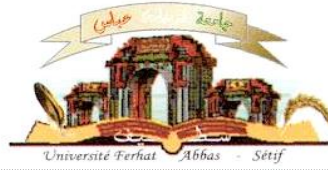


الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Ferhat Abbas Sétif 1  
Faculté des Sciences



جامعة فرحات عباس، سطيف 1  
كلية العلوم

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N°..... / /2021

**THÈSE**

Présentée par

**KINA Abdelkrim**

Pour l'obtention du diplôme de

**DOCTORAT EN SCIENCES**

**Filière: MATHÉMATIQUES**

**Spécialité: MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES**

**THÈME**

**Etude qualitative d'une classe de systèmes différentiels**

Soutenue publiquement le : 30/03/2021

DEVANT LE JURY

Président	<b>BENTERKI Djamel</b>	<b>Prof. Université Ferhat Abbas Sétif 1</b>
Directeur	<b>BENDJEDDOU Ahmed</b>	<b>Prof. Université Ferhat Abbas Sétif 1</b>
Examineur	<b>BERBOUCHA Ahmed</b>	<b>Prof. Université Abderrahmane Mira Béjaïa</b>
Examineur	<b>MERZOUGUI Abdelkrim</b>	<b>Prof. Université Mohamed Boudiaf M'sila</b>
Invité	<b>CHEURFA Rachid</b>	<b>MCA. Université Ferhat Abbas Sétif 1</b>

*Année universitaire 2020/2021*

# Remerciements

Je voudrai tout d'abord remercier Monsieur Ahmed Bendjeddou, mon Directeur de thèse qui est à l'origine de ce travail. C'est un honneur pour moi de travailler avec lui. Je lui suis infiniment reconnaissant, non seulement parce qu'il a accepté de me proposer un sujet de thèse, mais aussi parce qu'il a partagé ses idées avec moi. Il a dirigé ma thèse avec beaucoup de patience et il m'a beaucoup encouragé.

Je remercie Dr. Aziza Berbache pour son aide précieuse, je lui exprime toute mes gratitudees.

J'adresse mes remerciements à Monsieur Djamel Benterki, Professeur à l'université Sétif 1, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse, je l'en remercie énormément.

Je tiens à remercier Monsieur Ahmed Berboucha, Professeur à l'université de Bejaia, pour l'intérêt accordé à notre travail et pour m'avoir honoré en acceptant de l'évaluer.

Je tiens aussi à remercier Monsieur Abdelkrim Merzougui, Professeur à l'université de M'sila, d'avoir accepté la lourde tache de lire, commenter et juger ma thèse.

Je tiens aussi à remercier Monsieur Rachid Cheurfa, Maitre de conférences à l'université de Sétif 1, d'avoir accepté notre invitation à participer à ce jury.

Enfin, je remercie mes parents et ma femme qui m'ont toujours encouragé et soutenu sous toutes formes et ont toujours cru en ma volonté de réussir.

Merci à tous...

---

---

## Liste des figures

1.1	Champ de vecteurs . . . . .	7
1.2	Premier exemple de cycle limite, d'après Poincaré [49] du système (1.6) . .	15
1.3	Cycle limite stable . . . . .	17
1.4	Cycle limite instable . . . . .	17
1.5	Cycles limites semi-stable . . . . .	18
2.1	Deux cycles limites pour le système (2.19) . . . . .	31
2.2	Deux cycles limites pour le système (2.21) . . . . .	32
2.3	Portrait de phase du système (2.35) . . . . .	38
2.4	Portrait de phase du système (2.36) . . . . .	39
3.1	Le portrait de phase dans le disque de Poincaré du système (3.13) pour $n = 1$	45
3.2	Le portrait de phase dans le disque de Poincaré du système (3.13) pour $n = 2$	46
3.3	Portrait de phase du système différentiel (3.35) . . . . .	57

---

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions préliminaires</b>	<b>5</b>
1.1 Systèmes différentiels planaires . . . . .	5
1.1.1 Champ de vecteurs . . . . .	6
1.1.2 Solution d'un système différentiel . . . . .	6
1.1.3 Portrait de phase . . . . .	7
1.1.4 Points singuliers d'un champ de vecteurs . . . . .	8
1.1.5 Matrice Jacobienne associée au champ de vecteurs non linéaires . . . . .	8
1.1.6 Théorème de linéarisation (Théorème de Hartman-Grobman) . . . . .	9
1.2 Courbes invariantes et intégrales premières . . . . .	10
1.2.1 Courbes invariantes algébriques . . . . .	11
1.2.2 Intégrales premières . . . . .	11
1.2.3 Facteur intégrant . . . . .	12
1.2.4 Intégrale première de Darboux . . . . .	14
1.3 Cycles limites . . . . .	14
1.3.1 Existence et non-existence de cycle limite . . . . .	16
1.3.2 Stabilité des cycles limites . . . . .	17
1.4 Le seizième problème de Hilbert . . . . .	19
1.4.1 Théorie de moyennisation . . . . .	20
<b>2 Sur des familles de systèmes différentiels polynomiaux de degré impair avec cycles limites explicite</b>	<b>22</b>
2.1 Introduction . . . . .	22
2.2 Une classe de systèmes différentiels de degré $4k+1$ avec des cycles limites algébriques et non algébriques . . . . .	23
2.2.1 Coexistence de deux cycles limites algébrique et non algébrique . . . . .	24

2.2.2	Applications . . . . .	29
2.3	Une classe de systèmes différentiels de degré impair avec un cycle limite non algébriques . . . . .	33
2.3.1	Résultat principal . . . . .	34
2.3.2	Exemples . . . . .	38
2.4	Conclusion . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Systèmes différentiels de degré pair avec des cycles limites non algébriques</b>	<b>40</b>
3.1	Introduction . . . . .	40
3.2	Une classe de systèmes différentiels de degré pair avec des cycles limites non algébriques . . . . .	41
3.2.1	Résultat principal . . . . .	41
3.2.2	Exemples d'application . . . . .	45
3.3	Cycles limites d'une classe de systèmes différentiels planaires du sixième degré . . . . .	46
3.3.1	Résultat principal . . . . .	47
3.3.2	Application . . . . .	56
3.4	Conclusion . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Sur le nombre maximum de cycles limites de systèmes différentiels de Liénard généralisée</b>	<b>58</b>
4.1	Introduction . . . . .	58
4.2	Bifurcation de cycles limites à partir des orbites périodiques d'un centre linéaire perturbé . . . . .	59
4.2.1	Résultat principal . . . . .	59
4.2.2	Preuve du Théorème 4.2.1. . . . .	62
4.2.3	Applications . . . . .	72
4.3	Annexe . . . . .	75
4.4	Conclusion . . . . .	76
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>77</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>82</b>

---

---

# Introduction

Les équations différentielles sont apparues en mathématiques pour la première fois dans les travaux de Leibnitz (1646-1716) et Newton (1642-1727), à la fin du 17ème siècle.

Au début, les équations différentielles furent étroitement associées à la résolution de problèmes géométriques, à la physique newtonienne (dynamique du point, mouvements des planètes) et à la formalisation du calcul différentiel et intégral. Elles deviennent rapidement un outil efficace dans l'analyse des phénomènes de la nature et une source de réflexion au sujet des concepts mathématiques comme celui de la fonction.

Après Newton et Leibnitz, et bien d'autre, les frères Bernoulli : Jacob (1657-1705) et Johan (1667-1748) ont suivi les travaux précédents et ont introduit les premières équations différentielles proprement dites. D'autres équations aux dérivées particulières de premier ordre, souvent issues de la classification des courbes, de problèmes de physique ou simplement, de cas d'espace, ont été résolues dans les années suivantes par Euler (1707-1783), Clairaut (1713-1765), Riccati (1676-1754) et son fils Vincenzo (1700-1782), Lagrange (1736-1813), D'Alembert (1717-1783).

L'importance des équations différentielles a motivé des générations de mathématiciens et d'autres scientifiques pour développer des méthodes afin d'étudier les propriétés de leurs solutions. Avec ses travaux sur les courbes définies par une équation différentielle ([48],[49],[50],[51]) publiés à la fin du 19ème siècle, Henri Poincaré (1854-1912) a ouvert la voie pour une approche originale des équations différentielles où la priorité n'est plus donnée à la résolution, mais à une étude plus géométrique des solutions en particulier leurs propriétés. Cette recherche a pour but de trouver les propriétés des solutions sans vraiment trouver les solutions de façon explicite, ce sont des méthodes dites qualitatives. Poincaré [49] au chapitre VI, présente la "*Théorie des cycles limites*", en faisant appel à la notion de "*section de Poincaré*", il démontre l'existence d'un nouveau genre de courbes fermées qu'il nomme "*cycle limite*".

En 1900, David Hilbert [33] a posé les fameux vingt-trois problèmes. Dans le Seizième problème, il soulève la question du nombre et de la disposition de trajectoires périodiques

isolées (cycles limites) pour des systèmes différentiels polynomiaux. Ce problème est jusqu'à maintenant non complètement résolu. On note  $H_n$  ce nombre maximal de cycles limites. Dulac (1923) proposa une démonstration assurant que  $H_n$  est fini pour tout  $n$  [21]. Mais sa démonstration comportait une erreur voir [36]. La résolution de ce problème de Dulac a été faite de façon indépendante par Ilyashenko (1991) et Ecalle, Martinet & Moussu (1987) puis Ecalle (1992). Cette résolution permet de montrer que  $H_n < \infty$ . Petrovsky et Landis (1957) crurent trouver la valeur de  $H_2$  mais ils s'aperçurent d'une erreur dans leur propre démonstration (Landis et Petrovski, 1967) avant que celui-ci ne soit infirmé par un contre-exemple de Shi (1982) dans lequel un système quadratique a quatre cycles limites. Ainsi, si  $H_n$  est un nombre fini pour tout  $n$ , la seule chose que l'on sache est que  $H_2 \geq 4$  et  $H_3 \geq 11$  (Jibin et Chunfu, [42]). Christopher et Lloyd [18], ont donné une borne inférieure au nombre  $H_n$  :  $H_n \geq n^2 \log n$ .

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude qualitative des systèmes différentiels planaires de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)), \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)), \end{cases}$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes de variables réelles  $x$  et  $y$ , plus précisément nous étudions l'intégrabilité, l'existence, la stabilité et l'instabilité, le nombre des cycles limites du système différentiel planaires. Plusieurs travaux récents ont été consacrés à l'étude des cycles limites, voir par exemple ([5],[4],[16],[19], [31],[44]). L'intérêt des cycles limites des systèmes différentiels planaires est dû à leurs significations importantes dans les modèles mathématiques issus de la pratique dans plusieurs domaines des sciences, voir par exemple ([35], [39], [41], [46]).

Notre travail entre dans le cadre de l'étude qualitative de quelque systèmes différentiels polynomiaux planaires. Dans un premier temps, on va étudier la coexistence de deux cycles limites, l'un algébrique et l'autre non algébrique pour une classe de systèmes différentiels de degré impair, de plus en détermine l'expression explicite de ces cycles limites. Ce résultat est publié dans un papier intitulé : (A class of differential systems of degree  $4k + 1$  with algebraic and non-algebraic limit cycles)[2]. Un autre résultat est obtenu, concernant l'intégrabilité au sens de Darboux et l'existence d'un cycle limite non algébrique d'expression explicite pour une classe de systèmes différentiels à plusieurs paramètres, qui est publié dans un papier intitulé : ( Non algebraic limit cycles for family of autonomous polynomial planar differential systems )[7]. En outre, deux autres résultats sont obtenus, sur l'existence de cycles limites non algébrique pour deux classes de systèmes différentiels planaires de degré pair qui sont publiés dans deux papiers de recherches intitulés : (A class of polynomial differential systems with explicit limit cycles )[6] et ( A

class of differential systems of degree even with exact non algebraic limit cycles ) [40].

Finalement notre dernier résultat obtenu, concerne le nombre maximum de cycles limites d'une classe de systèmes différentiels qui peuvent être bifurqués à partir des orbites périodiques du centre linéaire.

Cette thèse est structurée comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques notions de base sur les systèmes différentiels planaires utilisés par la suite.

Dans le deuxième chapitre, nous étudierons deux classes de systèmes différentiels de degré impair.

La première classe est :

$$\begin{cases} \dot{x} = (\gamma x - x(x^2 + y^2)^k - 2k\gamma y) (a(x^2 + y^2)^k + bP_{2k}(x, y)) - x((x^2 + y^2)^k - \gamma)^2, \\ \dot{y} = (\gamma y - y(x^2 + y^2)^k + 2k\gamma x) (a(x^2 + y^2)^k + bP_{2k}(x, y)) - y((x^2 + y^2)^k - \gamma)^2, \end{cases}$$

où  $a, b, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , et  $P_{2k}(x, y)$  est un polynôme homogène de degré  $2k$  tel que

$$P_{2k}(x, y) = \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s \binom{2k}{2s+1} x^{2k-2s-1} y^{2s+1} \text{ avec } \binom{2k}{2s+1} = \frac{2k!}{(2s+1)!(2k-2s-1)!}.$$

Nous déterminerons les conditions suffisantes d'existence de deux cycles limites, l'un algébrique et l'autre non-algébrique et nous donnons leurs expressions explicites.

La deuxième classe est :

$$\begin{cases} x' = x(-h + x^4 + y^4)(ax^2 + ay^2 - 4bxy) - (x^2 + y^2)(-x + 4x^2y^3 + 4y^5), \\ y' = y(-h + x^4 + y^4)(ax^2 + ay^2 - 4bxy) + (x^2 + y^2)(y + 4x^3y^2 + 4x^5), \end{cases} \quad (1)$$

où  $a, b, h$  sont des paramètres réels, nous déterminerons les conditions d'existence de cycle limite non algébrique et on donne l'expression explicite de cycle limite pour cette classe de systèmes .

Le troisième chapitre concerne l'étude de l'intégrabilité au sens de Darboux et l'existence des cycles limites de deux classes des systèmes différentiels de degré pair.

La première classe de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(l + wx + vy)^{n+1} + n(vx^2 - vy^2 - 2ly - 2wxy)(x^2 + y^2)^n \\ \quad + x(l + wx + vy)(a(x^2 + y^2) + 2c(x^2 - y^2) - 4bxy)(x^2 + y^2)^{n-1}, \\ \dot{y} = y(l + wx + vy)^{n+1} + n(wx^2 - wy^2 + 2lx + 2vxy)(x^2 + y^2)^n \\ \quad + y(l + wx + vy)(a(x^2 + y^2) + 2c(x^2 - y^2) - 4bxy)(x^2 + y^2)^{n-1}, \end{cases}$$



où  $a, b, c, w, v, l$  sont des constantes réelles et  $n$  un entier strictement positif.

La deuxième classe de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(l + mx + ny)^2 + x(l + mx + ny)(ax^4 + ay^4 + 2bxy^3 + 2bx^3y) \\ \quad - (x^2 + y^2)(4ly^3 - nx^4 + 3ny^4 + 4mxy^3), \\ \dot{y} = y(l + mx + ny)^2 + y(l + mx + ny)(ax^4 + ay^4 + 2bxy^3 + 2bx^3y) \\ \quad + (x^2 + y^2)(4lx^3 + 3mx^4 - my^4 + 4nx^3y), \end{cases}$$

où  $m, n, l$  sont des paramètres réels et  $a, b$  sont des paramètres réels non nuls.

Dans le quatrième chapitre, nous appliquons la méthode de moyennisation du premier et second ordre pour déterminer le nombre maximum de cycles limites qui peuvent être bifurqués à partir des orbites périodiques du centre linéaire  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ , perturbé par une classe du système de Liénard généralisé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k f_{1k}(x) y^{2\beta}, \\ \dot{y} = -x - \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k (f_{2k}(x) y^{2\beta} + g_{2k}(x, y) y^{2\alpha+1}), \end{cases} \quad (2)$$

où  $g_{2k}, f_{1k}$  et  $f_{2k}$  sont des polynômes de degré  $m, n$  et  $l$  respectivement et  $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ ,  $k \in \{1, 2\}$  et  $\varepsilon$  est un paramètre suffisamment petit.

Notons que les travaux de cette thèse en fait l'objet des publications suivantes :

- **A. Bendjeddou, A. Berbache and A. Kina.** A class of differential systems of degree  $4k + 1$  with algebraic and non algebraic limit cycles. U.P.B. Sci. Bull., Series A, Vol. 81, Iss. 3, (2019), p.p 23-30.

- **A. Bendjeddou and A. Kina.** "Non algebraic limit cycles for family of autonomous polynomial planar differential systems." Punjab University Journal of Mathematics 51.10 (2019) : 57-63.

- **A. Bendjeddou and A. Kina.** A class of polynomial differential systems with explicit limit cycles. International Journal of Applied Mathematics and Statistics, 58(2), (2019), 44-53.

- **A. Kina, A. Berbache and A. Bendjeddou .** A class of differential systems of degree even with exact non-algebraic limit cycles. Stud. Univ. Babeş -Bolyai Math. 65(2020), No. 3, 403–410.

- **A. Bendjeddou, A. Berbache and A.Kina.** Limit cycles for a class of generalized Liénard polynomial differential systems via averaging theory, soumis pour publication.

# Chapitre 1

---

## Notions préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions, notions et résultats fondamentaux qui nous seront utiles dans les chapitres 2, 3 et 4.

### ■ 1.1 Systèmes différentiels planaires

On considère le système différentiel polynômial suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)), \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (1.1)$$

de degré  $m$ , où  $P, Q \in \mathbb{R}_m[x, y]$ ,  $\mathbb{R}_m[x, y]$  désigne l'ensemble de polynômes à coefficients réels de degré au plus  $m$  des variables  $x$  et  $y$ , et  $m = \max\{\deg P, \deg Q\}$ .

**Définition 1.1.1.** On appelle système différentiel polynômial homogène un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) = \sum_{i+j=m} \alpha_{ij} x^i y^{m-j}, \\ \dot{y} = Q(x, y) = \sum_{i+j=m} \beta_{ij} x^i y^{m-j}. \end{cases}$$

**Définition 1.1.2.** Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^2$  est une application  $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie sur tout  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ , telle que :

- 1-  $F(t, (x, y)) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est continue.
- 2-  $F(0, (x, y)) = (x, y)$ .
- 3-  $F(t + s, (x, y)) = F(t, F(s, (x, y)))$ , pour tout  $t, s \in \mathbb{R}^+$ .

### ■ 1.1.1 Champ de vecteurs

Avant de commencer l'étude détaillée d'un système différentiel, il est très pratique de faire une représentation graphique du champ de vecteurs qui peut nous fournir des renseignements précieux sur les différentes formes de solutions possibles et leur comportement asymptotique.

**Définition 1.1.1.1.** Un champ de vecteurs (ou champ vectoriel)  $\chi$  sur  $\mathbb{R}^2$  est une application d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  laquelle pour tout point  $p$  de  $\Omega$  correspond un seul vecteur  $\vec{V}(p, t)$  i.e.,

$$\begin{aligned} \chi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ p(x, y) &\longrightarrow \vec{V}(p) = (P(x, y), Q(x, y)), \end{aligned}$$

où  $P, Q \in C^1(\Omega)$ .

**Remarque 1.** Le champ de vecteurs associé au système différentiel polynomial planaire de type (1.1) est noté  $\mathbf{f} = (P, Q)$ . On peut écrire aussi

$$\mathbf{f} = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}.$$

### ■ 1.1.2 Solution d'un système différentiel

**Définition 1.1.2.1.** On appelle solution du système différentiel (1.1) toute fonction dérivable

$$\begin{aligned} \varphi : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)), \end{aligned}$$

où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  (éventuellement non borné), qui satisfait aux conditions suivantes :

- i) pour tout  $t \in I$ ,  $(t, \varphi(t)) \in \Omega$ , où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .
- ii) pour tout  $t \in I$  : 
$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1(t)}{dt} = P(\varphi_1(t), \varphi_2(t)), \\ \frac{d\varphi_2(t)}{dt} = Q(\varphi_1(t), \varphi_2(t)). \end{cases}$$

**Définition 1.1.2.2.** 1- Le graphe d'une solution  $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , (i.e., le sous ensemble  $\{(t, \varphi(t)), t \in I\}$  de  $\mathbb{R}^3$ ) est une courbe intégrale ou trajectoire du système différentiel (1.1).

2- L'image de  $\varphi$  i.e., le sous ensemble  $\{\varphi(t), t \in I\}$  de  $\mathbb{R}^2$  est une orbite du système différentiel (1.1).

3- L'espace  $\mathbb{R}^2$  où les solutions prennent leurs valeurs s'appelle l'espace des phases.

**Définition 1.1.2.3.** Soit  $X_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$  et  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , solution du système différentiel (1.1) telle que  $\varphi(0) = X_0$ .

La solution  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  est dite maximale si pour chaque solution  $\tilde{\varphi} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $I \subset \tilde{I}$  et  $\tilde{\varphi}|_I = \varphi$  alors  $\tilde{\varphi} = \varphi$ , dans ce cas, nous notons  $I = I_{X_0}$  et l'appelons l'intervalle maximal.

**Remarque 2.** Si  $\phi(s) = (\phi_1(s), \phi_2(s))$  est une solution du système différentiel (1.1), alors sa courbe intégrale est en chacun de ses points, le vecteur tangent  $\dot{\phi}(s)$  à  $\phi(s)$  coïncide avec la valeur du champ de vecteurs  $\mathbf{f} = (P, Q)$  au point  $\phi(s)$  (voir la figure (1.1)).

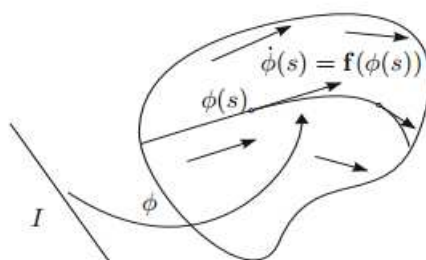


Figure 1.1 – Champ de vecteurs

**Définition 1.1.2.4.** On appelle solution périodique du système (1.1), toute solution  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$  pour laquelle il existe un réel  $T$  telle que

$$\forall t \in I, \varphi_1(t + T) = \varphi_1(t), \varphi_2(t + T) = \varphi_2(t).$$

Le plus petit nombre  $T > 0$  qui convient s'appelle la période de cette solution.

### ■ 1.1.3 Portrait de phase

On reprend le système différentiel (1.1). Soit  $\varphi$  une de ses solutions définie sur l'intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , le sous ensemble  $\{(t, \varphi(t)), t \in I\}$  de  $\mathbb{R}^3$  est une trajectoire de ce système, la façon dont ces trajectoires s'organisent dans l'espace des phases c'est ce qu'on appellera portrait de phase.

**Définition 1.1.3.1.** Un portrait de phase est une représentation géométrique des trajectoires d'un système dynamique dans l'espace des phases, à chaque ensemble de conditions initiales correspond une courbe ou un point.

### ■ 1.1.4 Points singuliers d'un champ de vecteurs

Pour connaître l'aspect des trajectoires du système (1.1) au moins localement, il suffit de connaître leur comportement à travers l'étude des points dits singuliers, voir H. Poincaré [48].

**Définition 1.1.4.1.** On dit que le point  $(x_0, y_0)$  est un point d'équilibre (point au repos) du système (1.1) s'il vérifie :

$$\begin{cases} P(x_0, y_0) = 0, \\ Q(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

**Remarque 3.** La notion de point d'équilibre est la même que celle de point singulier pour le champ de vecteurs. On parle d'un point singulier lorsqu'on s'intéresse au champ de vecteurs lui-même et de point d'équilibre lorsqu'on s'intéresse aux trajectoires du système différentiel.

**Proposition 1.1.1.** [22] Toute orbite périodique contient au moins un point d'équilibre en son intérieur.

### ■ 1.1.5 Matrice Jacobienne associée au champ de vecteurs non linéaires

On note  $D(P, Q)$  la matrice jacobienne associée au champ de vecteurs  $(P, Q)$ .

**Définition 1.1.5.1.** Le système différentiel

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = D(P, Q)_{(x_0, y_0)} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

$$\text{où } D(P, Q)_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} P(x_0, y_0) = 0, \\ Q(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

est appelé le linéarisé du système différentiel non linéaire (1.1) au point d'équilibre  $(x_0, y_0)$ .

**Définition 1.1.5.2.** Un point singulier  $(x_0, y_0)$  du système (1.1) est dit hyperbolique si les valeurs propres de la matrice  $D(P, Q)_{(x_0, y_0)}$  ont toutes une partie réelle non nulle. Dans le cas contraire, le point singulier est dit non hyperbolique.

### Stabilité d'un point d'équilibre

Soit  $(x_0, y_0)$  un point d'équilibre du système (1.1).

Notons par  $Z(t) = (P(x, y), Q(x, y))$  et  $Z_0 = (P(x_0, y_0), Q(x_0, y_0))$ .

**Définition 1.1.5.3.** Un point d'équilibre  $(x_0, y_0)$  du système (1.1) est dit

a)- Stable si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta_\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|Z(t) - Z_0\| < \varepsilon$  pour tout  $t > 0$ .

b)- Asymptotiquement stable si et seulement si il est :

1- stable

2- il existe  $\rho > 0$  tel que  $\|Z(t) - Z_0\| < \rho \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|Z(t) - Z_0\| = 0$ .

c)- Instable s'il n'est pas stable.

**Remarque 4.** La stabilité asymptotique impose que la limite des trajectoires lorsque  $t \rightarrow \infty$  soit le point d'équilibre, tandis que la stabilité neutre (stable mais pas asymptotiquement stable) impose seulement que les trajectoires restent dans un voisinage du point d'équilibre sans nécessairement tendre vers ce point.

### Classification des points au repos

Considérons le linéarisé (1.2) du système différentiel (1.1) au point d'équilibre  $(x_0, y_0)$ , soient  $\alpha$  et  $\beta$  les valeurs propres de la matrice jacobienne  $D(P, Q)_{(x_0, y_0)}$ .

**Définition 1.1.5.4.** 1- Si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$  et  $\alpha\beta < 0$ , le point au repos  $(x_0, y_0)$  est point selle. Il est toujours instable.

2- Si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$  et  $\alpha\beta > 0$  de plus

- Si  $\alpha, \beta > 0$  le point au repos  $(x_0, y_0)$  est un nœud instable.

- Si  $\alpha, \beta < 0$  le point au repos  $(x_0, y_0)$  est un nœud stable.

- Si  $\alpha = \beta = \delta$ , le point au repos  $(x_0, y_0)$  est un nœud propre, il est stable si  $\delta < 0$  et instable si  $\delta > 0$ .

3- Si  $\alpha, \beta$  sont complexes avec  $(\text{Im}(\alpha), \text{Im}(\beta)) \neq (0, 0)$ , alors le point au repos  $(x_0, y_0)$  est un foyer stable si  $\text{Re}(\alpha), \text{Re}(\beta) < 0$  et instable si  $\text{Re}(\alpha), \text{Re}(\beta) > 0$ .

4- Si  $\alpha, \beta$  sont complexes avec  $(\text{Re}(\alpha), \text{Re}(\beta)) = (0, 0)$  et  $(\text{Im}(\alpha), \text{Im}(\beta)) \neq (0, 0)$ , alors le point au repos  $(x_0, y_0)$  est un centre, il est stable.

### ■ 1.1.6 Théorème de linéarisation (Théorème de Hartman-Grobman)

Ce théorème nous permet de réduire l'étude d'un système différentiel de type (1.1) au voisinage d'un équilibre hyperbolique à l'étude d'un système linéaire topologiquement équivalent à (1.1) au voisinage de l'origine.

