

N° D'ORDRE :

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Ferhat Abbas Sétif 1  
Faculté des sciences



**THESE**  
**PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME**  
**DOCTORAT EN SCIENCES**

Spécialité : **Analyse**

Par : Meriem Guechi

*Résolution de l'équation de Fitzhugh-Nagumo d'ordre fractionnaire  
moyennant la méthode d'expansion de Riccati*

Soutenu publiquement le 26 \ 09 \ 2020, devant le jury composé de :

<b>Président</b>	<i>M<sup>r</sup></i>	Mohamed SELMANI	Professeur Université Ferhat Abbas Sétif 1
<b>Directeur de Thèse</b>	<i>M<sup>r</sup></i>	Abdelouahab KADEM	Professeur Université Ferhat Abbas Sétif 1
<b>Examineur</b>	<i>M<sup>r</sup></i>	Said GUEDJIBA	Professeur Université de Batna 2
<b>Examineur</b>	<i>M<sup>r</sup></i>	Rabah KHEMIS	M.C.A Université de Skikda

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions préliminaires de Dérivation fractionnaire</b>	<b>4</b>
1.1 Fonctions spéciales pour la dérivation fractionnaire . . . . .	5
1.1.1 La fonction Gamma . . . . .	5
1.1.2 La fonction Bêta . . . . .	5
1.2 Eléments d'analyse fonctionnelle . . . . .	6
1.2.1 Espace des fonctions sommables $L_p([a, b])$ . . . . .	6
1.2.2 Espace des fonctions absolument continues $AC([a, b])$ . . . . .	6
1.3 Intégrale et dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . . .	7
1.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo . . . . .	11
1.4.1 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville . . . . .	16
1.5 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville au sens de Jumarie . . . . .	17
1.6 Dérivé fractionnaire conforme . . . . .	20
1.6.1 Opérateur différentiel Conforme . . . . .	21
1.6.2 Propriétés de la dérivée fractionnaire conforme . . . . .	21
<b>2 Le modèle de FitzHugh-Nagumo</b>	<b>24</b>

---

2.1	Anatomie et physiologie d'un neurone du point de vue biologique . . . . .	25
2.1.1	L'anatomie du neurone . . . . .	25
2.1.2	La physiologie du neurone . . . . .	27
2.2	Les modèles mathématiques dans la littérature . . . . .	29
2.2.1	Les modèles Integrate-and-Fire (IF) et Leaky-Integrate-and-Fire (LIF)	30
2.2.2	Les modèles Resonate-and-Fire, IF quadratique et d'Izhikevich . . .	31
2.2.3	Le modèle de Hodgkin-Huxley . . . . .	33
2.2.4	Le modèle de FitzHugh-Nagumo . . . . .	38
2.3	L'équation réaction-diffusion de Fitzhugh-Nagumo . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Application de la méthode d'expansion de Riccati pour la résolution de l'équation de Fitzhugh-Nagumo d'ordre fractionnaire</b>	<b>44</b>
3.1	les contre-exemples de L.Cheng-Shi . . . . .	45
3.1.1	Le contre-exemple de la formule 1.20 . . . . .	46
3.1.2	Le contre-exemple de la formule 1.21 . . . . .	46
3.1.3	Le contre-exemple de la formule 1.22 . . . . .	47
3.2	les contre-exemples de L.Xiaohua . . . . .	48
3.3	La méthode d'expansion de Riccati . . . . .	50
3.4	Application de la méthode d'exponson de Riccati . . . . .	52
3.4.1	Résolution de l'équation de Fitzhugh-Nagumo d'ordre fractionnaire	52
3.4.2	Solution de l'équation de Newell-Whitehead-Segel d'ordre fractionnaire	54
3.4.3	Solution de l'équation de Zeldoviych d'ordre fractionnaire . . . . .	56
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>59</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>61</b>

# *Remerciements*

Premièrement, je remercie Dieu le Miséricordieux, pour m'avoir donné la volonté et la force pour accomplir ce modeste travail, elhamdou li llah.

*J*e tiens à exprimer ma profonde gratitude au Professeur Abdelouahab KADEM , mon directeur de thèse, et mon guide, pour la confiance qu'il m'a faite en acceptant de diriger mes recherches, et pour ses précieux conseils et orientations, ainsi que pour l'intérêt particulier qu'il a accordé à ce travail. Je ne le remercierai jamais assez pour la grande contribution et l'aide qu'il m'a apporté pour l'aboutissement de ce travail.

*J'*adresse mes remerciements au Professeur Mohamed SELMANI, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Mes vifs remerciements vont également à Said GUEDJIBA, Professeur à Université de Batna 2 et Monsieur Rabah KHEMIS Professeur à Université de Skikda pour l'honneur qu'ils m'ont rendu en acceptant de faire partie de jury.

*J*e tiens à remercier toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.



Je dédie ce travail :

À la mémoire de mon père et ma grand mère.

À ma mère .

À mon mari Adel.

À ma petite fille Alaa.

À mes frères et Sœurs.

À tous mes amis.

*Meriem.*

# Introduction générale

*"Le commencement est la moitié de tout".*

*Pythagore(vers 580-495 av. J.-C.)*

La théorie de dérivée fractionnaire est un sujet aussi ancienne que le calcul classique tel **L** que nous le connaissons aujourd'hui. Ses origines remontent à la fin du 17<sup>ième</sup> siècle [9], l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. La première question qui a introduit au calcul fractionnaire était : est ce que la dérivée d'ordre entier  $\frac{d^n f}{dt}$  peut être étendue à avoir un sens lorsque  $n$  est une fraction ? par la suite, la question est devenue :  $n$  peut être n'importe quel nombre : fractionnel, irrationnel ou complexe ? cette dernière question a été résolue par l'affirmative, le calcul fractionnaire est devenu un terme mal approprié et pourrait mieux être appelé intégration et différentiation d'ordre fractionnaire.

Leibniz a introduit le symbole  $\frac{d^n f}{dt}$  pour désigner la dérivée  $n^{\text{ième}}$  d'une fonction  $f$  : quand il l'a annoncé dans une lettre à l'Hôpital en 1695 ; qui lui a répondu : que signifie  $\frac{d^n f}{dt}$  si  $n = \frac{1}{2}$ .

Aujourd'hui, cette théorie est admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire.

Cependant, l'étude des dérivées d'ordre non entier n'est pas apparu dans la littérature que jusqu'à 1819, où Lacroix a présenté une définition de la dérivée fractionnaire basée

sur l'expression usuelle de la  $n^{\text{ème}}$  dérivée de la fonction puissance. Au cours des années, le calcul fractionnaire devient un sujet attrayant aux mathématiciens et plusieurs formes de l'opérateur différentiel fractionnaire sont introduites : J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), Riemann-Liouville (1832-1837) H. Holmgren (1865-67), A.K. Grünwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912), S. Pincherle (1902), G.H. Hardy and J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. Lévy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945), E.R. Love (1938-1996), A. Erdélyi (1939-1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949), Caputo (1967) et ce n'est qu'en 1974. Le calcul fractionnaire a été intensivement développé grâce à B. Ross qui a organisé une conférence à l'université de New Haven sous le titre "Le calcul fractionnaire et ses applications" (la première conférence sur ce domaine).

Depuis, un intérêt considérable a été porté au calcul fractionnaire par l'application de ces concepts dans différents domaines de la physique, de l'ingénierie et de la biologie, où un progrès signifiant de travaux théoriques pouvant servir comme une fondation pour un nombre d'applications dans ces domaines. Donc, le but du calcul fractionnaire est de généraliser les dérivées traditionnelles à des ordres non-entiers grâce à ses propriétés qui ne sont pas locales.

D'autre part, les systèmes différentiels d'ordre fractionnaire impulsives apparaissent **D** comme une description naturelle de nombreux phénomènes d'évolution dans le monde réel. La majorité des processus dans les sciences appliquées sont représentés par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Cependant, la situation est différente dans certains phénomènes physiques qui subissent des changements brusques au cours de leur évolution comme les systèmes mécaniques avec impact, les systèmes biologiques (battements du cœur, flux du sang, activité de neurone...), la dynamique des populations, les désastres naturels, etc. Ces changements sont souvent de très courtes durées et sont donc produits instantanément sous forme d'impulsions. La modélisation de tels phénomènes nécessite l'utilisation des formes qui font intervenir explicitement et simultanément l'évolution continue du

phénomène ainsi que les changements instantanés. De tels modèles sont dits "impulsifs" ; ils sont évolutifs de processus continus régis par des équations différentielles combinées avec des équations aux différences représentant l'effet impulsif subi.

Parmi beaucoup de modèles, on a entre autre celui de Fitzhugh-Nagumo, ce modèle est **P** un exemple d'oscillateur de relaxation de neurone.

Ce travail est composé de trois chapitres, on commencera par donner les notions fondamentales de calcul fractionnaire, nous définissons l'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire au sens Caputo et dérivée fractionnaire au sens de Jumarie, à la fin de ce premier chapitre on donne la définition de la dérivée fractionnaire appelée la dérivée fractionnaire conformable.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du phénomène de passage du neurone au sens biologique au modèle de neurone au sens mathématique appelé communément le modèle de Fitzhugh-Nagumo.

Enfin, Le dernier chapitre présente la contribution principale de cette thèse, en considérant d'une part les contre-exemples de L.Xiaohua et L.Cheng-shi, d'autre part l'application de la méthode d'expansion fractionnaire de Riccati pour résoudre l'équation de Fitzhugh-Nagumo fractionnaire.

---

# Chapitre 1

---

## NOTIONS PRÉLIMINAIRES DE DÉRIVATION FRACTIONNAIRE

---

*"Les mathématiques ne sont pas une moindre immensité que la mer".*

*Victor HUGO(1802 -1885)*

### Introduction

Le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse dont l'étude se rapporte aux opérateurs ***L*** d'intégration et de dérivation d'ordre non entier. Dans la littérature il existe plusieurs approches pour la dérivation fractionnaire, dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions, notions, propriétés et résultats sur les différentes approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.[18][1].

## 1.1 Fonctions spéciales pour la dérivation fractionnaire

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma et Béta. Ces deux fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ses application.

### 1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes. (excepté en certains points)

**Définition 1.1** Pour  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $Re(z) > 0$ , la fonction  $\Gamma(z)$  est définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.1)$$

**Propriétés** 1. La propriété importante de la fonction  $\Gamma(z)$  est la relation de récurrence

suivante :  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$  ;

2.  $\Gamma(1) = 1$  ,  $\Gamma(0_+) = +\infty$  .Et aussi  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

3.  $\Gamma(z)$  est une fonction monotone et strictement décroissante pour  $0 < z \leq 1$ .

4. Si  $n \in \mathbb{N}$  alors  $\Gamma(n + 1) = n!$  et aussi si  $n \in \mathbb{N}$  alors :  $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$

### 1.1.2 La fonction Béta

**Définition 1.2** La fonction Béta (qui est un type d'intégrale, au même titre que la fonction Gamma) est une fonction définie pour des nombre complexes  $z$  et  $w$  par :

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, Re(z) > 0, Re(w) > 0. \quad (1.2)$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (1.3)$$

Il s'ensuit que

$$\beta(z, w) = \beta(w, z), \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0.$$

## 1.2 Eléments d'analyse fonctionnelle

Ici on rappelle quelques définitions d'analyse fonctionnelle qui sont utilisées dans les définitions des intégrales et dérivées fractionnaires.

### 1.2.1 Espace des fonctions sommables $L_p([a, b])$

Soit  $\varphi$  une fonction définie et mesurable sur  $[a, b]$  appartenant à l'ensemble  $L_p([a, b])$ , où  $p$  est un entier positif. La norme  $L_p([a, b])$  est définie par :

$$\int_a^b |\varphi(x)|^p dx < \infty$$

### 1.2.2 Espace des fonctions absolument continues $AC([a, b])$

**Définition 1.3** La fonction  $f$  est dite absolument continue sur un intervalle  $[a, b]$  si pour tout réel  $\epsilon$  strictement positif, il existe un réel  $\delta$  strictement positif, tel que pour tout système fini d'intervalles disjoints  $[a_k, b_k] \in [a, b], k = 1, 2, \dots, n$  on a la relation :

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$$

L'ensemble des fonctions absolument continues sur  $[a, b]$  est noté par  $AC([a, b])$ .

**Théorème 1** Les fonctions absolument continues sur un intervalle  $[a, b]$  possèdent une

dérivée sommable sur  $[a, b]$ , autrement dit :

$$f \in AC([a, b]) \Leftrightarrow \exists \varphi \in L_p([a, b]) / \forall x \in [a, b], f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t) dt$$

### 1.3 Intégrale et dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Selon l'approche de Riemann-Liouville sur le calcul fractionnaire, la notion d'intégrale fractionnaire d'ordre  $\alpha$ , ( $\alpha > 0$ ), généralise la formule d'intégrale répétées  $n$ -fois

$$\begin{aligned} (I_a^n f)(t) &= \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} ds_2 \dots \int_a^{s_{n-1}} f(s_n) ds_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds, n \in N^*. \end{aligned} \quad (1.4)$$

qui réduit le calcul de la  $n^{\text{ème}}$  primitive d'une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $[a; b]$  à une seule intégrale de type convolution. Notons par  $D^n$ ,  $n \in N$ , l'opérateur de dérivation d'ordre  $n$ , alors on a

$$D^n I_a^n = I, I_a^n D^n \neq I. \quad (1.5)$$

où  $I$  est l'opérateur d'identité.

**Définition 1.4** L'intégrale fractionnaire d'ordre  $\alpha > 0$  de Riemann-Liouville d'une fonction  $f \in L^1[a; b]$  est donnée par

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, t > a. \quad (1.6)$$

**Définition 1.5** La dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha > 0$  au sens de Riemann-Liouville d'une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $[a; b]$  de  $\mathbb{R}$  est donnée par

$$\begin{aligned} (D_a^\alpha f)(t) &= D^n I_a^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, t > a. \end{aligned} \quad (1.7)$$

où  $n = [\alpha] + 1$ , et  $\alpha$  est la partie entière de  $\alpha$ .

En particulier, si  $\alpha = 0$ , alors

$$(D_a^0 f)(t) = I_a^0 f(t) = f(t)$$

Si  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , alors

$$(D_a^n f)(t) = f^n(t).$$

Si en plus  $0 < \alpha < 1$ , alors  $n = 1$ , d'où

$$(D_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds, t > a.$$

**Exemple 1** 1. La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante, mais on a :

$$D^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}$$

2. La dérivée de  $f(t) = (t-a)^p$  au sens de Riemann-Liouville :

Soit  $p$  non entier et  $0 \leq n-1 < \alpha < n$  et  $p > -1$ , alors on a :

$$D^\alpha (t-a)^p = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^p d\tau$$

En faisant le changement de variable  $\tau = a + s(t-a)$ , on aura :

$$\begin{aligned} D^\alpha (t-a)^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n+p-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^p ds \\ &= \frac{\Gamma(n+p-\alpha+1) \beta(n-\alpha, p+1)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(n+p-\alpha+1) \Gamma(n-\alpha) \Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha) \Gamma(p-\alpha+1) \Gamma(n+p-\alpha+1)} (t-a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} (t-a)^{p-\alpha}. \end{aligned}$$

A titre d'exemple :

$$D^{0.5}t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5).$$

**Proposition** Soient  $\alpha > 0$  et  $n = [\alpha] + 1$ , alors

$$(D_a^\alpha f)(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = \sum_{j=1}^n c_j (t-a)^{\alpha-j}, \forall c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

En particulier, si  $0 < \alpha < 1$ , alors

$$(D_a^\alpha f)(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = c(t-a)^{\alpha-1} \forall c \in \mathbb{R}$$

Enonçons maintenant quelques propriétés des opérateurs  $I_a^\alpha$  et  $D_a^\alpha$ .

