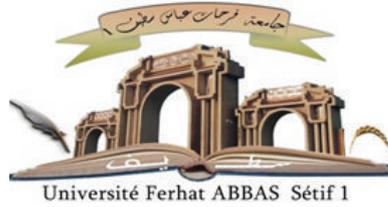


الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



UNIVERSITÉ FERHAT ABBAS - SÉTIF 1

FACULTÉ DES SCIENCES

THÈSE

Présentée au Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option: Mathématiques Appliquées

Par

HEDLI RIADH

THÈME

Quelques Méthodes de Résolution des Équations
aux Dérivées Partielles Non Linéaires

Soutenue le 19/09/2020

Devant le jury composé de :

SELMANI MOHAMED	Pr.	Université Ferhat Abbas, Sétif 1	Président
KADEM ABDELOUAHAB	Pr.	Université Ferhat Abbas, Sétif 1	Directeur de thèse
GUEDJIBA SAID	Pr.	Université M. Benboulaïd, Batna 2	Examineur
ELLAGGOUNE FATEH	Pr.	Université 8 Mai 1945, Guelma	Examineur

Remerciements

En premier lieu, je remercie Allah, tout puissant, de m'avoir donné la force pour achever ce travail, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

J'aimerais tout d'abord remercier grandement mon directeur de thèse le professeur **Abdelouahab Kadem** pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail et pour ses conseils avisés. Sa rigueur scientifique a permis d'arriver aux objectifs fixés au départ de notre thèse.

J'adresse mes vifs remerciements à Mr. **Mohamed Selmani**, professeur à l'université Ferhat Abbas Sétif 1, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance. J'exprime aussi tous mes remerciements à Pr. **Said Guedjiba** et Pr. **Fateh Ellaggoune** pour avoir accepté de faire partie du jury, et pour leur lecture attentive de ma thèse.

Un merci spécial à Mr. **Mehmet Ali Akinlar** professeur associé à l'université technique de Yildiz, Turquie, pour m'avoir permis d'acquérir des données dans son bureau, et pour son disponibilité et toute l'aide qu'il m'a apportée.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance à mes proches, en particulier à ma famille qui m'a porté leur confiance au cours de mes études. Leur soutien continu, m'a appris la persévérance et le sens de l'effort.

Enfin, j'aimerais profiter de l'occasion pour remercier ma femme pour m'avoir permis de réaliser mes études dans les meilleures conditions possibles et faire confiance durant toutes ces années.

إهداء

إلى من لا يمكن للكلمات أن توفي حقهما
إلى من لا يمكن للأرقام أن تحصي فضائلهما
إلى الوالدين الكريمين رحمة الله عليهما
اللهم ارحم وجوها بشوشة فقدناها
و صدورا رحبة ضاقت بنا الدنيا بعدهم
اللهم أنزل على قبر أبي و قبر أمي
الضياء و النور و الفسحة و السرور
و أدخلهما الجنة من غير حساب و لا سابقة عذاب
و جميع موتانا و موتى المسلمين

Abstract

In this study, five methods for finding traveling wave solutions are presented and applied to a variety of nonlinear evolution equations. The solution techniques are: the $\exp(-\varphi(\xi))$ expansion method, the $Tanh - coth$ method, the generalized Riccati projective equation method, the extended hyperbolic function method and a simplified version of the Hirota bilinear method. The first four methods are used to find different shapes of the traveling wave solutions of several nonlinear evolution equations. The simplified version of the Hirota bilinear method is used to explicitly construct one, two and three soliton solutions of completely integrable PDEs. The simplified version has the advantage over the original version of the Hirota bilinear method in that the bilinear forms of the PDE are no longer necessary. Exact solutions of PDEs can be constructed systematically by solving a system of equations on a computer support, using any symbolic manipulation program. According to the expansion $\exp(-\varphi(\xi))$ method, the explicit form of soliton type solutions, dark solitary wave solutions, dark periodic cusp solutions and rational solutions of a general class of the fifth order Korteweg-de Vries equation (fKdV) are found.

Keywords :

- Fifth-order Korteweg-de Vries equation
- $\exp(-\varphi(\xi))$ -expansion method
- Nonlinear evolution equation
- Traveling wave solution
- Soliton solution

Résumé

Dans cette étude, on présente cinq méthodes pour la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDPs) non linéaires, ensuite on les applique à une variété d'équations d'évolution non linéaires. Les techniques de solution sont: la méthode d'expansion $\exp(-\varphi(\xi))$, la méthode $Tanh - coth$, la méthode des équations de Riccati projectives généralisées, la méthode de la fonction hyperbolique étendue et une version simplifiée de la méthode bilinéaire de Hirota. Les quatre premières méthodes sont utilisées pour trouver des formes différentes de solutions d'ondes progressives de plusieurs équations d'évolution non linéaires. La version simplifiée de la méthode bilinéaire de Hirota, quant à elle est utilisée pour construire explicitement des solutions à une, deux et trois solitons d'EDPs complètement intégrables. La version simplifiée présente l'avantage par rapport à la version originale de la méthode bilinéaire de Hirota en ce sens que les formes bilinéaires d'EDPs ne sont plus nécessaires. Les solutions exactes d'EDP non linéaire peuvent être construites systématiquement en résolvant un système d'équations sur un support informatique, en utilisant n'importe quel programme de manipulation symbolique. Moyennant la méthode d'expansion $\exp(-\varphi(\xi))$, la forme explicite des solutions de type solitons, des solutions d'ondes solitaires sombres, des solutions cuspidales périodiques sombres et des solutions rationnelles d'une classe générale de l'équation de Korteweg-de Vries du 5^{ème} ordre (fKdV) sont obtenues.

Mots-clés :

- Equation de Korteweg-de Vries du 5^{ème} ordre
- Méthode d'expansion $\exp(-\varphi(\xi))$
- Equation d'évolution non linéaire
- Solution d'onde progressive
- Solution de soliton

Table des Matières

Liste des figures	viii
Introduction générale	1
1 Principes de base de la théorie des ondes solitaires	6
1.1 Introduction	7
1.2 Définitions	10
1.2.1 Onde progressive	10
1.2.2 Dispersion et dissipation	11
1.2.3 Types de solutions d'ondes progressives	13
1.3 Lois de conservation	20
1.3.1 Détermination des lois de conservation	20
1.4 La famille des équations KdV	21
1.4.1 La famille des équations KdV du 3 ^{ème} ordre	21
1.4.2 L'équation K(n,n)	24
1.4.3 La famille des équations KdV des ordres supérieurs	25
1.5 Conclusion	28
2 Quelques méthodes pour résoudre l'équation fKdV	29
2.1 Introduction	30
2.2 Analyse des méthodes	31
2.2.1 La méthode Tanh-coth	31
2.2.2 La méthode des équations de Riccati projectives généralisées	33
2.2.3 La méthode de la fonction hyperbolique étendue	35
2.2.4 Version simplifiée de la méthode bilinéaire de Hirota	36

TABLE DES MATIÈRES

2.3	Équation KdV du 5 ^{ème} ordre	38
2.3.1	Utilisation de la méthode Tanh-coth	38
2.3.2	Utilisation de la méthode des équations de Riccati projec- tives généralisées	43
2.3.3	Utilisation de la méthode de la fonction hyperbolique étendue	48
2.3.4	Utilisation de la version simplifiée de la méthode de Hirota	52
2.4	Lois de conservation pour la classe générale d'équation fKdV . . .	55
2.5	Conclusion	59
3	La méthode d'expansion $\exp(-\varphi(\xi))$	60
3.1	Introduction	61
3.2	Description de la méthode	61
3.3	Applications de la méthode	64
3.3.1	L'équation mKdV	64
3.3.2	L'équation de Benney-Luke	67
3.3.3	L'équation Kadomtsev-Petviashvili	71
3.3.4	Les équations de Broer-Kaup de dimension (2+1)	76
3.3.5	L'équation mKdV-ZK de dimension (3+1)	82
3.4	Conclusion	84
4	Calcul symbolique de la classe générale de l'équation fKdV par la méthode d'expansion $\exp(-\varphi(\xi))$	85
4.1	Introduction	86
4.2	Ondes progressives pour l'équation fKdV	86
4.2.1	La première condition $b = \frac{10c}{a} - a$	89
4.2.2	La deuxième condition $b \neq \frac{10c}{a} - a$	94
4.3	Illustration graphique des solutions	94
4.4	Conclusion	95
	Conclusion générale et perspectives	96
	Bibliographie	98

Liste des figures

1.1	Propagation d'onde longue de faible amplitude à la surface d'un canal d'eau peu profond	7
1.2	Une solution de soliton $u(x, t) = \operatorname{sech}^2(x - t)$	14
1.3	Une solution périodique $u(x, t) = \cos(x - t)$	15
1.4	Une solution de kink $u(x, t) = 1 - \tanh(x - t)$	16
1.5	Une solution de peakon $u(x, t) = \exp(- x - t)$	17
1.6	Un cuspon $u(x, t) = \exp\left(- x - t ^{\frac{1}{6}}\right)$	18
1.7	Un compacton $u(x, t) = \cos^{\frac{1}{2}}(x - t)$	19
2.1	Graphes d'une solution d'onde solitaire sombre de u_1 pour $a = 10$, $b = 20$, $c = 30$, $\mu = 1$	40
2.2	Graphes d'une solution de type soliton de u_1 pour $a = 10$, $b = 20$, $c = 30$, $\varepsilon = -1$, $r = -1$, $R = 1$, $\xi_0 = 1$	45
2.3	Graphes d'une solution d'onde solitaire sombre de u_3 pour $a = 10$, $b = 20$, $c = 30$, $\varepsilon = -1$, $r = -1$, $R = 1$, $\xi_0 = 1$	45
2.4	Graphes d'une solution de type cuspidé périodique sombre de u_6 pour $a = 10$, $b = 20$, $c = 30$, $\varepsilon = -1$, $r = 1$, $R = 1$, $\xi_0 = 1$	47
2.5	Graphes d'une solution d'onde solitaire sombre de u_2 pour $a = 10$, $b = 20$, $c = 30$, $A = 2$, $a_0 = 4$, $a_2 = -6$, $\omega = -\frac{1120}{9}$, $k = 1$	49
2.6	Graphes d'une solution de type soliton de $Re u_3$ pour $a = 10$, $b = 20$, $c = 30$, $A = 2$, $a_0 = 4$, $a_2 = -6$, $\omega = -\frac{1120}{9}$, $k = 1$	50
2.7	Graphes d'une solution de type soliton singulier de $Im u_3$ pour $a = 10$, $b = 20$, $c = 30$, $A = 2$, $a_0 = 4$, $a_2 = -6$, $\omega = -\frac{1120}{9}$, $k = 1$	51

LISTE DES FIGURES

2.8 Graphes d'une solution d'onde solitaire de u_6 pour $a = 10, b = 25,$ $c = 20, B = -4, a_0 = -4, a_2 = 48, \omega = -176, k = 1, \alpha = \beta = 1$.	51
2.9 Une solution de 1-soliton	53
2.10 Une solution de 2-soliton	54
2.11 Une solution de 3-soliton	55
3.1 Graphes d'une solution de type kink de u_1 pour $\lambda = 3, \mu = 1,$ $C_1 = 1, \delta = 2$	65
3.2 Graphes d'une solution de type kink singulier de u_3 pour $\lambda = 3,$ $\mu = 1, C_1 = 1, \delta = 2$	66
3.3 Graphes d'une solution périodique de u_5 pour $\lambda = 1, \mu = 1, C_1 = 1,$ $\delta = 2$	67
3.4 Graphes d'une solution de type kink de u_1 pour $\alpha = 6, \beta = 3, \lambda =$ $8, \mu = 1.5, A_0 = 1, k = 0.5$	69
3.5 Graphes d'une solution périodique de u_5 pour $\alpha = 7, \beta = 1, \lambda =$ $-1, \mu = 1, A_0 = 0, k = 2$	69
3.6 Graphes d'une solution de type kink singulier de u_{10} pour $\alpha =$ $5, \beta = 2, \lambda = 1, \mu = 0, A_0 = 3, k = 0$	70
3.7 Graphes d'une solution de type soliton sombre de u_1 pour $\lambda =$ $2, \mu = 0.5, \delta^2 = 1, k = 1, y = 0$	73
3.8 Graphes d'une solution de type cuspidale périodique de u_3 pour $\lambda =$ $1, \mu = 2, \delta^2 = 1, k = 1, y = 0$	73
3.9 Graphes d'une solution d'onde solitaire de u_9 pour $\lambda = 2, \mu =$ $0.5, \delta^2 = 1, k = 1, y = 0$	75
3.10 Graphes d'une solution de type kink de H_1 pour $\lambda = 5, \mu =$ $1.25, \alpha_0 = 0, E = 1, y = 0$	77
3.11 Graphes d'une solution de type soliton de G_1 pour $\lambda = 5, \mu =$ $1.25, \alpha_0 = 0, E = 1, y = 0$	78
3.12 Graphes d'une solution de type kink singulier de H_2 pour $\lambda =$ $5, \mu = 1.25, \alpha_0 = 0, E = 1, y = 0$	79
3.13 Graphes d'une solution d'onde solitaire sombre de G_2 pour $\lambda =$ $5, \mu = 1.25, \alpha_0 = 0, E = 1, y = 0$	80

LISTE DES FIGURES

3.14	Graphes d'une solution périodique de H_3 pour $\lambda = 1, \mu = 1, \alpha_0 = 0, E = 1, y = 0$	80
3.15	Graphes d'une solution de type cuspidale périodique sombre de G_3 pour $\lambda = 1, \mu = 1, \alpha_0 = 0, E = 1, y = 0$	81
4.1	Graphes d'une solution de type soliton en forme de cloche de u_1 pour $a = 10, b = 20, c = 30, \lambda = 2, \mu = 0.5, k_1 = 1$	89
4.2	Graphes d'une solution d'onde solitaire sombre de u_5 pour $a = 10, b = 20, c = 30, \lambda = 2, \mu = 0, k_1 = 1$	90
4.3	Graphes d'une solution rationnelle de u_6 pour $a = 30, b = 30, c = 180, \lambda = 2, \mu = 1, k_1 = 1$	91
4.4	Graphes d'une solution de type soliton en forme de cloche de u_8 pour $a = 30, b = 30, c = 180, \lambda = 2, \mu = 0.5, k_1 = 1$	92
4.5	Graphes d'une solution de type cuspidale périodique sombre de u_{12} pour $a = 5, b = 5, c = 5, \lambda = 2, \mu = 2, k_1 = 1$	93

Liste des abréviations

EENL	Equation d'Evolution Non Linéaire
EDP	Equation aux Dérivées Partielles
EDO	Equation Différentielle Ordinaire
KdV	Korteweg-de Vries
mKdV	Korteweg-de Vries modifiée
gKdV	Korteweg-de Vries généralisée
fKdV	Korteweg-de Vries du 5 ^{ème} ordre
sKdV	Korteweg-de Vries du 7 ^{ème} ordre
nKdV	Korteweg-de Vries du 9 ^{ème} ordre
mKdV-ZK	Korteweg-de Vries modifiée-Zakharov-Kuznetsov
BL	Benney-Luke
KP	Kadomtsev-Petviashvili
BK	Broer-Kaup
SK	Sawada-Kotera
nSK	Sawada-Kotera du 9 ^{ème} ordre
SKPD	Sawada-Kotera-Parker-Dye
CDG	Caudrey-Dodd-Gibbon
KK	Kaup-Kuperschmidt
KKPD	Kaup-Kuperschmidt-Parker-Dye
CH	Camassa-Holm
DP	Degasperis-Procesi

Introduction générale

Les équations d'évolution non linéaires (EENLs) sont des équations aux dérivées partielles (EDPs) non linéaires du premier ou du second ordre par rapport au temps. De telles équations ont fait l'objet d'études intensives au cours des dernières décennies, l'étude analytique de ces EENLs est pertinente car la connaissance de leurs solutions exactes facilite la vérification des solveurs numériques et aide à l'analyse de stabilité des solutions, la bonne compréhension des solutions et des phénomènes qu'elles décrivent. L'étude des solutions d'ondes progressives pour ces équations joue un rôle important dans l'étude d'une grande variété des phénomènes physiques non linéaires, où le phénomène des ondes non linéaires apparaît dans divers domaines scientifiques et techniques, comme l'optique non linéaire, la mécanique des fluides, la physique des plasmas, la physique des solides, la cinématique chimique, la géochimie et la biologie. Il s'agit notamment des phénomènes de dispersion des ondes non linéaires, de dissipation, de diffusion, de réflexion, de diffraction et de réfraction.

Dans la littérature, les chercheurs utilisent habituellement des méthodes distinctes pour analyser les EENLs. Les méthodes vont du raisonnable au difficile et exigent un travail énorme. Il n'existe pas une méthode unifiée qui peut être utilisée pour tous les types d'équations d'évolution non linéaires.

De nouvelles solutions exactes peuvent aider à trouver de nouveaux phénomènes en utilisant une variété de méthodes puissantes, telles que la méthode bilinéaire de Hirota [Hirota, 2004; Wazwaz, 2009], la méthode de l'équilibre homogène [Wang *et al.*, 1996; Zayed et Alurfi, 2014; Zhang et Wang, 2016], la méthode de diffusion inverse [Ablowitz et Clarkson, 1991; Vakhnenko *et al.*, 2003], la méthode

de la fonction Exp [Salas, 2008; Wu et He, 2008], la méthode *Tanh* [Malfliet et Hereman, 1996; Parkes et Duffy, 1996], la méthode *Tanh* étendu [Fan, 2000], la méthode *Tanh-coth* [Wazwaz, 2006c, 2009], la méthode des équations de Riccati Projectives [Salas *et al.*, 2010; Yomba, 2005; Zayed et Alurrfi, 2015], la méthode d'expansion ($\frac{G'}{G}$) [Wang *et al.*, 2008; Zhang *et al.*, 2010], la méthode *Sine-cosine* [Wazwaz, 2004, 2009], la première méthode intégrale [Abbasbandy et Shirzadi, 2010; Bekir et Ünsal, 2012], la méthode de l'équation d'essai [Gurefe *et al.*, 2011; Liu, 2006], la méthode de l'équation d'essai étendu [Gepreel *et al.*, 2016], la méthode d'expansion $exp(-\varphi(\xi))$ [Alam et Tunç, 2016; Hafez *et al.*, 2015; Hossain *et al.*, 2016; Rayhanul Islam, 2015; Roshid et Rahman, 2014; Seadawy *et al.*, 2017; Zhao et Li, 2008], et bien d'autres.

Avec le développement rapide de la science non linéaire, les scientifiques et les chercheurs sont intéressés aux techniques analytiques asymptotiques pour les problèmes non linéaires. Bien qu'il soit aujourd'hui aisé de trouver des solutions pour les systèmes linéaires en utilisant un support informatique, il est encore difficile de résoudre des problèmes non linéaires numériquement ou analytiquement. Cela est probablement dû au fait que les différentes méthodes de simulation numérique s'appliquent aux techniques d'itérations pour trouver leurs solutions numériques aux problèmes non linéaires, et que globalement toutes les méthodes itératives sont sensibles aux solutions initiales. Il semble donc difficile d'obtenir des résultats cohérents en cas de forte non-linéarité. D'autres équations d'évolution non linéaires en physique sont complètement intégrées, mais cet aspect unique a l'inconvénient de provoquer une perturbation instable de l'équation, dans le sens qu'il ne permet pas le raffinement de la modélisation physique.

Lorsque la variable dépendante u dans l'EDP correspond à une grandeur physique (comme la hauteur de surface d'une onde d'eau, l'amplitude d'une onde électromagnétique, etc.), il est important d'étudier les propriétés de propagation ou d'agrégation de u . Cela motive l'étude des méthodes permettant de résoudre analytiquement des équations d'évolution par des méthodes symboliques. L'objectif est de trouver des solutions exactes d'ondes progressives. Si ces solutions ne changent pas de forme pendant la propagation, elles sont appelées les ondes solitaires. Ces dernières qui conservent leur forme en cas de collision sont appelées

solitons [Zabusky et Kruskal, 1965]. Les ondes solitaires et les solitons apparaissent en raison d'un équilibre critique entre dispersion et non-linéarité.

L'histoire de la première observation des ondes solitaires mérite d'être racontée. En 1834, l'écossais [Russell, 1844] observait un bateau tiré le long d'un canal. Une vague se forma au milieu du bateau, puis, lorsque celui-ci fut brusquement mis à l'arrêt, cette vague le dépassa et poursuivit sa course, sans que sa forme ne s'affaisse. L'ingénieur naval la suivit à pied puis à cheval, sur plusieurs kilomètres, avant que l'onde ne s'étirole. Russell confirma son observation au travers de plusieurs expériences, il cherchait surtout à établir une forme efficace pour la coque d'un bateau. Airy, Stokes, Boussinesq et Rayleigh ont fait d'autres recherches sur les ondes solitaires pour tenter de comprendre le mécanisme derrière ce phénomène remarquable [Ablowitz et Clarkson, 1991].

Il fallut attendre 1895 et les travaux du [Korteweg et de Vries, 1895], qui ont déduit une équation d'évolution non linéaire (bien qu'introduite par Boussinesq dès 1877) régissant de longues ondes de gravité de surface unidimensionnelles (de faible amplitude), propageant en eau peu profondes:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right) \quad (1)$$

où $\sigma = \frac{1}{3} h^3 - \frac{Th}{\rho g}$, η est l'élévation de la surface de l'onde au-dessus du niveau d'équilibre h , α est une petite constante arbitraire liée au mouvement uniforme du liquide, g est la constante gravitationnelle, T est la tension superficielle, et ρ est la densité. Les variables indépendantes τ et ξ sont des versions à l'échelle des coordonnées temporelles et spatiales. L'éq. (1) (appelée équation de Korteweg-de Vries (KdV)) peut être mise sous une forme unidimensionnelle par le changement des variables

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{h\sigma}} \tau, \quad x = -\sigma^{-\frac{1}{2}} \xi, \quad u = \frac{1}{2} \eta + \frac{1}{3} \alpha \quad (2)$$

Après un peu d'algèbre, on obtient

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (3)$$

où $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ et $u_{xxx} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$.

En 1960, alors qu'ils étudiaient les ondes hydrodynamiques sans collision, [Gardner et Morikawa, 1960] redécouvrent l'équation KdV. Étonnamment, l'équation KdV a commencé à apparaître dans un certain nombre d'autres contextes physiques tels que l'étude des ondes internes stratifiées, les ondes ioniques-acoustiques en physique des plasmas, la dynamique des réseaux, et ainsi de suite. Depuis la fin des années soixantes, l'étude des propriétés des solitons et la recherche d'équations solitoniques et de méthodes pour les résoudre sont un domaine de recherche actif et passionnant.

L'objectif de ce travail est procédé comme suit:

- Présentation des méthodes de résolution de l'équation de Korteweg-de Vries du 5^{ème} ordre (fKdV).
- L'application de la méthode d'expansion $exp(-\varphi(\xi))$ pour résoudre diverses équations d'évolution non linéaires.
- Utiliser la méthode d'expansion $exp(-\varphi(\xi))$ pour trouver des solutions précises et explicites.

Cette thèse est constituée d'une introduction générale qui présente l'importance du thème et les objectifs de la recherche, de quatre chapitres principaux, et enfin une conclusion générale.

- Dans le premier chapitre, nous présentons brièvement les principes fondamentaux de la théorie des ondes solitaires et la famille des équations KdV. Nous introduisant dans ce chapitre le modèle considéré dans notre travail, il s'agit de l'équation fKdV.
- Dans le deuxième chapitre, quelques méthodes pour résoudre l'équation fKdV sont présentées, où nous abordons la méthode *Tanh-coth*, la méthode des équations de Riccati projectives généralisées, la méthode de la fonction hyperbolique étendue et la version simplifiée de la méthode bilinéaire de Hirota. Leurs efficacités sont prouvées pour résoudre l'équation fKdV.
- Dans le troisième chapitre, la méthode d'expansion $exp(-\varphi(\xi))$ est présentée et appliquée pour trouver des solutions d'ondes progressives des EDPs

non linéaires. Ces EDPs comprennent l'équation de Korteweg-de Vries modifiée (mKdV), l'équation de Benney-Luke (BL), l'équation de Kadomtsev-Petviashvili (KP), l'équation de Broer-Kaup (BK) du couple de dimension (2+1) et l'équation KdV modifiée-Zakharov-Kuznetsov (mKdV-ZK) de dimension (3+1), pour lesquelles des solutions d'ondes progressives ont été élaborées.

- Dans le quatrième chapitre, on applique la méthode présentée dans le chapitre précédent à une classe générale de l'équation fKdV [Hedli et Kadem, 2020]. Les fameuses équations Lax, Sawada-Kotera (SK), Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG), Kaup-Kuperschmidt (KK) et Ito, sont toutes de cette classe. Dans la deuxième section de ce chapitre, la méthode d'expansion $\exp(-\varphi(\xi))$ est utilisée pour trouver des nouvelles solutions exactes de cette classe. Comme prévu, certaines contraintes pour les paramètres, et dans la classe générale doivent être satisfaites afin d'obtenir des solutions d'ondes progressives.

Chapitre 1

Principes de base de la théorie des ondes solitaires

Sommaire

1.1	Introduction	7
1.2	Définitions	10
1.2.1	Onde progressive	10
1.2.2	Dispersion et dissipation	11
1.2.3	Types de solutions d'ondes progressives	13
1.3	Lois de conservation	20
1.3.1	Détermination des lois de conservation	20
1.4	La famille des équations KdV	21
1.4.1	La famille des équations KdV du 3 ^{ème} ordre	21
1.4.2	L'équation K(n,n)	24
1.4.3	La famille des équations KdV des ordres supérieurs	25
1.5	Conclusion	28

1.1 Introduction

En 1834, [Russell, 1844] fut le premier à observer les ondes solitaires. Il a observé une grande émergence d'eau déplaçant lentement sur le canal d'Edimbourg-Glasgow sans changement de forme. Le renflement d'eau, qu'il observait et appelait "grande onde de translation". L'onde s'est déplacée le long du canal d'eau pendant une longue période de temps tout en conservant sa forme. Cette seule onde bosselée de renflement d'eau s'appelle maintenant onde solitaire ou soliton. Les solitons localisés, des ondes très stables qui conservent leur identité (forme et vitesse).



Figure 1.1: Propagation d'onde longue de faible amplitude à la surface d'un canal d'eau peu profond

La découverte remarquable a motivé Russell à mener des expériences de laboratoire physique pour mettre l'accent sur son observation et d'étudier ces ondes solitaires. Il a établi la relation

$$c^2 = g(h + a) \quad (1.1)$$

qui détermine la vitesse c de l'onde solitaire, où a est l'amplitude maximale au-dessus de la surface de l'eau, h est la profondeur finie et g est l'accélération de la gravité. Les ondes solitaires sont donc appelées les ondes de gravité.

En 1895, [Korteweg et de Vries, 1895] ont dérivé analytiquement une EDP non linéaire, maintenant bien connue sous le nom d'équation KdV. Cette équation décrit la propagation de longues ondes d'amplitude faible mais finie en milieu dispersif. L'équation KdV est un modèle générique pour l'étude des ondes longues faiblement non linéaires, intégrant la non-linéarité et la dispersion des ordres principaux.

L'équation KdV dans sa forme la plus simple est donnée par

$$u_t + auu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.2}$$

Le terme u_t décrit l'évolution temporelle de l'onde propageant dans une direction. De plus, cette équation intègre deux effets concurrents: la non-linéarité représentée par uu_x qui explique l'accentuation de l'onde et la dispersion linéaire représentée par u_{xxx} qui décrit la propagation de l'onde. La non-linéarité de uu_x tend à localiser l'onde alors que la dispersion propage l'onde.

La stabilité des solitons résulte de l'équilibre délicat entre ces deux effets de non-linéarité et de dispersion. Cette équation donne des solutions de soliton qui caractérisent les ondes solitaires qui diminuent de façon monotone à l'infini.

Les solutions d'ondes solitaires sont supposées d'être de la forme

$$u(x, t) = f(x - \omega t) \tag{1.3}$$

où ω est la vitesse de propagation de l'onde, et $f(z)$, $f'(z)$, $f''(z) \rightarrow 0$ tel que $z \rightarrow \pm\infty$, $z = x - \omega t$.

En 1965, [Zabusky et Kruskal, 1965] ont étudié numériquement l'interaction des ondes solitaires, et la récurrence des états initiaux. Ils ont découvert que les ondes solitaires subissent une interaction non linéaire suivant l'équation KdV. De plus, les ondes émergent de cette interaction en conservant leur forme, leur amplitude et leur vitesse d'origine, ce qui leur permet de conserver leur énergie et leur masse.

La découverte remarquable, que les ondes solitaires conservent leur identité et que leur caractère ressemble à un comportement particulier, a motivé [Zabusky

et Kruskal, 1965] à appeler ces ondes solitaires *solitons*. L'interaction de deux solitons a souligné la réalité de la préservation des formes et des vitesses et du caractère d'impulsion stable des solitons. Par conséquent, la collision des solitons de KdV est considérée comme élastique. Le nom *soliton* a été inventé après photon, phonon, proton, etc. Cependant le nom de l'onde solitaire est plus général. Les solitons sont des types particuliers des ondes solitaires.

De nombreux travaux de recherche ont été investis ces dernières années dans diverses branches des domaines scientifiques pour étudier le concept de soliton [Dauxois et Peyrard, 2006; Filippov, 2000; Remoissenet, 1999]. [Nimmo et Freeman, 1984] ont présenté une formulation alternative des solutions de N -soliton en matière d'une certaine fonction du Wronskian déterminant de N -fonctions. [Hirota, 2004] a construit les solutions de N -soliton de l'équation d'évolution en la réduisant à la forme bilinéaire. Le formalisme bilinéaire établi par Hirota était un outil très utile dans l'étude des équations non linéaires.

Il est bien connu aujourd'hui que les solitons apparaissent comme le résultat d'un équilibre entre la faible non-linéarité et la dispersion. Le concept de soliton a attiré un grand nombre d'études en raison de son rôle important dans divers domaines scientifiques tels que la dynamique des fluides, l'astrophysique, la physique des plasmas, les ondes magnéto-acoustique et d'autres.

Comme dans la section suivante, les ondes solitaires apparaissent sous différentes formes, telles que les solitons, les kinks, les peakons, les cuspons et d'autres formes, chacune de ces formes a ses propres caractéristiques.

1.2 Définitions

Il est intéressant maintenant de donner quelques définitions de certains concepts de la théorie mathématiques des ondes [Wazwaz, 2009].

1.2.1 Onde progressive

La définition physique d'une onde est un mouvement de haut en bas ou d'avant en arrière. L'onde est aussi une perturbation qui transmet l'énergie d'un endroit à un autre. La caractéristique principale de l'onde progressive est que la perturbation se retrouve identique à elle-même après une durée T (période temporelle de propagation) et à une distance de X (période spatiale de propagation ou longueur d'onde). Il faut pour cela que le milieu de propagation ait une extension infinie ou, tout du moins, une taille très grande devant celle de la longueur d'onde.

L'équation de propagation d'onde la plus simple est donnée par

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (1.4)$$

où $u(x, t)$ représente l'amplitude de l'onde, et c est la vitesse de l'onde.

Cette équation a la solution générale d'Alembert

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (1.5)$$

où f et g sont des fonctions arbitraires qui représentent respectivement des ondes de propagation droite et gauche. Les deux ondes distinctes f et g se propagent sans changer leur identité. Les fonctions f et g sont habituellement déterminées en utilisant les valeurs initiales $u(x, 0)$ et $u_t(x, 0)$ qui sont habituellement prescrites. Comme l'équation d'onde est linéaire, les deux solutions peuvent être additionnées selon le principe de superposition. Avec $g = 0$, l'onde se propage dans la bonne direction uniquement comme dans l'équation $u_t + u_x = 0$ avec $u(x, t) = f(x - t)$ et vitesse $c = 1$.

D'autre part, une onde progressive est une onde dans laquelle le milieu se déplace dans la direction de prorogation de l'onde. Les ondes progressives apparaissent

dans l'étude des EDPs non linéaires où les ondes sont représentées par la forme $u(x, t) = f(x - ct)$, où $u(x, t)$ décrit une perturbation déplaçant dans la direction x négative ou positive si $c < 0$ ou $c > 0$ respectivement.

1.2.2 Dispersion et dissipation

Il est utile d'étudier certaines propriétés du phénomène des ondes.

Nous considérons d'abord l'équation suivante

$$u_t + u_x = 0 \tag{1.6}$$

La solution de cette équation est de la forme

$$u(x, t) = f(x - t) \tag{1.7}$$

Des exemples de cette solution sont $\sin(x - t)$, $\cos(x - t)$, e^{x-t} , et plusieurs d'autres. Ces solutions peuvent aussi être combinées. Ainsi, le principe de superposition est applicable car l'équation est linéaire. La forme de ces ondes (1.7) ne change pas lorsque l'onde se propage.

