

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE Ferhat ABBAS SETIF 1

THESE

Présentée à la faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Mathématiques Appliquées

Par

Mr. KHALOUTA Ali

THEME

*Résolution des équations aux dérivées partielles linéaires et non-linéaires moyennant des approches analytiques.
Extension aux cas d'EDP d'ordre fractionnaire.*

Soutenue le : 14/12/2019

Devant le jury :

SELMANI Mohamed	Professeur	Université Ferhat Abbas Sétif 1	Président
KADEM Abdelouahab	Professeur	Université Ferhat Abbas Sétif 1	Rapporteur
GUEDJIBA Said	Professeur	Université Batna 2	Examineur
ELLAGGOUNE Fateh	Professeur	Université 8 Mai 1945 Guelma	Examineur

Je dédie ce travail :
A mes parents, mon frère et mes sœurs.
A ma très chère femme, pour la patience et le soutien dont elle a fait
preuve pendant toute la durée de cette thèse.
A mes enfants Zaid Abdelillah, Amani Yakine et Ziad Abdelouahed.
Enfin, je dédie ce travail à toutes la famille Zidane.

REMERCIEMENTS

TOUT d'abord, je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donnée la patience, la volonté et l'énergie pour achever ce travail.

Je tiens à présenter toute ma gratitude et mes remerciements à mon directeur de thèse le professeur KADEM Abdelouahab pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacré à diriger cette recherche. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité et son respect sans faille des rendez-vous et des délais de relecture des documents que je lui ai adressé. J'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail de recherche.

Je remercie également le professeur SELMANI Mohamed, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Mes vifs remerciements vont également à monsieur GUEDJIBA Said, professeur à l'université Mustapha Ben Boulaid Batna 2 et monsieur EL-LAGGOUNE Fateh, professeur à l'université 8 Mai 1945 Guelma pour l'honneur qu'ils m'ont rendu en acceptant de faire partie de jury.

Enfin, mes remerciements vont aussi à toutes les personnes du département de mathématiques de l'université Ferhat Abbas Sétif 1.

Sétif, le 15 décembre 2019.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	v
LISTE DES NOTATIONS	viii
LISTE DES ABRÉVIATIONS	ix
LISTE DES FIGURES	x
LISTE DES TABLEAUX	xii
INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
1 NOTIONS DE BASE DU CALCUL FRACTIONNAIRE	4
1.1 APPLICATIONS DES SYSTÈMES FRACTIONNAIRES	5
1.1.1 Automatique	5
1.1.2 Physique	5
1.1.3 Mécanique des milieux continus	5
1.1.4 Acoustique	6
1.2 ESPACES FONCTIONNELS	6
1.2.1 Espaces des fonctions intégrables	6
1.2.2 Espaces des fonctions continues et absolument continues	7
1.2.3 Espaces des fonctions continues avec poids	7
1.2.4 Théorème du point fixe	8
1.3 FONCTIONS SPÉCIFIQUES POUR LA DÉRIVATION FRACTIONNAIRE	8
1.3.1 La fonction Gamma	8
1.3.2 La fonction Bêta	9
1.3.3 La fonction de Mittag-Leffler	9
1.4 INTÉGRALES ET DÉRIVÉES FRACTIONNAIRES	10
1.4.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . .	10
1.4.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . .	13
1.4.3 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	16
1.4.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	18
1.4.5 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Caputo	21
1.4.6 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo	22
2 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON-LINÉAIRES D'ORDRE FRACTIONNAIRE	24
2.1 RÉSULTAT D'ÉQUIVALENCE ENTRE LE PROBLÈME DE CAUCHY ET L'ÉQUATION INTÉGRALE DE VOLTERRA	25

2.2	RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ DE LA SOLUTION	26
3	MÉTHODES SEMI-ANALYTIQUES ET LEURS CONVERGENCES	30
3.1	MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION D'ADOMIAN (ADM)	31
3.1.1	Description de la méthode	31
3.1.2	Les polynômes d'Adomian	32
3.1.3	Convergence de la méthode ADM	33
3.2	MÉTHODE DE PERTURBATION D'HOMOTOPIE (HPM)	35
3.2.1	Description de la méthode	36
3.2.2	Analyse de convergence	37
3.3	MÉTHODE D'ITÉRATION VARIATIONNELLE (VIM)	42
3.3.1	Description de la méthode	43
3.3.2	Approche alternative du VIM	43
3.3.3	Analyse de convergence	45
3.4	NOUVELLE MÉTHODE ITÉRATIVE (NIM)	48
3.4.1	Description de la méthode	49
3.4.2	Convergence de NIM	50
4	LES MÉTHODES FNDM, NHPM, NVIM ET NINTM POUR RÉSOLVRE LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON- LINÉAIRES D'ORDRE FRACTIONNAIRE	53
4.1	TRANSFORMATION NATURELLE	55
4.1.1	Définitions et propriétés	55
4.2	MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION NATURELLE FRACTIONNAIRE (FNDM)	57
4.2.1	Applications de la méthode FNDM	59
4.3	MÉTHODE DE PERTURBATION D'HOMOTOPIE NATURELLE (NHPM)	66
4.3.1	Applications de la méthode NHPM	67
4.4	MÉTHODE D'ITÉRATION VARIATIONNELLE NATURELLE (NVIM)	72
4.4.1	Applications de la méthode NVIM	72
4.5	NOUVELLE MÉTHODE DE TRANSFORMATION NATURELLE ITÉ- RATIVE (NINTM)	79
4.5.1	Applications de la méthode NINTM	80
5	LES MÉTHODES FRDTM, FRPSM ET GTFSM POUR LA RÉSO- LUTION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON LI- NÉAIRES D'ORDRE FRACTIONNAIRE	85
5.1	MÉTHODE DE TRANSFORMATION DIFFÉRENTIELLE RÉDUITE FRACTIONNAIRE (FRDTM)	86
5.2	FRDTM POUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON-LINÉAIRES D'ORDRE FRACTIONNAIRE TEMPO- RELLE	88
5.2.1	Applications de la méthode FRDTM	88
5.3	MÉTHODE DE LA SÉRIE DE PUISSANCE RÉSIDUELLE FRACTION- NAIRE (FRPSM)	93
5.4	FRPSM POUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON-LINÉAIRES D'ORDRE FRACTIONNAIRE TEMPO- RELLE	95
5.4.1	Applications de la méthode FRPSM	97

5.5	NOUVELLE MÉTHODE ANALYTIQUE POUR LA RÉOLUTION DES PROBLÈMES DE CONVECTION DE DIFFUSION DE RÉACTION NON- LINÉAIRE D'ORDRE FRACTIONNAIRE	104
5.5.1	Exemples illustratifs	106
6	ANNEXE	110
	CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES	111
	BIBLIOGRAPHIE	112

LISTE DES NOTATIONS

\mathbb{N} :	ensemble des nombres entiers naturels.
\mathbb{R} :	ensemble des nombres réels.
\mathbb{C} :	ensemble des nombres complexes.
Ω :	domaine borné dans \mathbb{R} .
$L^p(\Omega)$:	espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [0, +\infty[$ intégrables sur Ω .
$L^\infty(\Omega)$:	espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur Ω .
$C(\Omega)$:	espace des fonctions continues sur Ω .
$C^n(\Omega)$:	espace des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables n fois et $f^{(n)}$ continues.
$AC(\Omega)$:	espace des fonctions absolument continues sur Ω .
$AC^n(\Omega)$:	espace des fonctions f dérivables à l'ordre $n - 1$ et elle que $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$.
$C_\mu(\Omega)$:	espaces des fonctions continues avec poids.
$\Gamma(\cdot)$:	la fonction Gamma.
$B(\cdot, \cdot)$:	la fonction Bêta.
$E_\alpha(\cdot)$:	la fonction de Mittag-Leffler.
$I^\alpha f$:	intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
$D^\alpha f$:	dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
${}^c D^\alpha f$:	dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.

LISTE DES ABRÉVIATIONS

EDPs	Equations aux dérivées partielles
KDVE	Korteweg-De Vries equation
ADM	Adomian decomposition method
HPM	Homotopy perturbation method
VIM	Variational iteration method
NIM	New iterative method
FNDM	Fractional natural decomposition method
NHPM	Natural homotopy perturbation method
NVIM	Natural variational iteration method
NINTM	New iterative natural transform method
FRDTM	Fractional reduced differential transform method
FRPSM	Fractional residual power series method
GTFSM	Generalized Taylor fractional series method

LISTE DES FIGURES

4.1	Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode FNDM de l'équation (4.16).	60
4.2	Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode FNDM de l'équation (4.16) avec $x = 1$	61
4.3	Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode FNDM de l'équation (4.21).	63
4.4	Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode FNDM de l'équation (4.21) avec $x = 1$	63
4.5	Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec deux termes par la méthode FNDM de l'équation (4.25).	65
4.6	Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives avec deux termes par la méthode FNDM de l'équation (4.25) avec $x = 1$	65
4.7	Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec cinq termes par la méthode NHPM de l'équation (4.32).	68
4.8	Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives avec cinq termes par la méthode NHPM de l'équation (4.32) avec $x = 1$	69
4.9	Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec trois termes par la méthode NHPM de l'équation (4.39).	71
4.10	Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives avec trois termes par la méthode NHPM de l'équation (4.39) avec $x = 1$	71
4.11	Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre trois par la méthode NVIM de l'équation (4.49).	74
4.12	Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre trois par la méthode NVIM de l'équation (4.49) avec $x = 1$	74
4.13	Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre un par la méthode NVIM de l'équation (4.55).	76

4.14	Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre un par la méthode NVIM de l'équation (4.55) avec $x = 1$	76
4.15	Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre un par la méthode NVIM de l'équation (4.60).	78
4.16	Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre un par la méthode NVIM de l'équation (4.60) avec $x = 1$	78
4.17	Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode NINTM de l'équation (4.67).	81
4.18	Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode NINTM de l'équation (4.67) avec $x = 1$	82
4.19	Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode NINTM de l'équation (4.71).	84
4.20	Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode NINTM de l'équation (4.71) avec $x = 1$	84
5.1	Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode FRDTM de l'équation (5.8) avec $a = 4$ et $b = 1$. . .	90
5.2	Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode FRDTM de l'équation (5.8) avec $a = 4$, $b = 1$ et $x = 1$	90
5.3	Les graphes représentant la surface de la solution approximative avec cinq termes de l'équation (5.13) par la méthode FRDTM.	92
5.4	Le comportement de la solution approximative avec cinq termes de l'équation (5.13) par la méthode FRDTM pour $x = 1$	92
5.5	Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre trois par la méthode FRPSM de l'équation (5.36).	99
5.6	Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre trois par la méthode FRPSM de l'équation (5.36) avec $x = 1$	99
5.7	Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre cinq par la méthode FRPSM de l'équation (5.39).	103
5.8	Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre cinq par la méthode FRPSM de l'équation (5.39) avec $x = 1$	103
5.9	Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre quatre par la méthode GTFSM de l'équation (5.47).	107

5.10	Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre quatre par la méthode GTFSM de l'équation (5.47) avec $x = 1$	107
5.11	Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre quatre par la méthode GTFSM de l'équation (5.48).	109
5.12	Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre quatre par la méthode GTFSM de l'équation (5.48) avec $x = 1$	109

LISTE DES TABLEAUX

4.1	Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode FNDM pour différentes valeurs d'ordre α de l'équation (4.16) avec $x = 1$	61
4.2	Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode FNDM pour différentes valeurs d'ordre α de l'équation (4.21) avec $x = 1$	62
4.3	Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec deux termes par la méthode FNDM pour différentes valeurs d'ordre α de l'équation (4.25) avec $x = 1$	65
4.4	Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec cinq termes par la méthode NHPM pour différentes valeurs d'ordre α de l'équation (4.32) avec $x = 1$	69
4.5	Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec trois termes par la méthode NHPM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation (4.39) avec $x = 1$	71
4.6	Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives d'ordre trois par la méthode NVIM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation (4.49) avec $x = 1$	74
4.7	Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives d'ordre un par la méthode NVIM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation (4.55) avec $x = 1$	76

4.8	Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives d'ordre un par la méthode NVIM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation (4.60) avec $x = 1$	79
4.9	Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode NINTM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation (4.67) avec $x = 1$	82
4.10	Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode NINTM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation (4.71) avec $x = 1$	83
5.1	Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode FRDTM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation (5.8) avec $a = 4, b = 1$ et $x = 1$	91
5.2	Les valeurs numériques de la solution approximative avec cinq termes de l'équation (5.13) par la méthode FRDTM pour des valeurs différentes d'ordre α et $x = 1$	93
5.3	Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives d'ordre trois par la méthode FRPSM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation (5.36) avec $x = 1$	100
5.4	Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives d'ordre cinq par la méthode FRPSM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation (5.39) avec $x = 1$	103
5.5	Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives d'ordre quatre par la méthode GTFSM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation (5.47) avec $x = 1$	107
5.6	Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives d'ordre quatre par la méthode GTFSM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation (5.48) avec $x = 1$	108

INTRODUCTION GÉNÉRALE

EN mathématiques, le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse, qui étudie la généralisation de la dérivation et d'intégration d'ordre entier n (ordinaire) à l'ordre non entier (fractionnaire). La théorie de la dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du 17^{ème} siècle, l'époque où Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a introduit le symbole $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour désigner la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'une fonction f quand il a annoncé dans une lettre à Guillaume l'Hôpital datée du 30 septembre 1695, avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$, l'Hôpital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dx^n}$ si $n = \frac{1}{2}$? Leibniz lui a répondu : "Cela conduirait à un paradoxe à partir duquel un jour, on pourra tirer des conséquences utiles" [Oldham et Spanier, 1974]. Cette lettre de l'Hôpital, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel), a en fait donné lieu au nom de ce domaine des mathématiques.

Les systèmes décrits par des modèles d'ordre fractionnaire, utilisant des équations différentielles fractionnaires basées sur la dérivée non entière ont suscité l'intérêt de la communauté scientifique. Les ingénieurs ont seulement compris l'importance des équations différentielles d'ordre non entier, que durant les trois dernières décennies, surtout lorsqu'ils ont observé que la description de quelques systèmes est plus exacte, que lorsque la dérivée fractionnaire est utilisée. Le mérite de la première conférence est attribué à B. Ross qui a organisé cette conférence à l'université de New Haven en juin 1974 sous le titre "Le calcul fractionnaire et ses applications". Pour la première étude, un autre mérite est attribué à K. B. Oldham et J. Spanier [Oldham et Spanier, 1974] qui ont publié un livre en 1974 après une collaboration commune, commencé en 1968 et consacré à la présentation des méthodes et applications du calcul fractionnaire en la physique et en ingénierie. Depuis, le calcul fractionnaire a gagné une popularité et une considération importante dû principalement aux nombreuses applications dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie où il a été remarqué que le comportement d'un grand nombre de systèmes physiques peut être décrit en utilisant la dérivée d'ordre fractionnaire qui fournit un excellent instrument pour la description de plusieurs propriétés de matériaux et processus [Bagley et Torvik, 1983],[Bagley et Torvik, 1986],[Das, 2008],[Magin, 2006],[Mainardi, 1997],[Oustaloup, 1995].

Au cours des dernières années, les équations aux dérivées partielles

non-linéaires d'ordre fractionnaire ont attiré l'attention beaucoup de chercheurs en raison d'un large éventail d'applications dans de nombreux domaines de la physique, de la mécanique des fluides, de l'électrochimie, de la viscoélasticité, de la théorie du contrôle non-linéaire, des systèmes biologiques non-linéaires, de l'hydrodynamique et d'autres domaines des sciences et de l'ingénierie [El-Nabulsi, 2011],[Jafari et al., 2012],[Jafari et al., 2014], [Kadem et Baleanu, 2010],[Kadem et Baleanu, 2011a],[Kadem et Baleanu, 2011b],[Katsikadelis, 2012],[Khalouta et Kadem, 2019f], [Odibat et Momani, 2009], [Oldham, 2010],[Singh et al., 2014],[Wang et Zhou, 2011],[Zheng, 2012]. Dans tous ces domaines scientifiques, il est important de trouver des solutions exactes ou approximatives à ces problèmes. Il existe donc un intérêt marqué pour le développement de méthodes de résolution de problèmes liés aux équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaire. Les solutions exactes de ces problèmes sont parfois trop compliquées à atteindre par les techniques classiques en raison de la complexité des parties non-linéaires les impliquant.

L'objectif principal de cette thèse est de présenter de nouvelles méthodes analytiques et numériques pour la résolution d'équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaire temporelle, où la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Cette thèse est scindée en cinq chapitres comme suit :

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques exemples d'applications de la théorie du calcul fractionnaire dans certains domaines scientifiques, puis nous rappelons les notions de base liées à la théorie de calcul fractionnaire dont on aura besoin dans la suite de ce travail telle que la fonction gamma et la fonction de Mittag-Leffler qui joue un rôle important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires ainsi que le théorème de point fixe. Deux approches (Riemann-Liouville et Caputo) à la généralisation des notions de dérivation seront ensuite considérés.

Dans le second chapitre, on abordera la question d'existence et d'unicité de la solution pour un problème de Cauchy d'une équation différentielle non-linéaire avec dérivée fractionnaire au sens de Caputo suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha u(t) = f(t, u(t)), t \in \Omega = [0, T], n-1 < \alpha \leq n, \\ u^{(k)}(0) = b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, n = [\alpha] + 1. \end{cases} \quad (0.1)$$

L'existence et l'unicité d'une solution continue est établit par la transformation de ce problème à une équation intégrale équivalente, dont la solution est identifiée à un point fixe d'un opérateur contractant (sous certaines hypothèses suffisantes sur la fonction f) dans un espace fonctionnel convenablement choisi. On termine ce chapitre avec deux exemples illustratifs.

Le troisième chapitre, nous décrivons quelques méthodes semi-analytiques : la méthode de décomposition d'Adomian (ADM), la méthode de perturbation d'homotopie (HPM), la méthode d'itération variationnelle (VIM), la nouvelle méthode itérative (NIM), puis nous étudions la convergence de chacune de ces méthodes. Ces méthodes sont appliquées à des équations différentielles non-linéaires classiques (d'ordre entier).

Dans le quatrième chapitre, nous étudions les méthodes combinées d'ADM, HPM, VIM et NIM avec la transformation naturelle et leurs appli-

cations sur les équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaire, ainsi que les méthodes dite : FNDM, NHPM, NVIM et NINTM. Dans ces méthodes, on considère la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α , où $n - 1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}^*$. Des exemples numériques sont présentés pour illustrer l'efficacité et la précision de ces méthodes.

Le cinquième chapitre est consacré à la présentation de deux différents méthodes FRDTM et FRPSM pour la résolution des équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaire, où la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $n\alpha$ et $n - 1 < n\alpha \leq n, n \in \mathbb{N}^*$. Puis nous traitons quelques applications numériques pour montrer l'efficacité et la précision de ces méthodes. En outre, nous présentons une nouvelle méthode analytique appelée, méthode généralisée de la série fractionnaire de Taylor (GTFSM), pour résoudre les problèmes de convection de diffusion de réaction non-linéaire d'ordre fractionnaire temporelle de la forme :

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha u = (a(u)u_x)_x + b(u)u_x + c(u) \\ u(x, 0) = f_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (0.2)$$

où ${}^c D_t^\alpha$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α , où $0 < \alpha \leq 1$ et $u = \{u(x, t), x \in \mathbb{R}, 0 \leq t < 1\}$ est une fonction inconnue et les fonctions arbitraires $a(u), b(u)$ et $c(u)$ désignent respectivement le terme de diffusion, le terme de convection et le terme de réaction.

En annexe, nous présentons nos résultats sous forme de plusieurs articles.

Finalement nous terminons notre travail par une conclusion générale, où la validité et la fiabilité d'une telle recherche est mise en exergue, aussi nous proposons quelques perspectives sur le sujet.

NOTIONS DE BASE DU CALCUL FRACTIONNAIRE



SOMMAIRE

1.1	APPLICATIONS DES SYSTÈMES FRACTIONNAIRES	5
1.1.1	Automatique	5
1.1.2	Physique	5
1.1.3	Mécanique des milieux continus	5
1.1.4	Acoustique	6
1.2	ESPACES FONCTIONNELS	6
1.2.1	Espaces des fonctions intégrables	6
1.2.2	Espaces des fonctions continues et absolument continues	7
1.2.3	Espaces des fonctions continues avec poids	7
1.2.4	Théorème du point fixe	8
1.3	FONCTIONS SPÉCIFIQUES POUR LA DÉRIVATION FRACTIONNAIRE	8
1.3.1	La fonction Gamma	8
1.3.2	La fonction Bêta	9
1.3.3	La fonction de Mittag-Leffler	9
1.4	INTÉGRALES ET DÉRIVÉES FRACTIONNAIRES	10
1.4.1	Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	10
1.4.2	Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	13
1.4.3	Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	16
1.4.4	Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	18
1.4.5	Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Caputo	21
1.4.6	Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo	22

CE chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire telles que les fonctions spécifiques pour l'intégration fractionnaire, la dérivation fractionnaire et d'autres notions dont on aura besoin dans la suite de notre travail. Nous commencerons par présenter quelques exemples d'applications de la théorie du calcul fractionnaire dans certains domaines scientifiques.

1.1 APPLICATIONS DES SYSTÈMES FRACTIONNAIRES

Les systèmes fractionnaires apparaissent de plus en plus dans les différents domaines de la recherche. Toutefois, l'intérêt progressif que l'on porte à ces systèmes est leurs applications en sciences fondamentales et appliquées. On peut noter que pour la majeure partie des domaines présentés ci-dessous, les opérateurs fractionnaires sont utilisés pour prendre en compte des effets de mémoire. Mentionnons les ouvrages [Hilfer, 2000],[Sabatier et al., 2007] qui regroupent diverses applications du calcul fractionnaire.

1.1.1 Automatique

En automatique, peu d'auteurs ont utilisé des lois de commande introduisant des dérivées fractionnaires. Podlubny [Podlubny, 1994] a montré que la meilleure méthode pour assurer un contrôle efficace des systèmes fractionnaires, est l'utilisation de contrôleurs fractionnaires. Il propose une généralisation des contrôleurs traditionnels PID. Le groupe CRONE, fondé par Oustaloup dans les années 70, applique ces méthodes à de nombreux systèmes industriels : spectroscope, suspension de voitures [Oustaloup et al., 1996], robot-cueilleur, charrue électro-hydraulique, batterie pour voitures, etc...

1.1.2 Physique

Une des applications les plus remarquables du calcul fractionnaire en physique était dans le contexte de la mécanique classique. Riewe [Riewe, 1996] a montré que le Lagrangien contenant des dérivées temporelles d'ordres fractionnaires conduit à une équation du mouvement avec des forces non conservatives telles que les frottements. Ce résultat est remarquable du fait que les forces de frottement et les forces non conservatives sont essentielles dans le traitement variationnel macroscopique habituel, et par conséquent, dans les méthodes les plus avancées de la mécanique classique. Riewe a généralisé le calcul des variations habituel au Lagrangien qui dépend des dérivées fractionnaires [Riewe, 1997] afin de traiter avec les forces non conservatives habituelles. D'autre part, plusieurs approches ont été développées pour généraliser le principe de moindre action et l'équation d'Euler-Lagrange au cas des dérivées fractionnaires [Agrawal, 2002],[Almeida et al., 2012].

1.1.3 Mécanique des milieux continus

La déformation des milieux continus (solides ou liquides) est souvent décrite à l'aide de deux tenseurs, celui des déformations noté ε_{ij} et celui des contraintes σ_{ij} . Certains matériaux, comme les polymères (gommes, caoutchouc,...), présentent un comportement intermédiaire entre caractères visqueux et élastiques, qualifié de visco-élastique. De tels systèmes peuvent être modélisés à l'aide de la relation suivante entre les deux tenseurs

$$\sigma_{ij} = E\varepsilon_{ij}(t) + \eta D^\alpha \varepsilon_{ij}(t), 0 < \alpha < 1.$$

Cette loi est justifiée par Bagley et Torvik dans [Bagley et Torvik, 1983],[Bagley et Torvik, 1986] (pour $\alpha = \frac{1}{2}$). Dans [Pfitzenreiter, 2004], l'introduction de dérivées fractionnaires dans le cas de polymères est motivée par l'analyse suivante : à cause de la longueur des fibres, les déformations appliquées prennent du temps à être communiquées de proche en proche (la longueur des fibres enroulées, étant bien supérieure à la distance géométrique). Elles sont progressivement amorties et induisent des effets de mémoire (l'état à l'instant t va dépendre des états antérieurs). Si la contrainte décroît comme $t^{-(1+\alpha)}$, elle pourra induire une dérivée fractionnaire d'ordre α . Cet opérateur permet ainsi de donner une description macroscopique simple (ne nécessitant que peu de paramètres) de phénomènes microscopiques complexes. Une présentation de la visco-élasticité via la dérivation fractionnaire est donnée dans [Dubois et al., 2010].

1.1.4 Acoustique

Pour certains instruments de musique à vent les pertes visco-thermique peuvent être modélisées efficacement à l'aide de dérivées fractionnaires temporelles [Hélie et Matignon, 2006].

1.2 ESPACES FONCTIONNELS

Dans cette partie, nous présentons un préliminaire dans lequel on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle qui représentent un outil indispensable dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.2.1 Espaces des fonctions intégrables

Définition 1.1 [Podlubny, 1999] Soit $\Omega = [0, T]$ ($0 < T < +\infty$) un intervalle fini de \mathbb{R} et $1 \leq p \leq \infty$.

1) Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions f réelles sur Ω telles que f est mesurable et

$$\int_0^T |f(t)|^p dt < \infty.$$

2) Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables f bornées presque partout (p.p) sur Ω .

Théorème 1.1 [Podlubny, 1999] Soit $\Omega = [0, T]$ ($0 < T < +\infty$) un intervalle fini de \mathbb{R} .

1) Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_p = \left(\int_0^T |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

2) L'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \inf \{M \geq 0 : |f(t)| \leq M \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

1.2.2 Espaces des fonctions continues et absolument continues

Définition 1.2 [Kilbas et al., 2006] Soit $\Omega = [0, T]$ ($0 < T < +\infty$) un intervalle fini de \mathbb{R} et $n \in \mathbb{N}$. On désigne par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à n continues sur Ω , muni de la norme :

$$\|f\|_{C^n(\Omega)} = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_{C(\Omega)} = \sum_{k=0}^n \max_{t \in \Omega} |f^{(k)}(t)|, n \in \mathbb{N}.$$

En particulier si $n = 0$, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues sur Ω muni de la norme :

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \max_{t \in \Omega} |f(t)|.$$

Définition 1.3 [Kilbas et al., 2006] Soit $\Omega = [0, T]$ ($0 < T < +\infty$) un intervalle fini de \mathbb{R} . On désigne par $AC(\Omega)$ l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables, c'est-à-dire :

$$AC(\Omega) = \left\{ f / \exists \varphi \in L^1(\Omega) : f(t) = c + \int_0^t \varphi(s) ds \right\},$$

et on appelle $AC(\Omega)$ l'espace des fonctions absolument continues sur Ω .

Définition 1.4 [Kilbas et al., 2006] Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on désigne par $C_\mu^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont des dérivées continues sur Ω jusqu'à l'ordre $(n - 1)$ et telles que $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$ c'est-à-dire :

$$AC^n(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, f^{(k)} \in C(\Omega), k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}, f^{(n-1)} \in AC(\Omega)\}.$$

En particulier $AC^1(\Omega) = AC(\Omega)$.

Une caractérisation des fonctions de cet espace est donnée par le lemme suivant :

Lemme 1.1 [Kilbas et al., 2006] Une fonction $f \in AC^n(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}^*$, si et seulement si elle est représentée sous la forme :

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

1.2.3 Espaces des fonctions continues avec poids

Définition 1.5 [Kilbas et al., 2006] Soit $\Omega = [0, T]$ ($0 < T < +\infty$) un intervalle fini de \mathbb{R} et $\mu \in \mathbb{C}$ ($0 \leq \text{Re}(\mu) < 1$).

On désigne par $C_\mu(\Omega)$ l'espace des fonctions f définies sur Ω telles que la fonction $t^\mu f(t) \in C(\Omega)$ c'est-à-dire :

$$C_\mu(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, (\cdot)^\mu f(\cdot) \in C(\Omega)\},$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{C_\mu(\Omega)} = \|t^\mu f(t)\|_{C(\Omega)} = \max_{t \in \Omega} |t^\mu f(t)|.$$

L'espace $C_\mu(\Omega)$ est appelé l'espace des fonctions continues avec poids. En particulier, $C_0(\Omega) = C(\Omega)$.

Définition 1.6 [Kilbas et al., 2006] Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on désigne par $C_\mu^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont des dérivées continues sur Ω jusqu'à l'ordre $(n - 1)$, telles que $f^{(n)} \in C_\mu(\Omega)$ c'est-à-dire :

$$C_\mu^n(\Omega) = \{f : \|f\|_{C_\mu^n(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n-1} \|f^{(k)}\|_{C(\Omega)} + \|f^{(n)}\|_{C_\mu(\Omega)}\}.$$

En particulier $C_\mu^0(\Omega) = C_\mu(\Omega)$.

1.2.4 Théorème du point fixe

Définition 1.7 Soit X un espace de Banach, et $T : X \rightarrow X$ une application continue, on dit que T est contractante si T est lipschitzienne de rapport $K < 1$:

$$\exists k < 1 : \forall x, y \in X : \|T(x) - T(y)\| \leq K \|x - y\|.$$

Théorème 1.2 (Banach) [Kilbas et al., 2006] Soit X un espace de Banach, et $T : X \rightarrow X$ un opérateur contractant alors T admet un point fixe unique, c'est-à-dire $\exists! u^* \in X$ tel que :

$$Tu^* = u^*.$$

De plus, Si $T^k, k \in \mathbb{N}$ est une suite d'opérateur définie par

$$T^1 = T \text{ et } T^k = TT^{k-1}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

alors pour tout $u_0 \in X$ la suite $\{T^k u_0\}_{k=0}^\infty$ converge vers le point fixe u^* .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k u_0 - u^*\| = 0.$$

1.3 FONCTIONS SPÉCIFIQUES POUR LA DÉRIVATION FRACTIONNAIRE

Dans cette partie, nous présentons les fonctions Gamma, Bêta et l'exponentielle de Mittag-Leffler. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ses application.

1.3.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction **Gamma d'Euler** $\Gamma(z)$ qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexe à parties réelles positives).

Définition 1.8 [Podlubny, 1999] Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) > 0$. La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (1.1)$$

avec $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0^+) = +\infty, \Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z < 1$.

Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \operatorname{Re}(z) > 0, \quad (1.2)$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n + 1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, en effet $\Gamma(1) = 1$ et en utilisant la relation (1.2) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1!, \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1! = 2!, \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!, \\ &\vdots \\ \Gamma(n + 1) &= n\Gamma(n) = n(n - 1)! = n!. \end{aligned}$$

1.3.2 La fonction Bêta

Elle fait partie des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction joue un rôle important quand elle est combinée avec la fonction Gamma.

Définition 1.9 [Podlubny, 1999] La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour des nombre complexes z et w par :

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1 - t)^{w-1} dt, \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0. \quad (1.3)$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z + w)}, \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0, \quad (1.4)$$

il s'ensuit de (1.4) que :

$$B(z, w) = B(w, z), \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0.$$

1.3.3 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. Elle est aussi largement utilisée dans la recherche des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire, cette fonction à été introduite par G .M. Mittag-Leffler [Mittag-Leffler, 1905].

Définition 1.10 [Podlubny, 1999] Pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ est définie comme suit :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \alpha > 0. \quad (1.5)$$

En particulier :

$$E_1(z) = e^z, E_2(z) = \cosh(\sqrt{z}).$$

Cette fonction peut être généralisée pour deux paramètres pour donner :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha > 0, \beta > 0. \quad (1.6)$$

1.4 INTÉGRALES ET DÉRIVÉES FRACTIONNAIRES

Le but de cette partie est d'introduire les deux plus importantes approches du calcul fractionnaire : au sens de Riemann-Liouville et au sens de Caputo, y compris quelques unes de leurs propriétés ainsi que la relation entre ces deux approches.

1.4.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\text{Re}(\alpha) > 0$), selon l'approche de Riemann-Liouville, généralise la célèbre formule (attribuée à Cauchy) d'intégrale répétée n -fois.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, T]$, $T > 0$. Une primitive de f est donnée par l'expression :

$$I^1 f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Pour une primitive seconde et d'après le théorème de Fubini on aura :

$$\begin{aligned} I^2 f(t) &= \int_0^t I^1 f(u) du = \int_0^t \left(\int_0^u f(\tau) d\tau \right) du = \int_0^t \left(\int_{\tau}^t du \right) f(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

En répétant n fois, on arrive à la $n^{\text{ième}}$ primitive de la fonction f sous la forme :

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, t > 0, n \in \mathbb{N}^*. \quad (1.7)$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy, et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $\Gamma(n) = (n-1)!$; Riemann s'est rendu compte que le second membre de (1.7) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il a défini l'intégrale fractionnaire de la manière suivante :

Définition 1.11 [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006] Soit $f \in L^1([0, T])$, $T > 0$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\text{Re}(\alpha) > 0$) notée I^α est définie par :

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, t > 0, \quad (1.8)$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma donnée par (1.1).

Théorème 1.3 [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006] Si $f \in L^1([0, T])$, $T > 0$, alors $I^\alpha f$ existe pour presque tout $t \in [0, T]$ et de plus $I^\alpha f \in L^1([0, T])$.

Démonstration. En introduisant (1.8) puis en utilisant le théorème de Fubini, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^t |I^\alpha f(t)| dt &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau)| d\tau dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T |f(\tau)| \left(\int_\tau^T (t-\tau)^{\alpha-1} dt \right) d\tau \\ &\leq \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^T |f(\tau)| (T-\tau)^\alpha d\tau \\ &\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^T |f(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Puisque $f \in L^1([0, T])$, la dernière quantité est finie, ce qui établit le résultat. \square

Exemple 1.1 L'intégrale de $f(t) = t^\beta$ au sens de Riemann-Liouville.

Soient $\alpha > 0, \beta > -1$, alors on a :

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau. \quad (1.9)$$

En effectuant le changement de variable

$$\tau = ts,$$

où $s = 0$ quand $\tau = 0$ et $s = 1$ quand $\tau = t$ et $d\tau = tds$, alors (1.9) devient

$$\begin{aligned} I^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-ts)^{\alpha-1} (ts)^\beta tds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [t(1-s)]^{\alpha-1} t^{\beta+1} s^\beta ds \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^\beta ds \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{(\beta+1)-1} ds. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de la fonction Bêta (1.3) puis la relation (1.4), on

arrive à :

$$\begin{aligned} I^\alpha f(t) &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta + 1) \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha + \beta + 1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} t^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Donc l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = t^\beta$ est donnée par :

$$I^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} t^{\alpha+\beta}. \quad (1.10)$$

En particulier, la relation (1.10) montre que l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une constante est donnée par :

$$I^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha.$$

Proposition 1.1 [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006] Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ($\text{Re}(\alpha) > 0, \text{Re}(\beta) > 0$), pour toute fonction $f \in L^1([0, T])$, $T > 0$ on a :

$$I^\alpha (I^\beta f(t)) = I^{\alpha+\beta} f(t) = I^\beta (I^\alpha f(t)),$$

pour presque tout $t \in [0, T]$. Si de plus $f \in C([0, T])$, alors cette identité est vraie $\forall t \in [0, T]$.

Démonstration. Supposons d'abord que $f \in L^1([0, T])$ on a :

$$\begin{aligned} I^\alpha (I^\beta f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} I^\beta f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \int_0^\tau (\tau - \zeta)^{\beta-1} f(\zeta) d\zeta d\tau. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 1.3, les intégrales figurant dans l'égalité précédente existent pour presque tout $t \in [0, T]$, et le théorème de Fubini permet donc d'établir

$$I^\alpha (I^\beta f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \left(\int_\zeta^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - \zeta)^{\beta-1} d\tau \right) f(\zeta) d\zeta.$$

En effectuant le changement de variable

$$\tau = \zeta + (t - \zeta)s,$$

où $s = 0$ quand $\tau = \zeta$ et $s = 1$ quand $\tau = t$ et $d\tau = (t - \zeta)ds$, on obtient :

$$I^\alpha (I^\beta f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - \zeta)^{\alpha+\beta-1} \left(\int_0^1 (1 - s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds \right) f(\zeta) d\zeta.$$

Enfin, en tenant compte de la définition de la fonction Bêta (1.3) puis de la relation (1.4), on obtient :

$$I^\alpha \left(I^\beta f(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t - \zeta)^{\alpha + \beta - 1} f(\zeta) d\zeta = \left(I^{\alpha + \beta} f \right) (t).$$

Supposons maintenant que $f \in C([0, T])$, alors (d'après les théorèmes sur les intégrales dépendant de paramètres) $I^\alpha f \in C([0, T])$, et par suite

$$I^{\alpha + \beta} f, I^\alpha I^\beta f \in C([0, T]).$$

Ainsi, d'après ce qui précède, les deux fonctions continues $I^{\alpha + \beta} f, I^\alpha I^\beta f$ coïncident presque partout sur $[0, T]$, elles doivent donc coïncider partout sur $[0, T]$. \square

Le théorème suivant fournit un résultat concernant l'inversion de la limite et de l'intégrale fractionnaire.

Théorème 1.4 [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006] Soient $\alpha \in \mathbf{C}$ ($\text{Re}(\alpha) > 0$), et $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ une suite de fonctions continues et simplement convergentes sur $[0, T]$. Alors on peut inverser l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et le signe limite comme suit :

$$\left[I^\alpha \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k \right) \right] (t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} I^\alpha f_k(t).$$

Démonstration. Soit $f_k \rightarrow f$ simplement convergente et

$$\begin{aligned} |I^\alpha f_k(t) - I^\alpha f(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha - 1} |f_k(\tau) - f(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{\|f_k - f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha - 1} d\tau \\ &\leq \frac{\|f_k - f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\alpha} t^\alpha \\ &\leq \frac{t^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} \|f_k - f\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_k - f\|_\infty T^\alpha \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat désiré. \square

1.4.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.12 [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006] Soit $f \in L^1([0, T])$, $T > 0$ une fonction intégrable sur $[0, T]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbf{C}$ ($\text{Re}(\alpha) > 0$) notée $D^\alpha f$ est définie par :

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= D^n I^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, t > 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

où $n - 1 < [\text{Re}(\alpha)] < n$, et $[\text{Re}(\alpha)]$ est la partie entière de $\text{Re}(\alpha)$.

En particulier, si $\alpha = 0$, alors

$$D^0 f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d}{dt} \right) \int_0^t f(\tau) d\tau = f(t).$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors

$$D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \right) \int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{d^n}{dt^n} f(t) = f^{(n)}(t).$$

Par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Si de plus $0 < \alpha < 1$, alors $n = 1$, d'où

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau, t > 0.$$

Exemple 1.2 *La dérivée de $f(t) = t^\beta$ au sens de Riemann-Liouville.*

Soit $\alpha > 0$ tel que $n-1 < \alpha < n$ et $\beta > -1$, d'après (1.11) et la relation (1.10), (Voir l'Exemple 1.1) on a :

$$D^\alpha t^\beta = D^n I^{n-\alpha} t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} D^n t^{\beta+n-\alpha}. \quad (1.12)$$

En tenant compte

$$\begin{aligned} D^n t^{\beta+n-\alpha} &= (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)t^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

On substitue le resultat (1.13), dans la formule (1.12), pour obtenir :

$$\begin{aligned} D^\alpha t^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Donc la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = t^\beta$ est donnée par :

$$D^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}. \quad (1.14)$$

En particulier, si $\beta = 0$ et $\alpha > 0$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante $f(t) = C$ est non nulle, sa valeur est :

$$D^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}.$$

Il est aisé d'établir le résultat suivant :

Lemme 1.2 Soient $n - 1 < \alpha < n$ et $n = [\alpha] + 1$, et f une fonction vérifiant

$$D^\alpha f(t) = 0,$$

alors :

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} t^{j+\alpha-n}, \forall c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}.$$

En particulier, si $0 < \alpha < 1$, alors

$$f(t) = ct^{\alpha-1}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Soit $D^\alpha f(t) = 0$, d'après (1.11) on a :

$$D^\alpha f(t) = D^n I^{n-\alpha} f(t) = 0.$$

Et par suite :

$$I^{n-\alpha} f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j t^j. \quad (1.15)$$

Maintenant, l'application de l'opérateur I^α à l'équation (1.15) donne :

$$I^n f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j I^\alpha t^j.$$

En utilisant la relation (1.10) (Voir l'Exemple 1.1), on obtient :

$$I^n f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\alpha+1)} t^{j+\alpha}. \quad (1.16)$$

L'application de l'opérateur D^n à l'équation (1.16) donne :

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\alpha+1)} D^n t^{j+\alpha}.$$

Enfin, la dérivation classique et l'utilisation de la formule :

$$D^n t^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)} t^{\alpha-n},$$

donne :

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\alpha+1)} \frac{\Gamma(j+\alpha+1)}{\Gamma(j+\alpha-n+1)} t^{j+\alpha-n}.$$

Finalement on obtient :

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)} t^{j+\alpha-n}.$$

Ceci complète la preuve du Lemme. □

La proposition suivante établit une condition suffisante d'existence de la dérivée fractionnaire.