**Lemme 1.1** L'opérateur d'intégration fractionnaire  $I_a^\alpha, \alpha > 0$  est linéaire et borné de l'espace  $L^p[a; b] (1 \leq p \leq \infty)$  dans lui même, s'est à dire

$\exists k > 0$  tel que :

$$\|I_a^\alpha f\|_p \leq k \|f\|_p \forall f \in L^p[a, b], \text{ où } k = \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha |\Gamma(\alpha)|}$$

Le résultat suivant caractérise les conditions nécessaires pour l'existence de la dérivée fractionnaire  $D_a^\alpha$ .

**Lemme 1.2** Soient  $\alpha > 0$  et  $n = [\alpha] + 1$ . Si  $f \in AC^n[a; b]$ , alors la dérivée fractionnaire  $D_a^\alpha f$  existe presque partout sur  $[a; b]$  et elle est représentée sous la forme

$$(D_a^\alpha f)(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds$$

Une propriété importante de l'opérateur d'intégration fractionnaire  $I_a^\alpha$ , dite propriété du semi-groupe, est donnée par le lemme suivant :

**Lemme 1.3** Si  $\alpha > 0; \beta > 0$ , alors l'équation

$$(I_a^\alpha I_a^\beta f)(t) = (I_a^{\alpha+\beta} f)(t). \quad (1.8)$$

est satisfaite presque partout sur  $[a; b]$ , pour toute  $f \in L^p[a; b]$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

**Preuve** Soit  $f \in L^p[a; b]$ , alors on a grâce au théorème de Fubini

$$\begin{aligned}
 I_a^\alpha(I_a^\beta f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (I_a^\beta f)(s) ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} dt \int_a^s (s-\xi)^{\beta-1} f(\xi) d\xi \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\xi) d\xi \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\xi)^{\beta-1} ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-\xi)^{\alpha+\beta-1} f(\xi) d\xi \\
 &= (I_a^{\alpha+\beta} f)(t).
 \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Une des propriétés importantes de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville avec l'intégrale fractionnaire est la suivante :

**Lemme 1.4** Pour  $\alpha > 0$  et  $f \in L^1[a; b]$  on a

$$(D_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = f(t), p.psur[a, b]. \quad (1.9)$$

La propriété (1.9) signifie que l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville du même ordre.

**Preuve** D'après (1.7) et la propriété (1.8), on a pour  $n = [\alpha] + 1$

$$(D_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = D^n I^{n-\alpha} I^\alpha f(t) = D^n I^n f(t) = f(t), p.psur[a, b]$$

ce qui établit le résultat.

## 1.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Les dérivées de Riemann-Liouville ont certains inconvénients lorsque on essaie de modéliser des phénomènes du monde réel. Les problèmes étudiés exigent une définition des dérivées fractionnaires permettant l'utilisation des conditions initiales physiquement interprétables incluant  $y(0)$ ,  $y'(0)$ , etc. Ces défaillances ont conduit vers la fin des années soixante, à une définition alternative des dérivées fractionnaires qui satisfait ces demandes; elle a été introduite par Caputo [25]. En fait, Caputo et Mainardi [26] ont utilisé cette définition dans leurs travaux sur la viscoélasticité. Dans cette section on donne la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ainsi que quelques propriétés essentielles.

Soit  $[a; b]$  un intervalle fini de  $\mathbb{R}$ , et soit  $I_a^\alpha$  et  $D_a^\alpha$  les opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires donnés par (1.6) et (1.7) dans la section précédente.

**Définition 1.6** La dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha > 0$  de Caputo d'une fonction  $f$  définie sur  $[a; b]$  est donnée par

$$({}^C D_a^\alpha)f(t) = D_a^\alpha(f(t)) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k, \quad (1.10)$$

où

$$n = [\alpha] + 1, \text{ si } \alpha \notin \mathbb{N} \text{ et } n = \alpha, \alpha \in \mathbb{N}^*. \quad (1.11)$$

si  $\alpha = 0$  alors

$$({}^C D_a^\alpha)f(t) = f(t).$$

En particulier, lorsque  $0 < \alpha < 1$ , la relation (1.10) prend la forme

$$({}^C D_a^\alpha)f(t) = (D_a^0)([f(t) - f(a)])$$

Donc, si  $\alpha \notin \mathbb{N}$  et  $f$  est une fonction pour laquelle les dérivées fractionnaires de Caputo (1.10), et celle de Riemann-Liouville (1.7) existent, alors elles sont liées l'une à l'autre par la relation

$$({}^C D_a^\alpha) f(t) = (D_a^\alpha f)(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (t - a)^{k - \alpha}, \quad (n = [\alpha] + 1). \quad (1.12)$$

En particulier, lorsque  $0 < \alpha < 1$ , on a

$$({}^C D_a^\alpha) f(t) = (D_a^\alpha f)(t) - \frac{f(a)}{\Gamma(1 - \alpha)} (t - a)^{-\alpha}. \quad (1.13)$$

D'après la relation (1.12), si  $\alpha \in \mathbb{N}$ , alors la dérivée de Caputo (1.10) coïncide avec la dérivée de Riemann-Liouville (1.7) si la fonction  $f$  ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $n - 1$ , ( $n = [\alpha] + 1$ ) s'annulent au point  $a$ , s'est à dire

$$(D_a^\alpha f)(t) = (D_a^\alpha f)(t) \Leftrightarrow f(a) = f'(a) = \dots = f^{n-1}(a) = 0.$$

Si  $\alpha \in \mathbb{N}$  et la dérivée usuelle  $f^{(n)}(t)$  existe, alors  $(D_a^\alpha f)(t)$  coïncide avec  $f^{(n)}(t)$  c'est à dire

$$({}^C D_a^\alpha) f(t) = f^{(n)}(t). \quad (1.14)$$

La dérivée fractionnaire de Caputo (1.10) est définie pour les fonctions  $f(t)$  pour lesquelles la dérivée de Riemann-Liouville (1.7) existe, en particulier, elle est définie pour les fonctions  $f(t) \in AC^n[a; b]$ .

On a le théorème suivant :

**Théorème 2** Soit  $\alpha > 0$  et soit  $n$  donné par (1.11). Si  $f(t) \in AC^n[a; b]$ , alors la dérivée fractionnaire de Caputo  $({}^C D_a^\alpha) f(t)$  existe presque partout sur  $[a; b]$ .

(i) Si  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , alors  $({}^C D_a^\alpha) f(t)$  est donnée par

$$\begin{aligned} ({}^C D_a^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - s)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(s) ds \\ &= I_\alpha^{n - \alpha} D^n f(t). \end{aligned} \quad (1.15)$$

En particulier, lorsque  $0 < \alpha < 1$  et  $f(t) \in AC^n[a; b]$ , alors

$$\begin{aligned} ({}^C D_a^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds \\ &= I_\alpha^{1-\alpha} f'(t). \end{aligned} \tag{1.16}$$

(ii) Si  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , alors  $({}^C D_a^\alpha f)(t) = f^{(n)}(t)$ .

**Preuve** . D'après la définition, on a

$$\begin{aligned} ({}^C D_a^\alpha f)(t) &= D_a^\alpha \left( f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right) \\ &= D^n I_a^{n-\alpha} \left( f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right) \end{aligned}$$

Posons

$$\varphi(t) = I_a^{n-\alpha} \left( f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right)$$

D'après (1.6) , on a

$$\varphi(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left( f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (s-a)^k \right) ds.$$

En intégrant par parties, on aura

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_a^t \frac{(t-s)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left( f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (s-a)^k \right) ds. \\ &= -\frac{(t-s)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left( f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (s-a)^k \right) \Big|_{s=a}^{s=t} \\ &\quad + \frac{(t-s)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha} D(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (s-a)^k) ds. \\ &= I_a^{n-\alpha+1} D(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k) \end{aligned}$$

En répétant ce procédé  $n$  fois, on trouve

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= I_a^{n-\alpha+n} D^n(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k) \\ &= I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k)\end{aligned}$$

Or,  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k$  est un polynôme de degré  $n-1$ , par conséquent

$$\varphi(t) = I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n f(t).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}({}^C D_a^\alpha f)(t) &= D^n \varphi(t) \\ &= D^n I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n f(t) \\ &= I_a^{n-\alpha} D^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds\end{aligned}$$

d'où le résultat.

**Théorème 3** Soient  $\alpha > 0, n$  donné par (1.11) et  $f \in C^n[a; b]$ . Alors la dérivée fractionnaire de Caputo  $({}^C D_a^\alpha) f$  est continue sur  $[a; b]$ .

1. Si  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , alors  $({}^C D_a^\alpha) f$  est donnée par (1.15). En particulier, elle prend la forme (1.16) pour  $0 < \alpha < 1$ .
2. Si  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , alors  $({}^C D_a^\alpha) f = f^{(n)}(t)$ .

La dérivée fractionnaire de Caputo  $({}^C D_a^\alpha)$ , comme celle de Riemann-Liouville, représente l'opération inverse à gauche de l'intégrale fractionnaire  $I_a^\alpha$ .

**Lemme 1.5** Soient  $\alpha > 0$  et  $f \in L^\infty[a; b]$ , alors

$$({}^C D_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = f(t). \quad (1.17)$$

**Lemme 1.6** Soient  $\alpha > 0$  et  $f \in L^\infty[a; b]$ , alors

$$I^{\alpha C} D^\alpha = f(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1},$$

pour certaines constantes  $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n - 1$ , on a défini la dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction  $f$  sur un intervalle fini  $[a; b]$  par (1.10), et on a vu dans le théorème 1 qu'elle peut être représentée par (1.14) et (1.15) à condition que  $f \in AC^n[a; b]$ . En fait, la formule (1.16) peut être utilisée pour définir la dérivée fractionnaire de Caputo sur le demi axe  $\mathbb{R}^+$ . En effet, la dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction  $f \in AC^n[0; \infty)$  sur le demi axe  $\mathbb{R}^+$  est donnée par

$$({}^C D_{0^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{n-\alpha-1} f^n(s) ds, t > 0.$$

En particulier, lorsque  $0 < \alpha < 1$  et  $f \in AC^1[0; \infty)$ , alors

$$({}^C D_{0^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{-\alpha} f'(s) ds, t > 0.$$

*Remarque 1* Dans le cas général, la dérivée fractionnaire de Caputo ne coïncide pas avec la dérivée de Riemann-Liouville. La relation entre les deux définitions peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$(D_a^\alpha)_{RL}(t) = ({}^C D_a^\alpha)(t) + \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{f(a)}{(t - a)^\alpha}$$

On remarque que, de toute évidence, les définitions seront équivalentes uniquement si  $f(a) = 0$ .

**Exemple 2** 1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$$D^\alpha C = 0.$$

2. La dérivée de  $f(t) = (t - a)^p$  au sens de Caputo :

Soit  $\alpha$  un entier et  $0 \leq n - 1 < \alpha < n$  avec  $p > n - 1$  ; alors on a

$$f^n(\tau) = \frac{\Gamma(p + 1)}{\Gamma(p - n + 1)} (\tau - a)^{p-n},$$

d'où

$$D^\alpha(t - a)^p = \frac{\Gamma(p + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(p - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} (\tau - a)^{p-n} d\tau.$$

En effectuant le changement de variable  $\tau = a + s(t - a)$  on obtient :

$$\begin{aligned} D^\alpha(t - a)^p &= \frac{\Gamma(p + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(p - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} (\tau - a)^{p-n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(p + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(p - n + 1)} (t - a)^{p-\alpha} \int_0^1 (1 - s)^{n-\alpha-1} (s)^{p-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(p + 1)\beta(n - \alpha, p - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(p - n + 1)} (t - a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p + 1)\Gamma(n - \alpha)\Gamma(p - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(p - n + 1)\Gamma(p - \alpha + 1)} (t - a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p + 1)}{\Gamma(p - \alpha + 1)} (t - a)^{p-\alpha} \end{aligned}$$

A titre d'exemple :

$$D^{0.5}t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5).$$

### 1.4.1 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville

1. L'utilisation des dérivées fractionnaires au sens de Caputo permet de formuler des équations différentielles fractionnaires avec des conditions initiales de type Dirichlet ou Neumann. Par contre, les équations différentielles fractionnaires résolues avec la définition de Riemann-Liouville possèdent des conditions initiales en termes d'intégrale fractionnaire. Dans ce cas, cela peut engendrer un problème lors de l'identification de cette condition initiale ; c'est pour cela que les dérivées fractionnaires

au sens de Caputo sont préférées à celles au sens de Riemann-Liouville.

2. Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle au sens de Caputo, par contre au sens de Riemann-Liouville elle est égal à  $\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^p$

## 1.5 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville au sens de Jumarie

**Définition 1.7** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $\alpha$  un nombre réel strictement négatif. On appelle dérivée fractionnaire au sens de Jumarie d'ordre  $\alpha$  de  $f$  et on la note  $D_t^\alpha f(t)$  la fonction définie par

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (1.18)$$

**Définition 1.8** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $0 < \alpha < 1$ . On appelle la dérivée fractionnaire au sens de Jumarie d'ordre  $\alpha$  de  $f$  et on la note  $D_t^\alpha f(t)$  la fonction définie par

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} (f(\tau) - f(0)) d\tau. \quad (1.19)$$

*Remarque 2* 1. Si  $f(0) = 0$  alors  $D_t^\alpha f(t)$  est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  de  $f$ .

2. La dérivée fractionnaire au sens de Jumarie est une définition non locale.
3. La dérivée fractionnaire au sens de Jumarie pour  $0 < \alpha < 1$  d'une constante est nulle.

