\|^2) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

qui implique

$$\begin{aligned} &\lim_{k \rightarrow \infty} (\|\nabla f(x_k)\|^2 + \|\nabla f(s_k)\|^2) \\ &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (\|\nabla f(x_k)\|^2 + \|\nabla f(s_k)\|^2) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\|\nabla f(x_k)\|^2 + \|\nabla f(s_k)\|^2) = 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

Notons que

$$0 \leq \|\nabla f(x_k)\|^2 \leq \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|\nabla f(s_k)\|^2 \quad (5.30)$$

et

$$0 \leq \|\nabla f(s_k)\|^2 \leq \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|\nabla f(s_k)\|^2 \quad (5.31)$$

Finalement, the inégalités (5.29), (5.30) and (5.31) impliquent

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(x_k)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(s_k)\| = 0.$$

■

5.5 Résultats numériques et comparaisons

Dans cette section, on donne les résultats des tests numériques obtenus en implémentant l'Algorithme Armijo Epsilon Steepest Descent. Nos programmes sont écrits en Fortran et compilés dans une station de calcul Intel Pentium 4 , 2 GHz. Nous avons sélectionné 52 fonctions test de base utilisées dans l'optimisation sans contraintes de ([2] , [6]). Pour chaque fonction test nous avons effectué 20 expériences numériques en faisant varier le nombre de variables : $n = 2, 10, 30, 50, 70, 100, 300, 500, 700, 900, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000$. On expose dans l'annexe les résultats des tests numériques. Le critère d'arrêt est fixé à : $\|\nabla f(x_k)\| < 10^{-6}$.

Nous avons défini le critère de comparaison entre deux algorithmes : ALG1 et ALG2,

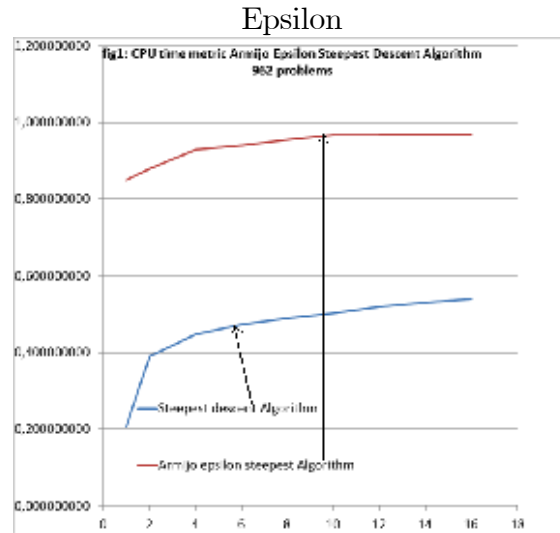
5.5. RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET COMPARAISONS

comme suit : Soient f_i^{ALG1} et f_i^{ALG2} les valeurs optimales obtenues par ALG1 et ALG2, pour les problèmes $i = 1, \dots, 962$, respectivement. Pour le problème i , nous considérons que ALG1 est plus performant que ALG2 si :

$$|f_i^{ALG1} - f_i^{ALG2}| < 10^{-3}$$

et le nombre d'itérations ou le CPU temps de ALG1 est plus petit que le nombre d'itérations ou le CPU temps de ALG2.

Dans l'ensemble des tests numériques nous comparons l'Algorithme Armijo Epsilon Steepest Descent à la méthode Steepest descent. On résume tout cela dans la Figure 1 dans laquelle on trouve : Dolan et Moré CPU performance profile de la méthode Armijo



Du point de vue graphique, le graphe de la méthode la plus performante se trouve au dessus de la méthode la moins performante.

CHAPITRE 6

ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE DE LA METHODE DU GRADIENT PAR UTILISATION DU GRADIENT CONJUGUÉ

6.1 Introduction

La méthode du gradient conjugué est considérée comme l'une des méthodes les plus importantes utilisées pour accélérer l'algorithme du gradient, et à cette fin, de nombreux algorithmes connexes ont été développés. Citons quelques travaux parmi les plus importants ([13], [14], [44], [7], [39], [46], [45], [47], [49], [52], [58], [38], [53], [35], [51], [54], [43], [29], [31], [33], [56], [37]).

Ce chapitre contient le deuxième résultat original de cette thèse. On exposera une nouvelle méthode qui accélère la convergence de la méthode du gradient (Méthode de la plus forte pente) en utilisant une nouvelle version du gradient conjugué et une recherche linéaire inexacte de Wolfe forte. On montrera que cet algorithme génère des directions de descente et converge globalement. Il est aussi très performant numériquement.

6.2 Description de la méthode

Cette méthode comme les autres méthodes du gradient conjugué génère des suites $\{x_k\}$ de la forme suivante :

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \quad (6.1)$$

Notons

$$g_k = \nabla f(x_k)$$

les directions d_k sont définies par la formule de récurrence suivante :

$$d_k = \begin{cases} -g_0 & \text{si } k = 0 \\ -g_k + \beta_k d_{k-1} & \text{si } k \geq 1 \end{cases} \quad (6.2)$$

Le pas $\alpha_k \in \mathbb{R}^+$ étant déterminé par une nouvelle recherche linéaire obtenue à partir de la recherche linéaire inexacte de Wolfe forte.

Le coefficient $\beta_k = \beta_k^{BRB}$ (Belloufi-Rahali-Benzine) est déterminé par la formule suivante :

$$\beta_k^{BRB} = \frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|d_k\|^2} \quad (6.3)$$

6.3 Une nouvelle recherche linéaire

6.3.1 Recherche linéaire inexacte de Wolfe forte

Le pas α_k obtenu par la recherche linéaire inexacte de Wolfe forte est définie par les deux relations suivantes :

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + \delta \alpha_k g_k^T d_k \quad (6.4)$$

$$\left| d_k^T g(x_k + \alpha_k d_k) \right| \leq -\sigma d_k^T g_k, \quad (6.5)$$

où $0 < \delta < \sigma < 1$ sont des constantes.

6.3.2 Modification de la recherche linéaire inexacte de Wolfe forte

Le pas α_k est accepté par la recherche linéaire inexacte de Wolfe forte modifiée si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$f(x_k + \alpha_k d_k) - f(x_k) \leq \delta \alpha_k g_k^T d_k \quad (6.6)$$

$$|g(x_k + \alpha_k d_k)^T d_k| \leq -\sigma g_k^T d_k \frac{\|d_k\|^2}{\|g_k\|^2} \quad (6.7)$$

où $0 < \delta < \sigma < 1$ sont des constantes

6.4 Le nouveau Algorithme CGBRB (Gradient Conjugué Belloufi-Rahali-Benzine)

Algorithme (BRB) :

► **Etape 0 :** $x_1 \in \mathbb{R}^n$ donné. Posez $d_1 = -g_1$, $k := 1$.

► **Etape1 :** Si $\|g_k\| = 0$ Alors stop. Sinon allez à Etape 2.

► **Etape 2 :** Posez $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ où d_k est définie à partir des relations (6.2), (6.3) et α_k vérifiant les conditions de Wolfe fortes modifiées (6.6) et (6.7).

► **Etape 3 :** Posez $k := k + 1$ et allez à Etape 1.

6.5 Propriété de descente et convergence globale

Le théorème qui suit montre que les directions d_k sont des directions de descente.

Théorème 6.5.1 *Si α_k est calculé satisfaisant les conditions de Wolfe fortes modifiées (6.6) et (6.7) avec $\sigma \in]0, \frac{1}{2}]$, Alors pour le nouveau gradient conjugué CGBRB on a pour tout k*

$$-\sum_{j=0}^{k-1} \sigma^j \leq \frac{g_k^T d_k}{\|g_k\|^2} \leq -2 + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma^j \quad (6.8)$$

et par conséquent on obtient la propriété de descente

$$g_k^T d_k < 0, \forall k \quad (6.9)$$

Preuve. On démontre ce théorème en procédant par récurrence. Pour $k = 1$, les équations (6.8) et (6.9) sont clairement vérifiées.

Supposons que (6.8) et (6.9) soient vraies pour $k \geq 1$.

De la définition (6.2) et (6.3) de d_{k+1} , on a

$$\frac{g_{k+1}^T d_{k+1}}{\|g_{k+1}\|^2} = -1 + \frac{g_{k+1}^T d_k}{\|d_k\|^2} \quad (6.10)$$

et par conséquent on obtient en utilisant (6.7) et (6.9) que

$$-1 + \sigma \frac{g_k^T d_k}{\|g_k\|^2} \leq \frac{g_{k+1}^T d_{k+1}}{\|g_{k+1}\|^2} \leq -1 - \sigma \frac{g_k^T d_k}{\|g_k\|^2} \quad (6.11)$$

Soit en utilisant la relation de récurrence (6.8), on obtient :

$$\begin{aligned} -\sum_{j=0}^k \sigma^j &= -1 - \sigma \sum_{j=0}^{k-1} \sigma^j \leq \frac{g_{k+1}^T d_{k+1}}{\|g_{k+1}\|^2} \\ &\leq -1 + \sigma \sum_{j=0}^{k-1} \sigma^j = -2 + \sum_{j=0}^k \sigma^j \end{aligned}$$

Par conséquent , (6.8) est aussi vraie pour $k + 1$.

Puisque

$$g_{k+1}^T d_{k+1} \leq \|g_{k+1}\|^2 \left(-2 + \sum_{j=0}^k \sigma^j \right) \quad (6.12)$$

et

$$\sum_{j=0}^k \sigma^j < \sum_{j=0}^{\infty} \sigma^j = \frac{1}{1 - \sigma} \quad (6.13)$$

où $\sigma \in]0, \frac{1}{2}]$, il s'ensuit de $1 - \sigma > \frac{1}{2}$ que $-2 + \sum_{j=0}^k \sigma^j < 0$. Donc, de (6.12), on obtient $g_{k+1}^T d_{k+1} < 0$. La preuve par récurrence est ainsi terminée. ■

Pour démontrer la convergence globale nous avons besoin de l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.1 :

Supposons que f soit continument différentiable et que l'ensemble

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(x_1)\}$$

soit borné.

Théorème 6.5.2 *Supposons que l'algorithme démarre d'un point x_1 et que l'hypothèse 3.1 soit vérifiée. Supposons que le nouveau algorithme soit défini à partir des relations (6.2) et (6.3). Supposons aussi que le pas α_k soit obtenu par la recherche linéaire de Wolfe forte modifiée (6.6) et (6.7) avec $\delta < \sigma < \frac{1}{2}$ et que*

$$\frac{1}{\|d_{k-1}\|^4} \leq \frac{1}{\|g_{k-1}\|^4} \quad (6.14)$$

Alors le nouveau algorithme CGBRB est globalement convergent i.e

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0 \quad (6.15)$$

Preuve. Nous avons démontré dans le théorème 6.5.1 que notre algorithme jouit de la propriété de decenete. Par conséquent et tenant compte de (6.7), (6.8), et (6.13) on a

$$|g_k^T d_{k-1}| \leq -\sigma g_{k-1}^T d_{k-1} \frac{\|d_{k-1}\|^2}{\|g_{k-1}\|^2} \leq \|d_{k-1}\|^2 \sigma \sum_{j=0}^{k-2} \sigma^j \quad (6.16)$$

$$= \|d_{k-1}\|^2 \sum_{j=0}^{k-1} \sigma^j \leq \frac{\sigma}{1-\sigma} \|d_{k-1}\|^2 \quad (6.17)$$

D'où en prenant en considération la définition de d_k et utilisant (6.3) et (6.16) on obtient que

$$\begin{aligned} \|d_k\|^2 &= \|g_k\|^2 - 2\beta_{k-1} g_k^T d_{k-1} + \beta_{k-1}^2 \|d_{k-1}\|^2 \\ &\leq \|g_k\|^2 + \frac{2\sigma}{1-\sigma} \beta_k \|d_{k-1}\|^2 + \beta_{k-1}^2 \|d_{k-1}\|^2 \\ &= \left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma} \right) \|g_k\|^2 + \frac{\|g_k\|^4}{\|d_{k-1}\|^4} \|d_{k-1}\|^2 \\ &\leq \left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma} \right) \|g_k\|^2 + \frac{\|g_k\|^4}{\|g_{k-1}\|^4} \|d_{k-1}\|^2 \end{aligned} \quad (6.18)$$

où on a utilisé le fait que

$$\frac{1}{\|d_{k-1}\|^4} \leq \frac{1}{\|g_{k-1}\|^4}$$

Si on applique cette relation plusieurs fois on a

$$\|d_k\|^2 \leq \left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma} \right) \|g_k\|^4 \sum_{j=1}^k \frac{1}{\|g_j\|^2} \quad (6.19)$$

Démontrons maintenant par l'absurde la relation (6.15). Supposons le contraire. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\|g_k\| \geq \varepsilon > 0 \quad (6.20)$$

pour k suffisamment grand. $\{g_k\}$ est bornée dans l'ensemble L , il s'ensuit en prenant en considération (6.19) que

$$\|d_k\|^2 \leq c_1 k \quad (6.21)$$

6.6. EXPÉRIENCES NUMÉRIQUES

où c_1 est une constante positive. Or d'après (6.8) et (6.13) on a

$$\cos \theta_k \geq \left(\frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \right) \frac{\|g_k\|}{\|d_k\|} \quad (6.22)$$

où θ_k est l'angle entre d_k et g_k . Puisque $\sigma < \frac{1}{2}$, donc en substituant (6.21) et (6.20) dans (6.22), on obtient

$$\sum_k \cos^2 \theta_k \geq \left(\frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \right)^2 \sum_k \frac{\|g_k\|^2}{\|d_k\|^2} \geq c_2 \sum_k \frac{1}{k} \quad (6.23)$$

où c_2 est une constante positive. Par conséquent la série $\sum_k \cos^2 \theta_k$ est divergente. Soit M le sup de $\|\nabla^2 f(x)\|$ dans l'ensemble L , alors

$$g_{k+1}^T d_k = (g_k + a_k \nabla^2 f(x))^T d_k \leq g_k^T d_k + M a_k \|d_k\|^2$$

Par conséquent en utilisant (6.7) et (6.14) on obtient :

$$a_k \geq -\frac{(1-\sigma)}{M \|d_k\|^2} g_k^T d_k \quad (6.24)$$

Soit en substituant a_k de (6.24) dans (6.6), on obtient

$$f_{k+1} \leq f_k - c_3 \|g_k\|^2 \cos^2 \theta_k,$$

où $c_3 = \frac{(1-\sigma)\delta}{M} > 0$. Puisque $f(x)$ est minorée, donc $\sum_k \|g_k\|^2 \cos^2 \theta_k$ converge, qui implique bien sur que $\sum_k \cos^2 \theta_k$ converge (voir (6.20)). Ceci contredit (6.23). La preuve est terminée. ■

6.6 Expériences numériques

Dans cette partie nous allons effectuer des tests numériques pour montrer l'efficacité et la performance du nouveau algorithme (**BRB**).

6.6.1 Principe :

Nous testons l'algorithme (**BRB**) en mettant en oeuvre pour résoudre les 750 problèmes de test de la collection CUTER établie dans [55]. Dans la recherche linéaire de Wolfe, les paramètres $\rho = 0.0001$, $\sigma = 0.9$. La tolérance est prise en considérant le critère

6.6. EXPÉRIENCES NUMÉRIQUES

d'arrêt de l'algorithme $\|g_k\|_\infty \leq 10^{-10}$.

6.6.2 Etapes :

Nous comparons **BRB** avec **Steepest Descent Method**, **CG_DESCENT**, et **PRP**.

Ces méthodes sous la forme de (6.1), uniquement différentes dans le choix de d_k .

6.6.3 Codes de programmation :

Tous les codes des procédures informatiques sont écrites en Fortran 77, et sont mises en œuvre sur PC avec Processeur Intel(R) Core(TM) i7-2670QM CPU @ 2.20 GHz 2.20 GHz, 6.00 GB de mémoire RAM.

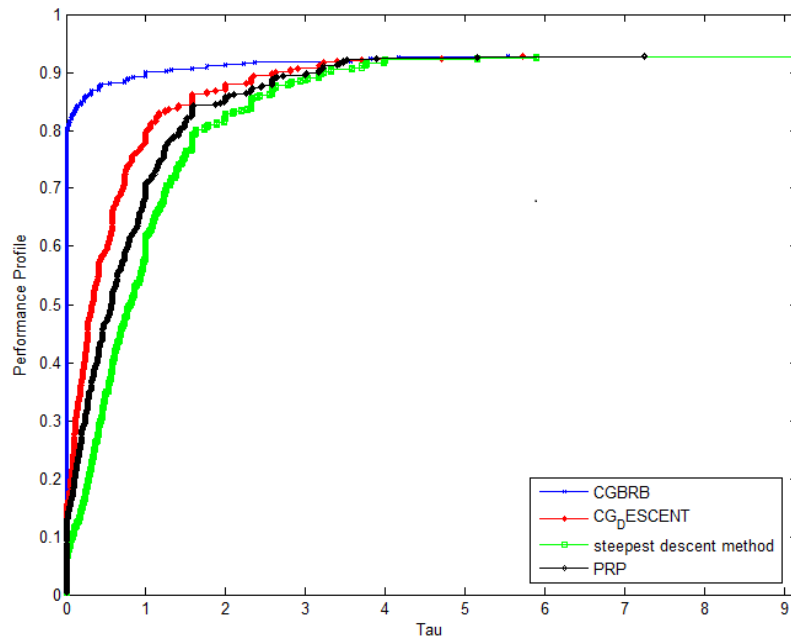
6.6.4 Résultats numériques :

Les résultats numériques détaillés, y compris le temps CPU en secondes et le nombre d'itérations, le nombre de fonctions et l'implémentation des évaluations gradient pour chaque méthode.

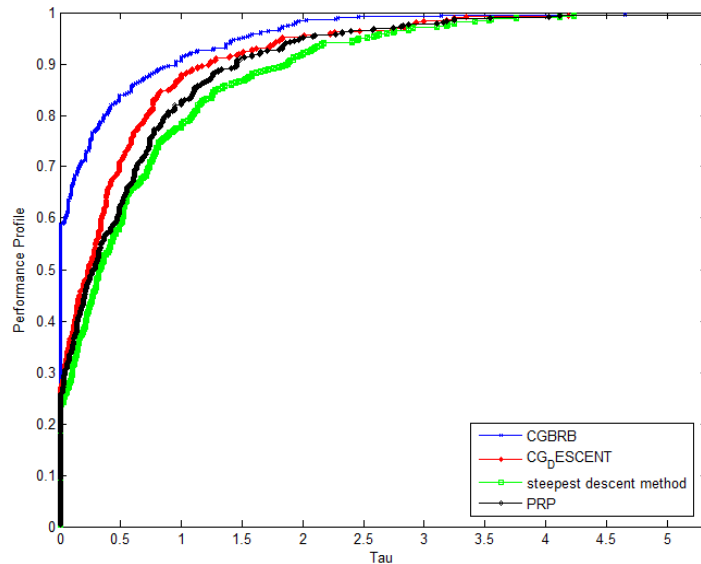
6.6.5 Profils de performance numérique :

Afin de démontrer l'efficacité de notre méthode, l'utilisation des profils de Dolan et Moré ([17]) présentera une multitude d'informations, y compris l'efficacité et la robustesse. Plus analytiquement, le côté gauche de la figure présente le pourcentage de test problème pour lequel une méthode se déroule le plus rapidement, le côté droit donne le pourcentage des problèmes de test qui sont résolus avec succès. La courbe supérieure est la méthode qui a résolu le plus de problèmes dans un temps qui se situait dans un facteur τ du meilleur moment.

Les profils de performance numérique de la méthode du gradient conjugué CGBRB, CGDescent, Steepest descent method et PRP basés sur le temps CPU.

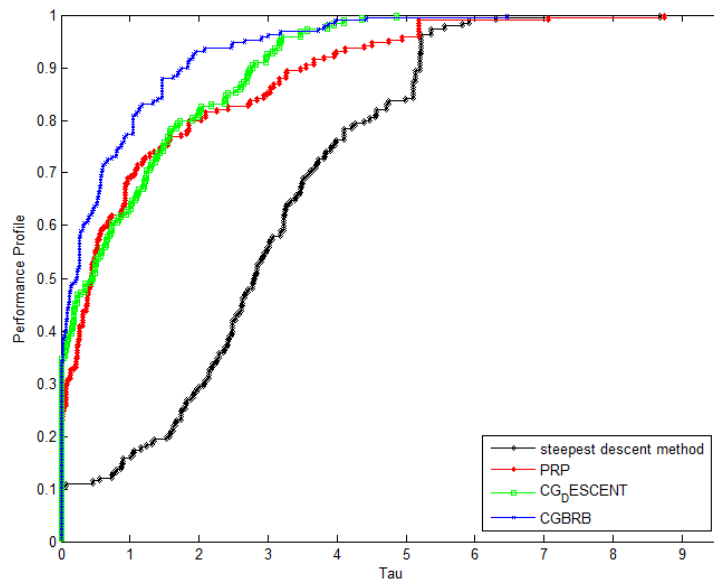


les profils de performance numérique de la méthode du gradient conjugué CGBRB, CGDescent, Steepest descent method et PRP basés sur le nombre d'itérations.

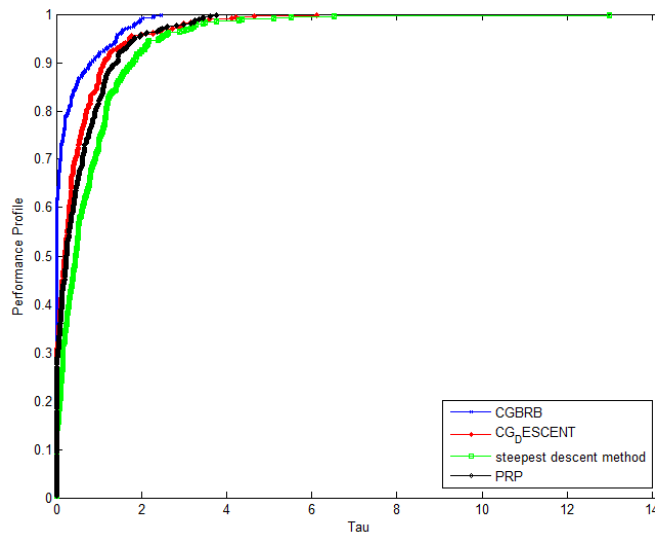


Les profils de performance numérique de la méthode du gradient conjugué CGBRB, CGDescent, Steepest descent method et PRP basés sur le nombre d'évaluations de la fonction.