Proposition 1.2 [Kilbas et al., 2006] Soient $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n([0, T])$, $T > 0$, alors la dérivée fractionnaire $D^\alpha f$ existe presque partout sur $[0, T]$ de plus, elle est représentée sous la forme :

$$D^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} t^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \quad (1.17)$$

1.4.3 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville possède les propriétés résumées dans les propositions suivantes :

Proposition 1.3 [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006] Pour $n - 1 < \alpha \leq n$, $m - 1 < \beta \leq m$, on a :

1) L'opérateur de Riemann-Liouville est linéaire

$$D^\alpha (\lambda f + g) (t) = \lambda (D^\alpha f) (t) + (D^\alpha g) (t), \lambda \in \mathbb{R}.$$

2) En général

$$D^\alpha (D^\beta f(t)) \neq D^\beta (D^\alpha f(t)).$$

Démonstration. 1) Soit $f, g \in L^1([0, T])$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} D^\alpha (\lambda f + g) (t) &= D^n I^{n-\alpha} (\lambda f(t) + g(t)) \\ &= \lambda D^n I^{n-\alpha} (f) (t) + D^n I^{n-\alpha} (g) (t). \end{aligned}$$

Comme la dérivée $n^{\text{ième}}$ et l'intégrale sont linéaires alors :

$$\begin{aligned} D^\alpha (\lambda f + g) (t) &= \lambda D^n I^{n-\alpha} f(t) + D^n I^{n-\alpha} g(t) \\ &= \lambda (D^\alpha f) (t) + (D^\alpha g) (t). \end{aligned}$$

2) On a :

$$D^\alpha (D^\beta f(t)) = D^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{\beta-k} f(0) \frac{t^{-\alpha-k}}{\Gamma(1 - \alpha - k)},$$

et

$$D^\beta (D^\alpha f(t)) = D^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} D^{\alpha-k} f(0) \frac{t^{-\beta-k}}{\Gamma(1 - \beta - k)}.$$

Par suite les deux opérateurs de dérivations fractionnaires ne commutent que si $\alpha = \beta$ et $D^{\alpha-k} f(0) = 0$, pour tout $k = 1, 2, \dots, n$ et $D^{\beta-k} f(0) = 0$, pour tout $k = 1, 2, \dots, m$.

Ce qui complète la preuve. \square

Proposition 1.4 [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006] Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $n - 1 < \alpha \leq n$, $m - 1 < \beta \leq m$ tel que $n, m \in \mathbb{N}^*$.

1) Pour $f \in L^1([0, T])$, $T > 0$, l'égalité :

$$D^\alpha (I^\alpha f(t)) = f(t),$$

est vraie pour presque tout $t \in [0, T]$.

2) Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1([0, T])$, $T > 0$, la relation :

$$D^\beta (I^\alpha f(t)) = I^{\alpha-\beta} f(t),$$

est vrai presque partout sur $t \in [0, T]$.

En particulier, lorsque $\beta = k \in \mathbb{N}$ et $\alpha > k$, alors :

$$D^k (I^\alpha f(t)) = I^{\alpha-k} f(t),$$

3) Si $\beta \geq \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire $D^{\beta-\alpha} f$ existe, alors on a :

$$D^\beta (I^\alpha f(t)) = D^{\beta-\alpha} f(t).$$

4) Pour $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$. Si les dérivées fractionnaires $D^\alpha f$ et $D^{k+\alpha} f$ existent, alors :

$$D^k (D^\alpha f(t)) = D^{k+\alpha} f(t).$$

Démonstration. 1) En utilisant (1.11) et la Proposition 1.1, on a pour $n = [\alpha] + 1$

$$D^\alpha (I^\alpha f(t)) = D^n I^{n-\alpha} I^\alpha f(t) = f(t), \text{ p.p sur } [0, T].$$

2) D'après (1.11) et la Proposition 1.1 on obtient :

Pour $\alpha > \beta > 0$, alors $n \geq m$, on a :

$$\begin{aligned} D^\beta (I^\alpha f(t)) &= D^n I^{n-\beta} (I^\alpha f)(t) \\ &= D^n (I^{n+\alpha-\beta} f)(t) \\ &= D^n I^n (I^{\alpha-\beta} f)(t) \\ &= I^{\alpha-\beta} f(t). \end{aligned}$$

3) Pour $\beta \geq \alpha > 0$, on a :

$$\begin{aligned} D^\beta (I^\alpha f(t)) &= D^m I^{m-\beta} (I^\alpha f)(t) \\ &= D^m I^{m-(\beta-\alpha)} f(t) \\ &= D^{\beta-\alpha} f(t), \end{aligned}$$

existe pour $i - 1 \leq \beta - \alpha < i$ et $i \leq m$.

4) On a pour $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} D^k (D^\alpha f(t)) &= D^k D^n I^{n-\alpha} f(t) \\ &= D^{k+n} I^{n-\alpha+k-k} f(t) \\ &= D^{k+n} I^{k+n-(k+\alpha)} f(t) \\ &= D^{k+\alpha} f(t). \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve

□

1.4.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a jouer un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs dont Caputo (1967-1969) ont rendu compte que cette définition doit être révisé [Caputo, 1967], car les problèmes appliqués en viscoélasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques comme par exemple $u(0)$, $u'(0)$, etc..., ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

Malgré le fait que les problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement, la solution de ce problème a été proposée par M. Caputo dans sa définition qu'il a adapté avec F. Mainardi dans la structure de la théorie de viscoélasticité [Caputo et Mainardi, 1971].

Dans cette partie on donne la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ainsi que quelques propriétés essentielles.

Soit $[0, T]$ un intervalle fini de \mathbb{R} , et soit I^α et D^α les opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires donnés par (1.7) et (1.11) respectivement.

Définition 1.13 [Kilbas et al., 2006] La dérivée fractionnaire de Caputo ${}^c D^\alpha f(t)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\text{Re}(\alpha) \geq 0$), sur l'intervalle $[0, T]$ est définie par l'intermédiaire de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville par :

$${}^c D^\alpha f(t) = D^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right), \quad (1.18)$$

où

$$n = [\text{Re}(\alpha)] + 1 \text{ pour } \alpha \notin \mathbb{N}, n = \alpha \text{ pour } \alpha \in \mathbb{N}. \quad (1.19)$$

Si $\alpha = 0$, alors :

$${}^c D^0 f(t) = f(t).$$

En particulier, lorsque $0 < \text{Re}(\alpha) < 1$, la relation (1.18) prend la forme :

$${}^c D^\alpha f(t) = D^\alpha [f(t) - f(0)].$$

La dérivée fractionnaire de Caputo (1.18) est définie pour les fonctions $f(t)$ pour lesquelles la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville existe en particulier, elle est définie pour les fonctions $f \in AC^n([0, T])$. On a le théorème suivant :

Théorème 1.5 [Kilbas et al., 2006] Soit $\text{Re}(\alpha) \geq 0$ et soit n donné par (1.19). Si $f \in AC^n([0, T])$, alors la dérivée fractionnaire de Caputo ${}^c D^\alpha f(t)$ existe presque partout sur $[0, T]$.

1) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors ${}^c D^\alpha f(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, t > 0 \quad (1.20) \\ &= I^{n-\alpha} D^n f(t). \end{aligned}$$

En particulier, lorsque $0 < \text{Re}(\alpha) < 1$ et $f \in AC([0, T])$, alors :

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau, t > 0 & (1.21) \\ &= I^{1-\alpha} f'(t). \end{aligned}$$

2) Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors :

$${}^c D^\alpha f(t) = f^{(n)}(t).$$

Démonstration. D'après les Définitions 1.13 et 1.12 on a :

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha f(t) &= D^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right) \\ &= D^n I^{n-\alpha} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right). \end{aligned}$$

Par :

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= D^n I^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, t > 0. \end{aligned}$$

On pose :

$$F(t) = I^{n-\alpha} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right).$$

D'après (1.8), on a :

$$F(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \left(f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tau^k \right) d\tau.$$

En intégrant par partie, on aura :

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \left(f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tau^k \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left\{ -\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \left(f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tau^k \right) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} D \left(f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tau^k \right) d\tau \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha+1-1} D \left(f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \tau^k \right) d\tau \\ &= I^{n-\alpha+1} D \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right). \end{aligned}$$

En répétant ce procédé n fois, on trouve :

$$\begin{aligned} F(t) &= I^{n-\alpha+n} D^n \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right) \\ &= I^n I^{n-\alpha} D^n \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right). \end{aligned}$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$ est un polynôme de degré $n-1$, par conséquent

$$F(t) = I^n I^{n-\alpha} D^n f(t).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha f(t) &= D^n F(t) \\ &= D^n I^n I^{n-\alpha} D^n f(t) \\ &= I^{n-\alpha} D^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve. \square

Théorème 1.6 [Kilbas et al., 2006] Soit $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$ et soit n donnée par (1.19) et $f \in C^n([0, T])$. Alors la dérivée fractionnaire de Caputo ${}^c D^\alpha f(t)$ est continue sur $[0, T]$, $T > 0$.

- 1) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors ${}^c D^\alpha f(t)$ est donnée par (1.20). En particulier, elle prend la forme (1.21) pour $0 < \alpha < 1$.
- 2) Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors :

$${}^c D^\alpha f(t) = f^{(n)}(t).$$

Exemple 1.3 La dérivée de $f(t) = t^\beta$ au sens de Caputo

Soit n un entier et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ avec $\beta > n-1$, alors d'après (1.20) on a :

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} \tau^{\beta-n}, \quad (1.22)$$

d'où

$${}^c D^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \tau^{\beta-n} d\tau. \quad (1.23)$$

En faisant le changement de variable

$$\tau = ts,$$

où $s = 0$ quand $\tau = 0$ et $s = 1$ quand $\tau = t$ et $d\tau = tds$, alors (1.23) devient :

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha t^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \tau^{\beta-n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} t^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n} ds. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de la fonction Bêta (1.3) puis de la relation (1.4) on arrive à :

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha t^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)B(n-\alpha, \beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} t^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Donc la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction $f(t) = t^\beta$ est donnée par :

$${}^c D^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}. \quad (1.24)$$

En particulier, l'utilisation de la formule (1.18) ou (1.20) pour calculer la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ d'une constante $C \in \mathbb{R}$ exprime que cette dérivée est nulle c'est-à-dire :

$$({}^c D^\alpha C) = 0.$$

1.4.5 Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Les dérivées fractionnaires au sens de Caputo, ont les propriétés résumées dans les propositions suivantes :

Proposition 1.5 [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006] Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $n-1 < \operatorname{Re}(\alpha) < n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et soient les deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ telles que ${}^c D^\alpha f(t)$ et ${}^c D^\alpha g(t)$ existent. La dérivation fractionnaire de Caputo est un opérateur linéaire :

$${}^c D^\alpha (\lambda f + g)(t) = \lambda ({}^c D^\alpha f)(t) + ({}^c D^\alpha g)(t), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. On a d'après (1.20)

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha (\lambda f + g)(t) &= I^{n-\alpha} D^n ((\lambda f + g)(t)) \\ &= \lambda I^{n-\alpha} D^n (f(t)) + I^{n-\alpha} D^n (g(t)). \end{aligned}$$

Comme la dérivée n -ième et l'intégrale sont linéaires alors :

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha (\lambda f + g)(t) &= \lambda I^{n-\alpha} D^n f(t) + I^{n-\alpha} D^n g(t) \\ &= \lambda ({}^c D^\alpha f)(t) + ({}^c D^\alpha g)(t). \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Proposition 1.6 [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006] On suppose que $n-1 < \operatorname{Re}(\alpha) < n$, $m, n \in \mathbb{N}^*$ et soit la fonction $f(t)$ telle que ${}^c D^\alpha f(t)$ existe, alors :

$${}^c D^\alpha D^m f(t) = {}^c D^{\alpha+m} f(t) \neq D^{m\alpha} D^\alpha f(t).$$

1.4.6 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivant établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 1.7 [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006] Soit $\text{Re}(\alpha) > 0$ avec $n - 1 < \text{Re}(\alpha) < n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), et soit f une fonction telle que les dérivées fractionnaires ${}^c D^\alpha f(t)$ et $D^\alpha f(t)$ existent alors :

$${}^c D^\alpha f(t) = D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} t^{k-\alpha}.$$

Démonstration. On considère le développement limité en série de Taylor de la fonction f en $t = 0$

$$\begin{aligned} f(t) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} t^k + R_{n-1}, \end{aligned}$$

avec

$$R_{n-1} = \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(n-1)!} (t-\tau)^{n-1} d\tau.$$

En utilisant les propriétés d'intégration d'ordre n , on a :

$$R_{n-1} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t f^{(n)}(\tau) (t-\tau)^{n-1} d\tau = I^n f^{(n)}(t).$$

En utilisant la linéarité de l'opérateur de Riemann-Liouville et la relation (1.14) on a :

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= D^\alpha \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} t^k + R_{n-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} D_a^\alpha t^k + D^\alpha R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)\Gamma(k+1)} t^{k-\alpha} + D^\alpha I^n f^{(n)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha} + I^{n-\alpha} f^{(n)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha} + ({}^c D^\alpha f)(t). \end{aligned}$$

Donc :

$${}^c D^\alpha f(t) = D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha}.$$

D'où le résultat. □

Remarque 1.1 Si $f^{(k)}(0) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, on aura :

$${}^c D^\alpha f(t) = D^\alpha f(t).$$

Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

L'opérateur de dérivée fractionnaire au sens de Caputo est un inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville mais pas un inverse à droite car :

Si f est une fonction continue sur $[0, T]$ on a :

$${}^c D^\alpha (I^\alpha f(t)) = f(t) \text{ et } I^\alpha ({}^c D^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k. \quad (1.25)$$

L'avantage principal de l'approche Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier.

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON-LINÉAIRES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

2

SOMMAIRE

2.1	RÉSULTAT D'ÉQUIVALENCE ENTRE LE PROBLÈME DE CAUCHY ET L'ÉQUATION INTÉGRALE DE VOLTERRA	25
2.2	RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ DE LA SOLUTION	26

DANS ce chapitre, on s'intéresse par la question d'existence et d'unicité de la solution pour un problème de Cauchy d'une équation différentielle non-linéaire avec dérivée fractionnaire au sens de Caputo suivant :

$${}^c D^\alpha u(t) = f(t, u(t)), t \in \Omega = [0, T], n - 1 < \alpha \leq n, \quad (2.1)$$

avec les conditions initiales

$$u^{(k)}(0) = b_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \dots, n - 1, n = [\alpha] + 1, \quad (2.2)$$

où ${}^c D^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo, $f(., u) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par rapport à $t \in \Omega$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ et $[\alpha]$ est la partie entière de α .

2.1 RÉSULTAT D'ÉQUIVALENCE ENTRE LE PROBLÈME DE CAUCHY ET L'ÉQUATION INTÉGRALE DE VOLTERRA

Dans cette partie, on démontre un résultat d'équivalence entre le problème de Cauchy et une équation intégrale de Volterra non-linéaire dans l'espace $C^{n-1}(\Omega)$. Sur la base de ce résultat, l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy considéré sont prouvées.

Théorème 2.1 [Kilbas et al., 2006] Soient $\alpha > 0$ avec $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = [\alpha] + 1$ et $f(., u) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par rapport à $t \in \Omega$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

Alors $u \in C^{n-1}(\Omega)$ est une solution du problème de Cauchy (2.1)-(2.2) si et seulement si u est une solution de l'équation d'intégrale de Volterra suivante :

$$u(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!} t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, u(\tau)) d\tau, 0 \leq t \leq T. \quad (2.3)$$

Démonstration. Soient $\alpha > 0$ avec $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = [\alpha] + 1$.

1) On suppose que $u \in C^{n-1}(\Omega)$ est une solution du problème (2.1)-(2.2). Comme $f(., u) \in C(\Omega)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, donc d'après (2.1) nous avons ${}^c D^\alpha u(t) \in C(\Omega)$. En utilisant la relation (1.25), on obtient :

$$I^\alpha ({}^c D^\alpha u(t)) = u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(0)}{k!} t^k + I^\alpha ({}^c D^\alpha u(t)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!} t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, u(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

2) On suppose que $u \in C^{n-1}(\Omega)$ est une solution d'équation intégrale de Volterra (2.3). En dérivant (2.3) k fois ($k = 1, \dots, n-1$) et en utilisant la Proposition 1.4, on obtient pour tout $k = 0, 1, \dots, n-1$,

$$u^{(k)}(t) = \sum_{j=k}^{n-1} \frac{b_j}{(j-k)!} t^{j-k} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-k-1} f(\tau, u(\tau)) d\tau.$$

Avec le changement de variable $\tau = ts$, on obtient :

$$u^{(k)}(t) = \sum_{j=k}^{n-1} \frac{b_j}{(j-k)!} t^{j-k} + \frac{t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-k-1} f(ts, u(ts)) ds.$$

Par passage à la limite $t \rightarrow 0$, et en utilisant la continuité de f , nous obtenons les relations (2.2). D'autre part, en appliquant l'opérateur de dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville D^α sur l'équation intégrale de Volterra (2.3) et avec (2.2), nous obtenons :

$$D^\alpha \left(u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(0)}{k!} t^k \right) = D^\alpha I^\alpha f(t, u(t)).$$

D'après la Définition 1.13 et la Proposition 1.4, on obtient l'équation (2.1).

Ceci complète la preuve du Théorème. \square

Corollaire 2.1 Soient $0 < \alpha < 1$ et $f(., u) : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par rapport à $t \in \Omega$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Alors, $u \in C(\Omega)$ est une solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha u(t) = f(t, u(t)), \\ u(0) = b, \end{cases}$$

si et seulement si u est une solution de l'équation intégrale de Volterra suivante :

$$u(t) = b + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, u(\tau)) d\tau.$$

2.2 RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ DE LA SOLUTION

Maintenant, on va montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy (2.1)-(2.2) dans l'espace des fonctions $C^{n-1, \alpha}(\Omega)$ défini par :

$$C^{n-1, \alpha}(\Omega) = \left\{ u \in C^{n-1}(\Omega), {}^c D^\alpha u \in C(\Omega), n = [\alpha] + 1 \right\}.$$

Pour établir l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy (2.1)-(2.2), nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1 Si $\alpha > 0$ avec $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$, alors l'opérateur d'intégration fractionnaire $I^\alpha : C(\Omega) \longrightarrow C^{n-1}(\Omega)$ au sens de Riemann-Liouville est borné c'est-à-dire :

$$\|I^\alpha g\|_{C^{n-1}(\Omega)} \leq M \|g\|_{C(\Omega)}, M = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)}. \quad (2.4)$$

Démonstration. Soit $g \in C(\Omega)$. En utilisant la Proposition 1.4, on obtient :

$$D^k I^\alpha g(t) = I^{\alpha-k} g(t), \text{ pour tout } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Pour tout $t \in \Omega$, nous avons :

$$\begin{aligned} \|I^\alpha g\|_{C^{n-1}(\Omega)} &= \sum_{k=0}^{n-1} \|D^k I^\alpha g\|_{C(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n-1} \|I^{\alpha-k} g\|_{C(\Omega)} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|g\|_{C(\Omega)}}{\Gamma(\alpha - k)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-k-1} d\tau \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|g\|_{C(\Omega)}}{(\alpha - k) \Gamma(\alpha - k)} t^{\alpha-k} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)} \|g\|_{C(\Omega)}. \end{aligned}$$

On pose :

$$M = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)},$$

on obtient :

$$\|I^\alpha g\|_{C^{n-1}(\Omega)} \leq M \|g\|_{C(\Omega)}.$$

Ce qui démontre le Lemme. \square

Théorème 2.2 [Kilbas et al., 2006] Soient $\alpha > 0$ avec $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$ et G un ouvert de \mathbb{R} . On suppose que $f : \Omega \times G \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :

- 1) Pour tout $u \in G$ fixé, $f(\cdot, u) \in C(\Omega)$.
- 2) La fonction $f : \Omega \times G \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie la condition de Lipschitz par rapport à u , c'est-à-dire il existe $L > 0$ tel que :

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L |u_1 - u_2|, \text{ pour tout } t \in \Omega, u_1, u_2 \in G. \quad (2.5)$$

Si

$$L \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)} < 1, \quad (2.6)$$

alors, le problème de Cauchy (2.1)-(2.2) admet une unique solution $u \in C^{n-1, \alpha}(\Omega)$.

Démonstration. On commence par montrer l'existence d'une solution unique $u \in C^{n-1}(\Omega)$ du problème (2.1)-(2.2). Selon le Théorème 2.1, il suffit de prouver l'existence d'une solution unique $u \in C^{n-1}(\Omega)$ de l'équation intégrale de Volterra (2.3). Pour cela on utilise le Théorème 1.2 du point fixe de Banach dans l'espace $C^{n-1}(\Omega)$ avec la norme suivante :

$$\|u_1 - u_2\|_{C^{n-1}(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n-1} \|u_1^{(k)} - u_2^{(k)}\|_{C(\Omega)}. \quad (2.7)$$

On réécrit l'équation intégrale (2.3) sous la forme suivante :

$$u(t) = (Tu)(t),$$

où

$$(Tu)(t) = u_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, u(\tau)) d\tau, \quad (2.8)$$

avec

$$u_0(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!} t^j. \quad (2.9)$$

Pour appliquer le Théorème de Banach, il faut montrer :

- 1) Si $u \in C^{n-1}(\Omega)$ alors $Tu \in C^{n-1}(\Omega)$.
- 2) Pour chaque $u_1, u_2 \in C^{n-1}(\Omega)$,

$$\|Tu_1 - Tu_2\|_{C^{n-1}(\Omega)} \leq w \|u_1 - u_2\|_{C(\Omega)}, \text{ avec } 0 < w < 1. \quad (2.10)$$

Soit $u \in C^{n-1}(\Omega)$. En dérivant (2.8) k fois ($k = 1, \dots, n-1$) et en utilisant la Proposition 1.4, nous obtenons pour tout $k = 0, 1, \dots, n-1$,

$$(Tu)^{(k)}(t) = u_0^{(k)}(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha - k)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-k-1} f(\tau, u(\tau)) d\tau, \quad (2.11)$$

avec

$$u_0^{(k)}(t) = \sum_{j=k}^{n-1} \frac{b_j}{(j-k)!} t^{j-k}.$$

Pour tout $k = 0, 1, \dots, n-1$, le premier terme à droit de (2.11) est une fonction continue sur $[0, T]$, et par le Lemme 2.1, le deuxième terme est continu sur $[0, T]$. Donc, nous avons :

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha - k)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha - k - 1} f(\tau, u(\tau)) d\tau \right\|_{C^{n-1}(\Omega)} \leq \frac{T^{\alpha - k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)} \|f(\tau, u(\tau))\|_{C(\Omega)}, \quad (2.12)$$

pour tout $k = 0, 1, \dots, n-1$. Par conséquent $Tu \in C^{n-1}(\Omega)$.

En utilisant (2.7), (2.11) et (2.12) et la condition de Lipschitz (2.5), nous avons :

$$\begin{aligned} \|Tu_1 - Tu_2\|_{C^{n-1}(\Omega)} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\| (Tu_1)^{(k)} - (Tu_2)^{(k)} \right\|_{C(\Omega)} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha - k)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha - k - 1} [f(\tau, u_1(\tau)) - f(\tau, u_2(\tau))] d\tau \right\|_{C(\Omega)} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^{\alpha - k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)} \|f(\tau, u_1(\tau)) - f(\tau, u_2(\tau))\|_{C(\Omega)} \\ &\leq L \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^{\alpha - k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)} \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_{C(\Omega)}, \end{aligned}$$

à l'aide du (2.6), on obtient (2.10), avec

$$w = L \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^{\alpha - k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)}.$$

Par conséquent, d'après le Théorème du point fixe de Banach 1.2, il existe une unique solution $u^* \in C^{n-1}(\Omega)$ de l'équation intégrale de Volterra 2.3 sur l'intervalle $[0, T]$.

Par le Théorème de Banach 1.2, la solution $u^*(t)$ est une limite de la suite convergente $(T^n u_0^*)(t)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n u_0^* - u^*\|_{C^{n-1}(\Omega)} = 0. \quad (2.13)$$

On prend

$$u_0^* = u_0,$$

avec $u_0(t)$ définie par (2.9).

D'après (2.8), la suite $(T^n u_0^*)(t)$ est définie par la formule de récurrence

$$(T^n u_0^*)(t) = u_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha - 1} f(\tau, (T^{n-1} u_0^*)(\tau)) d\tau, n = 1, 2, \dots$$

En notant, $u_n(t) = T^n u_0^*(t)$ alors la relation précédente prend la forme suivante :

$$u_n(t) = u_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha - 1} f(\tau, u_{n-1}(\tau)) d\tau, n \in \mathbb{N},$$

et (2.13) devient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{C^{n-1}(\Omega)} = 0. \quad (2.14)$$

En utilisant ensuite 2.1 et la condition de Lipschitz (2.5), on a :

$$\begin{aligned} \|{}^c D^\alpha u_n - {}^c D^\alpha u\|_{C(\Omega)} &= \|f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))\|_{C(\Omega)} \\ &\leq L \|u_n - u\|_{C(\Omega)} \\ &\leq L \|u_n - u\|_{C(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'après (2.14), nous obtenons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|{}^c D^\alpha u_n - {}^c D^\alpha u\|_{C(\Omega)} = 0.$$

Alors ${}^c D^\alpha u \in C(\Omega)$, et donc $u \in C^{n-1, \alpha}(\Omega)$.

Ceci complète la preuve du Théorème. \square

Exemple 2.1 *Considérons le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} {}^c D^{1/2} u(t) = t^2 - 1 \\ u(0) = 1 \end{cases}, t \in \Omega = [0, 1]. \quad (2.15)$$

On cherche une fonction continue $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant (2.15).

On résout le problème (2.15) on obtient :

$$\begin{aligned} u(t) &= 1 + \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t (t - \tau)^{-1/2} \tau^2 d\tau - \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t (t - \tau)^{-1/2} d\tau \\ &= 1 + \frac{16}{15\sqrt{\pi}} t^{5/2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{1/2}. \end{aligned}$$

Exemple 2.2 *Considérons le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} {}^c D^{1/3} u(t) = t^2 - 2t + 1 \\ u(1) = 0 \end{cases}, t \in \Omega = [1, 2]. \quad (2.16)$$

On cherche une fonction continue $u : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant (2.16).

On résout le problème (2.16) on obtient :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(1/3)} \int_1^t (t - \tau)^{-2/3} (\tau - 1)^2 d\tau \\ &= \frac{27}{14\Gamma(1/3)} (t - 1)^{7/3}. \end{aligned}$$

MÉTHODES SEMI-ANALYTIQUES ET LEURS CONVERGENCES

3

SOMMAIRE

3.1	MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION D'ADOMIAN (ADM)	31
3.1.1	Description de la méthode	31
3.1.2	Les polynômes d'Adomian	32
3.1.3	Convergence de la méthode ADM	33
3.2	MÉTHODE DE PERTURBATION D'HOMOTOPIE (HPM)	35
3.2.1	Description de la méthode	36
3.2.2	Analyse de convergence	37
3.3	MÉTHODE D'ITÉRATION VARIATIONNELLE (VIM)	42
3.3.1	Description de la méthode	43
3.3.2	Approche alternative du VIM	43
3.3.3	Analyse de convergence	45
3.4	NOUVELLE MÉTHODE ITÉRATIVE (NIM)	48
3.4.1	Description de la méthode	49
3.4.2	Convergence de NIM	50

DANS ce chapitre, nous présentons brièvement quelques méthodes semi-analytiques : la méthode de décomposition d'Adomian (ADM), la méthode de perturbation d'homotopie (HPM), la méthode d'itération variationnelle (VIM), et la nouvelle méthode itérative (NIM), puis nous étudions leurs convergences.

3.1 MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION D'ADOMIAN (ADM)

La décomposition d'Adomian est une méthode semi-analytique développée par le mathématicien américain George Adomian [Adomian, 1988] durant la seconde partie du XX^e siècle. Elle est utilisée pour la résolution large éventail de problèmes dont les modèles mathématiques impliqués, à savoir les problèmes algébriques, différentiels, intégrales, intégrodifférentielle, les équations différentielles ordinaires d'ordre supérieur et les équations aux dérivées partielles. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de résoudre par un schéma direct le problème considéré et donne la solution sous forme une série infinie, qui converge rapidement vers la solution exacte si elle existe [Cherruault et al., 1992].

3.1.1 Description de la méthode

Pour illustrer les idées de base de cette méthode, on considère l'équation fonctionnelle suivante :

$$Fu = g, \quad (3.1)$$

où F représente un opérateur différentiel ordinaire ou partiel non linéaire comprenant des termes linéaires et non-linéaires et g est une fonction connue. La partie linéaire est généralement décomposée en $L + R$, où L est un opérateur différentiel facilement inversible et R représente le reste de l'opérateur linéaire. Dans ces conditions, l'équation précédente peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Lu + Ru + Nu = g, \quad (3.2)$$

avec N un opérateur différentiel non-linéaire.

Nous pouvons écrire l'équation (3.2) comme suit :

$$Lu = g - Ru - Nu. \quad (3.3)$$

En multipliant l'équation (3.3) par L^{-1} , on obtient :

$$L^{-1}(Lu) = L^{-1}g - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu), \quad (3.4)$$

où $L^{-1} = \int \int \dots \int (\cdot) (dt)^n$ est l'inverse de l'opérateur L .

Puisque

$$L^{-1}(Lu) = u - \phi,$$

et ϕ est la constante de l'intégration.

Par conséquent, l'équation (3.4) devient :

$$u = \phi + L^{-1}g - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu). \quad (3.5)$$

La méthode d'Adomian consiste à rechercher la solution sous forme d'une série :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \quad (3.6)$$

puis à décomposer le terme non-linéaire Nu sous forme d'une série :

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (3.7)$$

Les termes A_n sont appelés polynômes d'Adomian et sont obtenus grâce à la relation suivante :

$$A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.8)$$

où λ est un paramètre réel introduit par convenance.

En substituant les équations (3.6) et (3.7) dans (3.5), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \phi + L^{-1}g - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (3.9)$$

D'où on déduit

$$\begin{cases} u_0 = \phi + L^{-1}g \\ u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1 \\ \vdots \\ u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \end{cases} \quad (3.10)$$

Il est à noter que cette identification n'est pas unique mais c'est la seule qui permet de définir explicitement les u_n . La relation (3.10) permet de calculer tous les termes de la série sans ambiguïté car les A_n ne dépendent que de u_0, u_1, \dots, u_n .

En pratique, il est presque impossible de calculer la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ (sauf pour des cas très particulier). Aussi se contente-t-on généralement d'une solution approchée φ_n , sous la forme de série tronquée :

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i, \quad n \geq 1.$$

La question qu'on peut poser est comment déterminer les $(A_n)_{n \geq 0}$ et à quelles conditions la méthode converge.

3.1.2 Les polynômes d'Adomian

Définition 3.1 Les polynômes d'Adomian sont définis par la formule :

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0) \\ A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} \end{cases}. \quad (3.11)$$

La formule proposée par G. Adomian pour le calcul des polynômes d'Adomian $(A_n)_{n \geq 0}$ est la suivante [Adomian, 1997] :

$$\begin{aligned} A_0(u_0) &= N(u_0) \\ A_1(u_0, u_1) &= u_1 \frac{\partial}{\partial u} N(u_0) \\ A_2(u_0, u_1, u_2) &= u_2 \frac{\partial}{\partial u} N(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} N(u_0) \\ A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) &= u_3 \frac{\partial}{\partial u} N(u_0) + u_1 u_2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} N(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 \frac{\partial^3}{\partial u^3} N(u_0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Cette formule s'écrit sous la forme :

$$A_n = \sum_{\nu=0}^n c(\nu, n) N^{(\nu)}(u_0), n \geq 1,$$

où $c(\nu, n)$ représente la somme de tous les produits (divisées par $m!$) des ν termes u_i dont la somme des indices i est égales à n , m étant le nombre de répétitions des mêmes termes dans le produit.

3.1.3 Convergence de la méthode ADM

D'importants théorèmes ont été donnés impliquant des conditions suffisantes de convergence. Toutes ces conditions portent sur l'opérateur non linéaire N .

En effet, de la relation (3.10) on déduit :

Théorème 3.1

$$\text{Si } \sum_{n \geq 0} A_n < +\infty \text{ alors } \sum_{n \geq 0} u_n < +\infty, \quad (3.12)$$

et réciproquement.

Les premières preuves de convergence ont été citées par Yves Cherruault. Elles sont basées sur la méthode du point fixe.

Donnons les grandes lignes de la démonstration (voir [Cherruault, 1990] pour plus de détails).

Notons d'abord que la méthode décompositionnelle appliquée à (3.1) se ramène à la recherche d'une suite :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

avec $S_0 = 0$ et vérifiant la relation récurrente suivante :

$$S_{n+1} = N(u_0 + S_n), S_0 = 0, u_0 = g, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

On en déduit le résultat de convergence suivant :

Théorème 3.2 *Si l'opérateur N est une contraction (c'est-à-dire vérifie $\|N\| < \delta < 1$) alors la suite $(S_n)_n$ satisfaisant la relation de récurrence $S_{n+1} = N(u_0 + S_n)$ avec $S_0 = 0, n \geq 0$ converge vers S solution de $S = N(u_0 + S)$.*

Démonstration. De la relation (3.13), on a :

$$\begin{aligned} \|S_n - S\| &= \|N(u_0 + S_n) - N(u_0 + S)\| \\ &\leq \|N\| \|S_n - S\| \leq \delta \|S_n - S\| \\ &\leq \delta^n \|S_1 - S\|. \end{aligned}$$

D'où la convergence de la suite $(S_n)_n$ vers S . □

Par ailleurs, on a :

$$\sum_{n \geq 0} A_n = \sum_{n \geq 1} u_n,$$

et comme $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente d'après le Théorème 3.1, on a alors le résultat suivant :

Corollaire 3.1 Si N est une contraction alors les séries des u_n et des A_n sont convergentes. De plus, $\sum_{n \geq 0} u_n$ est solution de l'équation :

$$Fu = g.$$

Exemple 3.1 Soit l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$\begin{cases} u' + u^2 = 0, t \geq 0, \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad (3.14)$$

On a

$$Lu = u' \text{ et } Nu = u^2,$$

avec $L = \frac{d}{dt}(\cdot)$.

L^{-1} représente une simple intégration de 0 à t . On trouve

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u(0) - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (3.15)$$

Les polynômes d'Adomian sont :

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0^2, \\ A_1 &= 2u_0u_1, \\ A_2 &= 2u_0u_2 + u_1^2, \\ A_3 &= 2u_0u_3 + 2u_1u_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Par conséquent on a :

$$\begin{aligned} u_0 &= 1, \\ u_1 &= -L^{-1}(A_0) = -t, \\ u_2 &= -L^{-1}(A_1) = t^2, \\ u_3 &= -L^{-1}(A_2) = -t^3, \\ u_4 &= -L^{-1}(A_3) = t^4, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Par (3.15), on a la solution de (3.14) donnée par :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \frac{1}{1+t}. \end{aligned}$$

Exemple 3.2 Soit l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$\begin{cases} u' - e^u = 0, t \geq 0, \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

On a

$$Lu = u' \text{ et } Nu = e^u,$$

avec $L = \frac{d}{dt}(\cdot)$.

L^{-1} représente une simple intégration de 0 à t . On trouve

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u(0) + L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (3.17)$$

Les polynômes d'Adomian sont :

$$\begin{aligned} A_0 &= e^{u_0}, \\ A_1 &= u_1, \\ A_2 &= u_2 + \frac{1}{2!}u_1^2, \\ A_3 &= u_3 + u_1u_2 + \frac{1}{3!}u_1^3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Par conséquent on a :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \\ u_1 &= L^{-1}(A_0) = t, \\ u_2 &= L^{-1}(A_1) = \frac{t^2}{2}, \\ u_3 &= L^{-1}(A_2) = \frac{t^3}{3}, \\ u_4 &= L^{-1}(A_3) = \frac{t^4}{4}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Par (3.17), on a la solution de (3.16) sous forme d'une série infinie donnée par :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \dots$$

3.2 MÉTHODE DE PERTURBATION D'HOMOTOPIE (HPM)

La méthode de perturbation d'homotopie, a été proposée et développée par le mathématicien chinois Ji-Haun-He en 1999 [He, 1999a],[He, 2004],[He, 2006]. Cette méthode a été largement utilisée pour résoudre des problèmes de frontière non-linéaire et à valeur initiale. La méthode de perturbation d'homotopie, est un outil mathématique puissant pour étudier une grande variété de problèmes apparaissant dans différents domaines. Elle est obtenue avec succès par de combinaison de la théorie de l'homotopie dans la topologie avec la théorie de la perturbation. La caractéristique importante de la méthode de perturbation d'homotopie est qu'elle fournit une solution presque exacte à un large éventail de problèmes linéaires et non-linéaires, sans la nécessité d'hypothèses irréalistes, la linéarisation, la discrétisation et le calcul des polynômes Adomian [Jin, 2008].

3.2.1 Description de la méthode

Pour illustrer le concept de base de cette méthode, nous considérons l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$A(u) - f(r) = 0, r \in \Omega, \quad (3.18)$$

avec les conditions aux limites :

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0, r \in \Gamma, \quad (3.19)$$

où A est un opérateur différentielle général, B est un opérateur définissant les conditions aux limites, $f(r)$ est une fonction analytique connue, u est la fonction inconnue et Γ la frontière du domaine Ω .

D'une façon générale, l'opérateur A peut être décomposé en deux opérateurs L et N , où L est un opérateur linéaire et N est un opérateur non-linéaire. Donc l'équation (3.18) peut être réécrite comme suit :

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0.$$

On construit une homotopie $v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, qui satisfait :

$$H(v, p) = (1 - p) [L(v) - L(u_0)] + p [A(v) - f(r)] = 0, \quad (3.20)$$

ou

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p [N(v) - f(r)] = 0, \quad (3.21)$$

où $r \in \Omega$, $p \in [0, 1]$ est le paramètre d'homotopie et u_0 est une approximation initiale de l'équation (3.18) qui satisfait les condition aux limites (3.19).

D'après les équations (3.20) et (3.21) nous avons :

$$\begin{aligned} H(v, 0) &= L(v) - L(u_0) = 0, \\ H(v, 1) &= A(v) - f(r) = 0. \end{aligned}$$

Le changement de p de zéro à l'unité transforme $u_0(r)$ en $u(r)$. En topologie avec cette dernière propriété, la fonction $v(r, p)$ est appelée homotopie. Selon la méthode HPM, nous pouvons utiliser le paramètre p comme un petit paramètre, et supposons que les solutions des équations (3.20) et (3.21) peuvent être écrites comme une série de puissance de p :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i. \quad (3.22)$$

Pour $p = 1$, la solution approximative de l'équation (3.18) devient :

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} v_i. \quad (3.23)$$

3.2.2 Analyse de convergence

Dans cette paragraphe, on étudie la convergence de la méthode HPM [Biazara et Ghazvini, 2009],[Ayatia et Biazar, 2015].

