

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Ferhat Abbas Sétif 1
Faculté de Technologie

THÈSE

Présentée au Département d'Electrotechnique
Pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Automatique

Par :

HENDEL Rim

Thème

Contribution à la Commande par Modes Glissants d'ordre Supérieur des Systèmes Non Linéaires Incertains Multivariables

Soutenue le 19/11/2020 devant le jury :

<i>RAHMANI Lazhar</i>	<i>Prof. à l'Université Sétif 1</i>	<i>Président</i>
<i>KHABER Farid</i>	<i>Prof. à l'Université Sétif 1</i>	<i>Directeur de thèse</i>
<i>ESSOUNBOULI Najib</i>	<i>Prof. à l'Université de Reims- France</i>	<i>Co-Directeur de thèse</i>
<i>BAHI Tahar</i>	<i>Prof. à l'Université d'Annaba</i>	<i>Examineur</i>
<i>DOUDOU Sofiane</i>	<i>M.C.A. à l'Université de Jijel</i>	<i>Examineur</i>
<i>SARI Bilal</i>	<i>M.C.A. à l'Université Sétif 1</i>	<i>Examineur</i>

Remerciements

Les travaux présentés dans cette thèse ont été réalisés au sein du laboratoire *Qualité de L'Energie dans les Réseaux Électriques (QUERE)* de l'université Sétif 1 en collaboration avec le *Centre de recherche en Sciences de l'information et de la communication (CReSTIC)* de l'université de Reims Champagne-Ardenne en France.

Je tiens tout d'abord à exprimer mes remerciements à Monsieur KHABER Farid, Professeur à l'université de Sétif 1 et à Monsieur ESSOUNBOULI Najib, Professeur à l'IUT de Troyes, pour avoir dirigé ce travail, pour leur soutien tout au long de cette thèse ainsi que leurs conseils.

J'ai été honoré que Monsieur RAHMANI Lazhar, Professeur à l'université de Sétif 1, ait accepté de présider le jury.

Je tiens également à remercier : Monsieur BAHY Tahar, Professeur à l'université d'Annaba, Monsieur DOUDOU Sofiane, Maître de conférences à l'université de Jijel et Monsieur SARI Bilal, Maître de conférences à l'université de Sétif 1, pour m'avoir fait l'honneur de faire partie du jury.

Je tiens à remercier très spécialement tous les membres de ma famille pour leur soutien inconditionnel tout au long de ces années.

Enfin, je n'oublie pas de remercier mes amis pour leur soutien durant la réalisation de ce travail.

Table des Matières

Liste des Figures	iii
Liste des Tableaux	vi
Liste des Acronymes	vii
Liste des Symboles	viii
Introduction Générale	1
1. Modes Glissants d'ordre Supérieur	
1.1. Introduction	10
1.2. Mode glissant standard : concepts de base	11
1.2.1. Système à structure variable	12
1.2.2. Synthèse de la surface de glissement	13
1.2.3. Synthèse de la loi de commande	14
1.2.3.1. Existence d'un régime glissant	15
1.2.3.2. Glissement réel	16
1.2.4. Phénomène de broutement (chattering)	17
1.3. Mode glissant d'ordre supérieur : concepts de base	18
1.3.1. Généralités	18
1.3.2. Ordre de glissement, degré relatif et précision	19
1.3.3. Homogénéité et stabilité en temps fini	21
1.4. Différentiateurs par mode glissant	23
1.4.1. Dérivateur robuste et exact d'ordre arbitraire	24
1.4.2. Commande par retour de sortie en mode glissant d'ordre r	26
1.4.3. Exemple de simulation	27
1.5. Commande par mode glissant d'ordre 2	28
1.5.1. Algorithme de Twisting	29
1.5.2. Algorithme de Super Twisting (ST)	31
1.5.3. Mode glissant terminal	32
1.5.4. Exemple de simulation	33
1.6. Commande par modes glissants d'ordre arbitraire	37
1.6.1. Algorithme « Nested » du mode glissant d'ordre r	37
1.6.2. Algorithme « Quasi-continuous » du mode glissant d'ordre r	38
1.6.3. Exemple de simulation	40
1.7. Conclusion	43

2. Commande Floue par Mode Glissant d'ordre 2 à base du Mode Glissant Terminal	
2.1. Introduction.....	44
2.2. Description du système et objectif de la commande.....	45
2.2.1. Préliminaires.....	47
2.2.2. Synthèse de la commande par MG terminal.....	47
2.2.3. Système flou de type-2 (SFT-2).....	50
2.3. Commande floue par MG-2 «Nested» à base du MG terminal.....	52
2.3.1. Synthèse de la loi de commande.....	52
2.3.2. Analyse de la stabilité.....	54
2.4. Commande floue par MG-2 «Quasi-continuous» à base du MG terminal.....	56
2.5. Commande floue par MG-2 «Super Twisting» à base du MG terminal.....	58
2.6. Simulations et résultats.....	61
2.6.1. Exemple 1.....	62
2.6.2. Exemple 2.....	66
2.7. Conclusion.....	75
3. Commande et Observation par Mode Glissant d'ordre Supérieur	
3.1. Introduction.....	76
3.2. Contexte et formulation.....	78
3.2.1. Système flou type-2 de Takagi-Sugeno (SFT-2 TS).....	79
3.2.2. Observation d'états et identification d'incertitudes.....	81
3.3. Commande adaptative par MG-2 (ST) à base du MG terminal.....	85
3.3.1. Problématique et objectif de la commande.....	86
3.3.2. Synthèse de la commande adaptative par MG-2 (ST).....	88
3.3.3. Analyse de la stabilité.....	90
3.4. Commande adaptative par MG-2.....	95
3.4.1. Synthèse de la commande adaptative par MG-2.....	97
3.4.2. Analyse de la stabilité.....	99
3.5. Simulations et résultats.....	104
3.6. Conclusion.....	123
Conclusion Générale et Perspectives.....	125
Bibliographies.....	127

Liste des Figures

1. Modes Glissants d'ordre Supérieur

Figure 1.1. Attractivité de la surface de glissement $\sigma(x,t)$	13
Figure 1.2. Commande par mode glissant ($u = u_{BF} + u_{HF}$)	17
Figure 1.3. Exemple de D1 et D2 (étude de la contractivité)	22
Figure 1.4. Convergence d'un dérivateur du MG d'ordre 5	27
Figure 1.5. Convergence d'un dérivateur du MG d'ordre 5 en présence d'un bruit	28
Figure 1.6. Convergence de Twisting	30
Figure 1.7. Convergence du MG terminal	32
Figure 1.8. Robot mobile de type voiture	33
Figure 1.9. Résultats de simulation du robot mobile en MG-2 (algorithme de Twisting)	34
Figure 1.10. Résultats de simulation du robot mobile en MG-2 (algorithme de ST)	35
Figure 1.11. Résultats de simulation du robot mobile en MG terminal	36
Figure 1.12. Résultats de simulation du robot mobile en MG terminal (nested)	36
Figure 1.13. L'idée du MG d'ordre r	38
Figure 1.14. Résultats de simulation du robot mobile en MG-3 « Nested »	40
Figure 1.15. Résultats de simulation du robot mobile en MG-3 « Nested » en présence d'un bruit	41
Figure 1.16. Résultats de simulation du robot mobile en MG-3 « Quasi-continuous »	42
Figure 1.17. Résultats de simulation du robot mobile en MG-3 « Quasi-continuous » en présence d'un bruit	42

2. Commande Floue par Mode Glissant d'ordre 2 à base du Mode Glissant Terminal

Figure 2.1. Représentation d'un système flou type-2 (SFT-2)	50
Figure 2.2. Schéma bloc des contrôleurs flous du MG-2 proposés	61
Figure 2.3. Évolution du système ($u(t)=0$, $\Delta f(x,t)=0$ et $d(t)=0$)	62
(a) et (b) Réponses temporelles des états du système $x_i(t), (i=1,2)$.	
(c) Comportement de l'attracteur chaotique dans le plan de phase (x_1, x_2) .	
Figure 2.4. Fonctions d'appartenance type-2 intervalle de la variable s	63
(a) pour les contrôleurs FMG-Nes2 et FMG-Qc2,	
(b) pour le contrôleur FMG-ST	
Figure 2.5. Résultats de simulation du système utilisant les contrôleurs proposés	64
(a) et (b) Poursuite de trajectoires des états $x_i, (i=1,2)$.	
(c) L'attracteur du système dans le plan de phase (x_1, x_2) .	
(d) Signaux de commande des contrôleurs proposés.	
Figure 2.6. Évolution du système chaotique de Lü ($u=0$ et $D=0$)	67

(a) Réponses temporelles des états du système $x_i(t), (i=1:3)$.
 (b) L'attracteur chaotique du système de Lü en 3-D.

Figure 2.7. Résultats de simulation du système de Lü en utilisant les contrôleurs proposés68
 (a), (b) et (c) Poursuite des références par les états $x_i, (i=1:3)$.
 (d), (e) et (f) Signaux de commande $u_i, (i=1:3)$ des contrôleurs proposés.

Figure 2.8. Comportement dynamique du système chaotique de Lü en 3-D68

Figure 2.9. Schéma de principe de la synchronisation.....70

Figure 2.10. Évolution des systèmes chaotiques : maître (2.74) et esclave (2.75).....71
 (a) et (b) Réponses temporelles des états $x_i(t)$ et $y_i(t), (i=1,2)$.
 (c) Attracteurs chaotiques des systèmes maître et esclave.

Figure 2.11. Performances de la synchronisation des systèmes (2.76) avec (2.74)72
 (a) et (b) Synchronisation des états esclaves $y_i(t)$ avec les états maîtres $x_i(t), (i=1,2)$.
 (c) Attracteurs chaotiques des systèmes maître et esclave.
 (d) Signal d'effort de la commande proposée FMG-ST.

Figure 2.12. Évolution du système chaotique de Chen ($u=0$ et $D=0$)73
 (a) Réponses temporelles des états du système $y_i(t), (i=1:3)$.
 (b) L'attracteur chaotique du système de Chen en 3-D.

Figure 2.13. Performances de la synchronisation des systèmes de Chen avec celui de Lü.....73
 (a), (b) et (c) Synchronisation des états esclaves $y_i(t), (i=1:3)$ avec les états maîtres $x_i(t)$.
 (d) Signaux d'effort $u_i, (i=1:3)$ des commandes proposées.

Figure 2.14. Comportements dynamiques des systèmes de Lü (\cdots) et de Chen ($-$).....74
 (a) Attracteurs chaotiques en 3-D.
 (b) Attracteurs chaotiques en 2-D.

3. Commande et Observation par Mode Glissant D'ordre Supérieur

Figure 3.1. Fonctions d'appartenance type-2 intervalle de $x_i(t), i=1,3$ 105

Figure 3.2. Estimation des vitesses par les observateurs FMG-2 et FMG-3 107

Figure 3.3. Identification des incertitudes par les observateurs FMG-2 et FMG-3..... 107

Figure 3.4. Performance de poursuite de position (q_1, q_2) 110

Figure 3.5. Performance de poursuite de vitesse (\dot{q}_1, \dot{q}_2) 110

Figure 3.6. Précision des erreurs de poursuite pour articulation $i, (i=1,2)$ 112
 (a) (e_i, \dot{e}_i) pour u_{CAST} et u_{CQc-2} .
 (b) $(e_i, \dot{e}_i, \ddot{e}_i)$ pour u_{CAMG-2} et u_{CAST-2}

Figure 3.7. Stabilisation des surfaces de glissement pour le contrôleur u_{CAST} 112

Figure 3.8. Portraits de phase $(\hat{s}, \dot{\hat{s}})$ pour le contrôleur u_{CAST} 112

Figure 3.9. Stabilisation des surfaces de glissement pour les contrôleurs u_{CAMG-2} et u_{CAST-2} 113

Figure 3.10. Portraits de phase (e_i, \dot{e}_i) , $i=1,2$ pour les contrôleurs u_{CAMG-2} et u_{CAST-2}	113
Figure 3.11. Couples de commandes appliquées	114
Figure 3.12. Évolution temporelle des gains de commande pour u_{CAST} , u_{CAMG-2} et u_{CAST-2}	114
Figure 3.13. Performance de poursuite de position (q_1, q_2) ($v_c = 0$)	115
Figure 3.14. Performance de poursuite de vitesse (\dot{q}_1, \dot{q}_2) ($v_c = 0$)	115
Figure 3.15. Précision des erreurs de poursuite pour l'articulation $i, (i=1,2)$ ($v_c = 0$)	116
(a) (e_i, \dot{e}_i) pour u_{CAST} et u_{CQC-2} .	
(b) $(e_i, \dot{e}_i, \ddot{e}_i)$ pour u_{CAMG-2} et u_{CAST-2} .	
Figure 3.16. Stabilisation des surfaces de glissement pour le contrôleur u_{CAST} ($v_c = 0$)	117
Figure 3.17. Portraits de phase $(\hat{s}, \dot{\hat{s}})$ pour le contrôleur u_{CAST} ($v_c = 0$)	117
Figure 3.18. Stabilisation des surfaces de glissement pour les contrôleurs u_{CAMG-2} et u_{CAST-2} ($v_c = 0$)	117
Figure 3.19. Portraits de phase (e_i, \dot{e}_i) , $i=1,2$ pour les contrôleurs u_{CAMG-2} et u_{CAST-2} ($v_c = 0$)	117
Figure 3.20. Compensation de l'incertitude $\Delta(t)$ dans le contrôleur u_{CAMG-2} ($v_c = 0$)	118
Figure 3.21. Couples de commandes appliquées ($v_c = 0$)	118
Figure 3.22. Évolution temporelle des gains de commande pour u_{CAST} , u_{CAMG-2} et u_{CAST-2} ($v_c = 0$)	118
Figure 3.23. Performances d'estimation de l'observateur FMG-3 (en présence de bruit de mesure avec $v_c = 0$)	120
Figure 3.24. Performances de poursuite pour les contrôleurs u_{CAST} et u_{CAMG-2} (en présence de bruit de mesure avec $v_c = 0$)	121
Figure 3.25. Précision des erreurs de poursuite pour les contrôleurs u_{CAST} et u_{CAMG-2} (en présence de bruit de mesure avec $v_c = 0$)	121
Figure 3.26. Stabilisation des surfaces de glissement pour le contrôleur u_{CAST} (en présence de bruit avec mesure et $v_c = 0$)	122
Figure 3.27. Portraits de phase (e_i, \dot{e}_i) et $(\hat{s}, \dot{\hat{s}})$ pour le contrôleur u_{CAST} (en présence de bruit de mesure avec $v_c = 0$)	122
Figure 3.28. Stabilisation de la surface de glissement φ et portraits de phase (e_i, \dot{e}_i) pour le contrôleur u_{CAMG-2} (en présence de bruit de mesure avec $v_c = 0$)	123

Liste des Tableaux

2. Commande Floue par Mode Glissant d'ordre 2 à base du Mode Glissant Terminal

Tableau 2.1. Paramètres des fonctions d'appartenance type-2 intervalle pour x_i ($i = 1, 2$)	63
Tableau 2.2. Comparaison des performances de poursuite et de commande des contrôleurs flous du MG-2 proposés	65
Tableau 2.3. Comparaison des performances de poursuite des contrôleurs proposés (pour le système de Lü).....	69
Tableau 2.4. Comparaison des efforts de commande des contrôleurs proposés (pour le système de Lü).....	69

3. Commande et Observation par Mode Glissant d'ordre Supérieur

Tableau 3.1. Paramètres des contrôleurs u_{CAST} , u_{CAMG-2} , u_{CAST-2} et u_{CQc-2}	109
Tableau 3.2. Comparaison des performances des contrôleurs proposés	119

Liste des Acronymes

MG	Mode Glissant
MG-r	Mode Glissant d'ordre r
MG-Nes2	Algorithme « Nested » du mode glissant d'ordre 2
MG-Qc2	Algorithme « Quasi-continuous » du mode glissant d'ordre 2
MGT	Mode Glissant Terminal
MGTN	Mode Glissant Terminal Non singulier
ST	Algorithme « Super Twisting » du mode glissant d'ordre 2
CAMG-2	Contrôleur Adaptatif par Mode Glissant d'ordre 2
CAST	Contrôleur Adaptatif par MG-2 « Super Twisting »
CFMG-Nes2	Contrôleur Flou par MG-2 « Nested »
CFMG-Qc2	Contrôleur Flou par MG-2 « Quasi-continuous »
CFMG-ST	Contrôleur Flou par MG-2 « Super Twisting »
CFMGT	Contrôleur Flou par Mode Glissant Terminal
CQc-2	Contrôleur par MG-2 « Quasi-continuous »
OFMG-2	Observateur Flou par Mode Glissant d'ordre 2
OFMG-3	Observateur Flou par Mode Glissant d'ordre 3
EOI	Equivalent Output Injection
F-2 TS	Modèle Flou type-2 de Takagi–Sugeno
IAE	Integral of Absolute Error
ISE	Integral of Squared Error
CI	Chattering Indicator
CEI	Control Effort Indicator
TV	Control Total Variation
SISO	Single Input Single Output
MIMO	Multiple Input Multiple Output
SFT-2	Système Flou Type-2
SNR	Signal Noise Ratio (rapport signal sur bruit)
SSV	Systèmes à Structure Variable

Liste des Symboles

$x(t)$	État du système
$x_d(t)$	État désiré
$e(t)$	Erreur de poursuite
$\sigma(x,t)$	Variable de glissement
s	Surface de glissement
φ, φ_{ST-2}	Fonctions contraintes homogènes
S_r	Ensemble de glissement d'ordre r
$\text{sign}(\bullet)$	Fonction signe
$u(t)$	Commande appliquée
$D(x,t)$	Ensemble des incertitudes et des perturbations
V	Fonction de Lyapunov
t_s	Temps de convergence
u_{eq}	Commande équivalente
$k_{1,2}$	Gains de commande
v_c	Terme de compensation
$\mathcal{O}(\bullet)$	Ordre de précision
τ	Temps d'échantillonnage
\hat{x}	L'état estimé
\tilde{x}	Erreur d'estimation
z_{eq}	L'injection de sortie équivalente (EOI)
τ_{eq}	Constante du temps d'un filtre
ϵ	Borne supérieur de bruit

Introduction Générale

1. Introduction	1
2. Motivation et objectifs	2
3. Contribution de la thèse	7
4. Organisation de la thèse.....	8

1. Introduction

D'une manière générale, la plupart des méthodes de synthèse des lois de commande et d'observateurs exigent la disponibilité d'un modèle mathématique du système à commander. Néanmoins, les comportements complexes qui régissent les processus réels, et la présence de fortes non-linéarités ne permettent pas d'avoir une compensation précise de ces non-linéarités et ainsi d'obtenir les performances dynamiques désirées. D'autre part, la nature incertaine des systèmes non linéaires rend difficile la mise au point d'une bonne description analytique de la dynamique du système réel, et même si on arrive à avoir un modèle représentant le système, il sera absolument incertain en termes de reproduction du comportement physique du procédé. Cette réputation a motivé l'introduction de la notion de modèles incertains [Bou-00]. Cette notion a pour but d'approcher le mieux possible le comportement réel d'un système, où le modèle globale du système est composé d'un modèle nominal auquel sont associées les différentes incertitudes. C'est à partir de cette représentation des systèmes que l'on souhaite synthétiser une commande dite robuste, capable d'atteindre des performances de robustesse tout en assurant une faible sensibilité aux variations paramétriques et aux perturbations externes.

L'une des commandes les plus connues pour le contrôle des systèmes non linéaires incertains et perturbés, la commande par mode glissant (CMG) en raison de sa robustesse et sa simplicité de mise en œuvre [Kha-02], [Per-02]. La CMG n'est autre qu'un type particulier de la théorie des systèmes à structure variable (SSV) [Eme-67] ; c'est-à-dire des commandes commutant entre plusieurs lois de commande différentes en fonction de certains critères [Hun-93], [Utk-77], [Utk-92]. De nos jours, la CMG a été largement utilisée dans différents domaines d'application, comme la robotique, le contrôle de processus, l'aérospatial et l'électronique de puissance [Ben-19], [Goe-17], [Váz-15], [Zha-1]. Cette commande consiste à définir une surface dite de glissement en fonction des variables d'états du système, de telle façon qu'elle soit attractive, puis synthétiser une commande globale de deux termes, le premier qui est discontinu permet l'approche du système sur cette surface, le second permet le maintien et le glissement le long de celle-ci afin de rejoindre l'origine de phase (défini dans l'espace d'état).

Cependant, le terme discontinu de la commande qui permet le passage de la phase d'approche à celle du glissement, engendre en même temps des oscillations à haute fréquence autour de la surface, c'est le phénomène de broutement connu sous le nom de chattering. Ce phénomène représente l'inconvénient majeur de la commande par mode glissant, car il peut exciter des hautes fréquences non modélisées du processus et endommager l'actionneur. D'autre part, et comme la plupart des techniques de commande, la synthèse d'une loi de commande par mode glissant nécessite d'avoir des informations précises sur l'évolution du système dans l'espace d'état et les bornes supérieures des incertitudes et des perturbations

doivent être connues auparavant. Ces problèmes ont été considérés comme un autre inconvénient de cette technique (CMG).

2. Motivation et objectifs

Dans le but d'éliminer le phénomène de broutement (chattering) ou au moins de réduire son effet, de nombreuses solutions ont été proposées, on cite les plus répandues :

La méthode de couche limite (connu aussi par le nom *boundary layer*) [Slo-91], [Utk-92] permet d'atténuer fortement le broutement, en revanche un compromis doit être réalisé entre l'importance du broutement et les performances attendues du système comme la précision et la robustesse. Une autre méthode consiste à générer un régime glissant idéal (sans avoir l'effet du chattering) dans une boucle d'observation [Bon-85], cette méthode limite la robustesse, car l'observateur ne peut prendre en compte les perturbations non modélisées. L'introduction d'une nouvelle commande virtuelle \dot{u} (c'est-à-dire l'augmentation de l'ordre de système par un) permet d'assurer un mode glissant en temps fini et de générer un signal de commande continu [Lev-03], [Lev-05a], [Lev-05b]. Cependant, la conception de la loi de commande dans ce cas nécessite la disponibilité d'une dérivée supplémentaire de la sortie (qui est la variable de glissement en générale), ce qui peut causer des problèmes d'observation.

Une nouvelle solution est basée sur la théorie des modes glissants d'ordre supérieur (higher order sliding mode HOSM). Cette technique conduit à des lois de commande toujours relativement simples à mise en œuvre et permet de réduire considérablement l'effet de broutement tout en conservant les performances du système (stabilité, robustesse et convergence du mode glissant en temps fini) [Eme-93], [Eme-96], [Lev-93].

La notion des modes glissants d'ordre supérieur qui n'est qu'une généralisation du MG classique (ou standard) a émergé dans les années 80, principalement pour résoudre le problème de chattering. Contrairement au MG classique (connu aussi par MG d'ordre un) qui est caractérisé par une commande discontinue agissant sur la première dérivée de la variable de glissement σ (c'est-à-dire $\dot{\sigma}$ est discontinue), cette commande agit sur ses dérivées d'ordre supérieur. Dans le concept du MG d'ordre supérieur, cela permet d'assurer une stabilisation en temps fini non seulement de la variable de glissement σ , mais également de ses dérivées supérieures (jusqu'à l'ordre $r-1$ pour un MG d'ordre r). Par conséquent, un MG d'ordre r peut-être défini par l'ensemble de glissement d'ordre r suivant : $S_r = \{\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0\}$. Il est à noter que, l'ordre de glissement caractérise particulièrement le degré de continuité des dynamiques du système au voisinage de la surface de glissement, et correspond au nombre de dérivées continues de la variable à contraindre.

Préservant les principaux avantages du mode glissant classique, notamment la robustesse, cette nouvelle technique (MG d'ordre supérieur) permet de réduire considérablement l'effet du chattering, ainsi que d'atteindre plus de précision de glissement pour un régime glissant réel [Lev-93]. Étant données les imperfections des organes de commande, qui ne peuvent

commuter à une fréquence infinie en pratique, le régime glissant, de ce fait, ne prend place que dans un (proche) voisinage de la surface considérée. En considérant que le temps d'échantillonnage τ , la commande par mode glissant classique permet d'atteindre une précision d'ordre un $\mathcal{O}(\tau)$ de la surface de glissement par rapport au temps d'échantillonnage, tandis qu'avec un MG d'ordre supérieur, la précision sera d'ordre r c'est-à-dire $\mathcal{O}(\tau^r)$ [Lev-93].

D'une manière générale, la synthèse de n'importe quelle CMG d'ordre r nécessite d'avoir des informations sur les $(r-1)$ premières dérivées de la variable de glissement (c'est-à-dire $\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$), la seule exception connue c'est l'algorithme Super Twisting (ST) [Lev-93], [Lev-98], [Bar-03], cet algorithme requiert seulement la connaissance de σ .

Dans la littérature, vu la nécessité d'avoir le minimum d'information sur la variable de glissement, de nombreux travaux sont focalisés sur l'utilisation des algorithmes par MG du second ordre ($r=2$) notamment l'algorithme de Twisting et de Super Twisting pour différentes applications [Cha-14], [Cha-15], [Goe-17], [Hen-15b], [Hen-19a], [He-19], [Lev-07], [Mun-15], [Ria-19], [Tay-18], [Van-16], [Xia-19a]. Basant sur le principe des MGs d'ordre supérieur, une telle commande par mode glissant d'ordre 2 permet d'assurer une convergence en temps fini du système vers l'ensemble de glissement du second ordre défini par : $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ et d'atténuer le chattering tout en garantissant une précision d'ordre deux $\mathcal{O}(\tau^2)$ pour la variable de glissement, et d'ordre un $\mathcal{O}(\tau)$ pour sa dérivée [Lev-93].

L'algorithme de Twisting est le premier algorithme du MG du second ordre et le plus simple [Lev-93]. Il est conçu pour des systèmes de degré relatif 2 par rapport à la variable de glissement. Néanmoins, cet algorithme peut être adapté pour des systèmes de degré relatif 1, en augmentant le système d'intégrateur, c'est-à-dire en contrôlant la dérivée de la commande par rapport au temps au lieu de la commande directement. Ceci permet d'atténuer effectivement le broutement (ce cas est appelé anti-chattering), ainsi que de compenser exactement les perturbations bornées. En revanche, cette technique exige la disponibilité de la dérivée de la variable de glissement. Contrairement à l'algorithme de Twisting, l'algorithme Super Twisting (ST) ne s'applique qu'à des systèmes de degré relatif 1 dont l'ensemble incertitudes/perturbations est Lipschitz (pour presque tout $t \geq 0$, sa dérivée existe et elle est uniformément limitée par une constante Lipschitz et positive) [Lev-93]. Cette commande permet d'atténuer considérablement le chattering et d'atteindre une stabilisation en temps fini d'un régime glissant du second ordre ($\sigma = \dot{\sigma} = 0, \forall t > T$) sans avoir besoin de la dérivée $\dot{\sigma}$. Cette dernière propriété de l'algorithme ST a permis de construire un dérivateur par mode glissant du second ordre (ce qu'on appelle en anglais : second order sliding mode differentiator) [Lev-98]. Ce concept (nommé aussi observateur) a donné une nouvelle impulsion au développement de la théorie mathématique et à l'application des différents

algorithmes par mode glissant du second ordre notamment l'algorithme ST [Cha-15], [Mun-15], [Van-16], [Tay-18].

Il convient de noter que, d'une manière générale et particulièrement pour les systèmes du second ordre, les algorithmes du MG-2 (comme l'algorithme de Twisting) ne nécessite pas de concevoir une surface de glissement, ce qui permet d'assurer une convergence directe et en temps fini des états du système vers leurs références. En revanche, pour l'algorithme Super Twisting, la conception d'une surface de glissement de degré relatif égale à un dont la dynamique linéaire en général est nécessaire (quel que soit l'ordre du système) [Cha-14]. Ce type des surfaces de glissement assurant seulement une convergence en temps fini d'un régime glissant du second ordre ($\sigma = \dot{\sigma} = 0$), tandis que les états du système convergent asymptotiquement vers leurs références.

À la différence de la commande par MG classique qui utilise une surface de glissement typiquement linéaire (nommé également MG linéaire), une autre classe très intéressante de commande par MG basée sur le mode glissant terminal (MGT) utilise une surface de glissement non linéaire pour garantir une stabilisation en temps fini des états du système. L'idée de la commande par MGT a été introduite pour la première fois dans [Man-94], [Man-97], [Ven-92], où une variable de glissement terminal dont la dynamique non linéaire a été proposée pour la stabilisation en temps fini d'un système non linéaire du second ordre (robot manipulateur à deux articulations). Une généralisation de la commande par MGT a été présentée dans [Yu-96], [Yu-98], où la loi de commande se définit d'une manière récursive (nested) par la conception d'un ensemble de fonctions de commutation non linéaires (surfaces de glissement), toutes ces fonctions convergent séquentiellement vers zéro en temps fini et par conséquent, tous les états du système convergent vers zéro.

D'autre part et comme il est mentionné dans [Lev-01], la première version du MGT est identique à l'algorithme du MG du second ordre avec une convergence prescrite nommé « 2-sliding algorithm with a prescribed convergence law » [Eme-86], [Lev-93], malgré que ces contrôleurs sont indépendamment développés. Pour la version du MGT présentée dans [Wu-98], la commande est conçue afin d'obtenir une stabilisation des modes glissants d'ordre arbitraire en un temps fini, l'inconvénient de cette approche c'est que ; pour avoir une commande finie (sans avoir le problème de singularité), toutes les trajectoires du système doivent démarrer à partir d'un secteur prédéfini de l'espace d'état, ce qui représente une contrainte restrictive particulièrement pour les applications en temps réel. Cela a conduit au développement du mode glissant terminal non singulier [Fen-02], [Fen-07]. L'introduction d'une surface de glissement légèrement différente de celle du mode glissant terminal permet d'assurer un régime glissant terminal sans engendrer d'infinité sur la commande [AlG-15], [Yan-11]. Dans la littérature, les techniques de la commande par MGT ont été utilisées essentiellement pour leurs propriétés garantissant une stabilisation en temps fini des états du

système dans diverses applications [AlG-15], [Abo-18], [Van-17], [Wan-16], [Xia-19b], [Zha-19b].

Les différentes commandes par MG d'ordre 2 ont été appliquées avec succès pour résoudre plusieurs problèmes de contrôle. Cependant, ces algorithmes sont limités à la classe des systèmes de degré relatif inférieur ou égale à 2 ($r \leq 2$). Afin de résoudre le problème de la stabilisation en temps fini d'un régime glissant d'ordre arbitraire (notamment pour des dynamiques d'ordre élevé $r > 2$), ainsi que la compensation exacte des incertitudes et de perturbations co-incidentes et équivalentes (matched en anglais ; un type de perturbation qui agit sur le système exactement au même niveau que la commande), un premier contrôleur par MG d'ordre arbitraire a été introduit dans [Lev-01] pour des dynamiques mono-entrée mono-sortie de degré relatif arbitraire. Lorsque la conception d'un contrôleur par MG d'ordre arbitraire exige la disponibilité de la variable de glissement et de ses dérivées supérieures, le différentiateur (dérivateur) par mode glissant d'ordre arbitraire introduit dans [Lev-03], [Lev-06a] est utilisé pour les calculer (estimation en temps fini des dérivées supérieures de σ). Cette combinaison fait introduire la notion « Nested arbitrary sliding mode controllers », cela permet d'assurer la stabilisation en temps fini de l'ensemble de glissement d'ordre arbitraire en présence des perturbations. Il est à noter également que, dans tout contrôleur du MG d'ordre supérieur, la commande agissant sur les dérivées supérieures de σ doit être discontinue pour pouvoir compenser exactement les perturbations [Lev-05a], à l'exception de l'algorithme « Quasi-Continuous » du MG d'ordre arbitraire proposé dans [Lev-06b], [Lev-05b] qui est caractérisé principalement par une commande continue partout sauf dans le point où le système atteint l'ensemble : $\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$ du régime glissant d'ordre r .

En raison de ses propriétés attrayantes de robustesse, de stabilisation en temps fini d'un régime glissant, d'estimation des états non mesurés et de compensation exacte des perturbations, de nombreux travaux sont focalisés sur l'utilisation de l'approche du MG d'ordre supérieur pour résoudre les problèmes de commande et d'observation des différents systèmes [Bar-18], [Mun-15], [Per-18], [Sht-14], [Tam-18], [Tay-18], [Van-16]. Cependant, et comme il est indiqué précédemment, la conception d'une telle loi de commande par MG nécessite d'avoir des informations précises sur l'évolution du système dans l'espace d'état, ainsi que sur les bornes supérieures des incertitudes et des perturbations qui doivent être connues au préalable (notamment pour l'algorithme Super Twisting), ce qui rend les gains de glissement difficiles à calculer (ils sont choisis de façon à satisfaire la condition de convergence en temps fini). Comme ces gains ont un rôle primordial dans la réduction du chattering et la convergence en temps fini du MG, plusieurs travaux ont proposé des métissages de la commande par MG avec d'autres approches, comme la logique floue, qui ont permis d'estimer les gains de commande tout en gardant les performances désirées du contrôleur [Gao-14], [Kai-15], [Man-12], [Pan-18], [Van-13]. D'autre part, des lois d'adaptation pour les gains de commande ont été proposées dans [Edw-16], [Sht-10], [Sht-12], [Utk-13]. Ces mécanismes d'adaptation

permettent d'ajuster en ligne les valeurs des gains et de ne pas les surestimer, ce qui permet par conséquent de limiter le chattering tout en préservant les avantages de la commande par MG d'ordre supérieur, notamment la robustesse par rapport aux perturbations (dont ses bornes sont inconnues). Dans ce contexte, de nombreux contrôleurs adaptatifs par mode glissant d'ordre supérieur ont été récemment proposés pour le contrôle des systèmes non linéaires incertains [Bou-19], [Bor-18], [Guo-18], [Gut-19], [Mob-17a], [Mob-17b], [Sin-18b], [Xio-19], [Yu-16].

Dans le but de limiter l'effet du chattering et d'atteindre en même temps une convergence en temps fini, une classe de contrôleurs du MG homogènes et continus (utilisant l'algorithme ST combiné avec une surface de glissement terminal) a été proposée dans [Fri-15]. En utilisant ce concept, basé sur le métissage avec différentes manières de la commande par MG d'ordre supérieur (notamment les algorithmes du MG d'ordre 2) et l'approche des MGs terminal, quelques contrôleurs ont été conçus récemment pour des différents systèmes non linéaires [Ash-18], [Goe-17], [Ria-19], [Van-17].

D'autre part, comme la synthèse d'une loi de commande par mode glissant nécessite d'avoir des informations précises sur l'évolution du système dans l'espace d'état, l'utilisation des approches basées sur l'intelligence artificielle (comme la logique floue) peut être une bonne alternative pour la représentation du comportement des systèmes complexes et leur commande [Haj-05], [Pag-05], [Tan-01]. Avec ce concept, et dans le but de représenter le comportement et les relations entre les états, les entrées et les sorties du procédé, la logique floue permet d'exploiter efficacement l'expertise humaine à travers les différentes informations linguistiques sous forme de règles floues de la forme « Si... alors » [Gha-97], [Han-18], [Tak-85], [Tse-01]. En effet, depuis son introduction par Zadeh [Zad-65], le progrès et l'investissement dans la théorie du flou ont démontré qu'un système flou peut être utilisé comme un approximateur universel [Wan-94]. Il est à noter que les systèmes flous sont constitués par des règles, assez souvent issues de connaissances incertaines. Cette incertitude mène alors à l'obtention de règles dont les prémisses ou les conséquences sont incertaines, apparaît plus particulièrement dans les ensembles flous à travers les fonctions d'appartenances correspondantes [Kar-98a] [Kar-98b].

Contrairement aux systèmes flous de type-1 (SFT-1), dont le degré d'appartenance est une valeur, les systèmes flous de type-2 (SFT-2) sont caractérisés par des degrés d'appartenance, des prémisses et/ou des conséquences, eux-mêmes des ensembles flous de type-1. Dans les circonstances où il est difficile de déterminer précisément les fonctions d'appartenance pour les ensembles flous, ces SFT-2 sont capables en prendre en charge ces incertitudes et ainsi minimiser leur effet [Kar-99].

Dans cette thèse, motivée par la discussion susmentionnée, des structures de commande par MG d'ordre supérieur (notamment d'ordre deux) seront proposées et développées pour réaliser une bonne poursuite de trajectoires pour des classes des systèmes non linéaires

incertains mono-entrée mono-sortie (SISO) et multi-entrées multi-sorties (MIMO), tout en assurant la stabilité en temps fini, l'atténuation de l'effet de broutement au niveau du signal de commande. L'utilisation de l'approche floue de type-2 et des mécanismes d'adaptation permet de s'affranchir de la disponibilité d'un modèle nominal du système non linéaire et de la connaissance des bornes supérieures des incertitudes et des perturbations. La faisabilité des structures de commande proposées est validée par simulation sous Matlab, sur des systèmes chaotiques et mécaniques, qui sont considérés comme des exemples typiques des systèmes non linéaires incertains soumis à des perturbations externes.

3. Contribution de la thèse

À l'égard des performances du MG d'ordre supérieur dans la commande ainsi que dans l'observation, la contribution principale de cette thèse réside dans l'élaboration de trois nouvelles structures de commande robuste pour des systèmes non linéaires incertains SISO et MIMO. La mise en œuvre de ces structures de commande est basée sur la combinaison du MG d'ordre supérieur, utilisant principalement l'algorithme Super Twisting qui fait partie des commandes par MG d'ordre 2 les plus répandues, avec des mécanismes d'adaptation et l'approche floue.

La conception d'une loi de commande robuste basée sur le métissage du MG-2 avec le MG terminal, permettra d'atteindre une convergence en temps fini, non seulement du régime glissant du second ordre, mais également des états du système vers leurs références. Ensuite, des systèmes adaptatifs flous type-2 seront introduits afin de résoudre les problèmes de la représentation nominale du système et le calcul des gains de commande qui requiert la disponibilité des bornes supérieures des perturbations et/ ou des incertitudes.

Grace à ses propriétés de commande et d'observation, l'approche du MG d'ordre supérieur sera implémentée afin de concevoir une deuxième structure de commande robuste, équipée d'un observateur par MG pour un système non linéaire incertain dont les états sont partiellement connus. La dynamique du système non linéaire sera approximée par un modèle flou type-2 de Takagi Sugeno (T-2 TS). Afin de simplifier le calcul des gains de commande, l'utilisation d'un mécanisme d'adaptation permet de les ajuster indépendamment des bornes supérieures des incertitudes et des perturbations.

D'autre part, une nouvelle structure de commande adaptative par mode glissant du second ordre à base d'observateur sera mise au point. L'objectif principal de cette dernière est d'assurer la stabilisation en temps fini d'un régime glissant réel d'ordre trois; autrement dit, atteignant les performances d'un MG du troisième ordre (la convergence en temps fini de l'ensemble : $\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} \equiv 0$ avec une précision de glissement d'ordre trois par rapport à la variable de glissement σ), avec les contraintes d'un MG du second ordre, en termes d'atténuation de l'effet de broutement et de l'affranchissement de connaissance de la troisième variable $\ddot{\sigma}$ (seulement les deux variables de glissement σ et $\dot{\sigma}$ sont nécessaires pour la

conception du contrôleur. Dans ce contexte, deux structures de commande adaptative par MG-2 seront mise en œuvre. La première structure de commande [Hen-19a] est basée essentiellement sur le métissage du MG-2 utilisant l'algorithme de ST et du MG terminal. Le contrôleur résultant permet de garantir la stabilisation en temps fini d'un régime glissant du second ordre par rapport à la surface de glissement terminal sélectionnée, tout en assurant une commande lisse et une convergence en temps fini des états du système vers leurs références. Pour la deuxième structure de commande, un contrôleur homogène par MG du second ordre est implémenté [Hen-19b]. Cette structure équipée d'un observateur flou par MG3 permet d'atteindre un régime glissant d'ordre 3 par rapport à la variable de glissement avec les contraintes d'un MG du second ordre. Elle permet d'obtenir de bonnes performances, en termes de poursuite et d'atténuation de l'effet de broutement au niveau du signal de commande.

4. Organisation de la thèse

L'ensemble des travaux réalisés dans le cadre de cette thèse est organisé essentiellement en trois parties. Une brève description de chaque partie est donnée dans ce qui suit :

Partie 1 : Quelques préliminaires et notions de base concernant l'approche des modes glissants d'ordre supérieur sont présentés et discutés. Dans un souci de clarté, un système non linéaire SISO est considéré afin d'illustrer certains concepts.

Partie 2 : Dans cette partie, des structures de commande adaptative floue type-2 par MG d'ordre deux sont proposées pour la stabilisation en temps fini d'un système chaotique, en présence des incertitudes et des perturbations. Au départ, une surface de glissement terminal est conçue afin d'assurer la convergence des états de système vers leurs trajectoires désirées en temps fini. Ensuite, différents algorithmes du mode glissant d'ordre 2 sont appliqués afin de générer une commande lisse et une atténuation importante du phénomène de broutement. Pour remédier au problème de non disponibilité du modèle nominal du système et des gains de glissement caractérisant les termes discontinus de la commande, des systèmes flous de type-2 adaptatifs sont proposés pour les approximer et les adapter grâce à des lois d'adaptations issues de l'étude de stabilité du système en boucle fermée au sens de Lyapunov. Les résultats de simulation obtenus par l'application de l'approche illustrée sur des systèmes chaotiques SISO et MIMO ont validé son efficacité et ses performances.

Partie 3 : Cette partie est consacrée à la synthèse de deux contrôleurs robustes à base des MGs d'ordre deux pour un système non linéaire incertain, appliqués à un robot manipulateur dont les états sont partiellement connus. Dans le but de représenter la dynamique du système, un modèle flou type-2 de Takagi Sugeno (F-2 TS) est utilisé. Ensuite, en combinant le modèle flou avec un observateur du MG d'ordre trois, un observateur flou par MG-3 est implémenté afin d'estimer en temps fini les états inconnus du système et de compenser en même temps l'ensemble des incertitudes et des perturbations. Pour faciliter le calcul des gains de commande pour les deux structures de commande proposées, un mécanisme d'adaptation est utilisé afin

de les estimer en évitant le problème de surestimation de leurs valeurs. La stabilité en temps fini des contrôleurs synthétisés est prouvée au sens de Lyapunov en utilisant la propriété d'homogénéités des MGs d'ordre supérieur. Les résultats de simulation avec une étude comparative sont présentés pour démontrer la validité des structures de commande proposées et mettre en évidence leurs performances.

Cette thèse se termine par une conclusion résumant le bilan des travaux réalisés et les résultats obtenus, ainsi que les perspectives envisagées.

1

Modes Glissants d'ordre Supérieur

1.1.Introduction	10
1.2.Mode glissant standard : concepts de base	11
1.3.Mode glissant d'ordre supérieur : concepts de base	18
1.4.Différentiateurs par mode glissant	23
1.5.Commande par mode glissant d'ordre 2	28
1.6.Commande par modes glissants d'ordre arbitraire	37
1.7.Conclusion	43

1.1. Introduction

La mise en œuvre des commandes non linéaires robustes s'avère être d'un grand intérêt, pour les systèmes de nature incertaine et perturbée, caractérisés par des phénomènes complexes et de fortes non-linéarités. La théorie des modes glissants (MGs) a été largement étudiée et appliquée pour le contrôle et l'observation des différents systèmes non linéaires dans des domaines très variés, en raison de ses propriétés de robustesse par rapport aux incertitudes paramétriques et des perturbations externes, en plus de sa simplicité de conception. Utilisant la théorie des systèmes à structure variable (SSV), cette méthode (MG) est basée essentiellement sur une commande discontinue qui permet de forcer le système à atteindre et ensuite y rester sur un voisinage d'une surface $\sigma(x,t)$, dite de glissement ou de commutation (conçue en fonction des états de système de telle façon qu'elle soit attractive en temps fini) [Utk-77]. Dans ce cas la dynamique du système se trouve en régime glissant, ce qui est complètement conditionné par cette surface et son comportement devient insensible aux incertitudes et perturbations co-incidentes ou équivalentes (intervenant dans les mêmes directions que les entrées appelées en anglais *matching perturbations*). L'inconvénient majeur de l'utilisation généralisée de la commande par mode glissant dans des applications industrielles est connu sous le nom de *chattering* ou *broutement*. La discontinuité de la commande engendre des oscillations de hautes fréquences qui peuvent exciter des dynamiques non modélisées du processus, ainsi causer une usure prématurée des actionneurs en plus d'une perte de précision. Un autre inconvénient de cette approche (MG) réside dans le choix de la surface de glissement. En effet, la stabilisation en temps fini d'un régime glissant standard $\sigma = 0$ est assurée seulement si le degré relatif de la variable de glissement est égale à 1. Une nouvelle variable auxiliaire doit être alors introduite pour les systèmes de degré relatif supérieur à 1. Cette variable, qui généralement est une combinaison linéaire de la surface de glissement $\sigma(x,t)$ et de ses dérivées temporelles successives, ne garantit qu'une stabilisation asymptotique (exponentielle) de la variable σ et de ses dérivées.

Afin de remédier aux problèmes du *chattering* et de la stabilisation en temps fini de σ et de ses dérivées, le concept de modes glissants d'ordre supérieur ou d'ordre r (connue en anglais par *high order sliding mode HOSM*) a été introduit dans [Lev-93], [Lev-97], [Lev-00]. L'idée principale de cette approche consiste à introduire une commande discontinue agissant sur la r ème dérivée de la variable de glissement $\sigma(x,t)$ permettant d'assurer une convergence en temps fini de l'ensemble de glissement d'ordre- r défini par : $S_r = \{ \sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0, \sigma^r \neq 0 \}$. La conception d'une loi de commande par MG- r ne nécessite réellement que la connaissance du degré relatif du système, qui correspond particulièrement au degré de continuité des dynamiques du système au voisinage de la variable

de glissement. Par conséquent, la commande par MG- r générée est une fonction discontinue de la variable de glissement σ et de ses dérivées successives $\dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$.

L'approche des MGs d'ordre supérieur permet d'atténuer fortement le chattering et assure également une haute précision de glissement, tout en préservant les mêmes avantages de la commande par mode glissant classique. Afin de garantir une stabilisation en temps fini d'un régime glissant d'ordre supérieur, la notion d'homogénéité a été largement utilisée pour la compréhension des MGs d'ordre supérieur [Bac-01], [Bha-00]. La plupart des lois de commande par MG- r connues actuellement possèdent une propriété d'homogénéité spécifique, appelée homogénéité de glissement d'ordre r [Lev-05a]. Cette dernière standardise les preuves de la stabilité des contrôleurs par MG- r et offre la meilleure précision asymptotique possible en présence du bruit de mesure, des retards et de la discrétisation temporelle [Lev-93]. De ce fait, dans un mode glissant réel, si on dénote le temps d'échantillonnage (de discrétisation) τ , la précision atteinte est de l'ordre $\sigma = \mathcal{O}(\tau^r)$ [Lev-05a]. Ces propriétés asymptotiques sont également préservées lorsqu'un dérivateur par mode glissant d'ordre $(r-1)$ homogène, exact et robuste est appliqué en tant que module standard d'un contrôleur par mode glissant d'ordre r homogène. De même, la connaissance des dérivées supérieures de la variable de glissement n'est plus nécessaire dans la conception de la loi de commande par MG- r grâce à l'utilisation des dérivateurs par MG d'ordre supérieur [Lev-98], [Lev-03], [Lev-06a]. En raison de ces avantages, de nombreux contrôleurs par MG d'ordre supérieur ont été récemment proposés pour le contrôle et l'observation de divers systèmes non linéaires incertains [Bor-18], [Per-18], [Tay-18], [Van-16].

Dans cette partie, une introduction générale sur l'approche du MG classique et d'ordre supérieur avec leurs propriétés associées ont été présentés. Dans un souci de clarté, un système non linéaire SISO est considéré afin d'illustrer certains concepts.

1.2. Mode glissant standard : concepts de base

Basé essentiellement sur la théorie des systèmes à structure variable (SSV), le principe de la commande par mode glissant est de contraindre le système à atteindre en temps fini une hypersurface donnée dans l'espace d'état et d'y rester. Cette hypersurface dite de glissement (ou de commutation) est définie comme étant un ensemble de relations entre les variables d'état (équation différentielle). Elle représente la dynamique désirée dans laquelle l'évolution de système soumis à une loi de commande ne dépend uniquement que des propriétés de l'hypersurface. Le comportement résultant est appelé régime glissant, où le système bouclé devient robuste vis-à-vis des incertitudes (propres au système) et des perturbations externes.

La synthèse d'une loi de commande par mode glissant consiste alors à :

1. Définir une surface de glissement (hypersurface) en fonction des objectifs de commande et des propriétés statiques et dynamiques désirées pour le système bouclé. Dans

le cas contraire, le système ne pourra pas rester sur l'hypersurface, et la propriété d'insensibilité aux perturbations sera perdue.

2. Synthétiser une loi de commande discontinue qui doit contraindre les trajectoires d'état du système à rejoindre en temps fini l'hypersurface puis assurer le maintien et le glissement le long de celle-ci afin d'atteindre le point d'équilibre en dépit des incertitudes et des perturbations.

1.2.1. Système à structure variable

De nombreux systèmes physiques (comme le cas des circuits électriques, électromécaniques et électromagnétiques) sont régis par des équations différentielles impliquant des termes discontinus. Parmi ces cas, il faut distinguer les systèmes discontinus par nature de ceux dont la discontinuité est apportée par la commande, telle la commande par modes glissants qui n'est autre qu'un cas particulier de la théorie des systèmes à structure variable (SSV) et multifonctions [Hun-93]. Basée essentiellement sur la résolution des équations différentielles à second membre discontinues, initiée par Filippov [Fil-88], une généralisation avec les modes glissants d'ordre supérieur a été proposée [Eme-93], [Eme-96].

Considérons le système non linéaire suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t, u), \\ y = h(x), \quad x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où x est l'état du système évoluant dans une variété θ isomorphe à \mathbb{R}^n , caractérisant le domaine physique de fonctionnement du système. f est un champ de vecteur suffisamment différentiable. Définissant l'hypersurface $\sigma(x, t) = 0$ donnée dans l'espace d'état, appelée par la suite surface de glissement ou de commutation, puis synthétisant la loi de commande discontinue $u \in \Omega \subset \mathbb{R}$:

$$u(x, t) = \begin{cases} u^+ & \text{si } \sigma(x, t) > 0 \\ u^- & \text{si } \sigma(x, t) < 0 \end{cases}, \quad u^+ \neq u^- \quad (1.2)$$

où $u(x, t) \in [-1, 1]$ si $\sigma(x, t) = 0$, u^+ et u^- étant des fonctions continues. Il est clairement noté que le système (1.1) avec la loi de commande (1.2) est intrinsèquement à structure variable [Hun-93]. En revanche, le comportement du système est rendu discontinu par le choix d'une commande discontinue, ce qui permet d'atteindre des propriétés de robustesse vis-à-vis des incertitudes et des perturbations.

Le système variable (1.1) avec la loi de commande (1.2) a été écrit et bien défini en dehors de la surface $\sigma(x, t)$ comme suit:

$$\dot{x} = f(x, t, u) = \begin{cases} f^+(x, t, u^+) & \text{si } \sigma(x, t) > 0 \\ f^-(x, t, u^-) & \text{si } \sigma(x, t) < 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

où $f^+(x,t,u^+)$ et $f^-(x,t,u^-)$ sont des champs de vecteurs complets dans \mathbb{R}^n . La surface $\sigma(x,t)$ divise l'espace en deux parties disjointes $\sigma(x,t) > 0$ et $\sigma(x,t) < 0$ qu'on notera respectivement ε^+ et ε^- . En dehors de la surface de discontinuité, lorsque les deux vecteurs f^+ et f^- sont pointés chacun vers la surface, on dit alors que la surface est attractive (Figure 1.1) [Per-02] et la dynamique de système est définie par une politique de commutation d'éléments de f (inclusion différentielle de Filippov [Fil-88]). Le comportement résultant sur $\sigma(x,t)$ est appelé régime glissant.

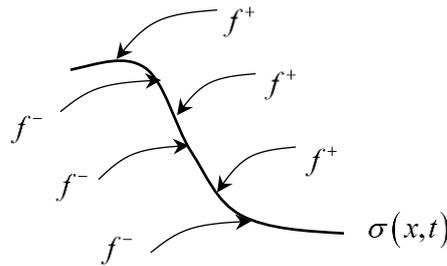


Figure 1.1. Attractivité de la surface de glissement $\sigma(x,t)$.

1.2.2. Synthèse de la surface de glissement

La dynamique du système non linéaire (1.1) (affine en l'entrée) peut être exprimée par la forme canonique suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_n = f(x) + g(x)u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1.4)$$

où $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T = [x \ \dot{x} \ \dots \ x^{(n-1)}]^T \in \mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état du système, avec \mathfrak{N} un ouvert de \mathbb{R}^n , u et y représentent respectivement l'entrée et la sortie du système (1.4). $f(x)$ et $g(x)$ ($g(x) \neq 0$) sont des fonctions non linéaires continues supposées suffisamment différentiables mais connues de façon incertaine. En prenant en considération les perturbations externes qui peuvent entacher le système ainsi que les incertitudes de modélisation, le système (1.4) peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}^n = f(x) + g(x)u + d \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1.5)$$

où d représente l'ensemble des perturbations externes et des incertitudes de modélisation.

On considère que l'objectif de la commande est de garantir la poursuite de trajectoire de la référence y_r par la sortie du système (1.5). Afin de synthétiser la surface de glissement, on redéfinit la variable de glissement $\sigma(x,t) : \mathfrak{N} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ comme une fonction suffisamment différentiable (telle que $\frac{\delta\sigma}{\delta x}$ soit non nulle sur \mathfrak{N}). L'ensemble :

$$S = \{x \in \mathfrak{N} : \sigma(x,t) = 0\} \quad (1.6)$$

représente alors une sous-variété de \mathfrak{N} de dimension $(n-1)$ dénommée contrainte de commutation ou surface de glissement.

Quand les trajectoires d'état du système (1.5) atteignent puis évoluent sur la surface de glissement (c'est-à-dire l'existence d'un régime glissant sur S), le système adopte alors un comportement dynamique de dimension inférieure à sa propre dimension (c'est-à-dire $(n-1)$). On constate que l'existence d'un régime glissant d'ordre 1 nécessite que la variable de glissement ait un degré relatif égal à 1 par rapport à la commande u [Utk-77], [Utk-92]. Le degré relatif d'un système désigne le nombre minimum de fois qu'il faut dériver la sortie par rapport au temps pour faire apparaître l'entrée de manière explicite [Isi-95].

Si on définit l'erreur de poursuite comme étant $e = y - y_r$, la variable de glissement est généralement conçue par un ensemble de combinaisons linéaires de l'erreur e , comme la surface définie par Slotine [Slo-91] :

$$\sigma(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right)^{(n-1)} e \quad (1.7)$$

Le choix du paramètre $\lambda > 0$, qui caractérise la pente de la surface de glissement, garantit d'avoir un polynôme d'Hurwitz, c'est-à-dire que le système réduit est stable et l'erreur de poursuite tend vers zéro asymptotiquement lorsque le régime glissant atteint $\sigma(x,t) = 0$.

1.2.3. Synthèse de la loi de commande

Rappelons que l'objectif de la commande est de forcer les trajectoires d'état du système à atteindre et à rester sur une surface de glissement prédéfinie malgré la présence des incertitudes et des perturbations. En d'autres termes, la loi de commande doit rendre la surface de glissement localement attractive comme susmentionné et illustré dans la section précédente (Figure 1.1). Ainsi, cette loi de commande doit être calculée en garantissant la condition d'attractivité qui permet d'assurer la stabilité de la dynamique désirée $\sigma(x,t) = 0$, c'est-à-dire l'existence d'un régime glissant idéal.

1.2.3.1. Existence d'un régime glissant

L'étude de l'existence du mode glissant, comme l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre, est basée sur la méthode de Lyapunov. Afin de garantir l'attractivité de la surface ($\sigma(x, t) = 0$) sur tout le domaine de fonctionnement, on considère la fonction de Lyapunov $V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2$ définie positive dont sa dérivée par rapport au temps le long des trajectoires du système en boucle fermée sera définie négative :

$$\dot{V} = \sigma\dot{\sigma} < 0 \quad (1.8)$$

Cette inégalité résume la condition d'attractivité.

Définition 1.1. [Utk-92] On dit qu'il existe un régime glissant idéal sur S s'il existe un temps fini t_s tel que la solution de (1.5) satisfait $\sigma(x, t) = 0$ pour tout $t \geq t_s$.

Il est important de noter que, pour une convergence en temps fini, la condition (1.8) qui ne garantit qu'une convergence asymptotique vers la surface de glissement est remplacée par une condition plus restrictive dite de η -attractivité [Per-02], [Utk-92].

$$\sigma\dot{\sigma} \leq -\eta|\sigma|, \quad \eta > 0 \quad (1.9)$$

En effet, sous cette condition, pour $\sigma \neq 0$ on a :

$$\begin{cases} \text{si } \sigma < 0 & \text{alors } \dot{\sigma} \geq +\eta > 0 \\ \text{si } \sigma > 0 & \text{alors } \dot{\sigma} \leq -\eta < 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Donc, si $\sigma(0) > 0$ (tant que $\sigma(t) > 0$) alors $\sigma(t) \leq \sigma(0) - \eta t$, et si $\sigma(0) < 0$ (tant que $\sigma(t) < 0$), alors $\sigma(t) \geq \sigma(0) + \eta t$. Ce qui confirme que la surface $\sigma(t)$ est attractive sous (1.9) et qu'elle atteint 0 dans un temps $t_s < |\sigma(0)|/\eta$. Comme il est indiqué précédemment, le choix d'une commande discontinue (1.2) permet de satisfaire la condition de η -attractivité (1.9), cette commande peut être décrite comme suit :

$$u = u_M \text{sign}(\sigma) \quad (1.11)$$

où l'amplitude de la commande u_M est généralement choisie suffisamment grand afin de compenser l'écart de dynamique entre le système réel et le système de référence, ainsi que les perturbations du système.

Lors de l'établissement d'un mode glissant, le comportement du système peut être décrit par deux phases :

- ✓ Phase d'approche ou de convergence: cette phase correspond à la période $t \in [0, t_s]$ pendant laquelle le système tend vers la surface de glissement S mais n'est pas sur elle. Durant cette phase, le système reste sensible aux variations paramétriques.

✓ Phase de glissement: cette phase correspond à $t \in [t_s, \infty]$, durant laquelle le système atteint puis évolue sur la surface de glissement S , où le comportement du système ne dépend plus du système d'origine ni des perturbations, mais il est entièrement caractérisé par le choix de la dynamique désirée (surface de glissement).

1.2.3.2. Glissement réel

Un tel régime glissant est qualifié d'idéal et il est notamment supposé que les organes de commande commutent à une fréquence infinie. Toutefois, ce n'est pas le cas en pratique étant données les imperfections de ces derniers et de ce fait, le régime glissant ne prend place que dans un proche voisinage de la surface considérée. Ce comportement est qualifié de régime glissant réel. Cette notion fait appel à la méthode classique de régularisation pour les modes glissants appelée la commande équivalente.

Cette commande équivalente est continue en fonction du temps et peut être obtenue par filtrage, elle peut avoir quelques applications telles que :

- i. Elle représente ce qu'on appelle injection de sortie équivalente (Equivalent Output Injection EOI) dans les observateurs par mode glissant
- ii. Elle permet d'assurer l'invariance de la surface de glissement, c'est-à-dire forcer le système à rester sur cette surface.
- iii. Une méthode utilisée pour réduire le chattering causé par les discontinuités appliquées à la commande.

Pour le système prédéfini (1.5), supposons que le comportement en mode glissant existe sur la surface de glissement $\sigma(x, t)$ et essayons de trouver la commande continue u_{eq} appelée commande équivalente telle que, à partir de la position initiale $\sigma(x(t_0), t_0)$, la dérivée du vecteur $\sigma(x, t)$ demeure nulle et elle est donnée par la condition d'invariance suivante :

$$\begin{cases} \sigma(x, t) = 0 \\ \dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} (f(x) + g(x)u_{eq}) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

En supposant que $\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \neq 0$ sur S , on dit alors que la commande équivalente est bien définie [Sir-88] :

$$u_{eq} = -\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x)\right)^{-1} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x)\right) \quad (1.13)$$

Pour résumer, pendant un régime glissant réel, la loi de commande par mode glissant consiste le plus souvent en deux parties : $u = u_{BF} + u_{HF}$, une partie basse fréquence u_{BF} , qui s'avère être la commande équivalente ($u_{BF} = u_{eq}$) et une composante haute fréquence u_{HF} , qui

garantit la convergence en temps fini vers la surface de glissement [Utk-92]. Globalement le système réagit comme s'il est commandé par la commande u_{BF} , autrement dit le régime sur S n'est affecté seulement par u_{BF} .

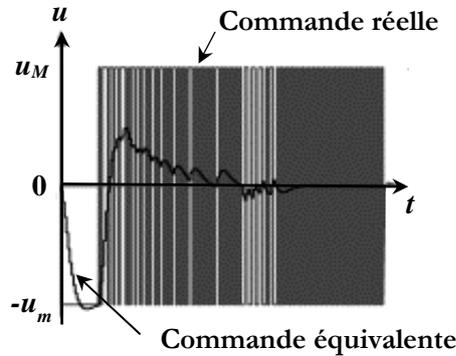


Figure 1.2. Commande par mode glissant ($u = u_{BF} + u_{HF}$).

Il est à noter que la commande u_{eq} décrit un mouvement idéal de glissement, c'est-à-dire sans la prise en considération des incertitudes et des perturbations du système. Physiquement, elle représente la valeur moyenne de la commande réelle u comme montre la figure 1.2.

1.2.4. Phénomène de broutement (chattering)

Comme il est indiqué, un mode glissant idéal correspond à une commande qui commute à une fréquence infinie, or il n'existe aucun organe de commande pouvant réaliser cette opération. Pratiquement, seule une commutation à une fréquence finie est possible, ce qui cause un retard entre la mesure de la sortie et le calcul de la commande. Ainsi, pendant un régime glissant réel, la discontinuité de la commande engendre un comportement dynamique particulier (des oscillations de haute fréquence) au voisinage de la surface de glissement qui est communément appelé chattering ou broutement.

Le phénomène de chattering peut être si pénalisant que l'utilisation d'une loi de commande par mode glissant peut être proscrite dans certaines applications, vu que son utilisation peut détériorer les performances, voire conduire à l'instabilité à cause du chattering sur la sortie. Le chattering de la commande peut entraîner une usure prématurée des actionneurs ou de certaines parties du système à cause de fortes sollicitations. En excitant les modes propres des dynamiques non modélisées ou des fréquences de résonance du système correspondant aux retards de commutation. Cette commande peut provoquer sur les systèmes mécaniques un bruit de haute fréquence et des oscillations préjudiciables à leur structure. Sur des systèmes autres que mécaniques, les oscillations engendrées peuvent poser d'autres problèmes (réduction de précision, créations d'ondes électromagnétiques néfastes ou autres ondes amplifiées par le système, ...).

De nombreuses études ont été effectuées afin de réduire ou d'éliminer le phénomène de broutement. Parmi ces études les plus utilisées, on cite :

✓ La couche limite (boundary layer), elle consiste à effectuer des approximations continues de type grand gain de la fonction signe de la commande au voisinage de la surface S et faire saturer la fonction en dehors [Slo-91], [Utk-92]. Le système n'évoluant plus sur S mais dans un voisinage de celle-ci. Cependant, cette méthode engendre un compromis entre la réduction de chattering et la conservation de robustesse.

✓ Observateur, l'idée de cette méthode consiste à générer un régime glissant presque idéal dans une boucle d'observation, ne contenant aucune dynamique non modélisée, au lieu de celle contenant le système réel [Bon-85]. Cette méthode limite la robustesse, car l'observateur ne peut prendre en compte les perturbations non modélisées que lentement.

✓ L'augmentation de l'ordre du système par l'introduction d'une nouvelle variable d'état représente la commande réelle. La nouvelle commande discontinue est alors \dot{u} . Cela permet d'atténuer efficacement le chattering. En revanche seulement les perturbations Lipschitz peuvent être compensées par cette commande (contrairement aux perturbations discontinues). En plus la nécessité d'une dérivée supplémentaire de la sortie peut causer des problèmes d'observation.

1.3. Mode glissant d'ordre supérieur : concepts de base

Comme nous venons de l'exposer, le phénomène de broutement est le principal frein à l'utilisation généralisée des modes glissants dans des applications industrielles. Toutefois, les travaux des chercheurs russes (comme Emelyanov et Levantovsky [Eml-86], [Lev-85]) sur de nouvelles façons de glissement permettent d'envisager de réduire ce phénomène indésirable, tout en préservant les propriétés de convergence en temps fini, d'invariance de la surface et de rejet d'une certaine classe de perturbations.

Cette nouvelle solution est basée sur la théorie des modes glissants d'ordre supérieur qui n'est autre qu'une extension des modes glissants d'ordre un ou classique. Cette théorie conduit à des lois de commande toujours relativement simples permettant la convergence non seulement de la variable de glissement à 0 en temps fini, mais aussi de ses dérivées supérieures.

1.3.1. Généralités

Dans cette partie, nous considérons le même système non linéaire (1.1) défini dans la section précédente avec la variable de glissement de degré relatif r (par rapport à la commande) : $\sigma(x,t) : \mathcal{N} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ étant toujours une fonction à valeur réelle suffisamment différentiable telle que ses $(r-1)$ premières dérivées par rapport au temps ne sont que des fonctions de l'état x (ce qui signifie qu'elles ne contiennent aucune discontinuité).

Dans ce cas, l'objectif est transféré à la stabilisation en temps fini de l'équation différentielle incertaine, ou par équivalence, de l'inclusion différentielle suivante :

$$\sigma^{(r)} \in [-C, C] + [K_m, K_M]u \quad (1.14)$$

où C , K_m et K_M sont des constantes connues, paramétrant les incertitudes du système original. Il est à noter que, le système (1.1) englobe ceux de la forme prédéfinie (1.5) qui admet des solutions au sens de Filippov sur la variété glissante d'ordre r définie par $(\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0)$. Si $r \leq 2$, une commande par mode glissant d'ordre 1 ou d'ordre 2 est capable d'atteindre l'objectif de la commande, dans le cas où $r > 2$, des structures de commandes par mode glissant d'ordre supérieur ont été proposées permettant l'existence d'un mode glissant d'ordre r .

1.3.2. Ordre de glissement, degré relatif et précision

Considérons S_r l'ensemble de glissement d'ordre $r \geq 1$ ($r \in \mathbb{N}$) par rapport à la variable de glissement $\sigma(x, t)$ définie par :

$$S_r = \{x \in \mathfrak{X} \mid \sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0\} \quad (1.15)$$

Définition 1.2. [Lev-93] Soit S_r l'ensemble de glissement d'ordre r non vide. Supposons qu'il définit un ensemble intégral au sens de Filippov [Fil-88]. Alors la dynamique satisfaisante (1.15) est appelée mode glissant d'ordre r par rapport à la fonction contrainte σ .

Définition 1.3. [Lev-93] On dit que la loi de commande u pour le système (1.1) est un algorithme glissant idéal d'ordre r par rapport à S_r , si elle génère un régime glissant d'ordre r sur S_r ($\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$), où les trajectoires d'état du système atteignent l'ensemble S_r (dite souvent surface de glissement d'ordre r) au bout d'un temps fini et y restent à partir de ce temps.

Il est à noter que l'ordre de glissement r désigne le degré de différentiation de la variable de glissement σ au voisinage de la surface S . Définissons la fonction contrainte $y = \sigma(x, t)$ comme une sortie du système (1.1), et rappelons que, le degré relatif d'un système est le nombre minimum de fois qu'il faut dériver la sortie par rapport au temps, pour y voir apparaître l'entrée de manière explicite.

Théorème 1.1. [Sir-88] Un régime glissant d'ordre un existe sur la surface S si et seulement si le système (1.1) est de degré relatif égal à 1 par rapport à la fonction contrainte $\sigma(x, t)$.

D'après le théorème précédent, si le système est de degré relatif r tel que $r > 1$, il n'existe pas un régime glissant d'ordre un sur la surface S . Une alternative est basée sur l'utilisation de la sortie auxiliaire $\bar{\sigma}$ définie comme une combinaison linéaire Hurwitz de la sortie réelle du

système $\sigma(x,t)$ et ses $(r-1)$ premières dérivées. Dans ce cas, un régime glissant classique est obtenu premièrement sur la surface auxiliaire $\bar{\sigma}=0$, et le second est d'ordre r par rapport à la surface S où la dynamique résultante est asymptotiquement stable (n'est pas en temps fini, c'est-à-dire l'ensemble $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$ se stabilise asymptotiquement).

Ceci montre que pour un système de degré relatif strictement supérieur à un, il n'est pas possible d'atteindre une convergence en temps fini sur S par un mode glissant classique. L'utilisation d'une commande par mode glissant d'ordre supérieur s'avère alors nécessaire. En effet, si le système est de degré relatif r par rapport à $\sigma(x,t)$, un algorithme par mode glissant d'ordre r permettra d'obtenir une convergence en temps fini sur S .

Comme il est indiqué précédemment, une commande réelle discontinue engendre toujours le phénomène de chattering, donc le régime glissant ne prend place que dans un proche voisinage de la surface de glissement. Ce comportement est qualifié de régime glissant réel. Une étude qualitative de la précision peut être faite en s'intéressant à la variation de l'erreur $\gamma(\epsilon)$ en fonction de la variation des imperfections ϵ à l'origine du chattering pour de petites perturbations. ϵ est classiquement soit un retard (ou dynamique négligée) soit une imprécision sur la connaissance de l'état du système.

Définition 1.4. Soit $\gamma(\epsilon)$ une fonction à valeur réelle telle que $\gamma(\epsilon) \rightarrow 0$ quand $\epsilon \rightarrow 0$. Un algorithme de commande par mode glissant réel (conduisant à un régime glissant réel) sur la contrainte $\sigma=0$ est dit d'ordre r ($r > 0$) par rapport à $\gamma(\epsilon)$, si pour tout ensemble local de conditions initiales il existe un temps t_1 (l'instant où $\sigma=0$) et une constante C telle que $\forall t > t_1$, l'inégalité suivante soit satisfaite en temps fini :

$$|\sigma| \leq C |\gamma(\epsilon)|^r \quad (1.16)$$

Considérons un majorant τ du retard $t_2 - t_1$ (t_2 l'instant où la variable de glissement σ atteint son maximum) et supposons qu'un majorant de l'erreur $\tau(\epsilon)$ tel que $\tau(\epsilon) \rightarrow 0$ quand $\epsilon \rightarrow 0$. Un algorithme, dépendant d'un pas variable majoré par τ , générant un régime glissant réel d'ordre r sur S est un algorithme d'ordre r par rapport à τ .

Théorème 1.2. [Lev-93] Supposons que la $r^{\text{ème}}$ dérivée par rapport au temps de σ soit bornée sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$. Alors il existe r constantes C_0, \dots, C_{r-1} telles que, $|\sigma| \leq C_0 \tau^r$, $|\dot{\sigma}| \leq C_1 \tau^{r-1}$, ..., $|\sigma^{(r-1)}| \leq C_{r-1} \tau$.

Il en résulte qu'un algorithme d'ordre r permettra d'obtenir la précision de convergence suivante :

$$|\sigma| = \mathcal{O}(\tau^r), |\dot{\sigma}| = \mathcal{O}(\tau^{r-1}), \dots, |\sigma^{(r-1)}| = \mathcal{O}(\tau) \quad (1.17)$$

1.3.3. Homogénéité et stabilité en temps fini

La plupart des commandes utilisant le concept des modes glissants d'ordre supérieur se basent sur la notion d'homogénéité. Cette propriété facilite la synthèse d'une loi de commande par mode glissant d'ordre supérieur et elle joue un rôle primordial dans les preuves de la stabilité et de la convergence en temps fini associés.

Définition 1.5. [Lev-05a] Soit une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (un champ de vecteurs $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ou un champ d'un ensemble de vecteurs $F(x) \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$) est homogène de degré $q \in \mathbb{R}$ par la dilatation $d_\kappa(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\kappa^{m_1} x_1, \dots, \kappa^{m_n} x_n)$ avec des poids $m_i > 0, (i = 1:n)$ si et seulement si pour n'importe $\kappa > 0$, l'identité $f(x) = \kappa^{-q} f(d_\kappa x)$ est satisfaite ($F(x) = \kappa^{-q} d_\kappa^{-1} F(d_\kappa x)$ ou $f(x) = \kappa^{-q} d_\kappa^{-1} f(d_\kappa x)$). Tout degré d'homogénéité non nul $q \neq 0$ d'un champ de vecteurs peut se ramener à $\text{sign}(q)$ (soit ± 1) avec un changement approprié qui est proportionnel aux poids m_1, \dots, m_n .

Il est à noter que l'homogénéité d'un champ de vecteurs $f(x)$ (ou un ensemble $F(x)$) se définit de manière équivalente comme l'invariance de l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$ (respectivement de l'inclusion différentielle $\dot{x} \in F(x)$) par rapport à la transformation $G_\kappa : (t, x) \rightarrow (\kappa^p t, d_\kappa x), p = -q$.

À base de la théorie des MGs d'ordre supérieur, un système linéaire à temps invariant LTI

(sous forme d'une chaîne d'intégrateurs purs : $\dot{x} = Ax$ tel que, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$) est

homogène de degré -1 avec les poids $m_i = n + 1 - i$. En effet, si $u(x)$ une commande de la forme $\text{sign}(f(x))$ avec $f(x)$ une fonction homogène ayant les mêmes poids m_i est appliquée ($\dot{x} = Ax + u(x)$), le système bouclé est homogène et possède toutes les propriétés d'homogénéité suivantes :

1°. Une inclusion différentielle homogène $\dot{x} \in F(x)$ (ou l'équation $\dot{x} = f(x)$) est dite uniformément globalement stable en temps fini à l'origine 0, si elle est stable au sens de Lyapunov et pour tout $R > 0$ il existe un temps fini $T > 0$, telle que toute trajectoire partant du domaine $\|x\| < R$ se stabilise à zéro en un temps T .

2°. Une inclusion différentielle homogène $\dot{x} \in F(x)$ (ou l'équation $\dot{x} = f(x)$) est dite uniformément globalement asymptotiquement stable à l'origine 0, si elle est stable au sens de Lyapunov et pour tous $R > 0, \varepsilon > 0$ il existe $T > 0$, telle que toute trajectoire partant du domaine $\|x\| < R$ entre en un temps T et y rester pour toujours dans un voisinage $\|x\| < \varepsilon$.

3°. Une inclusion différentielle homogène $\dot{x} \in F(x)$ (ou l'équation $\dot{x} = f(x)$) est dite contractive si, à partir d'un état initial compris dans un domaine « homogène » D_1 , l'état du système atteint un domaine D_2 strictement inclus dans D_1 en un temps fini T (Figure 1.3). la définition suivante exprime plus précisément la propriété du contractivité:

Définition 1.6. [Lev-05a] Une inclusion différentielle homogène est dite contractive si et seulement si il existe deux compacts D_1, D_2 et un temps $T > 0$ tels que :

- ✓ $d\kappa D_1 \in D_1$ pour $\kappa < 1$,
- ✓ D_2 appartient à l'intérieur de D_1 et contienne l'origine,
- ✓ Toutes les trajectoires partant de D_1 soient comprises dans D_2 au temps T .

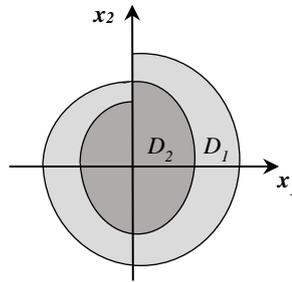


Figure 1.3. Exemple de D_1 et D_2 (étude de la contractivité).

Théorème 1.3. [Lev-05a] Pour un système homogène de degré d'homogénéité négatif ($-p$), les propriétés susmentionnées sont équivalentes (évidemment, 1° et 2° impliquent 3°, et 1° implique 2°, alors 3° implique 1°), autrement dit:

$$\text{Stabilité en temps fini} \leftrightarrow \text{Stabilité asymptotique} \leftrightarrow \text{Contractivité},$$

et dépendant de l'état initial, le temps maximal de stabilisation est une fonction continue homogène de degré p . En outre, la robustesse vis-à-vis des perturbations (provoquant de petits changements sur l'inclusion différentielle $\dot{x} \in F(x)$) est un corollaire de la contractivité, d'après la troisième propriété (3°).

Théorème 1.4. [Lev-05a] Si un système homogène de degré négatif $-p < 0$ et de poids d'homogénéité m_1, \dots, m_n est soumis à une perturbation homogène ou bien un bruit de mesure (ayant un majorant homogène) : $\dot{x} \in F(x_1 + [-1, 1]\epsilon^{m_1}, \dots, x_n + [-1, 1]\epsilon^{m_n})$, $\epsilon > 0$, il convergera en temps fini vers un ensemble homogène de mêmes poids et contenant l'origine, tel que $|x_i| \leq \gamma_i \epsilon^{m_i}$, avec γ_i des constantes positives.

Remarque 1.1. Il est à noter que, pour avoir une convergence en temps fini, le degré d'homogénéité doit être négatif. En effet, si le système est asymptotiquement stable, un degré

d'homogénéité nul conduit à une convergence exponentielle, et un degré positif conduit à une convergence également asymptotique [Bac-01].

Dans un mode glissant homogène, afin d'assurer l'existence d'un régime glissant d'ordre r sur S_r (c'est-à-dire (1.15) soit atteint), en prenant la commande homogène par mode glissant d'ordre r suivante pour l'inclusion différentielle (1.14) :

$$u = \phi(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}) \quad (1.18)$$

En mettant le degré d'homogénéité de l'inclusion du système à -1, permettant d'atteindre les poids d'homogénéité $(1, r, r-1, \dots, 1)$ pour $(t, \sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)})$ respectivement. L'inclusion en boucle fermée est appelée un glissement d'ordre r homogène si pour tout $\kappa > 0$ la transformation $G_\kappa : (t, \sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}) \mapsto (\kappa t, \kappa \sigma^r, \kappa^{(r-1)} \dot{\sigma}, \dots, \kappa \sigma^{(r-1)})$ préserve l'inclusion en boucle fermée (1.18) avec (1.14), et par conséquent $\phi(\kappa \sigma^r, \kappa^{(r-1)} \dot{\sigma}, \dots, \kappa \sigma^{(r-1)}) \equiv \phi(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)})$ pour tout $(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)})$ et $\kappa > 0$.

Remarque 1.2. Il est à noter que la majorité des contrôleurs par MG d'ordre r connue ($r \geq 2$) sont homogènes (glissement d'ordre r). Une seule exception importante concerne le mode glissant terminal du second ordre (ce qui permet d'assurer un régime glissant classique). Ce dernier est caractérisé par l'hypersurface : $\dot{\sigma} + \beta \sigma^\rho \equiv 0$, tel que $\rho = (2k+1)/(2m+1)$, $\beta > 0$, $k < m$ et $k, m \in \mathbb{R}$ [Man-94]. En effet, l'homogénéité nécessite que $\rho = 1/2$ et $\sigma \geq 0$.

1.4. Différentiateurs par mode glissant

Comme il est connu, une telle commande par retour de sortie (en utilisant essentiellement une approche basée sur l'état) dépend non seulement de la commande, mais aussi de l'observateur. À la base de la théorie des MGs d'ordre supérieur et la propriété d'homogénéité, un observateur classique par MG n'est rien d'autre qu'un dérivateur ou différentiateur.

Tout contrôleur homogène par mode glissant d'ordre r peut être complété par un différentiateur d'ordre $(r-1)$ afin de concevoir une commande par retour de sortie. Préservant l'exactitude démontrée, la stabilité en temps fini et les propriétés asymptotiques associées, la méthode typique consiste à calculer $\dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$ en temps réel par l'utilisation d'un différentiateur homogène robuste, exact et à convergence en temps fini [Lev-98], [Lev-03]. L'application du différentiateur est possible dû à la limitation de $\sigma^{(r)}$ assurée par la limitation de la fonction de retour ϕ dans (1.18).

Théorème 1.5. [Lev-05a] Soit un signal $f(t)$, $t \in [0, \infty)$ à dériver i fois ($i < n$) dont la $(n-1)$ dérivée est bornée par une constante (de Lipschitz) connue $L > 0$. Si ce signal est corrompu par un bruit de mesure d'amplitude inférieure à ϵ , alors :

- ✓ Aucun dérivateur exact d'ordre $i < n$, ne peut avoir une précision meilleure que $L^{i/n} \epsilon^{(n-i)/n}$.
- ✓ Il existe un dérivateur de précision asymptotique $\mathcal{O}\left(L^{i/n} \epsilon^{(n-i)/n}\right)$, pour la $i^{\text{ème}}$ dérivée ($i < n$). Autrement dit, si $\hat{f}^{(i)}$ est l'estimée de la $i^{\text{ème}}$ dérivée de $f(t)$, il existe des constantes $\gamma_i \geq 1$ telles que $|\hat{f}^{(i)} - f^{(i)}| \leq \gamma_i L^{i/n} \epsilon^{(n-i)/n}$.

Il est à noter que l'erreur d'estimation de la dérivée est homogène avec des poids de mode glissant d'ordre n par rapport à $\sqrt[n]{\epsilon}$. En effet, elle est de la forme $\left[\alpha_0 \left(\sqrt[n]{\epsilon}\right)^n \dots \alpha_{n-1} \left(\sqrt[n]{\epsilon}\right)^1\right]^T$ avec $\alpha_i = \gamma_i L^{i/n}$.

1.4.1. Dérivateur robuste et exact d'ordre arbitraire

On considère le signal $f(t)$, $t \in [0, \infty)$, d'après la théorie proposée par Levant [Lev-03], un dérivateur ayant la précision asymptotique optimale permet d'estimer les dérivées d'ordre 1 à $n-1$ de $f(t)$ en supposant que sa dérivée d'ordre n a une constante de Lipschitz connue $L > 0$. Avec un choix approprié des coefficients λ_i ($i = 0, \dots, n$) tels que $1 < \lambda_0 < \dots < \lambda_n$, le dérivateur d'ordre n de Levant prend la forme récursive suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = v_0, & v_0 = -\lambda_0 (L)^{1/(n+1)} |z_0 - f(t)|^{n/(n+1)} \text{sign}(z_0 - f(t)) + z_1 \\ \dot{z}_1 = v_1, & v_1 = -\lambda_1 (L)^{1/n} |z_1 - v_0|^{(n-1)/n} \text{sign}(z_1 - v_0) + z_2 \\ \dots \\ \dot{z}_i = v_i, & v_i = -\lambda_i (L)^{1/(n+1-i)} |z_i - v_{i-1}|^{(n-i)/(n+1-i)} \text{sign}(z_i - v_{i-1}) + z_{i+1} \\ \dots \\ \dot{z}_{n-1} = v_{n-1}, & v_{n-1} = -\lambda_{n-1} (L)^{1/2} |z_{n-1} - v_{n-2}|^{1/2} \text{sign}(z_{n-1} - v_{n-2}) + z_n \\ \dot{z}_n = -\lambda_n L \text{sign}(z_n - v_{n-1}) \end{cases} \quad (1.19)$$

Afin d'estimer $f, \dot{f}, \ddot{f}, \dots, f^{(n-1)}$, une séquence infinie de coefficients λ_i ($i = 0, \dots, n$) a été proposée par [Lev-03] et [Fri-07]. Généralement, plus les valeurs de λ_i sont élevées (dans l'ordre donné), plus la convergence est rapide, en revanche le chattering est plus important et la précision est détériorée par conséquent. En particulier, les deux séquences les plus connues sont $\lambda_n = 1.1, \lambda_{n-1} = 1.5, \lambda_{n-2} = 2, \lambda_{n-3} = 3, \lambda_{n-4} = 5$ et $\lambda_{n-5} = 8$ [Lev-03]. Un autre choix possible pour ces paramètres est $\lambda_n = 1.1, \lambda_{n-1} = 1.5, \lambda_{n-2} = 3, \lambda_{n-3} = 5, \lambda_{n-4} = 8$ et $\lambda_{n-5} = 12$ [Fri-07].

Une fois que les coefficients du dérivateur étant correctement choisis, après la convergence de dérivateur en temps fini, les égalités suivantes sont satisfaites en l'absence de bruits de mesure (pour quelques constantes positives μ_i, ν_i et un pas d'échantillonnage τ) :

$$z_0 = f(t); \quad z_i = v_{i-1} = f^{(i)}(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.20)$$

$$\begin{cases} |z_i - f^{(i)}(t)| \leq \mu_i \tau^{n-i+1}, & i = 0, \dots, n \\ |v_i - f^{(i+1)}(t)| \leq \nu_i \tau^{n-i}, & i = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$

Théorème 1.6. [Lev-03] Dans le cas d'absence de bruit de mesure ou de discrétisation temporelle, le dérivateur (1.20) est exact et converge en temps fini. En présence de bruit de mesure d'amplitude inférieure à ϵ (ou d'un retard inférieur à $\sqrt[n]{\epsilon}$), sa précision asymptotique est optimale : $\mathcal{O}\left(L^{i/n} \epsilon^{(n-i)/n}\right)$, $i = 1, \dots, n$, qui peut être écrite par les inégalités suivantes:

$$\begin{cases} |z_i - f^{(i)}(t)| \leq \mu_i \epsilon^{(n-i)/(n+1)}, & i = 0, \dots, n \\ |v_i - f^{(i+1)}(t)| \leq \nu_i \epsilon^{(n-i)/(n+1)}, & i = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$

Basée sur (1.20), un dérivateur de premier ordre est donné par :

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = v, \quad v = -\lambda_0 (L)^{1/2} |z_0 - f(t)|^{1/2} \text{sign}(z_0 - f(t)) + z_1 \\ \dot{z}_1 = -\lambda_1 L \text{sign}(z_1 - v) \end{cases} \quad (1.21)$$

Dépendant seulement de $z_0 - f(t)$ et des coefficients κ_i qui sont calculés à partir des coefficients de l'algorithme récursive. Le dérivateur (1.20) peut être réécrit sous la forme non récursive suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = v_0, \quad v_0 = -\kappa'_0 |z_0 - f(t)|^{n/(n+1)} \text{sign}(z_0 - f(t)) + z_1 \\ \dot{z}_1 = v_1, \quad v_1 = -\kappa'_1 |z_0 - f(t)|^{(n-1)/n} \text{sign}(z_0 - f(t)) + z_2 \\ \dots \\ \dot{z}_{n-1} = v_{n-1}, \quad v_{n-1} = -\kappa'_{n-1} |z_0 - f(t)|^{1/2} \text{sign}(z_0 - f(t)) + z_n \\ \dot{z}_n = -\kappa'_n \text{sign}(z_0 - f(t)) \end{cases} \quad (1.22)$$

Afin d'estimer les dérivées d'ordre 1 à $n-1$ ($\dot{f}, \ddot{f}, \dots, f^{(n-1)}$) avec les coefficients κ'_i ($i = 1, \dots, n$), l'algorithme équivalent à (1.22) est donné par :

$$\forall i \in [1, n-1], \quad \dot{z}_i = -\kappa_i (L)^{i/n} |z_1 - f(t)|^{(n-i)/n} \text{sign}(z_1 - f(t)) + z_{i+1} \quad (1.23)$$

$$\text{Pour } i = n, \quad \dot{z}_n = -\kappa_n L \text{sign}(z_1 - f(t))$$

avec $\kappa_i = \lambda_i \lambda_{i-1}^{\frac{n-i}{n-1}} \lambda_{i-2}^{\frac{n-i}{n-2}} \dots \lambda_2^{\frac{n-i}{2}} \lambda_1^{\frac{n-i}{n-1}}$, pour les deux jeux de coefficients mentionnés [Lev-03] et [Fri-07], les valeurs correspondantes de κ_i sont calculées dans [Bre-10].

Il est intéressant de noter qu'un dérivateur peut être également utilisé dans un système comme un observateur d'état en remplaçant le signal $f(t)$ par l'état de système. Dans le cas d'existence d'une imprécision dans la connaissance de l'état du système, l'état mesuré du véritable état x est de la forme $x + \epsilon$, tel que ϵ représente l'erreur de mesure ou d'observation

(le bruit de mesure). À l'aide d'un dérivateur (tenant compte de la dynamique de système) l'état observé ayant une précision asymptotique optimale suivante :

$$\left[\mathcal{O}(\epsilon) \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}) \dots \mathcal{O}(\epsilon^{(n-1)/n}) \mathcal{O}(\epsilon^{1/n}) \right]^T \quad (1.24)$$

Dans le cas d'un mode glissant classique, pour une surface de glissement typiquement linéaire $\sigma(x,t) = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{n-1} x_{n-1} + x_n$, un majorant de l'erreur sur $\sigma(x,t)$ est donc : $\beta_1 \mathcal{O}(\epsilon) + \dots + \beta_{n-1} \mathcal{O}(\epsilon^{1/(n-1)}) + \mathcal{O}(\epsilon^{1/n}) = \mathcal{O}(\epsilon^{1/n})$. Quand un dérivateur asymptotique optimal est utilisé pour l'estimation de l'état, un mode glissant classique ne permet donc de garantir qu'un mode glissant réel d'ordre 1. Afin d'assurer une précision asymptotique d'un MG réel d'ordre r , une alternative consiste en l'utilisation d'une loi de commande homogène ayant des poids d'homogénéité d'un MG d'ordre r complété par un dérivateur de Levant (1.20) homogène.

Deux notions distinctes dans un MG d'ordre supérieur sont introduites : un MG idéal d'ordre r lié à la convergence exacte en temps fini d'un régime glissant d'ordre r ($\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$) dans le cas idéal (sans retard ou erreur d'estimation, mais en incluant les éventuelles perturbations coïncidentes). La notion d'un MG réel d'ordre r correspondant à la précision asymptotique obtenue quand l'effet de retard et l'erreur d'estimation sont pris en considération.

1.4.2. Commande par retour de sortie en mode glissant d'ordre r

Un dérivateur par mode glissant d'ordre arbitraire peut estimer d'une manière précise les dérivées d'ordre arbitraire d'un signal donné. Considérons un dérivateur d'ordre $r-1$ exact et robuste de la forme récursive (1.20) pour estimer $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$ afin de synthétiser la commande (1.18). Le mode glissant d'ordre r devient alors :

$$\begin{cases} u = \phi(z_0, z_1, \dots, z_{r-1}) \\ \dot{z}_0 = v_0, & v_0 = z_1 - \lambda_{0,0} (L)^{1/r} |z_0 - \sigma|^{r-1/r} \text{sign}(z_0 - \sigma) \\ \dot{z}_1 = v_1, & v_1 = z_2 - \lambda_{0,1} (L)^{1/r-1} |z_1 - v_0|^{r-2/r-1} \text{sign}(z_1 - v_0) \\ \dots \\ \dot{z}_{r-2} = v_{r-2}, & v_{r-2} = z_{r-1} - \lambda_{0,r-2} (L)^{1/2} |z_{r-2} - v_{r-3}|^{1/2} \text{sign}(z_{r-2} - v_{r-3}) \\ \dot{z}_{r-1} = -\lambda_{0,r-1} L \text{sign}(v_{r-1} - v_{r-2}) \end{cases} \quad (1.25)$$

où z_i est l'estimée de la dérivée réelle $\sigma^{(i)}(t)$. Les coefficients du dérivateur ($\lambda_i = \lambda_{0,i} L^{1/r-i}$) sont convenablement choisis selon [Lev-03] ou [Fri-07], L est une constante positive telle que $|\sigma|^r \leq L$ et $L \geq C + \sup|\phi| K_M$.

Théorème 1.7. [Lev-03] Supposons que la loi de commande par mode glissant d'ordre r (1.18) est homogène et stable en temps fini, les paramètres du dérivateur dans (1.25) sont

adéquatement choisis (prenant en compte la borne supérieure de $|\phi|$). Dans le cas d'absence de bruit de mesure, le contrôleur (1.25) permet d'assurer une convergence en temps fini de toutes les trajectoires du système vers le mode de glissement d'ordre r ($\sigma = 0$). Autrement, supposant que σ être mesuré avec un bruit de mesure Lebesgue d'amplitude inférieur à ϵ , la convergence de l'ensemble de glissement est définie par les inégalités suivantes $|\sigma^{(i)}| \leq \gamma_i \epsilon^{(r-i)/r}$, $i = 0, \dots, r-1$ sont établies en temps fini pour certaines constantes positives γ_i .

Remarque 1.3. Sous les conditions du théorème 1.7, dans le cas de discrétisation de mesures avec un pas d'échantillonnage constant $\tau > 0$, et en l'absence de bruits de mesure, le contrôleur (1.25) permet d'assurer un régime glissant réel d'ordre r telles que les inégalités $|\sigma^{(i)}| \leq \gamma_i \tau^{(r-i)}$, $i = 0, \dots, r-1$ sont satisfaites en temps fini pour $\gamma_i > 0$.

