

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITE Ferhat ABBAS SETIF 1**

**THESE**

Présentée à la Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques  
Pour l'obtention du diplôme de

**DOCTORAT EN SCIENCES**  
**Option : Mathématiques Appliquées**

Par

**Mme. YASMINA BELATROUS**

**THEME**

*Développement d'un critère mixte d'optimalité pour  
les coefficients des multipôles simples et croisés en élasticité*

Soutenue le : 19 décembre 2019

Devant le Jury:

<b>MEROUANI Abdelbaki</b>	<b>Professeur Université Ferhat Abbas Sétif 1</b>	<b>Président</b>
<b>SAHLI Belkacem</b>	<b>M.C.A. Université Ferhat Abbas Sétif 1</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>ZEDAM Lemnaouar</b>	<b>Professeur Université Med Boudiaf Msila</b>	<b>Examineur</b>
<b>ELLAGGOUNE Fateh</b>	<b>Professeur Université 8 mai 1945 Guelma</b>	<b>Examineur</b>
<b>KHEMIS Rabah</b>	<b>M.C.A. Université 20 aout 1955 Skikda</b>	<b>Examineur</b>
<b>BOUREGHDA Abdellatif</b>	<b>M.C.A. Université Ferhat Abbas Sétif 1</b>	<b>Examineur</b>

## REMERCIEMENTS

J'exprime ma profonde reconnaissance à mon Directeur de thèse, Monsieur Belkacem SAHLI, d'avoir accepté de diriger cette thèse. Je le remercie pour ses nombreux conseils, ses orientations, et encouragements, pour ses suggestions et surtout ses corrections tout au long de ce travail.

Je voudrais aussi exprimer ma profonde gratitude envers les membres du jury pour leur disponibilité :

A Monsieur Abdelbaki Merouani, professeur au département de Mathématiques de l'université Ferhat-Abbas, Sétif 1, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

A Messieurs les professeurs

Lemnaouar Zedam de l'université Mohamed Boudiaf de M'sila,

et Fateh Ellaggoune de l'université 8 mai 1945, Guelma, ainsi qu'aux docteurs Abdellatif

Bouregghda de l'université Ferhat Abbas, Sétif 1, et Rabah Khemis de l'université 20 aout 1955-Skikda, qui ont tous accepté d'être les examinateurs de cette thèse.

Je les remercie tous et leur exprime toute ma profonde reconnaissance.

Enfin, j'exprime ma reconnaissance et ma gratitude à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

**SOMMAIRE**

Introduction .....	01
Chapitre 1 : Formulation du problème .....	04
Chapitre 2 : Critère d'optimalité usuel.....	11
- Choix optimal des coefficients des multipôles simples .....	11
- Choix optimal des coefficients des multipôles croisés.....	21
Chapitre 3 : Critère d'optimalité du nombre de conditionnement (cas du cercle).....	29
Chapitre 4 : Critère d'optimalité du nombre de conditionnement (cas du cercle légèrement déformé) .....	43
Chapitre 5 : Critère d'optimalité mixte (cas des coefficients simples).....	61
Conclusion .....	72
Annexe 1 .....	75
Annexe 2 .....	78
Références .....	80

## INTRODUCTION

L'étude des problèmes de diffraction des ondes (de gravité, acoustiques, élastiques et électromagnétiques) dans un milieu contenant une partie non homogène (cavité, inclusion ou autres ...) se formule très souvent sous la forme d'un problème aux limites. La résolution de ce problème peut se faire par diverses méthodes (différences finies, éléments finis, etc....) [1,10,19,20,28,29,30]. Dans le cas de milieu infini, la méthode des représentations intégrales semble être la mieux adaptée pour la résolution de ce type de problèmes. Cette méthode réduit la résolution du problème à celle d'une équation intégrale sur la frontière délimitant le domaine. Cette équation intégrale peut être soit de premier espèce ou bien de second espèce. Cependant, un problème d'unicité de la solution de l'équation intégrale apparaît. Cette anomalie est liée à la méthode de résolution utilisée plutôt qu'à la nature physique du problème. Certaines solutions ont été proposées pour contourner cette anomalie (voir [6,7,8] pour une discussion détaillée des solutions proposées). Certaines de ces solutions sont basées sur la modification du noyau de l'équation intégrale, c'est-à-dire, la modification de la solution fondamentale connue sous le nom de fonction de Green. Cette modification fait intervenir des coefficients complexes appelés coefficients des multipôles, et qui doivent satisfaire à une condition large (1.24). Dans le cas d'ondes acoustiques, KLEINMAN, ROACH, KRESS et JONES [7,16,18] ont présenté une méthode de détermination d'un choix optimal de ces coefficients. Cette méthode s'appuie sur la minimisation de la norme de l'opérateur intégral qui définit l'équation intégrale modifiée. La minimisation de la norme de cet opérateur est liée à la convergence de la méthode itérative utilisée pour la résolution de cette équation intégrale modifiée, à savoir la méthode des

approximations successives. SAHLI [21, 27], a utilisé cette même méthode, mais pour le cas d'ondes élastiques en deux dimensions, et Dans [3], ARGYROPOULOS et KIRIAKI ont étudié le même cas, mais en trois dimensions. La particularité de ces ondes élastiques est la relative complexité de l'équation différentielle régissant le phénomène de diffraction.

D'autres travaux [4, 23, 24, 25, 26], ont développé un deuxième critère d'optimalité pour les coefficients des multipôles, en minimisant la norme du noyau de l'opérateur intégral modifié, à savoir, la norme de la fonction de Green. Ce deuxième critère d'optimalité, est motivé par le fait, qu'à travers la minimisation de la norme de la fonction de Green, on minimise aussi la différence entre la fonction de Green modifié et la fonction de Green exacte.

Un troisième critère d'optimalité des coefficients des multipôles, a fait l'objet d'un récent développement, dans lequel SAHLI et DJENAIHI [11, 22], a déterminé un autre choix optimal des coefficients des multipôles, en prenant comme critère d'optimalité, la minimisation de la norme de l'opérateur traction lié à la fonction de Green modifiée. Ce critère d'optimalité, est motivé par le fait, qu'à travers la minimisation de la norme de l'opérateur traction appliqué à la fonction de Green, on minimise ainsi la norme de la différence entre le noyau modifié et le noyau exact de l'opérateur intégral modifié.

Se basons sur les travaux d'ARGYROPOULOS, KIRIAKI et GINTIDES [2, 5], ainsi que GINTIDES, MINDRINOS et PALLIKARAKIS [9, 12, 13, 14, 15], on se propose dans ce travail de développer un nouveau critère d'optimalité pour les coefficients des multipôles, basé cette-fois-ci, sur la minimisation du nombre de conditionnement de l'opérateur intégral modifié associé au problème aux

limites régissant le phénomène de diffraction d'ondes élastiques. Le choix de ce nouveau critère d'optimalité, est lié directement à la stabilité numérique de la solution de l'équation intégrale modifiée. Notre travail qui porte sur les choix optimaux des coefficients des multipôles dans le cas d'ondes élastiques en deux dimensions, est structuré en quatre parties. La première partie est consacrée à la formulation mathématique du problème. Dans la deuxième partie, on rappelle le choix optimal des coefficients des multipôles dans le cas d'une frontière quelconque, en utilisant d'autres critères d'optimalité. La troisième partie traite à titre indicatif, le cas d'une frontière ayant la forme d'un cercle, des résultats intéressants sont obtenus, en minimisant le nombre de conditionnement de l'opérateur intégral modifié, dans le but énoncé ci-dessus, mais également, afin d'assurer la convergence de la méthode itérative utilisée pour la résolution de l'équation intégrale modifiée régissant le phénomène de diffraction d'ondes élastiques, pour un rayon de convergence aussi grand que possible. Dans cette partie, la fonction de Green sera modifiée de deux façons différentes, l'une en utilisant des coefficients des multipôles simples, et l'autre en utilisant les coefficients des multipôles croisés. Et dans la dernière partie, on étudie le cas d'une frontière ayant la forme d'un cercle légèrement déformé. Le travail se termine par une conclusion avec un résumé des principaux résultats obtenus.

# CHAPITRE 1

## FORMULATION DU PROBLEME

Dans ce qui suit, on présente la formulation mathématique du problème. Nous commencerons tout d'abord par introduire les notations que nous utiliserons. On considère un domaine  $D \subset \mathbb{R}^2$ , homogène, élastique, illimité extérieurement et limité intérieurement par une frontière  $\partial D$  (figure 1).

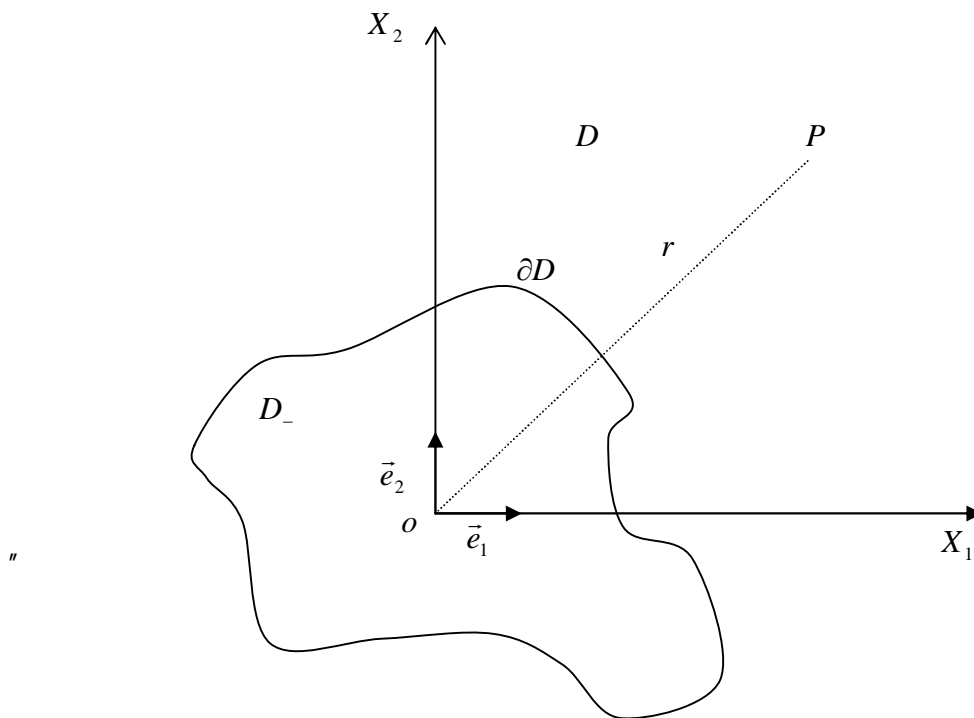


Figure 1 : représentation du domaine

On note par  $D_-$  l'intérieur de  $\partial D$  tel que  $\mathbb{R}^2 = D \cup \partial D \cup D_-$

On note par  $P, Q$  les points de  $D$ ,  $p, q$  les points de  $\partial D$  et par  $P_-, Q_-$  les points de  $D_-$

Le problème aux limites auquel nous nous intéresserons se formule comme suit :

i) L'équation dans  $D$  :

$$\frac{1}{k^2} \text{grad} (\text{div } u(P)) - \frac{1}{K^2} \text{rot} (\text{rot } u(P)) + u(P) = 0 \quad P \in D \quad (1.1)$$

ii) La condition sur la frontière  $\partial D$  :

$$T u(p) = f(p) \quad p \in \partial D \quad (\text{Condition de Neumann})$$

Ou bien : (1.2)

$$u(p) = g(p) \quad p \in \partial D \quad (\text{Condition de Dirichlet})$$

iii) Les conditions de radiation :

Elles s'expriment sous la forme suivante [20]:

$$\begin{aligned} \lim_{r_p \rightarrow +\infty} u'(P) &= 0 \\ r_p &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{r_p \rightarrow +\infty} u''(P) &= 0 \\ r_p &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{r_p \rightarrow +\infty} r_p^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\partial u'(P)}{\partial r_p} - i.k.u'(P) \right\} &= 0 \\ \lim_{r_p \rightarrow +\infty} r_p^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\partial u''(P)}{\partial r_p} - i.K.u''(P) \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

où :

$$u'(P) = -\frac{1}{k^2} \text{grad} (\text{div } u(P))$$

$$u''(P) = \frac{1}{K^2} \text{rot} (\text{rot } u(P)) \quad (1.4)$$

avec :

$$k^2 = \frac{\dots \check{S}^2}{\dots + 2 \sim} \quad \text{et} \quad K^2 = \frac{\dots \check{S}^2}{\dots \sim}$$

$\dots$  est la masse volumique,  $\check{S}$ ,  $\sim$  sont les constantes de Lamé.



$\check{S}^2$  la fréquence des ondes.

$T$  est l'opérateur traction qui agit sur la fonction  $u(p)$  par rapport au point  $p$ . Dans le cas d'un milieu isotrope  $T$  prend la forme suivante :

$$Tu(p) = \lambda \cdot \hat{n}(p) \cdot \text{div } u(p) + 2\mu \frac{\partial u(p)}{\partial n_p} + \lambda \cdot \hat{n}(p) \times \text{rot } u(p) \quad p \in \partial D \quad (1.5)$$

où  $\hat{n}(p)$  est la normale en  $p$  dirigée vers l'extérieur de  $D_-$ .

Le problème aux limites tel qu'il est défini possède une solution unique pour toutes les valeurs de la fréquence des ondes  $\check{S}^2$  [7].

Pour obtenir une représentation intégrale de la solution de notre problème, une solution fondamentale et singulière est nécessaire. Cette solution est connue sous le nom de tenseur de Green. Dans le cas d'un milieu homogène et isotrope, ce tenseur s'exprime comme suit [28] :

$$G_0(P, Q) = \frac{i}{4\pi} \cdot \left\{ \mathbb{E} \cdot I + \frac{1}{K^2} \text{grad}(\text{grad}(\mathbb{E} - w)) \right\} \quad (1.6)$$

où  $I$  est le tenseur d'unité,  $\mathbb{E} = H_0^1(K \cdot R)$  et  $w = H_0^1(k \cdot R)$ ,  $H_0^1(\cdot)$  désigne la fonction de Hankel d'ordre zéro et de premier espèce et  $R$  est la distance séparant les deux points  $P$  et  $Q$ .

Ayant défini la solution fondamentale, les représentations intégrales pour la solution de notre problème peuvent être maintenant obtenues. Il y'a deux méthodes pour l'obtention des représentations intégrales, la méthode directe et la méthode indirecte. La méthode directe s'appuie sur l'utilisation de la formule de Green [28], la méthode indirecte s'appuie sur la notion de potentiel simple couche ou double couche. Nous commencerons par la méthode indirecte. Pour le problème de Dirichlet, la solution est recherchée sous la forme d'un potentiel double couche :

$$u(P) = \int_{\partial D} T_q G_0(P, q) \cdot W(q) \cdot ds_q = (DW)(P) \quad P \in D \quad (1.7)$$

Où  $W(q)$  est une fonction densité définie sur  $\partial D$ . Cette représentation conduit à l'équation intégrale suivante :

$$\frac{1}{2}W(p) + \int_{\partial D} T_q G_0(q, p) \cdot W(q) \cdot ds_q = \frac{1}{2}W(p) + (\overline{K}_0^* W)(p) = g(p) \quad p \in \partial D \quad (1.8)$$

Où  $K_0$  est l'opérateur intégral défini par :

$$(K_0 W)(p) = \int_{\partial D} T_p G_0(p, q) \cdot W(q) \cdot ds_q \quad p \in \partial D \quad (1.9)$$

Pour le problème de Neumann, la solution est recherchée sous la forme d'un potentiel simple couche :

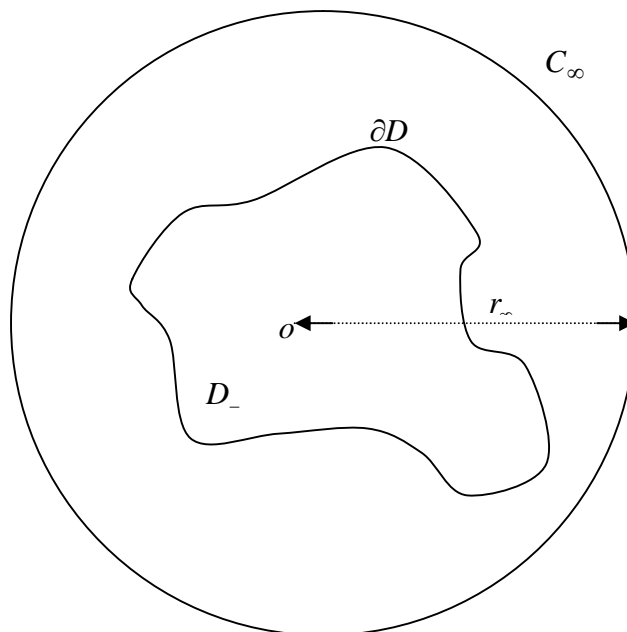
$$u(P) = \int_{\partial D} G_0(P, q) \cdot W(q) \cdot ds_q = (SW)(P) \quad P \in D \quad (1.10)$$

Où  $W(q)$  désigne toujours une fonction densité inconnue définie sur  $\partial D$ .

Cette représentation conduit à l'équation intégrale suivante :

$$-\frac{1}{2}W(p) + (K_0 W)(p) = f(p) \quad p \in \partial D \quad (1.12)$$

Pour la méthode directe, l'application de la formule de Green à la solution recherchée  $u$  et au tenseur de green  $G_0$  dans le domaine limité intérieurement par  $\partial D$  et par un cercle de grand rayon  $r_\infty$  (figure 2),



conduit aux relations suivantes, où il a été tenu compte du fait que  $u$  et  $G_0$  satisfont à l'équation (1.1) et aux conditions de radiation (1.3) :

$$u(P) = \int_{\partial D} [u(q).T_q G_0(q,P) - T u(q).G_0(q,P)].ds_q \quad P \in D \quad (1.13)$$

et

$$\frac{1}{2} u(p) = \int_{\partial D} [u(q).T_q G_0(q,p) - T u(q).G_0(q,p)].ds_q \quad p \in \partial D \quad (1.14)$$

Ce qui conduit à l'équation intégrale suivante :

$$\frac{1}{2} u(p) - \left( \overline{K_0^*} u \right) (p) = - (S f)(p) \quad p \in \partial D \quad (1.16)$$

Les deux équations intégrales (1.12) et (1.16) correspondants respectivement aux représentations intégrales (1.10) et (1.13) du problème donné sont des équations intégrales adjointes. Donc, en vertu des théorèmes de Fredholm [16] si l'une des deux possède une solution unique il en sera de même pour l'autre. Or il est connu et établi (voir par exemple [8]) que ces deux équations intégrales ne possèdent pas des solutions uniques pour un spectre discret des valeurs de la fréquence des ondes  $\tilde{S}^2$ . Ce qui est en contradiction avec ce qui a été énoncé un peu plus haut.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour contourner cette difficulté. On peut citer entre autre celle qui consiste à perturber la fonction de Green  $G_0$  en lui ajoutant une série de fonctions appelées multipôles. Dans ces multipôles intervient des coefficients arbitraires. Le tenseur de Green ainsi modifié est donné par [8] :

- Modification avec coefficients des multipôles simples :

$$G_1(P,Q) = G_0(P,Q) + \frac{i}{4 \sim K^2} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{l=1}^2 [a_m^{\dagger l} \cdot F_m^{\dagger l}(P) \otimes F_m^{\dagger l}(Q)] \quad (1.17-a)$$

- Modification avec coefficients des multipôles simples et croisés :

$$G_1(P, Q) = G_0(P, Q) + \frac{i}{4 - K^2} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{l=1}^2 \left[ a_m^{\dagger l} \cdot F_m^{\dagger l}(P) \otimes F_m^{\dagger l}(Q) + (-1)^{\dagger+l} \cdot b_m \cdot F_m^{\dagger l}(P) \otimes F_m^{(3-\dagger)(3-l)}(Q) \right] \quad (1.17-b)$$

où  $a_m^{\dagger l}$  et  $b_m$  sont successivement, les coefficients des multipôles simples et croisés, et

$$F_m^{\dagger 1}(P) = \text{grad} \left( H_m^1(k \cdot r_p) \cdot E_m^{\dagger} \left( \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ r_p \end{matrix} \right) \right), \quad F_m^{\dagger 2}(P) = \text{rot} \left( H_m^1(K \cdot r_p) \cdot E_m^{\dagger} \left( \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ r_p \end{matrix} \right) \hat{e}_3 \right)$$

$(r_p, \cdot, \cdot, r_p)$  sont les coordonnées polaires du point,  $H_m^1(\cdot)$  représente la fonction de Hankel d'ordre  $m$  et de type 1 et

$$E_m^{\dagger} \left( \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ r_p \end{matrix} \right) = \sqrt{v_m} \cdot \begin{cases} \cos(m \cdot \cdot, \cdot, r_p) & \dagger = 1 \\ \sin(m \cdot \cdot, \cdot, r_p) & \dagger = 2 \end{cases}$$

avec :

$$v_m = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 2 & m > 0 \end{cases}$$

$\otimes$  désigne le produit tensoriel,  $\hat{e}_3$  est le vecteur unité dans la direction de  $z$ .

Les équations intégrales modifiées correspondantes aux équations (1.12) et (1.16) deviennent alors respectivement :

$$-\frac{1}{2} W(p) + (K_1 W)(p) = f(p) \quad p \in \partial D \quad (1.18)$$

$$\frac{1}{2} u(p) - (\overline{K}_1^* u)(p) = -(Sf)(p) \quad p \in \partial D \quad (1.19)$$

Où  $K_1$  est l'opérateur intégral modifié défini de la même façon que  $K_0$  mais avec  $G_0$  remplacée par  $G_1$ .

Le tableau ci-dessous résume les formulations directes et indirectes conduisant à des équations intégrales modifiées de second espèce.

Conditions aux limites	Equations intégrales	Représentation dans $D$
$u = g$ (Dirichlet)	$\frac{1}{2} W + \bar{K}_1^* W = g$	$u = D_1 W$ (1.20)
	$\frac{1}{2} W + K_1 W = D_{1n} g$	$u = D_1 g - S_1 W$ (1.21)
$Tu = f$ (Neumann)	$\frac{1}{2} W - \bar{K}_1^* W = -S_1 f$	$u = D_1 W - S_1 f$ (1.22)
	$-\frac{1}{2} W + K_1 W = f$	$u = S_1 W$ (1.23)

Où :

$$(D_{1n} g)(p) = T(D_1 g)(p)$$

Afin de garantir l'unicité des solutions des équations intégrales (1.18) et (1.19), une condition suffisante mais pas nécessaire a été établie dans [8]. Cette condition porte sur les coefficients des multipôles et s'exprime sous la forme suivante :

$$\bar{b}_m \cdot \left( a_m^{\dagger 1} + \frac{1}{2} \right) + b_m \cdot \left( a_m^{-\dagger 2} + \frac{1}{2} \right) = 0$$

et

$$\left| a_m^{\dagger l} + \frac{1}{2} \right|^2 + |b_m|^2 - \frac{1}{4} < 0 \quad (1.24)$$

$$\forall m = 0 : \infty \quad \text{et} \quad \forall \dagger, l = 1 : 2$$

On, remarque alors que la condition (1.24) est une condition large. La question que l'on se pose est parmi toutes les valeurs possibles que peuvent prendre ces coefficients, est ce qu'il existe un choix optimal vis-à-vis d'un critère donné? C'est à cette question que l'on essaiera de répondre en prenant comme critère d'optimalité la minimisation du nombre de conditionnement de l'opérateur intégral modifié  $Cond(M)$ .

## CHAPITRE 2

### CRITERE D'OPTIMALITE USUEL

Dans le chapitre suivant, on énoncera quelques résultats qui nous seront utiles par la suite, il s'agit des choix optimaux des coefficients des multipôles simples et croisés [26, 27], et qui traite le critère d'optimalité lié à la minimisation de la norme de l'opérateur intégral modifié. Ce critère vise à garantir la convergence de la méthode itérative qui sera utilisée pour la résolution de l'équation intégrale modifiée (1.18), et ceci pour le plus grand spectre possible de valeurs de la fréquence  $\check{S}^2$ . On rappelle que le rayon de convergence de la méthode des approximations successives s'exprime sous la forme suivante [16] :

$$0 < \check{S}^2 < \frac{1}{\|K_1\|_{L_2(\partial D)}} \quad (2.1)$$

#### 2-1 Choix optimal des coefficients des multipôles simples :

##### 2-1-1 Théorème 1:

*La norme de l'opérateur intégral modifié  $\|K_1\|$  est minimisée, si les coefficients des multipôles simples sont choisis comme suit :*

$$a_m^{\dagger l} \frac{i}{4 - K^2} = - \frac{f_m^{\dagger l}}{r_m^{\dagger l}} \quad (2.2)$$

Où :

$$r_m^{\dagger l} = \|TF_m^{\dagger l}\|^2 \quad (2.3)$$

$$f_m^{\dagger l} = \langle \overline{K_0^* T F_m^{\dagger l}}, F_m^{\dagger l \perp} \rangle \quad (2.4)$$

**Démonstration :**

La norme de notre opérateur intégral modifié est minimisée, si les coefficients des multipôles simples  $a_m^{\dagger l}$  minimisent la quantité  $\|K_1 w\|^2$  pour toute fonction  $w \in L_2(\partial D)$ . Calculons donc la norme  $\|K_1 w\|^2$  :

$$\begin{aligned} & \|K_1 w\|^2 = \|K_0 w\|^2 \quad (2.5) \\ & + \frac{i}{4 \sim K^2} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \left[ \overline{a_m^{\dagger 1}} \langle K_0 w, TF_m^{\dagger 1} \rangle \langle \overline{F_m^{\dagger 1}}, w \rangle + a_m^{\dagger 1} \langle TF_m^{\dagger 1}, K_0 w \rangle \langle F_m^{\dagger 1}, \overline{w} \rangle \right] \\ & + \frac{i}{4 \sim K^2} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \left[ \overline{a_m^{\dagger 2}} \langle K_0 w, TF_m^{\dagger 2} \rangle \langle \overline{F_m^{\dagger 2}}, w \rangle + a_m^{\dagger 2} \langle TF_m^{\dagger 2}, K_0 w \rangle \langle F_m^{\dagger 2}, \overline{w} \rangle \right] \\ & + \left( \frac{i}{4 \sim K^2} \right)^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\epsilon=1}^2 \left[ a_m^{\dagger 1} \overline{a_n^{\epsilon 1}} \langle TF_m^{\dagger 1}, TF_n^{\epsilon 1} \rangle \langle F_m^{\dagger 1}, \overline{w} \rangle \langle \overline{F_n^{\epsilon 1}}, w \rangle \right] \\ & + \left( \frac{i}{4 \sim K^2} \right)^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\epsilon=1}^2 \left[ a_m^{\dagger 1} \overline{a_n^{\epsilon 2}} \langle TF_m^{\dagger 1}, TF_n^{\epsilon 2} \rangle \langle F_m^{\dagger 1}, \overline{w} \rangle \langle \overline{F_n^{\epsilon 2}}, w \rangle \right] \\ & + \left( \frac{i}{4 \sim K^2} \right)^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\epsilon=1}^2 \left[ a_m^{\dagger 2} \overline{a_n^{\epsilon 1}} \langle TF_m^{\dagger 2}, TF_n^{\epsilon 1} \rangle \langle F_m^{\dagger 2}, \overline{w} \rangle \langle \overline{F_n^{\epsilon 1}}, w \rangle \right] \\ & + \left( \frac{i}{4 \sim K^2} \right)^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\epsilon=1}^2 \left[ a_m^{\dagger 2} \overline{a_n^{\epsilon 2}} \langle TF_m^{\dagger 2}, TF_n^{\epsilon 2} \rangle \langle F_m^{\dagger 2}, \overline{w} \rangle \langle \overline{F_n^{\epsilon 2}}, w \rangle \right] \end{aligned}$$

C'est un problème de minimisation standard, dont la condition nécessaire pour l'existence d'un minimum est l'annulation de la dérivée.