Cependant, l'ajout d'une dérivée spatiale du troisième ordre, qui est le terme de dispersion dans (1.6) donne l'équation dispersive la plus simple.

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.8}$$

Supposons que la solution de l'onde soit de la forme

$$u(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} \tag{1.9}$$

où k est le nombre d'onde, et ω est la fréquence. En substituant (1.9) dans (1.8), on obtient la relation de dispersion

$$\omega = k - k^3 \tag{1.10}$$

ainsi l'onde se propage à la vitesse

$$c = \frac{\omega}{k} = 1 - k^2 \tag{1.11}$$

Ceci indique que les ondes dispersives sont des ondes dont la vitesse c varie avec le nombre d'onde k . Les effets dispersifs donnent généralement une relation entre la fréquence et la vitesse de l'onde.

D'autre part, en utilisant une dérivée spatiale d'ordre pair qui est le terme dissipatif dans (1.6), ceci donne l'équation dissipative suivante

$$u_t + u_x - u_{xx} = 0 \quad (1.12)$$

En utilisant l'hypothèse (1.9) dans (1.12), on obtient la relation suivante

$$\omega = k(1 - ik) \quad (1.13)$$

cela donne la solution

$$u(x, t) = e^{-k^2 t + ik(x-t)} \quad (1.14)$$

Il est évident que la solution (1.14) indique que l'onde se propage à une vitesse unitaire. La dissipation, la décroissance exponentielle de (1.14), est également claire pour $t \rightarrow +\infty$, $k \neq 0$. Une onde qui perd de l'amplitude, en raison d'une perte d'énergie avec le temps, est appelée onde dissipative.

On a discuté jusqu'à présent des équations linéaires. Cependant, si on remplace u_x dans (1.8) et (1.12) par un terme non linéaire uu_x , on obtient les équations non linéaires suivantes

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.15)$$

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0 \quad (1.16)$$

Ces équations sont les fameuses équations de KdV et de Burgers respectivement. Il est intéressant de noter que l'équilibre délicat entre l'effet de non-linéarité de uu_x et l'effet de dispersion de u_{xxx} donne naissance à des solitons (voir 1.2.3.1), qu'après une interaction totale avec les autres. Les solitons réapparaissent en conservant leur identité avec la même rapidité et forme. Cependant, l'éq. (1.16) combine les effets de la non-linéarité et de la dissipation qui donnent lieu à des kinks (voir 1.2.3.3). L'éq. (1.15) a des solutions d'ondes solitaires caractérisées par des fonctions $sech^2$ qui ont des ailes en décomposition exponentielle.

L'éq. (1.16) a des solutions de kinks caractérisées par une fonction \tanh qui s'approche d'une constante à l'infini.

Il est important de noter que le principe de superposition, qui fonctionne pour les équations linéaires, ne s'applique pas aux équations non linéaires. Si deux solitons de l'équation KdV entrent en collision, les solitons passent simplement l'un à travers l'autre et sortent inchangés.

De plus, [Rosenau et Hyman, 1993] ont étudié l'équation dispersive non linéaire $K(n, n)$ donnée par

$$u_t + a(u^n)_x + (u^n)_{xxx} = 0, \quad n > 1 \quad (1.17)$$

Cette équation combine le terme de convection non linéaire $(u^n)_x$ et le terme dispersif véritablement non linéaire $(u^n)_{xxx}$. L'interaction délicate entre la non-linéarité réelle et la dispersion donne naissance au compacton: soliton avec support compact sans ailes exponentielles (voir 1.2.3.6). Dans [Rosenau et Hyman, 1993], il a été prouvé que les ondes solitaires peuvent se compactiser sous l'influence d'une dispersion purement non linéaire capable de provoquer des changements profonds dans la nature d'un phénomène véritablement non linéaire. Une caractéristique importante de la structure du compacton, en plus de l'absence d'ailes infinies, est que la largeur du compacton est indépendante de son amplitude.

Autres définitions et explications de ces termes, solitons, compactons, kinks, ainsi que d'autres termes seront traités dans la prochaine sous-section.

1.2.3 Types de solutions d'ondes progressives

La solution d'onde progressive est une solution de forme permanente déplaçant avec une vitesse constante. Les solutions d'ondes progressives sont généralement obtenues en réduisant les EENLs en équations différentielles ordinaires (EDOs) associées, qui sont résolues par plusieurs méthodes appropriées. Ceci est principalement géré en utilisant $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = x - ct$, c est la vitesse de l'onde.

Il existe de nombreux types de solutions d'ondes progressives qui présentent un intérêt particulier pour la théorie des ondes solitaires qui se développe rapidement dans de nombreux domaines scientifiques, comme les ondes d'eau en eaux peu profondes à la physique des plasmas. Les ondes progressives apparaissent dans de nombreux types, et certains d'entre eux seront pris en compte.

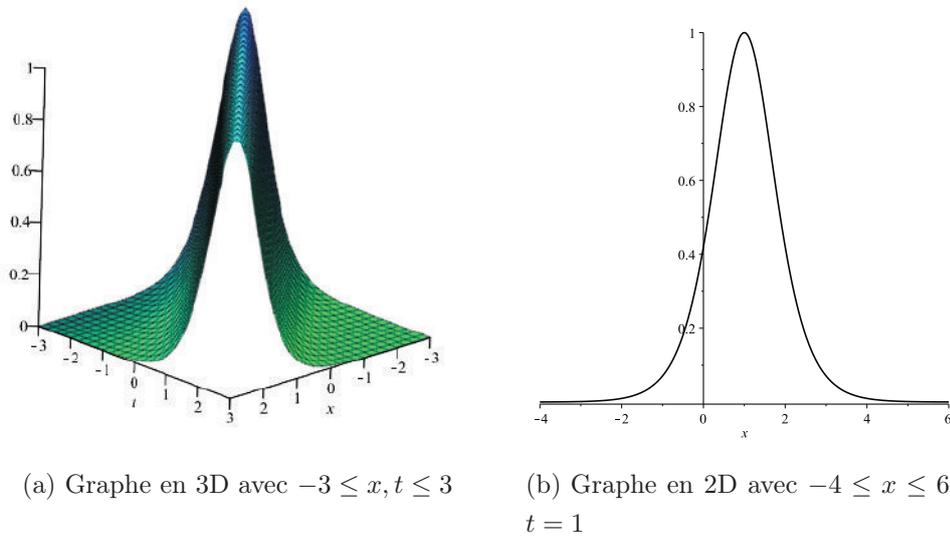


Figure 1.2: Une solution de soliton $u(x, t) = \operatorname{sech}^2(x - t)$

1.2.3.1 Ondes solitaires et solitons

Les ondes solitaires sont des ondes progressives localisées qui se déplacent à des vitesses constantes et prennent une forme asymptotiquement nulle sur de grandes distances. [Hereman, 2009] a défini l'onde solitaire comme une onde de gravité localisée qui maintient sa cohérence, elle a une amplitude finie et se propage avec une vitesse et une forme constantes. Les solitons sont des types particuliers des ondes solitaires. Le soliton est une solution spatialement localisée, d'où $u'(\xi), u''(\xi), u'''(\xi)$, et $u(\xi) \rightarrow 0$ tel que $\xi \rightarrow \pm\infty$, $\xi = x - ct$.

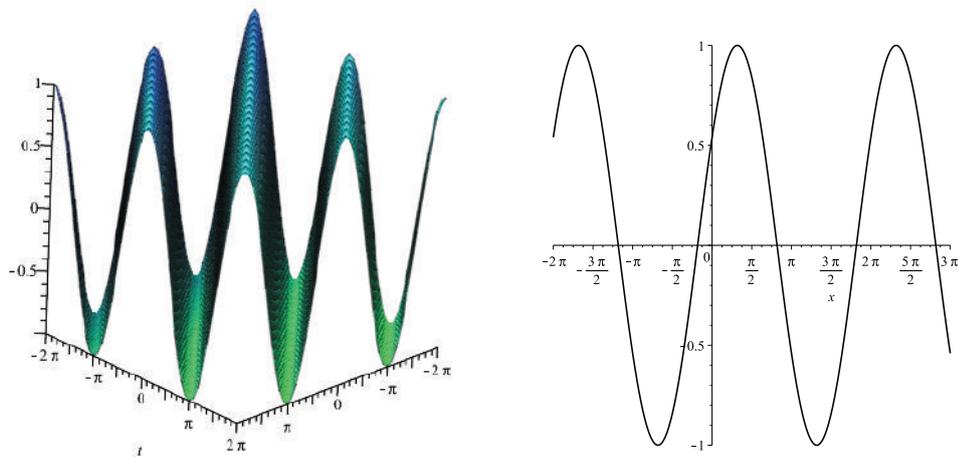
L'équation KdV est le modèle pionnier qui donne naissance aux solitons. La figure 1.2 ci-dessus montre un graphe d'une solution de soliton $u(x, t) = \operatorname{sech}^2(x - t)$ en

forme de cloche caractérisée par des ailes infinies ou des queues infinies.

Il n'est pas facile de trouver une définition précise d'un soliton. Cependant, [Drazin et Johnson, 1989] ont défini un soliton comme toute solution d'une équation non linéaire (ou d'un système) qui:

- (i) est une onde solitaire de forme permanente.
- (ii) est localisé, de sorte qu'il décroît ou s'approche d'une constante à l'infini.
- (iii) peut interagir fortement avec d'autres solitons et conserve son identité.
- (iv) est dû à un équilibre délicat entre les effets non linéaires et dispersifs.

Dans la littérature physique, la différence entre les ondes solitaires et les solitons est devenue floue. Les ondes solitaires peuvent être définies comme des solutions de type solitons d'EENLs décrivant des processus d'ondes dans des milieux dispersifs et dissipatifs.



(a) Graphe en 3D avec $-2\pi \leq x, t \leq 2\pi$

(b) Graphe en 2D avec $-2\pi \leq x \leq 3\pi, t = 1$

Figure 1.3: Une solution périodique $u(x, t) = \cos(x - t)$

1.2.3.2 Ondes périodiques

Les ondes périodiques sont des ondes progressives où le mouvement de la source est périodique, il se répète au bout du temps t .

L'équation d'onde standard $u_{tt} = u_{xx}$ donne des solutions périodiques.

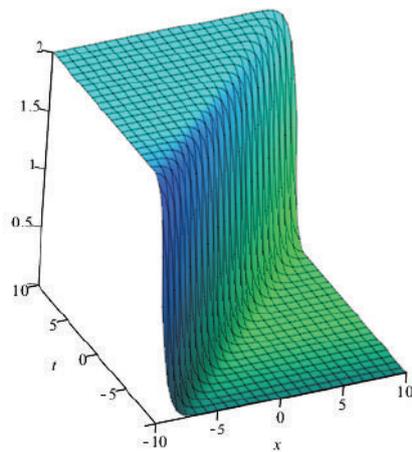
La figure 1.3 ci-dessus montre une solution périodique $u(x, t) = \cos(x - t)$ pour une équation d'onde standard.

1.2.3.3 Kinks

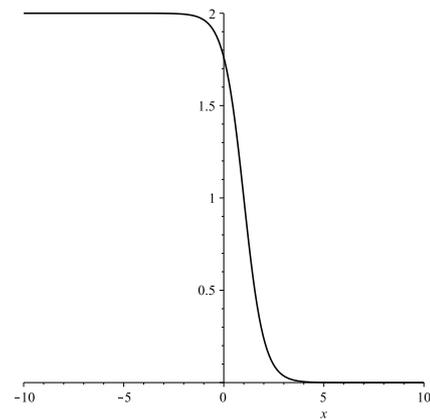
Les kinks sont des ondes solitaires qui montent ou descendent d'un état asymptotique à un autre. La solution de kink approche d'une constante à l'infini.

L'équation de Burgers standard $u_t + uu_x = \rho u_{xx}$, où ρ est le coefficient de viscosité, est une équation bien connue qui donne des solutions de kinks.

La figure 1.4 ci-dessous montre une solution de kink $u(x, t) = 1 - \tanh(x - t)$ pour l'équation de Burgers avec $\rho = \frac{1}{2}$.



(a) Graphe en 3D avec $-10 \leq x, t \leq 10$



(b) Graphe en 2D avec $-10 \leq x \leq 10, t = 1$

Figure 1.4: Une solution de kink $u(x, t) = 1 - \tanh(x - t)$

1.2.3.4 Peakons

Les peakons sont des ondes solitaires avec des pointes. Dans ce cas, les solutions d'ondes progressives sont lisses à l'exception d'un point sur un coin de sa crête. Les peakons sont les points auxquels les dérivées spatiales changent de signe de sorte que les peakons ont un saut fini dans la première dérivée de la solution $u(x, t)$.

Cela signifie que les peakons ont des discontinuités dans la dérivée x mais que les deux dérivées unilatérales existent et ne diffèrent que par un signe.

Les équations intégrables Camassa-Holm (CH) et Degasperis-Procesi (DP)

$$u_t - u_{xxt} + (b + 1)uu_x = bu_xu_{xx} + uu_{xxx} \quad (1.18)$$

pour $b = 2$ et $b = 3$ respectivement, admettent des solutions de peakons.

La figure 1.5 ci-dessous montre une solution de peakon $u(x, t) = c \exp(-|x - ct|)$, pour l'équation CH avec $c = 1$, où c est la vitesse de l'onde.

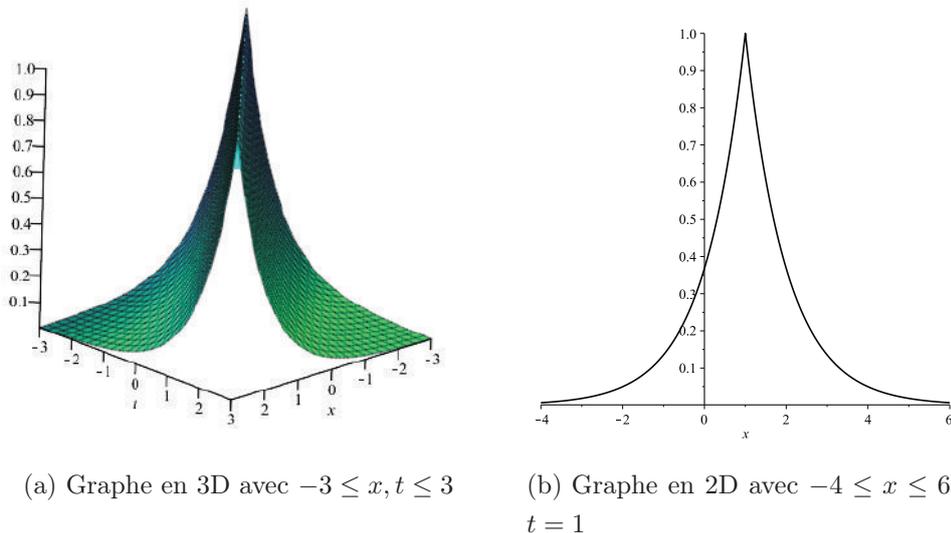


Figure 1.5: Une solution de peakon $u(x, t) = \exp(-|x - t|)$

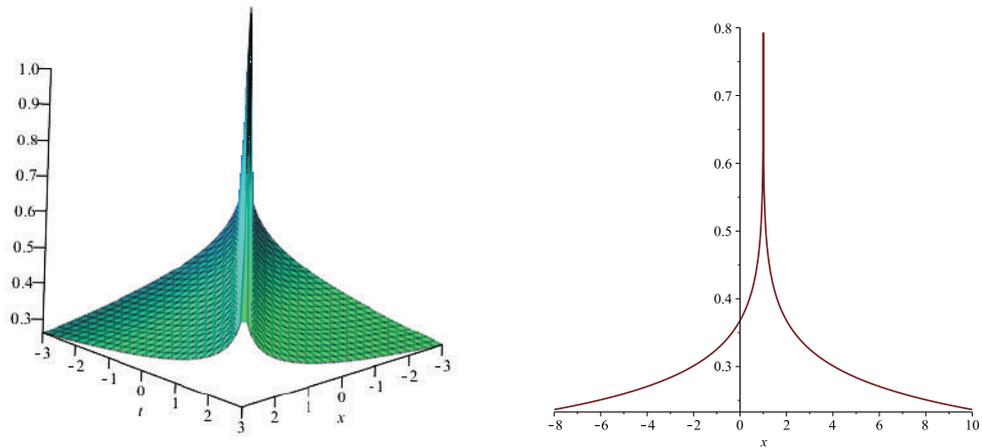
1.2.3.5 Cuspons

Les cuspons sont d'autres formes des ondes solitaires où la solution présente des cuspidés à leurs crêtes. Contrairement aux peakons où les dérivées aux pointes ne diffèrent que par un signe, les dérivées au saut d'un cuspon divergent.

La figure 1.6 ci-dessous montre un graphique virtuel d'un cuspon qui n'est pas obtenu à partir d'un modèle bien connu. L'hypothèse est que le cuspon peut être représenté comme suit

$$u(x, t) = c \exp\left(-|x - ct|^{\frac{1}{n}}\right), \quad n > 1 \quad (1.19)$$

Nous pouvons facilement montrer que $u'(\xi) = \infty$ à la cuspide, et $u''(\xi), u'''(\xi), \dots \rightarrow 0$ tel que $\xi \rightarrow \pm\infty, \xi = x - ct$.



(a) Graphe en 3D avec $-3 \leq x, t \leq 3$

(b) Graphe en 2D avec $-8 \leq x \leq 10, t = 1$

Figure 1.6: Un cuspon $u(x, t) = \exp\left(-|x - t|^{\frac{1}{6}}\right)$

1.2.3.6 Compactons

Compacton est une nouvelle classe de solitons avec un support spatial compact, de sorte que chaque soliton est confiné dans un noyau fini, donc les ailes exponentielles disparaissent. Les compactons sont définis par des ondes solitaires

avec une remarquable propriété de soliton qu'après collision avec d'autres compactons. Deux caractéristiques importantes des structures des compactons sont observées, à savoir:

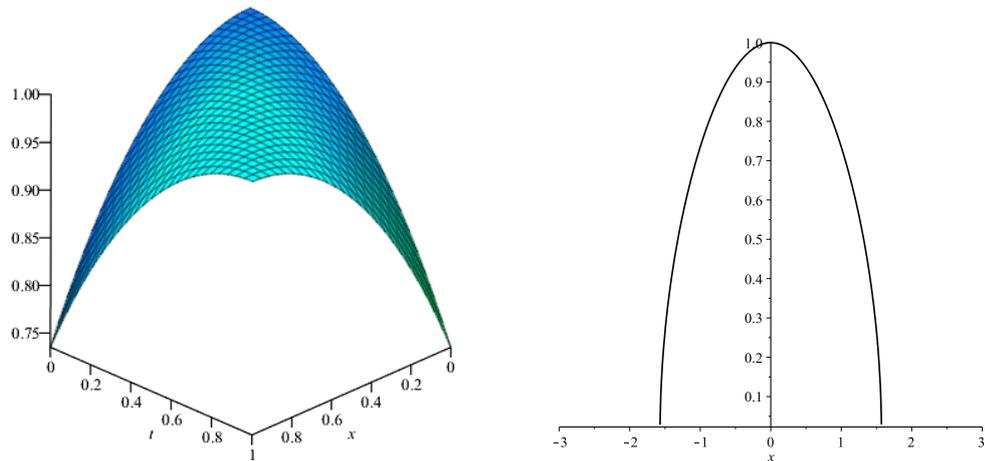
- (i) contrairement au soliton du KdV standard où $u(\xi) \rightarrow 0$ pour $\xi \rightarrow \infty$, le compacton est caractérisé par l'absence des queues ou ailes exponentielles, où $u(\xi)$ ne tend pas à 0 pour $\xi \rightarrow \infty$.
- (ii) contrairement au soliton du KdV standard où la largeur se rétrécit à mesure que l'amplitude augmente, la largeur du compacton est indépendante de l'amplitude.

Les équations dispersives véritablement non linéaires $K(n, n)$ est de la forme

$$u_t + a(u^n)_x + (u^n)_{xxx} = 0, \quad a > 0, \quad n > 1 \quad (1.20)$$

qui supporte des structures de déplacement solitaires compactes pour $a > 0$.

La figure 1.7 ci-dessous montre un graphique d'un compacton $u(x, t) = \cos^{\frac{1}{2}}(x-t)$.



(a) Graphe en 3D avec $0 \leq x, t \leq 1$

(b) Graphe en 2D avec $-3 \leq x \leq 3$,
 $t = 0$

Figure 1.7: Un compacton $u(x, t) = \cos^{\frac{1}{2}}(x - t)$

1.3 Lois de conservation

Il est également intéressant de définir la terminologie des EDPs non linéaires complètement intégrables. Une caractéristique commune de ces EDPs est l'existence d'une séquence infinie de lois de conservation indépendantes. Ceci permet donc de donner lieu à des solutions de N -soliton.

Une loi de conservation pour une EDP non linéaire est exprimée sous la forme

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0 \quad (1.21)$$

où T est la densité conservée, et X est le flux conservé et aucun des deux n'implique de dérivées par rapport à t . Cela signifie que T et X peuvent dépendre de x , t , u , u_x , ... mais pas de u_t .

Les lois de conservation d'ordre inférieur peuvent être déterminées directement à partir de l'équation, alors que les lois de conservation d'ordre supérieur nécessitent un travail énorme, long et fastidieux. Les quelques premières lois de conservation ont une interprétation physique, et d'autres peuvent faciliter l'étude des propriétés quantitatives et qualitatives de la solution [Göktas et Hereman, 1997].

Pour les polynômes de type T et X , l'intégration de (1.21) donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T \, dx = C = \text{constante} \quad (1.22)$$

à condition que X disparaisse à l'infini [Göktas et Hereman, 1997].

1.3.1 Détermination des lois de conservation

La méthode pour trouver des lois de conservation est basée sur les idées de [Miura *et al.*, 1968], [Kruskal *et al.*, 1970], [Ito et Kako, 1985], [Ito, 1986], et [Verheest et Hereman, 1994].

À titre d'exemple, [Nuseir, 1995] utilise l'équation KdV

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.23)$$

Cette équation est sous forme de conservation où

$$T_1 = u, \quad X_1 = \frac{1}{2}u^2 + u_{xx} \quad (1.24)$$

La deuxième densité conservée correspond à $T_2 = u^2$. On Calcule $\frac{\partial T_2}{\partial t} = 2uu_t$ et substitue $-(uu_x + u_{xxx})$ à u_t pour obtenir

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = -(2u^2u_x + 2uu_{xxx}) = -\left(\frac{2}{3}u^3 + 2uu_{xx} - u_x^2\right)_x \quad (1.25)$$

Par conséquent

$$X_2 = \frac{2}{3}u^3 + 2uu_{xx} - u_x^2 \quad (1.26)$$

Un programme Mathematica écrit par [Göktas et Hereman, 1997], est utilisé pour trouver un ensemble infini de lois de conservation pour l'équation KdV. L'existence de lois de conservation a été considérée comme une indication de l'intégrabilité de l'équation KdV.

1.4 La famille des équations KdV

L'équation canonique KdV est une équation dispersive non linéaire de 3^{ème} ordre. Cependant, les équations KdV apparaissent sous trois, cinq, sept formes d'ordre ou plus. Dans ce qui suit, un bref résumé de ces formulaires est présenté [Wazwaz, 2009].

1.4.1 La famille des équations KdV du 3^{ème} ordre

La famille des équations KdV du 3^{ème} ordre est de la forme

$$u_t + f(u)u_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.27)$$

où $u(x, t)$ est une fonction de la variable spatiale x et de la variable temporelle t . Les constantes peuvent être utilisées comme des coefficients de $f(u)u_x$ et u_{xxx} ,

mais ces constantes peuvent généralement être échelonnées. Le terme $f(u)$ se présente sous les formes suivantes

$$f(u) = \begin{cases} \alpha u \\ \alpha u^2 \\ \alpha u^n \\ \alpha u_x \\ 2\alpha u - 3\beta u^2 \\ \alpha u^n - \beta u^{2n} \end{cases} \quad (1.28)$$

1.4.1.1 L'équation KdV

Pour $f(u) = au$, on obtient l'équation universelle de KdV

$$u_t + auu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.29)$$

où le paramètre a est un nombre réel, les valeurs couramment utilisées sont $a = \pm 1$ ou $a = \pm 6$. Pour $a = \pm 6$, on obtient l'une des équations KdV standard, où le facteur ± 6 est approprié pour une intégrabilité complète. L'équation KdV est une équation d'évolution non linéaire qui modélise une variété de phénomènes non linéaires, y compris les ondes acoustiques dans un cristal harmonique, les ondes ioniques acoustiques dans les plasmas et les ondes en eau peu profonde. La dérivée u_t décrit l'évolution temporelle de l'onde propageant dans une direction, le terme non linéaire uu_x décrit l'accentuation de l'onde et le terme linéaire u_{xxx} représente la propagation ou la dispersion de l'onde. L'équation KdV a été établie par [Korteweg et de Vries, 1895] pour décrire les ondes en eau peu profonde de grande longueur d'onde et de faible amplitude. L'équilibre délicat entre la faible non-linéarité de uu_x et la dispersion linéaire de u_{xxx} définit la formulation de soliton composé d'une seule onde bosselée. Cette équation est la pionnière des équations modèles qui donnent des solutions de solitons caractérisant les ondes solitaires qui diminuent monotones à l'infini [Ablowitz et Clarkson, 1991; Drazin et Johnson, 1989].

1.4.1.2 L'équation KdV modifiée

Pour $f(u) = 6u^2$, l'éq. (1.27) est appelée l'équation KdV modifiée (mKdV) donnée par

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.30)$$

L'équation mKdV est identique à l'équation KdV dans la mesure où elles sont complètement intégrables et chacune a une séquence infinie de lois de conservation indépendantes. Cette équation apparaît dans les circuits électriques et les plasmas multicomposants. Les conditions de stabilité et d'instabilité des solitons algébriques de cette équation ont été bien étudiées dans [Ablowitz et Clarkson, 1991].

1.4.1.3 L'équation KdV généralisée

Pour $f(u) = \alpha u^n$, $n \geq 3$, l'éq. (1.27) est appelée l'équation KdV généralisée (gKdV) donnée par

$$u_t + \alpha u^n u_x + u_{xxx} = 0, \quad n \geq 3 \quad (1.31)$$

Contrairement aux équations KdV et mKdV, l'équation gKdV n'est pas complètement intégrable pour $n \geq 3$, et donc, ne donne pas des solutions de N -soliton.

1.4.1.4 L'équation KdV potentielle

Pour $f(u) = \alpha u_x$, l'éq. (1.27) est appelée l'équation KdV potentielle [Drazin et Johnson, 1989] donnée par

$$u_t + \alpha (u_x)^2 + u_{xxx} = 0 \quad (1.32)$$

Cette équation peut être obtenue à partir de l'équation KdV standard en plaçant $u = v_x$ et en intégrant l'équation résultante par rapport à x .

1.4.1.5 L'équation de Gardner

Pour $f(u) = 2\alpha u - 3\beta u^2$ où $\alpha, \beta > 0$, l'éq. (1.27) est appelée l'équation de Gardner [Gardner *et al.*, 1967] ou l'équation combinée KdV-mKdV, donnée par

$$u_t + (2\alpha u - 3\beta u^2) u_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.33)$$

L'équation de Gardner a été étudiée en profondeur dans la littérature parce qu'elle est utilisée pour modéliser une variété de phénomènes non linéaires dans diverses branches de la physique, telles que la physique des plasmas, la physique des fluides, la théorie des champs quantiques. L'équation joue un rôle important dans les ondes océaniques. Cette équation décrit les ondes internes et admet des solutions de type *tanh* très intéressantes.

1.4.1.6 L'équation KdV généralisée avec deux non-linéarités de puissance

Pour $f(u) = \alpha u^n - \beta u^{2n}$ on obtient une autre équation gKdV avec deux non-linéarités de puissance de la forme

$$u_t + (\alpha u^n - \beta u^{2n}) u_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.34)$$

Cette équation modélise la propagation d'ondes acoustiques longues non linéaires. La célèbre équation de Gardner est obtenue en plaçant $n = 1$ dans (1.34).

1.4.2 L'équation K(n,n)

Une équation de type KdV a été introduite par [Rosenau et Hyman, 1993] et donnée par

$$u_t + a(u^n)_x + b(u^n)_{xxx} = 0 \quad (1.35)$$

L'équation $K(n, n)$ (1.35) est caractérisée par le terme véritablement non linéaire $(u^n)_x$ et le terme réellement non linéaire de dispersion $(u^n)_{xxx}$. L'équilibre entre le terme de convection non linéaire $(u^n)_x$ et le terme de dispersion réelle $(u^n)_{xxx}$ donne naissance à l'onde dite compacton, onde solitaire avec support compact et sans queues ni ailes.

1.4.3 La famille des équations KdV des ordres supérieurs

Plusieurs autres extensions de l'équation KdV standard d'ordres supérieurs apparaissent dans les applications scientifiques. La forme bilinéaire de l'équation KdV standard peut être étendue pour formuler les équations KdV d'ordre supérieur. La nature de l'interaction des ondes solitaires pour ces équations a attiré un nombre considérable de travaux de recherche.

1.4.3.1 Équations KdV du 5^{ème} ordre

Les équations KdV du 5^{ème} ordre (fKdV) bien connues sous leur forme standard sont les suivantes

$$u_t + u_{xxxxx} + auu_{xxx} + bu_x u_{xx} + cu^2 u_x = 0 \quad (1.36)$$

où a , b et c sont des paramètres réels arbitraires non nuls, et $u = u(x, t)$ est une fonction suffisamment souvent différentiable. Les équations fKdV comportent le terme dispersif linéaire u_{xxxxx} en plus de trois termes non linéaires. Diverses équations fKdV peuvent être développées en modifiant les valeurs réelles des paramètres a , b et c , cependant, leurs caractéristiques seront radicalement différentes. Les équations fKdV les plus connues qui seront abordées sont l'équation de Lax, l'équation de Sawada-Kotera (SK), l'équation de Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG), l'équation de Kaup-Kuperschmidt (KP) et l'équation de Ito.

L'équation fKdV est un modèle mathématiques important avec de nombreuses applications. Les exemples typiques sont largement utilisés dans divers domaines tels que la physique de l'état solide, la physique des plasmas, la physique des fluides, la théorie des champs quantiques, la mécanique quantique et l'optique non linéaire [Caudrey *et al.*, 1976; Ito, 1980; Jaradat *et al.*, 2018; Kupershmidt, 1984; Lax, 1968; Salas, 2008; Salas *et al.*, 2010; Sawada et Kotera, 1974; Sierra et Salas, 2008; Wazwaz, 2006a,b,d, 2007, 2016; Wei, 2009; Zayed et Alurfi, 2014]

Comme indiqué précédemment, de nombreuses formes d'équations fKdV peuvent être construites en modifiant les paramètres a , b et c . Cependant, cinq formes bien connues qui présentent un intérêt particulier dans la littérature.

Ces formulaires le sont:

(i) **L'équation de Lax** [Lax, 1968]

$$u_t + u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 20u_xu_{xx} + 30u^2u_x = 0 \quad (1.37)$$

(ii) **L'équation de Sawada-Kotera (SK)** [Sawada et Kotera, 1974]

$$u_t + u_{xxxxx} + 5uu_{xxx} + 5u_xu_{xx} + 5u^2u_x = 0 \quad (1.38)$$

(iii) **L'équation de Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG)** [Caudrey *et al.*, 1976]

$$u_t + u_{xxxxx} + 30uu_{xxx} + 30u_xu_{xx} + 180u^2u_x = 0 \quad (1.39)$$

iv) **L'équation de Kaup-Kuperschmidt (KK)** [Kuperschmidt, 1984]

$$u_t + u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 25u_xu_{xx} + 20u^2u_x = 0 \quad (1.40)$$

v) **L'équation de Ito** [Ito, 1980]

$$u_t + u_{xxxxx} + 3uu_{xxx} + 6u_xu_{xx} + 2u^2u_x = 0 \quad (1.41)$$

On a constaté que les équations SK, CDG, Lax et KK appartiennent à la hiérarchie complètement intégrable d'équations KdV d'ordre supérieur. Ces quatre équations ont des ensembles infinis de lois de conservation, ainsi, ces équations ont des solutions de N -soliton. Cependant, l'équation de Ito n'est pas complètement intégrable mais a un nombre limité de lois de conservation.

Il est important de noter qu'une autre équation KdV significative du 5^{ème} ordre apparaît dans la littérature sous la forme suivante

$$u_t - ru_{xxxxx} + au_{xxx} + buu_x = 0 \quad (1.42)$$

où a , b et r sont des constantes. Cette équation s'appelle **l'équation de Kawahara**. Lorsque $a = 1$ et $r = 0$, l'équation (1.42) se réduit à l'équation KdV

standard du 3^{ème} ordre. Cette équation modélise la dynamique des ondes longues dans un fluide visqueux. Elle apparaît dans la théorie des ondes en eau peu profonde avec tension superficielle et la théorie des ondes magnéto-acoustiques dans les plasmas. De plus, l'équation de Kawahara a aussi une forme modifiée donnée par

$$u_t - ru_{xxxxx} + au_{xxx} + bu^2u_x = 0 \quad (1.43)$$

avec la non-linéarité quadratique uu_x de l'équation de Kawahara (1.42) remplacée par la non-linéarité cubique u^2u_x .