6.6. EXPÉRIENCES NUMÉRIQUES



Les profils de performance numérique de la méthode du gradient conjugué CGBRB, CGDescent, Steepest descent method et PRP basés sur le nombre d'évaluations de gradient.



CHAPITRE 7

ANNEXE. RÉSULTATS DES TESTS NUMÉRIQUES

7.1 Le programme qui génère les profils de performance numérique

E.D. Dolan and J.J. Moré ([17]) a créé une nouvelle méthode pour comparer différents résultats et les a traduits dans ce programme :

```
*****function perf(T,logplot)*****  
  
%PERF Performace profiles  
  
% PERF(T,logplot)– produces a performace profile as described in Benchmarking  
optimization software with performance profiles, E.D. Dolan and J.J. Moré, Mathematical  
Programming, 91 (2002), 201–213.  
  
%Each column of the matrix T defines the performance data for a solver.  
%Failures on a given problem are represented by a NaN.  
%The optional argument logplot is used to produce a log (base 2) performance plot.  
%This function is based on the perl script of Liz Dolan. Jorge J. Moré, June 2004  
if (nargin < 2) logplot = 0; end  
colors = ['m' 'b' 'r' 'g' 'c' 'k' 'y'];  
lines = ['-' ':' '-' '-' '-' '-'];  
markers = ['x' '*' 's' 'd' 'v' '^' 'o'];  
[np,ns] = size(T);  
% Minimal performance per solver
```

7.1. LE PROGRAMME QUI GÉNÈRE LES PROFILS DE PERFORMANCE NUMÉRIQUE

```
minperf = min(T,[],2);
% Compute ratios and divide by smallest element in each row.
r = zeros(np,ns);
for p = 1 : np
r(p, :) = T(p, :)/minperf(p);
end
if (logplot) r = log2(r); end
max_ratio = max(max(r));
% Replace all NaN's with twice the max_ratio and sort.
r(find(isnan(r))) = 2*max_ratio;
r = sort(r);
% Plot stair graphs with markers.
clf;
for s = 1 : ns
[xs,ys] = stairs(r(:,s),[1 :np]/np);
option = ['-' colors(s) markers(s)];
plot(xs,ys,option,'MarkerSize',3);
hold on;
end
% Axis properties are set so that failures are not shown,
% but with the max_ratio data points shown. This highlights
% the "flatline" effect.
axis([ 0 1.1*max_ratio 0 1 ]);
title('Performance Profile based on the CPU time.')
%title('Performance Profile based on the iteration number.')
legend('EPSILON STEEPEST','STEEPEST'),
xlabel('f')
ylabel('P(f)')
% Legends and title should be added.
*****
```

Remarque 7.1.1 *Les échecs sur un problème donné sont représentés par un NaN.*

7.2 Résultats numériques : Méthodes steepest descent et epsilon steepest descent

7.2.1 Codage

NE=infini=NaN= Les échecs sur un problème donné

EPSILON STEEPEST					STEEPEST				
A Quadratic Function QF2									
Nbre de variables	Nbre d'itérations	Temps cpu en secondes	Valeur de la fonction au point optimal	Norme du gradient au point optimal	Nbre de variables	Nbre d'itérations	Temps cpu en secondes	Valeur de la fonction au point optimal	Norme du gradient au point optimal
2	4	0.00	-1.0561728852444	6.888791671047173E-009	2	16	0.002	-1.05617288524444	7.326639511684169E-007
10	35	0.00	-1.01220217172410	5.731838189453632E-007	10	61	0.016	-1.01220217172403	8.946070938475184E-007
30	100	0.00	-1.00413251080176	8.877178043736005E-007	30	106	0.032	-1.00413251080178	7.402238495233275E-007
50	240	0.140	-1.00248762338396	9.712837689847198E-007	50	362	0.016	-1.00248762338390	8.734988094586571E-007
70	268	0.608	-1.00177938186613	8.692419881190264E-007	70	202	0.032	-1.00177938186609	9.533601221248271E-007
100	395	1.404	-1.00124689052321	9.759478636023337E-007	100	712	0.218	-1.00124689052315	9.934164885880069E-007
300	1223	14.96	-1.00041632002186	9.980370549775825E-007	300	1148	0.220	-1.00041632002179	9.554533494908250E-007
500	2004	25.43	-1.00024987512482	8.185612709253867E-007	500	1570	0.452	-1.00024987512472	9.821917275145719E-007
Almost Perturbed Quadratic									
2	4	0,00001	2.224129826717436E-016	3.547532758321107E-008	2	6	0,00001	1.245890244864035E-014	2.940344015922859E-007
10	20	0,00001	1.666098512662049E-014	4.906326053099791E-007	10	49	0,00001	9.826490489530398E-014	8.089169967381303E-007
30	59	0,00001	3.141896617143234E-014	9.814017611361084E-007	30	122	0,015	8.582936513763078E-014	6.545984443415526E-007
50	291	0,10	4.739477035902637E-015	9.736965760433484E-007	50	314	0,11	1.406835044963338E-013	9.171573107588314E-007
70	221	0,06	6.200347484239281E-014	9.248294861068940E-007	70	167	0,031	1.703411046093634E-013	8.645494316585266E-007
100	321	0,20	5.427092444100646E-014	9.386926074550244E-007	100	625	0,156	1.492768166446220E-013	8.999698351980808E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

300	1163	2,57	1.425362637258966E-015	9.897618430778237E-007	300	907	0,265	1.943577609792225E-013	9.253326582093125E-007
500	1397	5,85	5.819465722214506E-014	9.123225993476374E-007	500	1493	0,686	1.634451285308514E-013	8.193363084407240E-007
700	1425	7,31	5.875326898823837E-014	9.618755145159658E-007	700	3661	2,340	1.980720909034917E-013	9.929180663480422E-007
900	3075	48,85	2.873603080347848E-014	9.814586264749897E-007	900	5788	14,00	1.610414122228595E-013	9.814176713350857E-007
1000	2083	23,50	6.646774497901688E-014	9.922903098765771E-007	1000	1946	1,76	2.400532449959703E-013	9.899282981418331E-007
2000	6556	263,47	6.033735763411228E-014	9.883155826965771E-007	2000	6105	8,93	2.370514348977402E-013	9.957444702754685E-007
3000	4391	260,45	6.850630816495968E-008	9.751688434522550E-004	3000	15082	96,20	1.889445897763480E-013	9.992749048949576E-007
5000	2463	180,134	7.355071984064274E-004	9.886953618846797E-002	5000	19453	131,99	2.171240137451634E-013	9.903596692904938E-007
7000	3503	454,57	6.826121348234152E-004	9.975431853925186E-002	7000	10000	600,01	9.975725960092963E-004	9.442121545625219E-002
9000	2687	390,86	7.371760670690111E-004	9.985749706481360E-002	9000	10000	400,34	2.317604885747500E-003	9.949103704777092E-002
10000	4977	1132	7.037669591183124E-004	9.956434454407506E-002	10000	10000	1200	2.195234774371244E-003	9.980495623641539E-002
ARWHEAD (CUTE)									
2	5	0,00001	0.000000000000000	4.478062305715003E-008	2	22	0,00100	3.663735981263017E-014	6.608193373897279E-007
10	9	0,00001	0.000000000000000	2.876276666486212E-011	10	19	0,00001	1.099120794378905E-014	8.717137857599011E-007
30	5	0,00001	0.000000000000000	4.371954087666006E-014	30	70	0,00	1.931788062847772E-014	9.530021167134427E-007
50	8	0,015	0.000000000000000	7.633001018586240E-012	50	10000	5,53	2.720046410331634E-014	1.079221552544622E-006
70	8	0,015	0.000000000000000	2.298766466634072E-010	70	46	0,00001	1.532107773982716E-014	8.450771463329429E-007
100	19	0,00001	2.198241588757810E-014	6.407603576055376E-007	100	10000	8,533	7.693845560652335E-014	2.115873691149626E-006

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

300	7	0.015	0.00000000000000	1.601635555441754E-008	300	1000 0	6.169	7.635003740347202E-013	6.169576518864179E-006
500	14	0.062	0.00000000000000	2.151989313418596E-010	500	1000 0	34.479	4.432010314303625E-013	7.993691933962454E-006
700	7	0.10	0.00000000000000	1.696989094199941E-008	700	1000 0	45.115	5.044298312384399E-012	2.190416382478732E-005
900	6	0.09	0.00000000000000	1.408520050472767E-010	900	1000 0	54.974	9.082623542155943E-012	2.595883811585472E-005
1000	7	0.10	0.00000000000000	3.559345009600059E-007	1000	1000 0	69.810	1.885491762720903E-012	2.253345714855412E-005
2000	9	0.29	0.00000000000000	8.444541717468205E-009	2000	1000 2	132.63	6.436073896054495E-012	2.689147032762523E-005
3000	7	0.45	0.00000000000000	3.151726957371101E-007	3000	5000	57.299	2.600385462514510E-010	1.170848157682605E-004
5000	11	1.70	0.00000000000000	2.450173124746935E-008	5000	5000	87.157	5.500054856000247E-010	1.795383729159410E-004
6000	11	1.85	0.00000000000000	1.636929290159129E-008	6000	5000	55.723	8.644975846294756E-010	2.856647218683277E-004
7000	10	1.90	0.00000000000000	3.398507731133270E-008	7000	5000	66.160	1.452452691452777E-008	1.171651730382679E-003
8000	6	1.17	0.00000000000000	1.047946816144749E-007	8000	5000	243.75	3.845331830731880E-010	1.681187442377025E-004
9000	9	2.04	0.00000000000000	8.421934498201547E-008	9000	5000	190.05	1.168934948836409E-009	1.168934948836409E-009
10000	5	1.31	0.00000000000000	5.738535802127390E-008	10000	5000	94.677	6.775013550175402E-009	4.861514131519173E-004
BDQRTIC (CUTE)									
2	Non exec				2	inex ec			
10	19	0,00001	18.2811617535935	7.943187966460138E-007	10	99	0.0000 1	18.2811617535937	9.650312808431839E-007
30	32	0,00001	98.3765105711630	4.989291044644293E-007	30	201	0,032	98.3765105711632	9.441493216738420E-007
50	33	0,00001	178.488705210470	4.286537377803137E-007	50	2098	0,54	178.488705210470	2.691700907861152E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

70	27	0,031	258.600899849756	1.435953776824503E-007	70	2895	0,69	258.600899849756	9.864771094035105E-007
100	41	0,015	378.769191808684	9.058366200752432E-007	100	k>10 0000	1000		
300	37	0,031	1179.89113820153	4.243064279922000E-007	300	1414 4	9,37	1179.89113820153	9.972388178858921E-007
500	31	0,031	1981.01308459524	1.839705472204794E-004	500	9716	8,01	1981.01308477336	9.889867715849995E-004
700	35	0,10	2782.13503108995	7.887251412469397E-004	700	1862 3	21,35	2782.13503113643	9.943095707724264E-004
900	36	0,21	3583.25697738356	8.602410225110466E-004	900	9789	14,49	3583.25697759235	9.965999536145993E-004
1000	27	0,14	3983.81795058129	3.091036280117418E-004	1000	1923 7	30,42	3983.81795077265	9.977788780519482E-004
2000	37	0,40	7989.42768254425	7.879801736207122E-004	2000	4357 8	152,05	7989.42768271501	9.881367654135391E-004
3000	104	2,24	11995.0374145371	8.819804040820956E-004	3000	>100 000	1000	11995.0374224821	1.00000 E-003
4000	57	1,49	16000.6471464707	3.234311861115216E-004	4000	>100 000	1000	16000.6472634258	5.271144722128119E-002
5000	42	1,46	20006.2568784348	1.386374545420596E-005	5000	>100 000	1000	20006.2583990469	9.903265020874448E-002
6000	30	0,98	24011.8666104430	6.796674535443159E-004	6000	>100 000	1000	24011.8686477061	9.969197710499605E-002
7000	29	1,18	28017.4763423645	1.504937043279645E-004	7000	>100 000	1000	28017.4783248432	9.996328915006071E-002
8000	40	2,41	32023.0860743329	2.905217011324574E-004	8000	>100 000	1000	32023.0877745717	9.952798339034638E-002
9000	47	2,99	36028.6958062937	3.660443786633285E-004	9000	>100 000	1000	36028.6992569218	0.150219339431918
10000	37	2,76	40034.3055383653	7.036145019589477E-004	10000	>100 000	1000	40034.3603824406	0.998798807923365
Broyden Tridiagonal									
2	10	0,00001	8.930934477388670E-015	6.654307783097608E-007	2	15	0,016	8.339343879216042E-015	5.691615523872754E-007
10	45	0,015	1.476748958768583E-014	9.568887635603897E-007	10	49	0,016	1.502675576138545E-014	8.162322121041265E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

30	39	0,015	7.258742701265877E-015	5.385491349647097E-007	30	56	0,016	1.061850836026485E-014	6.199431998736244E-007
50	47	0,015	3.619158000172939E-015	3.619158000172939E-015	50	59	0,016	7.127579540567828E-007	1.296250096827345E-014
70	47	0,015	3.762073240633206E-015	6.889610463206518E-007	70	57	0,016	2.019251161455392E-014	9.041805614291913E-007
200	47	0,031	2.770501223853185E-015	7.355532898624370E-007	200	70	0,016	1.965074427638005E-014	7.531841075264777E-007
300	47	0,015	2.770501223853189E-015	7.355532898624373E-007	300	70	0,016	1.965074427638005E-014	7.531841075264777E-007
500	116	0,26	0.397067105721072	2.269648897686383E-004	500	70	0,031	1.965074427638005E-014	7.531841075264777E-007
Diagonal1 Function									
2	16	0,00001	1.61370563888017	4.839002562136673E-007	2	5	0,00001	1.61370563888011	8.138398809032221E-013
10	23	0,00001	47.0828305519349	5.266650363585089E-007	10	31	0,00001	-47.0828305519348	6.063407813807365E-007
30	60	0,015	-892.088971608040	9.389118671473191E-007	30	106	0,062	-892.088971608040	6.141924305296729E-007
50	91	0,090	-3088.40408887056	7.149797948777756E-007	50	>10000	1000	-3088.40408887056	1.468723461932205E-006
70	257	0,34	-6848.11347252330	2.759747635209520E-007	70	>10000	1000	-6848.11347252330	2.280102078235295E-006
100	688	2,6	-15706.7419580380	9.987101429628931E-007	100	>10000	1000	-15706.7419580380	1.066928250274977E-006
300	429	5,38	-189876.502800426	9.046565774642242E-006	300	>10000	1000	-189876.502800426	5.611861739404953E-005
500	693	14,10	-590630.430965871	9.482331769471715E-006	500	>10000	1000	-590630.430965871	1.983630436826263E-004
700	1254	40,82	-1239458.35488074	8.942462598644902E-006	700	>10000	1000	-1239458.35488073	2.479745740402140E-004
Diagonal2 Function									
2	3	0,00001	1.84657359028012	3.841895057130859E-007	2	7	0,00001	1.84657359028037	8.928366547794066E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

10	23	0,00001	5.62114562175484	8.807476178587245E-007	10	21	0,00001	5.62114562175303	8.200936118534867E-007
30	118	0,015	9.76270740602313	9.323734230686192E-007	30	42	0,016	9.76270740601974	9.084834775115729E-007
50	214	0,031	12.1173746557601	9.746067035312235E-007	50	67	0,016	12.1173746557411	4.068416558988809E-007
70	310	0,18	13.8151679719513	9.812270765661007E-007	70	71	0,032	13.8151679719224	7.597108545395998E-007
100	453	0,18	15.7413537012348	9.797769631348848E-007	100	81	0,032	15.7413537012144	9.490640400662280E-007
300	1373	1,70	22.4859172428288	9.931894154495834E-007	300	179	0,23	22.4859172427218	6.454093178770125E-007
500	1718	3,61	26.0368973862951	9.988622495739603E-006	500	311	0,70	26.0368973629073	3.002125322369321E-007
700	1188	2,34	26.0368996391113	9.984633633499050E-005	700	608	1,42	28.5191994474356	7.648678954863176E-007
900	2060	7,61	30.4474198883031	9.996869962662031E-005	900	628	1,79	30.4474158049470	8.581132136526659E-007
1000	2271	15,25	31.2746544307635	9.997758962611156E-005	1000	613	1,82	31.2746498976757	8.836303995104315E-007
2000	4285	35,03	36.9943204426686	9.997206204453436E-005	2000	1104	5,07	36.9943114460859	5.529533537465928E-007
3000	3295	38,53	40.5644298437948	9.992659158401767E-004	3000	1501	9,85	40.5632291887574	9.385076772833268E-007
4000	4192	66,75	43.1968217145950	9.993899391022936E-004	4000	2545	27,70	43.1952408894073	9.396694429834607E-007
5000	5044	72,96	45.2957902858673	9.995687554241667E-004	5000	2943	45,53	45.2938346322814	8.041407626762630E-007
6000	5861	84,83	47.0478268269435	9.996644185203327E-004	6000	4760	75,89	47.0455012677727	3.513977721773057E-007
7000	6649	93,17	48.5551567285224	9.998537418452948E-004	7000	4897	79,88	48.5524648226119	7.069244141337212E-007
8000	7413	123,39	49.8801282938670	9.999215230376475E-004	8000	5720	103,91	49.8770741766599	8.871040289891662E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

9000	8157	146,09	51.0636813339830	9.996918852583612E-004	9000	7257	7257	51.0602701476362	7.688125604192028E-007
10000	8881	165,75	52.1342040875789	9.999668753285361E-004	10000	6591	144,83	52.1304355853608	6.883742770041135E-007
Diagonal3 Function									
2	5	0,00001	1.68773481555767	3.741320762281673E-012	2	15	0,015	1.68773481555782	9.008494704340060E-007
10	10	0,00001	-21.2043056922191	8.699994437998347E-007	10	78	0,016	-21.2043056922188	9.352667840606875E-007
30	33	0,015	-344.846931775878	6.948672087380526E-007	30	61	0,016	-344.846931775878	5.467351537876768E-007
50	29	0,046	-1063.85536623023	1.816612468167557E-007	50	331	0,171	-1063.85536623023	9.528445168711830E-007
70	43	0,062	-2181.22520574895	9.958155031374566E-007	70	231	0,125	-2181.22520574895	2.586749278440340E-007
100	52	0,171	-4605.79502059965	1.642558063138785E-007	100	584	0,265	-4605.79502059964	8.240586308675439E-007
300	733	7,98	-43756.0195492455	9.753394071318184E-006	300	>100000	1000	-43756.0195492454	4.414304752015316E-005
500	427	9,34	-122899.754095427	9.376917297505604E-006	500	>100000	1000	-122899.754095419	1.767154575421152E-004
700	1391	49,87	-242041.517030436	8.684479754188952E-005	700	>100000	1000	-242041.517030433	1.608913678300540E-004
900	1448	53,49	-401182.310017318	9.604587693063032E-004	900	3271	21,90	-401182.310017395	9.765041293330393E-005
1000	951	72,36	-495752.474546336	9.987226031984498E-004	1000	>100000	1000	-495752.474560527	6.102227018586283E-004
Diagonal4 Function									
2	1	0,00001	1.481579387618213E-029	1.231497093089300E-014	2	629	0,046	3.247297839238368E-013	9.840920619142013E-007
10	1	0,00001	7.407896938091064E-029	2.753711214241061E-014	10	663	0,047	3.549332951045731E-013	9.727718570903046E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

30	1	0,00001	2.222369081427319E-028	4.769567732437703E-014	30	687	0,062	3.631280662213506E-013	9.890717184375521E-007
50	1	0,00001	3.703948469045532E-028	6.157485465446499E-014	50	699	0,078	3.534316471215060E-013	9.783780859845702E-007
70	1	0,00001	5.185527856663745E-028	7.285635055371551E-014	70	711	0,031	2.889555194650205E-013	8.870399458198245E-007
100	1	0,00001	7.407896938091064E-028	8.707999455349647E-014	100	718	0,031	3.010995990573101E-013	9.368264107768760E-007
300	1	0,00001	2.222369081427319E-027	1.508269748894770E-013	300	742	0,093	3.080677064747609E-013	9.538036240251599E-007
500	1	0,00001	3.703948469045532E-027	1.947167873019296E-013	500	754	0,14	2.998496939985890E-013	9.441330498961090E-007
700	1	0,00001	5.185527856663745E-027	2.303920097574107E-013	700	759	0,15	3.360685917483323E-013	9.674203988824579E-007
900	1	0,00001	6.667107244281958E-027	2.612399836604894E-013	900	766	0,21	3.151996305270955E-013	9.712693175766021E-007
1000	1	0,00001	7.407896938091064E-027	2.753711214241060E-013	1000	771	0,23	2.803695851350933E-013	8.861977754108423E-007
2000	1	0,00001	1.481579387618213E-026	3.894335746038591E-013	2000	783	0,53	3.274633113007629E-013	9.605699335604460E-007
3000	1	0,00001	2.222369081427319E-026	4.769567732437702E-013	3000	795	0,60	2.868510337794408E-013	9.017310363510432E-007
4000	1	0,00001	2.963158775236426E-026	5.507422428482121E-013	4000	800	0,70	3.062317784205543E-013	9.047938800211553E-007
5000	1	0,015	6.157485465446498E-013	3.703948469045532E-026	5000	807	0,90	2.791955247373997E-013	8.923249107599790E-007
6000	1	0,015	4.444738162854638E-026	6.745187373870489E-013	6000	807	1,01	3.350346296848797E-013	9.774929644940509E-007
7000	1	0,015	7.285635055371552E-013	7.285635055371552E-013	7000	812	1,26	3.129566829849028E-013	9.170587908169079E-007
8000	1	0,015	5.926317550472851E-026	7.788671492077183E-013	8000	812	1,41	3.576647805541764E-013	9.803770853617383E-007
9000	1	0,030	6.667107244281958E-026	8.261133642723182E-013	9000	819	1,76	2.934844055658152E-013	9.176990433262604E-007
10000	1	0,031	7.407896938091064E-026	8.707999455349647E-013	10000	819	1,73	3.260937839620243E-013	9.673397278228496E-007
DIXMAANA (CUTE)									