**Définition 1.9** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Pour  $n < \alpha < n + 1$ , la dérivée fractionnaire au sens de Jumarie est définie par

$$D_t^\alpha [f(t)] = (D_t^{\alpha-n} f(t))^{(n)}.$$

**Corollaire 1.1** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $0 < \alpha < 1$ . Alors

$$D_t^\alpha f(t) = \Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h^\alpha}$$

**Preuve** Pour  $n = 1$ ; On a

$$f(x+h) = f(t) + \frac{h^\alpha D_t^\alpha f(t)}{\Gamma(\alpha + 1) + \varepsilon(h)}.$$

C'est-à-dire

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h^\alpha} = \frac{D_t^\alpha f(t)}{\Gamma(\alpha + 1)} + \varepsilon(h)$$

Alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h^\alpha} = \frac{D_t^\alpha f(t)}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

et

$$D_t^\alpha f(t) = \Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h^\alpha}$$

**Théorème 4** Soient  $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues non différentiables et  $0 < \alpha < 1$ . Alors

$$D_t^\alpha (uv)(t) = v(t)D_t^\alpha u(t) + u(t)D_t^\alpha v(t). \quad (1.20)$$

**Preuve** D'après le corollaire précédent, on a

$$\begin{aligned} D_t^\alpha (uv)(t) &= \Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(uv)(t+h) - (uv)(t)}{h^\alpha} \\ &= \Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h)v(t+h) - u(t)v(t)}{h^\alpha} \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} D_t^\alpha (uv)(t) &= \Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h)[v(t+h) - v(t)]}{h^\alpha} \\ &\quad + \Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[u(t+h) - u(t)]v(t)}{h^\alpha} \\ &= v(t)D_t^\alpha u(t) + u(t)D_t^\alpha v(t). \end{aligned}$$

**Théorème 5** Soient  $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues,  $v$  est non différentiable et  $u \circ v$  est différentiable,  $0 < \alpha < 1$ , alors

$$D_t^\alpha[u(v(t))] = u'(v)D_t^\alpha v(t). \quad (1.21)$$

**Preuve** On a

$$\begin{aligned} D_t^\alpha[u(v(t))] &= \Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(v(t+h)) - u(v(t))}{h^\alpha} \\ &= \Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{u(v(t+h)) - u(v(t))}{v(t+h) - v(t)} \left( \frac{v(t+h) - v(t)}{h^\alpha} \right) \right] \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} D_t^\alpha[u(v(t))] &= \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(v(t+h)) - u(v(t))}{v(t+h) - v(t)} \right] \\ &\quad \times \left[ \Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h^\alpha} \right] \\ &= u'(v)D_t^\alpha v(t). \end{aligned}$$

**Théorème 6** Soient  $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues,  $v$  est non différentiable et  $u \circ v$  est différentiable,  $0 < \alpha < 1$ , alors

$$D_t^\alpha[u(v(t))] = D_t^\alpha u(v)(v'(t))^\alpha. \quad (1.22)$$

**Preuve** On a

$$\begin{aligned} D_t^\alpha[u(v(t))] &= \Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(v(t+h)) - u(v(t))}{h^\alpha} \\ &= \Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{u(v(t+h)) - u(v(t))}{(v(t+h) - v(t))^\alpha} \left( \frac{v(t+h) - v(t)}{h^\alpha} \right)^\alpha \right]. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} D_t^\alpha[u(v(t))] &= \left[ \Gamma(\alpha + 1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(v(t+h)) - u(v(t))}{v(t+h) - v(t)} \right] \\ &\quad \times \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{v(t+h) - v(t)}{h} \right)^\alpha \right] \\ &= D_t^\alpha u(v)(v'(t))^\alpha. \end{aligned}$$

## 1.6 Dérivé fractionnaire conformable

Soit  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $t > 0$ . Alors la définition de la dérivée de  $f$  en  $t$  est

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon) - f(t)}{\epsilon}.$$

Selon cela, on a  $\frac{dt^n}{dt} = nt^{n-1}$ .

La question est donc la suivante : peut-on donner une définition similaire pour la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$ , où  $0 < \alpha < 1$ ? Ou en général pour  $\alpha \in (n, n + 1]$  où  $n \in \mathbb{N}$ . Écrivons  $T_\alpha$  pour désigner l'opérateur appelé dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$ . Pour  $\alpha = 1$ ,  $T_1$  satisfait les propriétés suivantes :

- 1-  $T_1(af + bg) = aT_1(f) + bT_1(g)$ , pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $f, g$  dans le domaine de  $T_1$ .
- 2-  $T_1(t^p) = pt^{p-1}$ , pour tout  $p \in \mathbb{R}$ .
- 3-  $T_1(fg) = fT_1(g) + gT_1(f)$
- 4-  $T_1\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_1(f) - fT_1(g)}{g^2}$
- 5-  $T_1(\lambda) = 0$ , pour toutes les fonctions constantes  $f(t) = \lambda$

Maintenant, nous présentons une nouvelle définition, qui est la définition la plus simple, la plus naturelle et la plus efficace de dérivée de l'ordre  $\alpha \in (0, 1]$ . Remarquons que la définition peut être généralisée pour tout  $\alpha$ . Cependant, le cas  $\alpha \in (0, 1]$  est le plus important. Une fois que c'est établi, les autres cas sont simples.

**Définition 1.10** Soit  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , "la dérivée fractionnaire conformable" de  $f$  d'ordre  $\alpha$  est défini par

$$T_\alpha f(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}$$

où en [9] tant que

$$\begin{aligned} T_\alpha f(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(te^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon} \\ T_\alpha f(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} T_\alpha f(t), \end{aligned} \tag{1.23}$$

à condition que les limites existent, notons que si  $f$  est entièrement différentiable en  $t$ , alors

$$T_\alpha f(t) = t^{1-\alpha} f'(t), \quad (1.24)$$

où  $f'(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\epsilon) - f(t)}{\epsilon}$

**Théorème 7** Si la fonction  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\alpha$ -différentiable à  $t_0 > 0, \alpha \in (0, 1]$ , donc  $f$  est continu à  $t_0$

**Preuve** [32]

### 1.6.1 Opérateur différentiel Conformable

**Définition 1.11** [32]

Soit  $\alpha \in [0; 1]$ . Un opérateur différentiel  $D^\alpha$  est conformable si  $T_0$  est l'opérateur identité et  $T_1$  est l'opérateur différentiel classique. Plus précisément  $D^\alpha$  est conformable si et seulement si pour une fonction différentiables  $f = f(t)$ ,

$$T_0 f(t) = f(t), \text{ et } T_1 f(t) = \frac{d}{dt} f(t) = f'(t). \quad (1.25)$$

### 1.6.2 Propriétés de la dérivée fractionnaire conformable

Toutes les définitions (Riemann-Liouville, Caputo) ont tenté de satisfaire les propriétés habituelles de la dérivée entière. La seule propriété héritée par toutes les définitions de dérivé fractionnaire est la propriété de linéarité. Cependant, les remarques suivantes nous donnent les différences entre les définitions de la dérivée fractionnaire.

*Remarque 3 :*

1. La dérivée de Riemann-Liouville ne satisfait pas  $T_\alpha(1) = 0$ , si  $\alpha$  est pas un nombre naturel. ( $T_\alpha(1) = 0$  pour la dérivée de Caputo)

2. Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas la règle du produit connue :

$$T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f) \quad (1.26)$$

3. Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas à la règle du quotient :

$$T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2} \quad (1.27)$$

4. Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas :  $T_\alpha T_\beta f = T_{\alpha+\beta} f$  en général.

5. La définition de Caputo suppose que la fonction  $f$  est différentiable.

Nous devrions remarquer que  $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ . En outre, cette définition coïncide avec les définitions classiques de R-L et de Caputo sur les polynômes.

**Propriété 1.1** [40] Pour  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $f, g$  sont des dérivées fractionnaires conformable,  $f(g)$  est différentiel au point  $g$ ,  $g$  est continu au point  $t$ , alors la règle de la chaîne

$$T_\alpha(f \circ g)(t) = f^{(\alpha)}(g(t))g^\alpha(t). \quad (1.28)$$

Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas à la règle de la chaîne (chain rule)(composition des dérivées).

**Théorème 8** Soit  $\alpha \in ]0; 1]$ , et  $f; g$  sont  $\alpha$ -différentiable à un point  $t$ ;  $T_\alpha$  est l'opérateur différentiel conformable.

Alors

1.  $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$ , pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ .

2.  $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$  pour tout  $p \in \mathbb{R}$

3.  $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$

4.  $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$

5.  $T_\alpha(\lambda) = 0$ , pour toutes les fonctions constante  $f(t) = \lambda$ .

6. Si en plus  $f$  est différentiable, alors  $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}$

**Preuve** [32]

Nous donnons dans ce qui suit la dérivée fractionnaire conforme de certaines fonctions

- 1-  $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$  pour tout  $p \in \mathbb{R}$ .
- 2-  $T_\alpha(1) = 0$ .
- 3-  $T_\alpha(e^{ct}) = ct^{1-\alpha} e^{ct}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .
- 4-  $T_\alpha(\sin bt) = bt^{1-\alpha} \cos bt$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .
- 5-  $T_\alpha(\cos bt) = -bt^{1-\alpha} \sin bt$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .
- 6-  $T_\alpha(\frac{1}{\alpha} t^\alpha) = 1$ .
- 7-  $T_\alpha(\sinh(bt)) = bt^{1-\alpha} \cosh(bt)$ ,  $T_\alpha(\cosh bt) = bt^{1-\alpha} \sinh(bt)$ .
- 8-  $T_\alpha((bt)) = -bt^{1-\alpha} \operatorname{sech}(bx) \tanh(bt)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

**Exemple 3** 1. La dérivée d'une fonction constante conforme est nulle

$$T^\alpha C = 0.$$

2. La dérivée conforme de  $f(t) = (t - a)^p$

Soit  $\alpha$  un entier et  $0 \leq n - 1 < \alpha < n$  avec  $p > n - 1$ ; alors d'après le théorème 5 on a

$$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t).$$

Donc

$$T_\alpha((t - a)^p) = t^{1-\alpha} p(t - a)^{p-1}$$

A titre d'exemple :

$$T_{0.5}((t - a)^{0.5}) = \frac{1}{2} t^{0.5} (t - a)^{-0.5} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{(t - a)}}.$$

---

## Chapitre 2

---

# LE MODÈLE DE FITZHUGH-NAGUMO

---

*"Si la science était un être vivant, les mathématiques seraient le coeur".*

*Pappolinaire Nsabimana(1991)*

### Introduction

Avant d'expliquer et de démontrer un modèle, il est plus qu'important de savoir d'où il vient, comment il a été découvert et pourquoi. Depuis plusieurs siècles, l'homme tente d'expliquer divers phénomènes l'entourant, mais également ceux qui font partie de lui, tel le système respiratoire, cardiaque, cérébral etc. Ces percées, au niveau scientifique, permettent dans plusieurs cas de découvrir des remèdes ainsi que certains soins pour diverses maladies, ce qui fait plus que justifier leur importance. Pour cette raison, nous aborderons dans ce chapitre l'aspect biologique et physiologique neuronal ainsi que la modélisation mathématique de l'activité neuronale. Nous ne rentrerons pas dans les détails, cette partie

se voulant essentiellement didactique.[38][22]

## 2.1 Anatomie et physiologie d'un neurone du point de vue biologique

### 2.1.1 L'anatomie du neurone

Il existe une grande diversité de neurones Figure. 2.1 et sont classés selon leur morphologie qui reflète à la fois l'espèce animale, leur localisation dans le système nerveux et leur fonction. Il a cependant été dégagé une architecture globale, commune à tous les types de neurones chez lesquels on retrouve toujours dendrite(s), axone, synapses et corps cellulaire, appelé également soma Figure. 2.2. Les différentes classes de neurones se distinguent essentiellement par la forme et la taille du soma et le nombre, la longueur et la répartition des dendrites. La description ci-après détaille le rôle de chacun de ces éléments.

#### – Les dendrites

Les dendrites sont des ramifications issues du corps cellulaire et qui permettent les connexions synaptiques afférentes au neurone. Elles assurent ainsi la propagation de l'information entre les différents neurones impliqués dans la communication en transmettant les informations générées au niveau synaptique préférentiellement vers le soma. Morphologiquement, elles se différencient de l'axone par des contours irréguliers (présence de ribosomes, petites protubérances synthétisant des protéines) et un diamètre diminuant au fur et à mesure qu'elles s'éloignent du soma. L'essentiel de l'information transmise d'un neurone à l'autre est reçu par les dendrites.

#### – L'axone

L'axone, généralement unique, est un prolongement long et cylindrique du soma. Son diamètre est inférieur à celui d'une dendrite et, chez l'homme, sa longueur peut être de l'ordre du mètre. Il conduit vers d'autres neurones un signal, le potentiel d'action, qui naît dans son segment initial. L'axone peut être entouré d'une gaine de myéline (substance essentiellement constituée de lipides, isolant et protégeant l'axone) qui accélère la

propagation du signal. On trouve, le long de l'axone, des points où la gaine de myéline s'interrompt ; ces points sont appelés noeuds de Ranvier. C'est au niveau de ces noeuds que le signal électrique se régénère.

#### – Les synapses

Les synapses sont les points de contact entre un neurone et sa cible, un autre neurone, une fibre musculaire, etc... On les retrouve aussi bien sur le soma que sur l'arbre dendritique du neurone postsynaptique. En revanche, concernant le neurone pré-synaptique, elles se situent uniquement au niveau de ses terminaisons axonales. On distingue dans le vivant deux catégories de synapses : les synapses dites chimiques et les synapses électriques. Les premières, rencontrées le plus fréquemment, nécessitent un intermédiaire pour transmettre l'information : le neurotransmetteur. En effet, l'activité électrique arrivant dans la terminaison axonale présynaptique stimule des vésicules synaptiques. Ces vésicules libèrent alors des neurotransmetteurs dans la fente synaptique et des récepteurs commandent l'ouverture de canaux ioniques particuliers induisant un courant post-synaptique dans les dendrites. Ces dernières transmettent ensuite à leur tour l'information au corps cellulaire. Dans le cas d'une synapse électrique, le signal est transmis directement au neurone postsynaptique sans délai de transmission. On estime qu'environ 40% de la surface membranaire de certains types de neurones (comme les cellules de Purkinje) sont couverts de synapses.

#### – Le corps cellulaire et la membrane plasmique

Le corps cellulaire (ou perikaryon) d'un neurone du cortex humain a un diamètre de l'ordre de  $20\mu m$  pour une épaisseur de membrane d'environ  $5nm$ . Les signaux arrivant sur les dendrites sont intégrés au niveau du corps cellulaire qui génère à son tour une réponse se propageant dans l'axone. La membrane plasmique d'une cellule en délimite le contour. Elle est la frontière entre les milieux intra- et extracellulaire et se compose d'une bicouche lipidique traversée par plusieurs types de protéines. Les milieux intra- et extracellulaire possèdent les mêmes espèces ioniques en des concentrations différentes de part et d'autre de la membrane. Le milieu extracellulaire est plus riche en ions sodium  $Na^+$  mais plus pauvre en ions potassium  $K^+$  que le milieu intracellulaire. Il existe d'autres types d'ions, notamment calciques  $Ca^{2+}$ . Les différences de concentration calcique sont souvent propor-

tionnelles aux variations de potentiel du neurone et peuvent être ainsi utilisées comme marqueur de l'activité électrique neuronale. Ce point sera plus clairement exposé dans la section suivante.