1.4.3.2 Équations KdV du 7^{ème} ordre

L'équation KdV d'ordre supérieur peut apparaître dans une équation KdV du 7^{ème} ordre (sKdV) donnée par une forme généralisée

$$u_t + au^3u_x + bu_x^3 + cuu_xu_{2x} + du^2u_{3x} + eu_{2x}u_{3x} + fu_xu_{4x} + guu_{5x} + u_{7x} = 0 \quad (1.44)$$

où a, b, c, d, e, f et g sont des paramètres non nuls, et $u_{kx} = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}$. Les paramètres a, b, c, d, e, f et g peuvent prendre des valeurs arbitraires. Cependant, il existe trois cas particuliers bien connus d'éq. (1.44) obtenus en utilisant une extension de la forme bilinéaire de l'équation KdV standard. Ces formules sont:

(i) L'équation de Sawada-Kotera-Ito du 7^{ème} ordre

$$\begin{aligned} u_t + 252u^3u_x + 63u_x^3 + 378uu_xu_{2x} + 126u^2u_{3x} \\ + 63u_{2x}u_{3x} + 42u_xu_{4x} + 21uu_{5x} + u_{7x} = 0 \end{aligned} \quad (1.45)$$

(ii) L'équation de Lax du 7^{ème} ordre

$$\begin{aligned} u_t + 140u^3u_x + 70u_x^3 + 280uu_xu_{2x} + 70u^2u_{3x} \\ + 70u_{2x}u_{3x} + 42u_xu_{4x} + 14uu_{5x} + u_{7x} = 0 \end{aligned} \quad (1.46)$$

(iii) L'équation de Kaup-Kuperschmidt du 7^{ème} ordre

$$\begin{aligned} u_t + 2016u^3u_x + 630u_x^3 + 2268uu_xu_{2x} + 504u^2u_{3x} \\ + 252u_{2x}u_{3x} + 147u_xu_{4x} + 42uu_{5x} + u_{7x} = 0 \end{aligned} \quad (1.47)$$

Ces trois cas de l'équation sKdV sont totalement intégrables.

1.4.3.3 Équations KdV du 9^{ème} ordre

L'équation KdV d'ordre supérieur peut apparaître dans une équation KdV du 9^{ème} ordre (nKdV). L'équation de Sawada-Kotera du 9^{ème} ordre (nSK) est la suivante

$$\begin{aligned} u_t + 45u_x u_{6x} + 45uu_{7x} + 210u_{3x}u_{4x} + 210u_{2x}u_{5x} + 1575u_x (u_{2x})^2 + 3150uu_{2x}u_{3x} \\ + 1260uu_x u_{4x} + 630u^2 u_{5x} + 9450u^2 u_x u_{2x} + 3150u^3 u_{3x} + 4725u^4 u_x + u_{9x} = 0 \end{aligned} \quad (1.48)$$

D'autres formes de coefficients différents peuvent être obtenues.

L'équation nKdV n'est pas complètement intégrable.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté brièvement les principes de base de la théorie des ondes solitaires, en commençant par quelques rappels sur les ondes progressives avec différents types, ainsi que certaines de leurs propriétés. De plus, nous avons présenté la famille d'équations KdV du 3^{ème} ordre et la famille d'équations KdV des ordres supérieurs. Le modèle étudié dans ce travail s'agit de l'équation de Korteweg-de Vries du 5^{ème} ordre (fKdV).

Chapitre 2

Quelques méthodes pour résoudre l'équation fKdV

Sommaire

2.1	Introduction	30
2.2	Analyse des méthodes	31
2.2.1	La méthode Tanh-coth	31
2.2.2	La méthode des équations de Riccati projectives généralisées	33
2.2.3	La méthode de la fonction hyperbolique étendue . . .	35
2.2.4	Version simplifiée de la méthode bilinéaire de Hirota .	36
2.3	Équation KdV du 5^{ème} ordre	38
2.3.1	Utilisation de la méthode Tanh-coth	38
2.3.2	Utilisation de la méthode des équations de Riccati projectives généralisées	43
2.3.3	Utilisation de la méthode de la fonction hyperbolique étendue	48
2.3.4	Utilisation de la version simplifiée de la méthode de Hirota	52
2.4	Lois de conservation pour la classe générale d'équation fKdV	55
2.5	Conclusion	59

2.1 Introduction

Au cours des dernières décennies, de nombreux travaux de recherche ont été consacrés à l'étude de l'équation fKdV (1.36), qui fait partie des équations d'évolution non linéaires, où elle est observée dans de nombreux domaines scientifiques importants, avec diverses applications en optique non linéaire et en mécanique quantique. Il représente les mouvements des ondes longues dans les eaux peu profondes. L'objectif principal de ces études était orienté vers ses solutions analytiques et numériques.

Wazwaz [Wazwaz, 2006a,b,d, 2007, 2009] a étudié l'équation en utilisant les méthodes *tanh*, *sine – cosine*, *tanh – coth* et la version simplifiée de la méthode bilinéaire de Hirota. Dans [Wazwaz, 2009], les solutions de N -soliton sont déterminées pour différentes formes de l'équation fKdV en utilisant la version simplifiée de la méthode de Hirota. Dans [Wazwaz, 2006a,b], il a utilisé la méthode *tanh* pour résoudre diverses formes de l'équation fKdV, qui comprennent les formes Lax, SK, KK, Ito, CDG et autres cas spéciaux. Deux critères principaux sont définis pour créer des règles efficaces qui régulent la relation entre les paramètres de l'équation. De nombreuses solutions de solitons sont obtenues. Dans [Wazwaz, 2006d], les méthodes *sine – cosine* et *tanh* sont utilisées pour présenter une étude analytique de l'équation fKdV, qui fournit des solutions périodiques et des solutions de solitons. Dans [Wazwaz, 2007], la méthode *tanh – coth* est utilisée pour obtenir de nouvelles solutions de solitons pour de nombreuses formes de l'équation fKdV, qui contiennent les équations Lax, SK, Sawada-Kotera-Parker-Dye (SKPD), KK, Kaup-Kupershmidt-Parker-Dye (KKPD), et Ito. Les critères établis dans [Wazwaz, 2006b] sont confirmés par cette nouvelle approche.

Beaucoup d'autres auteurs comme [Sierra et Salas, 2008] ont utilisé une généralisation de la méthode *tanh – coth* afin d'obtenir de nouvelles solutions périodiques et de solitons à diverses formes importantes de l'équation fKdV. [Salas, 2008; Salas et al., 2010] ont trouvé des solutions exactes de l'équation générale fKdV en utilisant la méthode de la fonction Exp, la méthode des équations de Riccati projectives généralisées et la transformation Cole-Hopf. [Zayed et Alurfi, 2014]

ont appliqué la méthode de l'équilibre homogène pour trouver des solutions exactes des formes Lax, SK, KK, Ito et CDG. [Khan et Akbar, 2015b] ont utilisé la méthode de l'équation simple modifiée pour résoudre l'équation généralisée fKdV qui fournit des solutions exactes d'ondes progressives. [Jaradat *et al.*, 2018] ont étudié les solutions de solitons multiples et les solutions de solitons multiples singulières d'une classe de l'équation d'évolution non linéaire du cinquième ordre à coefficients variables. Ils ont utilisé la méthode bilinéaire simplifiée basée sur une méthode de transformation combinée avec le sens bilinéaire de Hirota. [Wei, 2009] construit des solutions de solitons simples et multiples de structures physiques distinctes pour l'équation fKdV par la méthode de la fonction hyperbolique étendue et la version simplifier de la méthode bilinéaire de Hirota.

2.2 Analyse des méthodes

La méthode *Tanh – coth* et la méthode des équations de Riccati projectives généralisées et la méthode de la fonction hyperbolique étendue ont été appliquées pour une grande variété de problèmes non linéaires et elles seront utilisées dans ce chapitre pour trouver des solutions d'ondes progressives d'une classe générale de l'équation fKdV, avec des formes différentes. Ces trois méthodes se sont avérées puissantes, fiables et efficaces pour traiter un grand nombre d'EENLs. En outre, la version simplifiée de la méthode bilinéaire de Hirota est utilisée pour aborder le concept des solutions de N -soliton.

2.2.1 La méthode Tanh-coth

Une variable d'onde $\xi = x - \omega t$ convertit n'importe quelle EDP non linéaire

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xt}, u_{xxx}, \dots) = 0 \quad (2.1)$$

à une EDO

$$Q(u, u', u'', u''', \dots) = 0 \quad (2.2)$$

Où Q est un polynôme de $u(\xi)$ et ses dérivées, $u'(\xi) = \frac{du}{d\xi}$, $u''(\xi) = \frac{d^2u}{d\xi^2}$, etc.

L'éq. (2.2) est ensuite intégrée tant que tous les termes contiennent des dérivées où les constantes d'intégration sont considérées comme des zéros.

La méthode standard *tanh* est développée par [Malfliet et Hereman, 1996] où le *tanh* est utilisé comme une nouvelle variable, puisque tous les dérivées d'un *tanh* sont représentées par le *tanh* lui-même. Par exemple, si on pose $T = \tanh(\xi)$, alors on a

$$\begin{aligned} T' &= 1 - T^2 \\ T'' &= -2T + 2T^3 \\ T''' &= -2 + 8T^2 - 6T^4 \\ T'''' &= 16T - 40T^3 + 24T^5 \end{aligned}$$

En d'autres termes, l'introduction d'une nouvelle variable indépendante

$$Y = \tanh(\mu\xi), \quad \xi = x - \omega t$$

où μ est le nombre d'onde, conduit au changement des dérivées:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} &= \mu(1 - Y^2) \frac{d}{dY} \\ \frac{d^2}{d\xi^2} &= -2\mu^2 Y(1 - Y^2) \frac{d}{dY} + \mu^2(1 - Y^2)^2 \frac{d^2}{dY^2} \\ \frac{d^3}{d\xi^3} &= 2\mu^3(1 - Y^2)(3Y^2 - 1) \frac{d}{dY} - 6\mu^3 Y(1 - Y^2)^2 \frac{d^2}{dY^2} + \mu^3(1 - Y^2)^3 \frac{d^3}{dY^3} \\ \frac{d^4}{d\xi^4} &= -8\mu^4(1 - Y^2)(3Y^2 - 2) \frac{d}{dY} + 4\mu^4(1 - Y^2)^2(9Y^2 - 2) \frac{d^2}{dY^2} \\ &\quad - 12\mu^4 Y(1 - Y^2)^3 \frac{d^3}{dY^3} + \mu^4(1 - Y^2)^4 \frac{d^4}{dY^4} \end{aligned} \tag{2.3}$$

La méthode *tanh - coth* [Wazwaz, 2006c, 2009] utilise l'expansion finie

$$u(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^m a_k Y^k + \sum_{k=1}^m b_k Y^{-k} \tag{2.4}$$

où m est un entier positif, dans la plupart des cas, qui sera déterminé. Pour le non entier m , une formule de transformation est utilisée pour dépasser cette difficulté. L'expansion (2.4) se réduit à la méthode *tanh* pour $b_k = 0$, $1 \leq k \leq m$.

La substitution de (2.4) dans l'EDO réduite donne une équation algébrique en puissances de Y . Plus précisément, on définit le degré de u comme $D(u) = m$, ce qui donne lieu à un degré d'expressions différentes comme suit:

$$D\left(\frac{d^p u}{d\xi^p}\right) = m + p, \quad D\left(u^n \left(\frac{d^p u}{d\xi^p}\right)^r\right) = nm + r(m + p) \quad (2.5)$$

Pour déterminer le paramètre m , on équilibre les termes linéaires d'ordre supérieur de l'équation résultante avec les termes non linéaires d'ordre supérieur. Puis, on regroupe tous les coefficients des puissances de Y dans l'équation réduite où ces coefficients doivent disparaître. Ceci donne un système d'équations algébriques impliquant les paramètres a_k , b_k , μ et ω . Après avoir déterminé ces paramètres, on obtient une solution analytique $u(x, t)$. Les solutions obtenus peuvent être des solitons en termes de $sech^2$, ou peuvent être des kinks en termes de $tanh$. Cependant, cette méthode peut aussi donner des solutions périodiques.

2.2.2 La méthode des équations de Riccati projectives généralisées

La méthode des équations de Riccati projectives utilise les solutions d'un système spécial de deux équations, qui est appelé système projectif d'équations de Riccati pour construire un ansatz spécial, qui a été initialement introduit par [Conte et Musette, 1992].

Dans ce qui suit, on donne les principales étapes de cette méthode [Zayed et Alurfi, 2015].

Etape 1. On utilise $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = x + \omega t + const$, pour réduire l'EDP non linéaire (2.1) à l'EDO (2.2), où ω est une constante.

Etape 2. On suppose que l'eq. (2.2) a la solution formelle

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^m \sigma^{i-1}(\xi) (a_i \sigma(\xi) + b_i \tau(\xi)) \quad (2.6)$$

où a_0 , a_i et b_i sont des constantes à déterminer ultérieurement.

Les fonctions σ et τ satisfont les EDOs:

$$\begin{aligned}\sigma'(\xi) &= \varepsilon \sigma(\xi) \tau(\xi) \\ \tau'(\xi) &= R + \varepsilon \tau^2(\xi) - \mu \sigma(\xi)\end{aligned}\tag{2.7}$$

où

$$\tau^2(\xi) = -\varepsilon \left(R - 2\mu\sigma(\xi) + \frac{\mu^2 + r}{R} \sigma^2(\xi) \right), \quad \varepsilon = \pm 1, \quad r = \pm 1, \quad R \neq 0\tag{2.8}$$

- Si $R = \mu = 0$, l'éq. (2.2) a la solution formelle:

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i \tau^i(\xi)\tag{2.9}$$

où τ satisfait l'EDO:

$$\tau'(\xi) = \tau^2(\xi)\tag{2.10}$$

Etape 3. On détermine l'entier positif m dans (2.6) en utilisant l'équilibre homogène entre les termes linéaires d'ordre le plus élevé et les termes non linéaires d'ordre le plus élevé de l'éq. (2.2). Dans certaines équations non linéaires, le nombre m n'est pas un entier positif. Dans ce cas, on effectue les transformations suivantes:

- (a) Si $m = \frac{q}{p}$, où $\frac{q}{p}$ est une fraction dans les termes les plus bas, on suppose que

$$u(\xi) = v^{\frac{q}{p}}(\xi)\tag{2.11}$$

puis on met (2.11) en (2.2) pour obtenir une nouvelle équation dans la nouvelle fonction $v(\xi)$ avec un entier positif.

- (b) Si m est un entier négatif, on suppose que

$$u(\xi) = v^m(\xi)\tag{2.12}$$

puis nous substituons (2.12) en (2.2) pour obtenir une nouvelle équation dans la nouvelle fonction $v(\xi)$ avec un entier positif.

Etape 4. Substituer (2.6) avec les éqs. (2.7) et (2.8) dans l'éq. (2.2) (ou (2.9) avec (2.10) dans l'éq. (2.2)). Collecter de tous les termes du même ordre de $\sigma^j(\xi) \tau^i(\xi)$ ($j = 0, 1, \dots; i = 0, 1$) (ou $\tau^j(\xi)$, $j = 0, 1, \dots$). En mettant chaque

coefficient à zéro, on obtient un ensemble d'équations algébriques qui peuvent être résolues pour trouver les valeurs de a_0 , a_i , b_i , ω , μ et R .

Etape 5. Il est bien connu [Yomba, 2005] que les éqs. (2.7) admettent les solutions suivantes:

Cas 1: Si $\varepsilon = -1$ et $r = -1$

$$\sigma_1(\xi) = \frac{R \operatorname{sech}(\sqrt{R}\xi)}{1 + \mu \operatorname{sech}(\sqrt{R}\xi)}, \quad \tau_1(\xi) = \frac{\sqrt{R} \tanh(\sqrt{R}\xi)}{1 + \mu \operatorname{sech}(\sqrt{R}\xi)} \quad (2.13)$$

Cas 2: Si $\varepsilon = -1$ et $r = 1$

$$\sigma_2(\xi) = \frac{R \operatorname{csch}(\sqrt{R}\xi)}{1 + \mu \operatorname{csch}(\sqrt{R}\xi)}, \quad \tau_2(\xi) = \frac{\sqrt{R} \coth(\sqrt{R}\xi)}{1 + \mu \operatorname{csch}(\sqrt{R}\xi)} \quad (2.14)$$

Cas 3: Si $\varepsilon = 1$ et $r = -1$

$$\sigma_3(\xi) = \frac{R \sec(\sqrt{R}\xi)}{1 + \mu \sec(\sqrt{R}\xi)}, \quad \tau_3(\xi) = \frac{\sqrt{R} \tan(\sqrt{R}\xi)}{1 + \mu \sec(\sqrt{R}\xi)} \quad (2.15)$$

$$\sigma_4(\xi) = \frac{R \csc(\sqrt{R}\xi)}{1 + \mu \csc(\sqrt{R}\xi)}, \quad \tau_4(\xi) = \frac{\sqrt{R} \cot(\sqrt{R}\xi)}{1 + \mu \csc(\sqrt{R}\xi)} \quad (2.16)$$

Cas 4: Si $R = \mu = 0$

$$\sigma_5(\xi) = \frac{C}{\xi}, \quad \tau_5(\xi) = \frac{1}{\varepsilon \xi} \quad (2.17)$$

où C est une constante.

Etape 6. En substituant les valeurs de a_0 , a_i , b_i , ω , μ et R , ainsi que les solutions (2.13)-(2.17) en (2.6), on obtient les solutions exactes de l'éq. (2.1).

2.2.3 La méthode de la fonction hyperbolique étendue

Nous proposons maintenant la méthode de la fonction hyperbolique étendue [Wei, 2009], pour obtenir des solutions exactes pour les EDPs non linéaires basées sur la méthode du *tanh* étendu.

On utilise une variable d'onde $\xi = kx - \omega t$, pour réduire l'EDP non linéaire (2.1) à l'EDO (2.2), où ω est une constante. On suppose que la solution de (2.2) est de la forme

$$u(x, t) = u(\xi) = \sum_{i=0}^n a_i Y^i \quad (2.18)$$

où

$$Y = \frac{\alpha e^\xi - \beta e^{-\xi}}{\alpha e^\xi + \beta e^{-\xi}} \text{ ou } Y = \frac{1}{\alpha e^\xi + \beta e^{-\xi}}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (2.19)$$

et les coefficients a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) sont des constantes à déterminer. Le degré polynomial n peut être déterminé en équilibrant les termes linéaires d'ordre supérieur et les termes non linéaires d'ordre supérieur dans (2.2). La substitution de (2.18) avec (2.19) dans (2.2) résulte en un système algébrique d'équations de puissances e^ξ qui conduit à la détermination des paramètres a_i ($i = 0, 1, \dots, n$), α , β , k et ω .

2.2.4 Version simplifiée de la méthode bilinéaire de Hirota

La méthode de Hirota [Hirota, 2004] est une technique directe pour construire des solutions de N -soliton de diverses EDPs non linéaires en les réduisant à la forme bilinéaire. Comme indiqué précédemment, les EDPs complètement intégrables sont les équations ayant beaucoup de lois de conservation et admettent des solutions de N -soliton de tout ordre. Le formalisme bilinéaire est un outil très utile dans l'étude des équations non linéaires et il était le plus approprié pour les calculateurs d'algèbre. L'inconvénient de la méthode d'Hirota est que la forme bilinéaire de l'EDP doit être connue à l'avance. En d'autres termes, la technique ne peut être appliquée qu'aux équations qui peuvent être écrites sous forme bilinéaire, soit comme une seule équation bilinéaire, soit comme un système d'équations bilinéaires couplées.

Dans [Hereman et Nuseir, 1997], une forme simplifiée du formalisme bilinéaire de Hirota a été introduite pour minimiser le travail fastidieux de la méthode de Hirota. Cette version simplifiée est plus efficace dans le sens où elle ne nécessite pas la connaissance des formes bilinéaires pour trouver les solutions exactes.

Trouver des formes bilinéaires pour la plupart des EDPs non linéaires, si elles existent, est une tâche difficile. En raison de cette difficulté, une version simplifiée de la méthode d'Hirota est présentée.

Tout d'abord, la substitution de

$$u(x, t) = e^{\theta_i}, \quad \theta_i = k_i x - \omega_i t, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.20)$$

dans les termes linéaires de l'éq. (2.1) pour déterminer la relation de dispersion entre k_i et ω_i . Puis, on substitue la solution de 1-soliton

$$u(x, t) = R. (\ln f(x, t))_{xx} = R. \frac{f f_{xx} - (f_x)^2}{f^2} \quad (2.21)$$

dans l'éq. (2.1), où la fonction auxiliaire f est donnée par

$$f(x, t) = 1 + e^{\theta_1} \quad (2.22)$$

et $\theta_1 = k_1 x - \omega_1 t$, et résout l'équation résultante pour déterminer la valeur numérique de R .

Notons que les solutions de N -soliton peuvent être obtenues pour l'éq. (2.1), en utilisant les formes suivantes pour $f(x, t)$ en (2.21):

(i) Pour les solutions de 1-soliton, on utilise (2.22)

(ii) Pour les solutions de 2-soliton, on utilise

$$f(x, t) = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + a_{12}.e^{\theta_1+\theta_2} \quad (2.23)$$

(iii) Pour les solutions de 3-soliton, on utilise

$$f(x, t) = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + a_{12}.e^{\theta_1+\theta_2} + a_{13}.e^{\theta_1+\theta_3} + a_{23}.e^{\theta_2+\theta_3} + b_{123}.e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3} \quad (2.24)$$

Notons que nous utilisons (2.20) pour déterminer la relation de dispersion, (2.23) pour déterminer le facteur a_{12} à généraliser pour les autres facteurs a_{ij} dans f , et finalement (2.24) pour déterminer b_{123} , ce qui est principalement donné par $b_{123} = a_{12}a_{13}a_{23}$. La détermination des solutions de 3-soliton confirme le fait que les solutions de N -soliton existent pour tout ordre.

2.3 Équation KdV du 5^{ème} ordre

Dans cette section, on applique les quatre méthodes présentées dans la section précédente à une classe de l'équation KdV du 5^{ème} ordre (fKdV) donnée sous une forme généralisée

$$u_t + u_{xxxxx} + a u u_{xxx} + b u_x u_{xx} + c u^2 u_x = 0 \quad (2.25)$$

où a , b et c sont des paramètres réels et arbitraires non nuls, et $u = u(x, t)$ est une fonction suffisamment souvent différentiable. Les fameuses équations SK, CDG, Lax, KK et Ito, sont toutes de cette classe (voir 1.4.3.1). L'équation fKdV a de nombreuses applications en mécanique quantique et en optique non linéaire. Il est bien connu que les phénomènes d'ondes non linéaires des milieux plasma et de la dynamique des fluides sont modélisés par des solutions de *tanh* en forme de kink ou de *sech* en forme de cloche.

2.3.1 Utilisation de la méthode Tanh-coth

Nous réécrivons d'abord l'éq. (2.25) comme suit [Wazwaz, 2009]

$$u_t + u_{xxxxx} + a (u u_{xx})_x + \frac{b-a}{2} ((u_x)^2)_x + \frac{c}{3} (u^3)_x = 0 \quad (2.26)$$

En utilisant la variable d'onde $\xi = \mu x - \omega t$ et en intégrant une fois, l'éq. (2.26) est transformée en

$$-\omega u + \mu^5 u'''' + a \mu^3 u u'' + \frac{b-a}{2} \mu^3 (u')^2 + \frac{c}{3} \mu u^3 = 0 \quad (2.27)$$

En équilibrant les termes u'''' avec u^3 dans l'éq. (2.27) (voir 2.2.1), on obtient $m = 2$. Cela signifie que $u(x, t)$ peut être représentée par l'expansion

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^2 \alpha_i Y^i + \sum_{j=1}^2 \beta_j Y^{-j} \quad (2.28)$$

En substituant (2.28) à (2.27), en rassemblant les coefficients de Y , et en résolvant le système résultant, nous trouvons les ensembles de solutions suivants

i) La première série de paramètres est donnée par

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= -\frac{2}{3}\alpha_2, \quad \alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \omega = -\frac{2}{3}b\mu^3\alpha_2 - 24\mu^5 \\ c &= -\frac{6\mu^2(60\mu^2 + 2a\alpha_2 + b\alpha_2)}{\alpha_2^2}\end{aligned}\quad (2.29)$$

ii) La deuxième série de paramètres est donnée par

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= A, \quad A \text{ est une constante}, \quad \alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \alpha_2 = -\frac{60\mu^2}{a+b} \\ \omega &= \frac{\mu [a(a+b)^2\alpha_0^2 - 80a\mu^2(a+b)\alpha_0 + 80\mu^4(17a+2b)]}{10(a+b)} \\ c &= \frac{a(a+b)}{10}\end{aligned}\quad (2.30)$$

iii) La troisième série de paramètres est donnée par

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= -\frac{2}{3}\alpha_2, \quad \alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \alpha_2, \quad \omega = -\frac{32}{3}b\mu^3\alpha_2 - 384\mu^5 \\ c &= -\frac{6\mu^2(60\mu^2 + 2a\alpha_2 + b\alpha_2)}{\alpha_2^2}\end{aligned}\quad (2.31)$$

iv) La quatrième série de paramètres est donnée par

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= A, \quad A \text{ est une constante}, \quad \alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\frac{60\mu^2}{a+b}, \quad \beta_2 = -\frac{60\mu^2}{a+b} \\ \omega &= \frac{\mu [a(a+b)^2\alpha_0^2 - 80a\mu^2(a+b)\alpha_0 + 320\mu^4(-7a+8b)]}{10(a+b)} \\ c &= \frac{a(a+b)}{10}\end{aligned}\quad (2.32)$$

2.3.1.1 La première condition

La première et la troisième séries de paramètres sont exprimées en termes de μ et α_2 . Il est normal d'examiner le résultat obtenu pour c à partir de ces séries où l'on trouve

$$c\alpha_2^2 + 6\mu^2(2a+b)\alpha_2 + 360\mu^4 = 0 \quad (2.33)$$

Cette équation quadratique ne peut avoir de solutions réelles que si

$$(6\mu^2(2a+b))^2 \geq 1440c\mu^4 \quad (2.34)$$

qui donne la première condition, qu'on cherche, donnée par

$$c \leq \frac{(2a + b)^2}{40} \quad (2.35)$$

Cette condition nous permet d'utiliser plusieurs valeurs réelles pour c , même pour des valeurs fixes des paramètres a et b . Dans ce qui suit, on trouve des solutions de soliton pour toutes les formes de fKdV qui ont été présentées ci-dessus.

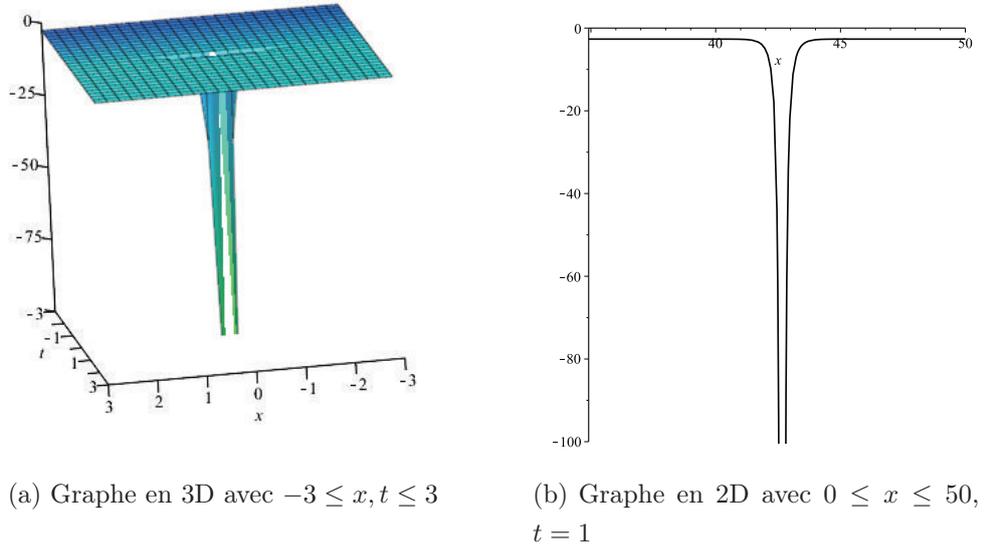


Figure 2.1: Graphes d'une solution d'onde solitaire sombre de u_1 pour $a = 10$, $b = 20$, $c = 30$, $\mu = 1$

Pour l'équation de Lax, $a = 10$, $b = 20$ et $c = 30$. Nous déterminons d'abord α_2 en utilisant (2.33) et par conséquent, la troisième série (2.31) donne

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_2 = -2\mu^2 \text{ ou } -6\mu^2 \\ \alpha_0 = \frac{4}{3}\mu^2 \text{ ou } 4\mu^2, \quad \omega = \frac{128}{3}\mu^5 \text{ ou } 896\mu^5 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Cela donne les solutions

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{4}{3}\mu^2 - 2\mu^2 \tanh^2 \left(\mu x - \frac{128}{3}\mu^5 t \right) - 2\mu^2 \coth^2 \left(\mu x - \frac{128}{3}\mu^5 t \right) \\ u_2(x, t) &= 4\mu^2 - 6\mu^2 \tanh^2 (\mu x - 896\mu^5 t) - 6\mu^2 \coth^2 (\mu x - 896\mu^5 t) \end{aligned} \quad (2.37)$$

où μ est un paramètre réel non nul.

Pour l'équation de SK, $a = b = c = 5$. On détermine d'abord α_2 en utilisant (2.33) et en continuant comme précédemment, on trouve

$$\begin{aligned}\alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_2 = -6\mu^2 \text{ ou } -12\mu^2 \\ \alpha_0 = 4\mu^2 \text{ ou } 8\mu^2, \quad \omega = -64\mu^5 \text{ ou } 256\mu^5\end{aligned}\tag{2.38}$$

Cela donne les deux solutions suivantes

$$\begin{aligned}u_1(x, t) = 4\mu^2 - 6\mu^2 \tanh^2(\mu x + 64\mu^5 t) - 6\mu^2 \coth^2(\mu x + 64\mu^5 t) \\ u_2(x, t) = 8\mu^2 - 12\mu^2 \tanh^2(\mu x - 256\mu^5 t) - 12\mu^2 \coth^2(\mu x - 256\mu^5 t)\end{aligned}\tag{2.39}$$

Pour l'équation de KK, $a = 10$, $b = 25$ et $c = 20$.

Procéder comme auparavant

$$\begin{aligned}\alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_2 = -\frac{3}{2}\mu^2 \text{ ou } -12\mu^2 \\ \alpha_0 = \mu^2 \text{ ou } 8\mu^2, \quad \omega = 16\mu^5 \text{ ou } 2816\mu^5\end{aligned}\tag{2.40}$$

Cela donne les solutions suivantes

$$\begin{aligned}u_1(x, t) = \mu^2 - \frac{3}{2}\mu^2 \tanh^2(\mu x - 16\mu^5 t) - \frac{3}{2}\mu^2 \coth^2(\mu x - 16\mu^5 t) \\ u_2(x, t) = 8\mu^2 - 12\mu^2 \tanh^2(\mu x - 2816\mu^5 t) - 12\mu^2 \coth^2(\mu x - 2816\mu^5 t)\end{aligned}\tag{2.41}$$

Pour l'équation de Ito, $a = 3$, $b = 6$ et $c = 2$.

En procédant comme précédemment, on trouve

$$\begin{aligned}\alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_2 = -6\mu^2 \text{ ou } -30\mu^2 \\ \alpha_0 = 4\mu^2 \text{ ou } 20\mu^2, \quad \omega = 0 \text{ ou } 1536\mu^5\end{aligned}\tag{2.42}$$

Cela donne les solutions suivantes

$$\begin{aligned}u_1(x, t) = 4\mu^2 - 6\mu^2 \tanh^2(\mu x) - 6\mu^2 \coth^2(\mu x) \\ u_2(x, t) = 20\mu^2 - 30\mu^2 \tanh^2(\mu x - 1536\mu^5 t) - 30\mu^2 \coth^2(\mu x - 1536\mu^5 t)\end{aligned}\tag{2.43}$$

Pour l'équation de CDG, $a = 30$, $b = 30$ et $c = 180$.

En procédant comme précédemment.