**Définition 1.1.6.1.** Considérons les deux systèmes différentiels planaires polynômiaux suivants :

$$(Sy_1) : \begin{cases} \dot{x} = P_1(x, y) \\ \dot{y} = Q_1(x, y) \end{cases}, \quad (Sy_2) : \begin{cases} \dot{x} = P_2(x, y) \\ \dot{y} = Q_2(x, y) \end{cases},$$

définis sur deux ouverts  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{R}^2$  respectivement. Le système  $(Sy_1)$  est dit topologiquement équivalent au système  $(Sy_2)$ , s'il existe un homéomorphisme  $H : U \rightarrow V$ , transformant les orbites du premier système en des orbites du second tout en préservant la direction du temps.

**Théorème 1.1.2.** (*Hartman-Grobman, 1967*) *Supposons que la matrice jacobienne au point d'équilibre  $(x_0, y_0)$  a deux valeurs propres  $\alpha, \beta$  telles que  $(\operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta)) \neq (0, 0)$  ; alors les solutions du système (1.1) sont données approximativement par les solutions du système linéarisé (1.2) au voisinage du point d'équilibre.*

Autrement dit, le portrait de phase du système linéarisé (1.2) constitue, au voisinage de ce point d'équilibre, une bonne approximation de celui du système (1.1).

**Remarque 5.** *Si le point d'équilibre  $(x_0, y_0)$  n'est pas hyperbolique, ce procédé de linéarisation ne marche pas, par exemple si le point d'équilibre  $(x_0, y_0)$  est un centre pour le système linéarisé (1.2), la détermination de sa nature dans le cas du système (1.1) nécessite d'autres investigations : c'est le problème du centre.*

**Remarque 6.** *La plupart des systèmes existants dans la nature sont non linéaires. La démarche la plus naturelle pour étudier le comportement des trajectoires d'un système différentiel autonome non linéaire, au voisinage d'un point singulier hyperbolique, consiste à se ramener à l'étude du système linéaire associé.*

**Proposition 1.1.3.** *Les points singuliers du système (1.1) sont des solutions périodiques constantes.*

**Théorème 1.1.4.** [22] *Soit le champ de vecteurs  $\chi$  sur  $\mathbb{R}^2$  : Si  $\gamma$  est une orbite périodique de  $\chi$  ; alors il existe un point singulier de  $\chi$  contenu dans  $\operatorname{Int}(\gamma)$ .*

## ■ 1.2 Courbes invariantes et intégrales premières

Le Mathématicien français Gaston Darboux [20] a trouvé en 1878 des relations entre les courbes algébriques et l'existence des intégrales premières des champs vectoriels polynomiaux planaires. Les courbes algébriques invariantes jouent un rôle important dans la théorie d'intégrabilité des systèmes différentiels planaires polynomiaux.

**Définition 1.2.1.** On appelle courbe invariante du système (1.1), toute courbe d'équation  $U(x; y) = 0$  du plan de phase pour laquelle il existe une fonction  $K = K(x, y)$  appelée cofacteur de la courbe invariante  $U = 0$  telle que :

$$P \frac{\partial U}{\partial x} + Q \frac{\partial U}{\partial y} = KU. \quad (1.3)$$

L'égalité (1.3) montre que sur la courbe invariante, le gradient  $(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y})$  de  $U$  est orthogonal au champ de vecteurs  $\chi = (P; Q)$ , donc en tout point de la courbe invariante, le champ de vecteurs est tangent à cette courbe, elle est formée de solutions (ou trajectoires) du champ de vecteurs  $\chi$ .

### ■ 1.2.1 Courbes invariantes algébriques

**Définition 1.2.1.1.** Une courbe invariante  $U(x, y) = 0$  est dite algébrique si  $U$  est un polynôme, sinon on dit qu'elle est non algébrique ou transcendante.

**Définition 1.2.1.2.** Une courbe algébrique  $U(x, y) = 0$  est irréductible, si  $U(x, y)$  est un polynôme irréductible dans l'anneau  $\mathbb{R}[x, y]$ .

**Théorème 1.2.1.** [30] On considère le système (1.1) et  $\Gamma(t)$  une orbite périodique de période  $T > 0$ . On suppose que  $U : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une courbe invariante

$$\Gamma(t) = \{(x, y) \in \Omega : U(x, y) = 0\},$$

et  $K(x, y) \in C^1$  est le cofacteur donné dans l'équation (1.3), de la courbe invariante  $U(x, y) = 0$ . On suppose que  $p \in \Omega$  tel que  $U(p) = 0$  et  $\nabla U(p) \neq 0$ , alors  $p$  est un point singulier du système (1.3), et

$$\int_0^T \text{div}(\Gamma(t)) dt = \int_0^T K(\Gamma(t)) dt.$$

### ■ 1.2.2 Intégrales premières

Le problème d'intégrabilité consiste à trouver une classe de fonctions d'une intégrale première du système (1.1). Malheureusement c'est un problème sans réponse satisfaisante jusqu'à ce jour.

**Définition 1.2.2.1.** On dit que le système différentiel (1.1) est intégrable sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  s'il existe une fonction analytique  $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , appelée intégrale première de ce système sur  $\Omega$ , qui est constante sur toutes les courbes solutions  $\phi(t)$  du système (1.1) contenues dans  $\Omega$ , i.e.,  $H(\phi(t)) = cte$  pour toutes les valeurs de  $t$  pour lesquelles la solution  $\phi(t)$  est définie et contenue dans  $\Omega$ .



**Théorème 1.2.2.** [15] Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction  $H$  soit une intégrale première du système (1.1) sur  $\Omega$  est que

$$P \frac{\partial H}{\partial x} + Q \frac{\partial H}{\partial y} = 0.$$

Le problème d'intégrabilité est la recherche d'une expression explicite d'une intégrale première. La notion facteur intégrant permet de déduire l'expression de cette dernière.

### ■ 1.2.3 Facteur intégrant

**Définition 1.2.3.1.** Une fonction analytique non constante  $R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est un facteur intégrant du système (1.1) si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est satisfaite

- 1-  $\text{div}(RP, RQ) = 0$ ,
  - 2-  $\frac{\partial(RP)}{\partial x} = -\frac{\partial(RQ)}{\partial y}$ ,
  - 3-  $P \frac{\partial R}{\partial x} + Q \frac{\partial R}{\partial y} = -\text{div}(P, Q)$ ,
- ou de manière équivalente

$$P \frac{\partial(R)}{\partial x} + Q \frac{\partial(R)}{\partial y} = -R \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right).$$

Si le système (1.1) possède un facteur intégrant  $R$ , par le changement de variable indépendant  $\frac{dt}{ds} = R(x, y)$ , nous obtenons le système équivalent :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{ds} = R(x, y)P(x, y), \\ \dot{y} = \frac{dy}{ds} = R(x, y)Q(x, y). \end{cases} \quad (1.4)$$

La fonction

$$H(x, y) = - \int R(x, y)P(x, y)dy + \int \left( R(x, y)Q(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} \int R(x, y)P(x, y)dy \right) dx,$$

est une solution du système

$$\begin{cases} \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} = -R(x, y)P(x, y) \\ \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = R(x, y)Q(x, y), \end{cases}$$

et on peut démontrer que la fonction  $H$  est une intégrale première du système (1.4) et par conséquent du système (1.1).

### Facteur intégrant inverse

Le facteur intégrant inverse est un outil important dans l'étude de l'existence et de la non existence des cycles limites, voir [28].

**Définition 1.2.3.2.** Une fonction non nulle  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite un facteur intégrant inverse du système (1.1) sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , si  $V \in C^1(\Omega)$ ,  $V \neq 0$  sur  $\Omega$  et satisfait l'équation suivante :

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V.$$

**Théorème 1.2.3.** [23] Soit  $V$  un facteur intégrant inverse desystème (1.1) sur un ouvert  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ . alors

1- La fonction  $\frac{1}{V}$  défini dans  $\Omega \setminus \{V = 0\}$  est un facteur intégrant de système (1.1)  
De plus, la fonction

$$I(x, y) = - \int \frac{P(x, y)}{V(x, y)} dy + \int \left( \frac{Q(x, y)}{V(x, y)} + \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{P(x, y)}{V(x, y)} dy \right) dx,$$

est une intégrale première du système (1.1).

2- Si le système (1.1) a une intégrale première  $I$ , alors la fonction

$$V_I(x, y) = \frac{P}{-\frac{\partial I}{\partial y}} = \frac{Q}{\frac{\partial I}{\partial x}},$$

est un facteur intégrant du système (1.1). De plus, le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{P(x, y)}{V_I(x, y)} = -\frac{\partial I}{\partial y}(x, y), \\ \dot{y} = \frac{Q(x, y)}{V_I(x, y)} = \frac{\partial I}{\partial x}(x, y), \end{cases}$$

est Hamiltonien dans  $\Omega \setminus \{V = 0\}$ .

### Facteur exponentiel

**Définition 1.2.3.3.** Si  $h$  et  $g$  deux polynômes premiers entre eux, la fonction  $f = \exp\left(\frac{g}{h}\right)$  s'appelle facteur exponentiel du système (1.1) s'il existe un polynôme  $K(x, y)$  de degré au plus  $(m - 1)$  satisfaisant l'équation (1.3).

**Remarque 7.** Les facteurs exponentiels ne définissent pas de courbes invariantes pour le flot du système (1.1), parce qu'ils ne sont jamais identiquement nuls.

**Proposition 1.2.4.** [22] Si  $f = \exp\left(\frac{g}{h}\right)$  est un facteur exponentiel pour le système polynômial (1.1), alors  $g$  satisfait l'équation  $\mathcal{X}(g) = gK_h + hK_f$  où  $K_h$  et  $K_f$  sont les cofacteurs de  $h$  et  $f$ , respectivement.

### ■ 1.2.4 Intégrale première de Darboux

Une classe importante d'intégrales premières est l'intégrale première de Darboux, ce genre de fonctions peut être définie en utilisant la courbe invariante algébrique et les facteurs exponentiels.

**Théorème 1.2.5.** [22] *Soit le champ de vecteurs complexe planaire polynômial  $\mathcal{X} = (P, Q)$  de degré  $n$  qui admet  $p$  courbes algébriques invariantes irréductibles  $f_i = 0$  avec cofacteurs  $K_i$  pour  $i = 1, \dots, p$  et  $q$  facteurs exponentiels  $\exp\left(\frac{g_j}{h_j}\right)$  avec les cofacteurs  $L_j$  pour  $j = 1, \dots, q$ , alors*

(i) *Il existe  $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$  non toutes nulles telles que  $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = 0$  si et seulement si la fonction*

$$f_1^{\lambda_1} \times f_2^{\lambda_2} \times \dots \times f_p^{\lambda_p} \left( \exp\left(\frac{g_1}{h_1}\right) \right)^{\mu_1} \times \left( \exp\left(\frac{g_2}{h_2}\right) \right)^{\mu_2} \times \dots \times \left( \exp\left(\frac{g_q}{h_q}\right) \right)^{\mu_q} \quad (1.5)$$

*est une intégrale première du champ de vecteurs  $\mathcal{X}$ .*

(ii) *Il existe  $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$  non toutes nulles telles que  $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = -\text{div}(P, Q)$  si et seulement si la fonction (1.5) est un facteur intégrant du champ de vecteurs  $\mathcal{X}$ .*

**Définition 1.2.4.1.** La fonction (1.5) est appelée fonction de Darboux. Si le système polynômial (1.1) a une intégrale première de la forme (1.5), on dit que le système (1.1) a une intégrale première de Darboux.

**Définition 1.2.4.2.** Une fonction de Liouville est une fonction qui peut être exprimée par des quadratures de fonctions élémentaires.

Pour plus de détails sur les fonctions de Liouville voir [24].

Le théorème suivant donne une relation entre l'intégrale première et le facteur intégrant inverse.

**Théorème 1.2.6.** [25] *Si un système polynômial a une intégrale première de Liouville, alors il a un facteur intégrant inverse de Darboux.*

## ■ 1.3 Cycles limites

Le concept de cycle limite fut introduit par Henri Poincaré dans son second mémoire : Sur les courbes définies par une équation différentielle, en 1882 [49], à partir de ses travaux sur le problème des trois corps notamment. La représentation de l'évolution

d'un système (pendule par exemple) au moyen d'une équation différentielle dans le plan de phase défini par Poincaré, c'est-à-dire, dans un espace de coordonnées telle que l'ordonnée soit la dérivée par rapport au temps de l'abscisse (par exemple  $(x, y) = (\text{position}, \text{vitesse})$ ) à conduit Poincaré à une classification des points fixes ou points d'équilibre du système (1.1). Il démontre alors, qu'il en existe trois types différents qu'il appelle : cols, fonds et sommets ou cols, nœud et foyer. Puis, il ajoute qu'en dehors de ces points d'équilibre il existe également des courbes qu'il nomme cycles limites et qui correspondent à des solutions périodiques pour le système considéré, dont les autres courbes définies par la même équation différentielle se rapprochent asymptotiquement sans jamais les atteindre.

**Définition 1.3.1.** On appelle cycle limite du système (1.1), toute orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques de ce système.

Une orbite périodique isolée signifie que les trajectoires voisines ne sont pas fermées, elles spiralent autour du cycle limite en s'éloignant ou en s'approchant.

**Définition 1.3.2.** La solution périodique  $\Gamma$  du système (1.1) est un cycle limite algébrique si elle est un cycle limite et contenu dans une courbe algébrique invariante irréductible  $\Gamma = 0$  du système (1.1), sinon il est appelé cycle limite non algébrique.

**Exemple 1.3.1.** Poincaré [49] au chapitre VII, présente le tout premier exemple de cycle limite. Il s'agit du système de deux équations différentielles du premier ordre et du troisième degré suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 + y^2 - 1) - y(x^2 + y^2 + 1), \\ \dot{y} = y(x^2 + y^2 - 1) + x(x^2 + y^2 + 1). \end{cases} \quad (1.6)$$

ce système admet un unique cycle limite algébrique d'équation :  $x^2 + y^2 = 1$ .

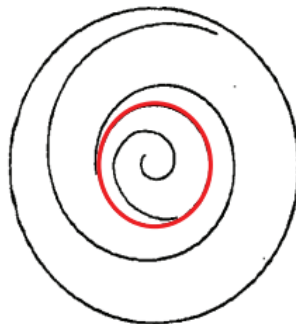


Figure 1.2 – Premier exemple de cycle limite, d'après Poincaré [49] du système (1.6)

### ■ 1.3.1 Existence et non-existence de cycle limite

**Théorème 1.3.2.** ([14]) *Si le système (1.1) n'a pas de point singulier, alors il n'a pas de cycles limites.*

**Remarque 8.** *Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non-linéaires.*

**Théorème 1.3.3.** (Critère [29]) *Soit  $(P, Q)$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  défini sur un ouvert non vide  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x(t); y(t))$  une solution périodique de période  $T$  du système*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x(t), y(t)), \\ \dot{y} = Q(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (1.7)$$

$K : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  une application de classe  $C^1$  telle que

$$\int_0^T K(x(t), y(t)) dt \neq 0,$$

et  $u = u(x, y)$  une solution de classe  $C^1$  de l'équation aux dérivées partielles

$$P(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = K(x, y)u(x, y),$$

alors la trajectoire fermée

$$\Gamma = \{(x(t), y(t)) \in \Omega : t \in [0, T]\}$$

est contenue dans l'ensemble

$$\Sigma = \{(x, y) \in \Omega : u(x, y) = 0\},$$

et  $\Gamma$  n'est pas contenu dans un anneau circulaire. De plus, si le champ de vecteurs  $(P, Q)$  et les fonctions  $K$  et  $u$  sont analytiques, alors  $\Gamma$  est un cycle limite.

**Théorème 1.3.4.** (Critère [29]) *Soit  $(P, Q)$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  défini sur un ouvert non vide  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $V = V(x, y)$  une solution de classe  $C^1$  de l'équation aux dérivées partielles*

$$P(x, y) \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = \left( \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \right) V(x, y),$$

Si  $(\Gamma)$  est un cycle limite du système (1.1), alors  $(\Gamma)$  est contenu dans

$$\Sigma = \{(x, y) \in \Omega : V(x, y) = 0\}.$$

**Théorème 1.3.5.** (Critère de Bendixson) *Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$ , si  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$  ne s'annule pas ou est de signe constant sur  $\Omega$ , alors le système différentiel (1.1) n'admet pas de cycle limite contenu entièrement dans  $\Omega$ .*

### ■ 1.3.2 Stabilité des cycles limites

On considère  $\gamma$  la trajectoire correspondante au cycle limite du système (1.1), les trajectoires avoisinantes ne sont pas fermées mais se rapprochent ou s'éloignent de  $\gamma$ , alors  $\gamma$  est un cycle limite : stable, instable ou semi-stable selon que les courbes proches spirales vers  $\gamma$ , loin de  $\gamma$ , ou les deux respectivement.

**Théorème 1.3.6.**  $\gamma$  étant la trajectoire correspondante au cycle limite du système (1.1), toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines de  $\gamma$  sont telles qu'elles s'enroulent toutes en spirales autour de  $\gamma$  quand  $t \rightarrow +\infty$  ou bien  $t \rightarrow -\infty$ .

1. Si toutes les trajectoires intérieures et extérieures s'enroulent autour de  $\gamma$ , quand  $t \rightarrow +\infty$ , le cycle limite est stable (ou attractif).

2. Si toutes les trajectoires intérieures et extérieures s'enroulent, toutes en spirale autour de  $\gamma$  pour  $t \rightarrow -\infty$ , le cycle limite est instable (ou répulsif).

3. Si les trajectoires spirales intérieures tendent vers l'orbite fermée  $\gamma$  quand  $t \rightarrow -\infty$ , les autres (extérieures) tendent vers  $\gamma$  quand  $t \rightarrow +\infty$  et vice-versa est semi stable.

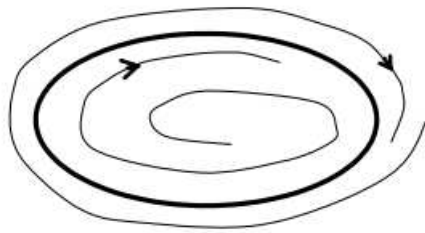


Figure 1.3 – Cycle limite stable

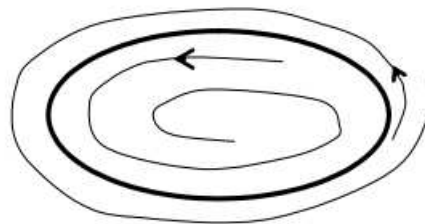


Figure 1.4 – Cycle limite instable

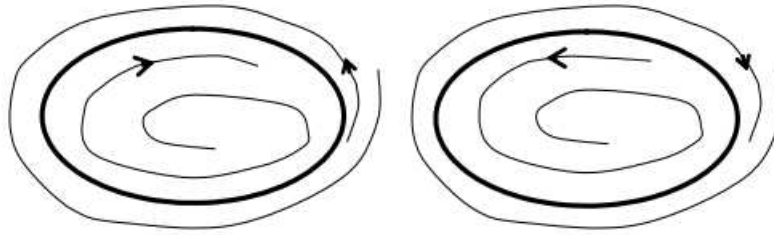


Figure 1.5 – Cycles limites semi-stable

### La section de Poincaré

La section de Poincaré ou la fonction du premier retour de Poincaré est un outil très fréquemment utilisé pour étudier les systèmes dynamiques (Seydel [55]) et notamment la stabilité des orbites périodiques. L'idée de l'application de premier retour de Poincaré est la suivante :

Si une orbite périodique  $\Gamma$  du système (1.1) passe par le point  $(x_0, y_0)$  et  $\Sigma$  est une droite perpendiculaire à  $\Gamma$  en  $(x_0, y_0)$  ; alors pour tout point  $(x, y) \in \Sigma$  suffisamment proche de  $(x_0, y_0)$ , la solution de (1.1) passe par  $(x_0, y_0)$  à  $t = 0$  ;  $(x, y)$  va retraverser la droite  $\Sigma$  à un point  $\Pi(x, y)$  au voisinage de  $(x, y)$ , l'application  $(x, y) \rightarrow \Pi(x, y)$  est appelée l'application de premier retour.

Le théorème suivant confirme l'existence et la continuité de l'application du premier retour de Poincaré  $\Pi(x, y)$ .

**Théorème 1.3.7.** [47] Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et soit le champ de vecteur du système (1.1), supposons que,  $\psi_t(x_0, y_0)$  est une solution périodique de (1.1) de période  $T$  et que le cycle,

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) = \psi_t(x_0, y_0), 0 \leq t \leq T\}$$

est contenu dans  $\Omega$ . Soit  $\Sigma$  une droite orthogonale à  $\Gamma$  en  $(x_0, y_0)$ , c'est-à-dire

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - x_0, y - y_0) \cdot (P(x_0, y_0), Q(x_0, y_0)) = 0\}.$$

Alors il existe un voisinage  $V_{(x_0, y_0)}$  de  $(x_0, y_0)$  et une fonction unique  $\mu : V_{(x_0, y_0)} \rightarrow \mathbb{R}$ , définie et continûment différentiable, telles que  $\mu(x_0, y_0) = T$  et  $\psi_{\mu(x, y)}(x, y) \in \Sigma$ , pour tout  $(x, y) \in V_{(x_0, y_0)}$ .

**Définition 1.3.2.1.** L'application du premier retour de Poincaré de  $\Gamma$  en  $(x_0, y_0)$  est une application continument différentiable définie comme suit :

$$\begin{aligned} \Pi : V_{(x_0, y_0)} \cap \Sigma &\rightarrow \Sigma \\ (x, y) &\rightarrow \Pi(x, y) = \psi_{\mu(x, y)}(x, y) \end{aligned}$$

où  $\Gamma$ ,  $\Sigma$ ,  $\mu(x, y)$  et  $V_{(x_0, y_0)}$  sont définis dans le théorème (1.3.7).

Le théorème ci-dessous donne la formule de la dérivée de la fonction de Poincaré  $\Pi(x, y)$  le long d'une ligne droite  $\Sigma$  au point  $O(0, 0)$ .

**Théorème 1.3.8.** [47] *Soit  $\psi(t)$  une solution périodique de (1.1) de période  $T$ . Alors la dérivée de la fonction de Poincaré  $\Pi$  le long d'une ligne droite  $\Sigma$  qui est normale à  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) = \psi(t) - \psi(0), 0 \leq t \leq T\}$  en  $(x, y) = (0, 0)$  est donnée par*

$$\Pi'(0, 0) = \exp \int_0^T \operatorname{div} (P(\psi(t)), Q(\psi(t))) dt.$$

Le corollaire suivant caractérise la stabilité d'un cycle limite.

**Corollaire 1.3.9.** [47] *Sous les hypothèses du théorème 1.3.8, la solution périodique  $\psi(t)$  du système (1.1) est un cycle limite stable si*

$$\int_0^T \operatorname{div} (P(\psi(t)), Q(\psi(t))) dt < 0,$$

*et est un cycle limite instable si*

$$\int_0^T \operatorname{div} (P(\psi(t)), Q(\psi(t))) dt > 0.$$

*Il peut être un cycle limite stable, instable ou semi-stable ou appartient à une bande continue de cycles si*

$$\int_0^T \operatorname{div} (P(\psi(t)), Q(\psi(t))) dt = 0.$$

## ■ 1.4 Le seizième problème de Hilbert

En 1900, Le mathématicien D. Hilbert présenta, lors du deuxième congrès international de mathématiques [34], 23 problèmes. Le 16<sup>ème</sup> problème de Hilbert comporte deux parties. La première concerne le nombre de branches réelles (ovales) d'une courbe algébrique, et leur disposition. La seconde partie du problème pose la question du nombre maximum et des positions mutuelle des cycles limites de Poincaré (orbites périodiques isolées) pour une équation différentielle polynomiale plane de degré donné, cette question est encore ouverte, voir ([9], [17], [56]).



### ■ 1.4.1 Théorie de moyennisation

Dans la théorie qualitative des systèmes différentiels, l'un des principaux problèmes ouverts est la détermination des cycles limites [56]. Il existe plusieurs méthodes pour étudier le nombre de cycles qui peuvent être bifurqués à partir des orbites périodiques d'un centre, la méthode de moyennisation est l'une des plus importantes méthodes de perturbations utilisée actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. La méthode de moyennisation a une longue histoire, à commencer par les travaux classiques de Lagrange et Laplace en 1788, qui ont fourni une justification intuitive de la méthode. La première formalisation de cette procédure a été donnée par Fatou en 1928. Les importantes contributions pratiques et théoriques de la moyennisation ont été faites en 1930 par Bogoliobov et Krylov [11], En 1945 par Bogoliobov [10] et en 1961 par Bogoliobov et Mitropolsky [12]. Elle a été ensuite développée par Verhulst [52], Sanders et Verhulst [54], Malkin (1956) [45] et Roseau (1966) [53], Buica et Llibre (2004) [13]. Chaque orbite d'un système différentiel est homéomorphe soit un point, soit un cercle, soit en une ligne droite. Dans le premier cas, s'appelle un point singulier ou un point d'équilibre, et dans le second cas, s'appelle une orbite périodique. Le troisième cas n'a pas de nom, ces notes sont dédiées à l'étude analytique des orbites périodiques d'un système différentiel donné, pour plus de détails voir [38].

Dans le cas périodique l'idée de base est de considérer une équation différentielle perturbée mise sous la forme standard suivante :

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon), \quad (1.8)$$

où  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon$  est un paramètre et  $f$  est  $T$ -périodique en  $t$ , l'équation moyennée associée à (1.8) s'écrit

$$\dot{x} = \varepsilon f^0(x),$$

où

$$f^0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t, 0) dt. \quad (1.9)$$

La recherche des racines positives de (1.9) réduit le problème de la détermination des solutions  $T$ -périodiques de (1.8).

Nous présentons les résultats de base de la théorie de la moyennisation dont nous aurons besoin pour prouver les principaux résultats du chapitre 4.

**Théorème 1.4.1.** [13] (**Le théorème de la moyennisation** )

*On considère le système différentiel*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon), \quad (1.10)$$

où  $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues,  $T$ -périodiques par rapport à premières variables et  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$

On suppose que les hypothèses suivantes se tiennent.

(i)  $F_1(t, \cdot) \in C^1(D)$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_1, F_2, R$  et  $D_x F_1$  sont localement lipchitziennes par rapport à  $x$ , et  $R$  est différentiable par rapport à  $\varepsilon$ .

On définit  $F_{k0} : D \rightarrow \mathbb{R}$  pour  $k = 1, 2$  comme

$$F_{10}(\eta) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, \eta) ds.$$

$$F_{20}(\eta) = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{\partial 1(s, \eta)}{\partial \eta} \int_0^s F_1(t, \eta) dt + F_2(s, \eta) \right) ds.$$

(ii) Pour  $V \subset D$ , un ensemble ouvert borné et pour tout  $\varepsilon \in (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \setminus \{0\}$ , il existe  $\varepsilon \in V$  tel que  $F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon) = 0$  et

$$\frac{\partial (F_{10}(\eta) + \varepsilon F_{20}(\eta))}{\partial \eta} \Big|_{\eta=a_\varepsilon} \neq 0.$$

Donc pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, il existe une solution  $\phi(., \varepsilon)$  du système (1.10)  $T$ -périodique isolée telle que  $\phi(., \varepsilon) \rightarrow a_\varepsilon$  si  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Si  $F_{10}$  n'est pas identiquement nulle, alors les zéros de  $F_{10} + \varepsilon F_{20}$  sont principalement les zéros de  $F_{10}$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. Dans ce cas, le résultat précédent fournit le théorème de moyennisation du premier ordre.