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

2	19	0,00001	1.000000000000021	9.106564506476226E-007	2	inex ecut	1000		
10	4	0,00001	1.000000000000007	5.602125736250609E-007	10	7	0,0000 1	1.000000000000003	3.465365616890359E-007
30	4	0,00001	1.000000000000022	9.728359490110297E-007	30	7	0,0000 1	1.000000000000009	6.065196400769417E-007
50	5	0,00001	1.000000000000002	2.919334945175344E-007	50	7	0,0000 1	1.000000000000014	7.735072621029752E-007
70	5	0,00001	1.000000000000003	3.486440445920723E-007	70	7	0,0000 1	1.000000000000020	9.251052568142636E-007
100	5	0,00001	1.000000000000004	4.164722139401771E-007	100	8	0,0000 1	1.000000000000000	6.962558585001708E-008
300	5	0,00001	1.000000000000011	7.203918041920919E-007	300	8	0,015	1.000000000000000	1.198739692667923E-007
500	5	0,00001	1.000000000000018	9.293393850160043E-007	500	8	0,016	1.000000000000000	1.547886117267673E-007
700	6	0,00001	1.000000000000010	6.022906321588623E-007	700	8	0,016	1.000000000000000	1.832682711778276E-007
900	6	0,00001	1.000000000000013	6.827466104596357E-007	900	8	0,016	1.000000000000000	2.076278052750342E-007
1000	6	0,00001	1.000000000000015	7.198159373184906E-007	1000	8	0,016	1.000000000000000	2.189909306987064E-007
2000	8	0,030	1.000000000000000	7.058730997970360E-007	2000	8	0,05	1.000000000000000	3.095292504096852E-007
3000	8	0,08	1.000000000000000	8.646301811185737E-007	3000	8	0,031	1.000000000000000	3.790747750480940E-007
4000	8	0,09	1.000000000000000	9.984469247458962E-007	4000	8	0,031	1.000000000000000	4.377838654016964E-007
5000	9	0,10	1.000000000000000	6.121202924892054E-007	5000	8	0,062	1.000000000000000	4.893935450503478E-007
6000	9	0,14	1.000000000000000	6.705788952088148E-007	6000	8	0,062	1.000000000000000	5.360926880265476E-007
7000	9	0,15	1.000000000000000	7.243329460402506E-007	7000	8	0,078	1.000000000000000	5.790961905278070E-007
8000	9	0,18	1.000000000000000	7.742927610579946E-007	8000	8	0,078	1.000000000000000	6.190345119738600E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

9000	9	0,20	1.000000000000000	8.212880627704368E-007	9000	8	0,094	1.000000000000000	6.565767702510480E-007
10000	9	0,21	1.000000000000000	8.657345113076473E-007	10000	8	0,10	1.000000000000000	6.921344399475946E-007
DIXMAANB (CUTE)									
2	19	0,00001	1.000000000000021	9.106564506476226E-007	2	inex ec	0,0000 1		
10	4	0,00001	1.000000000000007	5.602125736250609E-007	10		0,0000 1	1.000000000000003	3.465365616890359E-007
30	4	0,00001	1.000000000000022	9.728359490110297E-007	30	7	0,0000 1	1.000000000000009	6.065196400769417E-007
50	5	0,00001	1.000000000000002	2.919334945175344E-007	50	7	0,015	1.000000000000014	7.735072621029752E-007
70	5	0,00001	1.000000000000003	3.486440445920723E-007	70	7	0,015	1.000000000000020	9.251052568142636E-007
100	5	0,00001	1.000000000000004	4.164722139401771E-007	100	8	0,015	1.000000000000000	6.962558585001708E-008
300	5	0,00001	1.000000000000011	7.203918041920919E-007	300	8	0,015	1.000000000000000	1.198739692667923E-007
500	5	0,00001	1.000000000000018	9.293393850160043E-007	500	8	0,016	1.000000000000000	1.547886117267673E-007
700	6	0,00001	1.000000000000010	6.022906321588623E-007	700	8	0,016	1.000000000000000	1.832682711778276E-007
900	6	0,015	1.000000000000013	6.827466104596357E-007	900		0,02	1.000000000000000	2.076278052750342E-007
1000	6	0,015	1.000000000000015	7.198159373184906E-007	1000	8	0,04	1.000000000000000	2.189909306987064E-007
2000	8	0,046	1.000000000000000	7.058730997970360E-007	2000	8	0,063	1.000000000000000	3.095292504096852E-007
3000	8	0,060	1.000000000000000	8.646301811185737E-007	3000	8	0,063	1.000000000000000	3.790747750480940E-007
4000	8	0,061	1.000000000000000	9.984469247458962E-007	4000	8	0,063	1.000000000000000	4.377838654016964E-007
5000	9	0,10	1.000000000000000	6.121202924892054E-007	5000	8	0,12	1.000000000000000	4.893935450503478E-007
6000	9	0,12	1.000000000000000	6.705788952088148E-007	6000	8	0,14	1.000000000000000	5.360926880265476E-007
7000	9	0,14	1.000000000000000	7.243329460402506E-007	7000	8	0,17	1.000000000000000	5.790961905278070E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

8000	9	0,14	1.00000000000000	7.742927610579946E-007	8000	8	0,18	1.00000000000000	6.190345119738600E-007
9000	9	0,20	1.00000000000000	8.212880627704368E-007	9000	8	0,24	1.00000000000000	6.565767702510480E-007
10000	9	0,23	1.00000000000000	8.657345113076473E-007	10000	8	0,25	1.00000000000000	6.921344399475946E-007
DIXMAANC (CUTE)									
2	19	0,00001	1.000000000000021	9.106564506476226E-007	2	inexecutable	1000		
10	4	0,00001	1.000000000000007	5.602125736250609E-007	10	7	0,00001	1.000000000000003	3.465365616890359E-007
30	4	0,00001	1.000000000000022	9.728359490110297E-007	30	7	0,00001	1.000000000000009	6.065196400769417E-007
50	5	0,00001	1.000000000000002	2.919334945175344E-007	50	7	0,00001	1.000000000000014	7.735072621029752E-007
70	5	0,00001	1.000000000000003	3.486440445920723E-007	70	7	0,00001	1.000000000000020	9.251052568142636E-007
100	5	0,00001	1.000000000000004	4.164722139401771E-007	100	8	0,00001	1.000000000000000	6.962558585001708E-008
300	5	0,00001	1.000000000000011	7.203918041920919E-007	300	8	0,00001	1.000000000000000	1.198739692667923E-007
500	5	0,00001	1.000000000000018	9.293393850160043E-007	500	8	0,063	1.000000000000000	1.547886117267673E-007
700	6	0,015	1.000000000000010	6.022906321588623E-007	700	8	0,064	1.000000000000000	1.832682711778276E-007
900	6	0,031	1.000000000000013	6.827466104596357E-007	900	8	0,065	1.000000000000000	2.076278052750342E-007
1000	6	0,031	1.000000000000015	7.198159373184906E-007	1000	8	0,066	1.000000000000000	2.189909306987064E-007
2000	8	0,015	1.000000000000000	7.058730997970360E-007	2000	8	0,067	1.000000000000000	3.095292504096852E-007
3000	8	0,062	1.000000000000000	8.646301811185737E-007	3000	8	0,140	1.000000000000000	3.790747750480940E-007
4000	8	0,12	1.000000000000000	9.984469247458962E-007	4000	8	0,171	1.000000000000000	4.377838654016964E-007
5000	9	0,12	1.000000000000000	6.121202924892054E-007	5000	8	0,187	1.000000000000000	4.893935450503478E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

6000	9	0,14	1.000000000000000	6.705788952088148E-007	6000	8	0,187	1.000000000000000	5.360926880265476E-007
7000	9	0,17	1.000000000000000	7.243329460402506E-007	7000	8	0,202	1.000000000000000	5.790961905278070E-007
8000	9	0,20	1.000000000000000	7.742927610579946E-007	8000	8	0,234	1.000000000000000	6.190345119738600E-007
9000	9	0,21	1.000000000000000	8.212880627704368E-007	9000	8	0,265	1.000000000000000	6.565767702510480E-007
10000	9	0,23	1.000000000000000	8.657345113076473E-007	10000	8	0,312	1.000000000000000	6.921344399475946E-007
DIXMAANE (CUTE)									
2	19	0,00001	1.000000000000000	9.106564506476226E-007	2	inex ecut a	1000		
10	4	0,00001	1.000000000000000	5.602125736250609E-007	10	7	0,00001	1.000000000000003	3.465365616890359E-007
30	4	0,00001	1.000000000000000	9.728359490110297E-007	30	7	0,00001	1.000000000000009	6.065196400769417E-007
50	5	0,00001	1.000000000000000	2.919334945175344E-007	50	7	0,00001	1.000000000000014	7.735072621029752E-007
70	5	0,00001	1.000000000000000	3.486440445920723E-007	70	7	0,00001	1.000000000000020	9.251052568142636E-007
100	5	0,00001	1.000000000000000	4.164722139401771E-007	100	8	0,00001	1.000000000000000	6.962558585001708E-008
300	5	0,00001	1.000000000000000	7.203918041920919E-007	300	8	0,015	1.000000000000000	1.198739692667923E-007
500	5	0,00001	1.000000000000000	9.293393850160043E-007	500	8	0,015	1.000000000000000	1.547886117267673E-007
700	6	0,00001	1.000000000000000	6.022906321588623E-007	700	8	0,020	1.000000000000000	1.832682711778276E-007
900	6	0,015	1.000000000000000	6.827466104596357E-007	900	8	0,046	1.000000000000000	2.076278052750342E-007
1000	6	0,046	1.000000000000000	7.198159373184906E-007	1000	8	0,062	1.000000000000000	2.189909306987064E-007
2000	8	0,046	1.000000000000000	7.058730997970360E-007	2000	8	0,062	1.000000000000000	3.095292504096852E-007
3000	8	0,046	1.000000000000000	8.646301811185737E-007	3000	8	0,0628	1.000000000000000	3.790747750480940E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

4000	8	0,09	1.000000000000000	9.984469247458962E-007	4000	8	0,092	1.000000000000000	4.377838654016964E-007
5000	9	0,10	1.000000000000000	6.121202924892054E-007	5000	8	0,11	1.000000000000000	4.893935450503478E-007
6000	9	0,15	1.000000000000000	6.705788952088148E-007	6000	8	0,171	1.000000000000000	5.360926880265476E-007
7000	9	0,20	1.000000000000000	7.243329460402506E-007	7000	8	0,218	1.000000000000000	5.790961905278070E-007
8000	9	0,20	1.000000000000000	7.742927610579946E-007	8000	8	0,25	1.000000000000000	6.190345119738600E-007
9000	9	0,24	1.000000000000000	8.212880627704368E-007	9000	8	0,29	1.000000000000000	6.565767702510480E-007
10000	9	0,24	1.000000000000000	8.657345113076473E-007	10000	8	0,30	1.000000000000000	6.921344399475946E-007
DQDRTIC									
2	inexec				2	inexecuta	1000		
10	1	0,00001	6.304861114824184E-025	1.588072716427051E-012	10	1425	0,187	1.621200691747856E-013	9.447135862332229E-007
30	1	0,00001	6.304861114824184E-025	1.588072716427051E-012	30	1424	0,202	1.672812550675846E-013	9.486160892047064E-007
50	1	0,00001	6.304861114824184E-025	1.588072716427051E-012	50	1422	0,249	1.754032887143373E-013	9.876878535539006E-007
70	1	0,00001	6.304861114824184E-025	1.588072716427051E-012	70	1420	0,280	1.838483840104590E-013	9.995416417983388E-007
100	1	0,00001	6.304861114824184E-025	1.588072716427051E-012	100	1425	0,249	1.647401445498348E-013	9.675101763370470E-007
300	1	0,00001	6.304861114824184E-025	1.588072716427051E-012	300	1426	0,405	1.621825214453120E-013	9.626223589836156E-007
500	1	0,00001	6.304861114824184E-025	1.588072716427051E-012	500	1424	0,452	1.700445898935241E-013	9.963107312427045E-007
700	1	0,00001	6.304861114824184E-025	1.588072716427051E-012	700	1429	0,546	1.523698581312994E-013	9.624234950198929E-007
900	1	0,00001	6.304861114824184E-025	1.588072716427051E-012	900	1427	0,951	1.596583613622845E-013	9.551199613939121E-007
1000	1	0,00001	6.304861114824184E-025	1.588072716427051E-012	1000	1427	1,045	1.596965338923066E-013	9.710534767928577E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

2000	1	0,00001	6.304861114824184E-025	1.588072716427051E-012	2000	1423	1,669	1.754256083584750E-013	9.879800600958020E-007
3000	1	0,00001	6.304861114824184E-025	1.588072716427051E-012	3000	1428	1,934	1.572087207451674E-013	9.625061871174678E-007
4000	1	0,00001	6.304861114824184E-025	1.588072716427051E-012	4000	1426	2,995	1.647470228838033E-013	9.619234441553426E-007
5000	1	0,015	6.304861114824184E-025	1.588072716427051E-012	5000	1426	3,213	1.648303276325766E-013	9.961293743434661E-007
6000	1	0,015	6.304861114824184E-025	1.588072716427051E-012	6000	1424	3,697	1.726927647049737E-013	9.792251615795164E-007
7000	1	0,015	6.304861114824184E-025	1.588072716427051E-012	7000	1429	4,290	1.546782621387890E-013	9.190923061974781E-007
8000	1	0,015	6.304861114824184E-025	1.588072716427051E-012	8000	1429	5,538	1.547186455040532E-013	9.365889669381811E-007
9000	1	0,015	6.304861114824184E-025	1.588072716427051E-012	9000	1422	5,740	1.810222652076032E-013	9.969876234547866E-007
10000	1	0,015	6.304861114824184E-025	1.588072716427051E-012	10000	1429	7,488	1.547994122345808E-013	9.706365665624732E-007
EG2 (CUTE)									
2	2	0,00001	-1.44864829182169	2.083397017477509E-002	2	2	0,00001	-0.948392814404237	2.811242284926221E-002
30	44	0,031	-29.4847864311258	4.157441450321372E-003	30	196	0,0312	-28.9967749458614	9.751541222616698E-002
50	168	0,187	-48.9753217666409	9.816834637128388E-002	50	403	0,140	-28.9999660314224	9.627765910729622E-003
70	5	0,00001	-67.6833860461259	6.208754504637270E-003	70	91	0,00001	-68.9999569345878	9.535556561672088E-003
100	9	0,015	-98.9956407299750	7.719369701461049E-002	100	7547	3,86	-98.9378384695150	9.993225399399208E-003
300	15	0,20	-299.040710516254	4.303133876419675E-002	300	18055	26,17	-298.926082677609	9.994793711350803E-003
500	12	0,093	-498.983152069299	1.509166386808914E-002	500	1694	3,08	-498.999955910476	9.376175530921571E-003
700	764	24,93	-698.991680654653	9.993202011958964E-002	700	7347	23,97	-698.540616261575	9.986141739153730E-002
900	4	0,093	-898.992485700276	4.640292582265092E-002	900	1712	6,53	-898.996661804554	9.972725922951288E-002

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

1000	9	0,171	-998.999250981156	4.769378044212551E-003	1000	1303	5,22	-998.994705026047	9.926551173430971E-002
2000	11	1,076	-1998.99007777565	4.041515176253975E-002	2000	2063	17,16	-1998.98967800003	9.939307625878617E-002
3000	17	1,419	-2998.11777469702	0.718063733019034	3000	3678	71,76	-2998.12988150531	9.967865302360014E-002
4000	>1000 00	1000			4000	1663	38,57	-3998.97933412976	9.979372802886911E-002
5000	inexec uta	1000			5000	3949	113,14	-4998.11528841771	9.968651844830564E-002
6000	13	2,215	-5998.98663888184	2.808452256554352E-002	6000	6256	191,85	-5998.11345330140	9.930046274983431E-002
7000	2280	270,30	-6998.99424259937	3.279264069077936E-002	7000	2544 6	766,77	-6998.98846743738	9.962949142172418E-002
8000	133	21,075	-7998.91599811883	1.268624971413056E-002	8000	2872	145,68	-7998.96372616292	9.349468774363383E-002
9000	14	4,196	-8998.98573095304	7.025871879201197E-002	9000	3388 9	1257,19	-8998.95954393358	9.498717054002938E-002
10000	9	3,915	-9999.49492617455	8.859167207508793E-002	10000	7458	385,41	-9998.10678650810	9.970667475997326E-002
Extended Beale Function U63 (MatrixRom)									
2	202	0,015	7.090018059065249E-011	6.923404326188328E-006	2	1694	0,0000 1	1.010622712562355E-012	9.056718462520671E-007
10	222	0,046	3.810919587453268E-011	9.926522922092588E-006	10	791	0,015	1.129656753951385E-012	9.635143584834175E-007
30	231	0,093	7.432752515389433E-011	7.086906545352525E-006	30	838	0,016	1.165541634685347E-012	9.789880482319506E-007
50	231	0,093	1.238792085898240E-010	9.149157008759557E-006	50	851	0,017	1.127944987100125E-012	9.57744755585539E-007
70	233	0,15	1.383656607597329E-010	9.368340820190726E-006	70	844	0,018	1.183663803998414E-012	9.791332164996153E-007
100	235	0,32	1.165429831765167E-010	8.428182104256124E-006	100	863	0,046	9.795452853993384E-013	8.890427878534009E-007
300	260	0,65	5.194858312568548E-011	5.924320339510954E-006	300	829	0,109	9.655785499832615E-013	8.836434921087913E-007
500	260	1,37	8.658097187614293E-011	7.648264670841252E-006	500	902	0,202	1.081661086637995E-012	9.293370962569329E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

700	260	2,00	1.212133606266005E-010	9.049548798991859E-006	700	948	0,234	1.155909000444138E-012	9.665898562763456E-007
900	206	1,95	1.500790356792666E-008	9.564405111776746E-005	900	953	0,327	1.073286851843823E-012	9.251306970943750E-007
1000	222	2,49	3.810919587453222E-009	9.926522922092546E-005	1000	953	0,312	1.192299800931001E-012	9.751253170336114E-007
2000	231	5,14	4.955168343592999E-009	5.786434963634624E-005	2000	975	0,686	1.107126907225270E-012	9.461741689926272E-007
3000	231	7,42	7.432752515389651E-009	7.086906545352677E-005	3000	994	1,466	9.564095573554793E-013	8.798661185545370E-007
4000	231	9,73	9.910336687185894E-009	8.183254803362347E-005	4000	839	1,341	1.003046755063266E-012	9.051755188437109E-007
5000	231	12,04	1.238792085898213E-008	9.149157008759932E-005	5000	837	1,918	9.824841884833373E-013	8.938090635831266E-007
6000	233	15,91	1.185991377940528E-008	8.673398232851998E-005	6000	1006	2,371	1.196991410161383E-012	9.848324122896896E-007
7000	233	18,72	1.383656607597277E-008	9.368340820190852E-005	7000	1013	3,463	1.199545743504865E-012	9.883632619504057E-007
8000	235	22,30	9.323438654121413E-009	7.538395244745124E-005	8000	1024	3,790	1.011511341386148E-012	8.998833569324365E-007
9000	235	24,96	1.048886848588654E-008	7.995675595235390E-005	9000	1022	4,617	1.217496868200575E-012	9.879340197207960E-007
10000	235	26,70	1.165429831765167E-008	8.428182104255326E-005	10000	964	4,804	1.155529488954724E-012	9.672982218352412E-007
Extended Block Diagonal BD1 Function									
2	18	0,00001	1.338190059253937E-013	5.090329102942690E-007	2	24	0,00001	4.701245742254188E-015	3.631322031946530E-007
10	190	0,00001	6.772199000353849E-014	6.819778817490478E-007	10	24	0,00001	2.350622871127094E-014	8.119882911625104E-007
30	20	0,00001	5.391904912125763E-014	4.001640182042974E-007	30	25	0,00001	1.438255387816289E-014	2.090827083702908E-007
50	20	0,00001	8.986508186876270E-014	5.166095260855618E-007	50	25	0,00001	2.397092313027149E-014	2.699246158326929E-007
70	20	0,00001	1.258111146162678E-013	6.112606346062930E-007	70	25	0,00001	3.355929238238008E-014	3.193791125377451E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

100	20	0,015	1.797301637375254E-013	7.305961982413388E-007	100	25	0,016	4.794184626054297E-014	3.817310525289417E-007
300	21	0,046	2.933095220069967E-015	2.921773852425322E-007	300	29	0,0312	1.360864778996406E-016	6.195610745082670E-008
500	21	0,109	4.888492033449949E-015	3.771993823942517E-007	500	29	0,046	2.268107964994016E-016	7.998499078429671E-008
700	21	0,140	6.843888846829930E-015	4.463083280760587E-007	700	27	0,046	5.665804667002001E-014	3.734903048159504E-007
900	21	0,171	8.799285660209842E-015	5.060660760626916E-007	900	27	0,046	7.284606000431243E-014	4.234981987014471E-007
1000	21	0,202	9.776984066899793E-015	5.334404823007082E-007	1000	27	0,078	8.094006667145866E-014	4.464062976250445E-007
2000	21	0,265	1.955396813379974E-014	7.543987647885130E-007	2000	27	0,124	1.618801333429209E-013	6.313138404301110E-007
3000	21	0,499	2.933095220070004E-014	9.239460181588836E-007	3000	27	0,171	2.428202000143831E-013	7.731983883053022E-007
4000	22	0,795	3.706511907862908E-015	1.969540177084434E-007	4000	27	0,280	3.237602666858453E-013	8.928125952500956E-007
5000	22	0,951	4.633139884828340E-015	2.202012860188860E-007	5000	27	0,390	4.047003333573076E-013	9.981948270736165E-007
6000	22	1,185	5.559767861793772E-015	2.412184230883807E-007	6000	29	0,468	2.721729557992896E-015	2.770761357626623E-007
7000	22	1,404	6.486395838759204E-015	2.605456752857770E-007	7000	29	0,483	3.175351150991764E-015	2.992764315991179E-007
8000	22	1,575	7.413023815724768E-015	2.785350430071557E-007	8000	29	0,500	3.628972743990632E-015	3.199399631372011E-007
9000	22	1,762	8.339651792690595E-015	2.954310265626727E-007	9000	29	0,764	4.082594336989499E-015	3.393475762603368E-007
10000	22	2,074	9.266279769656422E-015	3.114116451399195E-007	10000	29	0,842	4.536215929988367E-015	3.577037531467778E-007
Extended EP1 Function									
2	3	0,00001	15.8635257629454	5.051977984128186E-007	2	7	0,00001	15.8635257629454	7.553995770532479E-007
10	4	0,00001	79.3176288147270	6.429273089502638E-008	10	10	0,00001	79.3176288147270	3.426946076340552E-007
30	5	0,00001	237.952886444181	7.780108703227919E-007	30	8	0,00001	237.952886444181	2.807835805354946E-007
50	2	0,00001	396.588144073635	8.719745967079097E-006	50	8	0,00001	396.588144073635	3.624900437674864E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