2.3.1.2 La deuxième condition

Dans (2.32), nous avons obtenu l'ensemble suivant

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= A, \quad A \text{ est une constante, } \alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\frac{60\mu^2}{a+b}, \quad \beta_2 = -\frac{60\mu^2}{a+b} \\ \omega &= \frac{\mu [a(a+b)^2 \alpha_0^2 - 80a\mu^2 (a+b) \alpha_0 + 320\mu^4 (-7a+8b)]}{10(a+b)} \\ c &= \frac{a(a+b)}{10} \end{aligned} \quad (2.44)$$

comme quatrième ensemble de valeurs pour les paramètres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \omega$ et c . Il ressort clairement de cet ensemble que nous avons une valeur unique pour c pour les valeurs fixes de a et b . Cette valeur fixe pour c est justifiée uniquement pour les équations Lax, SK et CDG. Une modification pour les valeurs de c doit être définie pour les équations KK et Ito afin d'obtenir des solutions pour les variantes de ces équations. Il est évident qu'une seule solution de soliton est obtenue pour les équations Lax, SK et CDG.

Pour l'équation de Lax en utilisant (2.44) nous trouvons

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= A, \quad \alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_2 = -2\mu^2 \\ \omega &= 2\mu (15\alpha_0^2 - 40\mu^2\alpha_0 + 48\mu^4) \end{aligned} \quad (2.45)$$

où μ est laissé comme paramètre libre. Cela donne la solution

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \alpha_0 - 2\mu^2 \tanh^2 (\mu x - 2\mu (15\alpha_0^2 - 40\mu^2\alpha_0 + 48\mu^4) t) \\ &\quad - 2\mu^2 \coth^2 (\mu x - 2\mu (15\alpha_0^2 - 40\mu^2\alpha_0 + 48\mu^4) t) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Pour l'équation de SK nous trouvons

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= A, \quad \alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_2 = -6\mu^2 \\ \omega &= 2\mu (5\alpha_0^2 - 40\mu^2\alpha_0 + 16\mu^4) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Cela donne la solution

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \alpha_0 - 6\mu^2 \tanh^2 (\mu x - 2\mu (5\alpha_0^2 - 40\mu^2\alpha_0 + 16\mu^4) t) \\ &\quad - 6\mu^2 \coth^2 (\mu x - 2\mu (5\alpha_0^2 - 40\mu^2\alpha_0 + 16\mu^4) t) \end{aligned} \quad (2.48)$$

De même, **pour l'équation de CDG**.

2.3.2 Utilisation de la méthode des équations de Riccati projectives généralisées

Nous cherchons des solutions de l'éq. (2.25) sous la forme [Salas *et al.*, 2010]

$$\begin{cases} u(x, t) = u(\xi) \\ \xi = x + \omega t + \xi_0 \end{cases} \quad (2.49)$$

où ξ_0 est une constante arbitraire.

On obtient ainsi que l'éq. (2.25) est réduite à l'équation

$$\omega u'(\xi) + u''''(\xi) + au(\xi)u'''(\xi) + bu'(\xi)u''(\xi) + cu^2(\xi)u'(\xi) = 0 \quad (2.50)$$

Pour obtenir une solution exacte pour l'éq. (2.50), on utilise la méthode de l'équation de Riccati projective, qui décrite dans les étapes suivantes:

Étape 1. Nous considérons les solutions de (2.50) sous la forme

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{j=1}^m \sigma^{j-1}(\xi) (a_j \sigma(\xi) + b_j \tau(\xi)) \quad (2.51)$$

où $\sigma(\xi)$, $\tau(\xi)$ satisfont le système

$$\begin{cases} \sigma'(\xi) = \varepsilon \sigma(\xi) \tau(\xi) \\ \tau'(\xi) = \varepsilon \tau^2(\xi) - \mu \sigma(\xi) + R \end{cases} \quad (2.52)$$

Où

$$\tau^2(\xi) = -\varepsilon \left(R - 2\mu\sigma(\xi) + \frac{\mu^2 + r}{R} \sigma^2(\xi) \right), \quad \varepsilon = \pm 1, \quad r = \pm 1, \quad R \neq 0 \quad (2.53)$$

Étape 2. En substituant (2.51), avec (2.52) et (2.53) en (2.50) et en rassemblant tous les termes ayant la même puissance dans $\sigma^j(\xi) \tau^i(\xi)$, on obtient un polynôme dans les deux variables $\sigma(\xi)$ et $\tau(\xi)$. Ce polynôme a la forme

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \sigma^{m+5}(\xi) + \alpha_2 \sigma^{2m+3}(\xi) + \alpha_3 \sigma^{m+4}(\xi) \tau(\xi) + \alpha_4 \sigma^{3m+1}(\xi) \\ & + \alpha_5 \sigma^{2m+2}(\xi) \tau(\xi) + \text{termes inférieurs} = 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Nous supposons que $m \geq 1$ pour éviter les solutions insignifiantes.

Les degrés des termes les plus élevés sont $m + 5$ (le degré des termes $\alpha_1 \sigma^{m+5}(\xi)$)

et $\alpha_3\sigma^{m+4}(\xi)\tau(\xi)$, $2m+3$ (le degré du terme $\alpha_2\sigma^{2m+3}(\xi)$ et $\alpha_5\sigma^{2m+2}(\xi)\tau(\xi)$) et $3m+1$ (le degré du terme $\alpha_4\sigma^{3m+1}(\xi)$). Il y a deux valeurs entières de m pour lesquelles $3m+1 = 2m+3$ ou $3m+1 = m+5$ ou $2m+3 = m+5$, soit $m = 1$ et $m = 2$. Nous allons trouver des solutions pour $m = 1$ (le cas $m = 2$ n'est pas considéré ici). Quand $m = 1$ les solutions ont la forme

$$u(\xi) = a_0 + a_1\sigma(\xi) + b_1\tau(\xi) \quad (2.55)$$

dans (2.54) en égalant les coefficients de chaque puissance de $\sigma(\xi)$ et de chaque terme de la forme $\sigma^j(\xi)\tau(\xi)$ à zéro, on obtient un système algébrique pour les variables a_0 , a_1 , b_1 , ω , et μ .

Etape 3. Résoudre le système obtenu dans l'étape précédente, nous obtenons $b_1 = 0$, donc les solutions ont la forme $u(\xi) = a_0 + a_1\sigma(x + \omega t + \xi_0)$.

On a les solutions suivantes de l'éq. (2.25), où

$$A = 2a + b + \sqrt{(2a + b)^2 - 40c}, \quad B = \frac{12c - Ab}{8c}, \quad C = \frac{3A - 10b}{2A} \quad (2.56)$$

Cas 1: Si $\varepsilon = -1$ et $r = -1$

- $a_0 = -\frac{10R}{A}$, $a_1 = \frac{60}{A}$, $\omega = CR^2$, $\mu = 1$:

$$u_1(x, t) = -\frac{10R}{A} \left(1 - 3\operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{R}(x + CR^2t + \xi_0) \right) \right) \quad (2.57)$$

- $a_0 = -\frac{AR}{4c}$, $a_1 = \frac{3A}{2c}$, $\omega = BR^2$, $\mu = 1$:

$$u_2(x, t) = -\frac{AR}{4c} \left(1 - 3\operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{R}(x + BR^2t + \xi_0) \right) \right) \quad (2.58)$$

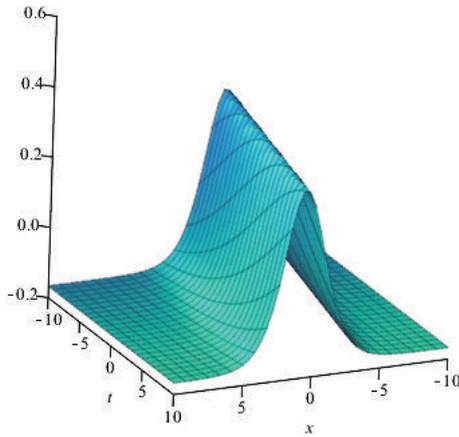
- $a_0 = -\frac{10R}{A}$, $a_1 = -\frac{60}{A}$, $\omega = CR^2$, $\mu = -1$:

$$u_3(x, t) = -\frac{10R}{A} \left(1 + 3\operatorname{csch}^2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{R}(x + CR^2t + \xi_0) \right) \right) \quad (2.59)$$

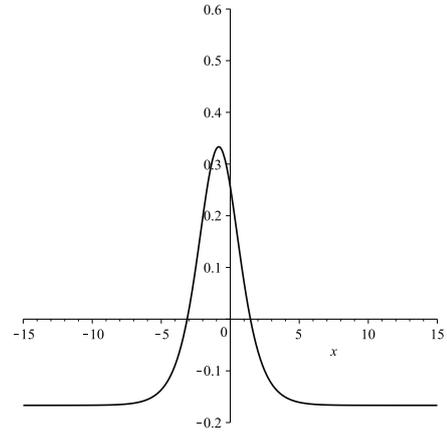
- $a_0 = -\frac{AR}{4c}$, $a_1 = -\frac{3A}{2c}$, $\omega = BR^2$, $\mu = -1$:

$$u_4(x, t) = -\frac{AR}{4c} \left(1 + 3\operatorname{csch}^2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{R}(x + BR^2t + \xi_0) \right) \right) \quad (2.60)$$

2.3 Équation KdV du 5^{ème} ordre

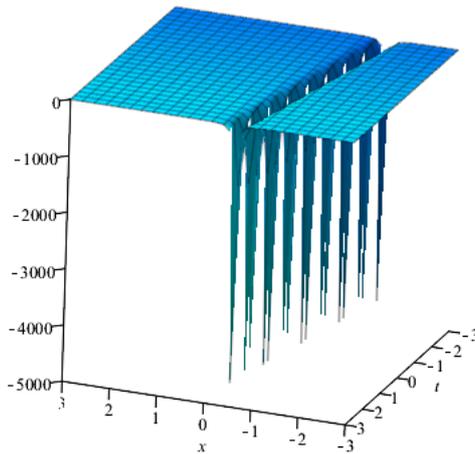


(a) Graphe en 3D avec $-10 \leq x, t \leq 10$

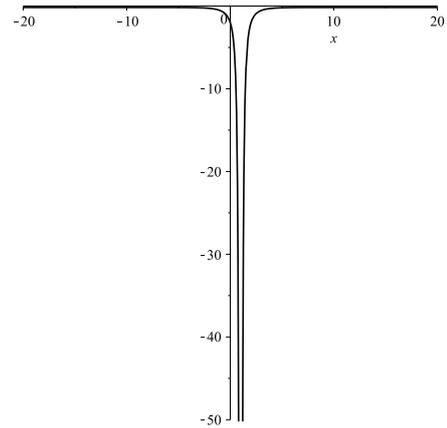


(b) Graphe en 2D avec $-15 \leq x \leq 15$, $t = 1$

Figure 2.2: Graphes d'une solution de type soliton de u_1 pour $a = 10$, $b = 20$, $c = 30$, $\varepsilon = -1$, $r = -1$, $R = 1$, $\xi_0 = 1$



(a) Graphe en 3D avec $-3 \leq x, t \leq 3$



(b) Graphe en 2D avec $-20 \leq x \leq 20$, $t = 12$

Figure 2.3: Graphes d'une solution d'onde solitaire sombre de u_3 pour $a = 10$, $b = 20$, $c = 30$, $\varepsilon = -1$, $r = -1$, $R = 1$, $\xi_0 = 1$

Cas 2: Si $\varepsilon = -1$ et $r = 1$

- $a_0 = -\frac{10R}{A}$, $a_1 = -\frac{60i}{A}$, $\omega = CR^2$, $\mu = -i$:

$$u_5(x, t) = \frac{10R}{A} \left(5 - \frac{6}{1 - \csc(\sqrt{-R}(x + CR^2t + \xi_0))} \right) \quad (2.61)$$

- $a_0 = -\frac{AR}{4c}$, $a_1 = -\frac{3Ai}{2c}$, $\omega = BR^2$, $\mu = -i$:

$$u_6(x, t) = \frac{AR}{4c} \left(5 - \frac{6}{1 - \csc(\sqrt{-R}(x + BR^2t + \xi_0))} \right) \quad (2.62)$$

- $a_0 = -\frac{10R}{A}$, $a_1 = \frac{60i}{A}$, $\omega = CR^2$, $\mu = i$:

$$u_7(x, t) = \frac{10R}{A} \left(5 - \frac{6}{1 + \csc(\sqrt{-R}(x + CR^2t + \xi_0))} \right) \quad (2.63)$$

- $a_0 = -\frac{AR}{4c}$, $a_1 = \frac{3Ai}{2c}$, $\omega = BR^2$, $\mu = i$:

$$u_8(x, t) = \frac{AR}{4c} \left(5 - \frac{6}{1 + \csc(\sqrt{-R}(x + BR^2t + \xi_0))} \right) \quad (2.64)$$

Cas 3: Si $\varepsilon = 1$ et $r = -1$

- $a_0 = \frac{10R}{A}$, $a_1 = -\frac{60}{A}$, $\omega = CR^2$, $\mu = 1$:

$$u_9(x, t) = \frac{10R}{A} \left(1 - 3 \sec^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{R}(x + CR^2t + \xi_0) \right) \right) \quad (2.65)$$

$$u_{10}(x, t) = -\frac{10R}{A} \left(5 - \frac{6}{1 + \csc(\sqrt{R}(x + CR^2t + \xi_0))} \right) \quad (2.66)$$

- $a_0 = \frac{AR}{4c}$, $a_1 = -\frac{3A}{2c}$, $\omega = BR^2$, $\mu = 1$:

$$u_{11}(x, t) = \frac{AR}{4c} \left(1 - 3 \sec^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{R}(x + BR^2t + \xi_0) \right) \right) \quad (2.67)$$

$$u_{12}(x, t) = -\frac{AR}{4c} \left(5 - \frac{6}{1 + \csc(\sqrt{R}(x + BR^2t + \xi_0))} \right) \quad (2.68)$$

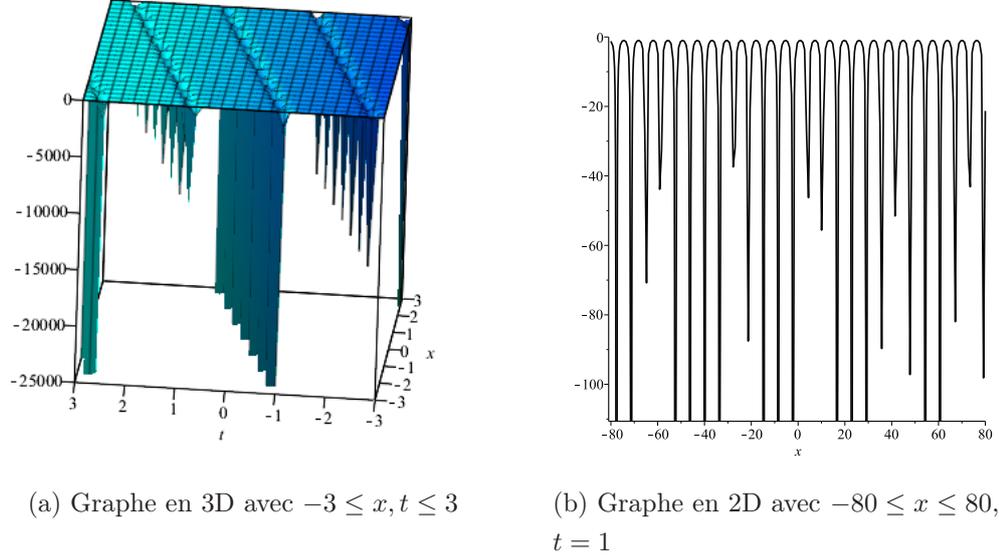


Figure 2.4: Graphes d'une solution de type cuspside périodique sombre de u_6 pour $a = 10$, $b = 20$, $c = 30$, $\varepsilon = -1$, $r = 1$, $R = 1$, $\xi_0 = 1$

- $a_0 = \frac{10R}{A}$, $a_1 = \frac{60}{A}$, $\omega = CR^2$, $\mu = -1$:

$$u_{13}(x, t) = \frac{10R}{A} \left(1 - 3 \csc^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{R} (x + CR^2t + \xi_0) \right) \right) \quad (2.69)$$

$$u_{14}(x, t) = -\frac{10R}{A} \left(5 - \frac{6}{1 - \csc \left(\sqrt{R} (x + CR^2t + \xi_0) \right)} \right) \quad (2.70)$$

- $a_0 = \frac{AR}{4c}$, $a_1 = \frac{3A}{2c}$, $\omega = BR^2$, $\mu = -1$:

$$u_{15}(x, t) = \frac{AR}{4c} \left(1 - 3 \csc^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{R} (x + BR^2t + \xi_0) \right) \right) \quad (2.71)$$

$$u_{16}(x, t) = -\frac{AR}{4c} \left(5 - \frac{6}{1 - \csc \left(\sqrt{R} (x + BR^2t + \xi_0) \right)} \right) \quad (2.72)$$

2.3.3 Utilisation de la méthode de la fonction hyperbolique étendue

L'équation générale fKdV (2.25) peut être convertie en EDO [Wei, 2009]

$$-\omega u + k^5 u'''' + ak^3 uu'' + \frac{b-a}{2}k^3 (u')^2 + \frac{c}{3}ku^3 = 0 \quad (2.73)$$

en utilisant la variable d'onde $\xi = kx - \omega t$ et en l'intégrant une fois.

En équilibrant les termes u'''' et u^3 dans l'éq. (2.73) (voir 2.2.3), on obtient $n = 2$. Cela signifie que $u(x, t)$ peut être représentée par un polynôme

$$u(x, t) = u(\xi) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 \quad (2.74)$$

On met (2.74) à (2.73), en rassemblant les coefficients de e^ξ , et en résolvant le système résultant, nous trouvons les ensembles de solutions suivants:

i) Pour $Y = \frac{\alpha e^\xi - \beta e^{-\xi}}{\alpha e^\xi + \beta e^{-\xi}}$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{4k^2((a+b)A - 20)}{b + \sqrt{(2a+b)^2 - 40c}}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -3k^2 A \\ \omega &= -\frac{4k^5[(16bc - 2ab^2 - b^3 - a^2b)A + 12a^2 + 20b^2 - 120c]}{2a^2 + bA - 20c} \end{aligned} \quad (2.75)$$

où

$$A = \frac{(2a+b) \pm \sqrt{(2a+b)^2 - 40c}}{c} \quad (2.76)$$

Cela donne la solution

$$u(x, t) = a_0 + a_2 \left(\frac{\alpha e^{kx-\omega t} - \beta e^{-kx+\omega t}}{\alpha e^{kx-\omega t} + \beta e^{-kx+\omega t}} \right)^2 \quad (2.77)$$

où a_0 , a_2 et ω sont donnés par (2.75) et k est un paramètre.

ii) Pour $Y = \frac{1}{\alpha e^\xi + \beta e^{-\xi}}$:

$$a_0 = k^2 B, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{24\alpha\beta k^2 (aB + 20)}{b - \sqrt{(2a+b)^2 - 40c}}, \quad \omega = -2k^5 (bB + 12) \quad (2.78)$$

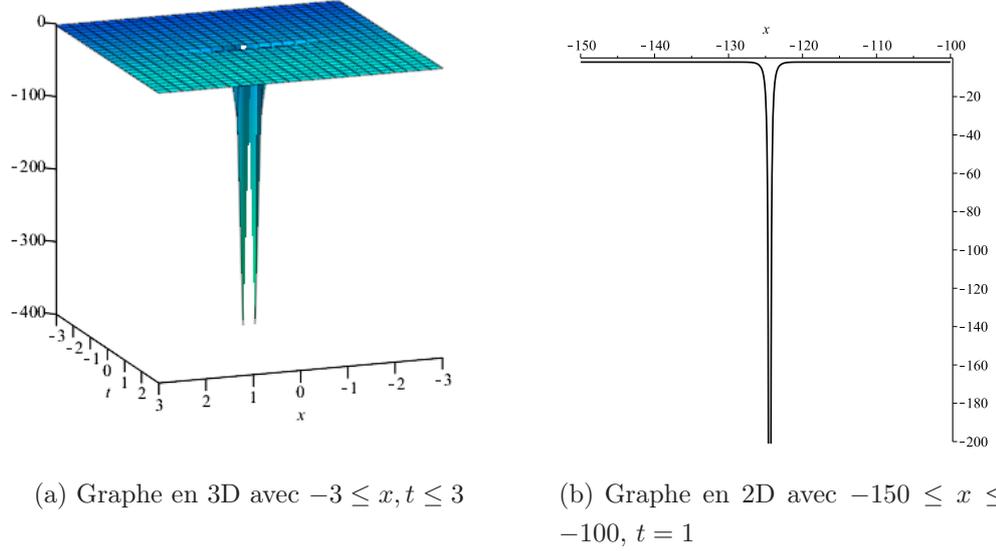


Figure 2.5: Graphes d'une solution d'onde solitaire sombre de u_2 pour $a = 10$, $b = 20$, $c = 30$, $A = 2$, $a_0 = 4$, $a_2 = -6$, $\omega = -\frac{1120}{9}$, $k = 1$

où

$$B = \frac{-(2a + b) \pm \sqrt{(2a + b)^2 - 40c}}{c} \quad (2.79)$$

Cela donne la solution

$$u(x, t) = a_0 + \frac{a_2}{(\alpha e^{kx - \omega t} + \beta e^{-kx + \omega t})^2} \quad (2.80)$$

où a_0 , a_2 et ω sont donnés par (2.78) et k est un paramètre.

Il faut souligner que (2.77) et (2.80) donnent plusieurs nouvelles solutions et plus générales en sélectionnant différents paramètres libres α et β , dont celui de solutions de solitons réelles et complexes, régulières et singulières. Par exemple

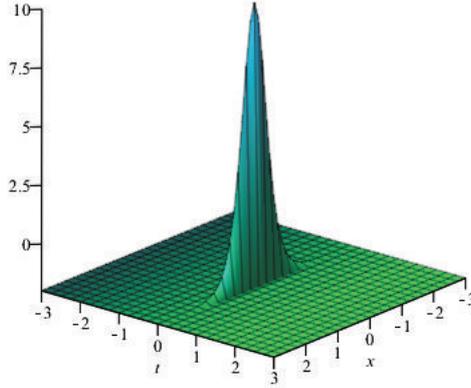
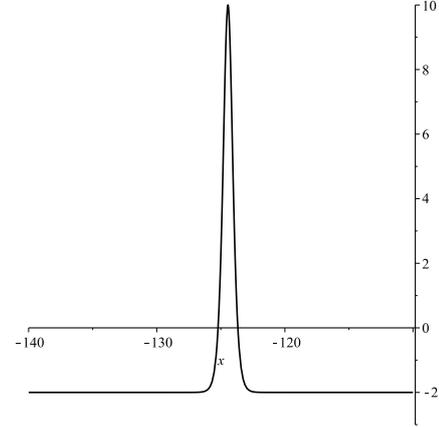

 (a) Graphe en 3D avec $-3 \leq x, t \leq 3$

 (b) Graphe en 2D avec $-140 \leq x \leq -110, t = 1$

Figure 2.6: Graphes d'une solution de type soliton de $Re u_3$ pour $a = 10$,
 $b = 20, c = 30, A = 2, a_0 = 4, a_2 = -6, \omega = -\frac{1120}{9}, k = 1$

a) pour $\beta = \alpha, \beta = -\alpha, \beta = \alpha i$ ou $\beta = -\alpha i$, (2.77) est réduit à

$$\begin{aligned}
 u_1(x, t) &= a_0 + a_2 \tanh^2(\xi) \\
 u_2(x, t) &= a_0 + a_2 \coth^2(\xi) \\
 u_3(x, t) &= a_0 + a_2 (\tanh^2(2\xi) - \operatorname{sech}^2(2\xi) - 2i \tanh(2\xi) \operatorname{sech}(2\xi)) \\
 u_4(x, t) &= a_0 + a_2 (\tanh^2(2\xi) - \operatorname{sech}^2(2\xi) + 2i \tanh(2\xi) \operatorname{sech}(2\xi))
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

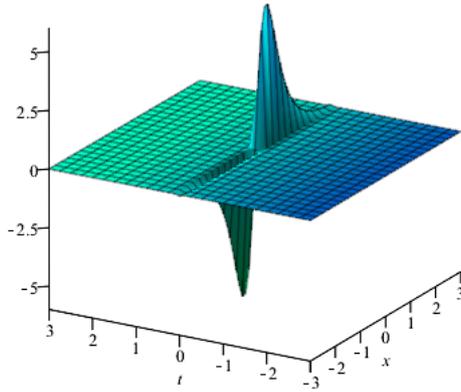
où a_0, a_2 et ω sont donnés par (2.75), $\xi = kx - \omega t$ et k est un paramètre.

b) pour $\beta = \alpha, \beta = -\alpha, \beta = \alpha i$ ou $\beta = -\alpha i$, (2.80) est réduit à

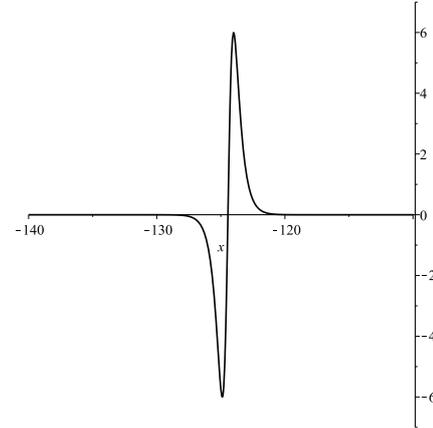
$$\begin{aligned}
 u_5(x, t) &= a_0 + \frac{a_2}{4\alpha^2} \operatorname{sech}^2(kx - \omega t) \\
 u_6(x, t) &= a_0 + \frac{a_2}{4\alpha^2} \operatorname{csch}^2(kx - \omega t) \\
 u_7(x, t) &= a_0 + \frac{a_2}{\alpha^2 (e^{kx - \omega t} - e^{-kx + \omega t} + 2i)} \\
 u_8(x, t) &= a_0 + \frac{a_2}{\alpha^2 (e^{kx - \omega t} - e^{-kx + \omega t} - 2i)}
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

où a_0, a_2 et ω sont donnés par (2.78) et k est un paramètre.

2.3 Équation KdV du 5^{ème} ordre

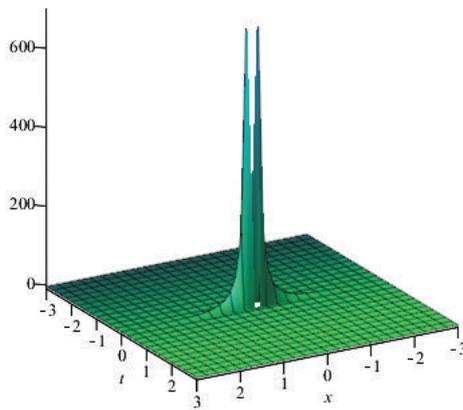


(a) Graphe en 3D avec $-3 \leq x, t \leq 3$

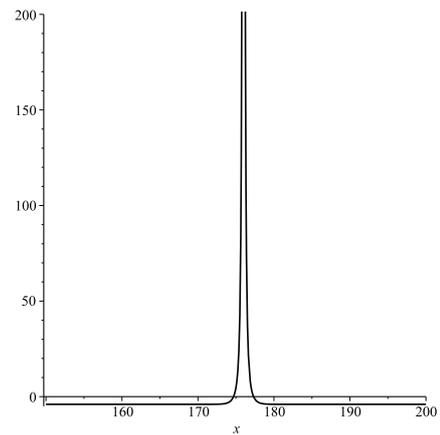


(b) Graphe en 2D avec $-140 \leq x \leq -110$, $t = 1$

Figure 2.7: Graphes d'une solution de type soliton singulier de $Im u_3$ pour $a = 10$, $b = 20$, $c = 30$, $A = 2$, $a_0 = 4$, $a_2 = -6$, $\omega = -\frac{1120}{9}$, $k = 1$



(a) Graphe en 3D avec $-3 \leq x, t \leq 3$



(b) Graphe en 2D avec $150 \leq x \leq 200$, $t = 1$

Figure 2.8: Graphes d'une solution d'onde solitaire de u_6 pour $a = 10$, $b = 25$, $c = 20$, $B = -4$, $a_0 = -4$, $a_2 = 48$, $\omega = -176$, $k = 1$, $\alpha = \beta = 1$

2.3.4 Utilisation de la version simplifiée de la méthode de Hirota

Dans cette sous-section, nous examinons les solutions de N -soliton de l'équation fKdV [Wei, 2009].

En substituant (2.20) aux termes linéaires de l'équation fKdV (2.25), on obtient facilement la relation de dispersion

$$\omega_i = k_i^5, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.83)$$

et donc θ_i devient

$$\theta_i = k_i x - k_i^5 t \quad (2.84)$$

Pour déterminer R qui se trouve dans (2.21), on substitue (2.21) dans (2.25) et on note que $f(x, t) = 1 + e^{k_1 x - k_1^5 t}$ dans ce cas, on trouve

$$60 - aR - bR = 0, \quad -300 + 11aR + 5bR - cR^2 = 0 \quad (2.85)$$

Cela donne

$$R = \frac{60}{a + b} \quad (2.86)$$

et la condition de contrainte entre les paramètres de l'équation

$$10c = a(b + a) \quad (2.87)$$

Ainsi, la solution de 1-soliton est donnée par

$$u(x, t) = R (\ln f(x, t))_{xx} = \frac{60k_1^2 e^{k_1 x - k_1^5 t}}{(a + b) (1 + e^{k_1 x - k_1^5 t})^2} \quad (2.88)$$

Pour les solutions de 2-soliton, nous supposons que

$$f(x, t) = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + a_{12} e^{\theta_1 + \theta_2} \quad (2.89)$$

où θ_1 et θ_2 sont donnés par (2.84), et substituer

$$u(x, t) = \frac{60}{(a + b)} (\ln f(x, t))_{xx} \quad (2.90)$$

dans l'équation fKdV (2.25) pour déterminer le coefficient a_{12} . A l'aide de Maple, nous obtenons

$$a_{12} = 1 - \frac{60 [a (k_1^5 k_2^2 + k_1^2 k_2^5) + b (k_1^4 k_2^3 + k_1^3 k_2^4)]}{(a + b) (k_1 + k_2)^2 [(k_1 + k_2)^5 - (k_1^5 + k_2^5)]} \quad (2.91)$$

et on peut donc obtenir que pour $1 \leq i < j \leq N$

$$a_{ij} = 1 - \frac{60 [a (k_i^5 k_j^2 + k_i^2 k_j^5) + b (k_i^4 k_j^3 + k_i^3 k_j^4)]}{(a + b) (k_i + k_j)^2 [(k_i + k_j)^5 - (k_i^5 + k_j^5)]} \quad (2.92)$$

Notons que la condition $10c = a(b+a)$ est utilisée dans les calculs ci-dessus. Ainsi nous obtenons

$$f(x, t) = 1 + e^{k_1 x - k_1^5 t} + e^{k_2 x - k_2^5 t} + \left(1 - \frac{60 [a (k_1^5 k_2^2 + k_1^2 k_2^5) + b (k_1^4 k_2^3 + k_1^3 k_2^4)]}{(a + b) (k_1 + k_2)^2 [(k_1 + k_2)^5 - (k_1^5 + k_2^5)]} \right) e^{(k_1 + k_2)x - (k_1^5 + k_2^5)t} \quad (2.93)$$

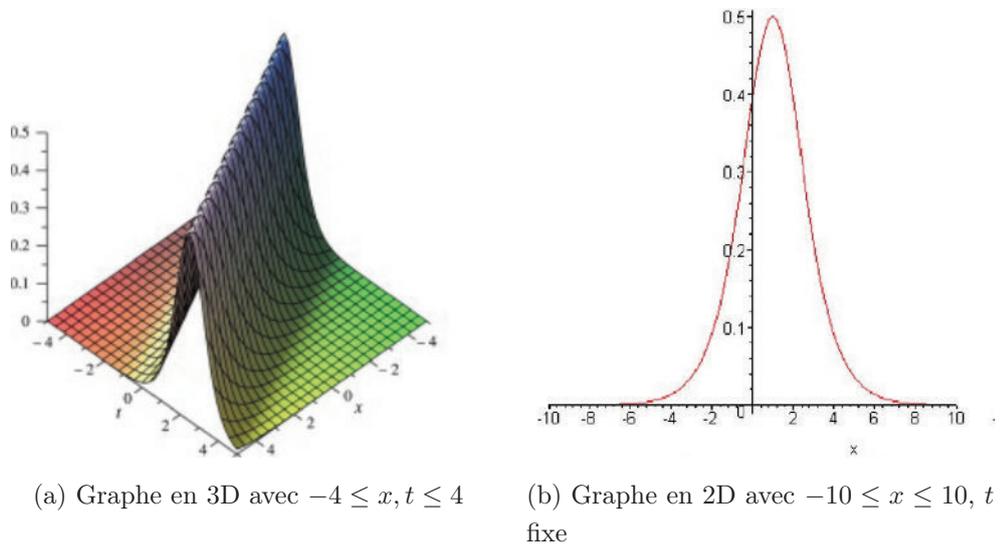
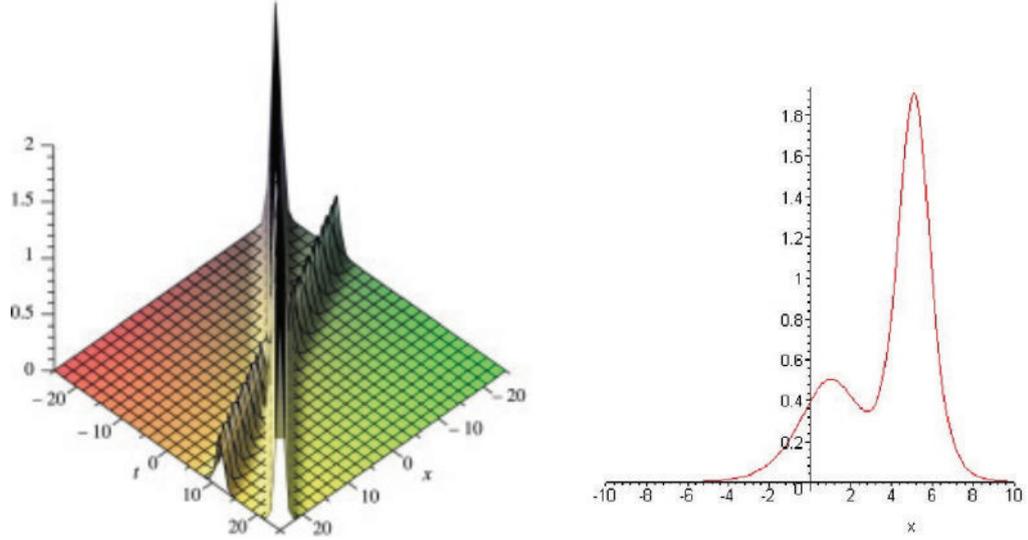


Figure 2.9: Une solution de 1-soliton

Maintenant, en substituant le dernier résultat pour $f(x, t)$ en (2.90), nous pouvons obtenir les solutions de 2-soliton explicitement.



