



DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

N°..... / /2020

THÈSE

Présentée par

Liazidi Nabil

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT LMD

Filière: MATHÉMATIQUES

Spécialité: MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

THÈME

**Quelques problèmes aux limites dans un secteur plan pour le
système de Lamé, l'opérateur de flexions et vibrations des
plaques**

Soutenue publiquement le 07/11/2020

DEVANT LE JURY

Président : Pr. S. BOUTECHEBAK		Pr. UFA Sétif 1
Directeur : Pr. B. MEROUANI		Pr. UFA Sétif 1
Examineurs		
Pr. A. AYADI		Univ. Oum el Bouaghi
Pr. M. DENCHE		Univ. Mentouri de Constantine

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mes parents en termes de reconnaissance pour leur amour, leur soutien, leurs sacrifices et leurs encouragements.

À ma chère femme Hadjer

À mes enfants Aridj et osaid

À mes frères Elshadj, Samir, Ahmed, Khalil et Fares pour leur amour et soutien

À mes sœurs Sabrina et Mounira pour leur amour et soutien

À ma grand-mère Elsamria pour ses prières

À toute la famille Liazidi et Benaamrani

À tous mes amis

À la mémoire de ma grand-mère Rbiha, de mes grand-père Mohamed et Rabeh

Et spécialement À ma tante Noria Benamrani

Remerciement

Tout d'abord, mes sincères remerciements à Dieu le plus grand et le plus puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné pour réaliser cette thèse.

*J'exprime mes remerciements à tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à l'aboutissement de ce travail. Je voudrais exprimer toute ma gratitude à monsieur **Merouani Boubakeur**, professeur à l'université de Sétif 1 d'avoir accepté de diriger mon travail, se fut un grand honneur pour moi. Je tiens à le remercier pour tout ce qu'il m'a apporté, pour ses conseils, son présence, son patience et pour m'avoir fait confiance et m'avoir laissé la liberté nécessaire pour l'accomplissement de mon travail.*

*Mes remerciements les plus respectueux vont à **S. Boutechbak** professeur à l'université de Sétif 1 qu'elle m'a fait l'honneur d'être le président du jury de cette thèse. Qu'elle trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.*

*Je tiens à remercier monsieur **M. Deneche** professeur à l'université de Constantine 1 et monsieur **Y. Abd Abdelhamid** professeur à l'université de Oum el Bouaghi pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu accorder à ma thèse en acceptant de participer au jury.*

Un grand Merci de tout mon cœur à mes chers parents, sans qui je ne serais absolument pas où j'en suis aujourd'hui. Je les remercie sincèrement pour leur gentillesse et leur soutien inconditionnel et constant, pour m'avoir donné du courage et de l'espoir.

Table des matières

Introduction Générale	3
Notations	6
1 Rappels d'analyse fonctionnelle	8
1.1 Notations	8
1.2 Espaces de Sobolev	10
1.2.1 Les espaces de Sobolev	10
1.2.2 Domaines polygonaux	11
1.3 Les espaces de traces	11
1.3.1 Traces des fonctions continues dans des domaines réguliers	11
1.3.2 Traces dans les domaines polygonaux	12
1.3.3 Formule de Green	15
2 Comportement singulier des solutions pour différents problèmes gouvernés par les équations de Lamé	16
2.1 Notations	17
2.2 Calcul des solutions singulières	17
2.2.1 Formulation du problème (P_k) , $k = 1$ à 6	17
2.2.2 Séparation des variables en coordonnées polaires	18
2.2.3 Equations transcendantes gouvernant le comportement singulier (E) .	21
2.3 Régularité maximale	23
2.3.1 Développement singulier de la solution variationnelle du problème (P_k) , $k = 1$ à 6	29

2.4	Tableau des résultats de régularités des fonctions singulières des problèmes (P_k) , $k = 1$ à 6	29
2.5	Calcul des coefficients c_β, d_β dans le cas de la fissure	38
2.5.1	Calcul des coefficients c_β, d_β	47
2.6	Étude complète du cas de la fissure	49
2.6.1	Study of first part	49
2.6.2	Study of seconde part	50
2.6.3	Étude de la première partie	51
2.6.4	Étude de la deuxième partie	55
2.7	Tableau des résultats de coefficients des fonctions singulières des problèmes (P_k) , $k = 1$ à 6, du cas de la fissure	60

3 Existence et Unicité des solutions de Quelques Problèmes non linéaires en

Ceci est un filigrane pour la version d'essai, achetez pour obtenir une version complète ! 62

théorie des plaques vibrantes

3.1	Théorie des Plaques Minces	62
3.1.1	Hypothèse simplificatrices	62
3.2	Opérateur des flexions de plaques	64
3.2.1	Existence et unicité de la solution du problème (T_1)	66
3.3	Formulation des problème (P_k) , $k = 1$ à 6	68
3.3.1	Démonstration du Théorème 3.3.2	72

Conclusion 76

Bibliographie 77

Introduction Générale

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude de quelques problèmes linéaire et non linéaire issus de la mécanique, plus précisément en théorie des plaques minces.

Le premier groupe de problèmes (Rappels des résultats P. Grisvard-B. Merouani voir [11], [21]) , se compose de six problèmes aux limites gouvernés par les équations de Lamé dans le **secteur** Ω_ω **plan, d'ouverture** ω , **de rayon** ρ **et de frontière** $\bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_\omega \cup \bar{\Gamma}_\rho$ (**voir Fig. 2**).

Ces problèmes sont

$$(P_k) \begin{cases} \Delta u + \nu_0 \nabla (\operatorname{div} u) = f & \text{dans } \Omega, \\ B^k u = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \Gamma_\omega. \end{cases}, \quad (k = 1 \text{ à } 6).$$

Où les opérateurs frontières sont :

$$\{B^1 u = \{u \text{ sur } \Gamma_0, \Gamma_\omega, \quad \{B^2 u = \{\sigma(u). \eta \text{ sur } \Gamma_0, \Gamma_\omega,$$

$$\left\{ B^3 u = \begin{cases} u \\ \sigma(u). \eta \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0, \Gamma_\omega, \quad \left\{ B^4 u = \begin{cases} u. \eta \\ (\sigma(u). \eta). \tau \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0, \Gamma_\omega,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_0^5 u = \begin{cases} u. \eta \\ (\sigma(u). \eta). \tau \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0 \\ B_\omega^5 u = \{u \text{ sur } \Gamma_\omega \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} B_0^6 u = \begin{cases} u. \eta \\ (\sigma(u). \eta). \tau \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0 \\ B_\omega^6 u = \{\sigma(u). \eta \text{ sur } \Gamma_\omega \end{array} \right\}.$$

ν_0 sera égal à $(1 - 2\nu)^{-1} = \frac{(\lambda + \mu)}{\mu}$ où ν est le coefficient de **Poisson** ($0 < \nu < \frac{1}{2}$).

Le comportement singulier des solutions variationnelles (y compris le cas de la fissure), constitue l'objet de la première partie de cette thèse.

Dans le second groupe, on considère quelques problèmes aux limites gouvernés par l'opérateur de flexions des plaques.

Dans le troisième groupe, on considère quelques problèmes aux limites gouvernés par l'opérateur non linéaire de vibration des plaques.

Cette thèse se subdivise en trois chapitres. Elle est structurée de la manière suivante :

Le premier chapitre, est consacré essentiellement aux rappels des résultats principaux sur les espaces de Sobolev classiques (voir [20]), nous en rappelons la définition et quelques propriétés pour mieux comprendre le continu de ce travail. A la fin de ce chapitre, on rappelle quelques résultats théoriques généraux que nous utiliserons.

Au deuxième chapitre, on rappelle en détaille les résultats (voir [11], [21]), le comportement singulier des solutions des problèmes (P_k) , $k = 1$ à 6. La section 2.2, de ce chapitre, est consacrée aux notations principales et la formulation mathématique des problèmes. Dans la section 2.3, on démontre que le comportement singulier des solutions des différents problèmes est gouverné par une série des équations transcendantes analogue a celles trouvées dans le contexte des plaques.

Dans la section 2.5, constituant la première partie de l'originalité de notre travail, sanctionnée par une publication dans une revue de renommée internationale, nous intéressons au calcul des coefficients de singularités par des techniques généralisant, à un système, celles utilisées pour le bilaplacien dans [6] et [28].

Nous calculons, pour chaque cas, les solutions singulière dans le but de créer un tableau d'extension de P. Grisvard [16] et B. Merouani [22].

Dans le troisième chapitre, on étudie dans la section 3.2. l'existence et l'unicité des solutions faibles de quelques problèmes aux limites gouvernés par l'opérateur de flexion des plaques A_u dans un ouvert borné à frontière suffisamment régulière. D'abord, on commence a démontré que l'opérateur de flexions A_u est un isomorphisme de V_k sur V'_k , $k = 1$ à 6, par le théorème de Lax-Milgram où A_u est exprimé par :

$$A_u = \left[\nu \Delta^2 u + (1 - \nu) \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2} \right].$$

Ensuite, on s'intéresse dans la section 3.3. à l'existence et l'unicité des solutions de quelques problèmes non linéaires des plaques vibrantes, c'est la deuxième partrie de l'originalité de notre travail. Pour cela, on utilise l'opérateur de Green, i.e, l'inverse de A_u pour chaque conditions aux limites. L'idée est de ramener le système des plaques vibrantes à une équation d'un seul inconnu.

On finira ce travail par une conclusion et perspectives.

Notations

Notations géométriques

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné.

$\partial\Omega = \Gamma$ la frontière de Ω ; ds : la mesure de longueur sur Γ .

Γ_i une partie (segment) de Γ ; $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \bar{\Gamma}_i$.

ω_j l'ouverture de l'angle que font Γ_j et Γ_{j+1} vers l'intérieur de Ω .

S_i les sommets de Γ .

f la densité des forces volumiques données.

η le vecteur unitaire normal sortant.

$\frac{\partial u}{\partial \eta}$ la dérivée normale.

ν le coefficient de **Poisson** des plaques.

∇f le gradient de f .

$\operatorname{div} f$ la divergence de f .

Δ le Laplacien.

Δ^2 le bilaplacien.

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$.

Espaces fonctionnels

$D(\Omega)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω .

$D'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω .

C^k l'espace des fonctions k fois continument différentiables.

$L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions de puissances p -ième intégrable sur Ω pour la mesure de Lebesgue.

$L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions (classes) essentiellement bornées.

$W_p^s(\Omega)$ l'espace de Sobolev d'ordre s ($W_2^s(\Omega) = H^s(\Omega)$).

$H^s(\Omega)$ l'espace de Sobolev d'ordre s , $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

$H_0^s(\Omega)$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$.

$H_0^s(\bar{\Omega})$ l'espace des restrictions à Ω des éléments de $H^s(\mathbb{R}^n)$.

$\tilde{H}^s(\Omega)$ un sous-espace de $H^s(\Omega)$ formé des u fonctions dont le prolongement \tilde{u} par zéro hors de Ω appartient à $H^s(\mathbb{R}^n)$.

$H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$: l'espace des fonctions $u \in L^2(\Gamma)$ tel que :

$$\iint_{\Gamma\Gamma} |u(x) - u(y)|^2 \frac{ds(x) ds(y)}{\|x - y\|^2} < +\infty.$$

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

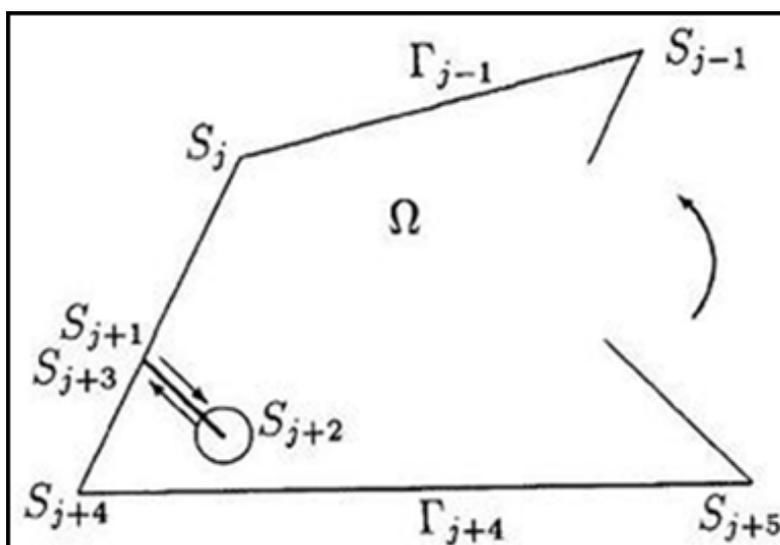
Dans ce chapitre nous précisons quelques notations et rappels d'analyse fonctionnels qui seront d'une grande importance dans notre travail. Pour les espaces de Sobolev, nous rappelons la définition et quelques propriétés, les théorèmes de traces dans les domaines polygonaux. (Comme dans [20])

1.1 Notations

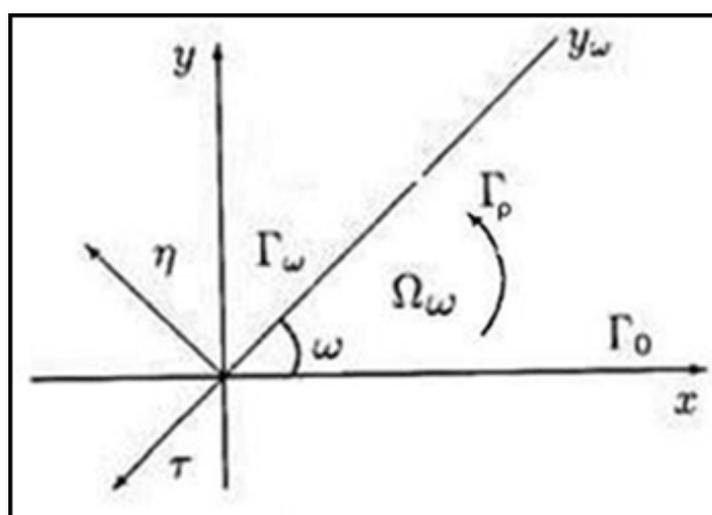
Ω désigne un corps homogène, élastique et isotrope, occupant un domaine, borné de \mathbb{R}^2 , à frontières polygonale rectiligne $\Gamma = \bigcup_{j=1}^J \bar{\Gamma}_j$. Les Γ_j sont des segments de droites ouverts.

Le côté $]S_{j-1}, S_j[$ est noté Γ_{j-1} et éventuellement, Ω contient des fissures (voir Fig. 1).

L'ouvert défini ainsi est un domaine polygonale. Par suite, tous les résultats sur ce type de domaine sont valables. Il est commode, en coordonnées polaires, de travailler à l'origine. Donc, par une translation suivie d'une rotation, on peut ramener S_j , Γ_j et Γ_{j-1} respectivement à O , O_x et O_{y_ω} où ω est l'angle que font O_x et O_{y_ω} vers l'intérieur de Ω . Il suffit, dans toute la suite de faire l'étude dans le secteur Ω_ω plan, d'ouverture ω , de rayon ρ et de frontière $\bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_\omega \cup \bar{\Gamma}_\rho$ (voir Fig. 2). Sur l'arc Γ_ρ , délimitant le secteur Ω_ω , on n'aura pas besoin de conditions aux limites, étant donné qu'on s'intéresse à un voisinage V du sommet O où les solutions sont à support compact.



(Fig. 1)



(Fig. 2)

$\eta_j = \begin{pmatrix} \eta_1^j \\ \eta_2^j \end{pmatrix}$, $\tau_j = \begin{pmatrix} \tau_1^j \\ \tau_2^j \end{pmatrix}$ sont respectivement la normale unitaire sortante et la tangente unitaire dans le sens positif sur la frontière Γ de Ω .

$M_i(u)$ et $N_i(u)$ désignent les opérateurs différentiels frontières suivant :

$$M(u)|_{\Gamma_i} = M_i(u) = \gamma_i(\nu\Delta u + (1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta_i^2}),$$

et

$$N(u)|_{\Gamma_i} = N_i(u) = -\gamma_i\left(\frac{\partial}{\partial \eta_i}\Delta u + (1-\nu)\frac{\partial^3 u}{\partial \eta_i \partial \tau_i^2}\right),$$

où γ_i désigne l'application trace sur Γ_i et $\nu \in]0, \frac{1}{2}[$ est le coefficient de **Poisson** du matériau constituant la plaque.

La dérivées normale et la dérivée tangentielle, en fonction de x_1, x_2 sont données par :

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} = \eta_1^i \frac{\partial}{\partial x_1} + \eta_2^i \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \tau_i} = -\eta_1^i \frac{\partial}{\partial x_2} + \eta_2^i \frac{\partial}{\partial x_1}$$

1.2 Espaces de Sobolev

1.2.1 Les espaces de Sobolev

Les espace de Sobolev peuvent être définis de différentes manières lorsque l'ouvert considéré est à frontière régulière. Les définitions correspondantes peuvent conduire à des espaces différents lorsque la frontière de Ω est peu régulière. Pour cela nous avons préciser les définitions qu'on aura besoin d'utiliser dans notre travail.

Soit Ω un ouvert quelconque de \mathbb{R}^2 , de frontière Γ .

Définition 1.2.1 Soit m un entier positif. On désigne par $H^m(\Omega)$ le sous espaces des fonctions de $L^2(\Omega)$ telles que : $D^\alpha(u) \in L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq m$. $H^m(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

où

$$\|u\|_{0,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour s un nombre réel positif non entier on a $s = [s] + \sigma$, $0 < \sigma < 1$ où $[s]$ désigne la partie entière de s , $H^s(\Omega)$ est un sous espace de $H^{[s]}(\Omega)$ pour les éléments vérifiant :

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)|^2}{|x - y|^{2+2\sigma}} dx dy < +\infty$$

avec $|\alpha| = [s]$.

muni de la norme

$$\|u\|_{s,\Omega} = \left(\|u\|_{m,\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)|^2}{|x - y|^{2+2\sigma}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On distingue deux cas :

Pour $s > 0$: $H_0^s(\Omega)$ désigne la fermeture dans $H^s(\Omega)$ de l'espace $D(\Omega)$.

Pour $s < 0$: $H^s(\Omega)$ est le dual de $H^{-s}(\Omega)$.

1.2.2 Domaines polygonaux

On dira qu'un ouvert plan borné Ω est un domaine polygonal si sa frontière Γ est la réunion d'un nombre fini de segments de droite.

Dans le cas particulier, où il n'y a pas de coupure (les $\omega_j < 2\pi$), on dira que Ω est un domaine strictement polygonal, c'est donc un ouvert à frontière lipschitzienne au sens de Necăs [24].

1.3 Les espaces de traces

1.3.1 Traces des fonctions continues dans des domaines réguliers

Rappelons d'abord les théorèmes de trace dans le cadre des fonctions continûment différentiables de $C^s(\overline{\Omega})$ dans des domaines réguliers :

Pour $s > 0$ entier, la restriction $u|_{\Gamma}$ de u sur la frontière Γ , notée simplement u ou encore $\gamma_0 u$, d'une fonction de $C^s(\overline{\Omega})$ est bien définie comme fonction de $C^s(\Gamma)$ et appelée la trace de u sur Γ .

Si on désigne par $\eta(x)$, pour tout $x \in \Gamma$, le vecteur unitaire normal en x à Γ et orienté vers l'extérieur de Ω , et par ∇u le gradient de u défini par :

$$\nabla u = (\partial_1 u, \partial_2 u).$$

Etant donné une fonction u de $C^k(\overline{\Omega})$, pour un entier $k \geq 1$, son gradient a une trace sur Γ et la fonction $\nabla u \cdot \eta$, notée $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ ou encore $\gamma_1 u$, est bien définie comme fonction de $C^{k-1}(\Gamma)$ et appelée la trace de la dérivée normale sur Γ qu'on peut l'écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \nabla u(x - t\eta(x)) \cdot \eta(x).$$

1.3.2 Traces dans les domaines polygonaux

Gagliardo [8] a donné une caractérisation de l'espace $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ des restrictions à Γ des fonctions de $W_p^1(\Omega)$, soit ds la mesure de longueur sur Γ .

Définition 1.3.1 On désigne par $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ l'espace des fonctions $f \in L_p(\Gamma)$ telles que :

$$\int_{\Gamma \times \Gamma} |f(x) - f(y)|^p \frac{ds(x) ds(y)}{\|x - y\|^p} dx dy < +\infty$$

Théorème 1.3.2 L'application $u \mapsto u|_{\Gamma}$ qui est bien définie sur $D(\overline{\Omega})$ admet un prolongement γ_0 par densité, qui est un opérateur linéaire surjectif de $W_p^1(\Omega)$ ($H^1(\Omega)$) sur $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma)$. Son noyau est $W_p^{0,1}(\Omega)$.

Il est instructif de décomposer l'espace $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ en morceaux correspondant à chacun des cotés Γ_j . On pose pour cela $f_j = f|_{\Gamma_j}$ la restriction de f à Γ_j , d'après la définition 1.3.1 $f_j \in W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma_j)$ (Γ_j est un segment de droite donc un ouvert de \mathbb{R} , les fonctions f_j ne sont pas toujours indépendantes entre elle). En effet on a la :

Proposition 1.3.3 La fonction f appartient à $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ si et seulement si $f_j \in W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma_j)$ pour tout j et en outre :

i) $f_j(S_j) = f_{j+1}(S_j)$, $1 \leq j \leq N$ si $p > 2$

ii) $\int_0^{\sigma} |f_j(x_j(-\sigma)) - f_{j+1}(x_j(\sigma))|^2 \frac{d\sigma}{\sigma} < +\infty$, $1 \leq j \leq N$ si $p = 2$

où $x_j(\sigma)$ (resp $x_j(-\sigma)$) désigne le point de Γ_{j+1} (resp Γ_j) à distance σ du sommet S_j .

- La condition i) a un sens puisque d'après le théorème de Sobolev, la fonction f_j est continue sur Γ_j donc en S_j et en S_{j-1} .

Cette condition est naturelle car une fonction f continue sur Γ est après découpage une collection de f_j continues qui se raccordent aux sommets.

- La condition **ii)** exprime que f_j et f_{j+1} coïncident en S_j mais dans un sens faible et on notera :

$$f_j \underset{S_j}{\sim} f_{j+1}.$$

$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \left(W_p^{1-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right)$ n'est pas l'espace des traces $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ de $H^2(\Omega)$. La discontinuité de la normale aux coins nous empêche de définir les espaces de traces comme dans le cas des ouverts à frontière régulière. On considère donc les traces sur chacun des cotés Γ_j , avec des conditions de compatibilité. Pour expliquer cette difficulté nous allons utiliser l'analogie avec les espaces de fonction continument différentiables. Il est clair que l'application :

$$\gamma_{0j} : u \mapsto u|_{\Gamma_j}, \quad j = \overline{1, N}$$

est définie de $C^0(\overline{\Omega})$ sur $C^0(\Gamma)$. Par ailleurs il est clair que l'application :

$$\gamma_{1j} : u \mapsto \left\{ f_j = \frac{\partial u}{\partial \eta_j} \Big|_{\Gamma_j} \right\}, \quad j = \overline{1, N}$$

est de $C^1(\overline{\Omega})$ sur $\prod_{j=1}^N C^0(\overline{\Gamma_j})$. On définit une fonction f sur Γ par :

$$f_j = f|_{\Gamma_j}.$$

On obtient pas nécessairement un élément de $C^0(\Gamma)$. En d'autres termes, la dérivée normale au bord d'une fonction u de $C^1(\overline{\Omega})$ n'appartient pas à l'espace des restrictions au bord des éléments de $C^0(\overline{\Omega})$. Un phénomène similaire se produit dans les espaces de Sobolev.