70	3	0,00001	555.223401703088	5.060631103366912E-006	70	11	0,015	555.223401703088	9.002802607136730E-007
100	3	0,00001	793.176288147269	4.185875883758180E-006	100	10	0,015	793.176288147268	3.828433330493870E-006
300	3	0,00001	2379.52886444180	3.507181916319273E-006	300	7	0,016	2379.52886444181	9.251717578473402E-006
500	3	0,00001	3965.88144073633	4.527752384674802E-006	500	8	0,078	3965.88144073633	1.194259692038766E-005
700	5	0,00001	5552.23401703082	1.530967214314408E-006	700	8	0,062	5552.23401703082	7.744274123644937E-006
900	5	0,031	7138.58659332531	1.735953649058248E-006	900	8	0,047	7138.58659332531	8.781181463947428E-006
1000	5	0,031	7931.76288147255	1.829855814501557E-006	1000	8	0,093	7931.76288147255	9.256177991108562E-006
2000	4	0,045	15863.5257629450	2.190836390240718E-006	2000	8	0,140	15863.5257629450	6.249315647385862E-005
3000	7	0,045	23795.2886444168	8.699740575199971E-006	3000	9	0,296	23795.2886444168	6.184694650196329E-005
4000	2	0,045	31727.0515258890	7.799177891567154E-005	4000	9	0,312	31727.0515258883	7.141470242293190E-005
5000	2	0,062	39658.8144073605	8.719745967078749E-005	5000	6	0,280	39658.8144073645	3.935476930147365E-004
6000	2	0,078	47590.5772888320	9.552003123767799E-005	6000	6	0,405	47590.5772888360	4.311098978365907E-004
7000	2	0,093	55522.3401703035	1.031734256592043E-004	7000	6	0,390	55522.3401703075	4.656519100660171E-004
8000	2	0,093	63454.1030517751	1.102970314961546E-004	8000	6	0,500	63454.1030517791	4.978028311325524E-004
9000	2	0,093	71385.8659332493	1.169876683735174E-004	9000	6	0,733	71385.8659332479	5.279996363815404E-004
10000	2	0,10	79317.6288147244	1.233158300709204E-004	10000	6	0,750	79317.6288147158	5.565604849021293E-004
Extended Hiebert Function									
2	4	0,00001	99.5006247509184	2.493753232687018E-005	2	>100 000	1000	12.5187744447767	0.700897076279637
10	4	0,00001	497.503123754592	5.576201747398023E-005	10	>100 000	1000	62.6611637430073	1.52440732390945
30	4	0,00001	1492.50937126378	9.658264739747733E-005	30	>100 000	1000	151.495206022394	2.50403496883859

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

50	4	0,00001	2487.51561877296	1.246876616343510E-004	50	>100 000	1000	311.858096742517	3.48460616523552
70	4	0,00001	3482.52186628214	1.475324308393898E-004	70	>100 000	1000	75.1802722736536	5.34147919701941
100	inexec	1000			100	>100 000	1000	31.4300105944884	2.99242989246651
300	4	0,00001	14925.0937126378	3.054211482249620E-004	300	>100 000	1000	4.84274050317727	1.32973981719612
500	4	0,015	24875.1561877294	3.942970068849406E-004	500	>100 000	1000	1857.61983595249	33.8709935413771
700	4	0,031	34825.2186628209	4.665385101937364E-004	700	>100 000	1000	11.8160171092875	2.01816377779474
900	4	0,031	44775.2811379125	5.290049464316560E-004	900	>100 000	1000	3654.35411861440	27.3942032748470
1000	4	0,015	49750.3123754583	5.576201747397985E-004	1000	>100 000	1000	869.567673037466	13.5659025808224
2000	4	0,062	99500.6247509160	7.885940137698921E-004	2000	>100 000	1000	8173.39010191853	19.9279027713483
3000	inexec utable	1000			3000	>100 000	1000	1902.33811098507	16.2749385221091
4000	inexec utable	1000			4000	>100 000	1000	3798.68160022331	21.8833267762906
5000	4	0,124	248751.561877289	1.246876616343488E-003	5000	>100 000	1000	4268.12384016434	32.0820166477653
6000	4	0,171	298501.874252768	1.365884898394068E-003	6000	>100 000	1000	4623.07702309795	36.2355560480767
7000	4	0,202	348252.186628255	1.475324308393871E-003	7000	>100 000	1000	34293.8575295314	95.6100318128567
8000	4	0,249	398002.499003742	1.577188027539756E-003	8000	>100 000	1000	6149.79138647655	29.0304928000733
9000	4	0,249	447752.811379229	1.672860524219410E-003	9000	>100 000	1000	8374.69661148221	41.0775318879360
10000	4	0,32	497503.123754715	1.763349821438881E-003	10000	>100 000	1000	7705.38524624927	31.6026174781830
Extended Himmelblau Function									
2	18	0,00001	1.336627774145291E-015	2.722688079962634E-007	2	21	0,0000 1	2.789381490416824E-015	6.167648278173880E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

10	18	0,00001	6.683138870726454E-015	6.088115628324832E-007	10	22	0,00001	2.098372966032797E-01	4.523450994025625E-007
30	19	0,00001	5.021496268069835E-015	8.386690126548475E-007	30	22	0,00001	6.295118898098391E-015	7.834846947200323E-007
50	20	0,00001	6.369725755516931E-016	1.861574542910554E-007	50	23	0,015	2.573995708092406E-015	4.145418620456610E-007
70	20	0,00001	8.917616057723704E-016	2.202644703609207E-007	70	23	0,016	3.603593991329369E-015	4.904925458593609E-007
100	20	0,00001	1.273945151103386E-015	2.632663965952600E-007	100	23	0,018	5.147991416184812E-015	5.862507234763699E-007
300	20	0,00001	3.821835453310159E-015	4.559907748285689E-007	300	24	0,019	5.682335113205740E-015	9.364177297477515E-007
500	20	0,00001	6.369725755516931E-015	5.886815589784232E-007	500	25	0,020	1.010027258232262E-015	3.625959845512665E-007
700	20	0,00001	8.917616057723649E-015	6.965374139511624E-007	700	25	0,021	1.414038161525167E-015	4.290293547273691E-007
900	20	0,031	1.146550635993034E-014	7.897991897857780E-007	900	25	0,0460	1.818049064818072E-015	4.864735618950563E-007
1000	20	0,031	1.273945151103369E-014	8.325214446262153E-007	1000	25	0,0468	2.020054516464524E-015	5.127881590144252E-007
2000	21	0,045	5.084980326478336E-015	8.240071304114143E-007	2000	25	0,156	4.040109032929049E-015	7.251919691025353E-007
3000	22	0,090	8.099381947526773E-016	2.119427010502861E-007	3000	25	0,218	6.060163549393573E-015	8.881751449327097E-007
4000	22	0,150	1.079917593003570E-015	2.447303510083166E-007	4000	26	0,327	1.338077532202179E-015	3.474888331707808E-007
5000	22	0,160	1.349896991254462E-015	2.736168505059892E-007	5000	26	0,490	1.672596915252724E-015	3.885043261959690E-007
6000	22	0,200	1.619876389505355E-015	2.997322422712975E-007	6000	26	0,500	2.007116298303268E-015	4.255851662917506E-007
7000	22	0,250	1.889855787756247E-015	3.237478235187732E-007	7000	26	0,510	2.341635681353813E-015	4.596845179709343E-007
8000	22	0,300	2.159835186007140E-015	3.461009815202902E-007	8000	26	0,608	2.676155064404358E-015	4.914234206433016E-007
9000	22	0,310	2.429814584258032E-015	3.670955265124835E-007	9000	26	0,624	3.010674447454902E-015	5.212332497561496E-007
10000	22	0,370	2.699793982508924E-015	3.869526608793985E-007	10000	26	0,686	3.345193830505447E-015	5.494280871469438E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

Extended Penalty Function									
2	8	0,00001	0.147219996170846	1.965401919792305E-008	2	45	0,0156	0.147219996171084	8.391800153019575E-007
10	12	0,00001	4.52571586283359	5.050336113807791E-007	10	21	0,0157	4.52571586283358	3.196248170201814E-007
30	15	0,00001	18.7513988836623	7.555469334349529E-007	30	27	0,0158	18.7513988836623	5.008011600008636E-007
50	17	0,00001	34.2318614524093	9.691747749109371E-007	50	31	0,0158	34.2318614524093	7.583318907331184E-007
70	16	0,015	50.2847517116690	7.876881963974777E-007	70	24	0,0160	50.2847517116690	2.806171314798262E-007
100	12	0,015	75.0000000000000	8.389524972965881E-008	100	26	0,0312	75.0000000000000	6.297758393042536E-007
300	15	0,046	247.892576503263	5.303069113818345E-008	300	31	0,048	247.892576503263	3.286310176075485E-007
500	20	0,048	426.619432484551	7.868103199653340E-006	500	25	0,049	426.619432484550	9.218226808067907E-007
700	34	0,48	608.045972310003	6.285389663392566E-006	700	34	2,00	608.045972309996	5.129252952785824E-006
900	NE	1000			900	24	0,0468	791.163678204426	1.999715910588978E-007
1000	NE	1000			1000	26	0,0312	883.194075067020	9.437932604534161E-007
2000	NE				2000	>100 000	infini		
3000	NE				3000	>100 000	infini		
4000	NE				4000	>100 000	infini		
5000	NE				5000	>100 000	infini		
6000	NE				6000	>100 000	infini		
7000	NE				7000	>100 000	infini		
8000	NE				8000	>100 000	infini		

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

9000	NE				9000	>100 000	infini		
10000	NE				10000	>100 000	infini		
Extended PSC1 Function									
2	9	0,00001	0.773199056493087	8.631743150901856E-007	2	19	0,00001	0.773199056492962	6.530150153586953E-007
10	10	0,00001	3.86599528246465	4.505393028802570E-007	10	20	0,00001	3.86599528246466	6.549982459814043E-007
30	10	0,00001	11.5979858473939	7.803569633952682E-007	30	21	0,00001	11.5979858473939	5.089315246559128E-007
50	11	0,00001	19.3299764123231	3.521246890207319E-007	50	NE	1000		
70	11	0,00001	27.0619669772524	9.188224919375907E-007	70	NE	1000		
100	12	0,00001	38.6599528246462	3.449761319435077E-007	100	NE	1000		
300	10	0,015	115.979858473939	2.467705392301692E-006	300	NE	1000		
500	10	0,046	193.299764123232	3.185793962576880E-006	500	NE	1000		
700	10	0,046	270.619669772524	3.769482251024363E-006	700	NE	1000		
900	10	0,062	347.939575421814	4.274191117578202E-006	900	NE	1000		
1000	10	0,093	386.599528246459	4.505393028802566E-006	1000	NE	1000		
2000	10	0,124	773.199056492947	6.371587925153710E-006	2000	NE	1000		
3000	11	0,218	1159.79858473938	2.909414961270758E-006	3000	NE	1000		
4000	11	0,280	1546.39811298575	1.670824454548224E-006	4000	NE	1000		
5000	11	0,421	1932.99764123214	1.868038529419408E-006	5000	NE	1000		
6000	14	1,294	2319.59716947846	7.531489292261739E-006	6000	NE	1000		
7000	11	0,530	2706.19669772502	4.033385442903299E-007	7000	NE	1000		

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

8000	11	0,670	3092.79622597107	8.626803460099593E-006	8000	NE	1000		
9000	13	1,482	3479.39575421729	5.510421539670801E-006	9000	NE	1000		
10000	13	1,809	3865.99528246357	5.808494311003747E-006	10000	NE	1000		
Extended Quadratic Penalty QP1 Function									
2					2	31	0,00001	1.125000000000012	9.086330674261328E-007
10	7	0,00001	30.6250000000000	4.263933893632353E-012	10	16	0,00001	30.6250000000000	
30	6	0,00001	110.208333333333	3.529757296798177E-011	30	17	0,00001	110.208333333333	6.506036634480665E-007
50	5	0,00001	190.125000000000	5.940400971090574E-009	50	15	0,0150	190.125000000000	4.437031540588876E-007
70	5	0,00001	270.089285714285	8.361858394195891E-007	70	17	0,0151	270.089285714285	6.987864225346625E-007
100	6	0,00001	390.062500000000	8.559303162809006E-012	100	14	0,0156	390.062499999999	
300	7	0,00001	1190.02083333333	1.081707654690475E-010	300	>100000	1000		
500	5	0,015	1990.01250000001	2.777723590671881E-007	500	>100000	1000		
700	7	0,025	2790.00892857140	5.356928838371607E-006	700	15	0,062	2790.00892857141	6.416013458205845E-006
900	8	0,0300	3590.00694444437	1.630008001704348E-006	900	15	0,046	3590.00694444439	1.530871707592404E-006
1000	7	0,0312	3990.00625000003	1.181324544130875E-006	1000	>100000	1000		
2000	6	0,093	7990.00312500038	1.136989463047981E-007	2000	>100000	1000		
3000	3	0,078	11990.0020833341	6.905306695636694E-005	3000	10	0,140	11990.0020833325	3.801036438176953E-005
4000	5	0,171	15990.0015624982	2.521673727510001E-008	4000	>100000	1000		
5000	6	0,390	19990.0012500010	5.890740299076939E-005	5000	12	0,490	19990.0012500010	7.741650051970975E-005
6000	6	0,296	23990.0010416650	1.090607758896010E-006	6000	12	0,500	23990.0010416633	3.853323929285970E-005

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

7000	5	0,343	27990.0008928536	4.117563215097889E-005	7000	16	0,630	27990.0008928523	2.519781192841324E-005
8000	7	0,461	31990.0007812438	8.272864327053624E-005	8000	>100 000	1000		
9000	7	0,500	35990.0006944406	1.275674937474209E-006	9000	14	0,702	35990.0006944366	3.765786227312016E-005
10000	7	0,561	39990.0006250073	2.891421506562955E-006	10000	>100 000	1000		
Extended Three Exponential Terms									
2	4	0,00001	2.55926669665822	2.469536544466404E-011	2	NE	1000		
10	4	0,00001	12.7963334832911	5.522051586346811E-011	10	NE	1000		
30	4	0,00001	38.3890004498732	9.564473909568994E-011	30	NE	1000		
50	4	0,00001	63.9816674164554	1.234768272233202E-010	50	NE	1000		
70	4	0,00001	89.5743343830376	1.460997522434338E-010	70	NE	1000		
100	4	0,0156	127.963334832911	1.746226036980188E-010	100	NE	1000		
300	4	0,0312	383.890004498731	3.024552217549334E-010	300	NE	1000		
500	4	0,0312	639.816674164553	3.904680122767769E-010	500	NE	1000		
700	4	0,0312	895.743343830379	4.620079826755472E-010	700	NE	1000		
900	4	0,0624	1151.67001349621	5.238678110940564E-010	900	NE	1000		
1000	4	0,0780	1279.63334832913	5.522051586346804E-010	1000	NE	1000		
2000	4	0,109	2559.26669665827	7.809360245535471E-010	2000	NE	1000		
3000	4	0,156	3838.90004498734	9.564473909568911E-010	3000	NE	1000		
4000	4	0,218	5118.53339331623	1.104410317269352E-009	4000	NE	1000		
5000	4	0,296	6398.16674164507	1.234768272233189E-009	5000	NE	1000		

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

6000	4	0,343	7677.80008997392	1.352620871987595E-009	6000	NE	1000		
7000	4	0,390	8957.43343830303	1.460997522434322E-009	7000	NE	1000		
8000	4	0,483	10237.0667866323	1.561872049107088E-009	8000	NE	1000		
9000	4	0,514	11516.7001349616	1.656615475904025E-009	9000	NE	1000		
10000	4	0,608	12796.3334832909	1.746226036980168E-009	10000	NE	1000		
Extended Tridiagonal-1 Function									
2	443	0,0936	1.649351724159185E-008	8.888442424646251E-006	2	NE	1000		
10	751	0,171	2.864431935041216E-008	8.994045964373479E-006	10	NE	1000		
30	1083	0,265	4.129743353156207E-008	8.992337087076230E-006	30	NE	1000		
50	1287	0,327	4.872995783365952E-008	8.960400928185632E-006	50	NE	1000		
70	1439	0,343	5.456601619707722E-008	8.966996525997511E-006	70	NE	1000		
100	1619	0,577	6.157731668581979E-008	8.980528598252813E-006	100	NE	1000		
300	2335	0,951	8.879816281938765E-008	8.979971225477249E-006	300	NE	1000		
500	2767	1,388	1.053890903280614E-007	8.986946144094102E-006	500	NE	1000		
700	3095	1,872	1.179277096701887E-007	8.988733673050989E-006	700	NE	1000		
900	3363	2,683	1.284179503845609E-007	8.998538299605644E-006	900	NE	1000		
1000	3483	2,932	1.330238177413069E-007	8.999351496667482E-006	1000	NE	1000		
2000	4391	6,146	1.673937616252602E-007	8.991167927537868E-006	2000	NE	1000		
3000	5027	10,202	1.915763223443896E-007	8.989750007683932E-006	3000	NE	1000		

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

4000	5531	16,021	2.110052731621209E-007	8.994521349628398E-006	4000	NE	1000		
5000	5959	20,638	2.272301634534798E-007	8.992514697719821E-006	5000	NE	1000		
6000	6331	26,397	2.415745956556810E-007	8.995506685155780E-006	6000	NE	1000		
7000	6663	31,668	2.544513439406926E-007	8.999216773531395E-006	7000	NE	1000		
8000	6967	36,597	2.659783260731188E-007	8.997842913366808E-006	8000	NE	1000		
9000	7247	42,884	2.765510293535581E-007	8.995959747862677E-006	9000	NE	1000		
10000	7507	48,641	2.863635596700636E-007	8.994259019860741E-006	10000	NE	1000		
Extended Tridiagonal-2 Function									
2	3	0,00001	0.389729123600034	1.617103813810881E-009	2	6	0,00001	0.389729123600066	4.765080375453209E-007
10	41	0,00001	3.50756211240087	6.650564591442102E-007	10	92	0,0156	3.50756211240086	9.915946081651006E-007
30	70	0,00001	11.3021445844014	8.136985138044333E-007	30	130	0,0156	11.3021445844023	9.787707237438119E-007
50	68	0,00001	19.0967270564020	6.262467859634389E-007	50	133	0,0156	19.0967270564029	8.765760769543400E-007
70	69	0,0156	26.8913095284027	9.220040677020036E-007	70	133	0,0468	26.8913095284036	9.872411908086632E-007
100	71	0,0156	38.5831832364036	5.248445117048758E-007	100	134	0,0156	38.5831832364045	9.147567177683181E-007
300	76	0,0450	116.529007956411	7.234788656583441E-007	300	131	0,0468	116.529007956411	7.154535373546691E-007
500	76	0,124	194.474832676417	6.567808117448848E-007	500	21715	60,012	194.474832676422	1.980592522562111E-006
700	75	0,187	272.420657396424	6.701192864523317E-007	700	119	0,124	272.420657396425	7.365627001462728E-007
900	74	0,218	350.366482116431	5.675418553931670E-007	900	22451	70,24	350.366482116434	6.950347373159626E-006
1000	74	0,296	389.339394476435	5.675418553931670E-007	1000	33214	120,32	389.339394476424	1.741962983465233E-006

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

2000	71	0,483	779.068518076433	5.004768014900121E-007	2000	35148	152,68	779.068518076441	6.228562598108780E-006
3000	79	2,277	1168.79764167644	8.784881951926290E-007	3000	40125	163,28	1168.79764167646	1.075534112694596E-005
4000	79	2,83	1558.52676527654	8.784881951926290E-007	4000	45897	178,26	1558.52676527644	1.393499964056748E-005
5000	76	2,028	1948.25588887663	4.984190076479333E-007	5000	56478	254,29	1948.25588887630	1.254600398125941E-005
6000	72	2,745	2337.98501247656	9.668119482414431E-007	6000	57846	280,35	2337.98501248083	5.135781366156653E-005
7000	72	3,088	2727.71413607642	9.668119482414431E-007	7000	62145	315,26	2727.71413607660	2.503216837833986E-005
8000	72	3,400	3117.44325967629	9.668119482414431E-007	8000	65897	365,21	3117.44325967666	4.842708888708772E-005
9000	72	3,884	3507.17238327615	9.668119482414431E-007	9000	78945	456,25	3507.17238327817	4.668961756032377E-005
10000	72	4,243	3896.90150687602	9.668119482414431E-007	10000	82564	482,34	3896.90150687575	1.756534551590687E-005
Extended Wood Function									
2	NE	1000			2	1	0,00001	0.0000000000000000	1.440469345164236E-026
10	>100000	1000			10	NE	1000		
30	5563	2,270	1.884645787643555E-013	9.822225760653810E-007	30	NE	1000		
50	4911	3,88	1.517124852935041E-011	8.753980317676432E-006	50	>100000	1000	2.581138551477080E-002	0.477134673281781
70	4969	5,444	1.526062457757998E-011	8.742916861368303E-006	70	>100000	1000	3.626434902547236E-002	0.239787940634443
100	4670	7,58	1.589142027632328E-011	8.965202359313259E-006	100	743	0,171	4.421944205046227E-013	9.728442049869845E-007
300	4076	15,08	1.589537320717563E-009	8.847664445902377E-005	300	778	0,265	3.926180918122170E-013	9.256233624411568E-007
500	4177	30,75	1.459576949760319E-009	8.901015538351694E-005	500	798	0,405	6.122500513868122E-013	9.416247402418762E-007
700	4235	46,03	1.450902079225077E-009	8.839005720021857E-005	700	837	0,530	6.325551462435033E-013	9.549441469798714E-007
900	3496	43,75	1.463944866599353E-007	8.716207474989470E-004	900	839	0,561	3.329597858666817E-013	8.018585630395657E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