(a) Graphe en 3D avec $-20 \leq x, t \leq 20$

(b) Graphe en 2D avec $-10 \leq x \leq 10$, t fixe

Figure 2.10: Une solution de 2-soliton

De même, pour déterminer les solutions de 3-soliton, nous fixons

$$f(x, t) = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3} + a_{12}e^{\theta_1+\theta_2} + a_{13}e^{\theta_1+\theta_3} + a_{23}e^{\theta_2+\theta_3} + b_{123}e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3} \quad (2.94)$$

dans (2.90) et le substituer dans l'équation fKdV (2.25) pour trouver que

$$b_{123} = a_{12}a_{13}a_{23} \quad (2.95)$$

Pour trouver explicitement les solutions de 3-soliton, on substitue le dernier résultat pour $f(x, t)$ dans (2.90). Les solutions de soliton de niveau supérieur, pour $N \geq 4$, peuvent être obtenues en parallèle. Ceci confirme que l'équation fKdV est totalement intégrable et donne lieu à des solutions de N -soliton de tout ordre à condition que $10c = a(b + a)$.

Nous insistons à nouveau sur les trois faits présentés précédemment:

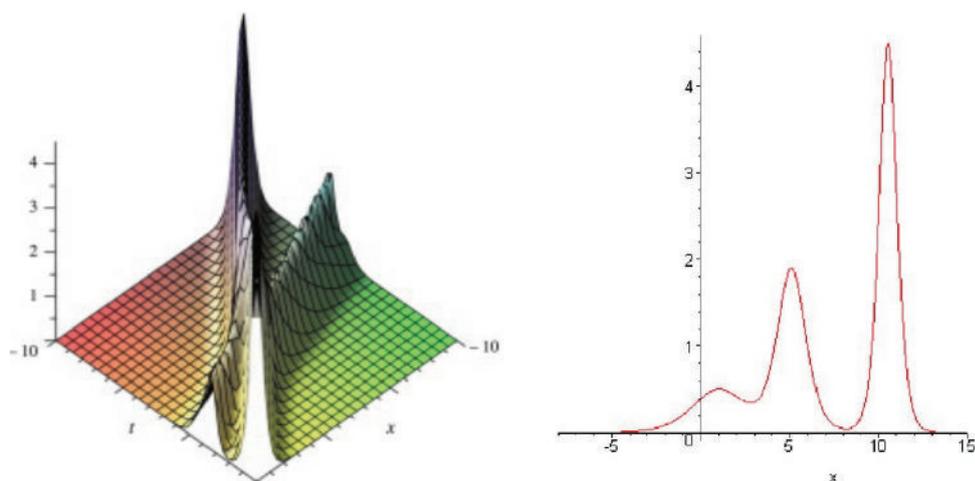
i) La première est que les solutions de soliton ne sont que des polynômes d'exponentielles comme le souligne Hirota.

ii) La solution de 3-soliton et la solution de N -soliton de niveau supérieur ne

2.4 Lois de conservation pour la classe générale d'équation fKdV

contiennent plus de nouveaux paramètres libres autres que a_{ij} de la solution de 2-soliton.

iii) Chaque équation qui a des solutions génériques de 3-soliton, alors elle a aussi des solutions de N -soliton pour tout $N \geq 4$.



(a) Graphe en 3D avec $-10 \leq x, t \leq 10$

(b) Graphe en 2D avec $-5 \leq x \leq 15$, t fixe

Figure 2.11: Une solution de 3-soliton

Les figures 2.9, 2.10, 2.11 ci-dessus montre des graphes de solutions d'un, deux et trois soliton.

2.4 Lois de conservation pour la classe générale d'équation fKdV

Dans les sections 2.2 et 2.3 de ce chapitre, quelques méthodes sont présentées pour trouver des solutions d'ondes progressive pour l'équation fKdV. L'existence d'un nombre suffisamment important (en principe infini) de lois de conservation de type (1.21) assure l'intégrabilité complète d'une EENL. En retour, les EDPs complètement intégrables ont des solutions de N -soliton.

2.4 Lois de conservation pour la classe générale d'équation fKdV

Dans cette section, les lois de conservation sont calculées [Nuseir, 1995] pour une classe générale d'équation fKdV. L'objectif est de retrouver les conditions d'intégrabilité complète et l'existence de solutions de N -soliton dans l'élaboration des lois de conservation.

En étudiant les lois de conservation de l'équation fKdV (2.25) qui peut s'écrire comme suit

$$u_t + \left(\frac{c}{3}u^3 + \frac{b-a}{2}(u_x)^2 + auu_{xx} + u_{xxxx} \right)_x = 0 \quad (2.96)$$

on peut voir que les formes pour la densité et le flux sont

$$T_1 = u, \text{ et } X_1 = \frac{c}{3}u^3 + \frac{b-a}{2}(u_x)^2 + auu_{xx} + u_{xxxx} \quad (2.97)$$

Pour trouver la deuxième loi de conservation, supposons $T_2 = u^2$. En suivant la même procédure que pour le cas KdV (voir section 1.3), on calcule

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_2}{\partial t} + \left(\frac{c}{2}u^4 + 2au^2u_{xx} + 2uu_{xxxx} - u_xu_{xxx} + \frac{1}{2}(u_{xx})^2 + (b-2a)u(u_x)^2 \right)_x \\ - (b-2a)(u_x)^3 = 0 \end{aligned} \quad (2.98)$$

ce qui implique que pour $b = 2a$, une seconde loi de conservation est obtenue avec

$$X_2 = \frac{c}{2}u^4 + 2au^2u_{xx} + 2uu_{xxxx} - u_xu_{xxx} + \frac{1}{2}(u_{xx})^2 \quad (2.99)$$

Notez que la condition $b = 2a$ est satisfaite pour les équations Lax et Ito, mais pas pour les équations SK, CDG et KK.

Pour trouver la troisième loi de conservation, commencez par

$$T_3 = \frac{1}{3}u^3 + A(u_x)^2$$

Après un calcul fastidieux, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_3}{\partial t} + \left(\frac{c}{5}u^5 - au^3u_{xx} - \frac{1}{2}(3a-b-2Ac)u^2(u_x)^2 \right)_x \\ + \left((2+2Ab)(u_x)^2u_{xx} - (1+2Aa)u(u_{xx})^2 + (2+2Aa)uu_xu_{xxx} \right)_x \\ - \left(u^2u_{xxxx} + A(u_{xxx})^2 - 2Au_{xx}u_{xxxx} + 2Au_xu_{xxxxx} \right)_x \\ + \left((3a-b+2Ac)u(u_x)^3 + (Aa-2Ab-5)u_x(u_{xx})^2 \right)_x = 0 \end{aligned} \quad (2.100)$$

Le dernier terme disparaîtra, à condition que

$$A = \frac{b-3a}{2c} = \frac{5}{a-2b} \quad (2.101)$$

2.4 Lois de conservation pour la classe générale d'équation fKdV

ce qui conduit à

$$c = \frac{1}{10} (a - 2b) (b - 3a) \quad (2.102)$$

Cette condition (2.102) est satisfaite pour les équations Lax, SK, CDG et KK. Mais les constantes de l'équation Ito ne remplissent pas la condition.

Pour trouver la prochaine loi de conservation, prenez

$$T_4 = \frac{1}{4} u^4 + Au (u_x)^2 + Bu (u_{xx})^2 \quad (2.103)$$

et calculer

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T_4}{\partial t} + \left(\frac{c}{6} u^6 - \frac{1}{2} (4a - b - 2Ac) u^3 (u_x)^2 + \frac{1}{4} (Aa - Ab + 4Bc - 6) (u_x)^4 \right)_x \\ & + \left(au^4 u_{xx} - (2a + 2Ab - c) u (u_x)^2 u_{xx} - \frac{1}{2} (2Aa - 2Bc - 3) u^2 (u_{xx})^2 \right)_x \\ & + \left(\frac{4}{3} (Bb - A) (u_{xx})^3 + (2Aa - 3) u^2 u_x u_{xxx} - (2Ba - 2Bb - 4A) u_x u_{xx} u_{xxx} \right)_x \\ & + \left(u^3 u_{xxxx} - Au_x u_{xxxx} + (2Ba - 2A) uu_{xx} u_{xxxx} + B (u_{xxxx})^2 - (Ba - A) u (u_{xxx})^2 \right)_x \\ & + \left(2Auu_x u_{xxxx} - 2Bu_{xxx} u_{xxxx} + 2Bu_{xx} u_{xxxx} \right)_x - \frac{1}{2} (3b - 12a - 4Ac) u^2 (u_x)^3 \\ & + (4Aa - 2Ab + 10Bc - 15) uu_x (u_{xx})^2 - (Ba + 2Bb + 5A) u_x (u_{xxx})^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.104)$$

Le rejet des termes non intégrables entraîne les conditions suivantes:

$$3b - 12a - 4Ac = 0 \quad (2.105)$$

$$4Aa - 2Ab + 10Bc - 15 = 0 \quad (2.106)$$

$$Ba + 2Bb + 5A = 0 \quad (2.107)$$

Résoudre la première condition (2.105) pour A résulte en

$$A = \frac{3(b - 4a)}{4c} \quad (2.108)$$

De plus, la résolution (2.106) et (2.107) pour B donne les résultats suivants

$$B = \frac{2Ab - 4Aa + 15}{10c} \quad (2.109)$$

$$= -\frac{5A}{2b + a} \quad (2.110)$$

L'égalité (2.109) et (2.110), suivie de la substitution de A à partir de (2.108), conduit à deux cas, qui doivent être examinés séparément.

Cas 1: Quand $b = 2a$

2.4 Lois de conservation pour la classe générale d'équation fKdV

les valeurs de A et B sont

$$A = -\frac{3a}{2c}, \quad B = \frac{3}{2c} \quad (2.111)$$

Avec les valeurs ci-dessus, la forme de T_4 est

$$T_4 = \frac{1}{4}u^4 - \frac{3a}{2c}u(u_x)^2 + \frac{3}{2c}u(u_{xx})^2 \quad (2.112)$$

et ce cas correspond à l'équation de Lax.

Cas 2: Quand $c = -\frac{1}{45}(b-4a)(2b+a)$

qui détermine A et B comme suit

$$A = -\frac{135}{4(2b+a)}, \quad B = \frac{675}{4(2b+a)^2} \quad (2.113)$$

Par conséquent,

$$T_4 = \frac{1}{4}u^4 - \frac{135}{4(2b+a)}u(u_x)^2 + \frac{675}{4(2b+a)^2}u(u_{xx})^2 \quad (2.114)$$

qui est la quatrième densité pour les équations SK, KK, CDG et Ito. Par conséquent, on peut dire que toutes les équations bien connues de la classe présentée en (2.25) ont une loi de conservation du type (2.114).

En évidence, le calcul des lois de conservation de degré supérieur devient long, compliqué et difficile à faire manuellement. Par conséquent, pour trouver des lois de conservation supplémentaires pour les cas mentionnés dans cette section, l'utilisation d'un programme informatique est nécessaire. [Nuseir, 1995] résume les densités jusqu'au degré huit pour les équations Lax, SK, KK et Ito. Notez que les équations intégrables Lax, SK et KK ont de nombreuses lois de conservation, alors que l'équation Ito non intégrable a seulement trois lois de conservation. Par conséquent, les équations intégrables telles que les équations de Lax, SK et KK ont des solutions de N -soliton, et l'équation non intégrable telle que l'équation Ito a, au plus, une solution de 1-soliton.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé quelques méthodes pour construire différents types de solutions exactes d'ondes progressives d'une classe générale de l'équation fKdV (voir figure 2.1 à figure 2.11). Les fameuses équations SK, CDG, Lax, KK et Ito sont toutes de cette classe.

L'efficacité des méthodes *Tanh - coth*, des équations de Riccati projectives généralisées, la fonction hyperbolique étendue et la version simplifiée de la méthode bilinéaire de Hirota peut être démontrée sur une grande variété d'équations d'évolution non linéaires (EENLs) pour obtenir de nombreux types de solutions exactes d'ondes progressives. Ces solutions peuvent être utiles pour décrire certains phénomènes non linéaires.

La procédure de calcul de ces méthodes et d'autres montrent qu'un programme informatique tel que Mathematica ou Maple joue un rôle important dans la résolution précise des EENLs.

Chapitre 3

La méthode d'expansion

$\exp(-\varphi(\xi))$

Sommaire

3.1	Introduction	61
3.2	Description de la méthode	61
3.3	Applications de la méthode	64
3.3.1	L'équation mKdV	64
3.3.2	L'équation de Benney-Luke	67
3.3.3	L'équation Kadomtsev-Petviashvili	71
3.3.4	Les équations de Broer-Kaup de dimension (2+1)	76
3.3.5	L'équation mKdV-ZK de dimension (3+1)	82
3.4	Conclusion	84

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous décrivons brièvement l'algorithme d'une nouvelle méthode proposée par [Zhao et Li, 2008] et appelée méthode d'expansion $\exp(-\varphi(\xi))$ pour trouver des nouvelles solutions d'ondes progressives d'EENLs.

Les principales idées de la méthode proposée ont supposé que les solutions d'ondes progressives d'une EENL peuvent être exprimées par un polynôme dans $\exp(-\varphi(\xi))$, où $\varphi(\xi)$ satisfait une EDO (voir l'éq. (3.4) dans la section 3.2), $\xi = x \pm \omega t$, le degré du polynôme peut être déterminé en considérant l'équilibre homogène entre les dérivées d'ordre supérieur et les termes non linéaires d'ordre supérieur apparaissant dans une EENL donnée, et les coefficients du polynôme issus du processus d'utilisation de la méthode proposée. On verra qu'il est possible d'obtenir d'avantage de solutions d'ondes progressives de nombreuses EENLs en utilisant la méthode d'expansion $\exp(-\varphi(\xi))$.

La méthode d'expansion $\exp(-\varphi(\xi))$ est présentée et appliquée pour trouver des solutions d'ondes progressives des EDPs non linéaires. Ces EDPs comprennent l'équation de Korteweg-de Vries modifiée (mKdV), l'équation de Benney-Luke (BL), l'équation de Kadomtsev-Petviashvili (KP), l'équation de Broer-Kaup (BK) du couple de dimension (2+1) et l'équation KdV modifiée-Zakharov-Kuznetsov (mKdV-ZK) de dimension (3+1), pour lesquelles des solutions d'ondes progressives ont été élaborées.

3.2 Description de la méthode

Considérons une équation aux dérivées partielles non linéaire générale de deux variables indépendantes x et t qui est donnée par

$$P(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}, u_{xxx}, \dots) = 0 \quad (3.1)$$

Où $u(x, t)$ est une fonction inconnue, P est un polynôme de $u(x, t)$ et de ses dérivées partiels où dans l'ordre le plus élevé des dérivées et des termes non linéaires sont impliqués. Cette méthode s'effectue par les étapes suivantes:

Etape 1. En combinant les variables indépendantes x et t en une seule variable ξ , nous supposons la transformation de l'onde progressive

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x \pm \omega t$$

où ω est la vitesse de l'onde progressive, elle nous permet de réduire l'éq. (3.1) en une équation différentielle ordinaire suivante:

$$R(u, u', u'', u''', \dots) = 0 \quad (3.2)$$

R est un polynôme de $u(\xi)$ et ses dérivées, avec $u'(\xi) = \frac{du}{d\xi}$, $u''(\xi) = \frac{d^2u}{d\xi^2}$, etc.

Etape 2. Supposons que la solution de (3.2) soit décrite comme suit

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^m \alpha_i (\exp(-\varphi(\xi)))^i \quad (3.3)$$

où m est un entier positif et α_i ($i = 0, 1, \dots, m$) sont des constantes à établir, de sorte que $\alpha_m \neq 0$ et la fonction auxiliaire φ satisfait l'EDO suivante

$$\varphi'(\xi) = \exp(-\varphi(\xi)) + \mu \exp(\varphi(\xi)) + \lambda \quad (3.4)$$

où λ et μ sont des constantes arbitraires.

Nous posons $\Theta = \lambda^2 - 4\mu$, les solutions de (3.4) sont:

Famille 1: Si $\Theta > 0$, $\mu \neq 0$

$$\varphi(\xi) = \ln \left(\frac{-1}{2\mu} \left(\sqrt{\Theta} \tanh \left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2} (\xi + k_1) \right) + \lambda \right) \right) \quad (3.5)$$

ou

$$\varphi(\xi) = \ln \left(\frac{-1}{2\mu} \left(\sqrt{\Theta} \coth \left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2} (\xi + k_1) \right) + \lambda \right) \right) \quad (3.6)$$

Famille 2: Si $\Theta < 0$, $\mu \neq 0$

$$\varphi(\xi) = \ln \left(\frac{1}{2\mu} \left(\sqrt{-\Theta} \tan \left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2} (\xi + k_1) \right) - \lambda \right) \right) \quad (3.7)$$

ou

$$\varphi(\xi) = \ln \left(\frac{1}{2\mu} \left(\sqrt{-\Theta} \cot \left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2} (\xi + k_1) \right) - \lambda \right) \right) \quad (3.8)$$

Famille 3: Si $\Theta > 0$, $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$

$$\varphi(\xi) = \ln \left(\frac{1}{\lambda} (\exp(\lambda(\xi + k_1)) - 1) \right) \quad (3.9)$$

Famille 4: Si $\Theta = 0$, $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$

$$\varphi(\xi) = \ln \left(-\frac{2\lambda(\xi + k_1) + 4}{\lambda^2(\xi + k_1)} \right) \quad (3.10)$$

Famille 5: Si $\Theta = 0$, $\mu = 0$, $\lambda = 0$

$$\varphi(\xi) = \ln(\xi + k_1) \quad (3.11)$$

où k_1 est une constante d'intégration.

Etape 3. Nous déterminons l'entier positif m apparu dans (3.3) en équilibrant les dérivées d'ordre supérieur et les termes non linéaires d'ordre supérieur dans l'éq. (3.2).

Plus précisément, nous définissons le degré de $u(\xi)$ comme $D(u(\xi)) = m$, ce qui donne lieu à un degré d'expressions différentes comme suit:

$$D\left(\frac{d^p u}{d\xi^p}\right) = m + p, \quad D\left(u^n \left(\frac{d^p u}{d\xi^p}\right)^r\right) = nm + r(m + p) \quad (3.12)$$

Etape 4. Quand m est déterminé, on remplace $u(\xi)$ et ses dérivées dans (3.2), on obtient un polynôme de $\exp(-\varphi(\xi))$. Dans ce polynôme, nous rassemblons tous les termes de même puissance et les mettons à zéro, ce qui donne un système d'équations algébriques impliquant les paramètres α_i et ω .

Après avoir déterminé ces paramètres, nous obtenons les solutions exactes de (3.1).

Pour montrer l'efficacité de la méthode décrite dans la partie précédente, nous présentons quelques exemples.

3.3 Applications de la méthode

3.3.1 L'équation mKdV

L'équation mKdV apparaît dans les circuits électriques et les plasmas multi-composants. La stabilité et l'instabilité des solitons algébriques de l'équation mKdV ont été bien étudiées dans [Ablowitz et Clarkson, 1991].

Nous considérons l'équation mKdV sous la forme [Zhao et Li, 2008]

$$u_t - u^2 u_x + \delta u_{xxx} = 0, \quad \delta > 0 \quad (3.13)$$

En utilisant la variable de l'onde progressive $\xi = x - Vt$, l'éq. (3.13) est converti en EDO pour $u(x, t) = u(\xi)$

$$-Vu' - u^2 u' + \delta u''' = 0 \quad (3.14)$$

en l'intégrant par rapport à ξ une fois, en mettant la constante d'intégration à zéro, on obtient l'EDO suivante

$$-Vu - \frac{1}{3}u^3 + \delta u'' = 0 \quad (3.15)$$

Considérant l'équilibre homogène entre u'' et u^3 on obtient $m = 1$.

Par conséquent

$$u(\xi) = \alpha_1 \exp(-\varphi(\xi)) + \alpha_0, \quad \alpha_1 \neq 0 \quad (3.16)$$

En substituant (3.4) et (3.16) dans l'éq. (3.15) et en égalant le coefficient de $(\exp(-\varphi(\xi)))^i$ à zéro, où $i \geq 0$, ce qui donne

$$\begin{aligned} -V\alpha_0 - \frac{1}{3}\alpha_0^3 + \delta\alpha_1\lambda\mu &= 0 \\ -V\alpha_1 - \alpha_1\alpha_0^2 + \delta\alpha_1\lambda^2 + 2\delta\alpha_1\mu &= 0 \\ -\alpha_1^2\alpha_0 + 3\delta\alpha_1\lambda &= 0 \\ -\frac{1}{3}\alpha_1^3 + 2\delta\alpha_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Résoudre le système (3.17) donne ce qui suit

$$\alpha_1 = \pm\sqrt{6\delta}, \quad \alpha_0 = \pm\frac{1}{2}\lambda\sqrt{6\delta}, \quad V = -\frac{1}{2}\delta(\lambda^2 - 4\mu) \quad (3.18)$$

En substituant (3.18) à (3.16), on obtient

$$u(\xi) = \pm\sqrt{6\delta} \exp(-\varphi(\xi)) \pm \frac{1}{2}\lambda\sqrt{6\delta}, \quad \xi = x + \frac{1}{2}\delta(\lambda^2 - 4\mu)t \quad (3.19)$$

qui est la formule d'une solution de l'éq. (3.13).

En substituant respectivement (3.5)-(3.11) dans (3.19), les solutions d'ondes progressives de l'équation mKdV sont obtenues comme suit:

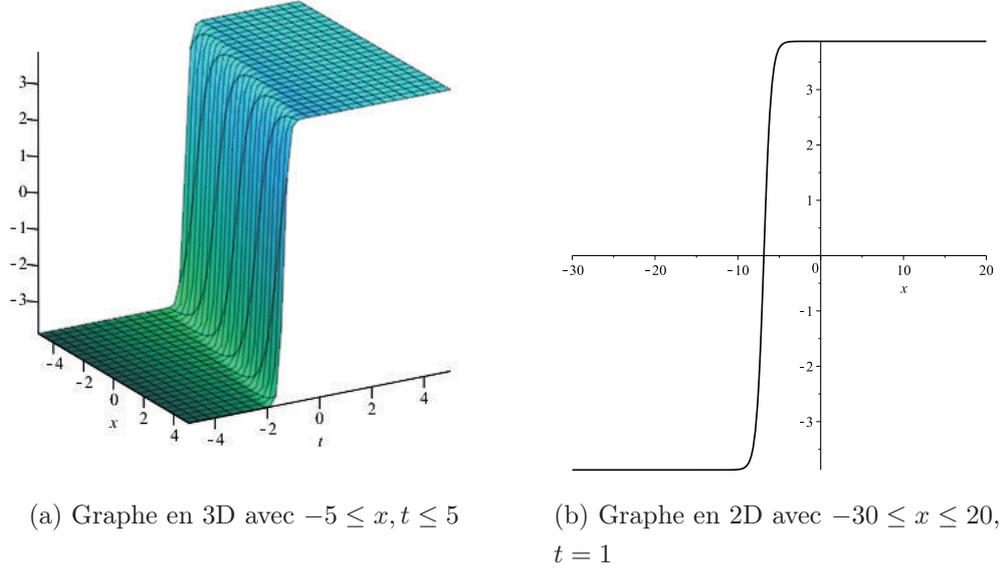
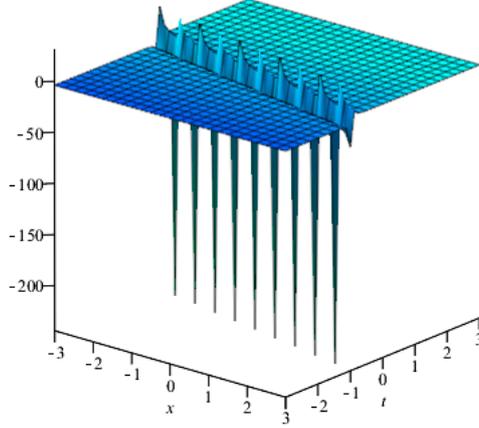


Figure 3.1: Graphes d'une solution de type kink de u_1 pour $\lambda = 3$, $\mu = 1$,
 $C_1 = 1$, $\delta = 2$

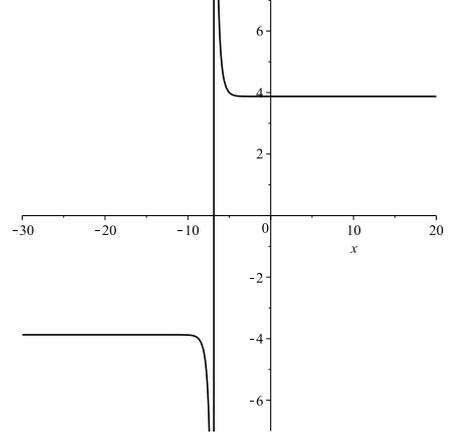
Famille 1: Si $\Theta > 0$, $\mu \neq 0$

$$\begin{aligned}
 u_{1,2}(x, t) &= \mp \frac{2\sqrt{6\delta}\mu}{\sqrt{\Theta} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}\left(x + \frac{1}{2}\delta(\lambda^2 - 4\mu)t + C_1\right)\right) + \lambda} \pm \frac{1}{2}\lambda\sqrt{6\delta} \\
 u_{3,4}(x, t) &= \mp \frac{2\sqrt{6\delta}\mu}{\sqrt{\Theta} \coth\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}\left(x + \frac{1}{2}\delta(\lambda^2 - 4\mu)t + C_1\right)\right) + \lambda} \pm \frac{1}{2}\lambda\sqrt{6\delta}
 \end{aligned} \quad (3.20)$$

où C_1 est une constante arbitraire.



(a) Graphe en 3D avec $-3 \leq x, t \leq 3$



(b) Graphe en 2D avec $-30 \leq x \leq 20$, $t = 1$

Figure 3.2: Graphes d'une solution de type kink singulier de u_3 pour $\lambda = 3$, $\mu = 1$, $C_1 = 1$, $\delta = 2$

Famille 2: Si $\Theta < 0$, $\mu \neq 0$

$$u_{5,6}(x, t) = \pm \frac{2\sqrt{6\delta}\mu}{\sqrt{-\Theta} \tan\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}\left(x + \frac{1}{2}\delta(\lambda^2 - 4\mu)t + C_1\right)\right) - \lambda} \pm \frac{1}{2}\lambda\sqrt{6\delta} \quad (3.21)$$

$$u_{7,8}(x, t) = \pm \frac{2\sqrt{6\delta}\mu}{\sqrt{-\Theta} \cot\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}\left(x + \frac{1}{2}\delta(\lambda^2 - 4\mu)t + C_1\right)\right) - \lambda} \pm \frac{1}{2}\lambda\sqrt{6\delta}$$

Famille 3: Si $\Theta > 0$, $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$

$$u_{9,10}(x, t) = \pm \frac{\sqrt{6\delta}\lambda}{\exp\left(\lambda\left(x + \frac{1}{2}\delta\lambda^2 t + C_1\right)\right) - 1} \pm \frac{1}{2}\lambda\sqrt{6\delta} \quad (3.22)$$

Famille 4: Si $\Theta = 0$, $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$

$$u_{11,12}(x, t) = \mp \frac{\sqrt{6\delta}\lambda^2(x + C_1)}{2(\lambda(x + C_1) + 2)} \pm \frac{1}{2}\lambda\sqrt{6\delta} \quad (3.23)$$

Famille 5: Si $\Theta = 0$, $\mu = 0$, $\lambda = 0$

$$u_{13,14}(x, t) = \pm \frac{\sqrt{6\delta}}{x + C_1} \quad (3.24)$$

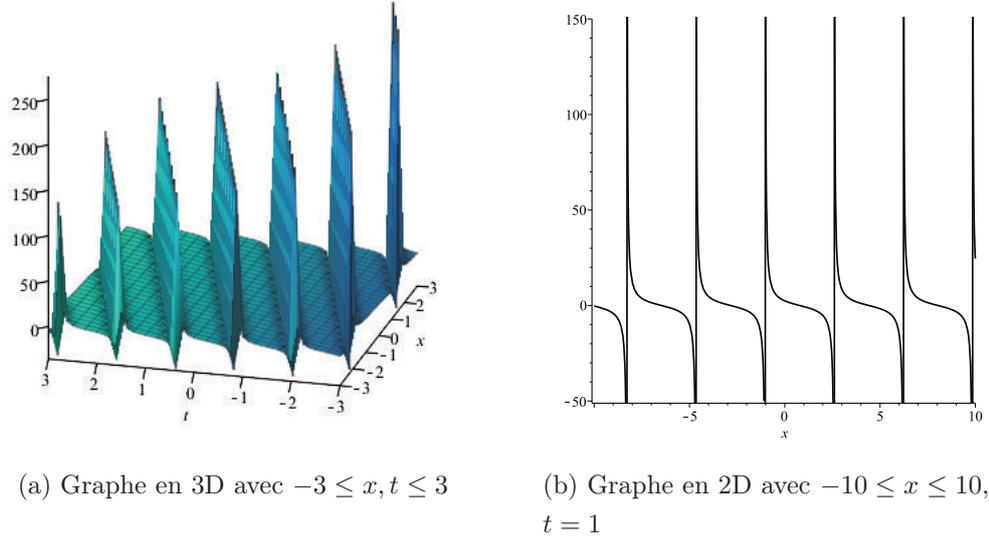


Figure 3.3: Graphes d'une solution périodique de u_5 pour $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $C_1 = 1$, $\delta = 2$

3.3.2 L'équation de Benney-Luke

Considérons l'équation de Benney-Luke sous la forme suivante [Rayhanul Islam, 2015]

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_{xxxx} - \beta u_{xxtt} + u_t u_{xx} + 2u_x u_{xt} = 0 \quad (3.25)$$

Où α et β sont des nombres positifs tel que $\alpha - \beta = \sigma - \frac{1}{3}$ qui est une équation de type Sobolev et étudiée pendant très longtemps. Le paramètre σ est appelé le nombre de Bond, qui saisit les effets de la tension superficielle et de la force de gravité et qui est une approximation formellement valide pour d'écrire la propagation bidirectionnelle des ondes d'eau en présence de la tension superficielle [Quintero et Muñoz Grajales, 2008].