Donc, si on dérive par rapport aux coefficients  $a_n^{\epsilon 1}$  et  $a_n^{\epsilon 2}$ , on obtient :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \|K_1 w\|^2}{\partial a_n^{\epsilon 1}} \\ \frac{\partial \|K_1 w\|^2}{\partial a_n^{\epsilon 2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall w \in L_2(\partial D) \quad (2.6)$$

Ou sous la forme suivante :

$$K_0^* TF_n^{\epsilon 1} - \frac{i}{4 \sim K^2} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{l=1}^2 \overline{a_m^{\dagger l}} \langle TF_m^{\dagger l}, TF_n^{\epsilon 1} \rangle \overline{F_n^{\epsilon 1}} = 0 \quad (2.7)$$

$$K_0^* TF_n^{\epsilon 2} - \frac{i}{4 \sim K^2} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{l=1}^2 \overline{a_m^{\dagger l}} \langle TF_m^{\dagger l}, TF_n^{\epsilon 2} \rangle \overline{F_n^{\epsilon 2}} = 0 \quad (2.8)$$

En prenant le conjugué et en calculons le produit scalaire de (2.7) et (2.8) avec  $F_n^{\epsilon 1\perp}$  et  $F_n^{\epsilon 2\perp}$  respectivement, on obtient :

$$\langle \overline{K_0^* T F_n^{\epsilon 1}}, F_n^{\epsilon 1\perp} \rangle + \frac{i}{4 - K^2} a_n^{\epsilon 1} \langle T F_n^{\epsilon 1}, T F_n^{\epsilon 1} \rangle = 0 \quad (2.9)$$

$$\langle \overline{K_0^* T F_n^{\epsilon 2}}, F_n^{\epsilon 2\perp} \rangle + \frac{i}{4 - K^2} a_n^{\epsilon 2} \langle T F_n^{\epsilon 2}, T F_n^{\epsilon 2} \rangle = 0 \quad (2.10)$$

Les solutions de ce dernier système d'équations sont données par (2.2).

Il reste à démontrer que ce choix des coefficients des multipôles simples minimise effectivement la norme de notre opérateur intégral. Autrement dit, si  $K_1^0$  désigne l'opérateur intégral modifié avec le choix optimal (2.2), et  $K_1$  désigne l'opérateur intégral modifié avec un autre choix quelconque des coefficients des multipôles, alors on doit avoir :

$$\|K_1^0 w\| \leq \|K_1 w\| \quad \forall w \in L_2(\partial D) \quad (2.11)$$

Supposons pour cela que les coefficients (choisis arbitrairement) dans  $K_1$ , puissent s'écrire sous la forme :

$$a_m^{\dagger l} = a_m^{\dagger l}(0) + v_m^{\dagger l} \quad (2.12)$$

Où  $a_m^{\dagger l}(0)$  sont définis par (2.2), on aura alors :

$$\begin{aligned} \|K_1 w\|^2 &= \|K_1^0 w\|^2 + \langle K_1^0 w, \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{l=1}^2 h_m^{\dagger l} \langle w, \overline{F_m^{\dagger l}} \rangle \rangle \\ &\quad + \langle \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{l=1}^2 h_m^{\dagger l} \langle w, \overline{F_m^{\dagger l}} \rangle, K_1^0 w \rangle \\ &\quad + \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\epsilon=1}^2 \sum_{k=1}^2 \langle h_m^{\dagger l}, h_n^{\epsilon k} \rangle \langle w, \overline{F_m^{\dagger l}} \rangle \langle \overline{w}, F_n^{\epsilon k} \rangle \end{aligned}$$

où :

$$h_m^{\dagger l}(p) = v_m^{\dagger l} T F_m^{\dagger l}(p) \quad (2.13)$$

le deuxième et le troisième termes du second membre de l'équation (2.13) s'annulent en raison du choix des coefficients dans  $K_1^0$ . Ainsi (2.13) devient :



$$\|K_1 w\|^2 = \|K_1^0 w\|^2 + \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^2 \sum_{\epsilon=1}^2 \sum_{k=1}^2 Z_m^{\dagger l} \overline{Z_n^{\epsilon k}} \langle h_m^{\dagger l}, h_n^{\epsilon k} \rangle \quad (2.14)$$

$$\text{où :} \quad Z_m^{\dagger l} = \langle w, F_m^{\dagger l} \rangle \quad (2.15)$$

La validité de notre résultat dépend de la positivité de la forme quadratique :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^2 \sum_{\epsilon=1}^2 \sum_{k=1}^2 Z_m^{\dagger l} \overline{Z_n^{\epsilon k}} \langle h_m^{\dagger l}, h_n^{\epsilon k} \rangle \quad (2.16)$$

Pour établir ce résultat, construisons un ensemble de fonctions orthonormées  $\{U_m^{\dagger l}\}_{m=0;\infty}^{\dagger l=1;2}$  à partir de  $\{h_m^{\dagger l}\}_{m=0;\infty}^{\dagger l=1;2}$ , en utilisons par exemple la procédure de Gram-Schmidt [23] et l'indépendance linéaire de  $\{h_m^{\dagger l}\}_{m=0;\infty}^{\dagger l=1;2}$ . Il existe alors un ensemble de coefficients  $\{d_{mp}^{\dagger \dots s}\}$ , tel que :

$$h_m^{\dagger l} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{\sim=1}^2 \sum_{s=1}^2 d_{mp}^{\dagger \sim s} U_p^{\sim s} \quad (2.17)$$

On aura donc :

$$\begin{aligned} \langle h_m^{\dagger l}, h_n^{\epsilon k} \rangle &= \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{\sim=1}^2 \sum_{s=1}^2 \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{\}^2 \sum_{r=1}^2 d_{mp}^{\dagger \sim s} \overline{d_{nq}^{\epsilon \} kr}} \langle U_p^{\sim s}, U_q^{\} r} \rangle \quad (2.18) \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{\sim=1}^2 \sum_{s=1}^2 d_{mp}^{\dagger \sim s} \overline{d_{np}^{\epsilon \sim ks}} = D D^* \end{aligned}$$

Où  $D$  est la matrice à éléments  $d_{mp}^{\dagger \sim s}$ , et  $D^*$  est sa conjuguée Hermitienne.

Mais  $DD^*$  est semi définie positive [28]. Ce qui termine la démonstration du théorème 1.

### 2-1-2 Lemme 1 :

si  $\partial D$  est un cercle de rayon  $a$ , alors les expressions des  $\{F_m^{\dagger l \perp}\}_{m=0;\infty}^{\dagger l=1;2}$  sont données par :

$$F_m^{11 \perp} = \frac{a^2 F_m^{11} - c_m F_m^{22}}{\Delta_m}, \quad F_m^{22 \perp} = \frac{a^1 F_m^{22} - \overline{c_m} F_m^{11}}{\Delta_m} \quad (2.19)$$

$$F_m^{12 \perp} = \frac{a_m^1 F_m^{12} + \overline{c_m} F_m^{21}}{\Delta_m}, \quad F_m^{21 \perp} = \frac{a_m^2 F_m^{21} + c_m F_m^{12}}{\Delta_m} \quad (2.20)$$

où :

$$a_m^1 = 2fak^2 \left[ |H'_m(ka)|^2 + \left( \frac{m}{ka} \right)^2 |H_m(ka)|^2 \right] \quad (2.21)$$

$$a_m^2 = 2faK^2 \left[ |H'_m(Ka)|^2 + \left( \frac{m}{Ka} \right)^2 |H_m(Ka)|^2 \right] \quad (2.22)$$

$$c_m = 2fakK \left[ \frac{m}{Ka} H'_m(ka) \overline{H_m(Ka)} + \frac{m}{ka} H'_m(Ka) \overline{H_m(ka)} \right] \quad (2.23)$$

$$\Delta_m = a_m^1 a_m^2 - |c_m|^2 \quad (2.24)$$

### Démonstration :

En prenant le produit scalaire de (2.7) avec  $F_m^{\dagger l}$  et en utilisons (2.8), on obtient :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{mn}^{\dagger l k} I_{mn}^{\dagger l k} = u_{mn} u_{\dagger \in} u_{lk} \quad (2.25)$$

$$I_{mn}^{\dagger l k} = \langle F_m^{\dagger l}, F_n^{\in k} \rangle_a \quad (2.26)$$

les expressions de (2.26) pour toutes les valeurs de  $\dagger \in lk = 1:2$ , sont données par [23] :

$$I_{mn}^{\dagger \in 11} = a_m^1 u_{mn} u_{\dagger \in} \quad (2.27)$$

$$I_{mn}^{\dagger \in 22} = a_m^2 u_{mn} u_{\dagger \in} \quad (2.28)$$

$$I_{mn}^{\dagger \in 12} = -c_m (-1)^{\dagger} u_{mn} (1 - u_{\dagger \in}) \quad (2.29)$$

$$I_{mn}^{\dagger \in 21} = -\overline{c_m} (-1)^{\in} u_{mn} (1 - u_{\dagger \in}) \quad (2.30)$$

En utilisons (2.27)-(2.30), on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a_m^1 C_{mn}^{\dagger 11} + \overline{c_m} C_{mn}^{\dagger 212} = u_{mn} u_{\dagger 1} u_{l1} \\ c_m C_{mn}^{\dagger 111} + a_m^2 C_{mn}^{\dagger 212} = u_{mn} u_{\dagger 2} u_{l2} \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\begin{cases} a_m^1 C_{mn}^{\dagger 211} - \overline{c_m} C_{mn}^{\dagger 112} = u_{mn} u_{\dagger 2} u_{l1} \\ -c_m C_{mn}^{\dagger 211} + a_m^2 C_{mn}^{\dagger 112} = u_{mn} u_{\dagger 1} u_{l2} \end{cases} \quad (2.32)$$

Avec le même déterminant non nul donné par (2.24). ce qui conduit alors aux solutions données par (2.19) et (2.20).

### 2-1-3 Théorème :

Si  $\partial D$  est un cercle de rayon  $a$ , alors le choix optimal des coefficients des multipôles simples qui minimize la norme de l'opérateur integral modifié définie par (2.3), est donné par :

$$a_m^{11} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\hat{r}_m^1}{r_m^1} + \frac{\hat{a}_m^1 a_m^2 - \overline{c}_m \hat{c}_m}{\Delta_m} + \frac{\overline{S}_m}{r_m^1} \cdot \frac{(\hat{d}_m a_m^2 - \overline{c}_m \hat{a}_m^2)}{\Delta_m} \right] \quad (2.33)$$

$$a_m^{12} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\hat{r}_m^2}{r_m^2} + \frac{a_m^1 \hat{a}_m^2 - c_m \hat{d}_m}{\Delta_m} + \frac{S_m}{r_m^2} \frac{(a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1)}{\Delta_m} \right] \quad (2.34)$$

$$a_m^{21} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\hat{r}_m^1}{r_m^1} + \frac{\hat{a}_m^1 a_m^2 - \overline{c}_m \hat{c}_m}{\Delta_m} + \frac{\overline{S}_m}{r_m^1} \cdot \frac{(\hat{d}_m a_m^2 - \overline{c}_m \hat{a}_m^2)}{\Delta_m} \right] \quad (2.35)$$

$$a_m^{22} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\hat{r}_m^2}{r_m^2} + \frac{a_m^1 \hat{a}_m^2 - c_m \hat{d}_m}{\Delta_m} + \frac{S_m}{r_m^2} \frac{(a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1)}{\Delta_m} \right] \quad (2.36)$$

Où :

$$\hat{a}_m^1 = 2fak^2 \left[ J_m'(ka) \overline{H}_m'(ka) + \left( \frac{m}{ka} \right)^2 J_m(ka) \overline{H}_m(ka) \right] \quad (2.37)$$

$$\hat{a}_m^2 = 2faK^2 \left[ J_m'(Ka) \overline{H}_m'(Ka) + \left( \frac{m}{Ka} \right)^2 J_m(Ka) \overline{H}_m(Ka) \right] \quad (2.38)$$

$$\hat{c}_m = 2fakK \left[ \frac{m}{Ka} J_m'(ka) \overline{H}_m'(Ka) + \frac{m}{ka} J_m(ka) \overline{H}_m'(Ka) \right] \quad (2.39)$$

$$\hat{d}_m = 2fakK \left[ \frac{m}{ka} J_m'(Ka) \overline{H}_m'(ka) + \frac{m}{Ka} J_m(Ka) \overline{H}_m'(Ka) \right] \quad (2.40)$$

$$\hat{r}_m^1 = 2fa \left[ \begin{aligned} & k^4 (2 - J_m''(ka) - \} J_m(ka)) (2 - \overline{H}_m''(ka) - \} \overline{H}_m(ka)) \\ & + \left( \frac{2-m}{a} \right)^2 \left( k \overline{H}_m'(ka) - \frac{\overline{H}_m(ka)}{a} \right) \left( k J_m'(ka) - \frac{J_m(ka)}{a} \right) \end{aligned} \right] \quad (2.41)$$

$$\hat{r}_m^2 = 2fa \left[ \begin{array}{l} (-K^2)^2 (2J_m''(Ka) + J_m'(Ka)) (2\bar{H}_m''(Ka) - \bar{H}_m'(Ka)) \\ + \left(\frac{2\sim m}{a}\right)^2 \left( KJ_m'(Ka) - \frac{J_m(Ka)}{a} \right) \left( K\bar{H}_m'(Ka) - \frac{\bar{H}_m(Ka)}{a} \right) \end{array} \right] \quad (2.42)$$

$$\hat{S}_m = 4f\sim m \left[ \begin{array}{l} k^2 (2\sim J_m''(ka) - J_m'(ka)) \left( K\bar{H}_m'(Ka) - \frac{\bar{H}_m(Ka)}{a} \right) \\ + \sim K^2 \left( kJ_m'(ka) - \frac{J_m(ka)}{a} \right) (2\bar{H}_m''(Ka) + \bar{H}_m'(Ka)) \end{array} \right] \quad (2.43)$$

$$\Delta_m = (2f\sim)^2 \left[ \begin{array}{l} \sim k^2 K^2 (2\sim H_m''(ka) - H_m'(ka)) (2H_m''(Ka) + H_m'(Ka)) \\ - \left(\frac{2\sim m}{a}\right)^2 \left( kH_m'(ka) - \frac{H_m(ka)}{a} \right) \left( KH_m'(Ka) - \frac{H_m(Ka)}{a} \right) \end{array} \right] \quad (2.44)$$

### Démonstration:

Pour calculer les valeurs des coefficients des multipôles simples  $a_m^{\dagger l}$ , nous devons calculer les valeurs de  $f_m^{\dagger l}$  données par (2.4). Nous avons [23] :

$$\bar{K}_0^* \overline{TF_m^{\dagger l}}(p) = \int_{\partial D} \overline{TF_m^{\dagger l}}(q) T_q G_0(q, p) ds_q \quad (2.45)$$

Si en utilise le développement de la fonction de Green [24] :

$$G_0(q, p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{4\sim K^2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\epsilon=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left[ \begin{array}{l} F_n^{\epsilon k}(q) \otimes \hat{F}_n^{\epsilon k}(p) \\ + \hat{F}_n^{\epsilon k}(q) \otimes F_n^{\epsilon k}(p) \end{array} \right] \quad (2.46)$$

On obtient :

$$f_m^{\dagger l} = \frac{i}{8\sim K^2} \cdot \left[ \begin{array}{l} \langle T\hat{F}_m^{\dagger l}, TF_m^{\dagger l} \rangle \\ + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\epsilon=1}^2 \sum_{k=1}^2 \langle TF_n^{\epsilon k}, TF_m^{\dagger l} \rangle \langle \hat{F}_n^{\epsilon k}, F_m^{\dagger l \perp} \rangle \end{array} \right] \quad (2.47)$$

Utilisons (2.19) et (2.20), on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} f_m^{11} &= f_m^{21} \\ &= \frac{i}{8\sim K^2} \cdot \left[ \hat{r}_m^1 + r_m^1 \frac{(\hat{a}_m^1 a_m^2 - \bar{c}_m \hat{c}_m)}{\Delta_m} + S_m \frac{(\hat{d}_m a_m^2 - \bar{c}_m \hat{a}_m^2)}{\Delta_m} \right] \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} f_m^{12} &= f_m^{22} \\ &= \frac{i}{8\sim K^2} \cdot \left[ \hat{r}_m^2 + r_m^2 \frac{(a_m^1 \hat{a}_m^2 - c_m \hat{d}_m)}{\Delta_m} + S_m \frac{(a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1)}{\Delta_m} \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

utilisons (2.48) et (2.49), on obtient les expressions des coefficients des multipôles tel que définis par (2.33)-(2.36).

#### 2-1-4 Théorème :

si  $\partial D$  est un cercle de rayon  $a$ , et si le choix optimal des coefficients des multipôles simples dans la modification (1.17a) est donné par les relations (2.33) a (2.36). Alors nous avons :

$$\|K_1\| = 0 \quad (2.50)$$

#### Démonstration :

D'après le lemme 2.1.2 et le théorème 2.1.3, la fonction de Green modifiée admet le développement suivant :

$$\begin{aligned} G_1(p, q) &= \frac{i}{4\pi K^2} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{l=1}^2 \sum_{l=1}^2 F_m^{+l}(p_{<}) \otimes [\hat{F}_m^{+l}(p_{>}) + a_m^{+l} F_m^{+l}(p_{>})] \\ &= \frac{1}{2} [G^D(p, q) + G^N(p, q)] \end{aligned} \quad (2.51)$$

Où  $G^D$  et  $G^N$  sont les fonctions de Green pour les problèmes de Dirichlet et de Neumann, sur le cercle respectivement. Alors :

$$G^D(p, q) = 0 \quad \text{et} \quad T_q G^N(p, q) = 0 \quad \text{pour} \quad R_p > a \quad \text{et} \quad R_q = a \quad (2.52)$$

Après quelques calculs, on obtient :

$$T_q G^D(p, q) = -T_q G^N(p, q) \quad \text{for} \quad R_p = R_q = a \quad (2.53)$$

Autrement dit, sur le cercle on a :

$$T_q G_1(p, q) = 0 \quad (2.54)$$

Ce qui implique :

$$K_1 w = 0, \quad \forall w \in L_2(\partial D) \quad (2.55)$$

d'où  $\|K_1 w\| = 0$ , et par conséquent notre équation intégrale admet une solution unique.

**2-1-5 Lemme :**

Se basons sur la technique utilisée dans [23], on considère une famille de frontières circulaires donnée paramétriquement par :

$$R_v = a + v \{ \xi(\rho) \} \quad 0 \leq \rho \leq 2f \quad (2.56)$$

où  $\xi$  et  $\frac{\partial \xi}{\partial \rho}$  sont des fonctions bornées.

Si on utilise les estimations établies dans [24] pour les vecteurs multipôles, on obtient :

$$F_m^{\dagger l}(p_v) = F_m^{\dagger l}(p_a) + O(v) \quad (2.57)$$

$$TF_m^{\dagger l}(p_v) = TF_m^{\dagger l}(p_a) + O(v) \quad (2.58)$$

$$\langle F_m^{\dagger l}, F_n^{\epsilon k} \rangle_v = \langle F_m^{\dagger l}, F_n^{\epsilon k} \rangle_a + O(v) \quad (2.59)$$

$$\langle TF_m^{\dagger l}, TF_n^{\epsilon k} \rangle_v = \langle TF_m^{\dagger l}, TF_n^{\epsilon k} \rangle_a + O(v) \quad (2.60)$$

$$F_m^{\dagger l \perp}(p_v) = F_m^{\dagger l \perp}(p_a) + O(v) \quad (2.61)$$

**2-1-6 Théorème :**

Si  $\partial D$  est défini par (2.56), alors le choix optimal des coefficients des multipôles simples qui minimise la norme de l'opérateur intégral modifié définie par (1.9), est donné par :

$$a_m^{11} = a_m^{11}(a) + O(v) \quad (2.62)$$

$$a_m^{12} = a_m^{12}(a) + O(v) \quad (2.63)$$

$$a_m^{21} = a_m^{21}(a) + O(v) \quad (2.64)$$

$$a_m^{22} = a_m^{22}(a) + O(v) \quad (2.65)$$

Où  $a_m^{\dagger l}(a)$  est le choix optimal des coefficients des multipôles simples pour la cas du cercle de rayon  $a$ .

**Démonstration :**

de (2.56), on a :

$$r_m^{+l}(p_v) = r_m^{+l}(p_a) + O(v) \quad (2.66)$$

$$\Delta_m(p_v) = \Delta_m(p_a) + O(v) \quad (2.67)$$

utilisons (2.57)-(2.61), on obtient :

$$f_m^{+l}(p_v) = f_m^{+l}(p_a) + O(v) \quad (2.68)$$

Ce qui conduit à (2.62)-(2.65).

**2-1-7 Théorème :**

*Si  $\partial D$  est défini par (2.56), et si le choix optimal des coefficients des multipôles simples dans la modification (1.9) est donné par les relations (2.62) à (2.65). Alors nous avons :*

$$\|K_1\| = O(v) \quad (2.69)$$

**Démonstration :**

D'après le théorème (2.1.6), nous avons :

$$T_{p_v} G_0(p_v, q_v) = T_{p_a} G_0(p_a, q_a) + O(v) \quad (2.70)$$

$$T_{q_v} G_0(p_v, q_v) = T_{q_a} G_0(p_a, q_a) + O(v) \quad (2.71)$$

$$T_{p_v} G_1(p_v, q_v) = T_{p_a} G_1(p_a, q_a) + O(v) \quad (2.72)$$

$$T_{q_v} G_1(p_v, q_v) = T_{q_a} G_1(p_a, q_a) + O(v) \quad (2.73)$$

$$(K_1^v w)(p_v) = (K_1^a w)(p_a) + O(v) \quad (2.73)$$

Utilisons (2.50), (2.73) devient :

$$(K_1^v w)(p_v) = O(v) \quad (2.74)$$

Ce qui conduit à :

$$\|K_1\| = O(v).$$

## 2-2 Choix optimal des coefficients des multipôles croisés :

### 2-2-1 Théorème 1:

La norme de l'opérateur intégral modifié  $\|K_1\|$  est minimisée, si les coefficients des multipôles simples et croisés sont choisis comme suit :

$$a_m^{\dagger l} \cdot \frac{i}{4 \sim K^2} = \frac{\overline{s}_m^{\dagger l} \cdot g_m^{\dagger l} - r_m^{(3-\dagger)(3-l)} \cdot f_m^{\dagger l}}{\Delta_m^{\dagger l /}} \quad (2.75)$$

$$(-1)^{\dagger+l} b_m \cdot \frac{i}{4 \sim K^2} = \frac{s_m^{\dagger l} \cdot f_m^{\dagger l} - r_m^{\dagger l} \cdot g_m^{\dagger l}}{\Delta_m^{\dagger l /}} \quad (2.76)$$

Où :

$$\Delta_m^{\dagger l /} = r_m^{\dagger l} \cdot r_m^{(3-\dagger)(3-l)} - |s_m^{\dagger l}|^2 \quad (2.77)$$

$$r_m^{\dagger l} = \|TF_m^{\dagger l}\|^2 \quad (2.78)$$

$$s_m^{\dagger l} = \langle TF_m^{\dagger l}, TF_m^{(3-\dagger)(3-l)} \rangle \quad (2.79)$$

$$f_m^{\dagger l} = \langle \overline{K_0 T F_m^{\dagger l}}, F_m^{\dagger l \perp} \rangle \quad (2.80)$$

$$g_m^{\dagger l} = \langle \overline{K_0 T F_m^{(3-\dagger)(3-l)}}, F_m^{\dagger l \perp} \rangle \quad (2.81)$$

### Démonstration :

La norme de notre opérateur intégral modifié est minimisée, si les coefficients des multipôles simples et croisés  $a_m^{\dagger l}$  et  $b_m$  minimisent la quantité  $\|K_1 w\|^2$  pour toute fonction  $w \in L_2(\partial D)$ . Calculons donc la norme  $\|K_1 w\|^2$  :

$$\|K_1 w\|^2 = \|K_0 w\|^2 \quad (2.82)$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{i}{4 \sim K^2} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{l=1}^2 \left[ \left( a_m^{\dagger l} \langle K_0 w, TF_m^{\dagger l} \rangle + (-1)^{\dagger+l} \bar{b}_m \langle K_0 w, TF_m^{(3-\dagger)(3-l)} \rangle \right) \langle \overline{F_m^{\dagger l}}, w \rangle \right. \\
& \quad \left. + \left( a_m^{\dagger l} \langle TF_m^{\dagger l}, K_0 w \rangle + (-1)^{\dagger+l} \bar{b}_m \langle TF_m^{(3-\dagger)(3-l)}, K_0 w \rangle \right) \langle F_m^{\dagger l}, \bar{w} \rangle \right] \\
& \quad + \frac{i}{4 \sim K^2} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \left[ a_m^{\dagger 2} \langle K_0 w, TF_m^{\dagger 2} \rangle \langle \overline{F_m^{\dagger 2}}, w \rangle + a_m^{\dagger 2} \langle TF_m^{\dagger 2}, K_0 w \rangle \langle F_m^{\dagger 2}, \bar{w} \rangle \right] \\
& \quad + \left( \frac{i}{4 \sim K^2} \right)^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\epsilon=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left[ \begin{aligned}
& a_m^{\dagger l} \overline{a_n^{\epsilon k}} \langle TF_m^{\dagger l}, TF_n^{\epsilon k} \rangle + a_m^{\dagger l} (-1)^{\epsilon+k} \bar{b}_n \langle TF_m^{\dagger l}, TF_n^{(3-\epsilon)(3-k)} \rangle \\
& + \overline{a_n^{\epsilon k}} (-1)^{\dagger+l} b_m \langle TF_m^{(3-\dagger)(3-l)}, TF_n^{\epsilon k} \rangle \\
& + (-1)^{\dagger+l+\epsilon+k} b_m \bar{b}_n \langle TF_m^{(3-\dagger)(3-l)}, TF_n^{(3-\epsilon)(3-k)} \rangle
\end{aligned} \right] \langle F_m^{\dagger l}, \bar{w} \rangle \langle \overline{F_n^{\epsilon k}}, w \rangle
\end{aligned}$$

C'est un problème de minimisation standard, dont la condition nécessaire pour l'existence d'un minimum est l'annulation de la dérivée de  $\|K_1 w\|^2$ .