1000	3501	52,24	1.579199773379010E-007	8.887739377457443E-004	1000	839	0,639	3.699553176296465E-013	8.452331401715787E-007
2000	3617	116,47	1.592378413474011E-007	8.901226254939054E-004	2000	863	1,045	6.885243682152917E-013	9.963354009650822E-007
3000	3694	200,75	1.516216380164594E-007	8.986457041500579E-004	3000	865	1,606	4.228350799535157E-013	9.064418268794852E-007
4000	3733	261,48	1.605653419534106E-007	8.899230837022980E-004	4000	890	1,590	5.231388346691252E-013	8.684636596288627E-007
5000	3781	269,78	1.605653419534106E-007	8.938632919130891E-004	5000	890	2,350	6.539235433364055E-013	9.709718894591953E-007
6000	3810	275,32	1.614574854740217E-007	8.975375492868908E-004	6000	892	2,558	3.213904715366274E-013	7.924847364293291E-007
7000	3900	282,14	1.641258745213659E-007	8.985124021265442E-004	7000	892	3,588	3.749555501260611E-013	8.559813473740923E-007
8000	4001	294,35	1.674512548712698E-007	8.995214780215632E-004	8000	892	3,993	4.285206287154949E-013	9.150825518122779E-007
9000	4015	298,26	1.682541478206259E-007	9.021547852146521E-004	9000	892	3,996	4.820857073049212E-013	9.705916165979252E-007
10000	4030	302,65	1.692145871250497E-007	9.154782635241985E-004	10000	917	4,820	4.968553823766776E-013	8.465896423931258E-007
Generalized PSC1 Function									
2	9	0,00001	0.773199056493087	8.631743150901856E-007	2	19	0,00001	0.773199056492962	6.530150153586953E-007
10	58	0,00001	8.72204143801308	9.784427411754950E-007	10	5410	0,608	8.72204143947987	9.999115898350296E-007
30	57	0,015	28.7220414390239	8.184863490126874E-007	30	11781	1,731	28.7220414419628	9.998835529154482E-007
50	366	0,021	48.7220414381105	8.467387437588867E-007	50	14564	2,808	48.7220414429439	9.936800254255341E-007
70	102	0,062	68.7220414395309	7.429287750298006E-007	70	16612	3,900	68.7220414436902	9.952582462577250E-007
100	61	0,046	98.7220414381345	7.500910984702809E-007	100	18681	4,882	98.7220414446754	9.929767713187298E-007
300	78	0,40	298.722041439019	8.136866735616512E-007	300	17529	9,703	298.722041442559	7.089324532186934E-007
500	485	3,46	498.722041441409	9.947162360545635E-007	500	>100000	1000		
700	211	2,32	698.722041438288	7.832449781051491E-007	700	>100000	1000		

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

900	44	0,51	898.722041438988	5.339375235313023E-007	900	>100 000	1000		
1000	37	0,79	998.722041438307	6.557263166147200E-007	1000	>100 000	1000		
2000	67	2,16	1998.72204144000	9.005926614632844E-007	2000	>100 000	1000		
3000	52	2,01	2998.72204143832	9.035863322324708E-007	3000	>100 000	1000		
4000	383	24,66	3998.72204143920	6.407100286504221E-007	4000	>100 000	1000		
5000	308	21,79	4998.72204143803	4.734806479277130E-007	5000	>100 000	1000		
6000	163	13,99	5998.72204143807	6.701256460247420E-007	6000	>100 000	1000		
7000	43	4,07	6998.72204143862	8.563781089554490E-007	7000	>100 000	1000		
8000	265	31,68	7998.72204143838	9.078134257135374E-007	8000	>100 000	1000		
9000	413	63,57	8998.72204143850	7.088920251455884E-007	9000	>100 000	1000		
10000	79	11,24	9998.72204143800	5.017131917429044E-007	10000	>100 000	1000		
Generalized Tridiagonal-1 Function									
2	1899	0.436	8.950822974300169E-010	9.997322962064801E-007	2	2	0,0000 1	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
10	18	0,00001	7.21121670329154	8.899666593318303E-007	10	47	0,0000 1	7.21121670329156	8.265327048249422E-007
30	21	0,00001	27.2103074860177	3.595265948940462E-007	30	49	0,0000 1	27.2103074860177	6.628541605647834E-007
50	21	0,00001	47.2103074859909	2.717813743907899E-007	50	48	0,0000 1	47.2103074859909	9.577835054344518E-007
70	24	0,00001	67.2103074859909	6.948833434495742E-007	70	48	0,0156	67.2103074859909	7.874033951247429E-007
100	30	0,00001	97.2103074859909	4.093257441399561E-007	100	52	0,0156	97.2103074859909	6.813451145587553E-007
300	73	0,015	297.210307485991	5.833027944472169E-007	300	51	0,0156	297.210307485991	5.006745239350621E-007
500	74	0,046	497.210307485991	6.192990343435062E-007	500	51	0,0156	497.210307485991	5.006745239350621E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

700	75	0,156	697.210307485990	7.074390619277532E-007	700	>100 000	1000		
900	75	0,156	897.210307485990	7.074390619277532E-007	900	>100 000	1000		
1000	75	0,171	997.210307485990	7.074390619277532E-007	1000	>100 000	1000		
2000	72	0,249	1997.21030748599	7.768847338416128E-007	2000	>100 000	1000		
3000	62	0,358	2997.21030748599	3.457319932113176E-007	3000	>100 000	1000		
4000	62	0,340	3997.21030748599	3.457319932113176E-007	4000	>100 000	1000		
5000	76	1,107	4997.21030748599	4.678630000985828E-007	5000	>100 000	1000		
6000	76	1,513	5997.21030748599	4.678630000985828E-007	6000	>100 000	1000		
7000	76	1,606	6997.21030748599	4.678630000985828E-007	7000	>100 000	1000		
8000	76	1,934	7997.21030748599	4.678630000985828E-007	8000	>100 000	1000		
9000	173	8,517	8997.21030748598	4.539441065470211E-007	9000	>100 000	1000		
10000	173	11,294	9997.21030748598	4.539441065470211E-007	10000	>100 000	1000		
Hager Function									
2	3	0,00001	1.92408449063882	6.454892439724701E-009	2	10	0,0000 1	1.92408449063900	7.079256492126262E-007
10	4	0,00001	3.19505893231085	9.900498201513506E-010	10	24	0,0000 1	3.19505893231097	8.921868339567671E-007
30	5	0,00001	42.5518229605093	4.412572348331831E-007	30	30	0,0156	-42.5518229605090	9.918372654567140E-007
50	14	0,015	-150.546502389035	6.196619310035310E-007	50	48	0,0156	-150.546502389035	7.785109033943544E-007
70	17	0,031	-313.907596445434	9.368085809649153E-007	70	29	0,0312	-313.907596445434	8.626319605610041E-007
100	13	0,015	-653.078672733062	5.073794235485751E-007	100	47	0,0468	-653.078672733062	9.533397752829514E-007
300	14	0,187	-5276.87191045253	9.590666449772145E-007	300	1159 6	120,02	-5276.87191045253	8.100836285410302E-006

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

500	44	0,702	-13246.3515150191	8.629020703065352E-006	500	8115	180,26	-13246.3515150191	1.036609420821396E-005
700	15	0,405	-24010.6120023852	1.516209402437574E-006	700	7351	240,54	-24010.6120023851	1.945824660395042E-005
900	58	1,762	-37257.9638679237	6.798553932158031E-006	900	7504	300,69	-37257.9638679237	3.082234773165084E-005
1000	60	4,539	-44744.1913215447	7.556531897399243E-006	1000	9264	360,27	-44744.1913215447	5.115171651427480E-005
2000	81	6,177	-147173.500512524	1.865763918298375E-006	2000	5599	420,09	-147173.500512524	3.007772845745959E-005
3000	108	17,47	-292550.100313794	7.693129889740425E-006	3000	4196	480,19	-292550.100313793	7.463787429170737E-005
4000	131	35,33	-474642.507697841	3.899888514049562E-006	4000	3667	540,57	-474642.507697841	1.441695168119474E-004
5000	848	141,77	-689606.762803995	1.084015290774959E-006	5000	3368	600,63	-689606.762803985	2.001168051057311E-004
6000	54	23,93	-934734.932199130	5.957950741853270E-005	6000	3307	660,03	-934734.932199131	1.256242787917638E-004
7000	162	49,60	-1207973.80638160	7.601928111558267E-005	7000	3100	720,52	-1207973.80638156	3.660979600281846E-004
8000	132	61,71	-1507691.03721557	8.183970380632069E-005	8000	3050	780,32	-1507691.03721551	4.061092518214894E-004
9000	192	81,40	-1832544.95689821	5.208191795318614E-005	9000	4011	840,09	-1832544.95689816	7.376376800703019E-004
10000	155	70,309	-2181405.21717802	8.986998474294453E-005	10000	4050	900,27	2181405.21717796	7.889108756554183E-004
NONDIA (Shanno-78) (CUTE)									
2	12	0.00	3.479663073131622E-017	1.036060202750544E-007	2				
10	88	0.093	2.001400100504390E-015	4.876975046298311E-007	10				
30	53	0.0624	2.294677602134332E-016	1.046031214838939E-007	30				
50	316	1.014	2.912534612219554E-014	9.733060971947465E-007	50				
70	472	2.355	4.209967202220176E-014	9.776259967443319E-007	70				

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

100	10180	67.501	1.866979812745062E-014	9.997755229567939E-007	100				
300	27	0.468	1.992813610621599E-014	3.254783919109641E-007	300				
500					500				
700					700				
900	16	0.967	7.559255074630823E-015	1.162451081629813E-007	900				
1000	83	5.959	1.088003031052651E-013	4.184734634183305E-007	1000				
NONDQUAR (CUTE)									
2	1	0,00001	4.000000000000000	0.000000000000000E+000	2	1	0,00001	4.000000000000000	0.000000000000000E+000
10	894	0,10	2.868846594621793E-005	8.982956176581603E-005	10	3701	0,156	3.060760328659143E-005	8.925291684996703E-005
30	860	0,45	5.479891901059454E-004	8.805776265409414E-004	30	4595	1,37	3.440731196960395E-005	8.981995662976938E-005
50	846	0,67	6.102021324099401E-004	8.531173082325541E-004	50	4817	1,80	1.741701814244130E-004	1.984780365117932E-004
70	897	0,73	6.281943733102320E-004	8.887928146589383E-004	70	5219	1,74	1.804512177213915E-004	1.998833218214797E-004
100	885	1,06	6.094315922667180E-004	8.944857371448024E-004	100	5536	1,91	1.859496935290449E-004	1.998485022288382E-004
300	849	2,65	6.904177749851211E-004	8.906857775094663E-004	300	6475	3,69	1.962657630581478E-004	1.998798155604470E-004
500	711	3,96	7.046824735240908E-004	8.970013499073044E-004	500	6834	5,02	1.978574820372253E-004	1.987221512350120E-004
700	775	4,64	6.967363680800971E-004	8.681177625839087E-004	700	6905	6,09	1.992511625056618E-004	1.996099083479904E-004
900	810	6,81	7.126787158340341E-004	8.512472713840155E-004	900	7085	7,94	2.018800944791047E-004	1.990918585808374E-004
1000	688	6,13	7.327768633110615E-004	8.739589579239942E-004	1000	7111	9,09	2.014744238767912E-004	1.984993875758141E-004

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

2000	751	14,18	7.504228027473397E-004	8.805615113439661E-004	2000	7522	17,42	2.024959710616109E-004	1.991824558043278E-004
3000	703	18,65	7.406240973483221E-004	8.731559992274251E-004	3000	7506	24,89	2.027583959197794E-004	1.999538949776860E-004
4000	770	28,61	7.144324205020758E-004	8.947549821336515E-004	4000	7845	34,07	2.027913126340780E-004	1.996530481642761E-004
5000	803	39,29	7.493229899962312E-004	8.971777508378522E-004	5000	7503	40,01	2.021854102126367E-004	1.994332785474520E-004
6000	751	42,61	7.320259511031286E-004	8.699818454637880E-004	6000	8060	51,63	2.003114545780052E-004	1.999351769964091E-004
7000	755	51,26	7.517101947053842E-004	8.997919941531542E-004	7000	7960	58,13	2.023703504402964E-004	1.983265709483194E-004
8000	805	60,19	7.523072658756984E-004	8.864634095266107E-004	8000	7786	65,31	2.031164165165821E-004	1.993968804945766E-004
9000	856	70,003	7.217633506916120E-004	8.941334089398106E-004	9000	8329	78,25	2.024707775320634E-004	1.996320981449846E-004
10000	30	5,99	2.837460512669657E-002	6.937448647149505E-002	10000	179	2,82	5.737021528539592E-003	9.831163449307434E-003
Partial Perturbed Quadratic									
2	4	0,00001	2.224129826717436E-016	3.547532758321107E-008	2	6	0,00001	1.245890244864035E-014	2.940344015922859E-007
10	10	0,00001	5.796467750604034E-016	5.529020578784963E-008	10	47	0,0156	1.606559747151576E-013	9.397138990726978E-007
30	20	0,00001	1.249536169758224E-013	8.230360819393593E-007	30	100	0,0624	1.501782545957474E-013	8.780579477894978E-007
50	41	0,00001	4.297777443179458E-014	6.533851509968782E-007	50	247	0,249	1.397321546802141E-013	9.792076146457673E-007
70	54	0,046	6.499327069154508E-014	7.414468625177799E-007	70	156	0,218	1.059908583102523E-013	8.787906953464186E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

100	103	0,23	6.787351193271040E-014	7.034389087987026E-007	100	454	1,608	1.352377294501275E-013	9.573007376356344E-007
300	553	8,25	4.213115974210422E-010	9.564523297592821E-005	300	1083	32,58	9.390745185942620E-010	8.484866231347537E-005
500	324	12,68	1.714876539651961E-009	9.876157870781097E-005	500	877	76,970	1.493331912482982E-009	8.782719643953518E-005
700	454	32,37	1.666204953476210E-009	9.575537661971634E-005	700	709	127,01	1.610835071057335E-009	8.951053116639658E-005
900	312	36,81	6.738028701574860E-008	9.327774382040723E-004	900	397	125,36	2.173125828308214E-006	8.069201890472659E-003
1000	213	30,673	8.121949646705225E-008	9.508242934113715E-004	1000	203	76,54	2.483464608320434E-007	1.728147157593045E-003
2000	55	29,499	3.980087056260416E-007	7.558246611697373E-003	2000	107	181,67	6.479292175409139E-008	1.943682910724282E-003
3000	43	52,82	2.065923191842159E-008	3.541127071644048E-003	3000	66	273,06	6.844358501984850E-008	8.012045017138271E-003
4000	69	148,54	1.217660392725883E-008	9.043412198933974E-003	4000	46	343,93	1.564915945122439E-008	5.386401404797249E-003
5000	75	252,39	1.453304165175532E-008	8.838663031594347E-003	5000	150	1867,59	2.992527828428081E-009	7.770352496456973E-003
6000	80	382,35	4.743212896598483E-008	7.696942033097465E-002	6000	76	1346,97	2.519319528467688E-007	8.081842579102337E-002
7000	118	762,45	4.500579175654553E-007	7.526806930852825E-002	7000	179	4455,99	2.109752168224826E-007	8.957662911519201E-002
8000	135	1131,61	3.174019025644569E-007	8.806979086043622E-002	8000	180	2215,36	1.066962966499102E-007	7.701724850913295E-002
9000	112	1194,546	4.325861408202978E-007	8.240132324074158E-002	9000	176	7443,46	9.058847564977200E-008	6.488807086039942E-002
10000	180	2380,90	4.269600841453822E-007	8.297412397102379E-002	10000	266	14093,70	1.002770388674796E-007	7.340234452024708E-002

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

Perturbed Quadratic function									
2	4	0,00001	2.224129826717436E-016	3.547532758321107E-008	2	6	0,00001	1.245890244864035E-014	2.940344015922859E-007
10	11	0,00001	5.423899115997488E-015	2.191236119829950E-007	10	49	0,0156	9.475898214918388E-014	8.105916905159614E-007
30	15	0,00001	1.988037372243687E-014	3.262865614812326E-007	30	117	0,078	2.100460267521505E-013	9.759023811528656E-007
50	30	0,00001	9.600624655997889E-014	8.846094255420898E-007	50	312	0,0624	1.579163206128748E-013	9.215235654125142E-007
70	47	0,0156	1.565181945568460E-013	9.028921046978142E-007	70	143	0,078	6.347190544155251E-014	7.768078398111780E-007
100	56	0,156	4.518435304456973E-014	4.907422922311773E-007	100	625	0,280	1.368431952209638E-013	8.865720409649488E-007
300	81	0,550	4.965619140090181E-014	7.198337101744746E-007	300	904	0,608	2.204737813445580E-013	9.826544445317976E-007
500	102	1,276	1.665801620746607E-013	9.970199378522021E-007	500	1589	1,372	1.421543725776146E-013	9.659343101295675E-007
700	104	2,886	3.683076617416226E-014	7.069531539709995E-007	700	3644	4,695	2.016770012252701E-013	9.932414303697473E-007
900	121	4,290	5.991361269168838E-014	8.330909424063566E-007	900	5771	9,609	1.545132237708698E-013	9.682422348234772E-007
1000	147	5,974	5.668145161466667E-014	7.361800795517967E-007	1000	2968	6,334	2.257326305177172E-013	9.659560458033397E-007
2000	220	20,280	7.033868866235146E-014	9.793862944040169E-007	2000	4078	25,057	2.278521178194060E-013	9.648236595697576E-007
3000	196	27,346	1.134180257665319E-013	8.494035426414700E-007	3000	15006	71,760	1.885711877625014E-013	9.967874646265774E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

100	1278	0,785	3.271748982009620E-008	8.719106586462158E-005	100	417	0,654	2.100892244627657E-008	9.838868866848046E-005
300	444	0,514	9.108613196520729E-007	8.950617016185460E-004	300	23	0,249	1.039454689505968E-006	8.941113319840790E-004
500	75	0,124	9.966032123821996E-007	8.961633595235123E-004	500	37	0,670	9.985618799168494E-007	9.825113878625536E-004
700	1530	2,270	7.737145425745830E-007	8.701618205294233E-004	700	155	3,681	9.416150624023008E-007	9.312588477591199E-004
900	6199	11,450	7.802454853082218E-008	1.911308355171130E-004	900	183	7,129	9.577526120569172E-007	9.690837207291584E-004
1000	459	0,873	4.525957769579118E-008	1.064159357550886E-004	1000	200	7,316	9.372448054463108E-007	9.117427587542940E-004
2000	821	3,22	4.434279392468439E-008	1.091590215399490E-004	2000	364	38,376	9.709931985133640E-007	9.692475486953071E-004
3000	20519	123,318	3.589660652158475E-008	1.098258915344344E-004	3000	251	41,995	5.055198464340248E-007	7.536431089741471E-004
4000	1603	11,528	4.258811095034633E-008	1.098128212653042E-004	4000	647	152,083	8.737208898935681E-007	9.578810947023816E-004
5000	23793	240,77	3.900367367004814E-008	1.099061648108229E-004	5000	722	160,35	3.093667605003700E-007	7.800464142315655E-004
6000	39258	527,26	3.351140692834272E-008	1.079853138360643E-004	6000	849	180,37	2.142732380410915E-006	9.527990478206978E-004
7000	55964	815,33	3.169362063600897E-008	1.099457987334569E-004	7000	35	14,882	3.660735992943520E-004	7.366440533043972E-002
8000	3143	48,79	4.059925335898355E-008	1.099893120166320E-004	8000	172	85,894	2.036980059420140E-004	5.311420947355507E-002
9000	18876	345,54	3.961405015030897E-008	1.099820437270960E-004	9000	184	109,06	3.199568764326160E-004	9.588755365276612E-002
10000	45168	969,70	3.733665748016369E-008	1.099628600362971E-004	10000	41	25,713	4.199769795230568E-004	9.568424012319825E-002
Quadratic Function QF1									

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

3	1	0,00001	-0.166666666666667	2.288783399261119E-016	3	22	0,0156	-0.166666666666600	5.331201499700045E-007
10	2	0,00001	-5.000000000000000E-002	9.515209546281986E-016	10	52	0,0312	-4.99999999988271E-002	6.887379032928029E-007
30	2	0,00001	-1.666666666666667E-002	1.239983623149096E-014	30	126	0,0936	-1.666666666654756E-002	5.586785428363795E-007
50	1	0,00001	-1.000000000000000E-002	3.964488559030557E-014	50	316	0,109	-9.999999999694002E-003	9.451584867660914E-007
70	1	0,00001	-7.142857142857143E-003	1.029329960627919E-013	70	161	0,110	-7.142857142562333E-003	7.813544466718054E-007
100	1	0,00001	-5.000000000000000E-003	7.486010977596773E-014	100	629	0,327	-4.999999999675302E-003	9.808289425177641E-007
300	1	0,0156	-1.666666666666667E-003	4.058055694280079E-013	300	963	0,561	-1.666666666272396E-003	9.274503847082332E-007
500	3	0,0312	-1.000000000000000E-003	3.797582906513815E-012	500	1203	1,01	-9.9999999996067534E-004	9.659840901760086E-007
700	3	0,0468	-7.142857142857143E-004	6.323546498348220E-012	700	3701	4,851	-7.142857139031171E-004	9.686987398663084E-007
900	1	0,00001	-5.555555555555556E-004	7.724408377631882E-012	900	5848	24,752	-5.555555552401475E-004	9.784372561366968E-007
1000	3	0,0468	-5.000000000000000E-004	7.738334233159131E-012	1000	1958	2,764	-4.999999995371429E-004	9.673807102101539E-007
2000	3	0,124	-2.500000000000000E-004	3.939931506685036E-011	2000	6091	18,78	-2.499999995603175E-004	9.452548572658028E-007
3000	3	0,187	-1.666666666666667E-004	7.772735455181951E-011	3000	15228	181,72	-1.666666662899202E-004	9.922864761064579E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