Si  $F_{10}$  est identiquement nulle et  $F_{20}$  n'est pas identiquement, alors les zéros de  $F_{10} + \varepsilon F_{20}$  sont les zéros de  $F_{20}$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. Dans ce cas, le résultat précédent fournit le théorème de moyennisation de deuxième ordre.

## Chapitre 2

---

# Sur des familles de systèmes différentiels polynomiaux de degré impair avec cycles limites explicite

### ■ 2.1 Introduction

Un des importants problèmes de la théorie qualitative des équations différentielles est la détermination des cycles limites d'un système différentiel de la forme (1.1). Nous cherchons généralement le nombre de ces cycles limites, mais le problème le plus difficile consiste à en donner une expression explicite de ces cycles limites. Un cycle limite du système (1.1) est une solution périodique isolée dans l'ensemble de toutes les solutions périodiques du système (1.1), il est algébrique s'il est contenu dans une courbe algébrique du plan, sinon il est appelé cycle limite non algébrique. Dans la plupart des articles et des livres sur les équations différentielles ordinaires on trouve des exemples de systèmes différentiels planaires polynomiaux ayant des cycles limites explicitement donnés, il s'agit de cycles algébriques. D'un autre côté, il semble intuitivement que "la plupart" des cycles limites des champs de vecteurs polynomiaux planaires sont non algébriques.

Par l'ordre chronologique, les premiers exemples des cycles limites non algébriques explicites de degré impair sont ceux de A. Gasull, H. Giacomini et J. Torregrosa [27] et de I. T. Al-Dosary, Khalil [57] pour  $n = 5$  dans [8], un exemple de cycle limite explicite non algébrique est donné pour un système différentiel planaire d'ordre 3. Le premier résultat de la coexistence de cycles limites algébriques et non algébriques remonte à J. Giné et M. Grau [37] pour un système différentiel planaire d'ordre 9.

Dans ce chapitre, nous présentons deux résultats, il s'agit de deux travaux qui ont

fait l'objet de deux publications. La première est intitulée "A class of differential systems of degree  $4k + 1$  with algebraic and non algebraic limit cycles" [2], où nous considérons la famille de systèmes différentiels suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = (\gamma x - x(x^2 + y^2)^k - 2k\gamma y) (a(x^2 + y^2)^k + bP_{2k}(x, y)) - x((x^2 + y^2)^k - \gamma)^2, \\ \dot{y} = (\gamma y - y(x^2 + y^2)^k + 2k\gamma x) (a(x^2 + y^2)^k + bP_{2k}(x, y)) - y((x^2 + y^2)^k - \gamma)^2, \end{cases}$$

où  $a, b, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$  et  $P_{2k}(x, y)$  est un polynôme homogène de degré  $2k$  tel que

$$P_{2k}(x, y) = \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s \binom{2k}{2s+1} x^{2k-2s-1} y^{2s+1} \text{ avec } \binom{2k}{2s+1} = \frac{2k!}{(2s+1)!(2k-2s-1)!},$$

et nous déterminons les conditions d'existence de deux cycles limites explicites, l'un algébrique et l'autre non-algébrique.

La deuxième intitulée " Non algebraic limit cycles for family of autonomous polynomial planar differential systems " [7], où nous considérons la famille de systèmes différentiels polynomial à plusieurs paramètres suivant :

$$\begin{cases} x' = x(-h + x^4 + y^4)(ax^2 + ay^2 - 4bxy) - (x^2 + y^2)(-x + 4x^2y^3 + 4y^5) \\ y' = y(-h + x^4 + y^4)(ax^2 + ay^2 - 4bxy) + (x^2 + y^2)(y + 4x^3y^2 + 4x^5) \end{cases}.$$

où  $a, b, h$  sont des paramètres réels . Nous montrons l'existence d'un cycle limite non algébrique de plus, ce cycle limite est hyperbolique et stable.

## ■ 2.2 Une classe de systèmes différentiels de degré $4k+1$ avec des cycles limites algébriques et non algébriques

Cette section est consacrée à l'étude d'une classe de systèmes différentiels planaires polynomiaux suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = (\gamma x - x(x^2 + y^2)^k - 2k\gamma y) (a(x^2 + y^2)^k + bP_{2k}(x, y)) - x((x^2 + y^2)^k - \gamma)^2, \\ \dot{y} = (\gamma y - y(x^2 + y^2)^k + 2k\gamma x) (a(x^2 + y^2)^k + bP_{2k}(x, y)) - y((x^2 + y^2)^k - \gamma)^2, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $a, b, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$  et  $P_{2k}(x, y)$  est un polynôme homogène de degré  $2k$  tel que

$$P_{2k}(x, y) = \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s \binom{2k}{2s+1} x^{2k-2s-1} y^{2s+1}, \quad (2.2)$$

avec  $\binom{2k}{2s+1} = \frac{2k!}{(2s+1)!(2k-2s-1)!}$ . Grâce à des conditions appropriées, nous prouvons l'existence simultanément de deux cycles limites explicites, l'un algébrique et l'autre non-algébrique.

### ■ 2.2.1 Coexistence de deux cycles limites algébrique et non algébrique

Le résultat principal de cette sous-section est le suivant :

**Théorème 2.2.1.** *Pour  $a, b, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$  et  $b^2 - a^2 < 0$ , le système différentiel (2.1) admet exactement deux cycles limites : le cercle  $(\Gamma_1) : (x^2 + y^2)^k - \gamma = 0$  entourant un cycle limite non algébrique stable  $(\Gamma_2)$  donné explicitement en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  par*

$$r(\theta, r_*) = \left( \gamma + \gamma \frac{e^{-\theta}}{\frac{r_*^{2k}}{r_*^{2k} - \gamma} - e^{-\theta} + f(\theta)} \right)^{\frac{1}{2k}},$$

$$\text{avec } f(\theta) = \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{a + b \sin 2ks} ds \text{ et } r_* = \left( \gamma \frac{f(2\pi)}{1 - e^{-2\pi} + f(2\pi)} \right)^{\frac{1}{2k}}.$$

*Démonstration.* Premièrement, nous avons immédiatement

$$y\dot{x} - x\dot{y} = -2k\gamma \left( bP_{2k}(x, y) + a(x^2 + y^2)^k \right) (x^2 + y^2),$$

ainsi, les points d'équilibre du système (2.1) sont présents dans les courbes d'équation suivant :

$$\left( bP_{2k}(x, y) + a(x^2 + y^2)^k \right) (x^2 + y^2) = 0. \quad (2.3)$$

L'expression (2.2) s'écrit en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  sous la forme :

$$\begin{aligned} P_{2k}(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \sum_{s=0}^{k-1} C_{2k}^{2s+1} (-1)^s (r \cos \theta)^{2k-2s-1} (r \sin \theta)^{2s+1} \\ &= r^{2k} \sum_{s=0}^{k-1} C_{2k}^{2s+1} (-1)^s (\cos \theta)^{2k-2s-1} (\sin \theta)^{2s+1} \\ &= r^{2k} \sin(2k\theta), \end{aligned}$$

alors, l'équation (2.3) peut être écrite comme suite

$$r^{2k+2} (b \sin(2k\theta) + a) = 0,$$

puisque  $b^2 - a^2 < 0$  et  $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $b \in \mathbb{R}_+$ , il s'ensuit que  $b < a$  et  $b \sin(2k\theta) + a > 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , donc  $r = 0$ , alors l'origine est l'unique point d'équilibre du système différentiel

(2.1). Nous montrons que  $(\Gamma_1) : (x^2 + y^2)^k - \gamma = 0$  est une courbe algébrique invariante du système différentiel (2.1). En effet, si nous posons

$$\begin{aligned} P(x, y) &= (\gamma x - x(x^2 + y^2)^k - 2k\gamma y) (a(x^2 + y^2)^k + bP_{2k}(x, y)) - x((x^2 + y^2)^k - \gamma)^2, \\ Q(x, y) &= (\gamma y - y(x^2 + y^2)^k + 2k\gamma x) (a(x^2 + y^2)^k + bP_{2k}(x, y)) - y((x^2 + y^2)^k - \gamma)^2, \\ U(x, y) &= (x^2 + y^2)^k - \gamma. \end{aligned}$$

Nous obtenons

$$P(x, y) \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = K(x, y) U(x, y),$$

où

$$K(x, y) = -2k(x^2 + y^2)^k Q_{2k}(x, y),$$

et

$$Q_{2k}(x, y) = bP_{2k}(x, y) + (a + 1)(x^2 + y^2)^k - \gamma.$$

Par conséquent, le cercle  $(\Gamma_1) : (x^2 + y^2)^k - \gamma = 0$  est une courbe invariante du système (2.1). La courbe  $(\Gamma_1)$  est une orbite périodique du système (2.1) si et seulement s'il n'existe pas de point singulier sur  $(\Gamma_1)$ , puisque l'origine est l'unique point d'équilibre du système (2.1) et  $(\Gamma_1) : (x^2 + y^2)^k - \gamma = 0$  ne passe pas par l'origine, alors  $(\Gamma_1)$  est une orbite périodique du système (2.1).

On a  $Q_{2k}(0, 0) = -\gamma < 0$ , d'où  $Q_{2k}(x, y) < 0$  à l'intérieur  $(\Gamma_1)$  et  $K(x, y) = -2k(x^2 + y^2)^k Q_{2k}(x, y) > 0$  dans  $(\Gamma_1) \setminus \{(0, 0)\}$ , alors  $\int_0^T K(x, y) dt > 0$ , où  $T$  est la période de la solution périodique  $(\Gamma_1)$ . En conséquence  $(\Gamma_1)$  définit un cycle limite algébrique instable pour le système (2.1).

La recherche du cycle limite non-algébrique nécessite l'intégration de notre système (2.1).

Le système (2.1) peut-être écrit en coordonnées polaires sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r^{2k} - \gamma)(r^{2k} + ar^{2k} + br^{2k} \sin 2k\theta - \gamma), \\ \dot{\theta} = -2k\gamma(a + b \sin 2k\theta)r^{2k}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Prenons la coordonnée  $\theta$  comme une variable indépendante. Le système différentiel (2.4) s'écrit :

$$2kr^{2k-1} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{(r^{2k} - \gamma)(r^{2k} + ar^{2k} + br^{2k} \sin 2k\theta - \gamma)}{\gamma(a + b \sin 2k\theta)}. \quad (2.5)$$

Comme  $\gamma > 0$  et  $b^2 - a^2 < 0$  et  $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $b \in \mathbb{R}_+$ , alors  $b < a$ , par conséquent,  $\dot{\theta} < 0$  et les orbites  $r(\theta)$  de l'équation différentielle (2.5) ont renversé leur orientation par rapport aux orbites  $(r(t), \theta(t))$  ou  $(x(t), y(t))$  des systèmes différentiels (2.4) et (2.1), respectivement.

En introduisant le changement de variable  $\rho = r^{2k}$ , l'équation (2.5) est transformée à l'équation de Riccati

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\theta} &= -\frac{(\rho - \gamma) ((1 + a + b \sin 2k\theta) \rho - \gamma)}{\gamma (a + b \sin 2k\theta)} \\ &= -(\rho - \gamma) \left( \frac{1 + a + b \sin 2k\theta}{\gamma (a + b \sin 2k\theta)} \rho - \frac{1}{(a + b \sin 2k\theta)} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

L'équation (2.6) est intégrable, puisqu'elle possède a la solution particulière  $\rho = \gamma$ . La solution générale de l'équation (2.6) est donnée par

$$\rho = \left( \gamma + \frac{1}{R} \right), \quad (2.7)$$

où  $R$  est une fonction de la variable  $\theta$ .

En effet, en remplaçant la solution  $\rho = \left( \gamma + \frac{1}{R} \right)$  dans l'équation de Riccati, on obtient l'équation linéaire

$$-\frac{1}{R^2} \frac{dR}{d\theta} = -\frac{1}{R} \left( \frac{1 + a + b \sin 2k\theta}{\gamma (a + b \sin 2k\theta)} \left( \gamma + \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{(a + b \sin 2k\theta)} \right), \quad (2.8)$$

donc

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma (a + b \sin 2k\theta)} + R. \quad (2.9)$$

La solution générale de l'équation linéaire (2.9) est

$$R(\theta, k) = e^\theta \left( k - \frac{1}{\gamma} (e^{-\theta} - 1) + \frac{1}{\gamma} \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{a + b \sin 2ks} ds \right),$$

où  $k \in \mathbb{R}$ .

Revenons au changements de variables, (2.7) on obtient :

$$\rho(\theta, k) = \left( \gamma + \gamma \frac{e^{-\theta}}{\gamma k + 1 - e^{-\theta} + \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{a + b \sin 2ks} ds} \right),$$

si nous prenons  $h = \gamma k + 1$ , alors la solution générale de l'équation de Riccati (2.6) est

$$\rho(\theta, h) = \gamma + \gamma \frac{e^{-\theta}}{h - e^{-\theta} + \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{a + b \sin 2ks} ds}.$$

Par conséquent, la solution générale de (2.5) est

$$r(\theta, h) = \left( \gamma + \gamma \frac{e^{-\theta}}{h - e^{-\theta} + \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{a + b \sin 2ks} ds} \right)^{\frac{1}{2k}}. \quad (2.10)$$

En passant aux coordonnées cartésiennes, on en déduit la première intégrale

$$F(x, y) = \frac{\gamma e^{-\arctan \frac{y}{x}}}{(x^2 + y^2)^k - \gamma} + e^{-\arctan \frac{y}{x}} - \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \frac{e^{-s}}{a + b \sin 2ks} ds.$$

Les trajectoires du système (2.1) sont les courbes de plan  $F(x, y) = h$ ,  $h \in \mathbb{R}$  et puisque ces courbes sont toutes non algébriques ( si nous excluons la courbe  $(\Gamma_1)$  pour  $k \rightarrow +\infty$ ), ainsi, tout autre cycle limite, s'il existe, doit également être non algébrique.

La solution  $r(\theta, r_0)$  de l'équation (2.5) qui satisfait la condition initiale  $r(0, r_0) = r_0 > 0$  est :

$$r(\theta, r_0) = \left( \gamma + \gamma \frac{e^{-\theta}}{\frac{r_0^{2k}}{r_0^{2k} - \gamma} - e^{-\theta} + f(\theta)} \right)^{\frac{1}{2k}}, \quad (2.11)$$

où  $r_0 = r(0)$  et  $f(\theta) = \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{a + b \sin 2ks} ds$ .

Une solution périodique du système (2.4) doit satisfaire la condition :

$$r(2\pi, r_0) = r(0, r_0). \quad (2.12)$$

Or la condition (2.12) implique

$$(r_0^{2k} - \gamma) \left( \frac{\gamma e^{-\theta}}{r_0^{2k} + (r_0^{2k} - \gamma)(-e^{-\theta} + f(\theta))} - 1 \right) = 0, \quad (2.13)$$

de plus l'équation (2.13) admet exactement deux solutions distinctes, la première est  $r_0 = \gamma^{\frac{1}{2k}}$  correspond au cycle limite algébrique  $(\Gamma_1)$  et la deuxième est :

$$r_0 = r_* = \left( \gamma \frac{f(2\pi)}{1 - e^{-2\pi} + f(2\pi)} \right)^{\frac{1}{2k}} > 0, \quad (2.14)$$

En effet, puisque  $b^2 - a^2 < 0$ , donc  $a + b \sin 2k\theta > 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , alors  $f(\theta) > 0$  et  $1 - e^{-\theta} + f(\theta) > 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , par conséquent,  $r_* > 0$ .

On remplace  $r_0$  par cette valeur de  $r_*$  dans (2.11), nous obtenons la solution

$$r(\theta, r_*) = \left( \gamma + \gamma \frac{e^{-\theta}}{\frac{r_*^{2k}}{r_*^{2k} - \gamma} - e^{-\theta} + f(\theta)} \right)^{\frac{1}{2k}}. \quad (2.15)$$

Pour montrer que (2.15) est une solution périodique du système (2.4), nous montrons que :

i) la fonction  $\theta \mapsto g(\theta)$ , telle que

$$g(\theta) = \gamma + \gamma \frac{e^{-\theta}}{\frac{f(2\pi)}{e^{-2\pi} - 1} - e^{-\theta} + f(\theta)},$$



est  $2\pi$ -périodique.

ii)  $g(\theta) > 0$  pour tout  $\theta \in [0, 2\pi[$ . La dernière condition assure que  $r(\theta, r_*)$  est bien définie pour tout  $\theta \in [0; 2\pi[$ , et la solution périodique ne passe pas par le point d'équilibre unique  $O(0, 0)$  du système (2.1).

**i) Périodicité.** Soit  $\theta \in [0, 2\pi[$ , alors

$$g(\theta + 2\pi) = \gamma + \gamma \frac{e^{-\theta-2\pi}}{\frac{f(2\pi)}{e^{-2\pi-1}} - e^{-\theta-2\pi} + f(\theta + 2\pi)}, \quad (2.16)$$

mais

$$\begin{aligned} f(\theta + 2\pi) &= \int_0^{\theta+2\pi} \frac{e^{-s}}{a + b \sin 2ks} ds \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-s}}{a + b \sin 2ks} ds + \int_{2\pi}^{\theta+2\pi} \frac{e^{-s}}{a + b \sin 2ks} ds \\ &= f(2\pi) + \int_{2\pi}^{\theta+2\pi} \frac{e^{-s}}{a + b \sin 2ks} ds, \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable  $u = s - 2\pi$  dans l'intégrale  $\int_{2\pi}^{\theta+2\pi} \frac{e^{-s}}{a + b \sin 2ks} ds$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} f(\theta + 2\pi) &= f(2\pi) + \int_0^{\theta} \frac{e^{-(u+2\pi)}}{a + b \sin 2k(u + 2\pi)} du \\ &= f(2\pi) + e^{-2\pi} f(\theta), \end{aligned}$$

En remplaçant  $f(\theta + 2\pi)$  par  $f(2\pi) + e^{-2\pi} f(\theta)$  dans (2.16), nous obtenons

$$\begin{aligned} g(\theta + 2\pi) &= \gamma + \gamma \frac{e^{-\theta-2\pi}}{\frac{f(2\pi)}{e^{-2\pi-1}} - e^{-\theta-2\pi} + f(\theta + 2\pi)} \\ &= \gamma + \gamma \frac{e^{-(\theta+2\pi)}}{\frac{f(2\pi)}{e^{-2\pi-1}} - e^{-(\theta+2\pi)} + (f(2\pi) + e^{-2\pi} f(\theta))} \\ &= \gamma + \gamma \frac{e^{-2\pi}}{e^{-2\pi-1} f(2\pi) - e^{-(\theta+2\pi)} + e^{-2\pi} f(\theta)} \\ &= \gamma + \gamma \frac{e^{-(\theta+2\pi)}}{e^{-2\pi} \left( \frac{f(2\pi)}{e^{-2\pi-1}} - e^{-\theta} + f(\theta) \right)} \\ &= g(\theta), \end{aligned} \quad (2.17)$$

donc  $g$  est  $2\pi$ -périodique.

**ii) Positivité stricte de  $g(\theta)$**  pour tout  $\theta \in [0, 2\pi[$ . Puisque  $b^2 - a^2 < 0$  et  $a \in \mathbb{R}_+$ ,  $b \in \mathbb{R}_+$ , alors  $b < a$ , alors,  $0 < a - b < a + b \sin 2k\theta < a + b$ , donc  $f(\theta) > 0$  pour tout

$\theta \in [0, 2\pi[$ , de plus, nous avons

$$\begin{aligned} f(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-s}}{a + b \sin 2ks} ds \\ &= f(\theta) + \int_\theta^{2\pi} \frac{e^{-s}}{a + b \sin 2ks} ds, \end{aligned}$$

puisque  $\frac{e^{-s}}{a + b \sin 2ks} > 0$  alors,  $\int_\theta^{2\pi} \frac{e^{-s}}{a + b \sin 2ks} ds > 0$ , donc

$$f(2\pi) \geq f(\theta) > 0 \text{ pour tout } \theta \in [0, 2\pi[,$$

et

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \gamma + \gamma \frac{e^{-\theta}}{\frac{f(2\pi)}{e^{-2\pi}-1} - e^{-\theta} + f(\theta)} \\ &\geq \gamma + \gamma \frac{e^{-\theta}}{\frac{f(2\pi)}{e^{-2\pi}-1} - e^{-\theta} + f(2\pi)} \\ &= \gamma \frac{f(2\pi)}{f(2\pi) + e^{-\theta}(e^{2\pi} - 1)} > 0, \end{aligned}$$

d'où  $g(\theta) > 0$  pour tout  $\theta \in [0, 2\pi[$ , donc le système (2.4) admet une solution périodique strictement positive. Afin de prouver que cette solution périodique est une orbite périodique isolée, c'est à dire un cycle limite, il suffit que la fonction du premier retour de Poincaré  $r_* \mapsto P(r_*) = r(2\pi, r_*)$  vérifie :

$$\left. \frac{dr(2\pi, r_*)}{dr_*} \right|_{r_* = \left( \gamma \frac{f(2\pi)}{1 - e^{-2\pi} + f(2\pi)} \right)^{\frac{1}{2k}}} \neq 1,$$

ce qui est le cas car nous avons

$$\left. \frac{dr(2\pi, r_*)}{dr_*} \right|_{r_* = \left( \gamma \frac{f(2\pi)}{1 - e^{-2\pi} + f(2\pi)} \right)^{\frac{1}{2k}}} = e^{2\pi} > 1.$$

D'où le cycle limite de l'équation différentielle (2.5) est instable et hyperbolique, par conséquent, il s'agit d'un cycle limite stable et hyperbolique pour le système différentiel (2.1). Puisque la carte de retour de Poincaré ne possède pas d'autres points d'équilibre alors le système (2.5) admet exactement deux cycles limites. ■

## ■ 2.2.2 Applications

### Système quintique

Dans cette sous-section, nous donnons un cas particulier de la famille (2.1) lorsque  $k = 1$ . Nous prouvons l'existence de deux cycles limites explicites, l'un algébrique et l'autre

non-algébrique. Finalement, nous présentons un exemple pour illustrer l'applicabilité de nos principaux résultats.

**Corollaire 2.2.2.** *Le système quintique à trois paramètres suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = (\gamma x - x(x^2 + y^2) - 2\gamma y)(a(x^2 + y^2) + 2bxy) - x(x^2 + y^2 - \gamma)^2, \\ \dot{y} = (\gamma y - y(x^2 + y^2) + 2\gamma x)(a(x^2 + y^2) + 2bxy) - y(x^2 + y^2 - \gamma)^2, \end{cases} \quad (2.18)$$

où  $a, b, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ , possède exactement deux cycles limites : le cercle  $(\Gamma_1) : x^2 + y^2 - \gamma = 0$  entourant le cycle limite non algébrique  $(\Gamma_2)$  donné explicitement en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  par

$$r = \left( \gamma + \gamma \frac{e^{-\theta}}{\frac{r_*^2}{r_*^2 - \gamma} - e^{-\theta} + f(\theta)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

avec  $f(\theta) = \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{a + b \sin 2s} ds$  et  $r_* = \left( \gamma \frac{f(2\pi)}{1 - e^{-2\pi} + f(2\pi)} \right)^{\frac{1}{2}}$ , quand la condition suivante est supposée vraie :

$$b^2 - a^2 < 0.$$

*Démonstration.* On a pour  $k = 1$ ,

$$P_2(x, y) = 2xy.$$

et la preuve du corollaire (2.2.2) découle en substituant la valeur de  $P_2(x, y)$  dans le théorème (2.2.1) ■

**Exemple 2.2.3.** *Pour  $a = 2$ ,  $b = \frac{1}{2}$ , et  $\gamma = 3$ , le système (2.18) devient :*

$$\begin{cases} \dot{x} = (3x - x(x^2 + y^2) - 6y)(2(x^2 + y^2) + xy) - x(x^2 + y^2 - 3)^2, \\ \dot{y} = (3y - y(x^2 + y^2) + 6x)(2(x^2 + y^2) + xy) - y(x^2 + y^2 - 3)^2, \end{cases} \quad (2.19)$$

ce système possède deux cycles limites : le cercle  $(\Gamma_1) : x^2 + y^2 - 3 = 0$  entourant un cycle limite non algébrique  $(\Gamma_2)$  donné par

$$r = \left( 3 + 3 \frac{e^{-\theta}}{\frac{r_*^2}{r_*^2 - 3} - e^{-\theta} + f(\theta)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

avec  $f(\theta) = \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{2 + \frac{1}{2} \sin 2s} ds$  et  $r_* = \left( 3 \frac{f(2\pi)}{1 - e^{-2\pi} + f(2\pi)} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.97459$ .

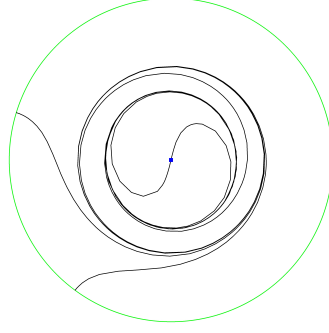


Figure 2.1 – Deux cycles limites pour le système (2.19)

### Système de degré 9

Dans cette sous-section , nous donnons un cas particulier de la famille (2.1) lorsque  $k = 2$ .

**Corollaire 2.2.4.** *Le système à trois paramètres suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = (\gamma x - x(x^2 + y^2)^2 - 4\gamma y) (a(x^2 + y^2)^2 + 4bxy(x^2 - y^2)) - x((x^2 + y^2)^2 - \gamma)^2, \\ \dot{y} = (\gamma y - y(x^2 + y^2)^2 + 4\gamma x) (a(x^2 + y^2)^2 + 4bxy(x^2 - y^2)) - y((x^2 + y^2)^2 - \gamma)^2, \end{cases} \quad (2.20)$$

où  $a, b, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ , possède exactement deux cycles limites : le cercle  $(\Gamma_1) : (x^2 + y^2)^2 - \gamma = 0$  entourant un cycle limite non algébrique stable  $(\Gamma_2)$  donné explicitement en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  par l'équation

$$r = \left( \gamma + \gamma \frac{e^{-\theta}}{\frac{r_*^4}{r_*^4 - \gamma} - e^{-\theta} + f(\theta)} \right)^{\frac{1}{4}},$$

avec  $f(\theta) = \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{a + b \sin 4s} ds$  et  $r_* = \left( \gamma \frac{f(2\pi)}{1 - e^{-2\pi} + f(2\pi)} \right)^{\frac{1}{4}}$ , quand la condition suivante est supposée vraie :

$$\gamma > 0 \text{ et } b^2 - a^2 < 0.$$

*Démonstration.* On a pour  $k = 2$ ,

$$\begin{aligned} P_4(x, y) &= \binom{4}{1} x^3 y + (-1) \binom{4}{3} x y^3 \\ &= 4x^3 y - 4xy^3. \end{aligned}$$

et la preuve du corollaire (2.2.4) découle en substituant la valeur de  $P_4(x, y)$  dans le théorème (2.2.1). ■

**Exemple 2.2.5.** Pour  $a = 2$ ,  $b = \frac{1}{2}$ , et  $\gamma = 3$ , le système (2.20) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 \left( 3x - x(x^2 + y^2)^2 - 12y \right) \left( (x^2 + y^2)^2 + xy(x^2 - y^2) \right) - x \left( (x^2 + y^2)^2 - 3 \right)^2, \\ \dot{y} = 2 \left( 3y - y(x^2 + y^2)^2 + 12x \right) \left( (x^2 + y^2)^2 + xy(x^2 - y^2) \right) - y \left( (x^2 + y^2)^2 - 3 \right)^2, \end{cases} \quad (2.21)$$

ce système possède deux cycles limites : le cercle  $(\Gamma_1) : x^2 + y^2 - 3 = 0$  entourant un cycle limite non algébrique  $(\Gamma_2)$  donné par

$$r = \left( 2 + 2 \frac{e^{-\theta}}{\frac{r_*^4}{r_*^4 - \gamma} - e^{-\theta} + f(\theta)} \right)^{\frac{1}{4}},$$

avec  $f(\theta) = \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{2 + \frac{1}{2} \sin 4s} ds$  et  $r_* = \left( 3 \frac{f(2\pi)}{1 - e^{-2\pi} + f(2\pi)} \right)^{\frac{1}{4}} = 0.99507$ .