1.4.3. Exemple de simulation

Afin de tester le dérivateur par MG d'ordre arbitraire, considérons le signal de base : $f(t) = 0.5 \sin(0.5t) + 0.5 \cos(t)$. Un dérivateur d'ordre 5 ($n=5$) de la forme récursive (1.19) a été utilisé pour approximer les dérivées supérieur de $f(t)$ avec les paramètres $\lambda_5=1.1$, $\lambda_4=1.5$, $\lambda_3=3$, $\lambda_2=5$, $\lambda_1=8$, $\lambda_0=12$ et $L=1$. Il est à noter qu'il faudrait réaliser un compromis entre les paramètres du dérivateur, sa convergence et sa sensibilité aux bruits. En effet, plus les paramètres du dérivateur sont importants, plus la convergence est rapide et plus la sensibilité au bruit de mesure et au pas d'échantillonnage est élevée.

En considérant qu'un pas d'échantillonnage de $\tau = 10^{-4}$ et en l'absence de bruit de mesure, le dérivateur converge en temps fini avec les précisions d'estimation : 10×10^{-16} , 4×10^{-12} , 0.5×10^{-8} , 4×10^{-6} , 7×10^{-4} et 0.04 pour $f, \dot{f}, \ddot{f}, \overset{\cdot\cdot\cdot}{f}, f^{(4)}$ et $f^{(5)}$ respectivement (Figure 1.4).

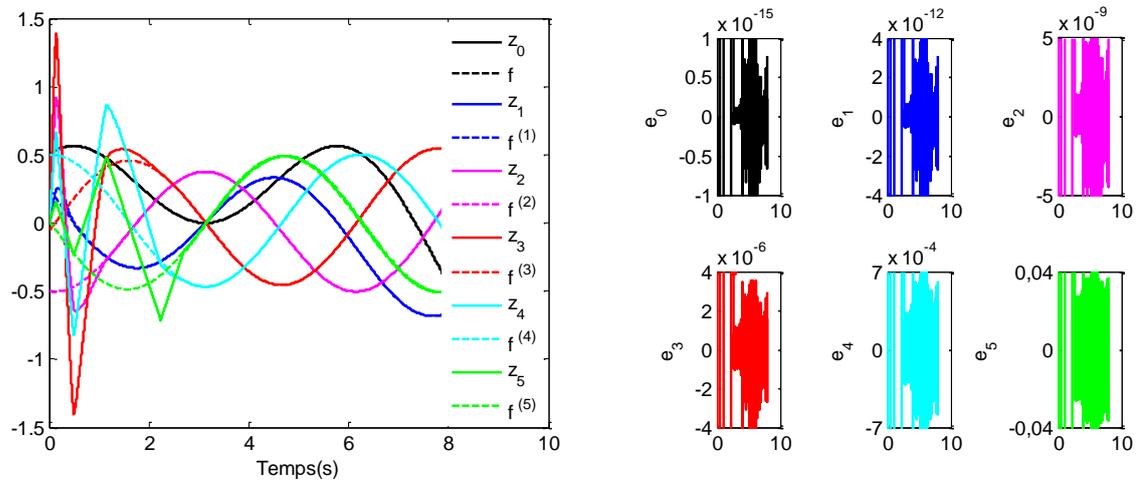


Figure 1.4. Convergence d'un dérivateur du MG d'ordre 5.

Comme il est indiqué, le problème du dérivateur réside dans sa sensibilité au bruit de mesure. Les résultats de simulation présentés sur la figure 1.5 ont été obtenus par l'application d'un bruit blanc Gaussien avec un écart-type de 10^{-3} (standard deviation $std = 10^{-3}$) au signal de base mesuré $f(t)$. Les précisions d'estimation atteintes sont : $|z_0 - f(t)| \leq 2 \times 10^{-3}$, $|v_0 - \dot{f}| \leq 5 \times 10^{-3}$, $|v_1 - \ddot{f}| \leq 0.06$, $|v_2 - \ddot{f}| \leq 0.4$, $|v_3 - f^{(4)}| \leq 0.7$ et $|v_4 - f^{(5)}| \leq 0.7$. La précision est liée essentiellement à l'amplitude maximale du bruit de mesure et elle est considérée comme la meilleure précision qui peut être réalisée par le dérivateur du mode glissant d'ordre arbitraire (Théorème 1.6).

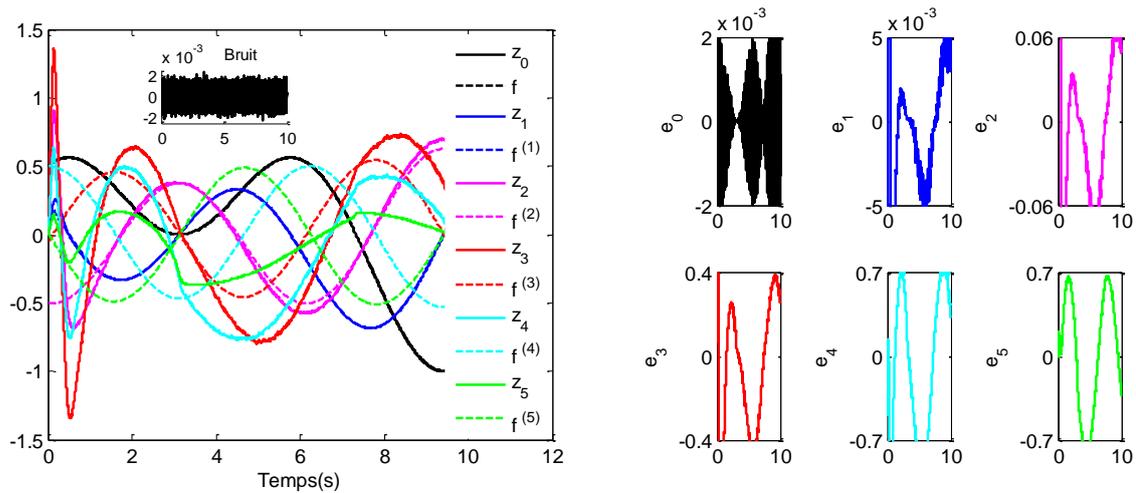


Figure 1.5. Convergence d'un dérivateur du MG d'ordre 5 en présence d'un bruit.

1.5. Commande par mode glissant d'ordre 2

Lors de la nécessité d'avoir des informations même restreintes sur la variable de glissement pour la synthèse des commandes par mode glissant du second ordre, différents algorithmes du MG-2 ont été utilisés pour résoudre les problèmes du contrôle robuste. Ces algorithmes ne sont qu'un type particulier des MGs d'ordre supérieur permettent de générer un régime glissant du second ordre en temps fini sur une surface de glissement choisie σ ($\sigma = \dot{\sigma} = 0$).

En fait, par l'utilisation d'un observateur (afin d'estimer $\dot{\sigma}$), une autre technique qui permet d'atteindre cet objectif (c'est-à-dire $\sigma = \dot{\sigma} = 0$) consiste à définir une fonction contrainte $\sigma_\sigma = \dot{\sigma} + k\sigma^{p/q}$, ($p/q \leq 1$) de telle façon qu'elle soit attractive ($\sigma_\sigma = 0$) par le choix d'une commande discontinue sur $\sigma_\sigma = 0$. La satisfaction de la condition d'attractivité $\sigma_\sigma \dot{\sigma}_\sigma < -k_\sigma |\sigma_\sigma|$, $k_\sigma > 0$ mène à la stabilisation d'un régime glissant réel $\sigma = \dot{\sigma} \equiv 0$ asymptotiquement si $p/q = 1$ (un glissement classique), et en temps fini si $(p/q) < 1$ (le cas le plus utilisé). Cette approche est appelée mode glissant terminal [Yu-96].

Bien étendu, le système étudié (ayant la forme prédéfinie (1.4)) doit être de degré relatif inférieur ou égal à 2 par rapport à la variable de glissement. Pour un système de degré relatif

2, et pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $|\sigma(t, x)| < \sigma_0$, le problème revient à la stabilisation en temps fini du système auxiliaire du second ordre défini par l'inclusion différentielle suivante :

$$\ddot{\sigma} \in [-C, C] + [K_m, K_M]u \quad (1.26)$$

Remarque 1.4. Il est à noter que, si le système est de degré relatif un, une commande par mode glissant d'ordre 2 peut également être appliquée en contrôlant \dot{u} au lieu de u , et dans ce cas la dérivée de la commande (\dot{u}) peut être utilisée comme une nouvelle variable de commande auxiliaire. En effet, dans ce cas appelé « anti-chattering », l'objectif d'atteindre un régime glissant du second ordre ($\sigma = \dot{\sigma} = 0$) est satisfait à l'aide d'une commande continue obtenue par l'intégration de la dérivée discontinue \dot{u} . Différemment du premier cas, si le système est de degré relatif 2 par rapport à la variable de glissement, la commande appliquée est discontinue.

Les algorithmes du second ordre (dont l'algorithme de Twisting) sont donc conçus en fonction de $\sigma(x, t)$ et ses paramètres associés C, K_M, K_m et σ_0 . La convergence en temps fini d'un régime glissant du second ordre ($\sigma = \dot{\sigma} = 0$) est obtenue grâce à la commutation de la valeur de commande entre un nombre fini de valeurs. À l'exception de l'algorithme Super Twisting, ces commutations sont déterminées en fonction de la connaissance simultanée de σ et $\dot{\sigma}$. Autrement dit, la stabilisation du système (1.26) doit être donc résolue, sous la supposition que $\dot{\sigma}$ n'est pas disponible pour la mesure.

Néanmoins, en pratique, ces algorithmes de commandes sont mis en œuvre dans des calculateurs cadencés par une horloge (de période d'échantillonnage fixe τ). Pour ces contrôleurs discrétisés, seulement la connaissance de σ est nécessaire : on tient donc compte de $\sigma(\tau_k)$ et de $\Delta\sigma(\tau_k) = \sigma(\tau_k) - \sigma(\tau_{k-1})$. Malgré sa simplicité de mise en œuvre, il est évident que ces algorithmes discrétisés permettent d'assurer un régime glissant réel du second ordre ($\sigma = \dot{\sigma} \equiv 0$). Les algorithmes présentés ci-dessous sont homogènes de degré d'homogénéité 1 et de dilatation $d_x(\sigma, \dot{\sigma}) \rightarrow (\kappa^2\sigma, \kappa\dot{\sigma}), \kappa > 0$, donc de poids de MGs d'ordre 2.

1.5.1. Algorithme de Twisting

Cet algorithme a été à l'origine du premier contrôleur d'ordre supérieur défini. Il est appelé « Twisting » en raison de sa trajectoire de convergence en temps fini vers l'origine du plan de phases $(\sigma, \dot{\sigma})$, avec un nombre infini de rotations (Figure 1.6). Son principe de fonctionnement est la commutation de l'amplitude de la commande entre les deux constantes U_M et U_m . Selon le degré relatif r du système, deux lois de commande sont données [Lev-03].

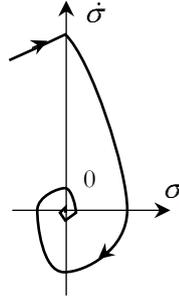


Figure 1.6. Convergence de Twisting

Supposons que $r = 1$, donc la loi de commande est :

$$\dot{u} = \begin{cases} -u & \text{si } |u| > u_0, \\ -U_M \text{sign}(\sigma) & \text{si } \sigma \dot{\sigma} > 0, |u| \leq u_0, \\ -U_m \text{sign}(\sigma) & \text{si } \sigma \dot{\sigma} \leq 0, |u| \leq u_0 \end{cases} \quad (1.27)$$

Dans le cas où $r = 2$, la loi de commande est donnée par :

$$u = \begin{cases} -U_M \text{sign}(\sigma) & \text{si } \sigma \dot{\sigma} > 0, \\ -U_m \text{sign}(\sigma) & \text{si } \sigma \dot{\sigma} \leq 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

avec $U_M > U_m > 0$, $u_0 > 0$, et les deux valeurs U_M et U_m vérifient les conditions (1.29) ci-dessous :

$$U_M > 4 \frac{K_M}{\sigma_0}, U_m > \frac{C_0}{K_m} \text{ et } (K_m U_M) - C_0 > (K_M U_m) + C_0 \quad (1.29)$$

Cette loi permet de rejoindre, en temps fini, la surface $S_2 = \{x \in \mathfrak{N} \mid \sigma = \dot{\sigma} = 0\}$ représentée par l'origine $(0,0)$ du plan de phases $(\sigma, \dot{\sigma})$. Cette convergence se réalise en une infinité d'intersections avec les deux axes (successivement abscisse et ordonnée). Le nombre de ces commutations est infini, mais la durée entre chaque commutation se réduit très rapidement. La durée pour atteindre l'origine est finie (paradoxe de Zénon).

Remarque 1.5. Remarquons que ces lois de commande (1.27) et (1.28) permettent d'atteindre un régime glissant idéal. Ceci n'est pas réalisable, car le système à commander ne peut jamais commuter à fréquence infinie. Comme nous l'avons signalé précédemment, cet algorithme est implémenté dans un calculateur (la loi est donc conçue en remplaçant $\dot{\sigma}$ par $\Delta\sigma$), cela induit un mode glissant réel plus précis que pour un ordre égal à un. Après un temps fini, la trajectoire du système converge vers l'ensemble de glissement réel $(\sigma = \dot{\sigma} \equiv 0)$ défini par : $\mathcal{O}(\tau^{1/2^{r-1}})$ par rapport à la période d'échantillonnage τ , (plus clairement ; une précision de glissement d'ordre $\sigma = \mathcal{O}(\tau^2)$ et $\dot{\sigma} = \mathcal{O}(\tau)$, et $\mathcal{O}(\epsilon^{1/2^r})$ par rapport à un bruit de mesure Lebesgue d'amplitude (de Lipschitz) inférieure à ϵ c'est-à-dire $\sigma = \mathcal{O}(\epsilon)$ et $\dot{\sigma} = \mathcal{O}(\epsilon^{1/2})$).

Il est à noter que, pour un système de degré relatif 2, la loi de commande (1.27) peut également être réécrite sous la forme [Eme-86], [Lev-85], [Lev-93]:

$$u = -(a \operatorname{sign}(\dot{\sigma}) + b \operatorname{sign}(\sigma)), \quad b > a > 0 \quad (1.30)$$

$$(b + a)K_m - C > (b - a)K_M + C; (b - a)K_m > C$$

Afin d'atténuer le chattering pour un système de degré relatif 1, un intégrateur est appliqué à la commande discontinue \dot{u} et l'algorithme prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ v = -a \operatorname{sign}(\dot{\sigma}) - b \operatorname{sign}(\sigma) \end{cases} \quad (1.31)$$

1.5.2. Algorithme de Super Twisting (ST)

Comme il est établi, pour des systèmes de degré relatif 1, l'utilisation de l'algorithme Twisting permet de compenser exactement l'ensemble des incertitudes et perturbations (absolument continue) à l'aide d'une commande absolument continue (anti-chattering). Cependant cet algorithme nécessite d'avoir des informations sur la dérivée de la variable de glissement $\dot{\sigma}$. L'algorithme Super Twisting ne s'applique qu'à des systèmes de degré relatif 1 dont la perturbation est Lipschitz et ne nécessite pas la connaissance de $\dot{\sigma}$. L'intérêt de cet algorithme réside dans la réduction importante du chattering due à la continuité de la commande appliquée.

L'algorithme Super Twisting (ST) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{u} = -k_1 |\sigma|^{1/2} \operatorname{sign}(\sigma) + u_1 \\ \dot{u}_1 = -k_2 \operatorname{sign}(\sigma) \end{cases} \quad (1.32)$$

avec k_1 et k_2 sont des constantes positives choisies de telle sorte que les conditions suffisantes de convergence en temps fini d'un régime glissant du second ordre ($\sigma = \dot{\sigma} = 0, \forall t \geq T$ tout en ne requérant que σ) soient vérifiées [Lev-93] :

$$k_1 > \frac{C_0}{K_m}, \quad k_2^2 \geq \frac{4C_0}{K_m^2} \frac{K_M(k_1 + C_0)}{K_m(k_1 - C_0)} \quad (1.33)$$

Cet algorithme (ST) est la base du dérivateur par MG du second ordre présenté précédemment (1.21) [Lev-98]. En définissant les variables $x_1 = f$, $x_2 = \dot{f}$ avec $f(t)$ est un signal donné dérivable tel que $|\ddot{f}(t)| \leq L, L > 0$, alors le problème peut être reformulé comme suit : il s'agit de trouver un observateur pour la dynamique :

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \ddot{f}, \quad y = x_1$$

où \ddot{f} est considérée comme une perturbation bornée. Lorsque l'algorithme ST ne nécessite pas des dérivées, ce qui serait l'état x_2 dans ce cas, il utilise uniquement la sortie mesurée et donne des résultats particulièrement utiles sous la forme d'un observateur ST :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - k_1 |\hat{x}_1 - y|^{1/2} \text{sign}(\hat{x}_1 - y), \\ \dot{\hat{x}}_2 = -k_2 \text{sign}(\hat{x}_1 - y), \end{cases} \quad (1.34)$$

Avec un choix approprié des constantes k_1 et k_2 , la convergence en temps fini de l'algorithme ST garantis l'égalité $(f - \hat{x}_1) = (\dot{f} - \hat{x}_2) = 0$. Donc, \hat{x}_2 est l'estimation exacte et en temps fini de $\dot{f}(t)$ sous les conditions idéales, et qui s'avère être la meilleure possible dans le cas de discrétisation ($\mathcal{O}(\tau)$) ou dans le cas d'un bruit de mesure de Lebesgue qui est borné par ϵ ($\mathcal{O}(\epsilon)$) [Lev-98].

1.5.3. Mode glissant terminal

L'idée de la commande par mode glissant terminal (MGT) a été proposée dans [Man-94], [Man-97] afin de résoudre le problème de convergence en temps fini d'un système non linéaire du second ordre incertain. Cet algorithme permet d'assurer un régime glissant d'ordre 2 avec les contraintes d'un MG standard. Le principe du MGT est basé sur un choix approprié d'une variable de glissement dite terminal, telle que la dynamique de l'erreur du système en boucle fermée atteint cette surface et y reste jusqu'à l'équilibre (Figure 1.7).

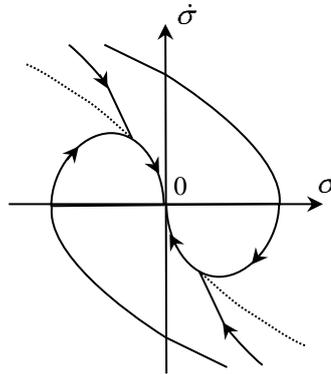


Figure 1.7. Convergence du MG terminal.

Une forme particulière homogène de la commande avec une convergence prédéfinie prescrite [Eme-86], [Lev-93] est :

$$u = -\alpha \text{sign}(\dot{\sigma} + \beta |\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma)), \quad \alpha, \beta > 0 \quad (1.35)$$

avec $\alpha K_m - C_0 > \beta^2 / 2$. Ce contrôleur homogène du MG-2 est analogue au contrôleur par mode glissant terminal (MGT) présentant une singularité à l'origine (à $\sigma = 0$) [Man-94]. Comme il est indiqué, cette dernière (CMGT) se définit pour un système du second ordre : $u = -\alpha \text{sign}(x_2 + \beta x_1^{q/p})$, tels que p et q sont des entiers positifs impairs ($p > q$). En se basant essentiellement sur la propriété de convergence en temps fini de l'équation différentielle $x_2 + \beta x_1^{q/p}$, il est possible de déterminer le temps nécessaire pour atteindre $x_1 = 0$ comme suit :

$$T = -\beta^{-1} \int_{x_1(0)}^0 \frac{dx_1}{x_1^{q/p}} = \frac{p}{-\beta(p-q)} |x_1(0)|^{1-\frac{q}{p}} \quad (1.36)$$

Pour un système d'ordre n de la forme (1.4), la loi de commande par MG terminal se définit d'une manière récursive (nested) par :

$$u = -\alpha \operatorname{sign}(\sigma_{n-1}) \quad (1.37)$$

$$\begin{cases} \sigma_0 = x_1, \\ \sigma_i = \dot{\sigma}_{i-1} + \beta_i \sigma_{i-1}^{q_i/p_i}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \end{cases} \quad (1.38)$$

où p_i et q_i sont des entiers positifs impairs ($p_i > q_i$). Lorsque la commande (1.37) garantit que $\sigma_{n-1} = 0$, $\sigma_{n-2} = 0$ est donc atteint en temps fini et ainsi de suite jusqu'à σ_0 .

Remarque 1.6. L'algorithme du MGT présente deux inconvénients, le premier c'est le problème de la singularité dû aux valeurs infinies de la commande, et le second est que la convergence du MGT vers l'équilibre en boucle fermée est relativement plus lente par rapport au MG classique lorsque l'état du système est loin du point d'équilibre. Pour éviter ces problèmes, les concepts du MG terminal non singulier (Nonsingular Terminal Sliding Mode, NTSM), et de MG terminal rapide (Fast Terminal Sliding Mode, FTSM) ont été proposés [Fen-02], [Wu-98], [Yu-02]. De ce fait, Le MG terminal non singulier et rapide (Fast Nonsingular Terminal Sliding Mode, FNTSM) a été donc développé pour garantir une convergence rapide sans avoir le problème de singularité [AlG-15], [Yan-11].

1.5.4. Exemple de simulation

Dans un souci de clarté, les algorithmes du MGs susmentionnés (Twisting, Super Twisting et MG terminal) sont implémentés pour le contrôle d'un système non linéaire mono-variable [Lev-03]. Considérons la dynamique d'un robot mobile qui s'exprime par le modèle cinématique (1.39), où (x, y) sont les coordonnées cartésiennes (le milieu de l'axe des roues de l'essieu arrière), φ est l'angle d'orientation du véhicule, l est la distance entre les axes des roues avant et arrière, θ est l'angle de braquage formé par les roues avant et l'axe principal de la voiture, v est la vitesse longitudinale (linéaire) et u est la vitesse angulaire selon l'axe vertical de la roue directrice par rapport au corps du véhicule (Figure 1.8).

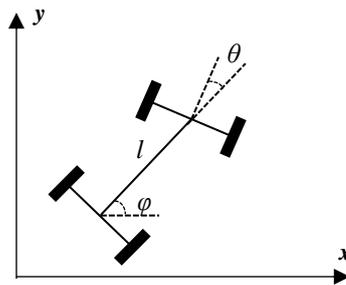


Figure 1.8. Robot mobile de type voiture.

Il est à noter que θ est la commande actuelle (réelle), et la nouvelle commande du système est u (introduite afin d'appliquer la commande par MG).

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos(\varphi), \\ \dot{y} = v \sin(\varphi), \\ \dot{\varphi} = \frac{v}{l} \tan(\theta), \\ u = \dot{\theta}, \end{cases} \quad (1.39)$$

Sachant que : x, y et φ sont supposés être disponibles à la mesure en temps réel, l'objectif de la commande c'est de diriger la voiture (d'une position initiale) à rejoindre la trajectoire $y = g(x)$. Définissons la variable de glissement $\sigma = y - g(x)$ telle que $g(x) = 10\sin(0.05x) + 5$, $v = \text{const} = 10 \text{ m/s}$, $l = 5 \text{ m}$ et $(x, y, \varphi, \theta)_0 = (0, 0, 0, 0)$. Il est clairement remarqué que le système (1.39) est de degré relatif 3 par rapport à σ .

Pour la première partie de simulation, l'algorithme Twisting sera appliqué afin d'atteindre un régime glissant du second ordre. Pour cela, une nouvelle variable de glissement satisfaisant le degré relatif peut être introduite comme suit: $s = \ddot{\sigma} + \lambda_1 \dot{\sigma} + \lambda_0 \sigma$. D'après la première dérivée de s , le système (1.39) est donc de degré relatif 1 par rapport à s . L'algorithme Twisting est implémenté où la commande réelle θ est obtenue par l'intégration de u (c'est le cas anti-chattering), les paramètres du contrôleur sont convenablement choisis tels que : $U_m = 10$, $U_M = 30$, $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_0 = 1$.

Les résultats de simulation issus de l'application de l'algorithme Twisting (1.27) au système (1.39) sont illustrés par la figure 1.9 (avec un pas de calcul $\tau = 10^{-3} \text{ sec}$).

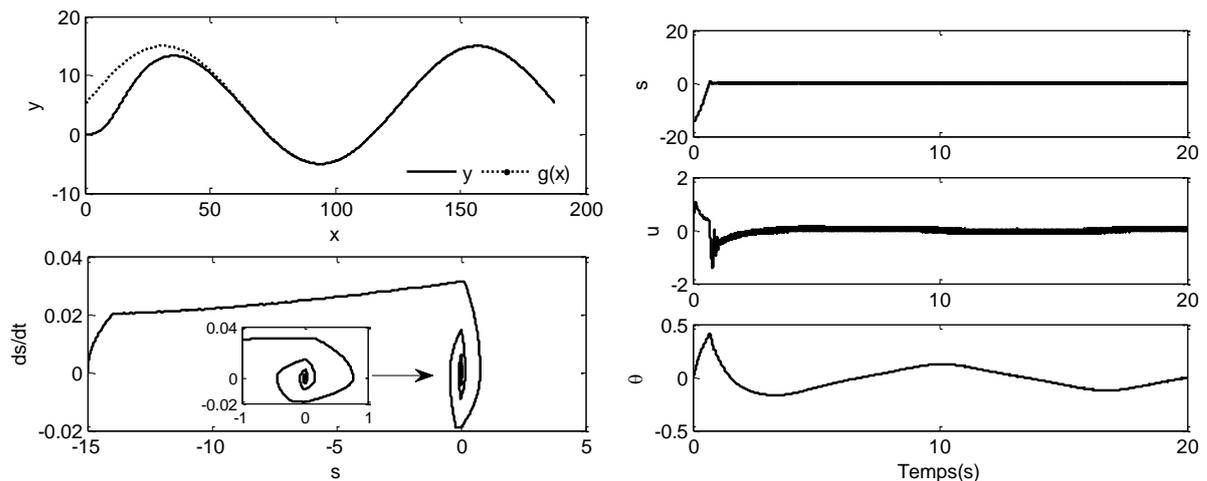


Figure 1.9. Résultats de simulation du robot mobile en MG -2 (algorithme Twisting).

D'après la figure 1.9, les résultats relèvent une bonne performance de poursuite, où un régime glissant du second ordre est atteint après la convergence de l'algorithme Twisting en

temps fini (illustrée dans le plan de phase (s, \dot{s})). Le chattering est fortement atténué au niveau du signal de la commande réelle θ (sous l'action intégrale).

De la même manière et pour la deuxième simulation, l'algorithme Super Twisting (1.32) peut également être appliqué au système (1.39) en utilisant la même surface de glissement prédéfinie s dans laquelle le système est de degré relatif 1. Avec les paramètres $k_1=20$ et $k_2 = 40$, les résultats de simulation présentés sur la figure 1.10 montrent que l'algorithme ST permet également de garantir de bonnes performances de poursuite et de commande. Un régime glissant du second ordre est assuré (convergence de ST dans le plan (s, \dot{s})), ainsi qu'une atténuation importante de chattering au niveau de la commande θ est obtenue.

Il est important de noter que, les paramètres des contrôleurs Twisting (U_m et U_M) et Super Twisting (k_1 et k_2) doivent être convenablement choisis afin d'éviter le compromis entre l'effet de chattering au niveau de la commande et la rapidité de convergence.

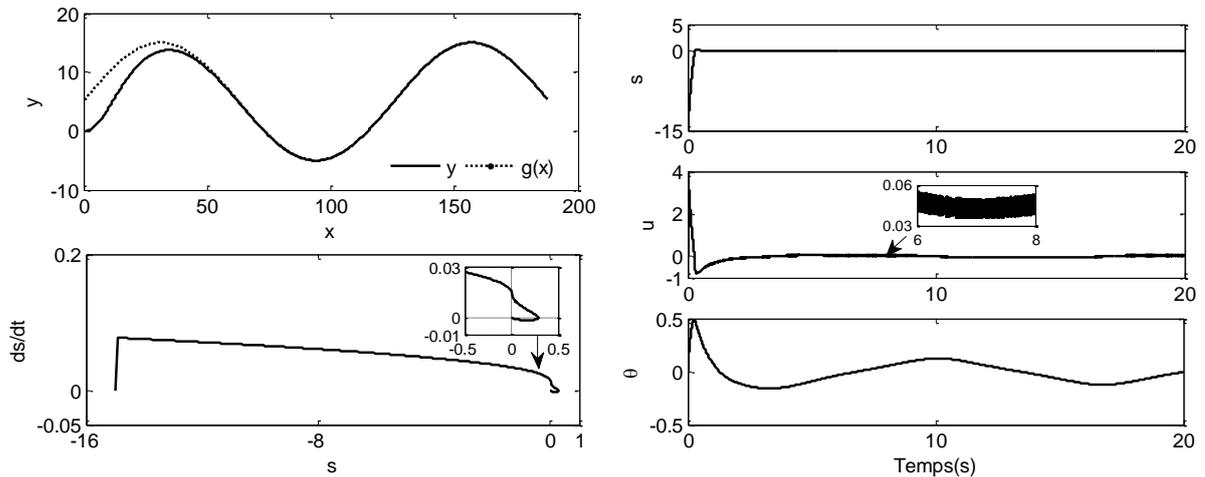


Figure 1.10. Résultats de simulation du robot mobile en MG-2 (algorithme ST).

Maintenant, une loi de commande par MG terminal sera implémentée de deux manières pour le contrôle du système (1.39). Dans le premier cas, pour concevoir la loi de commande (1.35), on utilise la surface de glissement prédéfinie s et son intégrale afin d'introduire une nouvelle fonction contrainte (hypersurface) terminale et rapide (FTSM) :

$\psi = s + \alpha_\psi \int s + \beta_\psi \left(\int s \right)^{q/p}$ tel que le système (1.39) soit de degré relatif 1 par rapport ψ , avec $\alpha_\psi = 1$, $\beta_\psi = 0.5$, $q = 7$, $p = 9$ et le gain de glissement $\alpha = 15$. D'après la figure 1.11, il est clair que le contrôleur proposé permet d'atteindre un régime glissant terminal en temps fini, ce dernier n'est qu'un cas particulier de MGs du second ordre, où la dynamique du système auxiliaire définie par les états $(\int s, s)$ atteint l'hypersurface terminale $\psi = 0$ puis se stabilise en temps fini. Le signal de commande réelle θ est lisse.

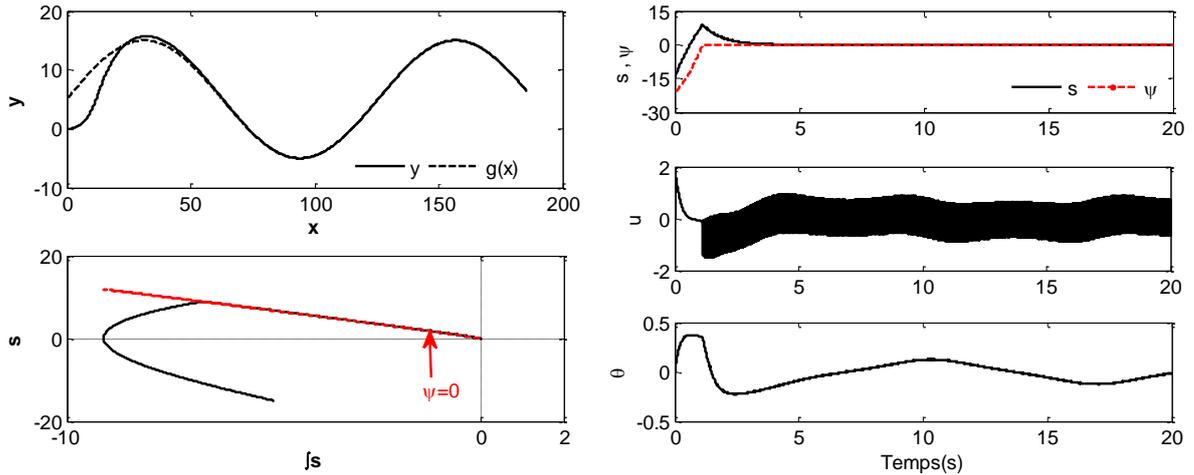


Figure 1.11. Résultats de simulation du robot mobile en MG terminal.

Pour le deuxième cas, rappelons que le système (1.39) est de degré relatif 3 par rapport à la variable de glissement $\sigma = y - g(x)$, un algorithme par MG terminal de la forme (1.37) est maintenant proposé afin d'atteindre un régime glissant d'ordre 3 en utilisant une structure récursive des surfaces de glissement (1.38). Pour cela, on définit les hypersurfaces hiérarchiques de type FTSM (hypersurface de glissement terminal et rapide) suivantes :

$$\begin{cases} s_0 = \sigma, \\ s_1 = \dot{s}_0 + \alpha_0 s_0 + \beta_0 s_0^{(q_0/p_0)} \\ s_2 = \dot{s}_1 + \alpha_1 s_1 + \beta_1 s_1^{(q_1/p_1)} \end{cases} \quad (1.40)$$

avec $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, $\beta_0 = \beta_1 = 0.5$, $q_0 = 9, p_0 = 11$, $q_1 = 7, p_1 = 9$ et le gain de glissement $\alpha = 15$. Il est à noter que le gain α a été choisi tout en considérant l'effet de chattering au niveau de la dérivée de la commande et la rapidité de convergence de la sortie.

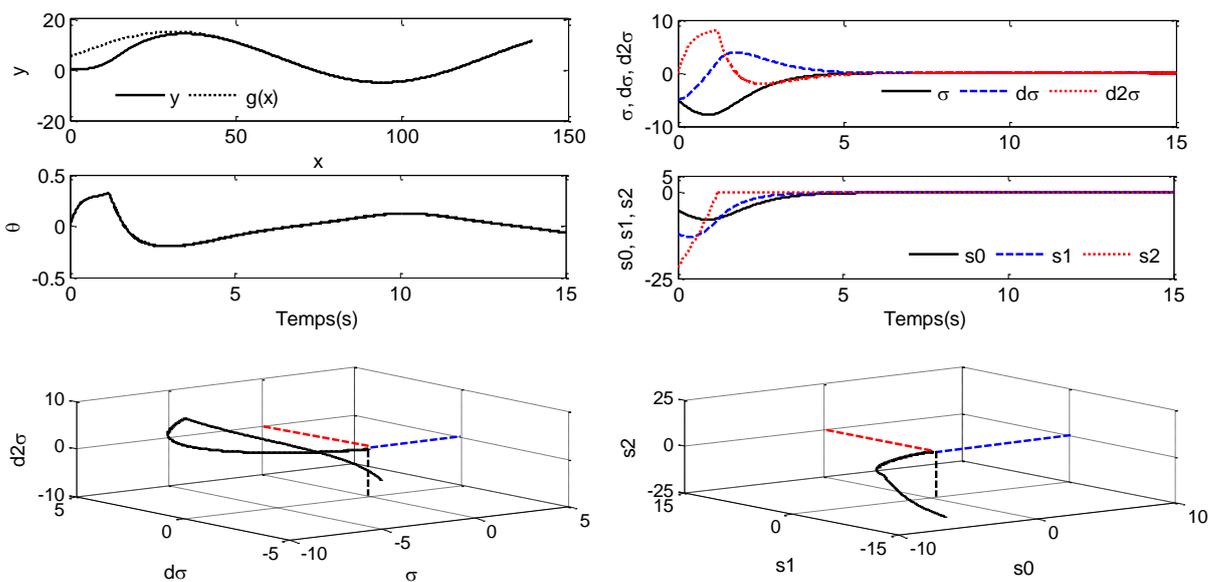


Figure 1.12. Résultats de simulation du robot mobile en MG terminal (nested).

Il est clairement vu d'après les résultats de simulation (Figure 1.12) que la loi de commande par MG terminal permet d'assurer la stabilisation d'un régime glissant d'ordre 3 ($\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} \equiv 0$) en temps fini. La commande réelle θ ne présente pas de chattering (obtenue sous intégration) et les hypersurfaces convergent également vers zéro en temps fini.

1.6. Commande par modes glissants d'ordre arbitraire

D'après la discussion précédente (section 1.3), une commande par MG d'ordre supérieur permet de générer un régime glissant réel d'ordre supérieur à 2, qui peut être déterminé par l'ensemble de glissement d'ordre r : $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} \equiv 0$, et de garantir une précision de glissement d'ordre r (par rapport à la période d'échantillonnage τ). Il est à noter que si le degré relatif du système est inférieur à r , les algorithmes du MG d'ordre r peuvent également être utilisés en augmentant artificiellement le degré relatif. Cela peut effectivement éliminer l'effet de chattering [Lev-03]. Il existe de nombreux algorithmes du MGs d'ordre arbitraire, seuls « Nested » et « Quasi-continuous » seront présentés.

Considérons un système de la forme (1.4) de degré relatif r par rapport à la variable de glissement σ . Rappelons que le problème de la commande de ce système est transféré à la stabilisation en temps fini de l'équation différentielle prédéfinie $\sigma^{(r)} \in [-C, C] + [K_m, K_M]u$, les deux contrôleurs « Nested » et « Quasi-continuous » prennent la forme suivante :

$$u = -\alpha \Psi_{r-1,r}(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}) \quad (1.41)$$

où $\alpha > 0$ et $\Psi_{r-1,r}(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)})$ est définie d'une manière récursive. Avec un choix approprié des paramètres du contrôleur, ce dernier permet d'établir un régime glissant d'ordre r en temps fini.

1.6.1. Algorithme « Nested » du mode glissant d'ordre r

La conception de l'algorithme « Nested » du mode glissant d'ordre arbitraire a été présentée dans [Lev-01] [Lev-03]. Soit q un nombre positif tel que $q \geq r$ (le plus petit multiple commun de $1, 2, \dots, r$) et $\beta_1, \dots, \beta_{r-1} > 0$, l'algorithme « Nested » est construit selon la procédure récursive suivante :

$$\begin{cases} N_{1,r} = |\sigma|^{r-1/r}, & N_{i,r} = \left(|\sigma|^{q/r} + |\dot{\sigma}|^{q/(r-1)} + \dots + |\sigma^{(i-1)}|^{q/(r-i+1)} \right)^{(r-i)/q}, \\ \Psi_{0,r} = \text{sign}(\sigma), & \Psi_{i,r} = \text{sign}(\sigma^{(i)} + \beta_i N_{i,r} \Psi_{i-1,r}), \quad i = 1, \dots, r-1 \end{cases} \quad (1.42)$$

Alors, $u = -\alpha \Psi_{r-1,r}(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)})$ définit l'algorithme du MG d'ordre r standard et assure ainsi l'existence d'un régime glissant d'ordre r dans l'ensemble S_r . Les paramètres β_i peuvent être sélectionnés à l'avance de telle sorte que le gain du contrôleur ($\alpha > 0$) soit

suffisamment grand afin de garantir la stabilisation de (1.14) en temps fini. Particulièrement, les contrôleurs ci-dessous sont obtenus lorsque $r \leq 4$:

$$\begin{cases} u = -\alpha \operatorname{sign}(\sigma); \\ u = -\alpha \operatorname{sign}(\dot{\sigma} + |\sigma|^{1/2} \operatorname{sign}(\sigma)); \\ u = -\alpha \operatorname{sign}\left(\ddot{\sigma} + 2(|\dot{\sigma}|^3 + |\sigma|^2)^{1/6} \operatorname{sign}(\dot{\sigma} + |\sigma|^{2/3} \operatorname{sign}(\sigma))\right); \\ u = -\alpha \operatorname{sign}\left(\ddot{\sigma} + 3(\ddot{\sigma}^6 + \dot{\sigma}^4 + |\sigma|^3)^{1/12} \operatorname{sign}\left(\ddot{\sigma} + (\dot{\sigma}^4 + |\sigma|^3)^{1/6} \operatorname{sign}(\dot{\sigma} + 0.5|\sigma|^{3/4} \operatorname{sign}(\sigma))\right)\right) \end{cases} \quad (1.43)$$

Remarque 1.7. Inspiré par l'idée précédente (MGs terminal), la structure de l'algorithme récursif (nested) repose sur l'utilisation de différentes surfaces (σ et ses dérivées successives), chacune faisant converger le système en temps fini vers la surface suivante. L'état du système transite donc d'une surface à l'autre alternativement jusqu'à atteindre en temps fini l'origine (Figure 1.13).

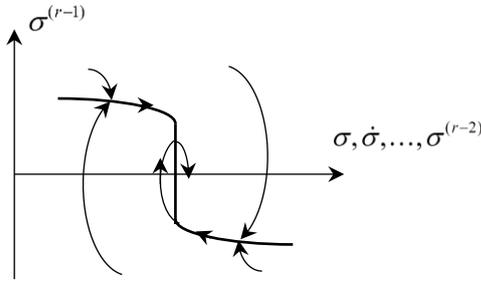


Figure 1.13. L'idée du MG d'ordre r .

1.6.2. Algorithme « Quasi-continuous » du mode glissant d'ordre r

Il a été souligné d'après [Lev-05a] que tout contrôleur exact par MG d'ordre r doit être discontinu au moins dans l'ensemble $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$ pour pouvoir compenser exactement les perturbations et les incertitudes bornées. L'algorithme « Quasi-continuous » par mode glissant d'ordre arbitraire a été défini dans [Lev-05b], [Lev-06b]. Ce contrôleur permet de supprimer les discontinuités sauf à l'origine ($\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$). Pour $i = 0, \dots, r-1$ et $\beta_1, \dots, \beta_{r-1} > 0$, cet algorithme est également construit d'une manière récursive:

$$\begin{cases} \varphi_{0,r} = \sigma, & N_{0,r} = |\sigma|, & \Psi_{0,r} = \frac{\varphi_{0,r}}{N_{0,r}} = \operatorname{sign}(\sigma), \\ \varphi_{i,r} = \sigma^{(i)} + \beta_i N_{i-1,r}^{\frac{r-i}{r-i+1}} \Psi_{i-1,r}, & N_{i,r} = |\sigma^{(i)}| + \beta_i N_{i-1,r}^{\frac{r-i}{r-i+1}}, & \Psi_{i,r} = \frac{\varphi_{i,r}}{N_{i,r}}, \end{cases} \quad (1.44)$$

L'avantage des contrôleurs « Quasi-continuous » par rapport aux contrôleurs « Nested » réside dans la réduction du chattering en raison de la réduction des discontinuités dans la loi

de commande [Lev-05b], [Lev-06b]. Ci-dessous les contrôleurs « Quasi-continuous » définis pour $r \leq 4$:

$$\begin{cases} u = -\alpha \operatorname{sign}(\sigma); \\ u = -\alpha \left(\dot{\sigma} + |\sigma|^{1/2} \operatorname{sign}(\sigma) \right) / \left(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{1/2} \right); \\ u = -\alpha \left[\ddot{\sigma} + 2 \left(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{2/3} \right)^{-1/2} \left(\dot{\sigma} + |\sigma|^{2/3} \operatorname{sign}(\sigma) \right) \right] / \left[|\ddot{\sigma}| + 2 \left(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{2/3} \right)^{1/2} \right]; \\ u = -\alpha \varphi_{3,4} / N_{3,4}, \\ \varphi_{3,4} = \ddot{\sigma} + 3 \left[\dot{\sigma} + \left(|\dot{\sigma}| + 0.5 |\sigma|^{3/4} \right)^{1/3} \left(\dot{\sigma} + 0.5 |\sigma|^{3/4} \operatorname{sign}(\sigma) \right) \right] \left[|\ddot{\sigma}| + \left(|\dot{\sigma}| + 0.5 |\sigma|^{3/4} \right)^{2/3} \right]^{-1/2}, \\ N_{3,4} = |\ddot{\sigma}| + 3 \left[|\dot{\sigma}| + \left(|\dot{\sigma}| + 0.5 |\sigma|^{3/4} \right)^{2/3} \right]^{-1/2}. \end{cases} \quad (1.45)$$

Il est évident que la loi de commande (1.41) (avec (1.42) ou (1.44)) dépend principalement de σ et ses $(r-1)$ dérivées successives, et comme il est mentionné (§1.4.2) le dérivateur par mode glissant d'ordre supérieur (1.20) a été implémenté afin d'estimer les $(r-1)$ dérivées de σ [Lev-03].

Remarque 1.8. La combinaison de la loi de commande (1.41) avec le dérivateur homogène (1.20) préserve les mêmes propriétés de précision de glissement présentées précédemment (Théorème 1.7, Remarque 1.3). Les valeurs des paramètres de dérivateur (1.19) : $\lambda_5 = 1.1$, $\lambda_4 = 1.5$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_1 = 5$ et $\lambda_0 = 8$ peuvent être prises [Lev-03]. Ces valeurs sont suffisantes jusqu'au 5^{ème} ordre de dérivation ($r \leq 6$) en raison de la forme récursive de différentiateur d'ordre $r-1$ (1.25).

Théorème 1.8. [Lev-05b] En supposant que les paramètres $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$ et $\alpha > 0$ sont choisis suffisamment grands, la loi de commande par mode glissant d'ordre r (1.41) avec (1.42) (également avec (1.44)) est homogène et assure la stabilité en temps fini du système (1.14). Par conséquent, un régime glissant d'ordre r est donc atteint pour la dynamique (1.4) avec (1.41).

Théorème 1.9. [Lev-05b] Comme il est mentionné dans le théorème 1.2, dans le cas de discrétisation de l'algorithme « Quasi-continuous » avec un temps d'échantillonnage τ , le contrôleur (1.41) avec (1.44) permet d'atteindre une précision de glissement $|\sigma| < \mu_0 \tau^r$, $|\dot{\sigma}| < \mu_1 \tau^{r-1}$, ..., $|\sigma^{(r-1)}| < \mu_{r-1} \tau$ où $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{r-1}$ sont des constantes positives (c'est la meilleure précision qui peut être obtenue avec la discontinuité de $\sigma^{(r)}$ [Lev-93]).

Théorème 1.10. [Lev-05b] Considérons que $\sigma^{(i)}$ soit mesuré avec précision $v_i \epsilon^{(r-i)/r}$ pour $v_i > 0$, $i = 1, \dots, r-1$. Avec des constantes positives μ_i , les inégalités $|\sigma^{(i)}| \leq \mu_i \epsilon^{(r-i)/r}$, $i = 0, \dots, r-1$ sont satisfaites en temps fini $\forall \epsilon > 0$.

Ces théorèmes (1.9 et 1.10) sont également valables pour le contrôleur (1.41) avec (1.42) (algorithme « Nested »).

1.6.3. Exemple de simulation

Prenant le même système prédéfini (1.39), et rappelons que ce dernier est de degré relatif 3 par rapport à la variable de glissement $\sigma = y - g(x)$. Dans cette partie, deux contrôleurs par MG d'ordre 3 seront donc proposés afin de réaliser la poursuite de trajectoire du système (1.39). Commenant par l'algorithme « Nested » défini dans (1.41)-(1.42), la loi de commande par MG d'ordre 3 est donnée comme suit :

$$u = -\alpha \operatorname{sign}\left(\ddot{\sigma} + 2\left(|\dot{\sigma}|^3 + |\sigma|^2\right)^{1/6} \operatorname{sign}\left(\dot{\sigma} + |\sigma|^{2/3} \operatorname{sign}(\sigma)\right)\right) \quad (1.46)$$

Il est important à noter que l'implémentation de cette loi de commande requiert des informations sur la variable de glissement et ces dérivées $\dot{\sigma}$ et $\ddot{\sigma}$. Dans ce cas, un dérivateur par MG d'ordre 3 de la forme (1.19) peut être utilisé afin d'estimer $\dot{\sigma}$ et $\ddot{\sigma}$. Considérons que $L=400$, le dérivateur est donné comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = v_0, & v_0 = -14.7|z_0 - \sigma|^{2/3} \operatorname{sign}(z_0 - \sigma) + z_1 \\ \dot{z}_1 = v_1, & v_1 = -30|z_1 - v_0|^{1/2} \operatorname{sign}(z_1 - v_0) + z_2 \\ \dot{z}_2 = -440 \operatorname{sign}(z_2 - v_1) \end{cases} \quad (1.47)$$

Le paramètre L est délibérément choisi grand pour obtenir de bonnes performances d'estimation en présence de bruit de mesure [Lev-05b]. La loi de commande (1.46) est réécrite comme suit :

$$u = -\alpha \operatorname{sign}\left(z_2 + 2\left(|z_1|^3 + |z_0|^2\right)^{1/6} \operatorname{sign}\left(z_1 + |z_0|^{2/3} \operatorname{sign}(z_0)\right)\right) \quad (1.48)$$

où $z_i (i=0, \dots, 2)$ correspondent aux variables $\sigma, \dot{\sigma}$ et $\ddot{\sigma}$ respectivement. Le gain de commande est $\alpha=1$ et le pas de calcul est $\tau=10^{-4}$.

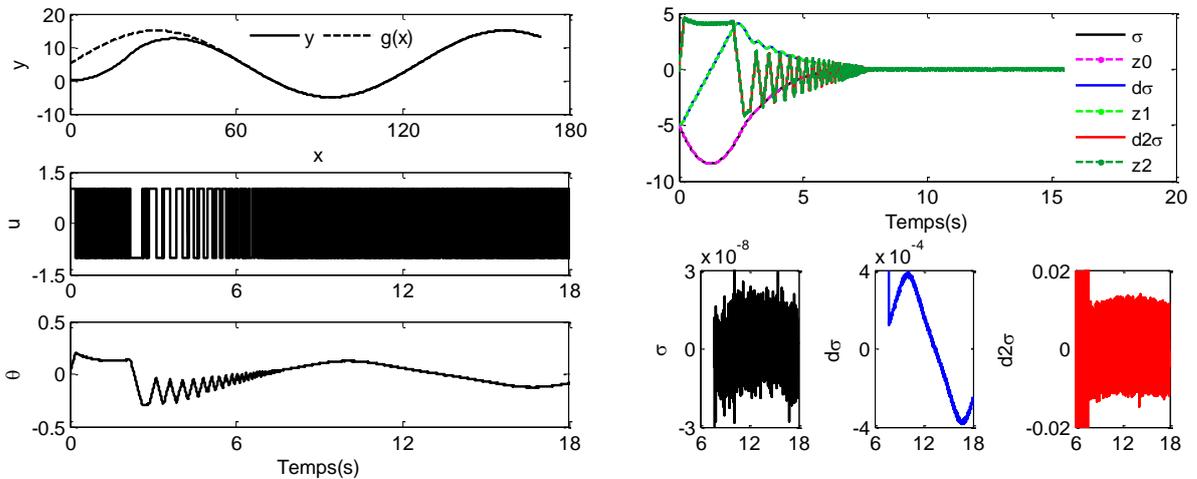


Figure 1.14. Résultats de simulation du robot mobile en MG-3 « Nested ».

D'après les résultats de simulation de la figure 1.14, la précision de poursuite obtenue est de 3×10^{-8} , 4×10^{-4} et 0.02 pour σ , $\dot{\sigma}$ et $\ddot{\sigma}$ respectivement, ce qui correspond principalement à la précision d'un MG d'ordre 3 dans le cas d'absence de bruit de mesure (Théorème 1.9). La loi de commande (1.48) permet d'obtenir des bonnes performances de poursuite. En revanche dans le cas de présence d'un bruit de mesure (bruit blanc Gaussien d'un écart-type $std = 10^{-3}$) appliqué à la sortie du système y , les précisions de poursuite atteintes sont : $|\sigma| \leq 0.06$, $|\dot{\sigma}| \leq 0.2$ et $|\ddot{\sigma}| \leq 2.5$ (Figure 1.15).

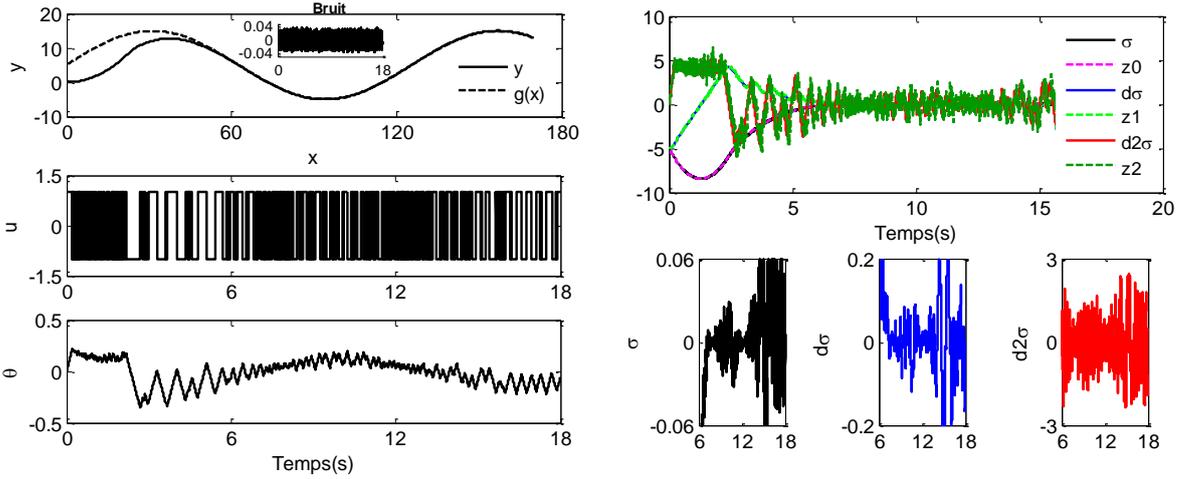


Figure 1.15. Résultats de simulation du robot mobile en MG-3 « Nested » en présence d'un bruit.

Pour la deuxième simulation, un contrôleur par MG d'ordre 3 a été implémenté en utilisant l'algorithme « Quasi-continuous ». Considérons la variable de glissement prédéfinie σ , la loi de commande est donnée par :

$$u = -\alpha \left[z_2 + 2(|z_1| + |z_0|^{2/3})^{-1/2} (z_1 + |z_0|^{2/3} \text{sign}(z_0)) \right] / \left[|z_2| + 2(|z_1| + |z_0|^{2/3})^{1/2} \right] \quad (1.49)$$

tels que z_0 , z_1 et z_2 sont obtenus par l'utilisation du dérivateur (1.47) afin d'estimer σ , $\dot{\sigma}$ et $\ddot{\sigma}$, respectivement, considérons pour cette simulation le gain du contrôleur $\alpha = 1$ et le pas de calcul $\tau = 10^{-4}$.

Une bonne performance de poursuite ainsi qu'une stabilisation en temps fini d'un régime glissant d'ordre 3 ($\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} \equiv 0$) ont été clairement prouvés d'après la figure. 1.16. Les précisions : $|\sigma| \leq 1 \times 10^{-6}$, $|\dot{\sigma}| \leq 6 \times 10^{-4}$ et $|\ddot{\sigma}| \leq 0.06$ correspondent aux précisions d'un MG d'ordre 3 (Théorème 1.9). Le signal de la commande réelle θ demeure lisse et facile à implémenter. En cas de présence d'un bruit de mesure avec $std = 10^{-3}$ (Figure 1.17), les précisions de poursuite atteintes sont : $|\sigma| \leq 0.06$, $|\dot{\sigma}| \leq 0.2$ et $|\ddot{\sigma}| \leq 2$ qui dépendent principalement à l'amplitude maximale de bruit (Théorème 1.10).

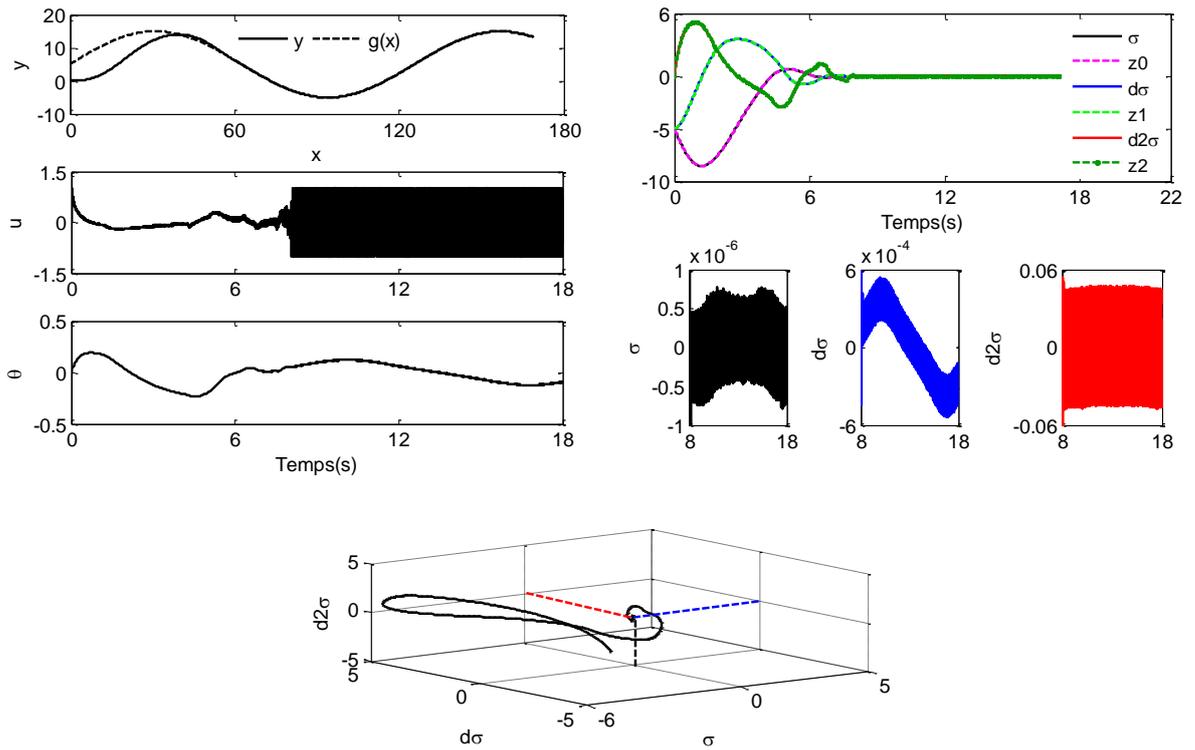


Figure 1.16. Résultats de simulation du robot mobile en MG-3 « Quasi-continuous ».

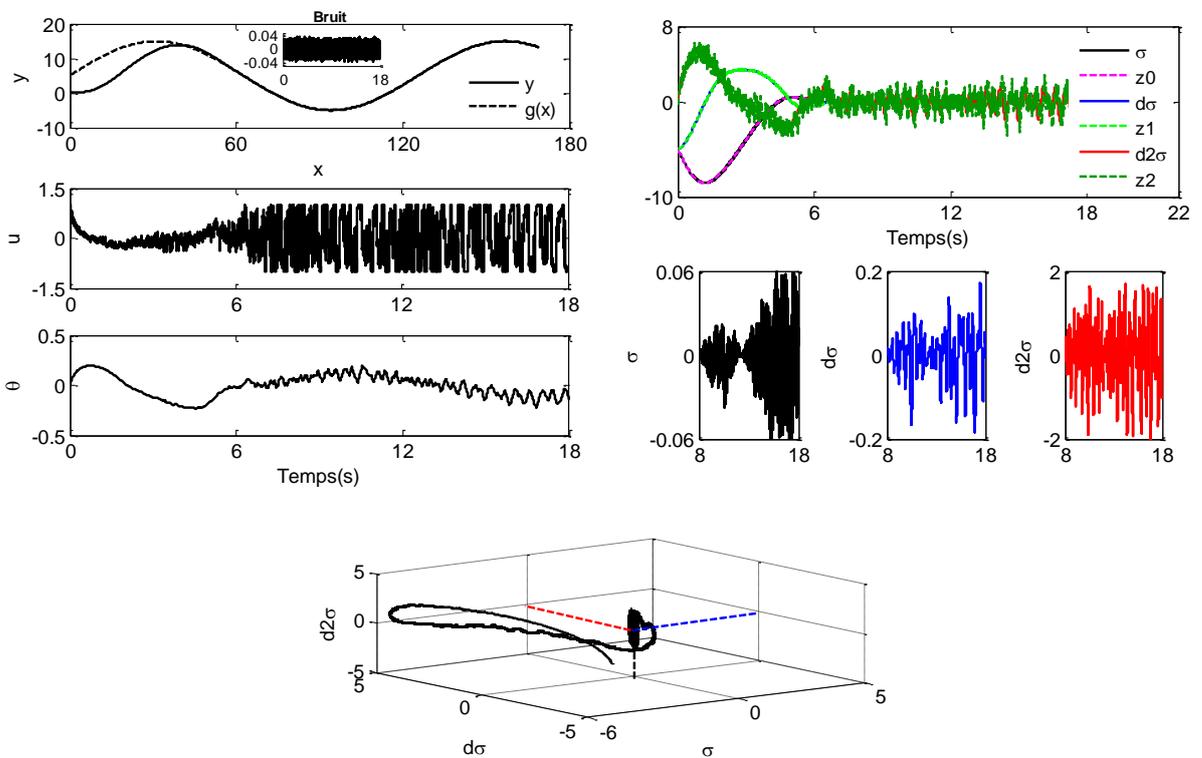


Figure 1.17. Résultats de simulation du robot mobile en MG-3 « Quasi-continuous » en présence d'un bruit.

1.7. Conclusion

Dans cette partie, les notions clés de la commande par mode glissant ont été présentées. La synthèse d'une telle commande par MG est basée essentiellement sur le choix d'une hypersurface dite de glissement sur laquelle le système doit évoluer (régime glissant). Dans ce cas, la dynamique bouclée se caractérise principalement par : l'insensibilité aux perturbations et incertitudes (co-incidentes) et le problème de la commande est réduit à la stabilisation d'un nouveau système (d'ordre 1) qui est représenté par la surface de glissement. Ces propriétés simplifient la mise en œuvre des lois de commande par MG. Cependant, la nature discontinue de la commande engendre des oscillations d'hautes fréquences autour de la surface, ce qui provoque le phénomène de chattering qui peut causer l'usure prématurée des actionneurs du système.

Dans ce contexte, et après avoir présenté la terminologie générale liée à la théorie du MG standard, le mode glissant d'ordre supérieur a été proposé comme une alternative pour atténuer le chattering tout en préservant les performances du MG standard. Les concepts essentiels des MGs d'ordre supérieur ont été présentés : les notions liées à ses propriétés associées (ordre de glissement, homogénéité, stabilité en temps fini et précision de glissement), et quelques algorithmes du MG (les plus répandus) du second ordre et d'ordre arbitraire sont explicités. Pour avoir des informations en temps réel sur la variable de glissement et ses dérivées, qui sont nécessaires à la mise en œuvre d'un contrôleur par MG d'ordre supérieur, un dérivateur de Levant (nommé aussi différentiateur exact et robuste du MG d'ordre arbitraire) a été proposé afin d'estimer en temps fini les dérivées supérieures de la variable de glissement. Il est à noter que ce dérivateur pourrait être également utilisé comme un observateur d'état dans le but de concevoir une loi de commande par retour de sortie, c'est-à-dire une combinaison observateur - commande par MG d'ordre supérieur. Dans un souci de clarté, quelques exemples de simulation ont été présentés afin d'illustrer certains concepts (le MG-2, le MG d'ordre arbitraire, le MG terminal et les différentiateurs par MG).

Inspiré par ce qui a été présenté dans cette partie, des structures de commandes robustes par modes glissants d'ordre supérieur (notamment d'ordre deux) seront proposées dans les chapitres suivants afin de résoudre le problème de poursuite de trajectoires pour une classe de systèmes non linéaires incertains.

2

Commande Floue par Mode Glissant d'ordre 2 à base du Mode Glissant Terminal

2.1.Introduction	44
2.2.Description du système et objectif de la commande.....	45
2.3.Commande floue par MG-2 « Nested » à base du MG terminal.....	52
2.4.Commande floue par MG-2 « Quasi-continuous » à base du MG terminal	56
2.5.Commande floue par MG-2 « Super Twisting » à base du MG terminal	58
2.6.Simulations et résultats	61
2.7.Conclusion	75

2.1. Introduction

Le concept du mode glissant d'ordre supérieur (d'ordre r) a été principalement introduit pour remédier au problème de chattering [Lev-93], [Lev-97], [Lev-00], tout en préservant les performances de la commande par mode glissant conventionnel (d'ordre 1) en termes de robustesse et de simplicité de mise en œuvre. En outre, cette approche permet d'assurer une haute précision de glissement par rapport à celle du mode glissant classique [Lev-93], [Lev-97], [Lev-00]. Le principe du MG d'ordre supérieur est basé sur une commande discontinue agissant sur la r ème dérivée de la variable de glissement $\sigma(x,t)$ (c'est-à-dire $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0, \sigma^{(r)} \neq 0$), ce qui rend le signal de commande continu (pour un MG idéal). Contrairement au MG d'ordre 1 où la commande discontinue agit sur la première dérivée de $\sigma(x,t)$ (c'est-à-dire $\sigma = 0, \dot{\sigma} \neq 0$). Pour le cas d'un MG d'ordre deux ($r=2$), l'ensemble de glissement du second ordre est défini par $S = \{\sigma = \dot{\sigma} = 0, \ddot{\sigma} \neq 0\}$ et la commande agit donc sur $\ddot{\sigma}$ [Lev-07].

Différents algorithmes du MG d'ordre supérieur (y compris du MG-2) ont été introduits dans la littérature, comme : l'algorithme de Twisting, l'algorithme de Super Twisting, les algorithmes du MG d'ordre arbitraire : Nested et Quasi-continuous [Lev-93], [Lev-03], [Lev-05b], [Lev-07]. Ces algorithmes permettent d'assurer la stabilisation d'un régime glissant en temps fini et d'atténuer considérablement l'effet du chattering au niveau des signaux de commande générés. Cependant, il est à noter que ces bonnes performances sont obtenues lorsque les gains de glissement caractérisant les termes discontinus de la commande sont convenablement choisis. Néanmoins, le calcul de ces gains requiert en principe la connaissance de la dynamique du système à commander ainsi que les bornes supérieures des incertitudes et perturbations [Lev-01], [Lev-05b], [Lev-07].

La nécessité d'avoir des informations minimales sur la variable de glissement a rendu l'utilisation des algorithmes du MG-2 (notamment l'algorithme Super Twisting) plus large dans diverses applications. Il est à noter que l'algorithme ST a été essentiellement conçu pour des systèmes de degré relatif 1 par rapport à la variable de glissement $\sigma(x,t)$, où seulement la connaissance de $\sigma(x,t)$ est nécessaire pour la conception de la loi de commande. Cependant, pour des dynamiques de degré relatif $r \geq 2$, une nouvelle surface de glissement s de degré relatif 1 doit être introduite [Cha-14], [Cha-15]. Cette dernière représente une combinaison typiquement linéaire de la variable de glissement, si $r = 2$, $s = \dot{\sigma} + \alpha\sigma$, ce qui permet d'assurer l'existence d'un régime glissant du second ordre en temps fini ($s = \dot{s} = 0$), dont les états $(\sigma, \dot{\sigma})$ se stabilisent asymptotiquement. Contrairement aux MGs linéaires et grâce à une surface de glissement non linéaire, l'approche des MGs terminal est caractérisée principalement par sa capacité d'assurer la stabilisation en temps fini des états du système à commander, ce qui peut

être considéré comme une solution alternative aux problèmes de la commande en temps fini [AlG-15], [Fen-02], [Xia-19b], [Yu-02]. Dans ce contexte, de nombreux travaux sont focalisés sur le métissage (de différentes manières) des MGs d'ordre supérieur (notamment l'algorithme ST) et l'approche des MGs terminal afin d'assurer la stabilisation des états du système en temps fini et d'introduire une commande robuste et lisse dont l'effet du chattering est fortement atténué [Ash-18], [Goe-17], [Ria-19], [Tay-18], [Van-17].

Afin d'exploiter les propriétés attrayantes des MGs du second ordre et terminal, cette partie est consacrée à la synthèse des structures de commandes floues par MG du second ordre pour la stabilisation en temps fini d'un système chaotique non linéaire incertain dont la dynamique est supposée inconnue. L'utilisation de différents algorithmes du MG-2 (Nested, Quasi-continuous et Super Twisting) permet d'atténuer le chattering au niveau de signal de commande tout en gardant les performances de robustesse et de précision de poursuite. En outre, afin d'approximer la dynamique inconnue du système et simplifier le calcul des gains de glissement, des systèmes adaptatifs flous type-2 dont les lois d'adaptation sont déduites de l'étude de la stabilité au sens de Lyapunov sont incorporés. Les résultats de simulation obtenus par l'application des lois de commandes proposées pour la stabilisation des systèmes chaotiques seront présentés afin de mettre en évidence l'efficacité et les performances de ces structures de commande.

2.2. Description du système et objectif de la commande

Notons que les structures de commande proposées dans cette partie sont essentiellement conçues pour le contrôle d'un système chaotique incertain. Une brève description de ce type de systèmes sera alors présentée dans ce qui suit :

La théorie du « chaos » a été introduite afin d'écrire le comportement imprévisible d'une certaine classe de systèmes déterministes. Dans la conception déterministe ; l'état présent d'un phénomène physique est l'effet d'un état antérieur et la cause d'un état futur. Ceci confère un comportement imprédictible, où une petite différence dans les conditions initiales ou dans les paramètres du système provoque une évolution différente dans la trajectoire du système. La théorie du chaos a trouvé diverses applications en météorologie, mathématique, en physique, en électronique, en biologie et télécommunications [Zel-10], [Tle-11].

Un système chaotique est défini comme un système dynamique déterministe non linéaire présentant des trajectoires globalement bornées et localement instables. Ce type de systèmes est caractérisé essentiellement par : sa sensibilité aux conditions initiales, un comportement aperiodique, irrégulier et imprévisible (une évolution complexe aléatoire).

On considère la dynamique du système chaotique (affine en l'entrée) continu et incertain du second ordre suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f(\underline{x}, t) + \Delta f(\underline{x}, t) + d(t) + u(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\underline{x} = [x_1 \ x_2]^T$ représente le vecteur d'état mesuré du système, $u(t) \in \mathbb{R}$ représente l'entrée du système. $f(\underline{x}, t)$ est une fonction non linéaire continue et bornée, $\Delta f(\underline{x}, t)$ et $d(t)$ représentent respectivement les incertitudes de modélisation et les perturbations externes qui peuvent entacher le système (qui sont inconnus mais bornés),

$$|f(\underline{x}, t)| < F, \quad |\Delta f(\underline{x}, t)| \leq \Delta_f, \quad |d(t)| \leq \Delta_d \quad (2.2)$$

avec F , Δ_f et Δ_d sont des constantes positives. En considérant $D(\underline{x}, t)$ l'ensemble des incertitudes et des perturbations, tel que $|D(\underline{x}, t)| \leq \Delta$, ($\Delta = \Delta_f + \Delta_d$), le système (2.1) peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f(\underline{x}, t) + D(\underline{x}, t) + u(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

Rappelons que l'objectif est de concevoir une loi de commande robuste, de telle façon que les états du système $\underline{x}(t)$ convergent en temps fini vers leurs signaux de référence $\underline{x}_d(t)$, lesquels appartiennent à une classe de fonctions continues sur $[t_0, \infty]$. En considérant l'erreur de poursuite $\underline{e}(t)$ comme :

$$\begin{aligned} \underline{e}(t) &= \underline{x}(t) - \underline{x}_d(t) \\ &= [x_1(t) - x_{d1}(t) \ x_2(t) - \dot{x}_{d1}(t)] \\ &= [e_1(t) \ e_2(t)] = [e(t) \ \dot{e}(t)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

La dynamique de l'erreur pour le système (2.3) est donnée par :

$$\ddot{e}(t) = f(\underline{x}, t) - \ddot{x}_d(t) + D(\underline{x}, t) + u(t) \quad (2.5)$$

L'objectif de la commande s'exprime donc par : $\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{e}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) - \underline{x}_d(t) \rightarrow 0$.

Remarque 2.1. De nombreuses méthodologies basées sur l'approche des MGs ont été proposées dans la littérature pour le contrôle du chaos (stabilisation et synchronisation) [Hen-13], [Hen-15a], [Kha-16], [Mob-18a], [Xi-18]. Cependant, pour résoudre le problème du chattering, des contrôleurs par mode glissant du second ordre ont été présentés pour la stabilisation ainsi que la synchronisation des différents systèmes chaotiques [Loc-19], [Mob-16], [Mob-18b], [Sin-18a]. Afin d'atteindre un régime glissant d'ordre 2, l'idée principale de la plupart des structures de commande développée pour le contrôle du chaos est basée sur l'introduction d'une surface de glissement du second ordre (deux surfaces), la commande est obtenue donc par intégration, ce qui permet d'atténuer le chattering (c'est-à-dire l'augmentation de l'ordre de système par un). Par ailleurs, un peu de travaux utilisent les

algorithmes du MGs d'ordre 2 a été proposé dans ce domaine (contrôle du chaos) [Hen-15b], [Vai-17a], [Vai-17b].

La procédure de mise en œuvre des contrôleurs proposée pour la stabilisation d'un système chaotique (dont la dynamique est supposée inconnue) est basée sur la commande par MG du second ordre, qui comprend les deux étapes suivantes : premièrement un système flou type-2 est introduit afin d'approximer la dynamique du système. Ensuite, le MG terminal (non singulier et rapide) est combiné avec le MG du second ordre pour concevoir des contrôleurs robustes, tout en assurant une stabilisation en temps fini de la dynamique de l'erreur (2.5) avec des commandes lisses et faisables. Dans ce qui suit, un rappel de quelques notations et définitions sera présenté.

2.2.1. Préliminaires

Définition 2.1. [Bha-97] La notation suivante est utilisée. Pour une variable réelle $a \in \mathbb{R}$ et un exposant réel $b \in \mathbb{R}$. $a^{[b]} = |a|^b \text{sign}(a)$, donc $a^{[2]} = |a|^2 \text{sign}(a) \neq a^2$. Si b est un nombre impair, alors $a^{[b]} = a^b$. On note que : $a^{[0]} = \text{sign}(a)$, $a^{[0]}a^b = |a|^b$ et $a^{[0]}|a|^b = a^{[b]}$. Pour $b \geq 1$, $\frac{d}{dt} a^{[b]} = b|a|^{b-1} \dot{a}$.

Définition 2.2. [Lev-05a] L'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$ est dite uniformément globalement stable en temps fini à l'origine 0, si elle est stable au sens de Lyapunov et pour tout $R > 0$ il existe un temps fini $t_f > 0$, tel que toute trajectoire partant du domaine $\|x\| < R$ se stabilise à zéro en un temps t_f .

Définition 2.3. [Lev-03] Un régime glissant d'ordre r (tel que $r \geq 2$) est défini par l'ensemble de glissement : $S_r = \{\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0, \sigma^{(r)} \neq 0\}$, ce qui impose une condition dimensionnelle d'ordre r sur l'état de système. Si le degré relatif du système par rapport à la surface de glissement σ est inférieur à r , les algorithmes du MGs d'ordre r peuvent être utilisés en augmentant artificiellement le degré relatif du système, ce qui peut également permettre d'atténuer l'effet du chattering d'une manière effective.

2.2.2. Synthèse de la commande par MG terminal

Comme il est connu, l'approche des MGs terminal y compris le mode glissant terminal non singulier (MGTN) ont quelques propriétés supérieures par rapport au MG classique, telle que la convergence en temps fini des états du système à commander avec une bonne précision de poursuite. En définissant la variable de glissement comme étant l'erreur de poursuite $\sigma = e$, pour un MG terminal (MGT) et un MG terminal non singulier (MGTN), les surfaces de glissement correspondantes sont données respectivement comme suit [Man-94]:

$$s_{MGT} = \dot{\sigma} + \beta \sigma^{[\alpha]}, \beta > 0, 0 < \alpha < 1 \quad (2.6)$$

$$s_{MGTN} = \sigma + \beta' \dot{\sigma}^{[\alpha']}, \beta' > 0, 1 < \alpha' < 2 \quad (2.7)$$

Afin d'obtenir une convergence rapide, une surface de glissement terminal non singulier et rapide peut être introduite :

$$s = \sigma + \beta_1 \sigma^{[\alpha_1]} + \beta_2 \dot{\sigma}^{[\alpha_2]} \quad (2.8)$$

avec $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0, 1 < \alpha_2 < 2$, tel que $\alpha_2 = p/q$ (p et q sont des entiers impairs et positifs), $\alpha_1 \geq p/q$. Il est bien connu que l'existence d'un mode glissant nécessite que l'équation $\dot{s} = 0$ soit satisfaite, telle que :

$$\dot{s} = \dot{\sigma} + \beta_1 \alpha_1 |\sigma|^{\alpha_1-1} \dot{\sigma} + \beta_2 \alpha_2 |\dot{\sigma}|^{\alpha_2-1} \ddot{\sigma} \quad (2.9)$$

Rappelons que $\sigma = e$, à partir de la dynamique de l'erreur (2.5), la dérivée de s devient :

$$\dot{s} = \dot{\sigma} + \beta_1 \alpha_1 |\sigma|^{\alpha_1-1} \dot{\sigma} + \beta_2 \alpha_2 |\dot{\sigma}|^{\alpha_2-1} (f(\underline{x}, t) - \ddot{x}_d + D(\underline{x}, t) + u(t)) \quad (2.10)$$

Supposons la dynamique du système (2.3) connue en l'absence des incertitudes et des perturbations ($D(\underline{x}, t) = 0$). Lorsque la trajectoire d'état du système est maintenue sur l'hypersurface $s = 0$, sa dynamique est gouvernée par la commande équivalente u_{eq} (obtenue par la condition d'invariance $s = 0$ et $\dot{s} = 0$) :

$$u_{eq} = - \left[f(\underline{x}, t) - \ddot{x}_d + \frac{1}{\beta_2 \alpha_2} \left(\dot{\sigma}^{(2-\alpha_2)} + \beta_1 \alpha_1 |\sigma|^{\alpha_1-1} \dot{\sigma}^{(2-\alpha_2)} \right) \right] \quad (2.11)$$

Selon la procédure de mise en œuvre d'une commande par MG terminal, la loi de commande globale est donnée par :

$$u_{MGT} = u_{eq} + u_{dis} \quad (2.12)$$

Le terme discontinu u_{dis} (nommée reaching control) a pour but de compenser l'effet des incertitudes et des perturbations durant la phase d'approche, il est défini par :

$$u_{dis} = -k \text{sign}(s) \quad (2.13)$$

où $k > 0$ est le gain de glissement. Sous l'action de la loi de commande (2.12), la stabilité du système en boucle fermée sera prouvée dans le théorème suivant.

Théorème 2.1. On considère le système chaotique incertain (2.3) et la surface de glissement (2.8). La loi de commande définie par (2.12) permet d'assurer une convergence en temps fini de la trajectoire du système vers l'hypersurface $s = 0$, si le gain de glissement est choisi de telle façon que l'inégalité suivante soit satisfaite (pour une petite constante $\eta > 0$) :

$$k \geq \eta + \Delta \quad (2.14)$$

Démonstration. En prenant la fonction de Lyapunov $V = \frac{1}{2}s^2$, sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= s\dot{s} = s\left(\beta_2 \alpha_2 |\dot{\sigma}|^{\alpha_2-1} (D(\underline{x}, t) - k \operatorname{sign}(s))\right) \\ &\leq \beta_2 \alpha_2 |\dot{\sigma}|^{\alpha_2-1} (\Delta - k) |s|\end{aligned}\quad (2.15)$$

Il est clair que, si le gain de glissement (appelé aussi le gain de la commande) satisfait la condition (2.14), alors $\dot{V} \leq -\eta \rho(\dot{\sigma}) |s|$ avec $\rho(\dot{\sigma}) = \beta_2 \alpha_2 |\dot{\sigma}|^{\alpha_2-1}$.

Remarque 2.2. Lorsque $\beta_2 > 0$, $\alpha_2 = p/q$, p et q sont des entiers impairs et positifs satisfaisants $1 < p/q < 2$, on a $|\dot{\sigma}|^{\alpha_2-1} > 0$ (quand $\dot{\sigma} \neq 0$) et $|\dot{\sigma}|^{\alpha_2-1} = 0$ (quand $\dot{\sigma} = 0$). Donc, quand $s \neq 0$ et $\dot{\sigma} \neq 0$, la condition d'existence d'un MG (condition de la stabilité au sens de Lyapunov) $\dot{V} < 0$ est vérifiée et le système se stabilise sur $s = 0$ en temps fini.

$$\begin{cases} s\dot{s} \leq -\rho(\dot{\sigma}) |s| \\ \rho(\dot{\sigma}) = \beta_2 \alpha_2 |\dot{\sigma}|^{\alpha_2-1} \eta > 0 \end{cases}, \text{ pour } \dot{\sigma} \neq 0.$$

Maintenant, quand $s \neq 0$ et $\dot{\sigma} = 0$ mais $\sigma \neq 0$, la substitution de la loi de commande (2.12) dans la dynamique (2.5) donne :

$$\ddot{\sigma} = D(\underline{x}, t) - k \operatorname{sign}(s) - \frac{1}{\beta_2 \alpha_2} \left(\dot{\sigma}^{2-\alpha_2} + \beta_1 \alpha_1 |\sigma|^{\alpha_1-1} \dot{\sigma}^{2-\alpha_2} \right) \quad (2.16)$$

$$\text{Quand } \dot{\sigma} = 0, \text{ on obtient : } \ddot{\sigma} = D(\underline{x}, t) - k \operatorname{sign}(s), \text{ et } \begin{cases} \ddot{\sigma} < -\eta & \text{pour } s > 0 \\ \ddot{\sigma} > \eta & \text{pour } s < 0 \end{cases}.$$

Pour une petite constante $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage autour $\dot{\sigma} = 0$ (c'est-à-dire $|\dot{\sigma}| \leq \varepsilon$), tel que $\ddot{\sigma} < -\eta$ pour $s > 0$ et $\ddot{\sigma} > \eta$ pour $s < 0$. Alors, la transition entre les deux limites de ce voisinage est atteinte en temps fini ; de $\dot{\sigma} = \varepsilon$ à $\dot{\sigma} = -\varepsilon$ pour $s > 0$ et de $\dot{\sigma} = -\varepsilon$ à $\dot{\sigma} = \varepsilon$ pour $s < 0$. Il est à noter que, dans le cas où $|\dot{\sigma}| < \varepsilon$, la convergence à partir d'autres régions vers les limites du voisinage se fait également en temps fini. Selon la définition 2.2, on conclut qu'avec la loi de commande (2.12), quel que soit l'état initial du système à commander, sa trajectoire peut atteindre l'hypersurface $s = 0$ dans le plan de phase $(\sigma, \dot{\sigma})$ en temps fini.

Lorsqu'un régime glissant (terminal non singulier et rapide) est atteint ($s = 0$), la dynamique du système peut être déterminée par $\sigma + \beta_1 \sigma^{[\alpha_1]} + \beta_2 \dot{\sigma}^{[\alpha_2]} = 0$ et le temps de convergence t_c (pour la transition de $\sigma(t_0) \neq 0$ à $\sigma(t_0 + t_c) = 0$) est obtenu en utilisant la fonction de Gauss hyper géométrique $L(\cdot)$ [Yan-11].

$$t_c = \frac{\alpha_2 |\sigma(t_0)|^{1-1/\alpha_2}}{\beta_1 (\alpha_2 - 1)} L\left(\frac{1}{\alpha_2}, \frac{\alpha_2 - 1}{(\alpha_1 - 1)\alpha_2}; 1 + \frac{\alpha_2 - 1}{(\alpha_1 - 1)\alpha_2}; -\beta_1 |\sigma(t_0)|^{\alpha_1-1}\right) \quad (2.17)$$

Remarque 2.3. Il est important d'indiquer que la commande par MG terminal (2.12) permet d'assurer la stabilité en temps fini du système, en revanche le chattering persiste toujours au niveau de signal de commande à cause du terme discontinu (2.13). Un mode glissant d'ordre supérieur (plus précisément d'ordre 2) sera donc implémenté afin d'atténuer l'effet du chattering en utilisant trois algorithmes: le MG « Nested » d'ordre 2 (noté : MG-Nes2), le MG « Quasi-continuous » d'ordre 2 (MG-Qc2) et le Super Twisting (MG-ST).

Remarque 2.4. Il est bien connu que, dans la conception des contrôleurs par MG (y compris les MGs-2), le choix des gains de commande (de glissement) est principalement lié à la borne supérieure des incertitudes et des perturbations, ce qui est pratiquement difficile à obtenir à l'avance. De plus, ces gains ayant un rôle primordial dans la rapidité de convergence et l'importance du niveau du chattering présent dans la commande.

Remarque 2.5. Étant donné que la dynamique du système considéré (2.3) est supposée inconnue et que les bornes supérieures des incertitudes et des perturbations indisponibles, l'approche floue de type 2 sera utilisée afin d'ajuster (d'une manière adaptative) les gains de glissement et d'approximer la partie inconnue du système. Une brève description des systèmes flous de type 2 est présentée dans ce qui suit.

2.2.3. Système flou de type-2 (SFT-2)

La structure de base d'un système flou type-2 (SFT-2) représentée par la figure 2.1 est semblable à celle d'un système flou type-1 (SFT-1). La différence structurelle principale réside dans le fait que le bloc de défuzzification d'un SFT-1 est remplacé par le processus de traitement de sortie dans un SFT-2, qui consiste en un réducteur de type suivi du défuzzificateur [Kar-99].

Remarque 2.6. Le concept d'un ensemble flou type-2 a été introduit comme une extension du concept de l'ensemble flou ordinaire appelé ensemble flou type-1. Un ensemble flou type-2 est caractérisé par une fonction d'appartenance floue, c'est-à-dire, la valeur d'appartenance (degré d'appartenance) de chaque élément de l'ensemble est un ensemble flou dans $[0,1]$. De tels ensembles peuvent être utilisés dans les situations où on a des incertitudes sur les valeurs d'appartenance elles-mêmes. L'incertitude peut être soit dans la forme de la fonction d'appartenance ou dans l'un de ses paramètres.

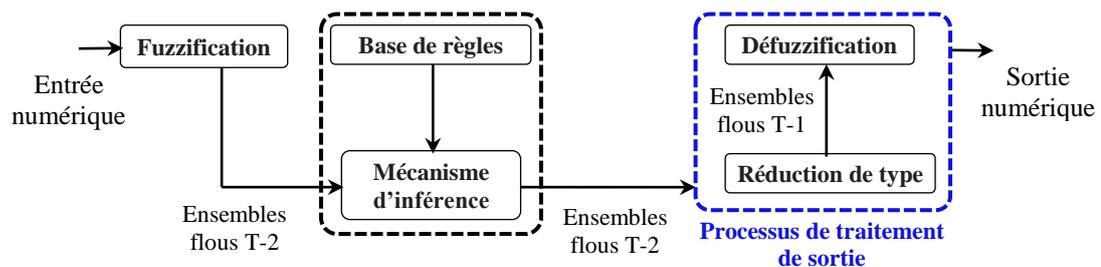


Figure 2.1. Représentation d'un système flou type-2 (SFT-2)

On considère les M règles floues type-2 (SI-ALORS) dans un SFT-2 de la forme suivante :

$$R^i : \text{SI } x_1 \text{ est } \tilde{A}_1^i, \text{ et } x_1 \text{ est } \tilde{A}_2^i, \dots, \text{ et } x_n \text{ est } \tilde{A}_n^i, \text{ ALORS } y \text{ est } \tilde{B}^i \quad (2.18)$$

où $i = 1, \dots, M$, $x_j \in A, (j = 1, \dots, n)$ et $y \in B$ sont les entrées et les sorties du SFT-2 respectivement, \tilde{A}_n^i et \tilde{B}^i sont les ensembles flous type-2 antécédents et conséquents, respectivement. L'opération de la réduction de type va transformer l'ensemble flou type-2 résultant en un ensemble flou type-1 appelé ensemble type réduit, qui sera défuzzifié par la suite. Il existe de nombreuses méthodes de réduction de type, la plus couramment utilisée est celle du centre des ensembles (Center-Of-Sets) [Kar-99], qui peut être exprimée par :

$$y_{\text{cos}}(Y^1, \dots, Y^M, A^1, \dots, A^M) = [y_l, y_r] \\ = \int_{Y^1} \dots \int_{Y^M} \times \int_{A^1} \dots \int_{A^M} 1 / \frac{\sum_{i=1}^M w^i y^i}{\sum_{i=1}^M w^i} \quad (2.19)$$

avec $w^i \in A^i = [\underline{w}^i, \bar{w}^i]$ et $y^i \in Y^i = [y_l^i, y_r^i]$, \underline{w}^i et \bar{w}^i sont les fonctions d'appartenance inférieure et supérieure de la $i^{\text{ème}}$ règle floue respectivement. L'ensemble résultant par la défuzzification est la moyenne ;

$$y = (y_l + y_r) / 2 \quad (2.20)$$

où y_l et y_r sont les points limites gauche (left) et droit (right) de l'ensemble conséquent, qui peuvent être exprimés par :

$$y_r = \frac{\sum_{i=1}^M w_r^i y_r^i}{\sum_{i=1}^M w_r^i} = \frac{\sum_{i=1}^R \underline{w}^i y_r^i + \sum_{i=R+1}^M \bar{w}^i y_r^i}{\sum_{i=1}^R \underline{w}^i + \sum_{i=R+1}^M \bar{w}^i} = \theta_r^T \xi_r \quad (2.21)$$

$$y_l = \frac{\sum_{i=1}^M w_l^i y_l^i}{\sum_{i=1}^M w_l^i} = \frac{\sum_{i=1}^L \bar{w}^i y_l^i + \sum_{i=L+1}^M \underline{w}^i y_l^i}{\sum_{i=1}^L \bar{w}^i + \sum_{i=L+1}^M \underline{w}^i} = \theta_l^T \xi_l \quad (2.22)$$

tels que,

$$\theta_r = [\theta_r^1, \dots, \theta_r^M]^T, \theta_r^i = y_r^i, \xi_r = [\underline{\xi}_r, \bar{\xi}_r]^T, \underline{\xi}_r = [\underline{\xi}_r^1, \underline{\xi}_r^2, \dots, \underline{\xi}_r^R]^T, \bar{\xi}_r = [\bar{\xi}_r^{R+1}, \bar{\xi}_r^{R+2}, \dots, \bar{\xi}_r^M]^T$$

$$\theta_l = [\theta_l^1, \dots, \theta_l^M]^T, \theta_l^i = y_l^i, \xi_l = [\underline{\xi}_l, \bar{\xi}_l]^T, \bar{\xi}_l = [\bar{\xi}_l^1, \bar{\xi}_l^2, \dots, \bar{\xi}_l^L]^T, \underline{\xi}_l = [\underline{\xi}_l^{L+1}, \underline{\xi}_l^{L+2}, \dots, \underline{\xi}_l^M]^T$$

$$\underline{\xi}_r^i = \frac{\underline{w}^i}{\sum_{i=1}^R \underline{w}^i + \sum_{i=R+1}^M \bar{w}^i}, \bar{\xi}_r^i = \frac{\bar{w}^i}{\sum_{i=1}^R \underline{w}^i + \sum_{i=R+1}^M \bar{w}^i},$$

$$\bar{\xi}_l^i = \frac{\bar{w}^i}{\sum_{i=1}^L \bar{w}^i + \sum_{i=L+1}^M \underline{w}^i}, \underline{\xi}_l^i = \frac{\underline{w}^i}{\sum_{i=1}^L \bar{w}^i + \sum_{i=L+1}^M \underline{w}^i}.$$

où θ_l et θ_r sont des vecteurs de paramètres ajustables correspondant aux points limites gauche y_l et droite y_r , respectivement, ξ_l et ξ_r sont des vecteurs régressifs appelés fonctions floues de base (FBF). Les points de commutation L et R , caractérisant y_l et y_r , respectivement, sont calculés en utilisant l'algorithme itératif de Karnik-Mendel (KM) [Wu-07]. Une fois que y_l et y_r sont calculés, l'ensemble résultant par la défuzzification est donné par :

$$y = \frac{y_r + y_l}{2} = \frac{1}{2}(\theta_r^T \xi_r + \theta_l^T \xi_l) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta_r^T & \theta_l^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_r \\ \xi_l \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Finalement, des SFT-2s de la forme (2.23) seront implémentés pour la conception des contrôleurs proposés afin d'atteindre les performances désirés de la commande.

2.3. Commande floue par MG-2 « Nested » à base du MG terminal

Comme nous l'avons déjà exposé, pour la conception de la loi de commande proposée, on définit la surface de glissement terminal (2.8) pour le système (2.3), dont le degré relatif par rapport à cette surface est égal à 1. Donc, une commande par MG du premier ordre ou classique peut être utilisée. Cependant, afin de remédier au problème du chattering, une commande par MG du second ordre peut également être implémentée, en substituant un intégrateur à la commande (augmentation de l'ordre du système par 1). Donc, une nouvelle variable de commande auxiliaire v est introduite avec $\dot{v} = u$ [Lev-03].