La difficulté ci-dessus est à l'origine du choix fait ici de considérer les traces sur chacun des cotés Γ_j et non pas globalement, puis de chercher les conditions de compatibilité entre ces diverses traces. Comme dans la proposition 1.3.3.

Avant de donner un énoncé précis des conditions de compatibilité nous introduisons quelques notations :

Soit L l'opérateur différentiel à coefficients constants d'ordre d , pour chaque j , on peut développer L sur les puissances de $\frac{\partial}{\partial \eta_j}$:

$$L = \sum_{k=0}^d L_{j,k} \frac{\partial^k}{\partial \eta_j^k}$$

où $L_{j,k}$ est un opérateur différentiel tangentiel à Γ_j c'est-à-dire un polynôme de degré $\leq d - k$ en $\frac{\partial}{\partial \tau_j}$.

Théorème 1.3.4 *L'application : $u \mapsto \{g_{j,k}\}_{\substack{j=1,2,\dots,N \\ k=0,1,\dots,m-1}}$ qui est définie pour u dans $D(\overline{\Omega})$ par :*

$$g_{j,k}(u) = \frac{\partial^k u}{\partial \eta_j^k} \Big|_{\Gamma_j}$$

admet un prolongement par densité qui est un opérateur linéaire continu surjectif de $W_p^m(\Omega)$ sur le sous espace de :

$$\prod_{j=1}^N \prod_{k=0}^{m-1} W_p^{m-k-\frac{1}{p}}(\Gamma_j)$$

défini par les conditions suivantes : Pour tout opérateur différentiel L à coefficients constants d'ordre $d \leq m-1$ on a :

$$i) \sum_{k=0}^d (L_{j,k} g_{j,k})(S_j) = \sum_{k=0}^d (L_{j+1,k} g_{j+1,k})(S_j)$$

pour $d < m - \frac{2}{p}$ et :

$$ii) \sum_{k=0}^d L_{j,k} g_{j,k} \underset{S_j}{\sim} \sum_{k=0}^d L_{j+1,k} g_{j+1,k}$$

pour $d = m-1$ et $p = 2$.

Une démonstration complète est donnée dans Grisvard [17] où on considère également le cas d'un polygone curviligne.

Dans le cas particulier où $m = 2$, on a le corollaire suivant :

Corollaire 1.3.5 *Soit $\gamma_{0j}u = g_j$ et $\gamma_{1j}u = h_j$, alors l'application trace $u \mapsto \{g_j, h_j\}$ est un opérateur linéaire continu surjectif de $H^2(\Omega)$ sur le sous espace de $\prod_{j=1}^N H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ défini par les conditions suivantes :*

$$g_j(S_j) = g_{j+1}(S_j) \text{ pour tout } j$$

et

$$\begin{aligned} g'_j &\underset{S_j}{\sim} -\cos \omega_j g'_{j+1} + \sin \omega_j h_{j+1} \\ h_j &\underset{S_j}{\sim} -\sin \omega_j g'_{j+1} - \cos \omega_j h_{j+1} \end{aligned}$$

pour tout j (les signes ' désignant la différentiation tangentielle (en τ^j)).

Définition 1.3.6 *Pour $u \in D(\overline{\Omega})$, nous définissons les opérateurs de traces M, N comme suit :*

$$Mu = \nu \Delta u + (1 - \nu) (\partial_1^2 u n_1^2 + 2\partial_{12}^2 u n_1 n_2 + \partial_2^2 u n_2^2).$$

$$Nu = -\frac{\partial \Delta u}{\partial n} + (1 - \nu) (\partial_1^2 u \, n_1 n_2 - \partial_{12}^2 u \, (n_1^2 - n_2^2) + \partial_2^2 u \, n_1 n_2).$$

où ν est un nombre réel appelé coefficient de **Poisson** ($0 < \nu < \frac{1}{2}$).

1.3.3 Formule de Green

Lemme 1.3.7 Pour deux fonctions $u \in D(\overline{\Omega})$, $v \in H^2(\Omega)$ on a la formule de Green suivante :

$$\int_{\Omega_\omega} (\Delta^2 u) v dx = a(u, v) - \left(\int_{\Gamma} (Mu) \gamma_1 v d\sigma + \int_{\Gamma} (Nu) \gamma_0 v d\sigma \right)$$

où $a(u, v)$ est une forme bilinéaire définie de $H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_\omega} (\Delta^2 u) v dx = \int_{\Omega_\omega} \Delta u \Delta v dx - \int_{\Omega_\omega} \left[(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \right] dx \\ - \int_{\Gamma} \left[\gamma_0 (Mu) \gamma_0 \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \gamma_0 (Nu) \gamma_0 v \right] d\sigma \end{array} \right.$$

Preuve. On utilise la décomposition du bilaplacien suivante :

$$\Delta^2 = \partial_1^2 (1. \partial_1^2) + \partial_{12}^2 (2 (1 - \nu) \partial_{12}^2) + \partial_1^2 (\nu \partial_1^2) + \partial_2^2 (\nu \partial_1^2) + \partial_2^2 (1. \partial_2^2),$$

et nous appliquant la formule de Green deux fois. ■

Définition 1.3.8 (Système de Cauchy-Kowaleska) : Un système d'équations aux dérivées partielles est appelé système de Cauchy-Kowaleska s'il est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t_i} = F_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n, \dots, \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \dots) \\ i, j = 1, \dots, N; k_0 + k_1 + \dots + k_n = k \leq n_i; k_0 < n_i \\ \frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} = \Phi_{i,k}(x_1, \dots, x_n), k = 0, 1, \dots, n_i - 1; t = t^0. \end{array} \right. \quad (a)$$

où les fonctions F_i et $\Phi_{i,k}$ analytique dans un voisinage du point $(t^0, x_1^0, x_2^0, \dots, \Phi_{i,k_0,k_1,\dots,k_n}^0)$ dans lequel

$$\left(\frac{\partial^{k-k_0} \Phi_{i,k_0}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right)_{x_i=x_i^0} = \Phi_{i,k_0,k_1,\dots,k_n}^0; \quad (b)$$

$$i = 1, 2, \dots, N;$$

$$k_0 + k_1 + \dots + k_n = k \leq n_i.$$

Chapitre 2

Comportement singulier des solutions pour différents problèmes gouvernés par les équations de Lamé

Les séries trigonométriques constituent un outil très important pour l'étude des solutions de problèmes aux limites pour l'équation biharmonique dans un secteur. Dans ce chapitre on mettra en évidence une série trigonométrique d'un type nouveau adaptée à l'étude des solutions du problème aux limites pour les équations de Lamé avec différents conditions aux limites (voir [22], [24]). Pour cela, on rappelle dans un premier temps les résultats de P. Grisvard [16] et B. Merouani [22] concernant les solutions singulières. On utilisant la formule de Betti, on démontre que la solution s'écrit sous forme d'une série.

On retrouve dans un cas spécial, les résultats concernant l'opérateur de Laplace. L'étude de convergence de ces séries est basée sur des relations d'orthogonalités analogues à celles du laplacien et le bilaplacien.

Nous nous intéressons ensuite, au calcul des coefficients de singularité c_β, d_β , en particulier dans le cas de la fissure.

2.1 Notations

Soit Ω un corps homogène, élastique et isotrope, occupant un domaine, borné de \mathbb{R}^2 , à frontières polygonale rectiligne $\Gamma = \bigcup_{j=1}^J \bar{\Gamma}_j$, les espaces de Sobolev ainsi que le problème que l'on considérera sera restreint à un coin (noté) encore Ω de sommet O , de cotés $\bar{\Gamma}_0$ et $\bar{\Gamma}_\omega$ et d'ouverture ω vers l'intérieur de Ω . La normale et la tangente à Γ_j , $j = 0, \omega$, seront notées par η et τ au sens positif sur la frontière.

L désignera le système de Lamé :

$$Lu = \Delta u + \frac{(\lambda + \mu)}{\mu} \nabla (\operatorname{div} u),$$

où λ et μ sont les constantes de Lamé ($\lambda \geq 0$, $\mu \succ 0$). u_j , f_j ($j = 1, 2$), σ désignent respectivement les composantes du vecteur déplacement, de la densité des forces extérieures et le tenseur des contraintes linéarisé.

2.2 Calcul des solutions singulières

2.2.1 Formulation du problème (P_k) , $k = 1$ à 6

On considère ici une famille de 6 problèmes gouvernés par les équations de Lamé (comme dans [19]). C'est-à-dire que pour un champ de forces $f \in [L^2(\Omega)]^2$ on cherche u , si possible dans $[H^2(\Omega)]^2$, solution de

$$(P_k) \begin{cases} \Delta u + \nu_0 \nabla (\operatorname{div} u) = f & \text{dans } \Omega, & (1) \\ B^k u = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \Gamma_\omega. & (2) \end{cases}, k = 1 \text{ à } 6,$$

où les opérateurs frontières sont

$$\begin{aligned} \{B^1 u &= \{u \text{ sur } \Gamma_0, \Gamma_\omega, \\ \{B^2 u &= \{\sigma(u) \cdot \eta \text{ sur } \Gamma_0, \Gamma_\omega, \\ \{B^3 u &= \begin{cases} u \\ \sigma(u) \cdot \eta \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0, \Gamma_\omega, \\ \{B^4 u &= \begin{cases} u \cdot \eta \\ (\sigma(u) \cdot \eta) \cdot \tau \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0, \Gamma_\omega, \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_0^5 u = \begin{cases} u \cdot \eta \\ (\sigma(u) \cdot \eta) \cdot \tau \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0, \\ B_\omega^5 u = \{u \text{ sur } \Gamma_\omega \end{array} \right.,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_0^6 u = \begin{cases} u \cdot \eta \\ (\sigma(u) \cdot \eta) \cdot \tau \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0, \\ B_\omega^6 u = \{\sigma(u) \cdot \eta \text{ sur } \Gamma_\omega \end{array} \right.,$$

ν_0 sera égal à $(1 - 2\nu)^{-1} = \frac{(\lambda + \mu)}{\mu}$ où ν est le coefficient de **Poisson** ($0 < \nu < \frac{1}{2}$).

Notons que les résultats sur ce type de domaine sont valables ici et notamment l'inégalité de Korn (cf. [13]), et même dans le cas des fissures (cf. [11]), la méthode variationnelle usuelle, permet d'affirmer l'existence et l'unicité d'une solution faible $u \in [H^1(\Omega)]^2$.

Dans ce qui suit nous partons donc d'une solution $u \in [H^1(\Omega)]^2$. De plus les théorèmes habituels de régularité (cf. [3]) permettent d'affirmer du premier coup que $u \in [H^2(\Omega \cap CV)]^2$ pour tout voisinage fermé V du sommet O de Ω . On s'intéresse donc au comportement de la solution u du problème (P_k) , dans un voisinage V du sommet O de Ω .

L et l'opérateurs au bord étant homogènes et à coefficients constants, la forme $u_\alpha(r, \theta) = r^\alpha v_\alpha(\theta)$ est beaucoup mieux adaptée à la géométrie de Ω , de plus la régularité de u est essentiellement déterminée par la partie $\text{Re} \alpha$.

2.2.2 Séparation des variables en coordonnées polaires

L'idée de base est le changement de variable $r = e^t$ (donc $\partial_t = r \partial_r$) transformant le domaine Ω dans la bande $B_\omega = \mathbb{R} \times]0, \omega[$. Puis considérer les solutions de la forme $u_\alpha(r, \theta) = r^\alpha v_\alpha(\theta)$, dans le système $Lu = 0$.

Soit donc le système de Lamé homogène sous la forme suivante :

$$Lu = \Delta u + \nu_0 \nabla(\text{div } u) = 0, \tag{2.1}$$

où

$$\nu_0 = (1 - 2\nu)^{-1}.$$

En coordonnées cartésiennes (2.1) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + \nu_0) \frac{\partial}{\partial x_1}(\text{div } u) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = 0 \\ (1 + \nu_0) \frac{\partial}{\partial x_2}(\text{div } u) + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0 \end{array} \right. \tag{2.2}$$

En coordonnées polaires (2.2) s'écrit :

$$\begin{cases} \left[\partial_r^2 + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \nu_0 \left(\cos \theta \partial_r - \frac{1}{r} \sin \theta \partial_\theta \right)^2 \right] u_1 + \nu_0 \left[\cos \theta \partial_r - \frac{1}{r} \sin \theta \partial_\theta \right] \left[\sin \theta \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \partial_\theta \right] u_2 = 0 \\ \nu_0 \left[\cos \theta \partial_r - \frac{1}{r} \sin \theta \partial_\theta \right] \left[\sin \theta \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \partial_\theta \right] u_1 + \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \nu_0 \left(\sin \theta \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \partial_\theta \right)^2 \right] u_2 = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

En multipliant par r^2 on obtient :

$$\begin{cases} \left[(r \partial_r)^2 + \partial_\theta^2 + \nu_0 (\cos \theta r \partial_r - \sin \theta \partial_\theta)^2 \right] u_1 + \nu_0 [\cos \theta r \partial_r - \sin \theta \partial_\theta] [\sin \theta r \partial_r + \cos \theta \partial_\theta] u_2 = 0 \\ \left[(r \partial_r)^2 + \partial_\theta^2 + \nu_0 (\sin \theta r \partial_r + \cos \theta \partial_\theta)^2 \right] u_2 + \nu_0 [\cos \theta r \partial_r - \sin \theta \partial_\theta] [\sin \theta r \partial_r + \cos \theta \partial_\theta] u_1 = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Soit $r = e^t$ donc $\partial_t = r \partial_r$ et par suite (2.4) se transforme en :

$$\begin{cases} \left[(\partial_t)^2 + \partial_\theta^2 + \nu_0 (\cos \theta \partial_t - \sin \theta \partial_\theta)^2 \right] u_1 + \nu_0 [\cos \theta \partial_t - \sin \theta \partial_\theta] [\sin \theta \partial_t + \cos \theta \partial_\theta] u_2 = 0 \\ \left[(\partial_t)^2 + \partial_\theta^2 + \nu_0 (\sin \theta \partial_t + \cos \theta \partial_\theta)^2 \right] u_2 + \nu_0 [\cos \theta \partial_t - \sin \theta \partial_\theta] [\sin \theta \partial_t + \cos \theta \partial_\theta] u_1 = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Considérons les solutions de la forme $u_\alpha(r, \theta) = r^\alpha (v_{1,\alpha}(\theta), v_{2,\alpha}(\theta))$ dans (2.5) :

on déduit le système :

$$\begin{cases} \left[\partial_\theta^2 + \alpha^2 + \nu_0 [(\alpha - 1) \cos \theta - \sin \theta \partial_\theta] [\alpha \cos \theta - \sin \theta \partial_\theta] \right] v_{1,\alpha} + \\ \nu_0 [(\alpha - 1) \cos \theta - \sin \theta \partial_\theta] [\alpha \sin \theta + \cos \theta \partial_\theta] v_{2,\alpha} = 0 \\ \left[\partial_\theta^2 + \alpha^2 + \nu_0 [(\alpha - 1) \sin \theta + \cos \theta \partial_\theta] [\alpha \cos \theta - \sin \theta \partial_\theta] \right] v_{2,\alpha} + \\ \nu_0 [(\alpha - 1) \sin \theta + \cos \theta \partial_\theta] [\alpha \sin \theta + \cos \theta \partial_\theta] v_{1,\alpha} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

En effectuant le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} w_{1,\alpha}(\theta) = \cos \theta v_{1,\alpha}(\theta) + \sin \theta v_{2,\alpha}(\theta) \\ w_{2,\alpha}(\theta) = -\sin \theta v_{1,\alpha}(\theta) + \cos \theta v_{2,\alpha}(\theta) \end{cases} \quad (2.7)$$

Le système (2.6) devient dans $]0, \omega[$:

$$L_\alpha(w) = \begin{cases} w_{1,\alpha}''(\theta) + (\nu_0 + 1)(\alpha^2 - 1) w_{1,\alpha}(\theta) + \rho_0 w_{2,\alpha}'(\theta) = 0, \\ (\nu_0 + 1) w_{2,\alpha}''(\theta) + (\alpha^2 - 1) w_{2,\alpha}(\theta) + \rho_1 w_{1,\alpha}'(\theta) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Où :

$$\rho_0 = \nu_0(\alpha - 1) - 2 \quad \text{et} \quad \rho_1 = \nu_0(\alpha + 1) + 2.$$

Les conditions aux limites homogènes correspondant aux cas (1) à (6) ci-dessus donnent :

$$(1') \begin{cases} w_{1,\alpha}(0) = w_{2,\alpha}(0) = 0, \\ \cos \omega w_{1,\alpha}(\omega) - \sin \omega w_{2,\alpha}(\omega) = \sin \omega w_{1,\alpha}(\omega) + \cos \omega w_{2,\alpha}(\omega) = 0, \end{cases}$$

$$(2') \left\{ \begin{array}{l} w'_{1,\alpha}(0) + (\alpha - 1)w_{2,\alpha}(0) = 0, \\ \rho_2 w_{1,\alpha}(0) + \rho_3 w'_{2,\alpha}(0) = 0, \\ (\rho_2 w_{1,\alpha}(\omega) + \rho_3 w'_{2,\alpha}(\omega)) \sin \omega - \mu(w'_{1,\alpha}(\omega) + (\alpha - 1)w_{2,\alpha}(\omega)) \cos \omega = 0, \\ (\rho_2 w_{1,\alpha}(\omega) + \rho_3 w'_{2,\alpha}(\omega)) \cos \omega - \mu(w'_{1,\alpha}(\omega) + (\alpha - 1)w_{2,\alpha}(\omega)) \sin \omega = 0, \end{array} \right.$$

où $\rho_2 = 2\mu + \lambda(\alpha + 1)$ et $\rho_1 = \lambda + 3\mu$;

$$(3') \left\{ \begin{array}{l} w_{1,\alpha}(0) = w_{2,\alpha}(0) = 0, \\ \text{les deux équations, en } \omega, \text{ de } (2'), \end{array} \right.$$

$$(4') \left\{ \begin{array}{l} w_{1,\alpha}(0) = w_{2,\alpha}(0) = 0, \\ w_2(\omega) = w'_{1,\alpha}(\omega) + (\alpha - 1)w_{2,\alpha}(\omega) = 0, \end{array} \right.$$

$$(5') \left\{ \begin{array}{l} w_{2,\alpha}(0) = w'_{1,\alpha}(0) + (\alpha - 1)w_{2,\alpha}(0) = 0, \\ \cos \omega w_{1,\alpha}(\omega) - \sin \omega w_{2,\alpha}(\omega) = \sin \omega w_{1,\alpha}(\omega) + \cos \omega w_{2,\alpha}(\omega) = 0, \end{array} \right.$$

$$(6') \left\{ \begin{array}{l} w_{2,\alpha}(0) = w'_{1,\alpha}(0) + (\alpha - 1)w_{2,\alpha}(0) = 0, \\ \text{les deux équations, en } \omega, \text{ de } (2'). \end{array} \right.$$

Cherchons d'abord une solution générale de (2.8). L'équation caractéristique de (2.8) est donné par :

$$\lambda^4 + 2(\alpha^2 + 1)\lambda^2 + (\alpha^2 - 1)^2 = 0,$$

dont les racines sont :

$$\lambda_{1,2} = \pm i(\alpha - 1) \quad \text{et} \quad \lambda_{3,4} = \pm i(\alpha + 1).$$

Donc pour $\alpha \notin \{0, \pm 1\}$ une solution générale de (2.8) est donné par :

$$w_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} C_1 \rho_0 \cos(\alpha - 1)\theta + C_2 \rho_0 \sin(\alpha - 1)\theta - C_3 \sin(\alpha + 1)\theta + C_4 \cos(\alpha + 1)\theta \\ -C_1 \rho_1 \sin(\alpha - 1)\theta + C_2 \rho_1 \cos(\alpha - 1)\theta - C_3 \cos(\alpha + 1)\theta - C_4 \sin(\alpha + 1)\theta \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

pour $\alpha = 0$, on a :

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} (C_1 + C_2) \cos \theta + (C_2 - C_1) \sin \theta \\ (C_2 - C_1) \cos \theta - (C_1 + C_2) \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

pour $\alpha = -1$, on a :

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} C_1 + (\nu_0 + 1) [C_3 \cos 2\theta + C_4 \sin 2\theta] \\ C_2 - C_3 \sin 2\theta + C_4 \cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

pour $\alpha = 1$, on a :

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} C_1 + C_3 \cos 2\theta + C_4 \sin 2\theta \\ C_2 - C_3 \sin 2\theta + C_4 \cos 2\theta \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

En utilisant (2.7) pour revenir de w_α à u_α , on en déduit $u_j(r, \theta) = r^\alpha v_j(\theta)$, $j = 1, 2$, soit pour $\alpha \neq 0, \pm 1$:

$$v_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} C_1 [\nu_0 \alpha \cos(\alpha - 2)\theta - (\nu_0 + 2) \cos \alpha\theta] + C_2 [\nu_0 \alpha \sin(\alpha - 2)\theta - (\nu_0 + 2) \sin \alpha\theta] \\ -C_3 \sin \alpha\theta + C_4 \cos \alpha\theta \\ -C_1 [\nu_0 \alpha \sin(\alpha - 2)\theta + (\nu_0 + 2) \sin \alpha\theta] + C_2 [\nu_0 \alpha \cos(\alpha - 2)\theta + (\nu_0 + 2) \cos \alpha\theta] \\ -C_3 \sin \alpha\theta - C_4 \cos \alpha\theta \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

ce qui donne :

$$u_\alpha(r, \theta) = r^\alpha (v_{1,\alpha}(\theta), v_{2,\alpha}(\theta)).$$

Soulignons qu'on a obtenu la même solution que celle obtenue par Merouani [20].

2.2.3 Equations transcendantes gouvernant le comportement singulier (E)

On vient de vérifier que w_α (et bien sur v_α) est solution d'un problème aux limites homogène pour un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 2 dans $]0, \omega[$, soit :

$$\left(P'_k \right) \left\{ \begin{array}{l} (2.8); \\ (k'); \end{array} \right. \quad (k' = 1 \text{ à } 6).$$

Ce problème dépend analytiquement du paramètre complexe $\alpha(\nu_0)$ avec $(\nu_0 = (1 - 2\nu)^{-1})$ où ν est le coefficient de Poisson fixé $(0 < \nu < \frac{1}{2})$: nous allons déterminer E l'ensemble de ses valeurs singulières c'est-à-dire les valeurs $\alpha = \alpha(\nu_0)$ telles que le problème ait une w_α non nulle, alors :

Toute solution variationnelle $w_\alpha \in [H^1(\Omega)]^2$ correspondant à des données régulières, appartient à $[H^s(\Omega)]^2$ pour tout $s \prec \sigma$ où $\sigma - 1$ est la borne inférieure des parties réelles des nombres appartenant à : $E \cap \{ \operatorname{Re} \alpha(\nu_0) \succ 0 \}$. Autrement dit :

$$\sigma = \inf \{ \operatorname{Re} \alpha(\nu_0), \alpha(\nu_0) \in E, \operatorname{Re} \alpha(\nu_0) \succ 0 \} + 1.$$

De plus les premiers termes du développement singulier de (w_α donc de v_α et par suite $u_\alpha(r, \theta) = r^\alpha v_\alpha(\theta)$) sont multiples de w_α correspondant à $\operatorname{Re} \alpha(\nu_0) = \sigma - 1$. La recherche des termes suivants du développement singulier diffère selon que les $\alpha(\nu_0) \in E$ vérifiant $\operatorname{Re} \alpha(\nu_0) = \sigma - 1$ sont des valeurs singulières, semi simples ou non du problème (P'_k).