Donc, si on dérive par rapport aux coefficients  $a_n^{\epsilon 1}$ ,  $a_n^{\epsilon 2}$  et  $b_n$ , on obtient :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \|K_1 w\|^2}{\partial a_n^{\epsilon 1}} \\ \frac{\partial \|K_1 w\|^2}{\partial a_n^{\epsilon 2}} \\ \frac{\partial \|K_1 w\|^2}{\partial b_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall w \in L_2(\partial D) \quad (2.83)$$

Ou sous la forme suivante :

$$K_0^* TF_n^{\epsilon k} - \frac{i}{4 \sim K^2} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{l=1}^2 \left[ \overline{a_m^{\dagger l}} \langle \overline{TF_m^{\dagger l}}, TF_n^{\epsilon k} \rangle + (-1)^{\dagger+l} \bar{b}_m \langle \overline{TF_m^{(3-\dagger)(3-l)}}, TF_n^{\epsilon k} \rangle \right] \overline{F_n^{\epsilon k}} = 0 \quad (2.84)$$

$$K_0^* TF_n^{(3-\epsilon)(3-k)} - \frac{i}{4 \sim K^2} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{l=1}^2 \left[ \overline{a_m^{\dagger l}} \langle \overline{TF_m^{\dagger l}}, \overline{TF_n^{(3-\epsilon)(3-k)}} \rangle + (-1)^{\dagger+l} \bar{b}_m \langle \overline{TF_m^{(3-\dagger)(3-l)}}, \overline{TF_n^{(3-\epsilon)(3-k)}} \rangle \right] \overline{F_n^{\epsilon k}} = 0 \quad (2.85)$$

En prenant le conjugué et en calculons le produit scalaire de (2.84) et (2.85)

avec  $F_n^{\epsilon k \perp}$ , on obtient :

$$\langle \overline{K_0^* TF_n^{\epsilon k}}, F_n^{\epsilon k \perp} \rangle + \frac{i}{4 \sim K^2} \left( \overline{a_n^{\epsilon k}} \langle TF_n^{\epsilon k}, TF_n^{\epsilon k} \rangle + (-1)^{\epsilon+k} b_n \langle TF_n^{(3-\epsilon)(3-k)}, TF_n^{\epsilon k} \rangle \right) = 0 \quad (2.86)$$

$$\langle \overline{K_0 T F_n^{(3-\epsilon)(3-k)}}, F_n^{\epsilon k} \rangle + \frac{i}{4-K^2} \left( a_n^{\epsilon k} \langle T F_n^{\epsilon k}, T F_n^{(3-\epsilon)(3-k)} \rangle + (-1)^{\epsilon+k} b_n \langle T F_n^{(3-\epsilon)(3-k)}, T F_n^{(3-\epsilon)(3-k)} \rangle \right) = 0 \quad (2.87)$$

Les solutions de ce dernier système d'équations sont données par (2.75) et (2.76), avec un déterminant  $\Delta_m^{\dagger l}$  non nul. En effet, nous avons en raison de l'indépendance linéaire des fonctions  $\{T F_m^{\dagger l}\}_{m=0:\infty}^{\dagger, l=1:2}$  et de l'inégalité de Schwartz :

$$|S_m^{\dagger l}|^2 = \left| \langle T F_m^{\dagger l}, T F_m^{(3-\dagger)(3-l)} \rangle \right|^2 < \|T F_m^{\dagger l}\|^2 \|T F_m^{(3-\dagger)(3-l)}\|^2 = r_m^{\dagger l} r_m^{(3-\dagger)(3-l)}$$

Ce qui entraîne que :

$$\Delta_m^{\dagger l} = r_m^{\dagger l} \cdot r_m^{(3-\dagger)(3-l)} - |S_m^{\dagger l}|^2 > 0$$

Il reste à démontrer que ce choix des coefficients des multipôles simples et croisés minimise effectivement la norme de notre opérateur intégral. Autrement dit, si  $K_1^0$  désigne l'opérateur intégral modifié avec le choix optimal (2.75)-(2.76), et  $K_1$  désigne l'opérateur intégral modifié avec un autre choix quelconque des coefficients des multipôles, alors on doit avoir :

$$\|K_1^0 w\| \leq \|K_1 w\| \quad \forall w \in L_2(\partial D) \quad (2.88)$$

Supposons pour cela que les coefficients (choisis arbitrairement) dans  $K_1$ , puissent s'écrire sous la forme :

$$a_m^{\dagger l} = a_m^{\dagger l}(0) + v_m^{\dagger l} \quad (2.89)$$

$$b_m = b_m(0) + u_m \quad (2.90)$$

Où  $a_m^{\dagger l}(0)$  et  $b_m(0)$  sont définis par (2.75)-(2.76), on aura alors :

$$\begin{aligned} \|K_1 w\|^2 &= \|K_1^0 w\|^2 + \langle K_1^0 w, \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{l=1}^2 h_m^{\dagger l} \langle w, \overline{F_m^{\dagger l}} \rangle \rangle \\ &\quad + \langle \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{l=1}^2 h_m^{\dagger l} \langle w, \overline{F_m^{\dagger l}} \rangle, K_1^0 w \rangle \\ &\quad + \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\epsilon=1}^2 \sum_{k=1}^2 \langle h_m^{\dagger l}, h_n^{\epsilon k} \rangle \langle w, \overline{F_m^{\dagger l}} \rangle \langle \overline{w}, F_n^{\epsilon k} \rangle \end{aligned}$$

$$\text{où : } h_m^{\dagger l}(p) = v_m^{\dagger l} TF_m^{\dagger l}(p) + (-1)^{\dagger+l} u_m TF_m^{(3-\dagger)(3-l)}(p) \quad (2.91)$$

le deuxième et le troisième termes du second membre de l'équation (2.91) s'annulent en raison du choix des coefficients dans  $K_1^0$ . Ainsi (2.91) devient :

$$\|K_1 w\|^2 = \|K_1^0 w\|^2 + \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\epsilon=1}^2 \sum_{k=1}^2 Z_m^{\dagger l} \overline{Z_n^{\epsilon k}} \langle h_m^{\dagger l}, h_n^{\epsilon k} \rangle \quad (2.92)$$

$$\text{où : } Z_m^{\dagger l} = \langle w, F_m^{\dagger l} \rangle \quad (2.93)$$

La validité de notre résultat dépend de la positivité de la forme quadratique :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\epsilon=1}^2 \sum_{k=1}^2 Z_m^{\dagger l} \overline{Z_n^{\epsilon k}} \langle h_m^{\dagger l}, h_n^{\epsilon k} \rangle \quad (2.94)$$

Pour établir ce résultat, construisons un ensemble de fonctions orthonormées  $\{U_m^{\dagger l}\}_{m=0;\infty}^{\dagger l=1;2}$  à partir de  $\{h_m^{\dagger l}\}_{m=0;\infty}^{\dagger l=1;2}$ , en utilisons par exemple la procédure de Gram-Schmidt [23] et l'indépendance linéaire de  $\{h_m^{\dagger l}\}_{m=0;\infty}^{\dagger l=1;2}$ . Il existe alors un ensemble de coefficients  $\{d_{m p}^{\dagger \dots s}\}$ , tel que :

$$h_m^{\dagger l} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{\sim=1}^2 \sum_{s=1}^2 d_{m p}^{\dagger \sim s} U_p^{\sim s} \quad (2.95)$$

On aura donc :

$$\begin{aligned} \langle h_m^{\dagger l}, h_n^{\epsilon k} \rangle &= \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{\sim=1}^2 \sum_{s=1}^2 \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{\}^2 \sum_{r=1}^2 d_{m p}^{\dagger \sim s} \overline{d_{n q}^{\epsilon \} k r} \langle U_p^{\sim s}, U_q^{\} r \rangle \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{\sim=1}^2 \sum_{s=1}^2 d_{m p}^{\dagger \sim s} \overline{d_{n p}^{\epsilon \sim k s}} = D D^* \end{aligned} \quad (2.96)$$

Où  $D$  est la matrice d'éléments  $d_{m p}^{\dagger \sim s}$ , et  $D^*$  est sa conjuguée Hermitienne.

Mais  $D D^*$  est semi définie positive [24]. Ce qui termine la démonstration du théorème 1.

**2-2-2 Théorème :**

Si  $\partial D$  est un cercle de rayon  $a$ , alors le choix optimal des coefficients des multipôles simples et croisés qui minimise la norme de l'opérateur intégral modifié défini par (1.17b), est donné par :

$$a_m^{11} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\hat{r}_m^1 r_m^2 - \overline{s}_m \hat{s}_m}{\Delta'_m} + \frac{\hat{a}_m^1 a_m^2 - \overline{c}_m \hat{c}_m}{\Delta_m} \right] \quad (2.97)$$

$$a_m^{12} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{r_m^1 \hat{r}_m^2 - s_m \hat{\zeta}_m}{\Delta'_m} + \frac{a_m^1 \hat{a}_m^2 - c_m \hat{d}_m}{\Delta_m} \right] \quad (2.98)$$

$$a_m^{21} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\hat{r}_m^1 r_m^2 - \overline{s}_m \hat{s}_m}{\Delta'_m} + \frac{\hat{a}_m^1 a_m^2 - \overline{c}_m \hat{c}_m}{\Delta_m} \right] \quad (2.99)$$

$$a_m^{22} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{r_m^1 \hat{r}_m^2 - s_m \hat{\zeta}_m}{\Delta'_m} + \frac{a_m^1 \hat{a}_m^2 - c_m \hat{d}_m}{\Delta_m} \right] \quad (2.100)$$

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{2} \left[ \frac{s_m \hat{r}_m^1 - r_m^1 \hat{s}_m}{\Delta'_m} + \frac{\overline{c}_m \hat{a}_m^2 - a_m^2 \hat{d}_m}{\Delta_m} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\overline{s}_m \hat{r}_m^2 - r_m^2 \hat{\zeta}_m}{\Delta'_m} + \frac{c_m \hat{a}_m^1 - a_m^1 \hat{c}_m}{\Delta_m} \right] \end{aligned} \quad (2.101)$$

Où toutes les expressions des différents coefficients qui apparaissent dans les  $a_m^{\dagger l}$  et  $b_m$  sont données dans l'annexe 1 et 2.

**Démonstration :**

Pour calculer les valeurs des coefficients des multipôles simples  $a_m^{\dagger l}$ , nous devons calculer les valeurs de  $f_m^{\dagger l}$  et  $g_m^{\dagger l}$ , nous avons [23] :

$$\overline{K}_0^* \overline{T F_m^{\dagger l}}(p) = \int_{\partial D} \overline{T F_m^{\dagger l}}(q) T_q G_0(q, p) ds_q \quad (2.102)$$

Si en utilise le développement de la fonction de Green [24] :

$$G_0(q, p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{4 \sim K^2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\epsilon=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left[ \begin{aligned} &F_n^{\epsilon k}(q) \otimes \hat{F}_n^{\epsilon k}(p) \\ &+ \hat{F}_n^{\epsilon k}(q) \otimes F_n^{\epsilon k}(p) \end{aligned} \right] \quad (2.103)$$

On obtient :

$$f_m^{\dagger l} = \frac{i}{8 \sim K^2} \cdot \left[ \begin{aligned} &\langle T\hat{F}_m^{\dagger l}, TF_m^{\dagger l} \rangle \\ &+ \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\epsilon=1}^2 \sum_{k=1}^2 \langle TF_n^{\epsilon k}, TF_m^{\dagger l} \rangle \langle \hat{F}_n^{\epsilon k}, F_m^{\dagger l \perp} \rangle \end{aligned} \right] \quad (2.104)$$

$$g_m^{\dagger l} = \frac{i}{8 \sim K^2} \cdot \left[ \begin{aligned} &\langle T\hat{F}_m^{\dagger l}, TF_m^{(3-\dagger)(3-l)} \rangle \\ &+ \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\epsilon=1}^2 \sum_{k=1}^2 \langle TF_n^{\epsilon k}, TF_m^{(3-\dagger)(3-l)} \rangle \langle \hat{F}_n^{\epsilon k}, F_m^{\dagger l \perp} \rangle \end{aligned} \right] \quad (2.105)$$

Ainsi, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} f_m^{11} &= f_m^{21} \\ &= \frac{i}{8 \sim K^2} \cdot \left[ \hat{r}_m^1 + r_m^1 \frac{(\hat{a}_m^1 a_m^2 - \bar{c}_m \hat{c}_m)}{\Delta_m} + s_m \frac{(\hat{d}_m a_m^2 - \bar{c}_m \hat{a}_m^2)}{\Delta_m} \right] \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned} f_m^{12} &= f_m^{22} \\ &= \frac{i}{8 \sim K^2} \cdot \left[ \hat{r}_m^2 + r_m^2 \frac{(a_m^1 \hat{a}_m^2 - c_m \hat{d}_m)}{\Delta_m} + s_m \frac{(a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1)}{\Delta_m} \right] \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned} g_m^{11} &= -g_m^{21} \\ &= \frac{i}{8 \sim K^2} \cdot \left[ \hat{s}_m + s_m \frac{(\hat{a}_m^1 a_m^2 - \bar{c}_m \hat{c}_m)}{\Delta_m} + r_m^2 \frac{(\hat{d}_m a_m^2 - \bar{c}_m \hat{a}_m^2)}{\Delta_m} \right] \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} g_m^{12} &= -g_m^{22} \\ &= \frac{i}{8 \sim K^2} \cdot \left[ \hat{c}_m + \bar{s}_m \frac{(a_m^1 \hat{a}_m^2 - c_m \hat{d}_m)}{\Delta_m} + r_m^1 \frac{(a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1)}{\Delta_m} \right] \end{aligned} \quad (2.109)$$

utilisons (2.104)-(2.105), on obtient les expressions des coefficients des multipôles tel que définis par (2.97)-(2.101).

### 2-2-3 Théorème :

si  $\partial D$  est un cercle de rayon  $a$ , et si le choix optimal des coefficients des multipôles simples et croisés dans la modification (1.17b) est donné par les relations (2.97)-(2.101). Alors nous avons :

$$\|K_1\| = 0 \quad (2.110)$$

**Démonstration :**

D'après le lemme 2.1.2 et le théorème 2.1.1, la fonction de Green modifiée admet le développement suivant :

$$\begin{aligned} G_1(p, q) &= \frac{i}{4 \sim K^2} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\dagger=1}^2 \sum_{l=1}^2 F_m^{\dagger l}(p_{<}) \otimes [\hat{F}_m^{\dagger l}(p_{>}) + a_m^{\dagger l} F_m^{\dagger l}(p_{>})] \\ &= \frac{1}{2} [G^D(p, q) + G^N(p, q)] \quad (2.111) \end{aligned}$$

Où  $G^D$  et  $G^N$  sont les fonctions de Green pour les problèmes de Dirichlet et de Neumann, sur le cercle respectivement. Alors :

$$G^D(p, q) = 0 \quad \text{et} \quad T_q G^N(p, q) = 0 \quad \text{pour} \quad R_p > a \quad \text{et} \quad R_q = a \quad (2.112)$$

Après quelques calculs, on obtient :

$$T_q G^D(p, q) = -T_q G^N(p, q) \quad \text{for} \quad R_p = R_q = a \quad (2.113)$$

Autrement dit, sur le cercle on a :

$$T_q G_1(p, q) = 0 \quad (2.114)$$

Ce qui implique :

$$K_1 w = 0, \quad \forall w \in L_2(\partial D) \quad (2.115)$$

d'où  $\|K_1 w\| = 0$ , et par conséquent notre équation intégrale admet une solution unique.

**2-2-4 Théorème :**

*si  $\partial D$  est défini par (2.56), alors le choix optimal des coefficients des multipôles simples et croisés qui minimise la norme de l'opérateur intégral modifié défini par (1.9), est donné par :*

$$a_m^{11} = a_m^{11}(a) + O(v) \quad (2.116)$$

$$a_m^{12} = a_m^{12}(a) + O(v) \quad (2.117)$$

$$a_m^{21} = a_m^{21}(a) + O(v) \quad (2.118)$$

$$a_m^{22} = a_m^{22}(a) + O(v) \quad (2.119)$$

$$b_m = b_m(a) + O(v) \quad (2.120)$$

Où  $a_m^{\dagger l}(a)$  et  $b_m(a)$  sont le choix optimal des coefficients des multipôles simples et croisés pour la cas du cercle de rayon  $a$ .

**Démonstration :**

On a :

$$r_m^{\dagger l}(p_v) = r_m^{\dagger l}(p_a) + O(v) \quad (2.121)$$

$$\Delta_m(p_v) = \Delta_m(p_a) + O(v) \quad (2.122)$$

utilisons (2.97), (2.101), on obtient :

$$f_m^{\dagger l}(p_v) = f_m^{\dagger l}(p_a) + O(v) \quad (2.113)$$

$$g_m^{\dagger l}(p_v) = g_m^{\dagger l}(p_a) + O(v) \quad (2.114)$$

Ce qui conduit à (2.116)-(2.120).

**2-2-5 Théorème :**

Si  $\partial D$  est défini par (2.56), et si le choix optimal des coefficients des multipôles simples et croisés dans la modification (1.17b) est donné par les relations (2.116) à (2.120). Alors nous avons :

$$\|K_1\| = O(v) \quad (2.115)$$

**Démonstration :**

D'après le théorème (2.2.4), nous avons :

$$T_{p_v} G_0(p_v, q_v) = T_{p_a} G_0(p_a, q_a) + O(v) \quad (2.116)$$

$$T_{q_v} G_0(p_v, q_v) = T_{q_a} G_0(p_a, q_a) + O(v) \quad (2.117)$$

$$T_{p_v} G_1(p_v, q_v) = T_{p_a} G_1(p_a, q_a) + O(v) \quad (2.118)$$

$$T_{q_v} G_1(p_v, q_v) = T_{q_a} G_1(p_a, q_a) + O(v) \quad (2.119)$$

$$(K_1^v w)(p_v) = (K_1^a w)(p_a) + O(v) \quad (2.120)$$

utilisons (2.115), (2.120) devient :

$$(K_1^v w)(p_v) = O(v) \quad (2.121)$$

Ce qui conduit a :

$$\|K_1\| = O(v).$$

## CHAPITRE 3

### CRITERE D'OPTIMALITE DU NOMBRE DE CONDITIONNEMENT (CAS DU CERCLE)

Après avoir énoncé les choix optimaux des coefficients des multipôles lié au critère de minimisation de la norme de l'opérateur intégral modifié. On se propose dans ce chapitre, de développer un nouveau critère d'optimalité basé sur la minimisation du nombre de conditionnement de l'équation intégrale décrivant le phénomène de diffraction d'ondes élastiques. Mais comme cela a été signalé dans plusieurs travaux qui traite la technique de la modification de la fonction de Green et la recherche des choix optimaux de ses coefficients des multipôles [5, 6, 23, 24], il est très difficile de déterminer des expressions explicites et relativement simples, dans le cas des frontières quelconques. Alors nous allons dans ce chapitre, restreindre notre étude au cas où notre frontière est un cercle, qui nous conduira à un meilleur conditionnement de l'équation intégrale modifiée pour les domaines à frontières circulaires.

#### 3.1 Notations :

Introduisons les opérateurs qui définissent les représentations intégrales de notre problème pour le cas de Neumann et de Dirichlet :

$$M : L_2(\partial D) \rightarrow L_2(\partial D) \quad / \quad M = \frac{1}{2}I + \bar{K}_1^* \quad (3.1)$$

$$N : L_2(\partial D) \rightarrow L_2(\partial D) \quad / \quad N = -\frac{1}{2}I + K_1 \quad (3.2)$$

et leurs opérateurs  $L_2$  adjoints  $M^*$  et  $N^*$ .

Il est connu que le nombre de conditionnement qui est donné par [2]:

$$\text{Cond}(M) = \|M\| \cdot \|M^{-1}\| \quad \text{et} \quad \text{Cond}(N) = \|N\| \cdot \|N^{-1}\|$$



Peut être exprimé sous la forme :

$$\text{Cond}(M) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}^M}{\lambda_{\min}^M}} \quad \text{et} \quad \text{Cond}(N) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}^N}{\lambda_{\min}^N}}$$

Où  $\lambda_{\max}^M$  ( $\lambda_{\max}^N$ ) et  $\lambda_{\min}^M$  ( $\lambda_{\min}^N$ ) sont respectivement, la plus grande et la plus petite valeur spectrale de l'opérateur auto adjoint  $M^*M$  ( $N^*N$ ).

### 3.2 Théorème :

Si la frontière du domaine  $\partial D$  est un cercle de rayon  $a$ , alors le nombre de conditionnement de l'équation intégrale modifiée, est minimisé (égal à 1), si les coefficients des multipôles simples sont choisis comme suit :

$$a_m^{\dagger l} \frac{i}{4 - K^2} = - \frac{f_m^{\dagger l}}{r_m^{\dagger l}} \quad (3.3)$$

Où :

$$r_m^{\dagger l} = \|TF_m^{\dagger l}\|^2 \quad (3.4)$$

$$f_m^{\dagger l} = \langle \overline{K_0 T F_m^{\dagger l}}, F_m^{\dagger l \perp} \rangle \quad (3.5)$$

### Démonstration :

D'après les calculs établis dans [26, 27], les fonctions multipôles  $F_m^{\dagger l}$  s'expriment dans le cas du cercle de rayon  $a$ , sous la forme suivante :

$$F_m^{\dagger 1}(p) = k H_m'(ka) P_m^{\dagger}(\rho_p) + \frac{m}{a} H_m(ka) Q_m^{\dagger}(\rho_p) \quad (3.6)$$

$$(-1)^{\dagger} F_m^{\dagger 2}(p) = \frac{m}{a} H_m(Ka) P_m^{(3-\dagger)}(\rho_p) + K H_m'(Ka) Q_m^{(3-\dagger)}(\rho_p) \quad (3.7)$$

où:

$$P_m^{\dagger}(\rho_p) = E_m^{\dagger}(\rho_p) \vec{r} \quad \text{et} \quad Q_m^{\dagger}(\rho_p) = (-1)^{\dagger} E_m^{(3-\dagger)}(\rho_p) \vec{n} \quad (3.8)$$

De plus nous avons [26, 27] :

$$T_p G_1(p, q) = [T_q G_1(p, q)]^{\dagger} \quad (3.9)$$

Ce qui conduit à :  $K_1 = \overline{K_1^*}$ .

Introduisons maintenant les potentiels modifiés de simple couche  $V_n^\epsilon$  et

$U_n^\epsilon$  avec comme vecteurs de densités  $P_n^\epsilon$  et  $Q_n^\epsilon$  :

$$V_n^\epsilon(p) = \frac{1}{2f} \int_{R_q=a} G_1(p, q) \cdot P_n^\epsilon(p, q) \cdot ds_q \quad (3.9)$$

$$U_n^\epsilon(p) = \frac{1}{2f} \int_{R_q=a} G_1(p, q) \cdot Q_n^\epsilon(p, q) \cdot ds_q \quad (3.10)$$

Si on utilise les relations d'orthogonalité des vecteurs  $P_n^\epsilon$  et  $Q_n^\epsilon$ , on obtient :

$$\frac{1}{2f} \int_0^{2f} F_m^{\dagger 1}(q) \cdot P_n^\epsilon(p, q) \cdot a \cdot d_{nq} = k a H_m'(ka) u_{mn} u_{\dagger \epsilon} \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{2f} \int_0^{2f} F_m^{\dagger 2}(q) \cdot P_n^\epsilon(p, q) \cdot a \cdot d_{nq} = (-1)^\dagger m H_m(Ka) u_{mn} u_{(3-\dagger)\epsilon} \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{2f} \int_0^{2f} F_m^{\dagger 1}(q) \cdot Q_n^\epsilon(p, q) \cdot a \cdot d_{nq} = m H_m(ka) u_{mn} u_{\dagger \epsilon} \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{2f} \int_0^{2f} F_m^{\dagger 2}(q) \cdot Q_n^\epsilon(p, q) \cdot a \cdot d_{nq} = (-1)^{(3-\epsilon)} K a H_m'(Ka) u_{mn} u_{\dagger (3-\epsilon)} \quad (3.14)$$

Substituons les expressions (3.11) à (3.14) dans (3.9) et (3.10), on obtient :

$$V_n^\epsilon(p) = \frac{i}{4 \sim K^2} k a H_n'(ka) \left[ \begin{array}{l} \hat{F}_n^{\epsilon 1}(p) + a_n^{\epsilon 1} F_n^{\epsilon 1}(p) \\ + (-1)^{\epsilon+1} b_n F_n^{(3-\epsilon)2}(p) \end{array} \right] + \frac{i}{4 \sim K^2} (-1)^{3-\epsilon} n H_n(Ka) \left[ \begin{array}{l} \hat{F}_n^{(3-\epsilon)2}(p) + a_n^{(3-\epsilon)2} F_n^{(3-\epsilon)2}(p) \\ + (-1)^{3-\epsilon} b_n F_n^{\epsilon 1}(p) \end{array} \right] \quad (3.15)$$

$$U_n^\epsilon(p) = \frac{i}{4 \sim K^2} n H_n(ka) \left[ \begin{array}{l} \hat{F}_n^{\epsilon 1}(p) + a_n^{\epsilon 1} F_n^{\epsilon 1}(p) \\ + (-1)^{\epsilon+1} b_n F_n^{(3-\epsilon)2}(p) \end{array} \right] + \frac{i}{4 \sim K^2} (-1)^{3-\epsilon} K a H_n'(Ka) \left[ \begin{array}{l} \hat{F}_n^{(3-\epsilon)2}(p) + a_n^{(3-\epsilon)2} F_n^{(3-\epsilon)2}(p) \\ + (-1)^{3-\epsilon} b_n F_n^{\epsilon 1}(p) \end{array} \right] \quad (3.16)$$

Afin de déterminer les valeurs propres de l'opérateur  $M$ , la relation suivante doit être satisfaite :

$$M U(p) = \lambda U(p) \quad R_p = a \quad (3.17)$$

Mais comme  $\{P_n^\epsilon, Q_n^\epsilon\}$  est une base dans  $(L_2(\partial D))^2$ , alors  $U(p)$  peut être exprimé sous la forme d'une combinaison linéaires des vecteurs :

$$U(p) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r=1}^2 (r_m^r P_m^r(p) + s_m^r Q_m^r(p)) \quad (3.18)$$

Pour calculer  $MU(p)$ , nous devons calculer d'abord :

$$M P_n^\epsilon(p) = \left(\frac{1}{2}I + \bar{K}_1^*\right) P_n^\epsilon(p) \text{ et } M Q_n^\epsilon(p) = \left(\frac{1}{2}I + \bar{K}_1^*\right) Q_n^\epsilon(p) \quad (3.19)$$

Si on applique la condition aux limites de Neumann à  $V_n^\epsilon$ , on obtient [8]:

$$V_n^\epsilon(p) = \left(\frac{1}{2}I + K_1\right) P_n^\epsilon(p) \quad R_p = a \quad (3.20)$$

utilisons  $K_1 = \bar{K}_1^*$ , (3.19) devient :

$$M P_n^\epsilon(p) = \left(\frac{1}{2}I + \bar{K}_1^*\right) P_n^\epsilon(p) = V_n^\epsilon(p) \quad R_p = a \quad (3.21)$$