En utilisant la variable d'onde progressive $\xi = x - Vt$, l'éq. (3.25) convertit en

$$(V^2 - 1) u'' + (\alpha - \beta V^2) u'''' - 3V u' u'' = 0 \quad (3.26)$$

L'éq. (3.26) est intégrable, donc on l'intègre par rapport à ξ une fois en mettant

3.3 Applications de la méthode

la constante d'intégration à zéro, on obtient

$$(V^2 - 1) u' + (\alpha - \beta V^2) u''' - \frac{3}{2} V (u')^2 = 0 \quad (3.27)$$

En équilibrant u''' et $(u')^2$, on obtient $m = 1$. Par conséquent, la solution de l'éq. (3.27) est sous la forme

$$u(\xi) = A_0 + A_1 \exp(-\varphi(\xi)), \quad A_1 \neq 0 \quad (3.28)$$

Dans la même méthode et après quelques manipulations algébriques nous obtenons un système d'équations algébriques, en le résolvant, on obtient:

$$\begin{aligned} A_0 = A_0, \quad A_1 &= \pm \frac{4(\alpha - \beta)}{\sqrt{(1 + 4\beta\mu - \beta\lambda^2)(1 + 4\alpha\mu - \alpha\lambda^2)}} \\ V &= \pm \frac{\sqrt{(1 + 4\beta\mu - \beta\lambda^2)(1 + 4\alpha\mu - \alpha\lambda^2)}}{1 + 4\beta\mu - \beta\lambda^2} \end{aligned} \quad (3.29)$$

En substituant (3.29) dans (3.28), on obtient

$$u(\xi) = A_0 \pm \frac{4(\alpha - \beta)}{\sqrt{(1 + 4\beta\mu - \beta\lambda^2)(1 + 4\alpha\mu - \alpha\lambda^2)}} \exp(-\varphi(\xi)) \quad (3.30)$$

En substituant maintenant (3.5)-(3.11) dans (3.30) respectivement, les solutions d'ondes progressives de l'éq. (3.25) sont obtenues comme suit:

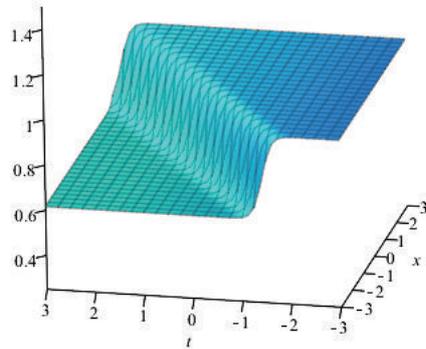
Famille 1: Si $\Theta > 0$, $\mu \neq 0$

$$\begin{aligned} u_{1,2}(x, t) &= A_0 \pm \frac{Q}{-\sqrt{\Theta} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + k)\right) - \lambda} \\ u_{3,4}(x, t) &= A_0 \pm \frac{Q}{-\sqrt{\Theta} \coth\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + k)\right) - \lambda} \end{aligned} \quad (3.31)$$

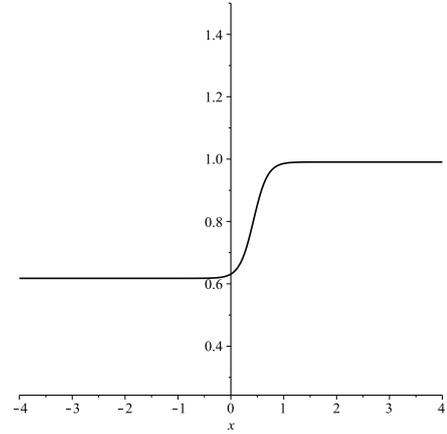
où

$$\begin{aligned} \xi &= x \pm \frac{\sqrt{(1 + 4\beta\mu - \beta\lambda^2)(1 + 4\alpha\mu - \alpha\lambda^2)}}{1 + 4\beta\mu - \beta\lambda^2} t \\ Q &= \frac{8(\alpha - \beta)\mu}{\sqrt{(1 + 4\beta\mu - \beta\lambda^2)(1 + 4\alpha\mu - \alpha\lambda^2)}} \end{aligned}$$

3.3 Applications de la méthode

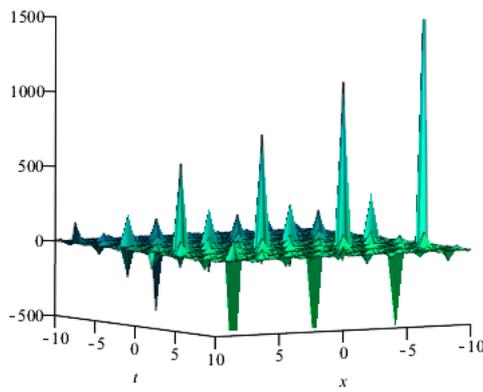


(a) Graphe en 3D avec $-3 \leq x, t \leq 3$

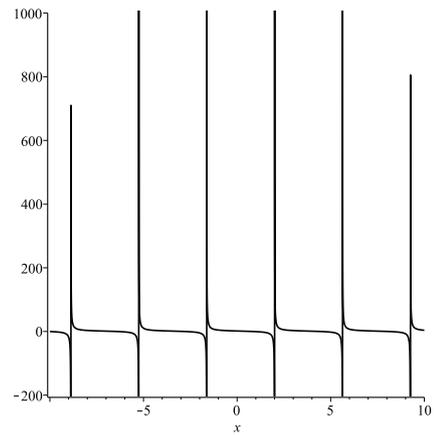


(b) Graphe en 2D avec $-4 \leq x \leq 4$, $t = 1$

Figure 3.4: Graphes d'une solution de type kink de u_1 pour $\alpha = 6$, $\beta = 3$, $\lambda = 8$, $\mu = 1.5$, $A_0 = 1$, $k = 0.5$



(a) Graphe en 3D avec $-10 \leq x, t \leq 10$



(b) Graphe en 2D avec $-10 \leq x \leq 10$, $t = 1$

Figure 3.5: Graphes d'une solution périodique de u_5 pour $\alpha = 7$, $\beta = 1$, $\lambda = -1$, $\mu = 1$, $A_0 = 0$, $k = 2$

Famille 2: Si $\Theta < 0$, $\mu \neq 0$

$$\begin{aligned} u_{5,6}(x,t) &= A_0 \pm \frac{Q}{\sqrt{-\Theta} \tan\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi+k)\right) - \lambda} \\ u_{7,8}(x,t) &= A_0 \pm \frac{Q}{\sqrt{-\Theta} \cot\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi+k)\right) - \lambda} \end{aligned} \quad (3.32)$$

où

$$\begin{aligned} \xi &= x \pm \frac{\sqrt{(1+4\beta\mu - \beta\lambda^2)(1+4\alpha\mu - \alpha\lambda^2)}}{1+4\beta\mu - \beta\lambda^2} t \\ Q &= \frac{8(\alpha - \beta)\mu}{\sqrt{(1+4\beta\mu - \beta\lambda^2)(1+4\alpha\mu - \alpha\lambda^2)}} \end{aligned}$$

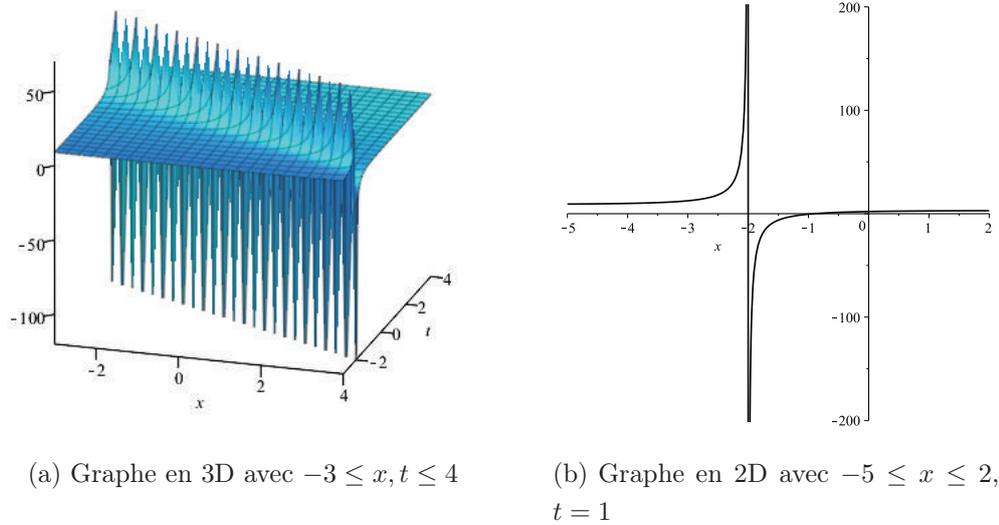


Figure 3.6: Graphes d'une solution de type kink singulier de u_{10} pour $\alpha = 5$, $\beta = 2$, $\lambda = 1$, $\mu = 0$, $A_0 = 3$, $k = 0$

Famille 3: Si $\lambda^2 - 4\mu > 0$, $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$

$$u_{9,10}(x,t) = A_0 \pm \frac{Q}{\exp(\lambda(\xi+k)) - 1} \quad (3.33)$$

où

$$\xi = x \pm \frac{\sqrt{(1 - \beta\lambda^2)(1 - \alpha\lambda^2)}}{1 - \beta\lambda^2} t, \quad Q = \frac{4(\alpha - \beta)\lambda}{\sqrt{(1 - \beta\lambda^2)(1 - \alpha\lambda^2)}}$$

Famille 4: Si $\lambda^2 - 4\mu = 0$, $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$

$$u_{11,12}(x, t) = A_0 \pm \frac{2(\alpha - \beta)\lambda^2(x \pm t + k)}{\lambda(x \pm t + k) + 2} \quad (3.34)$$

Famille 5: Si $\lambda^2 - 4\mu = 0$, $\mu = 0$, $\lambda = 0$

$$u_{13,14}(x, t) = A_0 \pm \frac{4(\alpha - \beta)}{x \pm t + k} \quad (3.35)$$

3.3.3 L'équation Kadomtsev-Petviashvili

L'équation Kadomtsev-Petviashvili (KP) [Khan et Akbar, 2015a]

$$u_{xt} - 6uu_{xx} - 6(u_x)^2 + u_{xxxx} + 3\delta^2 u_{yy} = 0 \quad (3.36)$$

ou

$$(u_t - 6uu_x + u_{xxx})_x + 3\delta^2 u_{yy} = 0$$

est une généralisation bidimensionnelle de l'équation KdV. Kadomtsev et Petviashvili ont d'abord introduit cette équation pour décrire des ondes non linéaires variant lentement dans un milieu dispersif [Johnson, 1997]. l'éq. (3.36) avec $\delta^2 = +1$ se produit dans l'étude des ondes dispersives faiblement non linéaires dans les plasmas et aussi dans la modulation des ondes d'eau longues faiblement non linéaires. L'équation avec $\delta^2 = -1$ se produit en acoustique et admet des solutions de solitons instables, alors que pour $\delta^2 = +1$ les solitons sont stables.

En utilisant la transformation $u(x, y, t) = u(\xi)$, $\xi = x + y - \omega t$, l'éq. (3.36) se réduit à l'EDO suivante

$$(-\omega u' - 6uu' + u''')' + 3\delta^2 u'' = 0 \quad (3.37)$$

En intégrant deux fois l'éq. (3.37) par rapport à ξ , en mettant la constante d'intégration à zéro, on obtient l'EDO suivante

$$u'' + (3\delta^2 - \omega)u - 3u^2 = 0 \quad (3.38)$$

En équilibrant u'' et u^2 , on obtient $n = 2$. Par conséquent,

$$u(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \exp(-\varphi(\xi)) + \alpha_2 (\exp(-\varphi(\xi)))^2 \quad (3.39)$$

3.3 Applications de la méthode

Après quelques manipulations algébriques nous obtenons un système d'équations algébriques, en le résolvant, on obtient les deux cas suivants:

$$\textbf{Groupe 1} : \omega = 3\delta^2 + \lambda^2 - 4\mu, \alpha_0 = 2\mu, \alpha_1 = 2\lambda, \alpha_2 = 2$$

$$\textbf{Groupe 2} : \omega = 3\delta^2 + 4\mu - \lambda^2, \alpha_0 = \frac{1}{3}\lambda^2 + \frac{2}{3}\mu, \alpha_1 = 2\lambda, \alpha_2 = 2$$

Cas 1: La solution de l'éq. (3.36) qui correspond à groupe 1 est donnée par

$$u(\xi) = 2\mu + 2\lambda \exp(-\varphi(\xi)) + 2(\exp(-\varphi(\xi)))^2 \quad (3.40)$$

où $\xi = x + y - (3\delta^2 + \lambda^2 - 4\mu)t$

On met les éqs. (3.5)-(3.11) dans (3.40) respectivement, on obtient:

Famille 1: Si $\Theta > 0, \mu \neq 0$

$$\begin{aligned} u_1(\xi) &= 2\mu - \frac{4\lambda\mu}{\sqrt{\Theta} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + k)\right) + \lambda} + \frac{8\mu^2}{\left(\sqrt{\Theta} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + k)\right) + \lambda\right)^2} \\ u_2(\xi) &= 2\mu - \frac{4\lambda\mu}{\sqrt{\Theta} \coth\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + k)\right) + \lambda} + \frac{8\mu^2}{\left(\sqrt{\Theta} \coth\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + k)\right) + \lambda\right)^2} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Famille 2: Si $\Theta < 0, \mu \neq 0$

$$\begin{aligned} u_3(\xi) &= 2\mu + \frac{4\lambda\mu}{\sqrt{-\Theta} \tan\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi + k)\right) - \lambda} + \frac{8\mu^2}{\left(\sqrt{-\Theta} \tan\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi + k)\right) - \lambda\right)^2} \\ u_4(\xi) &= 2\mu + \frac{4\lambda\mu}{\sqrt{-\Theta} \cot\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi + k)\right) - \lambda} + \frac{8\mu^2}{\left(\sqrt{-\Theta} \cot\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi + k)\right) - \lambda\right)^2} \end{aligned} \quad (3.42)$$

où $\xi = x + y - (3\delta^2 + \lambda^2 - 4\mu)t$, et k est une constante arbitraire.

Famille 3: Si $\Theta > 0, \mu = 0, \lambda \neq 0$

$$u_5(\xi) = \frac{2\lambda^2 \exp(\lambda(\xi + k))}{(\exp(\lambda(\xi + k)) - 1)^2} \quad (3.43)$$

où $\xi = x + y - (3\delta^2 + \lambda^2)t$.

3.3 Applications de la méthode

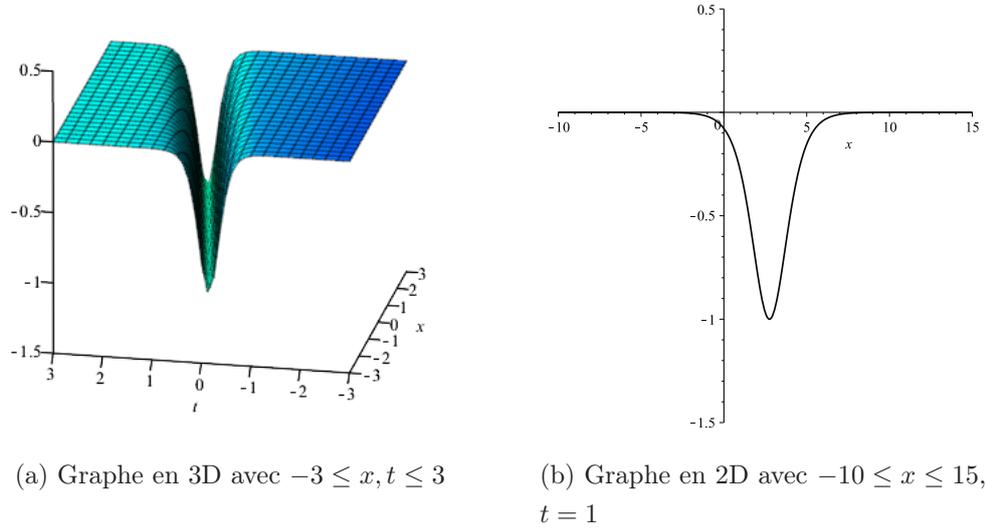


Figure 3.7: Graphes d'une solution de type soliton sombre de u_1 pour $\lambda = 2$, $\mu = 0.5$, $\delta^2 = 1$, $k = 1$, $y = 0$

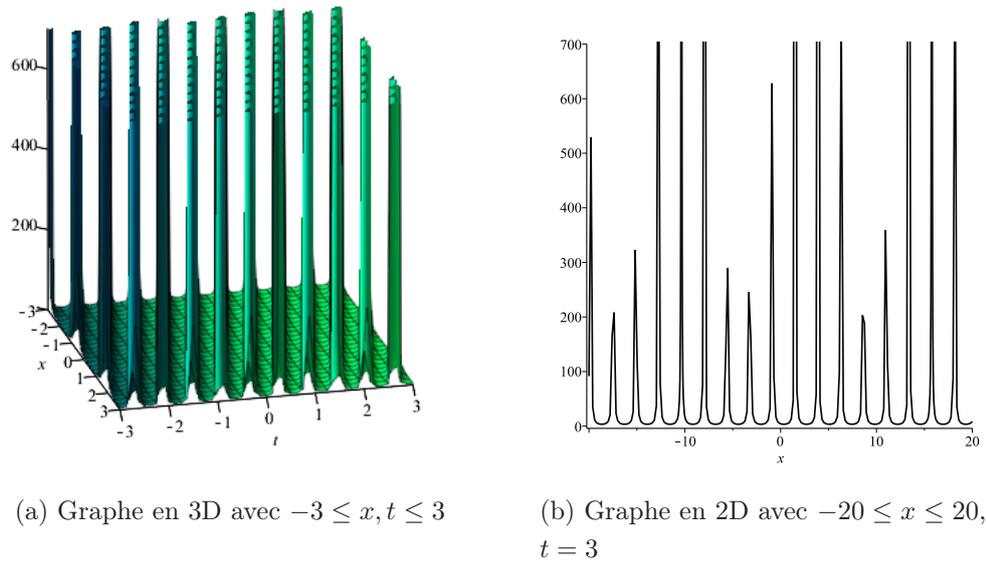


Figure 3.8: Graphes d'une solution de type cuspe périodique de u_3 pour $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $\delta^2 = 1$, $k = 1$, $y = 0$

3.3 Applications de la méthode

Famille 4: Si $\Theta = 0$, $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$

$$u_6(\xi) = \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{2\lambda^2}{(\lambda(\xi + k) + 2)^2} \quad (3.44)$$

où $\xi = x + y - 3\delta^2 t$.

Famille 5: Si $\Theta = 0$, $\mu = 0$, $\lambda = 0$

$$u_7(\xi) = \frac{2}{(\xi + k)^2} \quad (3.45)$$

où $\xi = x + y - 3\delta^2 t$.

Cas 2: La solution de l'éq. (3.36) qui correspond à groupe 2 est donnée par

$$u(\xi) = \frac{1}{3}\lambda^2 + \frac{2}{3}\mu + 2\lambda \exp(-\varphi(\xi)) + 2(\exp(-\varphi(\xi)))^2 \quad (3.46)$$

où $\xi = x + y - (3\delta^2 + 4\mu - \lambda^2)t$

En substituant les éqs. (3.5)-(3.11) dans (3.46) respectivement, on obtient:

Famille 1: Si $\Theta > 0$, $\mu \neq 0$

$$\begin{aligned} u_8(\xi) &= \frac{\lambda^2 + 2\mu}{3} - \frac{4\lambda\mu}{\sqrt{\Theta} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + k)\right) + \lambda} + \frac{8\mu^2}{\left(\sqrt{\Theta} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + k)\right) + \lambda\right)^2} \\ u_9(\xi) &= \frac{\lambda^2 + 2\mu}{3} - \frac{4\lambda\mu}{\sqrt{\Theta} \coth\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + k)\right) + \lambda} + \frac{8\mu^2}{\left(\sqrt{\Theta} \coth\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + k)\right) + \lambda\right)^2} \end{aligned} \quad (3.47)$$

où $\xi = x + y - (3\delta^2 + 4\mu - \lambda^2)t$, et k est une constante arbitraire.

Famille 2: Si $\Theta < 0$, $\mu \neq 0$

$$\begin{aligned} u_{10}(\xi) &= \frac{\lambda^2 + 2\mu}{3} + \frac{4\lambda\mu}{\sqrt{-\Theta} \tan\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi + k)\right) - \lambda} + \frac{8\mu^2}{\left(\sqrt{-\Theta} \tan\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi + k)\right) - \lambda\right)^2} \\ u_{11}(\xi) &= \frac{\lambda^2 + 2\mu}{3} + \frac{4\lambda\mu}{\sqrt{-\Theta} \cot\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi + k)\right) - \lambda} + \frac{8\mu^2}{\left(\sqrt{-\Theta} \cot\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi + k)\right) - \lambda\right)^2} \end{aligned} \quad (3.48)$$

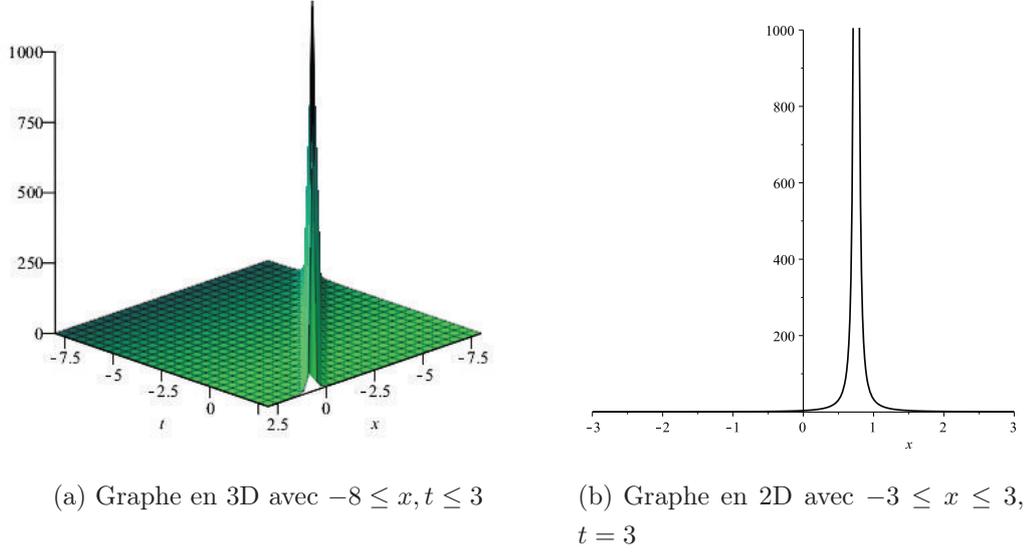


Figure 3.9: Graphes d'une solution d'onde solitaire de u_9 pour $\lambda = 2$, $\mu = 0.5$, $\delta^2 = 1$, $k = 1$, $y = 0$

où $\xi = x + y - (3\delta^2 + 4\mu - \lambda^2)t$.

Famille 3: Si $\Theta > 0$, $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$

$$u_{12}(\xi) = \frac{1}{3}\lambda^2 + \frac{2\lambda^2 \exp(\lambda(\xi + k))}{(\exp(\lambda(\xi + k)) - 1)^2} \quad (3.49)$$

où $\xi = x + y - (3\delta^2 - \lambda^2)t$.

Famille 4: Si $\Theta = 0$, $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$

$$u_{13}(\xi) = \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{2\lambda^2}{(\lambda(\xi + k) + 2)^2} \quad (3.50)$$

où $\xi = x + y - 3\delta^2 t$.

Famille 5: Si $\Theta = 0$, $\mu = 0$, $\lambda = 0$

$$u_{14}(\xi) = \frac{2}{(\xi + k)^2} \quad (3.51)$$

où $\xi = x + y - 3\delta^2 t$.

3.3.4 Les équations de Broer-Kaup de dimension (2+1)

Nous étudions les équations de Broer-Kaup (BK) de dimension (2+1) suivantes [Hossain *et al.*, 2016; Yomba, 2006] comme modèle pour la propagation des ondes dans des milieux non linéaires avec effets dispersifs et dissipatifs:

$$\begin{cases} H_{yt} - H_{xxy} + 2(HH_x)_y + 2G_{xx} = 0 \\ G_t + G_{xx} + 2(HG)_x = 0 \end{cases} \quad (3.52)$$

où H et G sont des fonctions dépendantes des variables spatiales x , y et de la variable temporelle t . Ce système contient à la fois le terme dispersif linéaire H_{xxy} , les termes dissipatifs H_{yt} , G_{xx} , le terme dissipatif non linéaire $(HH_x)_y$ et a été largement appliqué à plusieurs branches de la physique comme la physique du plasma, la dynamique des fluides, l'optique non linéaire, etc.

On utilise la variable d'onde progressive $H(\xi) = H(x, y, t)$, $G(\xi) = G(x, y, t)$, $\xi = x + y - \omega t$, les éqs. (3.52) sont transportées dans les EDOs suivantes:

$$\begin{aligned} -\omega H'' - H''' + 2(HH')' + 2G'' &= 0 \\ -\omega G' + G'' + 2(HG)' &= 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Intégrer (3.53) par rapport à ξ une fois qu'on obtient

$$\begin{aligned} K_1 - \omega H' - H'' + 2HH' + 2G' &= 0 \\ K_2 - \omega G + G' + 2HG &= 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

où K_1 et K_2 sont des constantes d'intégration. Compte tenu de l'équilibre homogène entre les dérivées d'ordre supérieur et les termes non linéaires dans les équations (3.54), nous déduisons que

$$\begin{aligned} H(\xi) &= \alpha_0 + \alpha_1 \exp(-\varphi(\xi)) \\ G(\xi) &= \beta_0 + \beta_1 \exp(-\varphi(\xi)) + \beta_2 (\exp(-\varphi(\xi)))^2 \end{aligned} \quad (3.55)$$

Après quelques manipulations algébriques nous obtenons un système d'équations algébriques, en le résolvant, on obtient:

$$\alpha_0 = \text{cons}, \alpha_1 = 1, \beta_0 = -\mu, \beta_1 = -\lambda, \beta_2 = -1, \omega = 2\alpha_0 - \lambda, K_1 = K_2 = 0 \quad (3.56)$$

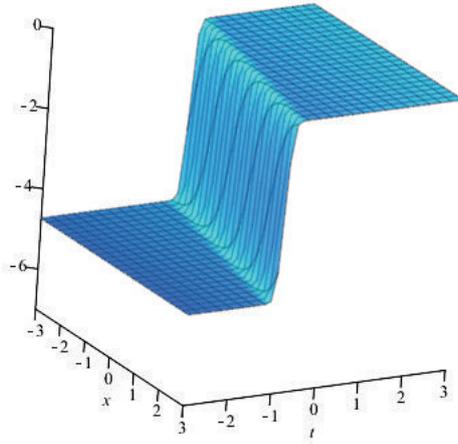
3.3 Applications de la méthode

En substituant (3.56) à (3.55), on obtient

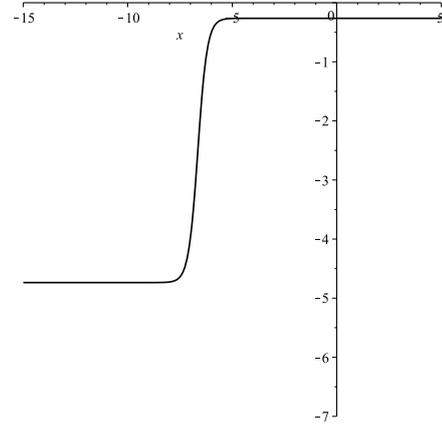
$$\begin{aligned} H(\xi) &= \alpha_0 + \exp(-\varphi(\xi)) \\ G(\xi) &= -\mu - \lambda \exp(-\varphi(\xi)) - (\exp(-\varphi(\xi)))^2 \end{aligned} \quad (3.57)$$

où $\xi = x + y - (2\alpha_0 - \lambda)t$

En tenant compte de ces données, nous obtenons les solutions d'ondes progressives des équations de Broer-Kaup du couple de dimension (2+1) comme suit:



(a) Graphe en 3D avec $-3 \leq x, t \leq 3$



(b) Graphe en 2D avec $-15 \leq x \leq 5$, $t = 1$

Figure 3.10: Graphes d'une solution de type kink de H_1 pour $\lambda = 5$, $\mu = 1.25$, $\alpha_0 = 0$, $E = 1$, $y = 0$

Famille 1: Si $\Theta > 0$, $\mu \neq 0$

$$\begin{aligned} H_1(\xi) &= \alpha_0 - \frac{2\mu}{\sqrt{\Theta} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + E)\right) + \lambda} \\ G_1(\xi) &= -\mu + \frac{2\lambda\mu}{\sqrt{\Theta} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + E)\right) + \lambda} - \frac{4\mu^2}{\left(\sqrt{\Theta} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + E)\right) + \lambda\right)^2} \end{aligned} \quad (3.58)$$

3.3 Applications de la méthode

ou

$$\begin{aligned}
 H_2(\xi) &= \alpha_0 - \frac{2\mu}{\sqrt{\Theta} \coth\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + E)\right) + \lambda} \\
 G_2(\xi) &= -\mu + \frac{2\lambda\mu}{\sqrt{\Theta} \coth\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + E)\right) + \lambda} - \frac{4\mu^2}{\left(\sqrt{\Theta} \coth\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + E)\right) + \lambda\right)^2}
 \end{aligned}
 \tag{3.59}$$

où $\xi = x + y - (2\alpha_0 - \lambda)t$, et α_0, E sont des constantes arbitraires.

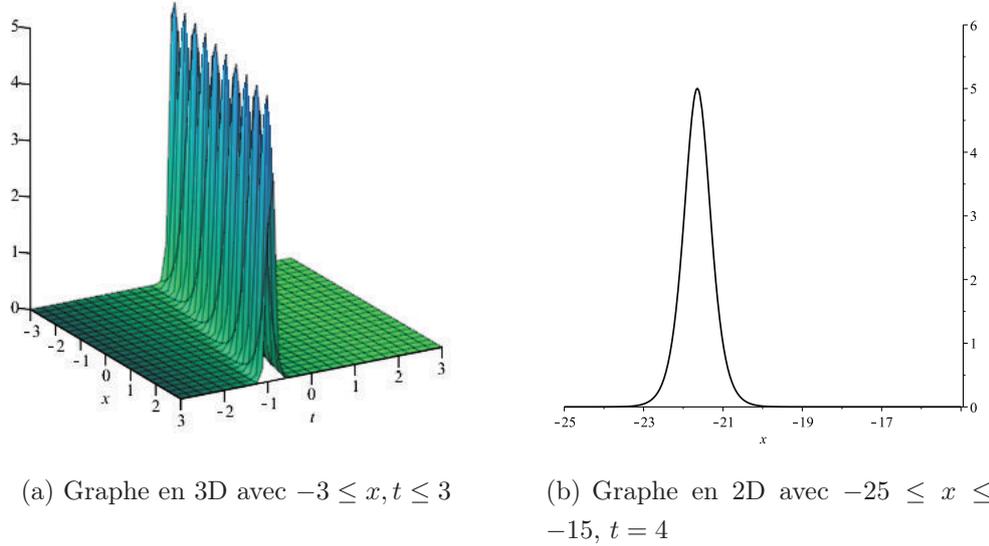


Figure 3.11: Graphes d'une solution de type soliton de G_1 pour $\lambda = 5, \mu = 1.25, \alpha_0 = 0, E = 1, y = 0$

Famille 2: Si $\Theta < 0, \mu \neq 0$

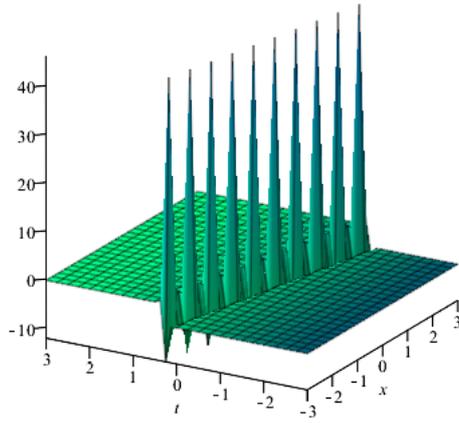
$$\begin{aligned}
 H_3(\xi) &= \alpha_0 + \frac{2\mu}{\sqrt{-\Theta} \tan\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi + E)\right) - \lambda} \\
 G_3(\xi) &= -\mu - \frac{2\lambda\mu}{\sqrt{-\Theta} \tan\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi + E)\right) - \lambda} - \frac{4\mu^2}{\left(\sqrt{-\Theta} \tan\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi + E)\right) - \lambda\right)^2}
 \end{aligned}
 \tag{3.60}$$

ou

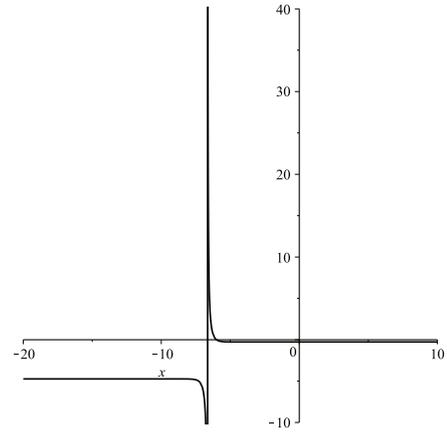
$$H_4(\xi) = \alpha_0 + \frac{2\mu}{\sqrt{-\Theta} \cot\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi + E)\right) - \lambda}$$

$$G_4(\xi) = -\mu - \frac{2\lambda\mu}{\sqrt{-\Theta} \cot\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi + E)\right) - \lambda} - \frac{4\mu^2}{\left(\sqrt{-\Theta} \cot\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi + E)\right) - \lambda\right)^2} \quad (3.61)$$

où $\xi = x + y - (2\alpha_0 - \lambda)t$.