2.3.1. Synthèse de la loi de commande

La procédure utilisant l'algorithme du MG « Nested » du second ordre ($r = 2$) [Lev-03] pour la conception du contrôleur du MG-Nes2 basé sur le MG terminal est similaire à celle du MGT (2.12).

$$u_{MG-Nes2} = u_{eq} + u_{Nes2} \quad (2.24)$$

$$\dot{u}_{Nes2} = -k_{Nes2} \text{sign}(\dot{s} + |s|^{1/2} \text{sign}(s)) \quad (2.25)$$

tel que u_{eq} est défini par (2.11), u_{Nes2} est le terme du MG-Nes2 (qui permet de compenser les incertitudes) et k_{Nes2} est le gain de glissement ($k_{Nes2} > 0$). Lorsque le terme de commutation contient une fonction discontinue sous intégration, l'effet du chattering est fortement atténué. Il est à noter que, la conception du terme u_{Nes2} nécessite d'avoir des information sur la dérivée de la surface de glissement \dot{s} . Pour cela, un différentiateur du MG exact de premier ordre (dérivateur de la forme non récursive) est utilisé [Lev-03] :

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = -\delta_0 |z_0 - s|^{1/2} \text{sign}(z_0 - s) + z_1 \\ \dot{z}_1 = -\delta_1 \text{sign}(z_0 - s) \end{cases} \quad (2.26)$$

Lorsque les paramètres du dérivateur δ_0 et δ_1 sont convenablement choisis, la stabilisation du dérivateur (2.26) permet d'assurer les égalités $z_0 = s$ et $z_1 = \dot{s}$. Donc (2.25) peut être réécrite comme suit :

$$\dot{u}_{Nes2} = -k_{Nes2} \text{sign}(z_1 + |z_0|^{1/2} \text{sign}(z_0)) \quad (2.27)$$

Sous l'action de la loi de commande (2.24), la dérivée par rapport au temps de la surface de glissement (2.8) est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{\sigma} + \beta_1 \alpha_1 |\sigma|^{\alpha_1-1} \dot{\sigma} + \beta_2 \alpha_2 |\dot{\sigma}|^{\alpha_2-1} (f(\underline{x}, t) - \ddot{x}_d + D(\underline{x}, t) + u_{eq} + u_{Nes2}) \\ &= \beta_2 \alpha_2 |\dot{\sigma}|^{\alpha_2-1} \left(D(\underline{x}, t) - k_{Nes2} \int_0^t \text{sign}(z_1 + |z_0|^{1/2} \text{sign}(z_0)) dt \right) \\ \dot{s} &= \rho(\dot{\sigma}) \left(D(\underline{x}, t) - k_{Nes2} \int_0^t \text{sign}(\sigma_z) dt \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

où $\rho(\dot{\sigma}) = \beta_2 \alpha_2 |\dot{\sigma}|^{\alpha_2-1}$ et $\sigma_z = z_1 + |z_0|^{1/2} \text{sign}(z_0)$ avec $z_0 = s$ et $z_1 = \dot{s}$. D'après la convergence du dérivateur (2.26) et la surface de glissement terminal prédéfini dans (2.6), lorsque $\sigma_z = 0$, un régime glissant terminal MGT se produit et $\dot{s} = -|s|^{1/2} \text{sign}(s)$, dans ce cas la surface de glissement s est considérée comme un attracteur terminal qui atteint zéro en temps fini. Similairement au théorème 2.1, la stabilité du système prévu par la loi de commande (2.24) est assurée lorsque la valeur optimale du gain de glissement k_{Nes2}^* satisfait la condition suivante :

$$k_{Nes2}^* \int_0^t \text{sign}(\sigma_z) dt \geq \eta + \Delta \quad (2.29)$$

Comme il est susmentionné (Remarque 2.5), des systèmes flous type-2 de la forme (2.23) seront implémentés afin d'approximer la dynamique inconnue du système $f(\underline{x}, t)$ et d'estimer le gain de glissement k_{Nes2} . Les SFT-2 utilisées sont données comme suit :

$$\hat{f}(\underline{x}, \underline{\theta}_f) = \frac{1}{2} (\theta_{fr}^T \xi_{fr} + \theta_{fl}^T \xi_{fl}) = \underline{\theta}_f^T \underline{\xi}_f(\underline{x}) \quad (2.30)$$

$$\hat{k}_{Nes2}(s, \underline{\theta}_2) = \frac{1}{2} (\theta_{2r}^T \xi_{2r} + \theta_{2l}^T \xi_{2l}) = \underline{\theta}_2^T \underline{\xi}_2(s) \quad (2.31)$$

où $\underline{\theta}_f^T = [\theta_{fl}^T \ \theta_{fr}^T]$ et $\underline{\theta}_2^T = [\theta_{2l}^T \ \theta_{2r}^T]$, $\underline{\theta}_f$ et $\underline{\theta}_2$ sont des vecteurs de paramètres ajustables. D'après (2.31), le terme u_{Nes2} sera donc remplacé par \hat{u}_{Nes2} tel que :

$$\hat{u}_{Nes2}(s, \underline{\theta}_2) = -\hat{k}_{Nes2} \int_0^t \text{sign}(\sigma_z) dt \quad (2.32)$$

Maintenant, la loi de commande floue par mode glissant « Nested » d'ordre 2 (FMG-Nes2) basée sur le MG terminal peut être développée, en utilisant le même raisonnement pour obtenir la loi de commande (2.24). La fonction inconnue $f(\underline{x}, t)$ et le terme de commande u_{Nes2} seront remplacés par les systèmes flous $\hat{f}(\underline{x}, \underline{\theta}_f)$ avec les entrées $x_i (i=1,2)$ et $\hat{u}_{Nes2}(s, \underline{\theta}_2)$ avec une seule entrée s respectivement, dont les lois d'adaptation des paramètres ajustables sont déduites à partir de l'étude de la stabilité au sens de Lyapunov. Cette adaptation permettra d'anticiper au mieux les perturbations et les incertitudes en fournissant la valeur optimale k_{Nes2}^* . La loi de commande globale FMG-Nes2 s'exprime alors par :

$$u_{FMG-Nes2} = u_{eq} + \hat{u}_{Nes2} \quad (2.33)$$

$$u_{eq} = - \left[\hat{f}(\underline{x}, \underline{\theta}_f) - \ddot{x}_d + \frac{1}{\beta_2 \alpha_2} \left(\dot{\sigma}^{(2-\alpha_2)} + \beta_1 \alpha_1 |\sigma|^{\alpha_1-1} \dot{\sigma}^{(2-\alpha_2)} \right) \right] \quad (2.34)$$

2.3.2. Analyse de la stabilité

La stabilité du système (2.3) en boucle fermée utilisant la loi de commande (2.33) (avec (2.32) et (2.34)) est assurée en utilisant l'approche de Lyapunov. Afin d'ajuster les vecteurs des paramètres $\underline{\theta}_f$ et $\underline{\theta}_2$, on définit leurs paramètres optimaux $\underline{\theta}_f^*$ et $\underline{\theta}_2^*$ comme suit,

$$\underline{\theta}_f^* = \operatorname{argmin}_{\underline{\theta}_f \in \Omega_f} \left[\sup_{\underline{x} \in \Omega_x} \left| \hat{f}(\underline{x}, \underline{\theta}_f) - f(\underline{x}, t) \right| \right] \quad \text{et} \quad \underline{\theta}_2^* = \operatorname{argmin}_{\underline{\theta}_2 \in \Omega_2} \left[\sup_{s \in \Omega_s} \left| \hat{u}_{Nes2}(s, \underline{\theta}_2) - u_{Nes2} \right| \right],$$

où $\Omega_f, \Omega_2, \Omega_x$ et Ω_s sont des ensembles de contraintes pour les limites appropriées sur $\underline{\theta}_f, \underline{\theta}_2, \underline{x}$ et s respectivement, qui sont définis comme : $\Omega_f = \{ \underline{\theta}_f : |\underline{\theta}_f| \leq M_f \}$, $\Omega_2 = \{ \underline{\theta}_2 : |\underline{\theta}_2| \leq M_2 \}$, $\Omega_x = \{ x : |x| \leq M_x \}$ et $\Omega_s = \{ s : |s| \leq M_s \}$, où M_f, M_2, M_x et M_s sont des constantes positives. On définit l'erreur minimum d'estimation (ou d'approximation) par : $W = f(\underline{x}, t) - \hat{f}(\underline{x}, \underline{\theta}_f^*)$, en supposant qu'elle est bornée comme suit :

$$|W| \leq |f(\underline{x}, t)| - \underline{\theta}_f^{*T} \underline{\xi}_f(\underline{x}) \leq F - M_f.$$

En prenant $F - M_f = \alpha_F$, il est clairement conclu que W est bornée ($W \leq \alpha_F$, c'est-à-dire $W \in L_\infty$). D'autre part, l'approximation optimale du terme de commutation peut être définie comme suit :

$$\hat{u}_{Nes2}^*(s, \underline{\theta}_2^*) = -\underline{\theta}_2^{*T} \underline{\xi}_2(s) \int_0^t \operatorname{sign}(\sigma_z) dt \quad (2.35)$$

Théorème 2.2. En considérant la surface de glissement terminal (2.8) pour le système chaotique incertain (2.3), la loi de commande (2.33) permet d'assurer une convergence de la trajectoire du système vers l'hypersurface $s = 0$ dans le plan de phase $(\sigma, \dot{\sigma})$ en temps fini.

Démonstration. Considérons la fonction de Lyapunov $V = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2\gamma_f}\underline{\theta}_f^T \tilde{\underline{\theta}}_f + \frac{1}{2\gamma_2}\underline{\theta}_2^T \tilde{\underline{\theta}}_2$, tels que $\tilde{\underline{\theta}}_f = \underline{\theta}_f - \underline{\theta}_f^*$, $\tilde{\underline{\theta}}_2 = \underline{\theta}_2 - \underline{\theta}_2^*$, γ_f et γ_2 sont des constantes positives arbitraires. Sachant que $\dot{\tilde{\underline{\theta}}}_f = \dot{\underline{\theta}}_f$ et $\dot{\tilde{\underline{\theta}}}_2 = \dot{\underline{\theta}}_2$, la dérivée de V par rapport au temps est :

$$\dot{V} = s\dot{s} + \frac{1}{\gamma_f}\underline{\theta}_f^T \dot{\tilde{\underline{\theta}}}_f + \frac{1}{\gamma_2}\underline{\theta}_2^T \dot{\tilde{\underline{\theta}}}_2 \quad (2.36)$$

En utilisant la loi de commande FMG-Nes2 (2.33) pour le système (2.3), puis en ajoutant et retranchant les termes $\hat{f}(\underline{x}, \underline{\theta}_f^*)$ et $\hat{u}_{Nes2}^*(s, \underline{\theta}_2^*)$, la dérivée de la surface de glissement (2.8) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \rho(\dot{\sigma}) \left(W - (\underline{\theta}_f - \underline{\theta}_f^*)^T \underline{\xi}_f(\underline{x}) - (\underline{\theta}_2 - \underline{\theta}_2^*)^T \underline{\xi}_2(s) \int_0^t \text{sign}(\sigma_z) dt + \hat{u}_{Nes2}^*(s, \underline{\theta}_2^*) + D(\underline{x}, t) \right) \\ &= \rho(\dot{\sigma}) \left(W - \underline{\theta}_f^T \underline{\xi}_f(\underline{x}) - \underline{\theta}_2^T \underline{\xi}_2(s) \int_0^t \text{sign}(\sigma_z) dt + \hat{u}_{Nes2}^*(s, \underline{\theta}_2^*) + D(\underline{x}, t) \right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

La substitution de (2.39) dans (2.38) donne :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\rho(\dot{\sigma}) \left(W - \underline{\theta}_f^T \underline{\xi}_f(\underline{x}) - \underline{\theta}_2^T \underline{\xi}_2(s) \int_0^t \text{sign}(\sigma_z) dt + \hat{u}_{Nes2}^*(s, \underline{\theta}_2^*) + D(\underline{x}, t) \right) + \frac{1}{\gamma_f}\underline{\theta}_f^T \dot{\tilde{\underline{\theta}}}_f + \frac{1}{\gamma_2}\underline{\theta}_2^T \dot{\tilde{\underline{\theta}}}_2 \\ &= s\rho(\dot{\sigma}) \left(W + \hat{u}_{Nes2}^*(s, \underline{\theta}_2^*) + D(\underline{x}, t) \right) + \frac{1}{\gamma_f}\underline{\theta}_f^T \left(\dot{\tilde{\underline{\theta}}}_f - \gamma_f s\rho(\dot{\sigma}) \underline{\xi}_f(\underline{x}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_2}\underline{\theta}_2^T \left(\dot{\tilde{\underline{\theta}}}_2 - \gamma_2 s\rho(\dot{\sigma}) \underline{\xi}_2(s) \int_0^t \text{sign}(\sigma_z) dt \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

En choisissant les lois d'adaptation suivantes :

$$\dot{\tilde{\underline{\theta}}}_f = \gamma_f s\rho(\dot{\sigma}) \underline{\xi}_f(\underline{x}) \quad (2.39)$$

$$\dot{\tilde{\underline{\theta}}}_2 = \gamma_2 s\rho(\dot{\sigma}) \underline{\xi}_2(s) \int_0^t \text{sign}(\sigma_z) dt . \quad (2.40)$$

et comme k_{Nes2}^* est l'approximation optimale de k_{Nes2} qui vérifiant la condition (2.29), l'équation (2.38) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\rho(\dot{\sigma})W + s\rho(\dot{\sigma})D(\underline{x}, t) - s\rho(\dot{\sigma})k_{Nes2}^* \int_0^t \text{sign}(\sigma_z) dt \\ &\leq \rho(\dot{\sigma})|s| \left(|W| + \Delta - k_{Nes2}^* \int_0^t \text{sign}(\sigma_z) dt \right) \\ &\leq \rho(\dot{\sigma})(\alpha_F - \eta)|s| \end{aligned} \quad (2.41)$$

Selon le théorème d'approximation universelle pour les systèmes flous, il est prévu que α_F soit très petit (s'il n'est pas égal à zéro) et d'après la preuve du théorème 2.1. On peut constater que $\dot{V} \leq 0$, ce qui implique que la surface de glissement terminal (2.8) est attractive et que l'erreur de poursuite (noté également σ) converge vers zéro en temps fini. Par conséquent, le contrôleur proposé FMG-Nes2 garantit la convergence des états du système chaotique incertain (2.3) vers leurs références en temps fini.

Remarque 2.7. Selon la démonstration du théorème 2.1 et à partir de l'inégalité (2.41), le terme \dot{V} garantit que tous les signaux du système sont bornés. Par conséquent, la surface de glissement terminal s et sa dérivée sont également bornées. Selon le lemme de Barbalat [Slo-91] s convergera vers zéro en temps fini. Ce qui implique que la stabilité du système en temps fini est également garantie.

2.4. Commande floue par MG-2 « Quasi-continuous » à base du MG terminal

L'algorithme «Quasi-continuous» permet de générer une commande lisse avec une haute atténuation du chattering (notamment durant la phase d'approche) par rapport aux autres contrôleurs [Lev-05b], tout en préservant les mêmes avantages des MGs d'ordre supérieur. La loi de commande par MG « Quasi-continuous » d'ordre 2 ($r = 2$) (dénote MG-Qc2) utilisant le MG terminal est conçu comme suit :

$$u_{MG-Qc2} = u_{eq} + u_{Qc2} \quad (2.42)$$

$$\dot{u}_{Qc2} = -k_{Qc2} \left(\frac{\dot{s} + |s|^{1/2} \text{sign}(s)}{|\dot{s}| + |s|^{1/2}} \right) \quad (2.43)$$

où u_{eq} est donnée par (2.11), u_{Qc2} est le terme du MG « Quasi-continuous » du second ordre et k_{Qc2} est le gain de glissement ($k_{Qc2} > 0$). En utilisant le différentiateur (2.26), (2.43) est exprimé alors comme suit :

$$\dot{u}_{Qc2} = -k_{Qc2} \left(\frac{z_1 + |z_0|^{1/2} \text{sign}(z_0)}{|z_1| + |z_0|^{1/2}} \right) \quad (2.44)$$

Rappelons que les égalités $z_0 = s$ et $z_1 = \dot{s}$ sont satisfaites après la stabilisation du dérivateur (2.26). Similairement à l'étude de la stabilité du système (2.3) sous l'action du contrôleur MG-Nes2 (2.24), la dérivée temporelle de la surface de glissement (2.8) sous le contrôleur MG-Qc2 (2.42) est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \beta_2 \alpha_2 |\dot{\sigma}|^{\alpha_2 - 1} (D(\underline{x}, t) + u_{Qc2}) \\ &= \rho(\dot{\sigma}) \left(D(\underline{x}, t) - k_{Qc2} \int_0^t \frac{z_1 + |z_0|^{1/2} \text{sign}(z_0)}{|z_1| + |z_0|^{1/2}} dt \right) \end{aligned}$$

$$\dot{s} = \rho(\dot{\sigma}) \left(D(\underline{x}, t) - k_{Qc2} \text{sign}(z_0) \int_0^t \frac{z_1 \text{sign}(z_0) + |z_0|^{1/2}}{|z_1| + |z_0|^{1/2}} dt \right) \quad (2.45)$$

En supposant que $\sigma_0 = \frac{z_1 + |z_0|^{1/2} \text{sign}(z_0)}{|z_1| + |z_0|^{1/2}}$ et $\sigma_1 = \frac{z_1 \text{sign}(z_0) + |z_0|^{1/2}}{|z_1| + |z_0|^{1/2}}$. Il est clair que σ_1 est

bornée ($\sigma_1 \leq 1$), la stabilité du système utilisant la loi de commande (2.42) est donc garantie si l'optimum du gain de glissement k_{Qc2}^* vérifie l'inégalité suivante :

$$k_{Qc2}^* \int_0^t \sigma_1 dt \geq \eta + \Delta \quad (2.46)$$

Dans ce qui suit, la commande floue par MG « Quasi-continuous » du second ordre (FMG-Qc2) basée sur le MG terminal est développée, en utilisant la même procédure de conception de la commande FMG-Nes2 (2.33), le contrôleur FMG-Qc2 est donné par :

$$u_{FMG-Qc2} = u_{eq} + \hat{u}_{Qc2}(s, \underline{\theta}_{Q2}) \quad (2.47)$$

avec u_{eq} est donné par (2.34) et $\hat{u}_{Qc2}(s, \underline{\theta}_{Q2})$ est défini comme suit :

$$\hat{u}_{Qc2}(s, \underline{\theta}_{Q2}) = -\hat{k}_{Qc2} \int_0^t \sigma_0 dt \quad (2.48)$$

$$\hat{k}_{Qc2}(s, \underline{\theta}_{Q2}) = \frac{1}{2} (\theta_{Q2r}^T \xi_{Q2r} + \theta_{Q2l}^T \xi_{Q2l}) = \underline{\theta}_{Q2}^T \underline{\xi}_{Q2}(s) \quad (2.49)$$

où $\underline{\theta}_{Q2}^T = [\theta_{Q2l}^T \quad \theta_{Q2r}^T]$ est le vecteur des paramètres ajustables. La stabilité du système utilisant la loi de commande (2.47) peut être garantie en utilisant le même raisonnement que pour le théorème 2.1.

Démonstration. Définissons la fonction de Lyapunov $V = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2\gamma_f} \underline{\theta}_f^T \tilde{\underline{\theta}}_f + \frac{1}{2\gamma_{Q2}} \underline{\theta}_{Q2}^T \tilde{\underline{\theta}}_{Q2}$

avec $\gamma_f, \gamma_{Q2} > 0$, $\tilde{\underline{\theta}}_{Q2} = \underline{\theta}_{Q2} - \underline{\theta}_{Q2}^*$ et $\underline{\theta}_{Q2}^*$ est l'optimum de $\underline{\theta}_{Q2}$ tel que :

$$\underline{\theta}_{Q2}^* = \arg \min_{\underline{\theta}_{Q2} \in \Omega_{Q2}} \left[\sup_{s \in \Omega_s} |\hat{u}_{Qc2}(s, \underline{\theta}_{Q2}) - u_{Qc2}| \right] \text{ avec } \Omega_{Q2} = \{ \underline{\theta}_{Q2} : |\underline{\theta}_{Q2}| \leq M_{Q2} \} \text{ et } \Omega_s = \{ s : |s| \leq M_s \},$$

Ω_{Q2} et Ω_s sont les ensembles des contraintes pour $\underline{\theta}_{Q2}$ et s avec les bornes des paramètres estimés M_{Q2} et M_s respectivement. L'optimum du terme u_{Qc2} est donné par :

$$\hat{u}_{Qc2}^*(s, \underline{\theta}_{Q2}^*) = -\underline{\theta}_{Q2}^{*T} \underline{\xi}_{Q2}(s) \int_0^t \sigma_0 dt,$$

La dérivée V temporelle par rapport au temps donne :

$$\dot{V} = s\dot{s} + \frac{1}{\gamma_f} \underline{\theta}_f^T \dot{\tilde{\underline{\theta}}}_f + \frac{1}{\gamma_{Q2}} \underline{\theta}_{Q2}^T \dot{\tilde{\underline{\theta}}}_{Q2} \quad (2.50)$$

En utilisant la loi de commande FMG-Qc2 (2.47) pour le système chaotique incertain (2.3), la dérivée de la surface de glissement s est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \rho(\dot{\sigma}) \left(W - (\underline{\theta}_f - \underline{\theta}_f^*)^T \underline{\xi}_f(\underline{x}) - (\underline{\theta}_{Q2} - \underline{\theta}_{Q2}^*)^T \underline{\xi}_{Q2}(s) \int_0^t \sigma_0 dt + \hat{u}_{Qc2}^*(s, \underline{\theta}_{Q2}^*) + D(\underline{x}, t) \right) \\ \dot{s} &= \rho(\dot{\sigma}) \left(W - \underline{\theta}_f^T \underline{\xi}_f(\underline{x}) - \underline{\theta}_{Q2}^T \underline{\xi}_{Q2}(s) \int_0^t \sigma_0 dt + \hat{u}_{Qc2}^*(s, \underline{\theta}_{Q2}^*) + D(\underline{x}, t) \right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

La substitution de (2.51) dans (2.50) donne :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\rho(\dot{\sigma}) \left(W - \underline{\theta}_f^T \underline{\xi}_f(\underline{x}) - \underline{\theta}_{Q2}^T \underline{\xi}_{Q2}(s) \int_0^t \sigma_0 dt + \hat{u}_{Qc2}^*(s, \underline{\theta}_{Q2}^*) + D(\underline{x}, t) \right) + \frac{1}{\gamma_f} \underline{\theta}_f^T \dot{\underline{\theta}}_f + \frac{1}{\gamma_{Q2}} \underline{\theta}_{Q2}^T \dot{\underline{\theta}}_{Q2} \\ \dot{V} &= s\rho(\dot{\sigma}) \left(W + \hat{u}_{Qc2}^*(s, \underline{\theta}_{Q2}^*) + D(\underline{x}, t) \right) + \frac{1}{\gamma_f} \underline{\theta}_f^T \left(\dot{\underline{\theta}}_f - \gamma_f s\rho(\dot{\sigma}) \underline{\xi}_f(\underline{x}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_{Q2}} \underline{\theta}_{Q2}^T \left(\dot{\underline{\theta}}_{Q2} - \gamma_{Q2} s\rho(\dot{\sigma}) \underline{\xi}_{Q2}(s) \int_0^t \sigma_0 dt \right) \end{aligned} \quad (2.52)$$

En choisissant les lois d'adaptation suivantes :

$$\dot{\underline{\theta}}_f = \gamma_f s\rho(\dot{\sigma}) \underline{\xi}_f(\underline{x}) \quad (2.53)$$

$$\dot{\underline{\theta}}_{Q2} = \gamma_{Q2} s\rho(\dot{\sigma}) \underline{\xi}_{Q2}(s) \int_0^t \sigma_0 dt \quad (2.54)$$

La dérivée de V devienne alors :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\rho(\dot{\sigma})W + s\rho(\dot{\sigma})D(\underline{x}, t) - s\rho(\dot{\sigma})k_{Qc2}^* \int_0^t \sigma_0 dt \\ &\leq \rho(\dot{\sigma})|s| \left(|W| + \Delta - k_{Qc2}^* \int_0^t \sigma_1 dt \right) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Lorsque la valeur optimale du gain de glissement k_{Qc2}^* satisfait la condition (2.46) et conformément à la propriété d'approximation universelle des systèmes flous, on a $\dot{V} \leq \rho(\dot{\sigma})(\alpha_f - \eta)|s|$. En outre, basé sur la preuve du théorème 2.1, $\dot{V} \leq 0$ et la surface de glissement s atteint zéro en temps fini, ce qui implique que l'erreur converge également vers zéro en temps fini. Par conséquent, le contrôleur FMG-Qc2 proposé (2.47) permet d'assurer la stabilité du système (2.3) en temps fini.

2.5. Commande floue par MG-2 « Super Twisting » à base du MG terminal

Différemment des autres algorithmes du MG-2, l'algorithme Super Twisting (ST) ne s'applique qu'à des systèmes de degré relatif 1 par rapport à la variable de glissement (quel que soit l'ordre de système) ; c'est-à-dire que la commande apparaît explicitement dans la première dérivée de la surface de glissement s [Cha-15]. Étant donné que le degré relatif du système chaotique (2.3) par rapport à la surface de glissement terminal (2.8) est égal à 1, l'algorithme

ST peut être appliqué directement [Lev-93]. La loi de commande globale utilisant le ST est composée de la partie équivalente et des deux termes ST u_{ST1} et u_{ST2} :

$$u_{MG-ST} = u_{eq} + u_{ST1} + u_{ST2} \quad (2.56)$$

$$u_{ST1} = -k_{ST1} |s|^{(1/2)} \text{sign}(s) \quad (2.57)$$

$$\dot{u}_{ST2} = -k_{ST2} \text{sign}(s) \quad (2.58)$$

où u_{eq} est définie par (2.11), k_{ST1} et k_{ST2} sont les gains de glissement ($k_{ST1} > 0$, $k_{ST2} > 0$). Il est à noter que le choix adéquat de ces gains (comme il est indiqué dans [Lev-93]) permet d'assurer la stabilisation en temps fini de l'algorithme ST et par conséquent d'atteindre un régime glissant du second ordre (convergence en temps fini de l'ensemble de glissement : $s = \dot{s} = 0$). En utilisant la loi de commande (2.56), la dérivée temporelle de la surface de glissement (2.8) est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \beta_2 \alpha_2 |\dot{\sigma}|^{\alpha_2-1} (D(\underline{x}, t) + u_{ST1} + u_{ST2}) \\ &= \rho(\dot{\sigma}) \left(D(\underline{x}, t) - k_{ST1} |s|^{(1/2)} \text{sign}(s) - \int_0^t k_{ST2} \text{sign}(s) dt \right) \end{aligned}$$

Similairement aux contrôleurs précédents, le contrôleur MG-ST (2.56) permet de garantir la stabilité du système (2.3) au sens de Lyapunov si les valeurs optimales des gains de glissement (ST) k_{ST1}^* et k_{ST2}^* vérifient la condition suivante :

$$k_{ST1}^* |s|^{(1/2)} - k_{ST2}^* t \geq \eta + \Delta \quad (2.59)$$

Afin de simplifier la sélection des gains ST ainsi que d'atténuer fortement l'effet du chattering, on définit tout d'abord les signaux de commutation des termes u_{ST1} et u_{ST2} comme étant $\psi_{ST1} = k_{ST1} \text{sign}(s)$ et $\psi_{ST2} = k_{ST2} \text{sign}(s)$ respectivement. Puis, la loi de commande floue par MG-2 utilisant ST (FMG-ST) est synthétisée similairement aux contrôleurs précédents :

$$u_{FMG-ST} = u_{eq} + \hat{u}_{ST1}(s, \underline{\theta}_{ST1}) + \hat{u}_{ST2}(s, \underline{\theta}_{ST2}) \quad (2.60)$$

tels que u_{eq} est donnée par (2.34) et les approximateurs flous $\hat{u}_{ST1}(s, \underline{\theta}_{ST1})$ et $\hat{u}_{ST2}(s, \underline{\theta}_{ST2})$ sont définis comme suit :

$$\hat{u}_{ST1}(s, \underline{\theta}_{ST1}) = -\hat{\psi}_{ST1} |s|^{(1/2)} \quad (2.61)$$

$$\hat{u}_{ST2}(s, \underline{\theta}_{ST2}) = -\hat{\psi}_{ST2} t \quad (2.62)$$

où $\hat{\psi}_{ST1} = \underline{\theta}_{ST1}^T \underline{\xi}_{ST1}(s)$ et $\hat{\psi}_{ST2} = \underline{\theta}_{ST2}^T \underline{\xi}_{ST2}(s)$ représentent l'estimation des gains de commande (nommées signaux de commutation) ψ_{ST1} et ψ_{ST2} respectivement, dont leurs valeurs optimales vérifient : $|\hat{u}_{ST1}^*| = k_{ST1}^* |s|^{(1/2)}$ et $|\hat{u}_{ST2}^*| = k_{ST2}^* t$. $\underline{\theta}_{ST1}$ et $\underline{\theta}_{ST2}$ sont des vecteurs des paramètres ajustables tels que $\underline{\theta}_{ST1}^T = [\theta_{ST1,l}^T \ \theta_{ST1,r}^T]$ et $\underline{\theta}_{ST2}^T = [\theta_{ST2,l}^T \ \theta_{ST2,r}^T]$. Les lois d'adaptation de $\underline{\theta}_{ST1}$,

$\underline{\theta}_{ST1}$, $\underline{\theta}_{ST2}$ et $\underline{\theta}_f$ sont déduites à partir de l'étude de la stabilité du système (2.3) appliquant la loi de commande (2.60) comme suit :

$$\dot{\underline{\theta}}_f = \gamma_f s \rho(\dot{\sigma}) \underline{\xi}_f(\underline{x}) \quad (2.63)$$

$$\dot{\underline{\theta}}_{ST1} = \gamma_{ST1} s \rho(\dot{\sigma}) \underline{\xi}_{ST1}(s) |s|^{(1/2)} \quad (2.64)$$

$$\dot{\underline{\theta}}_{ST2} = \gamma_{ST2} s \rho(\dot{\sigma}) \underline{\xi}_{ST2}(s) t \quad (2.65)$$

où γ_f, γ_{ST1} et γ_{ST2} sont des constantes positives arbitraires.

Démonstration. Avec un choix approprié des paramètres γ_f, γ_{ST1} et γ_{ST2} , on considère la

fonction de Lyapunov suivante : $V = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2\gamma_f} \underline{\theta}_f^T \tilde{\underline{\theta}}_f + \frac{1}{2\gamma_{ST1}} \underline{\theta}_{ST1}^T \tilde{\underline{\theta}}_{ST1} + \frac{1}{2\gamma_{ST2}} \underline{\theta}_{ST2}^T \tilde{\underline{\theta}}_{ST2}$.

où $\tilde{\underline{\theta}}_{STi} = \underline{\theta}_{STi} - \underline{\theta}_{STi}^*$, ($i=1,2$), $\underline{\theta}_{STi}^*$ sont les optimums de $\underline{\theta}_{STi}$ tel que :

$$\underline{\theta}_{STi}^* = \underset{\underline{\theta}_{STi} \in \Omega_{STi}}{\operatorname{argmin}} \left[\sup_{s \in \Omega_s} |\hat{u}_{STi}(s, \underline{\theta}_{STi}) - u_{STi}| \right], \text{ avec } \Omega_{STi} = \{ \underline{\theta}_{STi} : |\underline{\theta}_{STi}| \leq M_{STi} \} \text{ et } \Omega_s = \{ s : |s| \leq M_s \},$$

Ω_{STi} , ($i=1,2$) et Ω_s sont les ensembles de contraintes avec les bornes (des paramètres estimés) M_{STi} , ($i=1,2$) et M_s pour $\underline{\theta}_{STi}$, ($i=1,2$) et s respectivement.

La dérivée par rapport au temps de V est donnée par :

$$\dot{V} = s \dot{s} + \frac{1}{\gamma_f} \underline{\theta}_f^T \dot{\tilde{\underline{\theta}}}_f + \frac{1}{\gamma_{ST1}} \underline{\theta}_{ST1}^T \dot{\tilde{\underline{\theta}}}_{ST1} + \frac{1}{\gamma_{ST2}} \underline{\theta}_{ST2}^T \dot{\tilde{\underline{\theta}}}_{ST2} \quad (2.66)$$

En utilisant la loi de commande (2.60) pour le système incertain (2.3), puis en dérivant la surface de glissement terminal (2.8), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \rho(\dot{\sigma}) \left(W - (\underline{\theta}_f - \underline{\theta}_f^*)^T \underline{\xi}_f(\underline{x}) - (\underline{\theta}_{ST1} - \underline{\theta}_{ST1}^*)^T \underline{\xi}_{ST1}(s) |s|^{(1/2)} - (\underline{\theta}_{ST2} - \underline{\theta}_{ST2}^*)^T \underline{\xi}_{ST2}(s) t \right) \\ &\quad + \rho(\dot{\sigma}) \left(\hat{u}_{ST1}^*(s, \underline{\theta}_{ST1}^*) + \hat{u}_{ST2}^*(s, \underline{\theta}_{ST2}^*) + D(\underline{x}, t) \right) \\ \dot{s} &= \rho(\dot{\sigma}) \left(W - \underline{\theta}_f^T \underline{\xi}_f(\underline{x}) - \underline{\theta}_{ST1}^T \underline{\xi}_{ST1}(s) |s|^{(1/2)} - \underline{\theta}_{ST2}^T \underline{\xi}_{ST2}(s) t \right) \\ &\quad + \rho(\dot{\sigma}) \left(\hat{u}_{ST1}^*(s, \underline{\theta}_{ST1}^*) + \hat{u}_{ST2}^*(s, \underline{\theta}_{ST2}^*) + D(\underline{x}, t) \right) \end{aligned} \quad (2.67)$$

La substitution de (2.67) dans (2.66) donne :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \rho(\dot{\sigma}) \left(W - \underline{\theta}_f^T \underline{\xi}_f(\underline{x}) - \underline{\theta}_{ST1}^T \underline{\xi}_{ST1}(s) |s|^{(1/2)} - \underline{\theta}_{ST2}^T \underline{\xi}_{ST2}(s) t + \hat{u}_{ST1}^*(s, \underline{\theta}_{ST1}^*) + \hat{u}_{ST2}^*(s, \underline{\theta}_{ST2}^*) + D(\underline{x}, t) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_f} \underline{\theta}_f^T \dot{\tilde{\underline{\theta}}}_f + \frac{1}{\gamma_{ST1}} \underline{\theta}_{ST1}^T \dot{\tilde{\underline{\theta}}}_{ST1} + \frac{1}{\gamma_{ST2}} \underline{\theta}_{ST2}^T \dot{\tilde{\underline{\theta}}}_{ST2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & s\rho(\dot{\sigma})\left(W + \hat{u}_{ST1}^*(s, \underline{\theta}_{ST1}^*) + \hat{u}_{ST2}^*(s, \underline{\theta}_{ST2}^*) + D(\underline{x}, t)\right) + \frac{1}{\gamma_f} \underline{\theta}_f^T \left(\dot{\underline{\theta}}_f - \gamma_f s\rho(\dot{\sigma}) \underline{\xi}_f(\underline{x})\right) \\ & + \frac{1}{\gamma_{ST1}} \underline{\theta}_{ST1}^T \left(\dot{\underline{\theta}}_{ST1} - \gamma_{ST1} s\rho(\dot{\sigma}) \underline{\xi}_{ST1}(s) |s|^{(1/2)}\right) + \frac{1}{\gamma_{ST2}} \underline{\theta}_{ST2}^T \left(\dot{\underline{\theta}}_{ST2} - \gamma_{ST2} s\rho(\dot{\sigma}) \underline{\xi}_{ST2}(s) t\right) \end{aligned} \quad (2.68)$$

En considérant les lois d'adaptation (2.63)-(2.65), \dot{V} devient :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & s\rho(\dot{\sigma})W + s\rho(\dot{\sigma})D(\underline{x}, t) - s\rho(\dot{\sigma})k_{ST1}^* |s|^{(1/2)} \text{sign}(s) - s\rho(\dot{\sigma})k_{ST2}^* \text{sign}(s)t \\ & \leq \rho(\dot{\sigma})|s| \left(|W| + \Delta - k_{ST1}^* |s|^{(1/2)} - k_{ST2}^* t \right) \end{aligned} \quad (2.69)$$

Comme les approximations optimales k_{ST1}^* et k_{ST2}^* vérifient la condition (2.59), donc la dérivée de V peut être exprimée par l'inégalité suivante : $\dot{V} \leq \rho(\dot{\sigma})(\alpha_f - \eta)|s|$. D'après la démonstration du théorème 2.1, il est conclu que $\dot{V} \leq 0$, ce qui confirme que la stabilité en temps fini du système commandé par le contrôleur proposé (FMG-ST) est assurée.

La mise en œuvre des lois de commande proposées FMG-Nes2, FMG-Qc2 et FMG-ST basées sur le MG terminal est résumée dans le schéma bloc de la figure 2.2.

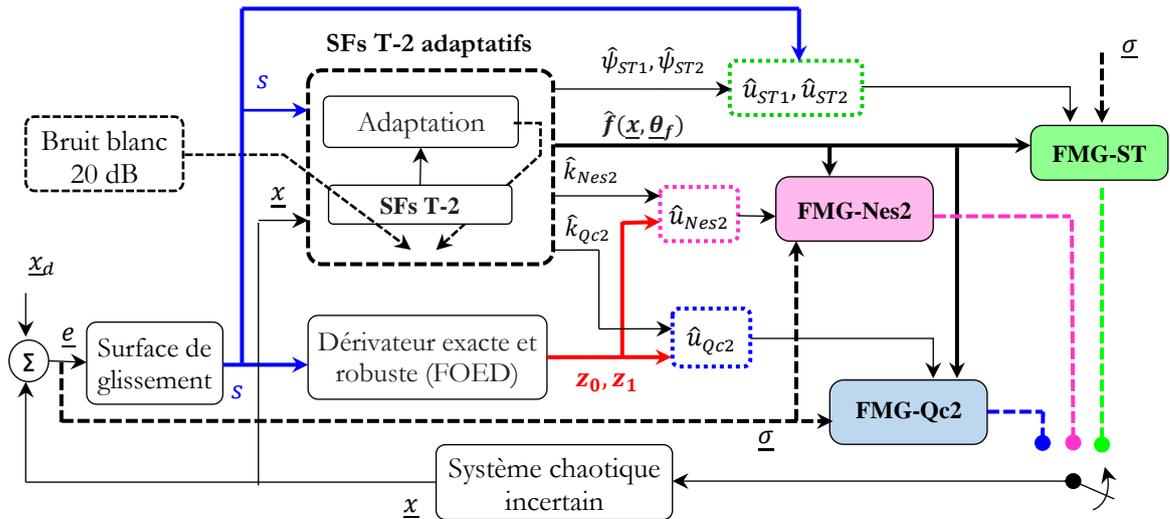


Figure 2.2. Schéma bloc des contrôleurs flous du MG-2 proposés.

2.6. Simulations et résultats

Afin de mettre en évidence l'efficacité des structures de commande proposées pour le contrôle d'un système chaotique, ainsi que d'évaluer leurs performances, les contrôleurs FMG-Nes2 (2.33), FMG-Qc2 (2.47) et FMG-ST (2.60) seront appliqués à tour de rôle sur un système chaotique incertain soumis des perturbations externes. Deux exemples de simulation seront présentés dans cette section, le premier considère un système mono-entrée mono-sortie (SISO) tandis que le deuxième est multi-entrées multi-sorties (MIMO).

2.6.1. Exemple 1

Les lois de commande floue par MG du second ordre utilisant le MG terminal : FMG-Nes2 (2.33), FMG-Qc2 (2.47) et FMG-ST (2.60) sont appliqués pour la stabilisation d'un système chaotique incertain de second ordre, dont sa dynamique est décrite par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = a_1 x_2 + a_2 x_1 - x_1^3 + a_3 \cos(wt) + \Delta f(\underline{x}, t) + d(t) + u(t) \end{cases} \quad (2.70)$$

où $a_1 = -0.4$, $a_2 = -1.1$, $a_3 = -2.1$ et $w = 1.8$. Pour ces valeurs des paramètres caractéristiques et avec les conditions initiales suivantes : $x(0) = [\pi/6 \ 0]^T$ et $x(0) = [\pi/6 + 0.1 \ 0]^T$, l'évolution temporelle des états du système (2.70) autonome ($u(t) = 0$) et son comportement dynamique dans le plan de phase (x_1, x_2) sont illustrés sur la figure 2.3 en l'absence d'incertitudes et de perturbations ($\Delta f(\underline{x}, t) = 0$, $d(t) = 0$). Il est clairement remarqué que le système (2.70) exhibe un attracteur chaotique avec une sensibilité aux conditions initiales.

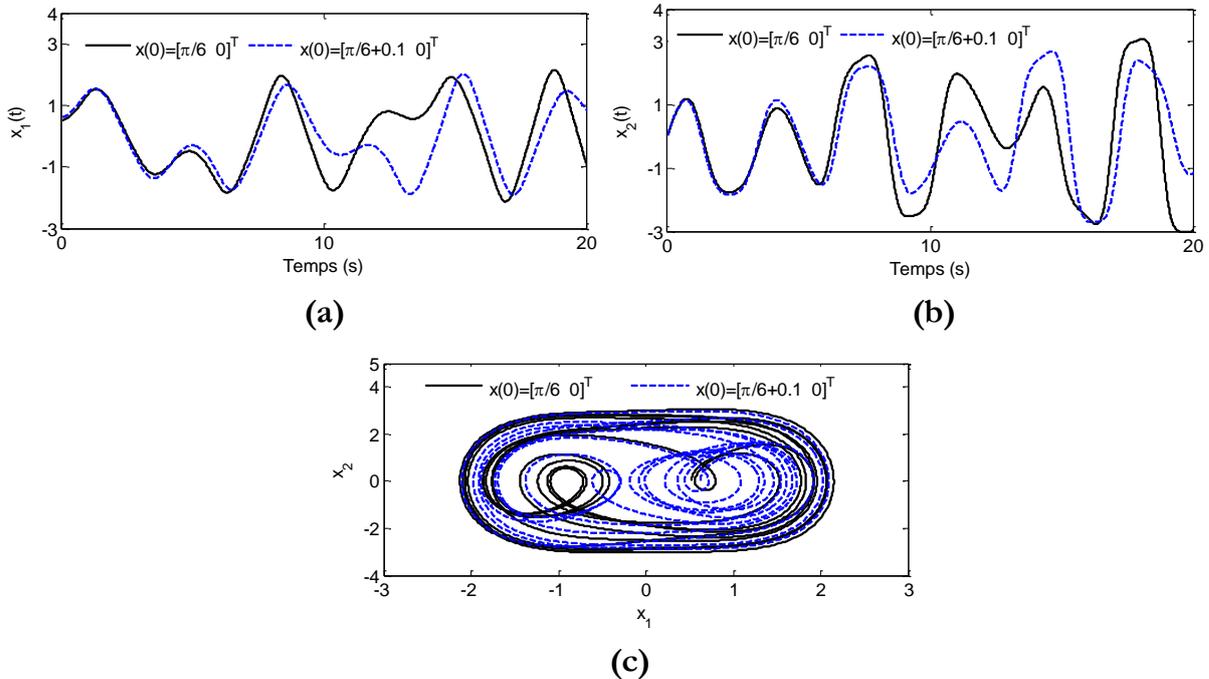


Figure 2.3. Évolution du système ($u(t) = 0$, $\Delta f(\underline{x}, t) = 0$ et $d(t) = 0$).

(a) et (b) Réponses temporelles des états du système $x_i(t)$, ($i = 1, 2$).

(c) Comportement de l'attracteur chaotique dans le plan de phase (x_1, x_2) .

Rappelons que l'objectif des contrôleurs proposés est de stabiliser, en temps fini, le système incertain (2.70) tout en garantissant la robustesse et la stabilité de système en boucle fermée. Dans ce contexte, une surface de glissement terminal s (2.8) avec : $\beta_1 = 0.7$, $\beta_2 = 0.6$, $q = 9$ et $p = 13$, est introduite afin de forcer les états du système $x_i(t)$, ($i = 1, 2$) à suivre, en temps fini, leurs trajectoires de référence $x_d(t) = (\pi/3)(\sin(t) + 0.3\sin(3t))$ et $\dot{x}_d(t)$ respectivement.

Pour construire le système flou $\hat{f}(\underline{x}, \underline{\theta}_f)$ qui permet d'approximer la partie inconnue du système (2.70) (telle que $f(\underline{x}, t) = a_1 x_2 + a_2 x_1 - x_1^3 + a_3 \cos(\omega t)$), on définit sept ensembles flous type-2 intervalle pour chacun des états $x_i(t)$, ($i = 1, 2$), dont les paramètres des fonctions d'appartenance Gaussiennes $\mu_{F_i^l}$, ($l = 1, \dots, 7$ et $i = 1, 2$) sont donnés dans le tableau 2.1, avec un écart type fixe $\sigma_\mu = 0.5$ et une moyenne incertaine $m \in [m_1, m_2]$:

$$\mu_{F_i^l}(x_i) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - m}{\sigma_\mu}\right)^2\right].$$

De même, des systèmes flous type-2 adaptatifs sont également générés afin d'ajuster en ligne les gains de commande (dans les termes discontinus des contrôleurs proposés). Pour ce faire, on considère trois ensembles flous type-2 intervalle caractérisant la surface de glissement s (Négatif, Zéro et Positif) sur tout l'univers de discours et dont les fonctions d'appartenance $\mu_{F_s^j}$, $j = 1, \dots, 3$ sont illustrées sur la figure 2.4. Les autres paramètres sont : $\gamma_f = 15$, $\gamma_2 = \gamma_Q = 45$, $\gamma_{ST1} = 15$ et $\gamma_{ST2} = 35$.

Tableau 2.1. Paramètres des fonctions d'appartenance type-2 intervalle pour x_i ($i = 1, 2$)

	m_1	m_2		m_1	m_2
$\mu_{F_i^1}(x_i)$	-3.5	-2.5	$\mu_{F_i^5}(x_i)$	0.5	1.5
$\mu_{F_i^2}(x_i)$	-2.5	-1.5	$\mu_{F_i^6}(x_i)$	1.5	2.5
$\mu_{F_i^3}(x_i)$	-1.5	-0.5	$\mu_{F_i^7}(x_i)$	2.5	3.5
$\mu_{F_i^4}(x_i)$	-0.5	0.5			

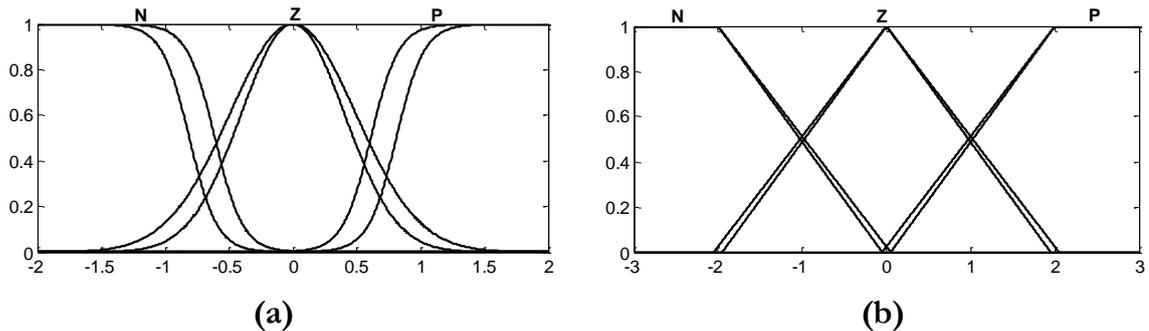


Figure 2.4. Fonctions d'appartenance type-2 intervalle de la variable s .

(a) pour les contrôleurs FMG-Nes2 et FMG-Qc2. (b) pour le contrôleur FMG-ST.

Les résultats de simulation sont présentés en présence des incertitudes $\Delta f(\underline{x}, t) = (1/2)\sin(2\pi x_1(t))\sin(3\pi x_2(t))$ et des perturbations externes $d(t) = \sin(2t)$. Un bruit blanc Gaussien avec un rapport signal sur bruit $SNR=20$ dB (Signal Noise Ratio) est appliqué aux antécédents des systèmes flous utilisés : aux états mesurés $x_i(t)$, $i = 1, 2$ et à la surface de glissement s . Afin d'évaluer les performances des contrôleurs proposés, un autre

contrôleur flou par mode glissant terminal FMGT (utilisant la surface de glissement (2.8)) est également proposé et appliqué pour la stabilisation du système (2.70). La loi de commande FMGT est exprimée par :

$$u_{FMGT} = - \left[\hat{f}(\underline{x}, \underline{\theta}_f) - \ddot{x}_d + \frac{1}{\beta_2 \alpha_2} \left(\dot{\sigma}^{(2-\alpha_2)} + \beta_1 \alpha_1 |\sigma|^{\alpha_1-1} \dot{\sigma}^{(2-\alpha_2)} \right) + k \text{sign}(s) \right] \quad (2.71)$$

Remarque 2.8. Il est bien connu que l'amplitude du chattering est proportionnellement liée au gain de glissement (gain de commande); telle que une grande valeur du gain permet d'atteindre un régime glissant rapide, mais introduit un effet de broutement important au niveau du signal de commande. De ce fait, la valeur du gain doit être choisie convenablement afin d'éviter le compromis entre l'importance de broutement (chattering) et les performances de la commande attendues (rapidité et robustesse). Pour le contrôleur (2.71), le gain de la commande est choisi par simulation comme suit : $k = 10$, cette valeur est suffisante pour compenser les incertitudes et les perturbations.

Les performances de poursuite et de commande obtenues par l'application des contrôleurs proposés FMG-Nes2, FMG-Qc2, FMG-ST et FMGT sont illustrés sur la figure 2.5 avec les conditions initiales $x(0) = [\pi / 6 \ 0]^T$.

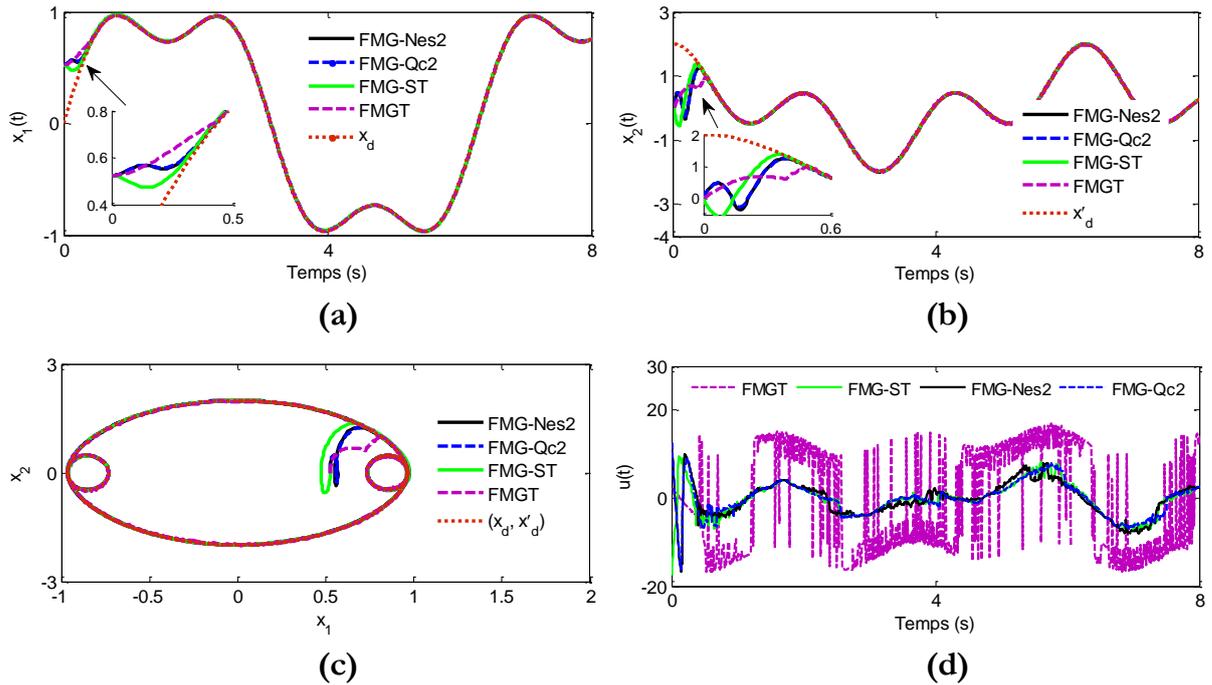


Figure 2.5. Résultats de simulation du système utilisant les contrôleurs proposés.

(a) et (b) Poursuite de trajectoires des états $x_i, (i=1,2)$.

(c) L'attracteur du système dans le plan de phase (x_1, x_2) .

(d) Signaux de commande des contrôleurs proposés.

D'après les résultats de simulation, il est clair que les contrôleurs proposés présentent de bonnes performances de poursuite de trajectoires ainsi que de robustesse, où les états du

système convergent rapidement vers leurs références comme le montre les figures 2.5 (a) et (b), malgré la présence des incertitudes et des perturbations. Par conséquent et selon la figure 2.5. (c), la trajectoire du système dans le plan de phase converge directement vers l'origine (x_d, \dot{x}_d) , cela implique l'élimination du comportement chaotique du système (2.70). D'autre part et concernant les signaux d'efforts générés par les structures de commande proposées, on peut remarquer qu'il n'y a pas une grande différence entre les contrôleurs FMG-Nes2, FMG-Qc2 et FMG-ST, où les signaux de commandes obtenus sont lisses et le chattering est effectivement atténué. En revanche, le contrôleur FMGT exhibe un effet important de chattering au niveau du signal de commande, bien qu'il offre de bonnes performances de poursuite. Le problème de chattering peut être effectivement évité par l'implémentation des lois de commandes du MG-2.

Pour mieux mettre en évidence les performances de poursuite et de commande obtenues par les contrôleurs proposés, on a évalué quelques critères et indicateurs de performances sur l'intervalle $[0, 10 \text{sec}]$ avec un temps d'échantillonnage $\tau = 10^{-2} \text{ sec}$ ($T = t_f / \tau, t_f = 10 \text{ sec}$). L'intégrale de l'erreur absolue $IAE = \int_0^{t_f} |e| dt$ (Integral of Absolute Error) et l'intégrale de l'erreur carrée $ISE = \int_0^{t_f} e^2$ (Integral of Squared Error) sont utilisées comme des critères de performance de poursuite. La variation totale de la commande $TV = \sum_{i=1}^T \dot{u}_i$ (Control Total Variation), l'indicateur de l'effort de la commande $CEI = (1/\sqrt{T}) \left[\sum_{i=1}^T (u_i)^2 \right]^{1/2}$ (Control Effort Indicator) et l'indicateur de chattering $CI = (1/\sqrt{T}) \left[\sum_{i=1}^T (\dot{u}_i)^2 \right]^{1/2}$ (Chattering Indicator) sont utilisés pour mesurer le lissage (finesse) du signal de commande, calculer l'effort de commande et quantifier le chattering dans le signal de commande, respectivement.

Les résultats numériques présentés dans le tableau 2.2 montrent que les contrôleurs proposés offrent de bonnes performances de poursuite d'après les indicateurs IAE et ISE, où la même précision de poursuite est atteinte approximativement par tous les contrôleurs, avec une certaine supériorité pour le contrôleur FMG-ST. D'après les critères de commande TV, CEI et CI, il est clair que les contrôleurs du MG-2 : FMG-ST et FMG-Qc2 génèrent des commandes plus lisses que celle du contrôleur FMG-Nes2.

Tableau 2.2. Comparaison des performances de poursuite et de commande des contrôleurs flous du MG-2 proposés.

$T = t_f / \tau, (t_f = 10 \text{ sec}, \tau = 10^{-2} \text{ sec})$					
<i>Contrôleur</i>	<i>TV</i>	<i>CEI</i>	<i>CI</i>	<i>ISE</i>	<i>IAE</i>
FMG-Nes2	27.94	3.59	0.88	0.028	0.099
FMG-Qc2	19.33	3.40	0.61	0.028	0.115
FMG-ST	19.06	3.37	0.60	0.021	0.096
FMGT	Chattering et effort de commande élevés			0.030	0.097

D'autre part, il est également observé que le contrôleur FMG-ST (utilisant l'algorithme ST) génère moins de chattering et moins d'effort de commande que les autres contrôleurs du MG-2 (Nested et Quasi-continuous), malgré que ces derniers sont implémentés par l'augmentation de l'ordre de système par un qui permet d'atténuer fortement le chattering. Cela confirme l'efficacité et les hautes performances de l'algorithme ST par rapport aux autres algorithmes du MG-2.

2.6.2. Exemple 2

Afin de prouver la faisabilité des structures de commande proposées, ces dernières seront appliquées à la stabilisation du système chaotique unifié de dimension 3 introduit dans [Lü-02]. En considérant les commandes, les incertitudes et les perturbations, le système chaotique unifié est décrit par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (25\mathcal{G} + 10)(x_2 - x_1) + u_1 + D_1 \\ \dot{x}_2 = (28 - 35\mathcal{G})x_1 + (29\mathcal{G} - 1)x_2 - x_1x_3 + u_2 + D_2 \\ \dot{x}_3 = x_1x_3 - (8 + \mathcal{G})x_3 / 3 + u_3 + D_3 \end{cases} \quad (2.72)$$

où x_i , ($i=1:3$) désignent les variables d'état du système, u_i , ($i=1:3$) sont les entrées (commandes), D_i , ($i=1:3$) représentent l'ensemble des incertitudes et des perturbations externes, \mathcal{G} est un paramètre caractéristique du système (2.72) tel que $\mathcal{G} \in [0,1]$. Lorsque $\mathcal{G} \in [0,0.8[$ le système (2.72) appartient à la classe des systèmes chaotiques généralisés de Lorenz; si $\mathcal{G} = 0.8$, le système (2.72) est appelé système chaotique de Lü, ce qui est considéré pour la stabilisation dans cette partie de simulation. Lorsque $\mathcal{G} \in]0.8,1]$ le système (2.72) appartient à la classe des systèmes chaotiques généralisés de Chen.

En définissant les vecteurs $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ et $D = [D_1 \ D_2 \ D_3]^T$, le système est réécrit par la dynamique du premier ordre suivante :

$$\dot{x} = f(x) + u + D \quad (2.73)$$

$$\text{avec } f(x) = \begin{bmatrix} (25\mathcal{G} + 10)(x_2 - x_1) \\ (28 - 35\mathcal{G})x_1 + (29\mathcal{G} - 1)x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_3 - (8 + \mathcal{G})x_3 / 3 \end{bmatrix}.$$

Rappelons que D représente la somme des incertitudes et des perturbations telle que $D = D_u + D_d$, $D_u = [\Delta f \ \Delta f \ \Delta f]^T$ avec $\Delta f = 0.5 \sin(2\pi x_1) \times \sin(3\pi x_2)$ et $D_d = [\sin(2t) \ \sin(3t) \ \sin(4t)]^T$. En considérant les conditions initiales $x(0) = [1 \ 3 \ 2]^T$ pour $\mathcal{G} = 0.8$, les réponses temporelles des états du système de Lü (2.73) incontrôlé et en l'absence des incertitudes et des perturbations ($u = 0$ et $D = 0$), et son attracteur chaotique sont illustrés sur la figure 2.6.

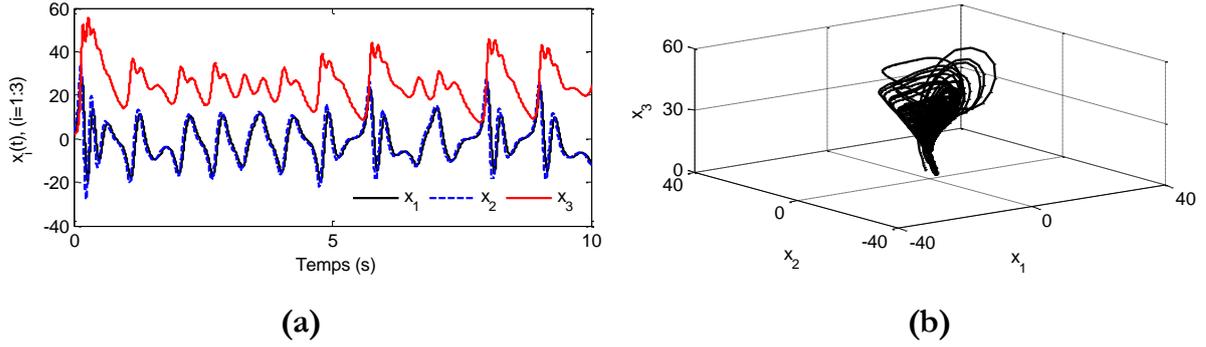


Figure 2.6. Évolution du système chaotique de Lü ($u=0$ et $D=0$).

(a) Réponses temporelles des états du système $x_i(t), (i=1:3)$.

(b) L'attracteur chaotique du système de Lü en 3-D.

Les contrôleurs proposés FMG-Nes2, FMG-Qc2, FMG-ST et du MG terminal (MGT) sont appliqués afin de forcer les états du système de Lü $x_i, (i=1:3)$ à suivre en temps fini leurs trajectoires désirées $x_{di}, (i=1:3)$, telles que ;

$$x_{d1} = \left(\frac{\pi}{3}\right)(\cos(t) + \sin(2t)), \quad x_{d2} = \left(\frac{\pi}{3}\right)(\sin(t) + \cos(2t)) \quad \text{et} \quad x_{d3} = \left(\frac{\pi}{3}\right)(\sin(t) + \sin(2t)).$$

Remarque 2.9. On définit les erreurs de poursuite $e_i = x_i - x_{di}, (i=1:3)$ et les variables de glissement $\sigma_i = e_i, (i=1:3)$. Afin d'atteindre une stabilisation en temps fini du système (2.73), des surfaces de glissement terminal $s_i, (i=1:3)$ (non singulier et rapide (2.8)) sont construites. D'après la dynamique (2.73), il est clair que le système de Lü est de degré relatif 1 par rapport aux σ_i , pour cela s_i sont choisies de la forme PI (proportionnelle intégrale) comme suit : $s_i = \int \sigma_i + \beta_1 \int \sigma_i^{[\alpha_1]} + \beta_2 \sigma_i^{[\alpha_2]}, (i=1:3)$.

Dans cette simulation, nous supposons que la dynamique du système $f(x)$ est connue, donc seulement les gains de commande seront estimés d'une manière adaptative en utilisant des systèmes flous de type 2. Trois fonctions d'appartenance floues de type 2 intervalle $\mu_{F_{s_i}^j}, (i=1:3, j=1:3)$ en fonction de $s_i, (i=1:3)$ sont définies similairement à celles de la figure 2.4. Pendant la simulation, un bruit blanc Gaussien avec un SNR de 20 dB est appliqué aux signaux mesurés $s_i, (i=1:3)$ (antécédents des systèmes flous utilisés), en plus de la présence des incertitudes et des perturbations prédéfinies $D = D_u + D_d$.

Les résultats de simulation obtenus en appliquant les contrôleurs proposés pour le système de Lü sont illustrés sur les figures 2.7 et 2.8. Les résultats numériques correspondants aux critères de performance de poursuite ainsi de commande (FMG-Nes2, FMG-Qc2, FMG-ST et MGT) sont présentés dans les tableaux 2.3 et 2.4.

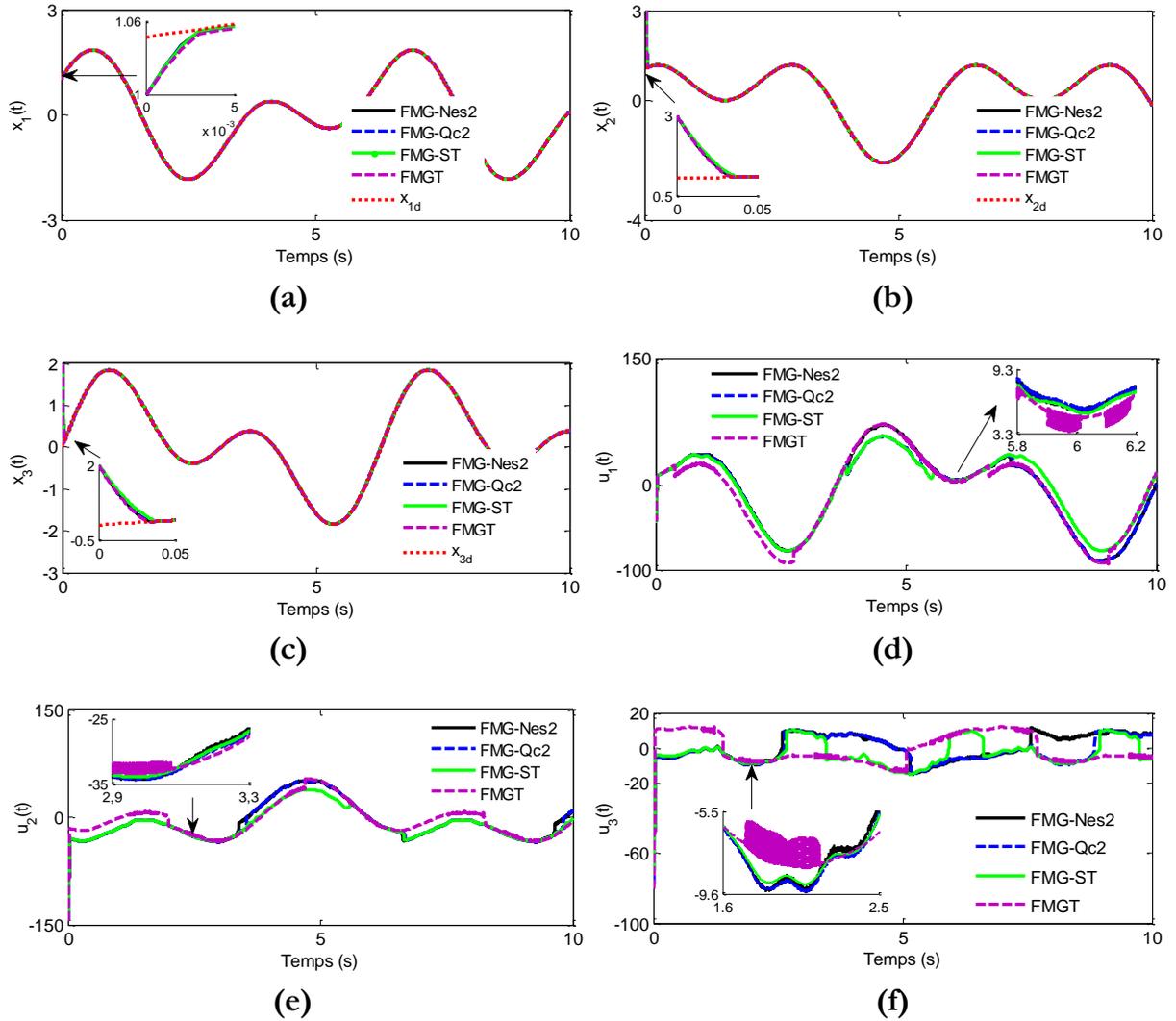


Figure 2.7. Résultats de simulation du système de Lü en utilisant les contrôleurs proposés. (a), (b) et (c) Poursuite des références par les états $x_i, (i = 1 : 3)$. (d), (e) et (f) Signaux de commande $u_i, (i = 1 : 3)$ des contrôleurs proposés.

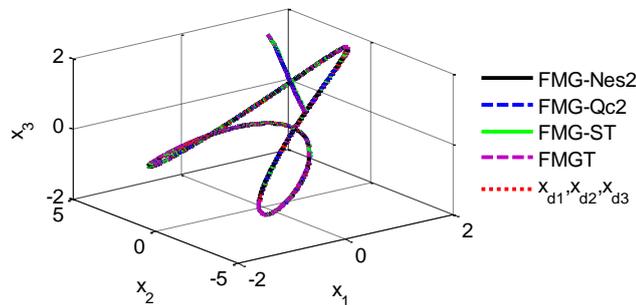


Figure 2.8. Comportement dynamique du système chaotique de Lü en 3-D.

Comme illustré sur les figures 2.7 (a), (b) et (c), il est évident que tous les contrôleurs proposés présentent de bonnes performances de poursuite, de telles façons que les états du système de Lü convergent rapidement vers leurs références. Ce qui permet d'éliminer totalement le comportement chaotique (l'attracteur chaotique) du système de Lü comme

montre la figure 2.8. D'autre part, en raison de l'utilisation des surfaces de glissement terminal de la structure PI et d'après les résultats numériques des critères IAE (l'intégrale de l'erreur absolue) et ISE (l'intégrale de l'erreur carrée), la même précision de poursuite est atteinte par tous les contrôleurs comme l'indique le tableau 2.3; où le contrôleur FMG-ST offre une certaine supériorité par rapport aux autres contrôleurs.

De plus, selon les figures 2.7 (d), (e) et (f) qui affichent les allures de commande u_i , ($i=1:3$) obtenues pour le système chaotique de Lü, il est observé que les contrôleurs du MG-2 proposés génèrent des signaux de commande lisses, où l'effet du chattering est fortement atténué. Il est à noter que, malgré la présence des variations significative à haute fréquence (chattering) dans la commande introduite par le contrôleur du mode glissant terminal MGT, elle est également considérée lisse avec moins de chattering par rapport à celle du mode glissant classique. D'après les valeurs des indicateurs d'efforts de contrôle présentés dans le tableau 2.4, le contrôleur FMG-ST produit souvent des signaux de commande lisses et exige moins d'efforts que les autres contrôleurs, à l'exception du cas du signal de commande u_3 , où le contrôleur FMG-ST utilise plus d'effort que les autres contrôleurs FMG-Qc2 et FMG-Nes2 mais sans incidence négative sur les performances du contrôleur.

Tableau 2.3. Comparaison des performances de poursuite des contrôleurs proposés (pour le système de Lü).

$T = t_f / \tau, (t_f = 10 \text{ sec}, \tau = 10^{-3} \text{ sec})$						
<i>Contrôleur</i>	$IAE \times 10^{-3}$			$ISE \times 10^{-3}$		
	e_1	e_2	e_3	e_1	e_2	e_3
FMG-Nes2	41.6	70	70	0.26	35.4	35.8
FMG-Qc2	41.8	70	70	0.26	35.4	35.8
FMG-ST	41.0	70	70	0.23	35.0	35.8
MGT	40.6	70	70	0.26	35.4	35.8

Tableau 2.4. Comparaison des efforts de commande des contrôleurs proposés (pour le système de Lü).

$T = t_f / \tau, (t_f = 10 \text{ sec}, \tau = 10^{-3} \text{ sec})$									
<i>Contrôleur</i>	<i>TV</i>			<i>CEI</i>			<i>CI</i>		
	u_1	u_2	u_3	u_1	u_2	u_3	u_1	u_2	u_3
FMG-Nes2	16.41	25.25	27.08	46.53	26.30	7.92	0.16	0.25	0.27
FMG-Qc2	16.26	23.20	19.31	44.38	26.55	7.80	0.16	0.23	0.19
FMG-ST	15.76	21.09	18.97	41.20	20.99	8.10	0.15	0.21	0.18
MGT	77.39	84.46	78.46	46.80	23.25	8.78	0.77	0.84	0.78

Les résultats de simulation obtenus pour la stabilisation des systèmes chaotiques susmentionnés, montrent que les contrôleurs du MG du second ordre proposés garantissent de bonnes performances malgré la présence d'incertitudes et de perturbations. En outre, il est

à noter que le contrôleur FMG-ST est plus préférable que les deux autres contrôleurs FMG-Qc2 et FMG-Nes2, en termes d'atténuation du chattering.

À la fin de cette section et motivé par les résultats obtenus, le contrôleur FMG-ST sera appliqué sur des systèmes chaotiques, afin de prouver sa faisabilité non seulement pour la stabilisation chaotique, mais également pour la synchronisation en présence d'incertitudes et de perturbations. Les résultats de la simulation sont présentés brièvement en deux parties.

Remarque 2.10. L'objectif de la synchronisation du chaos est que le système esclave reproduise le plus fidèlement possible l'état du système maître. Dans ces conditions, la sortie $y(t)$ du système esclave est appelée à être synchrone avec la sortie $x(t)$ du système maître, c'est-à-dire que : $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - x(t)| = 0$ pour n'importe quelles conditions initiales du système maître et du système esclave, comme le montre la figure 2.9.

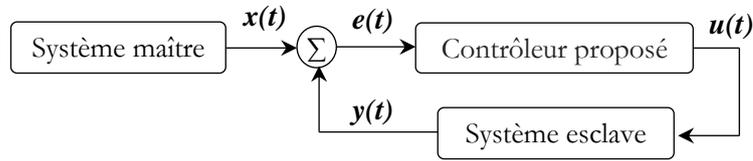


Figure 2.9. Schéma de principe de la synchronisation.

Pour la première partie, on considère le système chaotique défini dans (2.70) comme système maître avec les paramètres caractéristiques (a_1, a_2, a_3, w) prédéfinies et $u(t) = 0$, $\Delta f(\underline{x}, t) = 0$ et $d(t) = 0$. Un système identique avec des paramètres caractéristiques différents (a'_1, a'_2, a'_3, w') est défini en tant que système esclave :

$$\text{Maître : } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = a_1 x_2 + a_2 x_1 - x_1^3 + a_3 \cos(wt) \end{cases} \quad (2.74)$$

$$\text{Esclave : } \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = a'_1 y_2 + a'_2 y_1 - y_1^3 + a'_3 \cos(w't) \end{cases} \quad (2.75)$$

avec $a'_1 = -0.1$, $a'_2 = 1.8$, $a'_3 = -1.1$ et $w' = 0.4$. En définissant $\underline{y} = [y_1 \ y_2]^T$ et $g(\underline{y}, t) = a'_1 y_2 + a'_2 y_1 - y_1^3 + a'_3 \cos(w't)$, puis en considérant la commande $u(t)$ pour assurer la synchronisation du système esclave avec le système maître, en présence des incertitudes $\Delta g(\underline{y}, t)$ et des perturbations $d(t)$, la dynamique (2.75) est réécrite comme suit :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = g(\underline{y}, t) + \Delta g(\underline{y}, t) + d(t) + u(t) \end{cases} \quad (2.76)$$

Considérons les conditions initiales $x(0)=[0 \ 0]^T$ et $y(0)=[0.2 \ 0.2]^T$ pour les deux systèmes maître et esclave respectivement. L'évolution temporelle des états des systèmes (2.74) et (2.75) et leurs comportements chaotiques dans le plan de phase sont illustrées sur la figure 2.10.

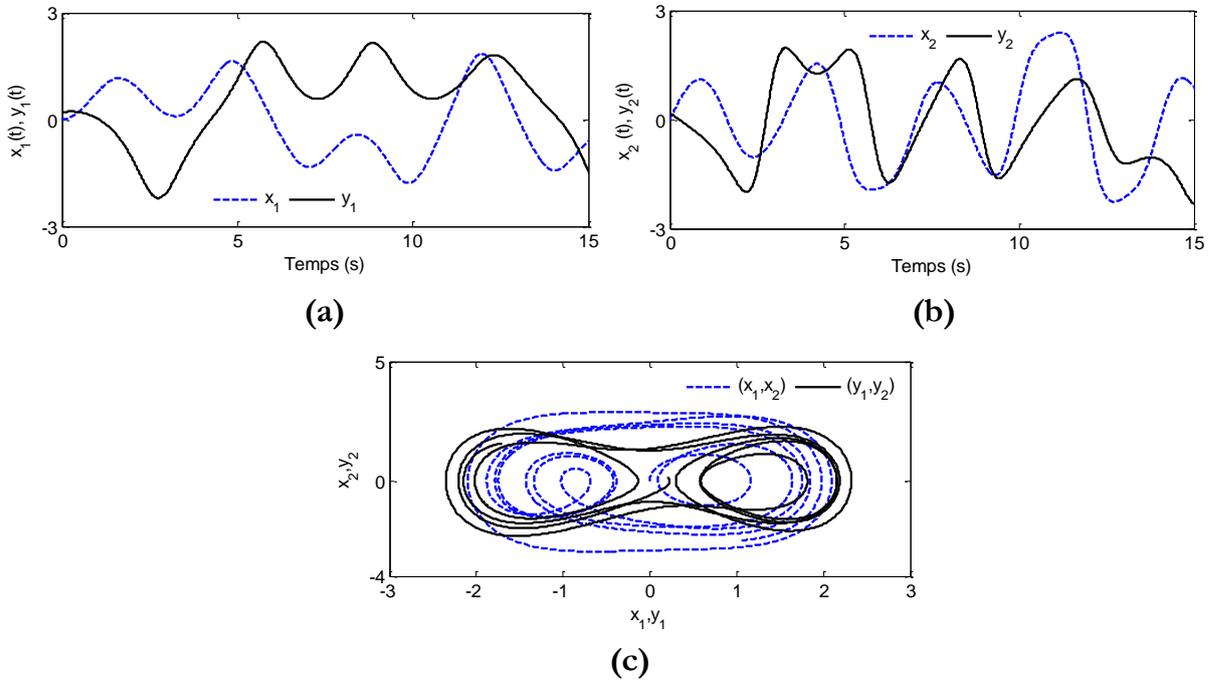


Figure 2.10. Évolution des systèmes chaotiques : maître (2.74) et esclave (2.75).

(a) et (b) Réponses temporelles des états $x_i(t)$ et $y_i(t)$, ($i=1,2$) .

(c) Attracteurs chaotiques des systèmes maître et esclave.

Afin de forcer les états du système esclave y_i à suivre en temps fini les états du système maître x_i , ($i=1,2$), le contrôleur proposé FMG-ST est appliqué. Pour cela, considérant l'erreur de synchronisation $e_i = y_i - x_i$, ($i=1,2$), puis une surface de glissement terminal s (2.8) est construite (avec les mêmes paramètres prédéfinis). Deux systèmes adaptatifs flous de type-2 sont proposés afin d'approximer les dynamiques des systèmes maître et esclave, dont les fonctions d'appartenance sont définies similairement à celles du tableau 2.1. Les ensembles flous caractérisent les entrées x_i et y_i , ($i=1,2$) pour le système maître et esclave respectivement. De même, les signaux de commutation des termes de commande ST sont estimés en ligne par l'implémentation des systèmes flous type-2 dont l'antécédent est la surface de glissement s .

La simulation est réalisée en présence des perturbations $d(t) = \sin(2t)$ et des incertitudes $\Delta g(\underline{y}, t) = (1/2)\sin(2\pi y_1(t)) \sin(3\pi y_2(t))$, avec un bruit blanc Gaussien de SNR=20 dB appliqué aux signaux mesurés $s(t)$, $x_i(t)$ et $y_i(t)$, ($i=1,2$) (les antécédents des systèmes

floous). Les performances de la synchronisation des systèmes chaotiques : l'esclave (2.76) avec le maître (2.74) utilisant la commande FMG-ST sont présentés sur la figure 2.11.

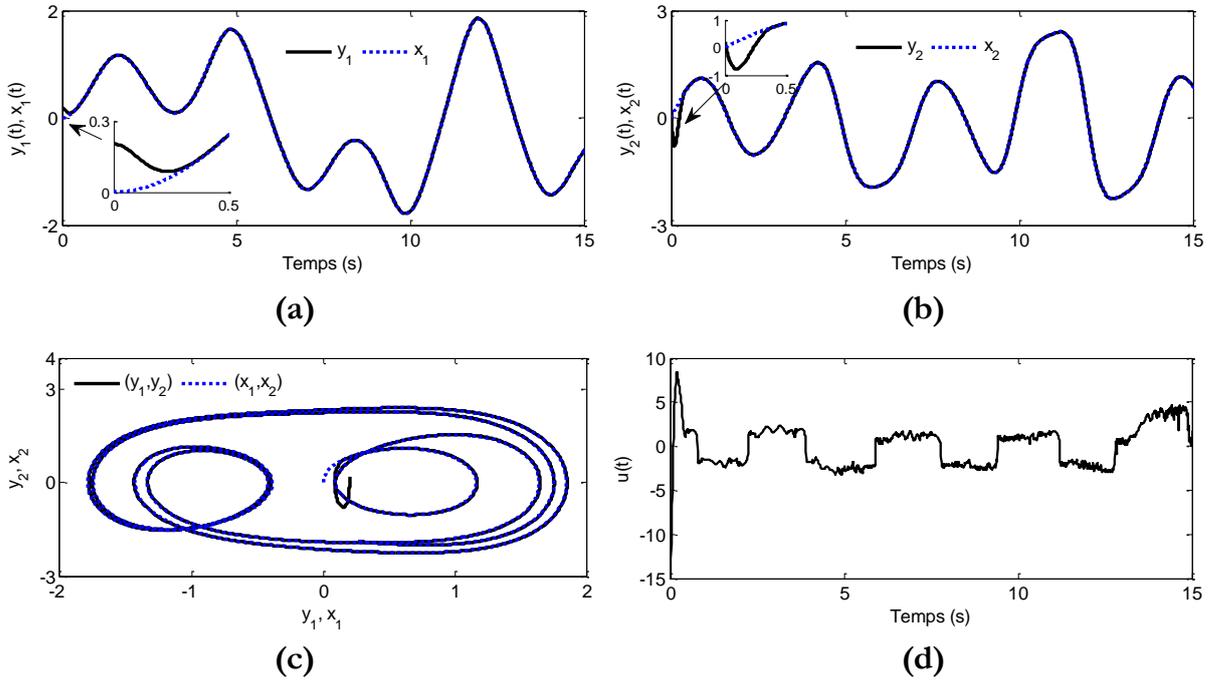


Figure 2.11. Performances de la synchronisation des systèmes (2.76) avec (2.74).

- (a) et (b) Synchronisation des états esclaves $y_i(t)$ avec les états maîtres $x_i(t)$, $(i = 1, 2)$.
- (c) Attracteurs chaotiques des systèmes maître et esclave.
- (d) Signal d'effort de la commande proposée FMG-ST.

Dans la deuxième partie de simulation, basé sur la dynamique chaotique unifiée (2.72), on considère le système chaotique de Lü ($\mathcal{G} = 0.8$) comme le système maître et le système de Chen ($\mathcal{G} = 1$) comme le système esclave, dont les dynamiques de premier ordre sont définies comme suit :

$$\text{Maître : } \dot{x} = f(x) \quad (2.77)$$

$$\text{Esclave : } \dot{y} = g(y) + u + D \quad (2.78)$$

$$\text{tel que } x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T, \ y = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T, \ g(y) = \begin{bmatrix} (25\mathcal{G} + 10)(y_2 - y_1) \\ (28 - 35\mathcal{G})y_1 + (29\mathcal{G} - 1)y_2 - y_1y_3 \\ y_1y_3 - (8 + \mathcal{G})y_3 / 3 \end{bmatrix} \text{ avec } (\mathcal{G} = 1)$$

et $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$. $D = [D_1 \ D_2 \ D_3]^T$ représente la somme des incertitudes et des perturbations ($D = D_u + D_d$). Considérons les conditions initiales $x(0) = [1 \ 3 \ 2]^T$ et $y(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$ pour le système maître de Lü et le système esclave de Chen respectivement. L'évolution temporelle des états des systèmes de Lü et de Chen avec leurs comportements chaotiques (dont $u = 0$ et $D = 0$) sont illustrés sur les figures 2.6 et 2.12 respectivement.

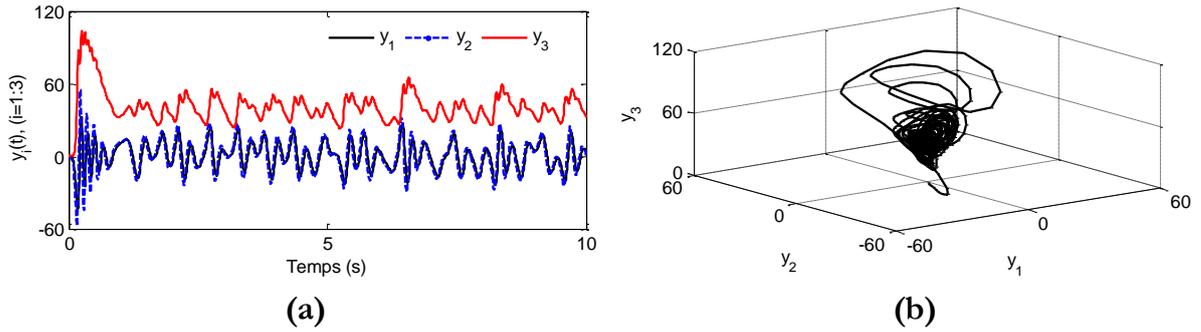


Figure 2.12. Évolution du système chaotique de Chen ($u = 0$ et $D = 0$).

(a) Réponses temporelles des états du système $y_i(t), (i = 1:3)$.

(b) L'attracteur chaotique du système de Chen en 3-D.

Afin que les états du système esclave de Chen $y_i(t), (i = 1:3)$ convergent en temps fini vers les états du système maître de Lü $x_i(t), (i = 1:3)$, le contrôleur FMG-ST est appliqué. Supposons que les dynamiques des deux systèmes à synchroniser sont connues, donc seulement les gains de commutation caractérisant les termes de ST sont ajustés en ligne par l'incorporation des systèmes flous type-2, l'ensemble des surfaces de glissement terminal est sélectionné similairement à celui défini pour la stabilisation du système de Lü (Remarque 2.9).

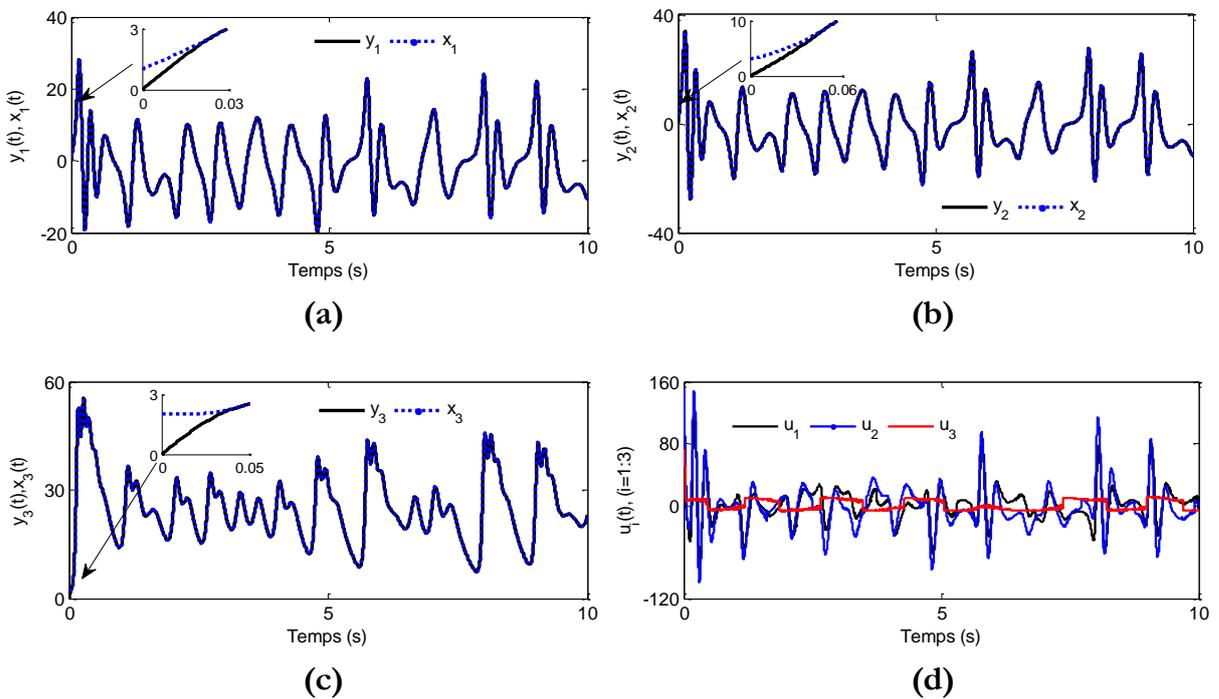


Figure 2.13. Performances de la synchronisation des systèmes de Chen avec celui de Lü.

(a), (b) et (c) Synchronisation des états esclaves $y_i(t)$ avec les états maîtres $x_i(t), (i = 1:3)$

(d) Signaux d'effort $u_i, (i = 1:3)$ des commandes proposées.

Les résultats de simulation sont obtenus en présence des incertitudes $D_u = [\Delta g \ \Delta g \ \Delta g]^T$ avec $\Delta g = 0.5 \sin(2\pi y_1) \times \sin(3\pi y_2)$ et des perturbations $D_d = [\sin(2t) \ \sin(3t) \ \sin(4t)]^T$. En plus, les antécédents des systèmes flous $s_i, (i=1:3)$ sont corrompus par un bruit blanc Gaussien de rapport signal sur bruit SNR=20 dB. Les performances de la synchronisation des systèmes chaotiques : l'esclave de Chen avec le maître de Lü, en utilisant la commande FMG-ST sont illustrés sur les figures 2.13 et 2.14.

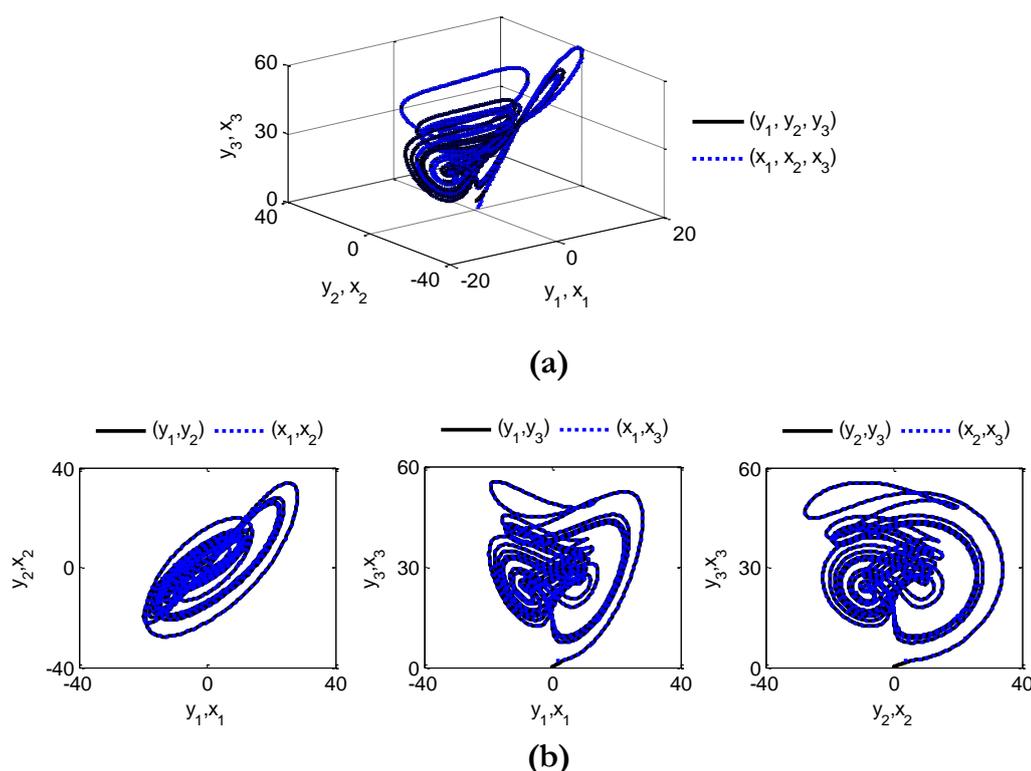


Figure 2.14. Comportements dynamiques des systèmes de Lü (\dots) et de Chen ($—$).

(a) Attracteurs chaotiques en 3-D. (b) Attracteurs chaotiques en 2-D.

D'après les résultats des simulations présentés sur les figures 2.11, 2.13 et 2.14, il est évident que le contrôleur proposé du MG-2 utilisant l'algorithme ST permet d'assurer de bonnes performances de synchronisation, tel que les états esclaves convergent rapidement vers les états maîtres, malgré la présence d'incertitudes et de perturbations. De plus, les allures des commandes générées sont lisses et le chattering est fortement atténué, ce qui montre la faisabilité du contrôleur proposé non seulement pour la stabilisation des systèmes chaotiques incertains, mais également pour leur synchronisation.

À la fin de cette section, tous les résultats de simulation obtenus confirment l'efficacité et les performances satisfaisantes des contrôleurs FMG-Nes2, FMG-Qc2 et FMG-ST basé sur le MG terminal avec une certaine supériorité du contrôleur utilisant l'algorithme ST.