Et de la même manière, on peut obtenir :

$$M Q_n^\epsilon(p) = \left(\frac{1}{2}I + \bar{K}_1^*\right) Q_n^\epsilon(p) = U_n^\epsilon(p) \quad R_p = a \quad (3.22)$$

Utilisons les relations suivantes [24]:

$$\begin{aligned} F_n^{\epsilon 1}(p) &= k^2 \left(2 \sim H_n''(ka) - \} H_n(ka)\right) P_n^\epsilon(p) \\ &+ \frac{2 \sim n}{a} \left(k H_n'(ka) - \frac{H_n(ka)}{a}\right) Q_n^\epsilon(p) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} F_n^{\epsilon 2}(p) &= \sim K^2 \left(2 H_n''(Ka) + H_n(Ka)\right) (-1)^\epsilon P_n^{(3-\epsilon)}(p) \\ &+ \frac{2 \sim n}{a} \left(K H_n'(Ka) - \frac{H_n(Ka)}{a}\right) (-1)^\epsilon Q_n^{(3-\epsilon)}(p) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_n^{\epsilon 1}(p) &= k^2 \left(2 \sim J_n''(ka) - \} J_n(ka)\right) P_n^\epsilon(p) \\ &+ \frac{2 \sim n}{a} \left(k J_n'(ka) - \frac{J_n(ka)}{a}\right) Q_n^\epsilon(p) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_n^{\epsilon 2}(p) &= \sim K^2 \left(2 J_n''(Ka) + J_n(Ka)\right) (-1)^\epsilon P_n^{(3-\epsilon)}(p) \\ &+ \frac{2 \sim n}{a} \left(K J_n'(Ka) - \frac{J_n(Ka)}{a}\right) (-1)^\epsilon Q_n^{(3-\epsilon)}(p) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Et les notations suivantes :

$$b_n^{\epsilon 1} = k^2 \left( 2 J_n''(ka) + J_n'(ka) \right) + a_n^{\epsilon 1} k^2 \left( 2 H_n''(ka) + H_n'(ka) \right) + b_n \sim K^2 \left( 2 H_n''(Ka) + H_n'(Ka) \right) \quad (3.27)$$

$$b_n^{\epsilon 2} = \sim K^2 \left( 2 J_n''(Ka) + J_n'(Ka) \right) + a_n^{(3-\epsilon)2} \sim K^2 \left( 2 H_n''(Ka) + H_n'(Ka) \right) + b_n k^2 \left( 2 \sim H_n''(ka) - \} H_n'(ka) \right) \quad (3.28)$$

$$b_n^{\epsilon 3} = \frac{2 \sim n}{a} \left( k J_n'(ka) - \frac{J_n(ka)}{a} \right) + a_n^{\epsilon 1} \frac{2 \sim n}{a} \left( k H_n'(ka) - \frac{H_n(ka)}{a} \right) + b_n \frac{2 \sim n}{a} \left( K H_n'(Ka) - \frac{H_n(Ka)}{a} \right) \quad (3.29)$$

$$b_n^{\epsilon 4} = \frac{2 \sim n}{a} \left( K J_n'(Ka) - \frac{J_n(Ka)}{a} \right) + a_n^{(3-\epsilon)2} \frac{2 \sim n}{a} \left( K H_n'(Ka) - \frac{H_n(Ka)}{a} \right) + b_n \frac{2 \sim n}{a} \left( k H_n'(ka) - \frac{H_n(ka)}{a} \right) \quad (3.30)$$

On obtient :

$$V_n^{\epsilon}(p) = \frac{i}{4 \sim K^2} k a H_n'(ka) \left[ b_n^{\epsilon 1} P_n^{\epsilon}(\sim p) + b_n^{\epsilon 3} Q_n^{\epsilon}(\sim p) \right] - \frac{i}{4 \sim K^2} n H_n(Ka) \left[ b_n^{\epsilon 2} P_n^{\epsilon}(\sim p) + b_n^{\epsilon 4} Q_n^{\epsilon}(\sim p) \right] \quad (3.31)$$

$$U_n^{\epsilon}(p) = \frac{i}{4 \sim K^2} n H_n(ka) \left[ b_n^{\epsilon 1} P_n^{\epsilon}(\sim p) + b_n^{\epsilon 3} Q_n^{\epsilon}(\sim p) \right] - \frac{i}{4 \sim K^2} K a H_n'(Ka) \left[ b_n^{\epsilon 2} P_n^{\epsilon}(\sim p) + b_n^{\epsilon 4} Q_n^{\epsilon}(\sim p) \right] \quad (3.32)$$

Ce qui nous conduit aux équations suivantes :

$$\left( \} - \frac{i}{4 \sim K^2} \left[ k a H_n'(ka) b_n^{\epsilon 1} + n H_n(Ka) b_n^{\epsilon 2} \right] r_n^{\epsilon} \right) - \frac{i}{4 \sim K^2} \left[ n H_n(ka) b_n^{\epsilon 1} + K a H_n'(Ka) b_n^{\epsilon 2} \right] s_n^{\epsilon} = 0 \quad (3.33)$$

$$- \frac{i}{4 \sim K^2} \left[ k a H_n'(ka) b_n^{\epsilon 3} + n H_n(Ka) b_n^{\epsilon 4} \right] r_n^{\epsilon} + \left( \} - \frac{i}{4 \sim K^2} \left[ n H_n(ka) b_n^{\epsilon 3} + K a H_n'(Ka) b_n^{\epsilon 4} \right] s_n^{\epsilon} \right) = 0 \quad (3.34)$$

Si on utilise les notations suivantes :

$$A_n^{\epsilon 1} = [k a H_n'(ka) b_n^{\epsilon 1} + n H_n(Ka) b_n^{\epsilon 2}]$$

$$A_n^{\epsilon 2} = [k a H_n'(ka) b_n^{\epsilon 3} + n H_n(Ka) b_n^{\epsilon 4}]$$

$$A_n^{\epsilon 3} = n H_n(ka) b_n^{\epsilon 1} + K a H_n'(Ka) b_n^{\epsilon 2}$$

$$A_n^{\epsilon 4} = n H_n(ka) b_n^{\epsilon 3} + K a H_n'(Ka) b_n^{\epsilon 4}$$

alors (3.33) et (3.34) peut être réécrite comme suit :

$$\left( \} - \frac{i}{4 \sim K^2} A_n^{\epsilon 1} r_n^{\epsilon} \right) - \frac{i}{4 \sim K^2} A_n^{\epsilon 3} S_n^{\epsilon} = 0 \quad (3.35)$$

$$- \frac{i}{4 \sim K^2} A_n^{\epsilon 2} r_n^{\epsilon} + \left( \} - \frac{i}{4 \sim K^2} A_n^{\epsilon 4} S_n^{\epsilon} \right) = 0 \quad (3.36)$$

Afin d'obtenir des solutions non triviales de ce dernier système, son déterminant doit être nul, ce qui implique que les valeurs propres doivent vérifier ce qui suit :

$$\}^2 - \frac{i}{4 \sim K^2} (A_n^{\epsilon 1} + A_n^{\epsilon 4}) \} + \left( \frac{i}{4 \sim K^2} \right)^2 (A_n^{\epsilon 1} A_n^{\epsilon 4} - A_n^{\epsilon 2} A_n^{\epsilon 3}) = 0 \quad (3.37)$$

Il est évident que le nombre de conditionnement est minimisé, si les coefficients des multipôles sont choisis, de telle sorte que toutes les valeurs propres deviennent égales à 1, ce qui conduit à un nombre de conditionnement égal à 1.

Pour cela, utilisons la même technique développée dans [2], on obtient :

$$\left( \frac{i}{4 \sim K^2} \right)^2 (A_n^{\epsilon 1} A_n^{\epsilon 4} - A_n^{\epsilon 2} A_n^{\epsilon 3}) = e^{2i \cdot \dots_n^{\epsilon}} \quad (3.38)$$

$$- \frac{i}{4 \sim K^2} (A_n^{\epsilon 1} + A_n^{\epsilon 4}) = \dots_n^{\epsilon} e^{i \cdot \dots_n^{\epsilon}} \quad (3.39)$$

Où  $\dots_n^{\epsilon}, \dots_n^{\epsilon}$  sont des nombres réels arbitraires satisfont les inégalités suivantes :

$$0 \leq \dots_n^{\epsilon} \leq 2 \quad \text{et} \quad 0 \leq \dots_n^{\epsilon} < 2f \quad (3.40)$$

Utilisons (3.38) et (3.39), (3.37) devient :

$$\}^2 + \dots_n^\epsilon e^{i\sigma_n^\epsilon} \} + e^{2i\sigma_n^\epsilon} = 0 \quad (3.41)$$

Cette dernière équation admet les solutions suivantes:

$$\} _1 = \frac{-\left(\dots_n^\epsilon e^{i\sigma_n^\epsilon}\right) + i e^{i\sigma_n^\epsilon} \sqrt{4 - \left(\dots_n^\epsilon\right)^2}}{2}$$

$$\} _2 = \frac{-\left(\dots_n^\epsilon e^{i\sigma_n^\epsilon}\right) - i e^{i\sigma_n^\epsilon} \sqrt{4 - \left(\dots_n^\epsilon\right)^2}}{2}$$

Notons ici, que :  $|\} _1| = |\} _2| = 1$ .

Il est évident qu'il existe un nombre infini de choix des coefficients des multipôles  $a_m^{+l}$  et  $b_m$  qui vérifie la condition (3.41). Mais si on choisit les coefficients des multipôles simples et croisés qui minimise la norme de l'opérateur intégral modifié, cité au chapitre 2, et après quelques calculs on obtient :

$$A_n^{\epsilon 1} = A_n^{\epsilon 4} = -4 \sim K^2 \text{ et } A_n^{\epsilon 2} = A_n^{\epsilon 3} = 0 \quad (3.42)$$

Pour ces valeurs (3.42) et pour  $\dots_n^\epsilon = 2$ ,  $\sigma_n^\epsilon = f$ , l'équation (3.41) admet une double solution  $\} = 1$ . D'où le nombre de conditionnement est minimisé et égale à 1.

Il est à signaler qu'il est difficile de montrer d'une façon calculatoire, que le choix des coefficients des multipôles cité ci-dessus, vérifie la condition large (1.24) qui nous garantit l'unicité de la solution [8]. Mais pour cela, nous avons démontré dans le chapitre 2, qu'avec ce choix optimal la norme de l'opérateur intégral modifié est nulle, et par conséquent, la solution de notre problème aux limites est unique, ce qui nous épargne la nécessité de vérifier la condition large (1.24).

### 3.3 Théorème :

Si la frontière du domaine  $\partial D$  est un cercle de rayon  $a$ , alors le nombre de conditionnement de l'équation intégrale modifiée est minimisé (égal à 1), si les coefficients des multipôles simples et croisés sont choisis comme suit :

$$a_m^{\dagger l} \cdot \frac{i}{4 - K^2} = \frac{\overline{s}_m^{\dagger l} \cdot g_m^{\dagger l} - r_m^{(3-\dagger)(3-l)} \cdot f_m^{\dagger l}}{\Delta_m^{\dagger l/}} \quad (3.43)$$

$$(-1)^{\dagger+l} b_m \cdot \frac{i}{4 - K^2} = \frac{s_m^{\dagger l} \cdot f_m^{\dagger l} - r_m^{\dagger l} \cdot g_m^{\dagger l}}{\Delta_m^{\dagger l/}} \quad (3.44)$$

Où :

$$\Delta_m^{\dagger l/} = r_m^{\dagger l} \cdot r_m^{(3-\dagger)(3-l)} - |s_m^{\dagger l}|^2 \quad (3.45)$$

$$r_m^{\dagger l} = \|TF_m^{\dagger l}\|^2 \quad (3.46)$$

$$s_m^{\dagger l} = \langle TF_m^{\dagger l}, TF_m^{(3-\dagger)(3-l)} \rangle \quad (3.47)$$

$$f_m^{\dagger l} = \langle \overline{K}_0^* TF_m^{\dagger l}, F_m^{\dagger l \perp} \rangle \quad (3.48)$$

$$g_m^{\dagger l} = \langle \overline{K}_0^* \overline{TF}_m^{(3-\dagger)(3-l)}, F_m^{\dagger l \perp} \rangle \quad (3.49)$$

### Démonstration :

D'après les calculs établis dans [26], les fonctions multipôles  $TF_m^{\dagger l}$  s'expriment dans le cas du cercle de rayon  $a$ , sous la forme suivante :

$$TF_m^{\dagger 1}(p) = k H_m'(ka) P_m^{\dagger} \left( \frac{p}{a} \right) + \frac{m}{a} H_m(ka) Q_m^{\dagger} \left( \frac{p}{a} \right) \quad (3.50)$$

$$(-1)^{\dagger} TF_m^{\dagger 2}(p) = \frac{m}{a} H_m(Ka) P_m^{(3-\dagger)} \left( \frac{p}{a} \right) + K H_m'(Ka) Q_m^{(3-\dagger)} \left( \frac{p}{a} \right) \quad (3.51)$$

Où:

$$P_m^\dagger(\underset{p}{r}) = E_m^\dagger(\underset{p}{r}) \vec{r} \quad \text{et} \quad Q_m^\dagger(\underset{p}{r}) = (-1)^\dagger E_m^{(3-\dagger)}(\underset{p}{r}) \vec{r} \quad (3.52)$$

De plus nous avons [25] :

$$T_p G_1(p, q) = [T_q G_1(p, q)]^t \quad (3.53)$$

Ce qui conduit à :  $K_1 = \overline{K_1}^*$ .

Introduisons maintenant les potentiels modifiés de double couche  $V_n^\epsilon$  et  $U_n^\epsilon$  avec comme vecteurs de densités  $P_n^\epsilon$  et  $Q_n^\epsilon$  :

$$V_n^\epsilon(p) = \frac{1}{2f} \int_{R_q=a} T_p G_1(p, q) \cdot P_n^\epsilon(\underset{p}{r}) \cdot ds_q \quad (3.54)$$

$$U_n^\epsilon(p) = \frac{1}{2f} \int_{R_q=a} T_p G_1(p, q) \cdot Q_n^\epsilon(\underset{q}{r}) \cdot ds_q \quad (3.55)$$

Si on utilise les relations d'orthogonalité des vecteurs  $P_n^\epsilon$  et  $Q_n^\epsilon$ , on obtient :

$$\frac{1}{2f} \int_0^{2f} TF_m^{\dagger 1}(q) \cdot P_n^\epsilon(\underset{q}{r}) \cdot a \cdot d_{nq} = k a H_m'(k a) u_{mn} u_{\dagger \epsilon} \quad (3.56)$$

$$\frac{1}{2f} \int_0^{2f} TF_m^{\dagger 2}(q) \cdot P_n^\epsilon(\underset{q}{r}) \cdot a \cdot d_{nq} = (-1)^\dagger m H_m(K a) u_{mn} u_{(3-\dagger)\epsilon} \quad (3.57)$$

$$\frac{1}{2f} \int_0^{2f} TF_m^{\dagger 1}(q) \cdot Q_n^\epsilon(\underset{q}{r}) \cdot a \cdot d_{nq} = m H_m(k a) u_{mn} u_{\dagger \epsilon} \quad (3.58)$$

$$\frac{1}{2f} \int_0^{2f} TF_m^{\dagger 2}(q) \cdot Q_n^\epsilon(\underset{q}{r}) \cdot a \cdot d_{nq} = (-1)^{(3-\epsilon)} K a H_m'(K a) u_{mn} u_{\dagger(3-\epsilon)} \quad (3.59)$$

Substituons les expressions (3.56) à (3.59) dans (3.54) et (3.55), on obtient :

$$V_n^\epsilon(p) = \frac{i}{4 \sim K^2} k a H_n'(k a) \left[ \begin{array}{l} \widehat{TF}_n^{\epsilon 1}(p) + a_n^{\epsilon 1} TF_n^{\epsilon 1}(p) \\ + (-1)^{\epsilon+1} b_n TF_n^{(3-\epsilon)2}(p) \end{array} \right] \\ + \frac{i}{4 \sim K^2} (-1)^{3-\epsilon} n H_n(K a) \left[ \begin{array}{l} \widehat{TF}_n^{(3-\epsilon)2}(p) + a_n^{(3-\epsilon)2} TF_n^{(3-\epsilon)2}(p) \\ + (-1)^{3-\epsilon} b_n TF_n^{\epsilon 1}(p) \end{array} \right] \quad (3.60)$$



$$\begin{aligned}
U_n^\epsilon(p) = & \frac{i}{4 \sim K^2} n H_n(ka) \left[ \begin{aligned} & T\hat{F}_n^{\epsilon 1}(p) + a_n^{\epsilon 1} T F_n^{\epsilon 1}(p) \\ & + (-1)^{\epsilon+1} b_n T F_n^{(3-\epsilon)2}(p) \end{aligned} \right] \\
& + \frac{i}{4 \sim K^2} (-1)^{3-\epsilon} K a H_n'(Ka) \left[ \begin{aligned} & T\hat{F}_n^{(3-\epsilon)2}(p) + a_n^{(3-\epsilon)2} T F_n^{(3-\epsilon)2}(p) \\ & + (-1)^{3-\epsilon} b_n T F_n^{\epsilon 1}(p) \end{aligned} \right] \quad (3.61)
\end{aligned}$$

Afin de déterminer les valeurs propres de l'opérateur  $N$ , la relation suivante doit être satisfaite :

$$N U(p) = \lambda U(p) \quad R_p = a \quad (3.62)$$

mais comme  $\{P_n^\epsilon, Q_n^\epsilon\}$  est une base dans  $(L_2(\partial D))^2$ , alors  $U(p)$  peut être exprimé sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs :

$$U(p) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r=1}^2 (r_m^r P_m^r(p) + s_m^r Q_m^r(p)) \quad (3.63)$$

pour calculer  $N U(p)$ , nous devons calculer d'abord :

$$N P_n^\epsilon(p) = \left( -\frac{1}{2} I + K_1 \right) P_n^\epsilon(p) \quad \text{et} \quad N Q_n^\epsilon(p) = \left( -\frac{1}{2} I + K_1 \right) Q_n^\epsilon(p) \quad (3.64)$$

si on applique la condition aux limites de Dirichlet à  $V_n^\epsilon$ , on obtient [2]:

$$T V_n^\epsilon(p) = \left( -\frac{1}{2} I + \overline{K}_1^* \right) P_n^\epsilon(p) \quad R_p = a \quad (3.65)$$

utilisons  $K_1 = \overline{K}_1^*$ , (3.64) devient :

$$N P_n^\epsilon(p) = \left( -\frac{1}{2} I + K_1 \right) P_n^\epsilon(p) = T V_n^\epsilon(p) \quad R_p = a \quad (3.66)$$

Et de la même manière, on peut obtenir :

$$N Q_n^\epsilon(p) = \left( -\frac{1}{2} I + K_1 \right) Q_n^\epsilon(p) = T U_n^\epsilon(p) \quad R_p = a \quad (3.67)$$

Utilisons les relations suivantes [2]:

$$\begin{aligned}
T F_n^{\epsilon 1}(p) = & k^2 \left( 2 \sim H_n''(ka) - \} H_n(ka) \right) P_n^\epsilon(p) \\
& + \frac{2 \sim n}{a} \left( k H_n'(ka) - \frac{H_n(ka)}{a} \right) Q_n^\epsilon(p) \quad (3.68)
\end{aligned}$$

$$TF_n^{\epsilon 2}(p) = \sim K^2 (2H_n''(Ka) + H_n(Ka))(-1)^\epsilon P_n^{(3-\epsilon)}(u_p) \\ + \frac{2-n}{a} \left( KH_n'(Ka) - \frac{H_n(Ka)}{a} \right) (-1)^\epsilon Q_n^{(3-\epsilon)}(u_p) \quad (3.69)$$

$$T\hat{F}_n^{\epsilon 1}(p) = k^2 (2 \sim J_n''(ka) - \} J_n(ka)) P_n^\epsilon(u_p) \\ + \frac{2-n}{a} \left( k J_n'(ka) - \frac{J_n(ka)}{a} \right) Q_n^\epsilon(u_p) \quad (3.70)$$

$$T\hat{F}_n^{\epsilon 2}(p) = \sim K^2 (2J_n''(Ka) + J_n(Ka))(-1)^\epsilon P_n^{(3-\epsilon)}(u_p) \\ + \frac{2-n}{a} \left( K J_n'(Ka) - \frac{J_n(Ka)}{a} \right) (-1)^\epsilon Q_n^{(3-\epsilon)}(u_p) \quad (3.71)$$

Et les notations suivantes :

$$b_n^{\epsilon 1} = k^2 (2J_n''(ka) + J_n(ka)) + a_n^{\epsilon 1} k^2 (2H_n''(ka) + H_n(ka)) \\ + b_n \sim K^2 (2H_n''(Ka) + H_n(Ka)) \quad (3.72)$$

$$b_n^{\epsilon 2} = \sim K^2 (2J_n''(Ka) + J_n(Ka)) + a_n^{(3-\epsilon)2} \sim K^2 (2H_n''(Ka) + H_n(Ka)) \\ + b_n k^2 (2 \sim H_n''(ka) - \} H_n(ka)) \quad (3.73)$$

$$b_n^{\epsilon 3} = \frac{2-n}{a} \left( k J_n'(ka) - \frac{J_n(ka)}{a} \right) + a_n^{\epsilon 1} \frac{2-n}{a} \left( k H_n'(ka) - \frac{H_n(ka)}{a} \right) \\ + b_n \frac{2-n}{a} \left( K H_n'(Ka) - \frac{H_n(Ka)}{a} \right) \quad (3.74)$$

$$b_n^{\epsilon 4} = \frac{2-n}{a} \left( K J_n'(Ka) - \frac{J_n(Ka)}{a} \right) + a_n^{(3-\epsilon)2} \frac{2-n}{a} \left( K H_n'(Ka) - \frac{H_n(Ka)}{a} \right) \\ + b_n \frac{2-n}{a} \left( k H_n'(ka) - \frac{H_n(ka)}{a} \right) \quad (3.75)$$

On obtient :

$$TV_n^\epsilon(p) = \frac{i}{4 \sim K^2} k a H_n'(ka) [b_n^{\epsilon 1} P_n^\epsilon(u_p) + b_n^{\epsilon 3} Q_n^\epsilon(u_p)] \\ - \frac{i}{4 \sim K^2} n H_n(Ka) [b_n^{\epsilon 2} P_n^\epsilon(u_p) + b_n^{\epsilon 4} Q_n^\epsilon(u_p)] \quad (3.76)$$

$$TU_n^\epsilon(p) = \frac{i}{4 \sim K^2} n H_n(ka) [b_n^{\epsilon 1} P_n^\epsilon(u_p) + b_n^{\epsilon 3} Q_n^\epsilon(u_p)] \\ - \frac{i}{4 \sim K^2} K a H_n'(Ka) [b_n^{\epsilon 2} P_n^\epsilon(u_p) + b_n^{\epsilon 4} Q_n^\epsilon(u_p)] \quad (3.77)$$

Ce qui nous conduit aux équations suivantes :

$$\left( \} - \frac{i}{4 \sim K^2} [k a H'_n(ka) b_n^{\epsilon 1} + n H_n(Ka) b_n^{\epsilon 2}] r_n^\epsilon \right) - \frac{i}{4 \sim K^2} [n H_n(ka) b_n^{\epsilon 1} + K a H'_n(Ka) b_n^{\epsilon 2}] S_n^\epsilon = 0 \quad (3.78)$$

$$- \frac{i}{4 \sim K^2} [k a H'_n(ka) b_n^{\epsilon 3} + n H_n(Ka) b_n^{\epsilon 4}] r_n^\epsilon + \left( \} - \frac{i}{4 \sim K^2} [n H_n(ka) b_n^{\epsilon 3} + K a H'_n(Ka) b_n^{\epsilon 4}] S_n^\epsilon \right) = 0 \quad (3.79)$$

Si on utilise les notations suivantes :

$$A_n^{\epsilon 1} = [k a H'_n(ka) b_n^{\epsilon 1} + n H_n(Ka) b_n^{\epsilon 2}]$$

$$A_n^{\epsilon 2} = [k a H'_n(ka) b_n^{\epsilon 3} + n H_n(Ka) b_n^{\epsilon 4}]$$

$$A_n^{\epsilon 3} = n H_n(ka) b_n^{\epsilon 1} + K a H'_n(Ka) b_n^{\epsilon 2}$$

$$A_n^{\epsilon 4} = n H_n(ka) b_n^{\epsilon 3} + K a H'_n(Ka) b_n^{\epsilon 4}$$

alors (3.78) et (3.79) peut être réécrite comme suit :

$$\left( \} - \frac{i}{4 \sim K^2} A_n^{\epsilon 1} r_n^\epsilon \right) - \frac{i}{4 \sim K^2} A_n^{\epsilon 3} S_n^\epsilon = 0 \quad (3.80)$$

$$- \frac{i}{4 \sim K^2} A_n^{\epsilon 2} r_n^\epsilon + \left( \} - \frac{i}{4 \sim K^2} A_n^{\epsilon 4} S_n^\epsilon \right) = 0 \quad (3.81)$$

Afin d'obtenir des solutions non triviales de ce dernier système, son déterminant doit être nul, ce qui implique que les valeurs propres doivent vérifier ce qui suit :

$$\}^2 - \frac{i}{4 \sim K^2} (A_n^{\epsilon 1} + A_n^{\epsilon 4}) \} + \left( \frac{i}{4 \sim K^2} \right)^2 (A_n^{\epsilon 1} A_n^{\epsilon 4} - A_n^{\epsilon 2} A_n^{\epsilon 3}) = 0 \quad (3.82)$$

Il est évident que le nombre de conditionnement est minimisé, si les coefficients des multipôles sont choisis, de telle sorte que toutes les valeurs propres deviennent égales à 1, ce qui conduit à un nombre de conditionnement égal à 1.

Pour cela, utilisons la même technique développée dans [2], on obtient :

$$\left(\frac{i}{4-K^2}\right)^2 (A_n^{\epsilon_1} A_n^{\epsilon_4} - A_n^{\epsilon_2} A_n^{\epsilon_3}) = e^{2i_{\epsilon_n}} \quad (3.83)$$

$$-\frac{i}{4-K^2} (A_n^{\epsilon_1} + A_n^{\epsilon_4}) = \dots_{\epsilon_n} e^{i_{\epsilon_n}} \quad (3.84)$$

Où  $\dots_{\epsilon_n}, \dots_{\epsilon_n}$  sont des nombres réels arbitraires satisfont les inégalités suivantes :

$$0 \leq \dots_{\epsilon_n} \leq 2 \quad \text{and} \quad 0 \leq \dots_{\epsilon_n} < 2f$$

Utilisons (3.83) et (3.84), (3.82) devient :

$$\}^2 + \dots_{\epsilon_n} e^{i_{\epsilon_n}} \} + e^{2i_{\epsilon_n}} = 0 \quad (3.85)$$

Cette dernière équation admet les solutions suivantes:

$$\} _1 = \frac{-\left(\dots_{\epsilon_n} e^{i_{\epsilon_n}}\right) + i e^{i_{\epsilon_n}} \sqrt{4 - \left(\dots_{\epsilon_n}\right)^2}}{2}$$

$$\} _2 = \frac{-\left(\dots_{\epsilon_n} e^{i_{\epsilon_n}}\right) - i e^{i_{\epsilon_n}} \sqrt{4 - \left(\dots_{\epsilon_n}\right)^2}}{2}$$

Notons ici, que :  $|\} _1| = |\} _2| = 1$ .