Proposition 2.2.1 *Le problème (P'_k), $k = 1$ à 6 , détermine $w_{1,\alpha}$ et $w_{2,\alpha}$ (donc $v_{1,\alpha}$ et $v_{2,\alpha}$ et par suite u_1 et u_2) non nulles lorsque ($\alpha \neq 0, \pm 1$) est solution de les équation caractéristiques :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \sin^2 \alpha \omega = \left(\frac{\nu_0}{\nu_0+2} \alpha \right)^2 \sin^2 \omega, \\ (2) \sin^2 \alpha \omega = \alpha^2 \sin^2 \omega, \\ (3) \sin^2 \alpha \omega = \frac{\nu_0}{\nu_0+2} \left(4 \left(\frac{\nu_0+1}{2\nu_0} \right)^2 - \alpha^2 \sin^2 \omega \right), \\ (4) \sin^2 \alpha \omega = \sin^2 \omega, \\ (5) \sin^2 \alpha \omega = \frac{\nu_0}{\nu_0+2} \alpha \sin 2\omega, \\ (6) \sin^2 \alpha \omega = \alpha \sin(2\omega + \pi), \end{array} \right. \quad (2.14)$$

$\operatorname{Re} \alpha \succ 0$.

Les valeurs exceptionnelles $\alpha = 0, \pm 1$ donnent l'analogue de (2.14) :

$$\begin{aligned}
 (1') & \left\{ \begin{array}{l} \sin \omega = 0 \quad \text{pour } \alpha = \pm 1; \\ w_\alpha = 0 \quad \text{pour } \alpha = 0. \end{array} \right. \\
 (2') & \left\{ \begin{array}{l} \sin \omega = 0 \quad \text{pour } \alpha = 1; \\ \forall w_\alpha \in]0, 2\pi[\quad \text{pour } \alpha = -1; \\ w_\alpha = 0 \quad \text{pour } \alpha = 0. \end{array} \right. \\
 (3') & \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 \omega = \frac{v_0+1}{v_0} \quad \text{pour } \alpha = \pm 1; \\ w_\alpha = 0 \quad \text{pour } \alpha = 0. \end{array} \right. \\
 (4') & \left\{ \begin{array}{l} \sin 2\omega = 0 \quad \text{pour } \alpha = \pm 1; \\ w_\alpha = 0 \quad \text{pour } \alpha = 0. \end{array} \right. \\
 (5') & \left\{ \begin{array}{l} \sin 2\omega = 0 \quad \text{pour } \alpha = \pm 1; \\ w_\alpha = 0 \quad \text{pour } \alpha = 0. \end{array} \right. \\
 (6') & \left\{ \begin{array}{l} \sin 2\omega = 0 \quad \text{pour } \alpha = \pm 1; \\ w_\alpha = 0 \quad \text{pour } \alpha = 0. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Preuve. Au courant de calcul des solutions singulières, au paragraphes suivant, on déduira les relations (2.k) (resp (2.k')), k=1 à 6.

Soulignons qu'on a obtenu ici la même équation transcendante que celle obtenue dans le contexte des plaques par plusieurs auteurs (cf. [3], [[16], i]) à savoir les équations (2.k), (2.k').

Dans P. Grisvard (cf. [12]) on trouve une étude de l'équation (2.1) et (2.2) différent de celle faire, pour (2.2), dans Kondratiev, 1967, Seif, 1973, Osborn, 1975, Lozi, 1978 resp. cité dans Grisvard ().

Dans Blum et R. Rannacher, 1980 (cf. [3]), on trouve également des résultats systématiques pour l'analogue des équation (2.k) k=1 à 5(le cas k=6 à un signe près), trouvées dans contexte des plaques ($\alpha = \beta - 1$). ■

2.3 Régularité maximale

La présence d'un coin dans la frontière du domaine Ω , considère ici, provoque certainement des singularités du champ de vecteur déplacement u . Ces singularités qui se traduisent

2.3. RÉGULARITÉ MAXIMALE

généralement par des valeurs " élevées" voir " infinies " de certaines composantes de u .

Il est bien connu (cf. [12]) pour le problème (P_k) , $k = 1$ à 6 , que les solutions singulières, dans un voisinage V du sommet O du secteur Ω défini au premier partie sont de la forme :

$$V(r, \theta) = r^\alpha v_\alpha(\theta),$$

ou

$$U(r, \theta) = r^\alpha [\log r v_\alpha(\theta) + \partial_\alpha v_\alpha(\theta)].$$

Suivant que α est racine simple ou double de les équations de (2.14), où $v_\alpha \in C^\infty(]0, \omega[)^2$ est une solution du problème homogène correspondant, soit (P'_k) , $k = 1$ à 6 ,

Il est immédiat de vérifier qu'un tel type de solution appartient à $[W_2^1(V)]^2$ si et seulement si $\text{Re } \alpha > 0$ tandis qu'il appartient à $[W_p^{m+2}(V)]^2$ si et seulement si $\text{Re } \alpha > m + 2 - \frac{2}{p}$. Ceci contredit le théorème de régularité habituel dès qu'il existe un α , solution de l'équation transcendante (2.k) dans l'intervalle $]0, m + 2 - \frac{2}{p}[$.

Les solutions singulières du problème (P_k) , $k = 1$ à 6 , sont données dans la :

Proposition 2.3.1 Soit $\alpha_l^{(k)}$, l entier $\succeq 1$, désigne une énumération des racines de l'équation (2.k) pour tout $\alpha_l^{(k)} \neq 0, \pm 1$; alors les solutions singulières de (P_k) , $k = 1$ à 6 , sont données par :

$$V_l^{(k)}(r, \theta) = r^{\alpha_l^{(k)}} \varphi_{\alpha_l^{(k)}}(\theta),$$

$$U_l(r^{(k)}, \theta) = \begin{cases} r^{\alpha_l^{(k)}} \left[\text{Logr } \varphi_{\alpha_l^{(k)}}(\theta) + \partial_{\alpha_l^{(k)}} \varphi_{\alpha_l^{(k)}}(\theta) \right] & \text{si } \omega < 2\pi \\ r^{\alpha_l^{(k)}} \psi_{\alpha_l^{(k)}}(\theta) & \text{si } \omega = 2\pi \end{cases},$$

où $\alpha_l^{(k)}$, est tel que : $0 < \text{Re } \alpha_l^{(k)} < m + 2 - \frac{2}{p}$, et $\varphi_{\alpha_l^{(k)}}(\theta), \psi_{\alpha_l^{(k)}}(\theta)$ sont de classe $(C^\infty)^2$ sur $[0, \omega]$, et données respectivement par :

1) $k = 1$ (Dirichlet)

a) si $\omega < 2\pi$:

$$\varphi_\alpha(\theta) = [(\rho_0 - \rho_1) \sin(\alpha - 2)\omega - (3\rho_1 - \rho_0) \sin \alpha \omega] \begin{pmatrix} (\rho_0 - \rho_1)[\cos(\alpha - 2)\theta - \cos \alpha \theta] \\ -(\rho_0 - \rho_1) \sin(\alpha - 2)\theta + (3\rho_1 - \rho_0) \sin \alpha \theta \end{pmatrix} \\ + (\rho_0 + \rho_1)[\cos(\alpha - 2)\omega - \cos \alpha \omega] \begin{pmatrix} -(\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\theta + (3\rho_1 - \rho_0) \sin \alpha \theta \\ -(\rho_0 + \rho_1)[\cos(\alpha - 2)\theta - \cos \alpha \theta] \end{pmatrix}.$$

b) si $\omega = 2\pi$:

$$\varphi_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} (\rho_0 + \rho_1)[\cos(\alpha - 2)\theta - \cos \alpha\theta] \\ -(\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\theta + (3\rho_1 - \rho_0) \sin \alpha\theta \end{pmatrix},$$

$$\Psi_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} (\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\theta + (\rho_0 - 3\rho_1) \sin \alpha\theta \\ (\rho_0 + \rho_1)[\cos(\alpha - 2)\theta - \cos \alpha\theta] \end{pmatrix}.$$

2) $k = 2$ (Neuman)

a) si $\omega < 2\pi$:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(\theta) = (\rho_0 + \rho_1)[\cos(\alpha - 2)\omega - \cos \alpha\omega] & \begin{pmatrix} (\rho_0 + \rho_1) \cos(\alpha - 2)\theta - (3\rho_1 - \rho_0 - 4) \cos \alpha\theta \\ -(\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\theta + (\rho_0 + \rho_1 - 4) \sin \alpha\theta \end{pmatrix} \\ + (\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\omega - (3\rho_1 - \rho_0 - 8) \sin \alpha\omega & \begin{pmatrix} -(\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\theta - (\rho_0 + \rho_1 + 4) \sin \alpha\theta \\ (\rho_0 + \rho_1) \cos(\alpha - 2)\theta - (3\rho_0 - \rho_1 + 4) \cos \alpha\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) si $\omega = 2\pi$:

$$\varphi_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} (\rho_0 + \rho_1) \cos(\alpha - 2)\theta - (3\rho_1 - \rho_0 - 4) \cos \alpha\theta \\ -(\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\theta + (\rho_0 + \rho_1 - 4) \sin \alpha\theta \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$$\Psi_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} (\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\theta + (\rho_0 + \rho_1 + 4) \sin \alpha\theta \\ (\rho_0 + \rho_1) \cos(\alpha - 2)\theta - (3\rho_0 - \rho_1 + 4) \cos \alpha\theta \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

3) $k = 3$ (Problème mêlé)

a) si $\omega < 2\pi$:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(\theta) = [(\rho_0 + \rho_1) \cos(\alpha - 2)\omega - (3\rho_1 - \rho_0 - 4) \cos \alpha\omega] & \begin{pmatrix} (\rho_0 + \rho_1)[\cos(\alpha - 2)\theta - \cos \alpha\theta] \\ -(\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\theta + (3\rho_0 - \rho_1) \sin \alpha\theta \end{pmatrix} \\ + (\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\omega - (\rho_0 + \rho_1 - 4) \sin \alpha\omega & \begin{pmatrix} -(\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\theta - (3\rho_1 - \rho_0) \sin \alpha\theta \\ -(\rho_0 + \rho_1) \cos[(\alpha - 2)\theta - \cos \alpha\theta] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) si $\omega = 2\pi$: On prend les meme $V_1^{(3)}$ restreint à 2π , que celui du cas $\omega < 2\pi$.

4) $k = 4$ (C.S.F)

a) si $\omega < 2\pi$:

$$\varphi_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} [(\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha + 1)\omega] \cos(\alpha - 2)\theta - [(\rho_1 - \rho_0) \sin(\alpha + 1)\omega + 2\rho_1 \sin(\alpha - 1)\omega] \cos \alpha\theta \\ [-(\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha + 1)\omega] \sin(\alpha - 2)\theta - [(\rho_1 - \rho_0) \sin(\alpha + 1)\omega + 2\rho_1 \sin(\alpha - 1)\omega] \sin \alpha\theta \end{pmatrix}.$$

b) si $\omega = 2\pi$:

$$\varphi_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} [(\rho_0 + \rho_1)/2] \cos(\alpha - 2)\theta - [(\rho_1 - \rho_0)/2] \cos \alpha\theta \\ [-(\rho_0 + \rho_1)/2] \sin(\alpha - 2)\theta - [(\rho_1 - \rho_0)/2] \sin \alpha\theta \end{pmatrix},$$

$$\Psi_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha\theta \\ -\sin \alpha\theta \end{pmatrix}.$$

5) $k = 5$ (C.S.F Dirichlet)

a) si $\omega < 2\pi$:

$$\varphi_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} [(\rho_0 + \rho_1) \cos \alpha\omega] \cos(\alpha - 2)\theta - [(\rho_0 - \rho_1) \cos(\alpha - 2)\omega] \cos \alpha\theta \\ [-(\rho_0 + \rho_1) \cos \alpha\omega] \sin(\alpha - 2)\theta + [-2(\rho_1 - \rho_0) \cos \alpha\omega + (\rho_0 + \rho_1) \cos(\alpha - 2)\omega] \sin \alpha\theta \end{pmatrix}.$$

b) si $\omega = 2\pi$: meme $\varphi_\alpha(\theta)$ et $\Psi_\alpha(\theta)$ que dans le cas $\omega = 2\pi$ de (C.S.F)

6) $k = 6$ (C.S.F Neumann)

a) si $\omega < 2\pi$:

$$\varphi_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} [-(\rho_0 + \rho_1) \sin \alpha\omega] \cos(\alpha - 2)\theta + [4 \sin \alpha\omega + (\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\omega] \cos \alpha\theta \\ [(\rho_0 + \rho_1) \sin \alpha\omega] \sin(\alpha - 2)\theta + [4(\nu_0 + 1) \sin \alpha\omega - (\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\omega] \sin \alpha\theta \end{pmatrix}.$$

b) si $\omega = 2\pi$: meme $\varphi_\alpha(\theta)$ et $\Psi_\alpha(\theta)$ que dans le cas $\omega = 2\pi$ de (C.S.F) et (C.S.F Dirichlet).

Les valeurs exceptiponnelles de α : 0 et ± 1 sont des pole simples de la résolvante $R(\alpha)$ de L, correspondent aux angles particuliers ω solutions des équations (P_k) , $k = 1$ à 6. Plus précisément on a la

Proposition 2.3.2 *Dans le cas où $\alpha = 0; \pm 1$, les solutions de (P_k) , $k = 1$ à 6, sont régulières, plus exactement on a pour $\alpha = 0$, $w = 0$, sur $[0, \omega]$. Pour $\alpha = -1, +1$, on a respectivement :*

$k = 1$ (Dirichlet) :

1) pour $\alpha = -1$:

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} (\nu_0 + 1)(\cos 2\theta - 1) & (\nu_0 + 1)\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix},$$

où $c = (c_3, c_4)$ est une constante quelconque $\neq 0$, si $\omega = \pi$ ou 2π .

2) pour $\alpha = +1$:

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} 2\sin^2 \theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & 2\sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

où $c = (c_1, c_2)$ est une constante quelconque $\neq 0$, si $\omega = \pi$ ou 2π .

$k = 2$ (Neumann) :

1) pour $\alpha = -1$

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} 2\sin^2 \theta & -2\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & 2\sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix},$$

où $c = (c_3, c_4)$ est une constante quelconque $\neq 0$, si $\omega \in]\pi, 2\pi[$.

2) pour $\alpha = +1$

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} \nu_0 \cos 2\theta + 1 & 0 \\ -\nu_0 \sin 2\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

où c_1 constante $\neq 0$ et c_2 constante quelconque, si $\omega = \pi$ ou 2π .

$k = 3$ (Dirichlet/Neumann)

1) pour $\alpha = -1$:

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (\nu_0 + 1)\cos 2\theta & (\nu_0 + 1)\sin 2\theta \\ 0 & 1 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix},$$

où les $c_i, i = 1$ à 4 , sont données par

$$\begin{cases} c_1 = -(\lambda + 2\mu)(\nu_0 \cos(2\omega) \cos \omega \\ c_2 = (\lambda + 2\mu) \sin \omega - (\lambda + \mu) \sin 2\omega \cos \omega = -c_4, \\ c_3 = \mu(\nu_0 \cos 2\omega + 1) \cos 2\omega \end{cases},$$

2.3. RÉGULARITÉ MAXIMALE

pour tout ω solution de $\sin^2 \omega = 1 - \nu$, c'est (3,1).

$k = 4$ (C.S.F)

pour $\alpha = -1$:

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & (\nu_0 + 1) \cos 2\theta \\ 0 & (\nu_0 + 1) \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

où c_3 est une constante quelconque $\neq 0$ et c_1 constante quelconque, si $\omega \in \{\pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$.

pour $\alpha = +1$

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\theta \\ 0 & -\sin 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

où c_3 est une constante quelconque $\neq 0$ et c_1 constante quelconque, si $\omega \in \{\pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$.

$k = 5$ (C.S.F/Dirichlet)

pour $\alpha = -1$:

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} (\nu_0 + 1) & (\nu_0 + 1) \cos 2\theta \\ 0 & -\sin 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

où $c_3 = \pm c_1$ est une constante quelconque $\neq 0$ (le signe + si $\omega = \pi/2$ et $3\pi/2$ et le signe - si $\omega = \pi$ et 2π)

pour $\alpha = +1$:

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\theta \\ 0 & -\sin 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

où $c_3 = \pm c_1$ est une constante quelconque $\neq 0$ (le signe + si $\omega = \pi/2$ et $3\pi/2$ et le signe - si $\omega = \pi$ et 2π)

$k = 6$ (C.S.F Neumann)

pour $\alpha = -1$:

$$w(\theta) = c_3 \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ -\sin 2\theta \end{pmatrix},$$

où c_3 est une constante quelconque $\neq 0$, si $\omega \in \{\pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$.

pour $\alpha = +1$:

$$w(\theta) = \pm c_1 \begin{pmatrix} \nu_0 \cos 2\theta \\ -\nu_0 \sin 2\theta \end{pmatrix},$$

où c_1 est une constante quelconque $\neq 0$ (le signe - si $\omega = \pi/2$ et $3\pi/2$ et le signe + si $\omega = \pi$ et 2π)

Pour la démonstration voir (cf. Merouani [20], pp. 17-22).

2.3.1 Développement singulier de la solution variationnelle du problème (P_k) , $k = 1$ à 6.

Soient les résultats des paragraphes précédentes, notamment les hypothèses et les résultats de la proposition 2.3.1 On dispose donc les ingrédients du théorème de (régularité et décomposition).

Théorème 2.3.3 Soit $u \in [W_2^1(\Omega)]^2$ solution du problème (P_k) , avec $f \in [W_p^m(\Omega)]^2$, alors il existe deux nombres c_l^k et d_l^k ($k = 1$ à 6) tels que :

$$u_R = u - \sum_{1 < \text{Re } \alpha_l (\beta_l=1) < m+4-\frac{2}{p}} c_l^k V_l - \sum_{1 < \text{Re } \alpha_l (\beta_l=2) < m+4-\frac{2}{p}} d_l^k U_l \in W_p^{m+2}(V)$$

à condition qu'aucun des $\text{Re } \alpha_l$ ne soit égale à $m + 2 - \frac{2}{p}$.

Pour la démonstration voir (cf. Merouani [20], pp. 23-24).

2.4 Tableau des résultats de régularités des fonctions singulières des problèmes (P_k) , $k = 1$ à 6

Principaux résultats :

Les notations utilisées dans le corps des tables sont celles des paragraphes précédents. Pour tous les problèmes on considère seulement la solution variationnelle. La signification des différentes colonnes du tableau est la suivante :

1ère colonne : Elle spécifie les hypothèses sur la mesure ω de l'angle considéré.

2ème colonne : Elle indique la condition au bord en $\theta = 0$.

3ème colonne : Elle indique la condition au bord en $\theta = \omega$.

4ème colonne : Elle décrit en coordonnées polaires dans V (et à une constante multiplicative près) la (ou les) solution(s) variationnelle(s) du problème considéré, correspondant à des données régulières, qui a le moins de régularité. Autrement dit elle(s) indique(nt) les termes les plus singuliers d'un développement de toute solution variationnelle au voisinage du sommet considéré.

5ème colonne : Elle donne le plus petit nombre p tel que la (ou les) fonction(s) indiquée(s) dans la quatrième colonne apparten(nt)t à $H^s(V)^2$ pour tout $s \prec p$. En particulier toute solution variationnelle correspondant à des données régulières, apparten(t) à $H^s(V)^2$ pour tout $s \prec p$ (régularité "maximale").

6ème colonne : Elle donne le plus petit nombre τ tel que la différence entre toute solution variationnelle et les termes les plus singuliers de son développement appartienne à $H^s(V)^2$ pour tout $s \prec \tau$. Autrement dit soit u une solution variationnelle correspondant à des données régulières et soient V_i les solutions indiquées en colonne 4, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H^s(V)^2 \quad \text{pour tout } s \prec p, \\ V_i \in H^s(V) \quad \text{pour tout } s \prec p, \\ V_i \notin H^p(V), \\ \exists c_i \in \mathbb{R} \text{ tels que } u - \sum_i c_i V_i \in H^s(V)^2 \quad \text{pour tout } s \prec \tau. \end{array} \right.$$

7ème colonne : Elle contient des renseignements complémentaires difficiles à tabuler.