(a) Graphe en 3D avec $-3 \leq x, t \leq 3$



(b) Graphe en 2D avec $-20 \leq x \leq 10$, $t = 1$

Figure 3.12: Graphes d'une solution de type kink singulier de H_2 pour $\lambda = 5$, $\mu = 1.25$, $\alpha_0 = 0$, $E = 1$, $y = 0$

Famille 3: Si $\Theta > 0$, $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$

$$H_5(\xi) = \alpha_0 + \frac{\lambda}{\exp(\lambda(\xi + E)) - 1}$$

$$G_5(\xi) = -\frac{\lambda^2}{\exp(\lambda(\xi + E)) - 1} - \frac{\lambda^2}{(\exp(\lambda(\xi + E)) - 1)^2} \quad (3.62)$$

où $\xi = x + y - (2\alpha_0 - \lambda)t$.

3.3 Applications de la méthode

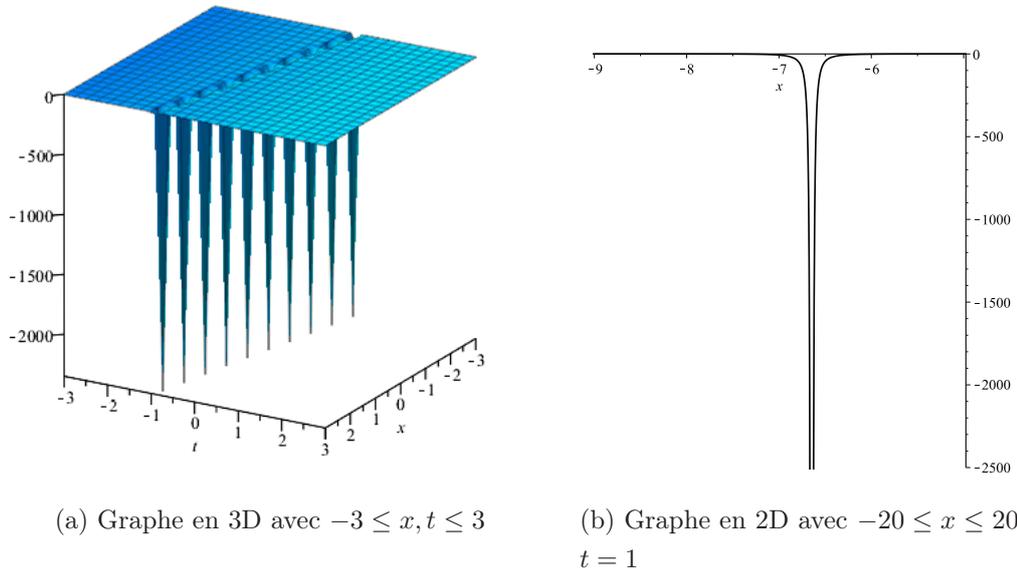


Figure 3.13: Graphes d'une solution d'onde solitaire sombre de G_2 pour $\lambda = 5$, $\mu = 1.25$, $\alpha_0 = 0$, $E = 1$, $y = 0$

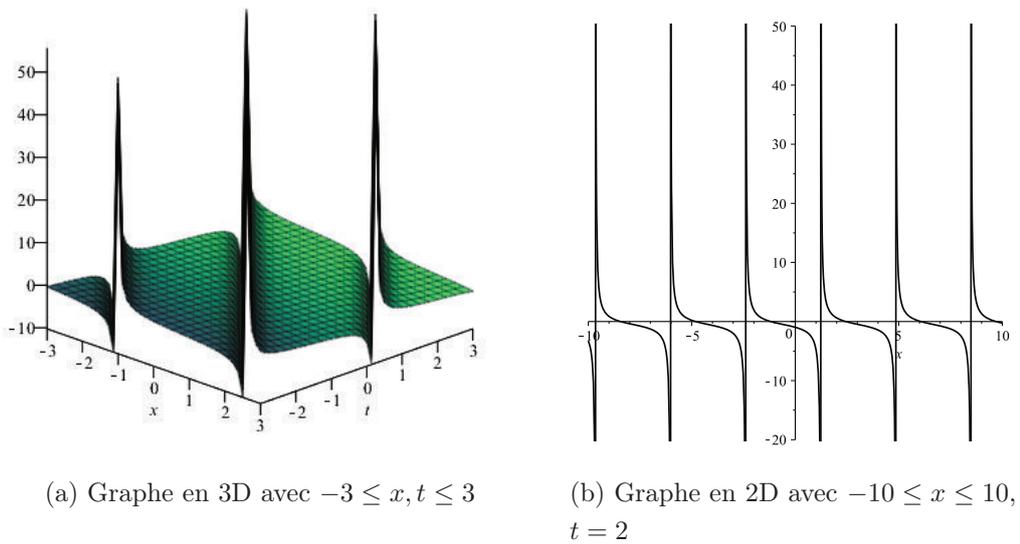


Figure 3.14: Graphes d'une solution périodique de H_3 pour $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_0 = 0$, $E = 1$, $y = 0$

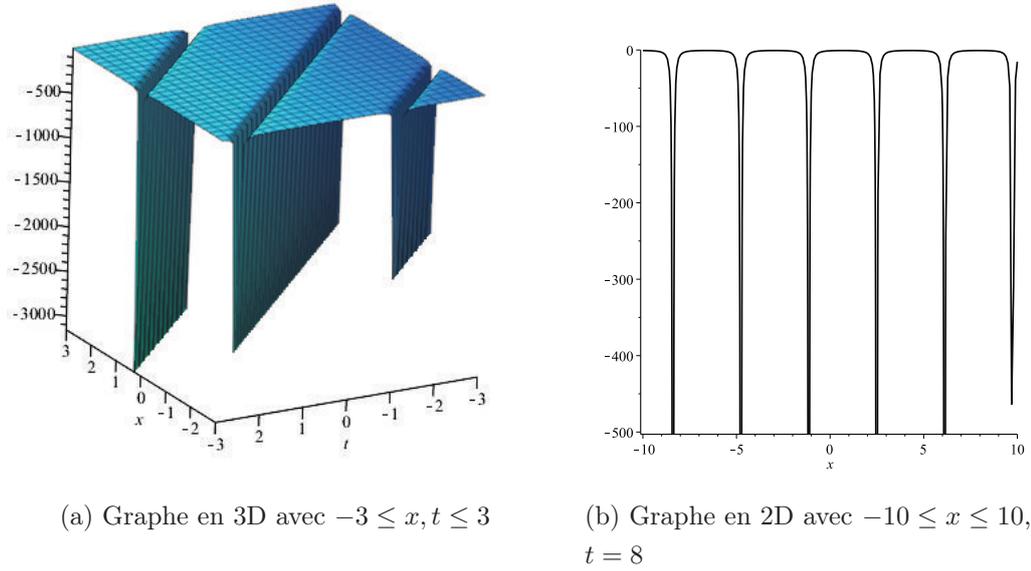


Figure 3.15: Graphes d'une solution de type cuspidale périodique sombre de G_3 pour $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_0 = 0$, $E = 1$, $y = 0$

Famille 4: Si $\Theta = 0$, $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned}
 H_6(\xi) &= \alpha_0 - \frac{\lambda^2(\xi + E) - 1}{2(\lambda(\xi + E) + 2)} \\
 G_6(\xi) &= -\mu + \frac{\lambda^3(\xi + E) - \lambda}{2(\lambda(\xi + E) + 2)} - \left(\frac{\lambda^2(\xi + E) - 1}{2(\lambda(\xi + E) + 2)} \right)^2
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

où $\xi = x + y - (2\alpha_0 - \lambda)t$.

Famille 5: Si $\Theta = 0$, $\mu = 0$, $\lambda = 0$

$$\begin{aligned}
 H_7(\xi) &= \alpha_0 + \frac{1}{\xi + E} \\
 G_7(\xi) &= -\frac{1}{(\xi + E)^2}
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

où $\xi = x + y - 2\alpha_0 t$.

3.3.5 L'équation mKdV-ZK de dimension (3+1)

Considérons l'équation KdV modifiée–Zakharov–Kuznetsov (mKdV-ZK) de dimension (3+1) [Alam *et al.*, 2015]

$$u_t + \alpha u^2 u_x + (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})_x = 0 \quad (3.65)$$

où α est une constante non nulle.

L'équation mKdV-ZK de dimension (3+1) est une classe importante des EENLs et se pose en physique théorique, physique des plasmas, dynamique des fluides, optique non linéaire et mécanique quantique pour analyser les propriétés fondamentales de la propagation non linéaire de nombreux phénomènes physiques [Verheest *et al.*, 2002].

Nous utilisons $u(\xi) = u(x, y, z, t)$, $\xi = x + y + z - Vt$, on obtient:

$$-Vu' + \alpha u^2 u' + 3u''' = 0 \quad (3.66)$$

En intégrant une fois l'éq. (3.66) par rapport à ξ , en mettant la constante d'intégration à zéro, on obtient:

$$-Vu + \frac{1}{3}\alpha u^3 + 3u'' = 0 \quad (3.67)$$

En prenant l'équilibre homogène entre le terme non linéaire d'ordre supérieur u^3 et le terme linéaire d'ordre supérieur u'' de l'éq. (3.67), on obtient $m = 1$. Par conséquent, la solution de l'éq. (3.67) est de la forme:

$$u(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \exp(-\varphi(\xi)) \quad (3.68)$$

Après quelques manipulations algébriques nous obtenons un système d'équations algébriques, en le résolvant, on obtient:

$$V = -\frac{2}{3}(\lambda^2 - 4\mu), \quad \alpha_0 = \frac{3\lambda\beta}{2}, \quad \alpha_1 = 3\beta \quad (3.69)$$

où $\beta = \pm \sqrt{\frac{-2}{\alpha}}$.

3.3 Applications de la méthode

On met les valeurs de V , α_0 et α_1 en (3.68), on obtient

$$u(\xi) = \frac{3\lambda\beta}{2} + 3\beta \exp(-\varphi(\xi)) \quad (3.70)$$

où $\xi = x + y + z + \frac{2}{3}(\lambda^2 - 4\mu)t$

En tenant compte de ces données, nous obtenons les solutions d'ondes progressives de l'équation mKdV-ZK de dimension (3+1) comme suit:

Famille 1: Si $\Theta > 0$, $\mu \neq 0$

$$\begin{aligned} u_{1,2}(x, y, z, t) &= \frac{3\lambda\beta}{2} - \frac{6\beta\mu}{\left(\sqrt{\Theta} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}\left(x + y + z + \frac{2}{3}(\lambda^2 - 4\mu)t + E\right)\right) + \lambda\right)} \\ u_{3,4}(x, y, z, t) &= \frac{3\lambda\beta}{2} - \frac{6\beta\mu}{\left(\sqrt{\Theta} \coth\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}\left(x + y + z + \frac{2}{3}(\lambda^2 - 4\mu)t + E\right)\right) + \lambda\right)} \end{aligned} \quad (3.71)$$

où E est une constante arbitraire.

Famille 2: Si $\Theta < 0$, $\mu \neq 0$

$$\begin{aligned} u_{5,6}(x, y, z, t) &= \frac{3\lambda\beta}{2} + \frac{6\beta\mu}{\left(\sqrt{-\Theta} \tan\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}\left(x + y + z + \frac{2}{3}(\lambda^2 - 4\mu)t + E\right)\right) - \lambda\right)} \\ u_{7,8}(x, y, z, t) &= \frac{3\lambda\beta}{2} + \frac{6\beta\mu}{\left(\sqrt{-\Theta} \cot\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}\left(x + y + z + \frac{2}{3}(\lambda^2 - 4\mu)t + E\right)\right) - \lambda\right)} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Famille 3: Si $\Theta > 0$, $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$

$$u_{9,10}(x, y, z, t) = \frac{3\lambda\beta}{2} + \frac{3\beta\lambda}{\exp\left(\lambda\left(x + y + z + \frac{2}{3}\lambda^2 t + E\right)\right) - 1} \quad (3.73)$$

Famille 4: Si $\Theta = 0$, $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$

$$u_{11,12}(x, y, z, t) = \frac{3\lambda\beta}{2} + \frac{3\beta\lambda^2(x + y + z + E)}{2\lambda(x + y + z + E) + 4} \quad (3.74)$$

Famille 5: Si $\Theta = 0$, $\mu = 0$, $\lambda = 0$

$$u_{13,14}(x, y, z, t) = \frac{3\beta}{x + y + z + E} \quad (3.75)$$

3.4 Conclusion

Diverses discussions et calculs sur différents exemples ont montré la validité de la méthode d'expansion $\exp(-\varphi(\xi))$, qui peut être également étendue à nombreux équations d'évolution non linéaires. Cette méthode est utilisée dans l'étude des équations mKdV, Benney-Luke, Kadomtsev-Petviashvili (KP), Broer-Kaup du couple de dimension (2+1) et mKdV-ZK de dimension (3+1). Ainsi, ces équations reçoivent non seulement de nouvelles solutions explicites, mais aussi de nombreux types de solutions exactes d'ondes progressives. Ces solutions sont obtenues en choisissant des valeurs particulières des paramètres physiques. Il existe différents types de solutions d'ondes progressives qui présentent un intérêt particulier pour la théorie des ondes solitaires (voir figure 3.1 à figure 3.15). Par conséquent, la méthode actuelle fournit une technique fiable qui nécessite moins de calculs en comparaison aux difficultés découlant de l'aspect informatique.

Chapitre 4

Calcul symbolique de la classe générale de l'équation fKdV par la méthode d'expansion $\exp(-\varphi(\xi))$

Sommaire

4.1	Introduction	86
4.2	Ondes progressives pour l'équation fKdV	86
4.2.1	La première condition $b = \frac{10c}{a} - a$	89
4.2.2	La deuxième condition $b \neq \frac{10c}{a} - a$	94
4.3	Illustration graphique des solutions	94
4.4	Conclusion	95

4.1 Introduction

La méthode d'expansion $\exp(-\varphi(\xi))$ a fourni de nouvelles solutions analytiques par rapport aux autres méthodes. Dans notre travail [Hedli et Kadem, 2020] on va analyser l'équation fKdV d'un point de vue plus général afin d'extraire de nouvelles solutions exactes d'une classe générale de l'équation fKdV, qui a la formule suivante

$$u_t + u_{xxxxx} + auu_{xxx} + bu_x u_{xx} + cu^2 u_x = 0 \quad (4.1)$$

On déduit des nouvelles solutions exactes d'ondes progressives des équations les plus connues de fKdV, qui sont l'équation Lax [Lax, 1968] pour $a = 10$, $b = 20$ et $c = 30$, l'équation Sawada-Kotera (SK) [Sawada et Kotera, 1974] pour $a = b = c = 5$, l'équation de Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) [Caudrey et al., 1976] pour $a = b = 30$ et $c = 180$, l'équation de Kaup-Kupershmidt (KK) [Kupershmidt, 1984] pour $a = 10$, $b = 25$ et $c = 20$ et l'équation Ito [Ito, 1980] pour $a = 3$, $b = 6$ et $c = 2$.

4.2 Ondes progressives pour l'équation fKdV

Dans cette section, on détermine les solutions exactes d'ondes progressives de l'équation fKdV, qui est considérée sous la forme (4.1).

En utilisant $u(x, t) = u(\xi)$ et $\xi = x - \omega t$, on obtient

$$-\omega u' + u'''' + auu''' + bu'u'' + cu^2 u' = 0 \quad (4.2)$$

En intégrant une fois l'éq. (4.2) en ignorant la constante d'intégration, on obtient

$$-\omega u + u'''' + auu'' + \frac{b-a}{2} (u')^2 + \frac{c}{3} u^3 = 0 \quad (4.3)$$

La méthode utilise l'expansion finie

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^m \alpha_i (\exp(-\varphi(\xi)))^i \quad (4.4)$$

4.2 Ondes progressives pour l'équation fKdV

On équilibre u'''' avec u^3 , on obtient $m = 2$, ainsi, la solution de (4.3) est de la forme

$$u(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \exp(-\varphi(\xi)) + \alpha_2 (\exp(-\varphi(\xi)))^2 \quad (4.5)$$

où α_i ($i = 0, 1, 2$) sont des constantes à déterminer et $\alpha_2 \neq 0$.

En utilisant (4.5) et (3.4), on obtient

$$\begin{aligned} u'(\xi) &= -\alpha_1 \mu + (-2\alpha_2 \mu - \alpha_1 \lambda) \exp(-\varphi(\xi)) + (-2\alpha_2 \lambda - \alpha_1) (\exp(-\varphi(\xi)))^2 \\ &\quad - 2\alpha_2 (\exp(-\varphi(\xi)))^3 \\ u''(\xi) &= \alpha_1 \lambda \mu + 2\alpha_2 \mu^2 + (2\alpha_1 \mu + \alpha_1 \lambda^2 + 6\alpha_2 \lambda \mu) \exp(-\varphi(\xi)) \\ &\quad + (3\alpha_1 \lambda + 4\alpha_2 \lambda^2 + 8\alpha_2 \mu) (\exp(-\varphi(\xi)))^2 \\ &\quad + (2\alpha_1 + 10\alpha_2 \lambda) (\exp(-\varphi(\xi)))^3 + 6\alpha_2 (\exp(-\varphi(\xi)))^4 \\ u''''(\xi) &= 14\alpha_2 \lambda^2 \mu^2 + \alpha_1 \lambda^3 \mu + 16\alpha_2 \mu^3 + 8\alpha_1 \lambda \mu^2 \\ &\quad + (30\alpha_2 \lambda^3 \mu + \alpha_1 \lambda^4 + 120\alpha_2 \lambda \mu^2 + 22\alpha_1 \lambda^2 \mu + 16\alpha_1 \mu^2) \exp(-\varphi(\xi)) \\ &\quad + (16\alpha_2 \lambda^4 + 232\alpha_2 \lambda^2 \mu + 15\alpha_1 \lambda^3 + 136\alpha_2 \mu^2 + 60\alpha_1 \lambda \mu) (\exp(-\varphi(\xi)))^2 \\ &\quad + (130\alpha_2 \lambda^3 + 440\alpha_2 \lambda \mu + 50\alpha_1 \lambda^2 + 40\alpha_1 \mu) (\exp(-\varphi(\xi)))^3 \\ &\quad + (330\alpha_2 \lambda^2 + 240\alpha_2 \mu + 60\alpha_1 \lambda) (\exp(-\varphi(\xi)))^4 \\ &\quad + (336\alpha_2 \lambda + 24\alpha_1) (\exp(-\varphi(\xi)))^5 + 120\alpha_2 (\exp(-\varphi(\xi)))^6 \end{aligned} \quad (4.6)$$

On met u , u' , u'' et u'''' dans (4.3) en faisant correspondre les coefficients de $(\exp(-\varphi(\xi)))^i$ à zéro, nous trouvons le système d'équations pour α_i et ω

$$\begin{aligned} a\lambda\mu\alpha_0\alpha_1 - \frac{1}{2}a\mu^2\alpha_1^2 + 8\lambda\mu^2\alpha_1 + 16\mu^3\alpha_2 + 2a\mu^2\alpha_0\alpha_2 + 14\lambda^2\mu^2\alpha_2 \\ + \lambda^3\mu\alpha_1 - \omega\alpha_0 + \frac{1}{3}c\alpha_0^3 + \frac{1}{2}b\mu^2\alpha_1^2 &= 0 \\ 6a\lambda\mu\alpha_0\alpha_2 + a\lambda^2\alpha_0\alpha_1 + 2b\mu^2\alpha_1\alpha_2 + b\lambda\mu\alpha_1^2 - \omega\alpha_1 + 30\lambda^3\mu\alpha_2 + 2a\mu\alpha_0\alpha_1 \\ + \lambda^4\alpha_1 + c\alpha_0^2\alpha_1 + 120\lambda\mu^2\alpha_2 + 22\lambda^2\mu\alpha_1 + 16\mu^2\alpha_1 &= 0 \\ 8a\mu\alpha_0\alpha_2 + a\mu\alpha_1^2 + 2b\mu^2\alpha_2^2 + 60\lambda\mu\alpha_1 + \frac{1}{2}b\lambda^2\alpha_1^2 + 232\lambda^2\mu\alpha_2 + c\alpha_0\alpha_1^2 \\ + 4a\lambda^2\alpha_0\alpha_2 + 3a\lambda\alpha_0\alpha_1 - \omega\alpha_2 + 4b\lambda\mu\alpha_1\alpha_2 + 15\lambda^3\alpha_1 + 3a\lambda\mu\alpha_1\alpha_2 \\ + c\alpha_0^2\alpha_2 + 136\mu^2\alpha_2 + 16\lambda^4\alpha_2 + \frac{1}{2}a\lambda^2\alpha_1^2 + b\mu\alpha_1^2 &= 0 \\ 2a\lambda\alpha_1^2 + 6a\mu\alpha_1\alpha_2 + b\lambda\alpha_1^2 + 10a\lambda\alpha_0\alpha_2 + 2a\lambda\mu\alpha_2^2 + 4b\lambda\mu\alpha_2^2 + 50\lambda^2\alpha_1 \\ + 2c\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 2a\alpha_0\alpha_1 + 40\mu\alpha_1 + 2b\lambda^2\alpha_1\alpha_2 + 440\lambda\mu\alpha_2 + \frac{1}{3}c\alpha_1^3 \\ + 4b\mu\alpha_1\alpha_2 + 3a\lambda^2\alpha_1\alpha_2 + 130\lambda^3\alpha_2 &= 0 \\ 2b\lambda^2\alpha_2^2 + c\alpha_1^2\alpha_2 + 330\lambda^2\alpha_2 + 4b\mu\alpha_2^2 + 9a\lambda\alpha_1\alpha_2 + 240\mu\alpha_2 + c\alpha_0\alpha_2^2 \\ + 6a\alpha_0\alpha_2 + 4b\lambda\alpha_1\alpha_2 + 2a\lambda^2\alpha_2^2 + \frac{3}{2}a\alpha_1^2 + 60\lambda\alpha_1 + \frac{1}{2}b\alpha_1^2 + 4a\mu\alpha_2^2 &= 0 \\ 6a\lambda\alpha_2^2 + 4b\lambda\alpha_2^2 + c\alpha_1\alpha_2^2 + 6a\alpha_1\alpha_2 + 2b\alpha_1\alpha_2 + 336\lambda\alpha_2 + 24\alpha_1 &= 0 \\ \frac{1}{3}c\alpha_2^3 + 2b\alpha_2^2 + 120\alpha_2 + 4a\alpha_2^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.2 Ondes progressives pour l'équation fKdV

En résolvant le système ci-dessus, nous obtenons les résultats suivants

Cas A: Lorsque $b = \frac{10c}{a} - a$, on obtient les deux groupes de solutions

$$\text{Groupe 1 : } \omega = (\lambda^2 - 4\mu)^2, \quad \alpha_0 = \frac{-6a\mu}{c}, \quad \alpha_1 = \frac{-6a\lambda}{c}, \quad \alpha_2 = \frac{-6a}{c} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \text{Groupe 2 : } \quad \omega &= \frac{1}{8c} \left(a^2 - 4c \mp a\sqrt{9a^2 - 24c} \right) (\lambda^2 - 4\mu)^2 \\ \alpha_0 &= \frac{1}{4c} \left(\pm\sqrt{9a^2 - 24c}(\lambda^2 - 4\mu) - 3a\lambda^2 - 12a\mu \right) \\ \alpha_1 &= \frac{-6a\lambda}{c}, \quad \alpha_2 = \frac{-6a}{c} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Cas B: Lorsque $b \neq \frac{10c}{a} - a$, on obtient

$$\begin{aligned} \omega &= 0, \quad \mu = \frac{1}{4}\lambda^2, \quad \alpha_0 = \frac{-3\lambda^2}{2c} \frac{\beta_0\delta \pm \beta_1 \mp \beta_2}{\gamma_0\delta \pm \gamma_1 \mp \gamma_2} \\ \alpha_1 &= \frac{-6\lambda}{c} \frac{\beta_3\delta \pm \beta_4}{(3a+2b)\delta \pm (\beta_3 - 28c)}, \quad \alpha_2 = \frac{-3}{c} (2a + b \pm \delta) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Tels que

$$\begin{aligned} \delta &= \sqrt{(2a+b)^2 - 40c} \\ \beta_0 &= (b+a)(3a+2b)^2(2a+b)^3 - 2c(3a+2b)(2a+b)(116a^2 + 169ab + 58b^2) \\ &\quad + 2c(3754a^2c + 5136abc + 1712b^2c - 3920c^2) \\ \beta_1 &= (b+a)(3a+2b)^2(2a+b)^4 \\ \beta_2 &= 2c(3a+2b)(2a+b)^2(146a^2 + 219ab + 78b^2) - 2c(13568a^3c + 26706a^2bc) \\ &\quad - 2c(17200ab^2c + 3632b^3c - 32480ac^2 - 22960bc^2) \\ \beta_3 &= (3a+2b)(2a+b) - 28c \\ \beta_4 &= (3a+2b)(2a+b)^2 - 116ac - 68bc \\ \gamma_0 &= (b+a)(3a+2b)^2(2a+b)^2 - 2c(3a+2b)(101a^2 + 144ab + 48b^2) \\ &\quad + 2c(1232ac + 952bc) \\ \gamma_1 &= (b+a)(3a+2b)^2(2a+b)^3 \\ \gamma_2 &= 2c(3a+2b)(2a+b)(131a^2 + 194ab + 68b^2) \\ &\quad - 2c(5044a^2c + 7136abc + 2472b^2c - 7840c^2) \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.2.1 La première condition $b = \frac{10c}{a} - a$

Groupe 1:

En substituant les valeurs de α_i dans (4.5) on obtient

$$u(\xi) = -\frac{6a\mu}{c} - \frac{6a\lambda}{c} \exp(-\varphi(\xi)) - \frac{6a}{c} (\exp(-\varphi(\xi)))^2 \quad (4.12)$$

Ensuite, en remplaçant (3.5)–(3.11) dans (4.12) respectivement, donc le premier groupe donne sept solutions d'ondes progressives de l'équation fKdV.

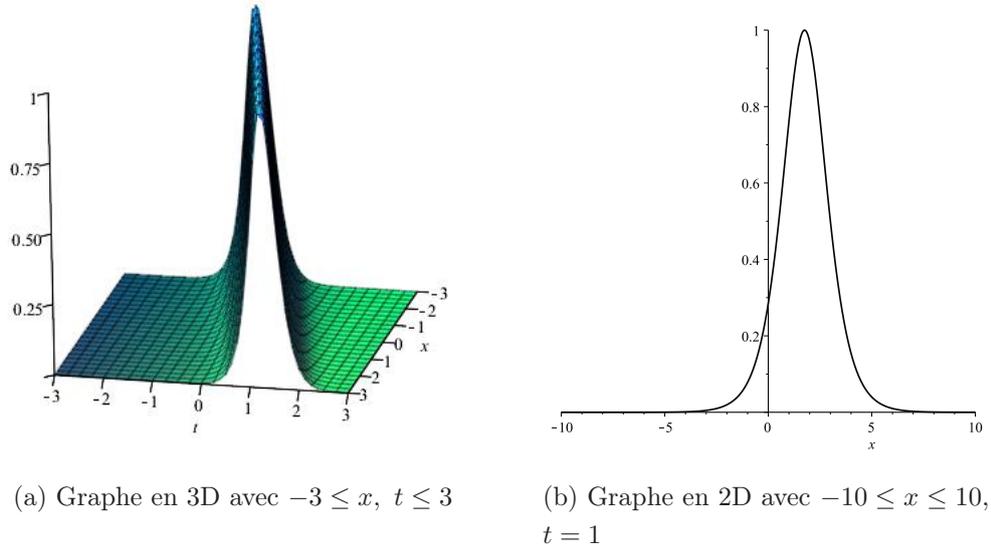


Figure 4.1: Graphes d'une solution de type soliton en forme de cloche de u_1 pour $a = 10, b = 20, c = 30, \lambda = 2, \mu = 0.5, k_1 = 1$

Cas 1.1: Si $\Theta > 0, \mu \neq 0$ nous trouvons les solutions hyperboliques

$$u_1(x, t) = -\frac{6a\mu}{c} + \frac{12a\lambda\mu}{c\sqrt{\Theta} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + k_1)\right) + c\lambda} - \frac{24a\mu^2}{c\left(\sqrt{\Theta} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + k_1)\right) + \lambda\right)^2}$$

$$u_2(x, t) = -\frac{6a\mu}{c} + \frac{12a\lambda\mu}{c\sqrt{\Theta} \coth\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + k_1)\right) + c\lambda} - \frac{24a\mu^2}{c\left(\sqrt{\Theta} \coth\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + k_1)\right) + \lambda\right)^2} \quad (4.13)$$

4.2 Ondes progressives pour l'équation fKdV

où $\xi = x - (\lambda^2 - 4\mu)^2 t$.

Cas 1.2: Si $\Theta < 0$, $\mu \neq 0$ nous trouvons les solutions trigonométriques

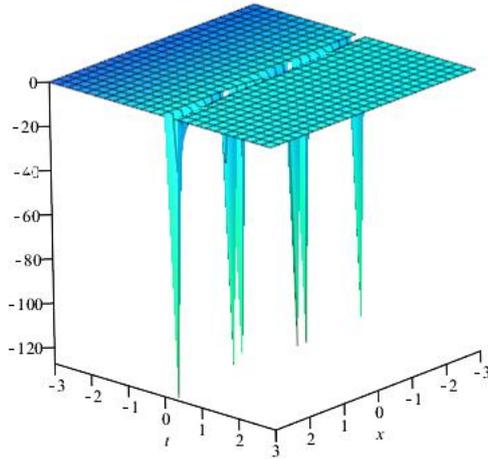
$$\begin{aligned}
 u_3(x, t) &= -\frac{6a\mu}{c} + \frac{12a\lambda\mu}{c\lambda - c\sqrt{-\Theta} \tan\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi + k_1)\right)} - \frac{24a\mu^2}{c\left(\lambda - \sqrt{-\Theta} \tan\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi + k_1)\right)\right)^2} \\
 u_4(x, t) &= -\frac{6a\mu}{c} + \frac{12a\lambda\mu}{c\lambda - c\sqrt{-\Theta} \cot\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi + k_1)\right)} - \frac{24a\mu^2}{c\left(\lambda - \sqrt{-\Theta} \cot\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi + k_1)\right)\right)^2}
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

où $\xi = x - (\lambda^2 - 4\mu)^2 t$.

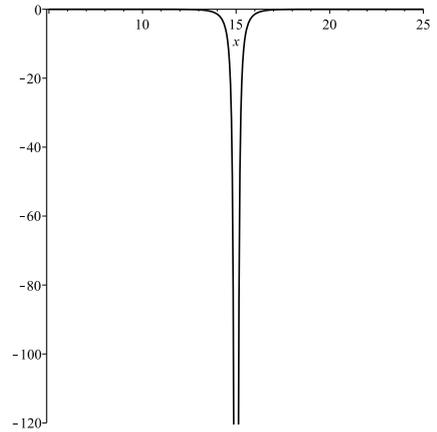
Cas 1.3: Si $\Theta > 0$, $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$ nous obtenons la solution exponentielle

$$u_5(x, t) = -\frac{6a\lambda^2 \exp(\lambda(\xi + k_1))}{c(\exp(\lambda(\xi + k_1)) - 1)^2}
 \tag{4.15}$$

où $\xi = x - \lambda^4 t$.