2.7. Conclusion

Dans ce chapitre, des contrôleurs par mode glissant d'ordre deux robustes ont été proposés et développés afin de traiter le problème de la stabilisation des systèmes non linéaires chaotiques incertains. Comme la dynamique du système est supposée inconnue, un système adaptatif flou de type-2 a été proposé afin de l'approximer. L'idée principale de ces contrôleurs est basée sur le métissage de la commande par MG du second ordre et terminal afin d'exploiter leurs avantages. Le choix d'une surface de glissement terminal permet d'assurer une stabilisation en temps fini des états du système à commander vers leurs trajectoires désirées. D'autre part, l'utilisation des MGs du second ordre a pour but de générer des signaux de commande lisses où l'effet du chattering est considérablement atténué.

Afin d'apporter une solution au choix des gains de commande qui requière la connaissance des bornes supérieures des incertitudes et des perturbations, des systèmes flous type 2 ont été introduits. Ces derniers permettent d'ajuster en ligne les gains de commutation caractérisant les termes discontinus de la commande. Les structures de commande proposées utilisant trois algorithmes du MG-2 (Nested-2, Quasi-continuous d'ordre 2 et l'algorithme Super Twisting) ont été utilisées pour le contrôle du chaos. Les résultats de simulation ont confirmé l'efficacité de l'approche proposée et ont mis en évidence ses bonnes performances.

Inspiré par les résultats obtenus et les performances des MGs du second ordre et terminal, des contrôleurs à base du MG-2 robustes (combinaison observateur-commande) seront proposés dans le chapitre suivant pour le contrôle d'une classe de systèmes non linéaires incertains. Une application sur un robot manipulateur dont les états sont partiellement connus sera considérée.

3

Commande et Observation par Mode Glissant d'ordre Supérieur

3.1. Introduction.....	76
3.2. Contexte et formulation.....	78
3.3. Commande adaptative par MG-2 (ST) à base du MG terminal.....	85
3.4. Commande adaptative par MG-2.....	95
3.5. Simulations et résultats.....	104
3.6. Conclusion.....	123

3.1. Introduction

La commande par mode glissant est souvent adoptée pour le contrôle des systèmes non linéaires incertains et perturbés dans diverses applications, en raison de sa simplicité de mise en œuvre, de ses propriétés de stabilité et de robustesse par rapport aux variations paramétriques et aux perturbations externes. La conception de la plupart des contrôleurs non linéaires y compris le mode glissant, nécessite la disponibilité de tous les états du système à commander, par exemple : les états de position et de vitesse doivent être disponibles dans le contrôle des systèmes mécaniques. Généralement, seulement quelques états sont disponibles, il est donc nécessaire d'estimer les autres états à l'aide d'un observateur. Les observateurs par mode glissant OMG (aussi les différentiateurs en MG) peuvent assurer une estimation théoriquement exacte des états non mesurés, même en présence des incertitudes [Efi-12], [Pis-11].

L'inconvénient majeur des MGs, que ce soit pour la commande ou pour l'observation, est le phénomène de chattering, qui peut engendrer des effets indésirables pour la stabilité du processus et en particulier pour les actionneurs de sa partie mécanique du processus. La stabilisation en temps fini d'un régime glissant classique peut être garantie seulement pour des systèmes de degré relatif 1 par rapport à la variable de glissement $\sigma(x,t)$. En revanche, pour les systèmes de degré relatif plus élevé, la conception d'une surface de glissement auxiliaire de degré relatif 1 est suggérée dans la conception standard des MGs. Cette surface est généralement une combinaison linéaire de $\sigma(x,t)$ et de ses dérivées temporelles successives, ce qui conduit à une stabilisation exponentielle et non en temps fini de σ . Le concept des MGs d'ordre supérieur a été introduit afin de contourner à la fois les problèmes de la stabilisation en temps fini ainsi que le phénomène de chattering. Dans ce contexte et en raison de sa capacité d'estimer les états non mesurés et de compenser les incertitudes en temps fini, plusieurs travaux basés sur la commande et l'observation par MG d'ordre supérieur (notamment d'ordre 2) ont profondément étudié, du point de vue théorique [Dav-05], [Fra-12], [Mor-08], [Sht-14] ainsi que pratique pour différents systèmes [Bar-18], [Cha-15], [Gon-17], [Mal-17].

Parmi les algorithmes du MG d'ordre supérieur les plus répandus dans les applications réelles, l'algorithme du Super Twisting (ST) permet d'obtenir des performances attrayantes dans la commande ainsi que pour l'observation [Cha-15], [Gon-17], [Mal-17], [Sht-14], [Xia-19a]. À la différence des autres algorithmes du MG d'ordre supérieur et inspiré par le MG classique, le contrôleur ST du MG-2 est développé pour des systèmes ayant un degré relatif égale à 1 par rapport à la variable de glissement σ , donc seulement les informations sur la variable de glissement sont requises pour sa mise en œuvre (ST). Comme tout contrôleur du MG-2, l'algorithme ST permet d'assurer la stabilisation en temps fini d'un régime glissant du

second ordre $\sigma = \dot{\sigma} \equiv 0$, tout en garantissant une précision de glissement d'ordre deux $\mathcal{O}(\tau^2)$ pour la variable de glissement σ et d'ordre un $\mathcal{O}(\tau)$ pour sa dérivée (où τ est le temps d'échantillonnage) [Lev-93]. En plus, il permet d'atténuer considérablement le chattering au niveau de signal de commande et de compenser également l'ensemble des incertitudes et des perturbations de Lipschitz.

Comme déjà mentionné, pour les systèmes de degré relatif supérieur ou égale à 2, il est nécessaire de sélectionner une surface de glissement s de degré relatif 1 (en fonction de σ et de ces dérivées) afin de concevoir la loi de commande ST [Cha-14], [Cha-15], qui permet d'atteindre un régime glissant du second ordre en un temps fini ($s = \dot{s} \equiv 0$) et assure la convergence asymptotique des variables de glissement $(\sigma, \dot{\sigma})$ vers l'origine. Il est à noter que d'après [Cha-15], si seulement quelques états du système sont disponibles, l'application d'une commande continue sur la surface de glissement s à base d'un observateur par MG-2 (utilisant l'algorithme ST), n'assure pas la stabilisation d'un mode glissant du second ordre. Dans ce contexte, l'une des solutions proposées dans [Cha-15] est l'implémentation d'un observateur par MG d'ordre supérieur (au lieu d'un observateur de ST). Dans la littérature, de nombreux contrôleurs à base d'observateur par MG d'ordre supérieur ont été développés et appliqués aux différents systèmes non linéaires incertains (MIMO) et particulièrement pour le suivi de trajectoires des robots manipulateurs. L'idée fondamentale est basée sur l'utilisation de la commande ST combinée avec un observateur par MG d'ordre 3 [Mun-15], [Tay-18], [Van-16]. D'autre part, lorsque seulement la stabilité asymptotique du comportement du système sur la surface de glissement typique s peut être garantie, des méthodologies proposent le métissage de la commande ST avec le MG terminal afin d'atteindre une stabilisation en temps fini des états du système à commander, ainsi que d'atténuer le chattering dans la commande [Anh-19], [Ash-18], [Goe-17], [Van-17].

En exploitant les caractéristiques attrayantes du MG d'ordre supérieur dans la commande ainsi que dans l'observation, deux structures de commande robustes à base du MG-2 seront proposées et développées dans cette partie pour le contrôle d'un robot manipulateur dont seulement la position est disponible. Tout d'abord, la dynamique nominale du système sera représentée par un modèle flou type-2 de Takagi-Sugeno (F-2 TS). La combinaison du modèle flou du système avec un observateur par MG d'ordre 3 (à base de ST), permet de concevoir un observateur flou par MG d'ordre 3 (FMG-3) qui sera implémenté afin d'estimer en temps fini l'état non mesuré (la vitesse) ainsi que de compenser les incertitudes.

- ✓ La synthèse de la première structure de commande est basée sur l'algorithme ST combiné avec le MG terminal, ce métissage a pour but d'atteindre un régime glissant du second ordre par rapport à la surface de glissement terminal sélectionnée, tout en garantissant une convergence en temps fini des états du système vers leurs références et remédiant au problème de chattering au niveau du signal de commande généré [Hen-19a].

- ✓ Un contrôleur homogène par mode glissant du second ordre est implémenté dans la deuxième structure de commande. Ce contrôleur équipé de l'observateur FMG-3 permet d'atteindre en temps fini un régime glissant d'ordre 3 par rapport à la variable de glissement avec les contraintes d'un mode glissant du second ordre. Il permet d'obtenir également de bonnes performances, en termes de robustesse, précision de poursuite des états du système vers leurs références et une haute atténuation de l'effet du chattering au niveau du signal de commande [Hen-19b].

Pour les deux contrôleurs proposés et développés, les gains de commande seront ajustés en ligne par l'implémentation d'un mécanisme d'adaptation en évitant le problème de surestimation de leurs valeurs. En utilisant la propriété d'homogénéité des MGs, la stabilité en temps fini des contrôleurs suggérés sera prouvée au sens de Lyapunov. Les résultats de simulation avec une étude comparative seront présentés afin de démontrer la faisabilité des contrôleurs proposés et mettre en évidence leur efficacité.

3.2. Contexte et formulation

Soit un système mécanique incertain dont la dynamique est décrite par :

$$\ddot{q} = M^{-1}(q)(\tau_q - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) + \Delta(q, \dot{q}, t) \quad (3.1)$$

où $q \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des coordonnées généralisées, $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice d'inertie (symétrique, strictement définie-positive $M^{-1}(q) \neq 0$), $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice des forces centripètes et de Coriolis, et $G(q) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des forces de gravitation. $\tau_q \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des couples générés par les actionneurs et $\Delta(q, \dot{q}, t) \in \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des incertitudes indiquant la somme des perturbations externes et des incertitudes paramétriques. En considérant les états $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$ et l'entrée $u = \tau_q$, la dynamique (3.1) peut être réécrite dans l'espace d'états comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u(t) + D(\underline{x}, t) \end{cases} \quad (3.2)$$

avec $\underline{x} = [x_1 \ x_2]^T$, $f(\underline{x}) = M^{-1}(q)(-C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q))$ et $g(\underline{x}) = M^{-1}(q)$, $u(t)$ est la commande et $D(\underline{x}, t) = \Delta(q, \dot{q}, t)$. Supposons que l'incertitude est bornée et de Lipschitz c'est-à-dire $|D(\underline{x}, t)| \leq d$ et $|\dot{D}(\underline{x}, t)| \leq \bar{d}$.

L'objectif de la commande est de concevoir un contrôleur par MG robuste en temps fini, tels que les états du système $\underline{x}(t)$ convergent en temps fini vers leurs trajectoires désirées $\underline{x}_d(t)$ en présence des incertitudes. En définissant l'erreur de poursuite $\underline{e}(t)$ par :

$$\begin{aligned} \underline{e}(t) &= \underline{x}(t) - \underline{x}_d(t) \\ &= \begin{bmatrix} x_1(t) - x_d(t) & x_2(t) - \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} = [e \ \dot{e}] \end{aligned} \quad (3.3)$$

L'objectif peut alors s'exprimer par : $\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{e}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\underline{x}(t) - \underline{x}_d(t)) \rightarrow 0$.

Remarque 3.1. Pour contourner les différentes contraintes imposées à la modélisation de processus réels complexes avec des variations structurelles et des dynamiques non modélisées, l'approche des systèmes flous a été largement utilisée dans le contrôle et la modélisation des processus non linéaires complexes (notamment pour les robots mobiles) [Gha-97], [Han-18], [Tse-01]. Les systèmes flous de type 2 (SF-2) sont caractérisés principalement par sa capacité de traiter et gérer les incertitudes numériques et linguistiques associées aux aspects mécaniques des processus (comme les robots), ou aux environnements d'évolution des dynamiques ou aux connaissances utilisées dans la conception du système flou [Kar-99]. D'autre part, Takagi et Sugeno ont proposé un modèle flou dynamique constitué de règles dont la partie conclusion est mise sous la forme de représentation d'état linéaire du système [Tak-85]. Dans ce contexte, le système (3.2) sera représenté par un modèle nominal flou type-2 de Takagi-Sugeno (F-2 TS).

La procédure de mise en œuvre des contrôleurs proposés comprend deux étapes. Au début, le système considéré sera décrit par un modèle flou type-2 de Takagi-Sugeno (F-2 TS), puis un observateur flou du mode glissant d'ordre 3 (FMG-3) sera conçu afin d'estimer en temps fini l'état non mesuré ainsi d'identifier les incertitudes. À base du MG d'ordre 2 (utilisant l'algorithme ST), la synthèse des contrôleurs proposés sera présentée dans la deuxième étape. Les gains de commande seront estimés en ligne en utilisant un mécanisme d'adaptation. Les contrôleurs développés permettent d'assurer une stabilisation en temps fini de la dynamique de l'erreur (3.3) tout en générant des commandes lisses et faisables. Dans ce qui suit, un rappel de quelques définitions et techniques de base sont présentés.

3.2.1. Système flou type-2 de Takagi-Sugeno (SFT-2 TS)

Dans un système flou TS, un modèle nominal d'un système non linéaire peut être obtenu par la décomposition de sa dynamique en modèles affines et linéaires autour de quelques points de fonctionnement [Tak-85], [Tan-01]. Afin d'exploiter la capacité des systèmes flous type-2 (SF-2) à prendre en considération les incertitudes engendrées par l'imprécision de la connaissance, ce concept (SF-2) est utilisé pour la modélisation de la dynamique (3.2). Dans ce cas, le modèle flou type-2 de Takagi-Sugeno (F-2 TS) est décrit par un ensemble de règles floues Si-Alors, dont les antécédents ont des ensembles flous type-2 et les conclusions sont des systèmes linéaires locaux. D'une manière générale, la $i^{\text{ème}}$ règle d'un modèle F-2 TS s'écrit :

$$R^i : \text{Si } z_1 \text{ est } \tilde{H}_1^i \text{ et } \dots \text{ et } z_n \text{ est } \tilde{H}_n^i, \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x} = A_i \underline{x}(t) + B_i u(t) \\ y = C_i \underline{x}(t) \end{cases} \quad (3.4)$$

où \tilde{H}_j^i est le $j^{\text{ème}}$ ensemble flou type-2 de la $i^{\text{ème}}$ règle ($i=1, \dots, M$) correspond au $j^{\text{ème}}$ antécédent $z_j, (j=1, \dots, n)$, tel que $z_j = x_j$ et n est un entier positif. $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ sont les vecteurs d'état et de commande respectivement et $y(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur de sortie. $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ sont la matrice d'état, la matrice d'entrée et la matrice de sortie respectivement. Considérons la dynamique (3.2) dont le modèle nominal F-2 TS est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \sum_{i=1}^M \underline{w}_i \underline{v}_i \{A_i \underline{x} + B_i u\} + \sum_{i=1}^M \bar{w}_i \bar{v}_i \{A_i \underline{x} + B_i u\} \\ = \sum_{i=1}^M w_i(z) \{A_i \underline{x} + B_i u\} \end{cases} \quad (3.5)$$

tel que le degré d'activation $w_i(z)$ caractérisant la $i^{\text{ème}}$ règle est défini par l'ensemble intervalle $[\underline{w}_i \ \bar{w}_i]$ avec $\underline{w}_i = \prod_j^n \underline{\mu}_{\tilde{H}_j^i}(z_j) \geq 0$ et $\bar{w}_i = \prod_j^n \bar{\mu}_{\tilde{H}_j^i}(z_j) \geq 0$. \underline{w}_i et \bar{w}_i sont les degrés d'appartenance inférieur et supérieur (appelés aussi les points limites gauche et droit) respectivement. $\underline{\mu}_{\tilde{H}_j^i}(z_j)$ et $\bar{\mu}_{\tilde{H}_j^i}(z_j)$ désignent les fonctions d'appartenance inférieure et supérieure associées à l'ensemble flou \tilde{H}_j^i . Les deux fonctions $\underline{v}_i \geq 0$ et $\bar{v}_i \geq 0$ (telque $\forall i, \underline{v}_i + \bar{v}_i = 1$) sont choisis comme $\underline{v}_i = \bar{v}_i = 0.5$ [Lia-00].

Il est à noter que $w_i(z)$ possède la propriété de la somme convexe : $w_i(z) \geq 0$ et $\forall i, \sum_{i=1}^M w_i(z) = 1$. Le système non linéaire incertain (3.2) peut être alors représenté par le modèle F-2 TS suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \underline{x} + \sum_{i=1}^M w_i(z) B_i u + \Delta(t) \end{cases} \quad (3.6)$$

où $\Delta(t) \in \mathbb{R}^n$ représente les incertitudes du système qui comprennent les perturbations externes et l'erreur d'approximation floue, $\Delta(t)$ est supposée d'être Lipschitz ; $|\Delta(t)| \leq \mu$ et $|\dot{\Delta}(t)| \leq \bar{\mu}$, $\bar{\mu} > 0$. En supposant que $\forall z, \sum_{i=1}^M w_i(z) B_i$ est non singulier alors $\left(\sum_{i=1}^M w_i(z) B_i\right)^{-1}$ existe.

Afin d'assurer la stabilisation en temps fini des états du système (3.2) décrit par le modèle F-2 TS (3.6), les états $x_i(t), i=1,2$ (la position et la vitesse) doivent être disponibles pour la conception des contrôleurs proposés. Lorsque seulement la position est mesurable, il est possible donc d'estimer en temps fini l'état de la vitesse et les incertitudes du système en utilisant un observateur par MG d'ordre supérieur.

3.2.2. Observation d'états et identification d'incertitudes

L'observateur par MG-3 (basé sur l'algorithme ST) permet de garantir une estimation exacte de l'état non mesuré (la vitesse) et l'identification des incertitudes sans filtrage [Fri-07] contrairement à l'observateur par MG-2 (appelé également différentiateur ST) [Dav-05]. Ce dernier assure une estimation en temps fini de la vitesse, mais nécessite un filtre passe-bas pour l'identification des incertitudes en raison des commutations à haute fréquence. Cependant, l'application d'un filtre entraîne un temps de retard. Dans ce contexte, pour l'estimation des états et l'identification des incertitudes associées au système décrit par (3.6), un observateur flou par MG-2 qui partage les mêmes règles que le modèle (3.4) est conçu :

$$R^i : \text{Si } z_1 \text{ est } \tilde{H}_1^i \text{ et } \dots \text{ et } z_n \text{ est } \tilde{H}_n^i, \text{ Alors } \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \alpha_1 |x_1 - \hat{x}_1|^{1/2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = A_i \hat{x} + B_i u + \alpha_0 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \end{cases} \quad (3.7)$$

où $\hat{x} = [\hat{x}_1 \hat{x}_2]^T$ est le vecteur d'état estimé de $\underline{x} = [x_1 x_2]^T$, α_1 et α_0 sont les gains de l'observateur sélectionnés d'une manière appropriée afin d'assurer la stabilisation du vecteur des erreurs d'estimation $\tilde{x} = [\tilde{x}_1 \tilde{x}_2]^T$. Similairement au modèle flou (3.6), l'observateur flou par MG-2 (FMG-2) est défini par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \alpha_1 |x_1 - \hat{x}_1|^{1/2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \hat{x} + \sum_{i=1}^M w_i(z) B_i u + \alpha_0 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \end{cases} \quad (3.8)$$

En substituant le modèle flou (3.6) dans (3.8), la dynamique de l'erreur d'estimation peut être obtenue comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_2 - \alpha_1 |x_1 - \hat{x}_1|^{1/2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\tilde{x}}_1 = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{x} + \Delta(t) - \alpha_0 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \end{cases} \quad (3.9)$$

En supposant que les états du système et les incertitudes sont bornés, l'inégalité suivante est donc satisfaite pour une constante existante F^+ , ($F^+ > 0$) :

$$\left| \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{x} + \Delta(t) \right| < F^+ \quad (3.10)$$

En utilisant la synthèse de Lyapunov, la stabilité et l'estimation en temps fini de l'observateur FMG-2 sont prouvées [Mor-08].

Théorème 3.1. Supposons que l'inégalité (3.10) est satisfaite pour le système décrit par (3.6). L'observateur FMG-2 (3.8) est fortement stable et assure une convergence en temps fini des états estimés \hat{x}_i vers les états réels x_i ($i=1,2$), si les gains de l'observateur vérifient les conditions suivantes :

$$\alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_0 \geq 3F^+ + 2 \frac{F^{+2}}{\alpha_1^2} \quad (3.11)$$

Il est à noter que, lorsque les gains d'observation α_1 et α_0 sont convenablement sélectionnés conformément à (3.11) pour n'importe quelle constante positive $F^+ > 0$, l'origine $\tilde{x} = \mathbf{0}$ est alors robuste et globalement stable en temps fini (en utilisant la fonction stricte de Lyapunov : $V(\tilde{x}) = \zeta^T P \zeta$, avec $\zeta = \left[|\tilde{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_1), \tilde{x}_2 \right]$ et P est une matrice définie positive). Donc, toute trajectoire de (3.9) débutant de \tilde{x}_0 va converger vers l'origine $\tilde{x} = \mathbf{0}$ en un temps fini inférieur à $\tilde{T}(\tilde{x}_0) = \frac{2}{\tilde{\nu}} V^{1/2}(\tilde{x}_0)$, la constante $\tilde{\nu}$ dépend des gains de l'observateur α_1 et α_0 .

Après la convergence en temps fini de l'observateur FMG-2, l'identité suivante est satisfaite :

$$0 \equiv \dot{\hat{x}}_2 \equiv \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{x} + \Delta(t) - \alpha_0 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \quad (3.12)$$

Notons que $\sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{x} = 0$ (lorsque $\hat{x}_i = x_i$ ($i=1,2$)), l'injection de sortie équivalente (Equivalent Output Injection EOI) dénotée z_{eq} sera alors définie comme suit :

$$\hat{z}_{eq} = \Delta(t) = \alpha_0 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \quad (3.13)$$

En raison du terme discontinu dans (3.12), \hat{z}_{eq} est théoriquement le résultat des commutations de hautes fréquences (infinies), ce qui engendre l'effet du chattering. Un filtre passe-bas (avec un temps d'échantillonnage τ) est utilisé afin d'éviter la composante haute fréquence comme suit :

$$\tau_{eq} \dot{\bar{z}}_{eq}(t) = \hat{z}_{eq}(t) - \bar{z}_{eq}(t) \quad (3.14)$$

où τ_{eq} est la constante de temps caractérisant le filtre ($\tau \ll \tau_{eq} \ll 1$) et \bar{z}_{eq} est la sortie filtrée de \hat{z}_{eq} . Considérons l'erreur causée par filtrage ε_f , le résultat du processus de filtrage est donné par :

$$\hat{z}_{eq} = \bar{z}_{eq} + \varepsilon_f \quad (3.15)$$

Finalement, l'injection de sortie équivalente EOI est définie comme la sortie du filtre $\bar{z}_{eq}(t)$ et les incertitudes peuvent être donc identifiés par :

$$\Delta(t) = \bar{z}_{eq} \quad (3.16)$$

Remarque 3.2. Il est bien connu que l'observateur par MG-2 à base du ST (appelé également différentiateur ST) est caractérisé principalement par sa précision d'estimation en l'absence de bruit et sa robustesse par rapport aux bruits de mesure. En supposant que l'état x_1 est mesuré avec un bruit ε uniformément borné par $\bar{\varepsilon}$, tel que $\bar{x}_1 = x_1 + \varepsilon$. Afin d'estimer l'état x_2 basé

sur l'état mesuré \bar{x}_1 , une analyse de la précision d'estimation et les gains optimaux pour les différentiateurs ST généralisés (y compris le différentiateur ST) ont été présentés dans [Ang-12]. Une fois que la borne ultime de l'erreur d'estimation \tilde{x}_1 est obtenue et lorsque le bruit de mesure est borné, la borne ultime de \tilde{x}_2 peut être facilement calculée. Un ensemble des gains optimaux (ou plusieurs d'entre eux ne dépendent pas de l'amplitude de bruit) peut être donc sélectionné pour garantir la stabilité de l'observateur ST (différentiateur ST) [Ang-12].

Remarque 3.3. Il est important de noter que, quels que soit les gains de l'observateur (ST) sélectionnés, la borne ultime de \tilde{x}_1 n'est jamais inférieure à l'amplitude du bruit. Par conséquent, avec certaines constantes positives $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$, la précision d'estimation de l'observateur par MG-2 (à base de ST) est proportionnelle à l'amplitude du bruit et ne peut être mieux que : $|\tilde{x}_1| < \tilde{\gamma}_1 \bar{\epsilon}$ et $|\tilde{x}_2| < \tilde{\gamma}_2 \bar{\epsilon}^{1/2}$. Ces résultats ont été déjà discutés dans [Lev-98]. D'autre part, en raison de la robustesse des systèmes flous type-2 (SF-2) par rapport aux incertitudes numériques et linguistiques (y compris les bruits de mesure), on peut déduire que ces résultats peuvent également être étendus à l'observateur FMG-2 prédéfini (3.4).

Maintenant, un observateur FMG-3 sera présenté pour l'estimation des états et des incertitudes sans filtrage. Similairement à l'observateur FMG-2, les règles floues caractérisant le modèle F-2 TS de l'observateur linéaire par MG-3 sont données par :

R^i : Si z_1 est \tilde{H}_1^i et ... et z_n est \tilde{H}_n^i , Alors

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \alpha_2 |x_1 - \hat{x}_1|^{2/3} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) + \beta_1 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 + A_1 \hat{x} + B_1 u + \alpha_1 |\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2|^{1/2} \text{sign}(\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2) + \beta_2 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_3 = \alpha_0 \text{sign}(\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2) \end{cases} \quad (3.17)$$

tels que $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ et $\beta_i (i=1,2)$ sont les gains de l'observateur qui sont choisis de façon à assurer la convergence des erreurs d'estimation $\tilde{x}_i = x_i - \hat{x}_i$ en temps fini. Notons que les termes linéaires sont ajoutés pour rendre la convergence plus rapide par rapport à celle de l'observateur par MG-3 conventionnel. L'injection de sortie équivalente \hat{z}_{eq} est représentée donc par l'état \hat{x}_3 . L'observateur FMG-3 est défini par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \alpha_2 |x_1 - \hat{x}_1|^{2/3} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) + \beta_1 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 + \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \hat{x} + \sum_{i=1}^M w_i(z) B_i u + \alpha_1 |\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2|^{1/2} \text{sign}(\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2) + \beta_2 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_3 = \alpha_0 \text{sign}(\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2) \end{cases} \quad (3.18)$$

En substituant le modèle flou du système à commander (3.6) dans (3.18), l'erreur d'estimation est donc obtenue par la dynamique suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \tilde{x}_2 - \alpha_2 |x_1 - \hat{x}_1|^{2/3} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) - \beta_1 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = -\hat{x}_3 + \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{x} + \Delta(t) - \alpha_1 |\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2|^{1/2} \text{sign}(\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2) - \beta_2 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_3 = \alpha_0 \text{sign}(\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2) \end{cases} \quad (3.19)$$

Considérons $F(\tilde{x}, t) = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{x} + \Delta(t)$ qui est supposé être également Lipschitz (puisque $\Delta(t)$ est Lipschitz), tel que pour une constante existante $F^+ > 0$, l'inégalité (3.10) est vérifiée et $|\dot{F}(\tilde{x}, t)| < \bar{F}^+$. Définissons maintenant une nouvelle variable représentant l'erreur d'estimation \tilde{x}_3 telle que $\tilde{x}_3 = F(\tilde{x}, t) - \hat{x}_3$, alors (3.19) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \tilde{x}_2 - \alpha_2 |x_1 - \hat{x}_1|^{2/3} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) - \beta_1 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \tilde{x}_3 - \alpha_1 |\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2|^{1/2} \text{sign}(\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2) - \beta_2 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\tilde{x}}_3 = -\alpha_0 \text{sign}(\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2) + \dot{F}(\tilde{x}, t) \end{cases} \quad (3.20)$$

En se basant sur les propriétés de la stabilité d'un différentiateur exacte et robuste par MG d'ordre supérieur (de la forme récursive), pour le système défini par (3.6), la dynamique (3.20) est stable en temps fini lorsque les gains de l'observateur sont adéquatement choisis et suffisamment grands dans l'ordre donné $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ comme indiqué dans [Fra-12] et [Lev-03]. Après la convergence de l'observateur (3.18), les états estimés \hat{x}_i convergent donc en temps fini vers les états réels $x_i, (i=1,2)$ et l'égalité suivante est satisfaite (avec $\dot{\hat{x}}_1 = \dot{x}_1$) :

$$F(\tilde{x}, t) - \alpha_1 |\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2|^{1/2} \text{sign}(\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2) - \beta_2 (x_1 - \hat{x}_1) - \hat{x}_3 = 0 \quad (3.21)$$

Lors de la convergence du différentiateur, les incertitudes peuvent être identifiées à partir de $F(\tilde{x}, t) = \hat{x}_3$. Rappelons que $F(\tilde{x}, t) = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{x} + \Delta(t)$ et notons que $\sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{x} = 0$ lorsque $\hat{x}_i = x_i, (i=1,2)$, le terme EOI (\hat{z}_{eq} noté \hat{x}_3) est donné par :

$$\hat{z}_{eq} = \Delta(t) \quad (3.22)$$

D'après (3.18), il est évident que \hat{z}_{eq} est continu et l'injection de sortie équivalente EOI peut être obtenue sans utiliser un filtre. \hat{z}_{eq} est théoriquement l'estimation exacte de l'incertitude $\Delta(t)$.

Remarque 3.4. La stabilité en temps fini de l'observateur par MG du second ordre est atteinte sous les conditions suffisantes indiquées dans le théorème 3.1 [Mor-08]. Dans des applications pratiques, un autre choix des gains pour les observateurs par MG d'ordre supérieur en général (y compris l'observateur par MG-2 et par MG-3) peut être utilisé comme il est proposé dans [Fri-07] et [Lev-03] telle que la stabilité des observateurs (3.8) et (3.18) est assurée en temps fini.

Remarque 3.5. Il est à noter que, la précision d'estimation obtenue par les observateurs FMG-3 et FMG-2 correspond à la précision d'estimation d'un différentiateur exact et robuste par MG d'ordre supérieur (à base de ST). Dans le cas d'absence de bruit de mesure, l'état observé $\hat{x}_2(t)$ (la vitesse) a une précision d'ordre $\mathcal{O}(\tau^2)$ et $\mathcal{O}(\tau)$ pour l'observateur FMG-3 et FMG-2 respectivement (τ est le temps d'échantillonnage).

Remarque 3.6. L'observateur FMG-3 (3.18) repose sur le différentiateur exact et robuste par MG d'ordre supérieur (à base de ST), dont la structure est récursive [Lev-03]. Dans le cas de présence de bruit de mesure de Lebesgue (d'amplitude maximale $\bar{\epsilon}$) avec un choix approprié des gains d'observation, les inégalités $|\tilde{x}_1| < \tilde{\gamma}_1 \bar{\epsilon}$ et $|\tilde{x}_2| < \tilde{\gamma}_2 \bar{\epsilon}^{2/3}$ sont satisfaites en temps fini pour certaines constantes positives $\tilde{\gamma}_i, (i=1,2)$, ce qui correspond à la meilleure précision d'estimation possible à atteindre avec un observateur par MG-3. Ce résultat peut également être étendu à l'observateur FMG-3 (3.18).

Après la description du système à commander et l'observation des états non mesurés, la conception des contrôleurs proposés sera présentée afin d'atteindre les objectifs susmentionnés.

La notation prédéfinie (Définition 2.1) est utilisée [Bha-97] : Pour une variable réelle $a \in \mathbb{R}$ et un exposant réel $b \in \mathbb{R}$, $a^{[b]} = |a|^b \text{sign}(a)$.

Définition 3.1. [Lev-05a] Soit un champ de vecteurs $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (tel que $f = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]$, $i=1:n$) homogène de degré $q \in \mathbb{R}$ par la dilatation $d_\kappa(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\kappa^{m_1} x_1, \dots, \kappa^{m_n} x_n)$ avec des poids $m_i > 0$, ($i=1:n$) si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall \kappa \in \mathbb{R}$, $f_i(d_\kappa x) = \kappa^{q+m_i} f_i(x)$ est satisfaite.

En effet, si $f(x)$ est homogène de degré q , le système défini par la dynamique $\dot{x} = f(x)$ est donc homogène de degré d'homogénéité négatif q . Avec l'application d'une loi de commande homogène ayant les mêmes poids d'homogénéité, le système bouclé est homogène et possède toutes les propriétés d'homogénéité (qui sont principalement équivalentes), y compris la stabilité en temps fini, tel que pour tout $R > 0$ il existe un temps fini $t_f > 0$, telle que toute trajectoire partant du domaine $\|x\| < R$ se stabilise à l'origine pour tous $t > t_f$.

3.3. Commande adaptative par MG-2 (ST) à base du MG terminal

Comme nous venons de l'exposer, en se basant sur le métissage de l'algorithme ST et le mode glissant terminal MGT, un contrôleur robuste par MG-2 équipé d'un observateur FMG-3 sera développé, afin d'assurer une convergence en temps fini des états du système incertain (3.6) vers leurs références et de générer un signal de commande lisse, tout en assurant une atténuation importante du chattering.

3.3.1. Problématique et objectifs de la commande

Considérons le système incertain défini par (3.6), afin d'assurer une stabilisation en temps fini de l'erreur de poursuite (3.3), on définit la variable de glissement $\sigma = e$, la surface de glissement terminal non singulier et rapide est donc exprimée comme suit :

$$s = \sigma + \lambda_1 \sigma^{[a_1]} + \lambda_2 \dot{\sigma}^{[a_2]} \quad (3.23)$$

où $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $1 < a_2 < 2$ avec $a_2 = p_\sigma / q_\sigma$ et $a_1 \geq p_\sigma / q_\sigma$, p_σ et q_σ sont des entiers impairs et positifs. Lorsque seulement l'état x_1 est disponible pour la mesure, l'observateur FMG-3 est utilisé principalement pour estimer en temps fini l'état x_2 par \hat{x}_2 . La surface de glissement (3.23) et sa dérivée par rapport au temps sont maintenant données par:

$$\hat{s} = \dot{\sigma} + \lambda_1 \dot{\sigma}^{[a_1]} + \lambda_2 \dot{\sigma}^{[a_2]} \quad (3.24)$$

$$\dot{\hat{s}} = \dot{\sigma} + \lambda_1 a_1 |\sigma|^{a_1-1} \dot{\sigma} + \lambda_2 a_2 |\dot{\sigma}|^{a_2-1} \ddot{\sigma} \quad (3.25)$$

tels que $\dot{\sigma} = \hat{x}_2(t) - \dot{x}_d(t)$ et $\ddot{\sigma} = \hat{x}_2(t) - \ddot{x}_d(t)$. Lorsque $\hat{x}_i = x_i$, ($i=1,2$) et $\hat{x}_3 = \hat{z}_{eq}$ sont atteintes après la convergence de l'observateur FMG-3 (en temps fini $t > T_f$), la substitution de la dynamique (3.18) dans (3.25) donne :

$$\dot{\hat{s}} = \dot{\sigma} + \lambda_1 a_1 |\sigma|^{a_1-1} \dot{\sigma} + \lambda_2 a_2 |\dot{\sigma}|^{a_2-1} \left(\sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \hat{x} + \sum_{i=1}^M w_i(z) B_i u + \hat{z}_{eq} - \ddot{x}_d(t) + a_1 |\hat{x}_1 - \hat{x}_2|^{1/2} \text{sign}(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) + \beta_2 (x_1 - \hat{x}_1) \right) \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{s}} &= \dot{\sigma} + \lambda_1 a_1 |\sigma|^{a_1-1} \dot{\sigma} + \lambda_2 a_2 |\dot{\sigma}|^{a_2-1} \left(\sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \hat{x} + \sum_{i=1}^M w_i(z) B_i u + \hat{z}_{eq} - \ddot{x}_d(t) \right) \\ &= \dot{\sigma} + \lambda_1 a_1 |\sigma|^{a_1-1} \dot{\sigma} + \lambda_2 a_2 |\dot{\sigma}|^{a_2-1} \left(F_0(\underline{x}) + G_0(\underline{x})u + \hat{z}_{eq} \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

où $F_0(\underline{x}) = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \hat{x} - \ddot{x}_d(t)$ et $G_0(\underline{x}) = \sum_{i=1}^M w_i(z) B_i$.

Il est évident que la dynamique du système (3.6) est de degré relatif 1 par rapport à la surface de glissement terminal (3.24), l'algorithme ST peut donc être appliqué directement. Selon la procédure de mise en œuvre du mode glissant, la loi de commande globale est donnée par:

$$u_{CST} = u_0 + u_c + u_{ST} \quad (3.28)$$

$$u_0 = -G_0(\underline{x})^{-1} \left(F_0(\underline{x}) + \frac{1}{\lambda_2 a_2} \left(\dot{\sigma}^{2-a_2} + \lambda_1 a_1 |\sigma|^{a_1-1} \dot{\sigma}^{2-a_2} \right) \right) \quad (3.29)$$

$$u_c = -G_0(\underline{x})^{-1} \hat{z}_{eq} \quad (3.30)$$

où u_0 est la commande nominale (équivalente), le terme de compensation u_c est conçu à base de l'identification des incertitudes du système obtenue par l'observateur FMG-3. Pour assurer la stabilisation en temps fini d'un régime glissant du second ordre $\hat{s} = \dot{\hat{s}} \equiv 0$, le terme de Super Twisting u_{ST} est exprimé comme suit:

$$\begin{cases} u_{ST} = G_0(\underline{x})^{-1} v_{ST}, \\ v_{ST} = -k_1 |\hat{s}|^{1/2} \text{sign}(\hat{s}) + v_0, \\ \dot{v}_0 = -k_2 \text{sign}(\hat{s}) \end{cases} \quad (3.31)$$

tels que les gains de glissement $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ sont sélectionnés de telle façon que le MG du second ordre soit atteint en temps fini [Mor-12]. Ces gains peuvent être également choisis comme indiqué dans [Fra-12] et [Lev-03] ; tels que $k_1 = 1.5(L)^{1/2}$ et $k_2 = 1.1L$, où L représente généralement la constante de Lipschitz des incertitudes bornées ($L > 0$).

Considérons la dynamique de l'erreur d'estimation (3.20). L'application de la loi de commande u_{cST} (3.28)-(3.31) pour le système (3.6) sous les conditions d'existence des incertitudes ($\Delta(t) \neq 0$), permet de représenter le système en boucle fermée par la dynamique suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}} = -k_1 |\hat{s}|^{1/2} \text{sign}(\hat{s}) + v_0 + \Delta(t), \\ \dot{v}_0 = -k_2 \text{sign}(\hat{s}) \end{cases} \quad (3.32)$$

Rappelons que l'incertitude $\Delta(t)$ est Lipschitz par rapport au temps c'est-à-dire $|\Delta(t)| \leq \mu$ et $|\dot{\Delta}(t)| \leq \bar{\mu}$, $\bar{\mu} > 0$, (3.32) peut alors être réécrite comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}} = -k_1 |\hat{s}|^{1/2} \text{sign}(\hat{s}) + v, \\ \dot{v} = -k_2 \text{sign}(\hat{s}) + \rho(t) \end{cases} \quad (3.33)$$

avec $v = v_0 + \Delta(t)$ et $v_0 = \int_0^t k_2 \text{sign}(\hat{s}) d\tau$. $\rho(t)$ est également de Lipschitz et borné tel que $\rho(t) = \dot{\Delta}(t)$ et $|\rho(t)| \leq \bar{\mu}$, $\bar{\mu} > 0$. Il est clair que l'objectif de la commande est transféré donc à la stabilisation du système auxiliaire (3.33).

Remarque 3.7. La dynamique du système (3.33) est homogène de degré $q = -1$ et des poids d'homogénéité $m = (2,1)$. Comme la deuxième équation de (3.33) est discontinue, les solutions du système peuvent être déduites au sens de Filippov [Fil-88]. Dans [Mor-08], des fonctions de Lyapunov (fortes) sont proposées pour l'algorithme ST homogène. D'autre part et comme il est susmentionné, la sélection appropriée des gains $k_i > 0$, ($i=1,2$) permet d'assurer la stabilité du système (3.33) en temps fini.

Il est à noter que la loi de commande proposée (3.28)-(3.31) avec un choix adéquat des gains de commande $k_i, (i=1,2)$ permet la stabilisation en temps fini d'un régime glissant du second ordre sur la surface de glissement terminal \hat{s} en présence des incertitudes bornées de Lipschitz $\rho(t)$. Dans ce cas, lorsque la dynamique ST (3.33) est stable en temps fini, le régime

glissant $\hat{s} = \dot{\hat{s}} \equiv 0$ est atteint en temps fini et les états du système (3.6) convergeront vers l'origine en temps fini.

Remarque 3.8. Il convient de noter que le défi principal de l'algorithme ST réside dans les bornes des incertitudes qui doivent être connues préalablement pour le calcul des gains de commande. Cependant, dans de nombreux cas pratiques il est difficile de connaître ces limites à l'avance. En outre, les valeurs de ces gains jouent un rôle important dans l'optimisation de l'effort de commande, l'atténuation du chattering et même dans la stabilité du système.

Afin de contourner le problème du choix des gains de commande, plusieurs contrôleurs basés sur l'adaptation des gains sont proposés dans la littérature [Ash-18], [Bou-19], [Bor-18], [Edw-16], [Gut-19], [Utk-13], [Xio-19], [Yu-16]. Dans ce qui suit, un mécanisme d'estimation adaptatif est mis en œuvre pour ajuster en ligne les gains de commande tout en évitant le problème de surestimation de leurs valeurs. [Sht-10], [Sht-12].

3.3.2. Synthèse de la commande adaptative par MG-2 (ST)

L'objectif de l'adaptation des gains ST dans le contrôleur proposé est de générer un signal de commande lisse sans surestimation des valeurs des gains, et d'assurer la stabilisation d'un MG du second ordre ($\hat{s} = \dot{\hat{s}} \equiv 0$) en temps fini en présence des incertitudes (avec des bornes supérieures inconnues). Donc, pour la mise en œuvre du contrôleur u_{CST} (3.28) dont u_0 , u_c et u_{ST} sont donnés par (3.29), (3.30) et (3.31) respectivement, un mécanisme d'adaptation est utilisé pour concevoir les gains de ST : k_1 et k_2 dans (3.31) en se basant sur [Sht-12]. Les gains adaptatifs $k_1(t)$ et $k_2(t)$ sont définis comme suit :

$$\begin{cases} k_1(t) = K_1 \sqrt{\phi(t)} \\ k_2(t) = K_2 \phi(t) \end{cases} \quad (3.34)$$

où K_1 et K_2 sont des paramètres de conception, $\phi(t)$ est un scalaire positif variant dans le temps. L'idée principale de cette adaptation est basée sur l'augmentation dynamique des gains de commande $k_1(t)$ et $k_2(t)$ jusqu'à l'accomplissement du MG du second ordre (c'est-à-dire $\hat{s} = \dot{\hat{s}} \equiv 0$), ensuite ces gains commencent à diminuer d'une façon dynamique. Pour cela, un détecteur qui détecte le début de la destruction du MG-2 est intégré dans le mécanisme d'adaptation, ce qui garantit la non-surestimation des gains de commande.

En supposant que $|\hat{s}(0)| > \mu_s$ et $\phi(0) > \phi_m$ pour des petits paramètres $\mu_s > 0$ et $\phi_m > 0$, un régime glissant réel du second ordre (c'est-à-dire : $|\hat{s}| \leq \mu_1$ et $|\dot{\hat{s}}| \leq \mu_2$ tel que $\mu_1 \geq \mu_s$ et $\mu_2 > 0$) est établi $\forall t \geq t_r$ par l'utilisation de la loi de commande (3.31) avec les gains adaptatifs (3.34). La loi d'adaptation prend la forme suivante :

$$\dot{\phi}(t) = \begin{cases} \Omega_1 \sqrt{\eta_1 / 2} \operatorname{sign}(|\hat{s}| - \mu_s) & \text{si } \phi > \phi_m \\ \eta_m, & \text{si } \phi \leq \phi_m \end{cases} \quad (3.35)$$

tels que Ω_1 , η_1 et η_m sont des constantes positives (choisies arbitrairement). Il est important de noter que, lorsque $\mu_s = 0$ avec $\phi(0) > 0$ pour (3.35), le terme $\operatorname{sign}(|\hat{s}| - \mu_s)$ sera éliminé et la loi d'adaptation (3.35) devient :

$$\dot{\phi}(t) = \begin{cases} \Omega_1 \sqrt{\eta_1 / 2} & \text{si } \hat{s} \neq 0 \\ 0, & \text{si } \hat{s} = 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

Dans ce cas, la loi de commande globale (3.28) est dénotée maintenant u_{CAST} (commande adaptative du MG-2 utilisant ST) avec les gains adaptatifs (3.34) qui sont implémentés pour le terme ST (3.31), u_0 et u_c sont donnés par (3.29) et (3.30) respectivement. Le contrôleur proposé u_{CAST} dirigera les trajectoires du système (3.6) vers le MG-2 idéal $\hat{s} = \dot{\hat{s}} = 0$ en temps fini, mais les gains adaptatifs dénotés $k_1(t)$ et $k_2(t)$ peuvent être surestimés. Afin d'éviter ce problème, le détecteur (domaine) prédéfini ($|\hat{s}| \leq \mu_1$ et $|\dot{\hat{s}}| \leq \mu_2$) est intégré dans le mécanisme d'adaptation de telle sorte qu'une fois ce domaine est atteint, les gains $k_1(t)$ et $k_2(t)$ commencent à diminuer d'une façon dynamique. Cependant, dès que les trajectoires du système quittent le domaine, les gains commencent à augmenter afin de ramener ces trajectoires à ce domaine en temps fini. La loi d'adaptation des gains (3.36) peut être donc exprimée comme suit :

$$\dot{\phi}(t) = \begin{cases} \Omega_1 \sqrt{\eta_1 / 2}, & \text{si } |\hat{s}| > \mu_1 \\ 0, & \text{si } |\hat{s}| \leq \mu_1 \end{cases} \quad (3.37)$$

Remarque 3.9. Il est clairement noté que, lorsque $|\hat{s}| > \mu_1$ (c'est-à-dire ; $|\hat{s}| > \mu_s$), $\phi(t) = \phi(0) + \Omega_1 \sqrt{\eta_1 / 2} t$ pour $0 \leq t \leq t_r$, où t_r est le temps de convergence (reaching time), $\phi(t)$ est donc borné. En rappelant que, dans le voisinage $|\hat{s}| \leq \mu_1$, $\phi(t) = \phi(0) + \Omega_1 \sqrt{\eta_1 / 2} t_r$ pour $t > t_r$, $\phi(t)$ est également borné et les gains de commande $k_1(t)$ et $k_2(t)$ diminuent. Dès que les deux gains sont liés à $\phi(t)$, ils sont donc bornés durant le régime glissant du second ordre réel sur \hat{s} .

Remarque 3.10. Selon la commande u_{ST} définie par (3.31) avec les gains adaptatifs $k_1(t)$ et $k_2(t)$ définis par (3.34) et (3.37), les paramètres K_1 et K_2 sont liés aux termes $|\hat{s}|^{1/2} \operatorname{sign}(\hat{s})$ et à l'intégrale du $\operatorname{sign}(\hat{s})$ respectivement, et en relation avec $\phi(t)$. Il est à noter que de grandes valeurs des paramètres K_1 , K_2 , Ω_1 , η_1 et $\phi(0)$ peuvent garantir une stabilisation rapide du MG mais risquent d'engendrer un chattering d'amplitude importante au niveau du signal de commande. Donc, ces paramètres doivent être choisis judicieusement.

En utilisant les gains adaptatifs $k_1(t)$ et $k_2(t)$, le terme u_{ST} dans (3.31) est réécrit comme suit :

$$\begin{cases} u_{ST} = G_0(\underline{x})^{-1} v_{ST}, \\ v_{ST} = -k_1(t)|\hat{s}|^{1/2} \text{sign}(\hat{s}) + v_0, \\ \dot{v}_0 = -k_2(t)\text{sign}(\hat{s}) \end{cases} \quad (3.38)$$

En utilisant (3.38), la dynamique du système en boucle fermée (3.33) devient :

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}} = -k_1(t)|\hat{s}|^{1/2} \text{sign}(\hat{s}) + v, \\ \dot{v} = -k_2(t)\text{sign}(\hat{s}) + \rho(t) \end{cases} \quad (3.39)$$

Il convient de noter que, lorsque le contrôleur du MG-2 utilisant l'algorithme ST est homogène et stable en temps fini, la dynamique (3.39) est également homogène de degré $q = -1$ avec des poids $m = (2,1)$ [Lev-93]. Par conséquent, selon les poids d'homogénéité, un MG du second ordre $\hat{s} = \dot{\hat{s}} \equiv 0$ est atteint en temps fini avec une précision d'ordre $\mathcal{O}(\tau^2)$ par rapport à la surface de glissement terminal \hat{s} et d'ordre $\mathcal{O}(\tau)$ par rapport à sa dérivée $\dot{\hat{s}}$ (τ est le temps d'échantillonnage). En revanche, dans le cas de présence de bruit de mesure de Lebesgue avec d'amplitude maximale $\bar{\epsilon} > 0$, l'ordre de précision de glissement devient $\mathcal{O}(\bar{\epsilon})$ et $\mathcal{O}(\bar{\epsilon}^{1/2})$ par rapport à \hat{s} et $\dot{\hat{s}}$ respectivement [Lev-05a].

3.3.3. Analyse de la stabilité

Les fonctions homogènes continuellement différentiables ont des propriétés intéressantes dans la conception des contrôleurs par MG d'ordre supérieur. En utilisant le contrôleur développé u_{CAST} et en se basant sur l'homogénéité du système (3.39), la stabilité globale du système est garantie.

Théorème 3.2. Considérons le système (3.39) avec des incertitudes bornées $|\rho| \leq \bar{\mu}$ ($\bar{\mu} > 0$), en utilisant la surface de glissement terminal (3.23), le contrôleur proposé (u_{CAST}) avec les gains de commande (3.34)-(3.37) garantit la stabilisation en temps fini de l'ensemble de glissement $\hat{s} = \dot{\hat{s}} \equiv 0$, cela conduit également à la convergence des états du système (3.6) vers leurs trajectoires désirées en temps fini, pour toute condition initiale $\hat{s}(0)$ et $\underline{x}(0)$.

Démonstration. Afin de simplifier la démonstration de la stabilité du théorème 3.2, il est possible de la présenter en deux étapes :

Dans la première partie, le système en boucle fermée (3.39) sera présenté sous une forme adaptée à l'analyse de Lyapunov. Pour cela, un nouveau vecteur d'état est introduit:

$\xi^T = [\xi_1 \ \xi_2] = \left[|\hat{s}|^{1/2} \text{sign}(\hat{s}) \ v \right]$. Le système (3.39) (également la dynamique (3.33)) peut être exprimée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \frac{1}{2|\xi_1|}(-k_1\xi_1 + \xi_2), \\ \dot{\xi}_2 = -\frac{k_2}{|\xi_1|}\xi_1 + \rho(t) \end{cases} \quad (3.40)$$

Lorsque l'incertitude $\rho(t)$ est bornée (dont la borne supérieure est inconnue $|\rho| < \bar{\mu}$), la dynamique (3.40) peut être réécrite par :

$$\dot{\xi} = \frac{1}{|\xi_1|} A_v \xi \quad (3.41)$$

où $A_v = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}k_1 & \frac{1}{2} \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}$. Il est clair que : si ξ_1 et ξ_2 convergent vers 0 en temps fini donc \hat{s} et $\dot{\hat{s}}$

se stabilisent en temps fini, $|\xi_1| = |\hat{s}|^{1/2}$ et $\text{sign}(\xi_1) = \text{sign}(\hat{s})$.

Dans la deuxième partie, l'analyse de la stabilité globale du système (3.39) avec les gains adaptatifs (3.34) sera effectuée. Pour cela, en rappelant que les gains $k_i, (i=1,2)$ sont bornés (Remarque 3.9), il existe donc des constantes positives $k_i^*, (i=1,2)$ telle que $k_i(t) - k_i^* < 0, \forall t \geq 0, (i=1,2)$. D'après (3.34), on peut conclure qu'il existe aussi une constante positive ϕ^* telle que $\phi(t) - \phi^* < 0, \forall t \geq 0$. Afin d'analyser la stabilité du système en boucle fermée (3.39), on introduit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(\xi, \phi) = V_0(\xi) + \frac{1}{2\eta_1}(\phi - \phi^*)^2 \quad (3.42)$$

telle que $V_0(\xi)$ est une fonction quadratique de Lyapunov, stricte et robuste définie comme suit [Mor-12] :

$$V_0(\xi) = \xi^T P_v \xi \quad (3.43)$$

avec $P_v = [p_{vij}]$, $i, j = (1,2)$ est une matrice constante, définie positive et symétrique.

Démonstration (Partie 1). Soit la dynamique (3.41) avec $|\xi_1| = |\hat{s}|^{1/2}$ et la fonction de Lyapunov $V_0(\xi)$ (3.43). En utilisant les étapes suivantes pour déterminer les gains (k_1, k_2) et les matrices Q_v et P_v :

- En choisissant les constantes positives (β, γ) telles que $0 < \beta < 1, \gamma > 1$.

- En trouvant les constantes positives (χ, ζ) vérifiant :

$$\chi - \frac{2}{\gamma} \zeta > \zeta^2 - \beta(1 + \chi)\zeta + \frac{1}{4}(1 + \chi)^2 \quad (3.44)$$

- Etant donné les valeurs de (β, γ) et (χ, ζ) , les gains (k_1, k_2) définis par (3.45) assurent la stabilisation robuste et en temps fini du système incertain (3.39) (avec $|\rho| \leq \bar{\mu}$) :

$$k_1 = \chi \sqrt{2\gamma/(1-\beta)} \zeta \sqrt{\bar{\mu}}, \quad k_2 = \chi \bar{\mu} (1 + \beta)/(1 - \beta) \quad (3.45)$$

La matrice $P_V = [p_{Vij}]$ est définie par :

$$p_{V11} = 1, \quad p_{V22} = (1 - \beta)\zeta/2\bar{\mu}, \quad p_{V12} = \sqrt{(1 - \beta)\zeta/2\gamma\bar{\mu}} = -\sqrt{p_{V22}/\gamma} \quad (3.46)$$

On considère maintenant la fonction quadratique $V_0(\xi)$ (3.43), avec la matrice P_V (3.46). Il existe une matrice symétrique et définie positive $Q_V = [Q_{Vij}]$ satisfaisant l'inégalité suivante :

$$\dot{V}_0 \leq -|\hat{s}|^{-1/2} \xi^T Q_V \xi \quad (3.47)$$

$$\text{où } \begin{cases} q_{V11} = k_1 + 2p_{V12}(k_2 + \bar{\mu}) + 2\bar{\mu}(1 - k_1 p_{V12}) \frac{p_{V22}}{p_{V12}}, \\ q_{V12} = -\frac{1}{2}(1 - k_1 p_{V12}) + (k_2 + \bar{\mu}) p_{V22}, \quad q_{V22} = -p_{V12}. \end{cases}$$

Soit l'incertitude du système (3.39) est borné par $|\rho| \leq \bar{\mu}$. En définissant la nouvelle variable $\mathcal{G} = \rho \text{sign}(\hat{s})$, la dérivée de $V_0(\xi)$ par rapport au temps devient :

$$\dot{V}_0 = -|\hat{s}|^{-1/2} \xi^T \left[(A_V + N_V)^T P_V + P_V (A_V + N_V) \right] \xi \quad \text{où } A_V + N_V = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}k_1 & \frac{1}{2} \\ -(k_2 - \mathcal{G}) & 0 \end{bmatrix}.$$

Puisque \mathcal{G} est borné, on peut déduire que $(k_2 - \bar{\mu}) \leq (k_2 - \mathcal{G}) \leq (k_2 + \bar{\mu})$. La fonction $V_0(\xi)$ est définie positive et sa dérivée est définie négative si les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} p_{V22} > p_{V12}^2, & p_{V12} < 0, \\ 0 > k_1 p_{V12} + \frac{1}{4}(1 - k_1 p_{V12})^2 + 2p_{V12}^2(k_2 - \mathcal{G}) - (1 - k_1 p_{V12}) p_{V22}(k_2 - \mathcal{G}) + (k_2 - \mathcal{G})^2 p_{V12}^2 \end{cases} \quad (3.48)$$

Il est à noter que (3.48) sera satisfaite lorsque les inégalités suivantes seront vérifiées :

$$\gamma > 1, \quad \chi > 0, \quad 0 < \beta < 1, \quad \zeta > 0, \quad \chi - \frac{2}{\gamma} \zeta > \zeta^2 - \beta(1 + \chi)\zeta + \frac{1}{4}(1 + \chi)^2 \quad (3.49)$$

où,

$$\chi \triangleq -k_1 p_{V12}, \quad \gamma \triangleq \frac{p_{V22}}{p_{V12}^2}, \quad \zeta \triangleq p_{V22}(k_2 + \bar{\mu}), \quad \beta \triangleq \frac{(k_2 - \bar{\mu})}{(k_2 + \bar{\mu})} \quad (3.50)$$

Etant donné le quadruplé $(\beta, \gamma, \chi, \zeta)$ avec $\beta\gamma > 1$, tel que (3.49) soit satisfaite, puis en sélectionnant les gains (3.45) et en déduisant les composantes de P_V (3.46) à partir de (3.48), la fonction de Lyapunov proposée $V_0(\xi)$ dans (3.43) est une fonction absolument continue (AC) qui dépend de (\hat{s}, v) , et elle est également définie positive et radialement illimitée, c'est-à-dire :

$$\lambda_{\min}\{P_V\}\|\xi\|_2^2 \leq V_0(\xi) \leq \lambda_{\max}\{P_V\}\|\xi\|_2^2 \quad (3.51)$$

où $\|\xi\|_2^2 = |\hat{s}| + v^2$ est la norme euclidienne de ξ . Comme la dérivée temporelle de $V_0(\xi)$ satisfait (3.47) le long des trajectoires du système (3.39), selon (3.51) et $|\hat{s}|^{1/2} \leq \|\xi\|_2 \leq \lambda_{\min}^{-1/2}\{P_V\}V_0^{1/2}(\xi)$, il en résulte que :

$$\dot{V}_0(\xi) \leq -\varrho V_0^{1/2}(\xi) \quad (3.52)$$

où $\varrho = \frac{\lambda_{\min}^{-1/2}\{P_V\}\lambda_{\min}\{Q_V\}}{\lambda_{\max}\{P_V\}}$. De plus, la trajectoire du système débutant de ξ_{t_0} (ce qui est

équivalent à (\hat{s}_{t_0}, v_{t_0})) converge en un temps fini qui est inférieur à $T(\xi_{t_0}) = \frac{2}{\varrho}V_0^{1/2}(\xi_{t_0})$.

Puisque ξ tend vers zéro et se stabilise en temps fini, alors \hat{s} et v vont converger vers zéro en temps fini. Par conséquent, la poursuite en temps fini des états du système incertain (3.6) peut également être obtenue grâce à l'implémentation de la surface de glissement terminal (3.23). Ceci termine la première partie de la démonstration de la stabilité.

Démonstration (Partie 2). Maintenant, la convergence en temps fini des états du système (3.6), sous l'action du contrôleur proposé u_{CAST} avec les gains adaptatifs (3.34) sera prouvée. En notant que les gains de commande ont été supposés constants dans (3.45). Néanmoins, ces gains sont ajustés d'une manière adaptative comme prévu dans (3.34) et (3.37). En définissant l'erreur d'estimation de $\phi(t)$ comme $\tilde{\phi} = \phi - \phi^*$ telle que $\dot{\tilde{\phi}} = \dot{\phi}$. La dérivée temporelle de la fonction globale de Lyapunov (3.42) est donnée par :

$$\dot{V}(\xi, \phi) = \dot{V}_0(\xi) + \frac{1}{\eta_1}(\phi - \phi^*)\dot{\phi} \quad (3.53)$$

A partir de (3.52), $\dot{V}(\xi, \phi)$ peut être représentée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi, \phi) &= -|\hat{s}|^{-1/2} \xi^T \left[(A_v + N_v)^T P_v + P_v (A_v + N_v) \right] \xi + \frac{1}{\eta_1} \tilde{\phi} \dot{\phi} \\ &\leq -\varrho V_0^{1/2} + \frac{1}{\eta_1} \tilde{\phi} \dot{\phi} + \frac{\Omega_1}{\sqrt{2\eta_1}} |\tilde{\phi}| - \frac{\Omega_1}{\sqrt{2\eta_1}} |\tilde{\phi}| \end{aligned} \quad (3.54)$$

En prenant en considération l'inégalité de Jensen [Har-51] : $(|a|^p + |b|^p)^{1/p} \leq |a| + |b|$ avec $p = 2 > 1$, alors :

$$\left((V_0^{1/2})^2 + (\tilde{\phi})^2 \right)^{1/2} = \left(V_0 + (\tilde{\phi})^2 \right)^{1/2} \leq V_0^{1/2} + |\tilde{\phi}| \quad (3.55)$$

À partir de (3.55) et (3.42), on peut déduire que : $-\varrho V_0^{1/2} - \frac{\Omega_1}{\sqrt{2\eta_1}} |\tilde{\phi}| \leq -\tilde{\varrho} (V(\xi, \phi))^{1/2}$, tel que $\tilde{\varrho} = \min(\varrho, \Omega_1)$. Lorsque les gains de commande adaptatifs sont bornés (Remarque 3.9) et $\phi(t) - \phi^* < 0, \forall t \geq 0$, $\dot{V}(\xi, \phi)$ peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi, \phi) &\leq -\tilde{\varrho} (V(\xi, \phi))^{1/2} + \frac{1}{\eta_1} \tilde{\phi} \dot{\phi} + \frac{\Omega_1}{\sqrt{2\eta_1}} |\tilde{\phi}| \\ &\leq -\tilde{\varrho} (V(\xi, \phi))^{1/2} - |\tilde{\phi}| \left(\frac{1}{\eta_1} \dot{\phi} - \frac{\Omega_1}{\sqrt{2\eta_1}} \right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Par conséquent, lorsque $|\hat{s}| > \mu_1$ (c'est-à-dire $|\hat{s}| > \mu_s$ avec $\phi > \phi_m$ pour $t \geq 0$), d'après (3.35) $\dot{\phi} = \Omega_1 \sqrt{\eta_1 / 2}$ et dans ce cas (3.56) devient :

$$\dot{V}(\xi, \phi) \leq -\tilde{\varrho} (V(\xi, \phi))^{1/2} \quad (3.57)$$

Il convient de noter que, en raison de la convergence en temps fini de $\phi(t)$, les gains de commande adaptatifs (3.34) permettent d'assurer un régime glissant réel du second ordre sur \hat{s} , c'est-à-dire qu'à partir de toute condition initiale $|\hat{s}(t_0)| \geq \mu_s$, la surface de glissement \hat{s} et sa dérivée $\dot{\hat{s}}$ vont atteindre le domaine $D_s = \{ \hat{s}, \dot{\hat{s}} : |\hat{s}| \leq \mu_1, |\dot{\hat{s}}| \leq \mu_2, \mu_1 > \mu_s > 0, \mu_2 > 0 \}$ en temps fini t_r , qui peut être estimé par :

$$t_r = \frac{2}{\tilde{\varrho}} V^{1/2}(t_0) \quad (3.58)$$

Lorsque $|\hat{s}| < \mu_s$, d'après (3.35) le terme $-|\tilde{\phi}| \left(\frac{1}{\eta_1} \dot{\phi} - \frac{\Omega_1}{\sqrt{2\eta_1}} \right)$ dans (3.56) devient :

$$\begin{cases} 2|\phi - \phi^*| \Omega_1 \sqrt{\eta_1 / 2}, & \text{si } \phi > \phi_m \\ \left| \phi_m + \eta_m t - \phi^* \right| \left(\frac{\eta_m}{\eta_1} - \frac{\Omega_1}{\sqrt{2\eta_1}} \right), & \text{si } \phi \leq \phi_m \end{cases} ,$$

Selon le mécanisme d'adaptation, la surface de glissement \hat{s} atteint en temps fini le domaine $|\hat{s}| \leq \mu_s$ et elle peut quitter ce domaine pour un temps fini, il est garanti donc que \hat{s} reste toujours dans un domaine plus large $|\hat{s}| \leq \mu_1, \mu_1 > \mu_s$ (dans un MG réel). À l'intérieur du

domaine $|\hat{s}| \leq \mu_s$, la valeur $|\dot{\hat{s}}|$ peut être estimée par $|\dot{\hat{s}}| \leq \bar{\mu}_2$ d'après (3.33) et (3.34), avec $\bar{\mu}_2 = K_1 \sqrt{\phi(t_1)} \mu_s^{1/2} + (K_2 \phi(t_1) + \bar{\mu})(t_2 - t_1)$, t_1 et t_2 sont les instants où $\hat{s}(t)$ entre le domaine $|\hat{s}| \leq \mu_s$ et quitte ce domaine respectivement. Lorsque $|\hat{s}(t)|$ devient $\mu_s < |\hat{s}| \leq \mu_1$ alors $|\dot{\hat{s}}| \leq \tilde{\mu}_2$ avec $\tilde{\mu}_2 = (K_1 (\bar{\phi})^{1/2} \mu_1^{1/2} + K_2 \bar{\phi} + \bar{\mu})(t_3 - t_2)$ et $\bar{\phi} = \phi(t_2) + \Omega_1 \sqrt{\mu_1 \eta_1} / 2$. t_2 et t_3 sont les instants où $\hat{s}(t)$ quitte le domaine $|\hat{s}| \leq \mu_s$ et entre ensuite ce domaine respectivement. Par conséquent on peut déduire que $|\dot{\hat{s}}| \leq \max(\bar{\mu}_2, \tilde{\mu}_2) = \mu_2$ et l'existence d'un MG réel du second ordre qui définit par le domaine $D_s = \{\hat{s}, \dot{\hat{s}} : |\hat{s}| \leq \mu_1, |\dot{\hat{s}}| \leq \mu_2, \mu_1 > \mu_s > 0, \mu_2 > 0\}$ est prouvé. La stabilisation en temps fini des états du système (3.39) avec les gains de commande adaptatifs (3.34) est assurée.

Il est à noter que, dans le cas de présence du bruit de mesure (qui affecte la surface de glissement \hat{s}), la conception des gains de commande (ST) ne dépend pas de l'amplitude du bruit [Ang-12]. Donc, sous l'action du contrôleur homogène de ST (qui utilise uniquement la surface mesurée \hat{s} et n'a pas besoin de sa dérivée $\dot{\hat{s}}$) dont les gains sont ajustés d'une manière adaptative (3.34) avec (3.37), la stabilisation en temps fini du système (3.39) est garantie et un MG-2 réel sur \hat{s} est également atteint, avec $|\hat{s}| < \tilde{\mu}_1 \bar{\epsilon}$ et $|\dot{\hat{s}}| < \tilde{\mu}_2 \bar{\epsilon}^{-1/2}$ ($\tilde{\mu}_i, (i=1,2)$ sont des constantes positives et $\bar{\epsilon}$ est l'amplitude maximale du bruit), cela correspond à la meilleure précision de glissement possible à atteindre avec le contrôleur de ST en présence du bruit de mesure.

À la fin de cette démonstration, le contrôleur adaptatif du ST (u_{CAST}) (3.28) (avec (3.29)-(3.30) et (3.38)) à base de l'observateur FMG-3 permet d'assurer donc la stabilisation en temps fini de toutes les trajectoires du système (3.6) en dépit de toute incertitude bornée. Ceci complète la preuve de la stabilité globale.

3.4. Commande adaptative par MG-2

Dans cette section, une autre structure de commande robuste par MG-2 équipée d'un observateur FMG-3 (3.18) sera présentée pour le contrôle du système incertain (3.6). L'objectif principal de ce contrôleur est d'atteindre en un temps fini un régime glissant du troisième ordre en se basant sur une commande par MG du second ordre, c'est-à-dire d'assurer les performances d'un MG-3 notamment pour la précision de glissement avec les contraintes d'un MG-2.

En rappelant que l'observateur FMG-3 (3.18) est implémenté afin d'estimer en temps fini l'état $x_2(t)$ par $\hat{x}_2(t)$ et d'identifier également les incertitudes par \hat{z}_{eq} (l'injection de sortie

équivalente EOI). On définit : $\dot{e} = \dot{x}_2(t) - \dot{x}_d(t)$ et $\ddot{e} = \ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_d(t)$, donc $\dot{\sigma} = \dot{e}$ et $\ddot{\sigma} = \ddot{e}$. D'après (3.18), la dérivée temporelle du second ordre de σ est donnée par :

$$\begin{aligned}\ddot{\sigma} &= \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \hat{x} + \sum_{i=1}^M w_i(z) B_i u + \hat{z}_{eq} - \ddot{x}_d(t) \\ &= F_0(\underline{x}) + G_0(\underline{x})u + \hat{z}_{eq}\end{aligned}\quad (3.59)$$

où $F_0(\underline{x}) = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \hat{x} - \ddot{x}_d(t)$ et $G_0(\underline{x}) = \sum_{i=1}^M w_i(z) B_i$. Il est clair que le système (3.6) est de degré relatif 2 par rapport à la variable de glissement σ , l'objectif donc est de concevoir un contrôleur par MG-2 qui peut assurer la stabilisation en temps fini de l'ensemble de glissement d'ordre 3, c'est-à-dire $\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} \equiv 0$. Pour cela, on définit le nouveau système auxiliaire avec les variables d'état $\xi_1 = \sigma$ et $\xi_2 = \dot{\sigma}$ ($\xi = [\xi_1 \ \xi_2]^T \in \mathbb{R}^2$) comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = F_0(\underline{x}) + G_0(\underline{x})u + \hat{z}_{eq} \end{cases}\quad (3.60)$$

Remarque 3.11. Il est important de noter que le vecteur d'état ξ du système (3.60) est différent de celui défini précédemment pour prouver la stabilité du premier contrôleur. Donc, la conception et l'analyse de la stabilité pour les deux contrôleurs sont indépendantes.

D'après la procédure de mise en œuvre de la commande par MG, la loi de commande globale est donnée par :

$$u = G_0(\underline{x})^{-1} (-F_0(\underline{x}) + v_1) + v_c \quad (3.61)$$

$$v_c = -G_0(\underline{x})^{-1} \hat{z}_{eq} \quad (3.62)$$

où $v_c = u_c$ est le terme de compensation et v_1 est le contrôleur auxiliaire. Considérons la dynamique de l'erreur d'estimation (3.20) caractérisant l'observateur FMG-3 en présence des incertitudes. La dynamique du système incertain (3.6) en boucle fermée en appliquant la loi de commande (3.61)-(3.62) peut être représenté par :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = v_1 + \rho_1(t) \end{cases}\quad (3.63)$$

où $\rho_1(t) = \Delta(t) - \hat{z}_{eq}$ désigne l'écart d'incertitudes. Puisque $\Delta(t)$ est de Lipschitz ($|\Delta(t)| \leq \mu$ et $|\dot{\Delta}(t)| \leq \bar{\mu}$, $\bar{\mu} > 0$), il est possible donc de conclure que : $|\rho_1(t)| \ll \mu$ et $|\dot{\rho}_1(t)| \ll \bar{\mu}$ d'après $|\rho_1(t) + \hat{z}_{eq}| = |\Delta(t)|$. Malgré que la borne de l'écart d'incertitude $\rho_1(t)$ est plus petite que la borne supérieure des incertitudes réelles $\Delta(t)$, on peut considérer $\rho_1(t)$ comme une incertitude de Lipschitz caractérisant la dynamique (3.63). Dans ce cas, l'objectif de la commande consiste donc à concevoir un contrôleur auxiliaire v_1 , tels que les états $\xi_i, (i=1,2)$ du système (3.63) sont stabilisés et atteignent zéro ($\xi_1 = \xi_2 \equiv 0$) en temps fini en présence de

l'incertitude $\rho_1(t)$. De plus, l'incertitude devrait être compensée par la loi de commande v_1 de sorte que $\dot{\xi}_2 \equiv 0$ (c'est-à-dire $\ddot{\sigma} \equiv 0$), cela permet l'établissement d'un mode glissant réel du troisième ordre ($\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} \equiv 0$).

3.4.1. Synthèse de la commande adaptative par MG-2

En s'inspirant de la discussion susmentionnée, une commande adaptative par mode glissant d'ordre supérieur (exactement du second ordre) est proposée pour stabiliser le système incertain (3.63) en temps fini. Le contrôleur proposé peut être déduit comme une combinaison de l'algorithme ST avec le mode glissant terminal non singulier. En outre, les gains du contrôleur peuvent être générés en utilisant le mécanisme d'estimation adaptatif prédéfini dans lequel le problème de surestimation des gains et la connaissance des bornes supérieures d'incertitudes peuvent être contournés.

Par conséquent, la loi de commande globale (3.61) notée u_{CAMG-2} (commande adaptative par mode glissant d'ordre 2) est capable d'assurer une convergence en temps fin des états du système incertain (3.6) vers leurs références, avec de bonnes performances de poursuite (précision et rapidité) et de commande (robustesse et atténuation de l'effet du chattering).

En se basant sur [Fri-15] et en utilisant la notation : $a^{[b]} = |a|^b \text{sign}(a)$, $a, b \in \mathbb{R}$ ($a^{[0]} = \text{sign}(a)$) [Bha-97], la dynamique de la loi de commande auxiliaire v_1 est définie comme suit :

$$\begin{cases} v_1 = -k_1 L^{2/3} \varphi_L(\xi_1, \xi_2)^{[1/3]} + v_2 \\ \dot{v}_2 = -k_2 L \varphi_L(\xi_1, \xi_2)^{[0]} \end{cases} \quad (3.64)$$

$$\varphi_L(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 + \frac{k_3}{L^{1/2}} \xi_2^{[3/2]} \quad (3.65)$$

où $\varphi_L(\xi_1, \xi_2)$ est une fonction continue différentiable et globalement stable en temps fini, $k_i > 0$, ($i = 1, 2, 3$) sont des gains appropriés et $L > 0$. Il est à noter que si $L = 1$, la fonction contrainte (nommée également fonction de glissement) peut simplement être dénotée $\varphi(\xi_1, \xi_2)$. En supposant que $\xi_3 \triangleq v_2 + \rho_1(t)$, le système en boucle fermée (3.63) avec la loi de commande (3.64) peut être représenté par la dynamique :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = -k_1 L^{2/3} \varphi_L(\xi_1, \xi_2)^{[1/3]} + \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = -k_2 L \varphi_L(\xi_1, \xi_2)^{[0]} + \dot{\rho}_1(t) \end{cases} \quad (3.66)$$

En utilisant la nouvelle variable $\xi \leftarrow \xi/L$, (3.66) devient :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = -k_1 \varphi(\xi_1, \xi_2)^{[1/3]} + \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = -k_2 \varphi(\xi_1, \xi_2)^{[0]} + \rho_0 \end{cases} \quad (3.67)$$

telle que l'incertitude $\rho_0 = \dot{\rho}_1(t)/L$, est supposée être bornée $|\rho_0| \leq \bar{\rho}$, ($\bar{\rho} > 0$). Il convient de noter que les deux modèles (3.66) et (3.67) ont les mêmes conditions de la stabilité, le système (3.67) sera donc considéré pour la conception du contrôleur adaptatif par MG-2 u_{CAMG-2} .

Remarque 3.12. Les deux systèmes (3.66) et (3.67) sont homogènes de degré $q = -1$ avec les poids d'homogénéité $m = (3, 2, 1)$ pour les états ξ_1, ξ_2 et ξ_3 respectivement. Comme la troisième équation dans (3.66) et (3.67) est discontinue, les solutions des deux systèmes peuvent être conçues au sens de Filippov [Fil-88].

Afin de concevoir le contrôleur proposé u_{CAMG-2} (3.61) (avec (3.62) et (3.64)), les gains de commande adaptatifs $k_1(t, \varphi)$ et $k_2(t, \varphi)$ sont définies comme suit :

$$\begin{cases} k_1(t, \varphi) = K_1 \sqrt{\phi(t)} \\ k_2(t, \varphi) = K_2 \phi(t) \end{cases} \quad (3.68)$$

Comme il est indiqué précédemment concernant le mécanisme d'adaptation proposé (dans le premier contrôleur), un régime glissant réel du second ordre sur la fonction contrainte φ est atteint en temps fini ($|\varphi| \leq \mu_1$ et $|\dot{\varphi}| \leq \mu_2$). La loi d'adaptation des gains est exprimée donc par :

$$\dot{\phi}(t) = \begin{cases} \Omega_1 \sqrt{\eta_1 / 2}, & \text{si } |\varphi| > \mu_1 \\ 0, & \text{si } |\varphi| \leq \mu_1 \end{cases} \quad (3.69)$$

En utilisant les gains de commande adaptatifs (3.68)-(3.69), le système (3.67) devient :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = -k_1(t) \varphi(\xi_1, \xi_2)^{[1/3]} + \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = -k_2(t) \varphi(\xi_1, \xi_2)^{[0]} + \rho_0 \end{cases} \quad (3.70)$$

Le système (3.70) est également homogène de degré $q = -1$ avec les poids $m = (3, 2, 1)$ pour ξ_1, ξ_2 et ξ_3 respectivement. Il convient de noter que les remarques 3.9 et 3.10 sont également valables pour les gains adaptatifs de ce contrôleur (u_{CAMG-2}).

Remarque 3.13. L'objectif principal du contrôleur u_{CAMG-2} (3.61) (avec les gains adaptatifs (3.68)) est d'atteindre un régime glissant du troisième ordre ($\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} \equiv 0$) ce qui correspond à la stabilisation en temps fini du système (3.70) ($\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 \equiv 0$) avec les contraintes d'un

mode glissant du second ordre, où seulement les états ξ_1 et ξ_2 sont nécessaires pour la mise en œuvre du contrôleur. D'autre part, le terme de commande v_2 dans (3.64) compensera totalement les incertitudes $\Delta(t)$ lorsque la commande de compensation v_c (3.62) n'est pas implémentée dans la loi de commande globale (3.61). Par conséquent, l'état $\dot{\xi}_2 = 0$ (équivalent à $\ddot{\sigma} = 0$) et une précision de glissement d'ordre 3 sera obtenue pour les variables $\sigma, \dot{\sigma}$ et $\ddot{\sigma}$.

3.4.2. Analyse de la stabilité

En se basant sur l'homogénéité du système (3.70) et par l'application du contrôleur u_{CAMG-2} (3.61) avec v_c et v_1 exprimés par (3.62) et (3.64) respectivement, la stabilité globale du système (3.6) sera étudiée en utilisant une fonction homogène de Lyapunov [Kam-16].

Théorème 3.3. Considérons le système incertain (3.70) dont l'incertitude est bornée $|\rho_0| \leq \bar{\rho}$, ($\bar{\rho} > 0$) et avec un choix approprié du paramètre $k_3 > 0$, le contrôleur adaptatif par MG-2 (u_{CAMG-2}) (3.61) avec les gains de commande (3.68) garantit la stabilisation en temps fini du système (3.70) et permet d'atteindre un régime glissant réel du troisième ordre c'est-à-dire $\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} \equiv 0$.

En conséquence du théorème 3.3, la convergence en temps fini des états du système incertain (3.6) vers leurs trajectoires désirées est obtenue pour toutes les conditions initiales $\xi(0)$ et $\underline{x}(0)$.

Démonstration. Rappelons que la fonction scalaire $\phi(t)$ et les gains adaptatifs $k_i(t), (i=1,2)$ sont bornés (Remarque 3.9), il existe donc des constantes positives ϕ^* et $k_i^*, (i=1,2)$ telles que $\phi(t) - \phi^* < 0$ et $k_i(t) - k_i^* < 0 (i=1,2), \forall t \geq 0$. L'analyse de la stabilité du système (3.70) est effectuée à base de la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(\xi, \phi) = V_0(\xi) + \frac{1}{5\eta_1} (\phi - \phi^*)^5 \quad (3.71)$$

telle que $V_0(\xi)$ est une fonction continue différentiable et homogène de degré $q_{V_0} = 5$ et est définie comme suit :

$$V_0(\xi) = \beta |\xi_1|^{\frac{5}{3}} + \xi_1 \xi_2 + \frac{2}{5} k_3 |\xi_2|^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{k_3^3} \xi_2 \xi_3^3 + \gamma |\xi_3|^5 \quad (3.72)$$

Pour simplifier l'analyse de la stabilité, la démonstration du théorème 3.3 sera présentée en deux parties :

Démonstration (Partie 1). La stabilité en temps fini de $V_0(\xi)$ est prouvée dans cette partie. D'après (3.72), si les paramètres $\beta, \gamma > 0$ sont choisis suffisamment grands, $V_0(\xi)$ sera définie

positive et bornée : $\omega_1(\|\xi\|) \leq V_0(\xi) \leq \omega_2(\|\xi\|)$, telles que $\omega_{1,2}(\|\xi\|)$ sont deux fonctions définies dans la classe \mathcal{K}_∞ .

Définition 3.2. [Har-51] Pour $p, q \in \mathbb{R}$ avec $p > 1$ et $q > 1$ tel que $(1/p) + (1/q) = 1$, et pour tous nombres réels positifs a, b et c , l'inégalité : $ab \leq c^p \frac{a^p}{p} + c^{-q} \frac{b^q}{q}$ est satisfaite (inégalité de Young). D'après (3.72), il en résulte que :

$$V_0(\xi) \geq \beta |\xi_1|^{\frac{5}{3}} - |\xi_1| |\xi_2| + \frac{2}{5} k_3 |\xi_2|^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{k_1^3} |\xi_2| |\xi_3|^3 + \gamma |\xi_3|^5 \quad (3.73)$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient : $|\xi_1| |\xi_2| \leq \frac{3}{5} c_1^{\frac{5}{3}} |\xi_1|^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{5} c_1^{-\frac{5}{2}} |\xi_2|^{\frac{5}{2}}$ et $|\xi_2| |\xi_3|^3 \leq \frac{3}{5} c_2^{\frac{5}{3}} |\xi_3|^5 + \frac{2}{5} c_2^{-\frac{5}{2}} |\xi_2|^{\frac{5}{2}}$, avec $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$. La substitution de ces inégalités dans (3.73) donne :

$$V_0(\xi) \geq \left(\beta - \frac{3}{5} c_1^{\frac{5}{3}} \right) |\xi_1|^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{5} \left(k_3 - c_1^{-\frac{5}{2}} - c_2^{-\frac{5}{2}} \frac{1}{k_1^3} \right) |\xi_2|^{\frac{5}{2}} + \left(\gamma - \frac{3}{5} c_2^{\frac{5}{3}} \right) |\xi_3|^5 \quad (3.74)$$

Si tous les coefficients de (3.74) sont positifs, $V_0(\xi)$ est définie positive. A titre d'exemple en choisissant les constantes :

$$c_1 = \left(\frac{4}{k_3} \right)^{2/5}, \quad c_2 = \left(\frac{4}{k_3 k_1^3} \right)^{2/5}, \quad \beta > \frac{3}{5} \left(\frac{4}{k_3} \right)^{2/3}, \quad k_1^5 \gamma > \frac{3}{5} \left(\frac{4}{k_3} \right)^{2/3} \quad (3.75)$$

En définissant $\zeta_3 \triangleq \frac{\xi_3}{k_1}$, $\kappa \triangleq \frac{k_2}{k_1}$, $\bar{\gamma} \triangleq \gamma k_1^5$ et $\lambda \triangleq L k_2$, et en utilisant l'égalité $\xi_1 = \varphi - k_3 \xi_2^{[3/2]}$ déduite d'après (3.65) avec $L = 1$, la dérivée par rapport au temps de $V_0(\xi)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(\xi) = & -k_1 (\varphi - \zeta_3^{[3]}) (\varphi^{[1/3]} - \zeta_3) + \left(\frac{5}{3} \beta (\varphi - k_3 \xi_2^{[3/2]})^{[2/3]} + \xi_2 \right) \xi_2 \\ & - 3\kappa |\zeta_3|^2 \left(\frac{5}{3} \bar{\gamma} \zeta_3^{[2]} - \xi_2 \right) \left(\varphi^{[0]} + \frac{\dot{\rho}_1(t)}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (3.76)$$

Il est à noter que les valeurs de $(\kappa, \bar{\gamma}, \lambda)$ peuvent être fixées indépendamment de k_1 , puisque la relation entre (k_2, γ, L) et $(\kappa, \bar{\gamma}, \lambda)$ est biunivoque (un à un) pour toute valeur de k_1 . L'objectif est de confirmer que, pour toutes valeurs de $k_3, \bar{\mu} > 0$, il existe des valeurs suffisamment grandes de $\beta, \bar{\gamma}, k_1, L > 0$ de sorte que \dot{V}_0 soit définie négative pour toute incertitude $|\dot{\rho}_1(t)| \leq \bar{\mu}$. Donc, on peut trouver une fonction continue et homogène

$W(\varphi, \xi_2, \zeta_3)$ qui peut être considérée comme la borne supérieure de \dot{V}_0 en utilisant les égalités suivantes :

$$\frac{5}{3}\beta\left(\varphi - k_3\xi_2^{[3/2]}\right)^{[2/3]} + \xi_2 = \frac{5}{3}\beta\left(\left(\varphi - k_3\xi_2^{[3/2]}\right)^{[2/3]} + k_3^{2/3}\xi_2\right) - \left(\frac{5}{3}\beta k_3^{2/3} - 1\right)\xi_2,$$

$$\frac{5}{3}\bar{\gamma}\zeta_3^{[2]} - \xi_2 = \frac{5}{3}\bar{\gamma}\left(\zeta_3^{[2]} - \varphi^{[2/3]}\right) - \xi_2 + \frac{5}{3}\bar{\gamma}\varphi^{[2/3]}.$$

De plus, comme la fonction $(\cdot)^{[2/3]}$ est globalement continue (de Hölder) avec une constante de Hölder égale à $2^{1/3}$ pour tout (φ, ξ_2) , l'inégalité $\left|\left(\varphi - k_3\xi_2^{[3/2]}\right)^{[2/3]} + k_3^{2/3}\xi_2\right| \leq 2^{1/3}|\varphi|^{2/3}$ est vérifiée. En définissant maintenant la fonction $W(\varphi, \xi_2, \zeta_3)$ telle que :

$$\dot{V}_0(\xi) \leq -k_1\left(\varphi - \zeta_3^{[3]}\right)\left(\varphi^{[1/3]} - \zeta_3\right) + W(\varphi, \xi_2, \zeta_3) \quad (3.77)$$

$$W(\varphi, \xi_2, \zeta_3) \triangleq \frac{5}{3}2^{\frac{1}{3}}\beta|\varphi|^{\frac{2}{3}}|\xi_2| - \left(\frac{5}{3}\beta k_3^{\frac{2}{3}} - 1\right)|\xi_2|^2 + 5\bar{\gamma}\frac{\bar{\mu}}{\lambda}\kappa|\zeta_3|^4$$

$$+ 3\kappa|\zeta_3|^2\left|\frac{5}{3}\bar{\gamma}\left(\zeta_3^{[2]} - \varphi^{[2/3]}\right) - \xi_2\right| + 3\kappa\frac{\bar{\mu}}{\lambda}|\zeta_3|^2|\xi_2| - 5\bar{\gamma}\kappa|\varphi|^{\frac{2}{3}}|\zeta_3|^2$$

Suivant la valeur de φ , deux cas sont considérés :

Lorsque $\varphi = \zeta_3^{[3]}$, $\dot{V}_{0\mathcal{M}} \leq W_{\mathcal{M}}(\varphi, \xi_2, \varphi^{[1/3]})$ est établie sur la surface $\mathcal{M} = \{\varphi = \zeta_3^{[3]}\}$, où

$$W_{\mathcal{M}} = -\left[|\varphi|^{\frac{2}{3}}, |\xi_2|\right] P \begin{bmatrix} |\varphi|^{\frac{2}{3}} \\ |\xi_2| \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 5\bar{\gamma}\kappa\left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\lambda}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}2^{\frac{1}{3}}\beta + 3\kappa\left(1 + \frac{\bar{\mu}}{\lambda}\right)\right) \left(5\bar{\gamma}\beta k_3^{\frac{2}{3}} - 1\right) \end{bmatrix} W$$

Par conséquent, $\dot{V}_0(\xi)$ est négative sur l'ensemble \mathcal{M} lorsque les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\lambda > \bar{\mu} \quad (3.78)$$

$$\beta > \frac{3}{5k_3^{2/3}} \quad (3.79)$$

$$\bar{\gamma} > \left(\frac{5}{3}2^{\frac{1}{3}}\beta + 3\kappa\left(1 + \frac{\bar{\mu}}{\lambda}\right)\right)^2 / 20\kappa\left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\lambda}\right)\left(\frac{5}{3}\beta k_3^{\frac{2}{3}} - 1\right) \quad (3.80)$$

Pour le deuxième cas, lorsque $\varphi \neq \zeta_3^{[3]}$, $\dot{V}_0(\xi)$ peut également être définie négative en dehors de \mathcal{M} en sélectionnant une grande valeur de k_1 :

$$\dot{V}_{0\mathcal{M}^c} \leq -(k_1 - \psi(\varphi, \xi_2, \zeta_3))\left(\varphi - \zeta_3^{[3]}\right)\left(\varphi^{[1/3]} - \zeta_3\right) \quad (3.81)$$

$$\psi(\varphi, \xi_2, \zeta_3) \triangleq \frac{W(\varphi, \xi_2, \zeta_3)}{(\varphi - \zeta_3^{[3]})(\varphi^{[1/3]} - \zeta_3)} \quad (3.82)$$

$\psi(\varphi, \xi_2, \zeta_3)$ est une fonction homogène de degré $q_\psi = 0$, c'est-à-dire pour tout $k > 0$, $\psi(\varphi, \xi_2, \zeta_3) = \psi(k^3\varphi, k^2\xi_2, k\zeta_3)$, toutes les valeurs de $\psi(\varphi, \xi_2, \zeta_3)$ sont donc prises sur la sphère unitaire homogène $S_\psi = \left\{ (\varphi, \xi_2, \zeta_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |\varphi|^{\frac{2}{3}} + |\xi_2| + |\zeta_3|^2 = 1 \right\}$. Alors, ψ est continue partout sauf sur $\mathcal{M} \cap S_\psi$. Selon (3.78)-(3.80) et ([McS-05], Théorème 3.7, chap. 3, section 3), ψ est bornée dans \mathbb{R}^3 , si les valeurs de k_1 sont choisies suffisamment grandes.

$$k_1 > \max_{S_\psi} \{ \psi(\varphi, \xi_2, \zeta_3) \} \quad (3.83)$$

D'après le résultat classique sur les fonctions homogènes ([Hes-66], théorème 4.4, sect. 5), $\dot{V}_0(\xi)$ peut être définie négative.

Maintenant, puisque $V_0(\xi)$ est une fonction continue, définie positive et homogène de degré $q_{V_0} = 5$, et $\dot{V}_0(\xi)$ dans (3.77) est une fonction continue bornée, définie négative et homogène de degré $q_{\dot{V}_0} = 4$ (rappelant que le degré d'homogénéité de (3.70) est $q = -1$, alors $q_{\dot{V}_0} = q_{V_0} + q$), on peut conclure d'après ([Bha-05], lemme 4.2) qu'il existe pour tout $\xi \in \mathbb{R}^3$ un réel positif \mathcal{G} , telle que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\dot{V}_0(\xi) \leq -\mathcal{G}V_0^{\frac{4}{5}}(\xi) \quad (3.84)$$

Finalement, l'inégalité (3.84) et le principe d'homogénéité [Orl-03] permettent de déduire directement que le système (3.70) (également (3.69)) est uniformément globalement stable en temps fini au point d'équilibre $\xi = 0$ ([Lev-05a], théorème 1).