On peut réécrire la relation (3.21) comme suit :

$$L(v) - L(u_0) = p [f(r) - L(u_0) - N(v)]. \quad (3.24)$$

En remplaçant (3.22) dans (3.24), on obtient :

$$L\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right) - L(u_0) = p \left[f(r) - L(u_0) - N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right) \right]. \quad (3.25)$$

Ainsi

$$\sum_{i=0}^{\infty} L(v_i) - L(u_0) = p \left[f(r) - L(u_0) - N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right) \right]. \quad (3.26)$$

Selon le développement de Maclaurin de $N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right)$ par rapport à p , nous avons :

$$N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right) = \sum_{i=n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right) \right)_{p=0} p^i. \quad (3.27)$$

D'après [Ghorbani, 2009], on a :

$$\left(\frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right) \right)_{p=0} = \left(\frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^n p^i v_i\right) \right)_{p=0}.$$

Alors

$$N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^n p^i v_i\right) \right)_{p=0} p^i.$$

Posons :

$$H_n(v_0, v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left[N\left(\sum_{i=0}^n p^i v_i\right) \right]_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.28)$$

où H_n sont appelés polynômes de He [Ghorbani, 2009].

Alors

$$N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i p^i. \quad (3.29)$$

En remplaçant (3.29) dans (3.26), on obtient :

$$\sum_{i=0}^{\infty} L(v_i) - L(u_0) = p \left[f(r) - L(u_0) - \sum_{i=0}^{\infty} H_i p^i \right]. \quad (3.30)$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissance de p , on trouve :

$$\begin{aligned}
 p^0 & : L(v_0) - L(u_0) = 0, \\
 p^1 & : L(v_1) = f(r) - L(u_0) - H_0, \\
 p^2 & : L(v_2) = -H_1, \\
 p^3 & : L(v_3) = -H_2, \\
 & \vdots \\
 p^{n+1} & : L(v_{n+1}) = -H_n, \\
 & \vdots
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Donc, on conclut que

$$\begin{aligned}
 p^0 & : v_0 = u_0, \\
 p^1 & : v_1 = L^{-1}(f(r)) - u_0 - L^{-1}(H_0), \\
 p^2 & : v_2 = -L^{-1}(H_1), \\
 p^3 & : v_3 = -L^{-1}(H_2), \\
 & \vdots \\
 p^{n+1} & : v_{n+1} = -L^{-1}(H_n), \\
 & \vdots
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Théorème 3.3 *La solution de l'équation (3.18) obtenue par la méthode de perturbation d'homotopie est équivalente à la détermination de S_n donnée par :*

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n, S_0 = 0, \tag{3.33}$$

en utilisant le schéma itératif

$$S_{n+1} = -L^{-1}N_n(S_n + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)), \tag{3.34}$$

où

$$N_n \left(\sum_{i=0}^n v_i \right) = \sum_{i=0}^n H_i, n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.35}$$

Démonstration. Pour $n = 0$, d'après (3.34), on a :

$$S_1 = -L^{-1}N_0(S_0 + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)) = -L^{-1}(H_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)).$$

Alors

$$v_1 = -L^{-1}(H_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)).$$

Pour

$$\begin{aligned}
 S_2 & = -L^{-1}N_1(S_1 + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\
 & = -L^{-1}(H_1 + H_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\
 & = -L^{-1}(H_1) + v_1.
 \end{aligned}$$

Selon $S_2 = v_1 + v_2$, on obtient :

$$v_2 = -L^{-1}(H_1).$$

La démonstration de ce théorème se fera par induction.
Supposons que :

$$v_{k+1} = -L^{-1}(H_k), \text{ pour } k = 1, 2, \dots, n-1,$$

donc

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= -L^{-1}N_n(S_n + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\ &= -L^{-1}\left(\sum_{i=0}^n H_i\right) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\ &= -\sum_{i=0}^n L^{-1}(H_i) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\ &= v_1 + v_2 + \dots + v_n - L^{-1}(H_n). \end{aligned}$$

Puis, à partir de (3.33), on peut trouver

$$v_{n+1} = -L^{-1}(H_n).$$

Ce résultat est identique à celui de (3.32) obtenu par la méthode HPM. \square

Théorème 3.4 Soit B un espace de Banach.

1) $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$ converge vers $S \in B$, si

$$\exists (0 \leq \lambda < 1) \text{ tel que } (\forall n \in \mathbb{N} \implies \|v_n\| \leq \lambda \|v_{n-1}\|). \quad (3.36)$$

2) $S = \sum_{i=1}^{\infty} v_i$ vérifie

$$S = -L^{-1}N(S + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)). \quad (3.37)$$

Démonstration. 1) on a :

$$\|S_{n+1} - S_n\| = \|v_{n+1}\| \leq \lambda \|v_n\| \leq \lambda^2 \|v_{n-1}\| \leq \dots \leq \lambda^{n+1} \|v_0\|.$$

Pour $n, m \in \mathbb{N}, n \geq m$, nous avons :

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &= \|(S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + \dots + (S_{m+1} - S_m)\| \\ &\leq \|(S_n - S_{n-1})\| + \|(S_{n-1} - S_{n-2})\| + \dots + \|(S_{m+1} - S_m)\| \\ &\leq \lambda^n \|v_0\| + \lambda^{n-1} \|v_0\| + \dots + \lambda^{m+1} \|v_0\| \\ &\leq (\lambda^n + \lambda^{n-1} + \dots + \lambda^{m+1}) \|v_0\| \\ &\leq (\lambda^{m+1} + \dots + \lambda^n + \dots) \|v_0\| \\ &\leq \lambda^{m+1} (1 + \lambda + \dots + \lambda^n + \dots) \|v_0\| \\ &\leq \frac{\lambda^{m+1}}{1 - \lambda} \|v_0\|. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|S_n - S_m\| = 0.$$

$(S_n)_{n \geq 0}$, est suite de Cauchy dans l'espace de Banach, et elle est convergente, c'est-à-dire :

$$\exists S \in B, \text{ avec : } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = S.$$

2) D'après (3.34), on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} &= -L^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} N_n (S_n + v_0) - u_0 + L^{-1} (f(r)) \\ &= -L^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} N_n \left(\sum_{i=0}^n v_i \right) - u_0 + L^{-1} (f(r)) \\ S &= -L^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n H_i - u_0 + L^{-1} (f(r)) \\ &= -L^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} H_i - u_0 + L^{-1} (f(r)). \end{aligned}$$

Par (3.35) et (3.29), pour $p = 1$, il vient

$$\sum_{i=0}^{\infty} H_i = N \left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i \right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} S &= -L^{-1} N \left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i \right) - u_0 + L^{-1} (f(r)) \\ &= -L^{-1} N (S + v_0) - u_0 + L^{-1} (f(r)). \end{aligned}$$

□

Lemme 3.1 L'équation (3.37) est équivalente à :

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0. \quad (3.38)$$

Démonstration. On écrit l'équation (3.37) comme suit :

$$S + u_0 = -L^{-1} N (S + v_0) + L^{-1} (f(r)).$$

En appliquant l'opérateur L à l'équation précédente, on obtient :

$$L(S + u_0) = -N(S + v_0) + f(r).$$

Comme $u_0 = v_0$,

$$L(S + v_0) = -N(S + v_0) + f(r).$$

Soit $u = S + v_0 = \sum_{i=0}^{\infty} v_i$, l'équation (3.38) devient l'équation d'origine.

La solution de l'équation (3.37) est la même que celle de la solution de $A(u) - f(r) = 0$. □

Définition 3.2 Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on définit :

$$\lambda_i = \begin{cases} \frac{\|v_{i+1}\|}{\|v_i\|}, & \|v_i\| \neq 0 \\ 0, & \|v_i\| = 0. \end{cases}$$

Dans le Théorème 3.4, $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$ converge vers la solution exacte, lorsque $0 \leq \lambda_i < 1$.

Si v_i et v'_i sont obtenus par deux différentes homotopies, et $\lambda_i < \lambda'_i$ pour chaque $i \in \mathbb{N}$, le taux de convergence de $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$ est supérieure à $\sum_{i=0}^{\infty} v'_i$.

Exemple 3.3 On considère l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$\begin{cases} u' + u^2 = 0, t \geq 0, t \in \Omega, \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad (3.39)$$

Selon la méthode HPM, on peut construire l'homotopie suivante : $u : \Omega \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(1 - p)(v' - u'_0) + p(v' + v^2) = 0, p \in [0, 1], t \in \Omega, \quad (3.40)$$

avec $u_0 = 1$.

les solutions de l'équation (3.39), peuvent être écrites sous forme de série :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (3.41)$$

En remplaçant (3.41) dans (3.40) et en identifiant les termes avec ceux de mêmes puissances de p , on obtient :

$$\begin{aligned} p^0 &: v'_0 = u'_0, \\ p^1 &: v'_1 = -u_0 - v_0^2, v_1(0) = 0, \\ p^2 &: v'_2 = -2v_0v_1, v_2(0) = 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Par conséquent, les premiers termes de la solution sont données par :

$$\begin{aligned} p^0 &: v_0 = 1, \\ p^1 &: v_1 = -t, \\ p^2 &: v_2 = t^2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Donc la solution de l'équation (3.39) est :

$$\begin{aligned} u &= \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots = 1 - t + t^2 - \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \frac{1}{1+t}. \end{aligned}$$

Exemple 3.4 On considère l'équation de Riccati suivante :

$$\begin{cases} u' = 2u - u^2 + 1, t \geq 0, t \in \Omega, \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (3.42)$$

On cherche la solution avec la méthode HPM, nous pouvons construire l'homotopie suivante : $u : \Omega \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(1 - p)(v' - u'_0) + p(v' - 2v + v^2 - 1) = 0, p \in [0, 1], t \in \Omega,$$

Les solutions de l'équation (3.42), peuvent être écrites sous forme de série :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissances de p , on obtient

$$\begin{aligned} p^0 & : v'_0 = u'_0, \\ p^1 & : v'_1 + u'_0 + u_0^2 - 1 = 0, \\ p^2 & : v'_2 + 2v_0v_1 = 0, \\ p^3 & : v'_3 + v'_1 + 2v_0v_1 = 0, \\ p^4 & : v'_4 + v'_1 + 2v_0v_3 + 2v_1v_2 = 0, \\ & \vdots \end{aligned}$$

Par conséquent, les premiers termes de la solution sont donnés par :

$$\begin{aligned} p^0 & : v_0 = t, \\ p^1 & : v_1 = \frac{1}{4} (-1 + e^t - 2t + 2t^2), \\ p^2 & : v_2 = \frac{1}{4} (t^2 - t^2e^t + 2t^3), \\ & \vdots \end{aligned}$$

En prenant $p = 1$, la solution approximative de l'équation (3.42) est donnée par :

$$u = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

ce que veut dire que

$$u = t + \frac{1}{4} (-1 + e^t - 2t + 2t^2) + \frac{1}{4} (t^2 - t^2e^t + 2t^3) + \dots$$

D'autre part, après l'utilisation du développement de Taylor de e^t au voisinage de zéro, la solution de l'équation (3.42) est donnée par :

$$\begin{aligned} u & = t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 - \frac{7}{15}t^5 - \frac{7}{45}t^6 + \frac{53}{315}t^7 + \frac{71}{315}t^8 + \dots \\ & = 1 + \sqrt{2} \tanh \left(\sqrt{2}t + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \right). \end{aligned}$$

3.3 MÉTHODE D'ITÉRATION VARIATIONNELLE (VIM)

La méthode d'itération variationnelle (VIM) a été proposée et développée par le mathématicien chinois Je-Haun-He au début des années 1990 [He, 1999b],[He, 2000],[He, 2007], elle a été proposée la première fois pour résoudre des problèmes en mécanique. Cette méthode a été employée pour résoudre une grande variété de problèmes linéaires et non-linéaires avec des approximations successives rapidement convergentes vers la solution exacte si elle existe. La méthode est basée sur la détermination du multiplicateur de Lagrange de façon optimale par l'intermédiaire de la théorie variationnelle.

3.3.1 Description de la méthode

Pour illustrer les idées de base de cette méthode, on considère l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$L(u) + N(u) = g(t), \quad (3.43)$$

où L est un opérateur différentiel linéaire, N est un opérateur non-linéaire et g une fonction connue.

Nous pouvons construire une correction fonctionnelle selon la méthode d'itération variationnelle suivante :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau) [L(u_n(\tau)) + N(\tilde{u}_n(\tau)) - g(\tau)] d\tau, n \geq 0, \quad (3.44)$$

où λ est un multiplicateur générale de Lagrange. L'indice n représente la $n^{\text{ième}}$ approximation et $\tilde{u}_n(\tau)$ est considéré comme une variation restreinte c'est-à-dire $\delta\tilde{u}_n(\tau) = 0$. Pour résoudre l'équation (3.43) par la méthode VIM, on doit d'abord déterminer le multiplicateur de Lagrange λ qui va être identifier de manière optimale via l'intégration par parties. Alors les approximations successives u_n de la solution $u(t)$ vont être obtenues en utilisant le multiplicateur de Lagrange et une fonction u_0 bien choisie (qui doit au moins satisfaire les conditions initiales), par conséquent, la solution exacte sera la limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u(t).$$

3.3.2 Approche alternative du VIM

Dans ce paragraphe, on présent une approche alternative du VIM. Cette approche peut être réalisée de manière fiable et efficace, pour résoudre l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$Lu(t) + Nu(t) = g(t), t > 0. \quad (3.45)$$

avec les conditions initiales

$$u^{(k)}(0) = c_k, k = 0, 1, \dots, m - 1, \quad (3.46)$$

où L est un opérateur différentiel linéaire défini par $L = \frac{d^m}{dt^m}$, $m \in \mathbb{N}$, N est un opérateur non-linéaire, g une fonction connue et c_k sont des nombres réels.

Selon la méthode d'itération variationnelle, on peut construire une formule de correction fonctionnelle pour (3.45) comme suit :

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \int_0^t [\lambda(\tau) (Lu_k(\tau) + N\tilde{u}_k(\tau) - g(\tau))] d\tau, \quad (3.47)$$

où λ est un multiplicateur général de Lagrange, qui peut être identifie de manière optimale par la théorie variationnelle. Ici, nous appliquons des variations restreintes au terme non-linéaire Nu , dans ce cas, nous pouvons facilement déterminer le multiplicateur.

Puis rendre la correction fonctionnelle (3.47) stationnaire en remarquant que $\delta\tilde{u}_k(\tau) = 0$, l'équation :

$$\delta u_{k+1}(t) = \delta u_k(t) + \delta \int_0^t [\lambda(\tau) (Lu_k(\tau) - g(\tau))] d\tau, \quad (3.48)$$

donne les multiplicateurs de Lagrange suivants :

$$\begin{aligned} \lambda &= -1 \quad \text{pour } m = 1, \\ \lambda &= \tau - t \quad \text{pour } m = 2, \end{aligned}$$

et en général :

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} (\tau - t)^{m-1} \quad \text{pour } m \geq 1. \quad (3.49)$$

Par conséquent, en substituant (3.49) dans la fonctionnelle (3.47), on obtient la formule d'itération suivante :

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \int_0^t \left[\frac{(-1)^m}{(m-1)!} (\tau - t)^{m-1} (Lu_k(\tau) + Nu_k(\tau) - g(\tau)) \right] d\tau, \quad (3.50)$$

Maintenant, nous définissons l'opérateur $A(u)$ comme :

$$A(u) = \int_0^t \left[\frac{(-1)^m}{(m-1)!} (\tau - t)^{m-1} (Lu_k(\tau) + Nu_k(\tau) - g(\tau)) \right] d\tau, \quad (3.51)$$

et on définit les composants $v_k, k = 0, 1, 2, \dots$, comme suit :

$$\begin{cases} v_0 = u_0, \\ v_1 = A(v_0), \\ v_2 = A(v_0 + v_1), \\ \vdots \\ v_{k+1} = A(v_0 + v_1 + \dots + v_k). \end{cases} \quad (3.52)$$

Donc, nous avons

$$u(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t).$$

Finalement, la solution du problème (3.45) peut être déduite en utilisant (3.51) et (3.52), sous forme de série :

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t). \quad (3.53)$$

L'approximation initiale $v_0 = u_0$ peut être choisie librement si elle satisfait aux conditions initiales du problème. Le succès de la méthode dépend du bon choix de l'approximation initiale v_0 . Dans cette approche alternative, nous choisissons l'approximation initiale comme suit :

$$v_0 = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k}{k!} t^k. \quad (3.54)$$

3.3.3 Analyse de convergence

Dans ce paragraphe, nous étudions la convergence de la méthode d'itération variationnelle, selon l'approche alternative de la méthode VIM présentée dans le paragraphe précédent [Tatari et Dehghan, 2007],[Odibat, 2010].

Théorème 3.5 Soit H un espace de Hilbert et $A : H \rightarrow H$, un opérateur défini par (3.51).

La solution en série $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$ converge si, $\exists 0 < \gamma < 1$ tel que :

$$\|A(v_0 + v_1 + \dots + v_{k+1})\| \leq \gamma \|A(v_0 + v_1 + \dots + v_k)\|,$$

c'est-à-dire

$$\|v_{k+1}\| \leq \gamma \|v_k\|, \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Démonstration. Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ une suite définie comme suit :

$$\begin{cases} S_0 = v_0, \\ S_1 = v_0 + v_1, \\ S_2 = v_0 + v_1 + v_2, \\ \vdots \\ S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n. \end{cases}$$

On montre que $(S_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans l'espace Hilbert H .

Pour cela, on a :

$$\|S_{n+1} - S_n\| = \|v_{n+1}\| \leq \gamma \|v_n\| \leq \gamma^2 \|v_{n-1}\| \leq \dots \leq \gamma^{n+1} \|v_0\|.$$

Pour $n, m \in \mathbb{N}, n \geq m$, nous avons :

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &= \|(S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + \dots + (S_{m+1} - S_m)\| \\ &\leq \|(S_n - S_{n-1})\| + \|(S_{n-1} - S_{n-2})\| + \dots + \|(S_{m+1} - S_m)\| \\ &\leq \gamma^n \|v_0\| + \gamma^{n-1} \|v_0\| + \dots + \gamma^{m+1} \|v_0\| \\ &\leq (\gamma^n + \gamma^{n-1} + \dots + \gamma^{m+1}) \|v_0\| \\ &\leq (\gamma^{m+1} + \dots + \gamma^n + \dots) \|v_0\| \\ &\leq \gamma^{m+1} (1 + \gamma + \dots + \gamma^n + \dots) \|v_0\| \\ &\leq \frac{\gamma^{m+1}}{1 - \gamma} \|v_0\|, \end{aligned}$$

et comme $0 < \gamma < 1$, on obtient :

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|S_n - S_m\| = 0.$$

Par conséquent, $(S_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert H , et ceci implique que la solution en série $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$ converge. \square

Théorème 3.6 Si la solution en série $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$ converge, alors c'est une solution exacte du problème non-linéaire (3.45).

Démonstration. Supposons que la solution en série $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$ converge, alors nous avons :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 0,$$

$$\sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0,$$

donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} (v_{k+1} - v_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (v_{n+1} - v_0) = -v_0. \quad (3.55)$$

En appliquant l'opérateur $L = \frac{d^m}{dt^m}$, $m \in \mathbb{N}$, des deux côtés de l'équation (3.55) puis, la relation (3.54), on obtient :

$$\sum_{k=0}^{\infty} L(v_{k+1} - v_k) = -L(v_0) = 0. \quad (3.56)$$

D'autre part, à partir de la relation (3.52), on a :

$$L(v_{k+1} - v_k) = L(A(v_0 + v_1 + \dots + v_k) - A(v_0 + v_1 + \dots + v_{k-1})), k \geq 1.$$

En utilisant la définition de l'opérateur $A(u)$ défini par (3.51), on obtient :

$$\begin{aligned} L(v_{k+1} - v_k) = & L \left(\int_0^t \left[\frac{(-1)^m}{(m-1)!} (\tau - t)^{m-1} (L(v_0 + v_1 + \dots + v_k) \right. \right. \\ & \left. \left. - L(v_0 + v_1 + \dots + v_{k-1}) + N(v_0 + v_1 + \dots + v_k) \right. \right. \\ & \left. \left. - N(v_0 + v_1 + \dots + v_{k-1}) \right] d\tau \right), k \geq 1. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Maintenant, l'opérateur $A(u)$, défini par (3.51), donne l'intégrale du $m^{\text{ième}}$ fois de $Lu(t) + Nu(t) - g(t)$. Puisque l'opérateur différentiel $L = \frac{d^m}{dt^m}$ d'ordre m est l'inverse de l'opérateur intégral $m^{\text{ième}}$ fois, alors l'équation (3.57) devient :

$$L(v_{k+1} - v_k) = L(v_k) + N(v_0 + v_1 + \dots + v_k) - N(v_0 + v_1 + \dots + v_{k-1}), k \geq 1.$$

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n L(v_{k+1} - v_k) = & L(v_0) + N(v_0) - g(t) \\ & + L(v_1) + N(v_0 + v_1) - N(v_0) \\ & + L(v_2) + N(v_0 + v_1 + v_2) - N(v_0 + v_1) \\ & \vdots \\ & + L(v_n) + N(v_0 + v_1 + \dots + v_n) - N(v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}). \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} L(v_{k+1} - v_k) = L\left(\sum_{k=0}^{\infty} v_k\right) + N\left(\sum_{k=0}^{\infty} v_k\right) - g(t). \quad (3.58)$$

De (3.55) et (3.58), nous pouvons observer que $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$ est une solution exacte du problème (3.45). \square

Exemple 3.5 *Considérons l'équation différentielle non-linéaire suivante :*

$$\begin{aligned} u'(t) &= u^2(t) + 1, 0 < t \leq 1, \\ u(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

La correction fonctionnelle de l'équation (3.59) selon la méthode VIM, est donnée par :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau)(u'_n(\tau) - (\widetilde{u}_n)^2(\tau) - 1)d\tau.$$

D'après (3.49), le multiplicateur de Lagrange $\lambda(\tau)$ peut être identifié comme étant $\lambda(\tau) = -1$, donc la formule d'itération peut être obtenue comme suit :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \int_0^t (u'_n(\tau) - (u_n)^2(\tau) - 1)d\tau. \quad (3.60)$$

D'après la formule (3.60), nous obtenons les premiers termes de la solution approchée :

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 0, \\ u_1(t) &= t, \\ u_2(t) &= t + \frac{1}{3}t^3, \\ u_3(t) &= t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^6 + \frac{1}{63}t^7, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Et comme

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t),$$

nous pouvons exprimer la solution de l'équation (3.59) sous forme d'une série convergente vers la solution exacte donnée par :

$$\begin{aligned} u(t) &= t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^6 + \frac{1}{63}t^7 + \dots \\ &= \tan(t). \end{aligned}$$

Exemple 3.6 *Considérons l'équation différentielle linéaire suivante :*

$$\begin{aligned} u''(t) + u(t) &= 0, 0 < t \leq 1, \\ u(0) &= 1, u'(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

La correction fonctionnelle de l'équation (3.61) selon la méthode VIM, est donnée par :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(\tau)(u_n''(\tau) + u_n(\tau))d\tau.$$

D'après (3.49), le multiplicateur de Lagrange $\lambda(\tau)$ peut être identifié comme étant $\lambda(\tau) = \tau - t$, donc la formule d'itération peut être obtenue comme suit :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t (\tau - t)(u_n''(\tau) + u_n(\tau))d\tau. \quad (3.62)$$

D'après la formule (3.62), nous obtenons les premiers termes de la solution approchée :

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 1, \\ u_1(t) &= 1 - \frac{1}{2!}t^2, \\ u_2(t) &= 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4, \\ u_3(t) &= 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Et comme

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t),$$

nous pouvons exprimer la solution de l'équation (3.61) sous forme d'une série convergente vers la solution exacte donnée par :

$$\begin{aligned} u(t) &= 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \dots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{t^{2k}}{2k!} = \cos(t). \end{aligned}$$

3.4 NOUVELLE MÉTHODE ITÉRATIVE (NIM)

Récemment, Daftardar-Gejji et Jafari [Daftardar-Gejji et Jafari, 2006] ont proposé une nouvelle technique de résolution d'équations fonctionnelles linéaires / non-linéaires appelée nouvelle méthode itérative (NIM) ou (DJM). La nouvelle méthode itérative a été largement utilisée par de nombreux chercheurs pour le traitement d'équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, linéaires et non linéaires d'ordre entier et fractionnaire. La méthode converge vers la solution exacte si elle existe par des approximations successives. L'avantage de cette méthode est qu'elle est facile à comprendre et à appliquer, elle fournit de meilleurs résultats et ne nécessite aucune hypothèse restrictive pour les termes non linéaires, contrairement à certaines techniques existantes.

3.4.1 Description de la méthode

Pour illustrer les idées de base du NIM, considérons l'équation fonctionnelle générale suivante :

$$u = N(u) + f, \quad (3.63)$$

où N est un opérateur non-linéaire d'un espace de Banach $B \rightarrow B$ et f est une fonction connue.

On cherche une solution u de l'équation (3.63) sous forme d'une série :

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i. \quad (3.64)$$

L'opérateur non linéaire N peut être décomposé comme suit :

$$N\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i\right) = N(u_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ N\left(\sum_{j=0}^i u_j\right) - N\left(\sum_{j=0}^{i-1} u_j\right) \right\}. \quad (3.65)$$

À partir des équations (3.64) et (3.65), l'équation (3.63) peut être représentée sous la forme suivante :

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i = f + N(u_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ N\left(\sum_{j=0}^i u_j\right) - N\left(\sum_{j=0}^{i-1} u_j\right) \right\}. \quad (3.66)$$

Nous définissons la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} u_0 &= f, \\ u_1 &= N(u_0), \\ u_{n+1} &= N\left(\sum_{j=0}^n u_j\right) - N\left(\sum_{j=0}^{n-1} u_j\right), n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.67)$$

Puis

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{n+1} = N(u_0 + u_1 + \dots + u_n), n = 1, 2, \dots,$$

et

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i = f + N\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i\right).$$

Si N est une contraction, c'est-à-dire :

$$\|N(x) - N(y)\| \leq k\|x - y\|, 0 < k < 1,$$

alors, a partir de (3.67), nous avons

$$\begin{aligned} u_0 &= f, \\ \|u_1\| &= \|N(u_0)\| \leq k\|u_0\|, \\ \|u_2\| &= \|N(u_0 + u_1) - N(u_0)\| \leq k\|u_1\| \leq k^2\|u_0\| \\ \|u_3\| &= \|N(u_0 + u_1 + u_2) - N(u_0 + u_1)\| \leq k\|u_2\| \leq k^3\|u_0\| \\ &\vdots \\ \|u_{n+1}\| &= \|N(u_0 + u_1 + \dots + u_n) - N(u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1})\| \\ &\leq k\|u_n\| \leq k^{n+1}\|u_0\|, n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

et la série $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ converge absolument et uniformément vers une solution de l'équation (3.63), ce qui est unique du point de vu du Théorème des points fixes de Banach 1.2. Pour plus de détails, vous pouvez voir [Bhalekar et Daftardar-Gejji, 2011].

La solution approximative à n -terme de l'équation (3.63) est donnée par :

$$u = \sum_{i=0}^{n-1} u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}.$$

3.4.2 Convergence de NIM

Nous analysons maintenant la convergence du NIM pour résoudre toute l'équation fonctionnelle générale (3.63).

Soit $e = u - u^*$, où u est la solution exacte, u^* la solution approximative et e l'erreur dans la solution de (3.63), évidemment e satisfait (3.63), c'est-à-dire :

$$e = N(e) + f,$$

et la relation de récurrence (3.67) devient :

$$\begin{aligned} e_0 &= f, \\ e_1 &= N(e_0), \\ e_{n+1} &= N\left(\sum_{j=0}^n e_j\right) - N\left(\sum_{j=0}^{n-1} e_j\right), n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Si $\|N(x) - N(y)\| \leq k\|x - y\|, 0 < k < 1$, alors

$$\begin{aligned} e_0 &= f, \\ \|e_1\| &= \|N(e_0)\| \leq k\|e_0\|, \\ \|e_2\| &= \|N(e_0 + e_1) - N(e_0)\| \leq k\|e_1\| \leq k^2\|e_0\| \\ \|e_3\| &= \|N(e_0 + e_1 + e_2) - N(e_0 + e_1)\| \leq k\|e_2\| \leq k^3\|e_0\| \\ &\vdots \\ \|e_{n+1}\| &= \|N(e_0 + e_1 + \dots + e_n) - N(e_0 + e_1 + \dots + e_{n-1})\| \\ &\leq k\|e_n\| \leq k^{n+1}\|e_0\|, n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

Donc $e_{n+1} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, ce qui prouve la convergence du NIM pour résoudre l'équation fonctionnelle générale (3.63).

Exemple 3.7 *Considérons l'équation de Riccati suivante :*

$$u'(t) + u^2(t) = 1, t > 0, \quad (3.68)$$

avec la condition initiale

$$u(0) = 0. \quad (3.69)$$

En intégrant l'équation (3.68) de 0 à t et en utilisant la condition initiale (3.69), on a :

$$\begin{aligned} u(t) &= t - \int_0^t u^2(\tau) d\tau \\ &= f(t) + N(u(t)), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} f(t) &= t, \\ N(u(t)) &= -\int_0^t u^2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

En appliquant NIM, nous avons les premières approximations suivantes :

$$\begin{aligned} u_0(t) &= t, \\ u_1(t) &= N(u_0(t)) = -\frac{t^3}{3}, \\ u_2(t) &= N(u_1(t) + u_0(t)) - N(u_0(t)) = \frac{2}{15}t^5 - \frac{1}{63}t^7, \\ &\vdots \end{aligned}$$

etc.

Et comme

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(t),$$

nous pouvons exprimer la solution de l'équation (3.68) sous forme d'une série infinie par :

$$\begin{aligned} u(t) &= t - \frac{t^3}{3} + \frac{2}{15}t^5 - \frac{1}{63}t^7 + \dots \\ &= \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}. \end{aligned}$$

Exemple 3.8 Considérons l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$u''(t) + 2u'(t) + u(t) + 8u^3(t) = 1 - 3x, \quad (3.70)$$

avec les conditions initiales

$$u(0) = \frac{1}{2}, u'(0) = \frac{1}{2}. \quad (3.71)$$

En intégrant deux fois les deux côtés de l'équation (3.70) de 0 à t et en utilisant les conditions initiales (3.71), on a :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2} + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - 2 \int_0^t u(\tau) d\tau - \int_0^t \int_0^t (u(\tau) + 8u^3(\tau)) d\tau d\tau \\ &= \frac{1}{2} + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - 2 \int_0^t u(\tau) d\tau - \int_0^t (t - \tau) (u(\tau) + 8u^3(\tau)) d\tau \\ &= f(t) + N(u(t)), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}, \\ N(u(t)) &= -2 \int_0^t u(\tau) d\tau - \int_0^t (t - \tau) (u(\tau) + 8u^3(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

En appliquant NIM, nous avons les premières approximations suivantes :

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \frac{1}{2} + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}, \\ u_1(t) &= N(u_0(t)) = -t - \frac{5t^2}{4} - \frac{11t^3}{12} - \frac{7t^4}{24} + \frac{7t^5}{40}, \\ u_2(t) &= N(u_1(t) + u_0(t)) - N(u_0(t)) = t^2 + 2t^3 + \frac{19t^4}{16} + \frac{31t^5}{80} - \frac{371t^6}{720}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Et comme

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(t),$$

on peut exprimer la solution de l'équation (3.70) sous forme d'une série infinie par :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2} \left(1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-t}. \end{aligned}$$

LES MÉTHODES FNNDM, NHPM, NVIM ET NINTM POUR RÉSOUUDRE LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON-LINÉAIRES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

4

SOMMAIRE

4.1	TRANSFORMATION NATURELLE	55
4.1.1	Définitions et propriétés	55
4.2	MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION NATURELLE FRACTIONNAIRE (FNNDM)	57
4.2.1	Applications de la méthode FNNDM	59
4.3	MÉTHODE DE PERTURBATION D'HOMOTOPIE NATURELLE (NHPM)	66
4.3.1	Applications de la méthode NHPM	67
4.4	MÉTHODE D'ITÉRATION VARIATIONNELLE NATURELLE (NVIM)	72
4.4.1	Applications de la méthode NVIM	72
4.5	NOUVELLE MÉTHODE DE TRANSFORMATION NATURELLE ITÉRA- TIVE (NINTM)	79
4.5.1	Applications de la méthode NINTM	80

DANS ce chapitre, nous présentons des algorithmes appropriés pour résoudre les équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaires, où la dérivée fractionnaire est au sens de Caputo, en utilisant différentes méthodes dite : FNNDM, NHPM, NVIM et NINTM ainsi que les méthodes dite : méthodes combinées d'ADM, HPM, VIM et NIM avec la transformation naturelle.

Nous commencerons par présenter la définition et certains résultats fondamentaux sur les propriétés de la transformation naturelle, puis nous présentons les principes de base de ces méthodes et aussi quelques

applications aux équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaire. A la fin de cette thèse, nous présentons nos résultats sous forme d'articles pour la résolution d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaire temporelle dite : "Nonlinear Caputo time-fractional wave-like equations with variable coefficients", moyennant ces méthodes.

4.1 TRANSFORMATION NATURELLE

Les méthodes de transformations intégrales ont leur origine qui remontent au *XIX^e* siècle par les travaux de Joseph Fourier et Oliver Heaviside. L'idée fondamentale est de représenter une fonction $f(t)$ en termes de transformation $F(z)$

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(z, t) f(t) dt,$$

où les fonctions $K(z, t)$ sont appelées noyaux.

Il y a un certain nombre de transformations intégrales importantes comme celle de Fourier, Laplace, Sumudu, Hankel, Laguerre, Hermite et la transformation de Mellin. Ils sont définis en choisissant différents noyaux.

4.1.1 Définitions et propriétés

Dans cette partie, nous présentons les définitions et les propriétés de la transformation naturelle.

Soit une fonction $f(t), t \in \mathbb{R}$, alors la transformation intégrale générale est définie par :

$$\mathcal{T}[f(t)](s) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(s, t) f(t) dt, \quad (4.1)$$

où $K(s, t)$ représente le noyau de la transformation, s est un nombre réel (complexe) indépendant de t . Notons que lorsque $K(s, t)$ est e^{-st} , $tJ_n(st)$, et $t^{s-1}(st)$, alors l'équation (4.1) donne respectivement la transformation de Laplace, la transformation de Hankel et la transformation de Mellin.

Maintenant, pour $f(t), t \in (-\infty, \infty)$, considérons les transformées intégrales définies par [Khan et Khan, 2008] :

$$\mathcal{T}[f(t)](v) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) f(vt) dt, \quad (4.2)$$

et

$$\mathcal{T}[f(t)](s, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(s, t) f(vt) dt. \quad (4.3)$$

Le noyau $K(t) = e^{-t}$ dans l'équation (4.2) donne la transformée intégrale de Sumudu où le paramètre s est remplacé par v . L'équation (4.3) est la combinaison des transformées intégrales (4.1) et (4.2) avec les noyaux déjà définis. De plus, pour toute valeur de n , les transformées généralisées de Laplace et de Sumudu sont définies respectivement par [Khan et Khan, 2008] :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = s^n \int_0^{+\infty} e^{-s^{n+1}t} f(s^n t) dt, \quad (4.4)$$

et

$$\mathcal{S}[f(t)] = G(v) = v^n \int_0^{+\infty} e^{-v^{n+1}t} f(v^n t) dt. \quad (4.5)$$

Notons que lorsque $n = 0$, l'équation (4.4) et l'équation (4.5) sont respectivement les transformées de Laplace et de Sumudu.

La transformation naturelle de la fonction $f(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ est définie par [Belgacem et Silambarasan, 2012] :

$$\mathcal{N}[f(t)] = R(s, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(vt) dt, \quad s, v \in (-\infty, \infty), \quad (4.6)$$

où $\mathcal{N}[f(t)]$ est la transformation naturelle de la fonction $f(t)$ et les variables s et v sont les variables de transformation naturelle. De plus, si la fonction $f(t)H(t)$ qui est définie sur l'axe réel positif, où $H(\cdot)$ est la fonction de Heaviside, $t \in (0, \infty)$, si on suppose que :

$$A = \left\{ f(t) / \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < M e^{\frac{|t|}{\tau_j}}, \text{ if } t \in (-1)^j \times [0, \infty), j = 1, 2, \dots \right\},$$

alors, la transformation naturelle est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[f(t)H(t)] &= \mathcal{N}^+[f(t)] = R^+(s, v) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(vt) dt \quad (4.7) \\ &= \frac{1}{v} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{st}{v}} f(t) dt, s, v \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Notons que si $v = 1$, l'équation (4.7) est réduite à la transformation de Laplace et si $s = 1$, l'équation (4.7) est réduite à la transformation de Sumudu.

Propriétés

Quelques propriétés de base de la transformation naturelle sont données comme suit [Belgacem et Silambarasan, 2012] :

- 1) La transformation naturelle est un opérateur linéaire. Autrement dit, si λ et μ sont des constantes non nulles, alors :

$$\mathcal{N}^+[\lambda f(t) \pm \mu g(t)] = \lambda \mathcal{N}^+[f(t)] \pm \mu \mathcal{N}^+[g(t)].$$

- 2) Si $f^{(n)}(t)$ est la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $f(t)$ par rapport à "t" alors sa transformation naturelle est donnée par :

$$\mathcal{N}^+[f^{(n)}(t)] = R_n^+(s, v) = \frac{s^n}{v^n} R^+(s, v) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{n-(k+1)}}{v^{n-k}} f^{(k)}(0).$$

- 3) (Propriété de convolution) Supposons que $F^+(s, v)$ et $G^+(s, v)$ sont les transformées naturelles de $f(t)$ et $g(t)$ respectivement, définis sur l'ensemble A , alors la transformation naturelle de leur convolution est donnée par :

$$\mathcal{N}^+ [(f * g)(t)] = vF^+(s, v)G^+(s, v),$$

où la convolution de deux fonctions est définie par :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\xi)g(t - \xi)d\xi = \int_0^t f(t - \xi)g(\xi)d\xi.$$

4) Quelques fonctions élémentaires et leurs transformations.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+ [1] &= \frac{1}{s}, \\ \mathcal{N}^+ [t] &= \frac{v}{s^2}, \\ \mathcal{N}^+ \left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right] &= \frac{v^{n-1}}{s^n}, \quad n = 1, 2, \dots \\ \mathcal{N}^+ [t^\alpha] &= \Gamma(\alpha + 1) \frac{v^\alpha}{s^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1. \end{aligned}$$

Théorème 4.1 [Khalouta et Kadem, 2019c] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$ tels que $n - 1 < \alpha \leq n$, et $R^+(s, v)$ est la transformation naturelle de la fonction $f(t)$, alors la transformation naturelle notée par ${}^c R_\alpha^+(s, v)$ de la dérivée fractionnaire de Caputo de $f(t)$ d'ordre α , est donnée par :

$$\mathcal{N}^+ [{}^c D^\alpha f(t)] = {}^c R_\alpha^+(s, v) = \frac{s^\alpha}{v^\alpha} R^+(s, v) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{\alpha-(k+1)}}{v^{\alpha-k}} \left[D^k f(t) \right]_{t=0}. \quad (4.8)$$

Dans ce travail, nous considérons la dérivée fractionnaire temporelle au sens de Caputo.