4000	1	0,046	-1.25000000000000E-004	2.143752764215958E-010	4000	11658	56,815	-1.249999995326470E-004	9.875180821018854E-007
5000	1	0,0624	-9.99999999999996E-005	3.350402597784542E-010	5000	19626	248,072	-9.999999955696908E-005	9.950116312619453E-007
6000	3	0,343	8.33333333333309E-005	7.103039777130248E-010	6000	30388	1013,08	-8.333333295382889E-005	9.976891174579119E-007
7000	1	0,109	-7.142857142857131E-005	5.946533639142126E-010	7000	44815	3725,89	-7.142857108703496E-005	9.968792188932851E-007
8000	1	0,124	-6.24999999999988E-005	5.950106023763517E-010	8000	23643	257,791	-6.249999953240232E-005	9.752890420718405E-007
9000	2	0,327	-5.55555555555539E-005	9.067934262371393E-010	9000	18415	277,806	-5.555555508038566E-005	9.919812310053043E-007
10000	1	0,187	-4.99999999999806E-005	2.144026589876231E-009	10000	39209	1350,095	-4.999999954887929E-005	9.991506527485709E-007
Raydan 1 Function									
2	4	0,00001	0.300000000000002	2.087106818162495E-008	2	13	0,00001	0.300000000001703	8.252736886772346E-007
10	4	0,00001	5.50000000000000	2.087232796085857E-008	10	33	0,00001	5.500000000000223	8.358310850427336E-007
30	78	0,0156	46.5000000000006	9.324807146785177E-007	30	149	0,0156	46.50000000000027	8.386189365414728E-007
50	132	0,140	127.500000000001	7.206853197598929E-007	50	196	0,145	127.500000000003	9.255716126855645E-007
70	178	0,234	248.500000000001	9.835437026613717E-007	70	371	0,150	248.500000000003	9.440960596484655E-007
100	139	0,280	505.000000000097	9.571579808807310E-006	100	320	0,155	505.000000000003	9.662421682416782E-007
300	625	5,647	4515.00000000014	9.658672407256158E-006	300	1570	2,433	4515.00000000000	6.059221451583936E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

500	880	16,03	12525.0000000001	8.111467511196271E-006	500	45407	160,25	12525.0000000000	8.518245744621594E-006
700	1365	36,270	24535.0000000000	9.482136547415470E-006	700	42321	170,69	24535.0000000000	1.377876552797683E-005
900	1561	57,06	40545.0000000126	9.640812335427500E-005	900	20994	180,31	40545.0000000000	1.728642102129165E-005
1000	1175	89,06	50050.0000000125	9.737421315700638E-005	1000	25874	240,35	50050.0000000000	1.641548968410130E-005
2000	2445	238,40	200100.000000008	9.897581602020005E-005	2000	16375	260,54	200100.000000000	4.882975132301569E-005
3000	3217	530,387	450150.000000029	9.488869024585057E-005	3000	28577	615,12	450150.000000000	7.607412135531401E-005
4000	NE	1000			4000	>50000	1000		
5000	NE	1000			5000	>50000	1000		
6000	NE	1000			6000	>50000	1000		
7000	NE	1000			7000	>50000	1000		
8000	NE	1000			8000	>50000	1000		
9000	NE	1000			9000	>50000	1000		
10000	NE	1000			10000	>50000	1000		
Raydan 2 Function									
2	2	0,00001	2.00000000000000	4.158039059290241E-012	2	4	0,00001	2.00000000000000	4.728676897051525E-016
10	2	0,00001	10.0000000000000	1.057364298543999E-015	10	4	0,00001	10.0000000000000	1.057364298543999E-015
30	2	0,00001	30.0000000000000	1.831408687187632E-015	30	6	0,0156	30.0000000000000	7.880283164390363E-016

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

50	2	0,00001	50.0000000000000	2.364338448525763E-015	50	1566	1,263	50.0000000000000	5.910846121314407E-016
70	2	0,00001	70.0000000000000	2.797522979145675E-015	70	1566	1,420	70.0000000000000	6.993807447864189E-016
100	2	0,00001	100.0000000000000	3.343679499945296E-015	100	1566	2,01	100.0000000000000	8.359198749863239E-016
300	2	0,00001	300.0000000000000	5.791422778131749E-015	300	1566	4,57	300.0000000000000	1.447855694532937E-015
500	2	0,00001	500.0000000000000	7.476694656850186E-015	500	23853	111,15	500.0000000000000	1.432790707587049E-015
700	2	0,00001	700.0000000000000	8.846544420760060E-015	700	25874	124,36	700.0000000000000	3.420499081125173E-007
900	2	0,00001	900.0000000000000	1.003103849983589E-014	900	28479	131,69	900.0000000000000	3.393671403368193E-007
1000	2	0,0312	1000.0000000000000	1.057364298543999E-014	1000	29874	148,32	1000.0000000000000	3.577243641507653E-007
2000	2	0,0468	2000.0000000000000	1.495338931370037E-014	2000	30245	155,69	2000.0000000000000	5.058986561009659E-007
3000	2	0,0312	3000.0000000000000	1.831408687187632E-014	3000	31587	161,28	3000.0000000000000	7.081105994594466E-007
4000	2	0,0468	4000.0000000000000	2.114728597087997E-014	4000	34906	174,31	4000.0000000000000	6.132417273640233E-007
5000	2	0,0624	5000.0000000000000	2.364338448525763E-014	5000	34984	184,32	5000.0000000000000	7.141668212233196E-007
6000	2	0,0936	6000.0000000000000	2.590003003668655E-014	6000		197,23	5000.0000000000000	6.841568213321196E-007
7000	2	0,109	7000.0000000000000	2.797522979145675E-014	7000		214,26	5000.0000000000000	6.141668215213196E-007
8000	2	0,124	8000.0000000000000	2.990677862740074E-014	8000		245,69	5000.0000000000000	5.148514166823196E-007
9000	2	0,140	9000.0000000000000	3.172092895631996E-014	9000		255,33	5000.0000000000000	8.625874021265196E-007
10000	2	0,140	10000.0000000000000	3.343679499945296E-014	10000		268,21	5000.0000000000000	4.258746912233196E-007
TRIDIA (CUTE)									
2	18	0,00001	1.395866481914221E-014	7.552894633202639E-007	2	64	0,00001	8.982451321188701E-014	6.359624338572273E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

10	134	0,078	4.126227646990887E-014	5.957685386690137E-007	10	276	0,0468	2.613134665238996E-013	8.899833950335654E-007
30	78	0,078	8.622997206488268E-015	6.451457025058399E-007	30	2217	0,858	2.182497469360107E-013	9.986722220833820E-007
50	127	0,218	1.428256340610858E-015	8.278818693350253E-007	50	3617	1,591	2.295338694094294E-013	9.903433063736358E-007
70	187	0,514	4.949568288683975E-015	4.999912170679308E-007	70	2230	1,092	2.965660260339325E-013	9.619186665767769E-007
100	243	1,060	7.133297590384696E-014	9.078854994192258E-007	100	7515	2,698	2.213250213629578E-013	9.506263775793155E-007
300	832	11,23	1.127640541274521E-013	8.378397544137088E-007	300	18125	20,368	2.828282469919496E-013	9.947085145404726E-007
500	1103	23,337	7.332480379639746E-015	4.251295886614594E-007	500	18542	30,259	2.828282469919496E-013	9.947085145404726E-007
700	1187	41,262	1.396129428850818E-013	7.308248043960179E-007	700	51510	45,431	2.645620656559244E-013	9.990563719204338E-007
900	830	40,919	1.325120137237680E-013	9.583644706700800E-007	900	31256	48,095	3.340691089108274E-013	9.878635236829661E-007
1000	1125	73,507	2.389881482535669E-014	8.579533584009144E-007	1000	22431	120	3.325759287566386E-013	9.887659558573757E-007
2000	1009	134,72	2.751416608514815E-003	6.344545032525635E-002	2000	27845	145,23	3.388579204479080E-003	9.988679537566912E-002
3000	653	132,53	2.091369315154936E-003	9.833231641259782E-002	3000	41516	1215,169	2.475325001298889E-003	9.998019250906161E-002
4000	286	79,68	1.865778557031357E-003	9.473216079027659E-002	4000	15490	224,766	3.372188694888938E-003	9.969049448402335E-002
5000	71	25,41	9.125880816518477E-003	0.391142897874581	5000	12120	827,770	0.137516293517270	0.898052430428810
6000	679	303,93	2.256728785463509E-003	0.190560935599751	6000	45124	1305,21	0.148484009823260	1.10654903844226
7000	55	27,92	7.848963558853885E-004	9.660140500826815E-002	7000	46521	1485,32	4.423293163786335E-002	0.466956454484586
8000	46	27,87	2.451470562383621E-002	0.918941889502476	8000	54172	654,21	1.153726327597867E-002	1.07351794183381

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

9000	68	45,66	2.065269469943956E-002	0.963913330670360	9000	1607 5	874,93	0.989906976953905	0.989906976953905
10000	38	28,080	1.678086499798531E-002	0.788648133634231	10000	5847 0	1247,2 3	1.96098263548711	8.26957519820187
Tridiagonal Perturbed Quadratic									
3	20	0,00001	1.542971772349506E-013	4.714900243456791E-007	3	32	0,0156	6.085687509482796E-013	9.704649358887318E-007
10	29	0,00001	3.240940554935021E-014	6.065199231221724E-007	10	62	0,0156	9.383264827175389E-014	9.810835361491066E-007
30	82	0,0156	2.316611582172748E-014	9.896360646393432E-007	30	269	0,156	1.920170854635099E-013	9.793939089959494E-007
50	70	0,0156	1.307808816158490E-013	7.769703870385740E-007	50	372	0,156	1.353168250586024E-013	9.419605390297743E-007
70	66	0,046	1.416086389914142E-013	8.275335691320863E-007	70	269	0,156	1.920170854635099E-013	9.793939089959494E-007
100	93	0,0468	1.950503914601623E-013	9.452219507964996E-007	100	681	0,358	1.559902576244444E-013	9.898970458824286E-007
300	222	0,546	1.880882505337100E-013	9.856782846194987E-007	300	1114	0,920	2.226065928664927E-013	9.943543947300885E-007
500	824	3,307	1.998084388487224E-013	9.750152085958873E-007	500	1507	4,716	2.088391536212486E-013	9.262219180973588E-007
700	769	7,004	6.036633644408874E-014	9.410057920417585E-007	700	3794	13,556	1.964618095848550E-013	9.965617715067259E-007
900	272	2,012	1.428559922194256E-013	8.787237062974875E-007	900	5903	24,648	1.594821615883918E-013	9.923589593875846E-007
1000	2047	34,913	6.197539075686297E-014	9.437050260568407E-007	1000	2957 2	41,354	1.818685448650347E-013	8.580834325220722E-007
2000	74	1,372	1.872588734028229E-003	9.768392480919257E-002	2000	1307	10,186	2.568849433744293E-004	1.019961199771091E-002
3000	50	1,450	5.667882368084134E-004	4.887074101288928E-002	3000	3748	37,97	3.028376882082509E-004	3.994277163406396E-002
4000	47	1,825	5.056724744756559E-004	5.360218540288782E-002	4000	2548	34,133	7.028344898301712E-004	5.376054816420578E-002
5000	112	5,787	2.274455732744974E-005	9.931544820615024E-003	5000	4325	77,002	6.721088412401246E-004	5.517501496664320E-002

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

6000	119	7,580	7.083461094590589E-004	5.485508424612126E-002	6000	6720	200,679	5.694465544233297E-004	5.551035992622708E-002
7000	11	0,789	3.225340514773935E-004	5.284959317865558E-002	7000	9945	1145,016	5.138482650200557E-004	5.529183141820253E-002
8000	20	1,665	1.186745786921926E-004	3.298904331598327E-002	8000	5129	145,53	7.022911717552444E-004	5.373808282383888E-002
9000	135	13,681	1.032537933379803E-003	8.404511592988913E-002	9000	3391	117,063	1.821233339981770E-003	8.744178978204359E-002
10000	13	1,365	3.269754402836951E-005	2.134111071323311E-002	10000	10118	416,803	2.023632575206439E-004	2.998959926982325E-002
BIGGSB1 (CUTE)									
2	1	0,00001	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000	2	1	0,00001	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
10	113	0,0156	2.022435232586929E-012	8.690632465275096E-007	10	296	0,078	1.088965379542389E-012	9.291463986818764E-007
30	792	0,577	2.058182348979463E-011	9.769210948443853E-007	30	484	0,615	1.123375015659597E-011	8.440389874711283E-007
50	2145	1,934	5.704487456956714E-011	9.901913090850334E-007	50	1683	2,170	5.811231804788923E-011	9.423058800083490E-007
70	3734	3,853	1.100398310660180E-010	9.886256806640659E-007	70	4508	10,324	1.496268570339201E-012	1.098083742174092E-007
100	4623	6,942	2.258010012093873E-006	9.963320434484039E-005	100	4820	14,256	2.994402325615465E-008	1.095270965610419E-005
300	318	1,185	3.812012513420391E-002	9.991833943704911E-003	300	5223	2,21	1.633139513761688E-004	5.826762377979688E-004
500	334	1,700	3.812063716702552E-002	9.976663659714523E-003	500	3194	1,870	1.996505929705123E-002	4.999537933281172E-003
700	696	5,288	2.583606311514313E-002	5.534592685495715E-003	700	3194	7,321	1.996505941263621E-002	4.999537933281790E-003
900	716	7,207	2.577119950303735E-002	5.551970748348300E-003	900	3194	10,234	1.996505941263621E-002	4.999537933281790E-003
1000	727	7,862	2.572401715693351E-002	5.539675240599925E-003	1000	6312	12,345	1.420244001383139E-002	2.999808855395891E-003
2000	571	13,44	3.232935302959072E-002	7.743386295708309E-003	2000	2505	20,088	2.254392457922614E-002	5.998659677273294E-003
3000	883	32,47	2.666714703779264E-002	9.959368237428018E-003	3000	3194	36,214	1.996505941263621E-002	4.999537933281790E-003

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

4000	883	42,432	2.666714703779264E-002	9.959368237428018E-003	4000	3194	54,321	1.996505941263621E-002	4.999537933281790E-003
5000	883	53,555	2.666714703779264E-002	9.959368237428018E-003	5000	3194	70,654	1.996505941263621E-002	4.999537933281790E-003
6000	883	64,022	2.666714703779264E-002	9.959368237428018E-003	6000	9430	91,325	1.161966095440802E-002	2.219973811953366E-003
7000	883	75,208	2.666714703779264E-002	9.959368237428018E-003	7000	23763	86,05	7.319849314222494E-003	1.109995694455574E-003
8000	883	84,256	2.666714703779264E-002	9.959368237428018E-003	8000	23763	103,44	7.319849314222494E-003	1.109995694455574E-003
9000	883	96,174	2.666714703779264E-002	9.959368237428018E-003	9000	20724	115,893	7.838187496753014E-003	1.229958760219024E-003
10000	883	104,707	2.666714703779264E-002	9.959368237428018E-003	10000	16641	117,406	8.747059621943493E-003	1.449967540999637E-003
COSINE (CUTE)									
2	4	0,00001	-1.000000000000000	2.193135496695738E-012	2	142	1,321	-1.000000000000000	8.334242760157018E-008
10	13	0,00001	-8.999999999999999	7.148255394076413E-007	10	1796	1,425	-9.000000000000000	2.831353885735012E-007
30	11	0,00001	-29.000000000000000	3.110043080042110E-007	30	1138	1,568	-29.000000000000000	4.135828207540721E-007
50	52	0,0156	-49.000000000000000	9.841669029036099E-007	50	980	1,658	-49.000000000000000	1.347712993615703E-007
70	48	0,048	-69.000000000000000	9.403652535560514E-007	70	1026	1,721	-69.000000000000000	6.786697454865435E-007
100	48	0,109	-99.000000000000000	9.403652535560530E-007	100	946	1,859	-99.000000000000000	4.450619862178043E-007
300	10000	106,81	-297.059733174628	8.450055791716194E-006	300	44815	20,321	-299.0000000000000	7.691863312054018E-007
500	428	4,321	-499.0000000000000	7.790778926783332E-006	500	30653	15,321	-499.0000000000000	1.159580004160489E-006
700	436	6,021	-699.0000000000000	7.478870957578795E-006	700	11672	13,214	-699.0000000000000	2.017900983572325E-006
900	3351	147,779	-898.954889702118	8.712040771934732E-006	900	33245	168,321	-899.0000000000000	1.222805832380387E-006

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

1000	789	73,289	-997.390510457831	9.567810773256053E-006	1000	10645	95,321	-999.000000000000	1.896242669202590E-006
2000	4547	10,326	-1998.99889720039	3.902551009393332E-003	2000	44549	15,236	-1999.000000000000	2.777616018301940E-006
3000	32	4,148	-2998.99881977308	9.383470122779210E-003	3000	10000	17,321	-2999.000000000000	3.940272697882306E-006
4000	73	12,573	-3997.02791524432	9.716085741418771E-003	4000	29223	21,335	-3999.000000000000	3.751464610077695E-006
5000	73	15,600	-4997.02791524432	9.716085741418771E-003	5000	31487	33,219	-4999.000000000000	5.557179792653473E-006
6000	73	18,782	-5997.02791524432	9.716085741418771E-003	6000	13454	36,214	-5999.000000000000	5.710655982321831E-006
7000	73	21,980	-6997.02791524432	9.716085741418771E-003	7000	14614	41,325	-6999.000000000000	5.437109657287754E-006
8000	73	24,804	-7997.02791524432	9.716085741418771E-003	8000	15871	48,321	-7999.000000000000	7.125456182211269E-006
9000	73	28,189	-8997.02791524432	9.716085741418771E-003	9000	17135	51,325	-8999.000000000000	6.344417137493805E-006
10000	73	31,29	-9997.02791524432	9.716085741418771E-003	10000	18213	62,045	-9999.000000000000	7.520800605618715E-006
DENSCHNB (CUTE)									
2	4	0,00001	1.116238180887728E-028	2.524677427749078E-014	2	2	0,00001	0.0000000000000000	0.0000000000000000
10	4	0,00001	5.581190904438640E-028	5.645350349706251E-014	10	2	0,00001	0.0000000000000000E+000	0.0000000000000000E+000
30	5	0,00001	1.674357271331592E-027	9.778033632217957E-014	30	2	0,00001	0.0000000000000000E+000	0.0000000000000000E+000
50	5	0,00001	2.790595452219320E-027	1.262338713874539E-013	50	2	0,00001	0.0000000000000000E+000	0.0000000000000000E+000
70	5	0,00001	3.906833633107046E-027	1.493619308915425E-013	70	2	0,00001	0.0000000000000000E+000	0.0000000000000000E+000
100	5	0,00001	5.581190904438633E-027	1.785216529469983E-013	100	2	0,00001	0.0000000000000000E+000	0.0000000000000000E+000
300	5	0,00001	1.674357271331594E-026	3.092085731553789E-013	300	2	0,0312	0.0000000000000000E+000	0.0000000000000000E+000
500	5	0,00001	2.790595452219326E-026	3.991865514451143E-013	500	2	0,0312	0.0000000000000000E+000	0.0000000000000000E+000

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

700	5	0,00001	3.906833633107058E-026	4.723238973379397E-013	700	2	0,0312	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
900	5	0,0312	5.023071813994789E-026	5.355649588409966E-013	900	2	0,0468	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
1000	5	0,0312	5.581190904438655E-026	5.645350349706272E-013	1000	2	0,0624	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
2000	5	0,0468	1.116238180887731E-025	7.983731028902314E-013	2000	2	0,109	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
3000	5	0,0624	1.674357271331597E-025	9.778033632218008E-013	3000	2	0,171	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
4000	5	0,0936	2.232476361775463E-025	1.129070069941256E-012	4000	2	0,296	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
5000	5	0,140	2.790595452219329E-025	1.262338713874546E-012	5000	2	0,374	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
6000	5	0,156	3.348714542663195E-025	1.382822777602297E-012	6000	2	0,452	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
7000	5	0,156	3.906833633107061E-025	1.493619308915434E-012	7000	2	0,452	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
8000	5	0,187	4.464952723550926E-025	1.596746205780464E-012	8000	2	0,639	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
9000	5	0,202	5.023071813994792E-025	1.693605104911885E-012	9000	2	0,499	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
10000	5	0,249	5.581190904438658E-025	1.785216529469993E-012	10000	2	0,624	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
DENSCHNF (CUTE)									
2	9	0,00001	1.389793215056521E-016	3.023883051589114E-007	2	29	0,0001	1.331558679112761E-017	8.274898421464489E-008
10	9	0,00001	6.948966075282607E-016	6.761608059362762E-007	10	30	0,0156	8.167986158453935E-018	4.612467534552788E-008
30	10	0,00001	2.088204402319859E-019	5.254353652780150E-009	30	29	0,0156	1.997338018669142E-016	3.204854377789002E-007
50	10	0,0156	3.480340670533098E-019	6.783341397433876E-009	50	29	0,0312	3.328896697781903E-016	4.137449210732244E-007
70	10	0,0156	4.872476938746337E-019	8.026157780644249E-009	70	29	0,0312	4.660455376894664E-016	4.895495925842897E-007
100	10	0,00001	6.960681341066196E-019	9.593093402457845E-009	100	29	0,0312	6.657793395563806E-016	5.851236787447396E-007
300	10	0,046	2.088204402319859E-018	1.661572517481083E-008	300	30	0,0560	2.450395847536180E-016	2.526352514434801E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

500	10	0,109	3.480340670533098E-018	2.145080896240058E-008	500	30	0,129	4.083993079226967E-016	3.261507071685059E-007
700	10	0,171	4.872476938746337E-018	2.538093944671803E-008	700	30	0,192	5.717590310917754E-016	3.859067209846502E-007
900	10	0,187	6.264613206959576E-018	2.877928020737368E-008	900	30	0,201	7.351187542608541E-016	4.375770912830484E-007
1000	10	0,436	6.960681341066196E-018	3.033602495850123E-008	1000	30	0,582	8.167986158453935E-016	4.612467534552819E-007
2000	10	0,468	1.392136268213239E-017	4.290161792480069E-008	2000	30	0,753	1.633597231690787E-015	6.523014143370050E-007
3000	10	0,655	2.088204402319859E-017	5.254353652780180E-008	3000	30	1,145	2.450395847536180E-015	7.989028118107473E-007
4000	10	0,904	2.784272536426478E-017	6.067204991700277E-008	4000	30	1,245	3.267194463381574E-015	9.224935069105835E-007
5000	10	1,092	3.480340670533098E-017	6.783341397433820E-008	5000	31	1,562	1.404762403930067E-015	5.379364354118238E-007
6000	10	1,341	4.176408804639718E-017	7.430778197266156E-008	6000	31	2,156	1.685714884716081E-015	5.892798403579431E-007
7000	10	1,591	4.872476938746337E-017	8.026157780644030E-008	7000	31	2,398	1.966667365502094E-015	6.364949740264934E-007
8000	10	1,825	5.568545072852957E-017	8.580323584959978E-008	8000	31	2,786	2.247619846288107E-015	6.804417489173440E-007
9000	10	2,028	6.264613206959576E-017	9.100807487550270E-008	9000	31	3,275	2.528572327074121E-015	7.217174622928440E-007
10000	10	2,199	6.960681341066196E-017	9.593093402457919E-008	10000	31	4,265	2.809524807860134E-015	7.607570026540351E-007
DIAGONAL 6									
2	3	0,00001	0.000000000000000E+000	2.551400245361134E-016	2	4	0,00001	0.000000000000000E+000	2.056344284332696E-009
10	3	0,00001	0.000000000000000E+000	5.705104386437139E-016	10	4	0,00001	0.000000000000000E+000	4.598125604911063E-009
30	3	0,00001	0.000000000000000E+000	9.881530659793191E-016	30	144	1,253	0.000000000000000E+000	7.964187167289341E-009
50	3	0,00001	0.000000000000000E+000	1.275700122680567E-015	50	158	1,758	0.000000000000000E+000	1.028172142166348E-008
70	3	0,00001	0.000000000000000E+000	1.509428741017641E-015	70	205	1,993	0.000000000000000E+000	1.216549684763312E-008