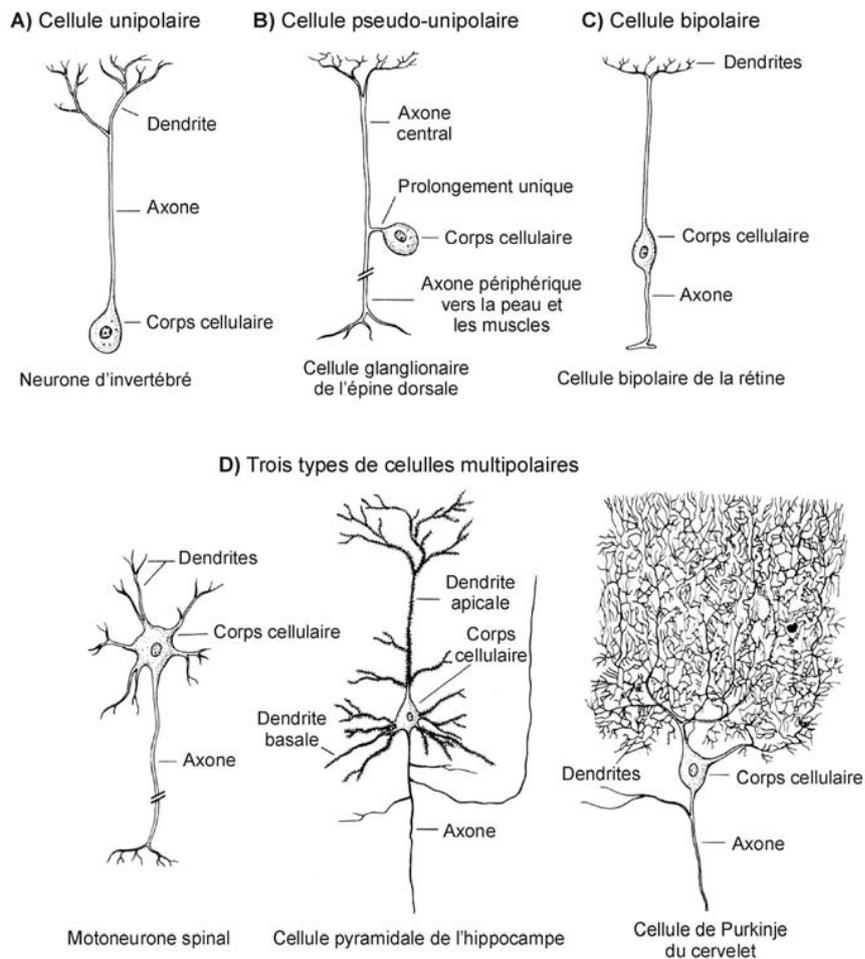


FIGURE 2.1 – Illustration de la diversité morphologique des neurones

### 2.1.2 La physiologie du neurone

Explicitons maintenant l'aspect fonctionnel des éléments décrits précédemment.

#### –Le potentiel de repos

Lorsque celle-ci n'est soumise à aucune excitation, le système constitué de la membrane et des milieux extra- et intracellulaire est à l'équilibre, mais il existe malgré tout

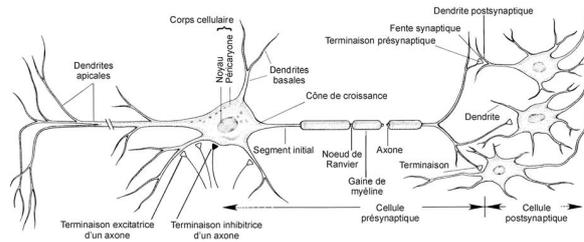


FIGURE 2.2 – Schéma d'un neurone biologique

une différence de potentiel due à l'inégalité de concentration des ions de part et d'autre de la membrane. Cette différence de potentiel prend toujours pour référence le milieu extracellulaire et porte le nom de potentiel de repos. Ce dernier est généralement de l'ordre de  $-65mV$ . En effet, la bicouche lipidique possède deux catégories de protéines transmembranaires. La première permet le transfert spécifique d'une espèce ionique particulière. Ce transfert s'effectue grâce à la pression osmotique et au champ électrique transmembranaire. La seconde catégorie de protéines maintient une différence de concentrations ioniques entre les deux milieux : on parle alors de pompage actif. Celui-ci permet de conserver un gradient de concentration de part et d'autre de la membrane contrebalançant la diffusion osmotique des espèces ioniques au travers des canaux lorsqu'ils s'ouvrent. La membrane au repos est plus perméable aux ions  $K^+$  qu'aux autres ions.

### – Le potentiel d'action

Lorsqu'une stimulation est imposée au neurone, sa membrane devient extrêmement perméable aux ions  $Na^+$ . Les propriétés de perméabilité sélective des protéines transmembranaires donnent naissance à un signal électrique se propageant le long de l'axone : le potentiel d'action. Nous clarifions ce phénomène en cinq étapes.

1. Lors de la stimulation, la membrane commence par se dépolariiser.

2. Si la stimulation persiste, la membrane se dépolarise jusqu'à atteindre le seuil de déclenchement (du potentiel d'action) et les canaux perméables aux ions sodium s'ouvrent rapidement, accentuant encore la dépolarisation. A noter que le passage des ions sodium continue si le seuil a été franchi, même si la stimulation a cessé.
3. Lorsque la tension de membrane a atteint environ 58mV [HK49], les canaux sodiques se ferment spontanément, ce qui a pour effet l'arrêt de l'augmentation de la dépolarisation.
4. Peu après, un second processus entre en action : l'ouverture des canaux potassiques. Ce phénomène provoque la repolarisation de la membrane plasmique. Cette période de décroissance du potentiel d'action est appelée période réfractaire absolue car un second potentiel d'action ne peut apparaître durant cette période du fait de l'inactivation des canaux sodiques.
5. Le délai de fermeture des canaux potassiques provoque ensuite une hyperpolarisation transitoire (ou période réfractaire relative) de la membrane qui retrouvera son potentiel de repos après la fermeture des canaux potassiques.

Après avoir été généré dans le corps cellulaire, ce potentiel d'action va être transmis à d'autres neurones via l'axone sans atténuation. En effet, une régénération du potentiel d'action a lieu à chaque noeud de Ranvier jusqu'aux terminaisons axonales : le potentiel de l'axone au noeud suivant est entraîné au-dessus du seuil de déclenchement.

## 2.2 Les modèles mathématiques dans la littérature

Un modèle mathématique de neurone biologique vise à décrire le neurone grâce à un formalisme mathématique afin de reproduire son activité. Les modèles actuels cherchent à imiter l'activité électrique et, bien que l'influence de processus thermodynamiques ait été démontrée [21], aucun modèle thermodynamique de l'activité neuronale n'est utilisé à ce jour. Selon la fonction du modèle et le type d'activité que l'on cherche à reproduire (activité d'un grand réseau de plusieurs milliers de neurones, d'un petit réseau

de quelques centaines de cellules, d'un seul neurone et de ses éléments constitutifs, etc), plusieurs choix se présentent ; à noter que plus le modèle est complexe, plus les ressources calculatoires nécessaires à la réalisation d'une simulation logicielle sont importantes et plus le temps de calcul s'éloignera du temps réel biologique. La complexification du formalisme entraînera également des problèmes d'ajustement du modèle avec l'augmentation du nombre de paramètres et la non linéarité des équations.

Dans cette partie, nous présentons un état de l'art des modèles mathématiques de neurones biologiques ou modèles impulsionsnels en cherchant à faire ressortir à la fois les applications possibles et le degré d'ajustement des modèles. Ceux-ci sont présentés du modèle le plus élémentaire aux modèles les plus complexes.

### 2.2.1 Les modèles Integrate-and-Fire (IF) et Leaky-Integrate-and-Fire (LIF)

– Le modèle intègre et tire, en anglais Integrate-and-Fire [24], a été introduit au tout début du vingtième siècle par Louis Edouard Lapicque (1866-1952), médecin et physiologiste français, spécialiste du système nerveux. Sa représentation de l'activité électrique du neurone est issue d'un modèle de charge et décharge d'un condensateur à travers une résistance, dont l'équation figure ci-dessous :

$$I(t) = C_m \frac{dV_{MEM}}{dt} \quad (2.1)$$

où  $C_m$  représente la capacité de membrane,  $V_{MEM}$  la tension de membrane et  $I$ , le courant. Ce modèle ne rend pas compte de l'apparition d'un potentiel d'action, s'éloignant en ce sens d'un neurone vivant. Pour rendre compte de l'apparition d'un potentiel d'action, on introduit des distributions de Dirac  $\delta(t)$ , qui sont des modèles des potentiels d'action. Une impulsion est délivrée chaque fois que la valeur du potentiel de membrane est égale à celle d'un seuil  $V_s$  (généralement  $-50mV$ ) et après chaque émission, le potentiel est ramené à sa valeur de repos ( $-65mV$ ). Pour plus de réalisme, il est possible d'ajouter à ce modèle une

période réfractaire ; celle-ci permet de rendre compte du fait, observé expérimentalement, que la fréquence d'apparition des potentiels d'action est limitée même si le neurone est maintenu constamment dans des conditions où il devrait émettre un potentiel d'action.

– Un modèle "intègre et tire avec fuite" ou "Leaky-Integrate-and-Fire" [34] a ensuite été proposé pour ramener progressivement le neurone à son potentiel de repos. L'équation (2.1) devient alors :

$$I(t) - \frac{V_{MEM}}{R_m} = C_m \frac{dV_{MEM}}{dt} \quad (2.2)$$

où  $R_m$  est la résistance membranaire. Ainsi, pour émettre un potentiel d'action, le courant entrant doit dépasser le seuil  $I_s = \frac{V_s}{R_m}$ . L'équation peut encore s'écrire :

$$C_m \frac{dV_{MEM}}{dt} = I(t) - g_{fuite}(V_{MEM} - E_{fuite}) \quad (2.3)$$

Ces deux variantes présentent peu de caractéristiques à ajuster, le seuil  $V_s$  et la fréquence d'oscillation, ce qui revient encore à régler la stimulation,  $g_{fuite}$  et  $E_{fuite}$ . Elles sont donc aujourd'hui utilisées pour simuler de très grands réseaux de neurones comme des structures cérébrales (colonnes corticales cortex visuel) où seule l'activité globale du système importe. De tels modèles peuvent être réglés "manuellement".

### 2.2.2 Les modèles Resonate-and-Fire, IF quadratique et d'Izhikevich

Des extensions du modèle IF, plus réalistes phénoménologiquement, ont été suggérées sur la base de l'équation (2.3).

– La première a été proposée en 1937 par Gaylord Young [15] sous le nom de résonne et tire ou Resonate-and-Fire (RF) introduisant un courant potassique à faible seuil de déclenchement. Il est décrit par le système d'équations (2.5) Soit  $W$  le courant potassique supplémentaire et  $V_{MEM}$  la tension de membrane.

$$C_m \frac{dV_{MEM}(t)}{dt} = I(t) - g_{fuite}(V_{MEM}(t) - E_{fuite}) - W \quad (2.4)$$

$$\tau \frac{dW(t)}{dt} = \left( \frac{V_{MEM}(t) - V_0}{k} - W(t) \right) \quad (2.5)$$

où  $\tau, k$  et  $V_0$  sont des paramètres fixés.  $V_{MEM}$  et  $W$  sont ramenés respectivement au potentiel de repos et à une valeur  $W_r$  si  $V_{MEM}$  dépasse le seuil  $V_s$ . Dans ce modèle,  $\tau, k, w_r$  et  $V_0$  sont des paramètres supplémentaires à ajuster.

La seconde est appelée IF quadratique car elle fait intervenir le carré du potentiel de membrane :

$$C_m \frac{dV_{MEM}(t)}{dt} = I(t) - k_0 V_{MEM}(t)^2. \quad (2.6)$$

Comme pour ses prédécesseurs, ce modèle ramène le potentiel de membrane à une valeur d'équilibre si  $V_{MEM}$  dépasse un certain seuil. Le nombre de paramètres à estimer est le même que pour un modèle IF classique.

– La troisième, introduite par Eugene Izhikevich [13], est une combinaison des deux précédentes ; elle fait à la fois intervenir l'expression quadratique et le courant potassique à faible seuil.

Il est formalisé par les équations suivantes où  $v$  représente une tension,  $u$  un courant et  $a, b, c, d$  sont des constantes :

$$\frac{dv(t)}{dt} = 140 + 0.04v(t)^2 + 5v(t) - u(t) \quad (2.7)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = a(b.v(t) - u(t)) \quad (2.8)$$

Bien que relativement faciles à résoudre numériquement, les équations de ces modèles fournissent des comportements plus réalistes que les modèles IF classiques. Comme ces derniers, les modèles RF, IF quadratique et d'Izhikevich sont également utilisés pour modéliser de grands réseaux de neurones ou des structures cérébrales telles que celles impliquées dans la maladie de Parkinson comme dans [21] pour le modèle d'Izhikevich. Les modèles de G. Young et d'E. Izhikevich ont davantage de paramètres à équilibrer selon le type de neurone

à modéliser. L'utilité de techniques de réglage automatique se fait alors ressentir.

### 2.2.3 Le modèle de Hodgkin-Huxley

En 1963, Hodgkin et Huxley reçoivent le Prix Nobel de médecine pour leurs travaux sur les mécanismes ioniques qui permettent l'initiation et la propagation des potentiels d'action dans l'axone géant du calmar. Pour simplifier, l'axone est un long tube partant de chaque neurone et sa membrane extérieure, sensible aux courants et potentiels électrochimiques, permet la propagation des signaux électriques. En particulier, elle présente une différence de potentiel au repos et on mesure la perturbation de ce potentiel suite à un changement chimique ou électrique. Cette perturbation peut se propager le long de l'axone pour transmettre une information entre neurones. Dans cette section, l'explication des différentes équations de ce modèle sera donnée. Pour la facilité de la lecture de cette thèse, on résume ici la modélisation conduisant aux équations de Hodgkin-Huxley, et qu'on peut trouver par exemple dans [6],[11] et reprise dans beaucoup de travaux (voir par exemple [29]).

Hodgkin et A. Huxley ont considéré le courant sodique  $I_{Na}$  et le courant potassique  $I_K$  comme les deux principaux courants qui circulent le long des axones. L'hypothèse de base du modèle de Hodgkin-Huxley est de considérer la cellule comme un circuit électrique. La membrane est représentée par un condensateur tandis que les flux d'ions sodium et potassium sont modélisés comme des conductances électriques variables en fonction du potentiel de membrane.