Il est évident qu'il existe un nombre infini de choix des coefficients des multipôles  $a_m^{\dagger l}$  et  $b_m$  qui vérifie la condition (3.85). Mais si on choisit les coefficients des multipôles simples et croisés qui minimisent la norme de l'opérateur intégral modifié, cités au chapitre 2, et après quelques calculs on obtient :

$$A_n^{\epsilon_1} = A_n^{\epsilon_4} = -4 - K^2 \quad \text{and} \quad A_n^{\epsilon_2} = A_n^{\epsilon_3} = 0 \quad (3.86)$$

Pour ces valeurs (3.86) et pour  $\dots_{\epsilon_n} = 2, \dots_{\epsilon_n} = f$ , l'équation (3.85) admet une double solution  $\} = 1$ . D'où le nombre de conditionnement est minimisé et égale à 1.

Il est à signaler qu'il est difficile de montrer d'une façon calculatoire, que le choix des coefficients des multipôles cité ci-dessus, vérifie la condition

large (1.24) qui nous garantit l'unicité de la solution [8]. Mais pour cela, nous avons démontré au chapitre 2, qu'avec ce choix optimal la norme de l'opérateur intégral modifié est nulle, et par conséquent, la solution de notre problème aux limites est unique, ce qui nous épargne la nécessité de vérifier la condition large (1.24).

**CHAPITRE 4**  
**CRITERE D'OPTIMALITE DU NOMBRE**  
**DE CONDITIONNEMENT**  
**(CAS DU CERCLE LEGEREMENT DEFORME)**

Comme cela a été signalé auparavant, il est très difficile de déterminer des expressions explicites et relativement simples, dans le cas des frontières quelconques, mais après avoir traité le cas d'une frontière circulaire, on se propose dans ce chapitre, de considérer le cas d'une frontière ayant la forme d'un cercle légèrement déformé.

**4.1 Notations :**

L'équation paramétrique de ce cercle légèrement déformé est définie en coordonnées polaires, comme suit :

$$r = a + v w(\vartheta) \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \quad (4.1)$$

où  $(a)$  est le rayon du cercle non déformé et  $\{$  et  $\frac{\partial \{}{\partial \vartheta}$  sont deux fonctions

bornées. On note par  $p_v, q_v$  les points de  $\partial D$  et qui sont définis par :

$$Op_v = (a + v \{(\vartheta_p)) \hat{r}_p, \quad Oq_v = (a + v \{(\vartheta_q)) \hat{r}_q \quad (4.2)$$

Où :  $\hat{r} = (\cos(\vartheta), \sin(\vartheta)) \quad (4.3)$

les points sur le cercle de rayon  $(a)$  sont notés par :

$$Op_a = a \hat{r}_p, \quad Oq_a = a \hat{r}_q \quad (4.4)$$

Il est facile de voir que :  $|p_v q_v| = |p_a q_a| + O(v) \quad (4.5)$

de plus, puisque  $\{$  est continûment dérivable, on peut montrer que

$\frac{|\{(\vartheta_p) - \{(\vartheta_q)|}{|p_a q_a|}$  est bornée, et on aura donc :

$$\frac{1}{|p_v q_v|} = \frac{1}{|p_a q_a|} + O(v) \quad (4.6)$$

sur le cercle déformé  $\partial D$  on peut montrer que :

$$\hat{n} = \frac{\hat{r} - v \frac{\partial \xi}{\partial n}}{\sqrt{1 + v^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial n} \right)^2}} = \hat{r} + O(v) \quad (4.7)$$

et que l'élément  $ds$  s'écrit sous la forme :

$$ds = r \sqrt{1 + v^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial n} \right)^2} d_n = a d_n + O(v) \quad (4.8)$$

Introduisons à présent, les opérateurs qui définissent les représentations intégrales de notre problème pour le cas de Neumann et de Dirichlet :

$$M_v : L_2(\partial D_v) \rightarrow L_2(\partial D_v) \quad / \quad M_v = \frac{1}{2} I + \overline{K}_{1v}^* \quad (4.9)$$

$$N_v : L_2(\partial D_v) \rightarrow L_2(\partial D_v) \quad / \quad N_v = -\frac{1}{2} I + K_{1v} \quad (4.10)$$

et leurs opérateurs  $L_2$  adjoints  $M_v^*$  et  $N_v^*$ .

Il est connu que le nombre de conditionnement qui est donné par [2]:

$$\text{Cond}(M_v) = \|M_v\| \cdot \|M_v^{-1}\| \quad \text{et} \quad \text{Cond}(N_v) = \|N_v\| \cdot \|N_v^{-1}\|$$

Peut être exprimé sous la forme :

$$\text{Cond}(M_v) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}^{M_v}}{\lambda_{\min}^{M_v}}} \quad \text{et} \quad \text{Cond}(N_v) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}^{N_v}}{\lambda_{\min}^{N_v}}}$$

Où  $\lambda_{\max}^{M_v}$  ( $\lambda_{\max}^{N_v}$ ) et  $\lambda_{\min}^{M_v}$  ( $\lambda_{\min}^{N_v}$ ) sont respectivement, la plus grande et la plus petite valeur spectrale de l'opérateur auto adjoint  $M_v^* M_v$  ( $N_v^* N_v$ ).

## 4.2 Théorème :

Si la frontière du domaine  $\partial D$  est définie par (4.1), alors le nombre de conditionnement de l'équation intégrale modifiée, est minimisé, si les coefficients des multipôles simples sont choisis comme suit :

$$a_m^{\dagger l}(v) \frac{i}{4 \sim K^2} = - \frac{f_m^{\dagger l}(v)}{r_m^{\dagger l}(v)} \quad (4.11)$$

Où :

$$r_m^{\dagger l}(v) = \|TF_m^{\dagger l}(v)\|^2 \quad (4.12)$$

$$f_m^{\dagger l}(v) = \langle \overline{K_0^*}(v) T \overline{F_m^{\dagger l}(v)}, F_m^{\dagger l \perp}(v) \rangle \quad (4.13)$$

### Démonstration :

D'après les calculs établis dans [26, 27], les fonctions multipôles  $F_m^{\dagger l}(v)$  s'expriment dans le cas du cercle légèrement déformé, sous la forme suivante :

$$F_m^{\dagger 1}(p(v)) = k H_m'(ka) P_m^{\dagger}(\underset{p}{u}(v)) + \frac{m}{a} H_m(ka) Q_m^{\dagger}(\underset{p}{u}(v)) \quad (4.14)$$

$$(-1)^{\dagger} F_m^{\dagger 2}(p(v)) = \frac{m}{a} H_m(Ka) P_m^{(3-\dagger)}(\underset{p}{u}(v)) + K H_m'(Ka) Q_m^{(3-\dagger)}(\underset{p}{u}(v)) \quad (4.15)$$

où:

$$P_m^{\dagger}(\underset{p}{u}(v)) = E_m^{\dagger}(\underset{p}{u}(v)) \vec{r} \quad \text{et} \quad Q_m^{\dagger}(\underset{p}{u}(v)) = (-1)^{\dagger} E_m^{(3-\dagger)}(\underset{p}{u}(v)) \vec{r} \quad (4.16)$$

De plus nous avons [26, 27] :

$$T_p G_1(p, q)(v) = [T_q G_1(p, q)(v)]^t \quad (4.17)$$

Ce qui conduit à :  $K_1(v) = \overline{K_1^*}(v)$ .

Introduisons maintenant les potentiels modifiés de simple couche  $V_n^{\epsilon}(v)$  et  $U_n^{\epsilon}(v)$  avec comme vecteurs de densités  $P_n^{\epsilon}(v)$  et  $Q_n^{\epsilon}(v)$  :

$$V_n^{\epsilon}(p)(v) = \frac{1}{2f} \int_{R_q=a} G_1(p, q)(v) \cdot P_n^{\epsilon}(\underset{p}{u}(v)) \cdot ds_q \quad (4.18)$$



$$U_n^\epsilon(p)(v) = \frac{1}{2f} \int_{R_q=a} G_1(p, q)(v) \cdot Q_n^\epsilon(v) \cdot ds_q \quad (4.19)$$

Si on utilise les relations d'orthogonalité des vecteurs  $P_n^\epsilon(v)$  et  $Q_n^\epsilon(v)$ , on obtient :

$$\frac{1}{2f} \int_0^{2f} F_m^{\dagger 1}(q)(v) \cdot P_n^\epsilon(v) \cdot a \cdot d_{nq} = k a H_m'(k a) u_{mn} u_{\dagger \epsilon} \quad (4.20)$$

$$\frac{1}{2f} \int_0^{2f} F_m^{\dagger 2}(q)(v) \cdot P_n^\epsilon(v) \cdot a \cdot d_{nq} = (-1)^\dagger m H_m(K a) u_{mn} u_{(3-\dagger)\epsilon} \quad (4.21)$$

$$\frac{1}{2f} \int_0^{2f} F_m^{\dagger 1}(q)(v) \cdot Q_n^\epsilon(v) \cdot a \cdot d_{nq} = m H_m(k a) u_{mn} u_{\dagger \epsilon} \quad (4.22)$$

$$\frac{1}{2f} \int_0^{2f} F_m^{\dagger 2}(q)(v) \cdot Q_n^\epsilon(v) \cdot a \cdot d_{nq} = (-1)^{(3-\epsilon)} K a H_m'(K a) u_{mn} u_{\dagger(3-\epsilon)} \quad (4.23)$$

Substituons les expressions (4.20) a (4.23) dans (4.18) et (4.19), on obtient :

$$V_n^\epsilon(p)(v) = \frac{i}{4 \sim K^2} k a H_n'(k a) \left[ \hat{F}_n^{\epsilon 1}(p)(v) + a_n^{\epsilon 1} F_n^{\epsilon 1}(p)(v) \right] \\ + \frac{i}{4 \sim K^2} (-1)^{3-\epsilon} n H_n(K a) \left[ \hat{F}_n^{(3-\epsilon)2}(p)(v) + a_n^{(3-\epsilon)2} F_n^{(3-\epsilon)2}(p)(v) \right] \quad (4.24)$$

$$U_n^\epsilon(p)(v) = \frac{i}{4 \sim K^2} n H_n(k a) \left[ \hat{F}_n^{\epsilon 1}(p)(v) + a_n^{\epsilon 1} F_n^{\epsilon 1}(p)(v) \right] \\ + \frac{i}{4 \sim K^2} (-1)^{3-\epsilon} K a H_n'(K a) \left[ \hat{F}_n^{(3-\epsilon)2}(p)(v) + a_n^{(3-\epsilon)2} F_n^{(3-\epsilon)2}(p)(v) \right] \quad (4.25)$$

Afin de déterminer les valeurs propres de l'opérateur  $M_v$ , la relation suivante doit être satisfaite :

$$M_v U(p) = \lambda U(p)(v) \quad R_p = a + n(v) \quad (4.26)$$

Mais comme  $\{P_n^\epsilon(v), Q_n^\epsilon(v)\}$  est une base dans  $(L_2(\partial D(v)))^2$ , alors  $U(p(v))$  peut être exprimé sous la forme d'une combinaison linéaires des vecteurs :

$$U(p(v)) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\dagger=1}^2 (r_m^\dagger P_m^\dagger(p(v)) + s_m^\dagger Q_m^\dagger(p(v))) \quad (4.27)$$

Pour calculer  $M_v U(p)$ , nous devons calculer d'abord :

$$M_v P_n^\epsilon(p(v)) = \left( \frac{1}{2} I + \overline{K}_1^*(v) \right) P_n^\epsilon(p(v)) \text{ et } M_v Q_n^\epsilon(p(v)) = \left( \frac{1}{2} I + \overline{K}_1^*(v) \right) Q_n^\epsilon(p(v)) \quad (4.28)$$

Si on applique la condition aux limites de Neumann à  $V_n^\epsilon(v)$ , on obtient [8]:

$$V_n^\epsilon(p(v)) = \left( \frac{1}{2} I + K_1(v) \right) P_n^\epsilon(p(v)) \quad R_p = a + \nu(v) \quad (4.29)$$

utilisons  $K_1(v) = \overline{K}_1^*(v)$ , (4.29) devient :

$$M_v P_n^\epsilon(p(v)) = \left( \frac{1}{2} I + \overline{K}_1^*(v) \right) P_n^\epsilon(p(v)) = V_n^\epsilon(p(v)) \quad R_p = a + \nu(v) \quad (4.30)$$

Et de la même manière, on peut obtenir :

$$M_v Q_n^\epsilon(p(v)) = \left( \frac{1}{2} I + \overline{K}_1^*(v) \right) Q_n^\epsilon(p(v)) = U_n^\epsilon(p(v)) \quad R_p = a + \nu(v) \quad (4.31)$$

Utilisons les relations suivantes [24]:

$$\begin{aligned} F_n^{\epsilon 1}(p(v)) &= k^2 \left( 2 \sim H_n''(ka) - \} H_n(ka) \right) P_n^\epsilon \left( \nu_p(v) \right) \\ &+ \frac{2 \sim n}{a} \left( k H_n'(ka) - \frac{H_n(ka)}{a} \right) Q_n^\epsilon \left( \nu_p(v) \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} F_n^{\epsilon 2}(p(v)) &= \sim K^2 \left( 2 H_n''(Ka) + H_n(Ka) \right) (-1)^\epsilon P_n^{(3-\epsilon)} \left( \nu_p(v) \right) \\ &+ \frac{2 \sim n}{a} \left( K H_n'(Ka) - \frac{H_n(Ka)}{a} \right) (-1)^\epsilon Q_n^{(3-\epsilon)} \left( \nu_p(v) \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_n^{\epsilon 1}(p(v)) &= k^2 \left( 2 \sim J_n''(ka) - \} J_n(ka) \right) P_n^\epsilon \left( \nu_p(v) \right) \\ &+ \frac{2 \sim n}{a} \left( k J_n'(ka) - \frac{J_n(ka)}{a} \right) Q_n^\epsilon \left( \nu_p(v) \right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_n^{\epsilon 2}(p(v)) &= \sim K^2 \left( 2 J_n''(Ka) + J_n(Ka) \right) (-1)^\epsilon P_n^{(3-\epsilon)} \left( \nu_p(v) \right) \\ &+ \frac{2 \sim n}{a} \left( K J_n'(Ka) - \frac{J_n(Ka)}{a} \right) (-1)^\epsilon Q_n^{(3-\epsilon)} \left( \nu_p(v) \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Et les notations suivantes :

$$b_n^{\epsilon 1}(v) = k^2 \left( 2 J_n''(ka) + J_n(ka) \right) + a_n^{\epsilon 1}(v) k^2 \left( 2 H_n''(ka) + H_n(ka) \right) \quad (4.36)$$

$$b_n^{\epsilon 2}(v) = \sim K^2 \left( 2 J_n''(Ka) + J_n(Ka) \right) + a_n^{(3-\epsilon)2}(v) \sim K^2 \left( 2 H_n''(Ka) + H_n(Ka) \right) \quad (4.37)$$

$$b_n^{\epsilon 3}(v) = \frac{2 \sim n}{a} \left( k J_n'(ka) - \frac{J_n(ka)}{a} \right) + a_n^{\epsilon 1}(v) \frac{2 \sim n}{a} \left( k H_n'(ka) - \frac{H_n(ka)}{a} \right) \quad (4.38)$$

$$b_n^{\epsilon 4}(v) = \frac{2 \sim n}{a} \left( K J_n'(Ka) - \frac{J_n(Ka)}{a} \right) + a_n^{(3-\epsilon)2}(v) \frac{2 \sim n}{a} \left( K H_n'(Ka) - \frac{H_n(Ka)}{a} \right) \quad (4.39)$$

On obtient :

$$V_n^\epsilon(p(v)) = \frac{i}{4 \sim K^2} k a H_n'(ka) \left[ b_n^{\epsilon 1}(v) P_n^\epsilon \left( \begin{smallmatrix} \epsilon \\ \nu \end{smallmatrix} \right) + b_n^{\epsilon 3}(v) Q_n^\epsilon \left( \begin{smallmatrix} \epsilon \\ \nu \end{smallmatrix} \right) \right] \\ - \frac{i}{4 \sim K^2} n H_n(Ka) \left[ b_n^{\epsilon 2}(v) P_n^\epsilon \left( \begin{smallmatrix} \epsilon \\ \nu \end{smallmatrix} \right) + b_n^{\epsilon 4}(v) Q_n^\epsilon \left( \begin{smallmatrix} \epsilon \\ \nu \end{smallmatrix} \right) \right] \quad (4.40)$$

$$U_n^\epsilon(p(v)) = \frac{i}{4 \sim K^2} n H_n(ka) \left[ b_n^{\epsilon 1}(v) P_n^\epsilon \left( \begin{smallmatrix} \epsilon \\ \nu \end{smallmatrix} \right) + b_n^{\epsilon 3}(v) Q_n^\epsilon \left( \begin{smallmatrix} \epsilon \\ \nu \end{smallmatrix} \right) \right] \\ - \frac{i}{4 \sim K^2} K a H_n'(Ka) \left[ b_n^{\epsilon 2}(v) P_n^\epsilon \left( \begin{smallmatrix} \epsilon \\ \nu \end{smallmatrix} \right) + b_n^{\epsilon 4}(v) Q_n^\epsilon \left( \begin{smallmatrix} \epsilon \\ \nu \end{smallmatrix} \right) \right] \quad (4.41)$$

Ce qui nous conduit aux équations suivantes :

$$\left( \} - \frac{i}{4 \sim K^2} \left[ k a H_n'(ka) b_n^{\epsilon 1}(v) + n H_n(Ka) b_n^{\epsilon 2}(v) \right] r_n^\epsilon(v) \right) \\ - \frac{i}{4 \sim K^2} \left[ n H_n(ka) b_n^{\epsilon 1}(v) + K a H_n'(Ka) b_n^{\epsilon 2}(v) \right] s_n^\epsilon(v) = 0 \quad (4.42)$$

$$- \frac{i}{4 \sim K^2} \left[ k a H_n'(ka) b_n^{\epsilon 3}(v) + n H_n(Ka) b_n^{\epsilon 4}(v) \right] r_n^\epsilon(v) \\ + \left( \} - \frac{i}{4 \sim K^2} \left[ n H_n(ka) b_n^{\epsilon 3}(v) + K a H_n'(Ka) b_n^{\epsilon 4}(v) \right] s_n^\epsilon(v) \right) = 0 \quad (4.43)$$

Si on utilise les notations suivantes :

$$A_n^{\epsilon 1}(v) = \left[ k a H_n'(ka) b_n^{\epsilon 1}(v) + n H_n(Ka) b_n^{\epsilon 2}(v) \right]$$

$$A_n^{\epsilon 2}(v) = \left[ k a H_n'(ka) b_n^{\epsilon 3}(v) + n H_n(Ka) b_n^{\epsilon 4}(v) \right]$$

$$A_n^{\epsilon 3}(v) = n H_n(ka) b_n^{\epsilon 1}(v) + K a H_n'(Ka) b_n^{\epsilon 2}(v)$$

$$A_n^{\epsilon 4}(v) = n H_n(ka) b_n^{\epsilon 3}(v) + K a H_n'(Ka) b_n^{\epsilon 4}(v)$$

alors (4.42) et (4.43) peut être réécrite comme suit :

$$\left( \} - \frac{i}{4 \sim K^2} A_n^{\epsilon 1}(v) r_n^\epsilon(v) \right) - \frac{i}{4 \sim K^2} A_n^{\epsilon 3}(v) s_n^\epsilon(v) = 0 \quad (4.45)$$

$$-\frac{i}{4\sim K^2} A_n^{\epsilon 2}(v) r_n^{\epsilon}(v) + \left( \} - \frac{i}{4\sim K^2} A_n^{\epsilon 4}(v) S_n^{\epsilon}(v) \right) = 0 \quad (4.46)$$

Afin d'obtenir des solutions non triviales de ce dernier système, son déterminant doit être nul, ce qui implique que les valeurs propres doivent vérifier ce qui suit :

$$\}^2 - \frac{i}{4\sim K^2} (A_n^{\epsilon 1}(v) + A_n^{\epsilon 4}(v)) \} + \left( \frac{i}{4\sim K^2} \right)^2 (A_n^{\epsilon 1}(v) A_n^{\epsilon 4}(v) - A_n^{\epsilon 2}(v) A_n^{\epsilon 3}(v)) = 0 \quad (4.47)$$

Il est évident que le nombre de conditionnement est minimisé, si les coefficients des multipôles sont choisis, de telle sorte que toutes les valeurs propres deviennent égales à  $1 + O(v)$ , ce qui conduit à un nombre de conditionnement égal à  $1 + O(v)$ .

Pour cela, utilisons la même technique développée dans [2], on obtient :

$$\left( \frac{i}{4\sim K^2} \right)^2 (A_n^{\epsilon 1}(v) A_n^{\epsilon 4}(v) - A_n^{\epsilon 2}(v) A_n^{\epsilon 3}(v)) = e^{2i_{\sim n}^{\epsilon}(v)} \quad (4.48)$$

$$-\frac{i}{4\sim K^2} (A_n^{\epsilon 1}(v) + A_n^{\epsilon 4}(v)) \} = \dots_{\sim n}^{\epsilon} e^{i_{\sim n}^{\epsilon}(v)} \quad (4.49)$$

Où  $\dots_{\sim n}^{\epsilon}(v)$ ,  $_{\sim n}^{\epsilon}(v)$  sont des nombres réels arbitraires satisfont les inégalités suivantes :

$$0 \leq \dots_{\sim n}^{\epsilon}(v) \leq 2 \quad \text{et} \quad 0 \leq _{\sim n}^{\epsilon}(v) < 2f \quad (4.50)$$

Utilisons (4.48) et (4.49), (4.47) devient :

$$\}^2 + \dots_{\sim n}^{\epsilon}(v) e^{i_{\sim n}^{\epsilon}(v)} \} + e^{2i_{\sim n}^{\epsilon}(v)} = 0 \quad (4.51)$$

Cette dernière équation admet les solutions suivantes:

$$\}_1(v) = \frac{-\left( \dots_{\sim n}^{\epsilon}(v) e^{i_{\sim n}^{\epsilon}(v)} \right) + i e^{i_{\sim n}^{\epsilon}(v)} \sqrt{4 - \left( \dots_{\sim n}^{\epsilon}(v) \right)^2}}{2}$$

$$\}_2(v) = \frac{-\left( \dots_{\sim n}^{\epsilon}(v) e^{i_{\sim n}^{\epsilon}(v)} \right) - i e^{i_{\sim n}^{\epsilon}(v)} \sqrt{4 - \left( \dots_{\sim n}^{\epsilon}(v) \right)^2}}{2}$$

Notons ici, que :  $|\}_1(v)| = |\}_2(v)| = 1 + O(v)$ .

Il est évident qu'il existe un nombre infini de choix des coefficients des multipôles  $a_m^{\dagger l}(v)$  qui vérifie la condition (4.51). Mais si on choisit les coefficients des multipôles simples qui minimise la norme de l'opérateur intégral modifié, cité au chapitre 3, et après quelques calculs on obtient :

$$A_n^{\epsilon 1}(v) = A_n^{\epsilon 4}(v) = -4 \sim K^2 + \dots(v) \text{ et } A_n^{\epsilon 2}(v) = A_n^{\epsilon 3}(v) = O(v) \quad (4.52)$$

Pour ces valeurs (4.52) et pour  $\dots_n^{\epsilon}(v) = 2$ ,  $\dots_n^{\epsilon}(v) = f$ , l'équation (4.51) admet une double solution  $\lambda(v) = 1 + O(v)$ . D'où le nombre de conditionnement est minimisé et égale à  $1 + O(v)$ .

Il est à signaler qu'il est difficile de montrer d'une façon calculatoire, que le choix des coefficients des multipôles cité ci-dessus, vérifie la condition large (1.24) qui nous garantit l'unicité de la solution [8]. Mais pour cela, nous avons démontré dans le chapitre 3, qu'avec ce choix optimal la norme de l'opérateur intégral modifié est d'ordre  $O(v)$ , et par conséquent, la solution de notre problème aux limites est unique, ce qui nous épargne la nécessité de vérifier la condition large (1.24).

### 4.3 Théorème :

*Si la frontière  $\partial D$  est définie par (4.1), et si les coefficients des multipôles simples sont définis par (4.11) à (4.13), alors le nombre de conditionnement de l'équation intégrale modifiée pour le problème de Dirichlet, est donné par :*

$$\text{Cond}(M_v) = \text{Cond}(M_a) + O(v) = 1 + O(v) \quad (4.53)$$

### Démonstration :

En utilisant les expressions des coefficients des multipôles simples obtenues pour le cas d'un cercle légèrement déformé (4.11) à (4.13), la fonction de Green modifiée pour le problème de Dirichlet s'écrit alors sous la forme :

$$T_p G_1^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_v}^{P=P_v} = T_p G_0^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_v}^{P=P_v}$$

$$+ \frac{i}{4 \sim K^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \begin{aligned} & \left( a_m^{11}(v) TF_m^{11}(P(v)) \otimes TF_m^{11}(Q(v)) \right) \\ & + \left( a_m^{12}(v) TF_m^{12}(P(v)) \otimes TF_m^{12}(Q(v)) \right) \\ & + \left( a_m^{21}(v) TF_m^{21}(P(v)) \otimes TF_m^{21}(Q(v)) \right) \\ & + \left( a_m^{22}(v) TF_m^{22}(P(v)) \otimes TF_m^{22}(Q(v)) \right) \end{aligned} \right]$$

$$= T_p G_0^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_v}^{P=P_v} + O(v)$$

$$+ \frac{i}{4 \sim K^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{ma} + O(v)} \left[ \begin{aligned} & \left( (\bar{c}_m \hat{c}_m - a_m^1 a_m^2 + O(v)) TF_m^{11}(P(v)) \otimes TF_m^{11}(Q(v)) \right) \\ & + \left( (\bar{c}_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2 + O(v)) TF_m^{12}(P(v)) \otimes TF_m^{12}(Q(v)) \right) \\ & + \left( (\bar{c}_m \hat{c}_m - a_m^1 a_m^2 + O(v)) TF_m^{21}(P(v)) \otimes TF_m^{21}(Q(v)) \right) \\ & + \left( (\bar{c}_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2 + O(v)) TF_m^{22}(P(v)) \otimes TF_m^{22}(Q(v)) \right) \end{aligned} \right]$$

ou bien :

$$T_p G_1^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_v}^{P=P_v} = T_p G_0^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_v}^{P=P_v}$$

$$+ \frac{i}{4 \sim K^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{ma}} \left[ \begin{aligned} & \left( (\bar{c}_m \hat{c}_m - a_m^1 a_m^2) TF_m^{11}(P) \otimes TF_m^{11}(Q) \right) \\ & + \left( (\bar{c}_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2) TF_m^{12}(P) \otimes TF_m^{12}(Q) \right) \\ & + \left( (\bar{c}_m \hat{c}_m - a_m^1 a_m^2) TF_m^{21}(P) \otimes TF_m^{21}(Q) \right) \\ & + \left( (\bar{c}_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2) TF_m^{22}(P) \otimes TF_m^{22}(Q) \right) \end{aligned} \right] + O(v)$$

en utilisant (3.19) à (3.22), on obtient :

$$T_p G_1^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_v}^{P=P_v} = T_p G_{Ex}^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_v}^{P=P_v} + O(v)$$

Ce qui termine la démonstration du théorème.