2.4. TABLEAU DES RÉSULTATS DE RÉGULARITÉS DES FONCTIONS
SINGULIÈRES DES PROBLÈMES (P_K) , $K = 1$ À 6

Tableau des résultats des premières fonctions singulières des problèmes (P_k) ,

$k = 1$ à 6.

$$(\nu_0 = (1 - 2\nu)^{-1}, \rho_0 = \nu_0(\alpha - 1) - 2, \rho_1 = \nu_0(\alpha + 1) + 2$$

2.4. TABLEAU DES RÉSULTATS DE RÉGULARITÉS DES FONCTIONS SINGULIÈRES DES PROBLÈMES (P_K), $K = 1$ À 6

$\omega < 2\pi$	<p>$u \mid u$ donnés</p> <p>pb Direchlet</p>	$r^\alpha \begin{bmatrix} (\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\omega - \\ (3\rho_1 - \rho_0) \sin \alpha \omega \end{bmatrix} \times$ $\begin{pmatrix} (\rho_0 - \rho_1) \times \\ [\cos(\alpha - 2)\theta - \cos \alpha \theta] \\ -(\rho_0 - \rho_1) \sin(\alpha - 2)\theta + \\ (3\rho_1 - \rho_0) \sin \alpha \theta \end{pmatrix}$ $+ r^\alpha (\rho_0 + \rho_1) \begin{bmatrix} \cos(\alpha - 2)\omega - \\ \cos \alpha \omega \end{bmatrix}$ $\begin{pmatrix} -(\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\theta + \\ (3\rho_1 - \rho_0) \sin \alpha \theta \\ -(\rho_0 + \rho_1) \times \\ [\cos(\alpha - 2)\theta - \cos \alpha \theta] \end{pmatrix}$ <p>où α désigne la (ou les) racine(s) de plus petite partie réelle de :</p> $(*) \begin{cases} \sin^2 \alpha \omega = \\ \left(\frac{\nu_0}{\nu_0 + 2} \alpha \right)^2 \sin^2 \omega, \\ \operatorname{Re} \alpha > 1. \end{cases}$	<p>1 + $\operatorname{Re} \alpha$</p>	<p>?</p>	<p>la solution $\in H^2(V)^2$ dans un angle convex ($\omega < \pi$). En colonne 6 ? signifie $\operatorname{Re} \alpha + 1$ où α désigne la (ou les) racine(s) de plus petite partie réelle de* en excluant celle considérées en colonne 4 et à condition qu'aucune de ces dernières ne vaille : $\left[\frac{3-4\nu}{\sin^2 \omega} - \frac{1}{\omega^2} \right]^{\frac{1}{2}}$ quand $\cos(2 \left[\frac{3-4\nu}{\sin^2 \omega} \omega^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}})$ $= \frac{2 \sin^2 \omega}{\omega^2(3-4\nu)} - 1$</p>
$\omega = 2\pi$ /		<p>&</p> $r^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \nu_0 (\cos 3\frac{\theta}{2} - \\ \cos \frac{\theta}{2}) \\ \nu_0 \sin(3\frac{\theta}{2}) - \\ (3\nu_0 + 8) \times \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ $r^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -\nu_0 \sin 3\frac{\theta}{2} - \\ (5\nu_0 + 8) \\ \sin \frac{\theta}{2} \\ \nu_0 (\cos(3\frac{\theta}{2}) - \\ \cos \frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$	<p>$\frac{3}{2}$</p>	<p>2</p>	<p>Remplacer 2 par $\frac{5}{2}$ en colonne 6 dans le cas de données au bord homogènes.</p>

2.4. TABLEAU DES RÉSULTATS DE RÉGULARITÉS DES FONCTIONS SINGULIÈRES DES PROBLÈMES (P_K) , $K = 1$ À 6

ω \prec 2π	$\sigma(u).n/$ $\sigma(u).n$ donnés pb Neum	$r^\alpha \times$ $(\rho_0 + \rho_1) \begin{bmatrix} \cos(\alpha - 2)\omega - \\ \cos \alpha\omega \end{bmatrix}$ $\begin{pmatrix} (\rho_0 + \rho_1) \cos(\alpha - 2)\theta \\ -(3\rho_1 - \rho_0 - 4) \cos \alpha\theta \\ -(\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\theta + \\ (\rho_1 + \rho_0 + 4) \sin \alpha\theta \end{pmatrix}$ $+r^\alpha$ $\times \begin{bmatrix} (\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\omega - \\ (3\rho_1 - \rho_0 + 8) \sin \alpha\omega \end{bmatrix}$ $\begin{pmatrix} (\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\theta \\ -(\rho_1 + \rho_0 + 4) \sin \alpha\theta \\ (\rho_0 + \rho_1) \cos(\alpha - 2)\theta \\ -(3\rho_0 - \rho_1 + 4) \cos \alpha\theta \end{pmatrix}$ où α est la (ou les) racine(s) de plus petite partie réelle de : $(**) \begin{cases} \sin^2 \alpha\omega = \\ \alpha^2 \sin^2 \omega, \\ \operatorname{Re} \alpha \succ 0. \end{cases}$	1 + $\operatorname{Re} \alpha$?	la solution $\in H^2(V)^2$ dans un angle convex ($\omega < \pi$). En colonne 6? signifie $\operatorname{Re} \alpha + 1$ où α désigne la (ou les) racine(s) de plus petite partie réelle de** en excluent celle considérées en colonne 4 et à condition qu'aucune de ces dernières ne vaille : $\left[\frac{1}{\sin^2 \omega} - \frac{1}{\omega^2} \right]^{\frac{1}{2}}$ quand $\cos\left(2 \left[\frac{\omega^2}{\sin^2 \omega} - \frac{1}{\omega^2} \right]^{\frac{1}{2}}\right)$ $= \frac{2 \sin^2 \omega}{\omega^2} - 1$
ω = 2π		$r^{\frac{1}{2}}$ $\&$ $r^{\frac{1}{2}}$ $\begin{pmatrix} \nu_0(\cos 3\frac{\theta}{2} - \\ (5\nu_0 + 4) \cos \frac{\theta}{2}) \\ \nu_0 \sin(\frac{3\theta}{2}) - \\ (\nu_0 - 4) \times \\ \sin \frac{\theta}{2} \\ -\nu_0 \sin 3\frac{\theta}{2} - \\ (\nu_0 + 4) \\ \sin \frac{\theta}{2} \\ \nu_0 \cos(\frac{3\theta}{2}) + \\ (3\nu_0 + 4) \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{3}{2}$	2	Remplacer 2 par $\frac{5}{2}$ en colonne 6 dans le cas de données au bord homogènes.

2.4. TABLEAU DES RÉSULTATS DE RÉGULARITÉS DES FONCTIONS SINGULIÈRES DES PROBLÈMES (P_K), $K = 1$ À 6

ω \prec 2π	$u/$ $\sigma(u).n$ don p.b Mêlé	$r^\alpha \begin{bmatrix} (\rho_0 + \rho_1) \cos(\alpha - 2)\omega - \\ (3\rho_1 - \rho_0 - 4) \cos \alpha\omega \\ (\rho_0 + \rho_1) \times \\ [\cos(\alpha - 2)\theta - \cos \alpha\theta] \\ -(\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\theta + \\ (3\rho_0 - \rho_1) \sin \alpha\theta \end{bmatrix}$ $\times \begin{pmatrix} +r^\alpha [(\rho_0 + \rho_1) \times \sin(\alpha - 2)\omega \\ -(\rho_0 + \rho_1 - 4) \sin \alpha\omega] \\ \begin{pmatrix} -(\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\theta + \\ (3\rho_1 - \rho_0) \sin \alpha\theta \\ -(\rho_0 + \rho_1) \times \\ [\cos(\alpha - 2)\theta - \cos \alpha\theta] \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ où α désigne la (ou les) racine(s) de plus petite partie réelle de : $(***)' \sin^2 \alpha\omega = \frac{1}{3-4\nu}(4(1-\nu)^2 - \alpha^2 \sin^2 \omega, \text{ Re } \alpha \succ 0.$	1 $+$ $\text{Re } \alpha$	$?$	la solution $\in W_p^2(V)^2$, $p < 1.47$ $\nu = 0.3$ et $\omega > 3.1349 \frac{\pi}{4}$ En colonne 6 ? signifie $\text{Re } \alpha + 1$ où α désigne la (les) racine(s) de plus petite partie réelle de***en excluent celle considérées en colonne 4 et à condition qu'aucune de ces dernières ne vaille : $\frac{1}{2\omega} X_i^+, i = 1, 2$
ω $=$ 2π		$2 \text{Re} (r^\alpha v_\alpha(\theta))$ où $\alpha = \frac{1}{4} + i \frac{\log(3-4\nu)}{4\pi}$ et $v_\alpha(\theta)$ données 2.15.	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$	Remplacer $\frac{7}{4}$ par par 2 en colonne 6 dans le cas de données au bord homogènes. la solution $\in W_p^2(V)^2$, $p < \frac{8}{7}$ Remplacer 2 par $\frac{5}{2}$ en colonne 6 dans le cas de données au bord homogènes
ω $=$ π		$2 \text{Re} (r^\alpha \phi_\alpha(\theta))$ où $\alpha = \frac{3}{2} + \frac{i}{2\pi} \log \left(\frac{1-\nu}{3+\nu} \right)$ et $\phi_\alpha(\theta) = \sin \alpha\theta + \cos \alpha\theta - \frac{\alpha}{\alpha-2} \sin(\alpha-2)\theta - \cos(\alpha-2)\theta$	$\frac{3}{2}$	2	la solution $\in W_p^2(V)$ avec $p \prec 4$

2.4. TABLEAU DES RÉSULTATS DE RÉGULARITÉS DES FONCTIONS SINGULIÈRES DES PROBLÈMES (P_K), $K = 1$ À 6

$\omega < 2\pi$ $\omega \neq \frac{k\pi}{2}$ $k = 1 \text{ à } 3$ $\frac{\pi}{\omega} = k$ entier	$u.n/$ $u.n$ & $(\sigma(u).n).\tau/$ $(\sigma(u).n).\tau$ donnés pb C.S.F	$r^{\frac{\pi}{\omega}-1} \times$ $\begin{pmatrix} [(\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha + 1)\omega] \times \\ \cos(\alpha - 2)\theta \\ -[(\rho_1 - \rho_0) \sin(\alpha + 1)\omega + \\ 2\rho_1 \sin(\alpha - 1)\omega] \cos \alpha\theta \\ \\ [-(\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha + 1)\omega] \times \\ \sin(\alpha - 2)\theta - \\ [(\rho_1 - \rho_0) \sin(\alpha + 1)\omega + \\ 2\rho_1 \sin(\alpha - 1)\omega] \sin \alpha\theta \end{pmatrix}$ $r^k(\log r v_k(\theta) + \partial_k v_k(\theta))$ où et $v_\alpha(\theta)$ données 2.15.	$\frac{\pi}{3}$ k	$\frac{\pi}{\omega}$ - 1 1 + k	la solution est $H^2(V)^2$ dans le 1er quadrant ($\omega < \frac{\pi}{2}$).
$\omega = 2\pi$		& $r^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{\nu_0}{2} (\cos 3\frac{\theta}{2} + \\ (\nu_0 + 2) \cos \frac{\theta}{2}) \\ \frac{\nu_0}{2} \sin(3\frac{\theta}{2}) + \\ (\nu_0 + 2) \times \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ $r^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ - \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{3}{2}$	2	Remplacer 2 par $\frac{5}{2}$ en colonne 6 dans le cas de données au bord homogènes.

2.4. TABLEAU DES RÉSULTATS DE RÉGULARITÉS DES FONCTIONS SINGULIÈRES DES PROBLÈMES (P_K) , $K = 1$ À 6

$\omega < 2\pi$ $\omega \neq \frac{\pi}{2}$	$u.n/u$ $(\sigma(u).n).\tau$ donnés C.S.F Dirichlet	$\begin{pmatrix} [(\rho_0 + \rho_1) \cos \alpha\omega] \times \\ \cos(\alpha - 2)\theta - \\ [(\rho_0 - \rho_1) \cos(\alpha - 2)\omega] \times \\ \cos \alpha\theta \\ \\ [-(\rho_0 + \rho_1) \cos \alpha\omega] \times \\ \sin(\alpha - 2)\theta + \\ [-2(\rho_1 - \rho_0) \cos \alpha\omega + \\ (\rho_0 + \rho_1) \cos(\alpha - 2)\omega] \times \\ \sin \alpha\theta \end{pmatrix}$ où α est la (ou les) racine(s) de plus petite partie réelle de : $(*)' \begin{cases} \sin 2\alpha\omega = \\ \frac{\alpha}{3-4\nu} \sin 2\omega, \\ \operatorname{Re} \alpha \succ 0. \end{cases}$	1 $+$ $\operatorname{Re} \alpha$	la solution $\in H^2(V)^2$ dans le 1er quadrant ($\omega < \pi$). En colonne 6 ? signifie $\operatorname{Re} \alpha + 1$ où α désigne la (ou les) racine(s) de plus petite partie réelle de (*), en excluent celle considérées en colonne 4 et à condition qu'aucune de ces dernières ne vaille : $\left[\frac{1}{\sin^2 2\omega} - \frac{1}{4\omega^2} \right]^{\frac{1}{2}}$ quand $\sin \left(\frac{(2\omega)^2}{\sin^2 2\omega} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$ $= - \left(1 - \frac{\sin^2 2\omega}{(2\omega)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$
$\omega = 2\pi$		$\&$ $r^{\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} \frac{\nu_0}{4} \left(\cos \frac{7\theta}{4} + \right. \\ \left. (\nu_0 + 2) \cos \frac{\theta}{4} \right) \\ \frac{\nu_0}{4} \sin \left(\frac{7\theta}{4} \right) + \\ (\nu_0 + 2) \times \\ \sin \frac{\theta}{4} \end{pmatrix}$ $r^{\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{4} \\ - \sin \frac{\theta}{4} \end{pmatrix}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$ Remplacer 2 par $\frac{5}{2}$ en colonne 6 dans le cas de données au bord homogènes.

2.4. TABLEAU DES RÉSULTATS DE RÉGULARITÉS DES FONCTIONS SINGULIÈRES DES PROBLÈMES (P_K), $K = 1$ À 6

$\omega < 2\pi$	<p>$u.n/$ $\sigma(u)$ & $(\sigma(u).n).\tau$</p> <p>donnés</p> <p>C.S.F Neumann</p>	$r^\alpha \times \left(\begin{array}{l} [-(\rho_0 + \rho_1) \sin \alpha \omega] \times \\ \cos(\alpha - 2)\theta + \\ [4 \sin \alpha \omega + \\ (\rho_0 + \rho_1) \times \\ \sin(\alpha - 2)\omega] \cos \alpha \theta \\ \\ [(\rho_0 + \rho_1) \sin \alpha \omega] \times \\ \sin(\alpha - 2)\theta + \\ [4(\nu_0 + 1) \sin \alpha \omega - \\ (\rho_0 + \rho_1) \times \\ \sin(\alpha - 2)\omega] \sin \alpha \theta \end{array} \right)$ <p>où α est la (ou les) racine(s) de plus petite partie réelle de :</p> $(*)'' \left\{ \begin{array}{l} \sin 2\alpha \omega = \\ -\alpha \sin 2\omega \\ \text{Re } \alpha > 0. \end{array} \right.$	<p>1 + Re α</p>	<p>?</p>	<p>la solution $\in H^2(V)^2$ dans le 1er quadrant ($\omega < \pi$). En colonne 6 ? signifie Re $\alpha + 1$ où α désigne la (ou les) racine(s) de plus petite partie réelle de (**), en excluant celle considérées en colonne 4 et à condition qu'aucune de ces dernières ne vaille :</p> $\left\{ \frac{(3-4\nu)^2 4\omega^2}{\sin^2 2\omega} - \frac{1}{4\omega^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$ <p>quand</p> $\left\{ \frac{(3-4\nu)^2 4\omega^2}{\sin^2 2\omega} - 1 \right\}^{\frac{1}{2}}$ $= \left(1 - \frac{\sin^2 2\omega}{(3-4\nu)(2\omega)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$
$\omega = 2\pi$		<p>&</p> $r^{\frac{1}{4}} \left(\begin{array}{l} \frac{\nu_0}{4} (\cos \frac{7\theta}{4} + \\ (\nu_0 + 2) \cos \frac{\theta}{4}) \\ \frac{\nu_0}{4} \sin(\frac{7\theta}{4}) + \\ (\nu_0 + 2) \times \\ \sin \frac{\theta}{4} \end{array} \right)$ $r^{\frac{1}{4}} \left(\begin{array}{l} \cos \frac{\theta}{4} \\ -\sin \frac{\theta}{4} \end{array} \right)$	<p>$\frac{5}{4}$</p>	<p>$\frac{3}{2}$</p>	<p>Remplacer $\frac{3}{2}$ par $\frac{7}{4}$ dans le cas de données au bord homogènes.</p>

2.5 Calcul des coefficients c_β, d_β dans le cas de la fissure

Dans cette partie nous suivent la même technique d'Ora-Tcha-Kondor [26], W. Chikouche and A. Aibeche [6] et B. Merouani and R. Boufenouche [24] pour le bilaplacien dans un secteur S , avec différents conditions aux limites. Nous écrivons à l'aide de la formule de **Bétti** une formule de Green pour l'opérateur de Lamé, qui permettra d'établir une relation entre les fonctions $(v_\alpha)_{\alpha \in E}$, cette relation réduit à une relation d'orthogonalité analogue à celle obtenue pour le Laplacien et le bilaplacien. En appliquant cette relation, on calcule les coefficients c_α^k , de singularités du développement $u(r, \theta) = \sum_{\alpha \in E} c_\alpha^k r^\alpha v_\alpha(\theta)$, $k = 1$ à 6.

Soient S le secteur d'ouverture $\omega \leq 2\pi$, et de rayon ρ (ρ est positif et fixé) défini par :

$$S = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2, 0 < r < \rho, 0 < \theta < \omega\},$$

et de frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_\omega \cup \Sigma$ où :

$$\Sigma = \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in \mathbb{R}^2, 0 < \theta < \omega\},$$

$$\Gamma_0 = \{(r, 0) \in \mathbb{R}^2, 0 < r < \rho\},$$

$$\Gamma_\omega = \{(r \cos \omega, r \sin \omega) \in \mathbb{R}^2, 0 < r < \rho\},$$

et $v_\alpha(r, \theta) = r^\alpha \varphi_\alpha(\theta)$, $v_\beta(r, \theta) = r^\beta \varphi_\beta(\theta)$ deux fonctions telles que : $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ soient solutions du problème (P_k) , $k = 1$ à 6, (de plus $\text{Re} \alpha > 0$, $\text{Re} \beta > 0$).

Dans se qui suit et à l'aide d'une formule de Betti nous allons écrire une relation d'orthogonalité entre deux fonctions $(v_\alpha)_{\alpha \in E}, (v_\beta)_{\beta \in E}$, où E est l'ensemble des nombres complexes α tels que $\text{Re} \alpha > 0$ et v_α, v_β solutions de (P'_k) et

$$E = \{\alpha \in \mathbb{C} / (2.14), \text{Re} \alpha > 0\}.$$

• Soient Γ la frontière du secteur S défini ci-dessus, u et v deux fonctions qui vérifient le problème (P_k) , $k = 1$ à 6.

Supposons que u, v sont dans $[H^1(S)]^2$.

Rappelons d'abord la formule de Betti :

On a l'équations de Lamé (élasticité) :

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} u) = 0$$

Posons :

$$\begin{aligned}
 Lu &= \Delta u + \frac{(\lambda + \mu)}{\mu} \text{grad}(\text{div } u) \\
 &= \Delta u + \frac{1}{1 - 2\nu} \text{grad}(\text{div } u) \\
 &= \Delta u + \nu_0 \text{grad}(\text{div } u) \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Utilisant la formule du laplacien :

$$\Delta u = \text{grad}(\text{div } u) - \text{rot.rot } u,$$

donc (2.17) sera de la forme :

$$\begin{aligned}
 \text{grad}(\text{div } u) - \text{rot.rot } u + \frac{(\lambda + \mu)}{\mu} \text{grad}(\text{div } u) &= 0 \Leftrightarrow \\
 \frac{(\lambda + 2\mu)}{\mu} \text{grad}(\text{div } u) - \text{rot.rot } u &= 0.
 \end{aligned}$$

On utilisant le fait que li coeffition de Poissant $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$, on a :

$$\left(2 + \frac{2\nu}{1 - 2\nu}\right) \text{grad}(\text{div } u) - \text{rot.rot } u = (1 + \nu_0) \text{grad}(\text{div } u) - \text{rot.rot } u = 0.$$

La fonction vectorielle Lu étant par ailleurs absolument intégrables, donc :

$$vLu = \sum_{j=1}^2 \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (v_j \sigma_{ij}(u)) \right] - E(v, u), \quad i = 1, 2$$

où

$$E(v, u) = \frac{\lambda}{\mu} \text{div } v \text{div } u + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2$$

et σ_{ij} les composantes du tenseur linéarisé des contraintes correspondant, est donné par la loi de Hooke au moyen des coefficients de Lamé λ et μ tels que $\lambda \geq 0$ et $\mu > 0$:

$$\sigma_{ij} = (\lambda \text{div } u) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Les indices i, j sont restreints aux valeurs 1 et 2 en élasticité, δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

Donc

$$vLu + E(v, u) = \sum_{j=1}^2 \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (v_j \sigma_{ij}(u)) \right], \quad i = 1, 2. \tag{2.18}$$

Intégrant l'égalité (2.18) sur le secteur S , donc d'après la formule de Gauss-Ostrogradski, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_S (vLu + E(v, u)) dx &= \int_\Gamma \sum_{j=1}^2 \left[\sum_{i=1}^2 (v_i \sigma_{ij}(u)) \right] \eta_j d\sigma \\ &= \int_\Gamma \sum_{i=1}^2 v_i \sigma_{i\eta}(u) d\sigma = \int_\Gamma v T_\nu u d\sigma. \end{aligned}$$

où

$$T_\nu u = 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + \lambda \nu \operatorname{div} u + \mu (\eta \times \operatorname{rot} u) = \sigma(u) \cdot \eta,$$

$\sigma(u)$ est le tenseur des contraintes, η_j est le cosinus directeur de la normale η de la surface.

Nous aboutissons en définitive à l'identité :

$$\int_S (vLu + E(v, u)) dx = \int_\Gamma v \sigma(u) d\sigma, \quad (2.19)$$

dite **première formule de Betti**. Du fait de l'analogie avec les fonctions biharmoniques, cette formule et celles qui soient sont également appelées formule de Green.

Alors :

$$\begin{aligned} \int_S (vLu + E(v, u)) dx &= \int_\Gamma v \sigma(u) d\sigma. \\ \int_S (uLv + E(u, v)) dx &= \int_\Gamma u \sigma(v) d\sigma. \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_S (vLu - uLv) dx = \int_\Gamma (v \sigma(u) - u \sigma(v)) d\sigma,$$

dite **seconde formule de Betti**.

Soulignons ici que la formule quadratique $E(v, u)$ peut être représentée comme suit :

$$\begin{aligned} E(v, u) &= \frac{3\lambda + 2\mu}{3\mu} \operatorname{div} v \operatorname{div} u + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &\quad + \frac{1}{3} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Il est évident alors que pour $u = v$ la forme quadratique est l'expression de l'énergie de déformation W .

Supposons ensuite que $u = v$ et qu'ils vérifient les équations de Lamé. La formule (2.19) nous donne alors la formule :

$$\int_S W dx = \int_\Gamma u \sigma(u) d\sigma,$$

qui la **troisième formule de Betti**.

Puisque u (resp v) est solutions du problèmes (P_k) , $k = 1$ à 6. Alors :

$$Lu = Lv = 0.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_S [vLu - uLv] dx &= \int_\Gamma [v\sigma(u) \cdot \eta - u\sigma(v) \cdot \eta] d\sigma \\ &= \int_{\Gamma_0} [v\sigma(u) \cdot \eta - u\sigma(v) \cdot \eta] d\sigma + \int_{\Gamma_\omega} [v\sigma(u) \cdot \eta - u\sigma(v) \cdot \eta] d\sigma \\ &\quad + \int_\Sigma [v\sigma(u) \cdot \eta - u\sigma(v) \cdot \eta] d\sigma \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après les conditions aux limites, les intégrales sur Γ_0 et Γ_ω sont nulles. donc la formule de Green s'écrit comme suit :

$$\int_\Sigma [v\sigma(u) \cdot \eta - u\sigma(v) \cdot \eta] d\sigma = 0. \quad (2.20)$$

Alors pour deux fonctions $u_\alpha(r, \theta) = r^\alpha \varphi_\alpha(\theta)$, $v_\beta(r, \theta) = r^{\bar{\beta}} \bar{\varphi}_\beta(\theta)$, la formule (2.20) s'écrit comme suit :

$$\int_\Sigma [\bar{v}_\beta \sigma(u_\alpha) \cdot \eta - u_\alpha \sigma(\bar{v}_\beta) \cdot \eta] d\sigma = 0. \quad (2.21)$$

Sur Σ on a : $\eta = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, $\rho = r$, $d\sigma = \rho d\theta$, $\theta \in [0, \omega]$.