Définition 4.1 Soit $u(x, t) \in C_{-1}^n(I \times \mathbb{R}^+)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in I \subset \mathbb{R}$. la dérivée fractionnaire temporelle au sens de Caputo de u est défini pour $t > 0$ par :

$${}^c D_t^\alpha u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} \frac{\partial^n u(x, \tau)}{\partial \tau^n} d\tau, & n - 1 < \alpha < n, \\ \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n}, & \alpha = n. \end{cases}$$

4.2 MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION NATURELLE FRACTIONNAIRE (FNDM)

Pour illustrer les idées de base de la méthode de décomposition naturelle fractionnaire (FNDM) [Khalouta et Kadem, 2019c], considérons l'équation aux dérivées partielles non-linéaire non-homogène d'ordre fractionnaire temporelle suivante :

$${}^c D_t^\alpha u(x, t) + Lu(x, t) + Nu(x, t) = g(x, t), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (4.9)$$

avec les conditions initiales

$$\frac{\partial u^i(x, 0)}{\partial t^i} = u^{(i)}(x, 0) = f_i(x), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n - 1, \quad (4.10)$$

où ${}^c D_t^\alpha$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α , où $n - 1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}^*$, L est un opérateur linéaire, N est un opérateur non-linéaire et $g(x, t)$ est le terme source.

En appliquant la transformée naturelle aux deux membres de l'équation (4.9), on obtient :

$$\mathcal{N}^+ [{}^c D_t^\alpha u(x, t)] = -\mathcal{N}^+ [Lu(x, t)] - \mathcal{N}^+ [Nu(x, t)] + \mathcal{N}^+ [g(x, t)].$$

En utilisant le Théorème 4.1 et les conditions initiales (4.10), nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+ [u(x, t)] &= \frac{v^\alpha}{s^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{\alpha-(k+1)}}{v^{\alpha-k}} \left[u^{(k)}(x, 0) \right]_{t=0} + \frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [g(x, t)] \\ &\quad - \frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Lu(x, t) + Nu(x, t)] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Par la transformée naturelle inverse aux deux membres de (4.11), nous avons :

$$u(x, t) = G(x, t) - \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Lu(x, t) + Nu(x, t)] \right), \quad (4.12)$$

où $G(x, t)$ représente le terme découlant du terme source et des conditions initiales prescrites.

Maintenant, nous représentons la solution approximative sous forme d'une série infinie :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t). \quad (4.13)$$

Le terme non-linéaire peut être décomposé en :

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (4.14)$$

où A_n est un polynôme d'Adomian, qui peut être calculé à l'aide de la formule (3.8).

En utilisant (4.13) et (4.14), nous pouvons réécrire (4.12) comme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = G(x, t) - \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[L \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right] \right), \quad (4.15)$$

qui est la combinée de la méthode de décomposition d'Adomian et de la transformée naturelle de dérivée fractionnaire au sens de Caputo (FNDM).

En comparant les deux membres de l'équation (4.15), on obtient :

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= G(x, t), \\ u_1(x, t) &= -\mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Lu_0(x, t) + A_0] \right), \\ u_2(x, t) &= -\mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Lu_1(x, t) + A_1] \right), \\ u_3(x, t) &= -\mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Lu_2(x, t) + A_2] \right), \\ &\vdots \end{aligned}$$

En général, la relation récursive est donnée par :

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= G(x, t), \\ u_{n+1}(x, t) &= -\mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\nu^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Lu_n(x, t) + A_n] \right), n \geq 0. \end{aligned}$$

Finalement, la solution approximative de l'équation (4.9) est donnée par :

$$u(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t).$$

4.2.1 Applications de la méthode FNDM

Exemple 4.1 On considère l'équation de Burger d'ordre fractionnaire temporelle suivante :

$${}^c D_t^\alpha u + uu_x - u_{xx} = 0, 0 < \alpha \leq 1, \quad (4.16)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = x. \quad (4.17)$$

La solution exacte de l'équation (4.16) pour $\alpha = 1$ est :

$$u(x, t) = \frac{x}{1+t}, |t| < 1.$$

En appliquant la transformée naturelle des deux membres de l'équation (4.16), et en utilisant le Théorème 4.1, nous avons :

$$\mathcal{N}^+ [u(x, t)] = \frac{1}{s} x - \frac{\nu^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [uu_x - u_{xx}]. \quad (4.18)$$

Par la transformée naturelle inverse aux deux membres de (4.18), nous avons :

$$u(x, t) = x - \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\nu^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [uu_x - u_{xx}] \right).$$

En utilisant (4.15) nous pouvons obtenir la formule d'itération :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = x - \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\nu^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n - u_{nxx} \right] \right), \quad (4.19)$$

où A_n est un polynôme d'Adomien, qui représente le terme non-linéaire uu_x .

Les premiers termes du polynômes d'Adomien, sont donnés par :

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0 u_{0x}, \\ A_1 &= u_0 u_{1x} + u_1 u_{0x}, \\ A_2 &= u_0 u_{2x} + u_1 u_{1x} + u_2 u_{0x}, \\ A_3 &= u_0 u_{3x} + u_1 u_{2x} + u_2 u_{1x} + u_3 u_{0x}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

En comparant les deux membres de l'équation (4.19), on obtient :

$$\begin{aligned}
 u_0(x,t) &= x, \\
 u_1(x,t) &= -\mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [A_0 - u_{0xx}] \right) = -x \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha, \\
 u_2(x,t) &= -\mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [A_1 - u_{1xx}] \right) = x \frac{2}{\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha}, \\
 u_3(x,t) &= -\mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [A_2 - u_{2xx}] \right) = -x \frac{4\Gamma^2(\alpha+1) + \Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)} t^{3\alpha}, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Donc, la solution approximative de l'équation (4.16) est donnée par :

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= x \left(1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + \frac{2}{\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4\Gamma^2(\alpha+1) + \Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)} t^{3\alpha} + \dots \right) \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 1$, la solution (4.20) devient :

$$u(x,t) = x(1 - t + t^2 - t^3 + \dots),$$

ce qui donne :

$$u(x,t) = \frac{x}{1+t}, |t| < 1,$$

qui est la solution exacte de l'équation de Burger (4.16) dans le cas classique.

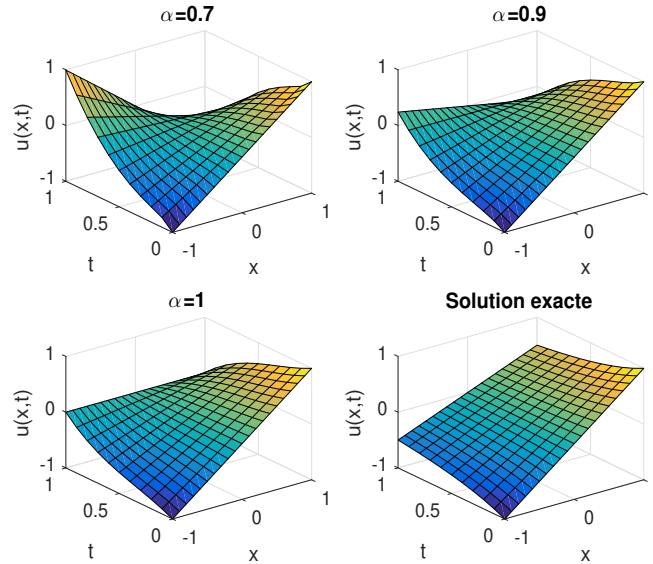


FIGURE 4.1 – Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode FNDM de l'équation (4.16).

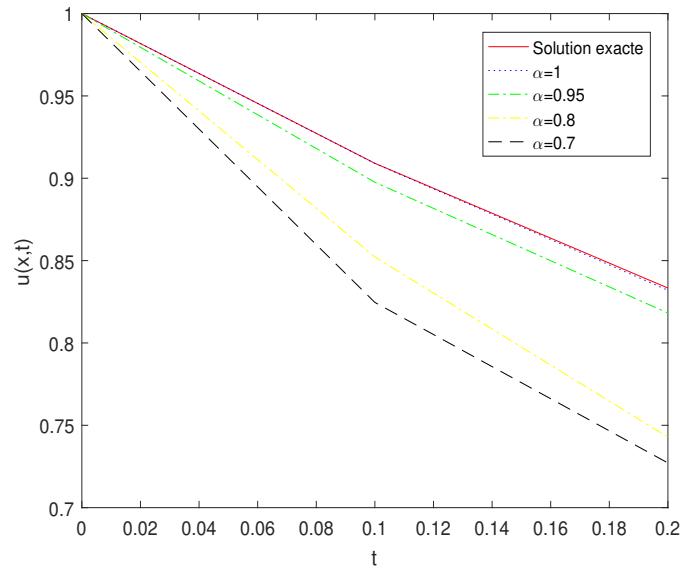


FIGURE 4.2 – Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode FNDM de l'équation (4.16) avec $x = 1$.

TABLE 4.1 – Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode FNDM pour différentes valeurs d'ordre α de l'équation (4.16) avec $x = 1$.

t	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1$	Solution exacte	$ u_{exacte} - u_{FNDM} $
0.1	0.85743	0.88523	0.909	0.90909	9.0909×10^{-5}
0.3	0.68866	0.73076	0.763	0.76923	6.2308×10^{-3}
0.5	0.48588	0.57093	0.625	0.66667	4.1667×10^{-2}
0.7	0.17858	0.34151	0.447	0.58824	1.4124×10^{-1}
0.9	-0.27619	-0.00741	0.181	0.52632	3.4532×10^{-1}

Exemple 4.2 On considère l'équation aux dérivée partielle non-linéaire d'ordre fractionnaire temporelle suivante :

$${}^c D_t^\alpha u + \frac{2}{t} u u_x = 0, t > 0, x \neq 0, 1 < \alpha \leq 2, \quad (4.21)$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = \frac{1}{x}. \quad (4.22)$$

La solution exacte de l'équation (4.21) pour $\alpha = 1$ est :

$$u(x, t) = \tan\left(\frac{t}{x}\right), x \neq 0.$$

De la même manière que ci-dessus, nous avons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \frac{t}{x} - \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[\frac{2}{t} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right] \right), \quad (4.23)$$

où A_n est un polynôme d'Adomien, qui représente le terme non-linéaire vv_x .

Les premiers termes du polynômes d'Adomien, sont donnés par :

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0 u_{0x}, \\ A_1 &= u_0 u_{1x} + u_1 u_{0x}, \\ A_2 &= u_0 u_{2x} + u_1 u_{1x} + u_2 u_{0x}, \\ A_3 &= u_0 u_{3x} + u_1 u_{2x} + u_2 u_{1x} + u_3 u_{0x}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

En comparant les deux membres de l'équation (4.23), on obtient :

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \frac{t}{x}, \\ u_1(x, t) &= -\mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[\frac{2}{t} A_0 \right] \right) = \frac{2}{\Gamma(\alpha + 2)} \frac{t^{\alpha+1}}{x^3}, \\ u_2(x, t) &= -\mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[\frac{2}{t} A_1 \right] \right) = \frac{16}{\Gamma(2\alpha + 2)} \frac{t^{2\alpha+1}}{x^5}, \\ u_3(x, t) &= -\mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[\frac{2}{t} A_2 \right] \right) = \frac{24}{\Gamma(3\alpha + 2)} \left[8 + \frac{\Gamma(2\alpha + 2)}{\Gamma^2(\alpha + 2)} \right] \frac{t^{3\alpha+1}}{x^7}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Donc, la solution approximative de l'équation (4.21) est donnée par :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{t}{x} + \frac{2}{\Gamma(\alpha + 2)} \frac{t^{\alpha+1}}{x^3} + \frac{16}{\Gamma(2\alpha + 2)} \frac{t^{2\alpha+1}}{x^5} \\ &\quad + \frac{24}{\Gamma(3\alpha + 2)} \left[8 + \frac{\Gamma(2\alpha + 2)}{\Gamma^2(\alpha + 2)} \right] \frac{t^{3\alpha+1}}{x^7} + \dots \end{aligned} \quad (4.24)$$

Pour $\alpha = 2$, la solution (4.24) devient :

$$u(x, t) = \frac{t}{x} + \frac{1}{3} \left(\frac{t}{x} \right)^3 + \frac{2}{15} \left(\frac{t}{x} \right)^5 + \frac{17}{315} \left(\frac{t}{x} \right)^7 + \dots$$

ce qui donne :

$$u(x, t) = \tan \left(\frac{t}{x} \right), x \neq 0.$$

qui est la solution exacte de l'équation (4.21) dans le cas classique.

TABLE 4.2 – Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode FNDM pour différentes valeurs d'ordre α de l'équation (4.21) avec $x = 1$.

t	$\alpha = 1.8$	$\alpha = 1.9$	$\alpha = 2$	Solution exacte	$ u_{\text{exacte}} - u_{\text{FNDM}} $
0.1	0.10068	0.10048	0.10033	0.10033	2.1958×10^{-11}
0.3	0.31573	0.3121	0.30934	0.30934	4.4675×10^{-7}
0.5	0.57389	0.55819	0.54625	0.5463	4.7530×10^{-5}
0.7	0.92447	0.87665	0.84119	0.84229	1.1012×10^{-3}
0.9	1.4629	1.3380	1.2475	1.2602	1.2613×10^{-2}

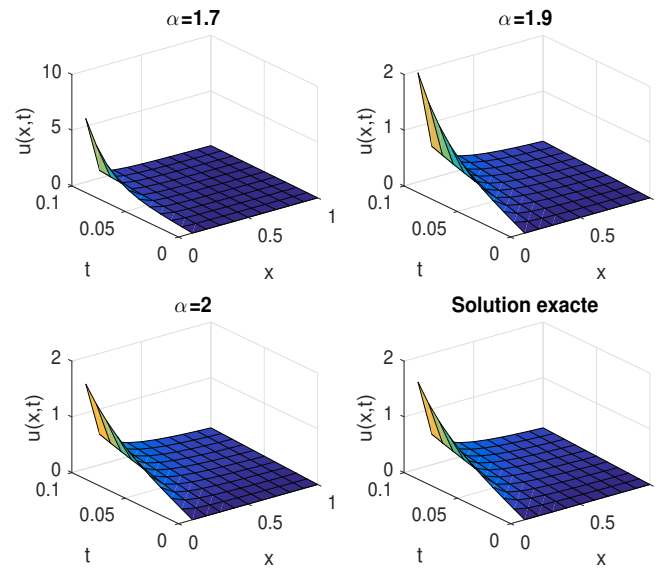


FIGURE 4.3 – Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode FNDM de l'équation (4.21).

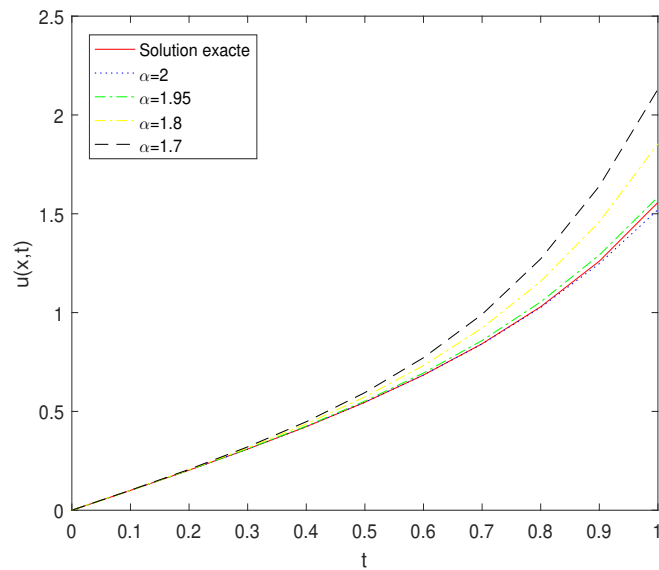


FIGURE 4.4 – Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode FNDM de l'équation (4.21) avec $x = 1$.

Exemple 4.3 On considère l'équation aux dérivée partielle non-linéaire d'ordre fractionnaire temporelle suivante :

$${}^c D_t^\alpha u - 3uu_{xx} = 0, t > 0, x \neq 0, 2 < \alpha \leq 3, \quad (4.25)$$

avec les conditions initiales

$$u(x,0) = \frac{1}{x}, u_t(x,0) = \frac{1}{x^2}, u_{tt}(x,0) = \frac{1}{x^3}. \quad (4.26)$$

La solution exacte de l'équation (4.25) pour $\alpha = 3$ est :

$$u(x, t) = \frac{1}{x-t}, \left| \frac{t}{x} \right| < 1, x \neq 0$$

De la même manière, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \frac{1}{x} + \frac{t}{x^2} + \frac{t^2}{x^3} + \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[3 \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right] \right), \quad (4.27)$$

où A_n est un polynôme d'Adomien, qui représente le terme non-linéaire vv_{xx} .

Les premiers termes du polynômes d'Adomien, sont donnés par :

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0 u_{0xx}, \\ A_1 &= u_0 u_{1xx} + u_1 u_{0xx}, \\ A_2 &= u_0 u_{2xx} + u_1 u_{1xx} + u_2 u_{0xx}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

En comparant les deux membres de l'équation (4.27), on obtient :

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \frac{1}{x} \left(1 + \frac{t}{x} + \frac{t^2}{x^2} \right), \\ u_1(x, t) &= \frac{1}{x} \left(\frac{3!}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{t^\alpha}{x^3} + \frac{4!}{\Gamma(\alpha+2)} \frac{t^{\alpha+1}}{x^4} + \frac{5!}{\Gamma(\alpha+3)} \frac{t^{\alpha+2}}{x^5} \right. \\ &\quad \left. + \frac{6!}{\Gamma(\alpha+4)} \frac{t^{\alpha+3}}{x^6} + \frac{7!}{\Gamma(\alpha+5)} \frac{t^{\alpha+4}}{x^7} \right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Donc, la solution approximative de l'équation (4.25) est donnée par :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{x} \left(1 + \frac{t}{x} + \frac{t^2}{x^2} + \frac{3!}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{t^\alpha}{x^3} + \frac{4!}{\Gamma(\alpha+2)} \frac{t^{\alpha+1}}{x^4} + \frac{5!}{\Gamma(\alpha+3)} \frac{t^{\alpha+2}}{x^5} \right. \\ &\quad \left. + \frac{6!}{\Gamma(\alpha+4)} \frac{t^{\alpha+3}}{x^6} + \frac{7!}{\Gamma(\alpha+5)} \frac{t^{\alpha+4}}{x^7} + \dots \right). \quad (4.28) \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 3$, la solution (4.28) devient :

$$u(x, t) = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{t}{x} + \left(\frac{t}{x} \right)^2 + \left(\frac{t}{x} \right)^3 + \left(\frac{t}{x} \right)^4 + \left(\frac{t}{x} \right)^5 + \left(\frac{t}{x} \right)^6 + \left(\frac{t}{x} \right)^7 + \dots \right),$$

ce qui donne :

$$u(x, t) = \frac{1}{x-t}, \left| \frac{t}{x} \right| < 1, x \neq 0,$$

qui est la solution exacte de l'équation (4.25) dans le cas classique.

TABLE 4.3 – Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec deux termes par la méthode FNDM pour différentes valeurs d'ordre α de l'équation (4.25) avec $x = 1$.

t	$\alpha = 2.8$	$\alpha = 2.9$	$\alpha = 3$	solution exacte	$ u_{exacte} - u_{FNDM} $
0.1	1.1123	1.1116	1.1111	1.1111	1.1111×10^{-8}
0.2	1.2579	1.2534	1.2500	1.2500	3.2×10^{-6}
0.3	1.4539	1.4396	1.4285	1.4286	9.3729×10^{-5}
0.4	1.7269	1.6929	1.6656	1.6667	1.0923×10^{-3}
0.5	2.1199	2.0496	1.9922	2.0	7.8125×10^{-3}

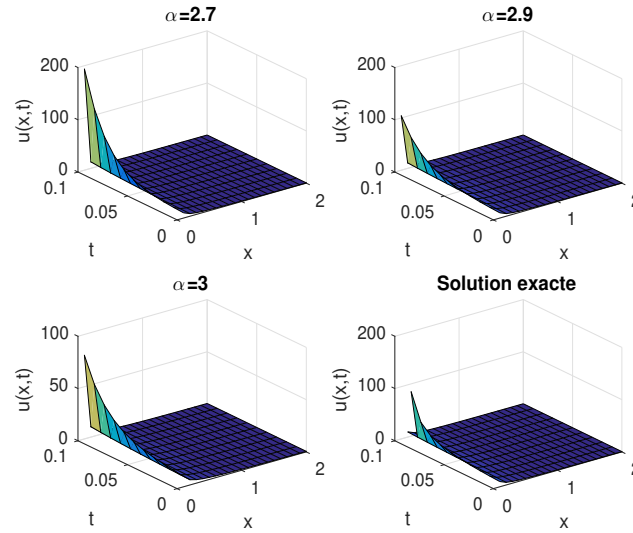


FIGURE 4.5 – Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec deux termes par la méthode FNDM de l'équation (4.25).

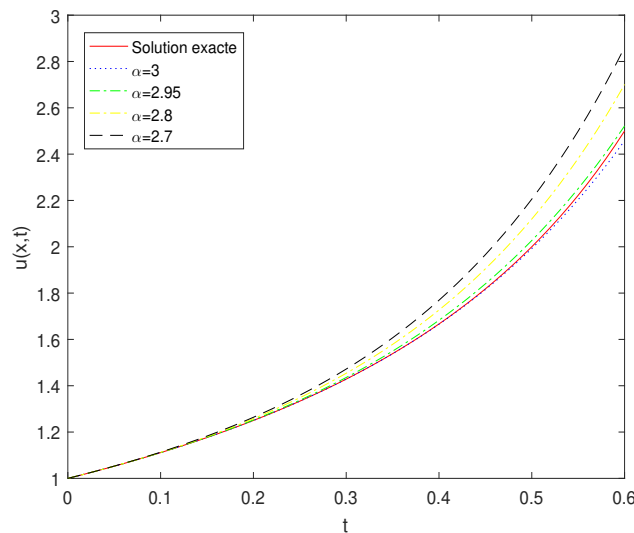


FIGURE 4.6 – Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives avec deux termes par la méthode FNDM de l'équation (4.25) avec $x = 1$.

4.3 MÉTHODE DE PERTURBATION D'HOMOTOPIE NATURELLE (NHPM)

Pour illustrer les idées de base de la méthode de perturbation d'homotopie naturelle (NHPM) [Khalouta et Kadem, 2019a], considérons l'équation aux dérivées partielles non-linéaire non-homogène d'ordre fractionnaire temporelle (4.9) avec les conditions initiales (4.10).

En suivant les mêmes étapes ci-dessus, "voir la partie 4.2", on a :

$$u(x, t) = G(x, t) - \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\partial^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Lu(x, t) + Nu(x, t)] \right). \quad (4.29)$$

où $G(x, t)$ représente le terme découlant du terme source et des conditions initiales prescrites.

Maintenant, on applique la méthode HPM

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n u_n(x, t), \quad (4.30)$$

où $p \in [0, 1]$ est considéré comme étant un petit paramètre.

Décomposons le terme non-linéaire comme suit :

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n H_n(u), \quad (4.31)$$

où les H_n sont donnés par :

$$H_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^n p^i u_i \right) \right]_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

En substituant (4.30) et (4.31) dans l'équation (4.29), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n u_n = G(x, t) - p \left(\mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\partial^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[L \sum_{n=0}^{\infty} P^n u_n + \sum_{n=0}^{\infty} P^n H_n(u) \right] \right) \right),$$

qui est la combinaison de la méthode de perturbation d'homotopie et de la transformée naturelle de dérivée fractionnaire au sens de Caputo (NHPM).

Par comparaison avec les coefficients de même puissances de p , on obtient les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} p^0 & : u_0(x, t) = G(x, t), \\ p^1 & : u_1(x, t) = \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\partial^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Lu_0(x, t) + H_0(u)] \right), \\ p^2 & : u_2(x, t) = \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\partial^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Lu_1(x, t) + H_1(u)] \right), \\ & \vdots \\ p^n & : u_n(x, t) = \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\partial^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Lu_{n-1}(x, t) + H_{n-1}(u)] \right). \end{aligned}$$

Finalement, la solution approximative de l'équation (4.16) est donnée par :

$$u(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t).$$

4.3.1 Applications de la méthode NHPM

Exemple 4.4 Considérons l'équation de KDV d'ordre fractionnaire temporelle suivante :

$${}^c D_t^\alpha u - 3(u^2)_x + u_{xxx} = 0, 0 < \alpha \leq 1, \quad (4.32)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = 6x. \quad (4.33)$$

La solution exacte de l'équation (4.32) pour $\alpha = 1$ est :

$$u(x, t) = \frac{6x}{1 - 36t}, |36t| < 1.$$

En appliquant la transformée naturelle des deux membres de l'équation (4.32), et en utilisant le Théorème 4.1, nous avons :

$$\mathcal{N}^+ [u(x, t)] = \frac{1}{s} (6x) + \frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [3(u^2)_x - u_{xxx}]. \quad (4.34)$$

En utilisant la transformée naturelle inverse aux deux membres de l'équation (4.34), on a :

$$u(x, t) = 6x + \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [3(u^2)_x - u_{xxx}] \right).$$

L'application de la méthode HPM donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t) = 6x + p \left(\mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[3 \sum_{n=0}^{\infty} p^n (H_n(u))_x - \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_{nxxx} \right] \right) \right). \quad (4.35)$$

Par comparaison avec les coefficients de même puissances de p de l'équation (4.35), nous obtenons :

$$\begin{aligned} p^0 & : u_0(x, t) = 6x, \\ p^1 & : u_1(x, t) = \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [3(H_0(u))_x - u_{0xxx}] \right), \\ p^2 & : u_2(x, t) = \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [3(H_1(u))_x - u_{1xxx}] \right), \\ & \vdots \\ p^n & : u_n(x, t) = \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [3(H_{n-1}(u))_x - (u_{n-1})_{xxx}] \right). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Les premiers termes du polynômes de He, sont donnés par :

$$\begin{aligned} H_0 & = u_0^2, \\ H_1 & = 2u_0u_1, \\ H_2 & = 2u_0u_2 + u_1^2, \\ H_3 & = 2u_0u_3 + 2u_1u_2, \\ & \vdots \end{aligned} \quad (4.37)$$

En utilisant les polynômes (4.37) et les formules d'itération (4.36), on a :

$$\begin{aligned}
 u_0(x, t) &= 6x, \\
 u_1(x, t) &= 6x(36) \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha, \\
 u_2(x, t) &= 6x(36)^2 \frac{2}{\Gamma(2\alpha + 1)} t^{2\alpha}, \\
 u_3(x, t) &= 6x(36)^3 \frac{4\Gamma^2(\alpha + 1) + \Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} t^{3\alpha}, \\
 u_4(x, t) &= 6x(36)^4 \left[\frac{8\Gamma^2(\alpha + 1) + 2\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} + \frac{4}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1)} \right] \times \frac{\Gamma(3\alpha + 1)}{\Gamma(4\alpha + 1)} t^{4\alpha} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Donc, la solution approximative de l'équation (4.32) est donnée par :

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= 6x \left(1 + (36) \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha + (36)^2 \frac{2}{\Gamma(2\alpha + 1)} t^{2\alpha} + (36)^3 \frac{4\Gamma^2(\alpha + 1) + \Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} t^{3\alpha} \right. \\
 &\quad \left. + (36)^4 \left[\frac{8\Gamma^2(\alpha + 1) + 2\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} + \frac{4}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1)} \right] \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{\Gamma(3\alpha + 1)}{\Gamma(4\alpha + 1)} t^{4\alpha} \dots \right). \tag{4.38}
 \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 1$, la solution (4.38) devient :

$$u(x, t) = 6x \left(1 + 36t + (36)^2 t^2 + (36)^3 t^3 + (36)^4 t^4 + \dots \right),$$

ce qui donne :

$$u(x, t) = \frac{6x}{1 - 36t}, \quad |36t| < 1,$$

qui est la solution exacte de l'équation KDV (4.32) dans le cas classique.

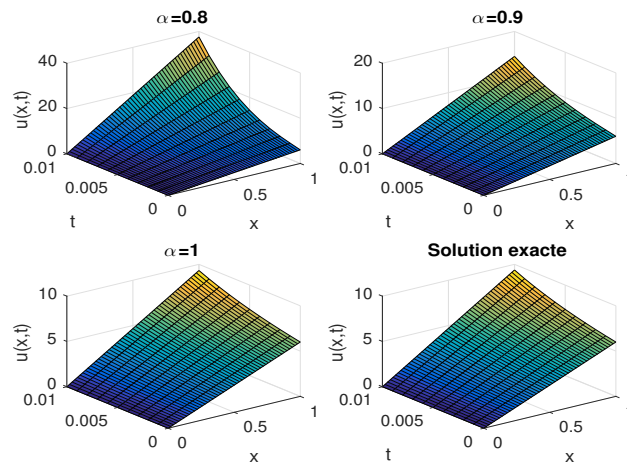


FIGURE 4.7 – Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec cinq termes par la méthode NHPM de l'équation (4.32).

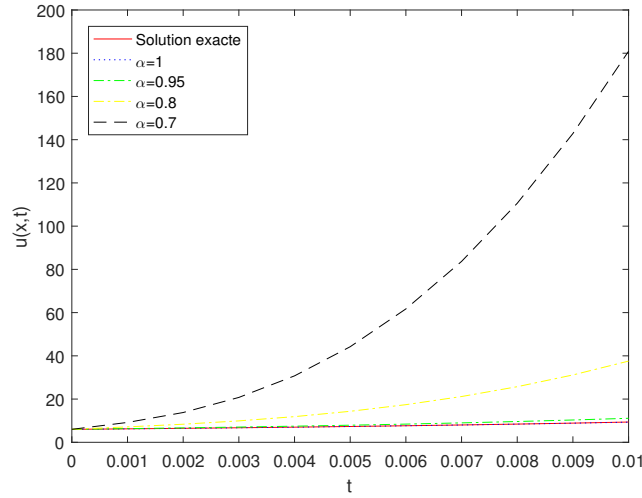


FIGURE 4.8 – Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives avec cinq termes par la méthode NHPM de l'équation (4.32) avec $x = 1$.

TABLE 4.4 – Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec cinq termes par la méthode NHPM pour différentes valeurs d'ordre α de l'équation (4.32) avec $x = 1$.

t	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1$	Solution exacte	$ u_{exacte} - u_{NHPM} $
0.001	7.1357	6.4884	6.2241	6.2241	3.7635×10^{-7}
0.003	9.9130	7.5451	6.7264	6.7265	9.8834×10^{-5}
0.005	13.921	8.9018	7.3157	7.3171	1.3826×10^{-3}
0.007	15.781	10.690	8.0132	8.0214	8.1518×10^{-3}
0.009	23.444	13.048	8.8440	8.8757	3.1691×10^{-2}

Exemple 4.5 Considérons l'équation hyperbolique d'ordre fractionnaire temporelle suivante :

$${}^c D_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t) u_x(x, t)), t > 0, x \in \mathbb{R}, 1 < \alpha \leq 2, \quad (4.39)$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = x^2, u_t(x, 0) = -2x^2. \quad (4.40)$$

La solution exacte de l'équation (4.39) pour $\alpha = 2$ est :

$$u(x, t) = \left(\frac{x}{1+t} \right)^2.$$

De la même manière, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t) = x - 2x^2 t + p \left(\mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\partial^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[\frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u) \right] \right) \right). \quad (4.41)$$

Par comparaison avec les coefficients de même puissances de p de l'équation

(4.41), on obtient :

$$\begin{aligned}
 p^0 & : u_0(x, t) = x - 2x^2t, \\
 p^1 & : u_1(x, t) = \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\partial^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[\frac{\partial}{\partial x} H_0(u) \right] \right), \\
 p^2 & : u_2(x, t) = \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\partial^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[\frac{\partial}{\partial x} H_1(u) \right] \right), \\
 & \vdots \\
 p^n & : u_n(x, t) = \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\partial^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[\frac{\partial}{\partial x} H_{n-1}(u) \right] \right).
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Les premiers termes du polynômes de He, sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 H_0 & = u_0 u_{0x}, \\
 H_1 & = u_0 u_{1x} + u_1 u_{0x}, \\
 H_2 & = u_0 u_{2x} + u_1 u_{1x} + u_2 u_{0x}, \\
 & \vdots
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

En utilisant les polynômes (4.43) et les formules d'itération (4.42), donne :

$$\begin{aligned}
 u_0(x, t) & = x^2(1 - 2t), \\
 u_1(x, t) & = 6x^2 \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{4t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} + \frac{8t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha + 3)} \right), \\
 u_2(x, t) & = 72x^2 \left(\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{(2\alpha + 6)t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha + 2)} + \frac{(8\alpha + 16)t^{2\alpha+2}}{\Gamma(2\alpha + 3)} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{16\Gamma(\alpha + 4)t^{2\alpha+3}}{\Gamma(\alpha + 3)\Gamma(2\alpha + 4)} \right) \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

Donc, la solution approximative de l'équation (4.39) est donnée par :

$$\begin{aligned}
 u(x, t) & = x^2 \left(1 - 2t + \frac{6t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{24t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} + \frac{48t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha + 3)} \right) \\
 & \quad + 72x^2 \left(\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{(2\alpha + 6)t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha + 2)} + \frac{(8\alpha + 16)t^{2\alpha+2}}{\Gamma(2\alpha + 3)} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{16\Gamma(\alpha + 4)t^{2\alpha+3}}{\Gamma(\alpha + 3)\Gamma(2\alpha + 4)} \right) \\
 & \vdots
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Pour $\alpha = 2$, la solution (4.43) devient

$$u(x, t) = x^2 \left(1 - 2t + 3t^2 - 4t^3 + 5t^4 - 6t^5 + \dots \right),$$

ce qui donne :

$$u(x, t) = \left(\frac{x}{1+t} \right)^2.$$

qui est la solution exacte de l'équation hyperbolique (4.39) dans le cas classique.

TABLE 4.5 – Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec trois termes par la méthode NHPM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation (4.39) avec $x = 1$.

t	$\alpha = 1.8$	$\alpha = 1.9$	$\alpha = 2$	Solution exacte	$ u_{\text{exacte}} - u_{\text{NHPM}} $
0.01	0.98089	0.98051	0.98030	0.98030	6.9209×10^{-12}
0.03	0.94624	0.94403	0.94260	0.94260	4.9338×10^{-9}
0.05	0.91526	0.91037	0.90703	0.90703	1.0346×10^{-7}
0.07	0.88729	0.87918	0.87344	0.87344	7.6247×10^{-7}
0.09	0.86192	0.85018	0.84168	0.84168	3.3727×10^{-6}

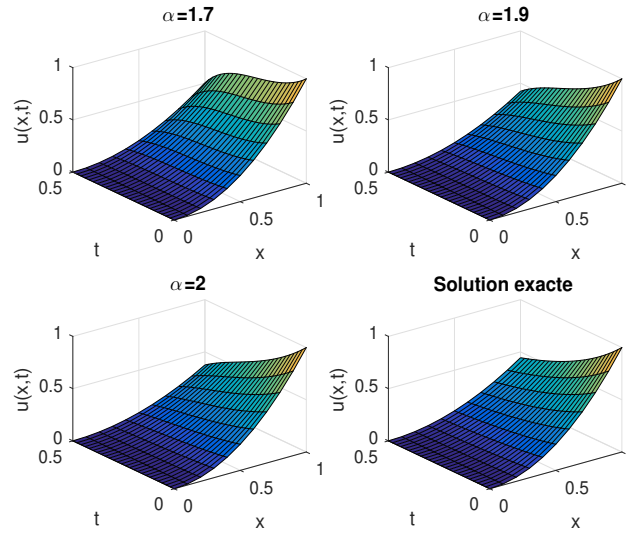


FIGURE 4.9 – Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec trois termes par la méthode NHPM de l'équation (4.39).

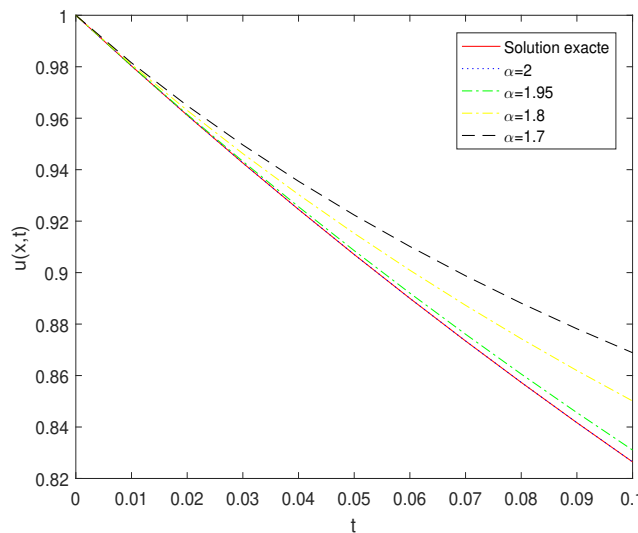


FIGURE 4.10 – Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives avec trois termes par la méthode NHPM de l'équation (4.39) avec $x = 1$.

4.4 MÉTHODE D'ITÉRATION VARIATIONNELLE NATURELLE (NVIM)

Pour illustrer les idées de base de la méthode d'itération variationnelle naturelle (NVIM) [Khalouta et Kadem, 2019h], Considérons l'équation aux dérivées partielles non-linéaire non-homogène d'ordre fractionnaire temporelle (4.9) avec les conditions initiales (4.10).

En suivant les mêmes étapes ci-dessus "voir la partie 4.2", on a :

$$u(x, t) = G(x, t) - \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\partial^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Lu(x, t) + Nu(x, t)] \right). \quad (4.45)$$

où $G(x, t)$ représente le terme découlant du terme source et des conditions initiales prescrites.

En appliquant $\frac{\partial}{\partial t}$ des deux membres de l'équation (4.45), nous avons :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\partial^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Lu(x, t) + Nu(x, t)] \right) - \frac{\partial G(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (4.46)$$

Selon la méthode d'itération variationnelle (voir Chapitre 3), on peut construire une correction fonctionnelle comme suit :

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_n(x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\partial^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Lu_n(x, \tau) + Nu_n(x, \tau)] \right) - \frac{\partial G(x, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau. \quad (4.47)$$

Ou alternativement

$$u_{n+1}(x, t) = G(x, t) - \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\partial^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Lu_n(x, t) + Nu_n(x, t)] \right). \quad (4.48)$$

Rappelons que

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t).$$

Selon la limite précédente, nous pouvons obtenir la solution exacte si elle existe ou bien obtenir une solution approximative pour l'équation considérée (4.9).

4.4.1 Applications de la méthode NVIM

Exemple 4.6 Considérons l'équation de gaz-dynamique d'ordre fractionnaire temporelle suivante :

$${}^c D_t^\alpha u + \frac{1}{2} (u^2)_x - u(1-u) = 0, 0 < \alpha \leq 1, \quad (4.49)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = e^{-x}. \quad (4.50)$$

La solution exacte de l'équation (4.49) pour $\alpha = 1$ est :

$$u(x, t) = e^{t-x}.$$

En appliquant la transformée naturelle des deux membres de l'équation (4.49), et en utilisant le Théorème 4.1, nous avons :

$$\mathcal{N}^+ [u(x, t)] = \frac{1}{s} e^{-x} - \frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[\frac{1}{2} (u^2)_x - u(1 - u) \right]. \quad (4.51)$$

Par utilisation de la transformée naturelle inverse aux deux membres de (4.51), nous avons :

$$u(x, t) = e^{-x} - \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[\frac{1}{2} (u^2)_x - u(1 - u) \right] \right). \quad (4.52)$$

En appliquant $\frac{\partial}{\partial t}$ des deux membres de l'équation (4.52), on obtient :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[\frac{1}{2} (u^2)_x - u(1 - u) \right] \right) = 0.$$

Selon la méthode d'itération variationnelle, on peut construire une correction fonctionnelle comme suit :

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_n(x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[\frac{1}{2} (u_n^2)_x - u_n(1 - u_n) \right] \right) \right] d\tau. \quad (4.53)$$

En utilisant la formule d'itération (4.53), les premiers termes sont donnés par :

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= e^{-x}, \\ u_1(x, t) &= e^{-x} + e^{-x} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \\ u_2(x, t) &= e^{-x} + e^{-x} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + e^{-x} \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}, \\ u_3(x, t) &= e^{-x} + e^{-x} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + e^{-x} \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + e^{-x} \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Donc, la solution approximative de l'équation (4.49) est donnée par :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{-x} \left(1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right) \\ &= e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} = e^{-x} E_\alpha(t^\alpha), \end{aligned} \quad (4.54)$$

où $E_\alpha(t^\alpha)$ est la fonction de Mittag-Leffler définie par (1.5)

Pour $\alpha = 1$, la solution (4.54) devient :

$$v(x, t) = e^{-x} \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \right),$$

ce qui donne :

$$v(x, t) = e^{t-x},$$

qui est la solution exacte de l'équation de gaz-dynamique (4.49) dans le cas classique.