#### 4.4 Théorème :

*Si la frontière du domaine  $\partial D$  est un cercle légèrement déformé, alors le nombre de conditionnement de l'équation intégrale modifiée est minimisé, si les coefficients des multipôles simples et croisés sont choisis comme suit :*

$$a_m^{\dagger l}(v) \cdot \frac{i}{4 \sim K^2} = \frac{S_m^{-\dagger l}(v) \cdot g_m^{\dagger l}(v) - r_m^{(3-\dagger)(3-l)}(v) \cdot f_m^{\dagger l}(v)}{\Delta_m^{\dagger l l}(v)} \quad (4.54)$$

$$(-1)^{\dagger+l} b_m(v) \cdot \frac{i}{4 \sim K^2} = \frac{S_m^{\dagger l}(v) \cdot f_m^{\dagger l}(v) - r_m^{\dagger l}(v) \cdot g_m^{\dagger l}(v)}{\Delta_m^{\dagger l l}(v)} \quad (4.55)$$

Où :

$$\Delta_m^{\dagger l l}(v) = r_m^{\dagger l}(v) \cdot r_m^{(3-\dagger)(3-l)}(v) - |S_m^{\dagger l}(v)|^2 \quad (4.56)$$

$$r_m^{\dagger l}(v) = \|TF_m^{\dagger l}(v)\|^2 \quad (4.57)$$

$$S_m^{\dagger l}(v) = \langle TF_m^{\dagger l}(v), TF_m^{(3-\dagger)(3-l)}(v) \rangle \quad (4.58)$$

$$f_m^{\dagger l}(v) = \langle \overline{K}_0^*(v) TF_m^{-\dagger l}(v), F_m^{\dagger l \perp}(v) \rangle \quad (4.59)$$

$$g_m^{\dagger l}(v) = \langle \overline{K}_0^*(v) TF_m^{-(3-\dagger)(3-l)}(v), F_m^{\dagger l \perp}(v) \rangle \quad (4.60)$$

### Démonstration :

D'après les calculs établis dans [26], les fonctions multipôles  $TF_m^{\dagger l}(v)$  s'expriment dans le cas du cercle légèrement déformé, sous la forme suivante :

$$TF_m^{\dagger 1}(p(v)) = k H_m'(ka) P_m^{\dagger} \left( \begin{smallmatrix} \nu \\ \rho \end{smallmatrix} (v) \right) + \frac{m}{a} H_m(ka) Q_m^{\dagger} \left( \begin{smallmatrix} \nu \\ \rho \end{smallmatrix} (v) \right) \quad (4.61)$$

$$(-1)^{\dagger} TF_m^{\dagger 2}(p(v)) = \frac{m}{a} H_m(Ka) P_m^{(3-\dagger)} \left( \begin{smallmatrix} \nu \\ \rho \end{smallmatrix} (v) \right) + K H_m'(Ka) Q_m^{(3-\dagger)} \left( \begin{smallmatrix} \nu \\ \rho \end{smallmatrix} (v) \right) \quad (4.62)$$

Où :

$$P_m^{\dagger} \left( \begin{smallmatrix} \nu \\ \rho \end{smallmatrix} (v) \right) = E_m^{\dagger} \left( \begin{smallmatrix} \nu \\ \rho \end{smallmatrix} (v) \right) \vec{r}(v) \quad \text{et} \quad Q_m^{\dagger} \left( \begin{smallmatrix} \nu \\ \rho \end{smallmatrix} (v) \right) = (-1)^{\dagger} E_m^{(3-\dagger)} \left( \begin{smallmatrix} \nu \\ \rho \end{smallmatrix} (v) \right) \vec{r}(v) \quad (4.63)$$

De plus nous avons [25] :

$$T_p G_1(p, q)(v) = [T_q G_1(p, q)(v)]^t \quad (4.64)$$

Ce qui conduit à :  $K_1(v) = \overline{K_1^*}(v)$ .

Introduisons maintenant les potentiels modifiés de double couche  $V_n^\epsilon(v)$  et

$U_n^\epsilon(v)$  avec comme vecteurs de densités  $P_n^\epsilon(v)$  et  $Q_n^\epsilon(v)$  :

$$V_n^\epsilon(p(v)) = \frac{1}{2f} \int_{R_q=a} T_p G_1(p, q)(v) \cdot P_n^\epsilon(u_p(v)) \cdot ds_q \quad (4.65)$$

$$U_n^\epsilon(p(v)) = \frac{1}{2f} \int_{R_q=a} T_p G_1(p, q)(v) \cdot Q_n^\epsilon(u_q(v)) \cdot ds_q \quad (4.66)$$

Si on utilise les relations d'orthogonalité des vecteurs  $P_n^\epsilon(v)$  et  $Q_n^\epsilon(v)$ , on obtient :

$$\frac{1}{2f} \int_0^{2f} TF_m^{\dagger 1}(q(v)) \cdot P_n^\epsilon(u_q(v)) \cdot a \cdot d_{nq} = k a H'_m(k a) u_{mn} u_{\dagger \epsilon} \quad (4.67)$$

$$\frac{1}{2f} \int_0^{2f} TF_m^{\dagger 2}(q(v)) \cdot P_n^\epsilon(u_q(v)) \cdot a \cdot d_{nq} = (-1)^\dagger m H_m(K a) u_{mn} u_{(3-\dagger)\epsilon} \quad (4.68)$$

$$\frac{1}{2f} \int_0^{2f} TF_m^{\dagger 1}(q(v)) \cdot Q_n^\epsilon(u_q(v)) \cdot a \cdot d_{nq} = m H_m(k a) u_{mn} u_{\dagger \epsilon} \quad (4.69)$$

$$\frac{1}{2f} \int_0^{2f} TF_m^{\dagger 2}(q(v)) \cdot Q_n^\epsilon(u_q(v)) \cdot a \cdot d_{nq} = (-1)^{(3-\epsilon)} K a H'_m(K a) u_{mn} u_{\dagger (3-\epsilon)} \quad (4.70)$$

Substituons les expressions (4.67) a (4.70) dans (4.65) et (4.66), on obtient :

$$\begin{aligned} V_n^\epsilon(p(v)) = & \frac{i}{4 \sim K^2} k a H'_n(k a) \left[ \begin{aligned} & TF_n^{\hat{\epsilon} 1}(v) p + a_n^{\epsilon 1}(v) TF_n^{\epsilon 1}(p(v)) \\ & + (-1)^{\epsilon+1} b_n(v) TF_n^{(3-\epsilon)2}(p(v)) \end{aligned} \right] \\ & + \frac{i}{4 \sim K^2} (-1)^{3-\epsilon} n H_n(K a) \left[ \begin{aligned} & TF_n^{(3-\epsilon)2}(p(v)) + a_n^{(3-\epsilon)2}(v) TF_n^{(3-\epsilon)2}(p(v)) \\ & + (-1)^{3-\epsilon} b_n(v) TF_n^{\epsilon 1}(p(v)) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} U_n^\epsilon(p(v)) = & \frac{i}{4 \sim K^2} n H_n(k a) \left[ \begin{aligned} & TF_n^{\hat{\epsilon} 1}(p(v)) + a_n^{\epsilon 1}(v) TF_n^{\epsilon 1}(p(v)) \\ & + (-1)^{\epsilon+1} b_n(v) TF_n^{(3-\epsilon)2}(p(v)) \end{aligned} \right] \\ & + \frac{i}{4 \sim K^2} (-1)^{3-\epsilon} K a H'_n(K a) \left[ \begin{aligned} & TF_n^{(3-\epsilon)2}(p(v)) + a_n^{(3-\epsilon)2}(v) TF_n^{(3-\epsilon)2}(p(v)) \\ & + (-1)^{3-\epsilon} b_n(v) TF_n^{\epsilon 1}(p(v)) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (4.72)$$



Afin de déterminer les valeurs propres de l'opérateur  $N(v)$ , la relation suivante doit être satisfaite :

$$NU(p(v)) = \lambda U(p(v)) \quad R_p = a + O(v) \quad (4.73)$$

mais comme  $\{P_n^\epsilon(v), Q_n^\epsilon(v)\}$  est une base dans  $(L_2(\partial D_v))^\epsilon$ , alors  $U(p(v))$  peut être exprimé sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs :

$$U(p(v)) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\dagger=1}^2 (r_m^r(v) P_m^r(p(v)) + s_m^r(v) Q_m^r(p(v))) \quad (4.74)$$

pour calculer  $NU(p(v))$ , nous devons calculer d'abord :

$$N P_n^\epsilon(p(v)) = \left( -\frac{1}{2} I + K_1(v) \right) P_n^\epsilon(p(v)) \quad \text{et} \quad N Q_n^\epsilon(p(v)) = \left( -\frac{1}{2} I + K_1(v) \right) Q_n^\epsilon(p(v)) \quad (4.75)$$

si on applique la condition aux limites de Dirichlet à  $V_n^\epsilon(v)$ , on obtient [2]:

$$T V_n^\epsilon(p(v)) = \left( -\frac{1}{2} I + \overline{K}_1^*(v) \right) P_n^\epsilon(p(v)) \quad R_p = a + O(v) \quad (4.76)$$

utilisons  $K_1(v) = \overline{K}_1^*(v)$ , (4.75) devient :

$$N P_n^\epsilon(p(v)) = \left( -\frac{1}{2} I + K_1(v) \right) P_n^\epsilon(p(v)) = T V_n^\epsilon(p(v)) \quad R_p = a + O(v) \quad (4.77)$$

Et de la même manière, on peut obtenir :

$$N Q_n^\epsilon(p(v)) = \left( -\frac{1}{2} I + K_1(v) \right) Q_n^\epsilon(p(v)) = T U_n^\epsilon(p(v)) \quad R_p = a + O(v) \quad (4.78)$$

Utilisons les relations suivantes [2]:

$$T F_n^{\epsilon 1}(p(v)) = k^2 \left( 2 \sim H_n''(ka) - \} H_n(ka) \right) P_n^\epsilon \left( \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ p \end{smallmatrix} \right) (v) + \frac{2 \sim n}{a} \left( k H_n'(ka) - \frac{H_n(ka)}{a} \right) Q_n^\epsilon \left( \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ p \end{smallmatrix} \right) (v) \quad (4.79)$$

$$T F_n^{\epsilon 2}(p(v)) = \sim K^2 \left( 2 H_n''(Ka) + H_n(Ka) \right) (-1)^\dagger P_n^{(3-\epsilon)} \left( \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ p \end{smallmatrix} \right) (v) + \frac{2 \sim n}{a} \left( K H_n'(Ka) - \frac{H_n(Ka)}{a} \right) (-1)^\dagger Q_n^{(3-\epsilon)} \left( \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ p \end{smallmatrix} \right) (v) \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} T\hat{F}_n^{\epsilon 1}(p(v)) &= k^2 \left( 2 \sim J_n''(ka) - \} J_n(ka) \right) P_n^\epsilon \left( \begin{smallmatrix} v \\ p \end{smallmatrix} \right) (v) \\ &+ \frac{2 \sim n}{a} \left( k J_n'(ka) - \frac{J_n(ka)}{a} \right) Q_n^\epsilon \left( \begin{smallmatrix} v \\ p \end{smallmatrix} \right) (v) \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} T\hat{F}_n^{\epsilon 2}(p(v)) &= \sim K^2 \left( 2 J_n''(Ka) + J_n(Ka) \right) (-1)^\epsilon P_n^{(3-\epsilon)} \left( \begin{smallmatrix} v \\ p \end{smallmatrix} \right) (v) \\ &+ \frac{2 \sim n}{a} \left( K J_n'(Ka) - \frac{J_n(Ka)}{a} \right) (-1)^\epsilon Q_n^{(3-\epsilon)} \left( \begin{smallmatrix} v \\ p \end{smallmatrix} \right) (v) \end{aligned} \quad (4.82)$$

Et les notations suivantes :

$$\begin{aligned} b_n^{\epsilon 1}(v) &= k^2 \left( 2 J_n''(ka) + J_n(ka) \right) + a_n^{\epsilon 1}(v) k^2 \left( 2 H_n''(ka) + H_n(ka) \right) \\ &+ b_n(v) \sim K^2 \left( 2 H_n''(Ka) + H_n(Ka) \right) \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} b_n^{\epsilon 2}(v) &= \sim K^2 \left( 2 J_n''(Ka) + J_n(Ka) \right) + a_n^{(3-\epsilon)2}(v) \sim K^2 \left( 2 H_n''(Ka) + H_n(Ka) \right) \\ &+ b_n(v) k^2 \left( 2 \sim H_n''(ka) - \} H_n(ka) \right) \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} b_n^{\epsilon 3}(v) &= \frac{2 \sim n}{a} \left( k J_n'(ka) - \frac{J_n(ka)}{a} \right) + a_n^{\epsilon 1}(v) \frac{2 \sim n}{a} \left( k H_n'(ka) - \frac{H_n(ka)}{a} \right) \\ &+ b_n(v) \frac{2 \sim n}{a} \left( K H_n'(Ka) - \frac{H_n(Ka)}{a} \right) \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} b_n^{\epsilon 4}(v) &= \frac{2 \sim n}{a} \left( K J_n'(Ka) - \frac{J_n(Ka)}{a} \right) + a_n^{(3-\epsilon)2}(v) \frac{2 \sim n}{a} \left( K H_n'(Ka) - \frac{H_n(Ka)}{a} \right) \\ &+ b_n(v) \frac{2 \sim n}{a} \left( k H_n'(ka) - \frac{H_n(ka)}{a} \right) \end{aligned} \quad (4.86)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} TV_n^\epsilon(p(v)) &= \frac{i}{4 \sim K^2} k a H_n'(ka) \left[ b_n^{\epsilon 1}(v) P_n^\epsilon \left( \begin{smallmatrix} v \\ p \end{smallmatrix} \right) (v) + b_n^{\epsilon 3}(v) Q_n^\epsilon \left( \begin{smallmatrix} v \\ p \end{smallmatrix} \right) (v) \right] \\ &- \frac{i}{4 \sim K^2} n H_n(Ka) \left[ b_n^{\epsilon 2}(v) P_n^\epsilon \left( \begin{smallmatrix} v \\ p \end{smallmatrix} \right) (v) + b_n^{\epsilon 4}(v) Q_n^\epsilon \left( \begin{smallmatrix} v \\ p \end{smallmatrix} \right) (v) \right] \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} TU_n^\epsilon(p(v)) &= \frac{i}{4 \sim K^2} n H_n(ka) \left[ b_n^{\epsilon 1}(v) P_n^\epsilon \left( \begin{smallmatrix} v \\ p \end{smallmatrix} \right) (v) + b_n^{\epsilon 3}(v) Q_n^\epsilon \left( \begin{smallmatrix} v \\ p \end{smallmatrix} \right) (v) \right] \\ &- \frac{i}{4 \sim K^2} K a H_n'(Ka) \left[ b_n^{\epsilon 2}(v) P_n^\epsilon \left( \begin{smallmatrix} v \\ p \end{smallmatrix} \right) (v) + b_n^{\epsilon 4}(v) Q_n^\epsilon \left( \begin{smallmatrix} v \\ p \end{smallmatrix} \right) (v) \right] \end{aligned} \quad (4.88)$$

Ce qui nous conduit aux équations suivantes :

$$\left( \} - \frac{i}{4 \sim K^2} [k a H'_n(ka) b_n^{\epsilon 1}(v) + n H_n(Ka) b_n^{\epsilon 2}(v)] r_n^{\epsilon}(v) \right) - \frac{i}{4 \sim K^2} [n H_n(ka) b_n^{\epsilon 1}(v) + K a H'_n(Ka) b_n^{\epsilon 2}(v)] S_n^{\epsilon}(v) = 0 \quad (4.89)$$

$$- \frac{i}{4 \sim K^2} [k a H'_n(ka) b_n^{\epsilon 3}(v) + n H_n(Ka) b_n^{\epsilon 4}(v)] r_n^{\epsilon}(v) + \left( \} - \frac{i}{4 \sim K^2} [n H_n(ka) b_n^{\epsilon 3}(v) + K a H'_n(Ka) b_n^{\epsilon 4}(v)] S_n^{\epsilon}(v) \right) = 0 \quad (4.90)$$

Si on utilise les notations suivantes :

$$A_n^{\epsilon 1}(v) = [k a H'_n(ka) b_n^{\epsilon 1}(v) + n H_n(Ka) b_n^{\epsilon 2}(v)]$$

$$A_n^{\epsilon 2}(v) = [k a H'_n(ka) b_n^{\epsilon 3}(v) + n H_n(Ka) b_n^{\epsilon 4}(v)]$$

$$A_n^{\epsilon 3}(v) = n H_n(ka) b_n^{\epsilon 1} + K a H'_n(Ka) b_n^{\epsilon 2}$$

$$A_n^{\epsilon 4}(v) = n H_n(ka) b_n^{\epsilon 3}(v) + K a H'_n(Ka) b_n^{\epsilon 4}(v)$$

alors (4.89) et (4.90) peut être réécrite comme suit :

$$\left( \} - \frac{i}{4 \sim K^2} A_n^{\epsilon 1}(v) r_n^{\epsilon}(v) \right) - \frac{i}{4 \sim K^2} A_n^{\epsilon 3}(v) S_n^{\epsilon}(v) = 0 \quad (4.91)$$

$$- \frac{i}{4 \sim K^2} A_n^{\epsilon 2}(v) r_n^{\epsilon}(v) + \left( \} - \frac{i}{4 \sim K^2} A_n^{\epsilon 4}(v) S_n^{\epsilon}(v) \right) = 0 \quad (4.92)$$

Afin d'obtenir des solutions non triviales de ce dernier système, son déterminant doit être nul, ce qui implique que les valeurs propres doivent vérifier ce qui suit :

$$\}^2 - \frac{i}{4 \sim K^2} (A_n^{\epsilon 1}(v) + A_n^{\epsilon 4}(v)) \} + \left( \frac{i}{4 \sim K^2} \right)^2 (A_n^{\epsilon 1}(v) A_n^{\epsilon 4}(v) - A_n^{\epsilon 2}(v) A_n^{\epsilon 3}(v)) = 0 \quad (4.93)$$

Il est évident que le nombre de conditionnement est minimisé, si les coefficients des multipôles sont choisis, de telle sorte que toutes les valeurs propres deviennent égales à  $1 + O(v)$ , ce qui conduit à un nombre de conditionnement égal à  $1 + O(v)$ .

Pour cela, utilisons la même technique développée dans [2], on obtient :

$$\left(\frac{i}{4-K^2}\right)^2 \left(A_n^{\epsilon_1}(v)A_n^{\epsilon_4}(v) - A_n^{\epsilon_2}(v)A_n^{\epsilon_3}(v)\right) = e^{2i_{\sigma_n}^{\epsilon}(v)} \quad (4.94)$$

$$-\frac{i}{4-K^2} \left(A_n^{\epsilon_1}(v) + A_n^{\epsilon_4}(v)\right) = \dots_n^{\epsilon} e^{i_{\sigma_n}^{\epsilon}(v)} \quad (4.95)$$

Où  $\dots_n^{\epsilon}(v)$ ,  $_{\sigma_n}^{\epsilon}(v)$  sont des nombres réels arbitraires satisfont les inégalités suivantes :

$$0 \leq \dots_n^{\epsilon}(v) \leq 2 \quad \text{and} \quad 0 \leq _{\sigma_n}^{\epsilon}(v) < 2f$$

Utilisons (4.94) et (4.95), (4.93) devient :

$$\}^2 + \dots_n^{\epsilon}(v) e^{i_{\sigma_n}^{\epsilon}(v)} \} + e^{2i_{\sigma_n}^{\epsilon}(v)} = 0 \quad (4.96)$$

Cette dernière équation admet les solutions suivantes:

$$\}_1(v) = \frac{-\left(\dots_n^{\epsilon}(v) e^{i_{\sigma_n}^{\epsilon}(v)}\right) + i e^{i_{\sigma_n}^{\epsilon}(v)} \sqrt{4 - \left(\dots_n^{\epsilon}(v)\right)^2}}{2}$$

$$\}_2(v) = \frac{-\left(\dots_n^{\epsilon}(v) e^{i_{\sigma_n}^{\epsilon}(v)}\right) - i e^{i_{\sigma_n}^{\epsilon}(v)} \sqrt{4 - \left(\dots_n^{\epsilon}(v)\right)^2}}{2}$$

Notons ici, que :  $|\}_1(v)| = |\}_2(v)| = 1 + O(v)$ .

Il est évident qu'il existe un nombre infini de choix des coefficients des multipôles  $a_m^{\dagger l}(v)$  et  $b_m(v)$  qui vérifie la condition (4.96). Mais si on choisit les coefficients des multipôles simples et croisés qui minimisent la norme de l'opérateur intégral modifié, cités au chapitre 3, et après quelques calculs on obtient :

$$A_n^{\epsilon_1}(v) = A_n^{\epsilon_4}(v) = -4 - K^2 \quad \text{and} \quad A_n^{\epsilon_2}(v) = A_n^{\epsilon_3}(v) = 0 \quad (4.97)$$

Pour ces valeurs (4.97) et pour  $\dots_n^{\epsilon}(v) = 2$ ,  $_{\sigma_n}^{\epsilon}(v) = f$ , l'équation (4.96) admet une double solution  $\}(v) = 1 + 0(v)$ . D'où le nombre de conditionnement est minimisé et égale à  $1 + 0(v)$ .

Il est à signaler qu'il est difficile de montrer d'une façon calculatoire, que le choix des coefficients des multipôles cité ci-dessus, vérifie la condition

large (1.24) qui nous garantit l'unicité de la solution [8]. Mais pour cela, nous avons démontré au chapitre 2, qu'avec ce choix optimal la norme de l'opérateur intégral modifié est nulle, et par conséquent, la solution de notre problème aux limites est unique, ce qui nous épargne la nécessité de vérifier la condition large (1.24).

#### 4.5 Théorème :

*Si la frontière  $\partial D$  est un cercle légèrement déformé, et si les coefficients des multipôles simples et croisés sont définis par (4.54) à (4.60), alors le nombre de conditionnement de l'équation intégrale modifiée pour le problème de Dirichlet, est donné par :*

$$\text{Cond}(M_v) = \text{Cond}(M_a) + O(v) = 1 + O(v) \quad (4.98)$$

#### Démonstration :

En utilisant les expressions des coefficients des multipôles simples et croisés obtenues pour le cas d'un cercle légèrement déformé (4.54) à (4.60), la fonction de Green modifiée pour le problème de Dirichlet s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} T_p G_1^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_v}^{P=P_v} &= T_p G_0^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_v}^{P=P_v} \\ &+ \frac{i}{4 \sim K^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \begin{aligned} &\left( a_m^{11}(v) TF_m^{11}(P(v)) \otimes TF_m^{11}(Q(v)) + b_m(v) TF_m^{11}(P(v)) \otimes TF_m^{22}(Q(v)) \right) \\ &+ \left( a_m^{12}(v) TF_m^{12}(P(v)) \otimes TF_m^{12}(Q(v)) - b_m(v) TF_m^{12}(P(v)) \otimes TF_m^{21}(Q(v)) \right) \\ &+ \left( a_m^{21}(v) TF_m^{21}(P(v)) \otimes TF_m^{21}(Q(v)) - b_m(v) TF_m^{21}(P(v)) \otimes TF_m^{12}(Q(v)) \right) \\ &+ \left( a_m^{22}(v) TF_m^{22}(P(v)) \otimes TF_m^{22}(Q(v)) + b_m(v) TF_m^{22}(P(v)) \otimes TF_m^{11}(Q(v)) \right) \end{aligned} \right] \\ &= T_p G_0^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_v}^{P=P_v} + O(v) \end{aligned}$$

$$+ \frac{i}{4 \sim K^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{ma} + O(v)} \left[ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} (\bar{c}_m \hat{c}_m - a_m^1 a_m^2 + O(v)) TF_m^{11}(P(v)) \otimes TF_m^{11}(Q(v)) \\ + (a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1 + O(v)) TF_m^{11}(P(v)) \otimes TF_m^{22}(Q(v)) \end{array} \right) \\ + \left( \begin{array}{l} (c_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2 + O(v)) TF_m^{12}(P(v)) \otimes TF_m^{12}(Q(v)) \\ - (a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1 + O(v)) TF_m^{12}(P(v)) \otimes TF_m^{21}(Q(v)) \end{array} \right) \\ + \left( \begin{array}{l} (\bar{c}_m \hat{c}_m - a_m^1 a_m^2 + O(v)) TF_m^{21}(P(v)) \otimes TF_m^{21}(Q(v)) \\ - (a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1 + O(v)) TF_m^{21}(P(v)) \otimes TF_m^{12}(Q(v)) \end{array} \right) \\ + \left( \begin{array}{l} (c_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2 + O(v)) TF_m^{22}(P(v)) \otimes TF_m^{22}(Q(v)) \\ + (a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1 + O(v)) TF_m^{22}(P(v)) \otimes TF_m^{11}(Q(v)) \end{array} \right) \end{array} \right]$$

ou bien :

$$T_p G_1^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_v}^{P=P_v} = T_p G_0^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_v}^{P=P_v} + \frac{i}{4 \sim K^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{ma}} \left[ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} (\bar{c}_m \hat{c}_m - a_m^1 a_m^2) TF_m^{11}(P) \otimes TF_m^{11}(Q) \\ + (a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1) TF_m^{11}(P) \otimes TF_m^{22}(Q) \end{array} \right) \\ + \left( \begin{array}{l} (c_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2) TF_m^{12}(P) \otimes TF_m^{12}(Q) \\ - (a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1) TF_m^{12}(P) \otimes TF_m^{21}(Q) \end{array} \right) \\ + \left( \begin{array}{l} (\bar{c}_m \hat{c}_m - a_m^1 a_m^2) TF_m^{21}(P) \otimes TF_m^{21}(Q) \\ - (a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1) TF_m^{21}(P) \otimes TF_m^{12}(Q) \end{array} \right) \\ + \left( \begin{array}{l} (c_m \hat{d}_m - a_m^1 \hat{a}_m^2) TF_m^{22}(P) \otimes TF_m^{22}(Q) \\ + (a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1) TF_m^{22}(P) \otimes TF_m^{11}(Q) \end{array} \right) \end{array} \right] + O(v)$$

en utilisant (4.54) à (4.60), on obtient :

$$T_p G_1^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_v}^{P=P_v} = T_p G_{Ex}^D(P, Q) \Big|_{Q=Q_v}^{P=P_v} + O(v)$$

Ce qui termine la démonstration du théorème.