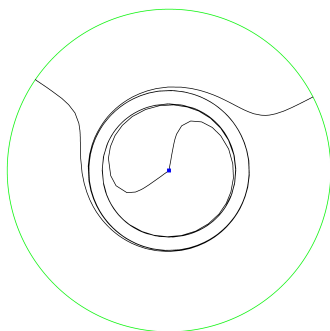


Figure 2.2 – Deux cycles limites pour le système (2.21)

### Système de degré 13

Dans cette sous-section , nous donnons un cas particulier de la famille (2.1) lorsque  $k = 3$ .

**Corollaire 2.2.6.** Le système à trois paramètres suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \left( \gamma x - x(x^2 + y^2)^3 - 6\gamma y \right) \left( a(x^2 + y^2)^3 + bP_6(x, y) \right) - x \left( (x^2 + y^2)^3 - \gamma \right)^2, \\ \dot{y} = \left( \gamma y - y(x^2 + y^2)^3 + 6\gamma x \right) \left( a(x^2 + y^2)^3 + bP_6(x, y) \right) - y \left( (x^2 + y^2)^3 - \gamma \right)^2, \end{cases} \quad (2.22)$$

où  $a, b, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ , possède exactement deux cycles limites : le cercle  $(\Gamma_1) : (x^2 + y^2)^3 - \gamma = 0$  entourant un cycle limite non algébrique stable  $(\Gamma_2)$  donné explicitement en coordonnées

polaires  $(r, \theta)$  par

$$r = \left( \gamma + \gamma \frac{e^{-\theta}}{\frac{r_*^6}{r_*^6 - \gamma} - e^{-\theta} + f(\theta)} \right)^{\frac{1}{6}},$$

avec  $f(\theta) = \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{a + b \sin 6s} ds$  et  $r_* = \left( \gamma \frac{f(2\pi)}{1 - e^{-2\pi} + f(2\pi)} \right)^{\frac{1}{6}}$ , quand la condition suivante est supposée vraie :

$$\gamma > 0 \text{ et } b^2 - a^2 < 0.$$

*Démonstration.* On a pour  $k = 3$ ,

$$\begin{aligned} P_6(x, y) &= \binom{6}{1} x^5 y - \binom{6}{3} x^3 y^3 + \binom{6}{5} x y^5 \\ &= 6x^5 y - 10x^3 y^3 + 6x y^5. \end{aligned}$$

et la preuve du corollaire (2.2.6) découle en substituant la valeur de  $P_6(x, y)$  dans le théorème (2.2.1). ■

**Exemple 2.2.7.** Pour  $a = 2$ ,  $b = \frac{1}{2}$ , et  $\gamma = 3$ , le système (2.22) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = \left( 3x - x(x^2 + y^2)^3 - 18y \right) \left( 2(x^2 + y^2)^3 + \frac{1}{2}P_6(x, y) \right) - x \left( (x^2 + y^2)^3 - 3 \right)^2, \\ \dot{y} = \left( 3y - y(x^2 + y^2)^3 + 18x \right) \left( 2(x^2 + y^2)^3 + \frac{1}{2}P_6(x, y) \right) - y \left( (x^2 + y^2)^3 - 3 \right)^2, \end{cases} \quad (2.23)$$

ce système possède deux cycles limites : le cercle  $(\Gamma_1) : x^2 + y^2 - 3 = 0$  entourant un cycle limite non algébrique  $(\Gamma_2)$  donné par

$$r = \left( 3 + 3 \frac{e^{-\theta}}{\frac{r_*^6}{r_*^6 - 3} - e^{-\theta} + f(\theta)} \right)^{\frac{1}{6}},$$

avec  $f(\theta) = \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{2 + \frac{1}{2} \sin 6s} ds$  et  $r_* = \left( 3 \frac{f(2\pi)}{1 - e^{-2\pi} + f(2\pi)} \right)^{\frac{1}{6}} = 0.998911$ .

## ■ 2.3 Une classe de systèmes différentiels de degré impair avec un cycle limite non algébriques

Dans cette section, nous étudions l'intégrabilité, et nous déterminons les conditions d'existence d'un cycle limite non algébrique du système différentiel polynomial à plusieurs paramètres suivant :

$$\begin{cases} x' = x(-h + x^4 + y^4)(ax^2 + ay^2 - 4bxy) - (x^2 + y^2)(-x + 4x^2y^3 + 4y^5), \\ y' = y(-h + x^4 + y^4)(ax^2 + ay^2 - 4bxy) + (x^2 + y^2)(y + 4x^3y^2 + 4x^5), \end{cases} \quad (2.24)$$

où  $a, b, h$  sont des constantes réelles.

Définissons les fonctions trigonométriques suivantes :

$$\varphi(\xi) = \frac{3a + 4 \sin 4\xi + a \cos 4\xi - 5b \sin 2\xi - b \sin 6\xi}{\cos 4\xi + 3}. \quad (2.25)$$

$$\phi(\xi) = \frac{(4 - 4ah + 8bh \sin 2\xi)}{\cos 4\xi + 3}. \quad (2.26)$$

### ■ 2.3.1 Résultat principal

Dans cette partie, nous prouvons que la classe du système différentiel (2.24) est Darboux intégrable, et nous étudions l'existence de cycles limites qui entourent le point singulier situé à l'origine.

Le résultat principal de cette partie est le théorème suivant :

**Théorème 2.3.1.** *Considérons le système différentiel multiparamétrique (2.24), alors*

1) *Le système (2.24) est intégrable et son intégrale première est*

$$L(x, y) = (x^2 + y^2)^2 \exp\left(-\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \varphi(\xi) d\xi\right) - \left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \phi(\xi) \exp\left(-\int_0^\xi \varphi(w) dw\right) d\xi\right).$$

2) *Si  $3a + 4 + |a| + 6|b| < 0$  et  $4 - 4ah - 8|bh| > 0$  alors le système (2.24) admet un cycle limite non algébrique donné explicitement en coordonnées polaires  $(\tau, \theta)$  par :*

$$\tau(\theta, \tau_*) = \left(\exp\left(\int_0^\theta \varphi(\xi) d\xi\right) \left(\tau_*^4 + \int_0^\theta \phi(\xi) \exp\left(-\int_0^\xi \varphi(w) dw\right) d\xi\right)\right)^{\frac{1}{4}}, \quad (2.27)$$

où

$$\tau_* = \left(\frac{\int_0^{2\pi} \phi(\xi) \exp\left(-\int_0^\xi \varphi(w) dw\right) d\xi}{\exp\left(-\int_0^{2\pi} \varphi(\xi) d\xi\right) - 1}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

*De plus, ce cycle limite est hyperbolique et stable.*

*Démonstration.* Tout d'abord nous avons

$$y'x - x'y = ((2x)^2 + (2y)^2) (x^2y^2(x^2 + y^2) + x^6 + y^6),$$

d'où le point  $O(0,0)$  est l'unique point critique du système différentiel (2.24).

1) Pour démontrer notre résultats, nous écrivons le système différentiel (2.24) en coordonnées polaires  $(\tau, \theta)$ , définies par  $x = \tau \cos \theta$ ,  $y = \tau \sin \theta$ , alors le système (2.24) s'écrit :

$$\begin{cases} \tau' = \frac{1}{4}\tau^3 (4 - 4ha + 8bh \sin 2\theta + (4 \sin 4\theta + 3a + a \cos 4\theta - 5b \sin 2\theta - b \sin 6\theta) \tau^4), \\ \theta' = \tau^6 (\cos 4\theta + 3). \end{cases} \quad (2.28)$$

En considérant  $\theta$  comme variable indépendante, alors ce système différentiel devient :

$$\frac{d\tau}{d\theta} = \frac{(4 \sin 4\theta + 3a + a \cos 4\theta - 5b \sin 2\theta - b \sin 6\theta)}{4 (\cos 4\theta + 3)} \tau + \frac{4 - 4ha + 8bh \sin 2\theta}{4 (\cos 4\theta + 3)} \frac{1}{\tau^3}. \quad (2.29)$$

C'est une équation de Bernoulli.

En introduisant le changement de variable  $\rho = \tau^4$  l'équation (2.29) est transformée en l'équation suivante :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{4 \sin 4\theta + 3a + a \cos 4\theta - 5b \sin 2\theta - b \sin 6\theta}{\cos 4\theta + 3} \rho + \frac{4 - 4ha + 8bh \sin 2\theta}{\cos 4\theta + 3}, \quad (2.30)$$

la solution générale de l'équation (2.30) est donnée par

$$\rho(\theta) = \exp\left(\int_0^\theta \varphi(\xi) d\xi\right) \left(k + \int_0^\theta \phi(\xi) \exp\left(-\int_0^\xi \varphi(w) dw\right) d\xi\right), \quad (2.31)$$

où  $\varphi, \phi$  sont les deux fonctions trigonométriques définies dans (2.25) et (2.26) respectivement.

Donc

$$\tau(\theta) = \left(\exp\left(\int_0^\theta \varphi(\xi) d\xi\right) \left(k + \int_0^\theta \frac{\phi(\xi) d\xi}{\exp\left(\int_0^\xi \varphi(w) dw\right)}\right)\right)^{\frac{1}{4}}, \quad (2.32)$$

où  $k \in \mathbb{R}$ .

Alors le système (2.24) est intégrable et son intégrale première est

$$L(x, y) = (x^2 + y^2)^2 \exp\left(-\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \varphi(\xi) d\xi\right) - \left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \frac{\phi(\xi) d\xi}{\exp\left(\int_0^\xi \varphi(w) dw\right)}\right).$$

Les courbes  $L = l$  avec  $l \in \mathbb{R}$ , qui sont formées par les orbites du système différentiel (2.24) s'écrivent sous la forme :

$$(x^2 + y^2)^2 = \exp\left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \varphi(\xi) d\xi\right) \left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\exp\left(\int_0^\xi \varphi(w) dw\right)}\right) + l \exp\left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \varphi(\xi) d\xi\right).$$

Par conséquent, la partie (1) du théorème (2.3.1) est prouvée.



2- Notons que le système (2.28) admet une solution périodique si et seulement si l'équation (2.29) a une solution périodique strictement positif de période  $2\pi$ . Ceci est équivalente à l'existence d'une solution de (2.29) qui satisfait  $\tau(0, \tau_*) = \tau(2\pi, \tau_*)$  et  $\tau(\theta, \tau_*) > 0$  pour tout  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

La solution de l'équation  $\tau(0, \tau_0) = \tau_0$  est

$$\tau(\theta, \tau_0) = \left( \exp \left( \int_0^\theta \varphi(\xi) d\xi \right) \left( \tau_0^4 + \int_0^\theta \phi(\xi) \exp \left( - \int_0^\xi \varphi(w) dw \right) d\xi \right) \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (2.33)$$

où  $\tau_0(0) = \tau_0 > 0$ . Une solution périodique du système (2.28) doit satisfaire la condition  $\tau(2\pi, \tau_0) = \tau(0, \tau_0)$ , ce qui conduit à une valeur unique  $\tau_0 = \tau_*$  donnée par

$$\tau_* = \left( \frac{\int_0^{2\pi} \phi(\xi) \exp \left( - \int_0^\xi \varphi(w) dw \right) d\xi}{\exp \left( - \int_0^{2\pi} \varphi(\xi) d\xi \right) - 1} \right)^{\frac{1}{4}} > 0, \quad (2.34)$$

comme :  $3a + 4 + |a| + 6|b| < 0$  et  $4 - 4ah - 8|bh| > 0$ ,

$$\varphi(\xi) = \frac{3a + 4 \sin 4\xi + a \cos 4\xi - 5b \sin 2\xi - b \sin 6\xi}{\cos 4\xi + 3} < 0, \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R},$$

et

$$\phi(\xi) = \frac{(4 - 4ah + 8bh \sin 2\xi)}{\cos 4\xi + 3} > 0, \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent :  $1 - \exp \left( - \int_0^{2\pi} \varphi(\xi) d\xi \right) < 0$  et  $\phi(\xi) \exp \left( - \int_0^\xi \varphi(w) dw \right) > 0$ .

Après la substitution de la valeur  $\tau_*$  dans (2.33), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \tau(\theta, \tau_*) &= \left( \left( \frac{\int_0^{2\pi} \phi(\xi) \exp \left( - \int_0^\xi \varphi(w) dw \right) d\xi}{\exp \left( - \int_0^{2\pi} \varphi(\xi) d\xi \right) - 1} \right) + \int_0^\theta \frac{\phi(\xi)}{\exp \left( \int_0^\xi \varphi(w) dw \right)} d\xi \right)^{\frac{1}{4}} \\ &\times \left( \exp \left( \int_0^\theta \varphi(\xi) d\xi \right) \right)^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Comme :  $\varphi(\xi) < 0$  et  $\phi(\xi) > 0$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{\int_0^{2\pi} -\phi(\xi) \exp \left( - \int_0^\xi \varphi(w) dw \right) d\xi}{1 - \exp \left( - \int_0^{2\pi} \varphi(\xi) d\xi \right)} > 0 \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent :  $\tau(\theta, \tau_*) > 0$ , pour tout  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Donc  $\tau(\theta, \tau_*)$  est une solution périodique du système (2.28).

Afin de montrer que cette solution périodique est une orbite périodique isolée, il suffit que l'application de premier retour de Poincaré  $:\tau_0 \rightarrow \Pi(2\pi, \tau_0) = r(2\pi, \tau_0)$ , vérifie

$$\left. \frac{d\Pi}{d\tau_0}(2\pi, \tau_0) \right|_{\tau_0=\tau_*} \neq 1,$$

pour tout  $\tau_0$ , et celle-ci est vérifiée, parce que

$$\left. \frac{d\Pi}{d\tau_0}(2\pi, \tau_0) \right|_{\tau_0=\tau_*} = \exp\left(\int_0^{2\pi} \varphi(\xi) d\xi\right) < 1.$$

La solution périodique de l'équation (2.29) est donc un cycle limite stable et hyperbolique par conséquent, il s'agit d'un cycle limite stable et hyperbolique pour le système différentiel (2.24).

Montrons que ce cycle limite n'est pas algébrique.

En coordonnées cartésiennes :  $\tau^4(\theta, \tau_*) = (x^2 + y^2)^2$  et  $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ , l'équation de la courbe déterminée par ce cycle limite est la suivante :

$$u(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - \exp\left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \varphi(\xi) d\xi\right) \left( r_*^4 + \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \phi(\xi) \exp\left(-\int_0^\xi \varphi(w) dw\right) d\xi \right) = 0.$$

Il n'existe pas d'entier  $n$  pour lequel  $\frac{\partial^{(n)}u}{\partial x^n}(x, y)$  et  $\frac{\partial^{(n)}u}{\partial y^n}(x, y)$  s'annulent au même temps. Nous calculons :  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \frac{y\varphi(\arctan \frac{y}{x}) \exp\left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \varphi(\xi) d\xi\right)}{x^2 + y^2} \left( \tau_*^4 + \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \phi(\xi) \exp\left(-\int_0^\xi \varphi(w) dw\right) d\xi \right) \\ &+ \exp\left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \varphi(\xi) d\xi\right) \left( \frac{y\phi(\arctan \frac{y}{x})}{x^2 + y^2} \exp\left(-\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \varphi(w) dw\right) \right) + 4x(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

L'expression

$$\exp\left(\int_0^{\arctan \frac{x}{y}} \varphi(\xi) d\xi\right) \left( \tau_*^4 + \int_0^{\arctan \frac{x}{y}} \phi(\xi) \exp\left(-\int_0^\xi \varphi(w) dw\right) d\xi \right),$$

existe déjà dans  $u(x, y)$  et réapparaît toujours lorsque les dérivées partielles d'ordre arbitraire sont effectuées, ce qui signifie que  $u(x, y)$  n'est pas un polynôme et que ce cycle limite est non algébrique. ■

### ■ 2.3.2 Exemples

**Exemple 2.3.2.** Prenons  $a = -6$  et  $h = b = 1$ , alors le système (2.24) devient :

$$\begin{cases} x' = x(-1 + x^4 + y^4)(-6x^2 - 6y^2 - 4xy) - (x^2 + y^2)(-x + 4x^2y^3 + 4y^5), \\ y' = y(-1 + x^4 + y^4)(-6x^2 - 6y^2 - 4xy) + (x^2 + y^2)(y + 4x^3y^2 + 4x^5). \end{cases} \quad (2.35)$$

Ce système possède un cycle limite non algébrique donné explicitement en coordonnées polaires  $(\tau, \theta)$  par :

$$\begin{aligned} \tau(\theta, \tau_*) &= \left( \tau_*^4 + \int_0^\theta \frac{28 + 8 \sin 2\xi}{\cos 4\xi + 3} \exp \left( - \int_0^s \frac{-18 + 4 \sin 4w - 6 \cos 4w - 5 \sin 2w - \sin 6w}{\cos 4w + 3} dw \right) d\xi \right) \\ &\quad \times \exp \left( \frac{1}{4} \int_0^\theta \frac{-18 + 4 \sin 4\xi - 6 \cos 4\xi - 5 \sin 2\xi - \sin 6\xi}{\cos 4\xi + 3} d\xi \right), \end{aligned}$$

où  $\theta \in \mathbb{R}$ , de plus, l'intersection du cycle limite avec l'axe horizontal est

$$\tau_* = \left( \frac{\int_0^{2\pi} \frac{-28 + 8 \sin 2\xi}{\cos 4\xi + 3} \exp \left( - \int_0^\xi \frac{-18 + 4 \sin 4w - 6 \cos 4w - 5 \sin 2w - \sin 6w}{\cos 4w + 3} dw \right) d\xi}{1 - \exp \left( - \int_0^{2\pi} \frac{-18 + 4 \sin 4\xi - 6 \cos 4\xi - 5 \sin 2\xi - \sin 6\xi}{\cos 4\xi + 3} d\xi \right)} \right)^{\frac{1}{4}} \simeq 2.14484.$$

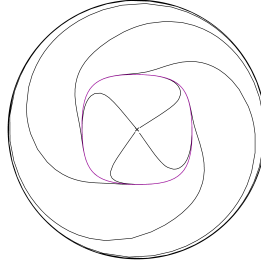


Figure 2.3 – Portrait de phase du système (2.35)

**Exemple 2.3.3.** Prenons  $a = -4$ ,  $b = 0$  et  $h = 1$ , alors le système (2.24) devient :

$$\begin{cases} x' = x(-1 + x^4 + y^4)(-4x^2 - 4y^2) - (x^2 + y^2)(-x + 4x^2y^3 + 4y^5), \\ y' = y(-1 + x^4 + y^4)(-4x^2 - 4y^2) + (x^2 + y^2)(y + 4x^3y^2 + 4x^5). \end{cases} \quad (2.36)$$

Le système (2.36) possède un cycle limite non algébrique donné explicitement en coordonnées polaires  $(\tau, \theta)$  par :

$$\begin{aligned} \tau(\theta, \tau_*) &= \left( \tau_*^4 + \int_0^\theta \frac{20}{\cos 4\xi + 3} \exp \left( - \int_0^\xi \frac{-12 + 4 \sin 4w - 4 \cos 4w}{\cos 4w + 3} dw \right) d\xi \right)^{\frac{1}{4}} \\ &\quad \times \exp \left( \frac{1}{4} \int_0^\theta \frac{-12 + 4 \sin 4\xi - 4 \cos 4\xi}{\cos 4\xi + 3} d\xi \right), \end{aligned}$$

où  $\theta \in \mathbb{R}$ , de plus, l'intersection du cycle limite avec l'axe horizontal est

$$\tau_* = \left( \frac{\int_0^{2\pi} -\frac{20}{\cos 4\xi+3} \exp\left(-\int_0^\xi \frac{-12+4\sin 4w-4\cos 4w}{\cos 4w+3} dw\right) d\xi}{1 - \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{-12+4\sin 4\xi-4\cos 4s}{\cos 4\xi+3} d\xi\right)} \right)^{\frac{1}{4}} \simeq 1.99214.$$

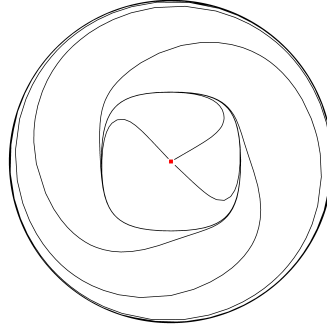


Figure 2.4 – Portrait de phase du système (2.36)

## ■ 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre on a traité deux classes de systèmes différentiels planaires de degré impair. Ce chapitre est réparti en deux parties, dans la première partie on a déterminé les conditions d'existence de deux cycles limites d'expressions explicites, un algébrique et l'autre non-algébrique pour une classe de systèmes différentiels de degré  $4k+1$  où  $k \in \mathbb{N}^*$ . Dans la deuxième partie on a déterminé l'expression exacte de l'intégrale première et les conditions d'existence d'un cycle limite non-algébrique hyperbolique stable pour une classe de systèmes différentiels de degré sept.

## Chapitre 3

---

# Systèmes différentiels de degré pair avec des cycles limites non algébriques

### ■ 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons deux résultats, il s'agit de deux travaux qui ont fait l'objet de deux publications.

La première est intitulée " A class of differential systems of even degree with exact non-algebraic limit cycles " [40], où nous considérons la classe de systèmes différentiels suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(l + wx + vy)^{n+1} + n(vx^2 - vy^2 - 2ly - 2wxy)(x^2 + y^2)^n \\ \quad + x(l + wx + vy)(a(x^2 + y^2) + 2c(x^2 - y^2) - 4bxy)(x^2 + y^2)^{n-1}, \\ \dot{y} = y(l + wx + vy)^{n+1} + n(wx^2 - wy^2 + 2lx + 2vxy)(x^2 + y^2)^n \\ \quad + y(l + wx + vy)(a(x^2 + y^2) + 2c(x^2 - y^2) - 4bxy)(x^2 + y^2)^{n-1}, \end{cases}$$

où  $a, b, c, w, v, l$  sont des paramètres réels et  $n$  un entier strictement positif. Nous prouvons que ces systèmes sont Liouville intégrables, de plus, nous déterminons des conditions suffisantes pour l'existence d'un cycle limite non algébrique explicite.

La deuxième intitulée "A class of polynomial differential systems with explicit limit cycles"[6], où nous considérons la classe de systèmes différentiels suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(l + mx + ny)^2 + x(l + mx + ny)(ax^4 + ay^4 + 2bxy^3 + 2bx^3y) \\ \quad - (x^2 + y^2)(4ly^3 - nx^4 + 3ny^4 + 4mxy^3), \\ \dot{y} = y(l + mx + ny)^2 + y(l + mx + ny)(ax^4 + ay^4 + 2bxy^3 + 2bx^3y) \\ \quad + (x^2 + y^2)(4lx^3 + 3mx^4 - my^4 + 4nx^3y), \end{cases}$$

où  $m, n, l$  sont des paramètres réels et  $a, b$  sont des paramètres réels non nuls. Nous montrons l'existence d'un cycle limite non algébrique obtenu explicitement.

## ■ 3.2 Une classe de systèmes différentiels de degré pair avec des cycles limites non algébriques

Dans cette section, nous considérons une classe de systèmes différentiels planaires de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(l + wx + vy)^{n+1} + n(vx^2 - vy^2 - 2ly - 2wxy)(x^2 + y^2)^n \\ \quad + x(l + wx + vy)(a(x^2 + y^2) + 2c(x^2 - y^2) - 4bxy)(x^2 + y^2)^{n-1}, \\ \dot{y} = y(l + wx + vy)^{n+1} + n(wx^2 - wy^2 + 2lx + 2vxy)(x^2 + y^2)^n \\ \quad + y(l + wx + vy)(a(x^2 + y^2) + 2c(x^2 - y^2) - 4bxy)(x^2 + y^2)^{n-1}, \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $a, b, c, w, v, n$  et  $l$  sont des constantes réelles,  $n$  est un entier strictement positif ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). Nous montrons que ces systèmes sont Liouville intégrable. De plus, nous prouvons l'existence d'un cycle limite non algébrique obtenu explicitement.

### ■ 3.2.1 Résultat principal

Le but ici est de prouver le résultat suivant :

**Théorème 3.2.1.** *Considérons le système différentiel (3.1), alors*

(a) *Le système (3.1) est Darboux intégrable et son intégrale première est :*

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \left( \frac{x^2 + y^2}{wx + vy + l} \right)^n e^{-\left( a \left( \arctan \frac{y}{x} \right) + \frac{bx^2 + 2cxy - by^2}{x^2 + y^2} \right)} \\ &\quad - \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} e^{-as - b \cos 2s - c \sin 2s} ds. \end{aligned}$$

(b) *Si  $a < 0$ ,  $w \geq 0$ ,  $l > 0$ ,  $c^2 + b^2 \neq 0$  et  $2a\pi + b \neq 0$  alors, le système (3.1) admet un cycle limite non algébrique explicite, donné en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  par*

$$r^*(\theta) = \frac{1}{2} \left( g(\theta) \rho^*(\theta)^{\frac{1}{n}} + \sqrt{\left( g(\theta) \rho^*(\theta)^{\frac{1}{n}} \right)^2 + 4l \rho^*(\theta)^{\frac{1}{n}}} \right),$$

où

$$\begin{aligned} g(\theta) &= w \cos \theta + v \sin \theta, \quad f(\theta) = \int_0^\theta e^{-as - b \cos 2s - c \sin 2s} ds, \\ \rho^*(\theta) &= e^{a\theta + b \cos 2\theta + c \sin 2\theta} \left( \frac{e^{2\pi a} f(2\pi)}{1 - e^{2\pi a}} + f(\theta) \right). \end{aligned}$$

*De plus, ce cycle limite est hyperbolique.*

*Démonstration.* Tout d'abord, nous avons

$$xy - yx = n(2l + wx + vy)(x^2 + y^2)^{n+1},$$

ainsi, les points d'équilibre du système (3.1) sont présents dans la courbe définie par l'équation

$$(x^2 + y^2)^{n+1}(2l + wx + vy) = 0, \quad (3.2)$$

d'où l'origine est un point d'équilibre.

Soit  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  un point d'équilibre du système (3.1), alors

$$\begin{cases} (-l)^{n+1} + n(vx_0 - wy_0)(x_0^2 + y_0^2) + (-l)(a(x_0^2 + y_0^2) + 2c(x_0^2 - y_0^2) - 4bx_0y_0) = 0, \\ y_0 = -\frac{1}{v}(2l + wx_0). \end{cases} \quad (3.3)$$

Le système (3.3) devient :

$$\begin{aligned} & -l(av^3 + 2cv^3 - 6nw^3 + avv^2 + 4bv^2w - 2cvw^2 - 6nv^2w)x_0^2 - \\ & 4l^2(2bv^2 - nv^2 - 3nw^2 + avw - 2cvw)x_0 + n(v^2 + w^2)^2x_0^3 - \\ & (4al^3v - (-l)^{n+1}v^3 - 8cl^3v - 8l^3nw) = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Alors les points d'équilibre du système(3.1) sont  $\{(0, 0), (x_0, -\frac{1}{v}(2l + wx_0))\}$ , où  $x_0$  est une racine réelle de l'équation (3.4).