TABLE 4.6 – Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives d'ordre trois par la méthode NVIM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation (4.49) avec $x = 1$.

t	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1$	Solution exacte	$ u_{\text{exacte}} - u_{\text{NVIM}} $
0.1	0.43743	0.41969	0.40657	0.40657	1.5640×10^{-6}
0.3	0.5698	0.52586	0.49645	0.49659	1.3200×10^{-4}
0.5	0.7030	0.64945	0.60547	0.60653	1.0624×10^{-3}
0.7	0.94219	0.79450	0.73656	0.74082	4.2623×10^{-3}
0.9	1.1337	0.96367	0.89266	0.90484	1.2178×10^{-2}

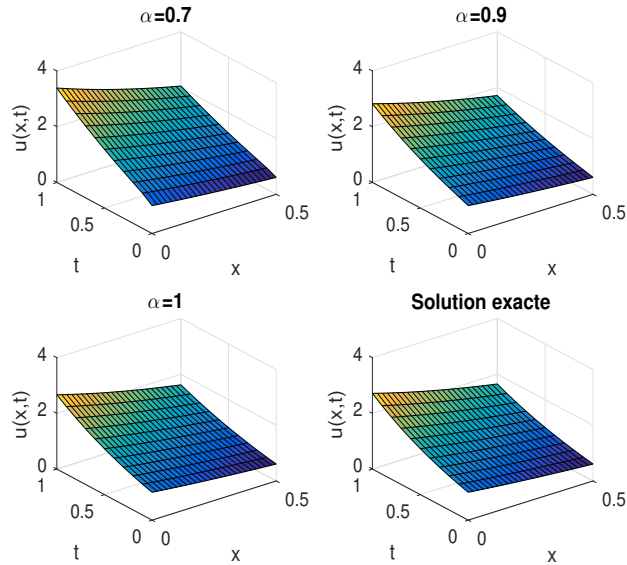


FIGURE 4.11 – Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre trois par la méthode NVIM de l'équation (4.49).

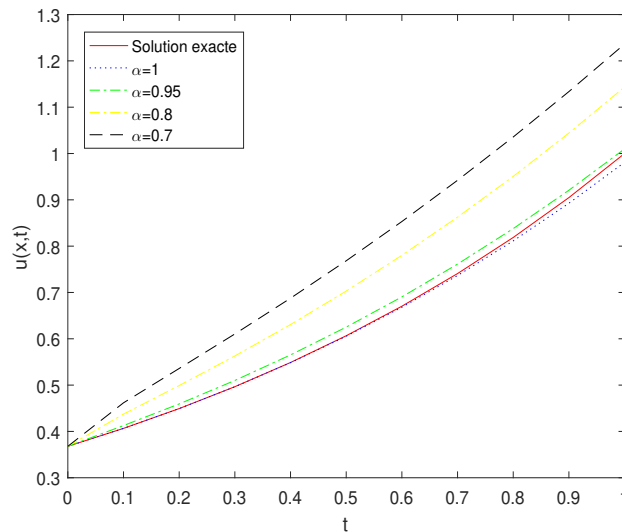


FIGURE 4.12 – Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre trois par la méthode NVIM de l'équation (4.49) avec $x = 1$.

Exemple 4.7 Considérons l'équation non-linéaire de Klein-Gordon d'ordre fractionnaire temporelle suivante :

$${}^c D_t^\alpha u(x, t) = u_{xx}(x, t) - u^2(x, t) + x^2 t^2, 1 < \alpha \leq 2, \quad (4.55)$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = x. \quad (4.56)$$

La solution exacte de l'équation (4.55) pour $\alpha = 2$ est :

$$u(x, t) = xt.$$

De la même manière, nous avons :

$$u(x, t) = xt + 2x^2 \frac{t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} + \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\partial^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [u_{xx}(x, t) - u^2(x, t)] \right). \quad (4.57)$$

En appliquant $\frac{\partial}{\partial t}$ des deux membres de l'équation (4.57), on obtient :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - x - 2x^2 \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} - \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\partial^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [u_{xx}(x, t) - u^2(x, t)] \right) = 0.$$

Par la méthode d'itération variationnelle, on peut construire une correction fonctionnelle comme suit :

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_n(x, \tau)}{\partial \tau} - x - 2x^2 \frac{\tau^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} - \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\partial^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [u_{xx} - u^2] \right) \right] d\tau. \quad (4.58)$$

En utilisant la formule d'itération (4.58), les premiers termes sont donnés par :

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= xt + \frac{2x^2}{\Gamma(\alpha+3)} t^{\alpha+2}, \\ u_1(x, t) &= xt + \frac{4x^2}{\Gamma(2\alpha+3)} t^{2\alpha+2} - \frac{4x^3 \Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(\alpha+3) \Gamma(2\alpha+4)} t^{2\alpha+3} \\ &\quad - \frac{4x^5 \Gamma(2\alpha+5)}{\Gamma^2(\alpha+3) \Gamma(3\alpha+5)} t^{2\alpha+3}, \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

Donc, la solution approximative de l'équation (4.55) est donnée par :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= xt + \frac{4x^2}{\Gamma(2\alpha+3)} t^{2\alpha+2} - \frac{4x^3 \Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(\alpha+3) \Gamma(2\alpha+4)} t^{2\alpha+3} \\ &\quad - \frac{4x^4 \Gamma(2\alpha+5)}{\Gamma^2(\alpha+3) \Gamma(3\alpha+5)} t^{3\alpha+4} + \dots \end{aligned} \quad (4.59)$$

Pour $\alpha = 2$, la solution (4.59) devient :

$$u(x, t) = xt + \frac{x^2 t^6}{180} - \frac{x^3 t^7}{252} - \frac{x^4 t^{10}}{12960} + \dots$$

TABLE 4.7 – Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives d'ordre un par la méthode NVIM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation (4.55) avec $x = 1$.

t	$\alpha = 1.8$	$\alpha = 1.9$	$\alpha = 2$	Solution exacte	$ u_{exacte} - u_{NVIM} $
0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	5.1587×10^{-9}
0.3	0.30001	0.30001	0.3	0.3	3.1817×10^{-6}
0.5	0.50015	0.50009	0.50006	0.5	5.5728×10^{-5}
0.7	0.70076	0.70050	0.70032	0.7	3.2462×10^{-4}
0.9	0.90213	0.90149	0.90103	0.9	1.0275×10^{-3}

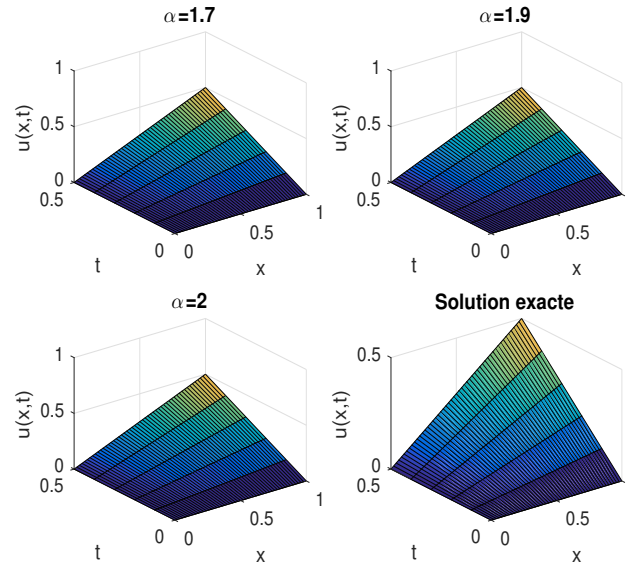


FIGURE 4.13 – Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre un par la méthode NVIM de l'équation (4.55).

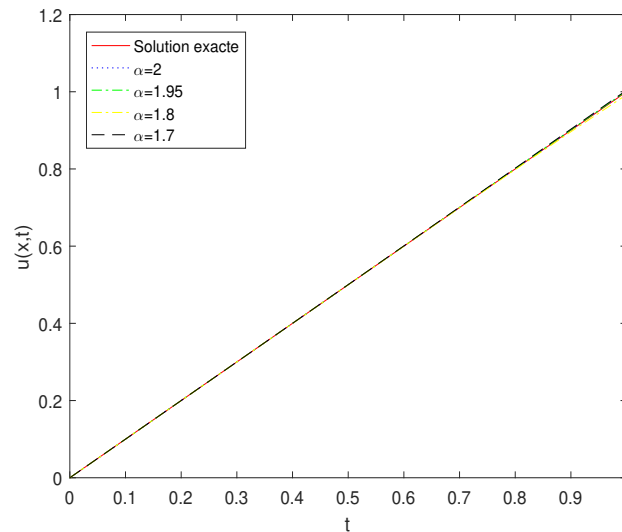


FIGURE 4.14 – Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre un par la méthode NVIM de l'équation (4.55) avec $x = 1$.

ce qui donne :

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = xt,$$

qui est la solution exacte de l'équation non-linéaire de Klein-Gordon (4.55) dans le cas classique.

Exemple 4.8 Considérons l'équation aux dérivée partielle non-linéaire d'ordre fractionnaire temporelle suivante :

$${}^c D_t^\alpha u - \frac{3}{8} \left((u_{xx})^2 \right)_x = \frac{3}{2} t, t > 0, 2 < \alpha \leq 3, \quad (4.60)$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = \frac{x^2}{2}, u_t(x, 0) = \frac{x^3}{3}, u_{tt}(x, 0) = 0. \quad (4.61)$$

La solution exacte de l'équation (4.60) pour $\alpha = 3$ est :

$$u(x, t) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} t + \frac{x}{20} t^5.$$

De la même manière, nous avons :

$$u(x, t) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} t + \frac{3}{2} \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[\frac{3}{8} \left((u_{xx})^2 \right)_x \right] \right). \quad (4.62)$$

En appliquant $\frac{\partial}{\partial t}$ des deux membres de l'équation (4.62), on obtient :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[\frac{3}{8} \left((u_{xx})^2 \right)_x \right] \right) = 0.$$

Par la méthode d'itération variationnelle, on peut construire une correction fonctionnelle comme suit :

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_n(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2} \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[\frac{3}{8} \left((u_{nxx})^2 \right)_x \right] \right) \right] d\tau. \quad (4.63)$$

En utilisant la formule d'itération (4.63), les premiers termes sont donnés par :

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} t, \\ u_1(x, t) &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} t + \frac{6x}{\Gamma(\alpha+3)} t^{\alpha+2}, \\ u_2(x, t) &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} t + \frac{6x}{\Gamma(\alpha+3)} t^{\alpha+2}, \\ u_3(x, t) &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} t + \frac{6x}{\Gamma(\alpha+3)} t^{\alpha+2}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Donc, la solution approximative de l'équation (4.60) est donnée par :

$$u(x, t) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}t + \frac{6x}{\Gamma(\alpha + 3)}t^{\alpha+2}. \quad (4.64)$$

Pour $\alpha = 3$, la solution (4.63) devient :

$$u(x, t) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}t + \frac{x}{20}t^5,$$

qui est la solution exacte de l'équation (4.60) dans le cas classique.

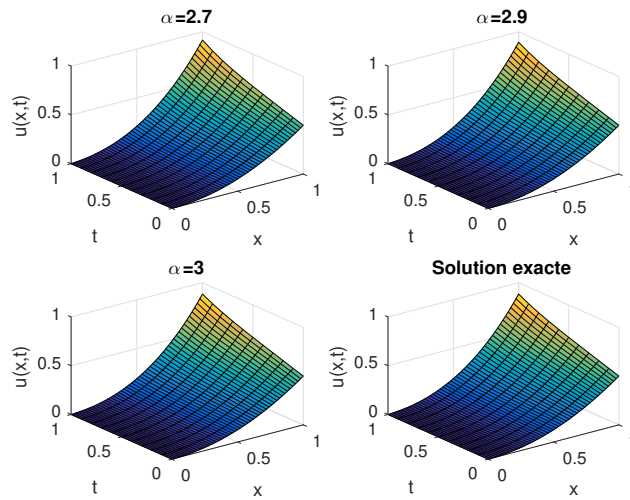


FIGURE 4.15 – Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre un par la méthode NVIM de l'équation (4.60).

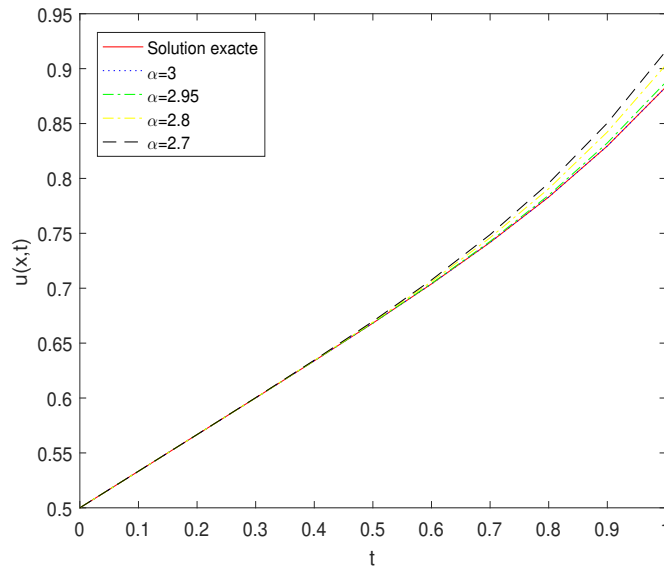


FIGURE 4.16 – Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre un par la méthode NVIM de l'équation (4.60) avec $x = 1$.

TABLE 4.8 – Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives d'ordre un par la méthode NVIM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation (4.60) avec $x = 1$.

t	$\alpha = 2.6$	$\alpha = 2.7$	$\alpha = 2.8$	$\alpha = 2.9$	$\alpha = 3$	Solution exacte
0.1	0.53334	0.53333	0.53333	0.53333	0.53333	0.53333
0.3	0.60038	0.60029	0.60022	0.60016	0.60012	0.60012
0.5	0.67069	0.66985	0.66918	0.66865	0.66823	0.66823
0.7	0.75223	0.74881	0.74598	0.74365	0.74174	0.74174
0.9	0.86004	0.85042	0.84226	0.83536	0.82952	0.82952

4.5 NOUVELLE MÉTHODE DE TRANSFORMATION NATURELLE ITÉRATIVE (NINTM)

Pour illustrer les idées de base de la nouvelle méthode de transformation naturelle itérative (NINTM) [Khalouta et Kadem, 2019e], considérons l'équation aux dérivées partielles non-linéaire non-homogène d'ordre fractionnaire temporelle (4.9) avec les conditions initiales (4.10).

Dans les mêmes étapes ci-dessus "voir la partie 4.2", nous avons :

$$u(x, t) = G(x, t) - \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\partial^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Lu(x, t) + Nu(x, t)] \right). \quad (4.65)$$

où $G(x, t)$ représente le terme découlant du terme source et des conditions initiales prescrites.

Supposons que :

$$\begin{aligned} f(x, t) &= G(x, t), \\ K(u(x, t)) &= -\mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\partial^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Lu(x, t)] \right), \\ R(u(x, t)) &= -\mathcal{N}^{-1} \left(\frac{\partial^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Nu(x, t)] \right). \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (4.65) peut être écrit sous la forme suivante :

$$u(x, t) = f(x, t) + K(u(x, t)) + R(u(x, t)), \quad (4.66)$$

où f est une fonction connue, K et R sont respectivement l'opérateur linéaire et non-linéaire de u .

La solution de l'équation (4.66) peut être écrite sous forme de série

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, t).$$

L'opérateur non-linéaire R est décomposé en (voir Chapitre 3) :

$$R \left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i \right) = R(u_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ R \left(\sum_{j=0}^i u_j \right) - R \left(\sum_{j=0}^{i-1} u_j \right) \right\},$$

et on a

$$K \left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} K(u_i).$$

Par conséquent, l'équation (4.66) peut être représentée sous la forme suivante :

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i = f(x, t) + R(u_0) + \sum_{i=0}^{\infty} K(u_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ R\left(\sum_{j=0}^i u_j\right) - R\left(\sum_{j=0}^{i-1} u_j\right) \right\}.$$

Définissant la relation de récurrence comme suit :

$$\begin{aligned} u_0 &= f, \\ u_1 &= K(u_0) + R(u_0), \\ u_{n+1} &= K(u_n) + R\left(\sum_{j=0}^n u_j\right) - R\left(\sum_{j=0}^{n-1} u_j\right), n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

nous avons

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{n+1} = K(u_0 + u_1 + \dots + u_n) + R(u_0 + u_1 + \dots + u_n), n = 1, 2, \dots,$$

et

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i = f + K\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i\right) + R\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i\right).$$

4.5.1 Applications de la méthode NINTM

Exemple 4.9 Considérons l'équation de réaction-diffusion-convection d'ordre fractionnaire temporelle suivante :

$${}^c D_t^\alpha u = u_{xx} - u_x + uu_x - u^2 + u, 0 < \alpha \leq 1, \quad (4.67)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = e^x, x \in \mathbb{R}. \quad (4.68)$$

La solution exacte de l'équation (4.67) pour $\alpha = 1$ est :

$$u(x, t) = e^{x+t}.$$

En utilisant la transformée naturelle des deux membres de l'équation (4.67) et en appliquant le Théorème 4.1, on obtient :

$$\mathcal{N}^+[u(x, t)] = \frac{1}{s} e^x + \frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+[u_{xx} - u_x + uu_x - u^2 + u]. \quad (4.69)$$

En appliquant la transformée naturelle inverse des deux membres de (4.69), nous avons :

$$u(x, t) = e^x + \mathcal{N}^{-1}\left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+[u_{xx} - u_x + u]\right) + \mathcal{N}^{-1}\left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+[uu_x - u^2]\right).$$

Selon la méthode NINTM, on a :

$$\begin{aligned} u_0 &= e^x, \\ K(u(x, t)) &= \mathcal{N}^{-1}\left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+[u_{xx} - u_x + u]\right), \\ R(u(x, t)) &= \mathcal{N}^{-1}\left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+[uu_x - u^2]\right). \end{aligned}$$

Par itération, nous obtenons les résultats suivants :

$$\begin{aligned} u_0 &= e^x, \\ u_1 &= e^x \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \\ u_2 &= e^x \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}, \\ u_3 &= e^x \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)}, \\ &\vdots \\ u_n &= e^x \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la solution de l'équation (4.67) est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^x \left(1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots + \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \right) \\ &= e^x E_\alpha(t^\alpha), \end{aligned} \quad (4.70)$$

où $E_\alpha(t^\alpha)$ est la fonction de Mittag-Leffler définie par (1.5)

Pour $\alpha = 1$, la solution (4.70) devient :

$$u(x, t) = e^x E_1(t) = e^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k + 1)} = e^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^{x+t},$$

qui est la solution exacte de l'équation de réaction-diffusion-convection (4.67) dans le cas classique.

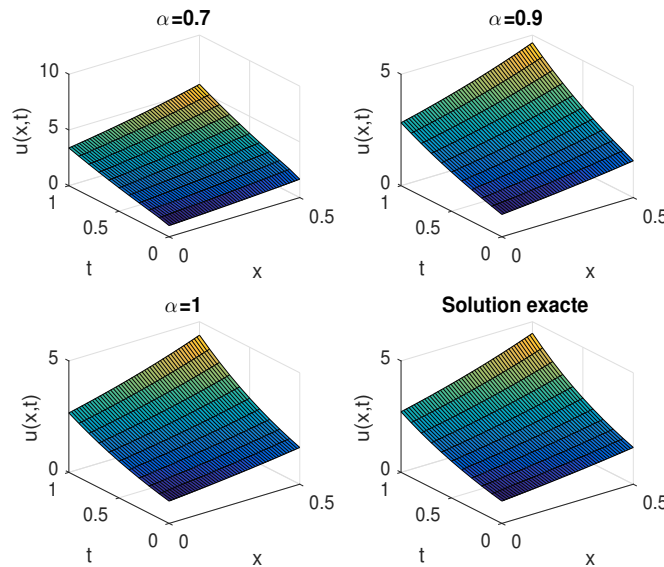


FIGURE 4.17 – Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode NINTM de l'équation (4.67).

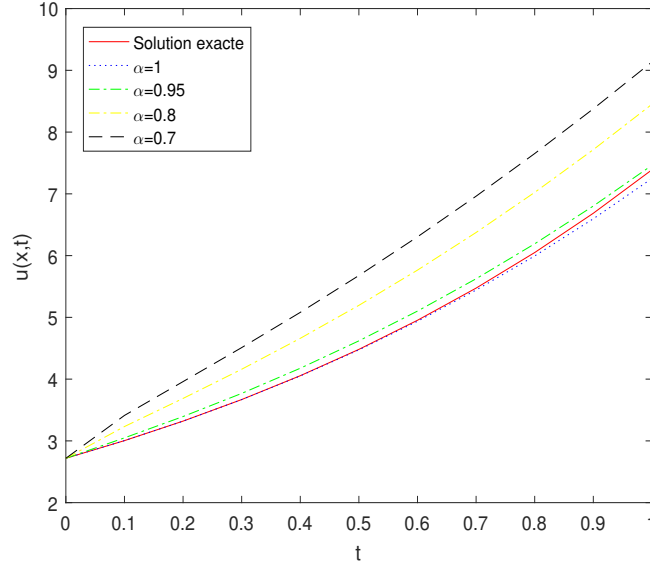


FIGURE 4.18 – Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode NINTM de l'équation (4.67) avec $x = 1$.

TABLE 4.9 – Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode NINTM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation (4.67) avec $x = 1$.

t	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1$	Solution exacte	$ u_{exacte} - u_{NINTM} $
0.1	3.2322	3.1011	3.0042	3.0042	1.1557×10^{-5}
0.3	4.1599	3.8856	3.6683	3.6693	9.7534×10^{-4}
0.5	5.1945	4.7988	4.4738	4.4817	7.8502×10^{-3}
0.7	6.9619	5.8706	5.4425	5.4739	3.1494×10^{-2}
0.9	8.3768	7.1206	6.5959	6.6859	8.9984×10^{-2}

Exemple 4.10 Considérons l'équation de Fornberg-Whitham d'ordre fractionnaire temporelle suivante :

$${}^c D_t^\alpha u = u_{xxt} - u_x + uu_{xxx} - uu_x + 3u_x u_{xx}, t > 0, 0 < \alpha \leq 1, \quad (4.71)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = e^{\frac{x}{2}}, x \in \mathbb{R}. \quad (4.72)$$

La solution exacte de l'équation (4.71) pour $\alpha = 1$ est :

$$u(x, t) = e^{\frac{x}{2} - \frac{2t}{3}}.$$

De la même manière, nous avons :

$$u(x, t) = e^{\frac{x}{2}} + \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [u_{xxt} - u_x] \right) + \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{v^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [uu_{xxx} - uu_x + 3u_x u_{xx}] \right).$$

Selon NINTM, on a :

$$\begin{aligned} u_0 &= e^{\frac{x}{2}}, \\ K(u(x, t)) &= \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [u_{xxt} - u_x] \right), \\ R(u(x, t)) &= \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [uu_{xxx} - uu_x + 3u_x u_{xx}] \right). \end{aligned}$$

Par itération, on obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
 u_0 &= e^{\frac{x}{2}}, \\
 u_1 &= -e^{\frac{x}{2}} \frac{t^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)}, \\
 u_2 &= -e^{\frac{x}{2}} \frac{\alpha\Gamma(\alpha)t^{2\alpha-1}}{8\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha)} + e^{\frac{x}{2}} \frac{t^{2\alpha}}{4\Gamma(2\alpha+1)}, \\
 u_3 &= -e^{\frac{x}{2}} \frac{\alpha(2\alpha-1)\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha-1)t^{3\alpha-2}}{32\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha)\Gamma(3\alpha-1)} + e^{\frac{x}{2}} \frac{\alpha\Gamma(2\alpha)t^{3\alpha-1}}{8\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(3\alpha)} \\
 &\quad + e^{\frac{x}{2}} \frac{\alpha\Gamma(\alpha)t^{3\alpha-1}}{16\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3\alpha)} + e^{\frac{x}{2}} \frac{t^{3\alpha}}{8\Gamma(3\alpha+1)}, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Par conséquent, la solution de l'équation (4.71) est donnée comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= e^{\frac{x}{2}} \left(1 - \frac{t^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)} - \frac{t^{2\alpha-1}}{8\Gamma(2\alpha)} + \frac{t^{2\alpha}}{4\Gamma(2\alpha+1)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{t^{3\alpha-2}}{32\Gamma(3\alpha-1)} + \frac{3t^{3\alpha-1}}{16\Gamma(3\alpha)} + \frac{t^{3\alpha}}{8\Gamma(3\alpha+1)} + \dots \right) \quad (4.73)
 \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 1$, la solution (4.73) devient :

$$u(x, t) = e^{\frac{x}{2}} \left(1 - \frac{2t}{3} + \frac{4t^2}{9} - \frac{8t^3}{27} + \frac{16t^4}{81} - \dots \right),$$

ce qui donne

$$u(x, t) = e^{\frac{x}{2} - \frac{2t}{3}},$$

qui est la solution exacte de l'équation de Fornberg-Whitham (4.71) dans le cas classique.

TABLE 4.10 – Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode NINTM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation (4.71) avec $x = 1$.

t	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1$	Solution exacte	$ u_{\text{exacte}} - u_{\text{NINTM}} $
0.01	1.6033	1.6275	1.6378	1.6378	3.6234×10^{-5}
0.02	1.5774	1.6105	1.6270	1.6269	1.4335×10^{-4}
0.03	1.5557	1.5949	1.6164	1.6161	3.1901×10^{-4}
0.04	1.5363	1.5802	1.6059	1.6053	5.6096×10^{-4}
0.05	1.5186	1.5662	1.5955	1.5947	8.6702×10^{-4}

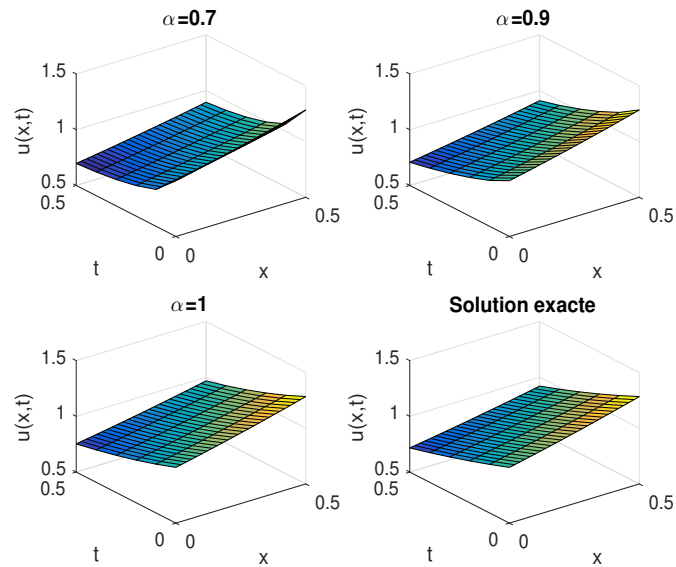


FIGURE 4.19 – Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode NINTM de l'équation (4.71).

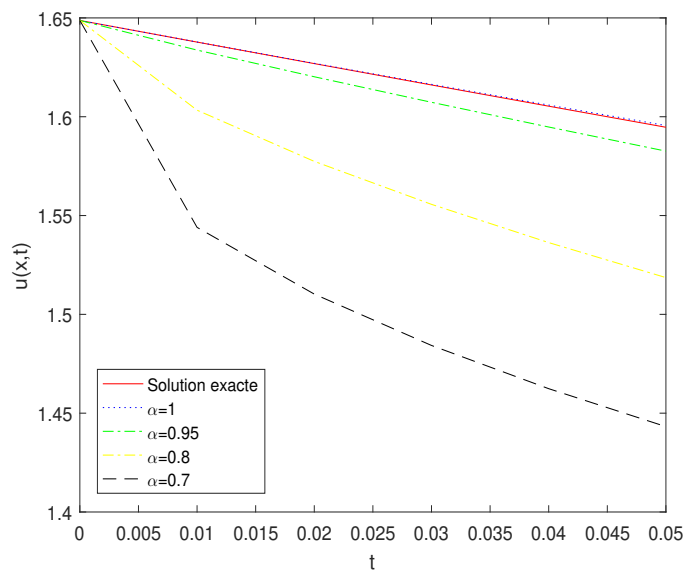


FIGURE 4.20 – Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode NINTM de l'équation (4.71) avec $x = 1$.

LES MÉTHODES FRDTM, FRPSM ET GTFSM POUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON LINÉAIRES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

5

SOMMAIRE

5.1	MÉTHODE DE TRANSFORMATION DIFFÉRENTIELLE RÉDUITE FRACTIONNAIRE (FRDTM)	86
5.2	FRDTM POUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON-LINÉAIRES D'ORDRE FRACTIONNAIRE TEMPORRELLE	88
5.2.1	Applications de la méthode FRDTM	88
5.3	MÉTHODE DE LA SÉRIE DE PUISSANCE RÉSIDUELLE FRACTIONNAIRE (FRPSM)	93
5.4	FRPSM POUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON-LINÉAIRES D'ORDRE FRACTIONNAIRE TEMPORRELLE	95
5.4.1	Applications de la méthode FRPSM	97
5.5	NOUVELLE MÉTHODE ANALYTIQUE POUR LA RÉOLUTION DES PROBLÈMES DE CONVECTION DE DIFFUSION DE RÉACTION NON-LINÉAIRE D'ORDRE FRACTIONNAIRE	104
5.5.1	Exemples illustratifs	106

DANS ce chapitre, on introduit les idées de base de ces méthodes et aussi nous présentons quelques applications pour la résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires d'ordre fractionnaire au sens de Caputo. À la fin de cette thèse, nous présentons nos résultats moyennant ces méthodes.

5.1 MÉTHODE DE TRANSFORMATION DIFFÉRENTIELLE RÉDUITE FRACTIONNAIRE (FRDTM)

La méthode de transformation différentielle réduite (RDTM) a été proposée pour la première fois par le mathématicien turc Yildiray Keskin [Keskin et Oturanc, 2009],[Keskin et Oturanc, 2010] en 2009. Cette méthode est applicable à une large classe de problèmes non-linéaires avec des approximations qui converge rapidement vers la solution exacte si elle existe.

Dans ce paragraphe, nous présentons la méthodologie de la méthode de transformation différentielle réduite fractionnaire (FRDTM) [Khalouta et Kadem, 2019g]. Considérons une fonction de deux variables $u(x, t)$ qui est analytique et k -fois continuellement différentiable par rapport à la variable d'espace x et au temps t , supposons qu'elle peut être représentée comme un produit de deux fonctions à variable unique c'est-à-dire $u(x, t) = f(x).g(t)$, puis à partir des propriétés de la méthode de transformation différentielle unidimensionnelle, la fonction $u(x, t)$ peut être représentée comme suit :

$$u(x, t) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} F(i)x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} G(j)t^j \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} U(i, j)x^i t^j,$$

où $U(i, j) = F(i)G(j)$ est appelée le spectre de $u(x, t)$.

Définition 5.1 [Rawashdeh, 2014] Si $u(x, t)$ est analytique et continuellement différentiable par rapport à la variable d'espace x et au temps t , alors la transformée différentielle réduite fractionnaire de $u(x, t)$ est donnée par :

$$U_k(x) = \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[\frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} u(x, t) \right]_{t=t_0}, \quad (5.1)$$

où α est un paramètre décrivant l'ordre de la dérivée fractionnaire temporelle.

Définition 5.2 [Rawashdeh, 2014] La transformée différentielle réduite fractionnaire inverse de $U_k(x)$ est définie par :

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)(t - t_0)^{k\alpha}. \quad (5.2)$$

En combinant les équations (5.1) et (5.1), nous avons :

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[\frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} u(x, t) \right]_{t=t_0} (t - t_0)^{k\alpha}. \quad (5.3)$$

En particulier, pour $t_0 = 0$, l'équation (5.3) devient :

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[\frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} u(x, t) \right]_{t=0} t^{k\alpha}.$$

A partir des définitions ci-dessus, les opérations fondamentales du FRDTM sont données par les théorèmes suivants.

Théorème 5.1 [Rawashdeh, 2014] Soit $U_k(x), V_k(x)$ et $W_k(x)$ la transformée différentielle réduite fractionnaire des fonctions $u(x, t), v(x, t)$ et $w(x, t)$, respectivement, alors

(1) Si

$$w(x, t) = \lambda u(x, t) \pm \mu v(x, t), \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

alors

$$W_k(x) = \lambda U_k(x) \pm \mu V_k(x).$$

(2) Si

$$w(X, t) = u(X, t)v(X, t),$$

alors

$$W_k(x) = \sum_{r=0}^k U_r(x) V_{k-r}(x).$$

(3) Si

$$w(X, t) = u^1(x, t)u^2(x, t)\dots\dots u^n(x, t),$$

alors

$$W_k(x) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} U_{k_1}^1(x) U_{k_2-k_1}^2(x) \times \dots \times U_{k_{n-1}-k_{n-2}}^{n-1}(x) U_{k-k_{n-1}}^n(x).$$

(4) Si

$$w(x, t) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} u(x, t),$$

alors

$$W_k(x) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} U_k(x).$$

(5) Si

$$w(x, t) = \frac{\partial^{n\alpha}}{\partial t^{n\alpha}} u(x, t),$$

alors

$$W_k(x) = \frac{\Gamma(k\alpha + n\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + 1)} U_{k+n}(x), n = 1, 2, \dots$$

(6) Si

$$w(X, t) = x^m t^n u(x, t),$$

alors

$$W_k(x) = \begin{cases} x^m U_{k-n}(x) & \text{si } k \geq n, \\ 0 & \text{si } k < n. \end{cases}$$

(7) Si

$$w(X, t) = x^m t^n,$$

alors

$$W_k(x) = x^m \delta(k - n) = \begin{cases} x^m & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{si } k \neq n. \end{cases}$$

5.2 FRDTM POUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON-LINÉAIRES D'ORDRE FRACTIONNAIRE TEMPORELLE

On considère l'équation aux dérivées partielles non-linéaire d'ordre fractionnaire temporelle suivante :

$${}^c D_t^{n\alpha} u(x, t) + Lu(x, t) + Nu(x, t) = f(x, t), t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

avec les conditions initiales

$$\frac{\partial u^i(x, 0)}{\partial t^i} = u_i(x), i = 0, 1, 2, \dots, n - 1, \quad (5.5)$$

où ${}^c D_t^{n\alpha} = \underbrace{{}^c D_t^{\alpha c} D_t^{\alpha} \dots {}^c D_t^{\alpha}}_{n\text{-fois}}$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo

d'ordre $n\alpha$, où $n - 1 < n\alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}^*$, L est un opérateur linéaire, N est un opérateur non-linéaire et $f(x, t)$ est le terme source.

En appliquant FRDTM à l'équation (5.4), nous obtenons la formule de relation de récurrence suivante :

$$U_{k+n}(x) = \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + n\alpha + 1)} [F_k(x) - LU_k(x) - NU_k(x)], n \geq 1, \quad (5.6)$$

où $U_{k+n}(x)$, $LU_k(x)$, $NU_k(x)$ et $F_k(x)$ sont les transformations des termes ${}^c D_t^{n\alpha} u(x, t)$, $Lu(x, t)$, $Nu(x, t)$ et $f(x, t)$ respectivement.

Maintenant, en utilisant FRDTM sur les conditions initiales (5.5), nous obtenons :

$$U_0(x) = u_0(x), U_1(x) = u_1(x), \dots, U_{n-1}(x) = u_{n-1}(x). \quad (5.7)$$

En substituant l'équation (5.7) dans l'équation (5.6) et par un calcul itératif simple, nous obtenons les valeurs $U_k(x)$ pour $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Ainsi, la transformation différentielle réduite fractionnaire inverse de l'ensemble des valeurs $\{U_k(x)\}_{k=0}^n$ donne la solution approximation à n -terme comme suit :

$$\tilde{u}_n(x, t) = \sum_{k=0}^n U_k(x) t^{k\alpha}.$$

Par conséquent, la solution exacte du problème est donnée par :

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}_n(x, t).$$

5.2.1 Applications de la méthode FRDTM

Exemple 5.1 Considérons l'équation de Harry Dym d'ordre fractionnaire temporelle suivante :

$${}^c D_t^{\alpha} u(x, t) = u^3(x, t) + u_{xxx}(x, t), 0 < \alpha \leq 1, t > 0, \quad (5.8)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = \left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2} x \right)^{3/2}, \quad (5.9)$$

où a et b sont des constantes.

La solution exacte de l'équation (5.8) avec la condition initiale (5.9) est donnée par :

$$u(x, t) = \left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2}(x + bt) \right)^{3/2}.$$

L'application de la méthode FRDTM à l'équation (5.8) et à l'équation (5.9) donne :

$$U_{k+1}(x) = \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + \alpha + 1)} \left[\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^r \sum_{i=0}^s U_i(x) U_{s-i}(x) U_{r-s}(x) \frac{\partial^3}{\partial x^3} U_{k-r}(x) \right]. \quad (5.10)$$

Notons que

$$U_0(x) = \left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2}x \right)^{3/2}. \quad (5.11)$$

Maintenant, en substituant l'équation (5.11) à l'équation (5.10), on a :

$$\begin{aligned} U_1(x) &= \frac{-\Gamma(\alpha)b^{3/2}}{\Gamma(\alpha + 1) \left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2}x \right)^{1/3}}, \\ U_2(x) &= \frac{-\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha)b^3}{2\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1) \left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2}x \right)^{4/3}}, \\ U_3(x) &= \frac{2^{4/3}b^{9/2}\Gamma(\alpha)\Gamma(3\alpha) (15\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha + 1) - 32\Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha + 1))}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1) \left(2a - 3\sqrt{bx} \right)^{7/3}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

En prenant la transformation différentielle réduite fractionnaire inverse de $\{U_k(x)\}_{k=0}^n$ nous obtenons la solution approximative de l'équation (5.8) suivante :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}_n(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n U_k(x) t^{k\alpha} \\ &= \left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2}x \right)^{3/2} - \frac{\Gamma(\alpha)b^{3/2}}{\Gamma(\alpha + 1) \left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2}x \right)^{1/3}} t^\alpha \\ &\quad - \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha)b^3}{2\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1) \left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2}x \right)^{4/3}} t^{2\alpha} \\ &\quad + \frac{2^{4/3}b^{9/2}\Gamma(\alpha)\Gamma(3\alpha) (15\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha + 1) - 32\Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha + 1))}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1) \left(2a - 3\sqrt{bx} \right)^{7/3}} t^{3\alpha} + \dots \end{aligned} \quad (5.12)$$

Pour $\alpha = 1$, la solution (5.12) devient :

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^k \\
 &= \left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2} x \right)^{3/2} - b^{3/2} \left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2} x \right)^{-1/3} t - \frac{b^3}{4} \left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2} x \right)^{-4/3} t^2 \\
 &\quad - \frac{b^{9/2}}{6} \left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2} x \right)^{-7/3} t^3 + \dots = \left(a - \frac{3\sqrt{b}}{2} (x + bt) \right)^{3/2}.
 \end{aligned}$$

C'est la solution exacte de l'équation de Harry Dym (5.8) dans le cas classique.