Calculons maintenant en coordonnées polaires le tenseur des contraintes $\sigma(u)$:

On a :

$$\sigma(u) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(u) & \sigma_{12}(u) \\ \sigma_{21}(u) & \sigma_{22}(u) \end{pmatrix},$$

où

$$\sigma_{ij}(u) = (\lambda \operatorname{div} u) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = (\lambda \operatorname{div} u) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u), \quad i, j = 1, 2$$

où δ_{ij} : le symbole de Kronecker, $\lambda \succeq 0, \mu \succ 0$ les coefficients de Lamé, ε_{ij} : les composantes du tenseur de déformation définie par :

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2$$

donc :

$$\begin{cases} \sigma_{11}(u) = \lambda \operatorname{div} u + 2\mu \varepsilon_{11}(u) \\ \sigma_{12}(u) = 2\mu \varepsilon_{12}(u) \\ \sigma_{22}(u) = \lambda \operatorname{div} u + 2\mu \varepsilon_{22}(u) \end{cases},$$

et

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}(u) = \frac{\partial}{\partial x_1} [r^\alpha v_{1,\alpha}(\theta)] \\ \varepsilon_{12}(u) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (r^\alpha v_{2,\alpha}(\theta)) + \frac{\partial}{\partial x_2} (r^\alpha v_{1,\alpha}(\theta)) \right] \\ \varepsilon_{22}(u) = \frac{\partial}{\partial x_2} [r^\alpha v_{2,\alpha}(\theta)] \end{cases},$$

et d'après (2.7) :

$$\begin{cases} v_{1,\alpha}(\theta) = \cos \theta w_{1,\alpha}(\theta) - \sin \theta w_{2,\alpha}(\theta); \\ v_{2,\alpha}(\theta) = \sin \theta w_{1,\alpha}(\theta) + \cos \theta w_{2,\alpha}(\theta) \end{cases},$$

on obtient :

$$\varepsilon_{11}(u) = r^{\alpha-1} \left[(\alpha \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) w_{1,\alpha} + (1 - \alpha) \cos \theta \sin \theta w_{2,\alpha} - \cos \theta \sin \theta w'_{1,\alpha} + \sin^2 \theta w'_{2,\alpha} \right],$$

$$\varepsilon_{12}(u) = \mu r^{\alpha-1} \left[2(\alpha - 1) \cos \theta \sin \theta w_{1,\alpha} + (\alpha - 1) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) w_{2,\alpha} + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) w'_{1,\alpha} - 2 \cos \theta \sin \theta w'_{2,\alpha} \right],$$

$$\varepsilon_{22}(u) = r^{\alpha-1} \left[(\cos^2 \theta + \alpha \sin^2 \theta) w_{1,\alpha} + (\alpha - 1) \cos \theta \sin \theta w_{2,\alpha} + \cos \theta \sin \theta w'_{1,\alpha} + \cos^2 \theta w'_{2,\alpha} \right],$$

donc :

$$\begin{aligned}\sigma_{11}(u) &= r^{\alpha-1} \left[\lambda \left[(\alpha + 1) w_{1,\alpha} + w'_{2,\alpha} \right] + 2\mu (\alpha \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) w_{1,\alpha} \right] + \\ & 2\mu r^{\alpha-1} \left[(1 - \alpha) \cos \theta \sin \theta w_{2,\alpha} - \cos \theta \sin \theta w'_{1,\alpha} + \sin^2 \theta w'_{2,\alpha} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{12}(u) &= \mu r^{\alpha-1} \left[2(\alpha - 1) \cos \theta \sin \theta w_{1,\alpha} + (\alpha - 1) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) w_{2,\alpha} \right] + \\ & \mu r^{\alpha-1} \left[(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) w'_{1,\alpha} - 2 \cos \theta \sin \theta w'_{2,\alpha} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22}(u) &= r^{\alpha-1} \left[\lambda \left[(\alpha + 1) w_{1,\alpha} + w'_{2,\alpha} \right] + 2\mu (\cos^2 \theta + \alpha \sin^2 \theta) w_{1,\alpha} \right] + \\ & 2\mu r^{\alpha-1} \left[(\alpha - 1) \cos \theta \sin \theta w_{2,\alpha} + \cos \theta \sin \theta w'_{1,\alpha} + \cos^2 \theta w'_{2,\alpha} \right],\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\sigma(u_\alpha) \cdot \eta &= \begin{pmatrix} \sigma_{11}(u) & \sigma_{12}(u) \\ \sigma_{12}(u) & \sigma_{22}(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= r^{\alpha-1} \begin{pmatrix} [\lambda w'_{2,\alpha} + (\alpha(\lambda + 2\mu) + \lambda) w_{1,\alpha}] \cos \theta - \mu [w'_{1,\alpha} + (\alpha - 1) w_{2,\alpha}] \sin \theta \\ \mu [w'_{1,\alpha} + (\alpha - 1) w_{2,\alpha}] \cos \theta + [\lambda w'_{2,\alpha} + (\alpha(\lambda + 2\mu) + \lambda) w_{1,\alpha}] \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \mu r^{\alpha-1} \begin{pmatrix} \left[\frac{\lambda}{\mu} w'_{2,\alpha} + \left(\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu} \alpha + \frac{\lambda}{\mu} \right) w_{1,\alpha} \right] \cos \theta - [w'_{1,\alpha} + (\alpha - 1) w_{2,\alpha}] \sin \theta \\ [w'_{1,\alpha} + (\alpha - 1) w_{2,\alpha}] \cos \theta + \left[\frac{\lambda}{\mu} w'_{2,\alpha} + \left(\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu} \alpha + \frac{\lambda}{\mu} \right) w_{1,\alpha} \right] \sin \theta \end{pmatrix},\end{aligned}$$

on a :

$$\frac{\lambda}{\mu} = (\nu_0 - 1) \text{ et } \frac{(\lambda + 2\mu)}{\mu} = (\nu_0 + 1),$$

donc

$$\sigma(u_\alpha) \cdot \eta = \mu r^{\alpha-1} \times \begin{pmatrix} [(\nu_0 - 1) w'_{2,\alpha} + ((\nu_0 + 1) \alpha + (\nu_0 - 1)) w_{1,\alpha}] \cos \theta - [w'_{1,\alpha} + (\alpha - 1) w_{2,\alpha}] \sin \theta \\ [w'_{1,\alpha} + (\alpha - 1) w_{2,\alpha}] \cos \theta + [(\nu_0 - 1) w'_{2,\alpha} + ((\nu_0 + 1) \alpha + (\nu_0 - 1)) w_{1,\alpha}] \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Pour $\alpha \neq \bar{\beta}$, posons :

$$\bar{v}_\beta = r^{\bar{\beta}} (\bar{v}_{1,\beta}, \bar{v}_{2,\beta}).$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_\beta \sigma(w_\alpha) \cdot \eta &= \mu r^{\bar{\beta}+\alpha-1} (\cos \theta \bar{w}_{1,\beta} - \sin \theta \bar{w}_{2,\beta}, \sin \theta \bar{w}_{1,\beta} + \cos \theta \bar{w}_{2,\beta}) \\ &\times \begin{pmatrix} [(\nu_0 - 1) w'_{2,\alpha} + ((\nu_0 + 1) \alpha + (\nu_0 - 1)) w_{1,\alpha}] \cos \theta - [w'_{1,\alpha} + (\alpha - 1) w_{2,\alpha}] \sin \theta \\ [w'_{1,\alpha} + (\alpha - 1) w_{2,\alpha}] \cos \theta + [(\nu_0 - 1) w'_{2,\alpha} + ((\nu_0 + 1) \alpha + (\nu_0 - 1)) w_{1,\alpha}] \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \mu r^{\bar{\beta}+\alpha-1} (\cos \theta \bar{w}_{1,\beta} - \sin \theta \bar{w}_{2,\beta}, \sin \theta \bar{w}_{1,\beta} + \cos \theta \bar{w}_{2,\beta}) \times \begin{pmatrix} A_\alpha \cos \theta - B_\alpha \sin \theta \\ B_\alpha \cos \theta + A_\alpha \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \mu r^{\bar{\beta}+\alpha-1} (A_\alpha \bar{w}_{1,\beta} + B_\alpha \bar{w}_{2,\beta}) \end{aligned}$$

telles que :

$$\begin{aligned} A_\alpha &= (\nu_0 - 1) w'_{2,\alpha} + ((\nu_0 + 1) \alpha + (\nu_0 - 1)) w_{1,\alpha} \\ B_\alpha &= w'_{1,\alpha} + (\alpha - 1) w_{2,\alpha} \end{aligned}$$

d'où

$$v_\alpha \sigma(\bar{w}_\beta) \cdot \eta = r^{\bar{\beta}+\alpha-1} (A_{\bar{\beta}} w_{1,\alpha} + B_{\bar{\beta}} w_{2,\alpha})$$

$$\bar{v}_\beta \sigma(w_\alpha) \cdot \eta - v_\alpha \sigma(\bar{w}_\beta) \cdot \eta = \mu r^{\bar{\beta}+\alpha-1} (A_\alpha \bar{w}_{1,\beta} + B_\alpha \bar{w}_{2,\beta} - A_{\bar{\beta}} w_{1,\alpha} - B_{\bar{\beta}} w_{2,\alpha})$$

$$= \mu r^{\bar{\beta}+\alpha-1} \begin{pmatrix} (\nu_0 - 1) \bar{w}_{2,\beta} w_{1,\alpha} - w'_{1,\alpha} \bar{w}_{2,\beta} \\ + \bar{w}_{1,\beta} w_{2,\alpha} - (\nu_0 - 1) w'_{2,\alpha} \bar{w}_{1,\beta} \\ + (\bar{\beta} - \alpha) [(\nu_0 + 1) w_{1,\alpha} \bar{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha} \bar{w}_{2,\beta}] \end{pmatrix},$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned}
 \int_s [\bar{v}_\beta \sigma(w_\alpha) \cdot \eta - v_\alpha \sigma(\bar{w}_\beta) \cdot \eta] d\sigma &= \int_\Sigma \mu r^{\bar{\beta}+\alpha-1} \left((\nu_0 - 1) \bar{w}'_{2,\beta} w_{1,\alpha} - w'_{1,\alpha} \bar{w}_{2,\beta} \right) d\sigma + \\
 &\int_\Sigma \mu r^{\bar{\beta}+\alpha-1} \left[\bar{w}'_{1,\beta} w_{2,\alpha} - (\nu_0 - 1) w'_{2,\alpha} \bar{w}_{1,\beta} \right] d\sigma + \\
 &\int_\Sigma \mu r^{\bar{\beta}+\alpha-1} (\bar{\beta} - \alpha) [(\nu_0 + 1) w_{1,\alpha} \bar{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha} w_{2,\beta}] d\sigma \\
 &= \mu r^{\bar{\beta}+\alpha} \int_0^\omega \left[(\nu_0 - 1) \bar{w}'_{2,\beta} w_{1,\alpha} - w'_{1,\alpha} \bar{w}_{2,\beta} \right] d\theta + \\
 &\mu r^{\bar{\beta}+\alpha} \int_0^\omega \left[\bar{w}'_{1,\beta} w_{2,\alpha} - (\nu_0 - 1) w'_{2,\alpha} \bar{w}_{1,\beta} \right] d\theta + \\
 &\mu r^{\bar{\beta}+\alpha} \int_0^\omega (\bar{\beta} - \alpha) [(\nu_0 + 1) w_{1,\alpha} \bar{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha} \bar{w}_{2,\beta}] d\theta \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Remarque 2.5.1 Les fonctions $w_\alpha = r^\alpha (w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha})$, $w_\beta = r^\beta (w_{1,\beta}, w_{2,\beta})$ vérifient les conditions aux limites $B_k u$ pour $\theta = 0$ et $\theta = \omega$, donc on a :

$$\int_0^\omega w'_\beta w_\alpha d\theta = - \int_0^\omega w_\beta w'_\alpha d\theta.$$

En effet :

$$\int_0^\omega w'_\beta w_\alpha d\theta = - \int_0^\omega w_\beta w'_\alpha d\theta + [w_\beta w_\alpha]_0^\omega = - \int_0^\omega w_\beta w'_\alpha d\theta.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma} [\bar{v}_\beta \sigma(w_\alpha) \cdot \eta - \nu_\alpha \sigma(\bar{w}_\beta) \cdot \eta] d\sigma &= \mu r^{\bar{\beta}+\alpha} \int_0^\omega \left(\begin{array}{c} \nu_0 \bar{w}'_{2,\beta} w_{1,\alpha} + \nu_0 \bar{w}'_{1,\beta} w_{2,\alpha} + \\ (\bar{\beta} - \alpha) [(\nu_0 + 1) w_{1,\alpha} \bar{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha} \bar{w}_{2,\beta}] \end{array} \right) d\theta \\
 &= \mu r^{\bar{\beta}+\alpha} \int_0^\omega \left(\begin{array}{c} \nu_0 [\bar{w}'_{2,\beta} w_{1,\alpha} + \bar{w}'_{1,\beta} w_{2,\alpha}] + \\ (\bar{\beta} - \alpha) [(\nu_0 + 1) w_{1,\alpha} \bar{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha} \bar{w}_{2,\beta}] \end{array} \right) d\theta \\
 &= \mu (\bar{\beta} - \alpha) \rho^{\bar{\beta}+\alpha} \int_0^\omega \left(\begin{array}{c} \frac{\nu_0}{(\bar{\beta}-\alpha)} [\bar{w}'_{2,\beta} w_{1,\alpha} + \bar{w}'_{1,\beta} w_{2,\alpha}] + \\ [(\nu_0 + 1) w_{1,\alpha} \bar{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha} \bar{w}_{2,\beta}] \end{array} \right) d\theta \\
 &= \mu (\bar{\beta} - \alpha) \rho^{\bar{\beta}+\alpha} \int_0^\omega \left[\begin{array}{c} \frac{1}{(\bar{\beta}-\alpha)} \nu_0 (\bar{w}'_{2,\beta}, \bar{w}'_{1,\beta}) \\ + ((1 + \nu_0) \bar{w}_{1,\beta}, \bar{w}_{2,\beta}) \end{array} \right] \begin{pmatrix} w_{1,\alpha} \\ w_{2,\alpha} \end{pmatrix} d\theta \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Puisque ρ non nul, on obtient :

$$\int_0^\omega \left[\frac{1}{(\bar{\beta}-\alpha)} \nu_0 (\bar{w}'_{2,\beta}, \bar{w}'_{1,\beta}) + ((1 + \nu_0) \bar{w}_{1,\beta}, \bar{w}_{2,\beta}) \right] \begin{pmatrix} w_{1,\alpha} \\ w_{2,\alpha} \end{pmatrix} d\theta = 0 \quad (2.22)$$

donc on a le théorème suivant :

Théorème 2.5.2 Soient $w_\alpha = r^\alpha (w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha})$ et $w_\beta = r^\beta (w_{1,\beta}, w_{2,\beta})$ solutions du problème (P') , avec α et β solutions de (2.14). Alors, si $\alpha \neq \bar{\beta}$, on a :

$$\begin{aligned}
 [w_\alpha, w_\beta] &= \\
 \int_0^\omega \left[\frac{1}{(\bar{\beta}-\alpha)} \nu_0 (w'_{2,\beta}, w'_{1,\beta}) + ((1 + \nu_0) \bar{w}_{1,\beta}, \bar{w}_{2,\beta}) \right] \begin{pmatrix} w_{1,\alpha} \\ w_{2,\alpha} \end{pmatrix} d\theta &= 0. \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

Corollaire 2.5.3 Soient $w_\alpha = r^\alpha (w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha})$ et $w_\beta = r^\beta (w_{1,\beta}, w_{2,\beta})$ solutions du problème (P'_k) , $k = 1$ à 6 avec α et β solutions de (2.14). Supposons de plus que

$$\int_0^\omega (w'_{2,\alpha}, w'_{1,\alpha}) \begin{pmatrix} \bar{w}_{1,\beta} \\ \bar{w}_{2,\beta} \end{pmatrix} d\theta = 0, \quad (2.24)$$

et $\alpha \neq \bar{\beta}$, alors :

$$[w_\alpha, w_\beta] = \int_0^\omega [((1 + \nu_0) w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha})] \begin{pmatrix} \bar{w}_{1,\beta} \\ \bar{w}_{2,\beta} \end{pmatrix} d\theta = 0. \quad (2.25)$$

Preuve. Il suffit de substituer (2.24) dans (2.23). ■

Remarque 2.5.4 Pour $w_\alpha(r, \theta) = r^\alpha (w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha})$, on définit l'opérateur linéaire T telle que :

$$T(w_\alpha) = r^{\alpha-1} \begin{pmatrix} (\nu_0 + 1) w_{1,\alpha} \\ w_{2,\alpha} \end{pmatrix}.$$

Corollaire 2.5.5 D'après le corollaire 2.5.3, si $\alpha \neq \bar{\beta}$, on a :

$$\int_{\Sigma} (T w_\alpha \bar{w}_\beta + w_\alpha T \bar{w}_\beta) d\sigma = 0. \quad (2.26)$$

Preuve. D'après la définition de T et le corollaire 2.5.3 on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (T w_\alpha \bar{w}_\beta + w_\alpha T \bar{w}_\beta) d\sigma &= \int_{\Sigma} \left[\begin{array}{l} T(r^\alpha (w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha})) r^{\bar{\beta}} (\bar{w}_{1,\beta}, \bar{w}_{2,\beta}) \\ + r^\alpha (w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha}) T(r^{\bar{\beta}} (\bar{w}_{1,\beta}, \bar{w}_{2,\beta})) \end{array} \right] d\sigma \\ &= 2r^{\alpha+\bar{\beta}-1} \int_0^\omega \begin{pmatrix} (\nu_0 + 1) w_{1,\alpha} \\ w_{2,\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_{1,\beta} \\ \bar{w}_{2,\beta} \end{pmatrix} d\sigma + \\ &\quad 2r^{\alpha+\bar{\beta}-1} \int_0^\omega (w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha}) \begin{pmatrix} (\nu_0 + 1) \bar{w}_{1,\beta} \\ \bar{w}_{2,\beta} \end{pmatrix} d\sigma \\ &= 2r^{\alpha+\bar{\beta}-1} \int_0^\omega [((\nu_0 + 1) w_{1,\alpha} \bar{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha} \bar{w}_{2,\beta})] d\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

2.5.1 Calcul des coefficients c_β, d_β

Corollaire 2.5.6 Supposons que $u = \sum_{\alpha \in E} c_\alpha r^\alpha \varphi_\alpha$ soit uniformément convergente dans \bar{S} . Si $[\varphi_{\bar{\beta}}, \varphi_\beta] \neq 0$ alors :

$$c_{\bar{\beta}} = \frac{1}{2} \rho^{-2\bar{\beta}+1} \frac{\int_{\Sigma} (T u \bar{u}_\beta + u T \bar{u}_\beta) d\sigma}{[\varphi_{\bar{\beta}}, \varphi_\beta]}.$$

Preuve. on a

$$\int_{\Sigma} (T u \bar{u}_\beta + u T \bar{u}_\beta) d\sigma = \int_{\Sigma} \left(T \left[\sum_{\alpha \in E} c_\alpha r^\alpha \varphi_\alpha \right] \cdot \bar{u}_\beta + \sum_{\alpha \in E} c_\alpha r^\alpha \varphi_\alpha \cdot T \bar{u}_\beta \right) d\sigma$$

T étant un opérateur linéaire, donc :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma} (Tu.\bar{u}_\beta + u.T(\bar{u}_\beta)) d\sigma &= \sum_{\alpha \in E} c_\alpha \left[\int_{\Sigma} \left[T(r^\alpha \varphi_\alpha) . r^{\bar{\beta}} \bar{\varphi}_\beta + r^\alpha \varphi_\alpha . T(r^{\bar{\beta}} \bar{\varphi}_\beta) \right] d\sigma \right] \\
 &= \sum_{\alpha \in E} c_\alpha \int_{\Sigma} \left[r^{\bar{\beta}+\alpha-1} \begin{pmatrix} (1+\nu_0) \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\varphi} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \varphi_{1,\bar{\beta}} \\ \varphi_{2,\bar{\beta}} \end{pmatrix} \right] d\sigma + \\
 &\quad \sum_{\alpha \in E} c_\alpha \left[\int_{\Sigma} r^{\bar{\beta}+\alpha-1} \begin{pmatrix} \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\varphi} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} (1+\nu_0) \varphi_{1,\bar{\beta}} \\ \varphi_{2,\bar{\beta}} \end{pmatrix} \right] d\sigma \\
 &= \sum_{\alpha \in E} c_\alpha r^{\bar{\beta}+\alpha-1} \int_{\Sigma} \left[\begin{pmatrix} (1+\nu_0) \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\varphi} \end{pmatrix} \varphi_{\bar{\beta}} + \varphi_\alpha \begin{pmatrix} (1+\nu_0) \varphi_{1,\bar{\beta}} \\ \varphi_{2,\bar{\beta}} \end{pmatrix} \right] d\sigma \\
 &= \sum_{\alpha \in E} c_\alpha r^{\bar{\beta}+\alpha} \int_0^\omega \left[\begin{pmatrix} (1+\nu_0) \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\varphi} \end{pmatrix} \varphi_{\bar{\beta}} + \varphi_\alpha \begin{pmatrix} (1+\nu_0) \varphi_{1,\bar{\beta}} \\ \varphi_{2,\bar{\beta}} \end{pmatrix} \right] d\theta \\
 &= 2 \sum_{\alpha \in E} c_\alpha r^{\bar{\beta}+\alpha} \int_0^\omega [(1+\nu_0) \varphi_{1,\alpha} \varphi_{1,\bar{\beta}} + \varphi_{2,\varphi} \varphi_{2,\bar{\beta}}] .
 \end{aligned}$$

D'après le corollaire 2.5.3, on trouve que les termes de la somme s'annulent sauf celui correspondant à $\alpha = \bar{\beta}$ et on obtient :

$$\int_{\Sigma} (Tu.\bar{u}_\beta + u.T\bar{u}_\beta) d\sigma = 2c_{\bar{\beta}} \rho^{2\bar{\beta}-1} [\varphi_{\bar{\beta}}, \varphi_{\bar{\beta}}] .$$

Alors si $[\varphi_{\bar{\beta}}, \varphi_{\bar{\beta}}]$ est différent de 0 :

$$c_{\bar{\beta}} = \frac{1}{2} \rho^{-2\bar{\beta}+1} \frac{\int_{\Sigma} (Tu.\bar{u}_\beta + u.T\bar{u}_\beta) d\sigma}{[\varphi_{\bar{\beta}}, \varphi_{\bar{\beta}}]} .$$

■

Remarque 2.5.7 La technique que nous allons utiliser pour l'étude de la série trigonométrique sera basée sur le théorème 2.5.2 et le corollaire 2.5.6. Dans ce qui suit nous étudions la série trigonométrique dans le cas particulier de la fissure ($\omega = 2\pi$) qui est un cas très important de singularités de domaines. La connaissance explicite des racines de (E) simplifie les calculs.