Démonstration (Partie 2). Maintenant, la stabilité en temps fini du système (3.70) en utilisant la loi de commande (3.61) avec les gains adaptatifs (3.68) sera étudiée. La convergence des états du système (3.6) en appliquant le contrôleur proposé u_{CAMG-2} sera également garantie. En définissant $\tilde{\phi} = \phi - \phi^*$ tel que $\dot{\tilde{\phi}} = \dot{\phi}$. La dérivée de la fonction globale du Lyapunov (3.71) est donnée par :

$$\dot{V}(\xi, \phi) = \dot{V}_0(\xi) + \frac{1}{\eta_1} (\tilde{\phi})^4 \dot{\phi} \quad (3.85)$$

d'après (3.84), $\dot{V}(\xi, \phi)$ peut être représentée comme suit :

$$\dot{V}(\xi, \phi) \leq -\mathcal{G}V_0^{\frac{4}{5}} + \frac{1}{\eta_1} (\tilde{\phi})^4 \dot{\phi} + \frac{\Omega_1}{\sqrt{2\eta_1}} |\tilde{\phi}|^4 - \frac{\Omega_1}{\sqrt{2\eta_1}} |\tilde{\phi}|^4 \quad (3.86)$$

En utilisant l'inégalité de Jensen [Har-51] : $(|a|^p + |b|^p)^{1/p} \leq |a| + |b|$ avec $p = \frac{5}{4} > 1$, alors :

$$\left((V_0^{4/5})^{5/4} + \left(|\tilde{\phi}|^4 \right)^{5/4} \right)^{4/5} \leq V_0^{4/5} + |\tilde{\phi}|^4 \quad (3.87)$$

Selon (3.87) et vue la fonction globale de Lyapunov (3.71), on peut conclure que :

$$-\mathcal{G}V_0^{4/5} - \frac{\Omega_1}{\sqrt{2\eta_1}} |\tilde{\phi}|^4 \leq -\tilde{\mathcal{G}}(V(\xi, \phi))^{4/5} \quad (3.88)$$

tel que $\tilde{\mathcal{G}} = \min(\mathcal{G}, \frac{\Omega_1}{\sqrt{2\eta_1}})$. Lorsque les gains adaptatifs $k_i, (i=1,2)$ sont bornés et $\phi(t) - \phi^* < 0, \forall t \geq 0$, $\dot{V}(\xi, \phi)$ peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi, \phi) &\leq -\tilde{\mathcal{G}}(V(\xi, \phi))^{4/5} + \frac{1}{\eta_1} \tilde{\phi}^4 \dot{\phi} + \frac{\Omega_1}{\sqrt{2\eta_1}} |\tilde{\phi}|^4 \\ &\leq -\tilde{\mathcal{G}}(V(\xi, \phi))^{4/5} - |\tilde{\phi}|^4 \left(\frac{\dot{\phi}}{\eta_1} - \frac{\Omega_1}{\sqrt{2\eta_1}} \right) \end{aligned} \quad (3.89)$$

D'après la loi d'adaptation des gains de commande (3.69) et lorsque $|\phi| > \mu_1$ (c'est-à-dire $|\phi| > \mu_\phi$, $\mu_1 > \mu_\phi > 0$, avec $\phi > \phi_m$ pour $t \geq 0$), (3.89) devient :

$$\dot{V}(\xi, \phi) \leq -\tilde{\mathcal{G}}(V(\xi, \phi))^{4/5} \quad (3.90)$$

Il est à noter que selon le mécanisme d'adaptation, lorsque $|\phi| < \mu_\phi$, la fonction contrainte ϕ atteint en temps fini et reste dans un domaine plus large $|\phi| \leq \mu_1$ ($\mu_1 > \mu_\phi$) avec $|\dot{\phi}| \leq \mu_2$. Cela permet d'assurer l'existence d'un régime glissant réel du second ordre qui définit par le domaine $D_\phi = \{\phi, \dot{\phi} : |\phi| \leq \mu_1, |\dot{\phi}| \leq \mu_2, \mu_1 > \mu_\phi > 0, \mu_2 > 0\}$.

Finalement, la stabilisation en temps fini du système (3.70) est garantie et toutes ses trajectoires convergent vers un régime glissant d'ordre 3. Par conséquent, le contrôleur proposé u_{CAMG-2} (3.61) avec v_c et v_1 données par (3.62) et (3.64) respectivement, permet alors d'assurer la poursuite en temps fini des états du système incertain (3.6).

Remarque 3.14. Il convient de noter que les gains adaptatifs (3.68) garantissent la stabilisation d'un régime glissant réel du second ordre sur la fonction contrainte ϕ , tel que $\phi = \dot{\phi} \equiv 0$, cela implique que sur le système (3.70) avec la loi de commande (3.64), un MG réel du troisième ordre est également établi (c'est-à-dire, $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 \equiv 0$). Lorsque les états ξ_1, ξ_2 et ξ_3 correspondent aux variables $\sigma, \dot{\sigma}$ et $\ddot{\sigma}$, le contrôleur développé u_{CAMG-2} permet donc de stabiliser en temps fini l'ensemble de glissement d'ordre 3 ($\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} \equiv 0$) avec une précision de glissement d'ordre 3.

3.5. Simulations et résultats

Pour mettre en évidence l'efficacité des structures de commande développées et évaluer leurs performances, les contrôleurs u_{CAST} (3.28) et u_{CAMG-2} (3.61) sont appliqués à tour de rôle sur un bras manipulateur (à deux articulations) dont la dynamique est donnée par [Tse-01] :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \Gamma + D \quad (3.91)$$

tels que,

$$M(q) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2(s_1s_2 + c_1c_2) \\ m_2l_1l_2(s_1s_2 + c_1c_2) & m_2l_2^2 \end{bmatrix}, \quad C(q, \dot{q}) = m_2l_1l_2(c_1s_2 - s_1c_2) \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_2 \\ -\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} -(m_1 + m_2)l_1gs_1 \\ -m_2l_2gs_2 \end{bmatrix}, \quad q = [q_1 \ q_2]^T \text{ (rad) } \text{ représente le vecteur des coordonnées}$$

généralisées qui désigne les positions angulaires, $\Gamma = [\Gamma_1 \ \Gamma_2]^T$ (Nm) est le vecteur des couples appliqués et $D = [D_1 \ D_2]^T$ désigne l'ensemble des incertitudes du modèle $D_u = [D_{u1} \ D_{u2}]^T$ et les perturbations externes $D_d = [D_{d1} \ D_{d2}]^T$. $m_i = 1$ (Kg) et $l_i = 1$ (m) sont la masse et la longueur d'articulation i , ($i = 1, 2$). $g = 9.8$ (m/s²), $s_i = \sin(q_i)$ et $c_i = \cos(q_i)$, ($i = 1, 2$). En définissant le vecteur d'état $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ tels que $x_1 = q_1$, $x_2 = \dot{q}_1$, $x_3 = q_2$ et $x_4 = \dot{q}_2$, la dynamique (3.91) peut être réécrite dans l'espace d'état comme suit [Tse-01] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_1(x) + g_{11}(x)\Gamma_1 + g_{12}(x)\Gamma_2 + D_1 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + g_{21}(x)\Gamma_1 + g_{22}(x)\Gamma_2 + D_2 \end{cases} \quad (3.92)$$

où

$$f_1(x) = \frac{(s_1c_2 - s_2c_1)}{l_1l_2 \left[(m_1 + m_2) - m_2(s_1s_2 + c_2c_1)^2 \right]} \times \frac{1}{\left[m_2l_1l_2(s_1s_2 - c_2c_1)x_2^2 - m_2l_2^2x_4^2 \right]}$$

$$+ \frac{1}{l_1l_2 \left[(m_1 + m_2) - m_2(s_1s_2 + c_2c_1)^2 \right]} \times \frac{1}{\left[(m_1 + m_2)l_2gs_1 - m_2l_2gs_2(s_1s_2 + c_2c_1) \right]}$$

$$f_2(x) = \frac{(s_1c_2 - s_2c_1)}{l_1l_2 \left[(m_1 + m_2) - m_2(s_1s_2 + c_2c_1)^2 \right]} \times \frac{1}{\left[m_2l_1l_2(s_1s_2 - c_2c_1)x_4^2 - (m_1 + m_2)l_1^2x_2^2 \right]}$$

$$+ \frac{1}{l_1l_2 \left[(m_1 + m_2) - m_2(s_1s_2 + c_2c_1)^2 \right]} \times \frac{1}{\left[-(m_1 + m_2)l_1g(s_1s_2 + c_2c_1) + (m_1 + m_2)l_1gs_2 \right]}$$

$$g_{11}(x) = \frac{m_2l_2^2}{m_2l_2^2l_1^2 \left[(m_1 + m_2) - m_2(s_1s_2 + c_2c_1)^2 \right]}, \quad g_{22}(x) = \frac{(m_1 + m_2)l_1^2}{m_2l_2^2l_1^2 \left[(m_1 + m_2) - m_2(s_1s_2 + c_2c_1)^2 \right]}$$

$$\text{et } g_{12}(x) = g_{21}(x) = \frac{-m_2 l_2 l_1 (s_1 s_2 + c_2 c_1)}{m_2 l_2^2 l_1^2 [(m_1 + m_2) - m_2 (s_1 s_2 + c_2 c_1)^2]}.$$

En supposant que les états mesurés des positions x_1 et x_3 appartiennent à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. En définissant $X_1 = [x_1 \ x_3]^T$ et $X_2 = [x_2 \ x_4]^T$ avec $X = [X_1 \ X_2]^T$, le système (3.92) peut être représenté par le modèle nominal F-2 TS obtenu en utilisant neuf règles ayant la forme suivante :

$$\text{Règle } i : \text{ Si } x_1 \text{ est autour de } p_1^i \text{ et } x_3 \text{ est autour de } p_3^i, \text{ alors } \begin{cases} \dot{X}_1 = X_2, \\ \dot{X}_2 = A_i X + B_i \Gamma + D \end{cases}$$

Les paramètres de A_i et B_i , ($i=1:9$) sont calculés hors ligne [Tse-01], p_1^i et p_3^i sont pris autour $[-\pi/2, 0, \pi/2]$.

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 5.927 & -0.001 & -0.315 & -8.4 \times 10^{-6} \\ -6.859 & 0.002 & 3.155 & 6.2 \times 10^{-6} \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 3.0428 & -0.0011 & 0.1791 & -0.0002 \\ 3.5436 & 0.0313 & 2.5611 & 1.14 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 6.2728 & 0.003 & 0.4339 & -0.0001 \\ 9.1041 & 0.0158 & -1.0574 & -3.2 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, & A_4 &= \begin{bmatrix} 6.4535 & 0.0017 & 1.2427 & 0.0002 \\ -3.1873 & -0.0306 & 5.1911 & -1.8 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, \\ A_5 &= \begin{bmatrix} 11.1336 & 0 & -1.8145 & 0 \\ -9.0918 & 0 & 9.1638 & 0 \end{bmatrix}, & A_6 &= \begin{bmatrix} 6.1702 & -0.001 & 1.687 & -0.0002 \\ -2.3559 & 0.0314 & 4.5298 & 1.1 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, \\ A_7 &= \begin{bmatrix} 6.1206 & -0.0041 & 0.6205 & 0.0001 \\ 8.8794 & -0.0193 & -1.0119 & 4.4 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, & A_8 &= \begin{bmatrix} 3.6421 & 0.0018 & 0.0721 & 0.0002 \\ 2.429 & -0.0305 & 2.9832 & -1.9 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, \\ A_9 &= \begin{bmatrix} 6.2933 & -0.0009 & -0.2188 & -1.2 \times 10^{-5} \\ -7.4649 & 0.0024 & 3.2693 & 9.2 \times 10^{-6} \end{bmatrix}, & B_{1,5,9} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B_{2,4,6,8} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_{3,7} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Afin de construire le modèle nominal, dans toutes les règles, trois ensembles flous type-2 intervalle sont définis pour les états $x_i(t)$, ($i=1,3$), dont leurs fonctions d'appartenance Gaussiennes sont illustrées sur la figure 3.1.

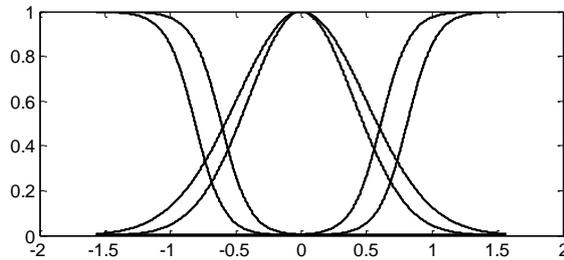


Figure 3.1. Fonctions d'appartenance type-2 intervalle de $x_i(t)$, $i=1,3$.

Rappelons que la somme des incertitudes D_u et des perturbations D_d est représentée par $D = [D_1 \ D_2]^T$ additif au modèle nominal, tels que:

$$D_u = \begin{bmatrix} 5 \sin(x_1) + 0.2 \sin(x_2) \\ 5 \sin(x_3) + 0.2 \sin(x_4) \end{bmatrix} \text{ et } D_d = \begin{bmatrix} 0.5 \sin(2t) + 0.5 \cos(3t) \\ 0.5 \sin(2t) + 0.5 \cos(3t) \end{bmatrix}.$$

L'objectif des contrôleurs développés est d'atteindre une convergence en temps fini des états du système $x(t)$ vers les trajectoires désirées $x_d(t)$, dont la dynamique de la trajectoire désirée est proposée comme suit [Tse-01] :

$$\dot{x}_d(t) = A_d x_d(t) + r(t) \quad (3.93)$$

$$\text{où } A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \end{bmatrix},$$

$$r(t) = [0 \ 8 \sin(t) \ 0 \ 8 \cos(t)]^T, \quad x_d(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \text{ et } x(0) = [\pi/30 \ 0 \ \pi/30 \ 0]^T.$$

Pour évaluer les performances des contrôleurs proposés, les simulations sont réalisées et présentées en deux parties. Premièrement, pour prouver l'efficacité de l'observateur proposé FMG-3, les deux observateurs prédéfinis FMG-2 (3.8) et FMG-3 (3.18) sont implémentés afin d'estimer en temps fini les vitesses (\dot{q}_1, \dot{q}_2) et d'identifier les incertitudes. Puis, à base de l'observateur FMG-3, les performances obtenues en appliquant les contrôleurs u_{CAST} (3.28) et u_{CAMG-2} (3.61) sont comparées à celles obtenues en utilisant un contrôleur par mode glissant classique « Quasi-continuous » du second ordre Qc-2 [Lev-05b], et un contrôleur adaptatif par mode glissant ST proposé dans [Goe-17].

Pour la première partie de simulation, les gains des observateurs sont sélectionnés comme susmentionné (Remarque 3.4), où $\alpha_1 = 1.5(F^+)^{1/2}$, $\alpha_0 = 1.1F^+$ pour l'observateur FMG-2, alors que pour l'observateur FMG-3 $\alpha_2 = 1.9(F^+)^{1/3}$ ($F^+ > 0$), ce choix permet d'assurer la convergence en temps fini des observateurs. Les gains linéaires pour l'observateur FMG-3 sont définis par simulation : $\beta_1 = 45$ et $\beta_2 = 35$. Pour l'identification des incertitudes dans l'observateur FMG-2, un filtre passe-bas est utilisé avec le pas d'échantillonnage $\tau = 10^{-4}$ sec et la constante du temps $\tau_{eq} = \tau^{1/2}$ sec. Pour les deux observateurs, la comparaison de l'estimation des vitesses et l'identification des incertitudes est illustrée sur les figures 3.2 et 3.3 respectivement.

D'après les résultats de simulation présentés, de bonnes performances d'estimation des vitesses et des incertitudes sont obtenues pour les deux observateurs. Malgré que l'observateur FMG-2 est plus rapide par rapport à l'observateur FMG-3, la précision d'estimation obtenue par les deux observateurs (FMG-3 et FMG-2) correspond à la précision d'estimation d'un différentiateur par MG d'ordre supérieur (à base de ST) en l'absence de

bruits de mesure. En d'autres termes, concernant l'estimation de la vitesse, l'ordre de précision est $\mathcal{O}(\tau^2)$ et $\mathcal{O}(\tau^1)$ pour l'observateur FMG-3 et FMG-2 respectivement.

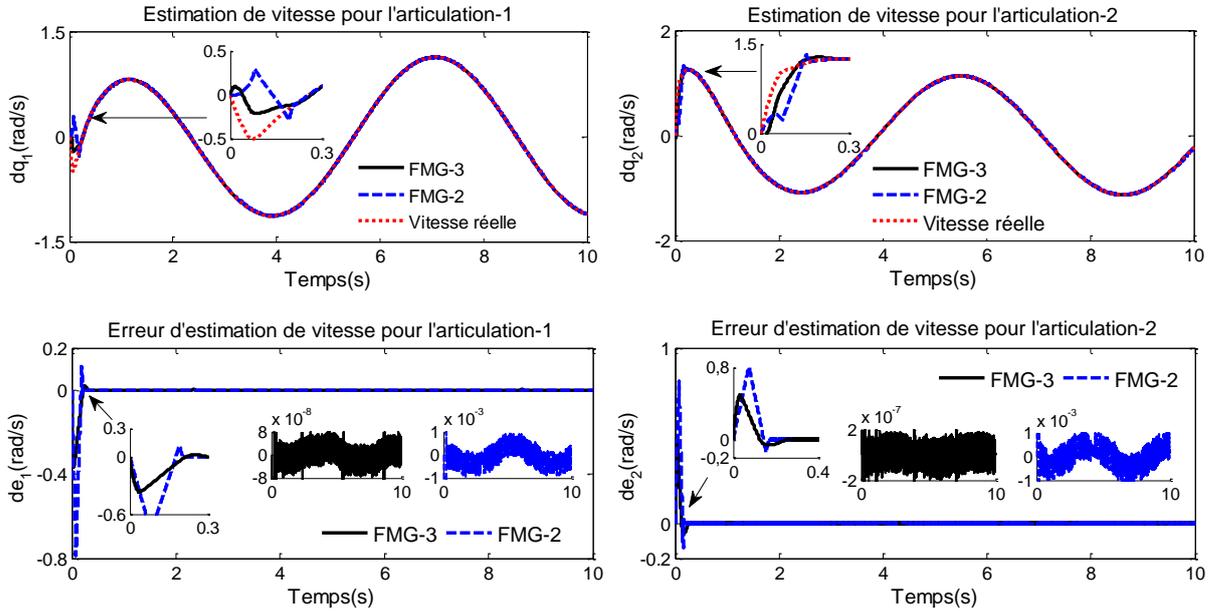


Figure 3.2. Estimation des vitesses par les observateurs FMG-2 et FMG-3.

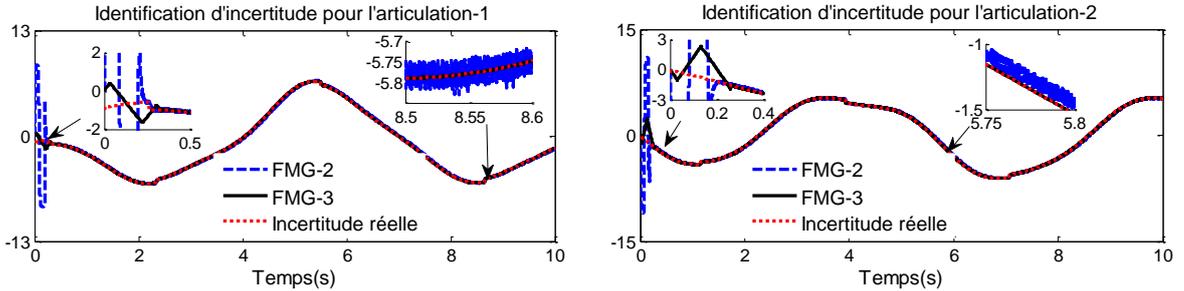


Figure 3.3. Identification des incertitudes par les observateurs FMG-2 et FMG-3.

Comme le montre la figure 3.2, avec l'observateur FMG-3 les erreurs d'estimation de la vitesse $|\dot{e}_1| \leq 8 \times (10^{-4})^2$ et $|\dot{e}_2| \leq 20 \times (10^{-4})^2$ sont atteintes en temps fini de $t \cong 0.3$ sec et $t \cong 0.26$ sec pour les articulations 1 et 2, respectivement. En revanche, avec l'observateur FMG-2, $|\dot{e}_1| \leq 10 \times (10^{-4})^1$ et $|\dot{e}_2| \leq 10 \times (10^{-4})^1$ sont atteintes en $t \cong 0,22$ sec et $t \cong 0,17$ sec pour les articulations 1 et 2, respectivement. En outre, l'identification des incertitudes obtenue par l'observateur FMG-3 est mieux que celle du FMG-2, où le retard introduit par le filtre passe-bas (associé au terme de commutation) engendre le phénomène de chattering comme l'illustre la figure 3.3. D'autre part, malgré la rapidité d'estimation de l'observateur FMG-2, ce dernier produit un dépassement important au démarrage de l'estimation de vitesses et de l'identification d'incertitudes (ce qui est indésirable pour la précision de poursuite des manipulateurs). Ces résultats confirment l'efficacité et les

performances satisfaisantes fournies par l'observateur FMG-3. Ce dernier est donc utilisé dans les contrôleurs proposés pour l'estimation de la vitesse et l'identification de l'incertitude.

Maintenant, pour situer les performances obtenues par les deux contrôleurs proposés u_{CAST} et u_{CAMG-2} , nous les avons comparés avec celles obtenues par l'application de deux autres contrôleurs du MG-2 à base de l'observateur FMG-3. Le premier est classique qui utilise l'algorithme « Quasi-continuous » du MG-2 [Lev-05b], tandis que le deuxième est adaptatif basé sur l'algorithme ST [Goe-17].

Selon la dynamique de l'erreur de poursuite (3.3), il est clair que le système présenté par (3.6) est de degré relatif 2 par rapport à la variable de glissement $\sigma = e$. La loi de commande « Quasi-continuous » du MG-2 dénoté u_{CQC-2} peut simplement être conçue par :

$$\begin{cases} u_{CQC-2} = -G_0(\underline{x})^{-1} (F_0(\underline{x}) + v_{Q2}) + v_c, \\ v_{Q2} = -k_{Q2} \left(\frac{\dot{\sigma} + |\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma)}{|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{1/2}} \right) \end{cases} \quad (3.94)$$

tel que le terme de compensation des incertitudes est défini par (3.62), v_{Q2} est le terme « Quasi-continuous » du MG-2 avec k_{Q2} est le gain de glissement ($k_{Q2} > 0$). Il est à noter que par un choix approprié du gain de commande k_{Q2} , le système est stable en temps fini [Lev-05b]. De plus, afin d'atténuer l'effet du chattering, un petit scalaire positif ω_{Q2} est ajouté au terme v_{Q2} comme suit :

$$v_{Q2} = -k_{Q2} \left(\frac{\dot{\sigma} + |\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma)}{|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{1/2} + \omega_{Q2}} \right) \quad (3.95)$$

Remarque 3.15. Il convient de noter qu'il faudrait réaliser un compromis entre l'effet du chattering et la robustesse dans la commande « Quasi-continuous », où une valeur élevée de ω_{Q2} garantit une atténuation élevée du chattering, ce qui peut affecter la précision de glissement (de poursuite) et vice versa. Donc, le gain de glissement k_{Q2} et le paramètre ω_{Q2} doivent être attentivement sélectionnés dans la mise en œuvre du contrôleur u_{CQC-2} .

Le contrôleur adaptatif du MG-2 à base du ST proposé dans [Goe-17] (dénoté u_{CAST-2}) est conçu similairement au contrôleur prédéfini u_{CAMG-2} . En notant que la conception des deux contrôleurs u_{CAMG-2} et u_{CAST-2} est basée principalement sur les structures de commande homogènes nommée « commande du MG terminal continue CMGTC » proposés dans [Fri-15]. L'objectif principal de ce dernier (CMGTC) consiste à générer un signal de commande continu avec une stabilisation en temps fini d'un régime glissant de troisième ordre avec les contraintes d'un mode glissant du second ordre. Cependant, cet objectif n'est pas mentionné

ou discuté dans le travail de [Goe-17]. Le contrôleur u_{CAST-2} est conçu à base d'une fonction contrainte homogène $\varphi_{ST-2} = \hat{\sigma} + k_3 \hat{\sigma}^{[2/3]}$, tel que ($k_3 > 0$) et les gains de commande sont ajustés en ligne utilisant le même mécanisme d'adaptation prédéfini [Goe-17]. Basée sur les informations délivrées par l'observateur proposé FMG-3, la loi de commande globale s'exprime comme suit :

$$u_{CAST-2} = -G_0(\underline{x})^{-1} (F_0(\underline{x}) + v_{ST-2}) + v_c \quad (3.96)$$

$$\begin{cases} \dot{v}_{ST-2} = -k_1(t) |\varphi_{ST-2}|^{1/2} \text{sign}(\varphi_{ST-2}) + v_0, \\ \dot{v}_0 = -k_2(t) \text{sign}(\varphi_{ST-2}) \end{cases} \quad (3.97)$$

Les simulations des contrôleurs u_{CAST} (3.28), u_{CAMG-2} (3.61), u_{CAST-2} (3.96) et u_{CQc-2} (3.94) sont effectuées sous l'environnement MATLAB Simulink/Software (solveur ODE 4) avec un pas de calcul fixé à $\tau = 10^{-3}$ sec. Deux cas sont considérés dans cette partie de simulation : avec l'utilisation du terme de compensation des incertitudes v_c (noté également u_c dans le contrôleur u_{CAST}) et dans le second cas, seulement les contrôleurs nominaux sont appliqués (sans l'implémentation de v_c c'est-à-dire $v_c = 0$). Les paramètres de conception de tous les contrôleurs sont donnés dans le tableau 3.1.

Remarque 3.16. Les paramètres initiaux des gains K_1 et K_2 pour le contrôleur u_{CAST-2} (3.96) sont sélectionnés comme il est indiqué dans [Goe-17], où $K_1 = 100K_2$. Il est à noter que les valeurs de ces paramètres sont plus petites en comparaison avec celles des contrôleurs développés u_{CAST} (3.28) et u_{CAMG-2} (3.61). En effet, lorsque les gains sont élevés, l'effet du chattering est fortement atténué et le signal de commande devient presque continu. Cependant, la rapidité de convergence et la précision de poursuite sont fortement dégradées (détériorées). Dans ce cas, la convergence des états du système vers leurs références n'est pas assurée.

Tableau 3.1. Paramètres des contrôleurs u_{CAST} , u_{CAMG-2} , u_{CAST-2} et u_{CQc-2} .

Contrôleurs	Paramètres
u_{CAST} (3.28)	$K_1 = 18$, $K_2 = 14.4$, $p_\sigma / q_\sigma = 7/5$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.2$, $\eta_1 = 2$, $\Omega_1 = 1$, $\mu_1 = 0.001$
u_{CAMG-2} (3.61)	$K_1 = 1.5K$, $K_2 = 1.1K$, $K = 5$, $k_3 = 1/3$, $\eta_1 = 2$, $\Omega_1 = 1$, $\mu_1 = 0.001$
u_{CAST-2} (3.96)	$K_1 = 12$, $K_2 = 0.12$, $k_3 = 3$, $\eta_1 = 2$, $\Omega_1 = 1$, $\mu_1 = 0.001$
u_{CQc-2} (3.94)	$k_{Q2} = 10$, $\omega_{Q2} = 0.004$, $\Omega_1 = 1$

Remarque 3.17. Pour les contrôleurs proposés u_{CAST} et u_{CAMG-2} , selon la structure des gains de commande exprimée par (3.34) et après plusieurs essais de simulation, il a été remarqué que

la combinaison $K_1 = 1.5K$, $K_2 = 1.1K$ ($K > 0$) permet d'obtenir des résultats satisfaisants en termes de performances de commande et de poursuite. En outre, il est également à signaler que les valeurs initiales élevées de K_1 et K_2 mènent à une convergence rapide des états du système, et génèrent en revanche plus d'efforts de la commande. Pour cela, les valeurs initiales des gains adaptatifs sont adéquatement sélectionnées (après plusieurs tests de simulation).

Les réponses temporelles des états de position (q_1 , q_2) et des états de vitesse (\dot{q}_1 , \dot{q}_2) sont présentées sur les figures 3.4 et 3.5, respectivement. Il est clairement observé que tous les contrôleurs proposés assurent de bonnes performances de poursuite, tel que tous les états du système convergent rapidement vers leurs trajectoires désirées. La figure 3.6 illustre la précision de poursuite des états du système, ce qui montre qu'après la convergence rapide des états en temps fini, une haute précision de poursuite est atteinte par tous les contrôleurs.

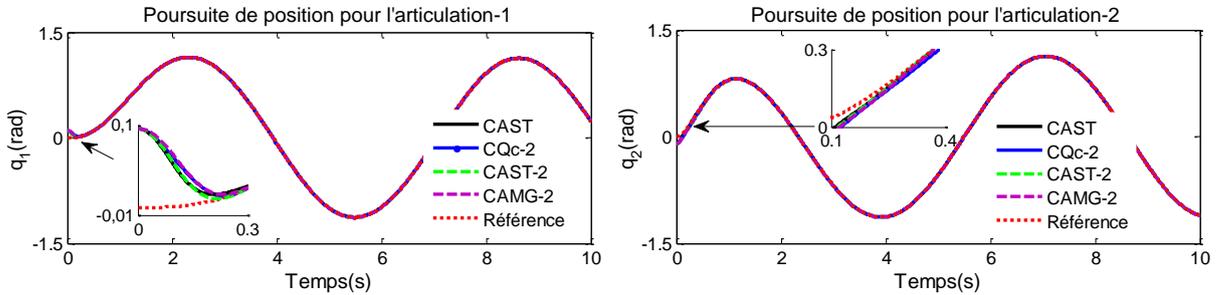


Figure 3.4. Performance de poursuite de position (q_1 , q_2).

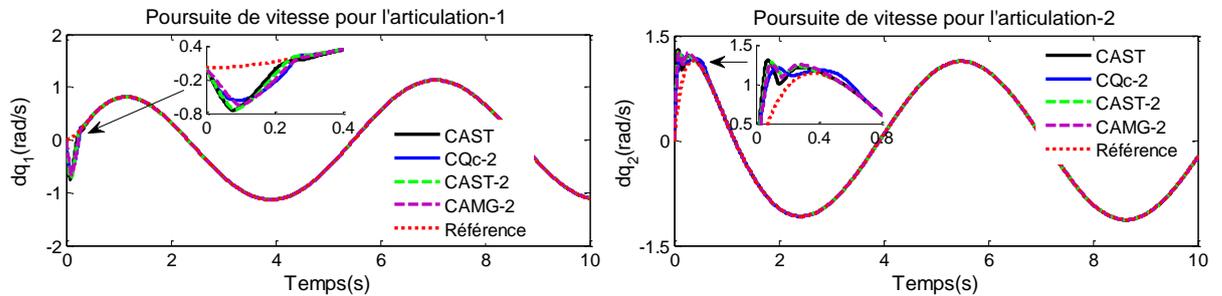
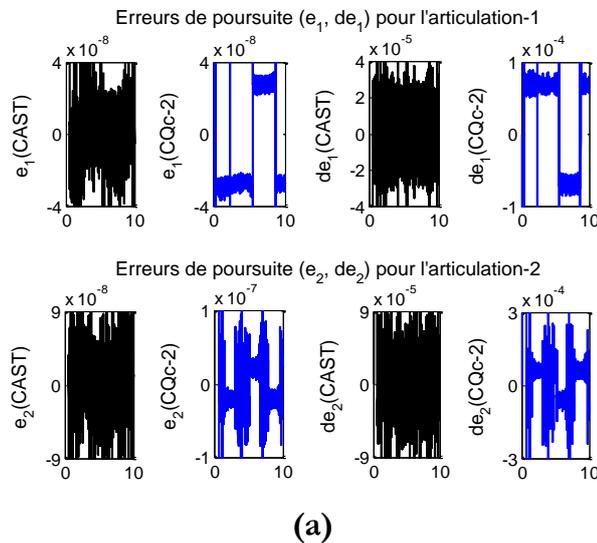


Figure 3.5. Performance de poursuite de vitesse (\dot{q}_1 , \dot{q}_2).

En notant que, pour la plupart des algorithmes du MG-2, la précision fournie correspond généralement à la précision d'un MG du second ordre par rapport au temps d'échantillonnage [Lev-93]. En rappelant que le temps d'échantillonnage est $\tau = 10^{-3}$ sec, avec le contrôleur adaptatif du ST à base du MG terminal u_{CAST} (3.28), la précision est donnée par : $|e_1| \leq 0.04 \times (10^{-3})^2$, $|\dot{e}_1| \leq 0.04 \times (10^{-3})^1$ et $|e_2| \leq 0.09 \times (10^{-3})^2$, $|\dot{e}_2| \leq 0.09 \times (10^{-3})^1$ pour les articulations 1 et 2 respectivement. Le contrôleur « Quasi-continuous » du MG-2 u_{CQc-2} (3.94) permet d'assurer la précision : $|e_1| \leq 0.04 \times (10^{-3})^2$, $|\dot{e}_1| \leq 0.1 \times (10^{-3})^1$ et $|e_2| \leq 0.1 \times (10^{-3})^2$, $|\dot{e}_2| \leq 0.3 \times (10^{-3})^1$ pour les articulations 1 et 2 respectivement (figure 3.6. (a)).

En rappelant que les autres contrôleurs u_{CAMG-2} (3.61) et u_{CAST-2} (3.96) ayant le même objectif (atteindre un MG-3 sur σ , c'est-à-dire $\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} \equiv 0$), et les erreurs de poursuite $(e_i, \dot{e}_i, \ddot{e}_i)$ correspondent aux variables de glissements $(\sigma_i, \dot{\sigma}_i, \ddot{\sigma}_i)$ pour l'articulation $i, (i=1,2)$, avec $\ddot{\sigma} = -k_1 \phi^{[1/3]} + \xi_3$ pour le contrôleur u_{CAMG-2} et $\ddot{\sigma} = -k_1 \phi_{ST-2}^{[1/2]} + \xi_3$ pour le contrôleur u_{CAST-2} , où $\xi_3 \triangleq v_0 + \rho_i(t)$. Après la convergence des états du système en temps fini et comme le montre la figure 3.6. (b), une bonne précision de poursuite est atteinte par les deux contrôleurs ; avec le contrôleur u_{CAMG-2} , la précision obtenue est : $|e_1| \leq 20 \times (10^{-3})^3$, $|\dot{e}_1| \leq 20 \times (10^{-3})^2$, $|\ddot{e}_1| \leq 40 \times (10^{-3})^1$ et $|e_2| \leq 30 \times (10^{-3})^3$, $|\dot{e}_2| \leq 40 \times (10^{-3})^2$, $|\ddot{e}_2| \leq 70 \times (10^{-3})^1$ pour les articulations 1 et 2 respectivement. Tandis que la précision atteinte par le contrôleur u_{CAST-2} est : $|e_1| \leq 20 \times (10^{-3})^3$, $|\dot{e}_1| \leq 20 \times (10^{-3})^2$, $|\ddot{e}_1| \leq 60 \times (10^{-3})^1$ et $|e_2| \leq 30 \times (10^{-3})^3$, $|\dot{e}_2| \leq 40 \times (10^{-3})^2$, $|\ddot{e}_2| \leq 90 \times (10^{-3})^1$ pour les articulations 1 et 2 respectivement. On peut donc déduire que les deux contrôleurs du MG-2 u_{CAMG-2} et u_{CAST-2} permettent d'assurer la stabilisation en temps fini de l'ensemble de glissement d'ordre 3 $\sigma_i = \dot{\sigma}_i = \ddot{\sigma}_i \equiv 0, (i=1,2)$ et une précision de glissement d'ordre 3 est également assurée.

D'autre part, en comparaison avec les contrôleurs u_{CAMG-2} et u_{CAST-2} , il convient de noter que la précision de poursuite obtenue par les contrôleurs u_{CAST} (3.28) et u_{CQC-2} (3.94) est satisfaisante par rapport à la précision d'un MG-2. Ces résultats peuvent être prouvés par l'utilisation du terme de compensation des incertitudes v_c (noté u_c dans le contrôleur u_{CAST}), ce qui garantit l'amélioration en performances de robustesse et de précision. Donc, pour vérifier la légitimité de cette conjecture, une seconde partie de simulation (avec $v_c = 0$) sera présentée ultérieurement.



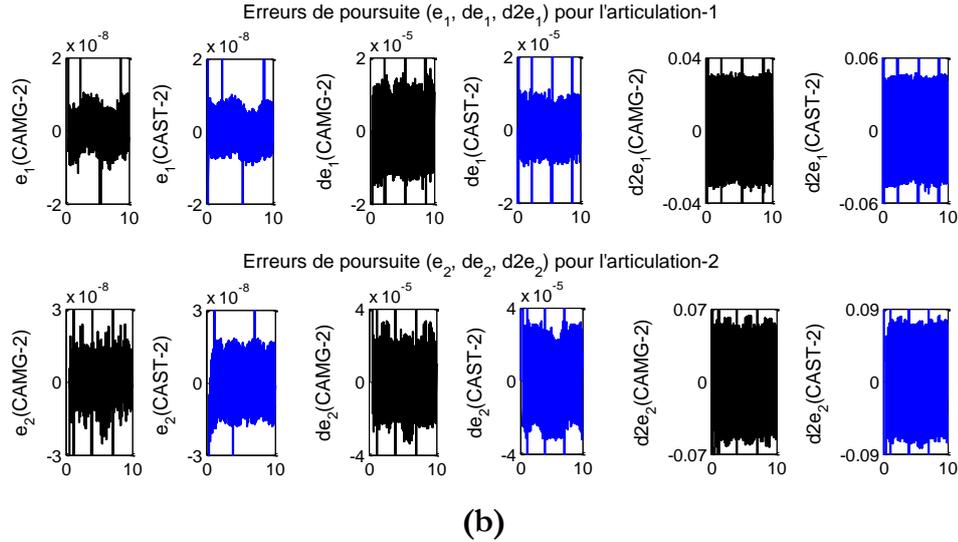


Figure 3.6. Précision des erreurs de poursuite pour articulation $i, (i = 1, 2)$.

(a). (e_i, \dot{e}_i) pour u_{CAST} et u_{CQc-2} . (b). $(e_i, \dot{e}_i, \ddot{e}_i)$ pour u_{CAMG-2} et u_{CAST-2} .

De plus, comme le montre la figure 3.7, pour le contrôleur u_{CAST} (3.28), la stabilisation des variables de glissement (erreurs de poursuite) exhibe une stabilisation en temps fini d'un régime glissant réel du second ordre sur la surface de glissement terminal \hat{s} c'est-à-dire $\hat{s} = \dot{\hat{s}} \equiv 0$ avec une précision d'un MG-2 tels que $|\hat{s}| \leq 0.2 \times (10^{-3})^2$ et $|\dot{\hat{s}}| \leq 1.5 \times (10^{-3})^1$ sont atteintes en temps fini pour l'articulation 1 et $|\hat{s}| \leq 0.5 \times (10^{-3})^2$ et $|\dot{\hat{s}}| \leq 1.5 \times (10^{-3})^1$ pour l'articulation 2.

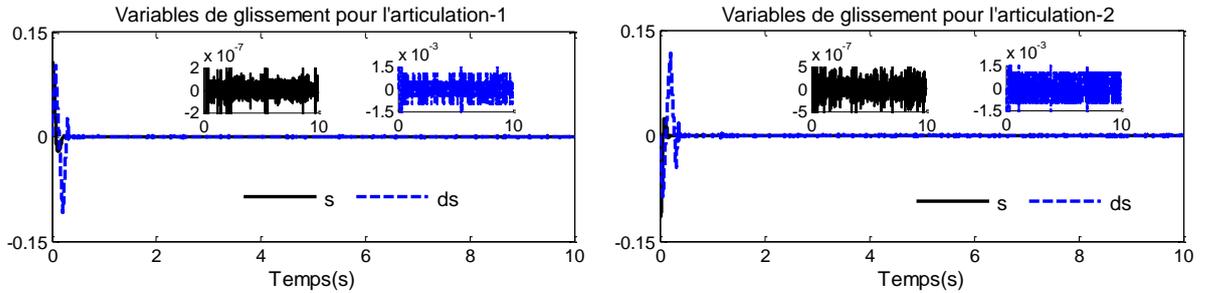


Figure 3.7. Stabilisation des surfaces de glissement pour le contrôleur u_{CAST} .

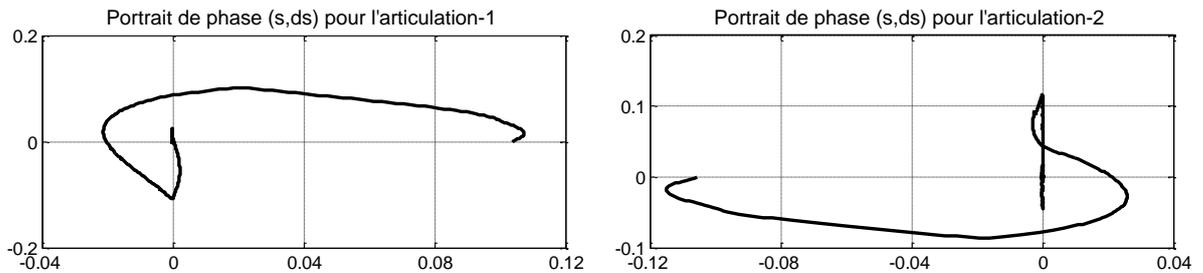


Figure 3.8. Portraits de phase $(\hat{s}, \dot{\hat{s}})$ pour le contrôleur u_{CAST} .

D'autre part, un comportement typique d'un régime glissant du second ordre est obtenu dans le plan de phase $(\hat{s}, \dot{\hat{s}})$ comme le montre la figure 3.8. Il est à noter qu'un dérivateur par MG exact d'ordre 1 (à base de ST) [Lev-03] est utilisé afin de calculer la dérivée de la surface de glissement $\dot{\hat{s}}$.

De même, la figure 3.9 montre la stabilisation des fonctions contraintes φ et φ_{ST-2} (nommées également surfaces de glissement) pour les deux contrôleurs homogènes u_{CAMG-2} (3.61) et u_{CAST-2} (3.96) respectivement, tels que $|\varphi| \leq 20 \times (10^{-3})^3$ et $|\varphi| \leq 40 \times (10^{-3})^3$ sont atteintes pour les articulations 1 et 2 respectivement avec le contrôleur u_{CAMG-2} , et $|\varphi_{ST-2}| \leq 20 \times (10^{-3})^2$ pour l'articulation 1 et $|\varphi_{ST-2}| \leq 40 \times (10^{-3})^2$ pour l'articulation 2 avec le contrôleur u_{CAST-2} . En outre, la figure 3.10 représente le portrait de phase des erreurs (e_i, \dot{e}_i) pour l'articulation i ($i=1,2$) le long de l'hypersurface $\varphi=0$ pour le contrôleur u_{CAMG-2} et $\varphi_{ST-2}=0$ pour le contrôleur u_{CAST-2} . Les trajectoires du système dans le plan de phase (e_i, \dot{e}_i) ont des comportements typiques du MG-2, telles que les trajectoires d'erreur atteignent l'origine en temps fini.

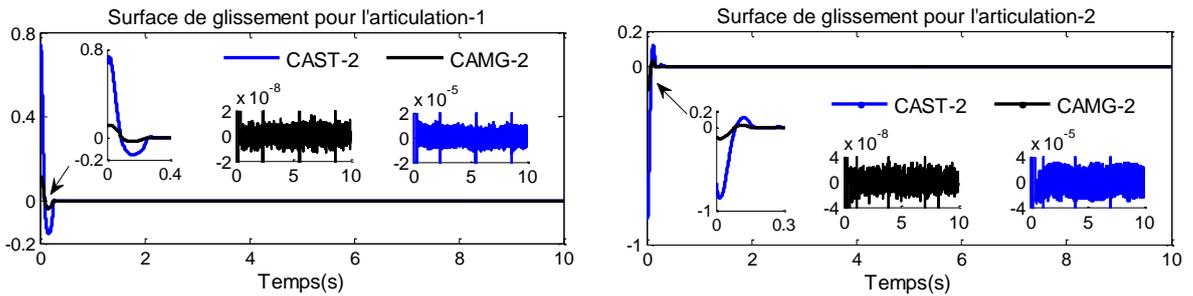


Figure 3.9. Stabilisation des surfaces de glissement pour les contrôleurs u_{CAMG-2} et u_{CAST-2} .

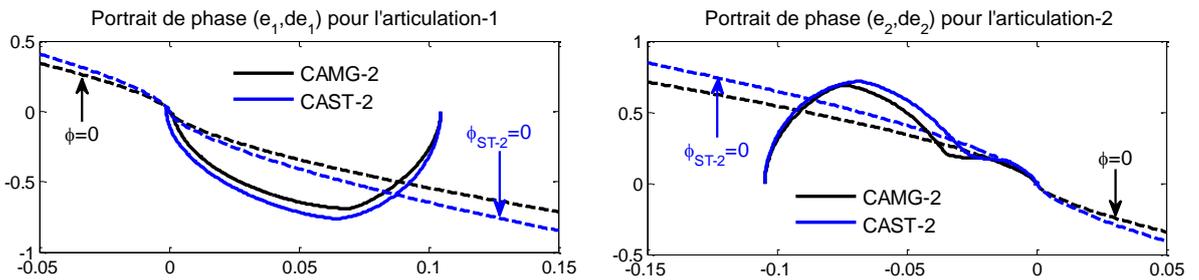


Figure 3.10. Portraits de phase (e_i, \dot{e}_i) , $i=1,2$ pour les contrôleurs u_{CAMG-2} et u_{CAST-2} .

Il est à noter que, selon les différentes valeurs des gains de commande pouvant être conçues pour les deux contrôleurs u_{CAMG-2} et u_{CAST-2} , le comportement glissant dans le plan de phase peut être obtenu similairement à celui d'un contrôleur du MG terminal (ce qui est considéré comme un comportement d'un MG-2 [Lev-07]), où les trajectoires atteignent l'hypersurface

et glissent le long de celle-ci jusqu'à l'origine, il est également possible d'obtenir un comportement typique d'un contrôleur de Twisting.

La figure 3.11 montre les deux couples de commandes Γ_1 et Γ_2 (appliqués au système) générés par tous les contrôleurs. Il est clair que la caractéristique principale du MG-2 est réalisée, où le chattering est effectivement atténué et des signaux de commande lisses sont obtenus. Cependant, il est à noter que, en comparaison avec l'algorithme ST, lorsqu'un régime glissant réel du second ordre est établi dans un contrôleur classique « Quasi-continuous » du MG-2, l'effet du chattering peut se produire légèrement au niveau de signal de commande. Il est alors évident de signaler que les contrôleurs u_{CAST} , u_{CAMG-2} et u_{CAST-2} (à base de ST) peut générer des commandes plus lisses que celles produites par le contrôleur u_{CQc-2} . Selon l'évolution temporelle des gains de commande k_1 et k_2 présentés sur la figure 3.12, les gains obtenus par le mécanisme d'adaptation utilisé (3.34) avec (3.37) sont convergents et bornés pour les contrôleurs proposés u_{CAST} , u_{CAMG-2} et u_{CAST-2} [Geo-17].

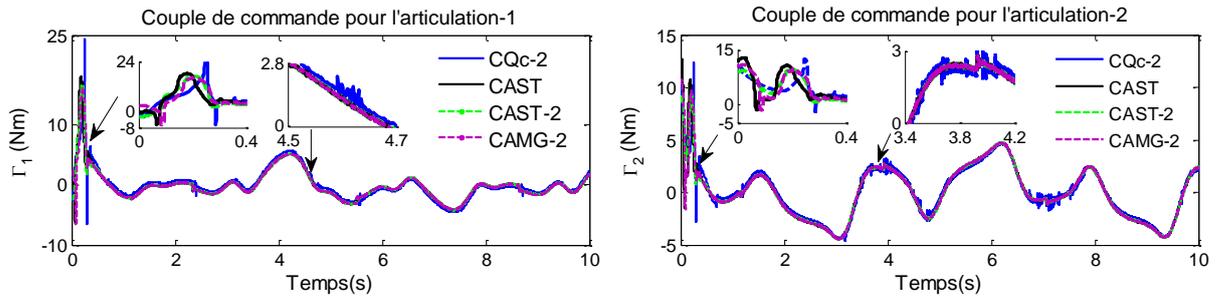


Figure 3.11. Couples de commandes appliquées.

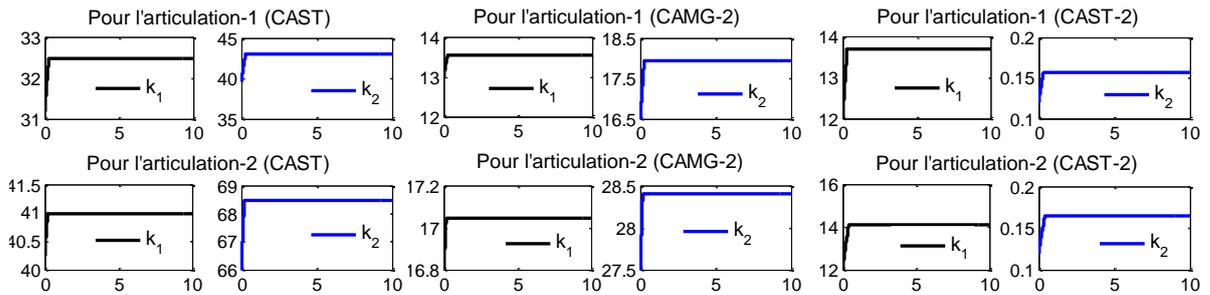


Figure 3.12. Évolution temporelle des gains de commande pour u_{CAST} , u_{CAMG-2} et u_{CAST-2} .

Après avoir présenté les résultats de simulation des contrôleurs avec l'utilisation du terme de compensation v_c , ce qui permet généralement d'améliorer les performances de robustesse et de précision, une deuxième simulation est présentée sans utiliser le terme v_c dans la commande ($v_c = 0$) pour prouver l'efficacité des contrôleurs proposés u_{CAST} (3.28) et u_{CAMG-2} (3.61).

D'après les figures 3.13 et 3.14, les contrôleurs présentent de bonnes performances de poursuite de tous les états du système en présence des incertitudes et des perturbations.

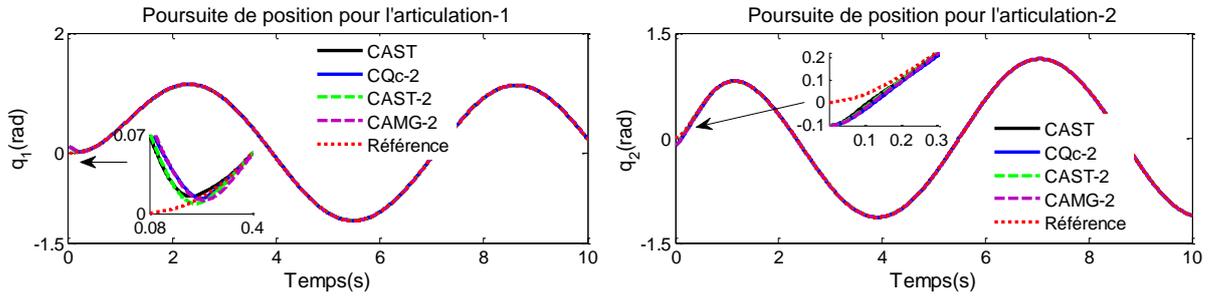


Figure 3.13. Performance de poursuite de position (q_1, q_2) ($v_c = 0$).

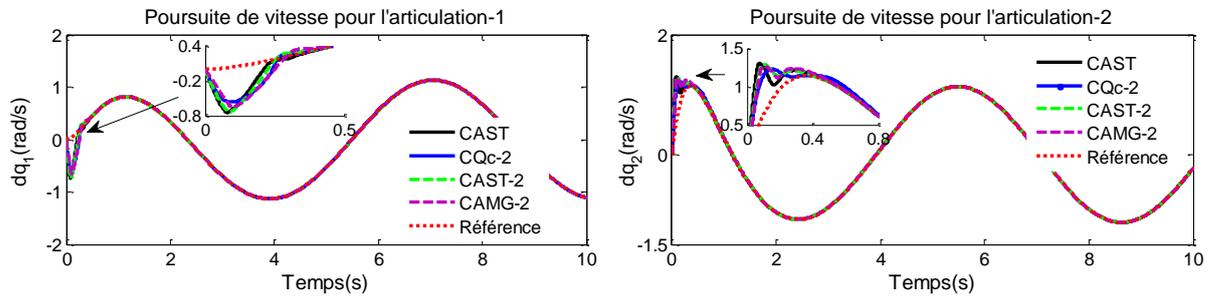


Figure 3.14. Performance de poursuite de vitesse (\dot{q}_1, \dot{q}_2) ($v_c = 0$).

Cependant, d'après la précision des erreurs de poursuite présentées sur la figure 3.15 (a), la précision atteinte par le contrôleur « Quasi-continu » u_{CQc-2} est donnée par : $|e_1| \leq 40 \times (10^{-3})^2$, $|\dot{e}_1| \leq 0.2 \times (10^{-3})^1$ et $|e_2| \leq 30 \times (10^{-3})^2$, $|\dot{e}_2| \leq 0.2 \times (10^{-3})^1$ pour les articulations 1 et 2 respectivement, cette précision correspond à celle d'un MG-2, tandis que le contrôleur u_{CAST} préserve la même précision de poursuite atteinte dans la première simulation (avec l'utilisation du v_c) ; $|e_1| \leq 0.04 \times (10^{-3})^2$, $|\dot{e}_1| \leq 0.04 \times (10^{-3})^1$ pour l'articulation 1, et $|e_2| \leq 0.09 \times (10^{-3})^2$, $|\dot{e}_2| \leq 0.09 \times (10^{-3})^1$ pour l'articulation 2. D'autre part, il est clairement remarqué (d'après la figure 3.15 (b)) que la précision obtenue par le contrôleur u_{CAST-2} [Geo-17] est fortement détériorée ; $|e_1| \leq 0.8 \times (10^{-3})^1$, $|\dot{e}_1| \leq 5 \times (10^{-3})^1$, $|\ddot{e}_1| \leq 150 \times (10^{-3})^1$ et $|e_2| \leq 1 \times (10^{-3})^1$, $|\dot{e}_2| \leq 2 \times (10^{-3})^1$, $|\ddot{e}_2| \leq 100 \times (10^{-3})^1$ pour les articulations 1 et 2 respectivement. En revanche, le contrôleur u_{CAMG-2} offre la même précision que celle obtenue dans le premier cas (c'est-à-dire $v_c \neq 0$), ce qui exhibe une précision de glissement du troisième ordre. Ces résultats montrent les performances satisfaisantes des contrôleurs proposés u_{CAST} et u_{CAMG-2} en termes de robustesse et précisions de poursuite.

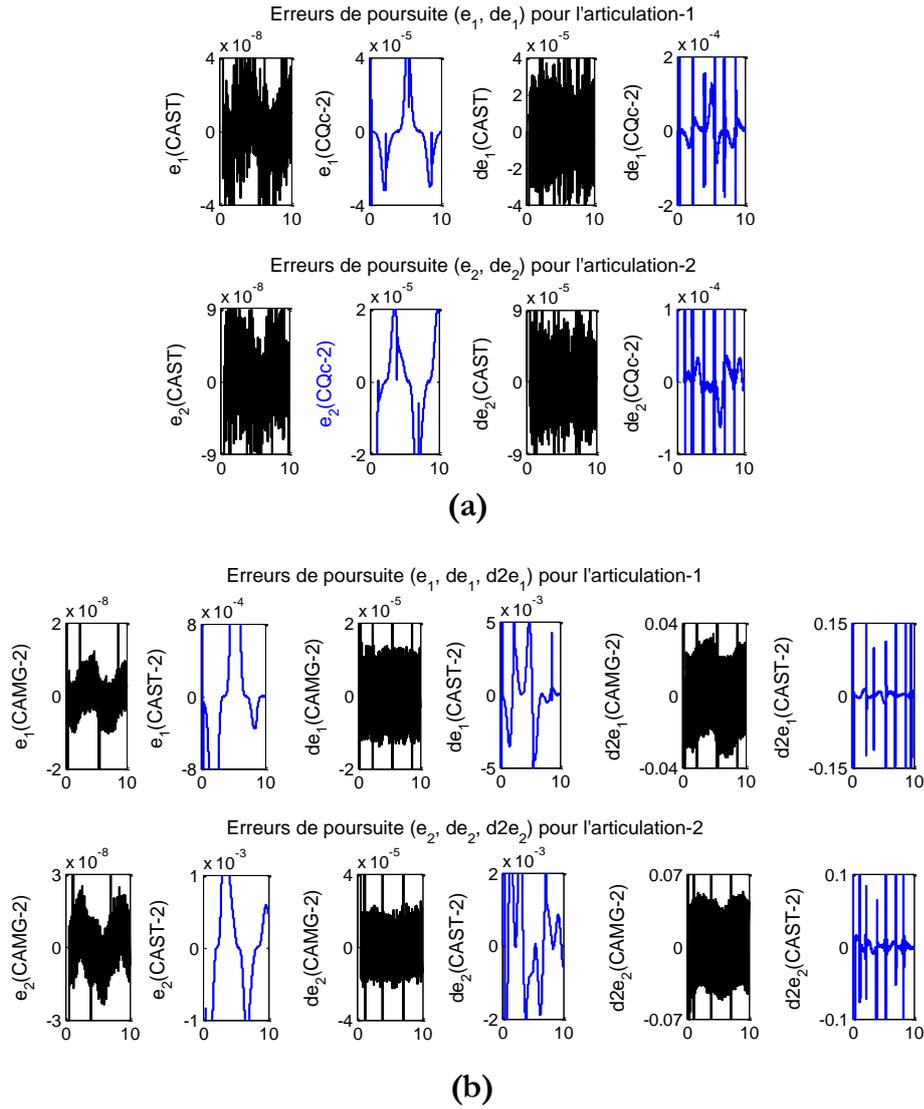


Figure 3.15. Précision des erreurs de poursuite pour l'articulation $i, (i = 1, 2)$ ($v_c = 0$).

(a) (e_i, \dot{e}_i) pour u_{CAST} et u_{CQc-2} . (b) $(e_i, \dot{e}_i, \ddot{e}_i)$ pour u_{CAMG-2} et u_{CAST-2} .

Comme l'illustrent les figures 3.16 et 3.17, le contrôleur u_{CAST} permet d'atteindre en temps fini un régime glissant réel du second ordre sur la surface de glissement terminal, tel que $\hat{s} = \dot{\hat{s}} \equiv 0$ avec la même précision obtenue dans le premier cas ($v_c \neq 0$). Pour les deux contrôleurs u_{CAMG-2} et u_{CAST-2} , après la stabilisation de leurs fonctions contraintes associées φ et φ_{ST-2} respectivement, les comportements dynamiques d'un MG-2 des trajectoires d'erreur dans le plan de phase (e_i, \dot{e}_i) , $i = 1, 2$ peuvent également être obtenus comme le montrent les figures 3.18 et 3.19. Il est à noter que lorsque $v_c = 0$, dans le contrôleur u_{CAMG-2} , $\ddot{\sigma} = -k_1 \varphi^{[1/3]} + \xi_3$ et $\ddot{\sigma} = -k_1 \varphi_{ST-2}^{[1/2]} + \xi_3$ dans le contrôleur u_{CAST-2} [Geo-17], tel que $\xi_3 \triangleq v_2 + \Delta(t)$. Il est évident donc que dans le contrôleur proposé u_{CAMG-2} , l'incertitude $\Delta(t)$

est estimée et entièrement compensée en temps fini par l'intégral du terme discontinu $-v_0$ comme le montre la figure 3.20.

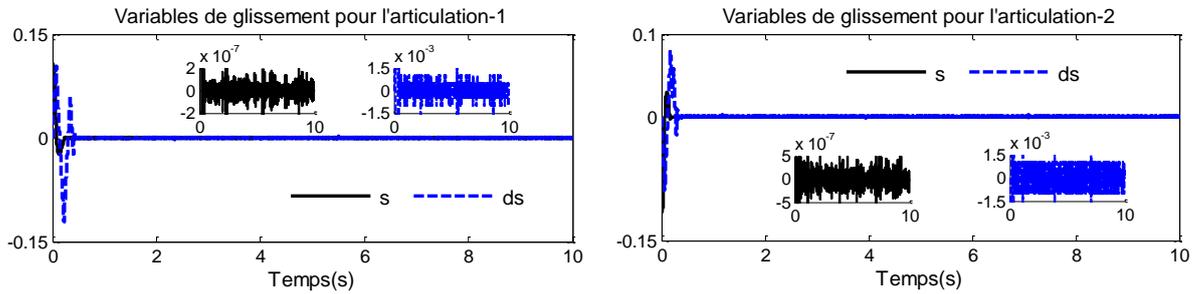


Figure 3.16. Stabilisation des surfaces de glissement pour le contrôleur u_{CAST} ($v_c = 0$).

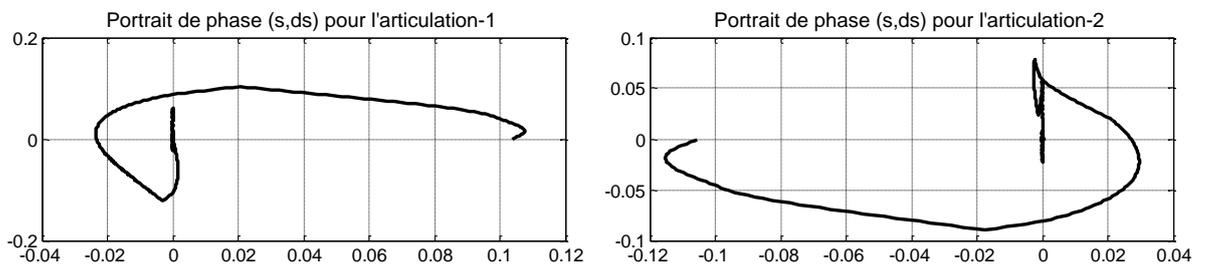


Figure 3.17. Portraits de phase (\hat{s}, \hat{s}) pour le contrôleur u_{CAST} ($v_c = 0$).

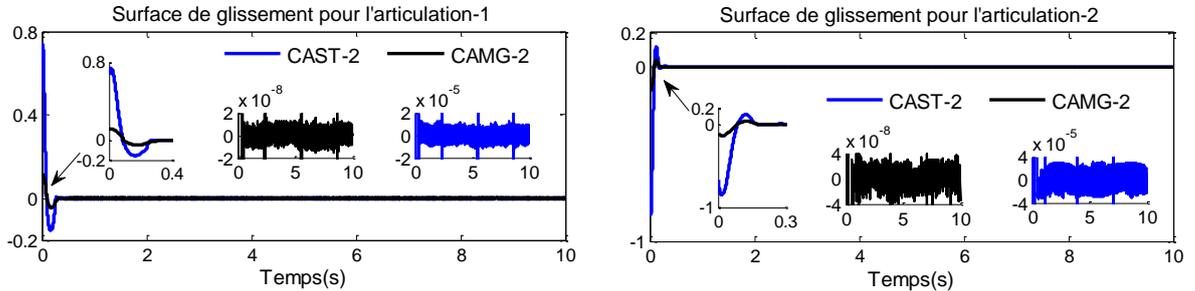


Figure 3.18. Stabilisation des surfaces de glissement pour les contrôleurs u_{CAMG-2} et u_{CAST-2} ($v_c = 0$).

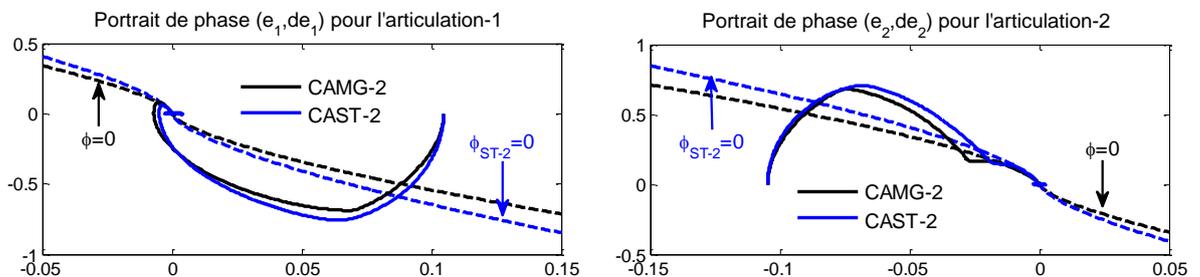


Figure 3.19. Portraits de phase (e_i, \dot{e}_i) , $i = 1, 2$ pour les contrôleurs u_{CAMG-2} et u_{CAST-2} ($v_c = 0$).

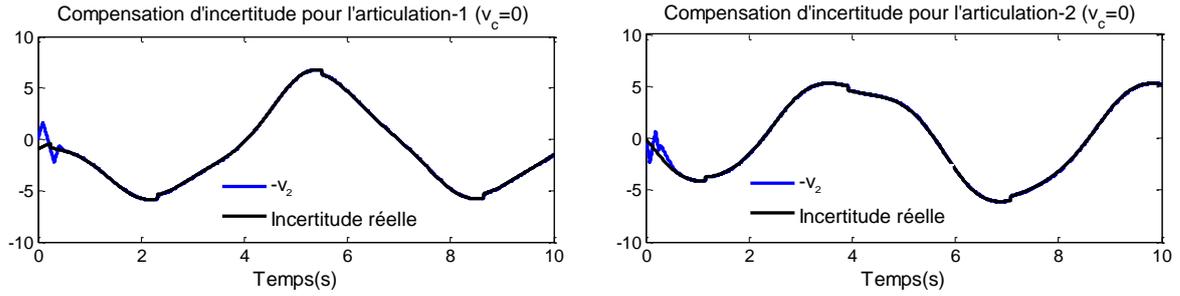


Figure 3.20. Compensation de l'incertitude $\Delta(t)$ dans le contrôleur u_{CAMG-2} ($v_c = 0$).

D'après la figure 3.21, il convient de noter que tous les contrôleurs u_{CAST} , u_{CAMG-2} , u_{CAST-2} et u_{CQc-2} permettent de générer des couples de commandes lisses dont le chattering est considérablement atténué notamment pour les contrôleurs u_{CAST} , u_{CAMG-2} et u_{CAST-2} par rapport à u_{CQc-2} . Selon la figure 3.22 qui présente l'évolution temporelle des gains de commande k_1 et k_2 pour les contrôleurs u_{CAST} , u_{CAMG-2} et u_{CAST-2} , le mécanisme d'adaptation fonctionne d'une manière appropriée pour u_{CAST} et u_{CAMG-2} dans lesquels les gains sont toujours convergents et bornés. En revanche, durant le processus d'adaptation les gains adaptatifs continuent à s'incrémenter pour le contrôleur u_{CAST-2} [Geo-17], ce qui affecte principalement la précision de poursuite et la robustesse. On peut donc déduire que les deux contrôleurs développés u_{CAST} et u_{CAMG-2} présentent approximativement les mêmes performances de poursuite et de commande pour les deux cas : avec et sans l'utilisation du terme de compensation d'incertitude v_c .

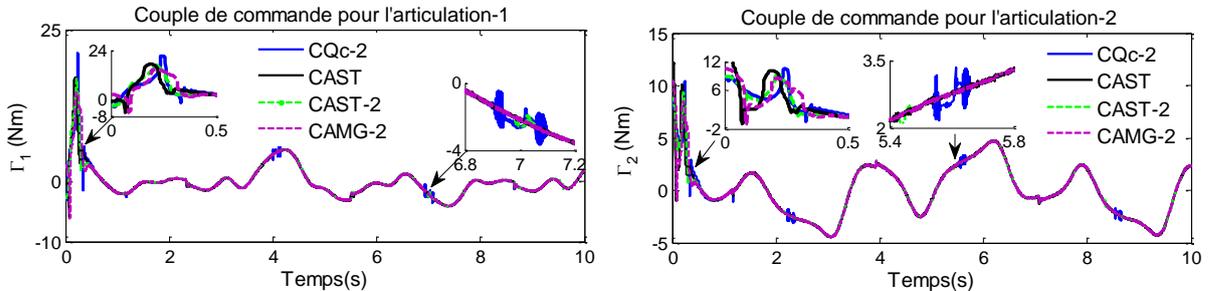


Figure 3.21. Couples de commandes appliqués ($v_c = 0$).

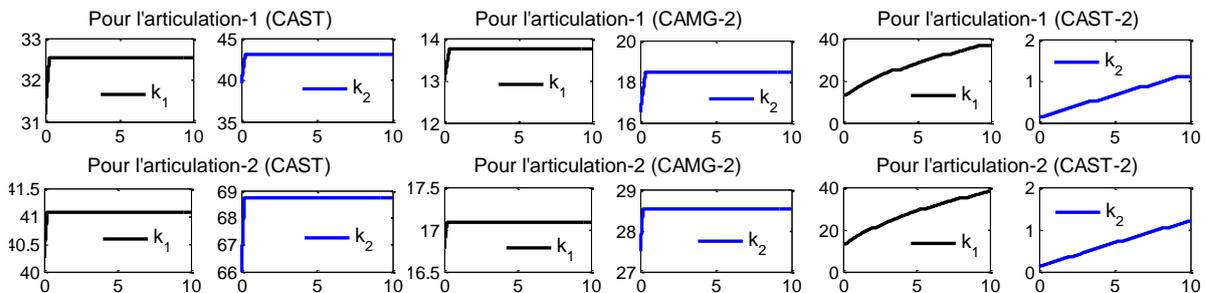


Figure 3.22. Évolution temporelle des gains de commande pour u_{CAST} , u_{CAMG-2} et u_{CAST-2} ($v_c = 0$).

Pour mieux mettre en évidence les performances des contrôleurs développés, on a évalué quelques critères sur l'intervalle $[0, 10 \text{ sec}]$, l'intégrale de la valeur absolue de l'erreur de poursuite $IAE = \int_0^{t_f} |e| dt$, ($t_f = 10s$), la variation totale de la commande $TV = \sum_{i=1}^T \dot{u}_i$, ($T = t_f / \tau$), l'indicateur de l'effort de la commande $CEI = (1/\sqrt{T}) \left(\sum_{i=1}^T (u_i)^2 \right)^{1/2}$ et l'indicateur de chattering $CI = (1/\sqrt{T}) \left(\sum_{i=1}^T (\dot{u}_i) \right)^{1/2}$.

Tableau 3.2. Comparaison des performances des contrôleurs proposés.

	Contrôleur	TV	CEI	CI	IAE	
$v_c \neq 0$	CAST					
	Articulation-1	7.30	2.51	0.073	0.011	
	Articulation-2	6.14	2.57	0.061	0.013	
	CQc-2 [Lev-05b]					
	Articulation-1	14.36	2.54	0.14	0.012	
	Articulation-2	10.86	2.43	0.10	0.019	
	CAST-2 [Goe-17]					
	Articulation-1	9.67	2.53	0.096	0.011	
	Articulation-2	6.24	2.52	0.062	0.014	
	CAMG-2					
	Articulation-1	8.37	2.47	0.083	0.012	
	Articulation-2	6.14	2.55	0.061	0.014	
	$v_c = 0$	CAST				
		Articulation-1	7.04	2.50	0.070	0.011
Articulation-2		5.76	2.56	0.056	0.013	
CQc-2 [Lev-05b]						
Articulation-1		11.95	2.47	0.12	0.013	
Articulation-2		6.53	2.49	0.06	0.022	
CAST-2 [Goe-17]						
Articulation-1		3.67	2.51	0.036	0.019	
Articulation-2		2.26	2.50	0.022	0.020	
CAMG-2						
Articulation-1	8.31	2.47	0.083	0.012		
Articulation-2	6.16	2.54	0.061	0.014		

Les résultats numériques présentés dans le tableau 3.2 montrent que tous les contrôleurs utilisent approximativement le même effort de la commande selon l'indicateur CEI. Les indicateurs CI et TV indiquent que les deux contrôleurs développés u_{CAST} et u_{CAMG-2} génèrent des signaux de commande lisses par rapport à ceux générés par les contrôleurs u_{CQc-2} et u_{CAST-2} dans le cas où le terme de compensation v_c est implémenté. Dans l'autre cas ($v_c = 0$), il est clair que les signaux de commande générés par le contrôleur u_{CAST-2} sont plus lisses que ceux

introduits par les autres contrôleurs, en revanche la précision de poursuite est détériorée selon IAE et l'objectif d'atteindre une précision d'un régime glissant d'ordre 3 n'est pas assuré.

Les résultats de la simulation obtenus confirment l'efficacité des contrôleurs proposés u_{CAST} (3.28) et u_{CAMG-2} (3.61), telle que la combinaison observateur/ commande par MG du second ordre permet d'obtenir des performances satisfaisantes en termes de convergence en temps fini, de précision de poursuite et d'atténuation de l'effet du chattering dans le signal de la commande.

À la fin de cette simulation, la robustesse des contrôleurs développés u_{CAST} (3.28) et u_{CAMG-2} (3.61) sera prouvée par l'application d'un bruit blanc Gaussien avec un écart-type de 10^{-3} (standard deviation $std = 10^{-3}$) aux états mesurés $q_i, (i=1,2)$ et en présence des incertitudes et des perturbations prédéfinies. Les simulations sont réalisées avec un pas de calcul $\tau = 10^{-3}$ sec et sans utiliser le terme de compensation ($v_c = 0$).

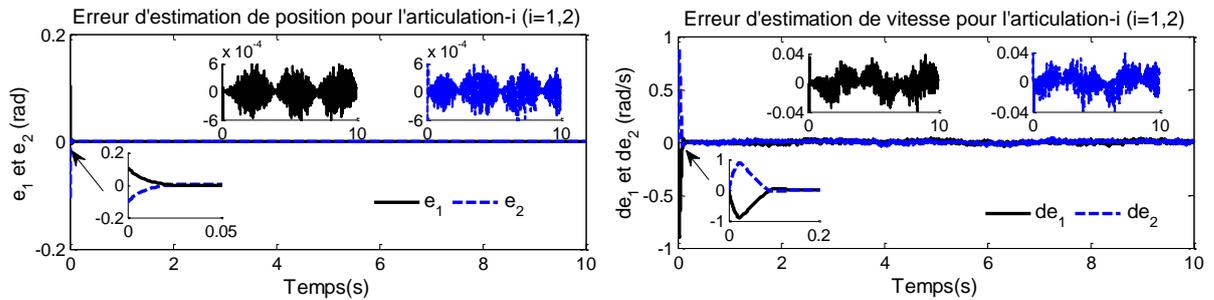


Figure 3.23. Performances d'estimation de l'observateur FMG-3 (en présence de bruit de mesure avec $v_c = 0$).

Les performances d'estimation obtenues par l'observateur FMG-3 sont présentées sur la figure 3.23. Les erreurs d'estimation de la position sont obtenues avec une précision de $|e_i| \leq 0.6 \times 10^{-3}$ pour l'articulation i ($i=1,2$) et l'estimation de la vitesse est également réalisée en temps fini avec $|\dot{e}_i| \leq 0.04$ pour l'articulation i ($i=1,2$). En comparaison avec la précision d'estimation obtenue par l'observateur FMG-3 en l'absence de bruit de mesure (qui est d'ordre $\mathcal{O}(\tau^2)$ par rapport à l'estimation de vitesse), il peut être constaté d'après la figure 3.23 que la précision atteinte correspond à la meilleure précision pouvant être obtenue par un différentiateur robuste par MG d'ordre supérieur en présence de bruit de mesure, qui dépend principalement du maximum de l'amplitude du bruit (Remarque 3.6). Pour l'observateur FMG-3, la précision est d'ordre $\mathcal{O}(\bar{\epsilon})$ par rapport à l'estimation de position et d'ordre $\mathcal{O}(\bar{\epsilon}^{-2/3})$ par rapport à l'estimation de vitesse.

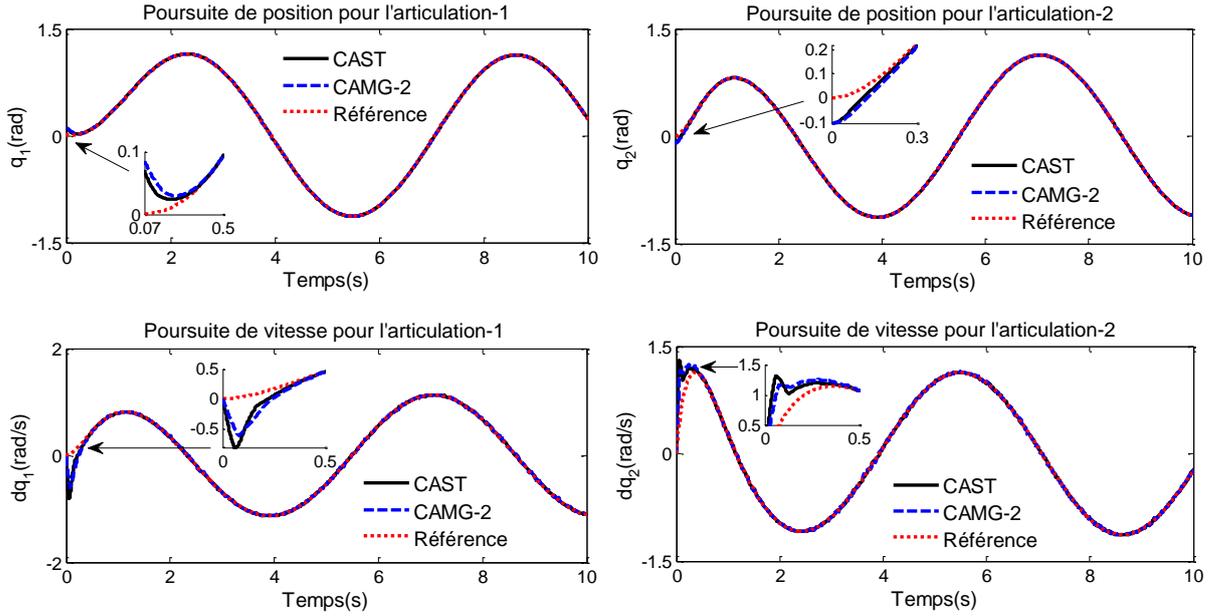


Figure 3.24. Performances de poursuite pour les contrôleurs u_{CAST} et u_{CAMG-2} (en présence de bruit de mesure avec $v_c = 0$).

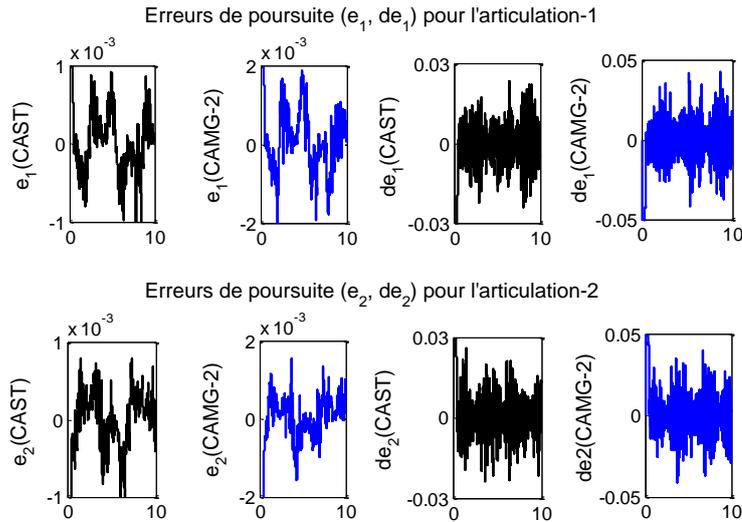


Figure 3.25. Précision des erreurs de poursuite pour les contrôleurs u_{CAST} et u_{CAMG-2} (en présence de bruit de mesure avec $v_c = 0$).

Comme le montrent les figures 3.24 et 3.25, les deux contrôleurs u_{CAST} et u_{CAMG-2} présentent de bonnes performances de poursuite en dépit des incertitudes et du bruit de mesure, le contrôleur u_{CAST} garantit une précision de $|e_i| \leq 1 \times 10^{-3}$ et $|\dot{e}_i| \leq 0.03$ pour l'articulation i ($i = 1, 2$). Les précisions atteintes par le contrôleur u_{CAMG-2} sont $|e_i| \leq 2 \times 10^{-3}$ et $|\dot{e}_i| \leq 0.05$ pour l'articulation i ($i = 1, 2$).

D'après les figures 3.26 et 3.27, un régime glissant réel du second ordre $\hat{s} = \dot{\hat{s}} \equiv 0$ (avec un comportement de glissement de ST) est également établi en temps fini par le contrôleur u_{CAST} avec des précisions de glissement raisonnables, telles que $|\hat{s}| \leq 5 \times 10^{-3}$ et $|\dot{\hat{s}}| \leq 0.04$ pour les deux articulations. Le différentiateur par MG exact du premier ordre (à base de ST) est utilisé pour calculer la dérivée de la surface de glissement $\dot{\hat{s}}$ en utilisant la mesure bruitée de \hat{s} , la précision de glissement résultante correspond alors à la précision du différentiateur ST [Lev-98].

D'autre part, après la stabilisation en temps fini des erreurs de poursuite, les trajectoires (e_i, \dot{e}_i) du plan de phase pour l'articulation $i, (i=1,2)$ ont un comportement du MG-2 typiquement classique (comportement du MG terminal), telles que les trajectoires d'erreur atteignent l'origine le long de l'hypersurface $\hat{s} = 0$ en temps fini. De même, le contrôleur $u_{C AMG-2}$ assure la stabilisation de la fonction contrainte φ avec une précision de glissement $|\varphi| \leq 5 \times 10^{-3}$ pour les deux articulations. Comme le montre la figure 3.28, un comportement de glissement du second ordre est également atteint dans le plan de phase (e_i, \dot{e}_i) le long de l'hypersurface $\varphi = 0$.

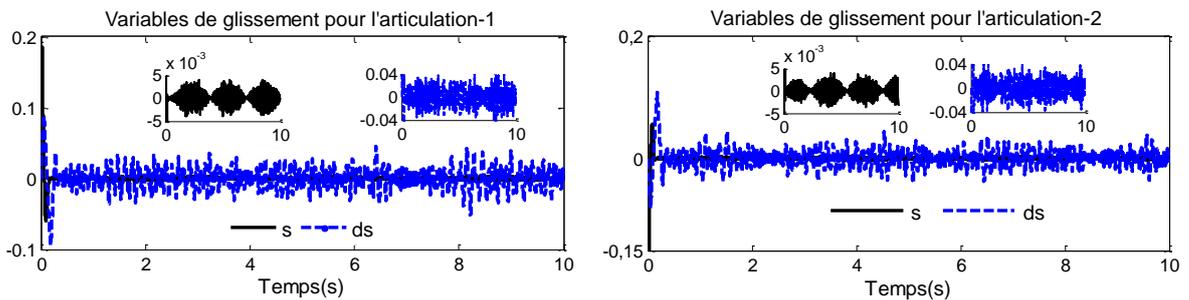


Figure 3.26. Stabilisation des surfaces de glissement pour le contrôleur u_{CAST} (en présence de bruit de mesure avec $v_c = 0$).

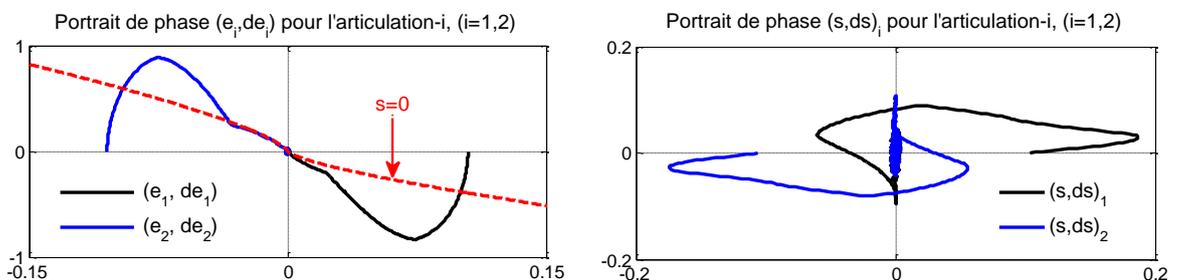


Figure 3.27. Portraits de phase (e_i, \dot{e}_i) et $(\hat{s}, \dot{\hat{s}})$ pour le contrôleur u_{CAST} (en présence de bruit de mesure avec $v_c = 0$).

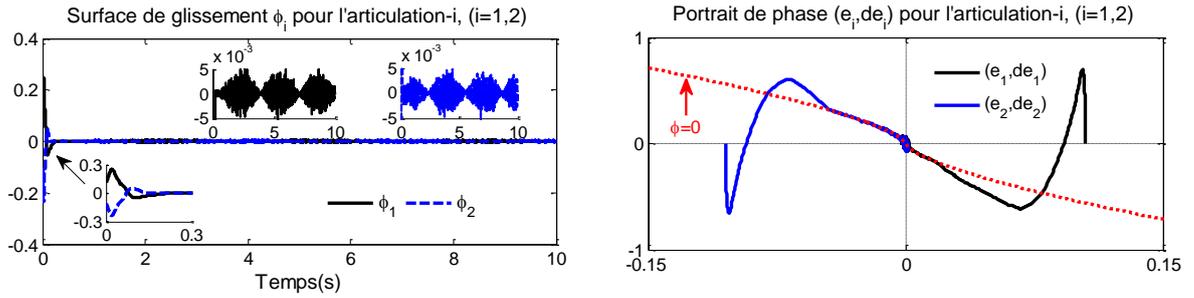


Figure 3.28. Stabilisation de la surface de glissement φ et portraits de phase (e_i, \dot{e}_i) pour le contrôleur u_{CAMG-2} (en présence de bruit de mesure avec $v_c = 0$).

Il convient de noter que les deux contrôleurs u_{CAST} et u_{CAMG-2} préservent les mêmes performances de robustesse lorsque le terme de compensation v_c est implémenté en présence du bruit de mesure. D'après l'évaluation des deux critères IAE et ISE, la même précision de poursuite est obtenue par les deux contrôleurs pour les deux cas ($v_c \neq 0$ et $v_c = 0$). Avec le contrôleur u_{CAST} , $IAE(e_i) = 0.015$ et $ISE(e_i) = 0.8 \times 10^{-3}$ pour l'articulation i ($i = 1, 2$). Avec le contrôleur u_{CAMG-2} , $IAE(e_i) = 0.02$ et $ISE(e_i) = 1 \times 10^{-3}$ pour l'articulation i ($i = 1, 2$).

Par conséquent, les résultats obtenus par les contrôleurs proposés (u_{CAST} et u_{CAMG-2}) montrent des performances satisfaisantes en termes de stabilité en temps fini et de robustesse par rapport aux incertitudes et aux bruits de mesure.

3.6. Conclusion

Dans ce chapitre, deux contrôleurs adaptatifs du mode glissant du second ordre ont été développés pour résoudre le problème de poursuite d'un système non linéaire incertain et perturbé. Le modèle nominal du système est représenté par un système flou type-2 de TS. Étant donnée l'indisponibilité de l'état de vitesse, un observateur flou par MG d'ordre 3 a été implémenté afin de l'estimer en temps fini et de compenser également les incertitudes. La première structure de commande est basée sur l'algorithme ST combiné avec le MG terminal, ce métissage a pour but d'assurer une convergence en temps fini des états du système vers leurs références et d'atténuer en même temps l'effet du chattering au niveau du signal de commande. Pour le deuxième contrôleur, un algorithme du MG du second ordre homogène est implémenté afin d'atteindre en temps fini un régime glissant du troisième ordre avec les contraintes d'un MG du second ordre.

Pour déterminer les gains de commande pour les deux contrôleurs, un mécanisme d'adaptation a été utilisé. Ce dernier permet à la fois d'éviter la surestimation des valeurs de gains et de s'en passer de la connaissance préalable des bornes supérieures des incertitudes et des perturbations. La stabilité du système en boucle fermée a été prouvée en utilisant l'approche de Lyapunov et la propriété d'homogénéité des MGs d'ordre supérieur.

À la base des informations délivrées par l'observateur proposé, les deux contrôleurs ont été appliqués sur un bras à deux articulations. Les résultats de simulation obtenus ont confirmé l'efficacité et les performances des deux contrôleurs développés.

Conclusion Générale et Perspectives

1. Conclusion Générale	125
2. Perspectives	126

1. Conclusion Générale

Dans cette thèse, des structures de commande robustes ont été synthétisées pour traiter le problème de poursuite de trajectoire des systèmes non linéaires incertains et perturbés. Les contrôleurs développés sont basés essentiellement sur l'approche des modes glissants d'ordre supérieur. Les algorithmes du MG du second ordre sont utilisés afin d'obtenir de bonnes performances de poursuite et de commande, en termes de robustesse, de convergence en temps fini et d'atténuation du chattering. Les observateurs par MG d'ordre supérieur permettent d'estimer en temps fini les états non mesurés du système à commander et d'identifier également les incertitudes. D'autre part, l'approche floue type-2 est implémentée en raison de sa capacité de modéliser les processus réels et complexes et de gérer les incertitudes numériques et linguistiques.

Le premier chapitre est consacré à une étude bibliographique sur le mode glissant et leurs propriétés associées. Commencant par une brève présentation de la commande par mode glissant classique, leurs avantages et inconvénients, l'approche des modes glissants d'ordre supérieur a été présentée afin de remédier aux problèmes du chattering et la stabilisation en temps fini pour les systèmes de degré relatif élevé. Le concept des différentiateurs du mode glissant d'ordre supérieur a été exploité par la suite pour la synthèse des commandes par MG d'ordre supérieur.

Après avoir présenté un aperçu sur le concept des MGs d'ordre supérieur, le deuxième chapitre a traité le problème de la stabilisation en temps fini des systèmes chaotiques non linéaires et incertains. Dans un premier temps, la dynamique inconnue du système a été représentée par un système flou type-2. Ensuite, des structures de commande robustes ont été synthétisées en se basant sur la combinaison des différents algorithmes du MG-2 avec le MG terminal, ces lois de commandes permettent d'atteindre de bonnes performances de stabilisation en temps fini et d'atténuer fortement le chattering au niveau du signal de commande. Comme les gains de commande ayant un impact important sur l'optimisation de l'effort de la commande et sur la réduction de l'effet du chattering, des systèmes adaptatifs flous type-2 ont été substitués pour simplifier le calcul de ces gains. Afin de prouver l'efficacité des structures de commandes développées, une étude de comparaison a été menée sur deux exemples de simulations pour la stabilisation des systèmes chaotiques incertains et perturbés. Cette partie vise à montrer les performances de l'algorithme Super Twisting (ST) en comparaison avec les autres algorithmes du MG-2 proposés (Nested et Quasi-continuous) en termes de robustesse, la nécessité des informations restreintes sur la variable de glissement et ses dérivées et l'atténuation importante de l'effet du chattering.

Dans la troisième partie de cette thèse, deux contrôleurs du MG du second ordre à base de ST ont été développés pour le suivi de trajectoires d'un système non linéaire incertain et appliqués sur un robot manipulateur. Dans le but de représenter le système à commander, un modèle flou type-2 de Takagi Sugeno (T-2 TS) a été utilisé. Lorsque seulement l'état de

position est disponible, un observateur flou par MG d'ordre 3 est développé afin d'estimer l'état de vitesse et de compenser également les incertitudes.

Le premier contrôleur est basé sur le métissage du MG terminal et l'algorithme ST afin d'obtenir une convergence en temps fini des états du système vers leurs trajectoires désirés, tout en assurant la robustesse et l'atténuation du chattering dans la commande. L'autre contrôleur, issu d'une loi de commande du MG-2 homogène, assure la stabilisation en temps fini d'un régime glissant du troisième ordre et génère un signal de commande lisse, où l'effet de chattering a été fortement atténué. Par conséquent une précision de glissement d'un MG-3 a été effectivement atteinte.

Afin d'apporter une solution au choix des gains de commande qui nécessite la connaissance des bornes supérieures des incertitudes et des perturbations, un mécanisme d'adaptation a été utilisé pour ajuster en ligne les gains de commande et sans avoir le problème de surestimation de leurs valeurs. Sous l'action des contrôleurs proposés, la stabilité en temps fini du système à commander en boucle fermée est assurée en utilisant l'approche de Lyapunov et la propriété d'homogénéité des MGs d'ordre supérieur. Les résultats de simulation obtenus montrent des performances satisfaisantes des contrôleurs développés, en comparaison avec celles obtenues par d'autres contrôleurs du MG du second ordre.

2. Perspectives

Par ailleurs, quelques perspectives sont envisageables à ce travail.

À court terme, il s'agit d'appliquer les contrôleurs développés aux systèmes non linéaires incertains plus complexes (SISO et MIMO), dont les états ne sont pas tous disponibles, particulièrement les robots manipulateurs de degré de liberté égal ou supérieur à 3 et les systèmes hyper chaotiques. À long terme, il serait intéressant de généraliser la méthodologie proposée pour la synthèse des structures de commande développées aux systèmes d'ordre plus élevé ($n > 2$). Dans ce contexte, l'algorithme ST généralisé d'ordre n et le mode glissant terminal récursif seront implémentés.

D'autre part, le deuxième contrôleur développé dans la troisième partie de cette thèse peut également être étendu à l'algorithme de Twisting sans ou avec observateur. Dans ce cas, une commande homogène par mode glissant du second ordre à base de l'algorithme de Twisting et le MG terminal peut être développée afin d'atteindre les performances d'un MG du troisième ordre avec les contraintes d'un MG du second ordre.

Une autre orientation future à ce travail est le développement des observateurs adaptatifs par mode glissant d'ordre supérieur en s'inspirant du mécanisme d'adaptation des gains de commande utilisé dans les structures de commande proposées.

Une autre idée consiste à améliorer ou conserver les performances de robustesse et de stabilité des contrôleurs proposés (dans la troisième partie de cette thèse) en tenant compte les incertitudes et les perturbations non coïncidentes (unmatched).