Il y a une approximation plus simple pour les coefficients des multipôles simples et croisés qui conduit au même résultat que celui du théorème précédent, pour cela il suffit de définir les coefficients des multipôles simples et croisés tels que dans ce chapitre, mais avec les différents produits scalaires calculés sur le cercle modifié.

$$K_1^v = K_1^a + O(v)$$

Et suite à ces estimations, on peut facilement voir que les valeurs propres de l'opérateur modifié  $M_v$ , sont des perturbations des valeurs propres de l'opérateur original  $M_a$ , d'où :

$$\text{Cond}(M_v) = \text{Cond}(M_a) + O(v) = 1 + O(v)$$

## CHAPITRE 5

### CRITERE D'OPTIMALITE MIXTE

Après avoir développé dans les deux précédents chapitres, un critère d'optimalité à vocation numérique (minimisation du nombre de conditionnement), lié à la stabilité des méthodes de résolution numérique. On se propose dans ce dernier chapitre, de développer un nouveau critère mixte pour le choix optimal des coefficients des multipôles, ce critère à vocation analytique, se base sur la majoration des normes de la fonction de Green modifiée et de l'opérateur intégral associé.

#### 5.1 Théorème 01 :

*Si le noyau de l'opérateur intégral modifié  $K_1$ , à savoir la traction de la fonction de Green  $T_p G_1$  est définie comme suit :*

$$T_p G_1(P, Q) = T_p G_0(P, Q) + \frac{i}{4\mu K^2} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 [a_m^{\sigma l} \cdot TF_m^{\sigma l}(P) \otimes TF_m^{\sigma l}(Q)] \quad (5.1)$$

*Alors la quantité :*

$$\int_{r_p=A} \|T_p G_1 + G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot ds_p \quad , \quad \forall A \geq \max r_q \quad , \quad q \in \partial D \quad (5.2)$$

*est majorée si les coefficients des multipôles simples sont choisis comme suit :*

$$a_m^{\sigma l} = - \left( \frac{\langle T\hat{F}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{\partial D}}{\|TF_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2} + \frac{\langle \hat{F}_m^{\sigma l}, F_m^{\sigma l} \rangle_{\partial D}}{\|F_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2} \right) \quad (5.3)$$

où  $\hat{F}_m^{\sigma l} = \text{Re}(F_m^{\sigma l})$



**Démonstration :**

Nous avons :

$$\begin{aligned}
& (T_p G_1 + G_1)(P, Q) = (T_p G_0 + G_0)(P, Q) \\
& + \frac{i}{4\mu K^2} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 [a_m^{\sigma l} \cdot TF_m^{\sigma l}(P) \otimes TF_m^{\sigma l}(Q)] + \frac{i}{4\mu K^2} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 [a_m^{\sigma l} \cdot F_m^{\sigma l}(P) \otimes F_m^{\sigma l}(Q)] \\
& = \frac{i}{4\mu K^2} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 [TF_m^{\sigma l}(P) \otimes T\hat{F}_m^{\sigma l}(Q) + a_m^{\sigma l} \cdot TF_m^{\sigma l}(P) \otimes TF_m^{\sigma l}(Q)] \\
& + \frac{i}{4\mu K^2} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 [F_m^{\sigma l}(P) \otimes \hat{F}_m^{\sigma l}(Q) + a_m^{\sigma l} \cdot F_m^{\sigma l}(P) \otimes F_m^{\sigma l}(Q)]
\end{aligned}$$

Si on pose :

$$f_m^{\sigma l}(Q) = \frac{i}{4\mu K^2} \cdot [(T\hat{F}_m^{\sigma l} + \hat{F}_m^{\sigma l})(Q) + a_m^{\sigma l} \cdot (TF_m^{\sigma l} + F_m^{\sigma l})(Q)]$$

alors l'opérateur traction lié à la fonction de Green modifiée  $T_p G_1 + G_1$

s'écrit sous la forme :

$$(T_p G_1 + G_1)(P, Q) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 [((TF_m^{\sigma l} + F_m^{\sigma l})(P)) \otimes f_m^{\sigma l}(Q)] \quad (5.4)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
& \int_{r_p=A} \|T_p G_1 + G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot ds_p = \int_{r_p=A} \int_{\partial D} ((T_p G_1 + G_1)(P, q)) : (\overline{T_p G_1 + G_1}(q, P)) \cdot ds_p \cdot ds_q \\
& = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\nu=1}^2 \sum_{k=1}^2 \int_{r_p=A} ((TF_m^{\sigma l} + F_m^{\sigma l})(P)) \cdot (\overline{TF_n^{\nu k} + F_n^{\nu k}})(P) \cdot ds_p \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma l}(q) \cdot \overline{f_n^{\nu k}}(q) \cdot ds_q \\
& = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\nu=1}^2 \left[ \int_{r_p=A} (TF_m^{\sigma 1} + F_m^{\sigma 1})(P) \cdot (\overline{TF_n^{\nu 1} + F_n^{\nu 1}})(P) \cdot ds_p \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 1}(q) \cdot \overline{f_n^{\nu 1}}(q) \cdot ds_q \right. \\
& + \int_{r_p=A} (TF_m^{\sigma 1} + F_m^{\sigma 1})(P) \cdot (\overline{TF_n^{\nu 2} + F_n^{\nu 2}})(P) \cdot ds_p \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 1}(q) \cdot \overline{f_n^{\nu 2}}(q) \cdot ds_q \\
& + \int_{r_p=A} (TF_m^{\sigma 2} + F_m^{\sigma 2})(P) \cdot (\overline{TF_n^{\nu 1} + F_n^{\nu 1}})(P) \cdot ds_p \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 2}(q) \cdot \overline{f_n^{\nu 1}}(q) \cdot ds_q \\
& \left. + \int_{r_p=A} (TF_m^{\sigma 2} + F_m^{\sigma 2})(P) \cdot (\overline{TF_n^{\nu 2} + F_n^{\nu 2}})(P) \cdot ds_p \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 2}(q) \cdot \overline{f_n^{\nu 2}}(q) \cdot ds_q \right]
\end{aligned}$$

en utilisant les relations des produits scalaires des fonctions

$\{TF_m^{\sigma l} + F_m^{\sigma l}\}_{m=0:\infty}^{\sigma, l=1:2}$  sur le cercle de rayon  $A$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_{r_p=A} \|T_p G_1 + G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot ds_p \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[ 2\pi A E_m(kr) \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 1}(q) \cdot \bar{f}_m^{\sigma 1}(q) \cdot ds_q \right. \\
&\quad - 2\pi A F_m(kr, Kr) \cdot (-1)^\sigma \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 1}(q) \cdot \bar{f}_m^{(3-\sigma)2}(q) \cdot ds_q \\
&\quad - 2\pi A \bar{F}_m(kr, Kr) \cdot (-1)^\sigma \cdot \int_{\partial D} \bar{f}_m^{\sigma 1}(q) \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q) \cdot ds_q \\
&\quad \left. + 2\pi A E_m(Kr) \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 2}(q) \cdot \bar{f}_m^{\sigma 2}(q) \cdot ds_q \right] \tag{5.5}
\end{aligned}$$

Posons  $a = k \cdot H_m'(kr)$  ,  $b = k \cdot \frac{m}{kr} \cdot H_m(kr)$

et  $c = K \cdot H_m'(Kr)$  ,  $d = K \cdot \frac{m}{Kr} \cdot H_m(Kr)$

On aura alors :

$$E_m(kr) = |a|^2 + |b|^2 \quad , \quad E_m(Kr) = |c|^2 + |d|^2$$

et  $F_m(kr, Kr) = a \cdot \bar{d} + \bar{c} \cdot b$

Ainsi (5.5) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned}
& \int_{r_p=A} \|T_p G_1 + G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot ds_p = 2\pi A \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[ (|a|^2 + |b|^2) \cdot \int_{\partial D} |f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q \right. \\
&\quad - (a \cdot \bar{d} + \bar{c} \cdot b) \cdot (-1)^\sigma \cdot \int_{\partial D} f_m^{\sigma 1}(q) \cdot \bar{f}_m^{(3-\sigma)2}(q) \cdot ds_q \\
&\quad - (\bar{a} \cdot d + c \cdot \bar{b}) \cdot (-1)^\sigma \cdot \int_{\partial D} \bar{f}_m^{\sigma 1}(q) \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q) \cdot ds_q \\
&\quad \left. + (|c|^2 + |d|^2) \cdot \int_{\partial D} |f_m^{\sigma 2}(q)|^2 \cdot ds_q \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi A. \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[ \int_{\partial D} |a \cdot f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q + \int_{\partial D} |b \cdot f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q \right. \\
 &\quad - \int_{\partial D} (a \cdot f_m^{\sigma 1}(q)) \cdot \left( (-1)^\sigma \cdot d \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q) \right) \cdot ds_q \\
 &\quad - \int_{\partial D} (b \cdot f_m^{\sigma 1}(q)) \cdot \left( (-1)^\sigma \cdot c \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q) \right) \cdot ds_q \\
 &\quad - \int_{\partial D} \left( \overline{a \cdot f_m^{\sigma 1}(q)} \right) \cdot \left( (-1)^\sigma \cdot d \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q) \right) \cdot ds_q \\
 &\quad - \int_{\partial D} \left( \overline{b \cdot f_m^{\sigma 1}(q)} \right) \cdot \left( (-1)^\sigma \cdot c \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q) \right) \cdot ds_q \\
 &\quad \left. + \int_{\partial D} |(-1)^\sigma \cdot c \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q + \int_{\partial D} |(-1)^\sigma \cdot d \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \right] \\
 &= 2\pi A. \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[ \int_{\partial D} |a \cdot f_m^{\sigma 1}(q) - (-1)^\sigma \cdot d \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\partial D} |b \cdot f_m^{\sigma 1}(q) - (-1)^\sigma \cdot c \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \right] \tag{5.6}
 \end{aligned}$$

D'autre part, et d'après l'inégalité de Minkowski, nous avons :

$$\begin{aligned}
 &\int_{\partial D} |a \cdot f_m^{\sigma 1}(q) - (-1)^\sigma \cdot d \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \\
 &\leq \left[ \left\{ \int_{\partial D} |a \cdot f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\partial D} |(-1)^\sigma \cdot d \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^2 \tag{5.7}
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 &\int_{\partial D} |b \cdot f_m^{\sigma 1}(q) - (-1)^\sigma \cdot c \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \\
 &\leq \left[ \left\{ \int_{\partial D} |b \cdot f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\partial D} |(-1)^\sigma \cdot c \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^2 \tag{5.8}
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 & \int_{r_p=A} \|T_p G_1 + G_1\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot ds_p \\
 & \leq 2\pi A \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[ \left\{ \int_{\partial D} |a \cdot f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\partial D} |(-1)^\sigma \cdot d \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\
 & + 2\pi A \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[ \left\{ \int_{\partial D} |b \cdot f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\partial D} |(-1)^\sigma \cdot c \cdot f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\
 & = 2\pi A \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[ |a| \cdot \left\{ \int_{\partial D} |f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} + |d| \cdot \left\{ \int_{\partial D} |f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\
 & + 2\pi A \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[ |b| \cdot \left\{ \int_{\partial D} |f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} + |c| \cdot \left\{ \int_{\partial D} |f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\
 & = 2\pi A \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[ |a|^2 \cdot \int_{\partial D} |f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q + |d|^2 \cdot \int_{\partial D} |f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \right. \\
 & + 2 \cdot |a| \cdot |d| \cdot \left( \int_{\partial D} |f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\partial D} |f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & + |b|^2 \cdot \int_{\partial D} |f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q + |c|^2 \cdot \int_{\partial D} |f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \\
 & \left. + 2 \cdot |b| \cdot |c| \cdot \left( \int_{\partial D} |f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\partial D} |f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \right)^{\frac{1}{2}} \right]
 \end{aligned}$$

$$= 2\pi A \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^2 \left[ \left( |a|^2 + |b|^2 \right) \cdot \int_{\partial D} |f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q + \left( |d|^2 + |c|^2 \right) \cdot \int_{\partial D} |f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \right. \\ \left. + 2 \cdot (|a| \cdot |d| + |b| \cdot |c|) \cdot \left[ \int_{\partial D} |f_m^{\sigma 1}(q)|^2 \cdot ds_q \cdot \int_{\partial D} |f_m^{(3-\sigma)2}(q)|^2 \cdot ds_q \right]^{\frac{1}{2}} \right]$$

D'autre part, le terme  $\int_{\partial D} |f_m^{\sigma l}(q)|^2 \cdot ds_q$  peut être réarrangé comme suit :

$$\int_{\partial D} |f_m^{\sigma l}(q)|^2 \cdot ds_q = \int_{\partial D} \left| (T\hat{F}_m^{\sigma l} + \hat{F}_m^{\sigma l})(q) + a_m^{\sigma l} \cdot (TF_m^{\sigma l} + F_m^{\sigma l})(q) \right|^2 \cdot ds_q \\ = \int_{\partial D} \left| (T\hat{F}_m^{\sigma l} + \hat{F}_m^{\sigma l})(q) + a_m^{\sigma l} \cdot (TF_m^{\sigma l} + F_m^{\sigma l})(q) \cdot \overline{(T\hat{F}_m^{\sigma l} + \hat{F}_m^{\sigma l})(q)} + \overline{a_m^{\sigma l}} \cdot \overline{(TF_m^{\sigma l} + F_m^{\sigma l})(q)} \right|^2 \cdot ds_q \\ = \int_{\partial D} \left[ T\hat{F}_m^{\sigma l}(q) \cdot T\hat{F}_m^{\sigma l}(q) + \overline{a_m^{\sigma l}} \cdot T\hat{F}_m^{\sigma l}(q) \cdot \overline{T\hat{F}_m^{\sigma l}(q)} + a_m^{\sigma l} \cdot TF_m^{\sigma l}(q) \cdot T\hat{F}_m^{\sigma l}(q) + |a_m^{\sigma l}|^2 \cdot TF_m^{\sigma l}(q) \cdot \overline{T\hat{F}_m^{\sigma l}(q)} \right] \cdot ds_q \\ \int_{\partial D} \left[ \hat{F}_m^{\sigma l}(q) \cdot \hat{F}_m^{\sigma l}(q) + \overline{a_m^{\sigma l}} \cdot \hat{F}_m^{\sigma l}(q) \cdot \overline{\hat{F}_m^{\sigma l}(q)} + a_m^{\sigma l} \cdot F_m^{\sigma l}(q) \cdot \hat{F}_m^{\sigma l}(q) + |a_m^{\sigma l}|^2 \cdot F_m^{\sigma l}(q) \cdot \overline{\hat{F}_m^{\sigma l}(q)} \right] \cdot ds_q \\ = \|T\hat{F}_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2 + \overline{a_m^{\sigma l}} \cdot \langle T\hat{F}_m^{\sigma l}, T\hat{F}_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)} + a_m^{\sigma l} \cdot \langle TF_m^{\sigma l}, T\hat{F}_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)} + |a_m^{\sigma l}|^2 \cdot \|TF_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2 \\ + \|\hat{F}_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2 + \overline{a_m^{\sigma l}} \cdot \langle \hat{F}_m^{\sigma l}, F_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)} + a_m^{\sigma l} \cdot \langle F_m^{\sigma l}, \hat{F}_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)} + |a_m^{\sigma l}|^2 \cdot \|F_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2 \\ = \|T\hat{F}_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2 + \|TF_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot \left[ |a_m^{\sigma l}|^2 + a_m^{\sigma l} \cdot \frac{\langle T\hat{F}_m^{\sigma l}, T\hat{F}_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\|TF_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2} + \overline{a_m^{\sigma l}} \cdot \frac{\langle T\hat{F}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\|TF_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2} \right] \\ + \|\hat{F}_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2 + \|F_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot \left[ |a_m^{\sigma l}|^2 + a_m^{\sigma l} \cdot \frac{\langle F_m^{\sigma l}, \hat{F}_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\|F_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2} + \overline{a_m^{\sigma l}} \cdot \frac{\langle \hat{F}_m^{\sigma l}, F_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\|F_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2} \right] \\ = \|T\hat{F}_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2 + \|TF_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot \left| a_m^{\sigma l} + \frac{\langle T\hat{F}_m^{\sigma l}, T\hat{F}_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\|TF_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2} \right|^2 - \frac{|\langle T\hat{F}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}|^2}{\|TF_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^4} \\ + \|\hat{F}_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2 + \|F_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot \left| a_m^{\sigma l} + \frac{\langle \hat{F}_m^{\sigma l}, F_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\|F_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2} \right|^2 - \frac{|\langle \hat{F}_m^{\sigma l}, F_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}|^2}{\|F_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^4}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\| T\hat{F}_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^2 - \frac{\left| \langle T\hat{F}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)} \right|^2}{\left\| TF_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^4} + \left\| TF_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot \left| a_m^{\sigma l} + \frac{\langle T\hat{F}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\left\| TF_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^2} \right|^2 \\
 &+ \left\| \hat{F}_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^2 - \frac{\left| \langle \hat{F}_m^{\sigma l}, F_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)} \right|^2}{\left\| F_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^4} + \left\| F_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot \left| a_m^{\sigma l} + \frac{\langle \hat{F}_m^{\sigma l}, F_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\left\| F_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^2} \right|^2
 \end{aligned}$$

De ce fait, il est clair que la quantité (5.2) suivante :

$$\int_{r_p=A} \left\| T_p G_1 + G_1 \right\|_{L_2(\partial D)}^2 \cdot ds_p \quad , \quad \forall A \geq \max r_q \quad , \quad q \in \partial D$$

sera majorée si les valeurs :

$$\begin{aligned}
 &\left| a_m^{\sigma l} + \frac{\langle T\hat{F}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\left\| TF_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^2} \right|^2 \\
 &\left| a_m^{\sigma l} + \frac{\langle \hat{F}_m^{\sigma l}, F_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\left\| F_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^2} \right|^2
 \end{aligned}$$

sont plus petites que possible, c'est-à-dire égale à zéro, donc nous aurons :

$$a_m^{\sigma l} = - \left( \frac{\langle T\hat{F}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{\partial D}}{\left\| TF_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^2} + \frac{\langle \hat{F}_m^{\sigma l}, F_m^{\sigma l} \rangle_{\partial D}}{\left\| F_m^{\sigma l} \right\|_{L_2(\partial D)}^2} \right)$$

Ce qui termine la démonstration du théorème 1.

Dans ce qui suit nous allons démontrer que le choix optimal que nous avons trouvé dans (5.3), satisfait la condition large (1.24) qui nous garantit l'unicité de la solution de l'équation intégrale associée au problème donné. Cette condition rappelons-le s'exprime dans le cas des coefficients des multipôles simples ( $b_m = 0$ ), sous la forme :

$$\left| a_m^{\sigma l} + \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \quad \text{ou bien} \quad \left| 2 \cdot a_m^{\sigma l} + 1 \right| < 1$$

**5.2 Lemme 01 :**

Si les coefficients des multipôles simples  $a_m^{\sigma l}$  sont choisis comme dans le théorème 01, alors la condition large (1.24) est satisfaite.

**Démonstration :**

Nous avons :

$$\begin{aligned}
 |2.a_m^{\sigma l} + 1| &= \left| -2 \frac{\langle T\hat{F}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\|TF_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2} - 2 \frac{\langle \hat{F}_m^{\sigma l}, F_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\|F_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2} + 1 \right| \\
 &= \left| \frac{\langle TF_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)} - 2 \cdot \langle T\hat{F}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\|TF_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2} \right| + \left| \frac{\langle F_m^{\sigma l}, F_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)} - 2 \cdot \langle \hat{F}_m^{\sigma l}, F_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\|F_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2} \right| \\
 &= \left| \frac{-\langle \overline{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\|TF_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2} \right| + \left| \frac{-\langle \overline{F}_m^{\sigma l}, F_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\|F_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2} \right| \\
 &= \left| \frac{\langle \overline{TF}_m^{\sigma l}, TF_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\|TF_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2} \right| + \left| \frac{\langle \overline{F}_m^{\sigma l}, F_m^{\sigma l} \rangle_{L_2(\partial D)}}{\|F_m^{\sigma l}\|_{L_2(\partial D)}^2} \right|
 \end{aligned}$$

Posons :  $TF_m^{\sigma l} = u + i.v$  et  $F_m^{\sigma l} = s + i.t$

donc on a :

$$\begin{aligned}
 |2.a_m^{\sigma l} + 1| &= \left| \frac{\langle u, u \rangle_{L_2(\partial D)} - \langle v, v \rangle_{L_2(\partial D)} - 2.i \cdot \langle u, v \rangle_{L_2(\partial D)}}{\langle u, u \rangle_{L_2(\partial D)} + \langle v, v \rangle_{L_2(\partial D)}} \right| \\
 &+ \left| \frac{\langle s, s \rangle_{L_2(\partial D)} - \langle t, t \rangle_{L_2(\partial D)} - 2.i \cdot \langle s, t \rangle_{L_2(\partial D)}}{\langle s, s \rangle_{L_2(\partial D)} + \langle t, t \rangle_{L_2(\partial D)}} \right| \\
 &= \frac{\left[ \left\{ \langle u, u \rangle_{L_2(\partial D)} - \langle v, v \rangle_{L_2(\partial D)} \right\}^2 + 4 \cdot \langle u, v \rangle_{L_2(\partial D)} \cdot \langle u, v \rangle_{L_2(\partial D)} \right]^{\frac{1}{2}}}{\langle u, u \rangle_{L_2(\partial D)} + \langle v, v \rangle_{L_2(\partial D)}} \\
 &+ \frac{\left[ \left\{ \langle s, s \rangle_{L_2(\partial D)} - \langle t, t \rangle_{L_2(\partial D)} \right\}^2 + 4 \cdot \langle s, t \rangle_{L_2(\partial D)} \cdot \langle s, t \rangle_{L_2(\partial D)} \right]^{\frac{1}{2}}}{\langle s, s \rangle_{L_2(\partial D)} + \langle t, t \rangle_{L_2(\partial D)}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\left[ \left\{ \langle u, u \rangle_{L_2(\partial D)} + \langle v, v \rangle_{L_2(\partial D)} \right\}^2 + 4 \cdot \left\{ \langle u, v \rangle_{L_2(\partial D)}^2 - \langle u, u \rangle_{L_2(\partial D)} \cdot \langle v, v \rangle_{L_2(\partial D)} \right\} \right]^{\frac{1}{2}}}{\langle u, u \rangle_{L_2(\partial D)} + \langle v, v \rangle_{L_2(\partial D)}}$$

Pour que cette dernière quantité soit strictement inférieure à 1, il suffit d'avoir :

$$\langle u, v \rangle_{L_2(\partial D)}^2 - \langle u, u \rangle_{L_2(\partial D)} \cdot \langle v, v \rangle_{L_2(\partial D)} < 0$$

$$\text{Et} \quad \langle s, t \rangle_{L_2(\partial D)}^2 - \langle s, s \rangle_{L_2(\partial D)} \cdot \langle t, t \rangle_{L_2(\partial D)} < 0$$

mais de l'inégalité de Schwartz nous avons :

$$\langle u, v \rangle_{L_2(\partial D)}^2 \leq \langle u, u \rangle_{L_2(\partial D)} \cdot \langle v, v \rangle_{L_2(\partial D)}$$

$$\Leftrightarrow \langle u, v \rangle_{L_2(\partial D)}^2 - \langle u, u \rangle_{L_2(\partial D)} \cdot \langle v, v \rangle_{L_2(\partial D)} \leq 0$$

$$\text{Et} \quad \langle s, t \rangle_{L_2(\partial D)}^2 \leq \langle s, s \rangle_{L_2(\partial D)} \cdot \langle t, t \rangle_{L_2(\partial D)}$$

$$\Leftrightarrow \langle s, t \rangle_{L_2(\partial D)}^2 - \langle s, s \rangle_{L_2(\partial D)} \cdot \langle t, t \rangle_{L_2(\partial D)} \leq 0$$

et comme l'inégalité de Schwartz est stricte si les deux fonctions  $u$  et  $v$  ( $s$  et  $t$ ) sont linéairement indépendantes, alors, pour terminer notre démonstration il faut montrer que les deux fonctions  $u$  et  $v$  ( $s$  et  $t$ ), sont linéairement indépendantes, sachant que :

$$u = \text{Re} \left( TF_m^{\sigma l} \right) = T\hat{F}_m^{\sigma l} \quad \text{et} \quad v = \text{Im} \left( TF_m^{\sigma l} \right)$$

pour cela, on va étudier à titre indicatif, le cas ou  $l=1$  :

nous avons :

$$u = \nabla \left( J_m(kr) \cdot E_m^\sigma(\theta) \right) \quad \text{et} \quad v = \nabla \left( Y_m(kr) \cdot E_m^\sigma(\theta) \right)$$

$$u = k \cdot J_m'(kr) \cdot E_m^\sigma(\theta) \cdot \vec{r} + \frac{m}{r} \cdot J_m(kr) \cdot (-1)^\sigma \cdot E_m^{(3-\sigma)}(\theta) \cdot \vec{\theta}$$

$$v = k \cdot Y_m'(kr) \cdot E_m^\sigma(\theta) \cdot \vec{r} + \frac{m}{r} \cdot Y_m(kr) \cdot (-1)^\sigma \cdot E_m^{(3-\sigma)}(\theta) \cdot \vec{\theta}$$



$u$  et  $v$  seront linéairement indépendantes si et seulement si :

$$\frac{k \cdot J'_m(kr) \cdot E_m^\sigma(\theta)}{k \cdot Y'_m(kr) \cdot E_m^\sigma(\theta)} \neq \frac{\frac{m}{r} \cdot J_m(kr) \cdot (-1)^\sigma \cdot E_m^{(3-\sigma)}(\theta)}{\frac{m}{r} \cdot Y_m(kr) \cdot (-1)^\sigma \cdot E_m^{(3-\sigma)}(\theta)}$$

Autrement dit,  $u$  et  $v$  seront linéairement indépendantes si et seulement si :

$$\frac{J'_m(kr)}{Y'_m(kr)} \neq \frac{J_m(kr)}{Y_m(kr)}$$

Calculons pour cela :  $J'_m(kr) \cdot Y_m(kr) - J_m(kr) \cdot Y'_m(kr) = ?$

nous avons :  $J'_m(X) = -J_{m+1}(X) + \frac{m}{X} \cdot J_m(X)$

$$Y'_m(X) = -Y_{m+1}(X) + \frac{m}{X} \cdot Y_m(X)$$

d'où :

$$\begin{aligned} & J'_m(kr) \cdot Y_m(kr) - J_m(kr) \cdot Y'_m(kr) \\ &= \left[ -J_{m+1}(kr) + \frac{m}{kr} \cdot J_m(kr) \right] \cdot Y_m(kr) - J_m(kr) \left[ -Y_{m+1}(kr) + \frac{m}{kr} \cdot Y_m(kr) \right] \\ &= -J_{m+1}(kr) \cdot Y_m(kr) + \frac{m}{kr} \cdot J_m(kr) \cdot Y_m(kr) \\ &+ J_m(kr) \cdot Y_{m+1}(kr) - \frac{m}{kr} \cdot J_m(kr) \cdot Y_m(kr) \\ &= -\left[ J_{m+1}(kr) \cdot Y_m(kr) - J_m(kr) \cdot Y_{m+1}(kr) \right] \end{aligned}$$

En utilisant le Wronskien des fonctions de Bessel et de Hankel [1], on obtient :

$$J'_m(kr) \cdot Y_m(kr) - J_m(kr) \cdot Y'_m(kr) = -\frac{2}{\pi \cdot kr}$$

donc :

$$J'_m(kr) \cdot Y_m(kr) - J_m(kr) \cdot Y'_m(kr) = -\frac{2}{\pi \cdot kr} \neq 0$$

d'où  $u$  et  $v$  sont linéairement indépendantes

c'est-à-dire que :  $\langle u, v \rangle_{L_2(\partial D)}^2 - \langle u, u \rangle_{L_2(\partial D)} \cdot \langle v, v \rangle_{L_2(\partial D)} < 0$

de la même manière, on peut obtenir :

$$\langle s, t \rangle_{L_2(\partial D)}^2 - \langle s, s \rangle_{L_2(\partial D)} \cdot \langle t, t \rangle_{L_2(\partial D)} < 0$$

d'où :  $\left| 2 \cdot a_m^{\sigma l} + 1 \right| < 1$

Ce qui termine la démonstration du lemme 01.