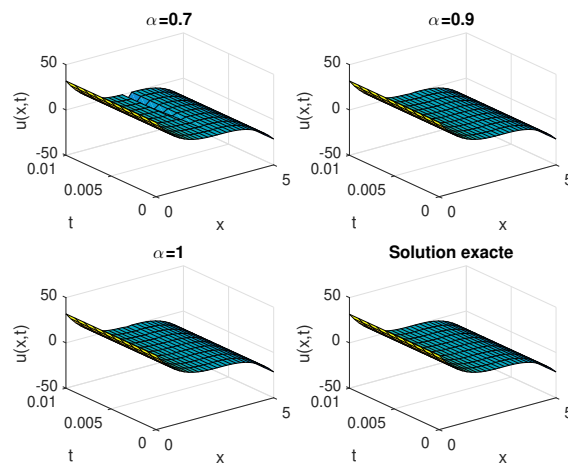


FIGURE 5.1 – Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode FRDTM de l'équation (5.8) avec $a = 4$ et $b = 1$.

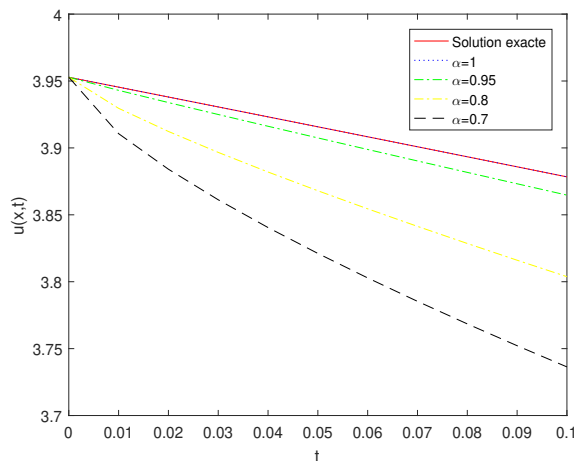


FIGURE 5.2 – Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode FRDTM de l'équation (5.8) avec $a = 4$, $b = 1$ et $x = 1$.

TABLE 5.1 – Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives avec quatre termes par la méthode FRDTM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation (5.8) avec $a = 4$, $b = 1$ et $x = 1$.

t	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1$	Solution exacte	$ u_{exacte} - u_{FRDTM} $
0.001	3.9492	3.9512	3.9521	3.9493	2.8201×10^{-3}
0.003	3.9440	3.9485	3.9506	3.9422	8.4568×10^{-3}
0.005	3.9395	3.9459	3.9492	3.9351	1.4089×10^{-2}
0.007	3.9354	3.9434	3.9477	3.9280	1.9716×10^{-2}
0.009	3.9315	3.9410	3.9462	3.9209	2.5338×10^{-2}

Exemple 5.2 Considérons l'équation non-linéaire de Klein-Gordon d'ordre fractionnaire temporelle suivante :

$${}^c D_t^{2\alpha} u(x, t) = u_{xx}(x, t) - u^2(x, t), \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, t > 0, \quad (5.13)$$

avec les conditions initiales :

$$u(x, 0) = 1 + \sin x, u_t(x, 0) = 0. \quad (5.14)$$

L'application de la méthode FRDTM à l'équation (5.13) et à l'équation (5.14) donne :

$$U_{k+2}(x) = \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + 2\alpha + 1)} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k(x) - \sum_{r=0}^k U_r(x) U_{k-r}(x) \right]. \quad (5.15)$$

Notons que

$$U_0(x) = 1 + \sin x, U_1(x) = 0. \quad (5.16)$$

Maintenant, en substituant l'équation (5.16) à l'équation (5.15), on a :

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1 + \sin x, U_1(x) = 0, \\ U_2(x) &= -\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(3\alpha)}(1 + 3 \sin x + \sin^2 x), U_3(x) = 0 \\ U_4(x) &= -\frac{\Gamma(\alpha)}{2\Gamma(4\alpha)}(12 \cos 2x - 25 \sin x + \sin 3x - 12), U_5(x) = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

En prenant la transformation différentielle réduite fractionnaire inverse de $\{U_k(x)\}_{k=0}^n$ nous obtenons la solution approximative de l'équation (5.13) suivante :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}_n(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n U_k(x) t^{k\alpha} \\ &= 1 + \sin x - \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(3\alpha)}(1 + 3 \sin x + \sin^2 x) t^{2\alpha} \\ &\quad - \frac{\Gamma(\alpha)}{2\Gamma(4\alpha)}(12 \cos 2x - 25 \sin x + \sin 3x - 12) t^{4\alpha} + \dots \end{aligned} \quad (5.17)$$

Pour $\alpha = 1$, la solution (5.17) devient :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^k \\ &= 1 + \sin x - (1 + 3 \sin x + \sin^2 x) \frac{t^2}{2} \\ &\quad - (12 \cos 2x - 25 \sin x + \sin 3x - 12) \frac{t^4}{12} + \dots \end{aligned}$$

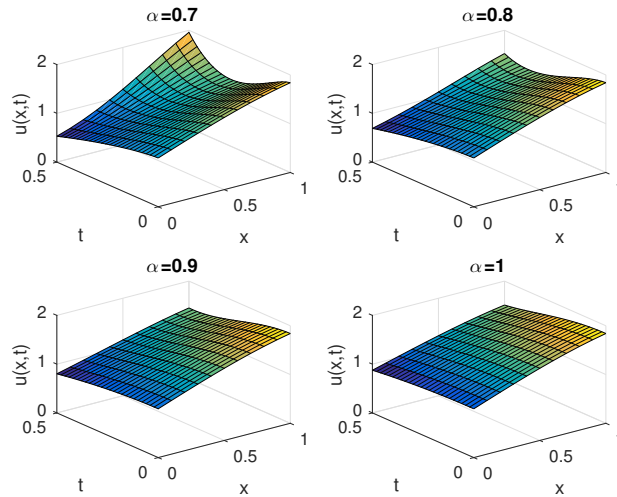


FIGURE 5.3 – Les graphes représentant la surface de la solution approximative avec cinq termes de l'équation (5.13) par la méthode FRDTM.

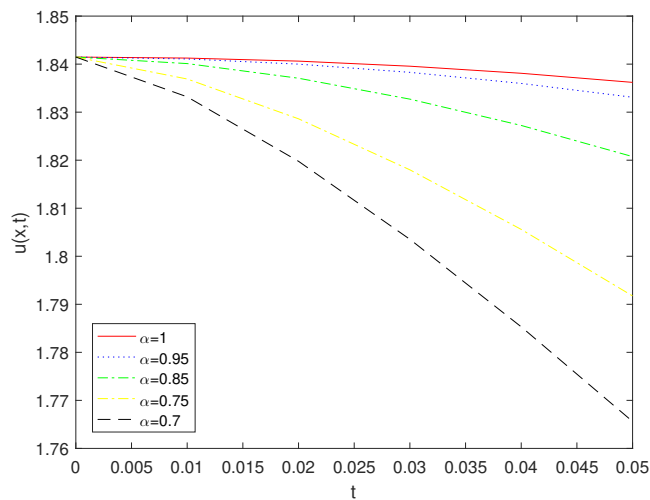


FIGURE 5.4 – Le comportement de la solution approximative avec cinq termes de l'équation (5.13) par la méthode FRDTM pour $x = 1$.

TABLE 5.2 – Les valeurs numériques de la solution approximative avec cinq termes de l'équation (5.13) par la méthode FRDTM pour des valeurs différentes d'ordre α et $x = 1$.

t	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.95$	$\alpha = 1$
0.01	1.8332	1.8390	1.8407	1.8411	1.8413
0.02	1.8198	1.8339	1.8389	1.8400	1.8406
0.03	1.8035	1.8271	1.8362	1.8383	1.8396
0.04	1.7853	1.8188	1.8326	1.8360	1.8381
0.05	1.7656	1.8092	1.8283	1.8331	1.8362

5.3 MÉTHODE DE LA SÉRIE DE PUISSANCE RÉSIDUELLE FRACTIONNAIRE (FRPSM)

La méthode de la série de puissance résiduelle (RPSM) a été proposée et développée pour la première fois par le mathématicien jordanien Omar Abu Arqub [Arqub, 2013] en 2013, est une méthode simple et efficace pour construire des solutions en série de puissances pour les équations différentielles linéaires et non-linéaires sans linéarisation, ni perturbation ni discrétisation.

Dans ce paragraphe, nous présentons la méthode de la série de puissance résiduelle fractionnaire (FRPSM) [Khalouta et Kadem, 2019b],[Khalouta et Kadem, 2020a],[Khalouta et Kadem, 2020b], qui est une méthode analytique approximative permettant de résoudre les problèmes d'équations différentielles ordinaires, partielles, intégrales et intégréo-différentielles d'ordre fractionnaire. Nous commençons par des définitions et quelques théories liées à cette méthode.

Définition 5.3 [El-Ajou et al., 2013] Une série de puissance de la forme :

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(t-t_0)^{m\alpha} = c_0 + c_1(t-t_0)^\alpha + c_2(t-t_0)^{2\alpha} + \dots, \quad (5.18)$$

$$0 \leq n-1 < \alpha \leq n, t \geq t_0,$$

est appelée série de puissance fractionnaire à $t = t_0$, où t est une variable et c_m sont des constantes appelées les coefficients de la série.

Théorème 5.2 [El-Ajou et al., 2013] Supposons que f ait une série de puissance fractionnaire à $t = t_0$ de la forme :

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(t-t_0)^{m\alpha}, 0 \leq n-1 < \alpha \leq n, t_0 \leq t \leq t_0 + R. \quad (5.19)$$

Si $D^{m\alpha} f(t) \in C(t_0, t_0 + R)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, alors les coefficients c_m de l'équation (5.19) sont donnés par la formule :

$$c_m = \frac{D^{m\alpha} f(t_0)}{\Gamma(m\alpha + 1)}, m = 0, 1, 2, \dots$$

où $D^{m\alpha} = \underbrace{D^\alpha D^\alpha \dots D^\alpha}_{m\text{-fois}}$ et R est le rayon de convergence.

Définition 5.4 [El-Ajou et al., 2015] Une série de puissance de la forme :

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m(x)(t-t_0)^{m\alpha} = f_0(x) + f_1(x)(t-t_0)^\alpha + f_2(x)(t-t_0)^{2\alpha} + \dots, \quad (5.20)$$

$$0 \leq n-1 < \alpha \leq n, t \geq t_0,$$

est appelée série de puissance fractionnaire multiple à $t = t_0$, où t est une variable et $f_m(x)$ sont des fonctions de x appelées les coefficients de la série.

Théorème 5.3 [El-Ajou et al., 2015] Supposons que $u(x, t)$ possède une série de puissance fractionnaire multiple à $t = t_0$ de la forme :

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x)(t-t_0)^{m\alpha}, \quad (5.21)$$

$$0 \leq n-1 < \alpha \leq n, x \in I \subset \mathbb{R}, t_0 \leq t \leq t_0 + R.$$

Si $D_t^{m\alpha} u(x, t) \in C(I \times (t_0, t_0 + R))$, $m = 0, 1, 2, \dots$, alors les coefficients $f_m(x)$ de l'équation (5.21) sont donnés par la formule :

$$f_m(x) = \frac{D_t^{m\alpha} u(x, t_0)}{\Gamma(m\alpha + 1)}, m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.22)$$

où $D_t^{m\alpha} = \underbrace{D_t^\alpha D_t^\alpha \dots D_t^\alpha}_{m\text{-fois}}$ et $R = \min_{c \in I} R_c$, dans lequel R_c est le rayon de convergence

de la série de puissances fractionnaire $\sum_{m=0}^{\infty} f_m(c)(t-t_0)^{m\alpha}$.

Démonstration. Supposons que $u(x, t)$ soit une fonction de deux variables pouvant être représentée par une série de puissance fractionnaire multiple de l'équation (5.20)

Si on pose $t = t_0$ dans l'équation (5.21), tous les termes disparaissent sauf le premier qui est $f_0(x) = u(x, t_0)$.

En appliquant l'opérateur D_t^α une fois sur l'équation (5.21), on obtient le résultat suivant :

$$D_t^\alpha u(x, t) = \Gamma(\alpha + 1)f_1(x) + \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)}f_2(x)(t-t_0)^\alpha + \frac{\Gamma(3\alpha + 1)}{\Gamma(2\alpha + 1)}f_3(x)(t-t_0)^{2\alpha} + \dots, \quad (5.23)$$

la substitution de $t = t_0$ dans l'équation (5.23) déterminera la forme de $f_1(x)$ comme :

$$f_1(x) = \frac{D_t^\alpha u(x, t_0)}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

En appliquant encore l'opérateur D_t^α deux fois sur l'équation (5.21) (ou une fois sur l'équation (5.23)), on a :

$$D_t^{2\alpha} u(x, t) = \Gamma(2\alpha + 1)f_2(x) + \frac{\Gamma(3\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)}f_3(x)(t-t_0)^\alpha + \frac{\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma(2\alpha + 1)}f_4(x)(t-t_0)^{2\alpha} + \dots, \quad (5.24)$$

tandis que la substitution de $t = t_0$ dans l'équation (5.24) déterminera la forme de $f_2(x)$ comme étant :

$$f_2(x) = \frac{D_t^{2\alpha} u(x, t_0)}{\Gamma(2\alpha + 1)}.$$

Si on continue à appliquer récursivement l'opérateur D_t^α m -fois sur l'équation (5.21), puis en substituant $t = t_0$ dans l'équation résultante, il est alors facile d'obtenir la forme de $f_m(x)$.

Par conséquent, la formule générale de $f_m(x)$ est donnée par :

$$f_m(x) = \frac{D_t^{m\alpha} u(x, t_0)}{\Gamma(m\alpha + 1)}, m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.25)$$

Ceci complète la preuve du Théorème. \square

Remarque 5.1 En remplaçant la forme de $f_m(x)$ de l'équation (5.25) dans la série de l'équation (5.21), nous pouvons voir que la série de puissance fractionnelle multiple de $u(x, t)$ en t_0 devrait être de la forme :

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_t^{m\alpha} u(x, t_0)}{\Gamma(m\alpha + 1)} (t - t_0)^{m\alpha}, \quad (5.26)$$

$$0 \leq n - 1 < \alpha < n, x \in I \subset \mathbb{R}, t_0 \leq t \leq t_0 + R,$$

qui est une formule de la série de Taylor généralisée.

De plus, dans le cas où $\alpha = 1$, la forme générale de la formule de la série de Taylor généralisée de l'équation (5.26) se réduit à la formule de Taylor classique :

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^m u(x, t_0)}{\partial t^m} \frac{(t - t_0)^m}{m!}, x \in I \subset \mathbb{R}, t_0 \leq t \leq t_0 + R.$$

5.4 FRPSM POUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON-LINÉAIRES D'ORDRE FRACTIONNAIRE TEMPORELLE

On considère l'équation aux dérivées partielles non-linéaire d'ordre fractionnaire temporelle suivante :

$${}^c D_t^{n\alpha} u(x, t) + Lu(x, t) + Nu(x, t) = f(x, t), t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (5.27)$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = f_0(x) \text{ et } {}^c D_t^{(n-1)\alpha} u(x, 0) = f_{n-1}(x), \quad (5.28)$$

où ${}^c D_t^{n\alpha} = \underbrace{{}^c D_t^{\alpha} \dots {}^c D_t^{\alpha}}_{n\text{-fois}}$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo

d'ordre $n\alpha$, où $n - 1 < n\alpha \leq n, n \in \mathbb{N}^*$, L est un opérateur linéaire, N est un opérateur non-linéaire et $f(x, t)$ est le terme source.

La méthode FRPSM consiste à exprimer la solution des équations (5.27) et (5.28) sous forme d'une série de puissance fractionnaire au point initial $t = 0$.

Pour atteindre notre objectif, supposons que la solution est de la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}, 0 < \alpha \leq 1, x \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq R. \quad (5.29)$$

Ensuite, nous définissons $u_k(x, t)$, la $k^{\text{ième}}$ série tronquée de $u(x, t)$. Soit

$$u_k(x, t) = \sum_{n=0}^k f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}, 0 < \alpha \leq 1, x \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq R. \quad (5.30)$$

Puisque $u(x, t)$ satisfait les conditions initiales (5.28). Ainsi, la solution approximative de (5.27) peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f_0(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \\ 0 < \alpha &\leq 1, x \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq R, \end{aligned} \quad (5.31)$$

où

$$u_1(x, t) = f_0(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)},$$

est considérée comme la 1^{ère} FRPS-solution approximative de $u(x, t)$.

En conséquence, nous pouvons reformulé $u_k(x, t)$ de l'équation (5.30) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u_k(x, t) &= f_0(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \sum_{n=2}^k f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \\ 0 < \alpha &\leq 1, x \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq R. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Maintenant, nous définissons la fonction résiduelle comme suit :

$$Res(x, t) = {}^c D_t^{n\alpha} u(x, t) + Lu(x, t) + Nu(x, t) - f(x, t), \quad (5.33)$$

et la $k^{\text{ième}}$ fonction résiduelle tronquée comme :

$$Res_k(x, t) = {}^c D_t^{n\alpha} u_k(x, t) + Lu_k(x, t) + Nu_k(x, t) - f(x, t), k = 2, 3, 4, \dots \quad (5.34)$$

Comme dans [El-Ajou et al., 2013],[El-Ajou et al., 2015], il est clair que $Res(x, t) = 0$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} Res_k(x, t) = Res(x, t)$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$.

En fait, cela conduit à ${}^c D_t^{(n-1)\alpha} Res_k(x, t) = 0$, parce que la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Caputo est égale à zéro. De plus, les dérivés fractionnaires ${}^c D_t^{(n-1)\alpha}$ de $Res(x, t)$ et $Res_k(x, t)$ correspondent à $t = 0$ pour chaque $n = 1, 2, \dots, k$, c'est-à-dire

$${}^c D_t^{(n-1)\alpha} Res(x, 0) = {}^c D_t^{(n-1)\alpha} Res_k(x, 0) = 0, n = 1, 2, \dots \quad (5.35)$$

Pour clarifier la technique FRPSM, nous substituons la $k^{\text{ième}}$ série tronquée de $u(x, t)$ dans l'équation (5.34), on trouve la formule de la dérivée fractionnaire ${}^c D_t^{(n-1)\alpha}$ de $Res_k(x, t)$, puis résolvons la formule algébrique obtenue (5.35) pour obtenir les coefficients $f_n(x)$ requis dans l'équation (5.32). De cette manière, nous pouvons obtenir tous les coefficients requis de la série de puissance fractionnaire multiple des équations (5.27) et (5.28).

5.4.1 Applications de la méthode FRPSM

Exemple 5.3 Considérons l'équation de Fisher d'ordre fractionnaire temporelle suivante :

$${}^c D_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + 6u(x, t)(1 - u(x, t)), 0 < \alpha \leq 1, x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (5.36)$$

avec la condition initiale :

$$u(x, 0) = f_0(x) = \frac{1}{(1 + e^x)^2}. \quad (5.37)$$

La solution exacte de l'équation (5.36) avec la condition initiale (5.37) est donnée par :

$$u(x, t) = \frac{1}{(1 + e^{x-5t})^2}.$$

Selon la méthode FRPSM et à partir de la condition initiale (5.37), la solution en série de l'équation (5.36) peut être écrite de la forme :

$$u(x, t) = \frac{1}{(1 + e^x)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}.$$

Soit $u_k(x, t)$, la $k^{\text{ième}}$ série tronquée de $u(x, t)$ définie comme suit :

$$u_k(x, t) = \frac{1}{(1 + e^x)^2} + \sum_{n=1}^k f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)},$$

et $Res_k(x, t)$, la $k^{\text{ième}}$ fonction résiduelle tronquée définie par :

$$Res_k(x, t) = {}^c D_t^\alpha u_k(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_k(x, t) - 6u_k(x, t)(1 - u_k(x, t)), k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.38)$$

Par conséquent, pour déterminer $f_1(x)$, nous écrivons pour $k = 1$ dans l'équation (5.38)

$$Res_1(x, t) = {}^c D_t^\alpha u_1(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1(x, t) - 6u_1(x, t)(1 - u_1(x, t)),$$

où

$$u_1(x, t) = f_0(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Donc

$$Res_1(x, t) = f_1(x) - f_0''(x) - f_1''(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - 6 \left(f_0(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \times \left(1 - f_0(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right).$$

De l'équation (5.35), nous déduisons que $Res_1(x, 0) = 0$, et donc :

$$f_1(x) = \frac{10e^x}{(1 + e^x)^3}.$$

Par suite

$$u_1(x, t) = \frac{1}{(1 + e^x)^2} + \frac{10e^x}{(1 + e^x)^3} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

De même, pour déterminer $f_2(x)$, on écrit pour $k = 2$ dans l'équation (5.38)

$$\text{Res}_2(x, t) = {}^c D_t^\alpha u_2(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_2(x, t) - 6u_2(x, t)(1 - u_2(x, t)),$$

où

$$u_2(x, t) = f_0(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \text{Res}_2(x, t) &= f_1(x) + f_2(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - f_0''(x) - f_1''(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - f_2''(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \\ &\quad - 6 \left(f_0(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right) \\ &\quad \times \left(1 - f_0(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right). \end{aligned}$$

De l'équation (5.35), nous déduisons que ${}^c D_t^\alpha \text{Res}_2(x, 0) = 0$, et donc :

$$f_2(x) = \frac{50e^x(-1 + 2e^x)}{(1 + e^x)^4}.$$

Par suite

$$u_2(x, t) = \frac{1}{(1 + e^x)^2} + \frac{10e^x}{(1 + e^x)^3} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{50e^x(-1 + 2e^x)}{(1 + e^x)^4} \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}.$$

De même, pour déterminer $f_3(x)$, on écrit pour $k = 3$ dans l'équation (5.38)

$$\text{Res}_3(x, t) = {}^c D_t^\alpha u_3(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_3(x, t) - 6u_3(x, t)(1 - u_3(x, t)),$$

où

$$u_3(x, t) = f_0(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + f_3(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \text{Res}_3(x, t) &= f_1(x) + f_2(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + f_3(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \\ &\quad - f_0''(x) - f_1''(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - f_2''(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - f_3''(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \\ &\quad - 6 \left(f_0(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + f_3(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \right) \\ &\quad \times \left(1 - f_0(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + f_3(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \right). \end{aligned}$$

De l'équation (5.35), nous déduisons que ${}^c D_t^{2\alpha} \text{Res}_3(x, 0) = 0$, et donc :

$$f_3(x) = \frac{125e^x(1 - 7e^x + 4e^{2x})}{(1 + e^x)^5}.$$

Par suite

$$u_3(x, t) = \frac{1}{(1 + e^x)^2} + \frac{10e^x}{(1 + e^x)^3} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{50e^x (-1 + 2e^x)}{(1 + e^x)^4} \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{125e^x (1 - 7e^x + 4e^{2x})}{(1 + e^x)^5} \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)}.$$

De même, le reste des termes restants de $f_n(x)$, $n \geq 4$ peuvent être obtenus, et la solution finale de l'équation (5.36) est donnée sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}.$$

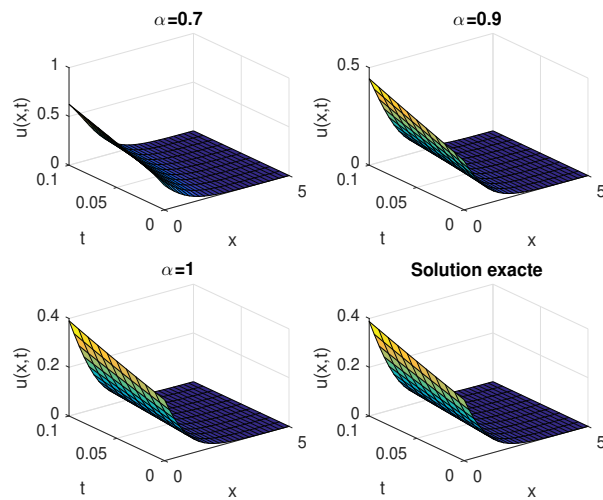


FIGURE 5.5 – Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre trois par la méthode FRPSM de l'équation (5.36).

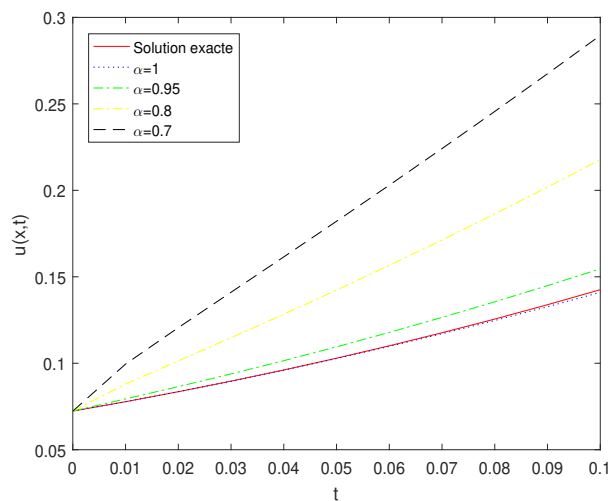


FIGURE 5.6 – Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre trois par la méthode FRPSM de l'équation (5.36) avec $x = 1$.

TABLE 5.3 – Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives d'ordre trois par la méthode FRPSM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation (5.36) avec $x = 1$.

t	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1$	Solution exacte	$ u_{exacte} - u_{FRPSM} $
0.01	0.087982	0.081516	0.077775	0.077777	1.8174×10^{-6}
0.03	0.11475	0.099165	0.089612	0.08966	4.7858×10^{-5}
0.05	0.14229	0.11798	0.10271	0.10293	2.1504×10^{-4}
0.07	0.17130	0.13823	0.11707	0.11764	5.6964×10^{-4}
0.09	0.20186	0.15995	0.13269	0.13386	1.1618×10^{-3}

Exemple 5.4 Considérons l'équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre fractionnaire temporelle suivante :

$${}^c D_t^{2\alpha} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - 3u(x, t), \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, 0 < x < \pi, t > 0, \quad (5.39)$$

avec les conditions initiales :

$$u(x, 0) = f_0(x) = 0, {}^c D_t^\alpha u(x, 0) = f_1(x) = 2 \cos x, \quad (5.40)$$

La solution exacte de l'équation (5.39) avec les conditions initiales (5.40) est donnée par :

$$u(x, t) = \cos x \sin 2t.$$

Selon la méthode FRPSM et les conditions initiales (5.40), la solution en série de l'équation (5.39) peut être écrite sous la forme :

$$u(x, t) = 2 \cos x \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}.$$

Soit $u_k(x, t)$, la $k^{\text{ième}}$ série tronquée de $u(x, t)$ définie comme suit :

$$u_k(x, t) = 2 \cos x \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \sum_{n=2}^k f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)},$$

et $\text{Res}_k(x, t)$, la $k^{\text{ième}}$ fonction résiduelle tronquée définie par :

$$\text{Res}_k(x, t) = {}^c D_t^{2\alpha} u_k(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_k(x, t) + 3u_k(x, t), k = 2, 3, 4, \dots \quad (5.41)$$

Par conséquent, pour déterminer $f_2(x)$, nous écrivons pour $k = 2$ dans l'équation (5.41)

$$\text{Res}_2(x, t) = {}^c D_t^{2\alpha} u_2(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_2(x, t) + 3u_2(x, t),$$

où

$$u_2(x, t) = f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{Res}_2(x, t) = & f_2(x) - f_1''(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - f_2''(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \\ & + 3 \left(f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right). \end{aligned}$$

De l'équation (5.35), nous déduisons que $Res_2(x, 0) = 0$, on a :

$$f_2(x) = 0.$$

D'où

$$u_2(x, t) = 2 \cos x \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

De même, pour déterminer $f_3(x)$, on écrit pour $k = 3$ dans l'équation (5.41)

$$Res_3(x, t) = {}^c D_t^{2\alpha} u_3(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_3(x, t) + 3u_3(x, t),$$

où

$$u_3(x, t) = f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + f_3(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)}.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} Res_3(x, t) &= f_3(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - f_1''(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - f_3''(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \\ &+ 3 \left(f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + f_3(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \right). \end{aligned}$$

De l'équation (5.35), nous déduisons que ${}^c D_t^\alpha Res_3(x, 0) = 0$, on a :

$$f_3(x) = -8 \cos x.$$

Par suite :

$$u_3(x, t) = 2 \cos x \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - 8 \cos x \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)}.$$

De même, pour déterminer $f_4(x)$, on écrit pour $k = 4$ dans l'équation (5.41)

$$Res_4(x, t) = {}^c D_t^{2\alpha} u_4(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_4(x, t) + 3u_4(x, t),$$

où

$$u_4(x, t) = f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + f_3(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + f_4(x) \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} Res_4(x, t) &= f_3(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + f_4(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - f_1''(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ &- f_3''(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} - f_4''(x) \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} \\ &+ 3 \left(f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + f_3(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + f_4(x) \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} \right). \end{aligned}$$

De l'équation (5.35), nous déduisons que ${}^c D_t^{2\alpha} Res_4(x, 0) = 0$, on a

$$f_4(x) = 0.$$

Par suite

$$u_4(x, t) = 2 \cos x \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - 8 \cos x \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)}.$$

De même, pour déterminer $f_5(x)$, on écrit pour $k = 5$ dans l'équation (5.41)

$$Res_5(x, t) = {}^c D_t^{2\alpha} u_5(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_5(x, t) + 3u_5(x, t),$$

où

$$u_5(x, t) = f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + f_3(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + f_5(x) \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(5\alpha + 1)}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} Res_5(x, t) &= f_3(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + f_5(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} - f_1''(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ &\quad - f_3''(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} - f_5''(x) \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(5\alpha + 1)} \\ &\quad + 3 \left(f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + f_3(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + f_5(x) \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(5\alpha + 1)} \right). \end{aligned}$$

De l'équation (5.35), nous déduisons que ${}^c D_t^{3\alpha} Res_5(x, 0) = 0$, on a

$$f_5(x) = 32 \cos x.$$

Par suite

$$u_5(x, t) = 2 \cos x \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - 8 \cos x \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + 32 \cos x \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(5\alpha + 1)}.$$

De même, le reste des termes de $f_n(x)$, $n \geq 6$ peuvent être obtenues et la solution finale de l'équation (5.39) est donné sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \quad (5.42) \\ &= \cos x \left(2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - 8 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + 32 \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(5\alpha + 1)} + \dots \right). \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 1$, la solution (5.42) devient :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \cos x \left(2t - \frac{(2t)^3}{3!} + \frac{(2t)^5}{5!} + \dots \right) \\ &= \cos x \sin 2t. \end{aligned}$$

C'est la solution la solution exacte de l'équation (5.39) dans le cas classique.

TABLE 5.4 – Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives d'ordre cinq par la méthode FRPSM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation (5.39) avec $x = 1$.

t	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1$	Solution exacte	$ u_{exacte} - u_{FRPSM} $
0.01	0.02912	0.017803	0.010805	0.010805	1.3722×10^{-16}
0.02	0.05062	0.033203	0.021606	0.021606	1.7564×10^{-14}
0.03	0.069863	0.047784	0.032399	0.032399	3.0008×10^{-13}
0.04	0.087708	0.061834	0.043178	0.043178	2.2480×10^{-12}
0.05	0.10452	0.075482	0.05394	0.05394	1.0719×10^{-11}

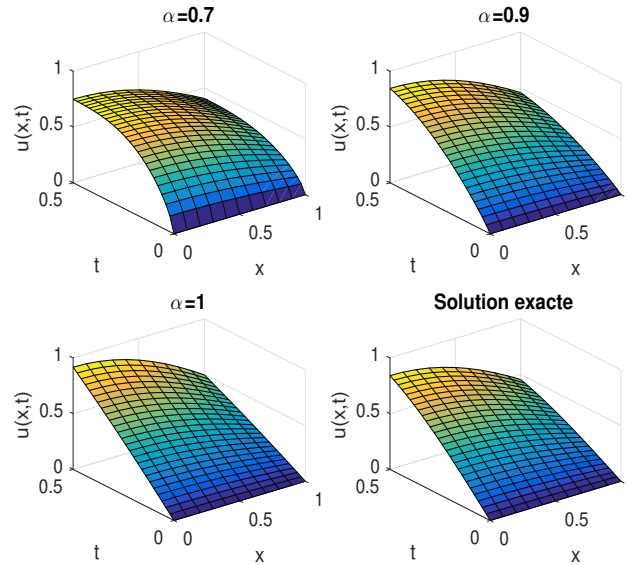


FIGURE 5.7 – Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre cinq par la méthode FRPSM de l'équation (5.39).

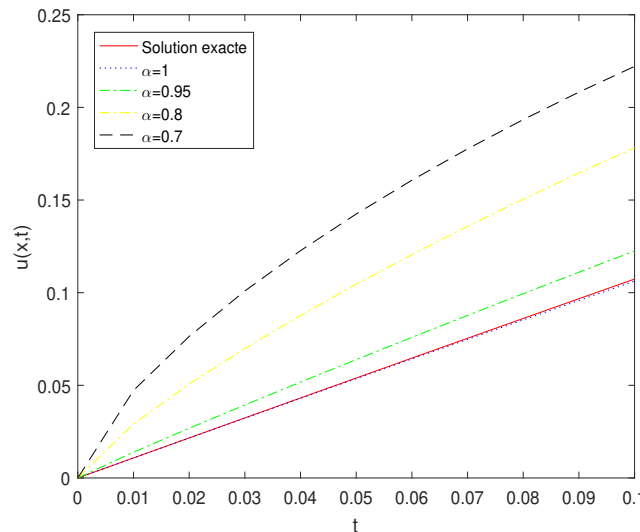


FIGURE 5.8 – Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre cinq par la méthode FRPSM de l'équation (5.39) avec $x = 1$.

5.5 NOUVELLE MÉTHODE ANALYTIQUE POUR LA RÉOLUTION DES PROBLÈMES DE CONVECTION DE DIFFUSION DE RÉACTION NON-LINÉAIRE D'ORDRE FRACTIONNAIRE

Dans ce paragraphe, nous proposons une nouvelle méthode analytique appelée méthode généralisée de la série fractionnaire de Taylor (GTFSM) [Khalouta et Kadem, 2019f] pour résoudre les problèmes de convection de diffusion de réaction non-linéaire d'ordre fractionnaire temporelle. Ces problèmes sont des modèles mathématiques très utiles en sciences appliquées telles que la modélisation en biologie, physique, chimie, astrophysique, hydrologie, médecine et en ingénierie.

Les résultats obtenus sont présentés sous la forme d'un nouveau théorème. L'avantage de cette méthode par rapport aux méthodes existantes est qu'elle résout les problèmes non-linéaires sans avoir à recourir à la linéarisation ni à aucune autre restriction. La précision et l'efficacité de la méthode sont testées à l'aide de deux exemples numériques. Les résultats obtenus interprètent l'efficacité et simplicité pour résoudre différents types de problèmes fractionnaires non-linéaires.

Théorème 5.4 [Khalouta et Kadem, 2019d] *Considérons les problèmes à valeur initiale de convection de diffusion de réaction non-linéaire d'ordre fractionnaire temporelle sous la forme :*

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha u = (a(u)u_x)_x + b(u)u_x + c(u) \\ u(x, 0) = f_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5.43)$$

où ${}^c D_t^\alpha$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α , où $0 < \alpha \leq 1$ et $0 \leq t < R < 1$, $u = u(x, t)$ est une fonction inconnue et les fonctions arbitraires $a(u)$, $b(u)$ et $c(u)$ désignent respectivement le terme de diffusion, le terme de convection et le terme de réaction.

Alors, par la méthode GTFSM, la solution de (5.43) est donnée sous la forme d'une série infinie qui converge rapidement vers la solution exacte comme suit :

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(x) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)},$$

où $c_i(x)$ sont les coefficients de la série et R est le rayon de convergence.

Démonstration. Considérons les problèmes à valeur initiale de convection de diffusion de réaction non-linéaires d'ordre fractionnaire temporelle sous la forme (5.43).

Supposons que la solution prenne la forme en série infinie suivante :

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(x) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)}. \quad (5.44)$$

Par conséquent, la solution approximative de (5.43) peut être écrite sous forme de :

$$u_n(x, t) = \sum_{i=0}^n c_i(x) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} = c_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)}. \quad (5.45)$$

En appliquant l'opérateur ${}^c D_t^\alpha$ sur (5.45) et en utilisant ses propriétés (voir Chapitre 1), on obtient la formule :

$${}^c D_t^\alpha u_n(x, t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1}(x) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)}. \quad (5.46)$$

Ensuite, nous substituons les deux équations (5.45) et (5.46) dans (5.43). Par conséquent, nous avons les relations de récurrence suivantes :

$$0 = \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1}(x) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} - \left(a \left(\sum_{i=0}^n c_i(x) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} \right) \left(\sum_{i=0}^n c'_i(x) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} \right) \right)_x - b \left(\sum_{i=0}^n c_i(x) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} \right) \left(\sum_{i=0}^n c'_i(x) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} \right) - c \left(\sum_{i=0}^n c_i(x) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} \right).$$

En poursuivant le même procédé utilisé pour obtenir les coefficients de la série de Taylor. Particulièrement, pour déterminer la fonction $c_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, nous devons résoudre le problème suivant :

$$D_t^{(n-1)\alpha} \{L(x, t, \alpha, n)\} \downarrow_{t=0} = 0,$$

où

$$L(x, t, \alpha, n) = \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1}(x) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} - \left(a \left(\sum_{i=0}^n c_i(x) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} \right) \left(\sum_{i=0}^n c'_i(x) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} \right) \right)_x - b \left(\sum_{i=0}^n c_i(x) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} \right) \left(\sum_{i=0}^n c'_i(x) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} \right) - c \left(\sum_{i=0}^n c_i(x) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} \right).$$

Maintenant, nous déterminons les premiers termes de la suite $\{c_n(x)\}_1^N$. Pour $n = 1$ on a

$$L(x, t, \alpha, 1) = c_1(x) - \left(a \left(c_0(x) + c_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \left(c'_0(x) + c'_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \right)_x - b \left(c_0(x) + c_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \left(c'_0(x) + c'_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) - c \left(c_0(x) + c_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right).$$

En résolvant $L(x, 0, \alpha, 1) = 0$, ce qui donne :

$$c_1(x) = (a(c_0(x)) c'_0(x))_x + b(c_0(x)) c'_0(x) + c(c_0(x)).$$

Pour déterminer $c_2(x)$, on considère $L(x, t, \alpha, 2)$ et on résout :

$$D_t^\alpha \{L(x, t, \alpha, 2)\} \downarrow_{t=0} = 0.$$

Pour déterminer $c_3(x)$, on considère $L(x, t, \alpha, 3)$ et on résout :

$$D_t^{2\alpha} \{L(x, t, \alpha, 3)\} \downarrow_{t=0} = 0,$$

et ainsi de suite.

En général, pour obtenir la fonction de coefficient $c_k(x)$, on résout :

$$D_t^{(k-1)\alpha} \{L(x, t, \alpha, k)\} \downarrow_{t=0} = 0.$$

Finalement, la solution de (5.43), peut être exprimée par :

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(x) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)}.$$

Ceci complète la preuve du Théorème. \square

5.5.1 Exemples illustratifs

Exemple 5.5 *Considérons le problème de valeur initiale de convection de diffusion de réaction non-linéaires d'ordre fractionnaire temporelle suivant :*

$$\begin{cases} D_t^\alpha u = u_{xx} + uu_x + u - u^2, 0 < \alpha \leq 1, \\ u(x, 0) = 1 + e^x, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.47)$$

La solution exacte de (5.47) pour $\alpha = 1$ est :

$$u(x, t) = 1 + e^{x+t}.$$

En appliquant les démarches utilisées dans la méthode GTFSM, nous avons la solution du problème (5.47) sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(x) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)}, t \in [0, R], x \in \mathbb{R}.$$

et

$$c_i(x) = e^x, \text{ pour } i = 1, 2, 3, \dots$$

Par conséquent, la solution de (5.47) peut être exprimée par :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 1 + e^x \left(1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right) \\ &= 1 + e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha + 1)} \\ &= 1 + e^x E_\alpha(t^\alpha), \end{aligned}$$

où $E_\alpha(t^\alpha)$ est la fonction de Mittag-Leffler définie par (1.5).