2.6 Étude complète du cas de la fissure

Pour simplifier les calculs, nous décomposons toute solution u du problème (P_k) , $k = 1$ à 6, en deux parties par rapport à θ :

$$u = \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2.$$

- Pour $k = 1$ (Dirichlet): étudiée par B. Merouani and R. Boufenouche comme dans [24].
- Pour $k = 2$ (Neumann): notre travail "B. Merouani and N. Liazidi", comme dans [23], suivant :

2.6.1 Study of first part

The first part is the expression φ_α and is given by (2.15) where

$$E = \left\{ \frac{k}{2}, k \in \mathbb{N}^* \right\} \text{ because } \omega = 2\pi.$$

After some calculation, we obtain that

$$[\varphi_\alpha, \varphi_\alpha] = 4 [v_0^2(v_0 + 2)\alpha^2 + (v_0(\alpha + 2) + 2)^2(1 + v_0) + (v_0\alpha - 2)^2] \pi \rho^{2\alpha-1} \neq 0.$$

Define the sub-sector

$$S_{\rho_0} = S \cap \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2, r < \rho_0\}, \rho_0 < \rho.$$

We define the traces on Σ

$$\mathfrak{U}_1 = \phi_1 \in \left(\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \right)^2 \text{ and } T\mathfrak{U}_1 = \xi_1 \in \left(H^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \right)^2.$$

Let

$$c_\alpha = A_{\alpha, v_0} \int_0^{2\pi} \left(\xi_1 \begin{pmatrix} (v_0 + 1)\varphi_{1, \alpha} \\ \varphi_{2, \alpha} \end{pmatrix} + \rho_0 \begin{pmatrix} \varphi_{1, \alpha} \\ \varphi_{2, \alpha} \end{pmatrix} \phi_1 \right) (\rho_0, \theta) d\theta, \quad (2.27)$$

with

$$A_{\alpha, v_0} = \frac{\rho_0^{-\alpha}}{8\pi [v_0^2(v_0 + 2)\alpha^2 + (1 + v_0)(v_0(\alpha + 2) + 2)^2 + (v_0\alpha - 2)^2]}.$$

Corollaire 2.6.1 *If \mathfrak{U}_1 solution of (P_2) , then*

$$\mathfrak{U}_1 = \sum_{\alpha \in E} c_\alpha r^\alpha \varphi_\alpha, \quad (2.28)$$

where c_α is given by (2.27). The serie converges uniformly in \overline{S}_{ρ_0} for all $\rho_0 < \rho$. Moreover (2.28) converges globally in $(H^1(S_\rho))^2$, if $\alpha^{\frac{3}{2}} c_\alpha \rho^\alpha \in l^2$.

Preuve. (i) if (2.28) occurs, then c_α is expressed by (2.27) under the corollary 2.5.6.

(ii) if \mathfrak{U}_1 is solution of (P_2) and c_α given by (2.27) then $c_\alpha = o(\alpha \rho_0^{-\alpha})$. This implies the uniform convergence of the serie in \overline{S}_{ρ_0} towards some W_1 satisfying (P_2) .

From P. Grisvard-G. Geymonat [10], there a exists positive ε , sufficiently small such that the solution of problem (P_2) is written as

$$\mathfrak{U}_1 = \sum_{\alpha \in E} K_\alpha r^\alpha \varphi_\alpha$$

which converges for $r < \varepsilon$. The theorem 2.5.2 implies that $K_\alpha = c_\alpha$ therefore W_1 and \mathfrak{U}_1 coincide in S_ε . They coincide in S_{ρ_0} since they are real analytic. ■

Remarque 2.6.2 *if ξ_1 belongs to the space $(H^2(]0, 2\pi[))^2$ and ϕ_1 to $(H^1(]0, 2\pi[))^2$, then $c_\alpha = o(\alpha \rho_0^{-\alpha})$ and we have uniform convergence of the serie in \overline{S}_{ρ_0} for all $\rho_0 \leq \rho$.*

2.6.2 Study of seconde part

The second part is the expression ψ_α given by (2.16) where

$$E = \left\{ \frac{k}{2}, k \in \mathbb{N}^* \right\}$$

because $\omega = 2\pi$. After some calculation, we obtain

$$[\psi_\alpha, \psi_\alpha] = 4 [v_0^2(v_0 + 2)\alpha^2 + (v_0 + 1)(v_0\alpha + 2)^2 + (v_0(\alpha - 2) - 2)^2] \pi \rho^{2\alpha-1} \neq 0.$$

We define the following trace of Σ

$$\mathfrak{U}_2 = \xi_2 \in \left(\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \right)^2 \text{ and } T\mathfrak{U}_2 = \phi_2 \in \left(\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \right)^2.$$

Let

$$d_\alpha = B\alpha, v_0 \int_0^{2\pi} \left(\phi_2 \begin{pmatrix} (v_0 + 1)\psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} + \rho_0 \begin{pmatrix} \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \zeta_2 \right) (\rho_0, \theta) d\theta. \quad (2.29)$$

with

$$B_{\alpha, v_0} = \frac{\rho_0^{-\alpha}}{8\pi [v_0^2(v_0 + 2)\alpha^2 + (v_0 + 1)(v_0\alpha + 2)^2 + (v_0(\alpha - 2) - 2)^2]}.$$

Corollaire 2.6.3 *If \mathfrak{U}_2 is solution of the problem (P_2) then*

$$\mathfrak{U}_2 = \sum_{\alpha \in E} d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha \quad (2.30)$$

where d_α is given by (2.29). The serie converges uniformly in \overline{S}_{ρ_0} for all $\rho_0 < \rho$. Moreover (2.30) converges globally in $(H^1(S_\rho))^2$, if $\alpha^{\frac{3}{2}} d_\alpha \rho^\alpha \in l^2$.

Remarque 2.6.4 *For $v_0 = 0$ we obtain the trigonometric series for the Laplace equation in a sector. This is compatible with (P_2) with $v_0 = 0$,*

Remarque 2.6.5 *for $\nu_0 = 0$, we find the results concerning the function of **Airy**.*

- Pour $k = 4$ (C.S.F):

2.6.3 Étude de la première partie

Concernant la première partie : l'expression de φ_α est donnée par :

$$\varphi_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} \nu_0 \beta \cos(\alpha - 2)\theta - (2 + \nu_0) \cos \alpha \theta \\ -\beta \nu_0 \sin(\alpha - 2)\theta - 2(\nu_0 + 2) \sin \alpha \theta \end{pmatrix}$$

avec

$$E = \left\{ \alpha \in \mathbb{C}, \sin^2 \alpha \omega = \frac{\nu_0}{\nu_0 + 2} \left(4 \left(\frac{\nu_0 + 1}{2\nu_0} \right)^2 - \alpha^2 \sin^2 \omega \right), \operatorname{Re} \alpha \succ 0 \right\}.$$

- Calcul de c_β :

En appliquant le corollaire 2.5.6 pour $u = \sum_{\beta \in E} c_\beta r^\beta \varphi_\beta$

$$c_\beta = \frac{1}{2} \rho^{-2\beta+1} \frac{\int_{\Sigma} (Tu \cdot u_\beta + u \cdot Tu_\beta) d\sigma}{[\varphi_\beta, \varphi_\beta]}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet [\varphi_\beta, \varphi_\beta] &= \int_0^\omega \left[\begin{pmatrix} \varphi_{1,\beta} \\ \varphi_{2,\beta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1 + \nu_0) \varphi_{1,\beta} \\ \varphi_{2,\beta} \end{pmatrix} \right] d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} [(1 + \nu_0) \varphi_{1,\beta}^2 + \varphi_{2,\beta}^2] d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} [(1 + \nu_0) [\nu_0 \beta \cos(\beta - 2)\theta - (2 + \nu_0) \cos \beta \theta]^2] d\theta + \\
 &\quad \int_0^{2\pi} [-\beta \nu_0 \sin(\beta - 2)\theta - 2(\nu_0 + 2) \sin \beta \theta]^2 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} (1 + \nu_0) [(\beta \nu_0)^2 \cos^2(\beta - 2)\theta + (2 + \nu_0)^2 \cos^2 \beta \theta] d\theta \\
 &\quad - \int_0^{2\pi} 2\beta \nu_0 (2 + \nu_0) \cos(\beta - 2)\theta \cos \beta \theta d\theta + \\
 &\quad \int_0^{2\pi} [(-\beta \nu_0)^2 \sin^2(\beta - 2)\theta + 4(\nu_0 + 2)^2 \sin^2 \beta \theta] d\theta + \\
 &\quad \int_0^{2\pi} 2\beta \nu_0 (\nu_0 + 2) \sin(\beta - 2)\theta \sin \beta \theta d\theta .
 \end{aligned}$$

Calculons premièrement les intégrales : $\int_0^{2\pi} \cos(\beta - 2)\theta \cos \beta \theta d\theta$, $\int_0^{2\pi} \sin(\beta - 2)\theta \sin \beta \theta d\theta$.

Par double intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \bullet \int_0^{2\pi} \cos(\beta - 2)\theta \cos \beta \theta d\theta &= \frac{1}{\beta - 2} [\cos \beta \theta \sin(\beta - 2)\theta]_0^{2\pi} - \frac{\beta}{(\beta - 2)^2} [\sin \beta \theta \cos(\beta - 2)\theta]_0^{2\pi} \\
 &\quad + \frac{\beta^2}{(\beta - 2)^2} \int_0^{2\pi} \cos(\beta - 2)\theta \cos \beta \theta d\theta
 \end{aligned}$$

$$[\cos \beta \theta \sin(\beta - 2)\theta]_0^{2\pi} = [\sin \beta \theta \cos(\beta - 2)\theta]_0^{2\pi} = 0,$$

donc

$$\int_0^{2\pi} \cos(\beta - 2)\theta \cos \beta \theta d\theta = 0$$

$$\bullet \int_0^{2\pi} \sin(\beta - 2)\theta \sin \beta \theta d\theta = \frac{-1}{\beta - 2} [\sin \beta \theta \cos(\beta - 2)\theta]_0^\omega + \frac{\beta}{(\beta - 2)^2} [\cos \beta \theta \sin(\beta - 2)\theta]_0^\omega + \frac{\beta^2}{(\beta - 2)^2} \int_0^{2\pi} \sin(\beta - 2)\theta \sin \beta \theta d\theta = 0$$

d'où :

$$\int_0^{2\pi} \sin(\beta - 2)\theta \sin \beta \theta d\theta = 0.$$

Alors :

$$\begin{aligned} [\varphi_\beta, \varphi_\beta] &= \int_0^{2\pi} (1 + \nu_0) [(\beta \nu_0)^2 \cos^2(\beta - 2)\theta + (2 + \nu_0)^2 \cos^2 \beta \theta] d\theta + \\ &\int_0^{2\pi} [(\beta \nu_0)^2 \sin^2(\beta - 2)\theta + 4(\nu_0 + 2)^2 \sin^2 \beta \theta] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + \nu_0) \left[(\beta \nu_0)^2 \frac{1 + \cos 2(\beta - 2)\theta}{2} + (2 + \nu_0)^2 \frac{1 + \cos 2\beta \theta}{2} \right] d\theta + \\ &\int_0^{2\pi} \left[(\beta \nu_0)^2 \left(\frac{1 - \cos 2(\beta - 2)\theta}{2} \right) + 4(\nu_0 + 2)^2 \left(\frac{1 - \cos 2\beta \theta}{2} \right) \right] d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\varphi_\beta, \varphi_\beta] &= \int_0^{2\pi} (1 + \nu_0) \left[\frac{\beta^2 \nu_0^2}{2} + \frac{(2 + \nu_0)^2}{2} \right] + \left[\frac{\beta^2 \nu_0^2}{2} + \frac{(2 + \nu_0)^2}{2} \right] d\theta \\ &\quad + \left[\frac{(1 + \nu_0 + 1) [\beta^2 \nu_0^2 + (2 + \nu_0)^2]}{2} \theta \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{(2 + \nu_0) \beta^2 \nu_0^2 + (2 + \nu_0)^3}{2} 2\pi \\ &= \pi [(2 + \nu_0) \beta^2 \nu_0^2 + (2 + \nu_0)^3], \end{aligned}$$

qui est bien différent de 0.

donc

$$c_\beta = \frac{1}{2\pi [(2 + \nu_0) \beta^2 \nu_0^2 + (2 + \nu_0)^3]} \rho^{-2\beta+1} \int_{\Sigma} (Tu.u_\beta + u.Tu_\beta) d\sigma.$$

- Soit le sous secteur suivant :

$$S_{\rho_0} = S \cap \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2, r \prec \rho_0\} \cdot \rho_0 \prec \rho.$$

On définit les traces sur Σ suivantes :

$$\mathfrak{U}_1 = \zeta_1 \in \left[\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \right]^2, \text{ et } T\mathfrak{U}_1 = \phi_1 \in \left[\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \right]^2.$$

On a sur $S_{\rho_0} : \rho = \rho_0, d\sigma = \rho_0 d\theta. \theta \in [0, \omega]$

$$\begin{aligned} c_\alpha &= \frac{1}{2\pi [(2 + \nu_0) \beta^2 \nu_0^2 + (2 + \nu_0)^3]} \rho_0^{-2\alpha+1} \int_{\Sigma} (Tu \cdot u_\alpha + u \cdot Tu_\alpha) d\sigma \\ &= \frac{\rho_0^{-\alpha}}{2\pi [(2 + \nu_0) \beta^2 \nu_0^2 + (2 + \nu_0)^3]} \int_{\Sigma} \rho_0^{-\alpha+1} \begin{pmatrix} \phi_1 \cdot \rho_0^\alpha \varphi_\alpha + \\ \zeta_1 \cdot \rho_0^{\alpha-1} \begin{pmatrix} (1 + \nu_0) \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \end{pmatrix} d\sigma \\ &= \frac{\rho_0^{-\alpha}}{2\pi [(2 + \nu_0) \beta^2 \nu_0^2 + (2 + \nu_0)^3]} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \rho_0 \phi_1 \begin{pmatrix} \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\alpha} \end{pmatrix} + \\ \zeta_1 \begin{pmatrix} (1 + \nu_0) \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \end{pmatrix} (\rho_0, \theta) d\theta \end{aligned}$$

Posons :

$$c_\alpha = A_{\alpha, \nu_0} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \rho_0 \phi_1 \begin{pmatrix} \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\alpha} \end{pmatrix} + \zeta_1 \begin{pmatrix} (1 + \nu_0) \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \end{pmatrix} (\rho_0, \theta) d\theta \quad (2.31)$$

avec

$$A_{\alpha, \nu_0} = \frac{\rho_0^{-\alpha}}{2\pi [(2 + \nu_0) \beta^2 \nu_0^2 + (2 + \nu_0)^3]}.$$

Corollaire 2.6.6 *Si \mathfrak{U}_1 est solution du problème (P) alors*

$$\mathfrak{U}_1 = \sum_{\alpha \in E} c_\alpha r^\alpha \varphi_\alpha \quad (2.32)$$

où c_α est donnée par (2.31) et où la série est convergente uniformément dans $\overline{S_{\rho_0}}$ pour tout $\rho_0 \prec \rho$. De plus (2.32) converge globalement dans $[H^1(S_\rho)]^2$ si $\alpha^{\frac{3}{2}} c_\alpha \rho^\alpha \in l^2$.

Preuve. i) Si $\mathfrak{U}_1 = \sum_{\alpha \in E} c_\alpha r^\alpha \varphi_\alpha$ a lieu, alors d'après le corollaire 2.5.6

$$\begin{aligned} c_\alpha &= \frac{1}{2\pi [(2 + \nu_0) \beta^2 \nu_0^2 + (2 + \nu_0)^3]} \rho^{-2\alpha+1} \int_{\Sigma} (Tu.u_\alpha + u.Tu_\alpha) d\sigma \\ &= \frac{\rho^{-\alpha}}{2\pi [(2 + \nu_0) \beta^2 \nu_0^2 + (2 + \nu_0)^3]} \int_0^{2\pi} \left(\begin{array}{c} \rho \phi_1 \begin{pmatrix} \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\alpha} \end{pmatrix} + \\ \zeta_1 \begin{pmatrix} (1 + \nu_0) \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \end{array} \right) (\rho, \theta) d\theta \end{aligned}$$

qui est la relation (2.31).

ii) Si \mathfrak{U}_1 est solution du problème (P) et c_α donnée par (2.31) alors $c_\alpha = o(\alpha \rho^{-\alpha})$, ceci entraîne la convergence uniforme de la série dans \bar{S}_{ρ_0} vers un certain W_1 vérifiant (P).

D'après Grisvard Geymonat [10] il existe ε positif, suffisamment petit tel que la solution du problème (P) s'écrit sous la forme :

$$\mathfrak{U}_1 = \sum_{\alpha \in E} K_\alpha r^\alpha \varphi_\alpha$$

qui est converge pour $r \prec \varepsilon$.

Le théorème 2.5.2 implique que $K_\alpha = c_\alpha$ alors W_1 et \mathfrak{U}_1 coïncide dans S_ε . Elles coïncides dans S_{ρ_0} , puisqu'elles y sont analytiquement réelles. ■

Remarque 2.6.7 Si ζ_1 appartient à l'espace $[H^2(]0, 2\pi[)]^2$ et ϕ_1 appartient à $[H^1(]0, 2\pi[)]^2$, alors on a $c_\alpha = o(\alpha \rho^{-\alpha})$ et on a la convergence uniforme de la série dans \bar{S}_{ρ_0} pour tout $\rho_0 \leq \rho$.

2.6.4 Étude de la deuxième partie

Dans cette partie on a ainsi la représentation suivante :

$$\mathfrak{U}_2 = \sum_{\alpha \in E} d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha$$

avec

$$E = \left\{ \alpha = \frac{k}{2}, k \in \mathbb{N}^* \right\} \text{ puisque } \omega = 2\pi$$

et

$$\psi_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha\theta \\ -\sin \alpha\theta \end{pmatrix}.$$

• **Calcul de d_β :**

Corollaire 2.6.8 *Supposons que $u = \sum_{\alpha \in E} d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha$ soit uniformément convergente dans \bar{S} Si $[\psi_{\bar{\beta}}, \psi_\beta] \neq 0$ alors :*

$$d_{\bar{\beta}} = \frac{1}{2} \rho^{-2\bar{\beta}+1} \frac{\int_{\Sigma} (Tu.\bar{u}_\beta + u.T\bar{u}_\beta) d\sigma}{[\psi_{\bar{\beta}}, \psi_\beta]}.$$

Preuve. on a

$$\int_{\Sigma} (Tu.\bar{u}_\beta + u.T\bar{u}_\beta) d\sigma = \int_{\Sigma} \left(T \left[\sum_{\alpha \in E} d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha \cdot \bar{u}_\beta \right] + \sum_{\alpha \in E} d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha \cdot T\bar{u}_\beta \right) d\sigma.$$

D'après la linéarité de T on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (Tu.\bar{u}_\beta + u.T\bar{u}_\beta) d\sigma &= \sum_{\alpha \in E} d_\alpha \left[\int_{\Sigma} \left(Tr^\alpha \psi_\alpha \cdot r^{\bar{\beta}} \bar{\psi}_\beta + r^\alpha \psi_\alpha \cdot T \left(r^{\bar{\beta}} \bar{\psi}_\beta \right) \right) d\sigma \right] \\ &= \sum_{\alpha \in E} d_\alpha \left[\int_{\Sigma} \left(r^{\bar{\beta}+\alpha-1} \begin{pmatrix} (1+\nu_0) \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_{1,\bar{\beta}} \\ \psi_{2,\bar{\beta}} \end{pmatrix} \right) \right] d\sigma + \\ &\quad \sum_{\alpha \in E} d_\alpha \left[\int_{\Sigma} r^{\bar{\beta}+\alpha-1} \begin{pmatrix} \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1+\nu_0) \psi_{1,\bar{\beta}} \\ \psi_{2,\bar{\beta}} \end{pmatrix} \right] d\sigma \\ &= \sum_{\alpha \in E} d_\alpha r^{\bar{\beta}+\alpha-1} \int_{\Sigma} \left[\begin{pmatrix} (1+\nu_0) \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\varphi} \end{pmatrix} \psi_{\bar{\beta}} + \psi_\alpha \begin{pmatrix} (1+\nu_0) \psi_{1,\bar{\beta}} \\ \psi_{2,\bar{\beta}} \end{pmatrix} \right] d\sigma \\ &= 2 \sum_{\alpha \in E} d_\alpha r^{\bar{\beta}+\alpha} \int_0^\omega \left[\begin{pmatrix} (1+\nu_0) \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\varphi} \end{pmatrix} \psi_{\bar{\beta}} + \psi_\alpha \begin{pmatrix} (1+\nu_0) \psi_{1,\bar{\beta}} \\ \psi_{2,\bar{\beta}} \end{pmatrix} \right] d\theta \\ &= 2 \sum_{\alpha \in E} d_\alpha r^{\bar{\beta}+\alpha} \int_0^\omega [(1+\nu_0) \psi_{1,\alpha} \psi_{1,\bar{\beta}} + \psi_{2,\varphi} \psi_{2,\bar{\beta}}] d\theta. \end{aligned}$$

D'après le corollaire 3.3.5, on trouve que les termes de la somme s'annulent sauf celui correspondant à $\alpha = \bar{\beta}$ et on obtient :

$$\int_{\Sigma} (Tu.\bar{u}_\beta + u.T\bar{u}_\beta) d\sigma = 2d_{\bar{\beta}} \rho^{2\bar{\beta}-1} [\psi_{\bar{\beta}}, \psi_\beta].$$

Alors si $[\psi_{\bar{\beta}}, \psi_{\beta}]$ est différent de 0 :

$$d_{\bar{\beta}} = \frac{1}{2} \rho^{-2\bar{\beta}+1} \frac{\int_{\Sigma} (Tu.\bar{u}_{\beta} + u.T(\bar{u}_{\beta})) d\sigma}{[\psi_{\bar{\beta}}, \psi_{\beta}]}.$$

■

• **Calcul de d_{β} :**

En appliquant le corollaire 2.5.6 pour $u = \sum_{\beta \in E} d_{\beta} r^{\beta} \psi_{\beta}$ d'où :

$$d_{\beta} = \frac{1}{2} \rho^{-2\beta+1} \frac{\int_{\Sigma} (Tu.u_{\beta} + u.Tu_{\beta}) d\sigma}{[\psi_{\beta}, \psi_{\beta}]}.$$

Calcul de $[\psi_{\beta}, \psi_{\beta}]$:

$$[\psi_{\beta}, \psi_{\beta}] = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \psi_{1,\beta}(\theta) \\ \psi_{2,\beta}(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1 + \nu_0) \psi_{1,\beta}(\theta) \\ \psi_{2,\beta}(\theta) \end{pmatrix} d\theta$$

$$\begin{aligned} [\psi_{\beta}, \psi_{\beta}] &= \int_0^{2\pi} [(1 + \nu_0) \psi_{1,\beta}^2(\theta) + \psi_{2,\beta}^2(\theta)] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [(1 + \nu_0) \cos^2 \beta\theta + \sin^2 \beta\theta] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[(1 + \nu_0) \left(\frac{1 + \cos 2\beta\theta}{2} \right) + \left(\frac{1 - \cos 2\beta\theta}{2} \right) \right] d\theta, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} [\psi_{\beta}, \psi_{\beta}] &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{(1 + \nu_0)}{2} + \frac{1}{2} \right] d\theta + \\ &= \left[\frac{(2 + \nu_0)}{2} \theta \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{(2 + \nu_0)}{2} 2\pi \\ &= (2 + \nu_0) \pi, \end{aligned}$$

qui est bien différent de 0.

donc

$$d_\beta = \frac{1}{2(2+\nu_0)\pi} \rho^{-2\beta+1} \int_{\Sigma} (Tu \cdot u_\beta + u \cdot Tu_\beta) d\sigma.$$

• Soit le sous secteur suivant :

$$S_{\rho_0} = S \cap \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2, r \prec \rho_0\} \cdot \rho_0 \prec \rho.$$

On définit les traces sur Σ suivantes :

$$\mathfrak{U}_2 = \zeta_2 \in \left[\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \right]^2, \text{ et } T\mathfrak{U}_2 = \phi_2 \in \left[\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \right]^2.$$

On a sur $S_{\rho_0} : \rho = \rho_0, d\sigma = \rho_0 d\theta, \theta \in [0, \omega]$

$$\begin{aligned} d_\alpha &= \frac{1}{2(2+\nu_0)\pi} \rho_0^{-2\alpha+1} \int_0^{2\pi} (Tu \cdot u_\alpha + u \cdot T(u_\alpha)) d\sigma \\ &= \frac{\rho_0^{-\alpha}}{2(2+\nu_0)\pi} \int_0^{2\pi} \rho_0^{1-\alpha} \left(\begin{array}{c} \phi_2 \cdot \rho_0^\alpha \begin{pmatrix} \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} + \\ \zeta_2 \cdot \rho_0^{\alpha-1} \begin{pmatrix} (1+\nu_0)\psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \end{array} \right) d\theta \\ &= \frac{\rho_0^{-\alpha}}{2(2+\nu_0)\pi} \int_0^{2\pi} \left(\begin{array}{c} \rho_0 \phi_2 \begin{pmatrix} \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} + \\ \zeta_2 \begin{pmatrix} (1+\nu_0)\psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \end{array} \right) (\rho_0, \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Posons :

$$d_\alpha = B_{\alpha, \nu_0} \int_0^{2\pi} \left(\rho_0 \phi_2 \begin{pmatrix} \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} + \zeta_2 \begin{pmatrix} (1+\nu_0)\psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \right) (\rho_0, \theta) d\theta, \quad (2.33)$$

avec

$$B_{\alpha, \nu_0} = \frac{\rho_0^{-\alpha}}{2(2+\nu_0)\pi}.$$

Corollaire 2.6.9 *Si \mathfrak{U}_2 est solution du problème (P) alors*

$$\mathfrak{U}_2 = \sum_{\alpha \in E} d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha, \quad (2.34)$$

où d_α est donnée par (2.33) et où la série est convergente uniformément dans \overline{S}_{ρ_0} pour tout $\rho_0 \prec \rho$. De plus (2.34) converge globalement dans $[H^1(S_\rho)]^2$ si $\alpha^{\frac{3}{2}} c_\alpha \rho^\alpha \in l^2$.