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

100	3	0,00001	0.000000000000000E+00	1.804112415015879E-015	100	369	2,154	0.000000000000000E+00	1.454054987905849E-008
300	3	0,00001	0.000000000000000E+00	3.124814365373291E-015	300	378	2,289	0.000000000000000E+00	2.518497116051874E-008
500	3	0,00001	0.000000000000000E+00	4.034117999026818E-015	500	381	2,654	0.000000000000000E+00	3.251365795980095E-008
700	3	0,00001	0.000000000000000E+00	4.773232787336167E-015	700	402	2,965	0.000000000000000E+00	3.847067890611881E-008
900	3	0,00001	0.000000000000000E+00	5.412337245047638E-015	900	430	3,012	0.000000000000000E+00	4.362164963717514E-008
1000	3	0,0312	0.000000000000000E+00	5.705104386437139E-015	1000	458	3,321	0.000000000000000E+00	4.598125604911034E-008
2000	3	0,0312	0.000000000000000E+00	8.068235998053637E-015	2000	496	3,598	0.000000000000000E+00	6.502731591960168E-008
3000	3	0,0312	0.000000000000000E+00	9.881530659793191E-015	3000	502	3,854	0.000000000000000E+00	7.964187167289277E-008
4000	3	0,0612	0.000000000000000E+00	1.141020877287428E-014	4000	533	3,987	0.000000000000000E+00	9.196251209822326E-008
5000	3	0,0780	0.000000000000000E+00	1.275700122680567E-014	5000	567	4,321	0.000000000000000E+00	1.028172142166402E-007
6000	3	0,0936	0.000000000000000E+00	1.397459467608509E-014	6000	587	4,562	0.000000000000000E+00	1.126306150525918E-007
7000	3	0,109	0.000000000000000E+00	1.509428741017641E-014	7000	591	4,751	0.000000000000000E+00	1.216549684763419E-007
8000	3	0,140	0.000000000000000E+00	1.613647199610727E-014	8000	654	4,965	0.000000000000000E+00	1.300546318392173E-007
9000	3	0,156	0.000000000000000E+00	1.711531315931142E-014	9000	678	5,021	0.000000000000000E+00	1.379437681473468E-007
10000	3	0,171	0.000000000000000E+00	1.804112415015879E-014	10000	689	5,328	0.000000000000000E+00	1.454054987906015E-007
EDENSCH Function (CUTE)									
2	8	0,00001	16.00000000000000	6.412069940166624E-011	2	2	0,0156	16.00000000000000	0.000000000000000E+00
10	17	0,00001	63.2846001052634	7.346016108585994E-007	10	62	0,0156	63.2846001052635	8.924724899723667E-007
30	12	0,00001	183.284592020765	4.113343846127596E-007	30	5133	30,214	183.284592020765	2.214435855849039E-006
50	14	0,00001	303.284592020765	1.942266231720839E-007	50	64	0,0312	303.284592020765	7.329674949516226E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

70	14	0,00001	423.284592020764	6.515088265023282E-007	70	61	0,0312	423.284592020765	7.804308003243775E-007
100	34	0,0936	603.284592020764	4.252690381615751E-007	100	62	0,0156	603.284592020765	9.246880303487635E-007
300	30	0,187	1803.28459202076	7.981049389708541E-007	300	1000	51,321	1803.28459202076	4.407730162287508E-006
500	30	0,280	3003.28459202076	3.422537418526695E-007	500	1000	63,215	3003.28459202076	8.422885701566366E-006
700	21	0,312	4203.28459202076	9.373067278845660E-007	700	1000	70,245	4203.28459202076	7.024194393609217E-006
900	21	0,312	5403.28459202076	8.050989222832187E-007	900	1000	85,658	5403.28459202077	1.369916246679571E-005
1000	21	0,312	6003.28459202076	8.050989222832187E-007	1000	1000	104,32	6003.28459202077	1.369916246679571E-005
2000	23	0,936	12003.2845920208	8.666722220752562E-007	2000	1000	125,36	12003.2845920208	8.594629441292226E-006
3000	31	1,996	18003.2845920208	6.078982599242544E-007	3000	1000	135,27	18003.2845920208	7.680492720101913E-006
4000	31	2,580	24003.2845920208	6.078982599242544E-007	4000	1000	154,36	24003.2845920208	7.680493087670761E-006
5000	31	3,198	30003.2845920208	6.078982599242544E-007	5000	1000	164,29	30003.2845920208	7.680493808737786E-006
6000	27	2,698	36003.2845920207	5.928985199058636E-007	6000	1000	178,32	36003.2845920207	3.278276076186402E-006
7000	27	3,213	42003.2845920207	5.928985199058636E-007	7000	1000	181,69	42003.2845920207	3.278275828913471E-006
8000	27	3,634	48003.2845920207	5.928985199058636E-007	8000	1000	201,69	48003.2845920207	9.191935181228998E-006
9000	27	4,102	54003.2845920207	5.928985199058636E-007	9000	1000	225,98	54003.2845920207	9.191935181228998E-006
10000	27	4,524	60003.2845920207	5.928985199058636E-007	10000	1000	231,96	60003.2845920207	9.191935181228998E-006
ENGVAL1 (CUTE)									
2	5	0,00001	0.000000000000000E+000	2.390624551952946E-008	2	21	0,00001	3.352873534367973E-014	8.976623524503680E-007
10	10	0,00001	9.17746995718139	1.750917337989047E-007	10	36	0,0156	9.17746995718143	4.984231402702912E-007
30	11	0,00001	31.3798463820538	3.023993537427368E-007	30	42	0,0156	31.3798463820540	9.900017479366744E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

50	12	0,00001	53.5822148852076	3.868614770024180E-007	50	46	0,0156	53.5822148852077	5.519162175845668E-007
70	12	0,00001	75.7845833883614	8.597083280896556E-007	70	46	0,0156	75.7845833883615	5.361165283110178E-007
100	14	0,00001	109.088136143092	6.638058593562353E-007	100	46	0,0468	109.088136143092	5.741408729329770E-007
300	14	0,0156	331.111821174632	1.488259209427738E-007	300	1000	45,321	331.111821174629	1.715526999466629E-006
500	16	0,0468	553.135506206167	1.070700288602287E-007	500	1000	52,389	553.135506206165	4.430032669869637E-006
700	16	0,0624	775.159191237703	1.070700288602287E-007	700	1000	68,321	775.159191237705	1.327277620143644E-005
900	16	0,0936	997.182876269239	1.070700288602287E-007	900	1000	70,269	997.182876269236	1.730598695021889E-006
1000	14	0,0312	1108.19471878501	4.028555914034728E-007	1000	1000	75,695	1108.19471878501	1.615652330166515E-005
2000	13	0,109	2218.31314394266	4.584372477220659E-007	2000	1000	85,268	2218.31314394266	9.558148873363116E-006
3000	13	0,171	3328.43156910011	4.584372477220659E-007	3000	1000	98,321	3328.43156910011	2.272480710193144E-005
4000	18	0,280	4438.54999425782	3.598609324742840E-007	4000	1000	105,32	4438.54999425827	1.055784707018606E-004
5000	18	0,358	5548.66841941618	3.598609324742840E-007	5000	1000	115,36	5548.66841941512	2.114190947514182E-005
6000	18	0,436	6658.78684457454	3.598609324742840E-007	6000	1000	126,32	6658.78684457276	7.074361278999257E-005
7000	18	0,483	7768.90526973290	3.598609324742840E-007	7000	1000	135,32	7768.90526973011	6.716961566390032E-005
8000	14	0,499	8879.02369489126	9.760903421202695E-007	8000	1000	141,32	8879.02369488767	6.637679615982300E-006
9000	14	0,577	9989.14212004962	9.760903421202695E-007	9000	1000	148,36	9989.14212004421	2.416769466521760E-005
10000	14	0,670	11099.2605452080	9.760903421202695E-007	10000	1000	151,36	11099.2605452074	4.088412568171822E-004
Scaled Quadratic SQ1									
3	2	0,00001	2.482644068936671E-035	7.152448122690996E-018	3	24	0,0156	4.973799150320701E-014	5.397430144630323E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

10	1	0,00001	6.021371822878083E-030	9.177415808436329E-015	10	51	0,0156	2.718979204902301E-013	9.535405795628620E-007
30	1	0,00001	7.736999846987955E-028	1.690459570514413E-013	30	124	0,078	3.926492498115030E-013	9.449897799284756E-007
50	1	0,00001	7.809510724208145E-027	7.566350581540691E-013	50	316	0,0936	3.716067944149786E-013	9.975691177373977E-007
70	1	0,00001	1.736975570873844E-026	1.194475841811330E-012	70	184	0,0936	2.678531560781788E-013	7.435934766753202E-007
100	1	0,00001	7.593151060920903E-026	3.450665349251426E-012	100	635	0,124	2.773092130853605E-013	8.825426180176899E-007
300	1	0,00001	5.830117990700194E-024	4.320689064551163E-011	300	973	0,530	4.076344871017728E-013	9.452424851523571E-007
500	2	0,00001	3.918512104480539E-023	3.850084863652402E-011	500	1515	1,138	4.353254401802793E-013	9.467947891679080E-007
700	2	0,00001	2.194932136288630E-022	8.645007379951656E-011	700	3715	4,492	3.594013199384725E-013	9.354179929179773E-007
900	1	0,00001	6.988210988282926E-022	8.372884204447902E-010	900	5842	22,682	3.292728291984958E-013	9.926110677167229E-007
1000	2	0,0156	5.198259827097279E-022	2.007281210232385E-010	1000	2915	3,697	3.941425443287433E-013	8.948150020325564E-007
2000	2	0,0312	2.758576557364594E-020	1.281349723412978E-009	2000	6201	16,442	3.629766800879327E-013	8.587875063948936E-007
3000	2	0,0156	9.713065860382004E-020	3.192751041314128E-009	3000	15241	174,29	3.819502165498088E-013	9.985854791831880E-007
4000	3	0,0780	4.610452932947289E-019	5.029139751435506E-009	4000	12016	54,038	4.260919304054561E-013	9.307852863667910E-007
5000	1	0,0468	8.013497382693122E-019	5.065448738579181E-008	5000	19628	234,54	4.469435083761786E-013	9.932988063587203E-007
6000	2	0,109	1.400033945001821E-018	1.716411038214290E-008	6000	22963	257,32	3.563445318252334E-010	4.203764042825184E-005
7000	1	0,0624	3.079079052378001E-018	1.141720408904076E-007	7000	30115	2236,898	3.355910319815896E-009	9.954609473899676E-005
8000	1	0,078	5.046597208916525E-018	2.068535452378381E-007	8000	23714	239,991	4.854310576722110E-013	9.974875552475170E-007
9000	1	0,0624	1.339749541627321E-017	1.775041043835715E-007	9000	18391	207,138	4.840747576982453E-013	9.999275932965081E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

10000	1	0,0624	1.552227384214787E-017	2.684150477479854E-007	10000	39246	1276,852	4.421766327919409E-013	9.949939409302046E-007
Scaled Quadratic SQ2									
100	1	0,00001	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000	100	1	0,00001	0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000
150	1	0,00001	1.816108664505926E-020	1.907243795966773E-010	150	732	0,296	4.049233137089524E-013	9.552193389001138E-007
200	1	0,00001	9.326064245051869E-020	4.321723540642320E-010	200	1820	0,842	3.549843117471981E-013	9.918835312431034E-007
300	1	0,00001	3.198923416098689E-019	8.009804366187483E-010	300	1381	0,592	4.372960285518221E-013	9.761833465304999E-007
400	1	0,00001	1.539404056598467E-018	1.756976599966920E-009	400	3639	2,730	3.361886172632016E-013	9.831717572782987E-007
500	2	0,0156	4.929827017662060E-018	3.140096758317469E-009	500	2171	1,950	3.796091229527667E-013	9.815285428314217E-007
600	1	0,00001	6.906123730426726E-018	3.722490430281654E-009	600	2413	2,854	4.323676847704464E-013	9.811422124195952E-007
700	2	0,0312	2.423513372130604E-017	6.962211794211540E-009	700	5381	6,723	3.979518834627869E-013	9.868684010315982E-007
800	1	0,0156	1.898259261341633E-017	6.178116683323514E-009	800	7233	6,739	3.320880636617289E-013	9.781497145312577E-007
900	1	0,0156	1.898287555442226E-017	6.217344191270751E-009	900	8492	34,398	3.184598432419699E-013	9.725932171792865E-007
1000	2	0,0312	1.090882028325996E-016	1.477150405576858E-008	1000	3994	6,006	3.955650534625364E-013	8.972882642975709E-007
2000	2	0,0780	1.455144321306684E-015	5.395614736176513E-008	2000	8530	21,184	3.922703102097897E-013	8.938271257262640E-007
3000	2	0,124	7.939889297191202E-015	1.260429902654441E-007	3000	22153	281,86	3.788343126000491E-013	9.975994044783643E-007
4000	3	0,280	2.792266323918993E-014	2.363410945430655E-007	4000	11090	108,43	4.556781206046547E-013	9.596634520540840E-007
5000	1	0,0936	3.813198638301931E-014	2.807362363516714E-007	5000	28630	381,063	4.410252070004592E-013	9.918067765140283E-007
6000	2	0,265	1.565575681035597E-013	5.597776665469857E-007	6000	44246	1572,911	3.767433847262675E-013	9.984632528252074E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

7000	1	0,140	1.353694133227115E-013	5.326387778938908E-007	7000	6520	5582,0	3.366892280822580E-013	9.971533180043968E-007
8000	1	0,171	1.353713808408680E-013	5.598724872439071E-007	8000	2231	767,68	4.880669410975839E-013	9.930544294785434E-007
9000	1	0,218	5.478290645117493E-013	1.061506879568883E-006	9000	2687	309,02	4.740329762637823E-013	9.873795855672580E-007
10000	1	0,187	5.478311892901751E-013	1.080433147472164E-006	10000	5721	2077,7	4.470087670772533E-013	9.972891768507958E-007
Extended Trigonometric Function									
2	7	0,00001	4.118630172173135E-015	1.283531295128470E-007	2	5	0,0000	1.439816483752180E-015	7.588982134499047E-008
10	11	0,00001	2.230268847900526E-014	1.909903055962100E-007	10	159	0,0780	2.795056541271424E-005	7.915894902490765E-007
30	8	0,00001	2.189968845699765E-013	9.359445198526394E-007	30	322	0,1404	9.896984828400238E-007	9.650552953135917E-007
50	90	0,0936	8.265102018831565E-006	9.159918306256174E-007	50	153	0,124	8.265105619257267E-006	8.900923711062209E-007
70	22	0,0468	7.099325853671964E-013	7.704573700144978E-007	70	157	0,140	5.891931529266082E-006	8.322511804106331E-007
100	13	0,0312	4.293218709095835E-014	4.762272787070820E-007	100	155	0,358	3.997910166249718E-006	8.530681059550687E-007
300	72	0,327	2.965834064722280E-006	8.003484319673071E-007	300	181	0,546	1.217457095133102E-006	8.748946040498164E-007
500	76	0,608	1.891376987217258E-012	8.894096180290909E-007	500	193	0,982	3.173231767187850E-007	9.922400623382144E-007
700	21	0,280	3.410997761819368E-014	2.968443382893337E-007	700	515	3,666	1.522798830666710E-008	9.115937718179900E-007
900	15	0,374	4.101026925600568E-013	7.544600551329203E-007	900	91	0,936	1.506612921809311E-006	8.104904774097933E-007
1000	16	0,343	2.407800328183518E-013	9.221210379022950E-007	1000	219	2,371	1.303921313977099E-007	9.519862826515891E-007
2000	28	0,951	6.846370275842588E-014	3.238916004143440E-007	2000	193	3,931	9.144383851134103E-008	8.892454456880593E-007
3000	17	1,123	8.676766705840498E-014	5.573562227297275E-007	3000	109	3,634	2.896187641768383E-007	9.810544586696390E-007
4000	144	7,722	5.359263108204200E-009	9.585302257734790E-007	4000	149	6,302	5.500548689325039E-008	9.586915266845007E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

5000	20	2,028	5.631950355138525E-013	9.601184830611301E-007	5000	166	9,016	1.084641197792077E-009	9.581150400783655E-007
6000	85	7,020	1.015908369899062E-008	9.380058329546548E-007	6000	223	15,326	1.397749622067523E-007	1.064263339059666E-006
7000	22	3,634	9.958539631876273E-014	5.550667669985097E-00	7000	33	10,369	1.616751271835835E-013	8.628029375718668E-007
8000	17	3,494	2.476738328767791E-013	8.923416336562075E-007	8000	195	16,255	2.067778192625546E-008	8.105275018608885E-007
9000	64	9,204	4.834887388847658E-008	8.538626210437672E-007	9000	160	16,863	4.200078967754549E-008	9.690519674836885E-007
10000	28	6,162	4.708593700335272E-014	4.078582620802571E-007	10000	289	31,496	6.026106240697152E-009	9.564086228418440E-007
Rosenbrock function									
2	172	0,0468	7.022022388330709E-013	4.680030000000000E-002	2	2402	0,514	1.158912451274054E-012	9.633948664051166E-007
10	176	0,0312	4.529623249841092E-013	6.016920785643550E-007	10	2507	0,592	8.278624805041315E-013	8.142503564650818E-007
30	178	0,0624	4.877895989821792E-013	6.247500098171260E-007	30	2559	0,826	9.394797705994882E-013	8.674582252395963E-007
50	178	0,109	8.129826649702989E-013	8.065487945215496E-007	50	2586	0,936	9.615290386884714E-013	8.775004354982795E-007
70	178	0,078	1.138175730958418E-012	9.543214034704613E-007	70	2612	0,936	8.279316557114959E-013	8.142841170948509E-007
100	180	0,140	8.414690427960257E-013	8.204178421279232E-007	100	2612	0,873	1.182759508159279E-012	9.732556728783636E-007
300	182	0,280	9.039851239344060E-013	8.501256835405696E-007	300	2691	1,575	8.242370178962514E-013	8.124414823883903E-007
500	184	0,514	5.419553739404138E-013	6.582443710100288E-007	500	2717	1,809	8.448993072057452E-013	8.225856307486787E-007
700	184	0,811	7.587375235165793E-013	7.788452431343108E-007	700	2717	2,199	1.182859030088051E-012	9.732964439880982E-007
900	184	0,686	9.755196730927480E-013	8.831274956310098E-007	900	2743	2,605	9.353659488997601E-013	8.655303446246675E-007
1000	184	0,748	1.083910747880836E-012	9.308981168381300E-007	1000	2743	3,135	1.039295498777511E-012	9.123490910014748E-007
2000	186	1,825	7.774795390011192E-013	7.885563649402472E-007	2000	2771	5,163	8.183730219929060E-013	9.976455391138729E-007
3000	186	2,605	1.166219308501645E-012	9.657803637637647E-007	3000	2796	7,0356	1.177580746949689E-012	9.710941967653472E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

4000	188	3,260	5.593387268584423E-013	6.686235297212056E-007	4000	2822	9,609	9.656806664189515E-013	8.794180173872138E-007
5000	188	4,524	6.991734085730580E-013	7.475438319062410E-007	5000	2822	11,325	1.207100833023728E-012	9.832192337579511E-007
6000	188	5,366	8.390080902876737E-013	8.188932389178021E-007	6000	2848	13,275	8.908998825238162E-013	8.447066934247099E-007
7000	188	7,004	9.788427720022893E-013	8.845057901842763E-007	7000	2848	16,052	1.039383196277742E-012	9.123875077158574E-007
8000	188	7,082	1.118677453716905E-012	9.455764638535232E-007	8000	2848	17,534	1.187866510031661E-012	9.753832736700814E-007
9000	190	8,112	4.517529404460311E-013	6.012271381903165E-007	9000	2874	20,645	8.219100059953804E-013	8.113660365646204E-007
10000	190	8,798	5.019477116067027E-013	6.337490492620655E-007	10000	2847	22,526	9.132333399948699E-013	8.552548972158972E-007
Extended Rosenbrock function									
2	638	0,140	6.761200336823556E-013	7.352204111783463E-007	2	818	0,187	8.144458168875323E-013	9.934153931943999E-007
10	640	0,249	1.212429964680212E-012	9.847270092082690E-007	10	1158	0,452	1.139196550266636E-014	9.551213790150187E-008
30	642	0,280	1.308380956330307E-012	1.022613162983626E-007	30	1210	0,421	1.292790553477842E-014	1.017533123396662E-007
50	644	0,312	7.827548923489485E-013	7.914082273907374E-007	50	1236	0,452	1.325198852670396E-014	1.030238761227631E-007
70	644	0,436	1.095856849288528E-012	9.364068428490091E-007	70	1263	0,452	1.139292969273423E-014	9.551612469781254E-008
100	646	0,483	8.10182003455385E-013	8.050247681392107E-007	100	1289	0,577	1.001017095668590E-014	8.953489037083204E-008
300	648	1,029	8.703509154503970E-013	8.341587235271881E-007	300	1236	0,639	7.951193116022370E-014	2.523559278244733E-007
500	646	1,85	4.050910001727672E-012	1.800090105130276E-006	500	1263	0,764	8.137806923381680E-014	2.552775810939937E-007
700	650	2,41	7.305074172031160E-013	7.642204493179433E-007	700	1265	1,123	7.293009910796112E-014	2.939419363955611E-007
900	650	3,432	9.392238221182951E-013	8.665445381679921E-007	900	1289	1,312	9.009153861017374E-014	2.686046711124961E-007
1000	650	3,65	1.043582024575885E-012	9.134181448631884E-007	1000	1289	1,482	1.001017095668599E-013	2.831341836253071E-007