Pour $\alpha = 1$, la solution approchée de (5.47) est donnée par :

$$u(x, t) = 1 + e^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \right),$$

ce qui donne

$$u(x, t) = 1 + e^{x+t},$$

qui n'est autre que la solution exacte de (5.47) dans le cas classique.

TABLE 5.5 – Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives d'ordre quatre par la méthode GTFSM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation (5.47) avec $x = 1$.

t	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1$	Solution exacte	$ u_{\text{exacte}} - u_{\text{GTFSM}} $
0.01	0.02912	0.017803	0.010805	0.010805	1.3722×10^{-16}
0.02	0.05062	0.033203	0.021606	0.021606	1.7564×10^{-14}
0.03	0.069863	0.047784	0.032399	0.032399	3.0008×10^{-13}
0.04	0.087708	0.061834	0.043178	0.043178	2.2480×10^{-12}
0.05	0.10452	0.075482	0.05394	0.05394	1.0719×10^{-11}

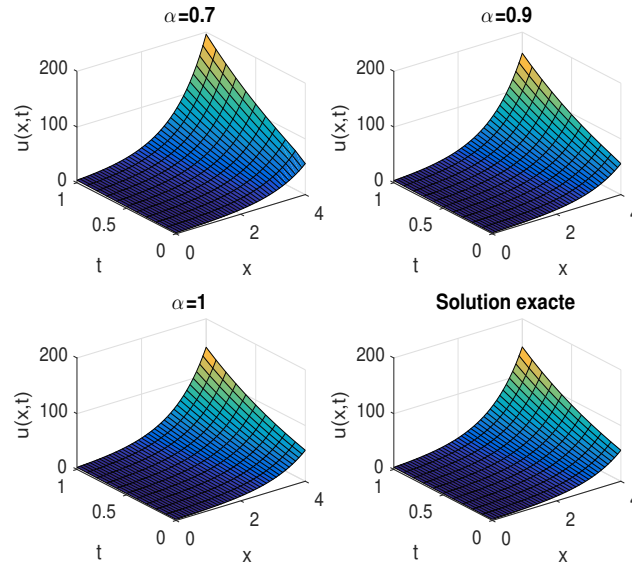


FIGURE 5.9 – Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre quatre par la méthode GTFSM de l'équation (5.47).

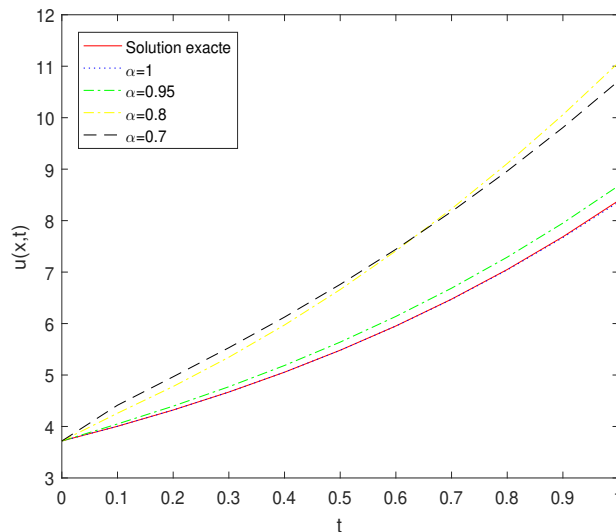


FIGURE 5.10 – Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre quatre par la méthode GTFSM de l'équation (5.47) avec $x = 1$.

Exemple 5.6 *Considérons le problème de valeur initiale de convection de diffusion de réaction non-linéaires d'ordre fractionnaire temporelle suivant :*

$$\begin{cases} D_t^\alpha u = (uu_x)_x + 3uu_x + 2(u - u^2), 0 < \alpha \leq 1, \\ u(x, 0) = 2\sqrt{e^x - e^{-4x}}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.48)$$

La solution exacte de (5.48) pour $\alpha = 1$ est :

$$u(x, t) = 2e^{2t} \sqrt{e^x - e^{-4x}}.$$

En appliquant les démarches utilisées dans la méthode GTFSM, nous avons la solution du problème (5.48) sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(x) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)}, t \in [0, R], x \in \mathbb{R}.$$

et

$$c_i(x) = 2^i \sqrt{e^x - e^{-4x}}, \text{ pour } i = 1, 2, 3, \dots$$

Par conséquent, la solution de (5.48) peut être exprimée par :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 2\sqrt{e^x - e^{-4x}} \left(1 + \frac{2t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{2^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{2^3 t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right) \\ &= 2\sqrt{e^x - e^{-4x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha + 1)} = 2\sqrt{e^x - e^{-4x}} E_\alpha(2t^\alpha), \end{aligned}$$

où $E_\alpha(2t^\alpha)$ est la fonction de Mittag-Leffler définie par (1.5).

Pour $\alpha = 1$, la solution approchée de (5.48) est donnée par :

$$u(x, t) = 2\sqrt{e^x - e^{-4x}} \left(1 + 2t + \frac{(2t)^2}{2!} + \frac{(2t)^3}{3!} + \dots \right),$$

ce qui donne

$$u(x, t) = 2e^{2t} \sqrt{e^x - e^{-4x}},$$

qui n'est autre que la solution exacte de (5.48) dans le cas classique.

TABLE 5.6 – Les valeurs numériques de la solution exacte et les valeurs numériques des solutions approximatives d'ordre quatre par la méthode GTFSM pour des valeurs différentes d'ordre α de l'équation (5.48) avec $x = 1$.

t	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1$	Solution exacte	$ u_{\text{exacte}} - u_{\text{GTFSM}} $
0.1	4.2845	4.2845	4.0139	4.0139	9.0642×10^{-6}
0.2	6.1584	5.4182	4.9023	4.9026	3.0025×10^{-4}
0.3	7.9535	6.7924	5.9857	5.9881	2.3622×10^{-3}
0.4	10.138	8.4653	7.3035	7.3138	1.0322×10^{-2}
0.5	12.781	10.494	8.9004	8.9331	3.2694×10^{-2}

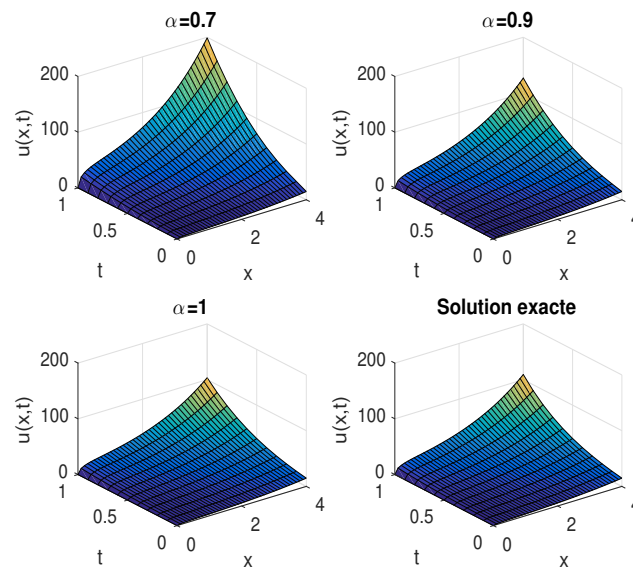


FIGURE 5.11 – Les graphes représentant la surface de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre quatre par la méthode GTFSM de l'équation (5.48).

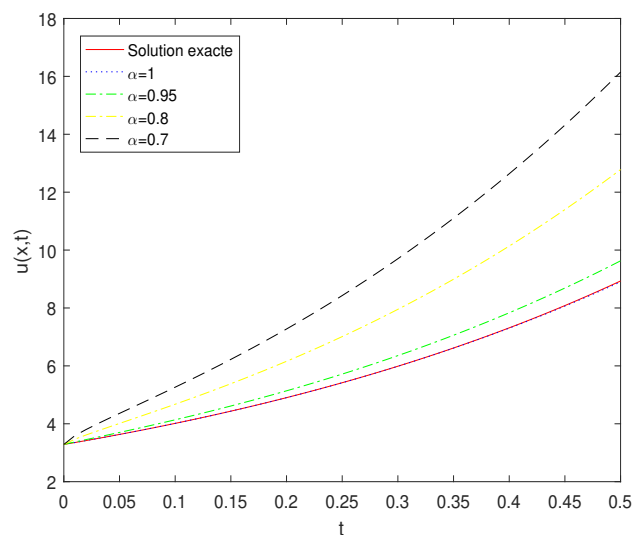


FIGURE 5.12 – Le comportement de la solution exacte et des solutions approximatives d'ordre quatre par la méthode GTFSM de l'équation (5.48) avec $x = 1$.

Dans cette partie, nous présentons nos résultats sous forme d'articles pour la résolution d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaire temporelle dite : "Nonlinear Caputo time-fractional wave-like equations with variable coefficients"



Comparison of New Iterative Method and Natural Homotopy Perturbation Method for Solving Nonlinear Time-Fractional Wave-Like Equations with Variable Coefficients

A. Khalouta* and A. Kadem

*Laboratory of Fundamental and Numerical Mathematics,
Department of Mathematics, Faculty of Sciences,
Ferhat Abbas Sétif University 1, 19000 Sétif, Algeria.*

Received: June 18, 2018 Revised: January 31, 2019

Abstract: In this paper, we present a comparison between the new iterative method (NIM) and the natural homotopy perturbation method (NHPM) for solving nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients. The two methods introduced an efficient tool for solving this type of equations. The results show that the NIM has an advantage over the NHPM because it takes less time and uses only the inverse operator to solve the nonlinear problems and there is no need to use any other inverse transform as in the case of NHPM. Numerical examples are presented to illustrate the efficiency and accuracy of the proposed methods.

Keywords: *nonlinear time-fractional wave-like equations, Caputo fractional derivative, new iterative method, natural homotopy perturbation method.*

Mathematics Subject Classification (2010): Primary 35L05, 35R11; Secondary 35A35, 26A33.

* Corresponding author: <mailto:nadjibkh@yahoo.fr>

1 Introduction

The fractional calculus which deals with derivatives and integrals of arbitrary orders plays a vital role in many fields of applied science and engineering [4]. Recently, nonlinear fractional partial differential equations are successfully applied to many mathematical models in mathematical biology, aerodynamics, rheology, diffusion, electrostatics, electrodynamics, control theory, fluid mechanics, analytical chemistry and so on.

Several analytical and numerical methods have been proposed to solve nonlinear fractional partial differential equations. The most commonly used ones are: the adomian decomposition method (ADM) [8] variational iteration method (VIM) [10], fractional difference method (FDM) [4], homotopy perturbation method (HPM) [3].

In this paper, the main objective is to introduce a comparative study of nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients by using the new iterative method (NIM) which uses only the inverse operator and the natural homotopy perturbation method (NHPM) which is a coupling of the natural transform and the homotopy perturbation method (HPM) using He’s polynomials.

Consider the following nonlinear time-fractional wave-like equations:

$$\begin{aligned}
 D_t^\alpha v &= \sum_{i,j=1}^n F_{1ij}(X, t, v) \frac{\partial^{k+m}}{\partial x_i^k \partial x_j^m} F_{2ij}(v_{x_i}, v_{x_j}) \\
 &+ \sum_{i=1}^n G_{1i}(X, t, v) \frac{\partial^p}{\partial x_i^p} G_{2i}(v_{x_i}) + H(X, t, v) + S(X, t)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

with the initial conditions

$$v(X, 0) = a_0(X), v_t(X, 0) = a_1(X),
 \tag{2}$$

where D_t^α is the Caputo fractional derivative operator of order α , $1 < \alpha \leq 2$.

Here $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, F_{1ij}, G_{1i} are nonlinear functions of X, t and v , F_{2ij}, G_{2i} are nonlinear functions of derivatives of v with respect to x_i and x_j , respectively. Also H, S are nonlinear functions and k, m, p are integers.

In the classical case, these types of equations are of considerable significance in various fields of applied sciences, mathematical physics, nonlinear hydrodynamics, engineering physics, biophysics, human movement sciences, astrophysics and plasma physics. These equations describe the evolution of erratic motions of small particles that are immersed in fluids, fluctuations of the intensity of laser light, velocity distributions of fluid particles in turbulent flows [7].

2 Basic Definitions

In this section, we give some basic definitions and important properties of fractional calculus theory and natural transform, which will be used in this paper.

Definition 2.1 [4] The Riemann-Liouville fractional integral operator of order $\alpha \geq 0$ of a function $f \in C_\mu$, $\mu \geq -1$ is defined as follows:

$$I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi, t > 0.
 \tag{3}$$

Definition 2.2 [4] The Caputo fractional derivative operator of order $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ of a function $f \in C_{-1}^n$ is defined as follows:

$$D_t^\alpha f(t) = I_t^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\xi) d\xi, t > 0. \quad (4)$$

For the Riemann-Liouville fractional integral and Caputo fractional derivative, we have the following relation:

$$I_t^\alpha D_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}, t > 0. \quad (5)$$

Definition 2.3 [1] The natural transform is defined over the set of functions $A = \{f(t) | \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < M e^{\frac{|t|}{\tau_1}}, \text{ if } t \in (-1)^j \times [0, \infty)\}$ by the following integral:

$$\mathcal{N}^+[f(t)] = R^+(s, u) = \frac{1}{u} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{st}{u}} f(t) dt, s, u \in (0, \infty). \quad (6)$$

Definition 2.4 [6] The natural transform of the Caputo fractional derivative of order $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ is defined as follows:

$$\mathcal{N}^+[D_t^\alpha f(t)] = R_\alpha^+(s, u) = \frac{s^\alpha}{u^\alpha} R^+(s, u) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{\alpha-(k+1)}}{u^{\alpha-k}} f^{(k)}(0^+). \quad (7)$$

3 The New Iterative Method (NIM)

In this section, we introduce the new iterative method for solving equations (1) and (2). Applying the inverse operator I_t^α on both sides of equation (1) and using (5), we get

$$\begin{aligned} v(X, t) &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{(k)}(X, 0) \frac{t^k}{k!} + I_t^\alpha \left(\sum_{i,j=1}^n F_{1ij}(X, t, v) \frac{\partial^{k+m}}{\partial x_i^k \partial x_j^m} F_{2ij}(v_{x_i}, v_{x_j}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n G_{1i}(X, t, v) \frac{\partial^p}{\partial x_i^p} G_{2i}(v_{x_i}) + H(X, t, v) \right) + I_t^\alpha (S(X, t)). \end{aligned} \quad (8)$$

Let

$$\begin{aligned} g(X, t) &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{(k)}(X, 0) \frac{t^k}{k!} + I_t^\alpha (S(X, t)), \\ N(v(X, t)) &= I_t^\alpha \left(\sum_{i,j=1}^n F_{1ij}(X, t, v) \frac{\partial^{k+m}}{\partial x_i^k \partial x_j^m} F_{2ij}(v_{x_i}, v_{x_j}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n G_{1i}(X, t, v) \frac{\partial^p}{\partial x_i^p} G_{2i}(v_{x_i}) + H(X, t, v) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Thus, (8) can be written in the following form:

$$v(X, t) = g(X, t) + N(v(X, t)), \tag{10}$$

where g is a known function, N is a nonlinear operator of v .

The nonlinear operator N can be decomposed in the same way as in [2].

So, the solution of equation (10) can be written in the following series form:

$$v(X, t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(X, t) = g(X, t) + N \left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i(X, t) \right). \tag{11}$$

4 The Natural Homotopy Perturbation Method (NHPM)

In this section, we describe the application of the natural homotopy perturbation method (NHPM) for equations (1) and (2). First we define

$$\begin{aligned} Nv &= \sum_{i,j=1}^n F_{1ij}(X, t, v) \frac{\partial^{k+m}}{\partial x_i^k \partial x_j^m} F_{2ij}(v_{x_i}, v_{x_j}), \\ Mv &= \sum_{i=1}^n G_{1i}(X, t, v) \frac{\partial^p}{\partial x_i^p} G_{2i}(v_{x_i}), Kv = H(X, t, v). \end{aligned} \tag{12}$$

Equation (1) is written in the form

$$D_t^\alpha v(X, t) = Nv(X, t) + Mv(X, t) + Kv(X, t) + S(X, t), t > 0. \tag{13}$$

Apply the natural transform on both sides of (13) and use (7), after that, we take the inverse natural transform, we obtain

$$v(X, t) = L(X, t) + \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Nv(X, t) + Mv(X, t) + Kv(X, t)] \right), \tag{14}$$

where $L(X, t)$ is a term arising from the source term and the prescribed initial conditions.

Now we apply the homotopy perturbation method and the nonlinear terms can be decomposed in the same way as in [9], we get

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(X, t) &= L(X, t) + p \left[\mathcal{N}^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(v) + \sum_{n=0}^{\infty} p^n K_n(v) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \sum_{n=0}^{\infty} p^n J_n(v) \right] \right) \right], \end{aligned} \tag{15}$$

where $H_n(v)$, $K_n(v)$ and $J_n(v)$ are He’s polynomials [5].

By using the coefficient of the like powers of p in equation (15), the following approximations are obtained:

$$\begin{aligned} p^0 &: v_0(X, t) = L(X, t), \\ p^1 &: v_1(X, t) = \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [H_0(v) + K_0(v) + J_0(v)] \right), \\ p^2 &: v_2(X, t) = \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [H_1(v) + K_1(v) + J_1(v)] \right) \\ &\dots \end{aligned} \tag{16}$$

Hence, the solution of equations (1) and (2) is given by

$$v(X, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(X, t). \quad (17)$$

5 Illustrative Examples and Numerical Results

Example 5.1 Consider the 2-dimensional nonlinear time-fractional wave-like equation with variable coefficients

$$D_t^\alpha v = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (v_{xx} v_{yy}) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (xy v_x v_y) - v, t > 0, 1 < \alpha \leq 2, \quad (18)$$

with the initial conditions

$$v(x, y, 0) = e^{xy}, v_t(x, y, 0) = e^{xy}, (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (19)$$

5.1 Application of the NIM

By applying the steps involved in NIM as presented in Section 3 to equations (18) and (19), we have

$$\begin{aligned} v_0 &= (1+t)e^{xy}, v_1 = - \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \right) e^{xy}, \\ v_2 &= \left(\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)} \right) e^{xy} \dots \end{aligned} \quad (20)$$

So, the solution of equations (18) and (19) is

$$v(x, y, t) = \left(1+t - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)} - \dots \right) e^{xy}. \quad (21)$$

In the special case, $\alpha = 2$, the series (21) has the closed form

$$v(x, y, t) = (\cos t + \sin t) e^{xy}. \quad (22)$$

5.2 Application of the NHPM

By applying the steps involved in NHPM as presented in Section 4 to equations (18) and (19), we have

$$\begin{aligned} p^0 &: v_0(x, y, t) = (1+t)e^{xy}, p^1 : v_1(x, y, t) = - \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \right) e^{xy}, \\ p^2 &: v_2(x, y, t) = \left(\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)} \right) e^{xy} \dots \end{aligned} \quad (23)$$

Therefore, the solution of equations (18) and (19) can be expressed by

$$v(x, y, t) = \left(1+t - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)} - \dots \right) e^{xy}. \quad (24)$$

Taking $\alpha = 2$ in equation (24), we obtain the exact solution as

$$v(x, y, t) = (\cos t + \sin t) e^{xy}. \quad (25)$$

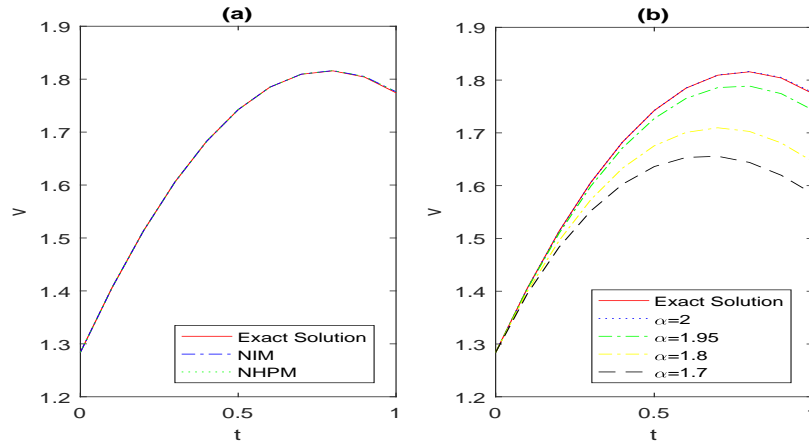


Figure 1: (a) The comparison of the 3–term approximate solution by NIM, NHPM and the exact solution, when $\alpha = 2$ and $x = y = 0.5$, (b) The behavior of the exact solution and the 3–term approximate solution by NIM and NHPM for different values of α when $x = y = 0.5$.

	$ v_{exact} - v_{NIM} $	$ v_{exact} - v_{NHPM} $	$ v_{exact} - v_{NIM} $	$ v_{exact} - v_{NHPM} $
$t/x, y$	0.5	0.5	0.7	0.7
0.1	1.8085×10^{-9}	1.8085×10^{-9}	2.2991×10^{-9}	2.2991×10^{-9}
0.3	1.3536×10^{-6}	1.3536×10^{-6}	1.7208×10^{-6}	1.7208×10^{-6}
0.5	2.9725×10^{-5}	2.9725×10^{-5}	3.7787×10^{-5}	3.7787×10^{-5}
0.7	2.2882×10^{-4}	2.2882×10^{-4}	2.9089×10^{-4}	2.9089×10^{-4}
0.9	1.0547×10^{-3}	1.0547×10^{-3}	1.3407×10^{-3}	1.3407×10^{-3}

Table 1: The absolute errors for differences between the exact solution and 3–term approximate solution by NIM and NHPM for Example 5.1, when $\alpha = 2$.

Example 5.2 Consider the following nonlinear time-fractional wave-like equation with variable coefficients

$$D_t^\alpha v = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_x v_{xx} v_{xxx}) + v_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_{xx}^3) - 18v^5 + v, t > 0, 1 < \alpha \leq 2, \quad (26)$$

with the initial conditions

$$v(x, 0) = e^x, v_t(x, 0) = e^x, x \in]0, 1[. \quad (27)$$

5.3 Application of the NIM

By applying the steps involved in NIM as presented in Section 3 to equations (26) and (27), we have

$$\begin{aligned} v_0 &= (1+t)e^x, v_1 = \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \right) e^x, \\ v_2 &= \left(\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)} \right) e^x \dots \end{aligned} \quad (28)$$

So, the solution of equations (26) and (27) is

$$v(x, t) = \left(1 + t + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha + 2)} + \dots \right) e^x. \quad (29)$$

In the special case, $\alpha = 2$, the series (29) has the closed form

$$v(x, t) = e^{x+t}. \quad (30)$$

5.4 Application of the NHPM

By applying the steps involved in NHPM as presented in Section 4 to equations (26) and (27), we have

$$\begin{aligned} p^0 & : v_0(x, t) = (1 + t)e^x, p^1 : v_1(x, t) = \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} \right) e^x, \\ p^2 & : v_2(x, t) = \left(\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha + 2)} \right) e^x \dots \end{aligned} \quad (31)$$

Therefore, the solution of equations (26) and(27) can be expressed by

$$v(x, t) = \left(1 + t + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha + 2)} + \dots \right) e^x. \quad (32)$$

Taking $\alpha = 2$ in equation (32), we obtain the exact solution as

$$v(x, t) = e^{x+t}. \quad (33)$$

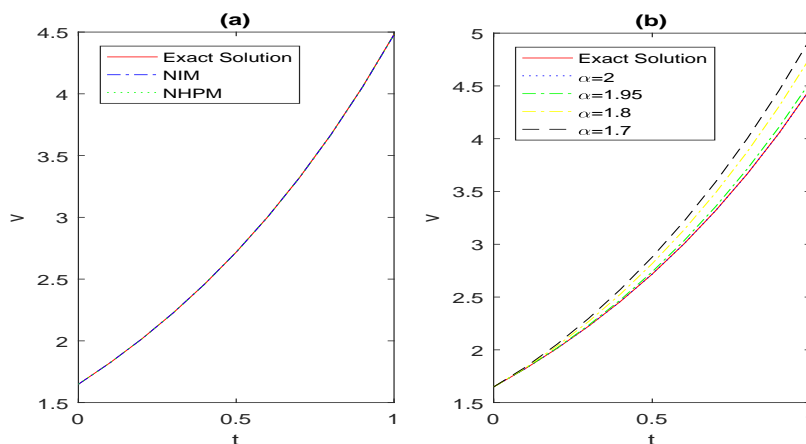


Figure 2: (a) The comparison of the 3-term approximate solution by NIM, NHPM and the exact solution, when $\alpha = 2$ and $x = 0.5$, (b) The behavior of the exact solution and the 3-term approximate solution by NIM and NHPM for different values of α when $x = 0.5$.

	$ v_{exact} - v_{NIM} $	$ v_{exact} - v_{NHMP} $	$ v_{exact} - v_{NIM} $	$ v_{exact} - v_{NHMP} $
t/x	0.5	0.5	0.7	0.7
0.1	2.323×10^{-9}	2.323×10^{-9}	2.8373×10^{-9}	2.8373×10^{-9}
0.3	1.7436×10^{-6}	1.7436×10^{-6}	2.1297×10^{-6}	2.1297×10^{-6}
0.5	3.8504×10^{-5}	3.8504×10^{-5}	4.7029×10^{-5}	4.7029×10^{-5}
0.7	2.9890×10^{-4}	2.9890×10^{-4}	3.6507×10^{-4}	3.6507×10^{-4}
0.9	1.3929×10^{-3}	1.3929×10^{-3}	1.7013×10^{-3}	1.7013×10^{-3}

Table 2: The absolute errors for differences between the exact solution and 3–term approximate solution by NIM and NHMP for Example 5.2, when $\alpha = 2$.

Example 5.3 Consider the following one-dimensional nonlinear time-fractional wave-like equation with variable coefficients

$$D_t^\alpha v = x^2 \frac{\partial}{\partial x} (v_x v_{xx}) - x^2 (v_{xx})^2 - v, t > 0, 1 < \alpha \leq 2, \tag{34}$$

with the initial conditions

$$v(x, 0) = 0, v_t(x, 0) = x^2, x \in]0, 1[. \tag{35}$$

5.5 Application of the NIM

By applying the steps involved in NIM as presented in Section 3 to equations (34) and (35), we have

$$v_0 = tx^2, v_1 = -\frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}x^2, v_2 = \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)}x^2 \dots \tag{36}$$

So, the solution of equations (34) and (35) is

$$v(x, t) = x^2 \left(t - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)} - \dots \right). \tag{37}$$

In the special case, $\alpha = 2$, the series (37) has the closed form

$$v(x, t) = x^2 \sin t. \tag{38}$$

5.6 Application of the NHMP

By applying the steps involved in NHMP as presented in Section 4 to equations (34) and (35), we have

$$p^0 : v_0(x, t) = tx^2, p^1 : v_1(x, t) = -\frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}x^2, p^2 : v_2(x, t) = \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)}x^2 \dots \tag{39}$$

Therefore, the solution of equations (34) and(35) can be expressed by

$$v(x, t) = x^2 \left(t - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)} - \dots \right). \tag{40}$$

Taking $\alpha = 2$ in equation (40), we obtain the exact solution as

$$v(x, t) = x^2 \sin t. \quad (41)$$

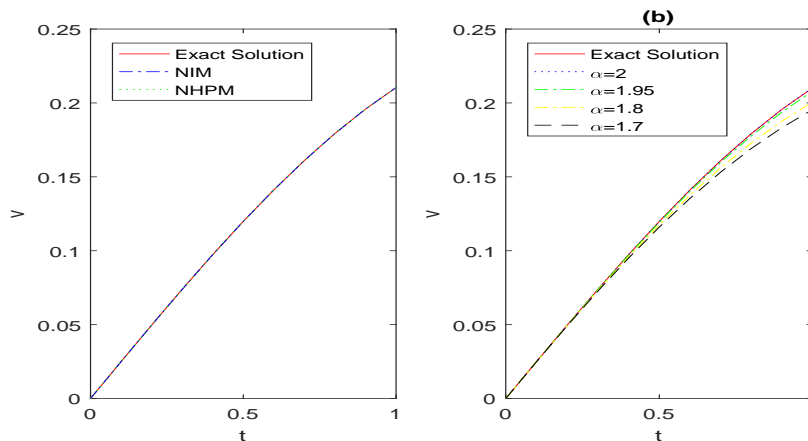


Figure 3: (a) The comparison of the 3-term approximate solution by NIM, NHPM and the exact solution, when $\alpha = 2$ and $x = 0.5$, (b) The behavior of the exact solution and the 3-term approximate solution by NIM and NHPM for different values of α when $x = 0.5$.

	$ v_{exact} - v_{NIM} $	$ v_{exact} - v_{NHPM} $	$ v_{exact} - v_{NIM} $	$ v_{exact} - v_{NHPM} $
t/x	0.5	0.5	0.7	0.7
0.1	4.9596×10^{-12}	4.9596×10^{-12}	9.7209×10^{-12}	9.7209×10^{-12}
0.3	1.0835×10^{-8}	1.0835×10^{-8}	2.1236×10^{-8}	2.1236×10^{-8}
0.5	3.8618×10^{-7}	3.8618×10^{-7}	7.5692×10^{-7}	7.5692×10^{-7}
0.7	4.0574×10^{-6}	4.0574×10^{-6}	7.9524×10^{-6}	7.9524×10^{-6}
0.9	2.346×10^{-5}	2.346×10^{-5}	4.5982×10^{-5}	4.5982×10^{-5}

Table 3: The absolute errors for differences between the exact solution and 3-term approximate solution by NIM and NHPM for Example 5.3, when $\alpha = 2$.

The numerical results (see Figures 1,2 and 3) affirm that when α approaches 2, our results approach the exact solutions. In Tables 1,2 and 3, the absolute errors obtained by NIM are the same as the results obtained by NHPM.

Remark 5.1 In general, the results obtained show that the method described by NIM is a very simple and easy method compared to the other methods and gives the approximate solution in the form of series, this series in closed form gives the corresponding exact solution of the given problem.

Remark 5.2 In this paper, we only apply three terms to approximate the solutions, if we apply more terms of the approximate solutions, the accuracy of the approximate solutions will be greatly improved.

6 Conclusion

In this paper, we have compared between the new iterative method (NIM) and the natural homotopy perturbation method (NHPM) for solving nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients. The two methods are powerful and efficient methods and both give approximations of higher accuracy and closed form solutions, if any. The comparison gives similar results and supplies quantitatively reliable results. It is worth mentioning that the NIM has an advantage over the NHPM because it takes less time and uses only the inverse operator to solve the nonlinear problems and there is no need to use any other inverse transform as in the case of NHPM. The two methods are powerful mathematical tools for solving other nonlinear fractional differential equations.

Acknowledgment

The authors are very grateful to the referees for carefully reading the paper and for their important remarks and suggestions which have improved the paper.

References

- [1] F.B.M. Belgacem and R. Silambarasan. Theory of natural transform. *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace* **3** (1) (2012) 105–135.
- [2] V. Daftardar-Gejji and H. Jafari. An iterative method for solving nonlinear functional equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **316** (2) (2006) 753–763.
- [3] M. Hamdi Cherif, K. Belghaba and D. Ziane. Homotopy Perturbation Method For Solving The Fractional Fisher's Equation. *International Journal of Analysis and Applications* **10** (1) (2016) 9–16.
- [4] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, New York, 1999.
- [5] S.T. Mohyud-Din, M.A. Noor and K.I. Noor. Traveling wave solutions of seventh-order generalized KdV equation using He's polynomials. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation* **10** (2009) 227–233.
- [6] M. Rawashdeh. The fractional natural decomposition method: theories and applications. *Math. Methods Appl.* **6** (2) (2016) 177–187.
- [7] I.P. Stavroulakis, and S.A. Tersian. *Partial differential equations: An introduction with Mathematica and MAPLE* (Second Edition). World Scientific Publishing Co. Re. Ltd. London, 2004.
- [8] A.M. Shukur. Adomian Decomposition Method for Certain Space-Time Fractional Partial Differential Equations. *IOSR Journal of Mathematics* **11** (1) (2015) 55–65.
- [9] M.H. Tiwana, K. Maqbool and A.B. Mann. Homotopy perturbation Laplace transform solution of fractional non-linear reaction diffusion system of Lotka-Volterra type differential equation. *Engineering Science and Technology, an International Journal* **20** (2017) 672–678.
- [10] Y. Zhang. Time-Fractional Generalized Equal Width Wave Equations: Formulation and Solution via Variational Methods. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **14** (4) (2014) 410–25.



A New Representation of Exact Solutions for Nonlinear Time-Fractional Wave-Like Equations with Variable Coefficients

A. Khalouta* and A. Kadem

*Laboratory of Fundamental and Numerical Mathematics,
Departement of Mathematics, Faculty of Sciences,
Ferhat Abbas Sétif University 1, 19000 Sétif, Algeria.*

Received: November 29, 2018; Revised: April 8, 2019

Abstract: In this paper, we give a new representation of exact solutions for nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients using a recent and reliable method, namely the fractional reduced differential transform method (FRDTM). Using the FRDTM, it is possible to find solution for this type of equations in the form of infinite series, this series in closed form gives the exact solution. It has been proven that the FRDTM is a convenient and effective method in its application. The accuracy and efficiency of the method is tested by means of three numerical examples.

Keywords: *nonlinear time-fractional wave-like equations; Caputo fractional derivative; fractional reduced differential transform method.*

Mathematics Subject Classification (2010): Primary 35R11, 26A33, Secondary 35C05, 74G10.

1 Introduction

The nonlinear fractional partial differential equations (NFPDEs) are increasingly used to model many problems in mathematical physics, including electromagnetics, fluid flow, diffusion, quantum mechanics, damping laws, viscoelasticity and other applications. Exact solutions of NFPDEs are sometimes too complicated to be attained by conventional techniques due to the computational complexities of nonlinear parts involving them. Therefore, for the study of solution of NFPDEs there are variety of analytical and approximate methods found in literature. Among them most useful and common methods are: the Adomian decomposition method (ADM) [8], variational iteration method

* Corresponding author: <mailto:nadjibkh@yahoo.fr>

(VIM) [10], fractional difference method (FDM) [4], generalized differential transform method (GDTM) [1], homotopy analysis method (HAM) [11], homotopy perturbation method (HPM) [9].

Recently, an efficient analytical technique for handling different types of NFPDEs has been developed called the fractional reduced differential transform method (FRDTM). The FRDTM was effectively used for finding the solution of various kinds of NFPDEs [5–7]. Further, this method does not require any discretization, linearization and therefore it reduces significantly the numerical computations compare with the existing methods such as the perturbation technique, differential transform method (DTM) and the Adomian decomposition method (ADM).

In [3], we solved the nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients by two different methods and compared between these two methods.

The main objective of this paper is to give a new representation of exact solutions for this type of equations using the FRDTM.

Consider the following nonlinear time-fractional wave-like equations:

$$D_t^{2\alpha} u = \sum_{i,j=1}^n F_{1ij}(X, t, u) \frac{\partial^{k+m}}{\partial x_i^k \partial x_j^m} F_{2ij}(u_{x_i}, u_{x_j}) \quad (1)$$

$$+ \sum_{i=1}^n G_{1i}(X, t, u) \frac{\partial^p}{\partial x_i^p} G_{2i}(u_{x_i}) + H(X, t, u) + S(X, t),$$

with the initial conditions

$$u(X, 0) = a_0(X), \quad u_t(X, 0) = a_1(X), \quad (2)$$

where $D_t^{2\alpha}$ is the Caputo fractional derivative operator of order 2α , $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$.

Here $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, F_{1ij}, G_{1i} $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, are nonlinear functions of X, t and u , F_{2ij}, G_{2i} $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, are nonlinear functions of derivatives of u with respect to x_i and x_j $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, respectively. Also H, S are nonlinear functions and k, m, p are integers.

These types of equations are of considerable significance in various fields of applied sciences, mathematical physics, nonlinear hydrodynamics, engineering physics, biophysics, human movement sciences, astrophysics and plasma physics. These equations describe the evolution of erratic motions of small particles that are immersed in fluids, fluctuations of the intensity of laser light, velocity distributions of fluid particles in turbulent flows.

2 Basic Definitions

In this section, we give some basic definitions and properties of the fractional calculus theory which are used further in this paper. For more details, see [4].

Definition 2.1 A real function $u(x, t)$, $x \in I \subset \mathbb{R}$, $t > 0$, is considered to be in the space $C_\mu(I \times \mathbb{R}^+)$, $\mu \in \mathbb{R}$ if there exists a real number $p > \mu$, so that $u(x, t) = t^p f(x, t)$, where $f(x, t) \in C(I \times \mathbb{R}^+)$, and it is said to be in the space C_μ^n if $u^{(n)}(x, t) \in C_\mu$, $n \in \mathbb{N}$.

Definition 2.2 Let $u(x, t) \in C_\mu(I \times \mathbb{R}^+)$, $\mu \geq -1$. The Riemann-Liouville fractional integral operator of order $\alpha \geq 0$ of $u(x, t)$ is defined as follows:

$$I_t^\alpha u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} u(x, \xi) d\xi, & \alpha > 0, x \in I, t > \xi \geq 0, \\ u(x, t), & \alpha = 0, \end{cases} \quad (3)$$

where $\Gamma(\cdot)$ is the well-known gamma function.

Definition 2.3 The Caputo fractional derivative operator of order α of $u(x, t)$ is defined as follows:

$$D_t^\alpha u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{n-\alpha-1} u^{(n)}(x, \xi) d\xi, & n-1 < \alpha < n, \\ u^{(n)}(x, t), & \alpha = n. \end{cases} \tag{4}$$

For the Riemann-Liouville fractional integral and Caputo fractional derivative, we have the following relation:

$$I_t^\alpha D_t^\alpha u(x, t) = u(x, t) - \sum_{k=0}^{n-1} u^{(k)}(x, 0^+) \frac{t^k}{k!}, \quad x \in I, t > 0. \tag{5}$$

3 Fractional Reduced Differential Transform Method (FRDTM)

In this section, we apply the fractional reduced differential transform method for $(n + 1)$ -variable function $u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ which has been developed in [2].

On the basis of the properties of the one-dimensional differential transform, the function $u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ can be represented as

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_n, t) &= \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} F_1(k_1) x_1^{k_1} \right) \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} F_2(k_2) x_2^{k_2} \right) \times \dots \\ &\times \left(\sum_{k_n=0}^{\infty} F_n(k_n) x_n^{k_n} \right) \times \left(\sum_{k_m=0}^{\infty} F_m(k_m) t^{k_m} \right) \\ &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \sum_{k_m=0}^{\infty} U(k_1, k_2, \dots, k_n, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} t^{k_m}, \end{aligned}$$

where $U(k_1, k_2, \dots, k_n, k_m) = F_1(k_1) \times F_2(k_2) \times \dots \times F_n(k_n) \times F_m(k_m)$ is called the spectrum of $u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$. Next, we assume that $u(X, t)$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ is a continuously differentiable function with respect to the space variable and time in the domain of interest.

Definition 3.1 Let $u(X, t)$ be an analytic function, then the FRDT of u is given by

$$U_k(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[\frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} u(X, t) \right]_{t=t_0}, \tag{6}$$

where α is a parameter describing the order of time fractional derivative in the Caputo sense. Here the lowercase $u(X, t)$ represents the original function while the uppercase $U_k(X)$ stands for the fractional reduced transformed function.

Definition 3.2 The inverse FRDT of $U_k(X)$ is defined by

$$u(X, t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(X) (t - t_0)^{k\alpha}. \tag{7}$$

Combining equations (6) and (7), we have

$$u(X, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[\frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} u(X, t) \right]_{t=t_0} (t - t_0)^{k\alpha}. \quad (8)$$

In particular, for $t_0 = 0$, equation (8) becomes

$$u(X, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[\frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} u(X, t) \right]_{t=0} t^{k\alpha}. \quad (9)$$

Moreover, if $\alpha = 1$, then the FRDT of equation (8) reduces to the classical RDT method. From the above definitions, the fundamental operations of the FRDTM are given by the following theorems.