Notons ici, que le choix des coefficients des multipôles simples trouvé dans le théorème 01, ne minimise pas réellement la quantité (5.2). Toutefois, ce choix conduit à la majoration de cette dernière quantité, et de plus il vérifie la condition large (1.24) qui garantit l'élimination des fréquences irrégulières, ce qui permet de récupérer l'unicité de la solution de l'équation intégrale modifiée représentant notre problème aux limites.

## CONCLUSION

Le travail qui a été présenté dans cette thèse porte sur la détermination du choix optimal des coefficients des multipôles en minimisant le nombre de conditionnement de l'opérateur intégral décrivant l'équation de diffraction des ondes élastiques.

Dans le premier chapitre, nous avons exposé la formulation mathématique du problème. Dans le second chapitre, nous avons énoncé des critères usuels d'optimalité des coefficients des multipôles, relatifs à la minimisation de la norme de l'opérateur intégral. A travers ce critère, on cherche à garantir la convergence de la méthode de résolution numérique par approximations successives, pour le plus grand rayon des valeurs de la fréquence d'ondes possible.

Dans le chapitre trois, nous avons développé un nouveau critère d'optimalité à vocation numérique, basé cette fois-ci, sur la minimisation du nombre de conditionnement de l'opérateur intégral décrivant l'équation de diffraction des ondes élastiques, pour le cas d'une frontière de forme circulaire. Dans ce cas là, et en utilisant deux différents types de modification, à savoir, la modification simple et la modification croisée, une forme relativement plus simple des coefficients des multipôles simples et croisés a pu être obtenue. Et de plus, nous avons obtenu le résultat remarquable qui consiste en la minimisation du nombre de conditionnement à sa plus petite valeur, c'est-à-dire 1, autrement dit la norme de l'opérateur intégral modifié sera nulle, ce qui conduirait alors à la solution directe du problème au limites sans recourir à la résolution d'une équation intégrale. Dans le quatrième chapitre, nous avons appliqué les résultats du troisième chapitre au cas d'une frontière ayant la forme d'un

cercle légèrement modifiée. Nous avons montré que les expressions des coefficients des multipôles trouvées pour le cas du cercle pouvaient être utilisées comme approximation pour le cas du cercle légèrement modifiée, et de plus nous avons montré que le nombre de conditionnement de l'opérateur intégral modifié est du même ordre que la perturbation du cercle, c'est-à-dire d'ordre  $1 + O(\varepsilon)$ . Toutefois, la condition large (1.24) n'a pu être établie dans ce cas-là. Néanmoins, cette condition n'étant pas nécessaire mais seulement suffisante comme cela a été prouvé dans [8].

Le dernier chapitre a été consacré au développement d'un critère mixte d'optimalité des coefficients des multipôles simples. Ce critère d'ordre analytique, se base sur la majoration des normes de la fonction de Green modifiée et de l'opérateur intégral associé. Notons ici, que le choix optimal trouvé pour les coefficients des multipôles simples, conduit à la majoration de cette dernière quantité, et de plus il vérifie la condition large (1.24) qui garantit l'élimination des fréquences irrégulières, ce qui permet de récupérer l'unicité de la solution de l'équation intégrale modifiée représentant notre problème aux limites.

Le travail présenté dans cette thèse, se termine par une conclusion qui résume les principales techniques utilisées, et les résultats obtenus, ainsi que les questions ouvertes qui peuvent être explorés dans le futur. Deux annexes sont présentées à la fin de cette thèse, pour expliciter quelques calculs d'ordre technique.

Ce travail qui s'inscrit dans le cadre des techniques de modification de la fonction de Green, débouche sur plusieurs questions et problèmes ouverts qui pourraient être étudiés dans le futur, citons entre autre :

1- La vérification de la condition large (1.24) pour un domaine de frontière quelconque.

2- L'étude d'autres formes géométriques simples tels que le triangle, l'ellipse,...etc., et qui peuvent servir de guide pour le cas général.

3- L'étude d'autres critères d'optimalité.

4- Rechercher les mêmes résultats obtenus par ARGYROPOULOS, D. GINTIDES, K. KIRIAKI, L. BENCHEIKH et B. SAHLI, en utilisant la minimisation avec contraintes (intégrer la condition large (1.24) comme contrainte).

4- Elaboré les résultats numériques lié à ce genre de problèmes, en se basons sur les travaux de L. BENCHEIKH [6] et [7].

## ANNEXE 1

On se propose dans cet annexe de donner les expressions des produits scalaires des fonctions  $F_m^{\sigma l}$ ,  $TF_m^{\sigma l}$  et de leurs parties régulières  $\hat{F}_m^{\sigma l}$  et  $T\hat{F}_m^{\sigma l}$ . On note :

$$\langle F_m^{\sigma l}, F_n^{\nu k} \rangle_{\partial D} = I_{mn}^{\sigma \nu, lk} \quad (\text{A1.1})$$

$$\langle TF_m^{\sigma l}, TF_n^{\nu k} \rangle_{\partial D} = J_{mn}^{\sigma \nu, lk} \quad (\text{A1.2})$$

$$\langle \hat{F}_m^{\sigma l}, F_n^{\nu k} \rangle_{\partial D} = \hat{I}_{mn}^{\sigma \nu, lk} \quad (\text{A1.3})$$

$$\langle T\hat{F}_m^{\sigma l}, F_n^{\nu k} \rangle_{\partial D} = \hat{J}_{mn}^{\sigma \nu, lk} \quad (\text{A1.4})$$

Quand  $\partial D$  est un cercle de rayon  $a$ , on obtient les expressions suivantes pour les produits scalaires définis ci-dessus :

$$I_{mn}^{\sigma \nu, 11} = a_m^1 \cdot \delta_{mn} \cdot \delta_{\sigma \nu} \quad (\text{A1.5})$$

$$I_{mn}^{\sigma \nu, 22} = a_m^2 \cdot \delta_{mn} \cdot \delta_{\sigma \nu} \quad (\text{A1.6})$$

$$I_{mn}^{\sigma \nu, 12} = -(-1)^\sigma c_m \cdot \delta_{mn} \cdot (1 - \delta_{\sigma \nu}) \quad (\text{A1.7})$$

$$I_{mn}^{\sigma \nu, 21} = -(-1)^\nu \bar{c}_m \cdot \delta_{mn} \cdot (1 - \delta_{\sigma \nu}) \quad (\text{A1.8})$$

où :

$$a_m^1 = 2\pi a k^2 \left[ \left| H_m'(ka) \right|^2 + \frac{m^2}{(ka)^2} \left| H_m(ka) \right|^2 \right]$$

$$a_m^2 = 2\pi a K^2 \left[ \left| H_m'(Ka) \right|^2 + \frac{m^2}{(Ka)^2} \left| H_m(Ka) \right|^2 \right]$$

$$c_m = 2\pi a k K \left[ \frac{m}{Ka} H_m'(ka) \bar{H}_m(Ka) + \frac{m}{ka} H_m(ka) \bar{H}_m'(Ka) \right]$$

avec  $H_m(\cdot)$  désignant la fonction de Hankel d'ordre  $m$  et de type 1, et  $H_m'(\cdot)$  sa dérivée.

De même nous avons :

$$J_{mn}^{\sigma\nu,11} = \alpha_m^1 \cdot \delta_{mn} \cdot \delta_{\sigma\nu} \quad (\text{A1.9})$$

$$J_{mn}^{\sigma\nu,22} = \alpha_m^2 \cdot \delta_{mn} \cdot \delta_{\sigma\nu} \quad (\text{A1.10})$$

$$J_{mn}^{\sigma\nu,12} = -(-1)^\sigma \beta_m \cdot \delta_{mn} \cdot (1 - \delta_{\sigma\nu}) \quad (\text{A1.11})$$

$$J_{mn}^{\sigma\nu,21} = -(-1)^\nu \bar{\beta}_m \cdot \delta_{mn} \cdot (1 - \delta_{\sigma\nu}) \quad (\text{A1.12})$$

où :

$$\alpha_m^1 = 2\pi a \left[ \left| k^2 \left( 2\mu H_m''(ka) - \lambda H_m(ka) \right) \right|^2 + \left| \frac{2\mu m}{a} \left( k H_m'(ka) - \frac{H_m(ka)}{a} \right) \right|^2 \right]$$

$$\alpha_m^2 = 2\pi a \left[ \left| \mu K^2 \left( 2H_m''(Ka) + H_m(Ka) \right) \right|^2 + \left| \frac{2\mu m}{a} \left( K H_m'(Ka) - \frac{H_m(Ka)}{a} \right) \right|^2 \right]$$

$$\beta_m = 4\pi a \mu m \left[ \begin{array}{l} k^2 \left( 2\mu H_m''(ka) - \lambda H_m(ka) \right) \left( K \bar{H}_m'(Ka) - \frac{\bar{H}_m(Ka)}{a} \right) \\ + \mu K^2 \left( 2\bar{H}_m''(Ka) + \bar{H}_m(Ka) \right) \left( k H_m'(ka) - \frac{H_m(ka)}{a} \right) \end{array} \right]$$

Pour les produits scalaires impliquant les parties régulières, on obtient :

$$\hat{J}_{mn}^{\sigma\nu,11} = \hat{\alpha}_m^1 \cdot \delta_{mn} \cdot \delta_{\sigma\nu} \quad (\text{A1.13})$$

$$\hat{J}_{mn}^{\sigma\nu,22} = \hat{\alpha}_m^2 \cdot \delta_{mn} \cdot \delta_{\sigma\nu} \quad (\text{A1.14})$$

$$\hat{J}_{mn}^{\sigma\nu,12} = -(-1)^\sigma \hat{c}_m \cdot \delta_{mn} \cdot (1 - \delta_{\sigma\nu}) \quad (\text{A1.15})$$

$$\hat{J}_{mn}^{\sigma\nu,21} = -(-1)^\nu \hat{d}_m \cdot \delta_{mn} \cdot (1 - \delta_{\sigma\nu}) \quad (\text{A1.16})$$

où :

$$\hat{\alpha}_m^1 = 2\pi a k^2 \left[ J_m'(ka) \bar{H}_m'(ka) + \frac{m^2}{(ka)^2} J_m(ka) \bar{H}_m(ka) \right]$$

$$\hat{\alpha}_m^2 = 2\pi a K^2 \left[ J_m'(Ka) \bar{H}_m'(Ka) + \frac{m^2}{(Ka)^2} J_m(Ka) \bar{H}_m(Ka) \right]$$

$$\hat{c}_m = 2\pi a k K \left[ \frac{m}{K a} J'_m(k a) \bar{H}_m(K a) + \frac{m}{k a} J_m(k a) \bar{H}'_m(K a) \right]$$

$$\hat{d}_m = 2\pi a k K \left[ \frac{m}{k a} J'_m(K a) \bar{H}_m(k a) + \frac{m}{K a} J_m(K a) \bar{H}'_m(k a) \right]$$

et

$$\hat{J}_{mn}^{\sigma\nu,11} = \hat{\alpha}_m^1 \cdot \delta_{mn} \cdot \delta_{\sigma\nu} \quad (\text{A1.17})$$

$$\hat{J}_{mn}^{\sigma\nu,22} = \hat{\alpha}_m^2 \cdot \delta_{mn} \cdot \delta_{\sigma\nu} \quad (\text{A1.18})$$

$$\hat{J}_{mn}^{\sigma\nu,12} = -(-1)^\sigma \hat{\beta}_m \cdot \delta_{mn} \cdot (1 - \delta_{\sigma\nu}) \quad (\text{A1.19})$$

$$\hat{J}_{mn}^{\sigma\nu,21} = -(-1)^\nu \hat{\gamma}_m \cdot \delta_{mn} \cdot (1 - \delta_{\sigma\nu}) \quad (\text{A1.20})$$

où :

$$\hat{\alpha}_m^1 = 2\pi a \left[ \begin{aligned} & k^4 \left( 2\mu J_m''(k a) - \lambda J_m(k a) \right) \left( 2\mu \bar{H}_m''(k a) - \lambda \bar{H}_m(k a) \right) \\ & + \left( \frac{2\mu m}{a} \right)^2 \left( k J'_m(k a) - \frac{J_m(k a)}{a} \right) \left( k \bar{H}'_m(k a) - \frac{\bar{H}_m(k a)}{a} \right) \end{aligned} \right]$$

$$\hat{\alpha}_m^2 = 2\pi a \left[ \begin{aligned} & (\mu K^2)^2 \left( 2J_m''(K a) + J_m(K a) \right) \left( 2\bar{H}_m''(K a) + \bar{H}_m(K a) \right) \\ & + \left( \frac{2\mu m}{a} \right)^2 \left( K J'_m(K a) - \frac{J_m(K a)}{a} \right) \left( K \bar{H}'_m(K a) - \frac{\bar{H}_m(K a)}{a} \right) \end{aligned} \right]$$

$$\hat{\beta}_m = 4\pi a \mu m \left[ \begin{aligned} & k^2 \left( 2\mu J_m''(k a) - \lambda J_m(k a) \right) \left( K \bar{H}'_m(K a) - \frac{\bar{H}_m(K a)}{a} \right) \\ & + \mu K^2 \left( k J'_m(k a) - \frac{J_m(k a)}{a} \right) \left( 2\bar{H}_m''(K a) + \bar{H}_m(K a) \right) \end{aligned} \right]$$

$$\hat{\gamma}_m = 4\pi a \mu m \left[ \begin{aligned} & k^2 \left( K J'_m(K a) - \frac{J_m(K a)}{a} \right) \left( 2\mu \bar{H}_m''(k a) - \lambda \bar{H}_m(k a) \right) \\ & + \mu K^2 \left( 2J_m''(K a) + J_m(K a) \right) \left( k \bar{H}'_m(k a) - \frac{\bar{H}_m(k a)}{a} \right) \end{aligned} \right]$$



## ANNEXE 2

Dans cette annexe, nous allons établir l'égalité entre les deux expressions des multipôles croisés  $b_m$ . Pour ce faire et pour simplifier un peu les expressions, introduisons les notations suivantes :

$$x' = H'_m(k a) \quad , \quad x = \frac{m}{k a} H_m(k a)$$

$$y' = H'_m(K a) \quad , \quad y = \frac{m}{K a} H_m(K a)$$

$$X_1 = k^2 \left( 2\mu H''_m(k a) - \lambda H_m(k a) \right) \quad , \quad X_2 = \frac{2\mu m}{a} \left( k H'_m(k a) - \frac{H_m(k a)}{a} \right)$$

$$Y_1 = \mu K^2 \left( 2H''_m(K a) + H_m(K a) \right) \quad , \quad Y_2 = \frac{2\mu m}{a} \left( K H'_m(K a) - \frac{H_m(K a)}{a} \right)$$

Avec ces notations, les expressions des coefficients  $a_m^1, a_m^2, c_m, \hat{a}_m^1, \hat{a}_m^2, \hat{c}_m, \hat{d}_m, \alpha_m^1, \alpha_m^2, \beta_m, \hat{\alpha}_m^1, \hat{\alpha}_m^2, \hat{\beta}_m$  et  $\hat{\gamma}_m$  (définis dans l'annexe 1) s'écrivent :

$$a_m^1 = 2\pi a k^2 \left[ |x'|^2 + |x|^2 \right] \quad , \quad a_m^2 = 2\pi a K^2 \left[ |y'|^2 + |y|^2 \right]$$

$$c_m = 2\pi a k K \left[ x' \bar{y} + x \bar{y}' \right]$$

$$\hat{a}_m^1 = 2\pi a k^2 \left[ \hat{x}' \bar{x}' + \hat{x} \bar{x} \right] \quad , \quad \hat{a}_m^2 = 2\pi a K^2 \left[ \hat{y}' \bar{y}' + \hat{y} \bar{y} \right]$$

$$\hat{c}_m = 2\pi a k K \left[ \hat{x}' \bar{y}' + \hat{x} \bar{y} \right] \quad , \quad \hat{d}_m = 2\pi a k K \left[ \bar{x}' \hat{y}' + \bar{x} \hat{y} \right]$$

et

$$\alpha_m^1 = 2\pi a \left[ |X_1|^2 + |X_2|^2 \right] \quad , \quad \alpha_m^2 = 2\pi a \left[ |Y_1|^2 + |Y_2|^2 \right]$$

$$\beta_m = 2\pi a \left[ X_1 \bar{Y}_2 + X_2 \bar{Y}_1 \right]$$

$$\hat{\alpha}_m^1 = 2\pi a \left[ \hat{X}_1 \bar{\hat{X}}_1 + \hat{X}_2 \bar{\hat{X}}_2 \right] \quad , \quad \hat{\alpha}_m^2 = 2\pi a \left[ \hat{Y}_1 \bar{\hat{Y}}_1 + \hat{Y}_2 \bar{\hat{Y}}_2 \right]$$

$$\hat{\beta}_m = 2\pi a \left[ \hat{X}_1 \bar{Y}_2 + \hat{X}_2 \bar{Y}_1 \right] \quad , \quad \hat{\gamma}_m = 2\pi a \left[ \bar{X}_1 \hat{Y}_2 + \bar{X}_2 \hat{Y}_1 \right]$$

où les expressions de  $\hat{x}, \hat{x}', \hat{y}, \hat{y}', \hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{Y}_1$  et  $\hat{Y}_2$  sont les mêmes que pour les  $x, x', y, y', X_1, X_2, Y_1$  et  $Y_2$  mais avec la fonction de Hankel  $H_m$  remplacé par la fonction de Bessel  $J_m$ .

Substituons les expressions ci-dessus dans les relations concernées, on aura alors, tout calcul fait :

$$a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1 = -(2\pi a)^2 k^3 K \left( \overline{x' y' - x y} \right) (x \hat{x}' - x' \hat{x}) \quad (\text{A2.1})$$

$$a_m^2 \hat{d}_m - \bar{c}_m \hat{a}_m^2 = -(2\pi a)^2 k K^3 \left( \overline{x' y' - x y} \right) (y \hat{y}' - y' \hat{y}) \quad (\text{A2.2})$$

en utilisant le Wronskien des fonctions de Hankel et de Bessel [1], on obtient :

$$(x \hat{x}' - x' \hat{x}) = -\frac{i m \pi}{(k a)^2} \quad (\text{A2.3})$$

$$(y \hat{y}' - y' \hat{y}) = -\frac{i m \pi}{(K a)^2} \quad (\text{A2.4})$$

en remplaçant les expressions (A2.3) et (A2.4) dans (A2.1) et (A2.2), on obtient :

$$a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1 = 4 i m \pi^3 k K \left( \overline{x' y' - x y} \right) \quad (\text{A2.5})$$

$$a_m^2 \hat{d}_m - \bar{c}_m \hat{a}_m^2 = 4 i m \pi^3 k K \left( \overline{x' y' - x y} \right) \quad (\text{A2.6})$$

donc on a :

$$a_m^1 \hat{c}_m - c_m \hat{a}_m^1 = a_m^2 \hat{d}_m - \bar{c}_m \hat{a}_m^2$$

D'ou l'égalité entre les deux expressions obtenues pour les coefficients des multipôles croisés  $b_m$ .

---

## REFERENCES

- [1] M. ABRAMOWITZ & I. A. STEGUN, Handbook of mathematical functions, Editions Dover, New York (1964).
- [2] E. ARGYROPOULOS, D. GINTIDES & K. KIRIAKI, On the condition number of integral equation in linear elasticity using the modified Green's function, Australian Mathematical Society (2002), 1-16.
- [3] E. ARGYROPOULOS & K. KIRIAKI, A criterion of optimization of a modified Green's function in linear elasticity, International Journal of Engineering Science, vol. 37 (1999), 1441-1460.
- [4] E. ARGYROPOULOS, K. KIRIAKI & G. F. ROACH, A modified Green's function technique for the exterior Dirichlet problem in linear elasticity, Journal of Mech. appl. Math., vol. 52 (1998), 275-295.
- [5] E. ARGYROPOULOS, K. KIRIAKI & G. F. ROACH, The modified Green function technique for the exterior Dirichlet problem in linear thermoelasticity, Mathematical Methods in the Applied Sciences, vol. 41 (2018), 2811-2826.
- [6] L. BENCHEIKH, Modified fundamental solutions for the scattering of elastic waves by a cavity: Numerical results, International journal for numerical methods in engineering, vol. 36 (1993), 3283-3302.
- [7] L. BENCHEIKH, Modified fundamental solutions for the scattering of elastic waves by a cavity, [Q. J] Mech. appl. math., vol. 43 (1990), Pt. 1.
- [8] L. BENCHEIKH, Scattering of elastic waves by cylindrical cavities: integral-equation methods and low-frequency asymptotic expansions, Thèse de Ph.D, Département de mathématiques, Université de Manchester, Grande Bretagne (1986).

- [9] R. CHAPKO & D. GINTIDES, L. MINDRINOS, The inverse scattering problem by an elastic inclusion. *Advances in Computational Mathematics*, vol. 44 (2018), 453 - 476.
- [10] L. COLLATZ, *Funktional analysis und numerische Mathematil*, Springer, Berlin (1964).
- [11] Y. DJENAIHI & B. SAHLI, A new criterion of optimization of the cross multipole coefficients in a modified surface stress operator for the elastic two-dimensional case, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, IJPAM*, vol. 42 (2019).
- [12] D. GINTIDES & L. MINDRINOS, The direct scattering problem of obliquely incident electromagnetic waves by a penetrable homogeneous cylinder. *Journal of integral equations appl.*, vol. 28 (2016), 91 - 122.
- [13] D. GINTIDES & L. MINDRINOS, The inverse electromagnetic scattering problem by a penetrable cylinder at oblique incidence. *Applicable Analysis*, vol. 98 (2019), 781 - 798.
- [14] D. GINTIDES & N. PALLIKARAKIS, The inverse transmission eigenvalue problem for a discontinuous refractive index. *Inverse Problems*, vol. 33 (2017).
- [15] D. GINTIDES & K. KIRIAKI, Solvability of the integrodifferential equation of Eshelby's equivalent inclusion method. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 68 (2015), 85 - 96.
- [16] D. S. JONES, Integral equations for the exterior acoustic problem, [Q. J] *Mech. appl. math.*, vol. 27 (1974), 129-142.
- [17] R. E. KLEINMAN & G. F. ROACH, Operators of minimal norm via modified Green's functions, *Proc. R. Soc. Edinburgh*, vol. 94 A (1983), 163-178.

- [18] R. E. KLEINMAN & R. KRESS, On the condition number of integral equations in acoustics using modified fundamental solutions, *IMA Journal of applied mathematics*, vol. 31 (1983), 79-90.
- [19] M. KRASNOV, A. KISSELEV & G. MAKARENKO, *Equations intégrales*, Editions Mir, Moscou (1977).
- [20] V. D. KUPRADZE, *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*, Editions North-Holland, Amsterdam (1979).
- [21] B. SAHLI, Operators of minimal norm via modified Green's function for the elastic two-dimensional case using the simple multipole coefficients, *Applied Mathematics & Information Sciences, AMIS*, vol. 11, n° 1 (2017), 317-323.
- [22] B. SAHLI, A new criterion of optimization of the simple multipole coefficients in a modified Green's function for the elastic two-dimensional case, *Applied Mathematics Letters (Elsevier)*, vol. 25 (2012), 77 - 80.
- [23] B. SAHLI, Operators of minimal norm via modified Green's function in two-dimensional elastic waves, *Internat. J. Open Prob. Compt. & Math., IJOPCM*, vol. 3, n° 3 (2010), 278 - 294.
- [24] B. SAHLI & L. BENCHEIKH, A criterion of optimization of a modified fundamental solution for two dimensional elastic waves, *Internat. J. Open Prob. Compt. & Math., IJOPCM*, vol. 2, n° 1 (2009), 113 - 137.
- [25] B. SAHLI & L. BENCHEIKH, Optimal choice of multipole coefficients of the modified Green's function in elasticity (case of circular boundaries), *Internat. J. Open Prob. Compt. & Math., IJOPCM*, vol. 1, n° 2 (2008), 160 - 178.

- [26] B. SAHLI, Optimisation des coefficients des multipôles de la fonction de Green modifiée par minimisation de la norme du noyau de l'opérateur intégral en élasticité. Thèse de Doctorat en Sciences, Département de mathématiques, Université de Sétif, Algérie (2010).
- [27] B. SAHLI, Optimisation des coefficients des multipôles de la fonction de Green modifiée, par minimisation de la norme de l'opérateur intégral en élasticité, Thèse de magister, département de mathématiques, Université de Batna, Algérie (1999).
- [28] V. SMIRNOV, Cours de mathématiques supérieures, Tome 2, Editions Mir, Moscou (1969).
- [29] T. H. TAN, Diffraction of time-harmonic elastic waves by a cylindrical obstacle, Appl. Sci. Res., vol. 32 (1976), 97-144.
- [30] F. URSELL, On the exterior problem of acoustics II, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 84 (1978), 545-548.

## ملخص :

يندرج العمل المقدم ضمن هذه الأطروحة في سياق تقنيات تعديل تابع قرين. يهتم هذا العمل بتحديد الاختيار الأمثل للمعاملات متعددة الأقطاب التي تستعمل في تعديل تابع قرين، من خلال إيجاد القيمة الصغرى لعدد الملائمة للمؤثر التكاملي المرافق. حيث تم الحصول على نتائج مهمة في حالة الحواف الدائرية و شبه الدائرية.

**الكلمات المفتاحية :** معاملات متعددة الأقطاب ، تابع قرين المعدل ، معادلات تكاملية ، مرونة خطية ، عدد الملائمة.

## Résumé :

Le travail présenté dans cette thèse s'inscrit dans le cadre des techniques de modification de la fonction de Green, il porte sur la détermination du choix optimal des coefficients des multi-pôles en minimisant le nombre de conditionnement de l'opérateur intégral associé. Des résultats intéressants sont obtenus dans le cas des frontières circulaires.

**Mots clés.** Coefficients des multi-pôles, fonction de Green modifiée, équations intégrales, élasticité linéaire, nombre de conditionnement.

## Abstract :

The work presented in this thesis is a part of the modified Green's function techniques, he interests by the determination of the optimal choice of the multipôles coefficients by minimizing the condition number of the modified integral operator. Interesting results are obtained in the case of circular boundaries.

**Key words.** multipole coefficients, modified Green's function, integral equations, linear elasticity, condition number.