7.2. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES STEEPEST DESCENT ET EPSILON STEEPEST DESCENT

2000	652	6,75	7.485421221245212E-013	7.737405126262892E-007	2000	1341	2,730	7.573205823908790E-014	2.462847776216679E-007
3000	652	10,06	1.122813183186824E-012	9.476347246269491E-007	3000	1343	3,510	7.271904213870295E-014	2.967954299010044E-007
4000	654	12,994	5.385203694245816E-013	6.560631826334871E-007	4000	1368	5,085	9.301137901033976E-014	2.729149899721952E-007
5000	654	16,61	7.335009369516540E-007	6.731504617807383E-013	5000	1370	6,224	7.442477397125909E-014	2.969661476756226E-007
6000	654	20,49	8.077805541368950E-013	8.035100182391769E-007	6000	1394	7,176	8.580872430890899E-014	2.621423525561082E-007
7000	654	26,176	9.424106464930517E-013	8.678900127968352E-007	7000	1394	8,954	1.001101783603960E-013	2.831461021644509E-007
8000	654	26,671	1.077040738849208E-012	9.278134506538795E-007	8000	1396	9,126	7.323917259410984E-014	2.956323285274308E-007
9000	654	29,920	1.211670831205365E-012	9.840947739501796E-007	9000	1420	10,633	7.916383401047167E-014	2.517951874727691E-007
10000	656	33,68	4.832627232611456E-013	6.218402656782670E-007	10000	1420	11,840	8.795981556718809E-014	2.654154320943478E-007

7.3 Résultats numériques : Méthodes CGBRB et autres méthodes du gradient conjugué

7.3.1 Table 1

Liste des fonctions test

n : Nombre des variables

No	Fonction	n	Points initiaux
1	Edensch	40,100	(0,0,...,0),(1,1,...,1)
2	Diagonal 3	40,100	(1,1,...,1),(0.1,0.1,...,0.1)
3	Partial Perturbed Quadratic	40,100	(0.01,0.01,...,0.01),(0.01,0.01,...,0.01)
4	Fletcher	40,500	(1.1,1.1,...,1.1),(0.999,0.999,...,0.999)
5	Arwhead	40,500	(1,1,...,1),(0.01,0.01,...,0.01)
6	Nondia	40,10000	(1.001,1.001,...,1.001),(0.99999,0.99999,...,0.99999)
7	Generalized PSC1	100,500	(0.3,0.3,...,0.3),(0.3,0.3,...,0.3)
8	Perturbed Quadratic	100,500	(0.0001,0.0001,...,0.0001),(0.001,0.001,...,0.001)
9	Diagonal 2	100,500	(1,1,...,1),(1,1,...,1)
10	Broyden Tridiagonal	100,500	(0.99999,0.99999,...,0.99999),(0.99,0.99,...,0.99)
11	Dixmaane	500,1000	(0.001,0.001,...,0.001),(0.001,0.001,...,0.001)
12	Liarwhd	500,1000	(0.25,0.25,...,0.25),(0.2,0.2,...,0.2)
13	Nondquar	500,1000	(0.0015,0.0015,...,0.0015),(0.0012,0.0012,...,0.0012)
14	Partial Perturbed Quadratic	500,1000	(0.0000001,...,0.0000001),(0.0000001,...,0.0000001)
15	Quadratic diagonal Perturbed	500,1000	(0.00001,...,0.00001),(0.00001,...,0.00001)
16	Quadratic QF1	500,1000	(0,0,...,0),(0,0,...,0)
17	Tridiagonal Perturbed Quadratic	1000,10000	(0.000001,...,0.000001),(0.000001,...,0.000001)

7.3. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES CGBRB ET AUTRES MÉTHODES DU GRADIENT CONJUGUÉ

No	Fonction	n	Points initiaux
18	Steepest Rosenbrog	1000,10000	(0.99999,...,0.99999),(0.99999,...,0.99999)
19	Sinquad	1000,10000	(0,0,...,0),(0,0,...,0)
20	Scaled Quadratic SQ2	1000,10000	(0.000000001,...,0.000000001),(0.00000001,...,0.00000001)
21	Scaled Quadratic SQ1	1000,10000	(0.0000001,...,0.0000001),(0.0000001,...,0.0000001)
22	Raydan 2	1000,10000	(0.3,0.3,...,0.3),(0.2,0.2,...,0.2)
23	Raydan 1	1000,10000	(0.001,0.001,...,0.001),(0.01,0.01,...,0.01)
24	Generalized White & Holst	1000,10000	(1.01,1.01,...,1.01),(1.01,1.01,...,1.01)
25	Generalized Tridiagonal 2	1000,10000	(0,0,...,0),(0,0,...,0)
26	Generalized Tridiagonal 1	1000,10000	(0.61,0.61,...,0.61),(0.61,0.61,...,0.61)
27	Dixmaan _j	1000,10000	(1.99,1.99,...,1.99),(1.99,1.99,...,1.99)
28	Dixmaan _f	1000,10000	(0.0001,...,0.0001),(0.0001,...,0.0001)
29	Extended Denschn _f	1000,10000	(0.999,...,0.999),(0.999,...,0.999)
30	Extended Denschn _b	1000,10000	(1,1,...,1),(1,1,...,1)
31	Cosine	1000,10000	(1.9,1.9,...,1.9),(1.5,1.5,...,1.5)
32	Biggs _{b1}	1000,10000	(1,1,...,1),(1,1,...,1)
33	Almost Perturbed Quadratic	1000,10000	(1,1,...,1),(1,1,...,1)
34	Quadratic QF2	1000,10000	(1,1,...,1),(1,1,...,1)

7.3. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES CGBRB ET AUTRES MÉTHODES DU GRADIENT CONJUGUÉ

7.3.2 Table 2

Résultats des tests numériques des méthodes : CGBRB, Steepest descent method et PRP

n : Nombre des variables

Problèmes	n	CGBRB	Steepest descent method	PRP
		NI/NF/NG/NR	NI/NF/NG/NR	NI/NF/NG/NR
1	40	41/186/41/0	51/192/52/5	82/236/82/0
	100	42/196/42/0	33/153/33/6	54/269/54/0
2	40	60/315/60/0	67/348/67/6	67/404/67/0
	100	102/639/102/0	113/837/113/3	127/1012/127/0
3	40	50/298/50/0	51/320/51/2	- / - / - / -
	100	64/463/64/0	67/499/67/12	111/959/111/0
4	40	34/395/34/0	- / - / - / -	34/502/43/0
	500	36/413/36/0	- / - / - / -	37/428/37/0
5	40	19/128/19/0	21/99/22/7	36/366/37/0
	500	34/366/34/0	44/512/45/12	67/713/68/0
6	40	39/454/39/0	22/249/22/6	62/798/62/0
	10000	5/88/5/0	- / - / - / -	5/88/5/0
7	100	3603/4967/3606/0	- / - / - / -	- / - / - / -
	500	1536/2106/1537/0	- / - / - / -	- / - / - / -
8	100	53/371/53/0	62/460/62/2	71/558/71/0
	500	259/2386/259/0	161/1589/161/78	280/3186/280/0
9	100	530/536/535/0	653/653/652/7	462/464/463/0
	500	3092/3117/3098/0	- / - / - / -	3260/3270/3260/0
10	100	57/264/57/0	54/269/54/17	176/1208/176/0
	500	57/263/57/0	- / - / - / -	223/1536/223/0
11	500	6/11/6/0	12/13/12/1	19/26/19/0
	1000	6/12/6/0	15/17/15/2	21/31/21/0
12	500	29/290/29/0	- / - / - / -	- / - / - / -
	1000	66/752/66/0	- / - / - / -	- / - / - / -
13	500	6/14/7/0	30/60/37/2	8/19/9/0
	1000	26/36/27/0	24/37/25/2	205/214/206/0
14	500	25/253/25/0	16/153/16/2	16/171/16/0
	1000	38/359/30/0	29/338/29/10	22/263/22/0

7.3. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES CGBRB ET AUTRES MÉTHODES DU GRADIENT CONJUGUÉ

Problèmes	n	CGBRB	Steepest descent method	PRP
		NI/NF/NG/NR	NI/NF/NG/NR	NI/NF/NG/NR
15	500	7/58/7/0	- / - / - / -	7/60/7/0
	1000	7/64/7/0	- / - / - / -	- / - / - / -
16	500	5/45/5/0	- / - / - / -	5/45/5/0
	1000	5/41/5/0	- / - / - / -	5/41/5/0
17	1000	48/503/48/0	65/712/65/51	57/662/57/0
	10000	140/1880/140/0	102/1417/102/4	104/1538/104/0
18	1000	28/227/28/0	- / - / - / -	- / - / - / -
	10000	31/257/31/0	- / - / - / -	- / - / - / -
19	1000	4/110/4/0	- / - / - / -	4/111/4/0
	10000	6/213/6/0	- / - / - / -	6/212/6/0
20	1000	4/31/4/0	6/51/6/3	5/41/5/0
	10000	19/233/19/0	20/255/20/1	19/243/19/0
21	1000	26/249/29/0	12/113/12/3	34/349/34/0
	10000	53/662/53/0	23/297/23/1	78/1070/78/0
22	1000	11/12/11/0	- / - / - / -	11/16/11/0
	10000	10/19/10/0	- / - / - / -	11/38/11/0
23	1000	159/933/159/0	- / - / - / -	138/1028/138/0
	10000	439/4021/439/0	124/1220/124/55	400/4551/400/0
24	1000	11/169/11/0	- / - / - / -	11/180/11/0
	10000	13/187/13/0	- / - / - / -	5338/236354/5338/0
25	1000	55/415/55/0	65/511/65/33	301/2970/301/0
	10000	53/399/53/0	71/564/71/36	- / - / - / -
26	1000	140/705/140/0	- / - / - / -	46/226/46/0
	10000	116/581/116/0	43/238/43/0	- / - / - / -
27	1000	24/135/24/0	21/98/21/3	98/1592/98/0
	10000	61/102/61/0	75/502/75/6	97/305/97/0
28	1000	350/355/350/0	251/273/257/7	407/407/407/0
	10000	770/775/770/0	673/794/678/18	991/991/991/0

7.3. RÉSULTATS NUMÉRIQUES : MÉTHODES CGBRB ET AUTRES MÉTHODES DU GRADIENT CONJUGUÉ

29	1000	18/148/18/0	16/132/16/7	26/212/27/0
	10000	20/164/20/0	17/141/17/0	34/301/35/0
30	1000	29/75/29/0	35/82/36/4	48/102/49/0
	10000	31/80/31/0	33/74/34/2	54/111/56/0
31	1000	13/49/13/0	17/41/17/5	25/66/25/0.....
	10000	11/47/11/0	15/37/15/3	19/52/19/0
32	1000	82/185/82/0	35/96/35/2	96/462/96/0
	10000	82/185/82/0	35/96/35/2	96/462/96/0
33	1000	67/695/67/0	38/414/38/27	109/1283/109/0
	10000	193/2596/193/0	112/1549/112/11	223/3382/223/0
34	1000	80/901/80/0	58/695/58/0	58/695/58/0
	10000	231/3331/231/0	56/832/56/5	294/4799/294/0

7.4 Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse on a accéléré la convergence de la méthode du gradient par deux algorithmes différents :

- 1) L'epsilon steepest descent algorithm
- 2) L'algorithme CGBRB

On a démontré que ces deux algorithmes convergent globalement et que numériquement ils sont plus performants que la méthode du gradient.

Reste à montrer que théoriquement ces deux algorithmes ont une vitesse de convergence meilleure que celle du gradient.

On sait par exemple que la méthode du gradient a une vitesse de convergence linéaire. On essayera donc de montrer que nos deux méthodes ont une vitesse de convergence quadratique. Pour cela il nous faut rajouter d'autres hypothèses sur f . Ceci constitue un bon sujet de thèse de doctorat.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] K. Amini, P. Faramarzi, and N. Pirfalah. A modified hestenes–stiefel conjugate gradient method with an optimal property. *Optimization Methods and Software*, 34(4) :770–782, 2019.
- [2] N. Andrei. An unconstrained optimization test functions collection. *Adv. Model. Optim.*, 10(1) :147–161, 2008.
- [3] S. Babaie-Kafaki. Two modified scaled nonlinear conjugate gradient methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 261 :172–182, 2014.
- [4] S. Babaie-Kafaki and R. Ghanbari. A descent extension of the polak–ribière–polyak conjugate gradient method. *Computers & Mathematics with Applications*, 68(12) :2005–2011, 2014.
- [5] S. Basri and M. Mamat. A new class of nonlinear conjugate gradient with global convergence properties. *Materials Today : Proceedings*, 5(10) :22029–22035, 2018.
- [6] I. Bongartz, A. R. Conn, N. Gould, and P. L. Toint. Cute : Constrained and unconstrained testing environment. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 21(1) :123–160, 1995.
- [7] A. Boumediene, R. Benzine, and M. Belloufi. Global convergence properties of the bbb conjugate gradient method. *Asian-European Journal of Mathematics*, 13(03) :2050059, 2020.
- [8] C. Brezinski. *Accélération de la convergence en analyse numérique*, volume 584. Springer, 2006.
- [9] A. Cauchy. Méthode générale pour la résolution des systemes d’équations simultanées. *Comp. Rend. Sci. Paris*, 25(1847) :536–538, 1847.

- [10] F. Cordellier. Particular rules for the vector ε -algorithm. *Numerische Mathematik*, 27(2) :203–207, 1977.
- [11] Y. Dai, J. Han, G. Liu, D. Sun, H. Yin, and Y.-X. Yuan. Convergence properties of nonlinear conjugate gradient methods. *SIAM Journal on Optimization*, 10(2) :345–358, 2000.
- [12] Z. Dai. Comments on a new class of nonlinear conjugate gradient coefficients with global convergence properties. *Applied Mathematics and Computation*, 276 :297–300, 2016.
- [13] S. Delladji, M. Belloufi, and B. Sellami. Behavior of the combination of prp and hz methods for unconstrained optimization. *Numerical Algebra, Control & Optimization*, page 0, 2019.
- [14] S. Delladji, M. Belloufi, and B. Sellami. New hybrid conjugate gradient method as a convex combination of fr and ba methods. *Journal of Information and Optimization Sciences*, pages 1–12, 2020.
- [15] D. Di Serafino, V. Ruggiero, G. Toraldo, and L. Zanni. On the steplength selection in gradient methods for unconstrained optimization. *Applied Mathematics and Computation*, 318 :176–195, 2018.
- [16] N. Djeghaba and R. Benzine. Accélération de la convergence de la méthode de la plus forte pente. *Demonstratio mathematica*, 39(1) :169–182, 2006.
- [17] E. D. Dolan and J. J. Moré. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical programming*, 91(2) :201–213, 2002.
- [18] X. L. Dong, H. W. Liu, and Y. B. He. New version of the three-term conjugate gradient method based on spectral scaling conjugacy condition that generates descent search direction. *Applied Mathematics and Computation*, 269 :606–617, 2015.
- [19] X. L. Dong, H. W. Liu, Y. B. He, and X. M. Yang. A modified hestenes–stiefel conjugate gradient method with sufficient descent condition and conjugacy condition. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 281 :239–249, 2015.
- [20] X. Du, P. Zhang, and W. Ma. Some modified conjugate gradient methods for unconstrained optimization. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 305 :92–114, 2016.
- [21] X. Du, P. Zhang, and W. Ma. Some modified conjugate gradient methods for unconstrained optimization. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 305 :92–114, 2016.
- [22] M. Fatemi. A new efficient conjugate gradient method for unconstrained optimization. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 300 :207–216, 2016.

- [23] R. Fletcher. Practical methods of optimization. 1987. *John and Sons, Chichester*, 1987.
- [24] R. Fletcher. Practical method of optimization. unconstrained optimization, ed, 1997.
- [25] R. Fletcher. *Practical methods of optimization*. John Wiley & Sons, 2013.
- [26] R. Fletcher and C. M. Reeves. Function minimization by conjugate gradients. *The computer journal*, 7(2) :149–154, 1964.
- [27] W. W. Hager and H. Zhang. A new conjugate gradient method with guaranteed descent and an efficient line search. *SIAM Journal on optimization*, 16(1) :170–192, 2005.
- [28] M. R. Hestenes, E. Stiefel, et al. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of research of the National Bureau of Standards*, 49(6) :409–436, 1952.
- [29] W. Hu, J. Wu, and G. Yuan. Some modified hestenes-stiefel conjugate gradient algorithms with application in image restoration. *Applied Numerical Mathematics*, 158 :360–376, 2020.
- [30] J. Jian, L. Han, and X. Jiang. A hybrid conjugate gradient method with descent property for unconstrained optimization. *Applied Mathematical Modelling*, 39(3-4) :1281–1290, 2015.
- [31] X. Jiang and J. Jian. Improved fletcher-reeves and dai-yuan conjugate gradient methods with the strong wolfe line search. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 348 :525–534, 2019.
- [32] J. Li, T. Zhou, and C. Wang. On global convergence of gradient descent algorithms for generalized phase retrieval problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 329 :202–222, 2018.
- [33] X. Li, J. Shi, X. Dong, and J. Yu. A new conjugate gradient method based on quasi-newton equation for unconstrained optimization. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 350 :372–379, 2019.
- [34] J. Liu and S. Li. New hybrid conjugate gradient method for unconstrained optimization. *Applied Mathematics and Computation*, 245 :36–43, 2014.
- [35] J. Liu, Y. Zhao, and X. Wu. Some three-term conjugate gradient methods with the new direction structure. *Applied Numerical Mathematics*, 150 :433–443, 2020.
- [36] Y. Liu and C. Storey. Efficient generalized conjugate gradient algorithms, part 1 : theory. *Journal of optimization theory and applications*, 69(1) :129–137, 1991.

- [37] M. Lotfi and S. M. Hosseini. An efficient dai–liao type conjugate gradient method by reformulating the cg parameter in the search direction equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 371 :112708, 2020.
- [38] P. Mtagulwa and P. Kaelo. An efficient modified prp-fr hybrid conjugate gradient method for solving unconstrained optimization problems. *Applied Numerical Mathematics*, 145 :111–120, 2019.
- [39] C. Nasreddine and S. Badreddine. Comments on Ĥ new hybrid conjugate gradient method as a convex combination of fr and prp methods Ĥ. *Filomat*, 33(14) :4573–4574, 2019.
- [40] B. T. Polyak. The conjugate gradient method in extremal problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 9(4) :94–112, 1969.
- [41] G. Ribière and E. Polak. Note sur la convergence de directions conjuguées. *Rev. Francaise Informat Recherche Operationelle*, 16 :35–43, 1969.
- [42] M. Rivaie, M. Mamat, L. W. June, and I. Mohd. A new class of nonlinear conjugate gradient coefficients with global convergence properties. *Applied Mathematics and Computation*, 218(22) :11323–11332, 2012.
- [43] J. Sabi’u, A. Shah, and M. Y. Waziri. Two optimal hager-zhang conjugate gradient methods for solving monotone nonlinear equations. *Applied Numerical Mathematics*, 2020.
- [44] B. Sellami, M. Belloufi, and Y. Chaib. Globally convergence of nonlinear conjugate gradient method for unconstrained optimization. *RAIRO-Operations Research*, 51(4) :1101–1117, 2017.
- [45] B. Sellami and Y. Chaib. New conjugate gradient method for unconstrained optimization. *RAIRO-Operations Research*, 50(4-5) :1013–1026, 2016.
- [46] B. Sellami and M. Chiheb Eddine Sellami. Global convergence of a modified fletcher–reeves conjugate gradient method with wolfe line search. *Asian-European Journal of Mathematics*, 13(04) :2050081, 2020.
- [47] P. S. Stanimirović, B. Ivanov, H. Ma, and D. Mosić. A survey of gradient methods for solving nonlinear optimization. *Electronic Research Archive*, 28(4) :1573, 2020.
- [48] L. Wang, W. Sun, R. J. de Sampaio, and J. Yuan. A barzilai and borwein scaling conjugate gradient method for unconstrained optimization problems. *Applied Mathematics and Computation*, 262 :136–144, 2015.
- [49] M. Y. Waziri, K. Ahmed, and J. SabiŠu. A family of hager–zhang conjugate gradient methods for system of monotone nonlinear equations. *Applied mathematics and Computation*, 361 :645–660, 2019.

- [50] Y.-J. Xie and C.-F. Ma. The scaling conjugate gradient iterative method for two types of linear matrix equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 70(5) :1098–1113, 2015.
- [51] S. Yao, Q. Feng, L. Li, and J. Xu. A class of globally convergent three-term dai-liao conjugate gradient methods. *Applied Numerical Mathematics*, 151 :354–366, 2020.
- [52] O. O. O. Yousif. The convergence properties of rml+ conjugate gradient method under the strong wolfe line search. *Applied Mathematics and Computation*, 367 :124777, 2020.
- [53] G. Yuan, T. Li, and W. Hu. A conjugate gradient algorithm for large-scale nonlinear equations and image restoration problems. *Applied Numerical Mathematics*, 147 :129–141, 2020.
- [54] G. Yuan, J. Lu, and Z. Wang. The prp conjugate gradient algorithm with a modified wwp line search and its application in the image restoration problems. *Applied Numerical Mathematics*, 152 :1–11, 2020.
- [55] G. Yuan and X. Lu. A modified prp conjugate gradient method. *Annals of Operations Research*, 166(1) :73–90, 2009.
- [56] G. Yuan, Z. Wei, and Y. Yang. The global convergence of the polak–ribière–polyak conjugate gradient algorithm under inexact line search for nonconvex functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 362 :262–275, 2019.
- [57] Y. Yuan, W. Sun, et al. Theory and methods of optimization, 1999.
- [58] Z. Zhu, D. Zhang, and S. Wang. Two modified dy conjugate gradient methods for unconstrained optimization problems. *Applied Mathematics and Computation*, 373 :125004, 2020.