(a) Graphe en 3D avec $-3 \leq x, t \leq 3$



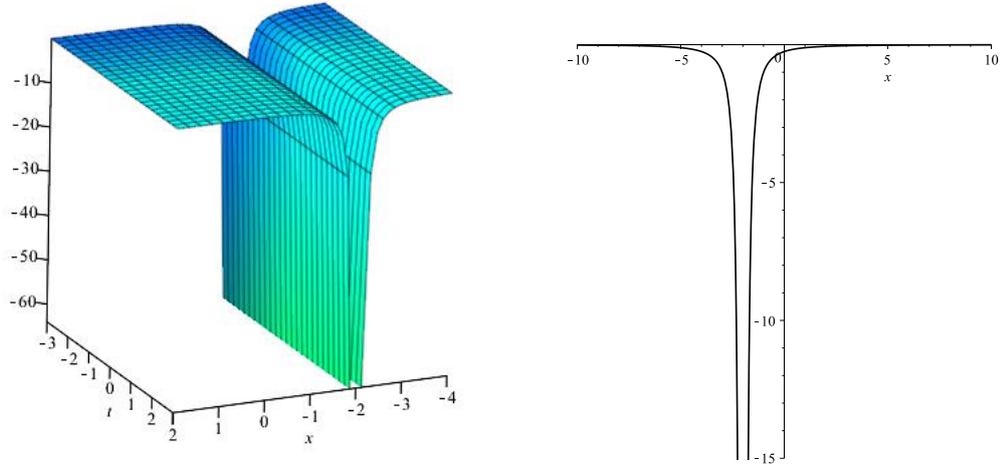
(b) Graphe en 2D avec $5 \leq x \leq 25$, $t = 1$

Figure 4.2: Graphes d'une solution d'onde solitaire sombre de u_5 pour $a = 10$, $b = 20$, $c = 30$, $\lambda = 2$, $\mu = 0$, $k_1 = 1$

4.2 Ondes progressives pour l'équation fKdV

Cas 1.4: Si $\Theta = 0$, $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$ nous avons la solution rationnelle

$$u_6(x, t) = -\frac{3a\lambda^2}{2c} + \frac{3a\lambda^3(x + k_1)}{c\lambda(x + k_1) + 2c} - \frac{3a\lambda^4(x + k_1)^2}{2c(\lambda(x + k_1) + 2)^2} \quad (4.16)$$



(a) Graphe en 3D avec $-4 \leq x \leq 2, -3 \leq t \leq 3$ (b) Graphe en 2D avec $-10 \leq x \leq 10$

Figure 4.3: Graphes d'une solution rationnelle de u_6 pour $a = 30$, $b = 30$,
 $c = 180$, $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $k_1 = 1$

Cas 1.5: Si $\Theta = 0$, $\mu = 0$, $\lambda = 0$ nous avons la solution rationnelle

$$u_7(x, t) = -\frac{6a}{c(x + k_1)^2} \quad (4.17)$$

Groupe 2:

En substituant les valeurs de α_i dans (4.5) on trouve

$$u(\xi) = \frac{1}{4c} \left(\pm \sqrt{9a^2 - 24c(\lambda^2 - 4\mu)} - 3a\lambda^2 - 12a\mu \right) - \frac{6a\lambda}{c} \exp(-\varphi(\xi)) - \frac{6a}{c} (\exp(-\varphi(\xi)))^2 \quad (4.18)$$

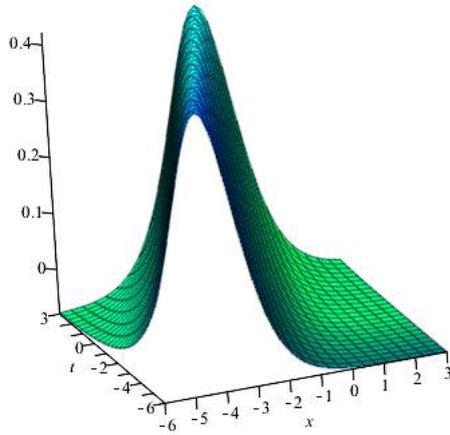
Ensuite, en remplaçant (3.5)–(3.11) dans (4.18), après quelques simplifications, le deuxième groupe donne dix solutions d'ondes progressives de l'équation fKdV.

4.2 Ondes progressives pour l'équation fKdV

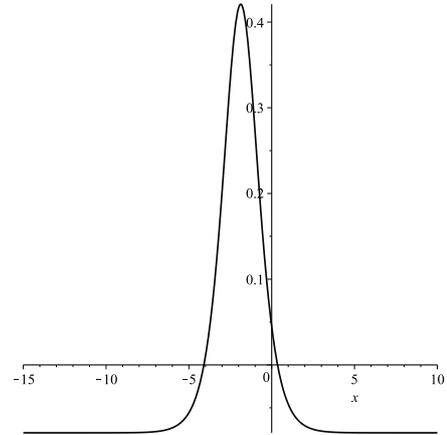
Cas 2.1: Si $\Theta > 0$, $\mu \neq 0$ nous trouvons les solutions hyperboliques

$$\begin{aligned}
 u_{8,9}(x, t) &= \frac{1}{4c} \left(\pm \Theta \sqrt{9a^2 - 24c} - 3a\lambda^2 - 12a\mu \right) + \frac{12a\lambda\mu}{c\sqrt{\Theta} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + k_1)\right) + c\lambda} \\
 &\quad - \frac{24a\mu^2}{c\left(\sqrt{\Theta} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + k_1)\right) + \lambda\right)^2} \\
 u_{10,11}(x, t) &= \frac{1}{4c} \left(\pm \Theta \sqrt{9a^2 - 24c} - 3a\lambda^2 - 12a\mu \right) + \frac{12a\lambda\mu}{c\sqrt{\Theta} \coth\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + k_1)\right) + c\lambda} \\
 &\quad - \frac{24a\mu^2}{c\left(\sqrt{\Theta} \coth\left(\frac{\sqrt{\Theta}}{2}(\xi + k_1)\right) + \lambda\right)^2}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

où $\xi = x - \frac{1}{8c} (3a^2 - 4c \mp a\sqrt{9a^2 - 24c}) \Theta^2 t$.



(a) Graphe en 3D avec $-6 \leq x$, $t \leq 3$



(b) Graphe en 2D avec $-15 \leq x \leq 10$, $t = 1$

Figure 4.4: Graphes d'une solution de type soliton en forme de cloche de u_8 pour $a = 30$, $b = 30$, $c = 180$, $\lambda = 2$, $\mu = 0.5$, $k_1 = 1$

4.2 Ondes progressives pour l'équation fKdV

Cas 2.2: Si $\Theta < 0$, $\mu \neq 0$ nous trouvons les solutions trigonométriques

$$\begin{aligned}
 u_{12,13}(x, t) &= \frac{1}{4c} \left(\pm \Theta \sqrt{9a^2 - 24c} - 3a\lambda^2 - 12a\mu \right) + \frac{12a\lambda\mu}{c\lambda - c\sqrt{-\Theta^2} \tan\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi + k_1)\right)} \\
 &\quad - \frac{24a\mu^2}{c\left(\lambda - \sqrt{-\Theta} \tan\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi + k_1)\right)\right)^2} \\
 u_{14,15}(x, t) &= \frac{1}{4c} \left(\pm \Theta \sqrt{9a^2 - 24c} - 3a\lambda^2 - 12a\mu \right) + \frac{12a\lambda\mu}{c\lambda - c\sqrt{-\Theta} \cot\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi + k_1)\right)} \\
 &\quad - \frac{24a\mu^2}{c\left(\lambda - \sqrt{-\Theta} \cot\left(\frac{\sqrt{-\Theta}}{2}(\xi + k_1)\right)\right)^2}
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

où $\xi = x - \frac{1}{8c} (3a^2 - 4c \mp a\sqrt{9a^2 - 24c}) \Theta^2 t$.

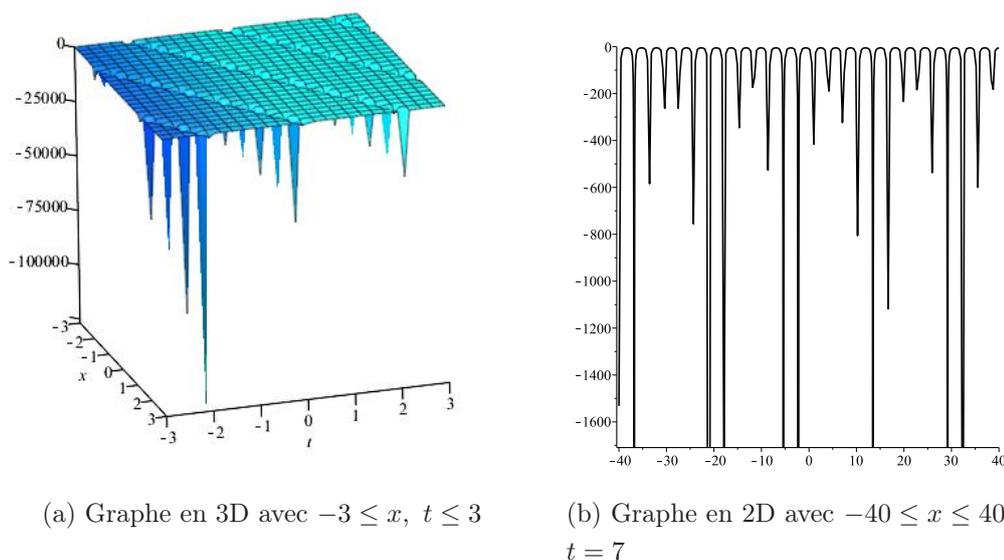


Figure 4.5: Graphes d'une solution de type cuspide périodique sombre de u_{12} pour $a = 5$, $b = 5$, $c = 5$, $\lambda = 2$, $\mu = 2$, $k_1 = 1$

Cas 2.3: Si $\Theta > 0$, $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$ nous obtenons les solutions exponentielles

$$u_{16,17}(x, t) = \frac{1}{4c} \left(\pm \sqrt{9a^2 - 24c} - 3a \right) \lambda^2 - \frac{6a\lambda^2 \exp(\lambda(\xi + k_1))}{c(\exp(\lambda(\xi + k_1)) - 1)^2} \tag{4.21}$$

4.3 Illustration graphique des solutions

où $\xi = x - \frac{1}{8c} (3a^2 - 4c \mp a\sqrt{9a^2 - 24c}) \lambda^4 t$.

Selon les valeurs des paramètres a, b et c , la première condition (4.2.1) est satisfaite pour les équations Lax, SK et CDG. Par conséquent, chacune d'elles a les dix-sept solutions indiquées ci-dessus (4.13)–(4.17), (4.19)–(4.21).

4.2.2 La deuxième condition $b \neq \frac{10c}{a} - a$

En substituant (3.5)–(3.11) et les valeurs de α_i et ω dans (4.5) respectivement, nous trouvons quatre solutions d'ondes progressives suivantes de l'équation fKdV.

Cas 1: Si $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$ nous obtenons les solutions rationnelles

$$u_{18,19}(x, t) = \frac{-3\lambda^2 \beta_0 \delta \pm \beta_1 \mp \beta_2}{2c \gamma_0 \delta \pm \gamma_1 \mp \gamma_2} + \frac{3\lambda^3}{c} \frac{(\beta_3 \delta \pm \beta_4) (x + k_1)}{((3a + 2b) \delta \pm (\beta_3 - 28c)) (\lambda(x + k_1) + 2)} - \frac{3\lambda^4 (2a + b \pm \delta) (x + k_1)^2}{4c (\lambda(x + k_1) + 2)^2} \quad (4.22)$$

Cas 2: Si $\mu = 0$, $\lambda = 0$ nous obtenons les solutions rationnelles

$$u_{20,21}(x, t) = -\frac{3(2a + b \pm \delta)}{c(x + k_1)^2} \quad (4.23)$$

Les équations KK et Ito vérifient la deuxième condition (4.2.2), ainsi, chacune admet les quatre solutions (4.22), (4.23).

Remarque 1. Toutes les solutions obtenues dans ce chapitre vérifient l'ensemble d'équations fKdV.

4.3 Illustration graphique des solutions

Certaines solutions d'ondes progressives de l'équation fKdV sont illustrées graphiquement à l'aide de Maple 17 dans les figures (figure 4.1 à figure 4.5), qui présentent les formes des solutions u_1, u_5, u_6, u_8 et u_{12} respectivement [Hedli et Kadem, 2020].

Les solutions u_1 , u_8 et u_9 décrivent la solution de soliton en forme de cloche. Les figures 4.1 et 4.4 présentent la solution de soliton en forme de cloche obtenue à partir de u_1 et u_8 respectivement. La figure de u_9 est similaire à celui de u_8 .

Les solutions u_2 , u_5 , u_{10} , u_{11} , u_{16} et u_{17} représentent la solution d'onde solitaire sombre. La figure 4.2 montre la forme d'une solution d'onde solitaire sombre de u_5 . Les formes de u_2 , u_{10} , u_{11} , u_{16} et u_{17} sont similaires à celui de u_5 .

Les solutions u_6 , u_7 , u_{18} , u_{19} , u_{20} et u_{21} représentent la solution rationnelle. Dans la figure 4.3, nous présentons la solution rationnelle de u_6 . Les figures de u_7 , u_{18} , u_{19} , u_{20} et u_{21} sont similaires à celui de u_6 .

Les solutions u_3 , u_4 , u_{12} , u_{13} , u_{14} et u_{15} décrivent la solution de cuspide périodique sombre. La figure 4.5 illustre la forme d'une solution de cuspide périodique sombre obtenue à partir de u_{12} . Les figures de u_3 , u_4 , u_{13} , u_{14} et u_{15} sont similaires à celui de u_{12} .

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons obtenu des nouvelles solutions exactes d'ondes progressives d'une classe générale de l'équation de Korteweg-de Vries du 5^{ème} ordre (fKdV), et plusieurs formes de cette classe en utilisant la méthode d'expansion $\exp(-\varphi(\xi))$ avec l'aide de Maple 17. Nous avons défini deux critères principaux pour obtenir les solutions d'ondes progressives de l'équation fKdV selon les valeurs des paramètres de l'équation. On peut observer qu'il existe différents types de solutions d'ondes progressives, qui sont des solutions de type soliton, des solutions d'ondes solitaires sombres, des solutions cuspidales périodiques sombres et des solutions rationnelles. Cette étude montre que la méthode a prouvé son efficacité pour l'application aux équations d'évolution non linéaires.

Conclusion générale et perspectives

Les équations d'évolution non linéaires (EENLs) possèdent beaucoup de structures d'ondes progressives intéressantes. Dans l'étude des équations modélisant les phénomènes d'ondes, l'un des objectifs fondamentaux est les solutions d'ondes progressives, que leurs expressions soient explicites ou implicites, sont très intéressantes du point de vue des applications. Ces types d'ondes ne modifieront pas leur profil pendant la propagation et sont donc faciles à identifier.

Le but de notre travail est de déterminer le comportement des solutions d'ondes progressives en résolvant des EENLs et en trois phases:

Dans la première étape, nous avons étudié l'équation de Korteweg-de Vries du 5^{ème} ordre par quatre méthodes analytiques pour trouver les solutions exactes d'ondes progressives, à savoir, la méthode $Tanh - coth$, la méthode des équations de Riccati projectives généralisées, la méthode de la fonction hyperbolique étendue et la version simplifiée de la méthode bilinéaire de Hirota.

Dans la deuxième étape, nous avons utilisé la méthode d'expansion $\exp(-\varphi(\xi))$ à l'ensemble des EENLs: KdV modifiée, Benney-Luke, Kadomtsev-Petviashvili, Broer-Kaup du couple de dimension (2+1) et KdV modifiée-Zakharov-Kuznetsov de dimension (3+1). Ainsi, cette étude donne plusieurs types de solutions exactes d'ondes progressives.

Dans la troisième étape et pour établir de nouvelles solutions d'ondes progressives, nous avons étudié la famille de l'équation KdV du 5^{ème} ordre (fKdV), et

certaines des équations les plus connues de cette famille qui sont les équations Lax, Sawada-Kotera, Caudrey-Dodd-Gibbon, Kaup-Kuperschmidt et Ito. La méthode d'expansion $\exp(-\varphi(\xi))$ a été utilisée, avec l'aide du logiciel mathématique Maple 17. La nature algorithmique de la méthode permet d'utiliser un support informatique pour effectuer les calculs fastidieux mais routiniers. Nous avons également obtenu des solutions exactes d'ondes progressives par fonctions hyperboliques, trigonométriques, exponentielles et rationnelles. On a observé que toutes les solutions analytiques obtenues dans le chapitre quatre ont été vérifiées par rapport à toutes les équations indiquées ci-dessus. Nous avons défini deux critères principaux pour obtenir les solutions d'ondes progressives de l'équation fKdV selon les valeurs des paramètres de l'équation. On peut observer qu'il existe différents types de solutions d'ondes progressives, qui sont des solutions de type soliton, des solutions d'ondes solitaires sombres, des solutions cuspidales périodiques sombres et des solutions rationnelles.

Dans la suite de cette étude, on doit d'abord suggérer les applications de la méthode d'expansion $\exp(-\varphi(\xi))$ aux quelques équations d'évolution non linéaires, comme les équations KdV du 7^{ème} ordre (sKdV) et d'autres.

Deuxièmement, on va étudier la classe générale de l'équation fKdV avec d'autres méthodes analytiques et faire une comparaison entre les différentes solutions obtenues.

Troisièmement, on propose de développer quelques méthodes analytiques d'utilisation du principe de l'équilibre homogène, en particulier la méthode d'expansion $\exp(-\varphi(\xi))$.

Quatrièmement, on propose d'étudier les aspects théoriques de cette méthode, en particulier leur champ d'application aux classes d'EDPs.

Bibliographie

- ABBASBANDY, S. et SHIRZADI, A. (2010). The first integral method for modified Benjamin–Bona–Mahony equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(7):1759–1764. [2](#)
- ABLOWITZ, M. A. et CLARKSON, P. A. (1991). *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. Cambridge University Press, Cambridge. [1](#), [3](#), [22](#), [23](#), [64](#)
- ALAM, M. N., HAFEZ, M. G., AKBAR, M. A. et ROSHID, H. (2015). Exact traveling wave solutions to the (3+1)-dimensional mKdV–ZK and the (2+1)-dimensional Burgers equations via $\exp(-\Phi(\eta))$ -expansion method. *Alexandria Engineering Journal*, 54(3):635–644. [82](#)
- ALAM, M. N. et TUNÇ, C. (2016). An analytical method for solving exact solutions of the nonlinear Bogoyavlenskii equation and the nonlinear diffusive predator–prey system. *Alexandria Engineering Journal*, 55(2):1855–1865. [2](#)
- BEKIR, A. et ÜNSAL, O. (2012). Analytic treatment of nonlinear evolution equations using first integral method. *Pramana-Journal of Physics*, 79(1):3–17. [2](#)
- CAUDREY, P. J., DODD, R. K. et GIBBON, J. D. (1976). A New Hierarchy of Korteweg–De Vries Equations. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 351:407–422. [25](#), [26](#), [86](#)
- CONTE, R. et MUSETTE, M. (1992). Link between solitary waves and projective Riccati equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 25(21):5609–5623. [33](#)

- DAUXOIS, T. et PEYRARD, M. (2006). *Physics of solitons*. Cambridge University Press, Cambridge. 9
- DRAZIN, P. G. et JOHNSON, R. S. (1989). *Solitons: An Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge. 15, 22, 23
- FAN, E. (2000). Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations. *Physics Letters A*, 277(4-5):212–218. 2
- FILIPPOV, A. T. (2000). *The Versatile Soliton*. Birkhäuser Basel, Boston, 1 édition. 9
- GARDNER, C. S., GREENE, J. M., KRUSKAL, M. D. et MIURA, R. M. (1967). Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation. *Physical Review Letters*, 19(19):1095–1097. 24
- GARDNER, C. S. et MORIKAWA, G. K. (1960). *Similarity in the asymptotic behavior of collision-free hydromagnetic waves and water waves*. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York. 4
- GEPREEL, K., NOFAL, T. et AL-SAYALI, N. (2016). Exact solutions to the generalized Hirota – Satsuma KdV equations using the extended trial equation method. *Engineering Letters*, 24(3):274–283. 2
- GÖKTAS, U. et HEREMAN, W. (1997). Symbolic Computation of Conserved Densities for Systems of Nonlinear Evolution Equations. *Journal of Symbolic Computation*, 24(5):591–621. 20, 21
- GUREFE, Y., SONMEZOGLU, A. et MISIRLI, E. (2011). Application of the trial equation method for solving some nonlinear evolution equations arising in mathematical physics. *Pramana-Journal of Physics*, 77(6):1023–1029. 2
- HAFEZ, M. G., ALAM, M. N. et AKBAR, M. A. (2015). Traveling wave solutions for some important coupled nonlinear physical models via the coupled Higgs equation and the Maccari system. *Journal of King Saud University - Science*, 27(2):105–112. 2

- HEDLI, R. et KADEM, A. (2020). Exact Traveling Wave Solutions to the Fifth-order KdV Equation Using the Exponential Expansion Method. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 50(1):121–126. [5](#), [86](#), [94](#)
- HEREMAN, W. (2009). Shallow Water Waves and Solitary Waves. *In Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, pages 8112–8125. Springer-Verlag, Heibelberg. [14](#)
- HEREMAN, W. et NUSEIR, A. (1997). Symbolic methods to construct exact solutions of nonlinear partial differential equations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 43(1):13–27. [36](#)
- HIROTA, R. (2004). *The Direct Method in Soliton Theory*. Cambridge University Press, Cambridge. [1](#), [9](#), [36](#)
- HOSSAIN, M. M., ROSHID, H. et SHEIKH, M. A. N. (2016). Abundant Exact Traveling Wave Solutions of the (2+1)-Dimensional Couple Broer-Kaup Equations. *Journal for Foundations and Applications of Physics*, 3(1):1–13. [2](#), [76](#)
- ITO, M. (1980). An Extension of Nonlinear Evolution Equations of the K-dV (mK-dV) Type to Higher Orders. *Journal of the Physical Society of Japan*, 49(2):771–778. [25](#), [26](#), [86](#)
- ITO, M. (1986). A reduce program for finding symmetries of nonlinear evolution equations with uniform rank. *Computer Physics Communications*, 42(3):351–357. [20](#)
- ITO, M. et KAKO, F. (1985). A reduce program for finding conserved densities of partial differential equations with uniform rank. *Computer Physics Communications*, 38(3):415–419. [20](#)
- JARADAT, H. M., SYAM, M., JARADAT, M. M. M., MUSTAFA, Z. et MOMAN, S. (2018). New solitary wave and multiple soliton solutions for fifth order nonlinear evolution equation with time variable coefficients. *Results in Physics*, 8:977–980. [25](#), [31](#)

- JOHNSON, R. S. (1997). *A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves*. Cambridge University Press, Cambridge. 71
- KHAN, K. et AKBAR, M. A. (2015a). Exact traveling wave solutions of Kadomtsev–Petviashvili equation. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 23(2):278–281. 71
- KHAN, M. A. et AKBAR, M. A. (2015b). Exact and Solitary Wave Solutions to the Generalized Fifth-order KdV Equation by Using the Modified Simple Equation Method. *Applied and Computational Mathematics*, 4(3):122–129. 31
- KORTEWEG, D. J. et de VRIES, G. (1895). On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philosophical Magazine*, 39(240):422–443. 3, 8, 22
- KRUSKAL, M. D., MIURA, R. M., GARDNER, C. S. et ZABUSKY, N. J. (1970). Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. V. Uniqueness and Nonexistence of Polynomial Conservation Laws. *Journal of Mathematical Physics*, 11(3):952–960. 20
- KUPERSHMITZ, B. A. (1984). A super Korteweg-de Vries equation: An integrable system. *Physics Letters A*, 102(5-6):213–215. 25, 26, 86
- LAX, P. D. (1968). Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 21(5):467–490. 25, 26, 86
- LIU, C.-S. (2006). Trial Equation Method to Nonlinear Evolution Equations with Rank Inhomogeneous: Mathematical Discussions and Its Applications. *Communications in Theoretical Physics*, 45(2):219–223. 2
- MALFLIET, W. et HEREMAN, W. (1996). The tanh method: I. Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations. *Physica Scripta*, 54(6):563–568. 2, 32
- MIURA, R. M., GARDNER, C. S. et KRUSKAL, M. D. (1968). Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. II. Existence of Conservation Laws and Constants of Motion. *Journal of Mathematical Physics*, 9(8):1204–1209. 20

- NIMMO, J. J. C. et FREEMAN, N. C. (1984). The use of Backlund transformations in obtaining N-soliton solutions in Wronskian form. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 17(7):1415–1424. [9](#)
- NUSEIR, A. (1995). *Symbolic Computation of Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations Using Direct Methods*. Thèse de doctorat, Colorado School, Golden, Colorado, USA. [20](#), [56](#), [58](#)
- PARKES, E. J. et DUFFY, B. R. (1996). An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations. *Computer Physics Communications*, 98(3):288–300. [2](#)
- QUINTERO, J. R. et MUÑOZ GRAJALES, J. C. (2008). Instability of solitary waves for a generalized Benney–Luke equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 68(10):3009–3033. [67](#)
- RAYHANUL ISLAM, S. M. (2015). Applications of the $\exp(-\Phi(\xi))$ -Expansion Method to Find Exact Traveling Wave Solutions of the Benney-Luke Equation in Mathematical Physics. *American Journal of Applied Mathematics*, 3(3):100–105. [2](#), [67](#)
- REMOISSENET, M. (1999). *Waves Called Solitons: Concepts and Experiments*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 3 édition. [9](#)
- ROSENAU, P. et HYMAN, J. M. (1993). Compactons: Solitons with finite wavelength. *Physical Review Letters*, 70(5):564–567. [13](#), [24](#)
- ROSHID, H. et RAHMAN, M. A. (2014). The $\exp(-\Phi(\eta))$ -expansion method with application in the (1+1)-dimensional classical Boussinesq equations. *Results in Physics*, 4:150–155. [2](#)
- RUSSELL, J. S. (1844). Report on Waves. 14 th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, London. [3](#), [7](#)
- SALAS, A. (2008). Exact solutions for the general fifth KdV equation by the exp function method. *Applied Mathematics and Computation*, 205(1):291–297. [2](#), [25](#), [30](#)

- SALAS, A. H., SIERRA, C. A. G. et HERNÁNDEZ, J. E. C. (2010). Symbolic Computation of Solutions for the General Fifth-order KdV Equation. *International Journal of Nonlinear Science*, 9(4):394–401. [2](#), [25](#), [30](#), [43](#)
- SAWADA, K. et KOTERA, T. (1974). A Method for Finding N-Soliton Solutions of the K.d.V. Equation and K.d.V.-Like Equation. *Progress of Theoretical Physics*, 51(5):1355–1367. [25](#), [26](#), [86](#)
- SEADAWY, A. R., LU, D. et KHATER, M. M. A. (2017). Solitary wave solutions for the generalized Zakharov–Kuznetsov–Benjamin–Bona–Mahony nonlinear evolution equation. *Journal of Ocean Engineering and Science*, 2(2):137–142. [2](#)
- SIERRA, C. A. G. et SALAS, A. H. (2008). The generalized tanh-coth method to special types of the fifth-order KdV equation. *Applied Mathematics and Computation*, 203(2):873–880. [25](#), [30](#)
- VAKHNENKO, V. O., PARKES, E. J. et MORRISON, A. J. (2003). A Bäcklund transformation and the inverse scattering transform method for the generalised Vakhnenko equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 17(4):683–692. [1](#)
- VERHEEST, F. et HEREMAN, W. (1994). Conservations Laws and Solitary Wave Solutions for Generalized Schamel Equations. *Physica Scripta*, 50(6):611–614. [20](#)
- VERHEEST, F., MACE, R. L., PILLAY, S. R. et HELLBERG, M. A. (2002). Unified derivation of Korteweg-de Vries- Zakharov-Kuznetsov equations in multispecies plasmas. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 35(3):795–806. [82](#)
- WANG, M., LI, X. et ZHANG, J. (2008). The (G'/G) -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Physics Letters A*, 372(4):417–423. [2](#)
- WANG, M., ZHOU, Y. et LI, Z. (1996). Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics. *Physics Letters A*, 216(1-5):67–75. [1](#)

- WAZWAZ, A. M. (2004). The sine–cosine method for obtaining solutions with compact and noncompact structures. *Applied Mathematics and Computation*, 159(2):559–576. [2](#)
- WAZWAZ, A. M. (2006a). Abundant solitons solutions for several forms of the fifth-order KdV equation by using the tanh method. *Applied Mathematics and Computation*, 182(1):283–300. [25](#), [30](#)
- WAZWAZ, A. M. (2006b). Analytic study of the fifth order integrable nonlinear evolution equations by using the tanh method. *Applied Mathematics and Computation*, 174(1):289–299. [25](#), [30](#)
- WAZWAZ, A. M. (2006c). Peakons, kinks, compactons and solitary patterns solutions for a family of Camassa–Holm equations by using new hyperbolic schemes. *Applied Mathematics and Computation*, 182(1):412–424. [2](#), [32](#)
- WAZWAZ, A. M. (2006d). Solitons and periodic solutions for the fifth-order KdV equation. *Applied Mathematics Letters*, 19(11):1162–1167. [25](#), [30](#)
- WAZWAZ, A. M. (2007). The extended tanh method for new solitons solutions for many forms of the fifth-order KdV equations. *Applied Mathematics and Computation*, 184(2):1002–1014. [25](#), [30](#)
- WAZWAZ, A. M. (2009). *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. [1](#), [2](#), [10](#), [21](#), [30](#), [32](#), [38](#)
- WAZWAZ, A. M. (2016). A Fifth-Order Korteweg-de Vries Equation for Shallow Water with Surface Tension: Multiple Soliton Solutions. *Acta Physica Polonica A*, 130(3):679–682. [25](#)
- WEI, L. (2009). Exact soliton solutions for the general fifth Korteweg-de Vries equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 49(8):1429–1434. [25](#), [31](#), [35](#), [48](#), [52](#)
- WU, X.-H. et HE, J.-H. (2008). Exp-function method and its application to nonlinear equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 38(3):903–910. [2](#)

- YOMBA, E. (2005). The General Projective Riccati Equations Method and Exact Solutions for a Class of Nonlinear Partial Differential Equations. *Chinese Journal of Physics*, 43(6):991–1003. 2, 35
- YOMBA, E. (2006). The modified extended Fan sub-equation method and its application to the (2+1)-dimensional Broer-Kaup-Kupershmidt equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, 27(1):187–196. 76
- ZABUSKY, N. J. et KRUSKAL, M. D. (1965). Interaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States. *Physical Review Letters*, 15(6):240–243. 3, 8
- ZAYED, E. M. E. et ALURRFI, K. A. E. (2014). The homogeneous balance method and its applications for finding the exact solutions for nonlinear evolution equations. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 33:307–318. 1, 25, 30
- ZAYED, E. M. E. et ALURRFI, K. A. E. (2015). The Generalized Projective Riccati Equations Method and its Applications to Nonlinear PDEs Describing Nonlinear Transmission Lines. *Communications on Applied Electronics*, 3(4):1–8. 2, 33
- ZHANG, J., JIANG, F. et ZHAO, X. (2010). An improved (G'/G)-expansion method for solving nonlinear evolution equations. *International Journal of Computer Mathematics*, 87(8):1716–1725. 2
- ZHANG, S. et WANG, Z. (2016). Improved Homogeneous Balance Method for Multi-Soliton Solutions of Gardner Equation with Time-Dependent Coefficients. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 46(4):592–599. 1
- ZHAO, M. et LI, C. (2008). The $\exp(-\varphi(\xi))$ -expansion method applied to nonlinear evolution equations. <http://www.paper.edu.cn>. 2, 61, 64

ملخص

تحتوي معادلات التطور غير الخطية على العديد من أنواع الأمواج المتحركة المثيرة للاهتمام. أحد الأهداف الأساسية في دراسة المعادلات نمذجة الظواهر الموجية، هو حلول الأمواج المتحركة، سواء كانت تعبيرات حلها صريحة أو ضمنية، وهي مثيرة جدا للاهتمام من وجهة نظر التطبيقات. هذه الأنواع من الموجات لن تغير شكلها أثناء الانتشار وبالتالي يسهل التعرف عليها.

يمكن بناء الحلول الدقيقة لمعادلة التطور غير الخطي بشكل منهجي عن طريق حل نظام معادلات على وسيط كمبيوتر باستخدام أي برنامج معالجة رمزي. بواسطة طريقة التوسع الأسّي، يتم الحصول على الشكل الصريح للحلول من نوع الموجة الوحيدة وحلول الموجة الداكنة وحلول الارتجاج الدوري الداكن والحلول النسبية لفئة عامة من معادلة كورتويج - دو فريس من الدرجة الخامسة.

Abstract

Non-linear evolution equations have many interesting travelling wave structures. In the study of equations modeling wave phenomena, one of the fundamental objectives is the solutions of travelling waves, whether their expressions are explicit or implicit, are very interesting from an application point of view. These types of waves will not change their profile during propagation and are therefore easy to identify.

The exact solutions of a non-linear evolution equation can be constructed systematically by solving a system of equations on a computer support, using any symbolic manipulation program. By means of the exponential expansion method, the explicit form of soliton-type solutions, dark solitary wave solutions, dark periodic cusp solutions and rational solutions of a general class of the fifth-order Korteweg-de Vries equation are obtained.

Résumé

Les équations d'évolution non linéaires possèdent beaucoup de structures d'ondes progressives intéressantes. Dans l'étude des équations modélisant les phénomènes d'ondes, l'un des objectifs fondamentaux est les solutions d'ondes progressives, que leurs expressions soient explicites ou implicites, sont très intéressantes du point de vue des applications. Ces types d'ondes ne modifieront pas leur profil pendant la propagation et sont donc faciles à identifier.

Les solutions exactes d'une équation d'évolution non linéaire peuvent être construites systématiquement en résolvant un système d'équations sur un support informatique, en utilisant n'importe quel programme de manipulation symbolique. Moyennant la méthode d'expansion exponentielle, la forme explicite des solutions de type soliton, des solutions d'ondes solitaires sombres, des solutions cuspidales périodiques sombres et des solutions rationnelles d'une classe générale de l'équation de Korteweg-de Vries du cinquième ordre sont obtenues.