Preuve. i) Si $\mathfrak{U}_2 = \sum_{\alpha \in E} d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha$ a lieu, alors d'après le corollaire 2.5.3

$$\begin{aligned} d_\alpha &= \frac{\rho^{-2\alpha}}{2(2+\nu_0)\pi} \int_{\Sigma} (Tu \cdot u_\alpha + u \cdot T(u_\alpha)) d\sigma \\ &= \frac{\rho^{-\alpha}}{2(2+\nu_0)\pi} \int_0^{2\pi} \left(\begin{array}{c} \rho \phi_2 \left(\begin{array}{c} \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{array} \right) + \\ \zeta_2 \left(\begin{array}{c} (1+\nu_0) \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{array} \right) \end{array} \right) (\rho, \theta) d\theta, \end{aligned}$$

qui est la relation (2.33).

ii) Si \mathfrak{U}_2 est solution du problème (P) et d_α donnée par (2.33) alors $d_\alpha = o(\alpha \rho^{-\alpha})$, ceci entraîne que la série est convergente uniformément dans \overline{S}_{ρ_0} vers un certain W_2 vérifiant (P).

D'après Grisvard Geymonat [10] il existe ε positif, suffisamment petit tel que la solution du problème (P) s'écrit sous la forme :

$$\mathfrak{U}_2 = \sum_{\alpha \in E} H_\alpha r^\alpha \psi_\alpha,$$

qui est convergente pour $r \prec \varepsilon$.

Le théorème 2.5.2 implique que $H_\alpha = d_\alpha$ alors W_2 et \mathfrak{U}_2 coïncide dans S_ε . Elles coïncident dans S_{ρ_0} , puisqu'elles y sont analytiquement réelles. ■

Remarque 2.6.10 Si ζ_2 appartient à l'espace $[H^2(]0, 2\pi[)]^2$ et ϕ_2 appartient à $[H^1(]0, 2\pi[)]^2$, alors on a $d_\alpha = o(\alpha \rho^{-\alpha})$ et on a la convergence uniforme de la série dans \overline{S}_{ρ_0} pour tout $\rho_0 \leq \rho$.

Remarque 2.6.11 Pour $\nu_0 = 0$ on obtient la série trigonométrique de l'équation de Laplace dans un secteur.

• Pour $k = 3, 5$ et 6 l'étude est analogue à celle des cas précédents.

2.7 Tableau des résultats de coefficients des fonctions singulières des problèmes (P_k), $k = 1$ à 6, du cas de la fissure

$B^k u = 0$	c_α et d_β
<p style="text-align: center;"><i>Dirichlet</i></p> <p>$\{B^1 u = \{u \text{ sur } \Gamma_0, \Gamma_\omega$</p>	$c_\alpha = \frac{\rho_0^{-\alpha}}{8\pi[(2\nu_0+3)\alpha^2\nu_0^2+(\nu_0(\alpha-2)-4)^2]}$ $\times \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \rho_0 \phi_1 \begin{pmatrix} \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\alpha} \end{pmatrix} + \\ \zeta_1 \begin{pmatrix} (1+\nu_0)\varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \end{pmatrix} (\rho_0, \theta) d\theta$ $d_\beta = \frac{\rho^{-\alpha}}{8\pi[(\nu_0+3)\alpha^2\nu_0^2+(1+\nu_0)[\nu_0(\alpha+2)+4]^2]}$ $\times \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \rho \phi_2 \begin{pmatrix} \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} + \\ \zeta_2 \begin{pmatrix} (1+\nu_0)\psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \end{pmatrix} (\rho, \theta) d\theta$
<p style="text-align: center;"><i>Neumann</i></p> <p>$\{B^2 u = \{\sigma(u).\eta \text{ sur } \Gamma_0, \Gamma_\omega$</p>	$c_\alpha = \frac{\rho_0^{-\alpha}}{8\pi[\nu_0^2(\nu_0+2)\alpha^2+(1+\nu_0)(\nu_0(\alpha+2)+2)^2+(\nu_0\alpha-2)^2]}$ $\times \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \phi_1 \begin{pmatrix} (\nu_0+1)\varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \\ + \zeta_1 \rho_0 \begin{pmatrix} \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \end{pmatrix} (\rho_0, \theta) d\theta$ $d_\beta = \frac{\rho_0^{-\alpha}}{8\pi[\nu_0^2(\nu_0+2)\alpha^2+(\nu_0+1)(\nu_0\alpha+2)^2+(\nu_0(\alpha-2)-2)^2]}$ $\times \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \phi_2 \begin{pmatrix} (\nu_0+1)\psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \\ + \zeta_2 \rho_0 \begin{pmatrix} \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \end{pmatrix} (\rho_0, \theta) d\theta$

2.7. TABLEAU DES RÉSULTATS DE COEFFICIENTS DES FONCTIONS SINGULIÈRES DES PROBLÈMES (P_K), $K = 1$ À 6, DU CAS DE LA FISSURE

$\left\{ B^3 u = \begin{cases} \text{Mélé} \\ u \\ \sigma(u).\eta \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0, \Gamma_\omega$	$c_\alpha = \frac{\rho_0^{-\alpha}}{8\pi[v_0^2(2\nu_0+3)\alpha^2+(v_0\alpha-2\nu_0-4)^2]}$ $\times \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \phi_1 \begin{pmatrix} (v_0+1)\varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \\ + \zeta_1 \rho_0 \begin{pmatrix} \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \end{pmatrix} (\rho_0, \theta) d\theta$ $d_\beta = \frac{\rho_0^{-\alpha}}{8\pi[v_0^2(v_0+3)\alpha^2+(v_0+1)(v_0\alpha+2\nu_0+4)^2]}$ $\times \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \phi_2 \begin{pmatrix} (v_0+1)\psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \\ + \zeta_2 \rho_0 \begin{pmatrix} \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \end{pmatrix} (\rho_0, \theta) d\theta$
$\left\{ B^4 u = \begin{cases} \text{C.S.F} \\ u.\eta \\ (\sigma(u).\eta).\tau \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0, \Gamma_\omega$	$c_\alpha = \frac{\rho_0^{-\alpha}}{2\pi[(2+\nu_0)\beta^2\nu_0^2+(2+\nu_0)^3]}$ $\times \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \rho_0 \phi_1 \begin{pmatrix} \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \\ + \zeta_1 \begin{pmatrix} (1+\nu_0)\varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \end{pmatrix} (\rho_0, \theta) d\theta$ $d_\beta = \frac{\rho_0^{-\alpha}}{2(2+\nu_0)\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \rho \phi_2 \begin{pmatrix} \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} + \\ \zeta_2 \begin{pmatrix} (1+\nu_0)\psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \end{pmatrix} (\rho, \theta) d\theta$
$\left\{ B_0^5 u = \begin{cases} \text{C.S.F Dirichlet} \\ u.\eta \\ (\sigma(u).\eta).\tau \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0 \right.$ $B_\omega^5 u = \{u \text{ sur } \Gamma_\omega$	<p>c_α et d_β meme que dans le cas $\omega=2\pi$ de (C.S.F) puisque meme $\varphi_\alpha(\theta)$ et $\Psi_\alpha(\theta)$ que dans le cas $\omega=2\pi$ de (C.S.F)</p>
$\left\{ B_0^6 u = \begin{cases} \text{C.S.F Neumann} \\ u.\eta \\ (\sigma(u).\eta).\tau \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0 \right.$ $B_\omega^6 u = \{\sigma(u).\eta \text{ sur } \Gamma_\omega$	<p>c_α et d_β meme que dans le cas $\omega=2\pi$ de (C.S.F Dirichlet) puisque meme $\varphi_\alpha(\theta)$ et $\Psi_\alpha(\theta)$ que dans le cas $\omega=2\pi$ de (C.S.F Dirichlet)</p>

Chapitre 3

Existence et Unicité des solutions de Quelques Problèmes non linéaires en théorie des plaques vibrantes

3.1 Théorie des Plaques Minces

Dans ce suit, on se place dans le cas d'un matériau continu, élastique, homogène et isotrope.

Définition 3.1.1 : *Une plaque minces est un solide délimitée par deux plans parallèles, les faces, et cylindre au sens large de section quelconque et pas nécessairement circulaire, dont l'axe est perpendiculaire aux faces.*

On définit :

***Le plan moyen, ou plan médian** : plan situé à équidistance entr les faces.

***Le feuillet neutre** : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen ; c'est le plan (O, x, y) , d'équation $z = 0$.

***Une fibre normale** : ensemble des points sur une normale au plan médian, à un endroit (x, y) donné ; elle a pour direction z .

3.1.1 Hypothèse simplificatrices

La théorie des plaques minces, ou théorie de Love-Kichhoff, suppose que :

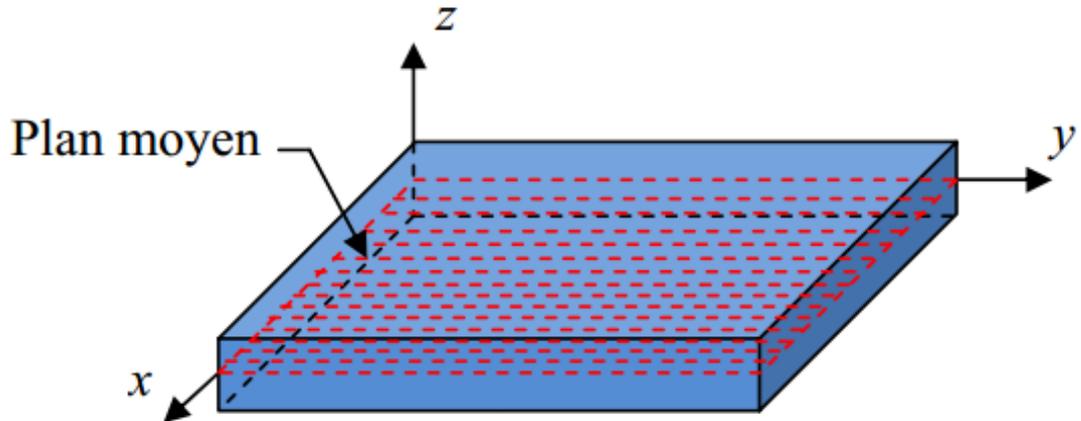


FIG. 3.1 – Géométrie d'une plaque

- Le **plan moyen** est initialement plan.
- Le **feuillet moyen** ne subit pas déformation dans son plan; on ne considère que le **déplacement transversal** ω des points du feuillet moyen.
- **Modèle de Kirchhoff** : sections normales au feuillet moyen restent normales lors de la déformation; en conséquence, **on peut négliger le cisaillement**.
- L'épaisseur est faible; en conséquence, **les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles**.
- On rest en **petit déplacement**.

Etude de la flexion

On considère que les charges sont perpendiculaire aux faces, donc que les forces sont de la forme $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix}$ et que les couples sont de la forme $\vec{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour les charges situées dans le plan des faces, on parle de voile ou de membrane.

En pratique :

- $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ est la rigidité flexionnelle.
- $u(x_1, x_2)$ désigne le déplacement du à la flexion.
- $M_{x_1} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ désigne le moment de flexion par unité de longueur sur les cotés parallèle à ox_1 .

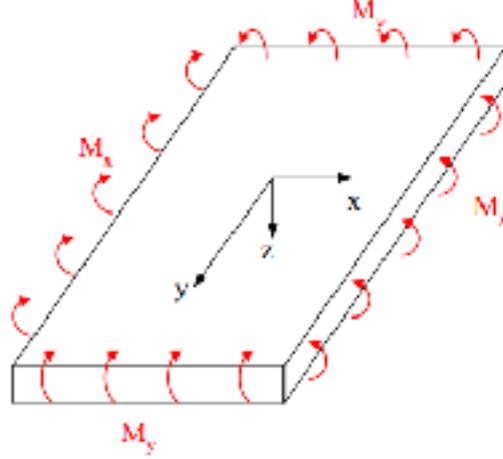


FIG. 3.2 – Relation déplacements-déformations. Plaques minces (Théorie de Kirchhoff)

• $M_{x_2} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ désigne le moment de flexion par unité de longueur sur les cotés onliques.

Dans ce qui suit, on étudie l'existence et l'unicité des solution faibles de quelques problèmes aux limites gouvernés par l'opérateur de flexion A_u dans un ouvert borné à frontière suffisamment régulière.

D'abord, on comence à démontrer que l'opérateur A_u est un isomorphisme de V_k sur V'_k , $k = 1$ à 6 , par le théoreme de Lax-Milgram.

3.2 Opérateur des flexions de plaques

On considère ici le problème (T_k) , $k = 1$ à 6 , gouvernés par l'opérateur A_u , c-à-d pour $f \in L^2(\Omega)$ on cherche u , solution de :

$$(T_k) \left\{ \begin{array}{l} A_u = f \text{ dans } \Omega, \\ B^k = \begin{cases} B_0^k u = 0 \\ B_1^k u = 0 \end{cases} \text{ sur } \Gamma, \end{array} \right. , \quad k = 1 \text{ à } 6, \quad (3.1)$$

où A_u est exprimé par :

$$A_u = \left[\nu \Delta^2 u + (1 - \nu) \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2} \right], \quad (3.2)$$

3.2. OPÉRATEUR DES FLEXIONS DE PLAQUES

et f est la force et les conditions au bord signifient que la plaque est encastrée aux bord Γ , et les opérateurs frontières, $k = 1$ à 6 , (qui sont linéaires) sont :

$$\begin{aligned}
 \{B_0^1 u = B_1^1 u &= \begin{cases} u \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{cases} \text{ sur } \Gamma, \\
 B_0^2 u &= \begin{cases} u \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0, \\
 B_1^2 u &= \begin{cases} u \\ M(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma_1, \\
 B_0^3 u &= \begin{cases} u \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0, \\
 B_1^3 u &= \begin{cases} M(u) \\ N(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma_1, \\
 B_0^4 u = B_1^4 u &= \begin{cases} u \\ M(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma, \\
 B_0^5 u &= \begin{cases} u \\ M(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0, \\
 B_1^5 u &= \begin{cases} M(u) \\ N(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma_1, \\
 B_0^6 u = B_1^6 u &= \begin{cases} M(u) \\ N(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma.
 \end{aligned}$$

On s'intéresse à l'existence et l'unicité de la solution variationnelle $u \in V_k$ des problèmes (T_k) , $k = 1$ à 6 .

On a le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 (Théorème du Lax-Milgram) : Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et elliptique. Alors pour tout $f \in V_k$, il existe $u \in V_k$ unique tel que :

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle_{V_k} \quad \forall v \in V_k, \quad k = 1 \text{ à } 6.$$

Preuve. Pour ne pas alourdir l'exposé par des calculs, nous allons faire la démonstration pour le cas de Dirichlet (les mêmes techniques pour les autres cas). ■

3.2.1 Existence et unicité de la solution du problème (T_1)

Supposons qu'une solution u de (T_1) existe et qu'elle appartient à $H^4(\Omega)$. Alors en multipliant la première équation du 3.1 par une " fonction test " $v \in V_1(\Omega) = H_0^2(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} (A_u)v dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (3.3)$$

Lemme 3.2.2 Soit $u \in H^4(\Omega)$ et $v \in V_1(\Omega)$, on a la formule de Green suivante :

$$\int_{\Omega} (A_u)v dx = a(u, v), \quad \forall v \in V_1(\Omega), \quad (3.4)$$

où $a(u, v)$ est une forme bilinéaire symétrique définie sur $(V_1(\Omega))^2$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx - \int_{\Omega} l(u, v) dx, \quad (3.5)$$

avec

$$l(u, v) = (1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right).$$

Preuve. Analogue à celle trouvée par B.M et Y.F

On pose

$$F(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx + \int_{\Gamma} \left[(Mu)_{|\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n_{|\Gamma}} + (Nu)_{|\Gamma} \nu_{|\Gamma} \right] d\sigma.$$

Alors, pour les conditions de Dirichlet on a

$$F(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \quad (3.6)$$

et le problème variationnel :

$$(T_v) \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V_1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v) = F(v) \text{ pour tout } v \in V_1(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.7)$$

où

$$V_1(\Omega) = \left\{ v \in H_0^2(\Omega) : v = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \text{ sur } \Gamma \right\}.$$

Grâce au Lemme de Lax-Milgram, le problème (T_v) a une solution unique $u \in V_1(\Omega)$.

En effet, la linéarité et la continuité de F et la bilinéarité de a et la continuité sont facile à vérifier sur $V_1(\Omega)$.

Rest à démontrer la coercivité de a :

En utilisant l'inégalité $2\text{Re}(ab) \geq -(|a|^2 + |b|^2)$, vérifiée par deux nombres complexes arbitraires a, b , on voit que

$$a(u, u) \geq (1 - \nu) |u|_{H^2(\Omega_\omega)}^2, \forall u \in V, \quad (*)$$

où $|u|_{H^2(\Omega_\omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega_\omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ désigne la semi-norme de $H^2(\Omega_\omega)$. Par un argument standard de contradiction, on en déduit que $(*)$ implique que a est bien coercive. ■

Alors il existe une unique solution au problème variationnel.

Reste à établir que la solution du problème variationnel est un solution du problème aux limites (T_1) .

Soit ω un ouvert inclus dans un compact de Ω . Il existe $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\theta = 1$ sur ω . Pour toute fonction $v \in C_c^\infty(\Omega)$ de support inclus dans ω

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nu \theta(x) \Delta u \Delta v dx + \int_{\Omega} (1 - \nu) \theta(x) l(u, v) dx &= \int_{\Omega} \nu \theta(x) \Delta u \Delta v dx + \int_{\Omega} (1 - \nu) \theta(x) l(u, v) dx \\ &= \int_{\Omega} f(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

D'après le résultat de la régularité le terme $\theta \Delta u$ est un élément de $H^2(\Omega)$. Il est donc licite d'effectuer deux intégrations par parties successives sur le membre gauche de l'équation précédente. On en déduit que

$$\int_{\Omega} \nu \Delta(\theta(x) \Delta u) v dx + \int_{\Omega} (1 - \nu) \left(\sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2} \left(\theta(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \right) \right) v dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Cette équation étant vérifiée pour toute fonction $v \in C_c^\infty(\Omega)$ de support inclus dans ω , on en déduit que pour presque tout $x \in \omega$

$$\left[\nu \Delta^2 u(x) + (1 - \nu) \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^4 u(x)}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2} \right] = f(x).$$

Cette relation reste valable pour presque tout $x \in \Omega$: il suffit de considérer une suite ω_n de compacts tels que $\bigcup_n \omega_n = \Omega$. Enfin, comme $u \in H^2(\Omega)$ la solution de problème variationnel vérifie automatiquement les conditions au bord $u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$.

Comme Γ est de mesure non nulle, alors A est un **isomorphisme** de V_1 sur V_1' .

3.3 Formulation des problème (P_k), $k = 1 \text{ \AA } 6$

On considère ici une famille de 6 problèmes gouverés par l'opérateur non linéaire des **plaques vibrantes et flexions**, c'est-à-dire pour $f \in L^2(\Omega)$ on cherche une fonction $u = (u_1, u_2)$ définies dans Ω solution de

$$(P_k) \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} u_1'' + a_1 A_{u_1} - [u_1, u_2] = f \quad \text{dans } \Omega, \\ a_2 A_{u_2} + [u_1, u_1] = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \\ B^k = \left\{ \begin{array}{l} B_0^k u = 0 \\ B_1^k u = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma, \\ \left\{ \begin{array}{l} u_1(x, 0) = u_{01}(x), \quad x \in \Omega \\ \partial_t u_1(x, 0) = u_{11}(x), \quad x \in \Omega \end{array} \right. \end{array} \right. , \quad (3.8)$$

où

$$A_u = \left[\nu \Delta^2 u + (1 - \nu) \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2} \right],$$

et les opérateurs frontières, $k = 1 \text{ \AA } 6$, (qui sont linéaires) sont :

$$B_0^1 u = B_1^1 u = \begin{cases} u \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{cases} \text{ sur } \Gamma, \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} B_0^2 u = \begin{cases} u \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0 \\ B_1^2 u = \begin{cases} u \\ M(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases}, \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} B_0^3 u = \begin{cases} u \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0 \\ B_1^3 u = \begin{cases} M(u) \\ N(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases}, \quad (3.11)$$

$$B_0^4 u = B_1^4 u = \begin{cases} u \\ M(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma, \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} B_0^5 u = \begin{cases} u \\ M(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0 \\ B_1^5 u = \begin{cases} M(u) \\ N(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases}, \quad (3.13)$$

$$B_0^6 u = B_1^6 u = \begin{cases} M(u) \\ N(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma, \quad (3.14)$$

où $a_1, a_2 = Eh^3/12(1 - \nu^2)$, sont des coefficients dépendant du module de Young E , et du module de Poisson ν du matériau constituant la plaque et h l'épaisseur de la plaque, $M(u)$ et $N(u)$ désignent les opérateurs différentiels frontière suivant :

$$M(u) = \gamma(\nu \Delta u + (1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \eta^2}),$$

et

$$N(u) = -\gamma(\frac{\partial}{\partial \eta^2} \Delta u + (1 - \nu) \frac{\partial^3 u}{\partial \eta \partial \tau^2}),$$

où γ désigne l'application trace sur Γ .