(a) Pour prouver les résultats (a) et (b), on écrit le système différentiel polynomial (3.1) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , définies par  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ . Le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(l + wr \cos \theta + vr \sin \theta)^{n+1} + l(a + 2c \cos 2\theta - 2b \sin 2\theta) r^{2n+1} \\ \quad + (n(v \cos \theta - w \sin \theta) + (w \cos \theta + v \sin \theta)(a + 2c \cos 2\theta - 2b \sin 2\theta)) r^{2n+2}, \\ \dot{\theta} = 2lnr^{2n} + n(v \sin \theta + w \cos \theta) r^{2n+1}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Le système différentiel (3.5) est équivalent à l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} = & \frac{(l + wr \cos \theta + vr \sin \theta)^{n+1} r + l(a + 2c \cos 2\theta - 2b \sin 2\theta) r^{2n+1}}{2lnr^{2n} + n(v \sin \theta + w \cos \theta) r^{2n+1}} \\ & + \frac{(n(v \cos \theta - w \sin \theta) + (w \cos \theta + v \sin \theta)(a + 2c \cos 2\theta - 2b \sin 2\theta)) r^{2n+2}}{2lnr^{2n} + n(v \sin \theta + w \cos \theta) r^{2n+1}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

On effectue le changement de variable suivant :

$$\rho = \frac{r^{2n}}{((w \cos \theta + v \sin \theta) r + l)^n}, \quad (3.7)$$

dans l'équation (3.6), on obtient l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = (a + 2c \cos 2\theta - 2b \sin 2\theta) \rho + 1. \quad (3.8)$$

La solution générale de l'équation différentielle (3.8) est donnée par

$$\rho(\theta, k) = e^{a\theta + b \cos 2\theta + c \sin 2\theta} \left( k + \int_0^\theta e^{-as - b \cos 2s - c \sin 2s} ds \right), \quad (3.9)$$

où  $k \in \mathbb{R}$ .

Alors le système (3.1) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = \left( \frac{x^2 + y^2}{wx + vy + l} \right)^n e^{-\left( a \left( \arctan \frac{y}{x} \right) + \frac{bx^2 + 2cxy - by^2}{x^2 + y^2} \right) - \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} e^{-as - b \cos 2s - c \sin 2s} ds}.$$

Puisque cette intégrale première peut être exprimée par des quadratures de fonctions élémentaires, c'est une fonction de Liouville, et par conséquent le système (3.1) est Darboux intégrable. Ainsi (a) du théorème (3.2.1) est démontré.

(b) La solution de l'équation (3.8) avec la condition initiale  $\rho(0, k^*) = k^* > 0$  est

$$\rho(\theta, k^*) = e^{a\theta + b \cos 2\theta + c \sin 2\theta} \left( k^* + \int_0^\theta e^{-as - b \cos 2s - c \sin 2s} ds \right), \quad (3.10)$$

La condition de périodicité de cette solution est donnée par :

$$\rho(0, k^*) = \rho(2\pi, k^*).$$

Ceci implique que la valeur de  $k^*$  est

$$k^* = \frac{e^{2\pi a} f(2\pi)}{1 - e^{2\pi a}} > 0,$$

car  $a < 0$  et  $f(\theta) = \int_0^\theta e^{-as - b \cos 2s - c \sin 2s} ds > 0$ , pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ .

On substitue  $k$  par cette valeur de  $k^*$  dans (3.9), on obtient

$$\rho(\theta, k^*) = \rho^*(\theta) = e^{a\theta + b \cos 2\theta + c \sin 2\theta} \left( \frac{e^{2\pi a} f(2\pi)}{1 - e^{2\pi a}} + \int_0^\theta e^{-as - b \cos 2s - c \sin 2s} ds \right). \quad (3.11)$$

Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , on a :  $f(\theta) = \int_0^\theta e^{-as - b \cos 2s - c \sin 2s} ds > 0$  et puisque  $k^* > 0$ , alors,  $\rho^*(\theta) > 0$ . D'après le changement de variable qui transforme (3.6) à (3.8), pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , on obtient un unique  $r^*(\theta) > 0$  donné par :

$$r^*(\theta) = \frac{1}{2} \left( g(\theta) \rho^*(\theta)^{\frac{1}{n}} + \sqrt{\left( g(\theta) \rho^*(\theta)^{\frac{1}{n}} \right)^2 + 4l \rho^*(\theta)^{\frac{1}{n}}} \right). \quad (3.12)$$



D'autre part, puisque  $l > 0$  et  $\rho^*(\theta) > 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , alors  $r^*(\theta) > 0$ , il est  $2\pi$ -périodique, puisque  $g$  et  $\rho^*$  sont  $2\pi$ -périodiques.

Afin de prouver que cette solution périodique est une orbite périodique isolée, c'est à dire un cycle limite, il suffit que l'application du premier retour de Poincaré :

$$\lambda \mapsto \Pi(2\pi, \lambda) = \rho(\theta, \lambda),$$

vérifie

$$\left. \frac{d\rho(2\pi, \lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=k^*} \neq 1.$$

Un calcul facile montre que :

$$\left. \frac{d\rho(2\pi, \lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=k^*} = \frac{d\rho^*(\theta)}{dk^*} = e^{2\pi a+b} \neq 1.$$

Par conséquent,  $r^*(\theta)$  est un cycle limite hyperbolique de l'équation différentielle (3.6).

Dans ce qui suit, on montre que cette solution est un cycle limite non algébrique. En coordonnées cartésiennes  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ , l'équation de la courbe déterminée par ce cycle limite

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \left( \frac{x^2 + y^2}{wx + vy + l} \right)^n - e^{a(\arctan \frac{y}{x}) + \frac{bx^2 + 2cxy - by^2}{x^2 + y^2}} \\ &\quad \times \left( \frac{e^{2\pi a} f(2\pi)}{1 - e^{2\pi a}} + \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} e^{-as - b \cos 2s - c \sin 2s} ds \right) = 0. \end{aligned}$$

Il n'existe pas d'entier  $n$  pour lequel  $\frac{\partial^{(n)} F}{\partial x^n}$  et  $\frac{\partial^{(n)} F}{\partial y^n}$  disparaissent à la fois.

Nous calculons :  $\frac{\partial}{\partial x} F$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) &= n \frac{(wx^2 + 2vxy + 2lx - wy^2) \left( \frac{x^2 + y^2}{l + vy + wx} \right)^{n-1}}{(l + vy + wx)^2} \\ &\quad - \frac{y}{x^2 + y^2} \left( 1 + \left( \frac{ax^2 + ay^2 + 2cx^2 - 2cy^2 - 4bxy}{x^2 + y^2} \right) e^{a(\arctan \frac{y}{x}) + \frac{bx^2 + 2cxy - by^2}{x^2 + y^2}} \right) \\ &\quad \times \left( \frac{e^{2\pi a} f(2\pi)}{1 - e^{2\pi a}} + \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} e^{-as - b \cos 2s - c \sin 2s} ds \right). \end{aligned}$$

Si on dérive la fonction  $F$  une deuxième fois, l'expression

$$A(x, y) = e^{a(\arctan \frac{y}{x}) + \frac{bx^2 + 2cxy - by^2}{x^2 + y^2}} \left( \frac{e^{2\pi a} f(2\pi)}{1 - e^{2\pi a}} + \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} e^{-as - b \cos 2s - c \sin 2s} ds \right).$$

apparaît de nouveau, ainsi cette expression apparaît dans la dérivée partielle de n'importe quel ordre. Ce qui assure que la courbe  $F(x, y) = 0$  est non-algébrique et le cycle limite du système (3.1) sera également non algébrique. Ainsi le résultat (b) du théorème (3.2.1) est démontré. ■

### ■ 3.2.2 Exemples d'application

**Exemple 3.2.2.** Prenons  $b = \frac{1}{2}, c = 0, a = -1, v = w = l = 1$ , le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1+x+y)^{n+1} + n(x^2 - y^2 - 2y - 2xy)(x^2 + y^2)^n \\ \quad + x(1+x+y)(-(x^2 + y^2) - 2xy)(x^2 + y^2)^{n-1} \\ \dot{y} = y(1+x+y)^{n+1} + n(x^2 - y^2 + 2x + 2xy)(x^2 + y^2)^n \\ \quad + y(1+x+y)(-(x^2 + y^2) - 2xy)(x^2 + y^2)^{n-1}, \end{cases} \quad (3.13)$$

qui admet un cycle limite non algébrique donné explicitement en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  par :

$$r^*(\theta) = \frac{1}{2} \left( (\cos \theta + \sin \theta) \rho^*(\theta)^{\frac{1}{n}} + \sqrt{(\cos \theta + \sin \theta)^2 \rho^*(\theta)^{\frac{2}{n}} + 4l \rho^*(\theta)^{\frac{1}{n}}} \right),$$

où

$$\rho^*(\theta) = e^{-\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta} \left( \frac{e^{-2\pi f(2\pi)}}{1 - e^{-2\pi}} + f(\theta) \right) \text{ et } f(\theta) = \int_0^\theta e^{s - \frac{1}{2} \cos 2s} ds.$$

**Pour  $n = 1$  :** le système (3.13) a un cycle limite non algébrique donné explicitement en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  par :

$$r^*(\theta) = \frac{1}{2} \left( (\cos \theta + \sin \theta) \rho^*(\theta) + \sqrt{(\cos \theta + \sin \theta)^2 \rho^*(\theta)^2 + 4l \rho^*(\theta)} \right).$$

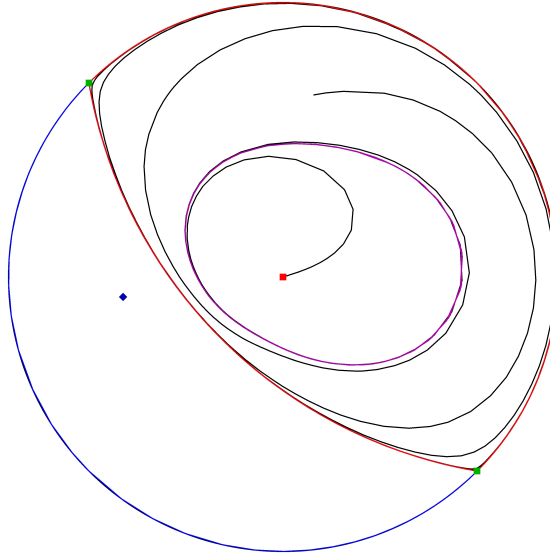


Figure 3.1 – Le portrait de phase dans le disque de Poincaré du système (3.13) pour  $n = 1$

**Pour**  $n = 2$  : le système (3.13) a un cycle limite non algébrique donné explicitement en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  par :

$$r^*(\theta) = \frac{1}{2} \left( (\cos \theta + \sin \theta) \rho^*(\theta)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\left( (\cos \theta + \sin \theta) \rho^*(\theta)^{\frac{1}{2}} \right)^2 + 4l \rho^*(\theta)^{\frac{1}{2}}} \right).$$

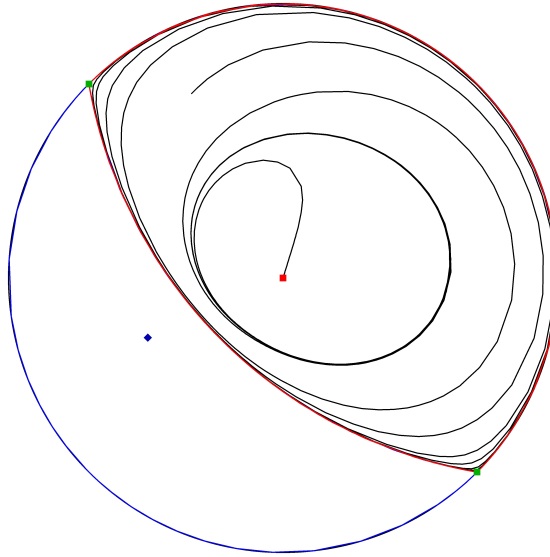


Figure 3.2 – Le portrait de phase dans le disque de Poincaré du système (3.13) pour  $n = 2$

### ■ 3.3 Cycles limites d'une classe de systèmes différentiels planaires du sixième degré

Cette section vise à traiter une classe des systèmes différentiels planaires de degré six de la forme :

$$\begin{cases} x' = x(l + mx + ny)^2 + x(l + mx + ny)(ax^4 + ay^4 + 2bxy^3 + 2bx^3y) \\ \quad - (x^2 + y^2)(4ly^3 - nx^4 + 3ny^4 + 4mxy^3), \\ y' = y(l + mx + ny)^2 + y(l + mx + ny)(ax^4 + ay^4 + 2bxy^3 + 2bx^3y) \\ \quad + (x^2 + y^2)(4lx^3 + 3mx^4 - my^4 + 4nx^3y), \end{cases} \quad (3.14)$$

où  $m, n, l$  sont des paramètres réels et  $a, b$  sont des paramètres réels non nuls. Nous montrons l'existence d'un cycle limite non algébrique en donnant son expression explicite.

Nous définissons les polynômes trigonométriques suivants :

$$f(\theta, r_0) = \frac{(m \cos \theta + n \sin \theta) e^{a\theta - \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2\theta)])} \left( \frac{r_0^4}{mr_0 + l} + \int_0^\theta e^{-as + \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2s)])} ds \right)}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta} \quad (3.15)$$

$$g(\theta, r_0) = \frac{l e^{a\theta - \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2\theta)])} \left( \frac{r_0^4}{mr_0 + l} + \int_0^\theta e^{-as + \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2s)])} ds \right)}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}. \quad (3.16)$$

$$F(\theta, k) = \frac{(m \cos \theta + n \sin \theta) e^{a\theta - \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2\theta)])} \left( k + \int_0^\theta e^{-as + \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2s)])} ds \right)}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta} \quad (3.17)$$

$$G(\theta, k) = \frac{l e^{a\theta - \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2\theta)])} \left( k + \int_0^\theta e^{-as + \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2s)])} ds \right)}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}. \quad (3.18)$$

Avec  $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$  et  $k \in \mathbb{R}$ .

### ■ 3.3.1 Résultat principal

Dans cette partie, nous présentons un résultat sur les cycles limites pour le système différentiel (3.14).

**Théorème 3.3.1.** *Le système différentiel polynômial (3.14) admet un cycle limite non algébrique donné explicitement en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  par :*

$$r(\theta, r_*) = \frac{1}{2} \left( \frac{-4 \left( \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} g(\theta, r_*) + \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_*) + \sqrt{3} \sqrt{27f^4(\theta, r_*) + 256g^3(\theta, r_*)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_*) + \sqrt{3} \sqrt{27f^4(\theta, r_*) + 256g^3(\theta, r_*)}}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.19)$$

$$+ \frac{1}{2} \left( \frac{4 \left( \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} g(\theta, r_*) - \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_*) + \sqrt{3} \sqrt{27f^4(\theta, r_*) + 256g^3(\theta, r_*)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_*) + \sqrt{3} \sqrt{27f^4(\theta, r_*) + 256g^3(\theta, r_*)}}} - \frac{2f(\theta, r_*)}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_*) + \sqrt{3} \sqrt{27f^4(\theta, r_*) + 256g^3(\theta, r_*)}}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

où

$$r_* = \frac{1}{2} \left( \frac{-4 \left( \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} g_0(2\pi) + \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3} \sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3} \sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{1}{2} \left( \frac{4 \left( \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} g_0(2\pi) - \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3} \sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3} \sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}} - \frac{2f_0(2\pi)}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3} \sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{et } f_0(2\pi) = \frac{m \int_0^{2\pi} e^{-as + \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2s)])} ds}{e^{-2a\pi} - 1}, \quad g_0(2\pi) = \frac{l \int_0^{2\pi} e^{-as + \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2s)])} ds}{e^{-2a\pi} - 1},$$

où  $m, n, l$  sont des paramètres réels et  $a, b$  sont des paramètres réels non nuls, telles

que :

$$\begin{cases} (H_1) : 27\eta^4 + 256\xi^3 > 0, \\ (H_2) : -4\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right)\xi \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9\eta^2 + \sqrt{3}\sqrt{27\eta^4 + 256\xi^3}} > 0, \\ (H_3) : \left( \frac{-4\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right)\sqrt[3]{3}\xi + \sqrt[3]{9\eta^2 + \sqrt{3}\sqrt{27\eta^4 + 256\xi^3}}}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9\eta^2 + \sqrt{3}\sqrt{27\eta^4 + 256\xi^3}}} \right)^{\frac{2}{3}} + 2\eta \leq 0, \end{cases} \quad (3.20)$$

pour tout  $(\eta, \xi) \in \{(F(\theta, k), G(\theta, k)), (f_0(2\pi), g_0(2\pi))\}$ .

Pour prouver le théorème (3.3.1), nous avons besoin des lemmes suivants, le premier concerne l'intégrabilité du système (3.14).

**Lemme 3.3.2.** *Le système différentiel polynomial multiparamétrique (3.14) est Darboux intégrable et son intégrale première est :*

$$\begin{aligned} I(x, y) = & \frac{x^4 + y^4}{(mx + ny + l)} \times \exp\left(-\int_0^{\left(\arctan \frac{y}{x}\right)} \frac{3a + a \cos 4s + 4b \sin 2s}{\cos 4s + 3} ds\right) \\ & - \int_0^{\left(\arctan \frac{y}{x}\right)} \exp\left(-\int_0^s \frac{3a + a \cos 4w + 4b \sin 2w}{\cos 4w + 3} dw\right) ds. \end{aligned} \quad (3.21)$$

*Démonstration.* En passant aux coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , définies par  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , le système (3.14) devient :

$$\begin{cases} r' = f_5(\theta) r^5 + f_4(\theta) r^4 + f_2(\theta) r^2 + f_1(\theta) r + 8l^2, \\ \theta' = g_4(\theta) r^4 + g_3(\theta) r^3, \end{cases} \quad (3.22)$$

où

$$\begin{aligned} f_5(\theta) &= 6n \cos \theta - 6m \sin \theta + 5n \cos 3\theta - 3n \cos 5\theta + 5m \sin 3\theta + 3m \sin 5\theta \\ &\quad + 6am \cos \theta + 4bn \cos \theta + 6an \sin \theta + 4bm \sin \theta + am \cos 3\theta + am \cos 5\theta \\ &\quad - 4bn \cos 3\theta - an \sin 3\theta + 4bm \sin 3\theta + an \sin 5\theta, \\ f_4(\theta) &= 8l \sin 4\theta + 6al + 2al \cos 4\theta + 8bl \sin 2\theta, \\ f_2(\theta) &= 4m^2 \cos 2\theta - 4n^2 \cos 2\theta + 4m^2 + 4n^2 + 8mn \sin 2\theta, \\ f_1(\theta) &= 16lm \cos \theta + 16ln \sin \theta, \\ g_4(\theta) &= 18m \cos \theta + 18n \sin \theta + 3m \cos 3\theta + 3m \cos 5\theta - 3n \sin 3\theta + 3n \sin 5\theta, \\ g_3(\theta) &= 24l + 8l \cos 4\theta. \end{aligned}$$

Si  $g_4(\theta)r + g_3(\theta) \neq 0$ , le système différentiel (3.22) est équivalent à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{f_5(\theta)r^5 + f_4(\theta)r^4 + f_2(\theta)r^2 + f_1(\theta)r + 8l^2}{g_4(\theta)r^4 + g_3(\theta)r^3}. \quad (3.23)$$

En introduisant le changement de variables de type :

$$\rho = \frac{(r \cos \theta)^4 + (r \sin \theta)^4}{mr \cos \theta + nr \sin \theta + l}, \quad mr \cos \theta + nr \sin \theta + l \neq 0. \quad (3.24)$$

Alors l'équation différentielle (3.23) devient :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{3a + a \cos 4\theta + 4b \sin 2\theta}{\cos 4\theta + 3} \rho + 1, \quad (3.25)$$

la solution générale de cette équation est donnée par :

$$\rho(\theta, k) = \exp\left(\int_0^\theta \frac{3a + a \cos 4s + 4b \sin 2s}{\cos 4s + 3} ds\right) \left(k + \int_0^\theta \exp\left(-\int_0^s \frac{3a + a \cos 4w + 4b \sin 2w}{\cos 4w + 3} dw\right) ds\right) \quad (3.26)$$

où  $k \in \mathbb{R}$ . Alors le système (3.14) est intégrable et son intégrale première est

$$I(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{(mx + ny + l)} \times \exp\left(-\int_0^{(\arctan \frac{y}{x})} \frac{3a + a \cos 4s + 4b \sin 2s}{\cos 4s + 3} ds\right) - \int_0^{(\arctan \frac{y}{x})} \exp\left(-\int_0^s \frac{3a + a \cos 4w + 4b \sin 2w}{\cos 4w + 3} dw\right) ds. \quad (3.27)$$

Cette fonction peut être exprimée par des quadratures de fonctions élémentaires, alors  $I$  est fonction de Liouville, et par conséquent le système (3.14) est Darboux intégrable. ■

Nous considérons la fonction réelle  $h$  définie par :

$$h(\theta) = e^{a\theta - \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2\theta)])} \left(\frac{1}{e^{-2a\pi} - 1} \psi(2\pi) + \psi(\theta)\right), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad (3.28)$$

où  $b, a \in \mathbb{R}^*$  et  $\psi(\theta) = \int_0^\theta e^{-as + \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2s)])} ds$ .

**Lemme 3.3.3.** *La fonction  $h$  est  $2\pi$ -périodique.*

*Démonstration.* On a

$$h(\theta + 2\pi) = e^{2a\pi} e^{a\theta - \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2\theta)])} \left(\frac{1}{e^{-2a\pi} - 1} \psi(2\pi) + \psi(\theta + 2\pi)\right), \quad (3.29)$$

et

$$\begin{aligned}\psi(\theta + 2\pi) &= \int_0^{\theta+2\pi} e^{-as + \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2s)])} ds \\ &= \psi(2\pi) + \int_{2\pi}^{\theta+2\pi} e^{-as + \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2s)])} ds.\end{aligned}$$

En posant  $s = z + 2\pi$  dans l'intégrale  $\int_{2\pi}^{\theta+2\pi} e^{-as + \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2s)])} ds$ , on obtient :

$$\psi(\theta + 2\pi) = \psi(2\pi) + e^{-2a\pi} \int_0^\theta e^{-az + \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2z)])} dz. \quad (3.30)$$

On substitut l'expression (3.30) dans (3.29), on obtient :  $h(\theta + 2\pi) = h(\theta)$ .

C'est-à-dire  $h$  est  $2\pi$ -périodique. ■

**Lemme 3.3.4.** *L'équation (3.23) admet une solution strictement positive  $2\pi$ -périodique.*

*Démonstration.* D'après la preuve du lemme (3.3.2), la solution générale de l'équation (3.23) est :

$$\frac{(r \cos \theta)^4 + (r \sin \theta)^4}{mr \cos \theta + nr \sin \theta + l} - e^{a\theta - \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2\theta)])} \left( k + \int_0^\theta e^{-as + \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2s)])} ds \right) = 0, \quad (3.31)$$

où  $k \in \mathbb{R}$ . D'après les hypothèses (3.20), l'équation (3.31) admet les solutions suivantes :

$$\begin{aligned}r_1 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} G(\theta, k) + \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} G(\theta, k) - \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}}{\frac{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}}{2F(\theta, k)}}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \frac{\sqrt{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} G(\theta, k) + \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}}} \\ r_2 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} G(\theta, k) + \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} G(\theta, k) - \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}}{\frac{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}}{2F(\theta, k)}}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \frac{\sqrt{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} G(\theta, k) + \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}}}\end{aligned}$$

$$r_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} G(\theta, k) + \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left( \frac{4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} G(\theta, k) - \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}} - \frac{2F(\theta, k)}{\sqrt{\frac{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} G(\theta, k) + \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}}}}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$r_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} G(\theta, k) + \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left( \frac{4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} G(\theta, k) - \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}} - \frac{2F(\theta, k)}{\sqrt{\frac{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} G(\theta, k) + \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}}}}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

où

$$F(\theta, k) = \frac{(m \cos \theta + n \sin \theta) e^{a\theta - \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2\theta)])} \left( k + \int_0^\theta e^{-as + \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2s)])} ds \right)}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta},$$

$$G(\theta, k) = \frac{l e^{a\theta - \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2\theta)])} \left( k + \int_0^\theta e^{-as + \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2s)])} ds \right)}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}.$$

Les valeurs  $r_1, r_2, r_3$  ne sont pas strictement positives, donc nous prenons :

$r = r_4 = r(\theta, k)$  telle que :

$$r(\theta, k) = \frac{1}{2} \left( \frac{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} G(\theta, k) + \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left( \frac{4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} G(\theta, k) - \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}} - \frac{2F(\theta, k)}{\sqrt{\frac{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} G(\theta, k) + \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}}}}}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.32)$$



Montrons que pour tout  $\theta \in [\theta, 2\pi]$ ,  $r(\theta, k) > 0$ , en effet, d'après les conditions (3.20) on obtient :

$$-4\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right) \sqrt[3]{3}G(\theta, k) + \sqrt[3]{9F^2(\theta, k) + \sqrt{3}\sqrt{27F^4(\theta, k) + 256G^3(\theta, k)}} > 0,$$

donc, la valeur  $r(\theta, k)$  est strictement positive.

Considérons la solution  $\theta \rightarrow r(\theta, r_0)$  du (3.23), telle que  $r(\theta, r_0) = r_0 > 0$ , correspond à la valeur,

$$k = \frac{r_0^4}{mr_0 + l} \text{ avec } mr_0 + l \neq 0.$$

Alors,  $r(\theta, r_0)$  est donné par :

$$\begin{aligned} r(\theta, r_0) = & \frac{1}{2} \left( \frac{-4\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right) \sqrt[3]{3}g(2\pi, r_0) + \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_0) + \sqrt{3}\sqrt{27f^4(\theta, r_0) + 256g^3(\theta, r_0)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_0) + \sqrt{3}\sqrt{27f^4(\theta, r_0) + 256g^3(\theta, r_0)}}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{4\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right) \sqrt[3]{3}g(\theta, r_0) - \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_0) + \sqrt{3}\sqrt{27f^4(\theta, r_0) + 256g^3(\theta, r_0)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_0) + \sqrt{3}\sqrt{27f^4(\theta, r_0) + 256g^3(\theta, r_0)}}} - \frac{2f(\theta, r_0)}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_0) + \sqrt{3}\sqrt{27f^4(\theta, r_0) + 256g^3(\theta, r_0)}}} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions trigonométriques définies dans (??) et (??) respectivement.

D'autre part une solution périodique du système (3.22) doit satisfaire à la condition

$$r(2\pi, r_0) = r(0, r_0), \quad (3.34)$$

avec la condition  $r(2\pi, r_0) = r_0$ , où  $r_0 = r(0, r_0)$ .