Bibliographies

- [Abo-18] Abooe, A., Arefi, M. M., Sedghi, F., & Abootalebi, V. (2018). Robust nonlinear control schemes for finite-time tracking objective of a 5-DOF robotic exoskeleton. *International Journal of Control*. doi.org/10.1080/00207179.2018.1430379.
- [AlG-15] Al-Ghanimi, A., Zheng, J., & Man, Z. (2015). Robust and fast non-singular terminal sliding mode control for piezoelectric actuators. *IET Control Theory & Applications*, 9(18), 2678–2687.
- [Ang-12] Angulo, M. T., Moreno, J. A., & Fridman, L. M. (2012). *Optimal gain for the super-twisting differentiator in the presence of measurement noise*. Proceeding of American Control Conference (ACC). Fairmont Queen Elizabeth, Montréal. doi:10.1109/acc.2012.6314917.
- [Anh-19] Anh Tuan, V., & Kang, H.-J. (2019). A new finite-time control solution to the robotic manipulators based on the nonsingular fast terminal sliding variables and adaptive super-twisting scheme. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 14(3): 031002. doi:10.1115/1.4042293.
- [Ash-18] Ashtiani-Haghighi, D., & Mobayen, S. (2018). Design of an adaptive super-twisting decoupled terminal sliding mode control scheme for a class of fourth-order systems. *ISA Transactions*. 75. 216-225.
- [Bac-01] Bacciotti, A., & Rosier, L. (2001). *Lyapunov functions and stability in control theory*. Lecture notes in control and information sciences. Springer, London.
- [Bar-03] Bartolini, G., Pisano, A., Punta, E., & Usai, E. (2003). A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems. *International Journal of Control*, 76(9/10), 875–892.
- [Bar-18] Barth, A., Weise, C., & Reger, J. (2018, July). *Application of higher-order sliding-modes to a ball and plate system*. 15th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS). (pp. 192-197). Graz, Austria.
- [Ben-19] Benhadouga, S., Meddad, M., Eddiai, A., Boukhetala, D., & Khenfer, R. (2019). Sliding mode control for MPPT of a Thermogenerator. *Journal of Electronic Materials*. 48(4), 2103–2111.
- [Bha-00] Bhat, S. P., & Bernstein, D. S. (2000). Finite time stability of continuous autonomous systems. *SLAM Journal on Control and Optimization*, 38(3), 751–766.
- [Bha-97] Bhat, S. P., & Bernstein, D. S. (1997, June). *Finite-time stability of homogeneous systems*. Proceedings of the American Control Conference (Vol. 4, pp. 2513–2514). American Automatic Control Council. Albuquerque, New Mexico.
- [Bon-85] Bondarev, A.G., Bondarev, S.A., Kostyleva, N.E., & Utkin, V.I. (1985). Sliding mode in systems with asymptotic state observers. *Automation and Remote Control*, 6, 49–64.
- [Bor-18] Borlaug, L. G., Gravdahl, J. T., Sverdrup-Thygeson, J., Pettersen, K.Y., & Loria, A. (2018). Trajectory tracking for underwater swimming manipulators using a super twisting algorithm. *Asian Journal of Control*, 21(1), 1–16. doi:10.1002/asjc.1840.
- [Bou-00] Boukezzoula, R. (2000). *Commande floue d'une classe de systèmes non linéaires : application au problème de suivi de trajectoire*. PhD thesis, Université de Chambéry.
- [Bou-19] Bouyahia, S., Semcheddine, S., Talbi, B., Boutalbi, O., & Terchi, Y. (2019). An adaptive super-twisting sliding mode algorithm for robust control of a biotechnological process. *International Journal of Dynamics and Control*. doi:10.1007/s40435-019-00551-8.
- [Bre-10] Bregeault, V. (2010). *Quelques contributions à la théorie de la commande par modes glissants*. PhD thesis, Ecole centrale de Nantes. France.

- [Cha-14] Chalanga, A., Kamal, S., Fridman, L. M., Bandyopadhyay, B., & Moreno, J. A. (2014). *How to implement super-twisting controller based on sliding mode observer?*. Proceeding of 13th IEEE workshop on variable structure systems, Nantes. doi:10.1109/VSS.2014.6881145.
- [Cha-15] Chalanga, A., Kamal, S., Fridman, L. M., Bandyopadhyay, B., & Moreno, J. A. (2015). Implementation of super-twisting control: Super-twisting and higher order sliding mode observer based Approaches. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(6), 3677–3685.
- [Dav-05] Davila, J., Fridman, L. M., & Levant, A. (2005). Second-order sliding modes observer for mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(11), 1785–1789.
- [Edw-16] Edwards C., & Shtessel, Y. B. (2016). Adaptive continuous higher order sliding mode control, *Automatica*, 65, 183–190.
- [Efi-12] Efimov, D., Zolghadri, A., Cieslak, J., & Henry, D. (2012). *Input estimation via sliding-mode differentiation for early OFC detection*. 8th IFAC symposium on fault detection, supervision and safety of technical processes (Vol. 45, pp. 1143–1148). Amsterdam: Elsevier.
- [Eme-67] Emelyanov, S. V. (1967). Variable structure control systems (in Russian). Moscow: Nauka, 35, 120-125.
- [Eme-86] Emelyanov, S. V., Korovin, S. K., & Levantovsky, L. V. (1986). Higher order sliding regimes in the binary control systems. *Soviet Physics, Doklady*, 31, 291–293.
- [Eme-93] Emelyanov, S. V., Korovin, S. K., & Levant A. (1993). Higher-order sliding modes in control systems. *Differential Equations*, 29(11), 1627–1647.
- [Eme-96] Emelyanov, S. V., Korovin, S. K., & Levant A. (1996). High-order sliding modes in control systems. *Computational Mathematics and Modeling*, 7(3), 294–318.
- [Fen-02] Feng, Y., Yu, X., & Man, Z. (2002). Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators. *Automatica*, 38, 2159–2167
- [Fen-07] Feng, Y., Han, X., Wang, Y., & Yu, X. (2007). Second-order terminal sliding mode control of uncertain multivariable systems. *International Journal of Control*, 80(6), 856–862.
- [Fil-88] Filippov, A. F. (1988). *Differential equations with discontinuous right-hand side*. Kluwer, Dordrecht.
- [Fra-12] Fraguella, L., Fridman L. M., & Alexandrov, V. V. (2012). Position stabilization of a Stewart platform: High-order sliding mode observers based approach. *Journal of the Franklin Institute*, 349(2), 441–455.
- [Fri-07] Fridman, L. M., Levant, A., & Davila, J. (2007). Observation of linear systems with unknown inputs via high-order sliding modes. *International Journal of Systems Science*, 38(10), 773-791.
- [Fri-15] Fridman, L. M., Moreno, J. A., Bandyopadhyay, B., Kamal, S., & Chalanga, A. (2015). Continuous nested algorithms: The fifth generation of sliding mode controllers. In X. Yu & O. Efe (Eds.), *Recent advances in sliding modes: From control to intelligent mechatronics. Studies in systems, decision and control* (Vol. 24, pp. 5–35). Springer.
- [Gao-14] Gao, J., Yuan, R., & Yi, J. (2014, August). *Adaptive fuzzy high-order sliding mode control for flexible air-breathing hypersonic vehicle*. IEEE International Conference on Mechatronics and Automation. Tianjin, China. doi:10.1109/icma.2014.6885924
- [Gha-97] Ghalia, M. B. (1997). Modelling and robust control of uncertain dynamical systems using fuzzy set theory. *International Journal of Control*, 68 (6), 1367–1396.
- [Goe-17] Goel, A., & Swarup, A. (2017). MIMO uncertain nonlinear system control via adaptive high-order super twisting sliding mode and its application to robotic manipulator. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 28(1), 36–49.
- [Gon-17] Gonzalez-Hernandez, I., Palacios, F. M., Cruz, S. S., E. S. E Quesada and Leal, R. L. (2017). Real-time altitude control for a quadrotor helicopter using a super-twisting

- controller based on high-order sliding mode observer. *International Journal of Advanced Robotic Systems*. doi:10.1177/1729881416687113.
- [Guo-18] Guo, Z., Chang, J., Guo, J., & Zhou, J. (2018). Adaptive twisting sliding mode algorithm for hypersonic reentry vehicle attitude control based on finite-time observer. *ISA Transactions*, 77, 20–29. doi:10.1016/j.isatra.2018.04.001.
- [Gut-19] Gutierrez, S. V., De León-Morales, J., Plestan, F., & Salas-Peña, O. (2019). A simplified version of adaptive super-twisting control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. doi:10.1002/rnc.4681
- [Hag-04] Hagrass, H. A. (2004). A hierarchical type-2 fuzzy logic control architecture for autonomous mobile robots. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 12(4), 524–539.
- [Haj-05] El Hajjaji, A., Ciocan A. & Hamad, D. (2005). Four Wheel steering control by fuzzy approach, *Journal of intelligent and robotics systems*, 41(2-3), 141-156.
- [Han-18] Han, J., Chen, Y.-H., Zhao, X., & Dong, F. (2018). Optimal design for robust control of uncertain flexible joint manipulators: A fuzzy dynamical system approach, *International Journal of Control*, 91(4), 937–951.
- [Har-51] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., & Polya, G. (1951). *Inequalities*. London: Cambridge University Press.
- [He-19] He, Z., Chen, S., Sun, Z., Wang, L., & Ma, K. (2019). Twisting sliding mode extremum seeking control without steady-state oscillation. *International Journal of Control*, doi:10.1080/00207179.2019.1597277.
- [Hen-13] Hendel, R., & Khaber, F. (2013). *Stabilizing periodic orbits of chaotic system using adaptive type-2 fuzzy sliding mode control*. Proceedings of the first International Conference on Nanoelectronics, Communications and Renewable Energy 2013 (pp. 488-493). Jijel, Algeria.
- [Hen-15a] Hendel, R., Khaber, F., & Essounbouli, N. (2015a). Chaos control via adaptive interval type-2 fuzzy nonsingular terminal sliding mode control. *International Journal of Computational Science, Information Technology and Control Engineering*, 2(3), 19-31.
- [Hen-15b] Hendel, R., Khaber, F., & Essounbouli, N. (2015b). Adaptive type-2 fuzzy second order sliding mode control for nonlinear uncertain chaotic system. *International Journal of Computational Science, Information Technology and Control Engineering*, 2(4), 1-14.
- [Hen-19a] Hendel, R., Khaber, F., & Essounbouli, N. (2019a). Adaptive high order sliding mode controller/ observer based terminal sliding mode for MIMO Uncertain Nonlinear System. *International Journal of Control*, doi:10.1080/00207179.2019.1598580.
- [Hen-19b] Hendel, R., Khaber, F., & Essounbouli, N. (2019b). Adaptive high-order sliding mode controller-observer for MIMO uncertain nonlinear systems. *Asian Journal of Control*. doi:10.1002/asjc.2167.
- [Hes-66] Hestenes, M. R. (1966). *Calculus of variations and optimal control theory*, John Wiley & Sons, New York.
- [Hun-93] Hung, J.Y., Gao, W., & Hung, J.C. (1993). Variable structure control: a survey. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 40(1), 2-22.
- [Isi-95] Isidori, A. (1995). *Nonlinear control systems*. Springer Verlag.
- [Kai-15] Kairous D., & Belmadani, B. (2015). Robust fuzzy-second order sliding mode based direct power control for voltage source converter. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 6(8), 167-175.
- [Kam-16] Kamal, S., Moreno, J. A., Chalanga, A., Bandyopadhyay, B., & Fridman, L. M. (2016). Continuous terminal sliding-mode controller, *Automatica*, 69 (C), 308–314.

- [Kar-98a] Karnik, N. N., & Mendel, J. M. (1998a). *Introduction to type-2 fuzzy logic systems*. Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems (pp.915-920). Anchorage, AK, USA. doi:10.1109/FUZZY.1998.686240.
- [Kar-98b] Karnik, N. N., & Mendel, J. M. (1998b). *Type-2 fuzzy logic systems: type-reduction*. SMC'98 Conference Proceedings. 1998 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (pp. 246-251), San Diego, CA, USA. doi:10.1109/ICSMC.1998.728199
- [Kar-99] Karnik, N. N., Mendel, J. M., Liang, Q. (1999). Type-2 fuzzy logic systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7(6), 643–658.
- [Kha-02] Khalil, H. K., & Grizzle, J. W. (2002). *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice-Hall, New Jersey.
- [Kha-16] Khari, S., Rahmani, Z., & Rezaie, B. (2016). Designing fuzzy logic controller based on combination of terminal sliding mode and state feedback controllers for stabilizing chaotic behaviour in rod-type plasma torch system. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 38 (2), 150-164.
- [Lev-85] Levantovsky, L.V. (1985). Second order sliding algorithms: their realization. *Dynamics of Heterogeneous Systems* (Moscow: Institute for System Studies), pp. 32–43 (in Russian).
- [Lev-93] Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control* 58(6), 1247–1263
- [Lev-97] Levant, A. (1997). *Higher order sliding: collection of design tools*. Proceedings of the European control conference (pp.3043-3048). Brussels.
- [Lev-98] Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica* 34(3), 379–384
- [Lev-00] Levant, A. (2000). Variable measurement step in 2-sliding control. *Kibernetika*, 36(1), 77-93.
- [Lev-01] Levant, A. (2001). Universal single-input-single-output (SISO) sliding-mode controllers with finite-time convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46 (9), 1447–1451.
- [Lev-03] Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(9-10), 924–941.
- [Lev-05a] Levant, A. (2005a): Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41(5), 823–830.
- [Lev-05b] Levant, A. (2005b). Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(11), 1812–1816.
- [Lev-06a] Levant, A. (2006a). *Exact differentiation of signals with unbounded higher derivatives*. Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control (pp. 5558-5590), San-Diego, CA, USA. Doi: 10.1109/CDC.2006.377165
- [Lev-06b] Levant, A. (2006b). Homogeneous quasi-continuous sliding-mode control. *Advances in Variable Structure and Sliding Mode Control. LNCIS*, 334, 143–168.
- [Lev-07] Levant, A. (2007). Principles of 2-sliding mode design. *Automatica*, 43(4), 576-586.
- [Lia-00] Liang, Q., & Mendel, J. M. (2000). Equalization of nonlinear time-varying channels using type-2 fuzzy adaptive filters. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(5), 551–563.
- [Loc-19] Lochan, K., Roy, B. K., & Subudhi, B. (2019). Chaotic tip trajectory tracking and deflection suppression of a two-link flexible manipulator using second-order fast terminal SMC. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 41(12), 3292–3308.
- [Lü-02] Lü, J. H., Chen, G. G., Cheng, D. Z., & Čelikovský, S. (2002). Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(12), 2917-2926

- [Mal-17] Malekzadeh, M., Rezayati, M., & Saboohi, M. (2017). Hardware-in-the-loop attitude control via a high-order sliding mode controller/observer. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 232(10), 1944–1960.
- [Man-12] Manceur, M., Essounbouli, N., & Hamzaoui, A. (2012). Second order sliding fuzzy interval type-2 control for uncertain system with real application. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(2), 262–275.
- [Man-94] Man, Z., Paplinski, A., & Wu, H. (1994). A robust MIMO terminal sliding mode control for rigid robotic manipulators. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 39(12), 2464–2469.
- [Man-97] Man, Z., & Yu, X. (1997). Adaptive terminal sliding mode tracking control for rigid robotic manipulators with uncertain dynamics. *JSME International Journal of Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing*, 40(3), 493–502.
- [McS-05] McShane, E. J., & Botts, T. A. (2005). *Real Analysis*. Dover Publications, New York.
- [Mob-16] Mobayen, S., Baleanu, D., & Tchier, F. (2016). Second-order fast terminal sliding mode control design based on LMI for a class of non-linear uncertain systems and its application to chaotic systems. *Journal of Vibration and Control*, 23(18), 2912-2925.
- [Mob-17a] Mobayen, S., & Tchier, F. (2017a). A novel robust adaptive second-order sliding mode tracking control technique for uncertain dynamical systems with matched and unmatched disturbances. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 15(3), 1097–1106.
- [Mob-17b] Mobayen, S., Tchier, F., & Ragoub, L. (2017b). Design of an adaptive tracker for n -link rigid robotic manipulators based on super-twisting global nonlinear sliding mode control. *International Journal of Systems Science*, 48(9), 1990–2002.
- [Mob-18a] Mobayen, S. (2018a). Chaos synchronization of uncertain chaotic systems using composite nonlinear feedback based integral sliding mode control. *ISA Transactions*, 77, 100-111.
- [Mob-18b] Mobayen, S., & Tchier, F. (2018b). Robust global second-order sliding mode control with adaptive parameter tuning law for perturbed dynamical systems. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 40(9), 2855-2867
- [Mor-08] Moreno, J. A., & Osorio, M. (2008, December). *A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers*. 47th IEEE Conference on Decision and Control (pp. 2856–2861). Cancun, Mexico.
- [Mor-12] Moreno, J. A., & Osorio, M. (2012). Strict Lyapunov functions for the super-twisting algorithm, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(4), 1035–1040.
- [Mun-15] Munoz, F., Gonzalez-Hernandez, I., Espinoza, E.S., Salazar, S., & Osorio, A. (2015, November). *Altitude control of an unmanned aircraft system using a super-twisting controller based on high order sliding mode observer*. 2015 workshop on research, education and development of unmanned aerial systems (RED-UAS), (pp. 323–328). Cancun. IEEE.
- [Orl-03] Orlov, Y. (2003, December). *Finite time stability of homogeneous switched systems*. Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control CDC (pp. 4271–4276). Maui, Hawaii, USA.
- [Pag-05] Pagès, O., & El Hajjaji, A. (2005, December). *Two fuzzy multiple reference model tracking control designs with an application to vehicle lateral dynamics control*. Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005 (pp. 3267-3272). Seville, Spain.
- [Pan-18] Panchade, V. M., Chile, R. H., & Patre, B. M. (2018). Quasi continuous sliding mode control with fuzzy switching gain for an induction motor. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 36(4), 1–18. doi:10.3233/jifs-17548
- [Per-02] Perruquetti, W., & Barbot, J.P. (2002). *Sliding mode control in engineering*. Marcel Dekker.

- [Per-18] Apaza-Perez, W. A., Fridman, L. M., & Moreno, J. A. (2018). Higher order sliding-mode observers with scaled dissipative stabilisers. *International Journal of Control*, 91(11), 2511-2523.
- [Pis-11] Pisano, A., & Usai, E. (2011). Sliding mode control: A survey with applications in math. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81(5), 954-979.
- [Ria-19] S. Riache, m. kidouche, Amar REZOUG. Adaptive robust nonsingular terminal sliding mode design controller for quadrotor aerial manipulator. June 2019. TELKOMNIKA Indonesian Journal of Electrical Engineering 17(03). DOI: 10.12928/telkomnika.v17i3.10470.
- [Sht-10] Shtessel, Y. B., Moreno, J. A., Plestan, F., Fridman, L. M., & Poznyak, A. S. (2010). *Super twisting adaptive sliding mode control: A lyapunov design*. Proceedings of the 49th IEEE conference on decision and control CDC 2010 (pp. 5109-5113). Atlanta, Georgia, USA.
- [Sht-12] Shtessel, Y., Taleb, M., Plestan, F. (2012). A novel adaptive-gain super twisting sliding mode controller: Methodology and application. *Automatica*, 48 (5), 759-769.
- [Sht-14] Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L. M., & Levant, A. (2014). *Sliding Mode Control and Observation, Series: Control Engineering*, Birkhauser:Basel:Springer.
- [Sin-18a] Singh, J. P., & Roy, B. K. (2018). Second order adaptive time varying sliding mode control for synchronization of hidden chaotic orbits in a new uncertain 4-D conservative chaotic system. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 40(13), 3573-3586.
- [Sin-18b] Singh, S., Srivastava, P., & Janardhanan, S. (2018). Adaptive higher order sliding mode control for nonlinear uncertain systems. *IFAC-Papers On Line*, 51(1), 341-346.
- [Sir-88] Sira-Ramirez, H. (1988). Differential geometric methods in variable-structure control. *International Journal of Control*, 48(4), 1359-1390.
- [Slo-91] Slotine, J. E., & Li, W. P. (1991). *Applied nonlinear control*. Englewood Cliff, NJ: Prentice-Hall.
- [Tak-85] Takagi, T., & Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control. *IEEE Transactions on Systems Man, and Cybernetics*, SMC, 15(1), 116-132.
- [Tam-18] Tamhane, B., & Kurode, S. (2018). Finite time state and disturbance estimation for robust performance of motion control systems using sliding modes. *International Journal of Control*, 91(5), 1171 -1182.
- [Tan-01] Tanaka, K., & Wang, H.O. (2001). *Fuzzy control systems design and analysis : a linear matrix inequality approach*. Wiley-Interscience.
- [Tay-18] Tayebi-Haghighi, S., Piltan, F., & Kim, J.M. (2018). Robust Composite High-Order Super-Twisting Sliding Mode Control of Robot Manipulators. *Robotics*, 7(13), 1-18. doi:10.3390/robotics7010013.
- [Tle-11] Tlelo-Cuautle, E. (2011). *Chaotic Systems*. Rijeka, Croatia: InTech Publisher.
- [Tse-01] Tseng, C. S., Chen, B. S., & Uang, H. J. (2001). Fuzzy tracking control design for nonlinear dynamic systems via T-S fuzzy model. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(3), 381-392.
- [Utk-13] Utkin, V. I., & Poznyak, A. S. (2013). Adaptive sliding mode control with application to super-twisting algorithm: Equivalent control method. *Automatica*, 49, 39-47.
- [Utk-77] Utkin, V. I. (1977). Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(2), 212-222.
- [Utk-92] Utkin, V.I. (1992). *Sliding modes in control optimization*. Communication and Control Engineering Series, Springer-Verlag.

- [Vai-17a] Vaidyanathan, S. (2017a). *Super-twisting sliding mode control of the enzymes-substrates biological chaotic system*, In: Applications of Sliding Mode Control in Science and Engineering, Studies in Computational Intelligence (Vol. 709, pp. 435-450), Springer.
- [Vai-17b] Vaidyanathan, S. (2017b). *Super-twisting sliding mode control and synchronization of moore-spiegel thermo-mechanical chaotic system*, In: Applications of Sliding Mode Control in Science and Engineering, Studies in Computational Intelligence (Vol. 709, pp. 451-470), Springer.
- [Van-13] Van, M., Kang, H.-J., & Shin, K.-S. (2013). Adaptive fuzzy quasi-continuous high-order sliding mode controller for output feedback tracking control of robot manipulators. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 228(1), 90–107.
- [Van-16] Van, M., Franciosa, P., & Ceglarek, D. (2016). Fault diagnosis and fault tolerant control of uncertain robot manipulators using high order sliding mode. *Mathematical Problems in Engineering*. doi:10.1155/2016/7926280.
- [Van-17] Van, M., Ge, S.S., & Ren, H. (2017). Finite time fault tolerant control for robot manipulators using time delay estimation and continuous nonsingular fast terminal sliding mode control. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 47(7), 1681–1693.
- [Váz-15] Vázquez, C., Fridman, L. M, Collado, J., & Castillo, I. (2015). Second-order sliding mode control of a perturbed-crane. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 137(8), 081010(1-7). doi:10.1115/1.4030253.
- [Ven-92] Venkataraman, S.T., Gulati, S. (1992, June). *Control of nonlinear systems using terminal sliding modes*. Proceedings of the 1992 American Control Conference (pp. 891–893). Chicago, Illinois.
- [Wan-16] Wang, Y., Gu, L., Gao, M., & Zhu, K. (2016). Multivariable output feedback adaptive terminal sliding mode control for underwater vehicles. *Asian Journal of Control*, 18(1), 247-265.
- [Wan-94] Wang, L.X. (1994). *Adaptive fuzzy systems and control- Design and stability analysis*. Prentice Hall.
- [Wu-07] Wu, D., & Mendel, J. M. (2007, June). *Enhanced karnik-mendel algorithms for interval type-2 fuzzy sets and systems*. Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society NAFIPS '07 (pp. 184-189). San Diego, CA, USA.
- [Wu-98] Wu, Y., Yu, X., & Man, Z. (1998) Terminal sliding mode control design for uncertain dynamic systems. *Systems and Control Letters* 34(5), 281–287.
- [Xi-18] Xi, X., Mobayen, S., Ren, H., & Jafari, S. (2018). Robust finite-time synchronization of a class of chaotic systems via adaptive global sliding mode control. *Journal of Vibration and Control*, 24(17), 3842-3854.
- [Xia-19a] Xiao, C., Zhou, W., Zhou, P., & Duan, D. (2019). A fast convergence super-twisting observer design for an autonomous airship. *Asian Journal of Control*, 21(1), 429-438.
- [Xia-19b] Xiao, Y., Ye, D., & Sun, Z. (2019). Observer-based continuous finite-time attitude control for rigid flexible coupling satellites. *International Journal of Control*, 92(11), 2667-2680.
- [Xio-19] Xiong, X., Kamal, S., & Jin, S. (2019). Adaptive gains to super-twisting technique for sliding mode design. *Asian Journal of Control*. doi:10.1002/asjc.2202.
- [Yan-11] Yang, L., & Yang, J. (2011). Nonsingular fast terminal sliding-mode control for nonlinear dynamical systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21(16), 1865–1879.
- [Yu-02] Yu, X., & Zhihong, M. (2002). Fast terminal sliding-mode control design for nonlinear dynamical systems. *IEEE Transaction on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 49(2), 261–264.

- [Yu-16] Yu, P., Shtessel, Y., & Edwards, C. (2016). Continuous higher order sliding mode control with adaptation of air breathing hypersonic missile, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 30 (8–10), 1099–1117.
- [Yu-96] Yu, X., & Zihong, M. (1996). Model reference adaptive control systems with terminal sliding modes. *International Journal of Control*, 64, 1165–1176.
- [Yu-98] Yu, X., Zihong, M. Multi-input uncertain linear systems with terminal sliding-mode control. *Automatica* 34(3), 389–392 (1998).
- [Zad-65] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3), 338–353.
- [Zel-10] Zelinka, I., Celikovsky, S., Richter, H., & Chen, G. (2010). *Evolutionary Algorithms and Chaotic Systems*. Studies in Computational Intelligence, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [Zha-19a] Zhang, H., Hu, J., & Yu, X. (2019). Adaptive sliding mode fault-tolerant control for a class of uncertain systems with probabilistic random delays. *IEEE Access*, 7, 64234–64246. doi:10.1109/access.2019.2917530.
- [Zha-19b] Zhai, J-y., & Song, Z-b. (2019). Adaptive sliding mode trajectory tracking control for wheeled mobile robots. *International Journal of Control*. 92(10), 2255-2262.

Publications

[Hen-19a] Hendel, R., Khaber, F., & Essounbouli, N. (2019a). Adaptive high order sliding mode controller/ observer based terminal sliding mode for MIMO Uncertain Nonlinear System. International Journal of Control. <https://doi.org/10.1080/00207179.2019.1598580>.

[Hen-19b] Hendel, R., Khaber, F., & Essounbouli, N. (2019b). Adaptive high-order sliding mode controller-observer for MIMO uncertain nonlinear systems. Asian Journal of Control. <https://doi.org/10.1002/asjc.2167>.



Adaptive high order sliding mode controller/observer based terminal sliding mode for MIMO uncertain nonlinear system

Rim Hendel ^a, Farid Khaber^a and Najib Essounbouli^b

^aQUERE Laboratory, Engineering Faculty, University of Setif 1, Setif, Algeria; ^bCreSTIC of Reims Champagne-Ardenne University, IUT de Troyes, Troyes, France

ABSTRACT

In this paper, an adaptive super twisting high order sliding mode controller observer is investigated for multi input–multi output uncertain system, with application to robotic manipulator based only on position measurement. First, a type-2 Takagi–Sugeno fuzzy system is used to model the original system. Next, by combining the fuzzy model with third order sliding mode observer, a novel fuzzy observer is designed to estimate both the joint velocities and uncertainties. Moreover, based on super twisting algorithm the proposed controller generates a smooth control signal and guarantees the finite time stabilisation of second order sliding mode. The controller gains are generated based on adaptive estimation scheme, in which the gains overestimation problem and the prior knowledge of the upper boundaries of uncertainties can be avoided. The stability of proposed controller/observer scheme is discussed using Lyapunov approach. Finally, the obtained simulation results for two link robot manipulator demonstrate the effectiveness of the proposed controller.

ARTICLE HISTORY

Received 1 April 2018
Accepted 16 March 2019

KEYWORDS

High order sliding mode controller-observer; interval type-2 Takagi–Sugeno fuzzy system; robotic manipulator; super twisting algorithm

Introduction

Background and motivations

Robustness and high controller performances for uncertain and perturbed nonlinear systems are among the main issues in various practical applications such as robotics, mechanics and electronics (Abooe, Arefi, Sedghi, & Abootalebi, 2018; Cabecinhas, Cunha, & Silvestre, 2015; Mobayen, Baleanu, & Tchier, 2016). Over the past few decades, many type of nonlinear control strategies such as: adaptive control, backstepping control and sliding mode control have been employed to improve robust and tracking accuracy control problems (Dehkordi, Sadati, & Hamzeh, 2017; Mobayen, 2016; Tang, Ge, Tee, & He, 2016; Zhao, Chen, Wu, & Pan, 2018). Due to its ability to guarantee stability, fast dynamic response and robustness against matching internal parameter variations and external disturbances, sliding mode control (SMC) is often adopted (Edwards & Spurgeon, 1998; Liu & Wang, 2011; Utkin, Guldner, & Shi, 2009). However, the design of most nonlinear controllers including SMC needs the complete measurements of the system states for example: in the control of mechanical systems, both position and velocity must be available. Since usually only some states are measured, it is then necessary to estimate the unmeasured states by using an observer. Based on discontinuous algorithm, and even in the presence of bounded uncertainties, sliding mode observers SMO (or SM differentiators) can also assure theoretically exact estimation of unmeasured states to the true system's states (Efimov, Zolghadri, Cieslak, & Henry, 2012; Pisano & Usai, 2011). However, despite the fast tracking convergence and

robustness benefits of sliding mode, its main problem in both control and observation is known as chattering phenomenon, which is undesirable for system stability and particularly for actuators in mechanical part of system. Several methodologies have been proposed to attenuate the chattering effect (Khooban & Niknam, 2016; Mobayen & Tchier, 2016; Mobayen, Tchier, & Ragoub, 2017; Slotine & Li, 1991; Zhang, Liu, & Zhu, 2014), high order sliding mode (HOSM) is the most powerful method among them. Unlike to the so-called first order sliding mode, which acts on the first time derivative of sliding variable s , the switching control in HOSM acts on the higher order time derivatives of s . Then, for system with relative degree two, the second order sliding mode (SOSM) guarantees finite time convergence of system trajectories to the sliding set $s = \dot{s} \equiv 0$, and the control is acting on the second derivative of s (Levant, 2007). Furthermore, HOSM is very useful for both control and observation including SOSM (Apaza-Perez, Fridman, & Moreno, 2016; Shtessel, Edwards, Fridman, & Levant, 2014; Tamhane & Kurode, 2018).

In real applications, the so called super twisting algorithm (STA) introduced in Levant (1998) is among the effective and attractive HOSMs (Al-Saggaf, Bettayeb, & Djennoune, 2017; Chalanga, Kamal, Fridman, Bandyopadhyay, & Moreno, 2014, 2015; Mobayen et al., 2017; Zhang, Tang, & Guo, 2017). Contrarily to other HOSM algorithms and instead of a classical sliding mode, STA is designed for systems with relative degree one with respect to the sliding variable s . Hence, only the information about s is required for ST control design, this latter provides finite time stabilisation of SOSM (i.e. $s = \dot{s} \equiv 0$), produces a

smooth control signal and also has the ability to compensate matched Lipschitz disturbances. The STA's stability and finite time convergence have been proved geometrically in Levant (1993) and by using a Lyapunov approach in Moreno and Osorio (2008, 2012).

However, to design STA for systems with relative degree two, it is necessary to select a sliding variable with relative degree one. In Chalanga et al. (2014, 2015), a linear sliding manifold is designed as $\sigma = as + \dot{s}$, $a > 0$, where a finite time convergence to the sliding set $\sigma = \dot{\sigma} \equiv 0$ and the disturbances compensation are achieved, unlike to the states s and \dot{s} which converge asymptotically to the origin. Furthermore, if only some states are measured and by using continuous control on the previously designed sliding manifold, the SOSM never realised in ST control based ST observer according to (Chalanga, Kamal, Fridman, Bandyopadhyay, & Moreno, 2015), then two methodologies have been proposed: by using discontinuous control input in the first, which may be undesirable for practical applications, and in the second, the SOSM is achieved by using continuous ST control based on HOSM observer, both methods are applied with experimental validation for position control of industrial emulator.

On the other hand, since only the asymptotic stability of the system motion in the typical sliding surface can be guaranteed, various finite time stabilisation control methodologies have been proposed such as finite time stability of nonlinear MIMO control system based HOSM controller and homogeneity theory (Defoort, Floquet, Kokosy, & Perruquetti, 2009), finite time stable control for a class of MIMO nonlinear systems with uncertainties based on HOSM controller and the quadratic form Lyapunov function (Liu & Han, 2014), another approach called terminal sliding mode (TSM) has been widely used to achieve finite time stability. Through a nonlinear sliding surface, TSM has the ability to provide a finite time stabilisation of system states (Aghababa, 2015; Fang & Li, 2014). Hence, TSM can offer some superior proprieties with comparison to linear SM, such as high tracking precision and global asymptotic stability. However, The TSM controllers have two disadvantages, the first is the singularity problem due to negative fractional power in the TSMs design, that leads to the theoretically infinite control values, and the second is that when the system state is far away from the equilibrium, TSMs have a slower convergence to the equilibrium compared to SMC. To avoid these problems, nonsingular terminal sliding mode (NTSM) and fast terminal sliding mode (FTSM) concepts have been proposed in Feng, Yu, and Man (2002), Yu and Zhihong (2002). Therefore, the fast nonsingular terminal sliding mode (FNTSM) is developed to guarantee fast convergence without singularity problem (Al-Ghanimi, Zheng, & Man, 2015; Xiao, Ye, & Sun, 2018; Yang & Yang, 2011).

Literature review

In the literature, several applications have been developed based on HOSM controller observer combination. In Munoz, Gonzalez-Hernandez, Espinoza, Salazar, and Osorio (2015), a combined ST sliding mode controller with HOSM observer study is presented for altitude control of an unmanned aircraft system. The HOSM controller observer scheme is also applied to various MIMO systems particularly for tracking control of

robotic manipulators: in Van, Franciosa, and Ceglarek (2016), an active fault-tolerant control for three-degree of freedom (3-DOF) uncertain robot manipulator is designed by combining a ST controller with a third order sliding mode observer TOSMO based STA, with the same idea, the robust composite high order ST observer controller is presented in Tayebi-Haghighi, Piltan, and Kim (2018) for tracking control of 6-DOF robot manipulator with presence of uncertainties. However, despite robustness and smoothness of these proposed controllers, and as discussed in Chalanga et al. (2015), the finite time stabilisation of system states does not attained due to the linear dynamic of sliding manifold used in the controller design's. Furthermore, it is worth noting that, the controller gains in Munoz et al. (2015) are selected based on known bounded uncertainties, and for both controllers proposed in Van et al. (2016), Tayebi-Haghighi et al. (2018) the super twisting sliding gains are designed based on the uncertainties estimation provided by TOSMO (called output error injection OEI). Unfortunately, the main challenge of ST controller design is the requirement of the uncertainty boundaries knowledge, which cannot be easily known in advance or exactly estimated for several practical cases, also the boundary overestimation yields to larger sliding gains, which leads to a significant chattering effect.

Addressing this challenge, various adaptive techniques based SMCs/HOSMCs have been recently designed for both SISO and MIMO nonlinear uncertain systems (Goel & Swarup, 2017; Mobayen & Tchier, 2016; Nasiri, Kiong Nguang, & Swain, 2014; Wang, Gu, Gao, & Zhu, 2015; Zhai & Song, 2018). More specifically, decreasing the chattering effect and in the same time keeping the non-overestimation of the sliding gains in HOSMCs, an adaptive scheme is proposed to adjust online these gains in Shtessel, Moreno, Plestan, Fridman, and Poznyak (2010), Shtessel, Taleb, and Plestan (2012), Edwards and Shtessel (2016), Utkin and Poznyak (2013). An adaptive gain ST control is proposed for a large class of nonlinear uncertain systems, this control law is able to generate continuous control so that the controller gains are adapted to the unknown bounded uncertainties without overestimation of gains values (Shtessel et al., 2010; Shtessel et al., 2012). Based on availability of equivalent control signal, another adaptive gain scheme in HOSM including STA is proposed firstly in Utkin and Poznyak (2013), and developed next for both single-input single-output and multi-input multi-output formulations in Edwards and Shtessel (2016), this algorithm drive the sliding set to zero in finite time while the control gains decrease to a small possible level. By using this adaptation scheme, a continuous adaptive higher order sliding mode control (AHOSM) is designed for hypersonic missile control in the terminal phase with presence of external disturbances and uncertainties (Yu, Shtessel, & Edwards, 2016). Meanwhile, in the work of Borlaug, Gravdah, Sverdrup-Thygeson, Pettersen, and Loria (2018) an adaptive gains super twisting controller is successfully applied for trajectory tracking of underwater swimming manipulator, where a HOSM observer is designed to estimate the unmeasured system states. Nevertheless, these control schemes ensure the asymptotic convergence of the tracking error.

To deal with finite time stabilisation of system state trajectories, several methodologies based on TSMCs have been proposed specially for MIMO mechanical systems, as in Zhai

and Song (2018), where an adaptive fast nonsingular terminal sliding mode control is designed for tracking control of wheeled mobile robots in presence of disturbances and uncertainties. A finite time and robust control based on NTSM is investigated for tracking problem of uncertain 5-DOF upper-limb exoskeleton robot in Abooe et al. (2018). In the work of (Golestani, Tchier, & Mobayen, 2016), an adaptive FTSM blended with a global SMC approach is employed, which guarantees finite time tracking control of uncertain nonlinear systems. However, despite that these controllers can assure system's finite time stabilisation, the ability to attenuate the chattering still limited. Mobayen and Tchier (2017) proposed a robust adaptive second order sliding mode control for tracking problem of a class of uncertain linear systems with disturbances, where the finite time convergence is attained by using PID sliding manifold, the chatter less and smooth control input are obtained after an integration process, this the main idea to achieve SOSM, keeping the same idea, in Mondal and Mahanta (2014), an adaptive second order TSM controller is designed for controlling robotic manipulators, while the chattering attenuation is attained instead the SOSM, the finite time tracking is achieved based on TSM approach.

In order to design continuous and smooth control meanwhile achieving finite time convergent, decoupling control based on TSMC and HOSM algorithms including STA was investigated; in Ashtiani-Haghighi and Mobayen (2018), an adaptive super twisting control design decoupled TSM technique is presented for the stabilisation of fourth-order systems with experimental validation on the cart-pole system. Based on time delay estimation (TDE) and by combining the fast nonsingular terminal sliding mode control (FNTSMC) with STA, Van, Ge, and Ren (2017) proposed a finite time fault tolerant control scheme for uncertain robot manipulator with actuator faults. By using continuous homogeneous sliding mode controller called nested algorithm (which is a ST control blended with TSM surface) introduced in Fridman, Moreno, Bandyopadhyay, Kamal, and Chalanga (2015), the tracking control of robot manipulator in presence of uncertainties and disturbances has been presented in Goel and Swarup (2017), where the proposed adaptive ST control with homogeneous sliding manifold provides smooth control with finite time convergence. In Mobayen et al. (2017), a robust adaptive super twisting combined with global nonlinear sliding mode scheme is designed for tracking control of n-link rigid robotic manipulators with external disturbances. Despite that the finite time convergent, robustness and chatter attenuation in these controllers are successfully attained, it is worth noting that, since the information about all system states is generally not available in the most practical cases, these controllers are designed under assumption that a complete system states measurement is available, also the system dynamic is assumed to be well known.

Due to its ability to provide a suitable representation of the uncertainty in dynamic model and system knowledge, and to deal with the complexity control system problems, the fuzzy logic (FL) approach has been widely and successfully implemented in both modelling and control of uncertain systems (Ghalia, 1997; Han, Chen, Zhao, & Dong, 2018; Tseng, Chen, & Uang, 2001). Motivated by the above discussion, and compared with related works, the main novelties of this paper is to design a

robust and finite time tracking control based HOSM for MIMO uncertain nonlinear system with application to robotic manipulator, the system dynamic is described by Takagi–Sugeno (T–S) fuzzy model, and only the position state is available for measurement, then a novel fuzzy HOSM observer is designed for estimate the unmeasured states.

Contribution

In light of attractive features of HOSM control /observer and TSM approach, the main contribution of this paper is to develop an adaptive super twisting sliding mode controller (AST-SMC) based on HOSM observer for MIMO uncertain nonlinear system. Firstly, the nominal nonlinear system is represented by interval type-2 Takagi–Sugeno (IT2 T–S) fuzzy model. Then, by combining third order sliding mode linear observer TOSMLO based STA with T–S fuzzy model, a novel fuzzy third order sliding mode linear observer (F-TOSMLO) is applied to estimate both velocity and uncertainties. The proposed controller scheme is applied on a two link robot manipulator to prove the effectiveness of this method. In comparison with former works, the proposed controller/ observer scheme is designed to achieve the following objectives:

- Estimating the velocity and compensating the uncertainties by using the F-TOSMLO.
- Achieving a finite time convergence of system states to their references, and generating smooth control signal via combined TSMC and STA.
- Avoiding the requirement knowledge about upper bounds of uncertainties and disturbances by implementing an adaptive scheme to ST controller gains.

Paper organisation

The rest of this paper is organised as follows: The system description and control objective are given in the first section. Then, some preliminaries with problem statement are presented, followed by the design of proposed adaptive ST controller based HOSM observer, with stability and finite-time convergence proof. To demonstrate the high performances of the proposed method, simulation results for two link robot manipulator with comparative study are provided in simulation example section. The last section gives the conclusion of the advocated design control scheme.

System description and control objective

Consider the following n second order uncertain mechanical system:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u(t) + D(\underline{x}, t) \end{cases} \quad (1)$$

where $\underline{x} = [x_1 x_2]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ is the system state vector, $f(\underline{x}) \in \mathbb{R}^n$ and $g(\underline{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ are two nonlinear continuous functions, $u(t) \in \mathbb{R}^n$ is the control input, $D(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^n$ is the whole uncertainties indicating the sum of the external disturbances and parameter uncertainties. Assume that $D(\underline{x}, t)$ has a

bounded Lipschitz continuous time signal, i.e. $|D(\underline{x}, t)| \leq d$, and $|\dot{D}(\underline{x}, t)| \leq \dot{d}$.

The control objective is to design finite time, robust and continuous control law, so that the system states $\underline{x}(t)$ follow desired trajectories $\underline{x}_d(t)$ despite uncertainties. Let us define the tracking error $\underline{e}(t)$ as

$$\begin{aligned} \underline{e}(t) &= \underline{x}(t) - \underline{x}_d(t) \\ &= [x_1(t) - x_{d1}(t) \quad x_2(t) - \dot{x}_{d1}(t)] \end{aligned} \quad (2)$$

Therefore, the control goal considered is that:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{e}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) - \underline{x}_d(t) \rightarrow 0 \quad (3)$$

Remark 1: It is worth noting that, to deal with different constraints imposed on the modelling of the complex real processes with unmodeled dynamics, and system structural variation especially for robot manipulators, fuzzy logic systems (FLS) have been largely used in controlling and modelling of mobile robots inspired by its simplicity of rule development based systems. Compared to a type-1 fuzzy model counterpart, type-2 fuzzy system (T-2FS) is characterised mainly by its capability of enhancing the developed model's robustness. T-2FS can deal with numerical and linguistic uncertainties associated with either the mechanical aspect of robots, or with dynamic changing environment or with knowledge used in the fuzzy system conception. Therefore, the nonlinear system (1) will be represented by a type-2 fuzzy system based on Takagi–Sugeno fuzzy model (Takagi & Sugeno, 1985).

The design procedure of the proposed controller consists two steps. In the first, the system under consideration is described by interval type-2 Takagi–Sugeno fuzzy model (IT2 T-S), followed by the design of a novel fuzzy third order sliding mode linear observer F-TOSMLO, which is implemented to estimate both velocity and uncertainties. Secondly, by combining TSMC with STA, a robust control law with adaptive controller gains is designed to achieve a finite time convergence of tracking errors and also generate a smooth control signal.

Interval type-2 Takagi–Sugeno fuzzy model (IT2 T-S)

The interval type-2 fuzzy logic systems IT2FLS is very similar to a T1FLS, the major structural difference being that the defuzzifier block of a T1FLS is replaced by the output processing block in a T2FLS, which consists of type-reduction followed by defuzzification (Karnik, Mendel, & Liang, 1999). In the T–S fuzzy system, the nominal model can be obtained by the decomposition of the nonlinear system dynamics into linear local models around certain operating points (Takagi & Sugeno, 1985). Then, the nonlinear system (1) can be approximated by an IT2 T–S fuzzy model that is described by M fuzzy IF–THEN rules. Each rule's consequents is a linear local model and the antecedent has IT2 fuzzy sets:

Plan rule i R^i : IF z_1 is \tilde{H}_1^i , and \dots , and z_n is \tilde{H}_n^i , THEN

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = A_i \underline{x} + B_i u \end{cases} \quad (4)$$

where \tilde{H}_j^i is the IT2 fuzzy set of i th rule ($i = 1, \dots, M$) corresponding to the j th antecedent z_j , ($j = 1, \dots, n$), n is a positive integer. $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $B_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ are known system matrices. The following interval sets define the firing strength of the i th rule:

$$w_i(z) = [\underline{w}_i, \bar{w}_i] \quad (5)$$

with

$$\underline{w}_i = \prod_j^n \underline{\mu}_{\tilde{H}_j^i}(z) \geq 0 \quad (6)$$

$$\bar{w}_i = \prod_j^n \bar{\mu}_{\tilde{H}_j^i}(z) \geq 0 \quad (7)$$

where \underline{w}_i and \bar{w}_i are the lower and upper membership grades, respectively. In which $\underline{\mu}_{\tilde{H}_j^i}(z)$ and $\bar{\mu}_{\tilde{H}_j^i}(z)$ denote the lower and upper membership function, respectively. The T–S fuzzy model will be given by

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \sum_{i=1}^M \underline{w}_i \underline{v}_i \{A_i \underline{x} + B_i u\} + \sum_{i=1}^M \bar{w}_i \bar{v}_i \{A_i \underline{x} + B_i u\} \\ = \sum_{i=1}^M w_i(z) \{A_i \underline{x} + B_i u\} \end{cases} \quad (8)$$

where $\underline{v}_i \geq 0$ and $\bar{v}_i \geq 0$ in which $\forall i, \underline{v}_i + \bar{v}_i = 1$. The both nonlinear functions \underline{v}_i and \bar{v}_i are selected as 0.5 in Liang and Mendel (2000). Note that $w_i(z)$ hold a convex sum property: $w_i(z) \geq 0$ and $\forall i, \sum_{i=1}^M w_i(z) = 1$. Then, based on IT2 T–S fuzzy model, the nonlinear uncertain system (1) can be expressed as follows:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \underline{x} + \sum_{i=1}^M w_i(z) B_i u + \Delta(t) \end{cases} \quad (9)$$

where $\Delta(t) \in \mathbb{R}^n$ represents the system uncertainties, that comprise the disturbances and the fuzzy approximation error, which is assumed to be Lipschitz time uncertainties, i.e. $|\Delta(t)| \leq \mu$ and $|\dot{\Delta}(t)| \leq \bar{\mu}$, $\bar{\mu} > 0$. Furthermore, imposed that $\forall z, \sum_{i=1}^M w_i(z) B_i$ are nonsingular then $(\sum_{i=1}^M w_i(z) B_i)^{-1}$ exists.

To guarantee the finite time stabilisation of mechanical system states described by IT2 T–S fuzzy model (9) in presence of uncertainties, both position and velocity must be available for designing the proposed controller. Then, by using F-TOSMLO, it is possible to estimate both velocity and system uncertainties in finite time.

States observation and uncertainties identification

The TOSMLO (which based on STA) guarantees exact velocity and uncertainty estimation without any filtration (Fridman, Levant, & Davila, 2007), unlike to the second order sliding mode observer SOSMO (called also ST differentiator) (Davila, Fridman, & Levant, 2005), which provides finite time estimation of velocity, but needs a low pass filter for uncertainties identification due to the high switching frequencies. Meanwhile, the

application of filter leads to time delay. Then, for states estimation and uncertainties identification of system described by (9), the fuzzy SOSM observer is designed firstly, in which its IT2 T-S fuzzy model has the same rules similar to the plant rules:

Observer rule i R^i : $IF z_1$ is \tilde{H}_1^i , and \dots , and z_n is \tilde{H}_n^i , THEN

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \alpha_1 |x_1 - \hat{x}_1|^{1/2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = A_i \hat{x} + B_i u + \alpha_0 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \end{cases} \quad (10)$$

where $\hat{x} = [\hat{x}_1 \hat{x}_2]^T$ is the state estimation vector of $x = [x_1 x_2]^T$, α_1 and α_0 are the sliding observer gains selected appropriately to assure the convergence of estimation error vector $\tilde{x} = [\tilde{x}_1 \tilde{x}_2]^T$. Similar to the fuzzy model (9) the F-SOSMO is defined as

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \alpha_1 |x_1 - \hat{x}_1|^{1/2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \hat{x} + \sum_{i=1}^M w_i(z) B_i u + \alpha_0 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \end{cases} \quad (11)$$

By substituting the fuzzy model of system (9) into (11), the estimation error can be obtained as

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 - \alpha_1 |x_1 - \hat{x}_1|^{1/2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{x} + \Delta(t) - \alpha_0 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \end{cases} \quad (12)$$

Under the boundedness assumption of system states and uncertainties, for an existing constant F^+ the following inequality holds:

$$\left| \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{x} + \Delta(t) \right| < F^+ \quad (13)$$

The stability and the finite time estimation of SOSMO is guaranteed based on the Lyapunov approach introduced in Moreno and Osorio (2008).

Theorem 1: Suppose that for the system described by (9), the inequality (13) holds, then the F-SOSM observer designed in (11) is strongly stable and ensures a finite time convergence of estimated states \hat{x}_i to the true states x_i , if the observer gains satisfy:

$$\alpha_1 \geq 0, \alpha_0 \geq 3F^+ + 2 \frac{F^{+2}}{\alpha_2^2} \quad (14)$$

For any positive constant $F^+ > 0$, and when the observer gains α_1 and α_0 are selected appropriately according to (14), then the origin $\tilde{x} = 0$ is robustly, globally finite time stable by means of strict Lyapunov function $V(\tilde{x}) = \zeta^T P \zeta$, where $\zeta = [|\tilde{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_1), \tilde{x}_2]$ and P is a positive definite matrix. Therefore, the system trajectories (12) starting at \tilde{x}_0 will converge to $\tilde{x} = 0$ in finite time smaller than $\tilde{T}(\tilde{x}_0) = \frac{2}{\tilde{\nu}} V^{1/2}(\tilde{x}_0)$, where the constant $\tilde{\nu}$ is depending on the observer gains α_1 and α_0 .

After finite time convergence of F-SOSMO, the following identity is fulfilled:

$$0 \equiv \dot{\tilde{x}}_2 \equiv \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{x} + \Delta(t) - \alpha_0 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \quad (15)$$

Note that $\sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{x} = 0$, because $\hat{x}_i = x_i$, ($i = 1, 2$). Therefore, the equivalent output injection (EOI) denoted \hat{z}_{eq} is

defined as

$$\hat{z}_{eq} = \Delta(t) = \alpha_0 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \quad (16)$$

Theoretically, the EOI is the result of infinite switching frequencies, which produces a chattering effect due to the discontinuous term in (15). Then, a pass low-filter with sampling time Λ , is used to avoid the high frequency component.

$$\tau \dot{\hat{z}}_{eq}(t) = \hat{z}_{eq}(t) - \bar{z}_{eq}(t) \quad (17)$$

where τ is the time constant of filter ($\Lambda \ll \tau \ll 1$), and \bar{z}_{eq} is the filtered output of \hat{z}_{eq} . The result of filtering process is given by:

$$\hat{z}_{eq} = \bar{z}_{eq} + \varepsilon_f \quad (18)$$

where ε_f is the error caused by the filtration. Finally, the EOI is defined as the output of filter $\bar{z}_{eq}(t)$, and the uncertainties can be identified from:

$$\Delta(t) = \bar{z}_{eq} \quad (19)$$

It's well known that the main proprieties of SOSMO based STA (called also ST differentiator) is its accuracy in the absence of noise, and its robustness with respect to measurement noise. Therefore, the main aim in the presence of noise is to estimate the state x_2 based on the measured state x_1 which corrupted by bounded measured noise η such that: $\tilde{x}_1 = x_1 + \eta$. Under the assumption that the noise is uniformly bounded by $\bar{\eta}$, an analysis of the precision and optimal gains for the generalised ST differentiators including ST differentiator has been presented in Angulo, Moreno, and Fridman (2012). Then, let's design the observer gains $\alpha_1 = \frac{\bar{\alpha}_1}{\Theta} k$, $\alpha_2 = \frac{\bar{\alpha}_2}{2\Theta^2} k^2$ as expressed in Angulo et al. (2012) with $k > 0$, $\bar{\alpha}_i$ are positive constants and Θ sets the gains. By introducing $\psi_1(\tilde{x}_1) = k|\tilde{x}_1 - \hat{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_1 - \hat{x}_1)$, $\psi_2(\tilde{x}_1) = \frac{k^2}{2} \text{sign}(\tilde{x}_1 - \hat{x}_1)$ and defining $\varpi_1 = \psi_1(\tilde{x}_1) - \psi_1(\tilde{x}_1 + \eta)$, $\varpi_2 = \psi_2(\tilde{x}_1) - \psi_2(\tilde{x}_1 + \eta)$, where $\tilde{x}_i = x_i - \hat{x}_i$, ($i = 1, 2$), then similarly to the above F-SOSMO analysis, the dynamic of estimation error is given by

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 - \frac{\bar{\alpha}_1}{\Theta} \psi_1(\tilde{x}_1) + \frac{\bar{\alpha}_1}{\Theta} \varpi_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = F(\tilde{x}, t) - \frac{\bar{\alpha}_1}{\Theta^2} \psi_2(\tilde{x}_1) + \frac{\bar{\alpha}_2}{\Theta^2} \varpi_2 \end{cases}$$

where $F(\tilde{x}, t) = \sum_{i=1}^M w_i(\tilde{z}) A_i \tilde{x} + \Delta(t)$, \tilde{z} is the noisy fuzzy antecedents which correspond to the noisy measurement of system states. With the above estimation error dynamic and according to (Angulo et al., 2012), once the ultimate bound for the estimation error \tilde{x}_1 denoted \tilde{x}_{1ss} is obtained, and under the assumption of uncertainties boundedness, the ultimate bound \tilde{x}_{2ss} for \tilde{x}_2 can be easily computed. Therefore, an optimal gain Θ^* (or several of them) can be selected to guarantee the stability of ST observer (ST differentiator). It's important noting that, in this case the observer gain does not depend to the bound of noise.

Remark 2: It's worth noting that, despite the selected observer gains, the ultimate bound for \tilde{x}_1 is never smaller than the noise magnitude. Therefore, with some positive constants $\tilde{\gamma}_1$ and $\tilde{\gamma}_2$ the estimation accuracy of ST observer (denoted also SOSMO) is proportional to the noise magnitude and cannot be better

than $|\tilde{x}_1| < \tilde{\gamma}_1 \bar{\eta}$ and $|\tilde{x}_2| < \tilde{\gamma}_2 \bar{\eta}^{1/2}$, this conclusion has been already discussed in Levant (1998). On the other hand, due to the robustness propriety of IT-2FS with respect to the numeric and linguistic uncertainties including the noisy measurements, it's deduced that these results can be also extended to predefined F-SOSMO based STA.

Now, without any filtration, a F-TOSMLO based STA is proposed for state and uncertainties estimation. Similarly to the F-SOSMO, the IT2 T-S fuzzy model rules of the F-TOSMLO is given as follows:

Observer rule $i R^i$: IF z_1 is \tilde{H}_1^i , and \dots , and z_n is \tilde{H}_n^i , THEN

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \alpha_2 |x_1 - \hat{x}_1|^{2/3} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) + \beta_1 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = A_i \hat{x} + B_i u + \alpha_1 |\hat{x}_1 - \hat{x}_2|^{1/2} \text{sign}(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) \\ \quad - \hat{x}_2 + \beta_2 (x_1 - \hat{x}_1) + \hat{x}_3 \\ \dot{\hat{x}}_3 = \alpha_0 \text{sign}(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) \end{cases} \quad (20)$$

where $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ and $\beta_i (i = 1, 2)$ are the sliding observer gains selected properly for ensuring the convergence of estimation errors $\tilde{x}_i = x_i - \hat{x}_i$. The equivalent output injection \hat{z}_{eq} is represented by a novel state \hat{x}_3 . The F-TOSML observer is defined as

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \alpha_2 |x_1 - \hat{x}_1|^{2/3} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) + \beta_1 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \hat{x} + \sum_{i=1}^M w_i(z) B_i u \\ \quad + \alpha_1 |\hat{x}_1 - \hat{x}_2|^{1/2} \text{sign}(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) + \beta_2 (x_1 - \hat{x}_1) + \hat{x}_3 \\ \dot{\hat{x}}_3 = \alpha_0 \text{sign}(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) \end{cases} \quad (21)$$

By substituting the fuzzy model (9) into (21), the dynamic of estimation error can be obtained as

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 - \alpha_2 |x_1 - \hat{x}_1|^{2/3} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) - \beta_1 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{x} + \Delta(t) - \alpha_1 |\hat{x}_1 - \hat{x}_2|^{1/2} \text{sign}(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) \\ \quad - \beta_2 (x_1 - \hat{x}_1) - \hat{x}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \alpha_0 \text{sign}(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) \end{cases} \quad (22)$$

Similar to the F-SOSMO design, let's define $F(\tilde{x}, t) = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{x} + \Delta(t)$, which is assumed also to be Lipschitz such that for an existing constant $F^+ > 0$, the inequality in (13) holds and $|\dot{F}(\tilde{x}, t)| < \bar{F}^+$. Now, defining a novel estimation error \tilde{x}_3 such that $\tilde{x}_3 = F(\tilde{x}, t) - \hat{x}_3$, (22) can be rewritten as

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 - \alpha_2 |x_1 - \hat{x}_1|^{2/3} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) - \beta_1 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_3 - \alpha_1 |\hat{x}_1 - \hat{x}_2|^{1/2} \text{sign}(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) - \beta_2 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\tilde{x}}_3 = -\alpha_0 \text{sign}(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) + \dot{F}(\tilde{x}, t) \end{cases} \quad (23)$$

Based on stability proprieties of recursive robust exact differentiator HOSM (Levant, 2003), for the system described by (9), the dynamic (23) is finite time stable, when the sliding observer gains $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ are selected appropriately and sufficiently large in the list order as discussed in Fraguelaa, Fridman, and Alexandrov (2012), Levant (2003). Therefore, after finite

time estimation of F-TOSMLO (21), the estimations states \hat{x}_i converge to the true states x_i , ($i = 1, 2$) in finite time, with $\dot{\hat{x}}_1 = \dot{x}_1$ the following equality is fulfilled:

$$F(\tilde{x}, t) - \alpha_1 |\hat{x}_1 - \hat{x}_2|^{1/2} \text{sign}(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) - \beta_2 (x_1 - \hat{x}_1) - \hat{x}_3 = 0 \quad (24)$$

As a consequence of the differentiator convergence, the third and fourth terms in (24) are equal to zero, and the uncertainties can be identified from $F(\tilde{x}, t) = \hat{x}_3$. Recalling that $F(\tilde{x}, t) = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{x} + \Delta(t)$, and noting that $\sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{x} = 0$ (because $\hat{x}_i = x_i$, ($i = 1, 2$)). Therefore, the equivalent output injection \hat{z}_{eq} denotes \hat{x}_3 is defined as

$$\hat{z}_{eq} = \Delta(t) \quad (25)$$

It is obvious that \hat{z}_{eq} is continuous term according to (21), and the equivalent output injection EOI can be obtained without filtration. Therefore, \hat{z}_{eq} is theoretical exact estimation of uncertainties $\Delta(t)$.

Remark 3: The stability and finite time convergent of SOSM observer are attained under the sufficient condition in Theorem 1 (Moreno & Osorio, 2008). In other hand, another choice of sliding gains for both SOSMO and TOSMLO observers may be taken in practical application, which meets the requirement in Levant (2003), Fraguelaa et al. (2012), such that $\alpha_2 = 1.9(L)^{1/3}$, $\alpha_1 = 1.5(L)^{1/2}$, and $\alpha_0 = 1.1L$, with L is sufficiently large constant ($L > 0$), the finite time stability of (12) and (23) is achieved.

Remark 4: Due to the finite time convergence of TOSMLO, and regardless of the control input used, it is worth noting that, the closed loop stability of observer-controller scheme can be successfully guaranteed without any problem (Fraguelaa et al., 2012; Fridman et al., 2007).

Remark 5: As aforementioned, the TOSMO has a recursive robust exact high order differentiator scheme (Levant, 2003) which based on ST differentiator. Then, in the presence of bounded Lebesgue measurable noise (with maximal magnitude $\bar{\eta}$) and with an appropriate observer gains, the inequalities $|\tilde{x}_1| < \tilde{\gamma}_1 \bar{\eta}$ and $|\tilde{x}_2| < \tilde{\gamma}_2 \bar{\eta}^{2/3}$ are attained in finite time for some positive constants $\tilde{\gamma}_i$, ($i = 1, 2$), which is the best possible estimation accuracy of TOSMO, thus, this result can be also extended to the F-TOSMLO.

Preliminaries and problem statement

In order to achieve finite time stabilisation of system states with smooth control signal, a super twisting sliding mode controller ST-SMC is proposed for uncertain system described by (9), the controller is a result of super twisting algorithm (STA) and terminal sliding mode (TSM) combination. Then, in this section, a review of some used definitions and notations are presented.

Preliminaries

The following notation is used in this paper: $a^b = |a|^b \text{sign}(a)$ (Bhat & Bernstein, 1997), for a real variable $a \in \mathbb{R}$ to a real

power $b \in \mathbb{R}$. Hence, $a^2 = |a|^2 \text{sign}(a) \neq a^2$. If b is an odd number, then $a^b = a^b$. Note that $a^0 = \text{sign}(a)$, $a^0 a^b = |a|^b$ and $a^0 |a|^b = a^b$.

Due to its important role in finite time convergence proofs, and in the obtain of highest accuracy with respect to the uncertainties and measurement noises, homogeneous function has interesting propriety in almost all HOSM controllers (Levant, 2005a; Levant & Fridman, 2010).

Definition 1: A function $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is homogeneous of degree $m \in \mathbb{R}$ with the dilation $d_k: (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (k^{r_1} x_1, k^{r_2} x_2, \dots, k^{r_n} x_n)$, where $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, $0 < r_i \in \mathbb{R}$ are known as the weights, if the identity $f(d_k x) = k^m f(x)$ holds for any $0 < k \in \mathbb{R}$ and $\forall x \in \mathbb{R}^n$ (Levant, 2005a).

Definition 2: A vector field $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$, $i = 1, 2, \dots, n$, is homogeneous of degree $q \in \mathbb{R}$ with weights r , if $f_i(d_k x) = k^{q+r_i} f_i(x)$ holds $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall k \in \mathbb{R}$. Then, for the system dynamic defined by $\dot{x} = f(x)$, if f is homogeneous of degree q , then the system is homogeneous of degree q (Levant, 2005a). Note that, by an appropriate proportional change of the weights $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, the vector field f can always be scaled to ± 1 , if its homogeneity degree $q \neq 0$.

Definition 3: An invariance of the differential equation $\dot{x} = f(x)$ is further called globally uniformly finite time stable, if for any trajectory starting within $x_0 < R$ for any $R > 0$, there exists a finite time $t_f > 0$, such that $x(t)$ stabilises to the origin for all $t > t_f$ (Levant, 2005a).

Definition 4: The r th-order sliding mode in HOSM (with sliding order $r \geq 2$) is described by the sliding set $S = \{s = \dot{s} = \ddot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0, s^{(r)} \neq 0\}$, which impose an r -dimensional condition on the state of the system dynamic (Levant, 2003).

Problem statement

The problem is to design a robust and continuous control law for finite time tracking of the uncertain system described in (9). Based on TSMC, let's design fast nonsingular sliding mode function FNTSM as follows:

$$\sigma = e + \lambda_1 e^{a_1} + \lambda_2 \dot{e}^{a_2} \quad (26)$$

where $e = x_1(t) - x_d(t)$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $1 < a_2 < 2$, with $a_2 = p_\sigma / q_\sigma$, p_σ and q_σ are positive odd integers and $a_1 \geq p_\sigma / q_\sigma$. Because only the exact information about x_1 is available, the proposed F-TOSMLO is used to extract information of x_2 as \hat{x}_2 . Therefore, $x_2 = \hat{x}_2$ can be achieved after finite time $t > T_0$, and the FNTSM surface and its time derivative are given now by:

$$\hat{\sigma} = e + \lambda_1 e^{a_1} + \lambda_2 \dot{e}^{a_2} \quad (27)$$

$$\dot{\hat{\sigma}} = \dot{e} + \lambda_1 a_1 |e|^{a_1-1} \dot{e} + \lambda_2 a_2 |\dot{e}|^{a_2-1} \ddot{e} \quad (28)$$

where $\dot{e} = \dot{x}_2(t) - \dot{x}_d(t)$ and $\ddot{e} = \ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_d(t)$. Since $\hat{x}_i = x_i$, ($i = 1, 2$), $\hat{x}_3 = \hat{z}_{eq}$ and $\hat{x}_1 = \dot{x}_1$ after finite time convergence

of F-TOSMLO, the substitution of the dynamic (21) in (28) yields:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\sigma}} &= \dot{e} + \lambda_1 a_1 |e|^{a_1-1} \dot{e} + \lambda_2 a_2 |\dot{e}|^{a_2-1} \\ &\times \left(\sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \hat{x} + \sum_{i=1}^M w_i(z) B_i u + \alpha_1 |\hat{x}_1 - \hat{x}_2|^{1/2} \right. \\ &\left. \times \text{sign}(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) + \beta_2 (x_1 - \hat{x}_1) + \hat{z}_{eq} - \ddot{x}_d(t) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\sigma}} &= \dot{e} + \lambda_1 a_1 |e|^{a_1-1} \dot{e} + \lambda_2 a_2 |\dot{e}|^{a_2-1} \\ &\times \left(\sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \hat{x} + \sum_{i=1}^M w_i(z) B_i u + \hat{z}_{eq} - \ddot{x}_d(t) \right) \\ &= \dot{e} + \lambda_1 a_1 |e|^{a_1-1} \dot{e} + \lambda_2 a_2 |\dot{e}|^{a_2-1} (F_0(\underline{x}) + G_0(\underline{x})u + \hat{z}_{eq}) \quad (29) \end{aligned}$$

where $F_0(\underline{x}) = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \hat{x} - \ddot{x}_d(t)$ and $G_0(\underline{x}) = \sum_{i=1}^M w_i(z) B_i$.

It's obvious that the system dynamic (9) is relative degree one with respect to FNTSM surface (27), the direct super twisting control can be applied. According to the sliding mode procedure, let the global control law be designed as follows:

$$u_{ST-SMC} = u_0 + u_c + u_{ST} \quad (30)$$

where

$$\begin{aligned} u_0 &= -G_0(\underline{x})^{-1} \\ &\times \left(F_0(\underline{x}) + \frac{1}{\lambda_2 a_2} \left(\dot{e}^{2-a_2} + \lambda_1 \alpha_1 |e|^{a_1-1} \dot{e}^{2-a_2} \right) \right) \quad (31) \end{aligned}$$

$$u_c = -G_0(\underline{x})^{-1} \hat{z}_{eq} \quad (32)$$

u_0 is the nominal control, the compensating control u_c is designed based on system uncertainties identification provided by F-TOSMLO. In order to ensure the system stability with finite time stabilisation of the second order sliding mode set $\hat{\sigma} = \dot{\hat{\sigma}} \equiv 0$, the super twisting control is expressed as follows:

$$\begin{cases} u_{ST} = G_0(\underline{x})^{-1} v_{ST} \\ v_{ST} = -k_1 |\hat{\sigma}|^{1/2} \text{sign}(\hat{\sigma}) + v_0, \\ \dot{v}_0 = -k_2 \text{sign}(\hat{\sigma}) \end{cases} \quad (33)$$

where the sliding gains $k_1 > 0$ and $k_2 > 0$ are selected according to (Moreno & Osorio, 2012), which guarantee a finite time stability of SOSM, another values, e.g. $k_1 = 1.5(L)^{1/2}$, $k_2 = 1.1L$, with $L > 0$, may also be taken according to (Levant, 2003), L represents generally the Lipschitz's constant of bounded uncertainties.

Now, considering the estimation error dynamic (23) of proposed F-TOSMLO, and by applying the control law (30)–(33) for the system described by (9), under a lumped uncertainties condition (i.e. $\Delta(t) \neq 0$), the overall closed loop system can be represented by the following dynamics:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\sigma}} = -k_1 |\hat{\sigma}|^{1/2} \text{sign}(\hat{\sigma}) + v_0 + \Delta(t), \\ \dot{v}_0 = -k_2 \text{sign}(\hat{\sigma}) \end{cases} \quad (34)$$

Noting that under the assumption that $\Delta(t)$ is Lipschitz time uncertainties (i.e. $|\Delta(t)| \leq \mu$ and $|\dot{\Delta}(t)| \leq \bar{\mu}$, $\bar{\mu} > 0$). The

closed loop dynamic (34) can be expressed now as follows:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\sigma}} = -k_1|\hat{\sigma}|^{1/2}\text{sign}(\hat{\sigma}) + v, \\ \dot{v} = -k_2\text{sign}(\hat{\sigma}) + \rho(t) \end{cases} \quad (35)$$

where $v = v_0 + \Delta(t)$ and $v_0 = \int_0^t k_2 \text{sign}(\hat{\sigma}) d\tau$. $\rho(t)$ is a bounded Lipschitz uncertainties, such that $\rho(t) = \dot{\Delta}(t)$, and $|\rho(t)| \leq \bar{\rho}$, $\bar{\rho} > 0$. Finally, it's obvious that the control objective is modified to the stabilisation of the system (35) under the presence of lumped uncertainties.

Remark 6: The system dynamic (35) is homogeneous of degree $q = -1$ and weights $r = (2, 1)$. Because the second equation in (35) is discontinuous, the solutions of system can be understand in the sense of Filippov (Filippov, 1988). In Moreno and Osorio (2008), strong Lyapunov functions are proposed for the homogeneous ST algorithm. Hence, the selection of the gains $k_i > 0$, ($i = 1, 2$) according to (Moreno & Osorio, 2008; Moreno & Osorio, 2012) ensures the finite time stability of the system dynamic (35).

Remark 7: When the gains k_i , ($i = 1, 2$) are adequately selected, the proposed control law (30)–(33) yields finite time stabilisation of SOSM on FNTSM function $\hat{\sigma}$, enduring bounded Lipschitz uncertainties $\rho(t)$. Since the STA (35) is finite time stable, $\hat{\sigma} = \dot{\hat{\sigma}} \equiv 0$ reached in finite time, this will make the system states of (9) converge to the origin in finite time.

Remark 8: It is worth noting that, the main challenge of STA is the requirement of uncertainties boundaries knowledge for controller gains selection. However, in many practical cases, it's difficult to obtain this boundary in advance. Furthermore, the controller gains have an important role in the control smoothness and convergence rapidity. In the next section, without overestimation problem, an adaptive estimation scheme is implemented to adjust online the super twisting gains in presence of uncertainties with unknown boundary (Shtessel et al., 2010; Shtessel et al., 2012).

Design of adaptive super twisting sliding mode controller

It's well known that, chattering in super twisting control is not eliminated but highly attenuated due to the presence of discontinuous term under the integral. In order to achieve finite time stabilisation of uncertain system described by (9) in presence of bounded uncertainties with unknown boundaries, an adaptive super twisting control AST-SMC is now designed. Based on control law (30) and by implementing an adaptive ST gains, the obtained AST-SMC control law is able to ensure finite time convergence of system trajectories (9) with high tracking accuracy and generate smooth control with high attenuation of chattering effect.

Proposed adaptive ST controller design

As discussed above, the objective of the adaptive super twisting gains approach in the proposed controller, is to generate a continuous control without overestimating the controller

gain, to maintain the SOSM ($\hat{\sigma} = \dot{\hat{\sigma}} \equiv 0$) in finite time, under bounded uncertainties with unknown boundaries. Therefore, in the design of proposed ST-SMC defined in (30), with u_0 , u_c , and u_{ST} given by (31), (32) and (33), respectively, an adaptive estimation scheme is used to design the ST gains in (33), where the adaptive gains $k_1(t, \hat{\sigma}, \dot{\hat{\sigma}})$ and $k_2(t, \hat{\sigma}, \dot{\hat{\sigma}})$ are defined based on (Shtessel et al., 2012) as follows:

$$\begin{cases} k_1(t, \hat{\sigma}, \dot{\hat{\sigma}}) = K_1\sqrt{\phi(t)} \\ k_2(t, \hat{\sigma}, \dot{\hat{\sigma}}) = K_2\phi(t) \end{cases} \quad (36)$$

where K_1 and K_2 are design parameters, $\phi(t)$ is a positive time varying scaler. The main idea of adaptive super twisting control is to dynamically increase the control gains $k_1(t, \hat{\sigma}, \dot{\hat{\sigma}})$ and $k_2(t, \hat{\sigma}, \dot{\hat{\sigma}})$ until the establishment of SOSM (i.e. $\hat{\sigma} = \dot{\hat{\sigma}} \equiv 0$), then the gains start dynamically reducing. Therefore, a detector that detects the beginning of SOSM destruction is incorporated into the AST, which guarantees the not-overestimation of controller gains. For a positive parameter $\mu_{\hat{\sigma}}$, suppose that $|\hat{\sigma}(0)| > \mu_{\hat{\sigma}}$, and $\phi(0) > \phi_m$, a real SOSM (i.e. $|\hat{\sigma}| \leq \mu_1$, $|\dot{\hat{\sigma}}| \leq \mu_2$, where $\mu_1 \geq \mu_{\hat{\sigma}}$ and $\mu_2 > 0$) is established $\forall t \geq T_F$ under AST (33) with adaptive gains $k_1(t)$ and $k_2(t)$, the adaptive scheme takes a form:

$$\dot{\phi}(t) = \begin{cases} \Omega_1\sqrt{\eta_1/2} \text{sign}(|\hat{\sigma}| - \mu_{\hat{\sigma}}), & \text{if } \phi > \phi_m \\ \eta, & \text{if } \phi \leq \phi_m \end{cases} \quad (37)$$

where η_1 , Ω_1 , $\mu_{\hat{\sigma}}$ and η are arbitrary positive constants. ϕ_m is an arbitrary small positive constant. It is worth noting that, by making $\mu_{\hat{\sigma}} = 0$ with $\phi(0) > 0$, in the gain adaptation law (37), the term $\text{sign}(|\hat{\sigma}| - \mu_{\hat{\sigma}})$ will be eliminated, and the adaptive gain law (37) shall be changed to:

$$\dot{\phi}(t) = \begin{cases} \Omega_1\sqrt{\eta_1/2}, & \text{if } \hat{\sigma} \neq 0 \\ 0, & \text{if } \hat{\sigma} = 0 \end{cases} \quad (38)$$

It should be noted that, in this case the overall proposed controller (30) denoted now AST-SMC with adaptive gains (38) in ST control term (33), u_0 and u_c are also given by (31)–(32), will drive the trajectories of system (9) to the ideal SOSM $\hat{\sigma} = \dot{\hat{\sigma}} = 0$ in finite time. Though, the adaptive control gains $k_1(t)$ and $k_2(t)$ can be overestimated. Hence, by applying the a small vicinity defined previously to the sliding surface, such as $|\hat{\sigma}| \leq \mu_1$ and $|\dot{\hat{\sigma}}| \leq \mu_2$, where $\mu_1 > \mu_{\hat{\sigma}} > 0$, $\mu_2 > 0$, so that once this vicinity is reached the gains $k_1(t)$ and $k_2(t)$ start dynamically decreasing. However, as soon as the system trajectories leave the vicinity, the gains start increasing in order to drive these trajectories back to the vicinity in finite time. So the adaptive gain law (38) can be expressed now as

$$\dot{\phi}(t) = \begin{cases} \Omega_1\sqrt{\eta_1/2}, & \text{if } |\hat{\sigma}| \geq \mu_1 \\ 0, & \text{if } |\hat{\sigma}| < \mu_1 \end{cases} \quad (39)$$

Remark 9: It's clear that, when $|\hat{\sigma}| > \mu_1$ (i.e. $|\hat{\sigma}| > \mu_{\hat{\sigma}}$), $\phi(t) = \phi(0) + \Omega_1\sqrt{\eta_1/2}t$, for $0 \leq t \leq t_r$, where t_r is the reaching time, then $\phi(t)$ is bounded. Recalling that, inside the vicinity $|\hat{\sigma}| \leq \mu_1$, $\phi(t) = \phi(0) + \Omega_1\sqrt{\eta_1/2}t_r$, for $t > t_r$, $\phi(t)$ is also

bounded and the gains $k_1(t)$ and $k_2(t)$ are decreasing. Since both gains are linked to $\phi(t)$, therefore, $k_1(t)$ and $k_2(t)$ are bounded in real SOSM.

Remark 10: According to the STC defined in (33) with adaptive gains k_1 and k_2 designed by (36), obviously, the parameters K_1 and K_2 are linked directly with $|\hat{\sigma}|^{1/2}\text{sign}(\hat{\sigma})$ and the integral of $\text{sign}(\hat{\sigma})$, respectively, furthermore both K_1 and K_2 are linked with $\phi(t)$. Hence, a large values of the parameters K_1, K_2, Ω, η_1 and the initial condition $\phi(0)$ can guarantee a fast convergence during the reaching phase, but generate a significant chattering in the control signal. Then, these parameters must be selected judiciously to stave off the compromise between the chattering effect and the convergence rapidity.

Now, by using the estimation gains (36) with adaptive law (39), the proposed AST-SMC controller ($u_{AST-SMC}$) is designed as (30), where u_0 and u_c are defined in (31)–(32), and the ST control term is given by:

$$\begin{cases} u_{ST} = G_0(\underline{x})^{-1}v_{ST} \\ v_{ST} = -k_1(t)|\hat{\sigma}|^{1/2}\text{sign}(\hat{\sigma}) + v_0, \\ \dot{v}_0 = -k_2(t)\text{sign}(\hat{\sigma}) \end{cases}$$

Moreover, the closed loop system (35) becomes:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\sigma}} = -k_1(t)|\hat{\sigma}|^{1/2}\text{sign}(\hat{\sigma}) + v, \\ \dot{v} = -k_2(t)\text{sign}(\hat{\sigma}) + \rho(t) \end{cases} \quad (40)$$

It is worth noting that, since the second order ST sliding mode controller is homogeneous and finite time stable, the system dynamic (40) is also homogeneous of degree $q = -1$ with weights $r = (2, 1)$ (Levant, 1993). Therefore, according to the weights of homogeneity and with sampling time Λ , the SOSM (i.e. $\hat{\sigma} = \hat{\sigma} \equiv 0$) is established in finite time, where the accuracy is of order $O(\Lambda^2)$ with respect to the sliding manifold $\hat{\sigma}$ and $O(\Lambda)$ with respect to its derivative $\dot{\hat{\sigma}}$. On the other hand, in the presence of bounded Lebesgue-measurable noise of maximal magnitude $\bar{\delta} > 0$ (the sliding manifold is assumed to be measured with measurable noise), the order of sliding accuracy becoms $O(\bar{\delta})$ and $O(\bar{\delta}^{1/2})$ with respect to $\hat{\sigma}$ and $\dot{\hat{\sigma}}$ respectively (Levant, 2005a).

Stability analysis

As aforementioned, homogeneous and continuously differentiable functions have interesting proprieties in HOSM controllers. Then, according to the homogeneity of the system (40) and under proposed AST-SMC, the global stability property is guaranteed.

Theorem 2: *Considering the system (40) with bounded uncertainties $|\rho| \leq \bar{\rho}$ for every $\bar{\rho} > 0$, by using the FNTSM surface (27), the proposed AST-SMC control with adaptive gains (36)–(39) ensures the finite time stabilisation of SOSM set $\hat{\sigma} = \dot{\hat{\sigma}} \equiv 0$, which further leads to the finite time convergence of system states (9) to the origin, for any initial condition $\hat{\sigma}(0)$ and $\underline{x}(0)$, and also guarantees the convergence of estimation gains.*

Proof: In order to simplify the proof of Theorem 2, it's possible to split the proof into two parts. ■

In the first, the closed loop system (40) will be presented in a form convenient for the Lyapunve analysis. For this, a new vector states is introduced: $\xi^T = [\xi_1, \xi_2] = [|\hat{\sigma}|^{1/2}\text{sign}(\hat{\sigma}), v]$, then the system (40) (also (35)) can be rewritten as

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \frac{1}{2|\xi_1|} - k_1\xi_1 + \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = -\frac{k_1}{|\xi_1|}\xi_1 + \rho(t) \end{cases}$$

Under the assumption that $\rho(t)$ is bounded uncertainties with unknown boundary such as $|\rho| \leq \bar{\rho}$, the system dynamic of ξ can be rewritten as follows:

$$\dot{\xi} = \frac{1}{|\xi_1|}A_V\xi \quad (41)$$

where $A_V = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}k_1 & \frac{1}{2} \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}$, it's obvious that: if $\xi_1, \xi_2 \rightarrow 0$ in finite time, then $\hat{\sigma}, \dot{\hat{\sigma}} \rightarrow 0$ in finite time and $|\xi_1| = |\hat{\sigma}|^{1/2}$, then $\text{sign}(\xi_1) = \text{sign}(\hat{\sigma})$.

In the second, the global stability analysis of system dynamic (40) with adaptive gains (36) is performed. For this, recalling that from (36) the adaptive gains $k_1(t)$ and $k_2(t)$ are linked directly to the adaptive variable $\phi(t)$, then it should be noted that, as mentioned in Remark 9, the gains $k_i, (i = 1, 2)$ are bounded, then there exist a positive constants $k_i^*, (i = 1, 2)$ such that $k_i(t) - k_i^* < 0, \forall t \geq 0, (i = 1, 2)$. Therefore, from (36) it can be concluded that there exist also a positive constant ϕ^* such that $\phi(t) - \phi^* < 0, \forall t \geq 0$. Now, in order to analyse the closed loop system (40) stability, let's introduce the following Lyapunov function candidate:

$$V(\xi, \phi) = V_0(\xi) + \frac{1}{2\eta_1}(\phi - \phi^*)^2 \quad (42)$$

where $V_0(\xi)$ is a quadratic, strict and robust Lyapunov function, which is defined as in Moreno and Osorio (2012);

$$V_0(\xi) = \xi^T P_V \xi \quad (43)$$

with $P_V = [p_{vij}]$ a constant, positive definite and symmetric matrix.

Proof part 1: The finite time convergent of $V_0(\xi)$ is studied in this part. Tacking into a count (41) and recalling that $|\xi_1| = |\hat{\sigma}|^{1/2}$, the time derivative of $V_0(\xi)$ is given by

$$\dot{V}_0 = -|\hat{\sigma}|^{-1/2}\xi^T Q_V \xi \quad (44)$$

where $Q_V = [Q_{vij}]$ a symmetric and positive definite matrix, Q_V and P_V are related by the algebraic Lyapunov equation $A_V^T P_V + P_V A_V = -Q_V$. In order to select the gains (k_1, k_2) and the Lyapunov function matrices P_V and Q_V , recalling that $|\rho| \leq \bar{\rho}$ and considering a positive constants (β, γ) , such that $0 < \beta < 1, \gamma > 1$ for $\beta\gamma > 1$, there exist positive constants (χ, ζ) satisfying:

$$\chi - \frac{2}{\gamma}\zeta > \zeta^2 - \beta(1 + \chi)\zeta + \frac{1}{4}(1 + \chi)^2 \quad (45)$$

■

The robustness and finite time convergence of perturbed system (40) can be achieved once the gains are selected as follows:

$$k_1 = \chi \sqrt{\frac{2\gamma}{(1-\beta)\zeta}} \sqrt{\bar{\rho}}, k_2 = \chi \frac{(1+\beta)}{(1-\beta)} \bar{\rho} \quad (46)$$

Hence, the matrices $P_V = [p_{Vij}]$ and $Q_V = [q_{Vij}]$ can be selected as

$$\begin{aligned} p_{V11} &= 1, p_{V22} = \frac{(1-\beta)\zeta}{2\bar{\rho}}, p_{V12} = \sqrt{\frac{(1-\beta)\zeta}{2\gamma\bar{\rho}}} = -\sqrt{\frac{p_{V22}}{\gamma}}, \\ q_{V11} &= k_1 + 2p_{V12}(k_2 + \bar{\rho}) + 2\bar{\rho}(1 - k_1 p_{V12}) \frac{p_{V22}}{p_{V12}}, \\ q_{V12} &= -\frac{1}{2}(1 - k_1 p_{V12}) + (k_2 + \bar{\rho}) p_{V22}, q_{V22} = -p_{V12}. \end{aligned} \quad (47)$$

By defining a new variable $\vartheta = \rho \text{sign}(\hat{\sigma})$, the derivative of $V_0(\xi)$ becomes:

$$\dot{V}_0 = -|\hat{\sigma}|^{-1/2} \xi^T [(A_V + N_V)^T P_V + P_V (A_V + N_V)] \xi$$

where $A_V + N_V = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}k_1 & \frac{1}{2} \\ -(k_2 - \vartheta) & 0 \end{bmatrix}$. Since ϑ is bounded, it can be concluded that $(k_2 - \bar{\rho}) \leq (k_2 - \vartheta) \leq (k_2 + \bar{\rho})$. The Lyapunov function $V_0(\xi)$ is positive definite and its derivative is negative definite if:

$$\begin{aligned} p_{V22} &> p_{V12}^2, p_{V12}(0, 0) k_1 p_{V12} + \frac{1}{4}(1 - k_1 p_{V12})^2 \\ &+ 2p_{V12}^2(k_2 - \vartheta) - \dots \\ &\dots - (1 - k_1 p_{V12}) p_{V22}(k_2 - \vartheta) + (k_2 - \vartheta)^2 p_{V12}^2 \end{aligned} \quad (48)$$

Define:

$$\chi \triangleq k_1 p_{V12}, \gamma \triangleq \frac{p_{V22}}{p_{V12}^2}, \zeta \triangleq p_{V22}(k_2 + \bar{\rho}), \beta \triangleq \frac{(k_2 - \bar{\rho})}{(k_2 + \bar{\rho})} \quad (49)$$

Note that (48) will be satisfied, when the following inequalities are fulfilled:

$$\begin{aligned} \gamma > 1, \chi > 0, 0 < \beta < 1, \zeta > 0, \chi - \frac{2}{\gamma} \zeta > \zeta^2 \\ -\beta(1 + \chi)\zeta + \frac{1}{4}(1 + \chi)^2 \end{aligned} \quad (50)$$

As discussed above, giving a quadruple $(\beta, \gamma, \chi, \zeta)$ with $\beta\gamma > 1$, such that (49) is satisfied, selecting the gains (46) and deriving the components of P_V (47) from (48). The proposed Lyapunov function $V_0(\xi)$ in (43) is an absolutely continuous (AC) function of $(\hat{\sigma}, v)$, and it is also positive definite and radially unbounded, i.e.

$$\lambda_{\min}\{P_V\} \xi_2^2 \leq V_0(\xi) \leq \lambda_{\max}\{P_V\} \xi_2^2 \quad (51)$$

where $\xi_2^2 = |\hat{\sigma}| + v^2$ is the Euclidean norm of ξ . Since the time derivative of $V_0(\xi)$ satisfy (44) along the trajectories of the system (40) almost everywhere, according to (50) and $|\hat{\sigma}|^{1/2} \leq \xi_2 \leq \lambda_{\min}^{-1/2}\{P_V\} V_0^{1/2}(\xi)$, it follows that,

$$\dot{V}_0(\xi) \leq -\varrho V_0^{1/2}(\xi) \quad (52)$$

where $\varrho = \frac{\lambda_{\min}^{-1/2}\{P_V\} \lambda_{\min}\{Q_V\}}{\lambda_{\max}\{P_V\}}$. Furthermore, the finite time convergence of system trajectory starting at ξ_{t_0} which equivalent

to $(\hat{\sigma}_{t_0}, v_{t_0})$ is smaller than $T(\xi_{t_0}) = \frac{2}{\varrho} V_0^{1/2}(\xi_{t_0})$. Since $\xi \rightarrow 0$ in finite time, $\hat{\sigma}$ and v will also converge to zero in finite time. Consequently, the finite time tracking of the uncertain system described in (9) can be also achieved, due to the implementation of FNTSM surface (27). This completes the proof of part1.

Proof part 2: Now, in order to prove the finite time convergence of system states (9), under proposed controller with adaptive gains (36)–(39). Note that, in (46) the gains were assumed constant, nevertheless, these gains are adaptively tune as designed in (36)–(39). Let us define the estimation error parameter of $\phi(t)$ as $\tilde{\phi} = \phi - \phi^*$, where $\dot{\tilde{\phi}} = \dot{\phi}$. Then, the time derivative of the entire Lyapunov function (42) is given by

$$\dot{V}(\xi, \phi) = \dot{V}_0(\xi) + \frac{1}{\eta_1} (\phi - \phi^*) \dot{\phi} \quad (53)$$

In view of (44) and (52), $\dot{V}(\xi, \phi)$ can be represented as

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi, \phi) &= -|\hat{\sigma}|^{-1/2} \xi^T Q_V \xi + \frac{1}{\eta_1} \tilde{\phi} \dot{\phi} \\ &\leq -\varrho V_0^{1/2} + \frac{1}{\eta_1} \tilde{\phi} \dot{\phi} + \frac{\Omega_1}{\sqrt{2\eta_1}} |\tilde{\phi}| - \frac{\Omega_1}{\sqrt{2\eta_1}} |\tilde{\phi}| \end{aligned} \quad (54)$$

■

Taking into account the Jensen's inequality (Hardy, Littlewood, & Polya, 1951): $(|a|^p + |b|^p)^{1/p} \leq |a| + |b|$, with $p = 2 > 1$, then

$$\left(\left(V_0^{1/2} \right)^2 + \left(|\tilde{\phi}| \right)^2 \right)^{1/2} = (V_0 + |\tilde{\phi}|^2)^{1/2} \leq V_0^{1/2} + |\tilde{\phi}| \quad (55)$$

From (55) and in view of entire Lyapunov function (42), it can derive

$$-\varrho V_0^{1/2} - \frac{\Omega_1}{\sqrt{2\eta_1}} |\tilde{\phi}| \leq -\tilde{\varrho} (V(\xi, \phi))^{1/2}$$

where $\tilde{\varrho} = \min(\varrho, \Omega_1)$. Under the assumption that the adaptive gains are bounded (Remark 9) and $\phi(t) - \phi^* < 0, \forall t \geq 0$, $\dot{V}(\xi, \phi)$ can be rewritten as follows:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi, \phi) &\leq -\tilde{\varrho} (V(\xi, \phi))^{1/2} + \frac{1}{\eta_1} \tilde{\phi} \dot{\phi} + \frac{\Omega_1}{\sqrt{2\eta_1}} |\tilde{\phi}| \\ &\leq -\tilde{\varrho} (V(\xi, \phi))^{1/2} - |\tilde{\phi}| \left(\frac{1}{\eta_1} \dot{\phi} - \frac{\Omega_1}{\sqrt{2\eta_1}} \right) \end{aligned} \quad (56)$$

Therefore, when $|\hat{\sigma}| > \mu_1$ (i.e. $|\hat{\sigma}| > \mu_{\hat{\sigma}}$), according to (37) $\dot{\phi} = \sqrt{\eta_1/2\Omega}$, (56) becomes:

$$\dot{V}(\xi, \phi) \leq -\tilde{\varrho} (V(\xi, \phi))^{1/2} \quad (57)$$

It is worth noting that, due to the finite time convergence of $\phi(t)$, and with adaptive ST gains (36)–(39), when (46) is fulfilled in finite time, these gains guarantee a real SOSM, such that from the initial condition $|\hat{\sigma}(t_0)| \geq \mu_{\hat{\sigma}}$ the sliding variable $\hat{\sigma}$ and its derivative $\dot{\hat{\sigma}}$ are reached the domain $D_{\hat{\sigma}} =$

$\left\{ \hat{\sigma}, \dot{\hat{\sigma}} : |\hat{\sigma}| \leq \mu_1, |\dot{\hat{\sigma}}| \leq \mu_2, \mu_1 > \mu_{\hat{\sigma}} > 0, \mu_2 > 0 \right\}$ in finite time, which can be estimated by integrating (57),

$$t_r = \frac{2}{\tilde{Q}} V^{\frac{1}{2}}(t_0) \quad (58)$$

Then, the stabilisation of system states (40) in finite time with adaptive controller gains is ensured. On the other hand, it's noteworthy that in the presence of noisy measurements (which effect also the sliding variable), since the selection of sliding gains doesn't depend to the magnitude of noise (Angulo et al., 2012), and under the homogenous ST controller (which use only the noisy measurement of sliding manifold $\hat{\sigma}$ and doesn't need its derivative $\dot{\hat{\sigma}}$) with adaptive gains (36)–(39), the stabilisation in finite time of the system (40) is guaranteed and a real SOSM is also attained, where the inequalities $|\hat{\sigma}| < \tilde{\mu}_1 \tilde{\delta}$ and $|\dot{\hat{\sigma}}| < \tilde{\mu}_2 \tilde{\delta}^{1/2}$ ($\tilde{\delta}$ is the maximal magnitude of measurable noise) are established with some positive constants $\tilde{\mu}_i$, ($i = 1, 2$), this corresponds to the best possible sliding accuracy can be achieved by ST controller in the presence of measurement noise.