On posera pour u et v deux fonctions données dans Ω :

$$[u, v] = D_1^2 u \cdot D_2^2 v + D_2^2 u \cdot D_1^2 v - 2D_1 D_2 u \cdot D_1 D_2 v,$$

où $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$.

Remarque 3.3.1 Dans (P_k) il n'y a pas de condition initiale sur u_2 , cela tient au faite que le système d'équations aux dérivées partielles ne contient pas de dérivée en t de u_2 . Donc, le système (P_k) il n'est pas du type de Cauchy-Kowaleska, on peut l'y ramener à condition que l'opérateur de **GREEN**, i. e. l'opérateur inverse de A dans Ω pour les conditions aux limites correspondantes, existe. L'existence de ce dernier dépend des conditions aux limites et de la forme géométrique de la plaque.

Dans ce travail, on ne considère les problèmes (P_k), $k = 1 \text{ \AA } 6$, avec Ω borné et à frontière suffisamment régulière. Si G_2 désigne l'opérateur de **GREEN** pour les conditions aux limites B^K , alors la première équation de (3.8) équivaut à

$$u_2 = -\frac{1}{a_2}G_2([u_1, u_1]), \quad (3.15)$$

et la deuxième équation de (3.8) devient

$$u_1'' + a_1A_{u_1} + \frac{1}{a_2}[u_1, G_2([u_1, u_1])] = f, \quad (3.16)$$

et par conséquent, les problèmes (P_k), $k = 1 \text{ \AA } 6$, devient du type **Cauchy-Kowaleska** :

$$(P_k) \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} u_1'' + a_1A_{u_1} + \frac{1}{a_2}[u_1, G_2([u_1, u_1])] = f \text{ dans } \Omega, \\ u_2 = -\frac{1}{a_2}G_2([u_1, u_1]), \\ B^k = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} u_1(x, 0) = u_{01}(x), \ x \in \Omega, \\ \partial_t u_1(x, 0) = u_{11}(x), \ x \in \Omega. \end{array} \right. \end{array} \right. , k = 1 \text{ \AA } 6. \quad (3.17)$$

Ceci dit, on a le

Théorème 3.3.2 On suppose f, u_{01}, u_{11} donnés avec

$$f \in L^2(\Omega), \quad (3.18)$$

$$u_{01} \in V_k(\Omega), \ u_{11} \in L^2(\Omega) \quad (3.19)$$

il existe alors u_1 et u_2 solution de (P_k) avec

$$u_1 \in L^\infty(0, T; V_k), \quad (3.20)$$

$$u_1' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.21)$$

$$u_2 \in L^\infty(0, T; V_k). \quad (3.22)$$

où V_k est l'espace variationnelle du problème (P_k), $k = 1 \text{ \AA } 6$.

Remarque 3.3.3 - Dans le cas du problèmes de Dirichlet $V_1 = H_0^2(\Omega)$ et $V_1' = H^{-2}(\Omega)$.

- Il résulte de (3.20) et (3.22) que

$$[u_1, u_2] \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)), \quad (3.23)$$

et (a) entraîne

$$u_1'' = [u_1, u_2] - a_1 A_{u_1} + f,$$

$$\begin{aligned} A &\in L(V_1; V_1'), \\ A_{u_1} &\in L^\infty(0, T; V_1'), \\ u_1'' &\in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)) - L^\infty(0, T; V_1') + L^2(\Omega), \\ u_1'' &\in L^\infty(0, T; V_1'), \\ u_1' &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \subset L^2(0, T; V_1'), \\ u_1 &\in L^\infty(0, T; V_1) \subset L^2(0, T; V_1'), \end{aligned} \quad (3.24)$$

et donc les conditions initiales dans (P_k), $k = 1 \text{ \AA } 6$, ont un sens.

Remarque 3.3.4 la fonction u_2 du théorème précédent vérifie

$$u_2 \in L^\infty(0, T; H^{3-\varepsilon}(\Omega)) \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (3.25)$$

En effet, soit $\varepsilon > 0$ fixé arbitrairement petit. Alors

$$L^1(\Omega) \subset H^{-1-\varepsilon}(\Omega), \quad (3.26)$$

car si $f \in L^1(\Omega)$ on a :

$$|(f, \varphi)| \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^{1+\varepsilon}(\Omega)},$$

vu que $H_0^{1+\varepsilon}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ si $n=2$ et $\varepsilon > 0$. Alors

$$[u_1, u_1] \in L^\infty(0, T; H^{-1-\varepsilon}(\Omega)),$$

et comme $a_2 u_2 = -[u_1, u_1]$, on en déduit (3.25) (Notons que $(A)^{-1}$ envoie $H^s(\Omega)$ dans $H^{s+4}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $s \geq 0$).

Dans la démonstration de théorème 3.3.2 , on utilise le lemme de **J. L. Lions** [9] suivant

Lemme 3.3.5 *i) l'application $u, v \rightarrow [u, v]$ est bilinéaire continue de $V_1 \times V_1 \rightarrow V_1'$.*

ii) La forme $u, v, w \rightarrow ([u, v], w)$ est trilinéaire continue sur V_1 .

iii) La forme trilinéaire $u, v, w \rightarrow ([u, v], w)$ est symétrique sur V_1 .

Preuve. Comme dans [9]. ■

3.3.1 Démonstration du Théorème 3.3.2

Pour ne pas alourdir l'exposé par des calculs, nous allons faire la démonstration pour le cas de Dirichlet (les mêmes techniques pour les autres cas).

Définition des solutions approchées

On introduit une suite w_1, \dots, w_m, \dots de fonctions ayant les propriétés suivantes :

1. $w_i \in H_0^2(\Omega) \quad \forall i$

2. $\forall m, w_1, \dots, w_m$ sont linéairement indépendants.

3. Les combinaisons linéaires finies des w_i sont denses dans $H_0^2(\Omega)$.

Soit $u_{1m}(t)$ vérifiant

$$u_{1m}(t) \in [w_1, \dots, w_m], i.e u_{1m}(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i, \quad (3.27)$$

$$\begin{cases} (u_{1m}''(t), w_j) - a_1((\nu \Delta u_{1m} + (1 - \nu)D^2 u_{1m}), \Delta w_j) \\ + \frac{1}{a_2} ([u_{1m}(t), G_2(u_{1m}(t), u_{1m}(t))], w_j) = (f(t), w_j), 1 \leq j \leq m \end{cases} \quad (3.28)$$

où on utilise les notations de (3.15) et (3.16), avec

$$u_{1m}(0) = u_{01m} \in [w_1, \dots, w_m], u_{01m} \rightarrow u_{01} \text{ dans } H_0^2(\Omega), \quad (3.29)$$

$$u_{1m}'(0) = u_{11m} \in [w_1, \dots, w_m], u_{11m} \rightarrow u_{11} \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (3.30)$$

Si l'on définit $u_{2m}(t)$ par

$$u_{2m}(t) = -\frac{1}{a} G_2([u_{1m}(t), u_{1m}(t)]) \quad (3.31)$$

où encor

$$\begin{cases} a_2 A_{u_{2m}}(t) + [u_{1m}(t), u_{1m}(t)] = 0, \\ u_{2m}(t) \in H_0^2(\Omega), \end{cases} \quad (3.32)$$

alors (3.28) s'écrit

$$\begin{cases} (u_{1m}''(t), w_j) + a_1((\nu\Delta u_{1m} + (1-\nu)D^2u_{1m}), \Delta w_j) \\ -\frac{1}{a_2}([u_{1m}(t), u_{2m}(t)], w_j) = (f(t), w_j), 1 \leq j \leq m. \end{cases} \quad (3.33)$$

Naturellement $u_{2m}(t)$ n'est pas (en général) à valeurs dans $[w_1, \dots, w_m]$.

D'après les résultats généraux sur les systèmes d'équations différentielles, on est assuré de l'existence de $u_{1m}(t)$, et donc de $u_{2m}(t)$, dans un intervalle $[0, t_m]$, $t_m > 0$.

Estimations a priori

On multiplie (3.33) par $g'_{jm}(t)$ et on somme en j . Il vient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(|u'_{1m}(t)|^2 + a_1 |\nu\Delta u_{1m}(t) + (1-\nu)D^2u_{1m}|^2 \right) - \frac{1}{a_2} ([u_{1m}(t), u_{2m}(t)], u'_{1m}(t)) = (f(t), u'_{1m}(t)). \quad (3.34)$$

Mais d'après le lemme 3.3.5 :

$$\begin{aligned} ([u_{1m}(t), u_{2m}(t)], u'_{1m}(t)) &= - \left([u_{1m}(t), u'_{1m}(t)], u_{2m}(t) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} [u_{1m}(t), u_{1m}(t)], u_{2m}(t) \right) \end{aligned}$$

et d'après (3.32) cela est égal à

$$\frac{a_2}{2} (Au'_{2m}(t), u_{2m}(t)) = \frac{a_2}{2} \frac{d}{dt} |\nu\Delta u_{2m}(t) + (1-\nu)D^2u_{2m}|^2.$$

Donc (3.34) s'écrit encore :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\begin{array}{c} |u'_{1m}(t)|^2 + a_1 |\nu\Delta u_{1m}(t) + (1-\nu)D^2u_{1m}(t)|^2 \\ -\frac{a_2}{2} |\nu\Delta u_{2m}(t) + (1-\nu)D^2u_{2m}|^2 \end{array} \right) = (f(t), u'_{1m}(t)) \quad (3.35)$$

et donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} |u_{1m}(t)|^2 - G_h a_1 |\nu\Delta u_{1m}(t) + (1-\nu)D^2u_{1m}(t)|^2 \\ -\frac{a_2}{2} |\nu\Delta u_{2m}(t) + (1-\nu)D^2u_{2m}(t)|^2 \end{array} \right) = \\ \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} |u_{11m}(t)|^2 + a_1 |\nu\Delta u_{01m} + (1-\nu)D^2u_{01m}|^2 \\ -\frac{a_2}{2} |\nu\Delta u_{2m}(0) + (1-\nu)D^2u_{2m}(0)|^2 \end{array} \right) + \int_0^t (f(\sigma), u'_{1m}(\sigma)) d\sigma. \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Mais d'après (3.29)

$$|u_{11m}|^2 + a_1 |\nu\Delta u_{01m} + (1-\nu)D^2u_{01m}|^2 \leq \text{constante};$$

d'après la définition 1.3.8 on a

$$u_{2m}(0) = -\frac{1}{a_2}G_2([u_{01m}, u_{01m}]), \quad (3.37)$$

mais $[u_{01m}, u_{01m}]$ demeure dans un borné de $L^1(\Omega)$ donc de $H^{-2}(\Omega)$, donc $u_{2m}(0)$ demeure dans un borné de $H_0^2(\Omega)$ et donc dans (3.36)

$$|\nu\Delta u_{2m}(0) + (1-\nu)D^2u_{2m}(0)| \leq \text{contante.}$$

Donc (3.36) entraine que $t_m = T$ et que :

$$u_{1m}, u_{2m} \text{ demeurent dans un borné de } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)), \quad (3.38)$$

$$u'_{1m} \text{ demeurent dans un borné de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.39)$$

Passage a la limite

D'après (3.38) et (3.39) on peut extraire une suite $u_{1\mu}, u_{2\mu}$ telle que

$$\begin{cases} u_{i\mu} \rightarrow u_i \text{ dans } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)) \text{ faible étoile, } i = 1, 2, \\ u'_{i\mu} \rightarrow u'_i \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible étoile,} \\ u_{1\mu} \rightarrow u_1 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort.} \end{cases} \quad (3.40)$$

soient $\varphi_j, 1 \leq j \leq j_0$ des fonctions $\in C^1([0, T]), \varphi_j(T) = 0$, et $\Psi = \sum_{j=1}^{j_0} \varphi_j \otimes w_j$.

On déduit de (3.33) pour $m = \mu > j_0$ que

$$\int_0^T (u'_{1\mu}, \Psi') dt + a_1 \int_0^T (\nu\Delta u_{1\mu} + (1-\nu)D^2u_{1\mu}, \Delta\Psi) dt - \int_0^T ([u_{1\mu}, u_{2\mu}], \Psi) dt = \int_0^T (f, \Psi) dt + (u_{11\mu}(0), \Psi(0)). \quad (3.41)$$

Mais d'après le lemme 3.3.5 :

$$\int_0^T ([u_{1\mu}, u_{2\mu}], \Psi) dt = \int_0^T ([\Psi, u_{2\mu}], u_{1\mu}) dt; \quad (3.42)$$

$[\Psi, u_{2\mu}] \rightarrow [\Psi, u_2]$ dans $L^2(\Omega)$ faible et donc puisque $u_{1\mu} \rightarrow u_1$ dans $L^2(\Omega)$ fort, on voit que

$$\int_0^T ([u_{1\mu}, u_{2\mu}], \Psi) dt \rightarrow \int_0^T ([\Psi, u_2], u_1) dt = \int_0^T ([u_1, u_2], \Psi) dt$$

donc, (3.42) implique à la limite :

$$-\int_0^T (u_1', \Psi') dt + a_1 \int_0^T (\nu \Delta u_1 + (1-\nu) D^2 u_1, \Delta \Psi) dt - \int_0^T ([u_1, u_2], \Psi) dt = \int_0^T (f, \Psi) dt + (u_{11}(0), \Psi(0)) \quad (3.43)$$

et cela $\forall \Psi$ de la forme (3.41).

par passage à la limite on en déduit que (3.43) a encore lieu pour tout $\Psi \in L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))$ tel que $\Psi' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ et $\Psi(T) = 0$.

Cela montre que u_1 et u_2 sont liés par la **première équation** de (P_1) et que $u_1'(0) = u_{11}$.

il reste donc seulement à montrer la **deuxième équation** de (P_1) . On peut passer directement à la limite sur (3.31) (pour $m = \mu$) en notant que $[u_{1\mu}, u_{1\mu}] \rightarrow [u_1, u_1]$ dans $D'(\Omega)$; en effet, on a

$$\int_0^T ([u_{1\mu}, u_{1\mu}], \varphi) dt = \int_0^T ([u_{1\mu}, \varphi], u_{1\mu}) dt, \forall \varphi \in D(\Omega)$$

et on passe à la limite comme plus haut.

CONCLUSION

Dans la première partie, nous avons étudié en détail les singularités de la solution variationnelle des problèmes aux limites pour le système de Lamé (élasticité) avec différents conditions. Nous avons mis en évidence des série trigonométriques d'un type nouveau adaptée à l'étude des solutions des problèmes aux limites pour le système de Lamé et comme l'étude de la convergence des séries nécessite des relations d'orthogonalité, nous avons établis grâce à une formule de Green pour l'opérateur de Lamé une relation d'orthogonalité entre les fonctions $(v_\alpha)_{\alpha \in E}$ analogues à celles de l'orthogonalité pour le Laplacien et le bilaplacien dans un secteur plan S , qui facilite le calcul des coefficients de singularité qui est très important, d'une part pour les mécaniciens et d'autre part pour améliorer la convergence des séries. Le calcul étant dans le cas de la fissure et par conséquent nous avons montré la convergence de la nouvelle série. Cette partie constitue l'originalité de notre travail.

Dans la deuxième partie, et dans le cadre de la mécanique des solides, plus précisément en théorie des plaques minces, nous avons démontré un théorème d'existence pour le problème non linéaire gouvernée par l'opérateur de vibrations et flexions des plaques dans un ouvert borné à frontière suffisamment régulière par la méthode de compacité.

Perspectives

■ Etude détaillée pour les problèmes gouvernée par le système de Lamé dans un secteur d'angle différent (évités le cas de la fissure).

■ Généralisation le travail de deuxième chapitre pour dimension quelconque..

Bibliographie

- [1] **R. B. Adams**-Sobolev spaces, Academic press, 1975.
- [2] **S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg**.- Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, Communications on pure & Applied Maths, 12, 1959 p.623-727 et II même journal 17, 1964 p. 35-92.
- [3] **H. Blum & R. Rannacher**, On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners, Maths. Methods. App. Sci., 2 (1980), 556-581.
- [4] **H. Brezis**, Analyse fonctionnelle, Théorie et Application. Masson (1983).
- [5] **Cédric Camier**, Modélisation et étude numérique de vibrations non-linéaire des plaques circulaires minces imparfaites, Application aux cymbales. Thèse Présentée et soutenue publiquement le 2 février 2009 pour l'obtention du Docteur de l'Ecole Polytechnique.
- [6] **W. Chikouche** and **A. Aibeche**, Coefficients of singularities of the biharmonic problem of Neumann type : case of the crack. IJMMS 2003 : 5, 305-313, Hindawi Publishing Corp.
- [7] **W. Chikouche**, Etude spectrale du problème de bilaplacien, Thèse de Magister à l'université de constantine, Alger, 2000
- [8] **E. Gagliardo**.-Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, Vol 27, 1957, p. 284-307.
- [9] **Jacques-Louis Lions**, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires (1969).

- [10] **P. Grisvard, G. Geymonat**- Singularities and constructive methods for treatment, Proceeding Oberwalfach, Springer-Verlag, 1983, p. 123-126.
- [11] **P. Grisvard**, Solutions singulières du système de Lamé, Preprint No 173 et No 175, Université de Nice, (1987).
- [12] **P. Grisvard**, Singularities in boundary values problems, Recherches en Mathématiques Appliquées, Vol.22, Masson, Paris, 1992 (French).
- [13] **P. Grisvard**, Le problème de Dirichlet pour les équations de lamé, C.R.A.S, T.304, série I , No 3, (1987),p. 71-73.
- [14] **P. Grisvard**, Behavior of the solutions an elliptic boundary value problem in a polygonal or polyhedral domain, Sumposium on Numerical solutions of partial differential Equations III, B. Hubbard Editor, 1975, p. 207-274.
- [15] **P. Grisvard**, Résolvante du Laplacien dans un polygone et singularités des équations elliptiques ou paraboliques, CRAS, Paris, t.301 Serie I No 5, 1985 p.181-183.
- [16] **P. Grisvard** : i) Boundary value problems in plan polygons. Instructions for use, E.D.F, Bulletin de la direction des études et recherches, serie C, Mathématique no.1, 1986, p.21-59.
 ii) Le problème de Dirichlet pour les équations de Lamé, C. R. A. S. t.103, p.71-73, 1986.
- [17] **P. Grisvard**.- Elleptic problems in non smooth domains, Monographs and Studies in Mathematics, n° 24, Pitman, 1985.
- [18] **V.A. Kondrat'ev**, Boundary problems for elliptic equation in domains with conical or angular points, Trans. Moscow Maths. SOS., (1967), p.227-313.
- [19] **R. Lozi**, Résultats numériques de régularité du problème de Stokes et du Laplacien itéré dans un polygone, R.A.I.R.O, Analyse Numérique, Vol. 12≠3, 1978, p 267-282.
- [20] **B. Merouani**, comportements singuliers des solutions du système de l'élasticité dans un polygone, Thèse de doctorat, U.S.T.H.B., Alger (1990).
- [21] **B. Merouani**, Quelques problèmes aux limites pour le système de Lamé dans un secteur plan, C.R.A.S., t. 304, série I, no. 13, 1987.
- [22] **B. Merouani**, Solutions singulières du système de l'élasticité dans un polygone pour différentes conditions aux limites, Maghreb math, Rev, Vol 5, Nos 1 & 2, 1996, pp. 95-112.

- [23] **B. Merouani and N. Liazidi**, Trigonometric series adapted for the study of Neumann boundary-value problems of lame systems ; electronic journal of differential equations, vol. 2017 (2017), no. 148, pp. 1-6. issn : 1072-6691.
- [24] **B. Merouani and R. Boufenouche**, Trigonometric series adapted for the study of dirichlet boundary-value problems of lame systems ; electronic journal of differential equations, vol. 2015 (2015), no. 181, pp. 1-6. issn : 1072-6691.
- [25] **J. Necas**, Les méthodes directes en Théorie des équations elliptiques, Masson, Paris, 1967.
- [26] **J. Osborn.** - Regularity of solutions of the Stokes problem in a polygonal domain, Symposium on Numerical Solutions of Partial Differential Equations III, B. Hubbard Editor, 1975, p. 393-411.
- [27] **J. B. Seif**, On the Green's function for the biharmonic equation in an infinite wedge, Transactions A.M.S., Vol. 182, 1973, p. 241-260.
- [28] **O. Tcha-Kondor**, Nouvelles séries trigonométriques adaptées à l'étude de problèmes aux limites pour l'équation biharmonique. Étude du cas de la fissure [New trigonometric series adapted to the study of boundary value problems for the biharmonic equation. Cas of the crack], C. R. Acad. Sci. Paris, t. 315, Série I, p. 541-544, 1992(French).
- [29] **M.L.Williams**, Stress, singularities résulting from various boundary conditions in angular corner of plates in extension, J.Appl. Mch., 19,1952, p. 526-528.

ملخص

موضوع هذه الرسالة هو دراسة مجموعتين من المشاكل الحدودية. المجموعة الأولى التي تحكمها معادلات لامي ، النتائج التي تم الحصول عليها تتعلق بالحلول الفردية بهدف إنشاء جدول تمديد من جدول ب. مرواني - بما في ذلك حالة الصدع-. والثاني غير خطي من الاهتزازات والانحناء، والنتائج التي تم الحصول عليها تتعلق بوجود وتفرد الحلول الضعيفة.

الكلمات المفتاحية: المرونة ، التفرد ، لامي ، متعال ، صيغة بيتي ، التماثل ، عكسها ، الثني ، الاهتزازات ، الحل الضعيف.

Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude de deux groupes des problèmes aux limites. Le premier groupe gouverné par les équations de Lamé, les résultats obtenus concernent des solutions singulières dans le but créer un tableau d'extension du tableau de B. Merouani -y compris le cas de la fissure-. Le deuxième est non linéaire de vibrations et flexions, les résultats obtenus concernent l'existence et l'unicité des solutions faibles.

Mots clés : élasticité, singularité, Lamé, transcendentes, la formule de Betti, isomorphisme, inversible, flexions, vibrations, solution faible.

Abstract

The Aim of this thesis is the study of two groups of boundary problems. The first group governed by Lamé's equations, the results obtained relate to singular solutions with the aim of creating an extension table from the table of B. Merouani -including the case of crack-. The second is nonlinear of vibrations and flexions, the results obtained relate to the existence and the uniqueness of weak solutions.

Keywords: elasticity, singularity, Lamé, transcendent, Betti's formula, isomorphism, invertible, flexions, vibrations, weak solution.