La résolution de l'équation (3.34) donne :

$$\begin{aligned} r_0^1 = & -\frac{1}{2} \left( \frac{-4\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right) \sqrt[3]{3}g_0(2\pi) + \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & - \frac{1}{2} \left( \frac{4\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right) \sqrt[3]{3}g_0(2\pi) - \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}} - \frac{2f_0(2\pi)}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

et

$$r_0^2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} g_0(2\pi) + \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} g_0(2\pi) - \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}} - \frac{2f_0(2\pi)}{\sqrt{\frac{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} g_0(2\pi) + \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$r_0^3 = \frac{1}{2} \left( \frac{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} g_0(2\pi) + \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ - \frac{1}{2} \left( \frac{4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} g_0(2\pi) - \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}} - \frac{2f_0(2\pi)}{\sqrt{\frac{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} g_0(2\pi) + \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$r_0^4 = \frac{1}{2} \left( \frac{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} g_0(2\pi) + \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} g_0(2\pi) - \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}} - \frac{2f_0(2\pi)}{\sqrt{\frac{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} g_0(2\pi) + \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

où

$$f_0(2\pi) = \frac{m \int_0^{2\pi} e^{-as + \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2s)])} ds}{e^{-2a\pi} - 1}, \quad g_0(2\pi) = \frac{l \int_0^{2\pi} e^{-as + \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2s)])} ds}{e^{-2a\pi} - 1}.$$

Parmi ces quatre solutions, il n'y a qu'une seule solution réelle strictement positive

donnée par

$$r_0 = r_0^4 = \frac{1}{2} \left( \frac{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} g_0(2\pi) + \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} g_0(2\pi) - \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}} - \frac{2f_0(2\pi)}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}}{\sqrt{\frac{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} g_0(2\pi) + \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

Nous prenons en considération la valeur suivante  $r_*$  telle que  $r(2\pi, r_*) = r_*$  :

$$r_* = \frac{1}{2} \left( \frac{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} g_0(2\pi) + \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}} \right)^{\frac{1}{2}} + \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} g_0(2\pi) - \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}} - \frac{2f_0(2\pi)}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}}{\sqrt{\frac{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} g_0(2\pi) + \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f_0^2(2\pi) + \sqrt{3}\sqrt{27f_0^4(2\pi) + 256g_0^3(2\pi)}}}}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En remplaçant  $r_0$  par cette valeur de  $r_*$  dans (3.33), la solution de (3.22) devient :

$$r(\theta, r_*) = \frac{1}{2} \left( \frac{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} g(\theta, r_*) + \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_*) + \sqrt{3}\sqrt{27f^4(\theta, r_*) + 256g^3(\theta, r_*)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_*) + \sqrt{3}\sqrt{27f^4(\theta, r_*) + 256g^3(\theta, r_*)}}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} g(\theta, r_*) - \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_*) + \sqrt{3}\sqrt{27f^4(\theta, r_*) + 256g^3(\theta, r_*)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_*) + \sqrt{3}\sqrt{27f^4(\theta, r_*) + 256g^3(\theta, r_*)}}} - \frac{2f(\theta, r_*)}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_*) + \sqrt{3}\sqrt{27f^4(\theta, r_*) + 256g^3(\theta, r_*)}}}}{\sqrt{\frac{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3} g(\theta, r_*) + \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_*) + \sqrt{3}\sqrt{27f^4(\theta, r_*) + 256g^3(\theta, r_*)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_*) + \sqrt{3}\sqrt{27f^4(\theta, r_*) + 256g^3(\theta, r_*)}}}}} \right)^{\frac{1}{2}} > 0,$$

où

$$f(\theta, r_*) = \frac{(m \cos \theta + n \sin \theta) e^{a\theta - \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2\theta)])} \left( \frac{r_*^4}{mr_* + l} + \int_0^\theta e^{-as + \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2s)])} ds \right)}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}, \\ g(\theta, r_*) = \frac{l e^{a\theta - \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2\theta)])} \left( \frac{r_*^4}{mr_* + l} + \int_0^\theta e^{-as + \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2s)])} ds \right)}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}.$$

D'après le lemme (3.3.3), il est facile de voir que  $r(\theta, r_*) = r(\theta + 2\pi, r_*)$ , pour tout  $\theta \in [0, 2\pi[$ .

Par conséquent,  $r(\theta, r_*)$  est une solution  $2\pi$ -périodique de l'équation (3.23). ■

Nous pouvons maintenant donner la preuve du théorème principal de cette section.

### Preuve du théorème (3.3.1)

Il est clair que toute solution périodique de (3.23) correspond à une solution périodique de (3.25) par la relation  $\rho = \frac{(r \cos \theta)^4 + (r \sin \theta)^4}{mr \cos \theta + nr \sin \theta + l}$ .

Du le lemme (3.3.4), on déduit que l'équation (3.23) admet une solution strictement positive  $2\pi$ -périodique.

L'inégalité  $r(\theta, r_*) > 0$  signifie que la solution périodique ne passe pas par le point d'équilibre  $O(0, 0)$  du système (3.22). La solution  $r(\theta, r_*)$  est périodique si  $\rho(2\pi, \rho_0) = \rho(0, \rho_0)$  alors :

$$\rho_0 = \frac{1}{e^{-2a\pi} - 1} \int_0^{2\pi} e^{-as + \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2s)])} ds.$$

Afin de prouver que cette solution représente un cycle limite (orbite périodique isolée), il suffit que L'application du premier retour de Poincaré :  $\rho_0 \rightarrow \Pi(2\pi, \rho_0) = \rho(2\pi, \rho_0)$  vérifie :

$$\frac{d\Pi}{d\rho_0}(2\pi, \rho_0) \neq 1,$$

ce qui est le cas car nous avons

$$\frac{d\Pi}{d\rho_0}(2\pi, \rho_0) = e^{2\pi a} \neq 1,$$

pour tout  $\rho_0$ . Nous concluons que cette solution est un cycle limite.

Dans ce qui suit, on montre que cette solution est un cycle limite non algébrique. En coordonnées cartésiennes  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ , l'équation de la courbe déterminée par ce cycle limite est la suivante :

$$f(x, y) = \frac{(r \cos \theta)^4 + (r \sin \theta)^4}{mr \cos \theta + nr \sin \theta + l} - e^{a\theta - \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2\theta)])} \left( \frac{r_*^4}{mr_* + l} + \int_0^\theta B(s) ds \right) = 0,$$

$$\text{où } B(s) = e^{-as + \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2s)])}.$$

Il n'existe pas d'entier  $n$  pour lequel  $\frac{\partial^{(n)}f}{\partial x^n}(x, y)$  et  $\frac{\partial^{(n)}f}{\partial y^n}(x, y)$  s'annulent au même temps.

Nous calculons :  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{(3x^3)(mx+ny+l)-(m)(x^4+y^4)}{(mx+ny+l)^2} - \left( \frac{ay}{x^2+y^2} + \frac{4bxy^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2+(x^2-y^2)^2} \right) e^{a \arctan \frac{x}{y} - \frac{1}{4}b \left( \pi - 4 \arctan \left( \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right) \right)} \\ &\times \left( \frac{r_*^4}{mr_*+l} + \int_0^{\arctan \frac{x}{y}} B(s) ds \right) - B(\arctan \frac{x}{y}) e^{a \arctan \frac{x}{y} - \frac{1}{4}b \left( \pi - 4 \arctan \left( \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right) \right)}. \end{aligned}$$

L'expression,

$$e^{a \arctan \frac{x}{y} - \frac{1}{4}b \left( \pi - 4 \arctan \left( \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right) \right)} \times \left( \frac{r_*^4}{mr_*+l} + \int_0^{\arctan \frac{x}{y}} B(s) ds \right),$$

existe déjà dans  $f(x, y)$  et réapparaît toujours lorsque les dérivées partielles d'ordre arbitraire sont effectuées, ce qui signifie que  $f(x, y)$  n'est pas un polynôme et que ce cycle limite est non algébrique. Par conséquent, le système (3.14) a un cycle limite non algébrique instable si  $a > 0$ , et stable si  $a < 0$ .

### ■ 3.3.2 Application

Nous donnons ici un exemple pour illustrer l'applicabilité du théorème (3.3.1).

**Exemple 3.3.5.** Prenons  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $m = 1$ ,  $n = 1$ ,  $l = -4$ , alors le système (3.14) devient :

$$\begin{cases} x' = x(-4+x+y)^2 + x(-4+x+y)(x^4+y^4+4xy^3+4x^3y) \\ \quad - (x^2+y^2)(-16y^3-x^4+3y^4+4xy^3). \\ y' = y(-4+x+y)^2 + y(-4+x+y)(x^4+y^4+4xy^3+4x^3y) \\ \quad + (x^2+y^2)(-16x^3+3x^4-y^4+4x^3y). \end{cases} \quad (3.35)$$

Le système (3.35) admet un cycle limite non algébrique donné explicitement en coordonnées polaires  $(\tau, \theta)$  par :

$$\begin{aligned} r(\theta, r_*) &= \frac{1}{2} \left( \frac{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3}g(\theta, r_*) + \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_*) + \sqrt{3}\sqrt{27f^4(\theta, r_*) + 256g^3(\theta, r_*)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_*) + \sqrt{3}\sqrt{27f^4(\theta, r_*) + 256g^3(\theta, r_*)}}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3}g(\theta, r_*) - \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_*) + \sqrt{3}\sqrt{27f^4(\theta, r_*) + 256g^3(\theta, r_*)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_*) + \sqrt{3}\sqrt{27f^4(\theta, r_*) + 256g^3(\theta, r_*)}} - \frac{2f(\theta, r_*)}{\sqrt{\frac{-4(\sqrt[3]{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{3}g(\theta, r_*) + \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_*) + \sqrt{3}\sqrt{27f^4(\theta, r_*) + 256g^3(\theta, r_*)}}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9f^2(\theta, r_*) + \sqrt{3}\sqrt{27f^4(\theta, r_*) + 256g^3(\theta, r_*)}}}}} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

où

$$f(\theta, r_*) = \frac{(\cos \theta + \sin \theta) e^{\theta - \frac{1}{2}(\pi - 4 \arctan[\cos(2\theta)])} \left( \frac{r_*^4}{r_* - 4} + \int_0^\theta e^{-s + \frac{1}{2}(\pi - 4 \arctan[\cos(2s)])} ds \right)}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta},$$

$$g(\theta, r_*) = \frac{-4e^{\theta - \frac{1}{4}b(\pi - 4 \arctan[\cos(2\theta)])} \left( \frac{r_*^4}{r_* - 4} + \int_0^\theta e^{-s + \frac{1}{2}(\pi - 4 \arctan[\cos(2s)])} ds \right)}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}.$$

L'intersection du cycle limite avec l'axe  $OX_+$  est le point  $r_* \simeq 1.93114$ .

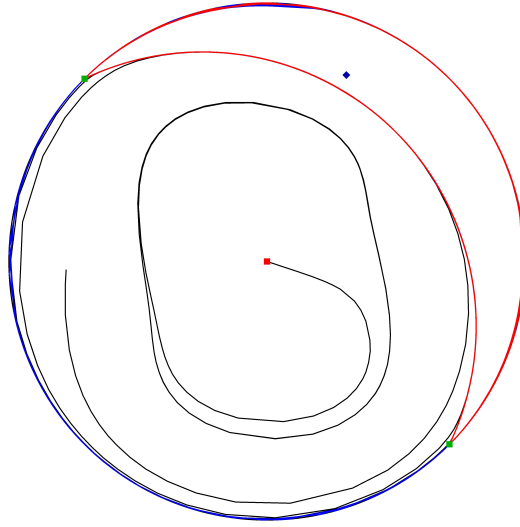


Figure 3.3 – Portrait de phase du système différentiel (3.35)

## ■ 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons construit deux classes de systèmes différentiels planaires polynomiaux pour lesquels, nous avons prouvé que ces systèmes sont Liouville intégrables, nous avons déterminé des conditions suffisantes d'existence d'un cycle limite non algébrique d'expression explicite pour chaque classe.

## Chapitre 4

---

# Sur le nombre maximum de cycles limites de systèmes différentiels de Liénard généralisée

### ■ 4.1 Introduction

Dans la théorie qualitative des systèmes différentiels, l'un des principaux problèmes ouverts est la détermination du nombre de cycles limites d'un système différentiel de la forme (1.1). La deuxième partie du 16<sup>ème</sup> problème de Hilbert [33], consiste à la recherche du nombre maximum et les dispositions relatives de cycles limites du champs de vecteurs polynomiaux avec un degré fixe.

Une manière classique pour obtenir les cycles limites de système différentiel de type (1.1), est de perturber ce système qui admet une singularité du type centre de sorte que les cycles limites qui peuvent être bifurqués à partir des orbites périodiques entourant le centre de ce système non perturbé, voir ([9], [17]). La notion d'un centre consiste en un point d'un système différentiel de type (1.1) pour lequel il existe un voisinage tel que toutes les orbites dans ce voisinage sont périodiques, excepté le point d'équilibre. L'importance du type centre vient du fait que, la naissance de cycles limites par la méthode de perturbation est faisable dans le cas d'un centre.

Il existe plusieurs méthodes pour étudier le nombre de cycles limites qui peuvent être bifurqués à partir des orbites périodiques d'un centre. La méthode de moyennisation est l'une des plus célèbres et plus importantes méthodes de perturbations actuellement utilisée dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques, cette technique consiste à donner une relation quantitative entre les solutions d'un système différentiel périodique

non autonome et celle de son système différentiel moyenné, lequel est autonome, voir par exemple [1], [3], [26], [43]. Dans ce chapitre, nous nous intéressons au nombre maximum de cycles limites que peut avoir une classe de systèmes différentiels de Liénard généralisées de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k f_{1k}(x) y^{2\beta}, \\ \dot{y} = -x - \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k (f_{2k}(x) y^{2\beta} + g_{2k}(x, y) y^{2\alpha+1}), \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $g_{2k}$ ,  $f_{1k}$  et  $f_{2k}$  sont des polynômes de degré  $m$ ,  $n$  et  $l$  respectivement et  $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ ,  $k \in \{1, 2\}$  et  $\varepsilon$  est un petit paramètre. Nous présentons un résultat, il s'agit d'un travail qui a fait l'objet d'une publication intitulée : "Limit cycles for a class of generalize Liénard polynomial differential systems via averaging theory". Notons que ce résultat généralise un travail récent présenté par J. Alavez-Ramirez, G. Blé, J. Llibre and J. Lopez-Lopez [1].

## ■ 4.2 Bifurcation de cycles limites à partir des orbites périodiques d'un centre linéaire perturbé

Dans cette section, on va appliquer la méthode de la moyennisation du premier et second ordre afin d'étudier le nombre maximum de cycles limites du système (4.1) qui peuvent être bifurqués à partir des orbites périodiques d'un centre linéaire  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ , perturbé par une classe de systèmes différentiels de Liénard généralisée de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f_1(x, y), \\ \dot{y} = -x - g_2(x, y) + f_2(x, y)y, \end{cases}$$

avec  $f_1(x, y) = \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k f_{1k}(x) y^{2\beta}$  et  $g_2(x, y) = \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k (f_{2k}(x) y^{2\beta} + g_{2k}(x, y) y^{2\alpha+1})$ , où  $g_{2k}$ ,  $f_{1k}$  et  $f_{2k}$  sont des polynômes de degré  $m$ ,  $n$  et  $l$  respectivement et  $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ ,  $k \in \{1, 2\}$  et  $\varepsilon$  est un petit paramètre.

### ■ 4.2.1 Résultat principal

Notre résultat principal est le suivant :

**Théorème 4.2.1.** *Pour  $|\varepsilon| \neq 0$  suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites du système (4.1) qu'on peut bifurquer à partir des orbites périodiques du système différentiel linéaire  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ , est :*



I)

$$\lambda_1 = \begin{cases} \max \left\{ \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \beta - \alpha, \left[ \frac{m}{2} \right] \right\} & \text{si } \beta \geq \alpha. \\ \max \left\{ \left[ \frac{n-1}{2} \right], \left[ \frac{m}{2} \right] + \alpha - \beta \right\} & \text{si } \alpha \geq \beta. \end{cases}$$

en utilisant la méthode de moyennisation d'ordre un.

II)

$$\lambda = \begin{cases} \max \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{m}{2} \right] + \alpha - \beta, \left[ \frac{m-1}{2} \right] + \left[ \frac{l}{2} \right] + \alpha, \left[ \frac{n}{2} \right] + \left[ \frac{m-1}{2} \right] + \alpha, \\ \left[ \frac{n}{2} \right] + \left[ \frac{l}{2} \right] + \beta - 1, 2 \left[ \frac{m-1}{2} \right] + 2\alpha - \beta + 1, \left[ \frac{n-1}{2} \right]. \end{array} \right\} & \text{si } \alpha \geq \beta. \\ \max \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \beta - \alpha, \left[ \frac{m-1}{2} \right] + \left[ \frac{l}{2} \right] + \beta, \left[ \frac{n}{2} \right] + \left[ \frac{m-1}{2} \right] + \beta, \\ \left[ \frac{n}{2} \right] + \left[ \frac{l}{2} \right] + 2\beta - \alpha - 1, 2 \left[ \frac{m-1}{2} \right] + \alpha + 1, \left[ \frac{m}{2} \right]. \end{array} \right\} & \text{si } \beta \geq \alpha. \end{cases}$$

en utilisant la méthode de moyennisation d'ordre deux.

Où  $[\cdot]$  désigne la fonction partie entière.

### Lemmes préliminaires

Afin de prouver le théorème (4.2.1), nous introduisons les lemmes suivants :

**Lemme 4.2.2.** Soient  $h_{i,j}(\theta) = \cos^i \theta \sin^j \theta$  et  $M_{i,j}(\theta) = \int_0^\theta h_{i,j}(s) ds$ , alors

$$M_{i,j}(2\pi) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ est impaire ou } j \text{ est impaire,} \\ \xi_{i,j}\pi, & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont paires,} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\text{où } \xi_{i,j} = \frac{(j-1)(j-3)\dots 1}{(j+i)(j+i-2)\dots(i+2)} \frac{1}{2^{i-1}} \binom{i}{\frac{i}{2}} \text{ et } \binom{i}{\frac{i}{2}} = \frac{i!}{\left(\frac{i}{2}!\right)^2}.$$

*Démonstration.* En utilisant les intégrales (4.18) et (4.19) de l'annexe avec  $\theta = 2\pi$  et  $h_{i,j}(2\pi) = 0$ .

Si  $j \neq 0$ , nous avons :

$$\begin{aligned} M_{i,2j}(2\pi) &= \frac{(2j-1)(2j-3)\dots 1}{(2j+i)(2j+i-2)\dots(i+2)} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta d\theta, \\ &= \frac{(2j-1)(2j-3)\dots 1}{(2j+i)(2j+i-2)\dots(i+2)} M_{i,0}(2\pi), \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$M_{i,2j+1}(2\pi) = \left[ -\frac{\cos^{i+1} \theta}{2j+i+1} \sum_{l=1}^{j-1} \frac{2^l j(j-1)\dots(j-l+1)}{(2j+i-1)(2j+i-3)\dots(2j+i-2l+1)} \sin^{2j-2l} \theta - \frac{\cos^{i+1} \theta}{2j+i+1} \sin^{2j} \theta \right]_0^{2\pi} = 0.$$

En utilisant les intégrales (4.16) et (4.17) de l'annexe avec  $\theta = 2\pi$ .

Si  $i \neq 0$ , il résulte que :

$$M_{2i,0}(2\pi) = \frac{(2i-1)(2i-3)\dots 1}{2^{i!}} 2\pi, \quad M_{2i+1,0}(2\pi) = 0. \quad (4.4)$$

Après la substitution des valeurs de  $M_{i,0}(2\pi)$  dans (4.3), nous trouvons (4.2). ■

**Lemme 4.2.3.** Soit  $\varphi_{i,j}^{p,q}(2\pi) = \int_0^{2\pi} M_{i,j}(\theta)h_{p,q}(\theta)d\theta$ , alors :

$$(a) : \begin{cases} \varphi_{2i+1,0}^{p,q}(2\pi) = \frac{1}{2i+1} \left( M_{2i+p,q+1}(2\pi) + \sum_{l=0}^{i-1} \frac{2^{l+1}i(i-1)\dots(i-l)}{(2i-1)(2i-3)\dots(2i-2l-1)} M_{2i+p+2l-2,q+1}(2\pi) \right), \\ \text{si } p \text{ est paire et } q \text{ est impaire.} \\ \varphi_{2i+1,0}^{p,q}(2\pi) = 0, \text{ si } p \text{ est impaire ou } q \text{ est paire.} \end{cases}$$

$$(b) : \begin{cases} \varphi_{2i+1,2j+1}^{p,q}(2\pi) = \frac{-1}{2(j+i+1)} \sum_{l=1}^{j-1} \frac{2^l j(j-1)\dots(j-l+1)}{(2j+2i)(2j+2i-2)\dots(2j+2i-2l+2)} M_{2i+p+2,2j-2l+q}(2\pi) \\ \quad - \frac{1}{2(j+i+1)} M_{2i+p+2,2j+q}(2\pi), \text{ si } p \text{ est paire et } q \text{ est paire.} \\ \varphi_{2i+1,2j+1}^{p,q}(2\pi) = 0, \text{ si } p \text{ est impaire ou } q \text{ est impaire.} \end{cases}$$

$$(c) : \begin{cases} \varphi_{2i,2j+1}^{p,q}(2\pi) = \frac{-1}{2j+2i+1} \sum_{l=1}^{j-1} \frac{2^l j(j-1)\dots(j-l+1)}{(2j+2i-1)(2j+2i-3)\dots(2j+2i-2l+1)} M_{2i+p+1,2j-2l+q}(2\pi) \\ \quad - \frac{1}{2j+2i+1} M_{2i+p+1,2j+q}(2\pi), \text{ si } p \text{ est impaire et } q \text{ est paire.} \\ \varphi_{2i,2j+1}^{p,q}(2\pi) = 0, \text{ si } p \text{ est paire ou } q \text{ est impaire.} \end{cases}$$

$$(d) : \begin{cases} \varphi_{2i+1,2j}^{p,q}(2\pi) = \frac{1}{2j+2i+1} \sum_{l=1}^{j-1} \frac{(2j-1)(2j-3)\dots(2j-2l+1)}{(2j+2i-1)(2j+2i-3)\dots(2j+2i-2l+1)} M_{2i+2+p,2j-2l+q-1}(2\pi) \\ \quad - \frac{1}{2j+2i+1} M_{2i+p+2,2j+q+1}(2\pi) + \frac{(2j-1)(2j-3)\dots 1}{(2j+2i+1)(2j+2i-1)\dots(2i+3)} \varphi_{2i+1,0}^{p,q}(2\pi), \\ \text{si } p \text{ est paire et } q \text{ est impaire.} \\ \varphi_{2i+1,2j}^{p,q}(2\pi) = 0, \text{ si } p \text{ est impaire ou } q \text{ est paire.} \end{cases}$$

*Démonstration.* En utilisant l'intégrale (4.17) de l'annexe et en tenant compte de  $h_{i,j}(\theta)h_{p,q}(\theta) = h_{i+p,j+q}(\theta)$ , nous trouvons :

$$\varphi_{2i+1,0}^{p,q}(2\pi) = \frac{1}{2i+1} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{l=0}^{i-1} \frac{2^{l+1}i(i-1)\dots(i-l)}{(2i-1)(2i-3)\dots(2i-2l-1)} h_{2i-2l+p-2,q+1}(\theta) + h_{2i+p,q+1}(\theta) \right) d\theta.$$

Comme :  $M_{i,j}(\theta) = \int_0^\theta h_{i,j}(s)ds$ , alors

$$\begin{aligned} \varphi_{2i+1,0}^{p,q}(2\pi) &= \frac{1}{2i+1} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{l=0}^{i-1} \frac{2^{l+1}i(i-1)\dots(i-l)}{(2i-1)(2i-3)\dots(2i-2l-1)} h_{2i-2l+p-2,q+1}(\theta) + h_{2i+p,q+1}(\theta) \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2i+1} \left( \sum_{l=0}^{i-1} \frac{2^{l+1}i(i-1)\dots(i-l)}{(2i-1)(2i-3)\dots(2i-2l-1)} \int_0^{2\pi} h_{2i-2l+p-2,q+1}(\theta)d\theta + \int_0^{2\pi} h_{2i+p,q+1}(\theta)d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2i+1} \left( \sum_{l=0}^{i-1} \frac{2^{l+1}i(i-1)\dots(i-l)}{(2i-1)(2i-3)\dots(2i-2l-1)} M_{2i+p+2l-2,q+1}(2\pi) + M_{2i+p,q+1}(2\pi) \right). \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du (a).

En utilisant les intégrales (4.18), (4.19), (4.16) et (4.17) de l'annexe en tenant compte  $h_{i,j}(\theta)h_{p,q}(\theta) = h_{i+p,j+q}(\theta)$ , nous trouvons :

$$\begin{aligned} \varphi_{2i+1,2j}^{p,q}(2\pi) &= \frac{-1}{2j+2i+1} \sum_{l=1}^{j-1} \frac{(2j-1)(2j-3)\dots(2j-2l+1)}{(2j+2i-1)(2j+2i-3)\dots(2j+2i-2l+1)} M_{2i+p+2,2j-2l+q-1}(2\pi) \\ &+ \frac{1}{2j+2i+1} M_{2i+p+2,2j+q+1}(2\pi) + \frac{(2j-1)(2j-3)\dots 1}{(2j+2i+1)(2j+2i-1)\dots(2i+3)} \varphi_{2i+1,0}^{p,q}(2\pi), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_{i,2j+1}^{p,q}(2\pi) &= \frac{-1}{2j+i+1} \sum_{l=1}^{j-1} \frac{2^l j(j-1)\dots(j-l+1)}{(2j+i-1)(2j+i-3)\dots(2j+i-2l+1)} M_{i+p+1,2j-2l+q}(2\pi) \\ &+ \frac{1}{2j+i+1} M_{i+p+1,2j+q}(2\pi), \end{aligned}$$

en utilisant le lemme (4.2.2) et par des calculs directs nous trouvons les expressions (b), (c) et (d). ■

### ■ 4.2.2 Preuve du Théorème 4.2.1.

La preuve du théorème (4.2.1) dépend de la méthode de la moyennisation du premier et second ordre.