Soit  $I_K$  le flux potassique, alors il est donné en utilisant la loi d'Ohm par,

$$I_K = g_K(V)(V - E_K)$$

où  $V$  est le potentiel de membrane,  $E_K$  le potentiel d'équilibre des ions potassique et  $g_K(V)$  est la conductance des canaux à potassium. De même, soit  $I_{Na}$  le flux sodique,

$$I_{Na} = g_{Na}(V)(V - E_{Na})$$

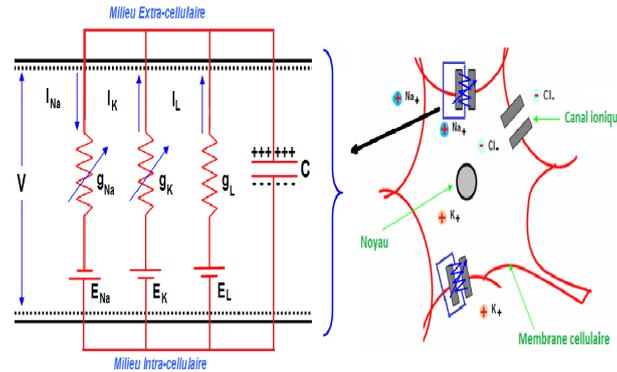


FIGURE 2.3 – La membrane cellulaire est considérée comme un circuit électrique

où  $E_{Na}$  le potentiel d'équilibre des ions sodique et  $g_{Na}$  est la conductance des canaux à sodium.

Hodgkin-Huxley ont supposé que les conductances  $g_{Na}(V)$  et  $g_K(V)$  vont varier selon l'ouverture ou la fermeture de canaux. Ils ont considéré que chaque canal devait être composé de quatre composants indépendants, chacun pouvant être ouvert ou fermé. Pour les canaux à potassium, ces quatre composants sont identiques avec une probabilité d'ouverture  $n$ . La probabilité que les quatre composants soient ouverts est donc  $n^4$ . Ainsi, on écrit  $g_K(V) = n^4(V)\bar{g}_K$ . On a donc,

$$I_K = n^4\bar{g}_K(V)(V - E_K)$$

où  $g_K$  est la conductance maximale du potassium.

Similairement, on peut décrire le courant sodique  $I_{Na}$ . Dans ce cas, il existe un état supplémentaire actif ou inactif, c'est à dire qu'un canal à sodium peut être ouvert et actif, ouvert et inactif, ou fermé. Hodgkin et Huxley ont considéré qu'un canal sodique était constitué de quatre composants, trois composants qui contrôlent l'ouverture et la fermeture et un quatrième contrôle l'activation ou l'inactivation. On note  $m$  la probabilité d'ouverture de chacun des trois premiers composant, et  $h$  la probabilité d'activation du dernier composant. Alors la probabilité qu'un canal sodique soit ouvert et actif est  $m^3h$ .

On a donc,

$$I_{Na} = m^3 h \bar{g}_{Na} (V)(V - E_{Na})$$

où  $\bar{g}_{Na}$  est la conductance maximale du sodium. Maintenant, les variables  $m$ ,  $h$  et  $n$  sont elles même décrites par des équations différentielles que l'on décrit ci-dessous. Pour les canaux à potassium, chaque composant passe de l'état fermé (avec la probabilité  $1 - n$ ) à l'état ouvert (avec la probabilité  $n$ ) suivant le coefficient  $\alpha_n$  et de l'état ouvert à celui fermé suivant le coefficient  $\beta_n$ . Ce sont des coefficients qui dépendent aussi du potentiel de membrane,

$$1 - n \xrightleftharpoons{\beta_n} n.$$

L'équation décrivant l'évolution de  $n$  dans le temps est donnée de la manière suivante,

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(1 - n) - \beta_n n.$$

On pose,

$$n_\infty = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \beta_n}, \tau_n = \frac{1}{\alpha_n + \beta_n}$$

où  $n_\infty$  n'est autre que la valeur  $n$  d'équilibre et  $\tau_n$  est la constante de temps d'approche de cet équilibre. Ils dépendent aussi du voltage. On peut réécrire l'équation différentielle de  $n$  :

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n_\infty - n}{\tau_n}.$$

Comme le cas précédent pour les canaux à potassium, la transition de l'état ouvert (de probabilité  $m$ ) à celui fermé (de probabilité  $1 - m$ ) de chaque composant est donnée par les coefficients  $\alpha_m$  et  $\beta_m$ ,

$$1 - m \xrightleftharpoons{\beta_m} m.$$

Similairement pour  $h$ , la transition de l'état actif (de probabilité  $h$ ) à celui inactif (de probabilité  $1 - h$ ) est donné par les coefficients  $\alpha_h$  et  $\beta_h$ ,

$$1 - h \xrightleftharpoons{\beta_h} h.$$

On a ainsi les évolutions de  $m$  et  $h$  données par,

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(1 - m) - \beta_m m = \frac{m_\infty - m}{\tau_m},$$

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_h(1 - h) - \beta_h h = \frac{h_\infty - h}{\tau_h},$$

Comme précédemment, on a ici les notations,

$$m_\infty = \frac{\alpha_m}{\alpha_m + \beta_m}, \tau_m = \frac{1}{\alpha_m + \beta_m}$$

$$h_\infty = \frac{\alpha_h}{\alpha_h + \beta_h}, \tau_h = \frac{1}{\alpha_h + \beta_h}$$

En utilisant la loi de Kirchhoff, le bilan des charges électriques est donné par,

$$I = C \frac{dV}{dt} + I_{Na} + I_K + I_L,$$

où  $I_{Na}$  est le courant de sodium,  $I_K$  est le courant de potassium et  $I_L$  est le courant de fuite pour désigner l'ensemble des ions qui circulent au travers des canaux ioniques toujours ouverts.

On a donc,

$$-C \frac{dV}{dt} = I_{Na} + I_K + I_L - I,$$

En remplaçant des équations précédentes dans cette expression, on obtient,

$$-C \frac{dV}{dt} = m^3 h \bar{g}_{Na} (V - E_{Na}) + n^4 \bar{g}_K (V - E_K) + \bar{g}_L (V - E_L) - I.$$

Ainsi, le modèle de Hodgkin-Huxley est le suivant,

$$\begin{cases} -C \frac{dV}{dt} = m^3 h \bar{g}_{Na} (V - E_{Na}) + n^4 \bar{g}_K (V - E_K) + \bar{g}_L (V - E_L) - I \\ \frac{dn}{dt} = \alpha_n (1 - n) - \beta_n n = \frac{n_\infty - n}{\tau_n} \\ \frac{dm}{dt} = \alpha_m (1 - m) - \beta_m m = \frac{m_\infty - m}{\tau_m} \\ \frac{dh}{dt} = \alpha_h (1 - h) - \beta_h h = \frac{h_\infty - h}{\tau_h}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Dans ce modèle, les valeurs des paramètres sont déterminées expérimentalement et on retrouve dans la littérature, par exemple [14],

$$C = 1 \mu F / cm^2$$

$$E_{Na} = 120 mV, E_K = -12 mV, E_L = 10, 6 mV$$

En utilisant la méthode de Runge-Kutta classique d'ordre quatre en  $C++$ , on obtient la solution du système (2.9) présentée sur la figure 2.4.

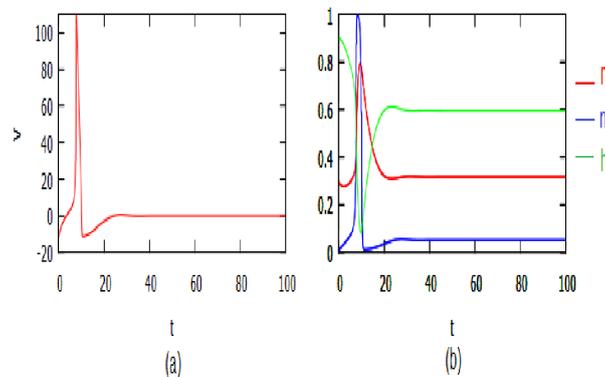


FIGURE 2.4 – La solution du système (2.9).

La figure 2.4 présente La solution du système (2.9) avec  $I = 0$  et les autres paramètres comme ceux au dessus. La figure (a) est l'évolution de  $V$  ; la figure (b) est les évolutions de  $n$  en rouge,  $m$  en bleu et  $h$  en vert. D'après (b), on trouve que le courant à sodium (le bleu) est beaucoup plus rapide que les autres par rapport à la période de

naissance du potentiel d'action  $V$  dans la figure (a).

## 2.2.4 Le modèle de FitzHugh-Nagumo

### Le modèle de FitzHugh-Nagumo

Dans cette partie, on présente le modèle de FitzHugh-Nagumo qu'est une simplification du modèle de Hodgkin-Huxley en dimension quatre présenté précédemment. En particulier, on étudie le passage du modèle de Hodgkin-Huxley au modèle de FitzHugh-Nagumo. [33], [19]

Rappelons que le système de Hodgkin-Huxley est donné par,

$$\begin{cases} -C \frac{dV}{dt} = m^3 h \bar{g}_{Na}(V - E_{Na}) + n^4 \bar{g}_K(V - E_K) + \bar{g}_L(V - E_L) - I \\ \frac{dn}{dt} = \frac{n_\infty(V) - n}{\tau_n(V)} \\ \frac{dm}{dt} = \frac{m_\infty(V) - m}{\tau_m(V)} \\ \frac{dh}{dt} = \frac{h_\infty(V) - h}{\tau_h(V)}. \end{cases} \quad (2.10)$$

En biologie, on sait que l'activation du sodium est très rapide (voir figure 2.4(b) et 2.5(b)).

On peut donc faire l'approximation suivante (voir figure 2.5(d)),

$$m \approx m_\infty(V)$$

Ainsi,  $m$  peut être assimilée à une constante et l'équation  $\frac{dm}{dt}$  n'a plus lieu d'être. Expérimentalement, la somme des deux variables  $h$  et  $n$  est à peu près constante au cours du potentiel d'action,

$$h_\infty(V) + n_\infty(V) = 0.8.$$

On observe qu'il existe deux constantes  $a$  et  $b$  (voir figure 2.5(c)) telles que,

$$h(V) + an(V) = b,$$

Soit  $w$  une nouvelle variable qui est définie comme suit,

$$w(V) = b - h(V) = an(V).$$

On a alors,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{w_\infty(V) - w}{\tau_w(V)}$$

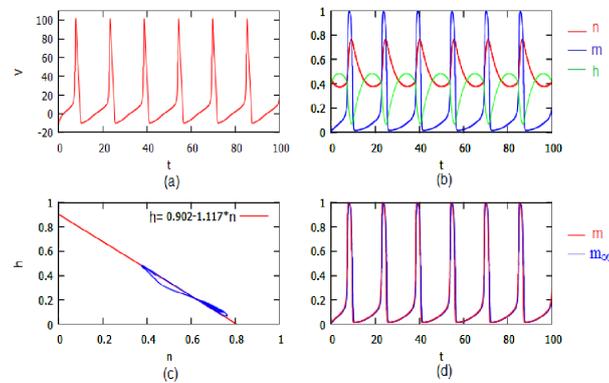


FIGURE 2.5 – La solution du système (2.10).

La figure 2.5 présente La solution du système (2.10) avec  $I = 8$  et les autres paramètres comme ceux précédents. La figure (a) est l'évolution de  $V$ ; la figure (b) est les évolutions de  $n$  en rouge,  $m$  en bleu et  $h$  en vert- on trouve que le courant à sodium (le bleu) est beaucoup plus rapide que les autres par rapport à la période de naissance du potentiel  $V$  dans la figure (a); la figure (c) montre la relation en bleu entre  $n$  et  $h$  dans l'espace  $(n, h)$ - on trouve que cette relation est peut-être faite approcher la droite en rouge  $h = 0.902 - 1.117n$ ; la figure (d) est l'approximation  $m \approx m_\infty(V)$ .

Le système (2.10) se réduit donc au système suivant,

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{C} [m_\infty(V)^3(b-w)\bar{g}_{Na}(E_{Na}-V) + (\frac{w}{a})^4\bar{g}_K(E_K-V) + \bar{g}_L(E_L-V) + I] \\ \frac{dw}{dt} = \frac{w_\infty(V)-w}{\tau_w V} \end{cases} \quad (2.11)$$

Numériquement, on a vu que la  $V$ -nullcline (i.e.,  $\dot{V} = 0$ ) avait la forme d'une fonction cubique et que la  $w$ -nullcline (i.e.,  $\dot{w} = 0$ ) pouvait être approximée par une droite (voir figure 2.6).

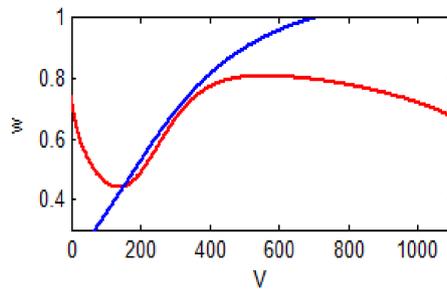


FIGURE 2.6 – Les nullclines du système (2.11) avec  $I = 8$ , la  $V$ -nullcline est la courbe en rouge et la  $w$ -nullcline est celle en bleu.

On obtient ainsi un modèle polynomial de la forme,

$$\begin{cases} \dot{V} = V(V - \alpha)(1 - V) - w + I \\ \dot{w} = \epsilon(V - \gamma w) \end{cases} \quad (2.12)$$

où  $V$  correspond au potentiel de membrane et  $w$  correspond aux flux lents d'ions à travers la membrane. Les paramètres  $\alpha, \epsilon$  et  $\gamma$  sont des constantes avec par exemple  $0 < \alpha < 1$  et  $0 < \epsilon \ll 1$  et le paramètre  $I$  correspond au courant externe appliqué.

Figure 2.7 présente la (a) Simulation numérique du système (2.12) avec  $\alpha = 0.2, \gamma = 0.5, \epsilon = 0.01$  et  $I = 1, \dot{V} = 0$  en rouge et  $\dot{w} = 0$  en vert. Le point d'intersection des nullclines est le point d'équilibre. La courbe bleu est obtenue en traçant la dynamique asymptotique d'une solution du système partant d'une condition initiale. (b) Serie temporelle  $(t, V)$  correspondante.

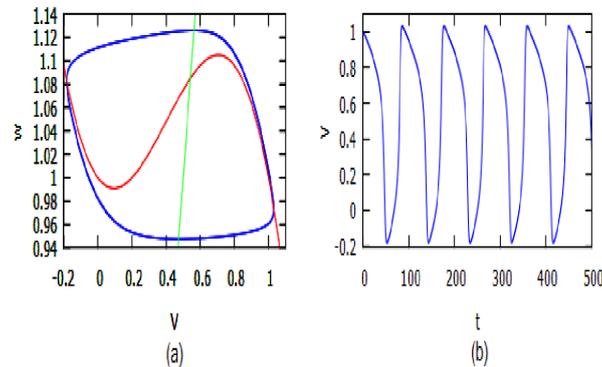


FIGURE 2.7 – (a) Simulation numérique du système (2.12), (b) Serie temporelle  $(t, V)$  correspondante.