To the end of the convergence proof, under the proposed AST-SMC controller (30)–(33) with adaptive gains (36)–(39) and based on the information provided by F-TOSMLO, the finite time convergence of all system trajectories in (9), with any initial conditions is achieved despite any bounded uncertainty. This completes the proof.

Since robotic manipulators have attracted a great attention in industrial environments and system automation, finite time stability, tracking accuracy and robustness performances are among the main aims in controlling of robotic manipulators, also the information about all system states are generally not available. The feasibility and efficiency of proposed controller observer for tracking control of robot manipulator in presence of uncertainties will be verified in the next section.

Simulation example

In order to prove the effectiveness of proposed AST-SMC controller-observer, its overall scheme will be applied for trajectory tracking control of two-link robot manipulator with disturbances. The dynamic manipulator equation is given as follows:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \Gamma + D \quad (59)$$

where

$$M(q) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2) \\ m_2 l_1 l_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix},$$

$$C(q, \dot{q}) = m_2 l_1 l_2 (c_1 s_2 - s_1 c_2) \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_2 \\ -\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} -(m_1 + m_2)l_1 g s_1 \\ -m_2 l_2 g s_2 \end{bmatrix}$$

$q = [q_1, q_2]^T$ are the generalised coordinates, $M(q)$ is symmetric, positive-definite inertia matrix, $C(q, \dot{q})$ is centripetal Coriolis matrix, $G(q)$ is gravitational vector, $\Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2]^T$ is the joint torque input vector, and D represents the sum of uncertainties and disturbances vector. $m_1 = m_2 = 1(\text{kg})$ are

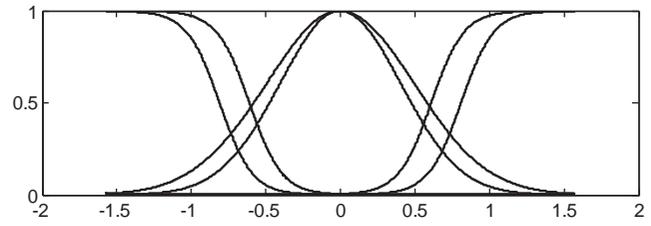


Figure 1. Interval type-2 antecedent membership functions of $x_i(t)$, $i = 1, 3$.

link masses, $l_1 = l_2 = 1(\text{m})$ are link lengths, acceleration due to the gravity $g = 9.8(\text{m/s}^2)$, $s_i = \sin(q_i)$, $c_i = \cos(q_i)$, $i = 1, 2$, let's define the system state vector $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, $x_1 = q_1$, $x_2 = \dot{q}_1$, $x_3 = q_2$, and $x_4 = \dot{q}_2$, the dynamic equation in (59) can be represented by the following state space:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_1(x) + g_{11}(x)\Gamma_1 + g_{12}(x)\Gamma_2 + D_1 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + g_{21}(x)\Gamma_1 + g_{22}(x)\Gamma_2 + D_2 \end{cases} \quad (60)$$

where all functions $f_i(x)$, $i = 1, 2$, $g_{11}(x)$, $g_{12}(x)$, $g_{21}(x)$, and $g_{22}(x)$ are presented thoroughly in Tseng et al. (2001). The measurable angular positions x_1 and x_3 are assumed to be constrained within $[-\pi/2, \pi/2]$. Let's define $X_1 = [x_1, x_3]^T$, $X_2 = [x_2, x_4]^T$ and $X = [X_1, X_2]^T$, then the original system (60) can be represented by IT-2 T-S fuzzy nominal model given by nine fuzzy rules, which have the following form:

Rule i : if x_1 is about p_1^i and x_3 is about p_3^i , then

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2, \\ \dot{X}_2 = A_i X + B_i \Gamma \end{cases}$$

The parameters of A_i and B_i , ($i = 1 : 9$) are obtained by offline computing in Tseng et al. (2001), p_1^i and p_3^i are taken around $[-\pi/2, 0, \pi/2]$. For all the rules, three interval type-2 Gaussian Membership functions depending to $x_i(t)$, ($i = 1, 3$) are defined to build the nominal model as shown in Figure 1. From (60) we have two second order subsystems, then assume that the sum of modelling uncertainties D_u and disturbances D_d is given by $D = [D_1, D_2]$ additive to the nominal model such as

$$D = D_u + D_d, \text{ where } D_u = \begin{bmatrix} 5 \sin(x_1) + 0.2 \sin(x_2) \\ 5 \sin(x_3) + 0.2 \sin(x_4) \end{bmatrix} \text{ and}$$

$$D_d = \begin{bmatrix} 0.5 \sin(2t) + 0.5 \cos(3t) \\ 0.5 \sin(2t) + 0.5 \cos(3t) \end{bmatrix}$$

The objective is to achieve finite time convergence of the system states $x(t)$ to their references $x_d(t)$, in which the dynamic of desired trajectory is proposed as in Tseng et al. (2001):

$$\dot{x}_d(t) = A_d x_d(t) + r(t) \quad (61)$$

with $A_d = [0100; -6 - 500; 0001; 00 - 6 - 5]$ and $r(t) = [0, 8 \sin(t), 0, 8 \cos(t)]$. The initial condition are considered as $x(0) = [\pi/30, 0, \pi/30, 0]$.

To verify the effectiveness of the proposed AST-SMC integrated with F-TOSMLO based STA, the simulations are split into two parts. Firstly, we compare the fuzzy second order sliding mode observer F-SOSMO designed in (11) with fuzzy

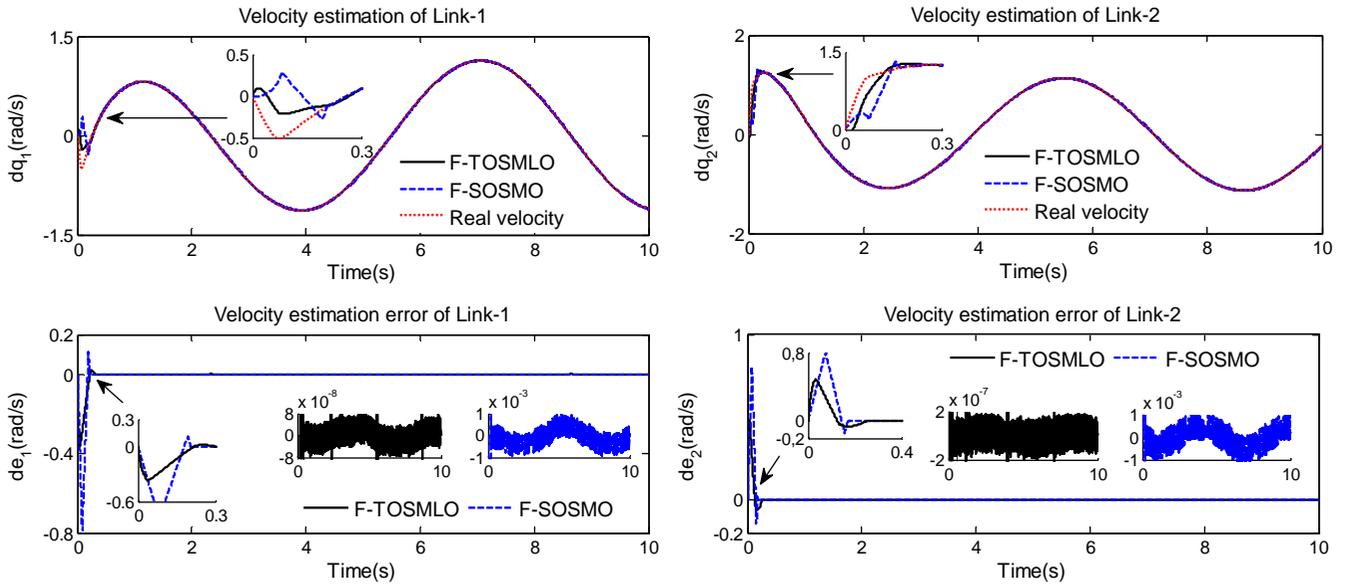


Figure 2. Comparison of velocities estimation for F-SOSMO and F-TOSMLO.

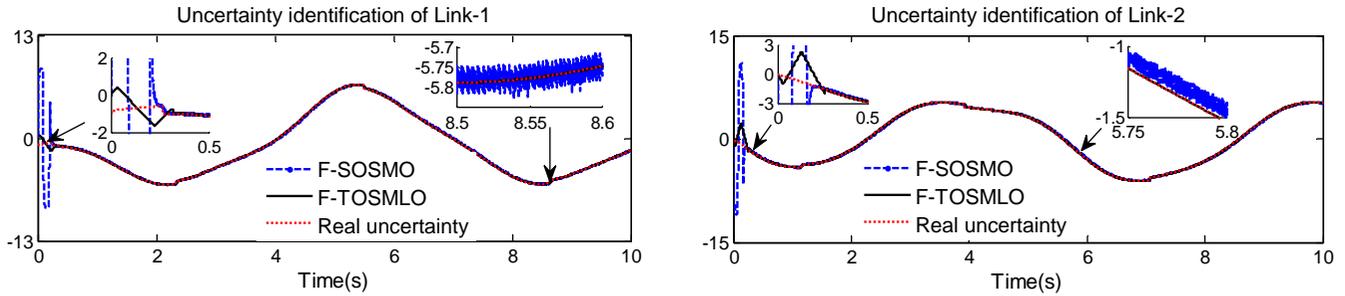


Figure 3. Comparison of uncertainties identification for F-SOSMO and F-TOSMLO.

third order sliding mode linear observer F-TOSMLO given by (21), in terms of both velocity estimation and exact reconstruction of the uncertainties. Secondly, based on F-TOSMLO, the controller performances obtained by applying the proposed AST-SMC are compared with those obtained by using quasi-continuous second order sliding mode controller QC2SMC (Levant, 2005b), and adaptive super twisting controller proposed in Goel and Swarup (2017).

For the first part of simulation, the gains of F-SOSMO are selected as Remark 3, where $\alpha_1 = 1.5(F^+)^{1/2}$, $\alpha_0 = 1.1F^+$, whereas for F-TOSMLO $\alpha_2 = 1.9(F^+)^{1/3}$, ($F^+ > 0$), and the linear gains are set through computer simulation as $\beta_1 = 45$ and $\beta_2 = 35$. For reconstruction of the uncertainty in F-SOSMO, a low pass filter is used with sampling step $\Lambda = 10^{-4}$ s and $\tau = \Lambda^{1/2}$ s. For both observers, the comparison between the velocities estimation are shown in Figures 2 and 3 depicts the uncertainties identification.

From simulation results, it is clear that a finite time estimation of velocities and uncertainties is achieved for both observers. Despite that the convergence time of the F-SOSMO is less than that of the F-TOSMLO, the estimation accuracy achieved by F-TOSMLO and F-SOSMO corresponds to the estimation accuracy of high order robust exact differentiator based STA in the absence of noises, i.e. with respect to the velocity estimation, the precision order is $O(\Lambda^2)$ and $O(\Lambda^1)$ for F-TOSMLO and F-SOSMO, respectively. As shown in Figure 2,

with proposed F-TOSMLO, the velocity estimation errors $|\hat{e}_1| \leq 8 \times (10^{-4})^2$ and $|\hat{e}_2| \leq 20 \times (10^{-4})^2$ are reached in finite time of $t \cong 0.3$ s and $t \cong 0.26$ s for joint-1 and joint-2, respectively, whereas with F-SOSMO, $|\hat{e}_1| \leq 10 \times (10^{-4})^1$ and $|\hat{e}_2| \leq 10 \times (10^{-4})^1$ are reached in $t \cong 0.22$ s and $t \cong 0.17$ s, for joint-1 and joint-2, respectively. Also, the uncertainties reconstruction provided by the F-TOSMLO is better than that of F-SOSMO, where a time delay introduced by low pass filter coupled with switching term produces the chattering phenomenon as illustrated in Figure 3. Moreover, in spite of the estimation rapidity of F-SOSMO, this latter produces a large overshoot in both velocities estimation and uncertainties identification, which is undesirable for tracking accuracy of manipulator. These results confirm the effectiveness and the satisfactory performances provided by F-TOSMLO. Thus, this latter will be used in proposed AST-SMC controller scheme for velocity estimation and uncertainty identification.

For the second part of simulation, two controllers will be applied to investigate the performances of proposed AST-SMC, the first one is quasi-continuous second order sliding mode controller QC2SMC and the second is adaptive super twisting controller proposed in Goel and Swarup (2017), both controllers will be integrated with F-TOSMLO.

According to the dynamic of tracking error (2), it is clear that the system (9) has the relative degree two with respect to the tracking error $e = x_1(t) - x_d(t)$. Then, the QC2SMC can be

simply designed as follows:

$$\begin{cases} u_{QC2SMC} = -G_0(x)^{-1}(F_0(x) + u_{QC2}) + u_c, \\ u_{QC2} = -k_{QC2} \left(\frac{\dot{\hat{e}} + |e|^{1/2} \text{sign}(e)}{|\dot{\hat{e}}| + |e|^{1/2}} \right) \end{cases} \quad (62)$$

where the compensated uncertainties term u_c is defined as in (32), u_{QC2} is the quasi-continuous second order sliding mode term with sliding gain k_{QC2} , ($k_{QC2} > 0$). Note that, by an appropriate selection of k_{QC2} , the system under QC2SMC is finite time, asymptotically stable despite of uncertainties (Levant, 2005b). Furthermore, since the chattering is not totally attenuated in QC2SMC, a small positive scalar ϖ is added to the u_{QC2} term as follows:

$$u_{QC2} = -k_{QC2} \left(\frac{\dot{\hat{e}} + |e|^{1/2} \text{sign}(e)}{|\dot{\hat{e}}| + |e|^{1/2} + \varpi} \right) \quad (63)$$

Remark 11: It is worth noting that a trade-off between chattering and the robustness propriety may be occurred, where a large value of ϖ guarantees high chattering attenuation but increases the robustness, which may affect the tracking accuracy and vice versa. Then the sliding gain k_{QC2} and the smoothed parameter ϖ must be selected carefully in QC2SMC.

Now, the adaptive ST controller (ASTC) proposed in Goel and Swarup (2017) is designed based on the so called continuous terminal sliding mode (CTSM) which introduced firstly by (Fridman et al., 2015), the main advantages of this latter (i.e. CTSM) is to generate continuous control with finite time stabilisation and to establish third order SM by keeping SOSM constraint, i.e. provide a precision of third order with respect to the sampling time, this aim is not mentioned in the work of (Goel & Swarup, 2017), the ASTC is designed based on homogeneous sliding manifold $\hat{\sigma}_{ASTC} = \dot{\hat{e}} + k_3 \hat{e}^{2/3}$ and the global control law integrated with F-TOSMLO is expressed as follows:

$$u_{ASTC} = -G_0(x)^{-1}(F_0(x) + u_{CTSM}) + u_c \quad (64)$$

$$\begin{cases} u_{CTSM} = -k_1 |\hat{\sigma}_{ASTC}|^{1/2} \text{sign}(\hat{\sigma}_{ASTC}) + v_0, \\ \dot{v}_0 = -k_2 \text{sign}(\hat{\sigma}_{ASTC}) \end{cases} \quad (65)$$

where the controller gains k_1 and k_2 are adjust online with the same adaptive scheme proposed in this paper which is defined in (36)–(39).

The simulations of proposed AST-SMC, QC2SMC and ASTC (Goel & Swarup, 2017) based on F-TOSMLO are carried out in the MATLAB Simulink/ Software using ODE 4 solver with step size fixed to $\Lambda = 10^{-3}$ s. Two cases are considered in this simulation part: firstly, with using the compensated uncertainties term u_c , and in the second case, only the nominal control is used (without compensated uncertainties term, i.e. $u_c = 0$). The tuning parameters for all controllers are given in Table 1.

Remark 12: The initial gains K_1 and K_2 for ASTC (64)–(65) are selected as discussed in Goel and Swarup (2017); where $K_1 = 100K_2$. It is worth noting that with comparison to the proposed AST-SMC, the initial gains values selected for ASTC

Table 1. Controller parameters.

Controller	Tuning parameters
AST-SMC	$K_1 = 18; K_2 = 14.4; p_\sigma/q_\sigma = 7/5; \lambda_1 = \lambda_2 = 0.2; \eta = 2; \Omega = 1; \varepsilon = 0.001$
QC2SMC	$k_{QC2} = 10; \varpi = 0.004$
ASTC (Goel & Swarup, 2017)	$K_1 = 12; K_2 = 0.12; k_3 = 3; \eta = 2; \Omega = 1; \varepsilon = 0.001$

(Goel & Swarup, 2017) is very small, this for the reason that, when the initial gains are increased, chattering is highly attenuated and the control signal becomes almost continuous, but the convergent rate and tracking accuracy are highly worsened and the ASTC may not able to guarantee the convergence of system states to their references.

Remark 13: For proposed AST-SMC, according to the controllers gains structure expressed in (36) and (46), and after several simulation testes, it has been remarked that the combination $K_1 = 1.5K$ and $K_2 = 1.1K$ ($K > 0$) allows for an optimal results in terms of tracking and control performances. Also, it is remarked that large initial values K_1 and K_2 leads to fast convergence of system states, in contrast the control efforts are increased. Therefore, the initial adaptive gains values are selected appropriately after simulation testes in order to stave off the trade-off between the control efforts and tracking rapidity.

The time histories of the position states (q_1, q_2) and the velocity states (\dot{q}_1, \dot{q}_2) are presented in Figures 4 and 5, respectively, which obviously demonstrate a good tracking performances of all the states to their desired trajectories are provided by all controllers. From Figure 6, which shows the tracking accuracy of the system states, it is clear that after finite time convergence, a high tracking accuracy is attained by all controllers. Noting that, like most second order sliding mode algorithms SOSMs, the provided precision corresponds generally to a second order sliding mode with respect to the sampling time (Levant, 1993). Therefore, recalling that the simulation step is set to $\Lambda = 10^{-3}$ s, then with proposed AST-SMC, the precision given by $|e_1| \leq 0.04 \times (10^{-3})^2$, $|\dot{e}_1| \leq 0.04 \times (10^{-3})^1$, and $|e_2| \leq 0.09 \times (10^{-3})^2$, $|\dot{e}_2| \leq 0.09 \times (10^{-3})^1$, for joint-1 and joint-2, respectively. The proposed QC2SMC provides a precision of $|e_1| \leq 0.04 \times (10^{-3})^2$, $|\dot{e}_1| \leq 0.1 \times (10^{-3})^1$ and $|e_2| \leq 0.1 \times (10^{-3})^2$, $|\dot{e}_2| \leq 0.3 \times (10^{-3})^1$ for joint-1 and joint-2, respectively. Whereas, the precision attained with ASTC (Goel & Swarup, 2017) is given by $|e_1| \leq 0.02 \times (10^{-3})^2$, $|\dot{e}_1| \leq 0.02 \times (10^{-3})^1$, and $|e_2| \leq 0.03 \times (10^{-3})^2$, $|\dot{e}_2| \leq 0.05 \times (10^{-3})^1$, for joint-1 and joint-2, respectively.

It's important noting that, the main aim of u_{CTSM} (65) used in ASTC (64) is attained successfully, i.e. a third order sliding accuracy with respect to the sampling time is achieved, which can be expressed as follows: $|e_1| \leq 20 \times (10^{-3})^3$, $|\dot{e}_1| \leq 20 \times (10^{-3})^2$, and $|e_2| \leq 30 \times (10^{-3})^3$, $|\dot{e}_2| \leq 50 \times (10^{-3})^2$, for joint-1 and joint-2, respectively. Unfortunately this aim is not mentioned or tested in the work of (Goel & Swarup, 2017). On the other hand, while the precision of STA and classical QC2SMC corresponds generally to a second order sliding mode like most SOSM algorithms in comparison with the controller (Goel & Swarup,

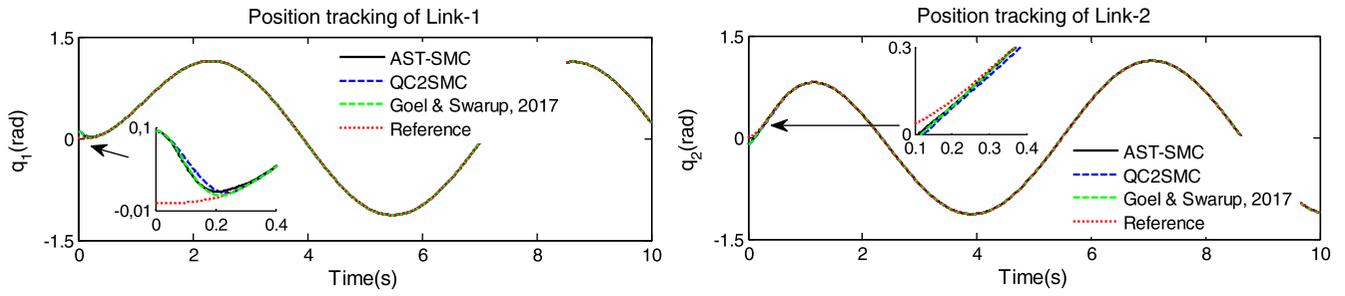


Figure 4. Position tracking performance of (q_1, q_2) .

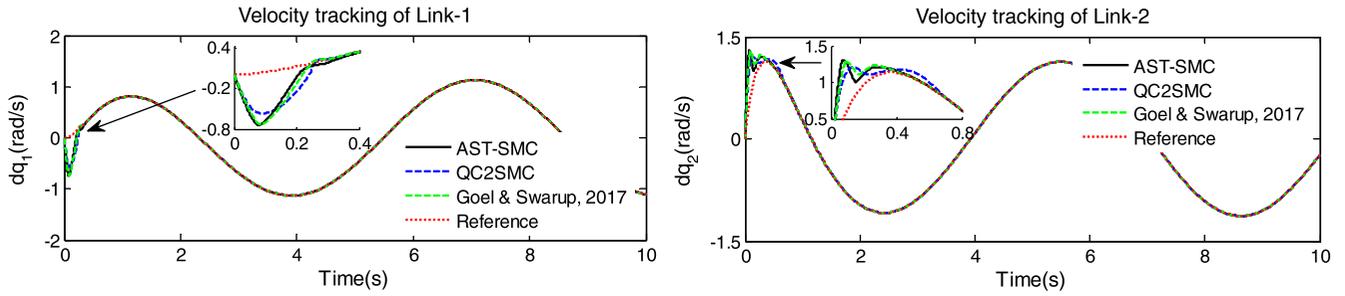


Figure 5. Velocity tracking performance of (\dot{q}_1, \dot{q}_2) .

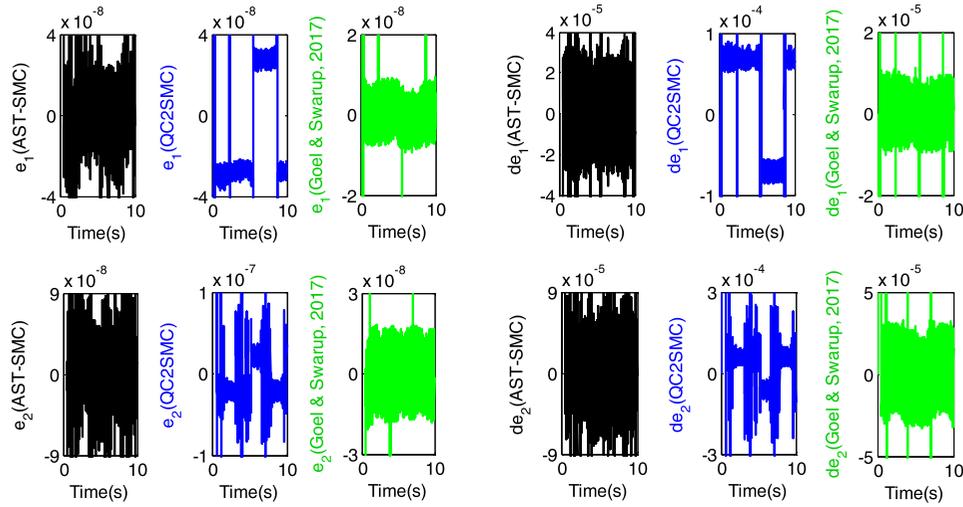


Figure 6. Precision of the tracking errors (e_i, \dot{e}_i) of link i , $(i = 1, 2)$.

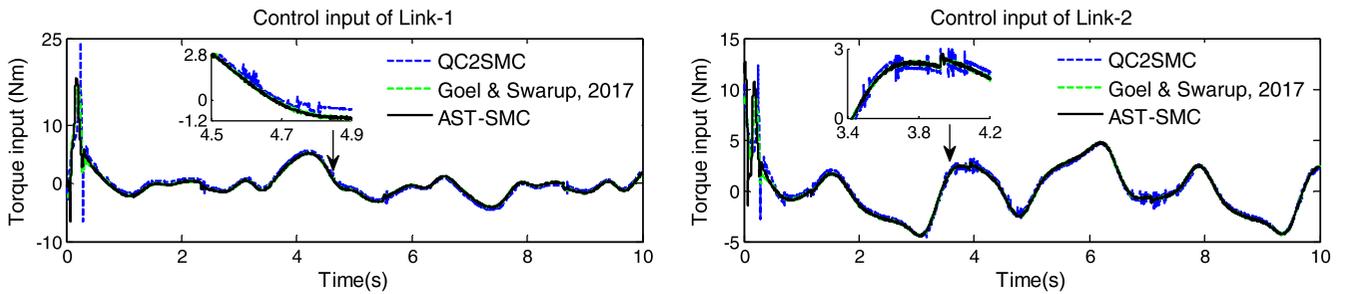


Figure 7. Control efforts of AST-SMC, QC2SMC and ASTC (Goel & Swarup, 2017).

2017), the high precision achieved by the proposed AST-SMC and QC2SMC can be proved temporarily by using the compensating control u_c , which guarantees the best improvement in robustness and accuracy performances, then to verify the legitimate of this conjecture, a second simulation part (with $u_c = 0$) will be presented. Figure 7 displays the control inputs Γ_1 and Γ_2

provided by all controllers at joint 1 and joint 2, respectively. It's obvious that, the main feature of second order sliding mode in HOSM is achieved, where a smooth control signals with significant attenuation of chattering effect are effectively attained by AST-SMC, QC2SMC and ASTC (Goel & Swarup, 2017). However, it worth noting that, compared to the ST controller when

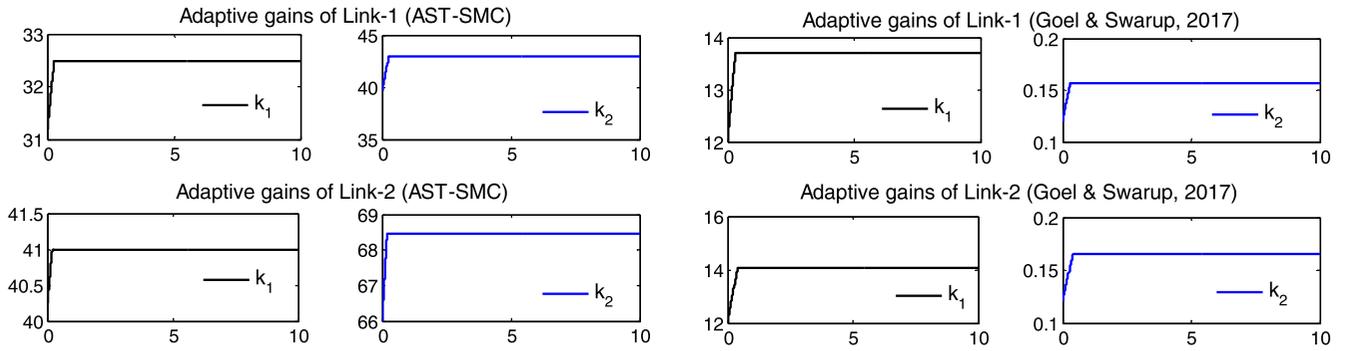


Figure 8. Time varying adaptive gains k_1 and k_2 .

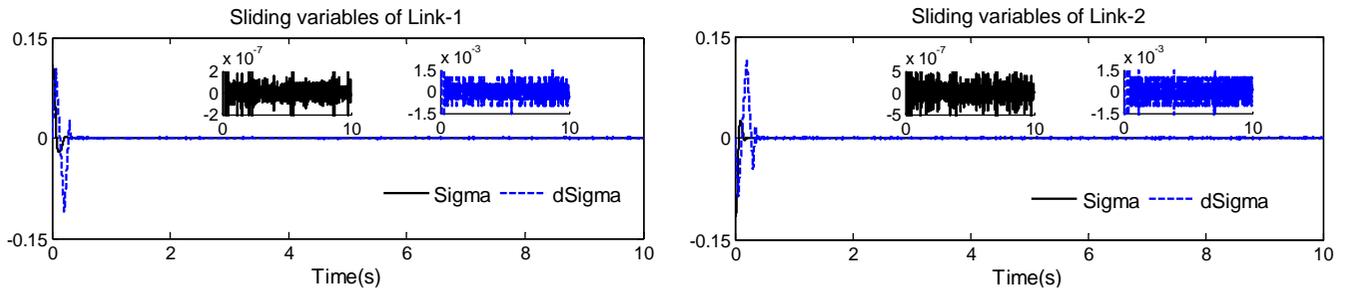


Figure 9. Time histories of sliding variables $\hat{\sigma}$ and $\hat{\dot{\sigma}}$.

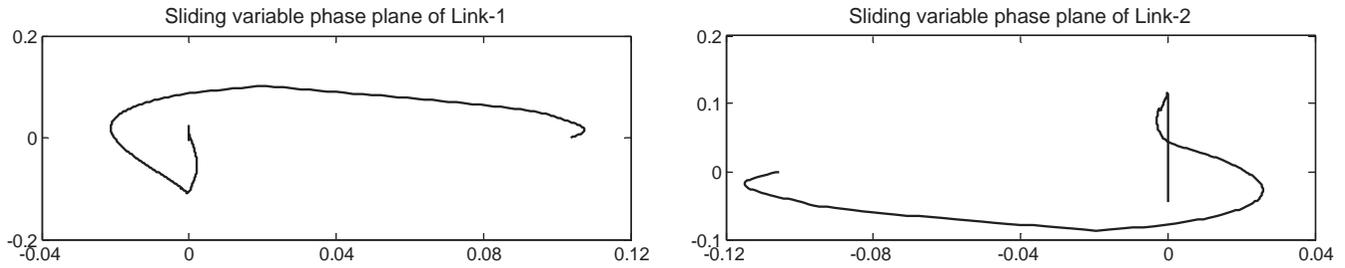


Figure 10. Phase plane plot of sliding surface $(\hat{\sigma}, \hat{\dot{\sigma}})$.

the real SOSM is established in classical quasi continuous SMC, the chattering effect may be occurred in the control signal, then it is evident observed that both AST-SMC and ASTC (Goel & Swarup, 2017) provide a smooth control than the QC2SMC.

The time histories of adaptive gains k_1 and k_2 of proposed AST-SMC and ASTC (Goel & Swarup, 2017) are presented in Figure 8, where the proposed adaptive gains (36)–(39) are convergent and bounded in both controllers. Moreover, according to Figures 9 and 10, under proposed AST-SMC, the phase plane trajectory of FNTSM surface and its derivative $(\hat{\sigma}, \hat{\dot{\sigma}})$ have a classical typical behaviour of second order sliding mode SOSM, and exhibits the finite time stabilisation of the real second order sliding mode $\hat{\sigma} = \hat{\dot{\sigma}} \equiv 0$, with SOSM accuracy i.e. $|\hat{\sigma}| \leq 0.2 \times (10^{-3})^2$ and $|\hat{\dot{\sigma}}| \leq 1.5 \times (10^{-3})^1$ reach in finite time for joint-1, and $|\hat{\sigma}| \leq 0.5 \times (10^{-3})^2$ and $|\hat{\dot{\sigma}}| \leq 1.5 \times (10^{-3})^1$ for joint-2. Note that the derivative of sliding function $\hat{\dot{\sigma}}$ is obtained by using a first order exact differentiation FOED (called ST differentiator) (Levant, 2003).

Now, after presenting the simulation results of all controllers with using compensated uncertainties term u_c , the high performances of proposed AST-SMC will be investigated by

comparing proposed QC2SMC, AST-SMC and ASTC (Goel & Swarup, 2017) but without compensating control (i.e. $u_c = 0$). According to the Figures 11 and 12, it's clear that the controllers provide also a good tracking performances of all states to their desired trajectories with finite time and despite uncertainties. However, from the precision of tracking errors of the controllers without compensating control presented in Figure 13, obviously, with QC2SMC, the precision given by $|e_1| \leq 40 \times (10^{-3})^2$, $|\dot{e}_1| \leq 0.2 \times (10^{-3})^1$ and $|e_2| \leq 30 \times (10^{-3})^2$, $|\dot{e}_2| \leq 0.2 \times (10^{-3})^1$ for joint-1 and joint-2, respectively, which correspond to the second order sliding mode. The tracking accuracy provided by ASTC (Goel & Swarup, 2017) is given by $|e_1| \leq 0.8 \times (10^{-3})^1$, $|\dot{e}_1| \leq 5 \times (10^{-3})^1$ and $|e_2| \leq 1 \times (10^{-3})^1$, $|\dot{e}_2| \leq 2 \times (10^{-3})^1$, it's clearly remarked that the tracking accuracy is badly worsened. Whereas, the AST-SMC provides a precision of $|e_1| \leq 0.04 \times (10^{-3})^2$, $|\dot{e}_1| \leq 0.04 \times (10^{-3})^1$, and $|e_2| \leq 0.09 \times (10^{-3})^2$, $|\dot{e}_2| \leq 0.09 \times (10^{-3})^1$, for joint-1 and joint-2, respectively, which implies that the accuracy achieved by AST-SMC is higher than of QC2SMC and ASTC (Goel & Swarup, 2017). Then, it can prove the high precision achieved by the proposed QC2SMC in the first simulation

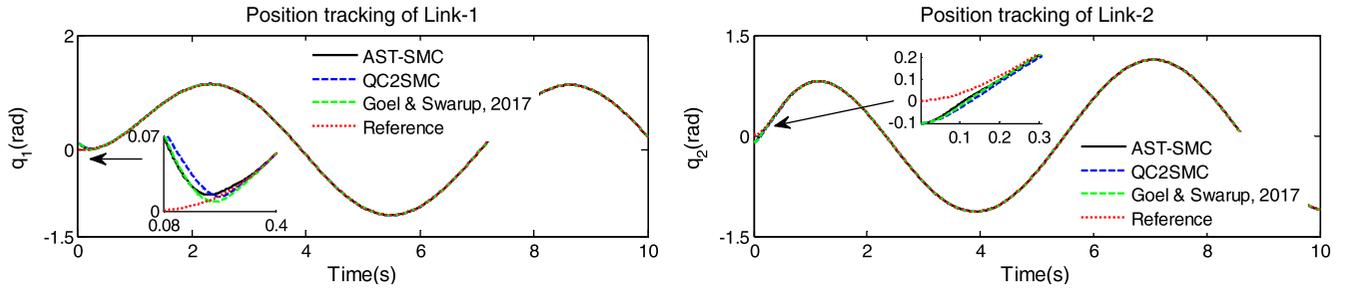


Figure 11. Position tracking performance of (q_1, q_2) ($u_c = 0$).

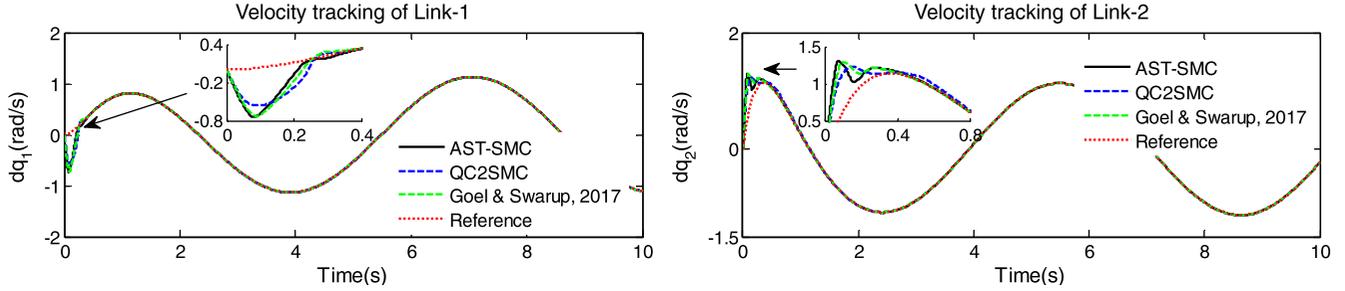


Figure 12. Velocity tracking performance of (\dot{q}_1, \dot{q}_2) ($u_c = 0$).

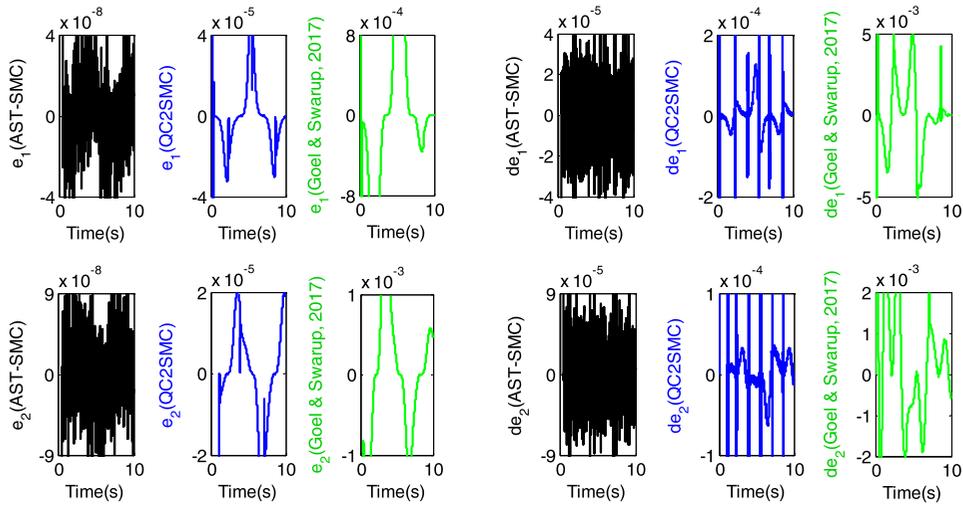


Figure 13. Precision of the tracking errors (e_i, \dot{e}_i) of link i , $(i = 1, 2)$ ($u_c = 0$).

part, to the use of compensating control term u_c , which guarantees the best improvement in robustness and accuracy performances. However, the proposed AST-SMC keeps the same tracking precision achieved in the both cases; with and without the compensated uncertainties term u_c , this demonstrates the accuracy and robustness performances of proposed controller scheme. Furthermore, it is worth noting from Figure 14, that the proposed controller AST-SMC and the ASTC (Goel & Swarup, 2017) generate also a smooth applied control input comparing to QC2SMC.

According to the time histories of adaptive gains k_1 and k_2 presented in Figure 15 for proposed AST-SMC and ASTC (Goel & Swarup, 2017) without compensating term u_c , the adaptive scheme works optimally and appropriately for the AST-SMC, where the adaptive gains are also convergent and bounded. On the other hand, for ASTC (Goel & Swarup, 2017) the adaptive

gains still increasing during the adaption process, which affect mainly the tracking accuracy and the robustness propriety. Then, it can be concluded that, with absence of uncertainties compensation ($u_c = 0$), the AST-SMC with proposed adaptive combination can provide a superior performances in term of tracking accuracy and robustness with comparison to ASTC (Goel & Swarup, 2017). Moreover, as can be seen from Figures 16 and 17, under proposed AST-SMC, the real SOSM $\hat{\sigma} = \hat{\sigma} \equiv 0$ is also established in finite time with the same precision attained in the first case (with compensating term u_c). Noting that, the finite time stabilisation of FNTSM manifold $\hat{\sigma}$ implies that the system states converge also in finite time to their references.

To this end, for evaluating the performances of the proposed controllers AST-SMC and QC2SMC with ASTC (Goel & Swarup, 2017), we have reported some performance indicators

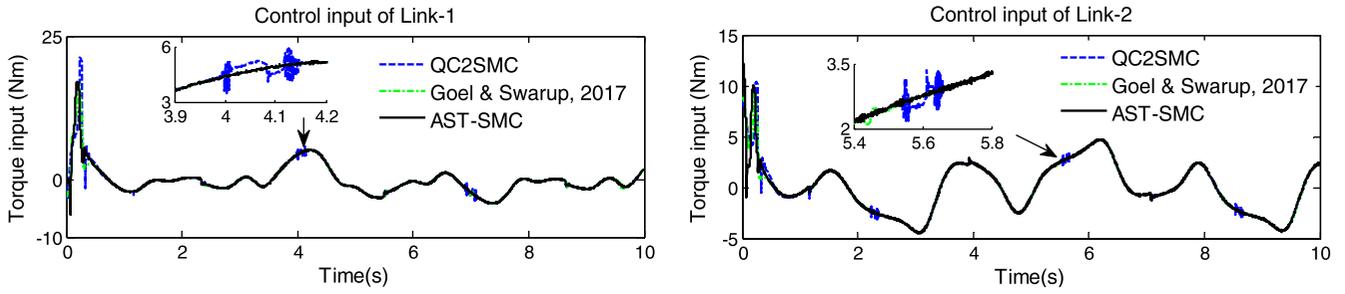


Figure 14. Control efforts of proposed controllers without compensating control ($u_c = 0$).

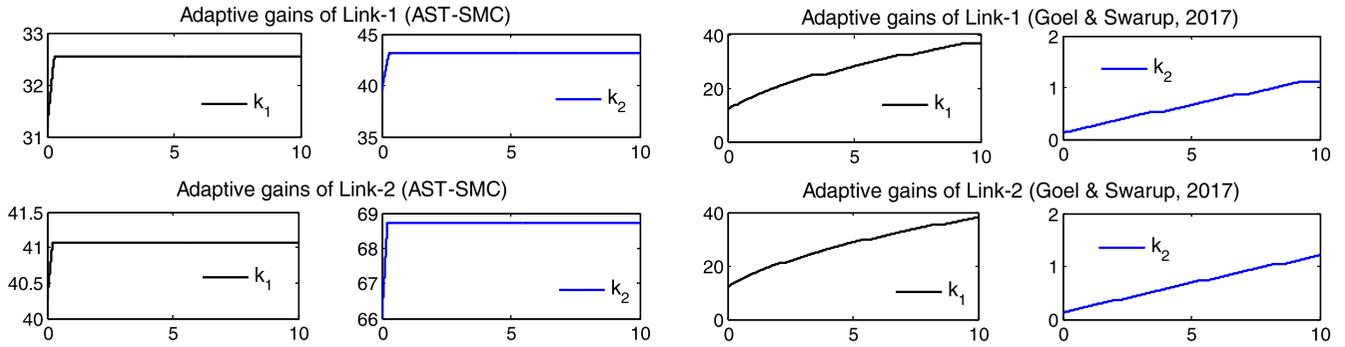


Figure 15. Time varying adaptive gains k_1 and k_2 .

for the period of $t_f = 10$ s with a sampling time $\Lambda = 10^{-3}$ s; the integral of absolute error criteria ($IAE = \int_0^{t_f} |e| dt$), and the integral of squared error criteria ($ISE = \int_0^{t_f} e^2 dt$) are used as tracking performance indicators. Control total variation ($TV = \sum_{i=1}^T \dot{u}_i, T = t_f/\Lambda$), control effort indicator ($CEI = \frac{1}{\sqrt{T}} \left[\sum_{i=1}^T (u_i)^2 \right]^{1/2}$) and chattering indicator ($CI = \frac{1}{\sqrt{T}} \left[\sum_{i=1}^T (\dot{u}_i)^2 \right]^{1/2}$) are used to measure the smoothness

of control signal, stand for the control effort and quantify the chattering in the control signal, respectively.

From the numerical results presented in Table 2, while all the controllers use the same control effort approximately according to the CEI, it is also observed from the CI and TV indicators that, the AST-SMC generates a smooth control with comparison to the QC2SMC and ASTC (Goel & Swarup, 2017) in the case when the compensating term u_c is used. In the other case ($u_c = 0$), it is worth noting that, although the control input provided by ASTC (Goel & Swarup, 2017) is smoother than that generated by other controllers, the tracking accuracy is very

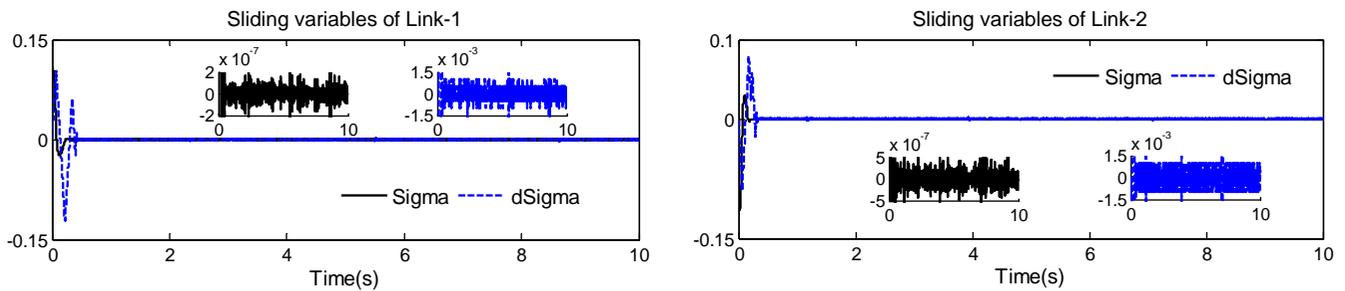


Figure 16. Time histories of sliding variables $\hat{\sigma}$ and $\hat{\dot{\sigma}}$.

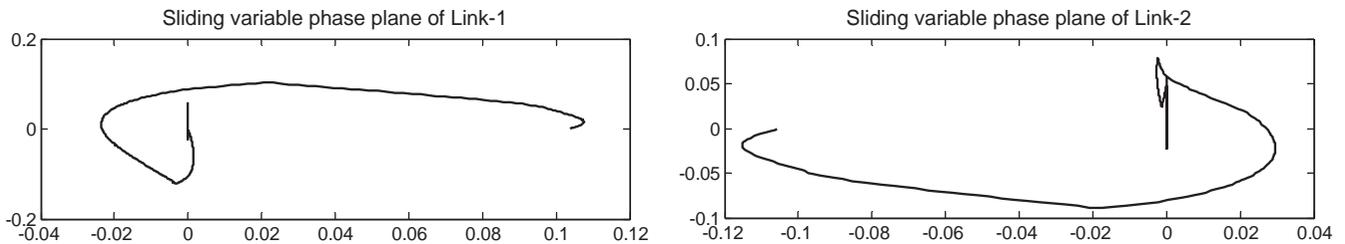
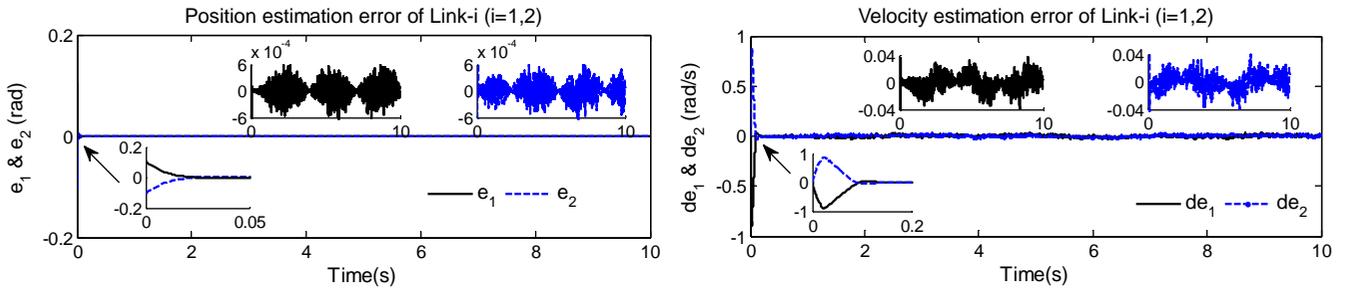


Figure 17. Phase plane plot of sliding surface $(\hat{\sigma}, \hat{\dot{\sigma}})$.

Table 2. Comparison of the controller performances.

	Controller	TV	CEI	CI	ISE ($\times 10^{-3}$)	IAE
With compensating control u_c	AST-SMC					
	Joint 1	7.30	2.51	0.073	0.85	0.011
	Joint 2	6.14	2.57	0.061	0.83	0.013
	QC2SMC					
	Joint 1	14.36	2.54	0.14	0.96	0.012
	Joint 2	10.86	2.43	0.10	1.12	0.019
Without compensating control ($u_c = 0$)	Goel and Swarup (2017)					
	Joint 1	9.67	2.53	0.096	0.87	0.011
	Joint 2	6.24	2.52	0.062	0.94	0.014
	AST-SMC					
	Joint 1	7.04	2.50	0.070	0.85	0.011
	Joint 2	5.76	2.56	0.056	0.83	0.013
	QC2SMC					
	Joint 1	11.95	2.47	0.12	0.97	0.013
	Joint 2	6.53	2.49	0.06	1.20	0.022
	Goel and Swarup (2017)					
	Joint 1	3.67	2.51	0.036	0.90	0.019
	Joint 2	2.26	2.50	0.022	0.95	0.020

**Figure 18.** Estimation performances of F-TOSMLO (with noisy measurements).

deteriorated according to IAE and ISE criteria's especially with comparison to the proposed AST-SMC, and as aforementioned the aim of third order sliding mode accuracy is not achieved. Then, between the proposed AST-SMC and QC2SMC, the AST-SMC is much more preferable than the classical QC2SMC, in term of providing a smooth control signal and high tracking accuracy. Furthermore, because the finite time stability and tracking performances are among the main issue in the control of robotic manipulators, the simulation results confirm the feasibility and efficiency of proposed adaptive ST control based FNTSM in comparison with ASTC (Goel & Swarup, 2017). The offered controller observer scheme possesses the best qualities in terms of finite time convergence, high tracking precision and the chattering in the control is instead highly attenuated.

Finally, in addition of the presence of uncertainties and disturbances, the robustness of proposed AST-SMC controller-observer scheme is also proved by applying a white Gaussian noise with standard deviation $std = 10^{-3}$ to the measured states q_i , ($i = 1, 2$), the simulations are presented without using the compensating control term ($u_c = 0$) and the measured step is fixed to $\Lambda = 10^{-3}$ s.

The estimation performances of proposed F-TOSMLO are demonstrated in Figure 18, where the position estimation errors are reached in finite time with an accuracy of $|e_i| \leq 0.6 \times 10^{-3}$ for both joints ($i = 1, 2$), and despite the noisy measurement of position states the velocity estimation are also achieved in finite time with $|\dot{e}_i| \leq 0.04$ for joint- i ($i = 1, 2$), as aforementioned

and compared with the estimation precision of the F-TOSMLO (of order $O(\Lambda^2)$ with respect to the velocity estimation) in the absence of noise, it's clearly observed from Figure 18 that the achieved accuracy corresponds to the best possible accuracy can be obtained by robust exact HOSM differentiator in the presence of noise, which depends mainly to the maximum of noise magnitude i.e. for F-TOSMLO the precision order is $O(\bar{\eta})$ with respect to the position estimation and $O(\bar{\eta}^{2/3})$ with respect to the velocity estimation. As shown in Figure 19, a good tracking performances are also obtained despite uncertainties and measurement noise, where the proposed controller provides a precision of $|e_i| \leq 1 \times 10^{-3}$ and $|\dot{e}_i| \leq 0.03$ for both joints ($i = 1, 2$), which also depend to the maximum of noise magnitude.

Moreover, from Figures 20 and 21, the real SOSM $\hat{\sigma} = \hat{\sigma} \equiv 0$ (with super twisting SOSM behaviour) is also established in finite time with reasonable sliding accuracies such that $|\hat{\sigma}| \leq 5 \times 10^{-3}$ and $|\dot{\hat{\sigma}}| \leq 0.04$ for both joints, the first order exact differentiation FOED which called ST differentiator (Levant, 2003) is also used to obtain $\hat{\sigma}$ based on the noisy measurement of sliding manifold $\hat{\sigma}$ (because $\hat{\sigma}$ depends directly to the noisy measurement of position state from (27)) then the resulting sliding accuracy of $\hat{\sigma}$ corresponds to the ST differentiation precision (Levant, 1998). On the other hand, due to the finite time stabilisation of tracking errors and as shown in Figure 21, the phase plane trajectories (e_i, \dot{e}_i) $i = 1, 2$ for joint- i have a classical typical SOSM behaviours (similar to the terminal behaviour due to

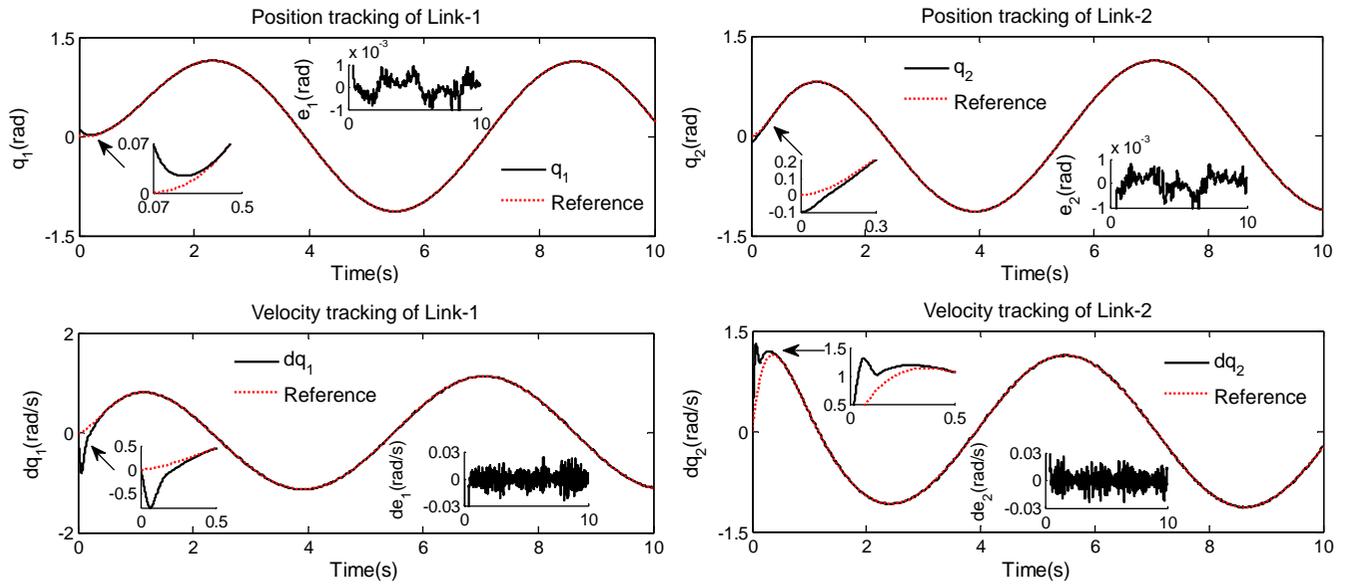


Figure 19. Tracking performances of AST-SMC (with noisy measurements).

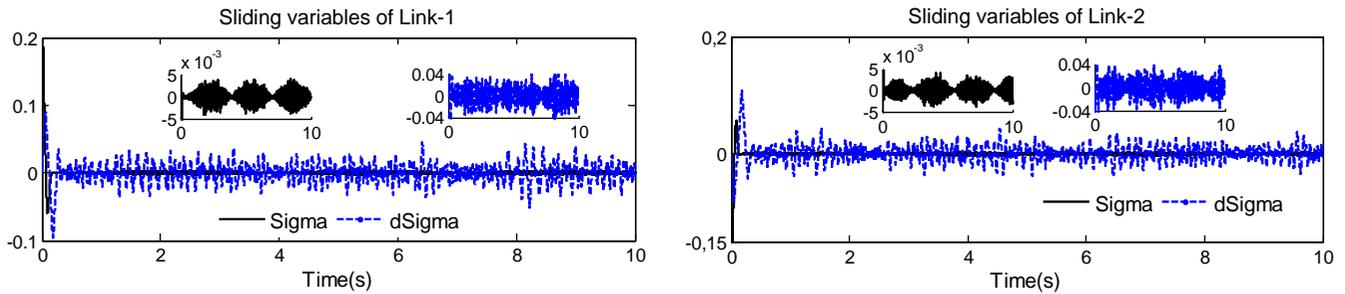


Figure 20. Time histories of sliding variables $\hat{\sigma}$ and $\hat{\dot{\sigma}}$ (with noisy measurements).

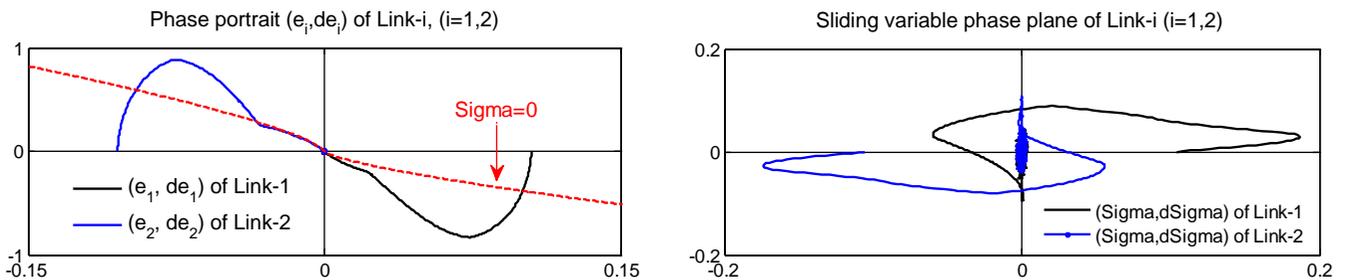


Figure 21. Phase plane plot of tracking error (e_i, \dot{e}_i) and sliding surface ($\hat{\sigma}, \hat{\dot{\sigma}}$) for Link- i ($i = 1, 2$).

the used FNTSM surface), such as the error trajectories reach the origin in finite time along with the sliding manifold $\hat{\sigma} = 0$.

It's noteworthy that, the robustness of offered AST-SMC scheme is also proved and preserved when the compensating control u_c is implemented with presence of measurement noise, where the same tracking accuracy is provided for both cases ($u_c = 0$ and $u_c \neq 0$) from the obtained IAE and ISE of tracking errors $IAE(e_i) = 0.015$, and $ISE(e_i) = 0.8 \times 10^{-3}$ for joint- i ($i = 1, 2$). Therefore, it's concluded that under the proposed AST-SMC controller observer scheme, the stability and robustness properties with a satisfactory tracking performances are also proved in the presence of measurement noise in addition of uncertainties and disturbances.

Conclusion

An adaptive super twisting sliding mode controller AST-SMC with finite time convergent based on HOSM observer has been successfully applied for tracking control of IT2 T-S fuzzy model of MIMO uncertain nonlinear system. The proposed observer can estimate both velocity and uncertainties in finite time. The AST-SMC is presented as a combination of STA and terminal sliding mode TSM, where the controller gains are estimated by using an adaptive scheme, which is allowed to avoid both the overestimation of gains values and the prior knowledge of uncertainties boundaries. Using the information provided by HOSM observer, the proposed controller ensured a

finite-time convergence high tracking accuracy, robustness and smoothness of control signal. Based observer, the simulation results obtained by applying the proposed AST-SMC, QC2SMC, and the ASTC (Goel & Swarup, 2017) to a two-link robot, demonstrate the satisfactory performances provided by the proposed AST-SMC.

Due to the favourable tracking and control performances achieved by the proposed adaptive super twisting control based HOSM observer, the offered control scheme is appropriate for more complicated nonlinear systems especially for robotic manipulators with three-degree of freedom (3-DOF) or more in presence of uncertainties and disturbances, and under assumption that the velocity measurement is unavailable.

Disclosure statement

No potential conflict of interest was reported by the authors.

ORCID

Rim Hendel  <http://orcid.org/0000-0002-1569-3087>

References

- Abooe, A., Arefi, M. M., Sedghi, F., & Abootalebi, V. (2018). Robust nonlinear control schemes for finite-time tracking objective of a 5-DOF robotic exoskeleton. *International Journal of Control*. doi:10.1080/00207179.2018.1430379.
- Aghababa, M. P. (2015). Design of hierarchical terminal sliding mode control scheme for fractional-order systems. *IET Science, Measurement & Technology*, 9(1), 122–133.
- Al-Ghanimi, A., Zheng, J., & Man, Z. (2015). Robust and fast non-singular terminal sliding mode control for piezoelectric actuators. *IET Control Theory & Applications*, 9(18), 2678–2687.
- Al-Saggaf, U. M., Bettayeb, M., & Djennoune, S. (2017). Super-twisting algorithm-based sliding-mode observer for Synchronization of nonlinear incommensurate fractional-order chaotic systems Subject to unknown inputs. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 42(7), 3065–3075.
- Angulo, M. T., Moreno, J. A., & Fridman, L. (2012). *Optimal gain for the super-twisting differentiator in the presence of measurement noise*. Proceeding of American Control Conference (ACC). Fairmont Queen Elizabeth, Montréal. doi:10.1109/acc.2012.6314917.
- Apaza-Perez, W. A., Fridman, L., & Moreno, J. A. (2016). Higher order sliding-mode observers with scaled dissipative stabilisers. *International Journal of Control*. doi:10.1080/00207179.2016.1269951
- Ashtiani-Haghighi, D., & Mobayen, S. (2018). Design of an adaptive super-twisting decoupled terminal sliding mode control scheme for a class of fourth-order systems. *ISA Transactions*, 75, 216–225.
- Bhat, S. P., & Bernstein, D. S. (1997, June). *Finite-time stability of homogeneous systems*. Proceedings of the American control conference (Vol. 4, pp. 2513–2514). American Automatic Control Council. Albuquerque, New Mexico.
- Borlaug, L. G., Gravadh, J. T., Sverdrup-Thygeson, J., Pettersen, K. Y., & Loria, A. (2018). Trajectory tracking for underwater swimming manipulators using a super twisting algorithm. *Asian Journal of Control*, 21(1), 1–16. doi:10.1002/asjc.1840.
- Cabecinhas, D., Cunha, R., & Silvestre, C. (2015). A globally stabilizing path following controller for rotorcraft with wind disturbance rejection. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 23(2), 708–714.
- Chalanga, A., Kamal, S., Fridman, L. M., Bandyopadhyay, B., & Moreno, J. A. (2014). *How to implement super-twisting controller based on sliding mode observer?* Proceeding of 13th IEEE workshop on variable structure systems, Nantes. doi:10.1109/VSS.2014.6881145.
- Chalanga, A., Kamal, S., Fridman, L. M., Bandyopadhyay, B., & Moreno, J. A. (2015). Implementation of super-twisting control: Super-twisting and higher order sliding mode observer based Approaches. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(6), 3677–3685.
- Davila, J., Fridman, L., & Levant, A. (2005). Second-order sliding mode observer for mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50, 1785–1789.
- Defoort, M., Floquet, T., Kokosy, A., & Perruquetti, W. (2009). A novel higher order sliding mode control scheme. *Systems & Control Letters*, 58(2), 102–108.
- Dehkordi, N. M., Sadati, N., & Hamzeh, M. (2017). Robust backstepping control of an interlink converter in a hybrid AC/DC microgrid based on feedback linearisation method. *International Journal of Control*, 90(9), 1990–2004.
- Edwards, C., & Shtessel, Y. B. (2016). Adaptive continuous higher order sliding mode control. *Automatica*, 65, 183–190.
- Edwards, C., & Spurgeon, S. (1998). *Sliding mode control*. London: Taylor and Francis.
- Efimov, D., Zolghadri, A., Cieslak, J., & Henry, D. (2012). *Input estimation via sliding-mode differentiation for early OFC detection*. 8th IFAC symposium on fault detection, supervision and safety of technical processes (Vol. 45, pp. 1143–1148). Amsterdam: Elsevier.
- Fang, L., & Li, T. (2014, July). *Terminal sliding mode control for anti-synchronization of chaotic systems containing dead-zone nonlinearity*. International Conference on Mechatronics and Control (ICMC) (pp. 230–232). Jinzhou.
- Feng, Y., Yu, X., & Man, Z. (2002). Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators. *Automatica*, 38(12), 2159–2167.
- Filippov, A. F. (1988). *Differential equations with discontinuous right-hand side*. Dordrecht: Kluwer.
- Fraguelaa, L., Fridman, L. M., & Alexandrov, V. V. (2012). Position stabilization of a Stewart platform: High-order sliding mode observers based approach. *Journal of the Franklin Institute*, 349(2), 441–455.
- Fridman, L. M., Levant, A., & Davila, J. (2007). Observation of linear systems with unknown inputs via high-order sliding-modes. *International Journal of Systems Science*, 38(10), 773–791.
- Fridman, L. M., Moreno, J. A., Bandyopadhyay, B., Kamal, S., & Chalanga, A. (2015). Continuous nested algorithms: The fifth generation of sliding mode controllers. In X. Yu & O. Efe (Eds.), *Recent advances in sliding modes: From control to intelligent mechatronics. Studies in systems, decision and control* (Vol. 24, pp. 5–35). London: Springer.
- Ghalia, M. B. (1997). Modelling and robust control of uncertain dynamical systems using fuzzy set theory. *International Journal of Control*, 68(6), 1367–1396.
- Goel, A., & Swarup, A. (2017). MIMO uncertain nonlinear system control via adaptive high-order super twisting sliding mode and its application to robotic manipulator, *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 28(1), 36–49.
- Golestani, M., Tchier, F., & Mobayen, S. (2016). Adaptive finite-time tracking control of uncertain non-linear n-order systems with unmatched uncertainties. *IET Control Theory & Applications*, 10(14), 1675–1683.
- Han, J., Chen, Y.-H., Zhao, X., & Dong, F. (2018). Optimal design for robust control of uncertain flexible joint manipulators: A fuzzy dynamical system approach. *International Journal of Control*, 91(4), 937–951.
- Hardy, G. H., Littlewood, J. E., & Polya, G. (1951). *Inequalities*. London: Cambridge University Press.
- Karnik, N. N., Mendel, J. M., & Liang, Q. (1999). Type-2 fuzzy logic systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7(6), 643–658.
- Khooban, M. H., & Niknam, T. (2016). Free chattering hybrid sliding mode control for a class of non-linear systems: Electric vehicles as a case study. *IET Science, Measurement & Technology*, 10(7), 776–785.
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 58(6), 1247–1263.
- Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3), 379–384.
- Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(9–10), 924–941.
- Levant, A. (2005a). Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41, 823–830.
- Levant, A. (2005b). Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(11), 1812–1816.
- Levant, A. (2007). Principles of 2-sliding mode design. *Automatica*, 43(4), 576–586.

- Levant, A., & Fridman, L. M. (2010). Accuracy of homogeneous sliding Modes in the presence of fast actuators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(3), 810–814.
- Liang, Q., & Mendel, J. M. (2000). Equalization of nonlinear time-varying channels using type-2 fuzzy adaptive filters. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(5), 551–563.
- Liu, X., & Han, Y. (2014). Finite time control for MIMO nonlinear system based on higher-order sliding mode. *ISA Transactions*, 53(6), 1838–1846.
- Liu, J., & Wang, X. (2011). *Advanced sliding mode control for mechanical systems*. Heidelberg: Springer.
- Mobayen, S. (2016). A novel global sliding mode control based on exponential reaching law for a class of under-actuated systems with external disturbances. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 11, 111–119.
- Mobayen, S., Baleanu, D., & Tchier, F. (2016). Second-order fast terminal sliding mode control design based on LMI for a class of non-linear uncertain systems and its application to chaotic systems. *Journal of Vibration and Control*, 23(18), 2912–2925.
- Mobayen, S., & Tchier, F. (2016). Design of an adaptive chattering avoidance global sliding mode tracker for uncertain non-linear time-varying systems. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 39(10), 1547–1558.
- Mobayen, S., & Tchier, F. (2017). A novel robust adaptive second-order sliding mode tracking control technique for uncertain dynamical systems with matched and unmatched disturbances. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 15(3), 1097–1106.
- Mobayen, S., Tchier, F., & Ragoub, L. (2017). Design of an adaptive tracker for n -link rigid robotic manipulators based on super-twisting global nonlinear sliding mode control. *International Journal of Systems Science*, 48(9), 1990–2002.
- Mondal, S., & Mahanta, C. (2014). Adaptive second order terminal sliding mode controller for robotic manipulators. *Journal of the Franklin Institute*, 351(4), 2356–2377.
- Moreno, J. A., & Osorio, M. (2008, December). A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. 47th IEEE Conference on Decision and Control (pp. 2856–2861). Cancun, Mexico.
- Moreno, J. A., & Osorio, M. (2012). Strict Lyapunov functions for the super-twisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(4), 1035–1040.
- Munoz, F., Gonzalez-Hernandez, I., Espinoza, E.S., Salazar, S., & Osorio, A. (2015, November). Altitude control of an unmanned aircraft system using a super-twisting controller based on high order sliding mode observer. 2015 workshop on research, education and development of unmanned aerial systems (RED-UAS), (pp. 323–328). Cancun. IEEE.
- Nasiri, A., Kiong Nguang, S., & Swain, A. (2014). Adaptive sliding mode control for a class of MIMO nonlinear systems with uncertainties. *Journal of the Franklin Institute*, 351(4), 2048–2061.
- Pisano, A., & Usai, E. (2011). Sliding mode control: A survey with applications in math. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81, 954–979.
- Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L. M., & Levant, A. (2014). *Sliding mode control and observation, series: Control engineering*. Birkhauser:Basel: Springer.
- Shtessel, Y. B., Moreno, J. A., Plestan, F., Fridman, L. M., & Poznyak, A. S. (2010). *Super twisting adaptive sliding mode control: A lyapunov design*. Proceedings of the 49th IEEE conference on decision and control CDC 2010. Atlanta, Georgia, USA. pp. 5109–5113.
- Shtessel, Y., Taleb, M., & Plestan, F. (2012). A novel adaptive-gain super-twisting sliding mode controller: Methodology and application. *Automatica*, 48(5), 759–769.
- Slotine, J. E., & Li, W. P. (1991). *Applied nonlinear control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Takagi, T., & Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern, SMC*, 15(1), 116–132.
- Tamhane, B., & Kurode, S. (2018). Finite time state and disturbance estimation for robust performance of motion control systems using sliding modes. *International Journal of Control*, 91(5), 1171–1182.
- Tang, Z. L., Ge, S. S., Tee, K. P., & He, W. (2016). Adaptive neural control for an uncertain robotic manipulator with joint space constraints. *International Journal of Control*, 89(7), 1–33.
- Tayebi-Haghighi, S., Piltan, F., & Kim, J. M. (2018). Robust composite high-order super-twisting sliding mode control of robot manipulators. *Robotics*, 7(13), 1–18. doi:10.3390/robotics7010013.
- Tseng, C. S., Chen, B. S., & Uang, H. J. (2001). Fuzzy tracking control design for nonlinear dynamic systems via T-S fuzzy model. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(3), 381–392.
- Utkin, V., Guldner, J., & Shi, J. (2009). *Sliding mode control in electro-mechanical systems* (2nd. ed). London: CRC Press.
- Utkin, V. I., & Poznyak, A. S. (2013). Adaptive sliding mode control with application to super-twist algorithm: Equivalent control method. *Automatica*, 49, 39–47.
- Van, M., Franciosa, P., & Ceglarek, D. (2016). Fault diagnosis and fault-tolerant control of uncertain robot manipulators using high order sliding mode. *Mathematical Problems in Engineering*. doi:10.1155/2016/7926280.
- Van, M., Ge, S. S., & Ren, H. (2017). Finite time fault tolerant control for robot manipulators using time delay estimation and continuous nonsingular fast terminal sliding mode control. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 47(7), 1681–1693.
- Wang, Y., Gu, L., Gao, M., & Zhu, K. (2015). Multivariable output feedback adaptive terminal sliding mode control for underwater vehicles. *Asian Journal of Control*, 17(6), 1–19.
- Xiao, Y., Ye, D., & Sun, Z. (2018). Observer-based continuous finite-time attitude control for rigid-flexible coupling satellites. *International Journal of Control*. doi:10.1080/00207179.2018.1458155.
- Yang, L., & Yang, J. (2011). Nonsingular fast terminal sliding-mode control for nonlinear dynamical systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21(16), 1865–1879.
- Yu, P., Shtessel, Y., & Edwards, C. (2016). Continuous higher order sliding mode control with adaptation of air breathing hypersonic missile. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 30(8–10), 1099–1117.
- Yu, X., & Zhihong, M. (2002). Fast terminal sliding-mode control design for nonlinear dynamical systems. *IEEE Transaction on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 49(2), 261–264.
- Zhai, J.-Y., & Song, Z.-B. (2018). Adaptive sliding mode trajectory tracking control for wheeled mobile robots. *International Journal of Control*. doi:10.1080/00207179.2018.1436194.
- Zhang, X., Liu, X., & Zhu Q. (2014). Adaptive chatter free sliding mode control for a class of uncertain chaotic systems. *Applied Mathematics and Computation*, 232, 431–435.
- Zhang, Y., Tang, S., & Guo, J. (2017). Adaptive-gain fast super-twisting sliding mode fault tolerant control for a reusable launch vehicle in reentry phase. *ISA Transactions*. doi:10.1016/j.isatra.2017.08.012i
- Zhao, R., Chen, Y.-H., Wu, L., & Pan, M. (2018). Robust trajectory tracking control for uncertain mechanical systems: Servo constraint-following and adaptation mechanism. *International Journal of Control*. doi:10.1080/00207179.2018.1528386

Adaptive high-order sliding mode controller-observer for MIMO uncertain nonlinear systems

Rim Hendel¹  | Farid Khaber¹ | Najib Essounbouli²

¹QUERE Laboratory, Engineering Faculty, University of Setif 1, Setif, Algeria

²CReSTIC of Reims Champagne-Ardenne University, IUT de Troyes, Troyes, France

Correspondence

Rim Hendel, QUERE Laboratory, Engineering Faculty, University of Setif 1, 19000 Setif, Algeria.
Email: hendelrim@univ-setif.dz

Abstract

In this paper, an adaptive high-order sliding mode controller-observer is proposed for multi input–multi output uncertain systems with application to robotic manipulators. Firstly, a type-2 Takagi-Sugeno fuzzy system is used to model the original system. Next, with the unavailability of velocity measurement, a fuzzy high-order sliding mode observer is designed to estimate both the joint velocities and uncertainties. Moreover, based on a super twisting second-order sliding mode, the proposed robust controller generates smooth control and guarantees finite-time convergence to the third-order sliding set with respect to the sliding variable by keeping second-order sliding mode constraint. The controller gains are generated based on an adaptive estimation scheme without overestimation. The finite-time stability of the suggested controller is proved by using an homogeneous and strict Lyapunov function. Finally, the obtained simulation results for two-link robot manipulators demonstrate the effectiveness of the proposed controller.

KEYWORDS

finite time stability, high-order sliding mode controller-observer, interval type-2 Takagi-Sugeno fuzzy system, robotic manipulator

1 | INTRODUCTION

1.1 | Background and motivations

Finite-time stabilization (FTS), robustness, and high controller performances are among the main issues in nonlinear control problems in the presence of uncertainties and disturbances. A variety of nonlinear control strategies such as adaptive scheme, backstepping control, fuzzy logic approach, and sliding mode control (SMC) have been employed in various practical applications such as robotics, mechanics, electronics, and networked systems. [1–6] Owing to its inherent advantages of guaranteed finite-time stability, and robustness against matching

internal parameter variations and external disturbances, SMC is often adopted.[1,2,7] However, the design of most nonlinear controllers, including SMC, needs the complete measurement of states; for example, in the control of mechanical systems, both position and velocity must be available. Since only some states are usually measured, it is necessary to estimate the unmeasured states by using an observer. Based on a discontinuous algorithm, and even in the presence of bounded uncertainties, sliding mode observers (SMO) can ensure a theoretically exact estimation of unmeasured states to the true system's states.[7–10] However, despite the benefits of the SMC, its main problem is the chattering effect, which is undesirable for system stability in general and for actuators

in mechanical parts of systems in particular. Another problem with the sliding mode approach is that the finite-time stabilization of sliding motion can be attained only for systems with relative degree one with respect to the sliding manifold $\sigma(x,t)$ which depends mainly on the system states. Then, for systems with a higher relative degree, the standard sliding mode design suggests introducing an auxiliary sliding variable of the first relative degree one; the latter is generally a linear combination of $\sigma(x,t)$ and its successive time derivatives, which leads only to exponential stabilization of sliding motion $\sigma = 0$. The concept of high-order sliding mode (HOSM) is thus introduced to deal with both finite-time stabilization and chattering problems.[11–13]

High-order sliding mode is the most powerful technique among several methodologies that have been proposed to attenuate the chattering effect and to achieve finite-time stabilization.[11,12] Unlike the so-called first-order sliding mode which acts on the first-time derivative of sliding variable σ , the switching control in HOSM acts on the higher-order time derivatives of σ . Then, for a system with relative degree two, the second-order sliding mode (SOSM) ensures finite-time convergence of system trajectories to the sliding set $\sigma = \dot{\sigma} \equiv 0$, and the control is acting on the second derivative of σ . [13] Hence, owing to its ability to estimate unmeasured states and uncertainties in finite time, several works have thoroughly studied the HOSM controller observer (HOSMC/O), from both a theoretical point of view,[14–17] and from a practical perspective[18–20] for different systems.

Among the most effective and appealing HOSMs in real applications, the so-called super-twisting algorithm (STA) introduced in,[21] is very useful for both control and observation.[17,22] Contrary to other HOSM algorithms and instead of a classical sliding mode, STA is designed for systems with relative degree one with respect to the sliding variable σ . Hence, only information about σ is required for ST control design. STA provides finite-time stabilization of second-order sliding mode SOSM ($\sigma = \dot{\sigma} \equiv 0$), produces a smooth control signal, and also has the ability to compensate matched Lipschitz disturbances. Using a Lyapunov approach, the STA's stability and finite-time convergence are proved in.[16,23] However, for systems with relative degree two, it is necessary to select a sliding manifold with relative degree one to design ST control law. In[20,24] a linear sliding manifold is designed as $s = a\sigma + \dot{\sigma}$, $a > 0$, where finite-time convergence to the sliding set $s = \dot{s} \equiv 0$ and disturbances compensation are achieved, unlike the states σ and $\dot{\sigma}$ which converge asymptotically to the origin. Hence, according to,[20] when only some states are measured and by using continuous control on the predefined sliding manifold s , the second-order sliding motion is never

realized in the ST control-based ST observer, then one of the solutions proposed in[20] is the implementation of the HOSM observer, which is applied with experimental validation for position control of the industrial emulator. On the other hand, since only asymptotic stability of the system motion in the typical sliding surface can be guaranteed, the terminal sliding mode (TSM) approach has been widely used to achieve finite-time stability in a nonlinear sliding surface.[25,26] It is worth noting that, for systems with relative degree two (with respect to σ), another proposed continuous controller based on the third-order sliding mode (as nested and quasi-continuous algorithms) is proposed without designing the sliding manifold.[27–29] By introducing a new virtual control \dot{u} , this controller generates a continuous control signal, ensures finite-time convergence to the sliding set $\sigma = \dot{\sigma} \equiv 0$, and compensates the Lipschitz uncertainties. However, the controller design requires the knowledge of $\ddot{\sigma}$ in addition to the states σ and $\dot{\sigma}$, which is considered a drawback of this kind of controller.

To deal with finite-time stabilization of system state trajectories, based on the combination of STA and TSM, a class of continuous homogeneous sliding mode controllers called nested algorithms are proposed in[30,31] for uncertain systems with relative degree two with respect to σ . Also, based on the generalization of the twisting algorithm (TA), another continuous homogeneous controller (continuous twisting algorithm CTA) is presented in.[32,33] These controllers ensure finite-time stabilization of SOSM (i.e. $\sigma = \dot{\sigma} \equiv 0$), generate a smooth control signal, and compensate the Lipschitz uncertainties. Furthermore, third-order precision with respect to the sampling time is achieved by keeping the SOSM constraint (i.e. only information about σ and $\dot{\sigma}$ is required for controller design).

1.2 | Literature review

In the literature, several HOSM controller-observer combination schemes have been developed and applied to various MIMO nonlinear systems, particularly for tracking control of robotic manipulators. Under the assumption of velocity measurement unavailability, by combining an ST controller with a third-order sliding mode observer (TOSMO), an active fault-tolerant control for three-degrees of freedom (3-DOF) uncertain robot manipulator is designed in,[34] and with the same idea, the robust composite high-order ST controller observer is presented in[35] for tracking control of a 6-DOF robot manipulator with the presence of uncertainties. However, despite the robustness and smoothness of these controllers, the finite-time stabilization of system states is not

attained due to the linear dynamic of the sliding manifold used in the controller design. Furthermore, the controller gains for both controllers[34,35] are selected based on the uncertainties estimation provided by TOSMO (called output error injection OEI). Unfortunately, it is well known that the main challenge of ST controller design is the requirement of uncertainty boundaries knowledge, which cannot be easily known in advance or exactly estimated for several practical cases. Also the boundary overestimation yields to larger sliding gains, which leads to a significant chattering effect. Addressing this challenge, various adaptive techniques based on SMCs/HOSMCs have been developed for both SISO and MIMO nonlinear uncertain systems.[11,25,36–40] More specifically, keeping the non-overestimation of sliding gains in HOSMs and at the same time decreasing the chattering effect, an adaptive scheme is proposed to adjust online these gains in.[41–44] The proposed adaptive gain ST control[41,42] has the ability to generate continuous control so that the controller gains are adapted to the unknown bounded uncertainties without gain overestimation. Based on the availability of the equivalent control signal, another adaptive gain scheme in HOSM including STA is designed firstly in, [43] and developed for both single input–single output and multi input–multi output formulations in[44]; this algorithm drives the sliding set to zero in finite time while the control gains decrease to a small possible level. By using this adaption scheme, a continuous adaptive HOSM control is designed for hypersonic missile control in the terminal phase with the presence of external disturbances and uncertainties in.[45] Meanwhile, in[46] an adaptive gains super twisting controller is successfully applied for trajectory tracking of an underwater swimming manipulator, where an HOSM observer is designed to estimate the unmeasured system states. However, all of these control schemes ensure only the asymptotic convergence of tracking errors.

In order to design smooth control while achieving finite-time convergence, decoupling control based on TSMC and HOSM algorithms including ST control (STC) has been investigated. By using the continuous homogeneous sliding mode controller introduced in,[30] tracking control of a robot manipulator in the presence of uncertainties and disturbances is presented in,[38] where the proposed adaptive STC blended with an homogeneous sliding manifold provides continuous and finite-time convergent control. In,[40] a robust adaptive STC combined with global nonlinear sliding mode is designed for tracking control of n -link rigid robotic manipulators with external disturbances. An adaptive gain STC decoupled TSM technique is designed in,[47] for the stabilization of fourth-order systems with experimental validation on the cart-pole system. Based on time delay

estimation (TDE) and by combining the fast nonsingular terminal sliding mode control FNTSMC with STA, a finite-time fault tolerant control scheme for uncertain robot manipulators with actuator faults is proposed in. [48] Despite the fact that finite-time convergence and chatter attenuation in these controllers have been successfully attained, it is noteworthy that these controllers are designed under the assumption that a complete system states measurement is available and the system dynamic is assumed to be well known, while in the most practical cases the information about all system states is generally unavailable and the system may be uncertain. Owing to its ability to provide a suitable representation of the uncertainty in dynamic model and system knowledge, and to deal with complexity control system problems, the fuzzy logic (FL) approach has been widely and successfully implemented in both modeling and control of uncertain systems.[3–5,49–51] Compared to a type-1 fuzzy model counterpart, a type-2 fuzzy system (T2FS) is characterized mainly by its capability of enhancing the developed model's robustness. A T2FS can also deal with numerical and linguistic uncertainties associated with either the mechanical aspect of robots, or with a dynamic changing environment, or with knowledge used in the conception of the fuzzy system.

1.3 | Contribution

Inspired by the above discussion and compared with related works, the main contribution of this paper is to design a robust and finite-time tracking control based on HOSM for MIMO uncertain nonlinear systems with application to robotic manipulators; the system dynamic is described by the Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy model, and only the position state is available for measurement.

Hence, in light of the appealing benefits of the HOSM controller/observer, an adaptive higher-order sliding mode controller (AHOSMC) based on an HOSM observer is developed for MIMO uncertain nonlinear systems. Firstly, the nominal nonlinear system is represented by the interval type-2 Takagi-Sugeno fuzzy model (IT2 T-S). Then, by combining the third-order sliding mode linear observer (TOSMLO) with the T-S fuzzy model, a novel fuzzy TOSMLO (F-TOSMLO) is applied to estimate both velocity and uncertainties. Compared with previous works, the proposed AHOSMC is designed to achieve the following objectives:

- Provide a finite-time estimation of velocity and uncertainties using F-TOSMLO.
- Generate a smooth control signal, ensuring robustness and achieving finite-time convergence of system states

to their references, by using ST control blended with TSM surface.

- Establish third-order sliding accuracy with respect to the sliding variable σ , by keeping SOSM constraint (only σ and $\dot{\sigma}$ are required for controller design).
- Avoid the requirement knowledge about upper bounds of uncertainties and disturbances by implementing an adaptive scheme to controller gains without the problem of overestimation.

1.4 | Paper organization

The rest of this paper is organized as follows. The system description and control objectives are given in the next section. Then, some preliminaries with the problem statement are presented, followed by the design of the proposed AHOSMC, with stability and finite-time convergence proof. To demonstrate the great performance of the proposed method, simulation results for two-link robot manipulators with comparative studies are provided in the simulation example section. The last section presents the conclusion of the advocated design control scheme.

2 | SYSTEM DESCRIPTION AND CONTROL OBJECTIVE

Considering the following model of second-order uncertain mechanical systems:

$$\ddot{q} = M^{-1}(q)(\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) + \Delta(q, \dot{q}, t) \quad (1)$$

where $q \in \mathbb{R}^n$ is a vector of generalized coordinates, $M(q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ is a symmetric, strictly positive-definite inertia matrix which is invertible, $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ is Coriolis and centripetal torques, $G(q) \in \mathbb{R}^n$ is gravitational forces, $\tau \in \mathbb{R}^n$ is the torque produced by the actuators, and $\Delta(q, \dot{q}, t) \in \mathbb{R}^n$ is the whole uncertainties term indicating the sum of the external disturbances and parameter uncertainties. By introducing the states $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$, and $u = \tau$, the dynamic (1) can be simplified in state space form as follows:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u(t) + D(\underline{x}, t) \end{cases} \quad (2)$$

where $\underline{x} = [x_1 \ x_2]^T$, $f(\underline{x}) = M^{-1}(q)(-C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q))$, and $g(\underline{x}) = M^{-1}(q)$ ($M(q)$ is nonsingular), $u(t)$ is the control input, and $D(\underline{x}, t) = \Delta(q, \dot{q}, t)$. Assume that $D(\underline{x}, t)$ has a bounded Lipschitz continuous time signal, that is, $|D(\underline{x}, t)| \leq d$ and $|\dot{D}(\underline{x}, t)| \leq \bar{d}$.

The control objective is to design finite-time convergent control, so that the system states $\underline{x}(t)$ follow desired trajectories $\underline{x}_d(t)$ despite the uncertainties. Defining the tracking error $\underline{e}(t)$ as:

$$\underline{e}(t) = \underline{x}(t) - \underline{x}_d(t) = [x_1(t) - x_{d1}(t) \ x_2(t) - \dot{x}_{d1}(t)]. \quad (3)$$

Therefore, the control goal considered is:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\underline{e}(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\underline{x}(t) - \underline{x}_d(t)\| \rightarrow 0.$$

Remark 1 It is worth noting that, to deal with the different constraints imposed on the modeling of complex real processes with system structural variations and unmodeled dynamics, inspired by the simplicity of rule development-based systems, fuzzy logic systems (FLS) have been widely used in both controlling and modeling of complex nonlinear processes, especially mobile robots.[49–51] Therefore, the nonlinear system (2) will be represented by an interval type-2 fuzzy system based on the Takagi-Sugeno fuzzy model.[52]

The design procedure of the proposed controller consists of two steps. In the first, and as previously mentioned, the system under consideration is described by the interval type-2 Takagi-Sugeno (IT2 T-S) fuzzy model, followed by the design of a novel fuzzy third-order sliding mode linear observer F-TOSMLO, which is used to estimate in finite time both velocity and uncertainties. Secondly, based on the ST second-order sliding mode, a robust and smooth control law with adaptive controller gains is designed to ensure finite-time convergence of tracking errors, and achieve third-order accuracy by keeping the SOSM constraint.

2.1 | Interval type-2 Takagi-Sugeno fuzzy model (IT2 T-S)

The type-2 fuzzy logic system T2FLS is very similar to a T1FLS; the major structural difference is that the defuzzifier block of a T1FLS is replaced by the output processing block in a T2FLS, which consists of type-reduction followed by defuzzification.[53] In the T-S fuzzy system, the nominal model can be obtained by the decomposition of the nonlinear system dynamics into a linear local model around certain operating points.[52] Then, the nonlinear system (2) can be approximated by an IT2 T-S fuzzy model that is described by M fuzzy IF-THEN rules. Each rule's consequent is a linear local model and the antecedent has an interval type-2 fuzzy set:

Plan rule i R^i : IF z_1 is \tilde{H}_1^i , and..., and z_n is \tilde{H}_n^i , THEN

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = A_i \underline{x} + B_i u \end{cases} \quad (4)$$

where \tilde{H}_j^i is the IT2 fuzzy set of the i^{th} rule ($i = 1, \dots, M$) corresponding to the j^{th} antecedent z_j , ($j = 1, \dots, n$), n is a positive integer. $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $B_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ are known system matrices. The following interval sets define the firing strength of the i^{th} rule:

$$w_i(z) = [\underline{w}_i, \bar{w}_i] \quad (5)$$

with;

$$\underline{w}_i = \prod_j^n \underline{\mu}_{\tilde{H}^i}^j(z) \geq 0 \quad (6)$$

$$\bar{w}_i = \prod_j^n \bar{\mu}_{\tilde{H}^i}^j(z) \geq 0 \quad (7)$$

where \underline{w}_i and \bar{w}_i are the lower and upper membership grade, respectively. $\underline{\mu}_{\tilde{H}^i}^j(z_j)$ and $\bar{\mu}_{\tilde{H}^i}^j(z)$ denote the lower and upper membership function, respectively. The fuzzy model will be given by:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \sum_{i=1}^M w_i(z) \{A_i \underline{x} + B_i u\} \end{cases} \quad (8)$$

where $w_i(z) = \underline{w}_i \underline{v}_i + \bar{w}_i \bar{v}_i$, $\underline{v}_i \geq 0$, and $\bar{v}_i \geq 0$ in which $\forall i$, $\underline{v}_i + \bar{v}_i = 1$. Both nonlinear functions \underline{v}_i and \bar{v}_i are selected 0.5 as in.[54] Note that $w_i(z)$ holds a convex sum property: $w_i(z) \geq 0$ and $\forall i$, $\sum_{i=1}^M w_i(z) = 1$. Then, based on the IT2 T-S fuzzy model, the nonlinear uncertain system (2) can be expressed as follows:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \underline{x} + \sum_{i=1}^M w_i(z) B_i u + \Delta(t) \end{cases} \quad (9)$$

where $\Delta(t) \in \mathbb{R}^n$ represents the system uncertainties that comprise the disturbances and the fuzzy approximation error, $\Delta(t)$ is assumed to be Lipschitz time uncertainties, that is, $|\Delta(t)| \leq \mu$ and $|\dot{\Delta}(t)| \leq \bar{\mu}$, $\bar{\mu} > 0$. Furthermore, impose that $\forall z$, $\sum_{i=1}^M w_i(z) B_i$ are nonsingular then $(\sum_{i=1}^M w_i(z) B_i)^{-1}$ exists.