Posons :

$$\begin{aligned} f_{11}(x) &= \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad f_{12}(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i, \quad f_{21}(x) = \sum_{i=0}^l d_i x^i, \quad f_{22}(x) = \sum_{i=0}^l D_i x^i. \\ g_{21}(x, y) &= \sum_{i+j=0}^m A_{i,j} x^i y^j, \quad g_{22}(x, y) = \sum_{i+j=0}^m C_{i,j} x^i y^j. \end{aligned}$$

Le système (4.1) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ ,  $r > 0$  devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon G_1(r, \theta) - \varepsilon^2 H_1(r, \theta), \\ \dot{\theta} = -1 - \frac{\varepsilon}{r} G_2(r, \theta) - \frac{\varepsilon^2}{r} H_2(r, \theta), \end{cases} \quad (4.5)$$

où

$$\begin{aligned} G_1(r, \theta) &= \sum_{i=0}^n a_i r^{i+2\beta} \cos^{i+1} \theta \sin^{2\beta} \theta + \sum_{i=0}^l d_i r^{i+2\beta} \cos^i \theta \sin^{2\beta+1} \theta \\ &+ \sum_{i+j=0}^m A_{i,j} r^{i+j+2\alpha+1} \cos^i \theta \sin^{j+2+2\alpha} \theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_1(r, \theta) &= \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2\beta} \cos^{i+1} \theta \sin^{2\beta} \theta + \sum_{i=0}^l D_i r^{i+2\beta} \cos^i \theta \sin^{2\beta+1} \theta \\
 &\quad + \sum_{i+j=0}^m C_{ij} r^{i+j+2\alpha+1} \cos^i \theta \sin^{j+2+2\alpha} \theta.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_2(r, \theta) &= \sum_{i=0}^l d_i r^{i+2\beta} \cos^{i+1} \theta \sin^{2\beta} \theta - \sum_{i=0}^n a_i r^{i+2\beta} \cos^i \theta \sin^{2\beta+1} \theta \\
 &\quad + \sum_{i+j=0}^m A_{ij} r^{i+j+2\alpha+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1+2\alpha} \theta.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_2(r, \theta) &= \sum_{i=0}^l D_i r^{i+2\beta} \cos^{i+1} \theta \sin^{2\beta} \theta - \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2\beta} \cos^i \theta \sin^{2\beta+1} \theta \\
 &\quad + \sum_{i+j=0}^m r^{i+j+2\alpha+1} C_{ij} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1+2\alpha} \theta.
 \end{aligned}$$

On prend la coordonnée  $\theta$  comme une nouvelle variable indépendante. Le système (4.5) devient :

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3), \quad (4.6)$$

où

$$F_1(r, \theta) = G_1(r, \theta), \quad (4.7)$$

$$F_2(r, \theta) = H_1(r, \theta) - \frac{1}{r} G_1(r, \theta) G_2(r, \theta). \quad (4.8)$$

Nous étudions d'abord les cycles limites de l'équation différentielle (4.6) en utilisant la méthode de la moyennisation du premier ordre. Donc, il faut étudier les zéros positifs simples de la fonction moyennée :

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta.$$

Pour chaque zéro simple positif de la fonction moyennée  $F_{10}$ , nous obtenons un cycle limite du système différentiel polynomial (4.1).

Si  $F_{10}$  est identiquement nulle, nous appliquons la méthode de moyennisation du second ordre, chaque simple zéro positif de la fonction moyennée

$$F_{20}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{d}{dr} F_1(r, \theta) \left( \int_0^\theta F_1(r, s) ds \right) + F_2(r, \theta) \right) d\theta,$$

fournir un cycle limite du système différentiel polynomial (4.1).

**Preuve de (I) du Théorème (4.2.1)**

Pour prouver la proposition (I) du Théorème (4.2.1), nous appliquons la méthode de moyennisation du premier ordre.

Maintenant, nous déterminons la fonction moyennée suivante :

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^n a_i r^{i+2\beta} \cos^{i+1} \theta \sin^{2\beta} \theta d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^l d_i r^{i+2\beta} \cos^i \theta \sin^{2\beta+1} \theta d\theta \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^m A_{i,j} r^{i+j+2\alpha+1} \cos^i \theta \sin^{j+2+2\alpha} \theta d\theta.
 \end{aligned}$$

Utilisons le lemme (4.2.2), la fonction moyennée  $F_{10}$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^n a_i r^{i+2\beta} \cos^{i+1} \theta \sin^{2\beta} \theta d\theta + \\
 &\quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair } j \text{ pair}}}^m A_{i,j} r^{i+j+2\alpha+1} \cos^i \theta \sin^{j+2+2\alpha} \theta d\theta \\
 &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} r^{2i+2\beta} \cos^{2i+2} \theta \sin^{2\beta} \theta d\theta \\
 &\quad + \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} A_{2i,2j} r^{2i+2j+2\alpha} \cos^{2i} \theta \sin^{2j+2+2\alpha} \theta d\theta \\
 &= \frac{r}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} r^{2i+2\beta} M_{2i+2,2\beta}(2\pi) + \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} A_{2i,2j} r^{2i+2j+2\alpha} M_{2j+2+2\alpha}(2\pi) \right).
 \end{aligned}$$

Si  $\beta \geq \alpha$ , alors

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \frac{r^{2\alpha+1}}{2\pi} \left( r^{2\beta-2\alpha} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} r^{2i} M_{2i+2,2\beta}(2\pi) + \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} A_{2i,2j} r^{2i+2j} M_{2j+2+2\alpha}(2\pi) \right) \\
 &= \frac{r^{2\alpha+1}}{2\pi} \left( r^{2\beta-2\alpha} P_1(r^2) + P_2(r^2) \right).
 \end{aligned}$$

Si  $\alpha \geq \beta$ , alors

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{r^{2\beta+1}}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} r^{2i} M_{2i+2,2\beta}(2\pi) + r^{2\alpha-2\beta} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} A_{2i,2j} r^{2i+2j} M_{2j+2+2\alpha}(2\pi) \right) \\ &= \frac{r^{2\beta+1}}{2\pi} \left( P_1(r^2) + r^{2\alpha-2\beta} P_2(r^2) \right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

où

$$\begin{aligned} P_1(r^2) &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} r^{2i} M_{2i+2,2\beta}(2\pi). \\ P_2(r^2) &= \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} A_{2i,2j} r^{2i+2j} M_{2j+2+2\alpha}(2\pi). \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction  $F_{10}$  admet au plus

$$\lambda_1 = \begin{cases} \max \left\{ \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + \beta - \alpha, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \right\} & \text{if } \beta \geq \alpha, \\ \max \left\{ \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \alpha - \beta \right\} & \text{if } \alpha \geq \beta, \end{cases}$$

racines positives. De plus, puisque nous pouvons choisir des valeurs arbitraires pour  $a_{2i+1}$ ,  $A_{2i,2j}$ , ces coefficients sont multipliés par des constantes non nulles, il est possible d'atteindre la borne supérieure. Ainsi, en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre, le système différentiel polynomial (4.1) a au plus  $\lambda_1$  cycles limites qui bifurquent à partir des orbites périodiques du centre linéaire  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -x$  et en choisissant un système convenable, nous pouvons avoir exactement ce nombre de cycles limites. Cela complète la preuve de la partie (I) du théorème (4.2.1).

### Preuve de (II) du Théorème (4.2.1)

Nous appliquons la méthode de moyennisation d'ordre deux sur l'équation différentielle (4.6), pour l'application du théorème de moyennisation du deuxième ordre, nous avons besoin que  $F_{10}(r) \equiv 0$ . De (4.9),  $F_{10}$  est identiquement nulle si et seulement si

$$a_{2i+1} = 0 \text{ et } A_{2i,2j} = 0. \quad (4.10)$$

Nous devons étudier les zéros simples positifs de la fonction

$$F_{20}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{d}{dr} F_1(r, \theta) \left( \int_0^\theta F_1(r, s) ds \right) + F_2(r, \theta) \right) d\theta.$$

Pour simplifier le calcul, posons  $2\pi F_{20}(r) = L(r) + I(r) - J(r)$ , avec :

$$\begin{aligned} L(r) &= \int_0^{2\pi} \frac{d}{dr} F_1(r, \theta) \left( \int_0^\theta F_1(r, s) ds \right) d\theta, \\ I(r) &= \int_0^{2\pi} H_1(r, \theta) d\theta, \\ J(r) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} G_1(r, \theta) G_2(r, \theta) d\theta. \end{aligned}$$

D'abord, nous calculons  $I(r) = \int_0^{2\pi} H_1(r, \theta) d\theta$ . D'après le lemme (4.2.2), nous avons :

$$\begin{aligned} I(r) &= \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^n c_i r^{i+2\beta} \cos^{i+1} \theta \sin^{2\beta} \theta d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^l D_i r^{i+2\beta} \cos^i \theta \sin^{2\beta+1} \theta d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^m C_{i,j} r^{i+j+2\alpha+1} \cos^i \theta \sin^{j+2+2\alpha} \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^n c_i r^{i+2\beta} \cos^{i+1} \theta \sin^{2\beta} \theta d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair } j \text{ pair}}}^m C_{i,j} r^{i+j+2\alpha+1} \cos^i \theta \sin^{j+2+2\alpha} \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_{2i+1} r^{2i+2\beta+1} \cos^{2i+2} \theta \sin^{2\beta} \theta d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2i,2j} r^{2i+2j+2\alpha+1} \cos^i \theta \sin^{2j+2+2\alpha} \theta d\theta \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_{2i+1} r^{2i+2\beta+1} M_{2i+2,2\beta}(2\pi) + \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2i,2j} r^{2i+2j+2\alpha+1} M_{2j+2+2\alpha}(2\pi). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant étudier notre contribution de la deuxième partie  $J(r) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} G_1(r, \theta) G_2(r, \theta) d\theta$  de  $F_2(\theta, r)$  à  $F_{20}(r)$ .

Comme  $a_{2i+1} = 0$  et  $A_{2i,2j} = 0$ , alors

$$G_1(r, \theta) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^l d_i r^{i+2\beta} \cos^i \theta \sin^{2\beta+1} \theta + \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^l d_i r^{i+2\beta} \cos^i \theta \sin^{2\beta+1} \theta$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^n a_i r^{i+2\beta} \cos^{i+1} \theta \sin^{2\beta} \theta + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair } j \text{ pair}}}^m A_{ij} r^{i+j+2\alpha+1} \cos^i \theta \sin^{j+2+2\alpha} \theta \\
 & + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair } j \text{ impair}}}^m A_{ij} r^{i+j+2\alpha+1} \cos^i \theta \sin^{j+2+2\alpha} \theta \\
 & + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair } j \text{ impair}}}^m A_{ij} r^{i+j+2\alpha+1} \cos^i \theta \sin^{j+2+2\alpha} \theta \\
 & = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} d_{2i} r^{2i+2\beta} \cos^{2i} \theta \sin^{2\beta+1} \theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} d_{2i+1} r^{2i+2\beta+1} \cos^{2i+1} \theta \sin^{2\beta+1} \theta \\
 & + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} r^{2i+2\beta} \cos^{2i+1} \theta \sin^{2\beta} \theta + \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} A_{2i+1,2j} r^{2i+2j+2\alpha+2} \cos^{2i+1} \theta \sin^{2j+2+2\alpha} \theta \\
 & + \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1} A_{2i+1,2j+1} r^{2i+2j+2\alpha+3} \cos^{2i+1} \theta \sin^{2j+3+2\alpha} \theta \\
 & + \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} A_{2i,2j+1} r^{2i+2j+2\alpha+2} \cos^{2i} \theta \sin^{2j+3+2\alpha} \theta,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 G_2(r, \theta) & = \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ pair}}}^l d_p r^{p+2\beta} \cos^{p+1} \theta \sin^{2\beta} \theta + \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ impair}}}^l d_p r^{p+2\beta} \cos^{p+1} \theta \sin^{2\beta} \theta \\
 & - \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ pair}}}^n a_p r^{p+2\beta} \cos^p \theta \sin^{2\beta+1} \theta + \sum_{\substack{p+q=0 \\ p \text{ impair } q \text{ pair}}}^m A_{pq} r^{p+q+2\alpha+1} \cos^{p+1} \theta \sin^{q+1+2\alpha} \theta \\
 & + \sum_{\substack{p+q=0 \\ p \text{ impair } q \text{ impair}}}^m A_{pq} r^{p+q+2\alpha+1} \cos^{p+1} \theta \sin^{q+1+2\alpha} \theta \\
 & + \sum_{\substack{p+q=0 \\ p \text{ pair } q \text{ impair}}}^m A_{pq} r^{p+q+2\alpha+1} \cos^{p+1} \theta \sin^{q+1+2\alpha} \theta \\
 & = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} d_{2p} r^{2p+2\beta} \cos^{2p+1} \theta \sin^{2\beta} \theta + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} d_{2p+1} r^{2p+2\beta+1} \cos^{2p+2} \theta \sin^{2\beta} \theta \\
 & - \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2p} r^{2p+2\beta} \cos^{2p} \theta \sin^{2\beta+1} \theta + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} A_{2p+1,2q} r^{2p+2q+2\alpha+2} \cos^{2p+2} \theta \sin^{2q+1+2\alpha} \theta \\
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1} A_{2p+1,2q+1} r^{2p+2q+2\alpha+3} \cos^{2p+2} \theta \sin^{2q+2+2\alpha} \theta \\
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} A_{2p,2q+1} r^{2p+2q+2\alpha+2} \cos^{2p+1} \theta \sin^{2q+2+2\alpha} \theta.
 \end{aligned}$$

D'après le lemme (4.2.3), l'intégration par rapport  $\theta$  entre 0 et  $2\pi$ , Sur les 36 produits entre les différentes sommes dans  $J$ , seulement 8 ne seront pas identiquement nuls .

Donc, les termes de  $J$  qui contribueront à  $F_{20}$  sont :

$$J(r) = - \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} d_{2i} a_{2p} M_{2p+2i, 4\beta+2} (2\pi) r^{2i+4\beta+2p-1}$$



$$\begin{aligned}
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} d_{2i} A_{2p+1,2q} M_{2p+2i+2,2q+2\beta+2\alpha+2} (2\pi) r^{2i+2\beta+2p+2q+2\alpha+1} \\
 & + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} d_{2p} M_{2p+2i+2,4\beta} (2\pi) r^{2i+4\beta+2p-1} \\
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} A_{2p,2q+1} M_{2p+2i+2,2q+2\beta+2\alpha+2} (2\pi) r^{2i+2\beta+2p+2q+2\alpha+1} \\
 & + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} d_{2p} A_{2i+1,2j} M_{2p+2i+2,2\beta+2j+2\alpha+2} (2\pi) r^{2i+2j+2\alpha+2p+2\beta+1} \\
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} A_{2i+1,2j} A_{2p,2q+1} M_{2p+2i+2,2q+4\alpha+2j+4} (2\pi) r^{2i+2j+4\alpha+2p+2q+3} \\
 & - \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} A_{2i,2j+1} a_{2p} M_{2p+2i,2\beta+2j+2\alpha+4} (2\pi) r^{2i+2j+2\alpha+2p+2\beta+1} \\
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} A_{2i,2j+1} A_{2p+1,2q} M_{2p+2i+2,2q+2j+4\alpha+4} (2\pi) r^{2i+2j+4\alpha+2p+2q+3}.
 \end{aligned}$$

Maintenant, nous calculons la fonction suivante :

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dr} F_1(r, \theta) \left( \int_0^\theta F_1(r, s) ds \right) d\theta.$$

Tout d'abord, en prenant compte de  $a_{2i+1} = 0$  et  $A_{2i,2j} = 0$ , alors

$$\begin{aligned}
 F_1(r, \theta) & = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} d_{2i} r^{2i+2\beta} \cos^{2i} \theta \sin^{2\beta+1} \theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} d_{2i+1} r^{2i+2\beta+1} \cos^{2i+1} \theta \sin^{2\beta+1} \theta \\
 & + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} r^{2i+2\beta} \cos^{2i+1} \theta \sin^{2\beta} \theta + \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} A_{2i+1,2j} r^{2i+2j+2\alpha+2} \cos^{2i+1} \theta \sin^{2j+2+2\alpha} \theta \\
 & + \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1} A_{2i+1,2j+1} r^{2i+2j+2\alpha+3} \cos^{2i+1} \theta \sin^{2j+3+2\alpha} \theta
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} A_{2i,2j+1} r^{2i+2j+2\alpha+2} \cos^{2i} \theta \sin^{2j+3+2\alpha} \theta. \text{ Nous calculons}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} F_1(r, \theta) &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} (2i + 2\beta) d_{2i} \cos^{2i} \theta \sin^{2\beta+1} \theta r^{2i+2\beta-1} \\ &+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} (2i + 2\beta + 1) d_{2i+1} \cos^{2i+1} \theta \sin^{2\beta+1} \theta r^{2i+2\beta} \\ &+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (2i + 2\beta) a_{2i} r^{2i+2\beta-1} \cos^{2i+1} \theta \sin^{2\beta} \theta \\ &+ \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (2i + 2j + 2\alpha + 2) A_{2i+1,2j} \cos^{2i+1} \theta \sin^{2j+2+2\alpha} \theta r^{2i+2j+2\alpha+1} \\ &+ \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1} (2i + 2j + 2\alpha + 3) A_{2i+1,2j+1} \cos^{2i+1} \theta \sin^{2j+3+2\alpha} \theta r^{2i+2j+2\alpha+2} \\ &+ \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (2i + 2j + 2\alpha + 2) A_{2i,2j+1} \cos^{2i} \theta \sin^{2j+3+2\alpha} \theta r^{2i+2j+2\alpha+1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^\theta F_1(r, s) ds &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} d_{2i} r^{2i+2\beta} M_{2i,2\beta+1}(\theta) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} d_{2i+1} r^{2i+2\beta+1} M_{2i+1,2\beta+1}(\theta) \\ &+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} r^{2i+2\beta} M_{2i+1,2\beta}(\theta) + \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} A_{2i+1,2j} r^{2i+2j+2\alpha+2} M_{2i+1,2j+2+2\alpha}(\theta) \\ &+ \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1} A_{2i+1,2j+1} r^{2i+2j+2\alpha+3} M_{2i+1,2j+3+2\alpha}(\theta) \\ &+ \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} A_{2i,2j+1} r^{2i+2j+2\alpha+2} M_{2i,2j+3+2\alpha}(\theta). \end{aligned}$$

D'après le lemme (4.2.3), l'intégration par rapport  $\theta$  entre 0 et  $2\pi$ , sur les 36 produits entre les différentes sommes dans  $L$ , seulement 8 ne seront pas identiquement nuls.

Donc, les termes de  $L$  qui contribueront à  $F_{20}$  sont :

$$\begin{aligned} L(r) &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} 2(i + \beta) d_{2i} a_{2p} \varphi_{2p+1,2\beta}^{2i,2\beta+1}(2\pi) r^{2i+4\beta+2p-1} \\ &+ \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} 2(i + \beta) d_{2i} A_{2p+1,2q} \varphi_{2p+1,2q+2+2\alpha}^{2i,2\beta+1}(2\pi) r^{2p+2q+2\alpha+2i+2\beta+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2(i+\beta) a_{2i} d_{2p} \varphi_{2p, 2\beta+1}^{2i+1, 2\beta} (2\pi) r^{2p+4\beta+2i-1} \\
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2(i+\beta) a_{2i} A_{2p, 2q+1} \varphi_{2p, 2q+3+2\alpha}^{2i+1, 2\beta} (2\pi) r^{2p+2q+2\alpha+2i+2\beta+1} \\
 & + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} 2(i+j+\alpha+1) A_{2i+1, 2j} d_{2p} \varphi_{2p, 2\beta+1}^{2i+1, 2j+2+2\alpha} (2\pi) r^{2i+2j+2p+2\beta+2\alpha+1} \\
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} 2(i+j+\alpha+1) A_{2i+1, 2j} A_{2p, 2q+1} \varphi_{2p, 2q+3+2\alpha}^{2i+1, 2j+2+2\alpha} (2\pi) r^{2p+2q+2i+2j+4\alpha+3} \\
 & + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} 2(i+j+\alpha+1) A_{2i, 2j+1} a_{2p} \varphi_{2p+1, 2\beta}^{2i, 2j+3+2\alpha} (2\pi) r^{2i+2j+2\alpha+2p+2\beta+1} \\
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} 2(i+j+\alpha+1) A_{2i, 2j+1} A_{2p+1, 2q} \varphi_{2p+1, 2q+2+2\alpha}^{2i, 2j+3+2\alpha} (2\pi) r^{2p+2q+4\alpha+2i+2j+3}.
 \end{aligned}$$

Donc, les termes qui contribueront à  $2\pi F_{20}$  sont :

$$\begin{aligned}
 2\pi F_{20}(r) & = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_{2i+1} M_{2i+2, 2\beta} (2\pi) r^{2i+2\beta+1} \\
 & + \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2i, 2j} M_{2j+2+2\alpha} (2\pi) r^{2i+2j+2\alpha+1} \\
 & + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} d_{2i} a_{2p} \left( 2(i+\beta) \varphi_{2p+1, 2\beta}^{2i, 2\beta+1} (2\pi) - M_{2p+2i, 4\beta+2} (2\pi) \right) r^{2i+4\beta+2p-1} \\
 & + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} d_{2p} \left( M_{2p+2i+2, 4\beta} (2\pi) + 2(i+\beta) \varphi_{2p, 2\beta+1}^{2i+1, 2\beta} (2\pi) \right) r^{2p+4\beta+2i-1} \\
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} d_{2i} A_{2p+1, 2q} M_{2p+2i+2, 2q+2\beta+2\alpha+2} (2\pi) r^{2p+2q+2\alpha+2i+2\beta+1} \\
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} 2(i+\beta) d_{2i} A_{2p+1, 2q} \varphi_{2p+1, 2q+2+2\alpha}^{2i, 2\beta+1} (2\pi) r^{2p+2q+2\alpha+2i+2\beta+1} \\
 & + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} d_{2p} A_{2i+1, 2j} M_{2p+2i+2, 2\beta+2j+2\alpha+2} (2\pi) r^{2i+2j+2p+2\beta+2\alpha+1} \\
 & + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} 2(i+j+\alpha+1) d_{2p} A_{2i+1, 2j} \varphi_{2p, 2\beta+1}^{2i+1, 2j+2+2\alpha} (2\pi) r^{2i+2j+2p+2\beta+2\alpha+1} \\
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} A_{2p, 2q+1} M_{2(p+i+1), 2(q+\beta+\alpha+1)} (2\pi) r^{2p+2q+2\alpha+2i+2\beta+1} \\
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2(i+\beta) a_{2i} A_{2p, 2q+1} \varphi_{2p, 2q+2\alpha+3}^{2i+1, 2\beta} (2\pi) r^{2p+2q+2\alpha+2i+2\beta+1} \\
 & + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} 2(i+j+\alpha+1) A_{2i, 2j+1} a_{2p} \varphi_{2p+1, 2\beta}^{2i, 2j+3+2\alpha} (2\pi) r^{2i+2j+2\alpha+2p+2\beta+1} \\
 & - \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} A_{2i, 2j+1} a_{2p} M_{2p+2i, 2\beta+2j+2\alpha+4} (2\pi) r^{2i+2j+2\alpha+2p+2\beta+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} A_{2i+1,2j} A_{2p,2q+1} M_{2p+2i+2,2q+4\alpha+2j+4} (2\pi) r^{2p+2q+2i+2j+4\alpha+3} \\
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} 2(i+j+\alpha+1) A_{2i+1,2j} A_{2p,2q+1} \varphi_{2p,2q+3+2\alpha}^{2i+1,2j+2+2\alpha} (2\pi) r^{2p+2q+2i+2j+4\alpha+3} \\
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} A_{2i,2j+1} A_{2p+1,2q} M_{2p+2i+2,2q+2j+4\alpha+4} (2\pi) r^{2p+2q+4\alpha+2i+2j+3} \\
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} 2(i+j+\alpha+1) A_{2i,2j+1} A_{2p+1,2q} \varphi_{2p+1,2q+2+2\alpha}^{2i,2j+3+2\alpha} (2\pi) r^{2p+2q+4\alpha+2i+2j+3}.
 \end{aligned}$$

De plus, si  $\alpha \geq \beta$ , alors

$$2\pi F_{20}(r) = r^{2\beta+1} \left( P_1(r^2) + r^{2\alpha-2\beta} P_2(r^2) + r^{2\beta} P_3(r^2) + r^{2\alpha} P_4(r^2) + r^{4\alpha-2\beta+2} P_5(r^2) \right),$$

et si  $\beta \geq \alpha$ , alors

$$2\pi F_{20}(r) = r^{2\alpha+1} \left( r^{2\beta-2\alpha} P_1(r^2) + P_2(r^2) + r^{4\beta-2\alpha} P_3(r^2) + r^{2\beta} P_4(r^2) + r^{2\alpha+2} P_5(r^2) \right),$$

où

$$\begin{aligned}
 P_1(r^2) &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} c_{2i+1} M_{2i+2,2\beta} (2\pi) r^{2i}. \\
 P_2(r^2) &= \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} C_{2i,2j} M_{2j+2+2\alpha} (2\pi) r^{2i+2j}. \\
 P_3(r^2) &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} d_{2i} a_{2p} \left( 2(i+\beta) \varphi_{2p+1,2\beta}^{2i,2\beta+1} (2\pi) - M_{2p+2i,4\beta+2} (2\pi) \right) r^{2i+2p-2} \\
 & + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} d_{2p} \left( M_{2p+2i+2,4\beta} (2\pi) + 2(i+\beta) \varphi_{2p,2\beta+1}^{2i+1,2\beta} (2\pi) \right) r^{2p+2i-2}. \\
 P_4(r^2) &= \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} d_{2i} A_{2p+1,2q} M_{2p+2i+2,2q+2\beta+2\alpha+2} (2\pi) r^{2p+2q+2i} \\
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} 2(i+\beta) d_{2i} A_{2p+1,2q} \varphi_{2p+1,2q+2+2\alpha}^{2i,2\beta+1} (2\pi) r^{2p+2q+2i} \\
 & + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} 2(i+j+\alpha+1) A_{2i,2j+1} a_{2p} \varphi_{2p+1,2\beta}^{2i,2j+3+2\alpha} (2\pi) r^{2i+2j+2p} \\
 & - \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} A_{2i,2j+1} a_{2p} M_{2p+2i,2\beta+2j+2\alpha+4} (2\pi) r^{2i+2j+2p} \\
 & + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} d_{2p} A_{2i+1,2j} M_{2p+2i+2,2\beta+2j+2\alpha+2} (2\pi) r^{2i+2j+2p} \\
 & + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} 2(i+j+\alpha+1) d_{2p} A_{2i+1,2j} \varphi_{2p,2\beta+1}^{2i+1,2j+2+2\alpha} (2\pi) r^{2i+2j+2p}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} A_{2p,2q+1} M_{2p+2i+2,2q+2\beta+2\alpha+2} (2\pi) r^{2p+2q+2i} \\
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2(i+\beta) a_{2i} A_{2p,2q+1} \varphi_{2p,2q+3+2\alpha}^{2i+1,2\beta} (2\pi) r^{2p+2q+2i}. \\
 P_5(r^2) & = \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} A_{2i+1,2j} A_{2p,2q+1} M_{2p+2i+2,2q+4\alpha+2j+4} (2\pi) r^{2p+2q+2i+2j} \\
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} 2(i+j+\alpha+1) A_{2i+1,2j} A_{2p,2q+1} \varphi_{2p,2q+3+2\alpha}^{2i+1,2j+2+2\alpha} (2\pi) r^{2p+2q+2i+2j} \\
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} A_{2i,2j+1} A_{2p+1,2q} M_{2p+2i+2,2q+2j+4\alpha+4} (2\pi) r^{2p+2q+2i+2j} \\
 & + \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} 2(i+j+\alpha+1) A_{2i,2j+1} A_{2p+1,2q} \varphi_{2p+1,2q+2+2\alpha}^{2i,2j+3+2\alpha} (2\pi) r^{2p+2q+2i+2j} \\
 & = 2 \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} A_{2i+1,2j} A_{2p,2q+1} M_{2p+2i+2,2q+4\alpha+2j+4} (2\pi) r^{2p+2q+2i+2j} \\
 & + 2 \sum_{p+q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i+j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} 2(i+j+\alpha+1) A_{2i+1,2j} A_{2p,2q+1} \varphi_{2p,2q+3+2\alpha}^{2i+1,2j+2+2\alpha} (2\pi) r^{2p+2q+2i+2j}.
 \end{aligned}$$

Alors

$$\lambda = \begin{cases} \max \left\{ \begin{array}{l} \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \alpha - \beta, \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{l}{2} \rfloor + \alpha, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + \alpha, \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{l}{2} \rfloor + \beta - 1, 2 \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + 2\alpha - \beta + 1, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \end{array} \right\}, & \text{si } \alpha \geq \beta \\ \max \left\{ \begin{array}{l} \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + \beta - \alpha, \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{l}{2} \rfloor + \beta, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + \beta, \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{l}{2} \rfloor + 2\beta - \alpha - 1, 2 \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + \alpha + 1, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \end{array} \right\}, & \text{si } \beta \geq \alpha. \end{cases}$$

Ensuite, pour trouver les racines réelles positives de  $F_{20}$ , il faut trouver les zéros d'un polynôme dans  $r^2$  de degré  $\lambda$ . Cela donne que  $F_{20}$  a au plus  $\lambda$  racines réelles positives. De plus, nous pouvons choisir les coefficients  $c_{2i+1}$ ,  $C_{2i,2j}$ ,  $d_{2i}$ ,  $a_{2i}$ ,  $A_{2i+1,2j}$ ,  $A_{2i,2j+1}$  de tels sorte que  $F_{20}$  possède exactement  $\lambda$  racines positives. Cela complète la preuve de la partie (II) du théorème (4.2.1).