### Le circuit de Nagumo

C'est dans les années 1960 qu'un ingénieur électrique japonais nommé Jin-Ichi Nagumo réussit à construire ce diagramme de circuit (voir figure 2.8) en utilisant une diode à effet tunnel comme élément non linéaire. Cette diode a une courbe de tension actuelle semblable à celle de la nullcline cubique utilisé dans les équations de Fitzhugh section précédente. Ainsi, on attribua son nom à ce circuit et cette découverte lui permit de travailler en collaboration avec Fitzhugh, et ensemble ils aidèrent grandement le sujet des courants électriques à travers les cellules. Avant d'être nommées les équations Fitzhugh-Nagumo, elles furent toutefois appelées le "modèle de Bonhoeffer-van der Pol" par Fitzhugh lui-même. La raison derrière ce nom est que l'ingénieur électrique van der Pol construisit, dans les mêmes années que Fitzhugh, le circuit (voir figure 2.8), mais en utilisant des triodes car ils mettent en évidence les oscillations stables. Toutefois, le modèle de Nagumo était plus concluant et s'accordait mieux aux études de Fitzhugh et c'est pourquoi qu'ensemble, ces deux génies purent reprogrammer un ordinateur capable de résoudre plus aisément les problèmes auxquels ils s'intéressaient.[19]

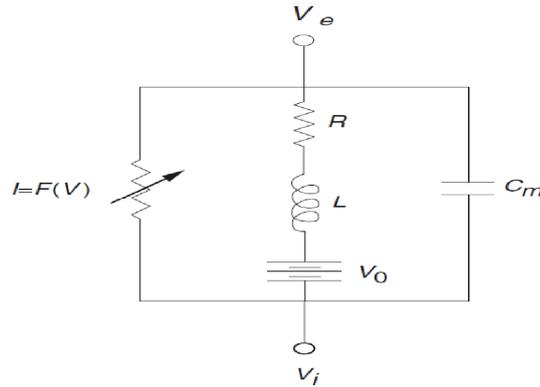


FIGURE 2.8 – Circuit électrique représentant les équations de Fitzhugh-Nagumo.

## 2.3 L'équation réaction-diffusion de Fitzhugh-Nagumo

Un système à réaction-diffusion est un modèle mathématique qui décrit l'évolution des concentrations d'une ou plusieurs substances spatialement distribuées et soumises à deux processus : un processus de réactions chimiques locales, dans lequel les différentes substances se transforment, et un processus de diffusion qui provoque une répartition de ces substances dans l'espace. Cette description implique naturellement que de tels systèmes sont appliqués en chimie. Cependant, ils peuvent aussi décrire des phénomènes dynamiques de nature différente : la biologie, la physique, la géologie ou l'écologie sont des exemples de domaines où de tels systèmes apparaissent. Mathématiquement, les systèmes à réaction-diffusion sont représentés par des équations différentielles partielles.

L'équation de réaction-diffusion la plus simple, ne portant que sur la concentration  $u$  d'une seule substance dans une seule dimension de l'espace est donnée par

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} + f(u)$$

l'une de ces équations de Fitzhugh-Nagumo.

Les équations de FitzHugh-Nagumo sont devenues un modèle important pour les systèmes de réaction-diffusion, qui simulent la propagation des ondes dans des milieux excitables, tels que le tissu cardiaque ou les fibres nerveuses. Le terme propagation est la

dérivée seconde de la variable spatiale  $x$ . Son succès est principalement dû au fait que le modèle est analytique, ce qui permet de déduire de nombreuses propriétés importantes sans recourir à la simulations d'ordinateur.

Dans cette partie, on présente le modèle de FitzHugh-Nagumo, nous nous plaçons sur le segment  $[0, L]$  qui représente l'axone et nous considérons la variation de potentiel  $u(x, t)$  en fonction de  $x \in [0, L]$  et du temps  $t > 0$ . L'état de repos est donné par  $u = 0$ . Le courant  $I$  est le dérivé de premier ordre La fonction  $v$  représente le flux d'ions à travers la membrane(des variations de concentration des ions sodium et potassium(le modèle s'agissait d'une description mathématique de la propagation du potentiel d'action sur une membrane axonale)[37]. Le système s'écrit :

$$\begin{aligned} D_t u &= D_x^2 u + u(1 - u)(u - \lambda) \\ D_t v &= \epsilon(u - \gamma v) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Ce système est difficile à étudier, et donc à ce stade nous définirons  $\epsilon = 0$ . Alors  $v$  sera constant et nous prendrons  $v = 0$ .

L'équation réduite de FitzHugh-Nagumo pour une onde progressive est donc

$$D_t u = D_x^2 u + u(1 - u)(u - \lambda) \tag{2.14}$$

Quand  $\lambda = 0$  l'équation se réduit à L'équation de Zeldovich [36] et Si  $\lambda = -1$  L'équation devient L'équation de Newell-whitehead-seg. [17],[10],[31].

---

## Chapitre 3

---

APPLICATION DE LA MÉTHODE  
D'EXPANSION DE RICCATI POUR LA  
RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE  
FITZHUGH-NAGUMO D'ORDRE  
FRACTIONNAIRE

---

*"Les mathématiques ont des inventions très subtiles et qui peuvent beaucoup servir, tant à contenter les curieux qu'à faciliter tous les arts et à diminuer le travail des hommes".*

*René DESCARTES(1596 -1650)*

## Introduction

De nombreux travaux ont été publiés pour résoudre l'équation différentielle fractionnaire non linéaire, telles que la méthode des sous-équations fractionnaires [20], [5], la première méthode d'intégrale (the first integral method) [28], [7], la méthode d'itération variationnelle [16], [14] et la méthode d'expansion  $G'/G$  [2], [12], [27]. Mais toutes ces méthodes sont basées sur la dérivée fractionnaire au sens de Jumarie.

Dans ce chapitre nous présentons le résultat principal de cette thèse. Nous avons appliqué la méthode d'expansion de Riccati pour donner des solutions exactes des problèmes de Fitzhugh-Nagumo d'ordre fractionnaire, Newell-Whitehead-Segel d'ordre fractionnaire et de Zeldovich d'ordre fractionnaire.

Cette méthode consiste à transformer l'équation différentielle partielle d'ordre fractionnaire en équations différentielles ordinaires d'ordre fractionnaire. On a utilisé cette méthode en tenant compte des contre-exemples donnés par L.Xiaohua et L.Cheng-shi pour prouver que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville au sens de Jumarie avec ses propriétés et la règle de "chain rule" ne sont pas correctes. [40],[23].

### 3.1 les contre-exemples de L.Cheng-Shi

Avant d'aborder ces contre-exemples, nous devons calculer les valeurs exactes de certaines dérivées d'ordre fractionnaire selon la définition de Jumarie.

Nous avons besoin de dérivées d'ordre  $\frac{1}{2}$  pour les trois fonctions suivantes

$f(t) = t$ ,  $f(t) = \sqrt{t}$  et  $f(t) = t^2$ . Selon l'équation de la définition (1.19), prenons  $x = t - y^2$  et notant que  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  on a

$$D_t^{(\frac{1}{2})} f = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^{\sqrt{t}} (f(t - y^2) - f(0)) dy. \quad (3.1)$$

Si nous prenons  $f(t) = t$ ,  $f(t) = \sqrt{t}$  et  $f(t) = t^2$ , on a

$$D_t^{(\frac{1}{2})}t = 2\sqrt{\frac{t}{\Pi}}, \quad (3.2)$$

$$D_t^{(\frac{1}{2})}\sqrt{t} = \sqrt{\frac{\Pi}{2}}, \quad (3.3)$$

$$D_t^{(\frac{1}{2})}t^2 = \frac{8}{3} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\Pi}}, \quad (3.4)$$

### 3.1.1 Le contre-exemple de la formule 1.20

Prenons  $u(t) = v(t) = t^{\frac{1}{2}}$  et  $\alpha = \frac{1}{2}$ . De la formule (3.2) la partie gauche de (1.20) est

$$D_t^{(\frac{1}{2})}(u(t)v(t)) = D_t^{(\frac{1}{2})}t = 2\sqrt{\frac{t}{\Pi}} \quad (3.5)$$

D'autre part, en calculant la partie de droite de la formule de Jumarie (1.20) et en utilisant (3.3), nous avons

$$\begin{aligned} D_t^{(\frac{1}{2})}u(t)v(t) + u(t)D_t^{(\frac{1}{2})}v(t) &= 2\sqrt{t}D_t^{(\frac{1}{2})}(\sqrt{t})^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\Pi}t. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Par les deux expressions ci-dessus, nous obtenons

$$D_t^{(\frac{1}{2})}(u(t)v(t)) \neq D_t^{(\frac{1}{2})}u(t)v(t) + u(t)D_t^{(\frac{1}{2})}v(t) \quad (3.7)$$

Cet exemple montre que la formule de Jumarie (1.20) n'est pas vraie.

### 3.1.2 Le contre-exemple de la formule 1.21

Prenons  $v(t) = t^2$ ,  $u(v) = v^{\frac{1}{2}}$  et  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Premièrement, calculons directement

$$\begin{aligned} D_t^{\frac{1}{2}}[u(v(t))] &= D_t^{\frac{1}{2}}t, \\ &= 2\sqrt{\frac{t}{\Pi}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Deuxièmement, la partie de droite de la formule 1.21 est

$$\begin{aligned}
 u'(v)D_t^\alpha v(t) &= \frac{1}{2\sqrt{v}}D_t^{\frac{1}{2}}(t^2), \\
 &= \frac{1}{2t} \frac{8t^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\Pi}}, \\
 &= \frac{4t^{\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\Pi}}.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Alors on trouve

$$D_t^\alpha [u(v(t))] \neq u'(v)D_t^{\frac{1}{2}}v(t). \tag{3.10}$$

Cela signifie que la formule de Jumarie 1.21 est également incorrect. Par ces deux contre-exemples ci-dessus, ceci montre que les deux formules de calcul fractionnel de base de Jumarie ne sont pas vraies et que tous les résultats obtenus à l'aide des formules de Jumarie sont incorrects.

### 3.1.3 Le contre-exemple de la formule 1.22

Selon le contre-exemple 2, nous savons que cette formule est également incorrecte.

En fait, selon les hypothèses du contre-exemple 2, la partie droite de la formule est

$$\begin{aligned}
 D_t^{\frac{1}{2}}u(v)(v'(t))^{\frac{1}{2}} &= D_t^{\frac{1}{2}}(\sqrt{v})\sqrt{(t^2)'} \\
 &= \sqrt{\frac{\Pi t}{2}}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Deuxièmement, la partie droite de la formule 1.21 est

$$\begin{aligned}
 u'(v)D_t^\alpha v(t) &= \frac{1}{2\sqrt{v}}D_t^{\frac{1}{2}}(t^2) \\
 &= \frac{1}{2t} \frac{8t^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\Pi}} \\
 &= \frac{4t^{\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\Pi}}.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Cela montre que la formule 1.22 est incorrecte, c'est-à-dire

$$D_t^\alpha[u(v(t))] \neq D_t^\alpha u(v)(v'(t))^\alpha. \quad (3.13)$$

### 3.2 les contre-exemples de L.Xiaohua

Dans certaines littératures, les auteurs [41][30] ont réduit les équations différentielles fractionnaires aux équations différentielles ordinaires en utilisant les formules suivantes

$$u(x, t) = U(\xi), \xi = \frac{kx^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} - \frac{kx^\beta}{\Gamma(1 + \beta)}, (0 < \alpha, \beta \leq 1) \quad (3.14)$$

et la règle de chain rule suivante pour les dérivés fractionnaires

$$D_t^\alpha = \sigma_1 \frac{dU}{d\xi} D_x^\alpha \xi, D_t^\beta = \sigma_2 \frac{dU}{d\xi} D_x^\beta \xi \quad (3.15)$$

où  $\sigma_1, \sigma_2$  sont des constantes.

Par la méthode de résolution d'équations différentielles ordinaires, il est possible d'obtenir des solutions d'équations différentielles fractionnaires à ondes progressives. Nous devons signaler ici que la formule (3.15) est incorrecte. Certes, les résultats obtenus avec (3.15) et (3.16) sont peu précis. Dans ce qui suit, donnons un contre-exemple pour montrer que la formule (3.15) n'est pas vraie.

Prenons  $f(g(t)) = g^{\frac{1}{2}} + f(g(t)) = g^{\frac{1}{2}}, g(x) = x^2, \alpha = \frac{1}{2}$

Le côté gauche de la première formule de l'expression (3.15) noté

$$\begin{aligned}
 D_t^{\frac{1}{2}} f(t) &= D_t^{\frac{1}{2}} [t + t^{\frac{1}{2}}] \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int_0^t (t - \tau)^{\frac{1}{2}} [\tau + \tau^{\frac{1}{2}}] d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int_0^t (t - \tau)^{\frac{1}{2}} \tau d\tau \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int_0^t (t - \tau)^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}} d\tau \\
 &= 2\sqrt{\frac{t}{\Pi}} + \frac{\sqrt{\Pi}}{2}.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Mais

$$\frac{df}{dg} = \frac{1}{2}g^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}g^{-\frac{3}{4}} \tag{3.17}$$

et

$$\begin{aligned}
 D_{2t}^{\frac{1}{2}} g(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int_0^t (t - \tau)^{\frac{1}{2}} \tau^2 d\tau \\
 &= \frac{8}{3} t^{\frac{3}{2}} \sqrt{\Pi},
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Nous savons que le côté droit de la première formule à l'expression (3.15) est égal à

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{dg} D_t^{\frac{1}{2}} f(t) &= \left[ \frac{1}{2}g^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}g^{-\frac{3}{4}} \right] \frac{8}{3} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\Pi}} \\
 &= \frac{4}{3} \sqrt{\frac{t}{\Pi}} + \frac{4}{3\Pi} \frac{\sqrt{\Pi}}{2}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

En comparant (3.16) à (3.19), nous trouvons que le  $\sigma$  de la formule (3.15) n'existe pas. C'est-à-dire que nous ne pouvons pas donner une constante  $\sigma$  qui vérifie

$$D_t^{\frac{1}{2}} = \sigma \frac{df}{dg} D_t^{\frac{1}{2}} g(t). \tag{3.20}$$

Il est évident que la formule (3.15) est correcte pour les fonctions composées contenant un terme, telle que

$$f(g(x)) = g^{\frac{1}{2}}, g(x) = x^2$$

### 3.3 La méthode d'expansion de Riccati

Dans cette partie, on considère l'équation différentielle partielle d'ordre fractionnaire générale non linéaire suivante du type

$$P(u, T_\alpha u(x), T_\alpha u(t), T_{2\alpha} u(x), T_{2\alpha} u(t), \dots) = 0 \quad (3.21)$$

Où  $T_\alpha u(x), T_\alpha u(t)$  sont des dérivés fractionnaires conformables de  $u = u(x, t)$ , tel que  $T_\alpha u(x) = \frac{D^\alpha u(x)}{Dx^\alpha}$ ,  $u$  est une fonction inconnue et  $P$  est un polynôme.

**- première étape**

En utilisant la transformation.

$$u(x, t) = u(\xi), \xi = x + ct. \quad (3.22)$$

Où  $c$  est une constante à déterminer ultérieurement.