In order to guarantee finite-time convergence of mechanical system states (2) which is described by IT2 T-S fuzzy model (9) with the presence of uncertainties, the design of the proposed controller scheme requires the availability of both position and velocity

measurement. Then, under the assumption that only the position state is measured, it is possible to estimate both velocity and system uncertainties in finite time by using a novel F-TOSMLO.

2.2 | States observation and uncertainties identification

Unlike the second-order sliding mode observer (SOSMO), the third-order sliding mode observer (TOSMO) guarantees exact velocity and uncertainties estimation without any filtration.[55] Despite the fact that the SOSMO provides finite-time estimation of velocity, it needs a low pass filter for uncertainties identification due to the high switching frequencies; meanwhile the application of the filter leads to time delay. Then, for states estimation and uncertainties identification of system (9), the fuzzy SOSM observer is designed first, in which its IT2 T-S fuzzy model has the same rules of the plant model (4):

Observer rule i R^i : IF z_1 is \tilde{H}_1^i , and..., and z_n is \tilde{H}_n^i , THEN

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \alpha_1 |x_1 - \hat{x}_1|^{1/2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = A_i \hat{x} + B_i u + \alpha_0 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \end{cases} \quad (10)$$

$\hat{x} = [\hat{x}_1 \hat{x}_2]^T$ is the state estimation vector of $\underline{x} = [x_1 x_2]^T$, α_1 and α_0 are the sliding observer gains selected appropriately to guarantee the convergence of estimation error vector $\tilde{x} = [\tilde{x}_1 \tilde{x}_2]^T$. Similar to the fuzzy model (9) the F-SOSM observer is defined as:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \alpha_1 |x_1 - \hat{x}_1|^{1/2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \hat{x} + \sum_{i=1}^M w_i(z) B_i u + \alpha_0 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \end{cases} \quad (11)$$

By substituting fuzzy model (9) into (11), the estimation error can be obtained as:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 - \alpha_1 |x_1 - \hat{x}_1|^{1/2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{x} + \Delta(t) - \alpha_0 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \end{cases} \quad (12)$$

Under the boundedness assumption of system states and uncertainties, the following inequality holds for an existing positive constant F^+ :

$$\left| \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{x} + \Delta(t) \right| < F^+ \quad (13)$$

Based on the Lyapunov approach, the stability and finite-time estimation of the SOSM observer is guaranteed.[16]

Theorem 1. Suppose that the inequality (13) holds for the system (9), the SOSMO designed in (11) is strongly stable and guarantees a finite-time convergence of estimated states \hat{x}_i to the true states x_i , if the observer gains satisfy:

$$\alpha_1 \geq 0, \alpha_0 \geq 3F^+ + 2\frac{F^{+2}}{\alpha_2^2} \quad (14)$$

It is noteworthy that, when the observer gains are selected appropriately according to (14) for any $F^+ > 0$, the origin $\tilde{x} = 0$ is robustly, globally finite-time stable by means of the strict Lyapunov function $V(\tilde{x}) = \zeta^T P \zeta$, where $\zeta = [\tilde{x}_1^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_1), \tilde{x}_2]$ and P is a positive definite matrix. Therefore, the system trajectories (12) starting at \tilde{x}_0 will converge to $\tilde{x} = 0$ in finite time smaller than $\tilde{T}(\tilde{x}_0) = \frac{2}{\tilde{\nu}} V^{1/2}(\tilde{x}_0)$, where the constant $\tilde{\nu}$ depends on the observer gains α_1 and α_0 . After finite-time convergence of F-SOSMO, the following identity is fulfilled:

$$0 \equiv \dot{\tilde{x}}_2 \equiv \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{x} + \Delta(t) - \alpha_0 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1). \quad (15)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \alpha_2 |x_1 - \hat{x}_1|^{2/3} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) + \beta_1 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = A_i \hat{x} + B_i u + \alpha_1 |\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2|^{1/2} \text{sign}(\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2) + \beta_2 (x_1 - \hat{x}_1) + \hat{x}_3 \\ \dot{\hat{x}}_3 = \alpha_0 \text{sign}(\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2) \end{cases} \quad (20)$$

Note that $\sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{x} = 0$ because $\hat{x}_i = x_i$, ($i = 1, 2$). Therefore, the equivalent output injection (EOI) denoted \hat{z}_{eq} can be defined as follows:

$$\hat{z}_{eq} = \Delta(t) = \alpha_0 \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1). \quad (16)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \alpha_2 |x_1 - \hat{x}_1|^{2/3} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) + \beta_1 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \hat{x} + \sum_{i=1}^M w_i(z) B_i u + \alpha_1 |\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2|^{1/2} \text{sign}(\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2) + \beta_2 (x_1 - \hat{x}_1) + \hat{x}_3 \\ \dot{\hat{x}}_3 = \alpha_0 \text{sign}(\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2). \end{cases} \quad (21)$$

Owing to the discontinuous term in (15), the EOI is theoretically the result of infinite switching frequencies,

which produces a chattering effect. Then, a pass low-filter with sampling time Λ is used to avoid the high frequency component:

$$\tau_z \dot{\bar{z}}_{eq}(t) = \hat{z}_{eq}(t) - \bar{z}_{eq}(t) \quad (17)$$

where the time constant τ_z is selected greater than the filter sampling time Λ (i. e. $\Lambda \ll \tau_z \ll 1$), and \bar{z}_{eq} is the filtered output of \hat{z}_{eq} . The result of the filtering process is obtained by:

$$\hat{z}_{eq} = \bar{z}_{eq} + \varepsilon_f \quad (18)$$

where ε_f is the error caused by the filtration. Finally, the EOI is defined as the output of filter $\bar{z}_{eq}(t)$, and the uncertainties can be identified from:

$$\Delta(t) = \bar{z}_{eq} \quad (19)$$

Now, F-TOSMLO is proposed for states and uncertainties estimation without any filtration. Similar to the F-SOSMO, the IT2 T-S fuzzy model rules of the TOSMLO is given as follows:

Observer rule i R^i : IF z_1 is \tilde{H}_1^i , and..., and z_n is \tilde{H}_n^i , THEN

where $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, and β_i ($i = 1, 2$) are the observer gains selected appropriately to guarantee the finite-time convergence of estimation errors $\tilde{x}_i = x_i - \hat{x}_i$. The EOI is represented by the state \hat{x}_3 . The F-TOSMLO is defined as:

By substituting the fuzzy model (9) into (21), the estimation error dynamic can be obtained as:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \tilde{x}_2 - \alpha_2 |x_1 - \hat{x}_1|^{2/3} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) - \beta_1(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{\underline{x}} + \Delta(t) - \alpha_1 |\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2|^{1/2} \text{sign}(\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2) - \beta_2(x_1 - \hat{x}_1) - \hat{x}_3 \\ \dot{\hat{x}}_3 = \alpha_0 \text{sign}(\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2). \end{cases} \quad (22)$$

Let us define $F(\tilde{\underline{x}}, t) = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{\underline{x}} + \Delta(t)$, under the assumption that the system states are bounded and the term $F(\tilde{\underline{x}}, t)$ is assumed to be Lipschitz; for existing positive constants F^+ and \bar{F}^+ , the inequality (13) holds and $|\dot{F}(\tilde{\underline{x}}, t)| < \bar{F}^+$. By defining $\tilde{x}_3 = F(\tilde{\underline{x}}, t) - \hat{x}_3$, (22) becomes:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \tilde{x}_2 - \alpha_2 |x_1 - \hat{x}_1|^{2/3} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) - \beta_1(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \tilde{x}_3 - \alpha_1 |\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2|^{1/2} \text{sign}(\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2) - \beta_2(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_3 = -\alpha_0 \text{sign}(\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2) + \dot{F}(\tilde{\underline{x}}, t). \end{cases} \quad (23)$$

When the observer gains are selected appropriately and sufficiently large as discussed in,[15,27] and based on the stability proprieties of the recursive robust exact differentiator HOSM,[27] the dynamic (23) is finite-time stable. Then, after finite-time convergence of the F-TOSMLO, the estimation states \hat{x}_i converge to the true states $x_i, (i = 1, 2)$ and $\dot{\hat{x}}_1 = \dot{x}_1$; therefore the following equality is fulfilled:

$$\begin{aligned} F(\tilde{\underline{x}}, t) - \alpha_1 |\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2|^{1/2} \text{sign}(\dot{\hat{x}}_1 - \hat{x}_2) - \beta_2(x_1 - \hat{x}_1) - \hat{x}_3 \\ = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

As a consequence of the differentiator convergence, the uncertainties can be identified from $F(\tilde{\underline{x}}, t) = \hat{x}_3$. Note that $F(\tilde{\underline{x}}, t) = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{\underline{x}} + \Delta(t)$ and the term $\sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \tilde{\underline{x}} = 0$ (because $\hat{x}_i = x_i, (i = 1, 2)$). Therefore, the EOI \hat{z}_{eq} is defined as:

$$\hat{z}_{eq} = \Delta(t). \quad (25)$$

According to (21), it is obvious that \hat{z}_{eq} denoted \hat{x}_3 is continuous term, and the EOI can be obtained without filtration. Therefore, \hat{z}_{eq} is a theoretical exact estimation of uncertainties $\Delta(t)$.

3 | PRELIMINARIES AND PROBLEM STATEMENT

In order to achieve finite-time stabilization of the third-order sliding mode set (3-SM) based on second-order sliding mode control law, an adaptive gains high-order sliding mode controller AHOSMC is proposed for uncertain systems described by (9). The controller is a result of combining STA and TSM, which is announced as a continuous nonsingular terminal sliding mode algorithm (CNTSM) in,[30] and a continuous terminal sliding mode (CTSM) controller in.[31] Then, a review of some used definitions and notations are presented in the next subsection.

3.1 | Preliminaries

The following notation is used in this paper: $|a|^b = |a|^b \text{sign}(a)$, [56] for a real variable $a \in \mathbb{R}$ to a real power $b \in \mathbb{R}$. Hence, $|a|^2 = |a|^2 \text{sign}(a) \neq a^2$. If b is an odd number, then $|a|^b = a^b$.

Note that $|a|^0 = \text{sign}(a)$, $|a|^0 a^b = |a|^b$ and $|a|^0 |a|^b = |a|^b$.

Owing to its important role in finite-time convergence proofs, and in obtaining the highest accuracy with respect to the uncertainties and measurement noises, the homogeneous function has interesting propriety in almost all HOSM controllers.[28,57]

Definition 1 [28]. A function $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is homogeneous of degree $m \in \mathbb{R}$ with the dilation $d_k: (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (k^{r_1} x_1, k^{r_2} x_2, \dots, k^{r_n} x_n)$, where $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, $0 < r_i \in \mathbb{R}$ are known as the weights, if the identity $f(d_k x) = k^m f(x)$ holds for any $0 < k \in \mathbb{R}$ and $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Definition 2 [28]. A vector field $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$, $i = 1, 2, \dots, n$, is homogeneous of degree $q \in \mathbb{R}$ with weights r , if $f_i(d_k x) = k^{q+r_i} f_i(x)$ holds $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{R}$. Then, for the system dynamic defined by $\dot{x} = f(x)$, if f is

homogeneous of degree q , then the system is homogeneous of degree q .

Note that with an appropriate proportional change of the weights $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, the vector field f can always be scaled to ± 1 if its homogeneity degree $q \neq 0$.

Definition 3 [28]. An invariance of the differential equation $\dot{x} = f(x)$ is further called globally uniformly finite time stable, if for any trajectory starting within $\|x_0\| < R$ for any $R > 0$, there exists a finite time $t_f > 0$, such that $x(t)$ stabilizes to the origin for all $t > t_f$.

3.2 | Problem statement

The problem is to design a robust and smooth control law for finite-time tracking of the uncertain system described in (9). Based on SOSMC, let us define the sliding variable σ as follows:

$$\sigma = e = x_1(t) - x_d(t). \quad (26)$$

Since only the information about x_1 is available in the system (9), the proposed F-TOSMLO is used to extract information of x_2 as \hat{x}_2 . Therefore $x_i = \hat{x}_i$, ($i = 1, 2$) and $\hat{z}_{eq} = \hat{x}_3$ can be achieved after finite-time estimation of F-TOSMLO, $\hat{e} = \hat{x}_2(t) - \dot{x}_d(t)$, and $\ddot{e} = \hat{x}_2(t) - \ddot{x}_d(t)$. Then $\dot{\sigma} = \dot{\hat{e}}$ and $\ddot{\sigma} = \ddot{\hat{e}}$, by substituting the dynamic (21), the second-time derivative of the sliding surface (26) becomes:

$$\ddot{\sigma} = F_0(\underline{x}) + G_0(\underline{x})u + \hat{z}_{eq} \quad (27)$$

where $F_0(\underline{x}) = \sum_{i=1}^M w_i(z) A_i \hat{x} - \ddot{x}_d(t)$ and $G_0(\underline{x}) = \sum_{i=1}^M w_i(z) B_i$.

It is clear that the system (9) has a relative degree 2 with respect to the sliding variable σ . Now, the objective is to design a controller that ensures finite-time stabilization of sliding set $\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} \equiv 0$ and uncertainties compensation, in which 3-SM can be established i.e. $\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} \equiv 0$. For this, let us define a new auxiliary system with states variables $\xi_1 = \sigma$ and $\xi_2 = \dot{\sigma}$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = F_0(\underline{x}) + G_0(\underline{x})u + \hat{z}_{eq} \end{cases} \quad (28)$$

According to the sliding mode procedure, the control law is designed as follows:

$$u = G_0(\underline{x})^{-1}(-F_0(\underline{x}) + v) + v_c \quad (29)$$

where v is auxiliary control and v_c is compensating control which is designed based on system uncertainties identification obtained by F-TOSMLO:

$$v_c = -G_0(\underline{x})^{-1} \hat{z}_{eq}. \quad (30)$$

Now, considering the estimation error dynamic (23) of the proposed F-TOSMLO, and under the lumped uncertainties condition (i.e. $\Delta(t) \neq 0$), by applying the control law (29)–(30) for the system (9), the overall closed-loop system can be represented by the following dynamics:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = v + \epsilon(t) \end{cases} \quad (31)$$

where $\epsilon(t) = \Delta(t) - \hat{z}_{eq}$ denotes the uncertainty error. Under the assumption that $\Delta(t)$ is Lipschitz time uncertainties (i.e. $|\Delta(t)| \leq \mu$ and $|\dot{\Delta}(t)| \leq \bar{\mu}$, $\bar{\mu} > 0$). Then, it is possible to get $|\epsilon(t) + \hat{z}_{eq}| = |\Delta(t)|$ and $|\epsilon(t) + \hat{z}_{eq}| \leq |\mu|$. Consequently, $|\epsilon(t)| \ll \mu$ and $|\dot{\epsilon}(t)| \ll \bar{\mu}$. Despite the uncertainty error being much smaller than the actual uncertainties upper bound, it can be assumed as a Lipschitz time uncertainties of dynamical system (31).

As a final point in this section, the control objective is changed to design an effective auxiliary control v , such that both states $\xi_1 = \sigma$ and $\xi_2 = \dot{\sigma}$ of system (31) converge in finite time despite uncertainty $\epsilon(t)$, and remain in zero $\xi_1 = \xi_2 \equiv 0$. Furthermore, the uncertainty should be compensated by the control law v , so that $\dot{\xi}_2 \equiv 0$ (i.e. $\ddot{\sigma} \equiv 0$), which guarantees the establishment of 3-SM.

4 | DESIGN OF ADAPTIVE HIGH-ORDER SLIDING MODE CONTROLLER

Inspired by the aforementioned discussion, an AHOSMC is proposed for finite-time stabilization of an uncertain system (31); the proposed controller can be inferred as a combination of STA with nonsingular terminal sliding mode NTSM. Furthermore, the controller gains can be generated by using an adaptive estimation scheme, wherein the gains overestimation problem and uncertainties boundaries knowledge can be avoided. Hence, the global AHOSMC control law is able to ensure finite-time convergence of system trajectories (9), with high tracking accuracy, and generate smooth control with high attenuation of the chattering effect.

4.1 | Proposed adaptive controller design

The dynamic feedback of the proposed control law is defined as:

$$\begin{cases} v = -k_1 L^{2/3} [\varphi_L(\xi_1, \xi_2)]^{1/3} + v_0 \\ \dot{v}_0 = -k_2 L [\varphi_L(\xi_1, \xi_2)]^0 \end{cases} \quad (32)$$

where

$$\varphi_L(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 + \frac{k_3}{L^{1/2}} [\xi_2]^{3/2}. \quad (33)$$

$\varphi_L(\xi_1, \xi_2)$ is a continuous differentiable function which is globally finite time stable, $k_i > 0, (i = 1, 2, 3)$ and $L > 0$ are appropriate gains. Note that if L is selected as $L = 1$, the sliding function $\varphi_1(\xi_1, \xi_2)$ can be denoted simply as $\varphi(\xi_1, \xi_2)$. Let us suppose $\xi_3 \triangleq v_0 + \epsilon(t)$ as a virtual state, then the closed-loop system (31) with control law (32) can be expressed as:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = -k_1 L^{2/3} [\varphi_L(\xi_1, \xi_2)]^{1/3} + \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = -k_2 L [\varphi_L(\xi_1, \xi_2)]^0 + \dot{\epsilon}(t) \end{cases} \quad (34)$$

By using the change of variables $\xi \rightarrow \frac{1}{L}\xi$, the system (34) becomes:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = -k_1 [\varphi(\xi_1, \xi_2)]^{1/3} + \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = -k_2 [\varphi(\xi_1, \xi_2)]^0 + \rho \end{cases} \quad (35)$$

where the uncertainties $\rho = \frac{\dot{\epsilon}(t)}{L}$ is bounded signal $|\rho| \leq \bar{\rho}$, ($\bar{\rho} > 0$). Note that both systems (34) and (35) have the same stability proof. The system (35) will be considered in the rest of analysis.

Remark 2. Both systems (34) and (35) are homogeneous of degree $q = -1$ with weights $r = (3, 2, 1)$ for the states ξ_1, ξ_2 , and ξ_3 respectively. Since the third equation in (34) and (35) is discontinuous, the solutions of both systems can be understood in the sense of Filippov.[58]

Remark 3. As is well known, the selection of controller gains is generally linked with the upper bound of uncertainties and disturbances, which is practically difficult to obtain

in advance. Furthermore, these gains have an important role in the control smoothness and convergence rapidity. In this paper, an adaptive estimation scheme is implemented online to adjust the controller gains without the problem of overestimation.[41,42]

An AHOSMC is now designed for finite-time stabilization of an uncertain system described by (9), in the presence of uncertainties with unknown boundaries. Based on control law (29)–(30), and by implementing an adaptive estimation scheme to design the controller gains in (32), the adaptive gains $k_1(t, \varphi)$ and $k_2(t, \varphi)$ are defined as follows:

$$\begin{cases} k_1(t, \varphi) = K_1 \sqrt{\phi(t)} \\ k_2(t, \varphi) = K_2 \phi(t) \end{cases} \quad (36)$$

where K_1 and K_2 are design parameters, $\phi(t)$ is a positive time-varying scaler which takes the form:

$$\dot{\phi}(t) = \begin{cases} \Omega \sqrt{\eta/2} \operatorname{sign}(|\varphi| - \mu_\varphi), & \text{if } \phi > \phi_m \\ \eta_m, & \text{if } \phi \leq \phi_m \end{cases} \quad (37)$$

where $\Omega, \eta, \phi_m, \eta_m$, and μ_φ are arbitrary positive constants. The main idea of the proposed adaptive scheme for controller gains in (32) is to dynamically increase the control gains $k_1(t, \varphi)$ and $k_2(t, \varphi)$ until the establishment of SOSM (i.e. $\varphi = \dot{\varphi} \equiv 0$), then the gains start dynamically reducing. Therefore, a detector that defines the beginning of SOSM destruction is incorporated into the adaptive scheme, which guarantees the not-overestimation of controller gains. For small positive parameters μ_φ and ϕ_m , suppose that $|\varphi(0)| > \mu_\varphi$ and $\phi(0) > \phi_m$, a real SOSM (i.e. $|\varphi| \leq \mu_1, |\dot{\varphi}| \leq \mu_2$, where $\mu_1 \geq \mu_\varphi$ and $\mu_2 > 0$) is established $\forall t \geq T_F$.

It is worth noting that by making $\mu_\sigma = 0$ with $\phi(0) > 0$, the term $\operatorname{sign}(|\varphi| - \mu_\varphi)$ in (37) will be eliminated, and the adaptive gain law (37) shall be changed to:

$\dot{\phi}(t) = \Omega \sqrt{\eta/2}$ if $\varphi \neq 0$ and $\dot{\phi}(t) = 0$ if $\varphi = 0$. In this case, the proposed controller will drive the trajectories of system (31) to the ideal SOSM $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ in finite time, although the control gains $k_1(t)$ and $k_2(t)$ can be overestimated. Hence, by applying a small vicinity as defined previously to the sliding surface: $|\varphi| \leq \mu_1$ and $|\dot{\varphi}| \leq \mu_2$, where $\mu_1 > \mu_\varphi > 0$ and $\mu_2 > 0$, once this vicinity is reached the gains start dynamically decreasing. However, as soon as the system trajectories leave the vicinity, the gains start increasing in order to drive these trajectories back to the vicinity in finite time. So by taking $\epsilon = \mu_1$, the adaptive gain law (37) can be expressed as follows:

$$\dot{\phi}(t) = \begin{cases} \Omega \sqrt{\eta/2}, & \text{if } |\varphi| \geq \varepsilon \\ 0, & \text{if } |\varphi| < \varepsilon \end{cases} \quad (38)$$

Now, by using the estimation gains (36) with adaptive law (38), the closed-loop system (35) becomes:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = -k_1(t) [\varphi(\xi_1, \xi_2)]^{1/3} + \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = -k_2(t) [\varphi(\xi_1, \xi_2)]^0 + \rho. \end{cases} \quad (39)$$

The system (39) is also homogeneous of degree $q = -1$ with weights $r = (3, 2, 1)$ for the states ξ_1, ξ_2 and ξ_3 , respectively.

Remark 4. According to the control law designed in (32) with adaptive gains k_1 and k_2 defined by (36), the parameters K_1 and K_2 are linked directly with $|\varphi|^{1/3} \text{sign}(\varphi)$ and the integral of $\text{sign}(\varphi)$, respectively. Furthermore both K_1 and K_2 are linked with $\phi(t)$. Hence, large values of the parameters K_1, K_2, Ω, η , and the initial condition $\phi(0)$ can guarantee fast convergence during the reaching phase, but generate significant chattering in the control signal. Then, these parameters must be selected judiciously to stave off the compromise between the chattering effect and convergence rapidity.

Remark 5. The main aims of the proposed controller (32) with adaptive gains (36) are: the system states $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ corresponding to $(\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma})$ stabilize in finite time (i.e. a 3-SM is established) by using only the information about ξ_1 and ξ_2 , and the discontinuous integral term v_0 in (32) is able to estimate and fully compensate the uncertainties $\Delta(t)$ when the compensating control term v_c in (30) is not used (in the global control law (29)). Consequently, the state $\dot{\xi}_2 = 0$, and the tracking accuracy of sliding variables $\sigma, \dot{\sigma}$, and $\ddot{\sigma}$ corresponds to the 3-SM.

4.2 | Stability analysis

As mentioned previously, homogeneous and continuously differentiable functions have interesting proprieties in HOSM controllers. According to the homogeneity of the system (39) and under the proposed AHOSMC controller (29), where v_c and v are given in (30) and (32),

the global stability property is guaranteed by means of the homogeneous Lyapunov function.[31]

Theorem 2. Consider the system (39) with bounded uncertainties $|\rho| \leq \bar{\rho}$, for every $\bar{\rho} > 0$, and with an appropriate sliding parameter $k_3 > 0$. The proposed control (32) with adaptive estimation gains (36) and (38) ensures finite-time convergence of states $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ to zero and further guarantees the finite-time convergence of the real third-order sliding mode, that is, $\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} \equiv 0$.

As a consequence of Theorem 2, under the global control scheme (29), the finite-time convergence of system states (9) to the origin is achieved for any initial states $\xi(0)$ and $\underline{x}(0)$. Also, the convergence of estimation gains is attained.

Proof. In order to analyze the stability of the closed-loop system (39), it is worth noting that in adaptive law (38), the time-varying function $\phi(t)$ is bounded, and from (36), both $k_1(t)$ and $k_2(t)$ are linked to $\phi(t)$, then the adaptive gains k_i , ($i = 1, 2$) are also bounded. Therefore, there exist positive constants k_i^* , ($i = 1, 2$), such that $k_i(t) - k_i^* < 0, \forall t \geq 0$. It can be concluded according to (36) that there also exists a positive constant ϕ^* , such that $\phi(t) - \phi^* < 0, \forall t \geq 0$. Now, the global stability analysis of system dynamic (39) with adaptive gains (36) is performed based on the following continuous Lyapunov function candidate:

$$V(\xi, \phi) = V_0(\xi) + \frac{1}{5\eta}(\phi - \phi^*)^5 \quad (40)$$

where $V_0(\xi)$ is a continuously differentiable and homogeneous of degree $q_{V_0} = 5$, which is defined as follows:

$$V_0(\xi) = \beta |\xi_1|^5 + \xi_1 \xi_2 + \frac{2}{5} k_3 |\xi_2|^5 - \frac{1}{k_1^3} \xi_2 \xi_3^3 + \gamma |\xi_3|^5. \quad (41)$$

To simplify the proof of Theorem 2, it is possible to split the proof into two parts.

Proof part 1. The finite-time convergence of $V_0(\xi)$ is studied in this part. From (41), if the positive parameters β and γ are selected sufficiently large, $V_0(\xi)$ will be positive definite and bounded: $\mu_1(\|\xi\|) \leq V_0(\xi) \leq \mu_2(\|\xi\|)$, where $\mu_{1,2}(\|\xi\|)$ are two functions of \mathcal{K}_∞ class.

Definition 4 [59]. For any real values $p > 1$ and $q > 1$ such that $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, and any positive real numbers a, b , and c , the inequality $ab \leq c^p \frac{a^p}{p} + c^{-q} \frac{b^q}{q}$ holds (Young's inequality).

From (41) it follows that:

$$V_0(\xi) \geq \beta|\xi_1|^{\frac{5}{3}} - |\xi_1||\xi_2| + \frac{2}{5}k_3|\xi_2|^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{k_1^3}|\xi_2||\xi_3|^3 + \gamma|\xi_3|^5. \tag{42}$$

By using Young's inequality: $|\xi_1||\xi_2| \leq \frac{3}{5}c_1^{\frac{5}{3}}|\xi_1|^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{5}c_1^{-\frac{5}{3}}|\xi_2|^{\frac{5}{3}}$ and $|\xi_2||\xi_3|^3 \leq \frac{3}{5}c_2^{\frac{5}{3}}|\xi_2|^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{5}c_2^{-\frac{5}{3}}|\xi_3|^5$, where c_1 and c_2 are positive numbers, the substitution of these inequalities in (42) yields:

$$V_0(\xi) \geq \left(\beta - \frac{3}{5}c_1^{\frac{5}{3}}\right)|\xi_1|^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{5}\left(k_3 - c_1^{-\frac{5}{3}} - c_2^{-\frac{5}{3}}\frac{1}{k_1^3}\right)|\xi_2|^{\frac{5}{3}} + \left(\gamma - \frac{3}{5k_1^3}c_2^{\frac{5}{3}}\right)|\xi_3|^5. \tag{43}$$

If all coefficients of (43) are positive, $V_0(\xi)$ is positive definite which can be realized by choosing, for example:

$$c_1 = \left(\frac{4}{k_3}\right)^{2/5}, c_2 = \left(\frac{4}{k_3k_1^3}\right)^{2/5}, \beta > \frac{3}{5}\left(\frac{4}{k_3}\right)^{2/3}, k_1^5\gamma > \frac{3}{5}\left(\frac{4}{k_3}\right)^{2/3}. \tag{44}$$

Let us define $\zeta_3 \triangleq \frac{\xi_3}{k_1}$, $\kappa \triangleq \frac{k_2}{k_1}$, $\bar{\gamma} \triangleq \gamma k_1^5$ and $\lambda \triangleq Lk_2$, and use the equality $\xi_1 = \varphi - k_3|\xi_2|^{3/2}$ founded from (33) with $L = 1$. The time derivative of V_0 is given by:

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(\xi) = & -k_1(\varphi - |\zeta_3|^3)(|\varphi|^{\frac{1}{3}} - \zeta_3) \\ & + \left(\frac{5}{3}\beta\left[\varphi - k_3|\xi_2|^{3/2}\right]^{\frac{5}{3}} + \xi_2\right)\xi_2 \\ & - 3\kappa|\zeta_3|^2\left(\frac{5}{3}\bar{\gamma}|\zeta_3|^2 - \xi_2\right)\left(|\varphi|^0 + \frac{\dot{\epsilon}(t)}{\lambda}\right). \end{aligned} \tag{45}$$

Note that the values of $(\kappa, \bar{\gamma}, \lambda)$ can be fixed independently of k_1 since the relation between (k_2, γ, L) and $(\kappa, \bar{\gamma}, \lambda)$ is one to one, for any value of k_1 . The objective is to confirm that, for any values of $k_3, \bar{\mu} > 0$, there exist sufficiently large values of $\beta, \bar{\gamma}, k_1, L > 0$, such that \dot{V}_0 is negative definite for any uncertainty $|\dot{\epsilon}(t)| \leq \bar{\mu}$.

Then, by using the following equalities, a founded continuous and homogeneous function can be considered as an upper bound for \dot{V}_0 :

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}\beta\left[\varphi - k_3|\xi_2|^{3/2}\right]^{\frac{5}{3}} + \xi_2 = & \frac{5}{3}\beta\left(\left[\varphi - k_3|\xi_2|^{3/2}\right]^{\frac{5}{3}} + k_3^{\frac{2}{3}}\xi_2\right) \\ & - \left(\frac{5}{3}\beta k_3^{\frac{2}{3}} - 1\right)\xi_2, \end{aligned}$$

$$\frac{5}{3}\bar{\gamma}|\zeta_3|^2 - \xi_2 = \frac{5}{3}\bar{\gamma}\left(|\zeta_3|^2 - |\varphi|^{\frac{2}{3}}\right) - \xi_2 + \frac{5}{3}\bar{\gamma}|\varphi|^{\frac{2}{3}}.$$

Also, because the function $[\cdot]^{\frac{2}{3}}$ is globally Hölder continuous with Hölder constant $2^{\frac{1}{3}}$ for all (φ, ξ_2) , the inequality $\left|\left[\varphi - k_3|\xi_2|^{3/2}\right]^{\frac{2}{3}} + k_3^{\frac{2}{3}}\xi_2\right| \leq 2^{\frac{1}{3}}|\varphi|^{\frac{2}{3}}$ holds.

Now, by defining the continuous and homogeneous function $W(\varphi, \xi_2, \zeta_3)$, it can be written:

$$\dot{V}_0(\xi) \leq -k_1(\varphi - |\zeta_3|^3)\left(|\varphi|^{\frac{1}{3}} - \zeta_3\right) + W(\varphi, \xi_2, \zeta_3) \tag{46}$$

where

$$\begin{aligned} W(\varphi, \xi_2, \zeta_3) \triangleq & \frac{5}{3}2^{\frac{1}{3}}\beta|\varphi|^{\frac{2}{3}}|\xi_2| - \left(\frac{5}{3}\beta k_3^{\frac{2}{3}} - 1\right)|\xi_2|^2 + 5\bar{\gamma}\frac{\bar{\mu}}{\lambda}\kappa|\zeta_3|^4 \\ & + 3\kappa|\zeta_3|^2\left|\frac{5}{3}\bar{\gamma}\left(|\zeta_3|^2 - |\varphi|^{\frac{2}{3}}\right) - \xi_2\right| \\ & + 3\kappa\frac{\bar{\mu}}{\lambda}|\zeta_3|^2|\xi_2| - 5\bar{\gamma}\kappa|\varphi|^{\frac{2}{3}}|\zeta_3|^2. \end{aligned}$$

According to φ , two cases are considered.

The first, when $\varphi = |\zeta_3|^3$, then $\dot{V}_{0\mathcal{M}} \leq W_{\mathcal{M}}(\varphi, \xi_2, |\varphi|^{\frac{1}{3}})$ on the surface $\mathcal{M} = \{\varphi = |\zeta_3|^3\}$, where $W_{\mathcal{M}} = -\left[|\varphi|^{\frac{2}{3}}, |\xi_2|\right]P\left[|\varphi|^{\frac{2}{3}}|\xi_2|\right]$, with

$$P = \left[5\bar{\gamma}\kappa\left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\lambda}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}2^{\frac{1}{3}}\beta + 3\kappa\left(1 + \frac{\bar{\mu}}{\lambda}\right)\right), \left(5\bar{\gamma}\beta k_3^{\frac{2}{3}} - 1\right)\right].W.$$

Therefore, on the set \mathcal{M} , $\dot{V}_0(\xi)$ is negative when the following inequalities are satisfied:

$$\lambda > \bar{\mu} \tag{47}$$

$$\beta > \frac{3}{5k_3^{2/3}} \tag{48}$$

$$\bar{\gamma} > \left(\frac{5}{3}2^{\frac{1}{3}}\beta + 3\kappa\left(1 + \frac{\bar{\mu}}{\lambda}\right)\right)^2 / 20\kappa\left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\lambda}\right)\left(\frac{5}{3}\beta k_3^{\frac{2}{3}} - 1\right). \tag{49}$$

In the second case, when $\varphi \neq |\zeta_3|^3$, \dot{V}_0 can be negative definite also outside \mathcal{M} , by selecting a large value of k_1 :

$$\dot{V}_{0\mathcal{M}^c} \leq -(k_1 - \psi(\varphi, \xi_2, \zeta_3))(\varphi - |\zeta_3|^3)\left(|\varphi|^{\frac{1}{3}} - \zeta_3\right) \tag{50}$$

$$\psi(\varphi, \xi_2, \zeta_3) \triangleq \frac{W(\varphi, \xi_2, \zeta_3)}{(\varphi - |\zeta_3|^3)\left(|\varphi|^{\frac{1}{3}} - \zeta_3\right)}. \tag{51}$$

$\psi(\varphi, \xi_2, \zeta_3)$ is a homogeneous function of degree $q_\psi = 0$, that is, for any $k > 0, \psi(\varphi, \xi_2, \zeta_3) = \psi(k^3\varphi, k^2\xi_2, k\zeta_3)$, so

all the values of $\psi(\varphi, \xi_2, \xi_3)$ are taken on the homogeneous unit sphere $S = \{(\varphi, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3, |\varphi|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2 = 1\}$. Then, except on $\mathcal{M} \cap S$, ψ is continuous everywhere. According to (47)–(49) and ([60] Theorem 3.7, Chapter 3, Section 3, p. 76), ψ is bounded in \mathbb{R}^3 , if the values of k_1 are selected sufficiently large.

$$k_1 > \max_S \{\psi(\varphi, \xi_2, \xi_3)\}. \quad (52)$$

Now, the negative definiteness of $\dot{V}_0(\xi)$ can be provided according to the classical result on homogeneous functions ([61] Theorem 4.4, Section 5). Since $V_0(\xi)$ is a continuous, positive definite, and homogeneous function of degree $q_{V_0} = 5$, and $\dot{V}_0(\xi)$ in (46) is a continuous, negative definite, and bounded homogeneous function of degree $q_{\dot{V}_0} = 4$ (recalling that the homogeneity degree of (35) is $q = -1$, then $q_{\dot{V}_0} = q_{V_0} + q$). Hence, it is concluded from ([62] Lemma 4.2) that, for any $\xi \in \mathbb{R}^3$, there exists a positive real ϑ , such that the following inequality holds:

$$\dot{V}_0(\xi) \leq -\vartheta \bar{V}_0^{\frac{4}{5}}(\xi). \quad (53)$$

Finally, the inequality (53) and homogeneity principle[63] can draw directly that the system (35) (also (34)) is globally uniformly finite-time stable at equilibrium point $\xi = 0$ ([28] Theorem 1), and the convergence time estimation can be also obtained (Definition 3).

Proof part 2. Now, under the assumption that the controller gains $k_i, (i = 1, 2)$ are adaptively tuned as designed in (36) and (38), the finite-time stability of (39) under the proposed controller (32) is performed. Hence, the finite-time stabilization of the system states (9) under global control law (29) can be also proved. Let us define the estimation error $\tilde{\phi} = \phi - \phi^*$, where $\dot{\tilde{\phi}} = \dot{\phi}$. Then, the time derivative of the entire Lyapunov function (40) is given by:

$$\dot{V}(\xi, \phi) = \dot{V}_0(\xi) + \frac{1}{\eta} (\tilde{\phi})^4 \dot{\phi}. \quad (54)$$

In view of (53), $\dot{V}(\xi, \phi)$ can be represented as:

$$\dot{V}(\xi, \phi) \leq -\vartheta V_0^{\frac{4}{5}} + \frac{1}{\eta} (\tilde{\phi})^4 \dot{\phi} + \frac{\Omega}{\sqrt{2\eta}} |\tilde{\phi}|^4 - \frac{\Omega}{\sqrt{2\eta}} |\tilde{\phi}|^4. \quad (55)$$

Taking into account Jensen's inequality[59]:

$$(|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (|a| + |b|), \text{ with } p = \frac{5}{4} > 1, \text{ then:}$$

$$\left((V_0^{\frac{4}{5}})^{5/4} + \left(|\tilde{\phi}|^4 \right)^{5/4} \right)^{4/5} \leq V_0^{\frac{4}{5}} + |\tilde{\phi}|^4. \quad (56)$$

From (56) and in view of entire Lyapunov function (40), we can derive:

$$-\vartheta V_0^{\frac{4}{5}} - \frac{\Omega}{\sqrt{2\eta}} |\tilde{\phi}|^4 \leq -\tilde{\vartheta} (V(\xi, \phi))^{\frac{4}{5}},$$

where $\tilde{\vartheta} = \min\left(\vartheta, \frac{\Omega}{\sqrt{2\eta}}\right)$. As aforementioned, the adaptive gains $k_i, (i = 1, 2)$ are bounded and $\phi(t) - \phi^* < 0, \forall t \geq 0$, then $\dot{V}(\xi, \phi)$ can be rewritten as:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi, \phi) &\leq -\tilde{\vartheta} (V(\xi, \phi))^{\frac{4}{5}} + \frac{1}{\eta} (\tilde{\phi})^4 \dot{\phi} + \frac{\Omega}{\sqrt{2\eta}} |\tilde{\phi}|^4 \\ &\leq -\tilde{\vartheta} (V(\xi, \phi))^{\frac{4}{5}} - |\tilde{\phi}|^4 \left(\frac{\dot{\phi}}{\eta} - \frac{\Omega}{\sqrt{2\eta}} \right). \end{aligned} \quad (57)$$

Therefore, according to (38) $\dot{\phi} = \sqrt{\eta/2} \Omega$, (57) becomes:

$$\dot{V}(\xi, \phi) \leq -\tilde{\vartheta} (V(\xi, \phi))^{\frac{4}{5}}. \quad (58)$$

Then, under the proposed controller (32) with adaptive estimation gains, the stabilization of system states (39) in finite time is ensured.

To the end of the stability proof, based on the information provided by F-TOSMLO, the global AHOSMC control law (29)–(30) and (32) with adaptive estimation gains (36)–(38) guarantees the finite-time convergence of all system trajectories of (39) to the third-order sliding mode. Hence, the finite-time convergence of system states (9) to their references is also achieved despite any bounded uncertainty. These complete the proof.

Remark 6. As discussed in the proposed adaptive estimation scheme of controller gains, due to the finite time convergence of $\phi(t)$, it is noteworthy that the adaptive gains (36) guarantee a real SOSM (i.e. $\varphi = \dot{\varphi} \equiv 0$). This implies that on the system (39) with control law (32), a real 3-SM is also established (i.e. $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 \equiv 0$). Since the states (ξ_1, ξ_2, ξ_3) correspond to $(\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma})$, after finite-time stabilization of 3-SM set $\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} \equiv 0$, with the proposed AHOSMC, a third-order precision with respect to the sampling time is attained, which is higher than other SOSM algorithms.

5 | SIMULATION EXAMPLE

In this section, in order to verify the feasibility and the effectiveness of the proposed controller observer, its overall scheme will be applied for trajectory tracking control

of a two-link robot manipulator with disturbances. The manipulator dynamic is given as follows:

$$M(q)\ddot{q} + Q(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \Gamma + D \quad (59)$$

where,

$$M(q) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2(s_1s_2 + c_1c_2) \\ m_2l_1l_2(s_1s_2 + c_1c_2) & m_2l_2^2 \end{bmatrix},$$

$$Q(q, \dot{q}) = m_2l_1l_2(c_1s_2 - s_1c_2) \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_2 \\ -\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} -(m_1 + m_2)l_1gs_1 \\ -m_2l_2gs_2 \end{bmatrix},$$

where $q = [q_1, q_2]^T$ are the generalized coordinates, $M(q)$ is the symmetric, positive-definite inertia matrix, $Q(q, \dot{q})$ is the centripetal Coriolis matrix, $G(q)$ is a gravitational vector, $\Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2]^T$ is the joint torque input vector, and $D = [D_1, D_2]^T$ represents the sum of uncertainties and disturbances vectors: $D_u = [D_{u1}, D_{u2}]^T$ and $D_d = [D_{d1}, D_{d2}]^T$, respectively. $m_1 = m_2 = 1$ (kg) are link masses, $l_1 = l_2 = 1$ (m) are link lengths, acceleration due to gravity $g = 9.8$ (m/s²), $s_i = \sin(q_i)$, $c_i = \cos(q_i)$, $i = 1, 2$. Let us define the system state vector $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, $x_1 = q_1$, $x_2 = \dot{q}_1$, $x_3 = q_2$, and $x_4 = \dot{q}_2$, the dynamic (59) can be represented by the following state space:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_1(x) + g_{11}(x)\Gamma_1 + g_{12}(x)\Gamma_2 + D_1 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + g_{21}(x)\Gamma_1 + g_{22}(x)\Gamma_2 + D_2 \end{cases} \quad (60)$$

where all functions $f_i(x), i = 1, 2, g_{11}(x), g_{12}(x), g_{21}(x)$, and $g_{22}(x)$ are presented thoroughly in.[49] The measurable angular positions x_1 and x_3 are assumed to be constrained within $[-\pi/2, \pi/2]$. Let us define $X_1 = [x_1, x_3]^T$, $X_2 = [x_2, x_4]^T$ and $X = [X_1, X_2]^T$, then the original system (60) is represented by the IT2 T-S fuzzy nominal model given by nine fuzzy rules, which have the following form:

Rule i : if x_1 is about p_1^i , and x_3 is about p_3^i , then

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = A_i X + B_i \Gamma + D \end{cases}$$

where the parameters of A_i and B_i ($i = 1 : 9$) are obtained by offline computing,[49] p_1^i and p_3^i are taken around the points $[-\pi/2, 0, \pi/2]$. For all the rules and to build the nominal model, three interval type-2 Gaussian membership functions depending to $x_i(t), i = 1, 3$ and covering all the universe of discourse are defined as shown in

Figure 1. Recall that the sum of modeling uncertainties D_u and disturbances D_d is given by $D = [D_1, D_2]^T$ additive to the nominal model such as:

$$D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{u1} \\ D_{u2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{d1} \\ D_{d2} \end{bmatrix}, \text{ where}$$

$$D_u = \begin{bmatrix} 5 \sin(x_1) + 0.2 \sin(x_2) \\ 5 \sin(x_3) + 0.2 \sin(x_4) \end{bmatrix} \text{ and}$$

$$D_d = \begin{bmatrix} 0.5 \sin(2t) + 0.5 \cos(3t) \\ 0.5 \sin(2t) + 0.5 \cos(3t) \end{bmatrix}.$$

The objective is to achieve finite-time convergence of the system states $x(t)$ to their references $x_d(t)$, in which the dynamic of desired trajectory is proposed as in[49]:

$$\dot{x}_d(t) = A_d x_d(t) + r(t) \quad (61)$$

where $A_d = [0 \ 1 \ 0 \ 0; -6 - 5 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 - 6 - 5]$ and $r(t) = [0, 8 \sin(t), 0, 8 \cos(t)]$. The initial conditions are considered as $x(0) = [\pi/30, 0, \pi/30, 0]$.

To verify the effectiveness of the proposed AHOSMC integrated with the HOSM observer, the simulations are split into two parts. Firstly, to evaluate the performance of the HOSM observer, we compare the F-SOSMO designed in (11) with the F-TOSMLO given by (21), in terms of both velocity estimation and exact reconstruction of the uncertainties. Secondly, based on the F-TOSMLO, the controller performances obtained by applying the proposed AHOSMC are compared with those obtained with the adaptive super twisting sliding mode controller ASTSMC proposed in.[38]

For the first part of the simulation, the observer gains for both F-SOSMO and F-TOSMLO are selected as: $\alpha_2 = 1.9(F^+)^{1/3}$, $\alpha_1 = 1.5(F^+)^{1/2}$, whereas for F-TOSMLO $\alpha_0 = 1.1F^+, (F^+ > 0)$; this choice meets the requirement in[15,27] and guarantees the finite-time stability of (12) and (22), and the linear gains are set through computer simulation as $\beta_1 = 45$ and $\beta_2 = 35$. For uncertainty reconstruction in F-SOSMO, a low pass filter is used with sampling time $\Lambda = 10^{-4}s$ and $\tau_z = \Lambda^{1/2}s$. The comparison between the velocities estimation for F-SOSMO and F-TOSMLO is shown in Figure 2. Figure 3 depicts the

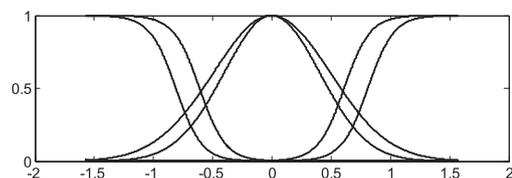


FIGURE 1 Interval type-2 antecedent membership functions of $x_i(t), i = 1, 3$

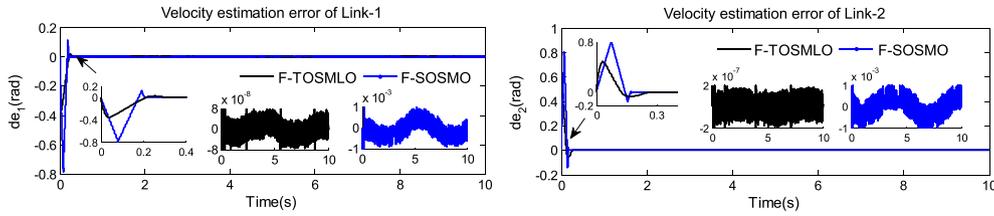


FIGURE 2 Comparison of velocities estimation for F-SOSMO and F-TOSMLO [Color figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

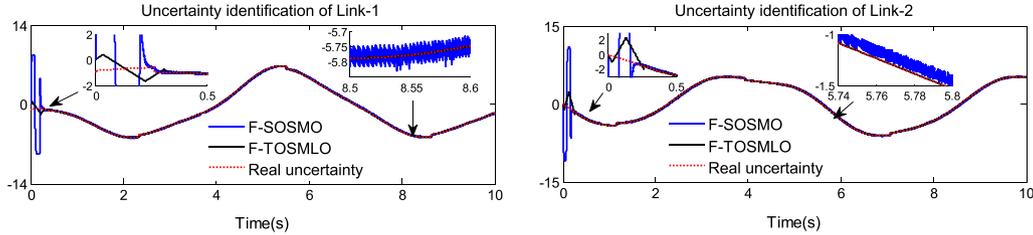


FIGURE 3 Comparison of uncertainties identification for F-SOSMO and F-TOSMLO [Color figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

uncertainties identification for both observers. It is clear from the simulation results shown in Figure 2 that a finite-time estimation is achieved for both observers; however, despite the convergence time of F-SOSMO being less than that of F-TOSMLO, the estimation accuracy provided by F-TOSMLO is higher than that of F-SOSMO, where with F-TOSMLO: $|\dot{e}_1| \leq 8 \times (10^{-4})^2$ and $|\dot{e}_2| \leq 20 \times (10^{-4})^2$ are reached in the finite time of $t \cong 0.3s$ and $t \cong 0.26s$ for joint-1 and joint-2 respectively, whereas with F-SOSMO: $|\dot{e}_1| \leq 10 \times (10^{-4})^1$ and $|\dot{e}_2| \leq 10 \times (10^{-4})^1$ are reached in $t \cong 0.22s$ and $t \cong 0.17s$, for joint-1 and joint-2 respectively. Also, the uncertainties reconstruction provided by F-TOSMLO is better than that of F-SOSMO, where a time delay introduced by a low pass filter coupled with a switching term produces the chattering phenomenon, as shown in Figure 3. These results confirm the satisfactory performances provided by F-TOSMLO.

For the second part of the simulation, the ASTSMC[38] integrated with F-TOSMLO is applied to investigate the performance of the proposed AHOSMC. It is worth noting that the adaptive super twisting control law (ASTC) proposed in[38] is designed based on the so-called continuous terminal sliding mode CTSM[30]; the main benefit of the latter (i.e. CTSM) is generating continuous control with finite-time stabilization, and also establishing a third-order SM by keeping SOSM constraint. Unfortunately this aim is not mentioned in.[38] The ASTC is designed based on anhomogeneous sliding manifold $\varphi_{ASTC} = \xi_2 + k_3[\xi_1]^{2/3}$ and the global control law ASTSMC integrated with F-TOSMLO is expressed as follows:

$$u_{ASTSMC} = u_{ASTC} + v_c \tag{62}$$

$$\begin{cases} u_{ASTC} = -G_0(\underline{x})^{-1}(F_0(\underline{x}) + u_{CTSM}) \\ u_{CTSM} = -k_1 |\varphi_{ASTC}|^{1/2} \text{sign}(\varphi_{ASTC}) + v_0 \\ \dot{v}_0 = -k_2 \text{sign}(\varphi_{ASTC}) \end{cases} \tag{63}$$

where the controller gains k_1 and k_2 are adjusted online with the same adaptive scheme proposed in this paper which is defined in (36)–(38).

The simulations of the proposed AHOSMC and ASTSMC based on F-TOSMLO are carried out in MATLAB/Simulink software using ODE4 solver with step size fixed to $\Lambda = 10^{-3} s$. Two cases are considered in this simulation: firstly by using the compensating control v_c , and in the second case only the nominal control is used (without compensating control i.e. $v_c = 0$). Table 1 gives the tuning parameters for both controllers.

Remark 7. The initial gains K_1 and K_2 for ASTSMC (62)–(63) are selected as discussed in,[38] where $K_1 = 100K_2$. It is worth noting that, when the initial gains are increased,

TABLE 1 Controller parameters

Controller	Tuning parameters
AHOSMC	$K_1 = 1.5K; K_2 = 1.1K; K = 5; k_3 = 1/3; \eta = 2; \Omega = 1; \epsilon = 0.001$
ASTSMC[38]	$K_1 = 12; K_2 = 0.12; k_3 = 3; \eta = 2; \Omega = 1; \epsilon = 0.001$

the chattering is highly attenuated and the control signal becomes almost continuous; however, the convergent rate and tracking accuracy are significantly worsened and, consequently, the ASTSMC may not be able to guarantee the convergence of system states to their references.

Remark 8. For the proposed AHOSMC, according to the controller gains structure expressed in (36), and after several simulation tests, it has been remarked that the combination $K_1 = 1.5K$ and $K_2 = 1.1K$ ($K > 0$) allows for optimal results in terms of tracking and control performance. Moreover, it is remarked that large initial values K_1 and K_2 lead to fast convergence of system states but the control efforts are increased. Therefore, the initial adaptive gain values are selected appropriately after simulation tests in order to avoid the trade-off between control efforts and tracking rapidity.

The time histories of the position states (q_1, q_2) and the velocity states (\dot{q}_1, \dot{q}_2) are presented in Figures 4 and 5, respectively. Obviously, both controllers ensure good tracking performance of all system states to their desired trajectories despite uncertainties. Figure 6 shows the tracking accuracy of system states provided by both controllers. Since the errors $(e_i, \dot{e}_i, \ddot{e}_i)$ correspond to the sliding variables $(\sigma_i, \dot{\sigma}_i, \ddot{\sigma}_i)$ for joint- i ($i = 1, 2$), $\ddot{\sigma} = -k_1[\varphi]^{1/3} + \xi_3$ in the proposed AHOSMC, and $\ddot{\sigma} = -k_1[\varphi_{ASTC}]^{1/2} + \xi_3$ in ASTSMC, where $\xi_3 \triangleq v_0 + \epsilon(t)$. According to the homogeneity propriety of both

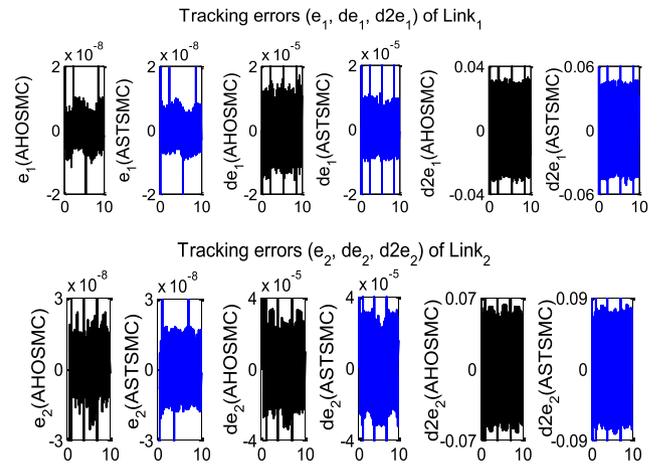


FIGURE 6 Precision of tracking errors $(e_i, \dot{e}_i, \ddot{e}_i)$ of link, $(i = 1, 2)$ ($v_c \neq 0$) [Color figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

controllers, and after finite-time convergence, it is clearly observed from Figure 6 that high tracking accuracy is attained under both controllers; with AHOSMC the precision given by $|e_1| \leq 20 \times (10^{-3})^3$, $|\dot{e}_1| \leq 20 \times (10^{-3})^2$, $|\ddot{e}_1| \leq 40 \times (10^{-3})^1$, and $|e_2| \leq 30 \times (10^{-3})^3$, $|\dot{e}_2| \leq 40 \times (10^{-3})^2$, $|\ddot{e}_2| \leq 70 \times (10^{-3})^1$ for joint-1 and joint-2 respectively, corresponds to a 3-SM with respect to the simulation step ($\Lambda = 10^{-3}$ s). Furthermore, the precision provided by ASTSMC is given by $|e_1| \leq 20 \times (10^{-3})^3$, $|\dot{e}_1| \leq 20 \times (10^{-3})^2$, $|\ddot{e}_1| \leq 60 \times (10^{-3})^1$, and $|e_2| \leq 30 \times (10^{-3})^3$, $|\dot{e}_2| \leq 40 \times (10^{-3})^2$, $|\ddot{e}_2| \leq 90 \times (10^{-3})^1$, for joint-1 and joint-2, respectively. Then it is deduced that both controllers provide finite-time convergence to the third sliding

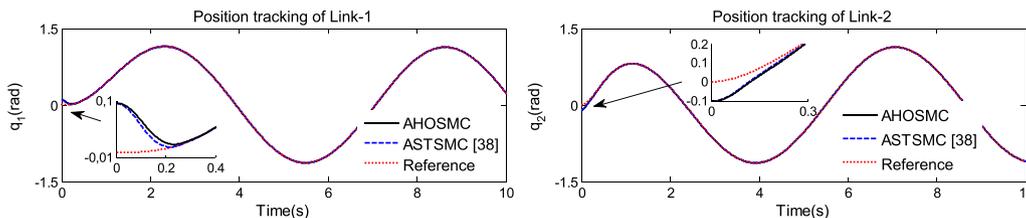


FIGURE 4 Position tracking performance of (q_1, q_2) ($v_c \neq 0$) [Color figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

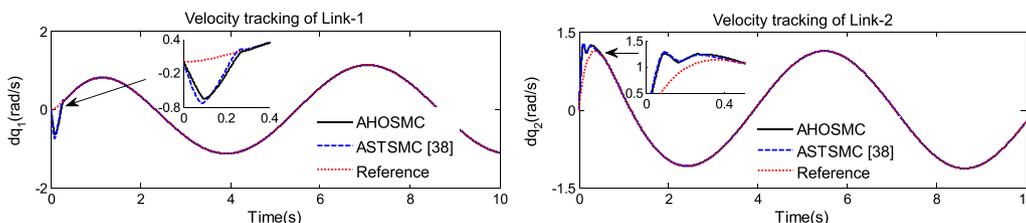


FIGURE 5 Velocity tracking performance of (\dot{q}_1, \dot{q}_2) ($v_c \neq 0$) [Color figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

set $\sigma_i = \dot{\sigma}_i = \ddot{\sigma}_i \equiv 0$, where third-order sliding accuracy is also achieved.

The finite-time stabilization of switching surfaces is clearly shown in Figure 7, with better accuracy under AHOSMC compared to ASTSMC, where $|\varphi| \leq 20 \times (10^{-3})^3$ and $|\varphi| \leq 40 \times (10^{-3})^3$ reach in finite time for joint-1 and joint-2 respectively, and in ASTSMC $|\varphi_{ASTC}| \leq 20 \times (10^{-3})^2$ for joint-1 and $|\varphi_{ASTC}| \leq 40 \times (10^{-3})^2$ for joint-2. Figure 8 displays the control inputs Γ_1 and Γ_2 generated by both controllers at joint-1 and joint-2, respectively. It is obvious that smooth control signals with high attenuation of chattering effect are effectively attained under both controllers, which means that the main feature of SOSM is achieved.

According to the time histories of adaptive gains k_1 and k_2 of the proposed AHOSMC and ASTSMC[38]

presented in Figure 9, the proposed adaptive gains (36)–(38) are convergent and bounded under both controllers. Moreover, from Figure 10, which depicts the phase portrait of plane errors (e_i, \dot{e}_i) , $i = 1, 2$ for link- i along with the sliding manifold $\varphi = 0$ for the proposed AHOSMC, and $\varphi_{ASTC} = 0$ for ASTSMC, the phase plane trajectories (e_i, \dot{e}_i) have classical typical SOSM behaviors, such as the error trajectories reaching the origin in finite time. It is noteworthy that according to the different values of controller gains which can be designed for both controllers, the phase plane behavior can be obtained similar to the terminal controller which is considered as an SOSM,[13] where the trajectories reach the sliding surface and slide along it until the origin, and it is also possible to obtain typical twisting controller behavior.

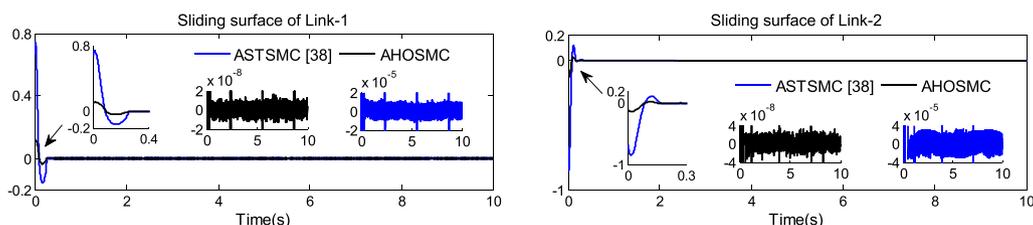


FIGURE 7 Time histories of switching surfaces ($v_c \neq 0$) [Color figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

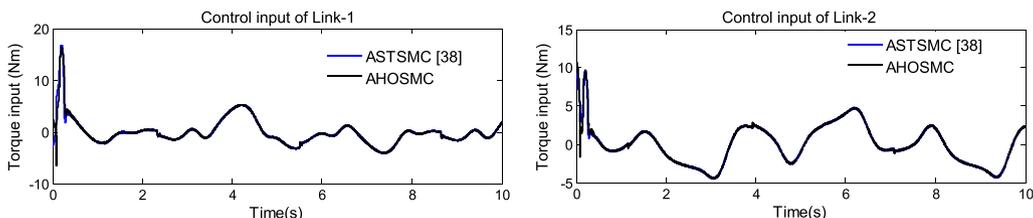


FIGURE 8 Control efforts of AHOSMC and ASTSMC ($v_c \neq 0$) [Color figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

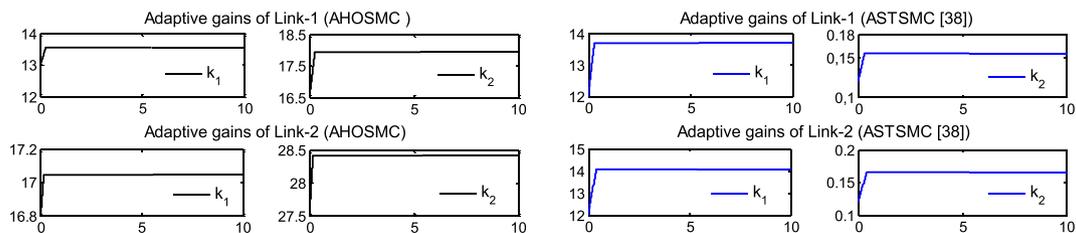


FIGURE 9 Time variance of adaptive gains k_1 and k_2 ($v_c \neq 0$) [Color figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

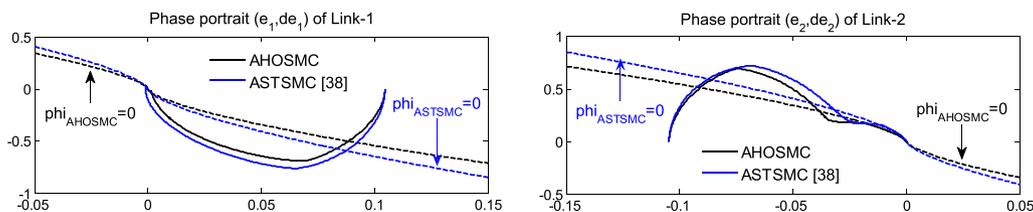


FIGURE 10 Phase portrait of plant's errors (e_i, \dot{e}_i) of link $i, (i = 1, 2)$ ($v_c \neq 0$) [Color figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

After presenting the simulation results of both controllers using compensating control v_c , which usually guarantees the best improvement in robustness and accuracy performance, a second simulation part is presented without compensating control (i.e. $v_c = 0$) to verify the effectiveness of the proposed AHOSMC in comparison to ASTSMC.[38] Referring to Figures 11 and 12, both controllers also provide good tracking performance of all states to their desired trajectories despite uncertainties. Furthermore, both controllers generate smooth control, as shown in Figure 13. However, from the precision of tracking errors presented in Figure 14, clearly the tracking accuracy provided by ASTSMC is significantly worsened, where $|e_1| \leq 0.8 \times (10^{-3})^1$, $|\dot{e}_1| \leq 5 \times (10^{-3})^1$, $|\ddot{e}_1| \leq 150 \times (10^{-3})^1$, and $|e_2| \leq 1 \times (10^{-3})^1$, $|\dot{e}_2| \leq 2 \times (10^{-3})^1$, $|\ddot{e}_2| \leq 100 \times (10^{-3})^1$, for joint-1 and joint-2 respectively, whereas the proposed AHOSMC provides the same precision achieved in the first case (i.e. $v_c \neq 0$), which also exhibits a third-order sliding accuracy. Furthermore, owing to the finite-time stabilization of tracking errors under both controllers, the SOSM behaviors of error trajectories in the phase plane (e_i, \dot{e}_i) can also be obtained, as presented in Figure 15. Note that when $v_c = 0$ in the proposed AHOSMC, $\ddot{\sigma} = -k_1[\varphi]^{1/3} + \xi_3$,

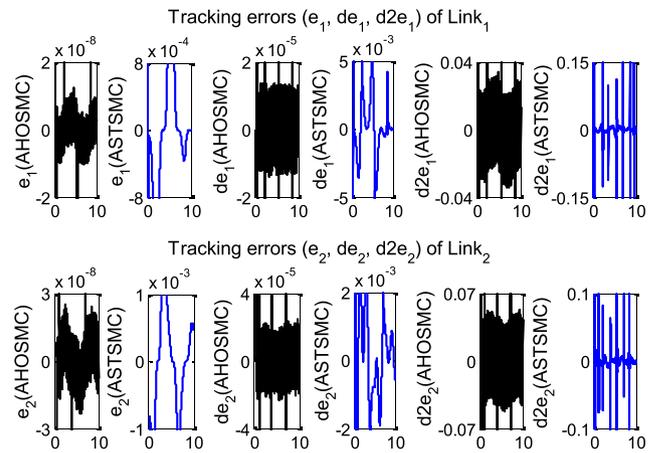


FIGURE 14 Precision of tracking errors ($e_i, \dot{e}_i, \ddot{e}_i$) of link i , ($i = 1, 2$) ($v_c = 0$) [Color figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

and $\ddot{\sigma} = -k_1[\varphi_{ASTC}]^{1/2} + \xi_3$ in the ASTSMC, where $\xi_3 \triangleq v_0 + \Delta(t)$. Then, it is evident that in the AHOSMC without v_c , the uncertainties $\Delta(t)$ are estimated and fully compensated by the discontinuous integral term $-v_0$ in finite time, as shown in Figure 16. Therefore, compared to ASTSMC,[38] the AHOSMC keeps approximately the same tracking accuracy in both cases with and without

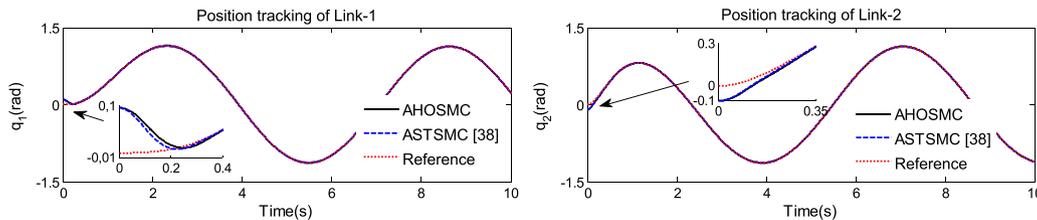


FIGURE 11 Position tracking performance of (q_1, q_2) ($v_c = 0$) [Color figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

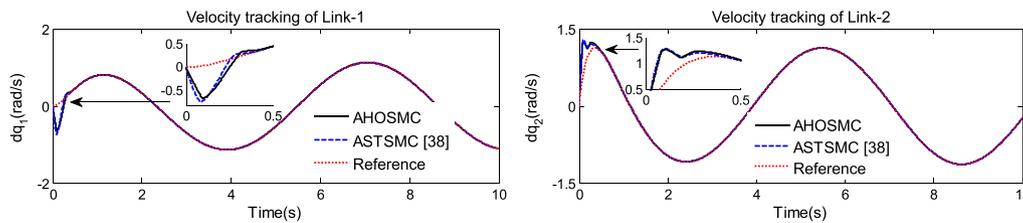


FIGURE 12 Velocity tracking performance of (\dot{q}_1, \dot{q}_2) ($v_c = 0$) [Color figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

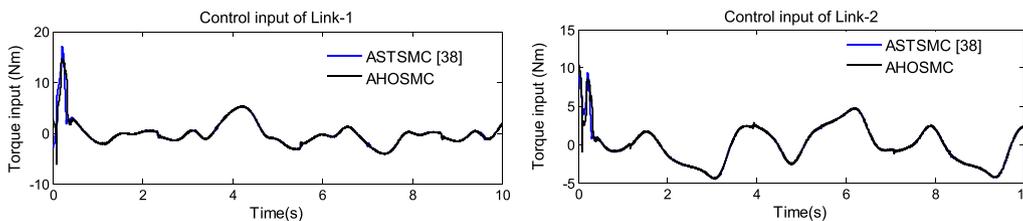


FIGURE 13 Control efforts of proposed AHOSMC and ASTSMC ($v_c = 0$) [Color figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

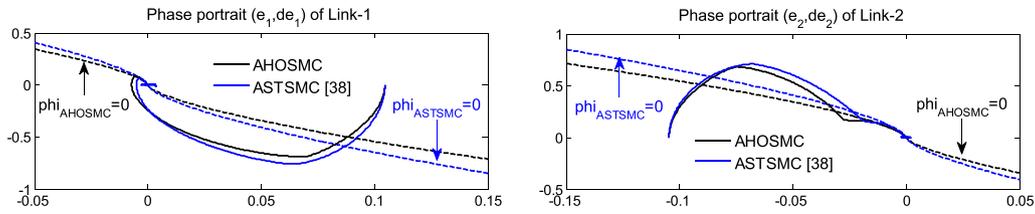


FIGURE 15 Phase portrait of plant's errors (e_i, \dot{e}_i) of link, $(i = 1, 2)$ ($v_c = 0$) [Color figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

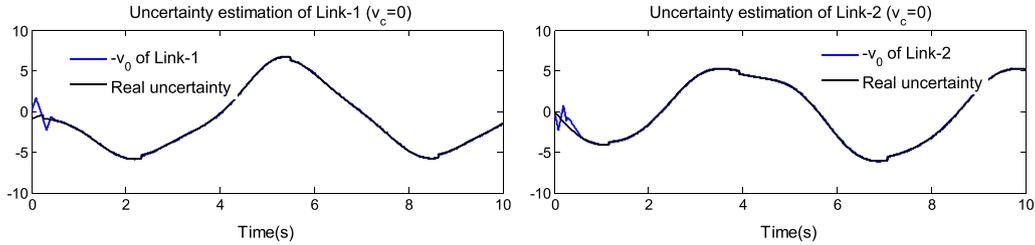


FIGURE 16 Estimation of uncertainties $\Delta(t)$ by controller state $-v_0$ in proposed AHOSMC ($v_c = 0$) [Color figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

compensating control term v_c , which proves the robustness of the proposed controller scheme.

According to Figure 17, it is noteworthy that the proposed adaptive scheme works appropriately for AHOSMC, where the adaptive gains k_1 and k_2 are also bounded and convergent, whereas for ASTSMC,[38] the controller gains still increase during the adaption process, which affects mainly the tracking accuracy and the robustness propriety. Moreover, it is also obvious from Figure 18 that the accuracy of switching surface stabilization in the proposed AHOSMC is better than in the ASTSMC.

To this end, some performance indicators (for the period $t_f = 10$ s with sampling time $\Lambda = 10^{-3}$) have been

reported to evaluate the AHOSMC and ASTSMC performances; the integral of absolute error criteria ($IAE = \int_0^{t_f} |e| dt$) is used as the tracking performance indicator; the control total variation ($TV = \sum_{i=1}^T \|\dot{u}_i\|, T = t_f/\Lambda$), control effort indicator ($CEI = \frac{1}{\sqrt{T}} \left(\sum_{i=1}^T (u_i)^2 \right)^{1/2}$), and chattering indicator ($CI = \frac{1}{\sqrt{T}} \left(\sum_{i=1}^T (\dot{u}_i)^2 \right)^{1/2}$) are used to measure the smoothness of the control signal, stand for the control effort, and quantify the chattering in the control signal, respectively.

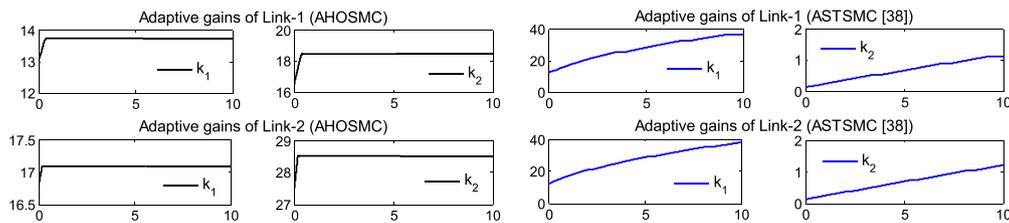


FIGURE 17 Time variance of adaptive gains k_1 and k_2 ($v_c = 0$) [Color figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

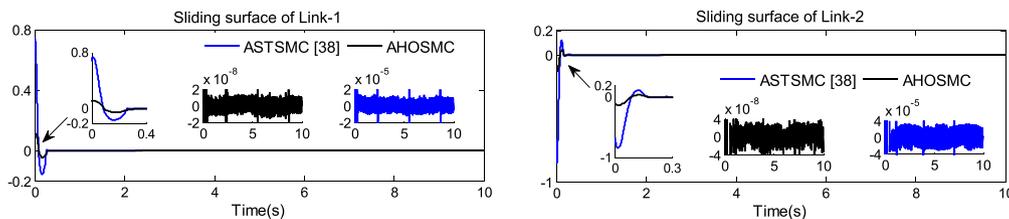


FIGURE 18 Time histories of switching surfaces ($v_c = 0$) [Color figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

TABLE 2 Comparison of the controller performances

	<i>Controller</i>		TV	CEI	CI	IAE
<i>With compensating control ($v_c \neq 0$)</i>	AHOSMC	Joint 1	8.37	2.47	0.083	0.012
		Joint 2	6.14	2.55	0.061	0.014
	ASTSMC[38]	Joint 1	9.67	2.53	0.096	0.011
		Joint 2	6.24	2.52	0.062	0.014
<i>Without compensating control ($v_c = 0$)</i>	AHOSMC	Joint 1	8.31	2.47	0.083	0.012
		Joint 2	6.16	2.54	0.061	0.014
	ASTSMC[38]	Joint 1	3.67	2.51	0.036	0.019
		Joint 2	2.26	2.50	0.022	0.020

According to the numerical results presented in Table 2, with the presence of uncertainties compensating control ($v_c \neq 0$), both controllers present a good tracking performance with third-order sliding mode accuracy from IAE, as discussed above. However, while both AHOSMC and ASTSMC use the same control efforts approximatively in view of the CEI indicator (in both cases), the proposed AHOSMC generates smoother control than the ASTSMC from TV and CI indicators when $v_c \neq 0$. On the other hand, although the control input generated by the ASTSMC is almost continuous compared to the AHOSMC when $v_c = 0$, tracking accuracy is significantly deteriorated and the main aim of the ASTSMC (i.e. third-order sliding accuracy) is not achieved as aforementioned. Therefore, in comparison to ASTC,[38] it can be concluded that the AHOSMC is preferable, and provides satisfactory performance in terms of tracking accuracy and robustness. Also, contrary to the ASTSMC, the AHOSMC generates smooth control without losing the invariance property of SMC (i.e. robustness property), where the chattering effect is not eliminated but highly attenuated (thus a real HOSM is established).

6 | CONCLUSION

An adaptive higher-order sliding mode controller (AHOSMC) based on an HOSM observer has been successfully applied for tracking control of MIMO uncertain nonlinear systems represented by an IT2 T-S fuzzy model. With the unavailability of velocity measurement, finite-time estimation of both velocity and uncertainties is achieved by using a fuzzy third-order sliding mode linear observer. The AHOSMC is presented as a combination of STA and TSMC, where the controller gains are estimated by using an adaptive scheme. The overall controller-observer scheme ensures finite-time stabilization of the third-order sliding mode by keeping SOSM constraint and providing a smooth control signal. Based on the HOSM observer, the simulation results obtained by

applying the proposed AHOSMC and adaptive super twisting controller ASTSMC[38] to a two-link robot manipulator demonstrate the satisfactory tracking and control performance of the proposed AHOSMC, in terms of finite-time convergence with high tracking accuracy and robustness, and the chattering in the control input is instead highly attenuated.

Owing to the favorable performances provided by the proposed AHOSMC-based HOSM observer, the proposed control scheme is appropriate for more complicated nonlinear systems such as robotic manipulators with three degrees of freedom (3-DOF) or in the presence of uncertainties and under the assumption that the velocity measurement is unavailable.

ORCID

Rim Hendel  <https://orcid.org/0000-0002-1569-3087>

REFERENCES

1. C. Edwards and S. Spurgeon, *Sliding Mode Control*, Taylor and Francis, London, 1998.
2. V. Utkin, *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*, 2nd ed., CRC press, automation and Control Engineering, 2009.
3. L. Cao et al., *Observer based event-triggered adaptive decentralized fuzzy control for nonlinear large-scale systems*, IEEE Trans Fuzzy Syst, (2018), <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2018.2873971>.
4. H. Ma et al., *Adaptive fuzzy event-triggered control for stochastic nonlinear systems with full state constraints and actuator faults*, IEEE Trans Fuzzy Syst, (2019), <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2019.2896843>.
5. Z. Zhang et al., *Adaptive even-triggered output feedback fuzzy control for nonlinear networked systems with packet dropouts and random actuator failure*, IEEE Trans Fuzzy Syst, (2019), <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2019.2891236>.
6. H. Liang et al., *Cooperative control for multi-agent systems with unknown control directions and input quantization*, IEEE Trans Cybern, (2019), <https://doi.org/10.1109/TCYB.2019.2893645>.
7. A. Pisano and E. Usai, *Sliding mode control: A survey with applications in math*, Mathematics and Computers in Simulation, **81** (5) (2011), 954–979.

8. A. Guezmil et al., *High order sliding mode observer-based backstepping fault-tolerant control for induction motor*, *Asian J. Control*, **21** (1) (2019), 33–42.
9. S. Wu, J. Zhang, B. Chai, *A robust backstepping sensorless control for interior permanent magnet synchronous motor using a super-twisting based torque observer*, *Asian J. Control*, **21** (1) (2019), 172–183.
10. A. Ben Brahim et al., *Simultaneous actuator and sensor faults reconstruction based on robust sliding mode observer for a class of nonlinear systems*, *Asian J. Control*, **19** (1) (2017), 362–371.
11. P. M. Tiwari, S. Janardhanan, M. un-Nabi, *Spacecraft anti-unwinding attitude control using second-order sliding mode*, *Asian J. Control*, **20** (1) (2018), 455–468.
12. O. Al Ameri and I. Boiko, *Performance of optimal super-twisting controller for liquid level*, *Asian J. Control*, **18** (4) (2016), 1581–1590.
13. A. Levant, *Principles of 2-sliding mode design*, *Automatica*, **43** (4) (2007), 576–586.
14. J. Davila, L. M. Fridman, A. Levant, *Second-order sliding modes observer for mechanical systems*, *IEEE Trans Autom Control*, **50** (11) (2005), 1785–1789.
15. L. Fraguelaa, L. M. Fridman, V. V. Alexandrov, *Position stabilization of a Stewart platform: High-order sliding mode observers based approach*, *J Franklin Inst*, **349** (2) (2012), 441–455.
16. Moreno, J. A. and M. Osorio, *A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers*, *47th IEEE Conf. Decision and Control*, Cancun, Mexico (2008), 2856–28.
17. Y. Shtessel et al., *Sliding Mode Control and Observation, Series: Control Engineering*, Birkhauser, Springer, Basel, 2014.
18. M. Malekzadeh, M. Rezayati, M. Saboohi, *Hardware-in-the-loop attitude control via a high-order sliding mode controller/observer*, *Proc Inst Mech Engineers Part G J Aerosp Eng*, (2017), 1–17, <https://doi.org/10.1177/0954410017706992>.
19. I. Gonzalez-Hernandez et al., *Real-time altitude control for a quadrotor helicopter using a super-twisting controller based on high-order sliding mode observer*, *Int J Advanced Robot Syst*, (2017), 1–15, <https://doi.org/10.1177/1729881416687113>.
20. A. Chalanga et al., *Implementation of super-twisting control: Super-twisting and higher order sliding mode observer based approaches*, *IEEE Trans Ind Electron*, **63** (6) (2015), 3677–3685.
21. A. Levant, *Robust exact differentiation via sliding mode technique*, *Automatica*, **34** (3) (1998), 379–384.
22. C. Xiao et al., *A fast convergence super-twisting observer design for an autonomous airship*, *Asian J Control*, **21** (1) (2019), 429–438.
23. J. A. Moreno and M. Osorio, *Strict Lyapunov functions for the super-twisting algorithm*, *IEEE Trans. Autom. Control*, **57** (4) (2012), 1035–1040.
24. Chalanga, A., S. Kamal, L. M. Fridman, B. Bandyopadhyay, and J. A. Moreno, *How to implement super-twisting controller based on sliding mode observer?*, *Proc. 13th IEEE Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, Nantes, France (2014). doi:<https://doi.org/10.1109/VSS.2014.6881145>.
25. G. Wang and Q. Xu, *Adaptive terminal sliding mode control for motion tracking of a micropositioning system*, *Asian J. Control*, **20** (3) (2018), 1241–1252.
26. Z. Zhao, S. Li, J. Yang, *Continuous finite-time sliding mode control for uncertain nonlinear systems with applications to DC-DC buck converters*, *Asian J. Control*, **21** (1) (2019), 312–322.
27. A. Levant, *Higher-order sliding modes, differentiation and output feedback control*, *Int. J. Control*, **76** (9/10) (2003), 924–941.
28. A. Levant, *Homogeneity approach to high-order sliding mode design*, *Automatica*, **41** (2005), 823–830.
29. A. Levant, *Quasi-continuous high-order sliding mode controller*, *IEEE Trans. Autom. Control*, **50** (11) (2005), 1812–1816.
30. L. M. Fridman et al., *Continuous nested algorithms: The fifth generation of sliding mode controllers*, In *Recent Advances in Sliding Modes: From Control to Intelligent Mechatronics. Studies in Systems, Decision and Control*, X. Yu, O. Efe (eds.), Springer 24, Switzerland, 2015, 5–35.
31. S. Kamal et al., *Continuous terminal sliding-mode controller*, *Automatica*, **69** (C) (2016), 308–314.
32. V. Torres-Gonzalez et al., *Design of continuous twisting algorithm*, *Automatica*, **80** (2017), 119–126.
33. J. A. Moreno et al., *Adaptive continuous twisting algorithm*, *Int. J. Control*, **89** (9) (2015), 1798–1806.
34. M. Van, P. Franciosa, D. Ceglarek, *Fault diagnosis and fault-tolerant control of uncertain robot manipulators using high order sliding mode*, *Math Problems in Engineering*, (2016), <https://doi.org/10.1155/2016/7926280>.
35. S. Tayebi-Haghighi, F. Piltan, J. M. Kim, *Robust composite high-order super-twisting sliding mode control of robot manipulators*, *Robotics*, **7** (13) (2018), 1–18.
36. A. Nasiri, S. Kiong Nguang, A. Swain, *Adaptive sliding mode control for a class of MIMO nonlinear systems with uncertainties*, *J Franklin Inst*, **351** (4) (2014), 2048–2061.
37. J.-y. Zhai and Z.-b. Song, *Adaptive sliding mode trajectory tracking control for wheeled mobile robots*, *Int J Control*, (2018), <https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1436194>.
38. A. Goel and A. Swarup, *MIMO uncertain nonlinear system control via adaptive high-order super twisting sliding mode and its application to robotic manipulator*, *J. Control, Autom. Elect. Syst.*, **28** (1) (2017), 36–49.
39. Y. Wang et al., *Multivariable output feedback adaptive terminal sliding mode control for underwater vehicles*, *Asian J. Control*, **18** (1) (2016), 247–265.
40. S. Mobayen, F. Tchier, L. Ragoub, *Design of an adaptive tracker for n-link rigid robotic manipulators based on super-twisting global nonlinear sliding mode control*, *Int. J. Syst. Science*, **48** (9) (2017), 1990–2002.
41. Shtessel, Y. B., J. A. Moreno, F. Plestan, L. M. Fridman, and A. S. Poznyak, *Super twisting adaptive sliding mode control: A Lyapunov design*, *Proc. 49th IEEE Conf. Decision and Control*, Atlanta, Georgia, USA (2010), 5109–5113.
42. Y. Shtessel, M. Taleb, F. Plestan, *A novel adaptive-gain super twisting sliding mode controller: Methodology and application*, *Automatica*, **48** (5) (2012), 759–769.
43. V. I. Utkin and A. S. Poznyak, *Adaptive sliding mode control with application to super-twisting algorithm: Equivalent control method*, *Automatica*, **49** (2013), 39–47.
44. C. Edwards and Y. B. Shtessel, *Adaptive continuous higher order sliding mode control*, *Automatica*, **65** (2016), 183–190.

45. P. Yu, Y. Shtessel, C. Edwards, *Continuous higher order sliding mode control with adaptation of air breathing hypersonic missile*, *Int. J. Adaptive Control and Signal Processing*, **30** (8–10) (2016), 1099–1117.
46. L. G. Borlaug et al., *Trajectory tracking for underwater swimming manipulators using a super twisting algorithm*, *Asian J. Control*, **21** (1) (2019), 208–223.
47. D. Ashtiani-Haghighi and S. Mobayen, *Design of an adaptive super-twisting decoupled terminal sliding mode control scheme for a class of fourth-order systems*, *ISA Trans.*, **75** (2018), 216–225.
48. M. Van, S. S. Ge, H. Ren, *Finite time fault tolerant control for robot manipulators using time delay estimation and continuous nonsingular fast terminal sliding mode control*, *IEEE Trans. Cybern.*, **47** (7) (2017), 1681–1693.
49. C. S. Tseng, B. S. Chen, H. J. Uang, *Fuzzy tracking control design for nonlinear dynamic systems via T-S fuzzy model*, *IEEE Trans Fuzzy Syst*, **9** (3) (2001), 381–392.
50. J. Han et al., *Optimal design for robust control of uncertain flexible joint manipulators: A fuzzy dynamical system approach*, *Int. J. Control*, **91** (4) (2018), 937–951.
51. M. B. Ghalia, *Modelling and robust control of uncertain dynamical systems using fuzzy set theory*, *Int. J. Control*, **68** (6) (1997), 1367–1396.
52. T. Takagi and M. Sugeno, *Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control*, *IEEE Trans Syst Man Cybern.*, **SMC-15** (1) (1985), 116–132.
53. N. N. Karnik, J. M. Mendel, Q. Liang, *Type-2 fuzzy logic systems*, *IEEE Trans Fuzzy Syst*, **7** (6) (1999), 643–658.
54. Q. Liang and J. M. Mendel, *Equalization of nonlinear time-varying channels using type-2 fuzzy adaptive filters*, *IEEE Trans Fuzzy Syst*, **8** (5) (2000), 551–563.
55. L. M. Fridman, A. Levant, J. Davila, *Observation of linear systems with unknown inputs via high-order sliding modes*, *Int J Syst Science*, **38** (10) (2007), 773–791.
56. Bhat, S. P. and D. S. Bernstein, *Finite-time stability of homogeneous systems*, *Proc. Amer. Control Conf.*, American Automatic Control Council, Albuquerque, New Mexico **4** (1997), 2513–2514.
57. A. Levant and L. M. Fridman, *Accuracy of homogeneous sliding modes in the presence of fast actuators*, *IEEE Trans. Autom. Control*, **55** (3) (2010), 810–814.
58. A. F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Side*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1988.
59. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, London, 1951.
60. E. J. McShane and T. A. Botts, *Real Analysis*, Dover Publications, New York, 2005.
61. M. R. Hestenes, *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1966.
62. S. P. Bhat and D. S. Bernstein, *Geometric homogeneity with applications to finite-time stability*, *Math Control Signals Syst*, **17** (2) (2005), 101–127.
63. Orlov, Y. *Finite time stability of homogeneous switched systems*, *Proc. 42nd IEEE Conf. Decision and Control*, Maui, Hawaii, USA **4** (2003), 4271–4276.

AUTHOR BIOGRAPHIES



Rim Hendel received her engineering and master's degrees in automatic control from Setif University (Setif 1), Algeria, in 2009 and 2012 respectively. From November 2012, she has been a PhD student in the Engineering Faculty in the QUERE Laboratory at the University of Setif 1. Her research interests include higher-order sliding mode control, fuzzy control, and multivariable robust control.



Farid Khaber received his BSc in electronics (1989), his DEA (1990) and his MSc (1992) in industrial control, and his PhD (2006) in automatic control from the University of Setif 1, Algeria. Since July 2012, he has been a full professor in the Faculty of Technology at Setif 1 University where he has also been the Director of the QUERE Laboratory since 2013. His research interests include multivariable adaptive control, LMI control, fuzzy control with applications to renewable energy systems, and mobiles robots.



Najib Essounbouli received his bachelor's degree in electrical engineering from the University of Sciences and Technology of Marrakech (FSTG), Morocco. In 2000 he received his DEA, in 2004 he received his PhD, and in 2009 he received his habilitation from Reims Champagne Ardenne University, all in control engineering. In September 2010, he was appointed assistant professor with IUT of Troyes (Reims Champagne Ardenne University). Since September 2010, he has been a professor at the same institute where he has been the head of the Mechanical Engineering Department since 2014. His current research interests include fuzzy logic control, robust adaptive control, renewable energy, and control drives.

How to cite this article: Hendel R, Khaber F, Essounbouli N. Adaptive high-order sliding mode controller-observer for MIMO uncertain nonlinear systems. *Asian J Control*. 2020;22:2309–2329. <https://doi.org/10.1002/asjc.2167>

Résumé

Les travaux présentés dans cette thèse traitent le problème de la commande robuste en temps fini des systèmes non linéaires incertains et perturbés. La synthèse des structures de commande développées est basée essentiellement sur le mode glissant d'ordre supérieur et l'approche floue type-2. Le métissage du mode glissant d'ordre 2 et le mode glissant terminal permet à la fois d'atteindre une convergence en temps fini des états du système vers leurs références et d'atténuer l'effet de broutement au niveau du signal de commande. L'approche floue type-2 est implémentée afin d'approximer la dynamique inconnue du système. D'autre part, un observateur flou par MG-3 est utilisé afin d'estimer les états non disponibles et de compenser les incertitudes. Les gains de commande sont ajustés en ligne en utilisant un mécanisme d'adaptation qui évite de les surestimer. La stabilité en temps fini des contrôleurs synthétisés est prouvée au sens de Lyapunov en utilisant la propriété d'homogénéité des MGs d'ordre supérieur. Des études comparatives et des résultats de simulation obtenus, sous l'environnement Matlab ont confirmé l'efficacité des contrôleurs développés et mise en évidence leurs performances.

Mots-clés: Mode glissant d'ordre supérieur, mode glissant terminal, système flou type-2, observateur par mode glissant d'ordre supérieur, système non linéaire incertain, Matlab.

Abstract

This thesis deals with the robust and finite-time control of uncertain nonlinear systems. The developed controllers have been synthesized based on high order sliding mode control and type 2 fuzzy logic. The second order sliding mode controller (SM-2) combined with terminal sliding mode is designed to provide a finite time convergence of system states to their references and to deal with the chattering problem. The type-2 fuzzy approach is implemented to model the unknown system dynamic. On the other hand, a fuzzy third order SM observer is designed to estimate the unmeasured states and compensate the uncertainties. The controller gains are generated based on adaptive estimation scheme without overestimation. The finite time stability of the suggested controllers is proved by the Lyapunov synthesis using the homogeneity of high order SM. The obtained simulation results, under the Matlab environment, with comparative study showed the effectiveness and the performances of the developed controllers.

Keywords: High order sliding mode, terminal sliding mode, type-2 fuzzy system, high order sliding mode observer, uncertain nonlinear systems, Matlab.

ملخص

تم التطرق في هذه الأطروحة إلى مشكلة التحكم الدقيق ذو الوقت المحدود للأنظمة اللاخطية، الغير الدقيقة و المضطربة. تم تصميم آليات التحكم المقترحة إستنادا على وضع الإنزلاق عالي الدرجة و المنطق الغامض ذي النمط 2. بالإعتماد على دمج وضع الإنزلاق التحكمي من الدرجة الثانية مع وضع الإنزلاق النهائي تم التحصل على تقارب زمني محدود لحالات النظام مع مراجعها و الحد من ظاهرة الاهتزازات، في حين تم استخدام نهج غامض من النوع 2 لتمثيل ديناميكية النظام الغير المعروفة. من ناحية أخرى، تم إنشاء ملاحظ (مراقب) وضع الإنزلاق من الدرجة الثالثة من أجل تقدير حالات النظام الغير متاحة للقياس و تعويض الارتياح. أما مكاسب التحكم فقد تم تحديدها باستخدام تقنية تقدير تكيفي. تم تأكيد استقرار بنيات التحكم المقترحة عن طريق تركيب Lyapunov و باستخدام خاصية التجانس لوضع الإنزلاق عالي الدرجة. نتائج المحاكاة المتحصل عليها أثبتت فعالية و جودة تقنيات التحكم المقترحة

الكلمات المفتاحية: وضع الإنزلاق ذو الدرجة العليا، وضع الإنزلاق النهائي، النظام الغامض ذي النمط 2، مراقب وضع الإنزلاق ذو الدرجة العليا، الأنظمة اللاخطية الغير دقيقة.