### ■ 4.2.3 Applications

Dans cette partie, nous présentons quelques exemples pour illustrer l'applicabilité des principaux résultats de ce chapitre.

**Corollaire 4.2.4.** *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(x^2) - \varepsilon^2(x - x^2), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon((-x^2 + x^4) + (-\frac{21}{5}x + \frac{1}{3}xy^2)y) \\ \quad - \varepsilon^2((x - 2x^4) + (-\frac{7}{16} - y^2 + \frac{171}{80}x^2 + x^3)y). \end{cases} \quad (4.11)$$

Alors le nombre maximum de cycles limites du système (4.11) est trois, en utilisant la méthode de la moyennisation du second ordre.

*Démonstration.* Si  $\alpha = \beta = 0, n = 2, m = 3$  et  $l = 4$  alors, le système (4.2.1) s'écrit sous la forme (4.11).

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r > 0$ , le système (4.11) devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \left( r^4 \sin \theta \cos^4 \theta + -\frac{21}{5} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{1}{3} r^5 \cos \theta \sin^4 \theta \right) \\ \quad - \varepsilon^2 \left( \left( \cos^2 \theta + r \sin \theta \cos \theta - \frac{7}{16} \sin^2 \theta \right) r - r^2 \cos^3 \theta + \left( \frac{171}{80} \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \sin^4 \theta \right) r^3 \right. \\ \quad \left. + \left( \sin^2 \theta \cos^3 \theta - 2 \sin \theta \cos^4 \theta \right) r^4 \right) \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon^2 \left( r \sin \theta \cos^2 \theta - \left( \frac{171}{80} \cos^3 \theta \sin \theta - \sin^2 \theta \cos \theta \right) r^2 - \left( \sin \theta \cos^4 \theta - 2 \cos^5 \theta \right) r^3 \right. \\ \quad \left. + \left( \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta - \frac{7}{16} \sin \theta \cos \theta \right) \right) \\ \quad + \varepsilon \left( \left( \sin \theta \cos^2 \theta + \frac{21}{5} \cos^2 \theta \sin \theta + \cos^3 \theta \right) r - \left( \cos^5 \theta + \frac{1}{3} \cos^2 \theta \sin^3 \theta \right) r^3 \right) \end{cases} \quad (4.12)$$

Considérons  $\theta$  comme variable indépendante, le système (4.12) est équivalent à

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3),$$

où

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta) &= r^4 \sin \theta \cos^4 \theta + -\frac{21}{5} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{1}{3} r^5 \cos \theta \sin^4 \theta \\ F_2(r, \theta) &= \left( \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - \frac{7}{16} \sin^2 \theta \right) r - r^2 \cos^3 \theta + \left( \frac{171}{80} \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \sin^4 \theta \right) r^3 \\ &\quad + \left( \sin^2 \theta \cos^3 \theta - 2 \sin \theta \cos^4 \theta \right) r^4. \end{aligned}$$

Après avoir fait quelques simplifications, nous obtenons le résultat  $F_{10}(r) = 0$ , où

$$F_{10}(r) = \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta.$$

Nous pouvons passer à la méthode de moyennisation d'ordre deux puisque  $F_{10}(r) \equiv 0$ . Après des calculs avec des expressions trop longues mais faciles, nous trouvons :

$$\begin{aligned} F_{20}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial}{\partial r} F_1(r, \theta) \left( \int_0^\theta F_1(r, s) ds \right) + F_2(r, \theta) \right) d\theta, \\ &= -\frac{1}{128} r (r^2 - 1) (r^2 - 4) (r^2 - 9), \end{aligned}$$

cette équation admet les racines suivantes :  $r_1 = 1, r_2 = 2$  et  $r_3 = 3$ . Selon le théorème (4.2.1), le système (4.11) possède trois cycles limites qui bifurquent à partir

des orbites périodiques du centre linéaire  $x' = y, y' = -x$ , en utilisant le théorème de moyennisation d'ordre deux, nous avons :

$$\lambda = \left[ \frac{m-1}{2} \right] + \left[ \frac{l}{2} \right] + \alpha = 2 \left[ \frac{m-1}{2} \right] + 2\alpha - \beta + 1 = 3.$$

■

**Corollaire 4.2.5.** *Considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon \left(1 - \frac{35}{8}x^2\right) y^2 - \varepsilon^2 \left(2 - \frac{29}{2}x + x^2\right) y^2, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon \left((5 + x^4) y^2 + \left(-\frac{17}{8}x + \frac{249}{160}xy^2 - \frac{217}{160}x^3\right) y^3\right) \\ \quad - \varepsilon^2 \left((3 + x^4) y^2 + (x + y^2 + x^2y) y^3\right). \end{cases} \quad (4.13)$$

Alors le nombre maximum de cycles limites du système (4.13) est quatre en utilisant la méthode de la moyennisation du second ordre.

*Démonstration.* Prenons  $\alpha = \beta = 1, n = 2, m = 3$  et  $l = 4$ , alors le système (4.2.1) s'écrit sous la forme (4.13).

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r > 0$ , le système (4.13) devient :

$$\begin{cases} r' = -\varepsilon \left[ (\cos \theta \sin^2 \theta + 5 \sin^3 \theta) r^2 - \left(\frac{217}{160} \sin^4 \theta \cos^3 \theta\right) r^3 - \right. \\ \quad \left. \left(\frac{35}{8} \sin^2 \theta \cos^3 \theta \frac{17}{8} + \sin^4 \theta \cos \theta\right) r^4 + \left(\sin^3 \theta \cos^4 \theta + \frac{249}{160} \cos \theta \sin^6 \theta\right) r^6 \right] \\ \quad - \varepsilon^2 \left[ (3 \sin^3 \theta + 2 \cos \theta \sin^2 \theta) r^2 - \left(\frac{29}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta\right) r^3 + \right. \\ \quad \left. (\sin^4 \theta \cos \theta + r^4 \sin^2 \theta \cos^3 \theta) r^4 + (\sin^4 \theta \sin^2 \theta) r^5 + (\sin^5 \theta \cos^2 \theta + \sin^3 \theta \cos^4 \theta) r^6 \right]. \\ \theta' = -1 - \varepsilon \left[ (5 \cos \theta \sin^2 \theta - \sin^3 \theta) r - \left(\frac{217}{160} \sin^3 \theta \cos^4 \theta\right) r^2 + \right. \\ \quad \left. \left(\frac{35}{8} \sin^3 \theta \cos^2 \theta - \frac{17}{8} \sin^3 \theta \cos^2 \theta\right) r^3 + \left(\sin^2 \theta \cos^5 \theta + \frac{249}{160} \cos^2 \theta \sin^5 \theta\right) r^5 \right] \\ \quad - \varepsilon^2 \left[ (3 \cos \theta \sin^2 \theta + 2 \sin^3 \theta) r - \left(\frac{29}{2} \sin^3 \theta \cos \theta\right) r^2 + (\sin^3 \theta \cos^2 \theta + \sin^3 \theta \cos^2 \theta) r^3 \right. \\ \quad \left. + (\cos \theta \sin^5 \theta) r^4 + (\sin^2 \theta \cos^5 \theta + \sin^4 \theta \cos^3 \theta) r^5 \right] \end{cases} \quad (4.14)$$

Considérons  $\theta$  comme variable indépendante, le système (4.14) est équivalent à

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3),$$

où

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta) &= (\cos \theta \sin^2 \theta + 5 \sin^3 \theta) r^2 - \left(\frac{217}{160} \sin^4 \theta \cos^3 \theta\right) r^3 - \\ &\quad \left(\frac{35}{8} \sin^2 \theta \cos^3 \theta \frac{17}{8} + \sin^4 \theta \cos \theta\right) r^4 + \left(\sin^3 \theta \cos^4 \theta + \frac{249}{160} \cos \theta \sin^6 \theta\right) r^6 \\ F_2(r, \theta) &= (3 \sin^3 \theta + 2 \cos \theta \sin^2 \theta) r^2 - \left(\frac{29}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta\right) r^3 + \\ &\quad (\sin^4 \theta \cos \theta + r^4 \sin^2 \theta \cos^3 \theta) r^4 + (\sin^4 \theta \sin^2 \theta) r^5 + (\sin^5 \theta \cos^2 \theta + \sin^3 \theta \cos^4 \theta) r^6. \end{aligned}$$

Après avoir fait quelques simplifications sur la fonction  $F_{10}(r)$ , nous obtenons :

$$F_{10}(r) = \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta = 0,$$

nous pouvons passer à la méthode de moyennisation d'ordre deux puisque  $F_{10}(r) \equiv 0$ ,  
Après des calculs avec des expressions trop longues mais faciles, nous trouvons :

$$\begin{aligned} F_{20}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial}{\partial r} F_1(r, \theta) \left( \int_0^\theta F_1(r, s) ds \right) + F_2(r, \theta) \right) d\theta. \\ &= -\frac{1}{1024} r^3 (r^2 - 1) (r^2 - 4) (r^2 - 9) (r^2 - 16), \end{aligned}$$

cette équation admet les racines positives suivantes :  $r_1 = 1, r_2 = 2$  et  $r_3 = 3, r_3 = 4$ . Selon le théorème (4.2.1), le système (4.11) a exactement quatre cycles limites qui bifurquent à partir des orbites périodiques du centre linéaire  $x' = y, y' = -x$ , en utilisant le théorème de moyennisation d'ordre deux, nous avons :

$$\lambda = \left[ \frac{m-1}{2} \right] + \left[ \frac{l}{2} \right] + \alpha = 2 \left[ \frac{m-1}{2} \right] + 2\alpha - \beta + 1 = 4.$$

■

## ■ 4.3 Annexe

Dans cette section, nous définissons certaines formules importantes utilisées dans le Chapitre 4, pour plus de détails, voir [32]. Si  $i \geq 0$  et  $j \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \cos^i s \sin^j s ds &= \frac{\cos^{i-1} \theta \sin^{j+1} \theta}{i+j} + \frac{i-1}{i+j} \int_0^\theta \cos^{i-2} s \sin^j s ds, \\ &= -\frac{\cos^{i+1} \theta \sin^{j-1} \theta}{i+j} + \frac{j-1}{i+j} \int_0^\theta \cos^i s \sin^{j-2} s ds. \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \cos^{2i} s ds &= \frac{\sin \theta}{2^i} \sum_{l=1}^{i-1} \frac{(2i-1)(2i-3)\dots(2i-2l+1)}{2^l(i-1)(i-2)\dots(i-l)} \cos^{2i-2l-1} \theta \\ &\quad + \frac{\sin \theta}{2^i} \cos^{2i-1} \theta + \frac{(2i-1)(2i-3)\dots 1}{2^i i!} \theta \\ &= \frac{1}{2^{2i-1}} \sum_{l=0}^{i-1} \binom{2i}{l} \frac{\sin 2(i-l)\theta}{2^{i-l}} + \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i} \theta. \end{aligned} \quad (4.16)$$



$$\begin{aligned}
\int_0^\theta \cos^{2i+1} s ds &= \frac{\sin \theta}{2i+1} \sum_{l=0}^{i-1} \frac{2^{l+1} i(i-1)\dots(i-l)}{(2i-1)(2i-3)\dots(2i-2l-1)} \cos^{2i-2l-2} \theta + \frac{\sin \theta}{2i+1} \cos^{2i} \theta \\
&= \frac{1}{2^{2i}} \sum_{l=0}^{i-1} \binom{2i+1}{l} \frac{\sin(2i-2l+1)\theta}{(2i-2l+1)},
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\text{où } \binom{2i}{p} = \frac{2i!}{p!(2i-p)!}.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\theta \cos^i s \sin^{2j} s ds &= -\frac{\cos^{i+1} \theta}{2j+i} \sum_{l=1}^{j-1} \frac{(2j-1)(2j-3)\dots(2j-2l+1)}{(2j+i-2)(2j+i-4)\dots(2j+i-2l)} \sin^{2j-2l-1} \theta \\
&\quad + \frac{(2j-1)(2j-3)\dots 1}{(2j+i)(2j+i-2)\dots(i+2)} \int_0^\theta \cos^i s ds \\
&\quad - \frac{\cos^{i+1} \theta}{2j+i} \sin^{2j+1} \theta.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\theta \cos^i s \sin^{2j+1} s ds &= -\frac{\cos^{i+1} \theta}{2j+i+1} \sum_{l=1}^{j-1} \frac{2^l j(j-1)\dots(j-l+1)}{(2j+i-1)(2j+i-3)\dots(2j+i-2l+1)} \sin^{2j-2l} \theta \\
&\quad - \frac{\cos^{i+1} \theta}{2j+i+1} \sin^{2j} \theta.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

## ■ 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons construit une famille de systèmes différentiels polynomiaux de Lénard généralisées, afin de déterminer le nombre maximum de cycles limites de cette famille de systèmes différentiels qui peuvent être bifurqués à partir des orbites périodiques du centre linéaire  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ , nous avons appliqué le théorème de moyennisation du premier et du second ordre. Nous avons réussi à trouver un certain nombre de cycles limites, ce qui est considéré comme une contribution à la résolution partielle de la deuxième partie du seizième problème de Hilbert.

---

---

## Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons présenté quelques résultats qui concernent l'étude qualitative de certaines classes de systèmes différentiels polynomiaux planaires non linéaires.

Il est important pour un système différentiel de savoir s'il admet ou non une solution périodique, de plus si cette solution périodique est isolée dans l'ensemble de toutes les solutions périodiques de ce système, on parle par définition d'un cycle limite. Pour les modèles issus de la pratique, il est important d'étudier ces questions : intégrabilité, portrait de phase, solution périodique, cycle limite. Les résultats obtenus dans ce travail s'articulent autour de ces questions.

Tout d'abord, dans le chapitre 1, nous avons rappelé quelques notions de base, concernant la théorie qualitative des systèmes différentiels.

Dans le deuxième chapitre, nous avons traité deux classes de systèmes différentiels planaires de degré impair. Plus spécifiquement dans la première partie de ce chapitre, nous avons montré la coexistence des deux cycles limites l'un algébrique et l'autre non algébrique pour une classe de systèmes différentiels polynomial de degré  $4k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons déterminé les conditions d'existence d'un cycle limite pour une classe de systèmes différentiels de degré sept, pour laquelle nous avons obtenu un cycle limite non algébrique explicitement donné.

Dans le troisième chapitre, nous avons traité deux classes de systèmes différentiels planaires de degré pair. Plus précisément, dans la première partie de ce chapitre, nous avons montré l'intégrabilité et l'existence d'un cycle limite non algébrique d'expression explicite pour une classe de systèmes différentiels de degré  $2n + 2$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons déterminé les conditions d'existence d'un cycle limite pour une classe de systèmes différentiels de degré six, pour laquelle nous avons obtenu un cycle limite non algébrique donné explicitement.

Dans le quatrième chapitre, nous avons traité une classe de systèmes différentiels polynomiaux de Lénard généralisés. Plus précisément, nous avons appliqué le théorème de moyennisation du premier et du second ordre, afin de déterminer le nombre maximum

de cycles limites qui peuvent être bifurqués à partir des orbites périodiques du centre linéaire  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ . Nous avons réussi à trouver un certain nombre de cycles limites. Ceci est justement une contribution à la résolution partielle de la deuxième partie du seizième problème de Hilbert.

Dans l'avenir nous comptons poursuivre nos travaux de recherche dans ces différentes voies. En particulier, nous envisageons de trouver une classe de systèmes différentiels quadratiques qui admet un cycle limite non algébrique donné explicitement.

---

---

## Bibliographie

- [1] J. Alavez-Ramirez, G. Blé, J. Llibre, and J. Lopez-Lopez. On the maximum number of limit cycles of a class of generalized liénard differential systems. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 22(3) :1250063–14, 2012.
- [2] A. Bendjeddou, A. Berbache, and A. Kina. A class of differnetial systemes of degree  $4k+1$  with algebraic and non algebraic limit cycles. *U.P.B. Sci. Bull. Series A*, 81(3) :23–30, 2019.
- [3] A. Bendjeddou, A. Berbache, and A. Kina. Limit cycles for a class of polynomial differential systems via averaging theory. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 12(02) :145–159, 2019.
- [4] A. Bendjeddou and R. Cheurfa. Cubic and quartic planar differential systems with exact algebraic limit cycles. *Elect. J. of Diff. Equ.*, (15) :1–12, 2011.
- [5] A. Bendjeddou and R. Cheurfa. Coexistence of algebraic and non- algebraic limit cycles for quintic polynomial differential systems. *Elect. J. of Diff. Equ.*, 71 :1–7, 2017.
- [6] A. Bendjeddou and A. Kina. A class of polynomial differential systems with explicit limit cycles. *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, 85(2) :44–53, 2019.
- [7] A. Bendjeddou and A. Kina. Non algebraic limit cycles for family of autonomous polynomial planar differential systems. *Punjab University Journal of Mathematics*, 51(10) :57–63, 2019.
- [8] R. Benterki and J. Llibre. Polynomial differential systems with explicit non-algebraic limit cycles. *Elect. J. of Diff. Equ.*, 78 :1–6, 2012.
- [9] T. R. Blows and L. M. Perko. Bifurcation of limit cycles from centers and separatrix cycles of analytic systems. *SIAM Rev*, 36 :341–376, 1994.
- [10] N.N. Bogoliubov. On some statistical methods in mathematical physics. *Izv. vo Akad. Nauk Ukr. SSR*, Kiev, 1945.

- [11] N.N. Bogoliubov and N. Krylov. The application of methods of nonlinear mechanics in the theory of stationary oscillations. *Computers and Mathematics with Applications*, 118, 1934.
- [12] N.N. Bogoliubov and Yu. A. Mitropolsky. Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations. Gordon and Breach, New York, 1961.
- [13] A. Buica and J. Llibre. Averaging methods for finding periodic orbits via brouwer degree. *Bulletin des sciences mathématiques*, 128(1) :7–22, 2004.
- [14] Chavarriga, H. Giacomini, and J. Llibre. Uniqueness of algebraic limit cycles for quadratic systems. *Journal of mathematical analysis and applications*, 261(1) :85–99, 2001.
- [15] J. Chavarriga, H. Giacomini, and J. Giné. Polynomial inverse integrating factors. *Annals of Differential Equations*, 16(4) :320–329, 2000.
- [16] X. Chen, J. Llibre, and Z. Zhang. Sufficient conditions for the existence of at least  $n$  or exactly  $n$  limit cycles for the lienard differential systems. *J. Differential Equations*, 242 :11–23, 2007.
- [17] S. N. Chow, C. Li, and D. Wang. Normal forms and bifurcation of planar vector fields. Cambridge University Press, 1994.
- [18] C. Christopher and N.G. Lloyd. Polynomial systems : A lower bound for the hilbert numbers. *Proc. R. Soc. Lond. Ser.*, 1938(450) :218–224, 1995.
- [19] W. A. Coppel. Some quadratic systems with at most one limit cycles. *Dynamics Reported*, 2 :61–68, 1998.
- [20] G. Darboux. Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré. *Mémoire (Mélanges)*, *Bull.Sci.Math*, 2 :60–96,123–144, 151–200., 1878.
- [21] H. Dulac. Sur les cycles limites. *Bull. Soc. Math*, 51 :45–188, 1923.
- [22] F. Dumortier, J. Llibre, and J. C. Artés. Qualitative theory of planar differential systems. Springer-Verlag, New York, 2006.
- [23] A. Ferragut. Polynomial inverse integrating factors of quadratic differential systems and other results. Universitat Autònoma de Barcelona, 2006.
- [24] A. Ferragut, J. Llibre, and A. Mahd. Liouvillian first integrals of differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 333(2) :673–688, 1992.
- [25] A. Ferragut, J. Llibre, and A. Mahd. Polynomial inverse integrating factors for polynomial vector fields. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-A*, 17(2) :387, 2007.

- [26] B. Garca, J. Llibre, and J. S. Pérez del Rio. Limit cycles of generalized liénard polynomial differential systems via averaging theory. *Chaos Solitons Fractals*, 62(63) :1–9, 2014.
- [27] A. Gasull, H. Giacomini, and J. Torregrosa. Explicit non-algebraic limit cycles for polynomial systems. Preprint, 2015.
- [28] H. Giacomini, J. Llibre, and M. Viano. On the non existence, existence, and uniquenesses of limit cycles. *Nonlinearity*, 9(2) :501–516.7, 1996.
- [29] H. Giacomini, J. Llibre, and M. Viano. On the nonexistence existence and uniqueness of limit cycles. *Nonlinearity*, 9(2) :501–516, 1996.
- [30] J. Giné and M. Grau. A note on : Relaxation oscillator with exact limit cycles. *J. Math. Anal. Appl.*, 324(1) :739–745, 2006.
- [31] J. Giné and M. Grau. A note on : "relaxation oscillator with exact limit cycles. *J. of Math. Anal. and Appl*, 224(1) :739–745, 2006.
- [32] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. Table of integrals, series and products. Academic Press, 1979.
- [33] D. Hilbert. Mathematical problems.
- [34] D. Hilbert. Mathematische problem (lecture). *Nachr. Ges. Wiss. Gottingen Math.-Phys. Kl.*, Second Internat. Congress Math. Paris :253–297, 1900.
- [35] X.C. Huang. Limit cycles in a kolmogorov-type model and its application in immunology. *Mathematical and Computer Mo delling*, 14 :614–617, 1990.
- [36] Yu S. IL'YASHENKO. Dulac's memoir "on limit cycles" and related problems of the local theory of differential equations. *ussian Mathematical Surveys*, 40(6) :p.1., 1985.
- [37] J.Giné and M. Grau. Coexistence of algebraic and non-algebraic limit cycles, explicitly given, using riccati equations. *Nonlinearity*, 19(8) :1939–1950, 2006.
- [38] J.Llibre, R. Moeckel, and C. Simó. entral configurations, periodic orbits, and hamiltonian systems. Birkhäuser, 2015.
- [39] W .J.Strobele and H. Wacker. The economics of harvesting predator-prey systems. *Journal of Economics*, 61(1) :65–81, 1995.
- [40] A. Kina, A. Berbache, and A. Bendjeddou. A class of differential systems of degree even with exact non-algebraic limit cycles. *Stud. Univ. Babe s-Bolyai Math.*, 65(3) :403–410, 2020.
- [41] G. Laval and R. Pellat. Plasma physics. Proceedings of Summer School of Theoretical Physics, Gordon and Breach, New York, 1975.

- [42] J. Li and Q. Huang. Bifurcations of limit cycles forming compound eyes in the cubic system. *Chinese Ann. Math. Ser.*, 8 :391–403, 1989.
- [43] J. Llibre and C. Valls. On the number of limit cycles of a class of polynomial differential systems. *Proc A : R Soc.*, 468(2144) :2347–2360, 2012.
- [44] J. Llibre and Y. Zhao. Algebraic limit cycles in polynomial systems of differential equations. *J. Phys. A : Math. Theor*, 40 :14207–14222, 2007.
- [45] I.G. Malkin. Some problems of the theory of nonlinear oscillations. Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit, Moscow, 1956.
- [46] R.M. May. Stability and complexity in model ecosystems. Princeton New Jersey, 1974.
- [47] L. Perko. Differential equations and dynamical systems. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [48] H. Poincaré. Sur les courbes définies par une equation differentielle. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 7 :375–422, 1881.
- [49] H. Poincaré. Sur les courbes définies par une équation différentielle. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 8 :251–296, 1882.
- [50] H. Poincaré. Sur les courbes définies par une equation differentielle. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1 :167–244, 1885.
- [51] H. Poincaré. Sur les courbes définies par une equation differentielle. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2 :151–217, 1886.
- [52] F. Verhulst. Nonlinear differential equations and dynamical systems. Universit. Springer. New York, 1996.
- [53] M. Roseau. Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité. Springer, 1966.
- [54] J. A. Sanders and F. Verhulst. Averaging method in nonlinear dynamical systems. Applied Mathematical Sciences 59, Springer, 1985.
- [55] R. Seydel. From equilibrium to chaos : practical bifurcation and stability analysis. Elsevier, 1988.
- [56] M. Sghiar. On the 16-hilbert problem. *IOSR Journal of Mathematics*, 12(6) :22–25, 2016.
- [57] Al-Dosary Khalil I. T. Non-algebraic limit cycles for parametrized planar polynomial systems. *Int. J. Math*, 18(2) :179–189, 2007.

## المخلص :

الهدف من هذه الأطروحة هي الدراسة النوعية لبعض الفئات من النظم التفاضلية كثيرة الحدود في المستوي. النتائج المتحصل عليها في هذه الدراسة متعلقة بتصرفات الحلول في المستوي و وجود الحلول الدورية بصفة خاصة دورات الحد النهائية لبعض النظم التفاضلية ، بالإضافة إلى ذلك، تمكنا من تحديد الصيغة الرياضية لكل التكاملات الأولية ودورات الحد الجبرية و / أو غير الجبرية التي تم العثور عليها لجميع الأصناف المدروسة. وكذلك تم إيجاد الحد الأعلى لدورات الحد الذي يمكن الحصول عليه باستعمال نتائج طريقة الإستوساط من الدرجة الأولى والدرجة الثانية لفئة من أنظمة لينارد التفاضلية المعممة.

**كلمات مفتاحية :** النظام التفاضلي، منحني صامد، حل دوري، دورة حد جبري، دورة حد غير جبري، اضطراب ، طريقة الإستوساط.

## Abstract

The objective of this thesis is the qualitative study of some classes of planar polynomial differential systems. The results obtained in this study concerns the integrability, the phase portraits and the existence of limit cycles of some classes' differential systems. In addition, we give an explicitly expression of the first integrals and limits cycles algebraic and \ or non-algebraic found for all the classes studied.

We also find upper bounds for the number of limit cycles of a class of generalized Liénard differential systems. Using the averaging theory of first and second order.

**Keywords:** Differential system, invariant curve, periodic solution, algebraic limit cycle, non-algebraic limits cycle, perturbation, averaging method.

## Résumé

L'objectif de cette thèse est l'étude qualitative de quelques classes des systèmes différentiels planaires polynômiaux. Les résultats obtenus dans cette étude concernent l'intégrabilité, les portraits de phase et l'existence des cycles limites de quelques classes des systèmes différentielles. De plus on détermine explicitement l'expression des intégrales premières et des cycles limites algébriques et\ ou non algébriques trouvés pour toutes les classes étudiées.

On a aussi trouvé des bornes supérieures pour le nombre de cycles limites d'une classe de systèmes différentiels de Liénard généralisée en utilisant la méthode de la moyennisation du premier et second ordre.

**Mots clés:** Système différentiel, courbe invariante, solution périodique, cycle limite algébrique, cycle limite non algébrique, perturbation, méthode de moyennisation.