En substituant l'équation (3.22) dans l'équation (3.21) on obtient

$$\frac{D^\alpha}{Dt^\alpha} = c^\alpha \frac{D^\alpha}{D\xi^\alpha},$$

$$\frac{D^{2\alpha}}{Dt^{2\alpha}} = c^{2\alpha} \frac{D^{2\alpha}}{D\xi^{2\alpha}}.$$

$$\frac{D^\alpha}{Dx^\alpha} = \frac{D^\alpha}{D\xi^\alpha},$$

$$\frac{D^{2\alpha}}{Dx^{2\alpha}} = \frac{D^{2\alpha}}{D\xi^{2\alpha}}$$

Donc on a transformé l'équation (3.21) en l'équation différentielle ordinaire d'ordre fractionnaire non linéaire de  $u$  de même ordre et on trouve :

$$P(u, T_\alpha u(\xi), c^\alpha T_\alpha u(\xi), T_{2\alpha} u(\xi), c^{2\alpha} T_{2\alpha} u(\xi), \dots) = 0 \quad (3.23)$$

- Deuxième étape

Supposons que  $u(\xi)$  s'écrit comme une série de puissances finies de  $F(\xi)$  comme suit

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^n a_i F^i(\xi), a_n \neq 0 \quad (3.24)$$

Où  $a_i (i = 0, 1, \dots, n)$  sont des constantes indéterminées,  $n$  est un entier positif : sa valeur est donnée par la différence entre l'ordre le plus élevé du terme non linéaire et l'ordre le plus élevé de la dérivée. de 3.23, et  $F(\xi)$  satisfait l'équation fractionnelle de Riccati suivante

$$T_\alpha F(\xi) = m + F^2(\xi) (m < 0, 0 < \alpha \leq 1) \quad (3.25)$$

où  $m$  est un paramètre, moyennant la définition et les proposition de dérivée conformable, [32] on obtient les solutions de l'équation (3.25).

**Théorème 9** pour  $m < 0, 0 < \alpha \leq 1$  la solution de (3.25) est

$$F(\xi) = -\sqrt{-m} \tanh\left(\frac{2-\alpha}{\alpha} \sqrt{-m} \xi^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right) \quad (3.26)$$

et

$$F(\xi) = -\sqrt{-m} \coth\left(\frac{2-\alpha}{\alpha} \sqrt{-m} \xi^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right) \quad (3.27)$$

**Preuve** on sait qua par la définition, on a

$$T_\alpha(\tanh(bx)) = bx^{1-\alpha} \operatorname{sech}^2(bx).$$

1- Le côté gauche de l'équation(3.25)

$$\begin{aligned} T_\alpha F(x) &= -\sqrt{-m} \frac{2-\alpha}{\alpha} \sqrt{-m} (x^{\frac{T_\alpha}{2-\alpha}}) \operatorname{sech}^2\left(\frac{2-\alpha}{\alpha} \sqrt{-m} x^{\frac{T_\alpha}{2-\alpha}}\right) \frac{\alpha}{2-\alpha} x^{\frac{T_\alpha}{2-\alpha}-\alpha}. \\ &= \operatorname{sech}^2\left(\frac{2-\alpha}{\alpha} \sqrt{-m} x^{\frac{T_\alpha}{2-\alpha}}\right). \end{aligned}$$

2- Le côté droite de l'expression (3.25)

$$\begin{aligned} m + F^2 &= m + (-m) \tanh^2\left(\frac{2-\alpha}{\alpha} \sqrt{-m} x^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right) \\ &= \operatorname{sech}^2\left(\frac{2-\alpha}{\alpha} \sqrt{-m} x^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Les deux dernière équation donnent la solution de (3.25) est (3.26), de la même maniere on en va démontre l'équation(3.27).

### - Troisième étape

En remplaçant (3.24) dans (3.23) puis en utilisant (3.25) et en collectant les termes de même ordre de  $F(\xi)$ , puis en mettant chaque coefficient de  $F(\xi)$  égale à zéro. Pour  $a_0, a_2, a_3, \dots, a_n$  etc.

- **Quatrième étape** En résolvant le système d'équations de la troisième étape, et en utilisant les solutions d'équation (3.25), on trouve plusieurs solutions exactes de l'équation (3.21).

## 3.4 Application de la méthode d'expansion de Riccati

### 3.4.1 Résolution de l'équation de Fitzhugh-Nagumo d'ordre fractionnaire

On considère l'équation fractionnaire non linéaire de Fitzhugh-Nagumo de la forme

$$cD_t^\alpha u(x, t) - D_x^{2\alpha} u(x, t) = u(u - \lambda)(1 - u) \quad (3.28)$$

où  $\lambda$  est une constante arbitraire.

En utilisant la transformation (3.22) où  $c$  est une constante arbitraire non nulle, et en substituant (3.22) dans 3.28 on obtient une équation différentielle ordinaire d'ordre frac-

tionnaire(OFDE).

$$D_{\xi}^{\alpha}u(\xi) - D_{\xi}^{2\alpha}u(\xi) = u(u - \lambda)(1 - u) = -u^3 + (1 + \lambda)u^2 - \lambda u \quad (3.29)$$

On suppose que  $u(\xi)$  peut être exprimé sous la forme suivante

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^n a_i F^i(\xi), a_n \neq 0. \quad (3.30)$$

En équilibrant l'ordre entre le terme dérivé d'ordre plus élevé et le terme non linéaire dans 3.29, on obtient pour  $n = 1$  l'équation 3.31.

$$u(\xi) = a_0 + a_1 F^1(\xi). \quad (3.31)$$

où  $F(\xi)$  sont les solutions de la fraction d'équation de Riccati 3.25.

En substituant 3.31 dans 3.29 et en collectant tous les termes de même puissance on obtient

$$\begin{aligned} \frac{D^{\alpha}}{D\xi^{\alpha}}(a_0 + a_1 F^1(\xi)) &= a_1 \frac{D^{\alpha}F(\xi)}{D\xi^{\alpha}} \\ &= a_1 m + F^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D^{2\alpha}}{D\xi^{2\alpha}}(a_0 + a_1 F^1(\xi)) &= 2a_1 F(\xi) \frac{D^{\alpha}F(\xi)}{D\xi^{\alpha}} \\ &= 2a_1 F(\xi)(m + F^2) \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation 3.29 on trouve

$$\begin{aligned} ca_1(m + F^2) - 2a_1 F(\xi)(m + F^2) &= -u^3 + (1 + \lambda)u^2 - \lambda u \\ &= -((a_0 + a_1 F))^3 + (1 + \lambda)((a_0 + a_1 F))^2 - \lambda((a_0 + a_1 F)) \end{aligned}$$

après des calculs simple on trouve

$$\begin{cases} cma_1 + a_0^3 - (1 + \lambda)a_0^2 + \lambda a_0 = 0 \\ 3a_0^2 - 2m - 2(1 + \lambda)a_0 + \lambda = 0 \\ c + 3a_0a_1 - (1 + \lambda)a_1 = 0 \\ a_1^3 - 2a_1 = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

La résolution de ce système donne  $a_0 = \frac{(1+\lambda) \pm \sqrt{\lambda^2 - \lambda + 1 - 6m\lambda}}{3}$ ,  $a_1 = \pm\sqrt{2}$  and  $c = -3a_0a_1 + (1 + \lambda)a_1$ . Nous supposons que  $m < 0$ , and  $0 < \alpha \leq 1$ , on obtient l'équation (solitary wave solutions) suivante

$$u_1(x, t) = \left( \frac{(1 + \lambda) \pm \sqrt{\lambda^2 - \lambda + 1 - 6m}}{3} \right) \mp \sqrt{-2m} \left[ \tanh\left( \frac{2 - \alpha}{\alpha} \sqrt{-m}(x + ct)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \right) \right] \quad (3.33)$$

$$u_2(x, t) = \left( \frac{(1 + \lambda) \pm \sqrt{\lambda^2 - \lambda + 1 - 6m}}{3} \right) \mp \sqrt{-2m} \left[ \coth\left( \frac{2 - \alpha}{\alpha} \sqrt{-m}(x + ct)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \right) \right] \quad (3.34)$$

### 3.4.2 Solution de l'équation de Newell-Whitehead-Segel d'ordre fractionnaire

Si  $\lambda = -1$  l'équation de Fitzhugh-Nagumo d'ordre fractionnaire devient l'équation de Newell-Whitehead-Segel d'ordre fractionnaire suivante

$$D_t^\alpha u(x, t) - D_x^{2\alpha} u(x, t) = u - u^3. \quad (3.35)$$

Après avoir fait certaines manipulations algébriques, avec  $\lambda = -1$  dans les resultats de l'équation de Fitzhugh-Nagumo on trouve  $a_0 = \pm\frac{1}{2}$ ,  $a_1 = \pm\sqrt{2}$ ,  $m = -\frac{1}{8}$  and  $c = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$ , donc les solutions de l'équation(3.35) sont

$$u_3(x, t) = \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left[ \tanh\left( \frac{2 - \alpha}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{8}} \left( x + \left( \frac{-3\sqrt{2}}{2} \right) t \right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \right) \right] \quad (3.36)$$

$$u_4(x, t) = \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left[ \coth \left( \frac{2-\alpha}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{8}} \left( x + \left( \frac{-3\sqrt{2}}{2} \right) t \right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \right) \right] \quad (3.37)$$

$$u_5(x, t) = \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \left[ \tanh \left( \frac{2-\alpha}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{8}} \left( x + \left( \frac{-3\sqrt{2}}{2} \right) t \right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \right) \right] \quad (3.38)$$

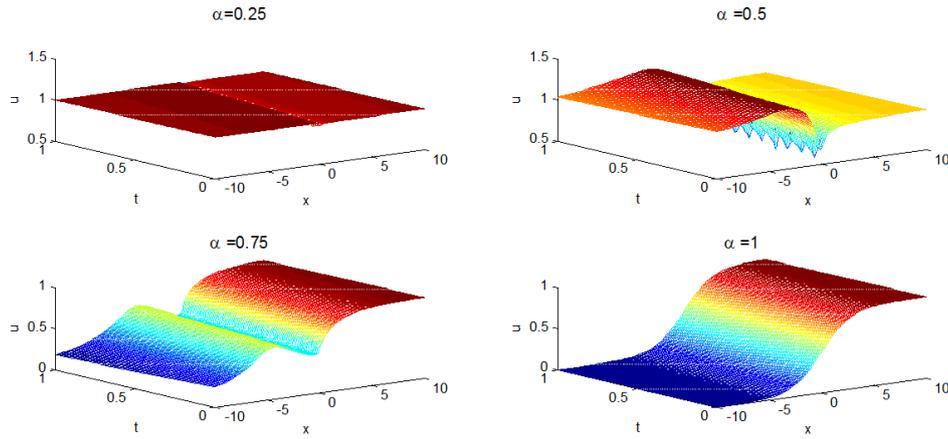


FIGURE 3.1 – La solution  $u_3(x, t)$  si  $\lambda = -1, a_0 = 1/2, a_1 = \sqrt{2}$

$$u_6(x, t) = \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \left[ \coth \left( \frac{2-\alpha}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{8}} \left( x + \left( \frac{-3\sqrt{2}}{2} \right) t \right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \right) \right] \quad (3.39)$$

$$u_7(x, t) = \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left[ \tanh \left( \frac{2-\alpha}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{8}} \left( x + \left( \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) t \right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \right) \right] \quad (3.40)$$

$$u_8(x, t) = \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left[ \coth \left( \frac{2-\alpha}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{8}} \left( x + \left( \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) t \right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \right) \right] \quad (3.41)$$

$$u_9(x, t) = \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \left[ \tanh \left( \frac{2-\alpha}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{8}} \left( x + \left( \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) t \right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \right) \right] \quad (3.42)$$

$$u_{10}(x, t) = \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left[ \coth \left( \frac{2-\alpha}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{8}} \left( x + \left( \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) t \right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \right) \right] \quad (3.43)$$

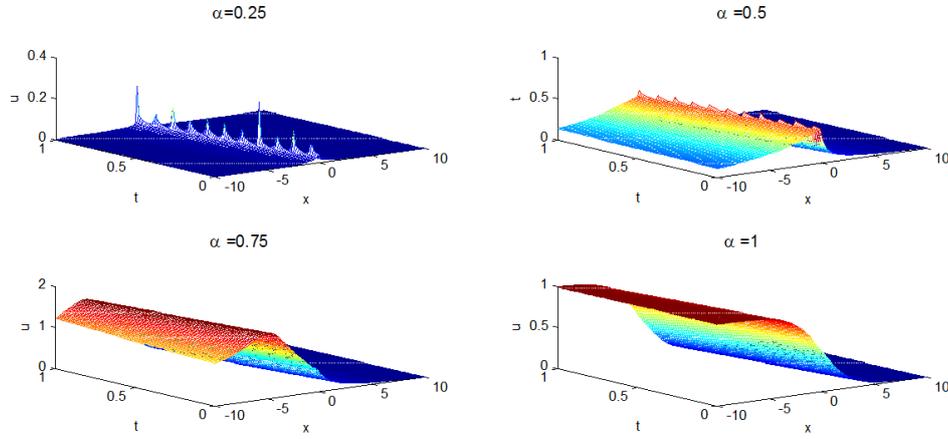


FIGURE 3.2 – La solution  $u_9(x, t)$  si  $\lambda = -1, a_0 = 1/2, a_1 = -\sqrt{2}$

### 3.4.3 Solution de l'équation de Zeldoviych d'ordre fractionnaire

Si  $\lambda = 0$  l'équation de Fitzhugh-Nagumo d'ordre fractionnaire devient l'équation de Newell-Whitehead-Segel d'ordre fractionnaire suivante

$$D_t^\alpha u(x, t) - D_x^{2\alpha} u(x, t) = u^2 - u^3. \quad (3.44)$$

Si  $\lambda = 0$  par 0 le systeme algebrique de l'equation de Fitzhugh-Naghumo devient

$$\begin{cases} cma_1 + a_0^3 - a_0^2 = 0 \\ 3a_0^2 - 2m - 3a_0^2 = 0 \\ c + 3a_0a_1 - a_1 = 0 \\ a_1^3 - 2a_1 = 0 \end{cases} \quad (3.45)$$

on résolve (3.45), alors les solutions sont données par :  $a_0 = \pm \frac{1}{3}$ ,

$a_1 = \pm \sqrt{2}, m = \frac{-2a_0 + 3a_0^2}{2}$  and  $c = a_1 - a_0a_1$ . donc les solutions de l'équation(3.44) sont :

$$u_{11}(x, t) = \left(\frac{1}{3}\right) \pm \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{6}} \left[ \tanh\left(\frac{2-\alpha}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{6}} (x + ct)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right) \right] \quad (3.46)$$

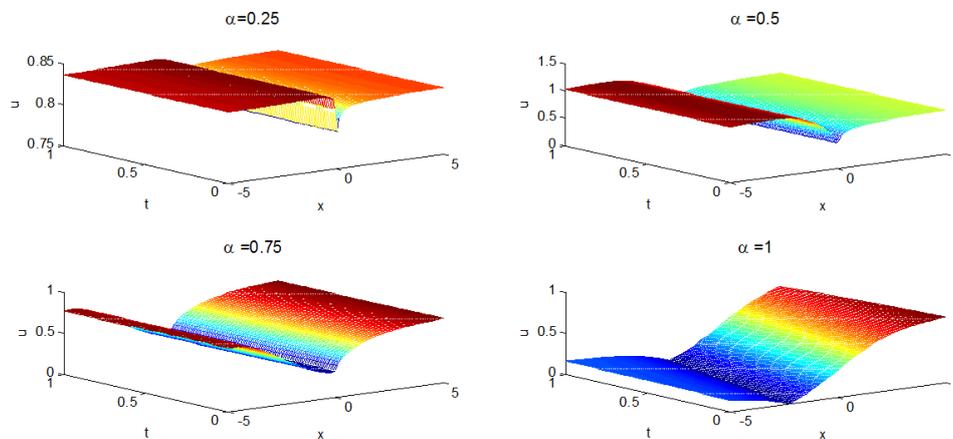


FIGURE 3.3 – la solution  $u_{11}(x, t)$  si  $\lambda = 0, a_0 = 1/3, a_1 = \sqrt{2}$

$$u_{12}(x, t) = \left(\frac{1}{3}\right) \pm \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{6}} \left[ \coth\left(\frac{2-\alpha}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{6}} (x+ct)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right) \right] \quad (3.47)$$

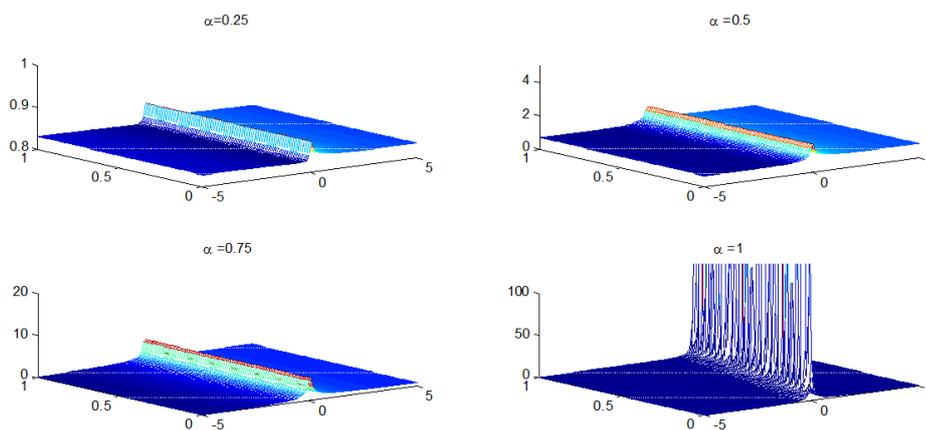


FIGURE 3.4 – la solution  $u_{12}(x, t)$  si  $\lambda = 0, a_0 = 1/3, a_1 = \sqrt{2}$

Dans les figures (3.1), (3.2), (3.3) les solutions sont donné en fonction de  $\tanh$ , on remarque que : - si  $\alpha \rightarrow 1$  les ondes deviennent lisse.

Contrairement à la solution donnée en fonction de  $\coth$  figure (3.3)

- si  $\alpha \rightarrow 1$  les ondes présente de multiples oscillations.

---

# Conclusion générale et perspectives

---

*"La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques."*

*Blaise PASCAL(1623 -1662)*

Le travail présenté dans cette thèse s'est porté sur l'étude de l'existence des solutions exactes des équations non linéaires d'ordre fractionnaire de Fitzhugh-Nagumo, Newell-Whitehead-Segel et de Zeldovich, moyennant la méthode d'expansion fractionnaire de Riccati,

Dans cette étude, nous avons décrit les différents modèles mathématiques qui traduisent des phénomènes en biologie, en médecine et qui sont présentée dans le premier et deuxième chapitre. Notre étude bibliographique a été dirigée. Après l'étude bibliographique nécessaire pour la résolution de l'équation en question.

Pour prouver que les méthodes qui utilisent les dérivée fractionnaires au sens de Jumarie avec la règle de chaine "chain rule" pour résoudre ce type d'équations ne sont pas fiables, L.Cheng-shi et L.Xiaohua-liu dans leurs travaux, ont donné deux contres exemples, ce dernier à proposé la méthode d'expansion fractionnaire de Riccati, dans le but d'obtenir des solutions exactes à des équations genre réaction-diffusion d'ordre fractionnaire mais cette fois ci la méthode est basée sur la dérivée fractionnaire conformable,.

Néanmoins les résultats de ce modeste travail constituent les bases d'un travail à poursuivre et à améliorer pour une étude beaucoup plus approfondie qui pourra faire l'objet de travaux de recherche.

Ainsi, les perspectives futures sont dans un premier temps :

- Résolution de l'équation si  $m \geq 0$  où on prévoit des solutions complexes de l'équation de Fitzhugh-Nagumo.
- Application de la méthode pour résoudre ce modèle si  $\epsilon \neq 0$ .
- Résolution d'autres équations de type réaction-diffusion d'ordre fractionnaire si le terme de diffusion est d'ordre fractionnaire.
- Application en biologie de l'état de nerf pour les valeurs de alpha où  $0 < \alpha < 1$ .

---

# Bibliographie

---

- [1] A. Benanaya ; Existence de solutions pour des problèmes associés a des équations différentielles fractionnaires, *Université de Djilali Bounaama Khemis Miliana*, **(2016)**.
- [2] A. Bekir,Ö. Gü nerb ; Exact solutions of nonlinear fractional differential equations by G'/G-expansion method *Chin. Phys. B*,vol. 22 ,(2013) , pp. 1-6.
- [3] A.L. Hodgkin, A.F. Huxley, B. Katz ; Ionic currents underlying activity in the giant axon of the squid, *Arch. Sci. physiol*, vol.3 **(1049)**, pp. 129-150.
- [4] A.L. Hodgkin, A.F. Huxley ; A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nevre, *J. Physiol*, vol.117 **(1952)**, pp. 500-544.
- [5] A. Neirameh ; New Extension for Sub Equation Method and its Application to the Time-fractional Burgers Equation by using of Fractional Derivative, *Tendências em Matematica Aplicada e Computacional* **(2017)**, pp. 225-232.
- [6] B.G. Ermentrout, D. H. Terman ; An active pulse transmission line simulating nerve axon, *Springer*,**(2009)**.
- [7] B. Lu, The first integral method for some time fractional differential equations *Math. Anal. Appl.* ,vol. 395 ,(2012) , pp. 684-693.

- [8] B.N. Lundstrom, M.H. Higgs, W.J. Spain and A.L. Fairhall; Fractional differentiation by neocortical pyramidal neurons, *Nature Neurosci*, (2008), pp. 1-22.
- [9] B. Ross; The Development of Fractional Calculus *Historia Math 1695-1900* (1977), pp. 75-89.
- [10] D. Kumar, R.P. Sharma; Numerical approximation of Newell-Whitehead-Segel equation of fractional order, *Nonlinear Engineering* (2016), pp. 81-86.
- [11] E. M. Izhikevich; Dynamical Systems in Neuroscience, *I The Geometry of Excitability and Bursting*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, (2005).
- [12] E. M. E. ZAYED, Abdul-Ghani AL-NOWEHY; The Riccati equation method combined with the generalized extended (G'/G)-expansion method for solving the nonlinear KPP equation. *Journal of Mathematical Research with Applications*, vol.35 (2017), pp. 577-590.
- [13] E. M. Izhikevich; Simple model of spiking neurons, *IEEE Transactions on Neural Networks*, (2003), pp. 1569–1572.
- [14] Guo-cheng Wu; Fractional Variational Iteration Method for Fractional Nonlinear Differential Equations *Interdisciplinary Institute for Nonlinear Science*. (2002)
- [15] G. Young; Note on excitation theories, *N. Psychometrika*, (1937), pp. 103–106.
- [16] H. Jafari and H. Tajadodi; He's Variational Iteration Method for Solving Fractional Riccati Differential Equation *International Journal of Differential Equations*. Vol.2010 , pp. 62-69.
- [17] H.C. Rosu, O. Cornejo-Perez; Super symmetric pairing of kinks for polynomial nonlinearities, *Phys. Rev. E*, vol.129 (2005), pp. 1-13.
- [18] I. Podlubny; Fractional Differential Equations, *Academic Press, San Diego*, (1999).
- [19] J. S. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa; transmission line simulating nerve axon, *An active pulse . Proc. IRE .50*, (1962) , pp. 2061-2070.

- [20] J. F. Alzaidy ; Fractional Sub-Equation Method and its Applications to the Space-Time Fractional Differential Equations in Mathematical Physics, *British Journal of Mathematics and Computer Science* 3, vol.2,(2013), pp. 153-163.
- [21] J. Modolo, E. Mosekildeb and A. Beuter ; New insights offered by a computational model of deep brain stimulation, *Journal of Physiology–Paris*, (Janvier–Mai 2007), pp. 56–63.
- [22] L. Buhry ; Estimation de paramètres de modèles de neurones biologiques sur une plate-forme de SNN (Spiking Neural Network) implantés "in silico", *École doctorale de sciences de physique et de l'ingénieur* (2010).
- [23] Liu, Cheng-shi ; Counterexamples on Jumarie's Two Basic Fractional Calculus Formulae. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol.22 (2015) , pp. 92-94.
- [24] L.E. Lapique ; Recherches quantitatives sur l'excitation électrique des nerfs traitée comme une polarisation.
- [25] M. Caputo ; Fractional Sub-Equation Method and its Applications to the Space–Time Fractional Differential Equations in Mathematical Physics, *Linear models of dissipation whose  $Q$  is almost frequency independent, Part II, Geophys. J. R. Astr.*, vol.13,(1967), pp. 529-539.
- [26] M. Caputo and F. Mainardi ; Fractional Sub-Equation Method and its Applications to the Space–Time Fractional Differential Equations in Mathematical Physics, *Linear models of dissipation in an elastic solids, Riv. Nuovo Cimento (Ser. II)*, vol.1, (1971), pp. 161-198.
- [27] Metin Bayrak, Exact solutions of space-time fractional reaction-diffusion equations by  $G'/G$ -expansion method *International Journal of Mathematics and Computing Techniques*, vol. 2 ,(2018) , pp. 13-19.
- [28] M. Ilie, J. Biazar and Z. Ayati ; The first integral method for solving some conformable fractional differential equations, *Optical and Quantum Electronics*, (February 2018), pp.1-11.

- [29] N. Corson; Dynamique d'un modèle neuronal synchronisation et complexité (THÈSE), *Université du Havre*, (2009).
- [30] O. Guner and A. Bekir; The Exp-Function Method for Solving Nonlinear Space-Time Fractional Differential Equations in Mathematical Physics, *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, (2017), pp. 277-282.
- [31] Rayleigh-Benard; Rayleigh-Benard Convection, *UC San Diego, Department of Physics*, Archived from the original on (22 January 2009).
- [32] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababhehb; A new definition of fractional derivative *Journal of Computational and Applied Mathematics* 264 , (2014) , pp. 65-70.
- [33] R. Fitzhugh; Impulse and physiological states in models of nerve membrane, *Biophys. J.*,vol.1,(1961), pp. 445-466.
- [34] R. B. Stein; Some models of neuronal variability, *Biophysical Journal*,(1967), pp. 37-68.
- [35] R. L. Magin; Fractional calculus in bioengineering, *Crit. Rev. Biomed. Eng.* 32,(2004), pp. 1-104.
- [36] S. Injrou; A Study about Finding Exact Solutions for Zeldovich Equation with Time-Dependent Coefficients by Using the Tanh Function Method, *Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series*, Vol.40,(2018), pp. 23-32.
- [37] S.P. Hastings, J.B. Mcleod; Classical Methods in Ordinary Differential Equations, *American Mathematical Society*, vol.129, (2010), pp. 17-27.
- [38] V.L. Em PHAN; Analyse asymptotique de réseaux complexes de systèmes de réaction-diffusion (THÈSE), *Université du Havre* (2015).
- [39] V. Lyakhov, A. Vol et B. Raikhlin-Eisenkraft; Adaptive activity of neural structures a thermodynamic approach. *Medical hypotheses*,(2002), pp. 289-296.

- 
- [40] Xiaohua Liu, The Traveling Wave Solutions of Space-Time Fractional Differential Equation Using Fractional Riccati Expansion Method *Journal of Applied Mathematics and Physics*, vol.6,(2018) , pp. 1957-1967.
- [41] Z.J. Jia, M.S. Hu, Q.L. Chen and S.M. Jai ; Local Fractional Differential Equations by the Exp-Function Method.,*International Journal of Numerical Methods for Heat Fluid Flow*,(2014), pp. 1845-1849.

# *Résolution de l'équation de Fitzhugh-Nagumo d'ordre fractionnaire moyennant la méthode d'expansion de Riccati*

Présenté par : Guechi Meriem

ملخص :

في هذا العمل، قدمنا طريقة ريكاتي للتوسيع الكسري لحل معادلة فيتزيغ-نغيمو ذات المشتقات الجزئية غير الخطية ذات رتبة كسرية زمنية حيث المشتق كسري. وكحالة خاصة قمنا بتطبيقها على معادلات نويل-وايتد-سايجل و زالدوفيتش غير الخطية ذات رتبة كسرية زمنية حيث المشتق كسري باستناد منتظم. من أجل توضيح دقة وصحة هذه الطريقة تم إعطاء بعض الحلول العددية.

الكلمات المفتاحية : معادلة فيتزيغ-نغيمو ذات المشتقات الجزئية غير الخطية ذات رتبة كسرية زمنية حيث المشتق كسري، المشتق كسري باستناد منتظم، طريقة ريكاتي للتوسيع الكسري.

---

## Résumé :

Dans ce travail, la méthode d'expansion fractionnaire de Riccati est proposée pour résoudre l'équation de Fitzhugh-Nagumo non linéaire dans le cadre des dérivées fractionnaire conformables, nous l'appliquons aussi aux l'équations fractionnaires non linéaires de Newell-Whitehead-Segel et Zeldovich qui sont un cas particulier de l'équation de Fitzhugh-Nagumo. Afin d'illustrer la précision et la validité de cette méthode, quelques solutions numériques sont données.

**Mote clé :** L'équation réaction-diffusion Fitzhugh-Nagumo d'ordre fractionnaire, la dérivées fractionnaire conformables, la méthode d'expansion fractionnaire de Riccati.

---

## Abstract:

In this work, a fractional Ricatti expansion method is proposed to solve a nonlinear time fractional Fitzhugh-Nagumo equation in the frame of conformable derivatives, we also apply it to the nonlinear fractional Newell-Whitehead-Segel and Zeldovich equations which are an particular case of fractional Fitzhugh-Nagumo equation. In order to illustrate the accuracy and validity of this method, some numerical solution are given.

**Key words:** Conformable fractional derivative, fractional Ricatti expansion method, nonlinear fractional Fitzhugh-Nagumo equation.