Theorem 3.1 *Let $U_k(X), V_k(X)$ and $W_k(X)$ be the fractional reduced differential transform of the functions $u(X, t), v(X, t)$ and $w(X, t)$, respectively, then*

(1) *if $w(X, t) = \lambda u(X, t) + \mu v(X, t)$, then $W_k(X) = \lambda U_k(X) + \mu V_k(X)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

(2) *if $w(X, t) = u(X, t)v(X, t)$, then $W_k(X) = \sum_{r=0}^k U_r(X)V_{k-r}(X)$.*

(3) *if $w(X, t) = u^1(X, t)u^2(X, t)\dots u^n(X, t)$, then*

$$W_k(X) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} U_{k_1}^1(X) U_{k_2-k_1}^2(X) \times \dots \times U_{k_{n-1}-k_{n-2}}^{n-1}(X) U_{k-k_{n-1}}^n(X).$$

(4) *if $w(X, t) = \frac{\partial^{n\alpha}}{\partial t^{n\alpha}} u(X, t)$, then*

$$W_k(X) = \frac{\Gamma(k\alpha + n\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + 1)} U_{k+n}(X), n = 1, 2, \dots$$

4 FRDTM for Nonlinear Time-Fractional Wave-Like Equations

Theorem 4.1 *Consider the nonlinear time-fractional wave-like equations (1) with the initial conditions (2).*

Then, by FRDTM the solution of equations (1)-(2) is given in the form of infinite series as follows:

$$u(X, t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(X) t^{k\alpha},$$

where $U_k(X)$ is the fractional reduced differential transformed function of $u(X, t)$.

Proof. In order to achieve our goal, we consider the following nonlinear time-fractional wave-like equations (1) with the initial conditions (2).

Applying the FRDTM to equation (1), we obtain the following recurrence relation formula:

$$U_{k+2}(X) = \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + 2\alpha + 1)} [A_k(X) + B_k(X) + C_k(X) + D_k(X)], \tag{10}$$

where $A_k(X), B_k(X), C_k(X)$ and $D_k(X)$ are the transformed form of the nonlinear terms, $\sum_{i,j=1}^n F_{1ij}(X, t, u) \frac{\partial^{k+m}}{\partial x_i^k \partial x_j^m} F_{2ij}(u_{x_i}, u_{x_j}), \sum_{i=1}^n G_{1i}(X, t, u) \frac{\partial^p}{\partial x_i^p} G_{2i}(u_{x_i}), H(X, t, u)$ and $S(X, t)$, respectively.

Now, using the FRDTM under the initial conditions (2), we obtain

$$U_0(X) = a_0(X), U_1(X) = a_1(X). \tag{11}$$

We substitute equation (11) into equation (10), we get

$$\begin{aligned} U_0(X) &= a_0(X), U_1(X) = a_1(X), \\ U_2(X) &= \frac{1}{\Gamma(2\alpha + 1)} [A_0(X) + B_0(X) + C_0(X) + D_0(X)], \\ U_3(X) &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)} [A_1(X) + B_1(X) + C_1(X) + D_1(X)], \\ U_4(X) &= \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(4\alpha + 1)} [A_2(X) + B_2(X) + C_2(X) + D_2(X)]. \\ &\dots \end{aligned} \tag{12}$$

Then, the solution of equations (1)-(2) in the form of infinite series is given by

$$u(X, t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(X) t^{k\alpha}. \tag{13}$$

The proof is complete.

5 Numerical Examples

In this section, we describe the method explained in Section 4. Three numerical examples of nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients are considered to validate the capability, reliability and efficiency of the FRDTM.

Example 5.1 Consider the 2-dimensional nonlinear time-fractional wave-like equation with variable coefficients:

$$D_t^{2\alpha} u = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (u_{xx} u_{yy}) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (xy u_x u_y) - u, t > 0, \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \tag{14}$$

with the initial conditions

$$u(x, y, 0) = e^{xy}, u_t(x, y, 0) = e^{xy}, (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{15}$$

Applying the FRDTM to equations (14)-(15), we obtain the following recurrence relation formula:

$$\begin{aligned} U_0(x, y) &= e^{xy}, U_1(x, y) = e^{xy}, \\ U_{k+2}(x, y) &= \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + 2\alpha + 1)} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} A_k(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B_k(x, y) - U_k(x, y) \right], \end{aligned} \tag{16}$$

where $A_k(x, y)$ and $B_k(x, y)$ are the transformed form of the nonlinear terms, $u_{xx}u_{yy}$ and xyu_xu_y . For the convenience of the reader, the first few nonlinear terms are as follows:

$$\begin{aligned} A_0 &= U_{0xx}U_{0yy}, \\ A_1 &= U_{0xx}U_{1yy} + U_{1xx}U_{0yy}, \\ A_2 &= U_{0xx}U_{2yy} + U_{1xx}U_{1yy} + U_{2xx}U_{0yy}, \\ \\ B_0 &= xyU_{0x}U_{0y}, \\ B_1 &= xyU_{0x}U_{1y} + xyU_{1x}U_{0y}, \\ B_2 &= xyU_{0x}U_{2y} + xyU_{1x}U_{1y} + xyU_{2x}U_{0y}. \end{aligned}$$

From the relationship in (16), we obtain

$$\begin{aligned} U_0(x, y) &= e^{xy}, U_1(x, y) = e^{xy}, U_2(x, y) = -\frac{1}{\Gamma(2\alpha + 1)}e^{xy}, \\ U_3(x, y) &= -\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)}e^{xy}, U_4(x, y) = \frac{1}{\Gamma(4\alpha + 1)}e^{xy} \dots \end{aligned}$$

So, the solution of equations (14)-(15) is given in the form of infinite series as follows:

$$u(x, y, t) = \left(1 + t^\alpha - \frac{1}{\Gamma(2\alpha + 1)}t^{2\alpha} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)}t^{3\alpha} + \frac{1}{\Gamma(4\alpha + 1)}t^{4\alpha} + \dots \right) e^{xy}.$$

In particular, for $\alpha = 1$, the solution of equations (14)-(15) has the general pattern form which coincides with the following exact solution in terms of infinite series:

$$u(x, y, t) = \left(1 + t - \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \right) e^{xy}.$$

Therefore, the exact solution of equations (14)-(15) in a closed form of elementary function will be given by

$$u(x, y, t) = (\cos t + \sin t) e^{xy},$$

which is the same result as those obtained by the NIM and NHPM [3].

Example 5.2 Consider the following nonlinear time-fractional wave-like equation with variable coefficients:

$$D_t^{2\alpha}u = u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_x u_{xx} u_{xxx}) + u_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{xx}^3) - 18u^5 + u, \quad t > 0, \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \quad (17)$$

with the initial conditions

$$u(x, 0) = e^x, u_t(x, 0) = e^x, \quad x \in]0, 1[. \quad (18)$$

Applying the FRDTM to equations (17)-(18), we obtain the following recurrence relation formula:

$$\begin{aligned} U_0(x) &= e^x, U_1(x) = e^x, \\ U_{k+2}(x) &= \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + 2\alpha + 1)} [A_k(x) + B_k(x) - 18C_k(x) + U_k(x)], \end{aligned} \quad (19)$$

where $A_k(x)$, $B_k(x)$ and $C_k(x)$ are the transformed form of the nonlinear terms, $u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_x u_{xx} u_{xxx})$, $u_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{xx}^3)$ and u^5 . For the convenience of the reader, the first few nonlinear terms are as follows:

$$\begin{aligned} A_0 &= U_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [U_{0x} U_{0xx} U_{0xxx}], \\ A_1 &= 2U_0 U_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [U_{0x} U_{0xx} U_{0xxx}] + U_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [U_{1x} U_{0xx} U_{0xxx} \\ &\quad + U_{0x} U_{1xx} U_{0xxx} + U_{0x} U_{0xx} U_{1xxx}], \\ B_0 &= U_{0x}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_{0xx}^3, \\ B_1 &= 2U_{0x} U_{1x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_{0xx}^3 + 3U_{0x}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [U_{0xx}^2 U_{1xx}], \\ C_0 &= U_0^5, \quad C_1 = 5U_0^4 U_1. \end{aligned}$$

From the relationship in (19), we obtain

$$\begin{aligned} U_0(x) &= e^x, \quad U_1(x) = e^x, \\ U_2(x) &= \frac{1}{\Gamma(2\alpha + 1)} e^x, \quad U_3(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)} e^x \dots \end{aligned}$$

So, the solution of equations (17)-(18) is given in the form of infinite series as follows:

$$u(x, t) = \left(1 + t^\alpha + \frac{1}{\Gamma(2\alpha + 1)} t^{2\alpha} + \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)} t^{3\alpha} + \dots \right) e^x.$$

In particular, for $\alpha = 1$, the solution of equations (17)-(18) has the general pattern form which coincides with the following exact solution in terms of infinite series:

$$u(x, t) = \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \right) e^x.$$

Therefore, the exact solution of equations (17)-(18) in a closed form of elementary function will be given by

$$u(x, t) = e^{x+t},$$

which is the same result as those obtained by the NIM and NHPM [3].

Example 5.3 Consider the following one-dimensional nonlinear time-fractional wave-like equation with variable coefficients:

$$D_t^{2\alpha} u = x^2 \frac{\partial}{\partial x}(u_x u_{xx}) - x^2 (u_{xx})^2 - u, \quad t > 0, \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \tag{20}$$

with the initial conditions

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x^2, \quad x \in]0, 1[. \tag{21}$$

Applying the FRDTM to equations (20)-(21), we obtain the following recurrence relation formula:

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 0, U_1(x) = x^2, \\ U_{k+2}(x) &= \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + 2\alpha + 1)} \left[x^2 \frac{\partial}{\partial x} A_k(x) - x^2 B_k(x) - U_k(x) \right], \end{aligned} \quad (22)$$

where $A_k(x)$ and $B_k(x)$ are the transformed form of the nonlinear terms, $u_x u_{xx}$ and u_{xx}^2 . For the convenience of the reader, the first few nonlinear terms are as follows:

$$\begin{aligned} A_0 &= U_{0x} U_{0xx}, \\ A_1 &= U_{0x} U_{1xx} + U_{1x} U_{0xx}, \\ A_2 &= U_{0x} U_{2xx} + U_{1x} U_{1xx} + U_{2x} U_{0xx}, \\ B_0 &= U_{0xx}^2, \\ B_1 &= 2U_{0xx} U_{1xx}, \\ B_2 &= 2U_{0xx} U_{2xx} + U_{1xx}^2. \end{aligned}$$

From the relationship in (22), we obtain

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 0, U_1(x) = x^2, U_2(x) = 0, \\ U_3(x) &= -\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)} x^2, U_4(x) = 0 \dots \end{aligned}$$

So, the solution of equations (20)-(21) is given in the form of infinite series as follows:

$$u(x, t) = \left(t^\alpha - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)} t^{3\alpha} + \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(5\alpha + 1)} t^{5\alpha} + \dots \right) x^2.$$

In particular, for $\alpha = 1$, the solution of equations (20)-(21) has the general pattern form which coincides with the following exact solution in terms of infinite series:

$$u(x, t) = \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \right) x^2.$$

Therefore, the exact solution of equations (20)-(21) in a closed form of elementary function will be given by

$$u(x, t) = x^2 \sin t,$$

which is the same result as those obtained by the NIM and NHPM [3].

6 Numerical Results and Discussion

In this section the numerical results for all Examples 5.1, 5.2 and 5.3 are presented. Figures 1, 3 and 5 represent the surface graph of the exact solution and the 6-term approximate solution at $\alpha = 0.6, 0.8, 1$. Figures 2, 4 and 6 represent the behavior of the exact solution and the 6-term approximate solution at $\alpha = 0.7, 0.8, 0.95, 1$ in the case when $x = y = 0.5$ for Example 5.1 and $x = 0.5$ for Examples 5.2 and 5.3. Tables 1, 2 and 3 show the absolute errors between the exact solution and the 6-term approximate solution at $\alpha = 1$ and different values of x, y and t . The numerical results affirm that when α approaches 1, our results obtained by the FRDTM approach the exact solutions.

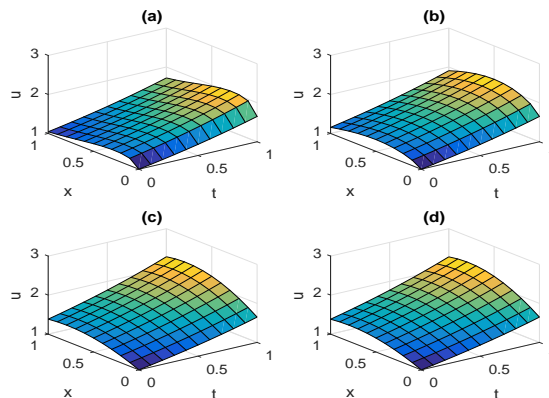


Figure 1: The surface graph of the exact solution and the 6–term approximate solution by the FRDTM for Example 5.1 when $y = 0.5$: (a) u when $\alpha = 0.6$, (b) u when $\alpha = 0.8$, (c) u when $\alpha = 1$, and (d) u is exact.

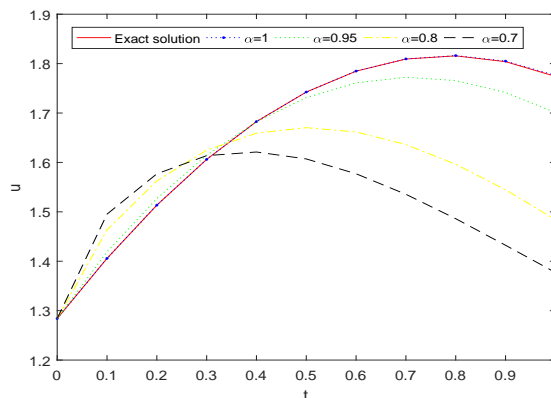


Figure 2: The behavior of the exact solution and the 6–term approximate solution by the FRDTM for different values of α for Example 5.1 when $x = y = 0.5$.

$t/x, y$	0.1	0.3	0.5	0.7
0.1	1.4226×10^{-9}	1.5411×10^{-9}	1.8085×10^{-9}	2.2991×10^{-9}
0.3	1.0648×10^{-6}	1.1535×10^{-6}	1.3536×10^{-6}	1.7208×10^{-6}
0.5	2.3382×10^{-5}	2.5330×10^{-5}	2.9725×10^{-5}	3.7787×10^{-5}
0.7	1.8000×10^{-4}	1.9499×10^{-4}	2.2882×10^{-4}	2.9089×10^{-4}
0.9	8.2963×10^{-4}	8.9872×10^{-4}	1.0547×10^{-3}	1.3407×10^{-3}

Table 1: Comparison of the absolute errors for the obtained results and the exact solution for Example 5.1, when $n = 6$ and $\alpha = 1$.

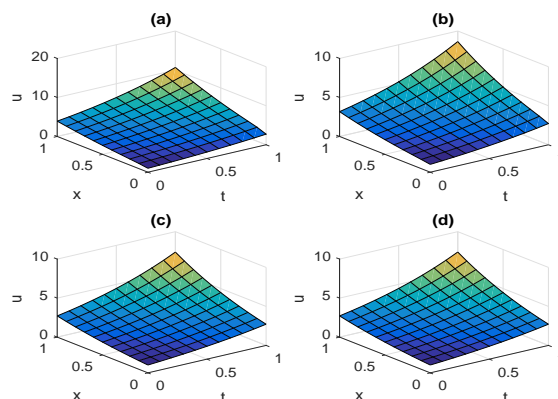


Figure 3: The surface graph of the exact solution and the 6-term approximate solution by the FRDTM for Example 5.2 : (a) u when $\alpha = 0.6$, (b) u when $\alpha = 0.8$, (c) u when $\alpha = 1$, and (d) u is exact.

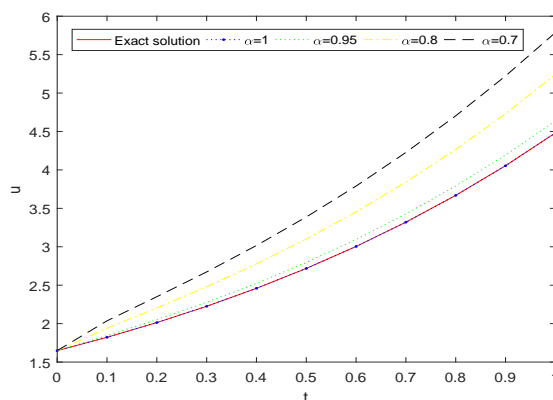


Figure 4: The behavior of the exact solution and the 6-term approximate solution by the FRDTM for different values of α for Example 5.2 when $x = 0.5$.

t/x	0.1	0.3	0.5	0.7
0.1	1.5572×10^{-9}	1.9019×10^{-9}	2.3230×10^{-9}	2.8373×10^{-9}
0.3	1.1688×10^{-6}	1.4276×10^{-6}	1.7436×10^{-6}	2.1297×10^{-6}
0.5	2.5810×10^{-5}	3.1525×10^{-5}	3.8504×10^{-5}	4.7029×10^{-5}
0.7	2.0036×10^{-4}	2.4472×10^{-4}	2.9890×10^{-4}	3.6507×10^{-4}
0.9	9.3372×10^{-4}	1.1404×10^{-3}	1.3929×10^{-3}	1.7013×10^{-3}

Table 2: Comparison of the absolute errors for the obtained results and the exact solution for Example 5.2, when $n = 6$ and $\alpha = 1$.

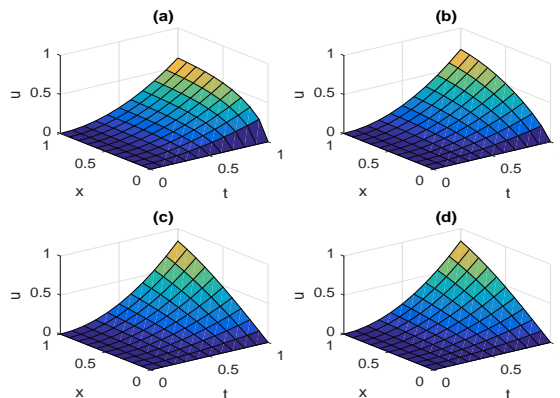


Figure 5: The surface graph of the exact solution and the 6–term approximate solution by the FRDTM for Example 5.3 : (a) u when $\alpha = 0.6$, (b) u when $\alpha = 0.8$, (c) u when $\alpha = 1$, and (d) u is exact.

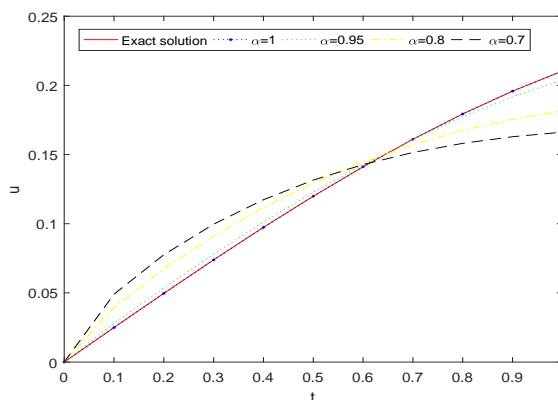


Figure 6: The behavior of the exact solution and the 6–term approximate solution by the FRDTM for different values of α for Example 5.3 when $x = 0.5$.

t/x	0.1	0.3	0.5	0.7
0.1	1.9839×10^{-13}	1.7855×10^{-12}	4.9596×10^{-12}	9.7209×10^{-12}
0.3	4.3339×10^{-10}	3.9005×10^{-9}	1.0835×10^{-8}	2.1236×10^{-8}
0.5	1.5447×10^{-8}	1.3903×10^{-7}	3.8618×10^{-7}	7.5692×10^{-7}
0.7	1.6229×10^{-7}	1.4606×10^{-6}	4.0574×10^{-6}	7.9524×10^{-6}
0.9	9.3840×10^{-7}	8.4456×10^{-6}	2.3460×10^{-5}	4.5982×10^{-5}

Table 3: Comparison of the absolute errors for the obtained results and the exact solution for Example 5.3, when $n = 6$ and $\alpha = 1$.

7 Conclusion

In this paper, a new representation of exact solutions for nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients was presented by using the fractional reduced differential transform method (FRDTM). The method was applied to three numerical examples. In the numerical examples, our method gave us the solutions in the form of infinite series, this series in closed form gives the corresponding exact solutions for these equations without any transformation, discretization and any other restrictions, therefore it reduces significantly the numerical computations compare with the existing methods such as the perturbation technique, differential transform method (DTM) and the Adomian decomposition method (ADM). Also, our results obtained in this paper are in a good agreement with the exact solutions; hence, this technique is powerful and efficient as an alternative method for finding approximate and exact solutions for many other nonlinear fractional partial differential equations.

Acknowledgment

The authors are very grateful to the referees for carefully reading the paper and for their important remarks and suggestions which have improved the paper.

References

- [1] D. Das and R.K. Bera. Generalized Differential Transform Method for non-linear Inhomogeneous Time Fractional Partial Differential Equation. *International Journal of Sciences & Applied Research* **4**(7) (2017) 71–77.
- [2] Y. Keskin and G. Oturanc. Reduced differential transform method for fractional partial differential equations. *Nonlinear Sci. Lett. A*. **1** (2) (2010) 61–72.
- [3] A. Khalouta and A. Kadem. Comparison of New Iterative Method and Natural Homotopy Perturbation Method for Solving Nonlinear Time-Fractional Wave-like Equations with Variable Coefficients. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **19** (1-SI) (2019) 160-169.
- [4] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, New York, 1999.
- [5] M. Rawashdeh. A reliable method for the space-time fractional Burgers and time-fractional Cahn-Allen equations via the FRDTM. *Advances in Difference Equations* **99** (2017) 1–14.
- [6] B.K. Singh and P. Kumar. FRDTM for numerical simulation of multi-dimensional, time-fractional model of Navier–Stokes equation, *Ain Shams Engineering Journal* (2016) 1–8.
- [7] B.K. Singh and V.K. Srivastava. Approximate series solution of multidimensional, time fractional-order (heat-like) diffusion equations using FRDTM. *R. Soc. Open. Sci.* **2** (2015) 1–13.
- [8] A.M. Shukur. Adomian Decomposition Method for Certain Space-Time Fractional Partial Differential Equations. *IOSR Journal of Mathematics* **11** (1) (2015) 55-65.
- [9] M. Hamdi Cherif, K. Belghaba and D. Ziane. Homotopy Perturbation Method For Solving The Fractional Fisher's Equation. *International Journal of Analysis and Applications* **10** (1) (2016) 9–16.
- [10] Y. Zhang. Time-Fractional Generalized Equal Width Wave Equations: Formulation and Solution via Variational Methods. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **14** (4) (2014) 410–425.
- [11] X.B. Yin, S. Kumar and D. Kumar. A modified homotopy analysis method for solution of fractional wave equations. *Advances in Mechanical Engineering* **7** (12) (2015) 1–8.



Fractional natural decomposition method for solving a certain class of nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients

Ali Khalouta

Laboratory of Fundamental and
Numerical Mathematics,
Department of Mathematics,
Faculty of Sciences,
Ferhat Abbas Sétif University 1, Algeria
email: nadjibkh@yahoo.fr

Abdelouahab Kadem

Laboratory of Fundamental and
Numerical Mathematics,
Department of Mathematics,
Faculty of Sciences
Ferhat Abbas Sétif University 1, Algeria
email: abdelouahabk@yahoo.fr

Abstract. In this paper, we propose a new approximate method, namely fractional natural decomposition method (FNDM) in order to solve a certain class of nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients. The fractional natural decomposition method is a combined form of the natural transform method and the Adomian decomposition method. The nonlinear term can easily be handled with the help of Adomian polynomials which is considered to be a clear advantage of this technique over the decomposition method. Some examples are given to illustrate the applicability and the easiness of this approach.

1 Introduction

Fractional differential equations, as generalizations of classical integer order differential equations, are gradually employed to model problems in fluid flow, finance, physical, hydrological, biological processes and systems [6, 7, 8, 9].

2010 Mathematics Subject Classification: 35R11, 34K28, 26A33, 35A22

Key words and phrases: nonlinear time-fractional wave-like equations, Caputo fractional derivative, fractional natural decomposition method, Adomian polynomials

The most frequent used methods for investigating fractional differential equations are: Adomian decomposition method (ADM) [1] variational iteration method (VIM) [12], generalized differential transform method (GDTM) [10], homotopy analysis method (HAM) [3], homotopy perturbation method (HPM) [11]. Also, there are some other classical solution techniques such as Laplace transform method, fractional Green's function method, Mellin transform method and method of orthogonal polynomials [8].

In this paper, the main objective is to solve a certain class of nonlinear time-fractional wave-like equation with variable coefficients by using a modified method called fractional natural decomposition method (FNDM) which is a combination of two powerful methods, the Natural transform and the Adomian decomposition method.

Consider the following nonlinear time-fractional wave-like equations

$$\begin{aligned} D_t^\alpha v = & \sum_{i,j=1}^n F_{1ij}(X, t, v) \frac{\partial^{k+m}}{\partial x_i^k \partial x_j^m} F_{2ij}(v_{x_i}, v_{x_j}) \\ & + \sum_{i=1}^n G_{1i}(X, t, v) \frac{\partial^p}{\partial x_i^p} G_{2i}(v_{x_i}) + H(X, t, v) + S(X, t), \end{aligned} \quad (1)$$

with initial conditions

$$v(X, 0) = a_0(X), \quad v_t(X, 0) = a_1(X), \quad (2)$$

where D_t^α is the Caputo fractional derivative operator of order α , $1 < \alpha \leq 2$.

Here $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, F_{1ij}, G_{1i} $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ are nonlinear functions of X, t and v , F_{2ij}, G_{2i} $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, are nonlinear functions of derivatives of v with respect to x_i and x_j $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, respectively. Also H, S are nonlinear functions and k, m, p are integers.

For $\alpha = 2$, these types of equations are of considerable significance in various fields of applied sciences, mathematical physics, nonlinear hydrodynamics, engineering physics, biophysics, human movement sciences, astrophysics and plasma physics. These equations describe the evolution of erratic motions of small particles that are immersed in fluids, fluctuations of the intensity of laser light, velocity distributions of fluid particles in turbulent flows.

2 Basic definitions

In this section, we introduce some definitions and important properties of the fractional calculus, the natural transform, and the natural transform of fractional derivatives, which are used further in this paper.

2.1 Fractional calculus

Definition 1 [8] A real function $f(t), t > 0$, is considered to be in the space $C_\mu, \mu \in \mathbb{R}$ if there exists a real number $p > \mu$, so that $f(t) = t^p h(t)$, where $h(t) \in C([0, \infty[)$, and it is said to be in the space C_μ^n if $f^{(n)} \in C_\mu, n \in \mathbb{N}$.

Definition 2 [8] The Riemann-Liouville fractional integral operator I^α of order α for a function $f \in C_\mu, \mu \geq -1$ is defined as follows

$$I^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi, & \alpha > 0, t > 0, \\ f(t), & \alpha = 0, \end{cases} \tag{3}$$

where $\Gamma(\cdot)$ is the well-known Gamma function.

Definition 3 [8] The fractional derivative of $f(t)$ in the Caputo sense is defined as follows

$$D^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t - \xi)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\xi) d\xi, t > 0, \tag{4}$$

where $n - 1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}, f \in C_{-1}^n$.

For the Riemann-Liouville fractional integral and Caputo fractional derivative, we have the following relation

$$I^\alpha D^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!}, t > 0. \tag{5}$$

Definition 4 [8] The Mittag-Leffler function is defined as follows

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \alpha \in \mathbb{C}, \text{Re}(\alpha) > 0. \tag{6}$$

A further generalization of (6) is given in the form

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \text{Re}(\alpha) > 0, \text{Re}(\beta) > 0. \tag{7}$$

For $\alpha = 1, E_\alpha(z)$ reduces to e^z .

2.2 Natural transform

Definition 5 [2] *The natural transform is defined over the set of functions is defined over the set of functions*

$$A = \left\{ f(t) / \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < M e^{\frac{|t|}{\tau_1}}, \text{ if } t \in (-1)^j \times [0, \infty) \right\},$$

by the following integral

$$\mathcal{N}^+ [f(t)] = \mathcal{R}^+(s, u) = \frac{1}{u} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{st}{u}} f(t) dt, \quad s, u \in (0, \infty). \quad (8)$$

Some basic properties of the natural transform are given as follows [2].

Property 1 The natural transform is a linear operator. That is, if λ and μ are non-zero constants, then

$$\mathcal{N}^+ [\lambda f(t) \pm \mu g(t)] = \lambda \mathcal{N}^+ [f(t)] \pm \mu \mathcal{N}^+ [g(t)].$$

Property 2 If $f^{(n)}(t)$ is the n -th derivative of function $f(t)$ w.r.t. " t " then its natural transform is given by

$$\mathcal{N}^+ [f^{(n)}(t)] = \mathcal{R}_n^+(s, u) = \frac{s^n}{u^n} \mathcal{R}^+(s, u) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{n-(k+1)}}{u^{n-k}} f^{(k)}(0).$$

Property 3 (Convolution property) Suppose $F^+(s, u)$ and $G^+(s, u)$ are the natural transforms of $f(t)$ and $g(t)$, respectively, both defined in the set A . Then the natural transform of their convolution is given by

$$\mathcal{N}^+ [(f * g)(t)] = u F^+(s, u) G^+(s, u),$$

where the convolution of two functions is defined by

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\xi) g(t - \xi) d\xi = \int_0^t f(t - \xi) g(\xi) d\xi.$$

Property 4 Some special natural transforms

$$\mathcal{N}^+ [1] = \frac{1}{s},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+ [t] &= \frac{u}{s^2}, \\ \mathcal{N}^+ \left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right] &= \frac{u^{n-1}}{s^n}, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Property 5 If $\alpha > -1$, then the natural transform of t^α is given by

$$\mathcal{N}^+ [t^\alpha] = \Gamma(\alpha + 1) \frac{u^\alpha}{s^{\alpha+1}}.$$

2.3 Natural transform of fractional derivatives

Theorem 1 If $\mathcal{R}^+(s, u)$ is the natural transform of $f(t)$, then the natural transform of the Riemann-Liouville fractional integral for $f(t)$ of order α , is given by

$$\mathcal{N}^+ [I^\alpha f(t)] = \frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{R}^+(s, u). \tag{9}$$

Proof. The Riemann-Liouville fractional integral for the function $f(t)$, as in (3), can be expressed as the convolution

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f(t). \tag{10}$$

Applying the natural transform in the Eq. (10) and using Properties 3 and 5, we have

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+ [I^\alpha f(t)] &= \mathcal{N}^+ \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f(t) \right] = u \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{N}^+ [t^{\alpha-1}] \mathcal{N}^+ [f(t)] \\ &= u \frac{u^{\alpha-1}}{s^\alpha} \mathcal{R}^+(s, u) = \frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{R}^+(s, u). \end{aligned}$$

The proof is complete. □

Theorem 2 $n \in \mathbb{N}^*$ and $\alpha > 0$ be such that $n - 1 < \alpha \leq n$ and $\mathcal{R}^+(s, u)$ be the natural transform of the function $f(t)$, then the natural transform denoted by $\mathcal{R}_\alpha^+(s, u)$ of the Caputo fractional derivative of the function $f(t)$ of order α , is given by

$$\mathcal{N}^+ [D^\alpha f(t)] = \mathcal{R}_\alpha^+(s, u) = \frac{s^\alpha}{u^\alpha} \mathcal{R}^+(s, u) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{\alpha-(k+1)}}{u^{\alpha-k}} \left[D^k f(t) \right]_{t=0}. \tag{11}$$

Proof. Let $g(t) = f^{(n)}(t)$, then by the Definition 3 of the Caputo fractional derivative, we obtain

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{n-\alpha-1} g(\xi) d\xi \\ &= I^{n-\alpha} g(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Applying the natural transform on both sides of (12) using Eq. (9), we get

$$\mathcal{N}^+ [D^\alpha f(t)] = \mathcal{N}^+ [I^{n-\alpha} g(t)] = \frac{u^{n-\alpha}}{s^{n-\alpha}} G^+(s, u). \tag{13}$$

Also, we have from the Property 2

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+ [g(t)] &= \mathcal{N}^+ [f^{(n)}(t)], \\ G^+(s, u) &= \frac{s^n}{u^n} R^+(s, u) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{n-(k+1)}}{u^{n-k}} [f^{(k)}(t)]_{t=0}. \end{aligned} \tag{14}$$

Hence, 13 becomes

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+ [D^\alpha f(t)] &= \frac{u^{n-\alpha}}{s^{n-\alpha}} \left(\frac{s^n}{u^n} R^+(s, u) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{n-(k+1)}}{u^{n-k}} f^{(k)}(0) \right) \\ &= \frac{s^\alpha}{u^\alpha} R^+(s, u) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{\alpha-(k+1)}}{u^{\alpha-k}} [D^k f(t)]_{t=0} = R_\alpha^+(s, u), \\ &-1 < n - 1 < \alpha \leq n. \end{aligned}$$

The proof is complete. □

3 FNDM of nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients

Theorem 3 Consider the following nonlinear time-fractional wave-like equations (1) with the initial conditions (2).

Then, by FNDM, the solution of Eqs. (1)-(2) is given in the form of infinite series as follows

$$v(X, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(X, t).$$

Proof. In order to to achieve our goal, we consider the following nonlinear time-fractional wave-like equations (1) with the initial conditions (2).

First we define

$$\begin{aligned} Nv &= \sum_{i,j=1}^n F_{1ij}(X, t, v) \frac{\partial^{k+m}}{\partial x_i^k \partial x_j^m} F_{2ij}(v_{x_i}, v_{x_j}), \\ Mv &= + \sum_{i=1}^n G_{1i}(X, t, v) \frac{\partial^p}{\partial x_i^p} G_{2i}(v_{x_i}), \\ Kv &= H(X, t, v). \end{aligned} \tag{15}$$

Eq. (1) is written in the form

$$\begin{aligned} D_t^\alpha v(X, t) &= Nv(X, t) + Mv(X, t) + Kv(X, t) + S(X, t), \\ t > 0, 1 < \alpha \leq 2. \end{aligned} \tag{16}$$

Applying the natural transform on both sides of (16) and using the Theorem 2, we get

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+[v(X, t)] &= \frac{u^\alpha}{s^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{\alpha-(k+1)}}{u^{\alpha-k}} \left[D^k v(X, t) \right]_{t=0} \\ &+ \frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+[Nv(X, t) + Mv(X, t) + Kv(X, t) + S(X, t)]. \end{aligned} \tag{17}$$

After that, let us take the inverse natural transform on both sides of (17) we have

$$v(X, t) = L(X, t) + \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+[Nv(X, t) + Mv(X, t) + Kv(X, t)] \right), \tag{18}$$

where $L(X, t)$ is a term arising from the source term and the prescribed initial conditions.

Now, we represent the solution in an infinite series form

$$v(X, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(X, t), \tag{19}$$

and the nonlinear terms can be decomposed as

$$Nv(X, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, Mv(X, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n, Kv(X, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n, \tag{20}$$

where A_n, B_n and C_n are Adomian polynomials [13], of $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$, and it can be calculated by formula given below

$$A_n = B_n = C_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i v_i \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{21}$$

Using Eqs. (19) and (20), we can rewrite Eq. (18) as

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(X, t) = L(X, t) + \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \right] \right). \tag{22}$$

By comparing both sides of Eq. (22) we have the following relation

$$\begin{aligned} v_0(X, t) &= L(X, t), \\ v_1(X, t) &= \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [A_0 + B_0 + C_0] \right), \\ v_2(X, t) &= \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [A_1 + B_1 + C_1] \right), \\ v_3(X, t) &= \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [A_2 + B_2 + C_2] \right), \\ &\dots, \end{aligned} \tag{23}$$

and so on.

In general the recursive relation is given by

$$\begin{aligned} v_0(X, t) &= L(X, t), \\ v_{n+1}(X, t) &= \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [A_n + B_n + C_n] \right), \quad n \geq 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Then, the solution of Eqs. (1)-(2) is given in the form of infinite series as follows

$$v(X, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(X, t). \tag{25}$$

The proof is complete. □

Theorem 4 Let \mathcal{B} be a Banach space, Then the series solution of the Eqs. (1)-(2) converges to $S \in \mathcal{B}$, if there exists $\gamma, 0 < \gamma < 1$ such that

$$\|v_n\| \leq \gamma \|v_{n-1}\|, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proof. Define the sequences S_n of partial sums of the series given by the recursive relation (24) as

$$S_n(X, t) = v_0(X, t) + v_2(X, t) + v_3(X, t) + \dots + v_n(X, t),$$

and we need to show that $\{S_n\}$ are a Cauchy sequences in Banach space \mathcal{B} . For this purpose, we consider

$$\|S_{n+1} - S_n\| \leq \|v_{n+1}\| \leq \gamma \|v_n\| \leq \gamma^2 \|v_{n-1}\| \leq \dots \leq \gamma^{n+1} \|v_0\|. \quad (26)$$

For every $n, m \in \mathbb{N}, n \geq m$, by using (26) and triangle inequality successively, we have

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &= \|S_{m+1} - S_m + S_{m+2} - S_{m+1} + \dots + S_n - S_{n-1}\| \\ &\leq \|S_{m+1} - S_m\| + \|S_{m+2} - S_{m+1}\| + \dots + \|S_n - S_{n-1}\| \\ &\leq \gamma^{m+1} \|v_0\| + \gamma^{m+2} \|v_0\| + \dots + \gamma^n \|v_0\| \\ &= \gamma^{m+1} (1 + \gamma + \dots + \gamma^{n-m-1}) \|v_0\| \\ &\leq \gamma^{m+1} \left(\frac{1 - \gamma^{n-m}}{1 - \gamma} \right) \|v_0\|. \end{aligned}$$

Since $0 < \gamma < 1$, so $1 - \gamma^{n-m} \leq 1$ then

$$\|S_n - S_m\| \leq \frac{\gamma^{m+1}}{1 - \gamma} \|v_0\|.$$

Since v_0 is bounded, then

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|S_n - S_m\| = 0.$$

Therefore, the sequences $\{S_n\}$ are Cauchy sequences in the Banach space \mathcal{B} , so the series solution defined in (25) converges. This completes the proof. \square

Remark 1 The m -term approximate solution of Eqs. (1)-(2) is given by

$$v(X, t) = \sum_{n=0}^{m-1} v_n(X, t) = v_0(X, t) + v_1(X, t) + v_2(X, t) + \dots$$

4 Applications and numerical results

In this section, we apply the (FNDM) on three examples of nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients and then compare our approximate solutions with the exact solutions.

Example 1 Consider the 2-dimensional nonlinear time-fractional wave-like equation with variable coefficients

$$D_t^\alpha v = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (v_{xx} v_{yy}) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (xy v_x v_y) - v, \quad 1 < \alpha \leq 2, \tag{27}$$

with initial conditions

$$v(x, y, 0) = e^{xy}, \quad v_t(x, y, 0) = e^{xy}, \tag{28}$$

where D_t^α is the Caputo fractional derivative operator of order α , and v is a function of $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$.

By applying the steps involved in (FNDM) as presented in Section 3 to Eqs. (27)-(28), we have

$$\begin{aligned} v_0(x, y, t) &= (1 + t)e^{xy}, \\ v_1(x, y, t) &= - \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} \right) e^{xy}, \\ v_2(x, y, t) &= \left(\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha + 2)} \right) e^{xy}, \\ &\dots \end{aligned}$$

So, the solution of Eqs. (27)-(28) can be expressed by

$$\begin{aligned} v(x, y, t) &= \sum_{n=0}^\infty v_n(x, y, t) \tag{29} \\ &= \left(1 + t - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha + 2)} - \dots \right) e^{xy}. \\ &= (E_\alpha(-t^\alpha) + tE_{\alpha,2}(-t^\alpha)) e^{xy}, \end{aligned}$$

where $E_\alpha(-t^\alpha)e^{xy}$ and $E_{\alpha,2}(-t^\alpha)$ are the Mittag-Leffler functions, defined by Eqs. (6) and (7).

Taking $\alpha = 2$ in (29), the solution of Eqs. (27)-(28) has the general pattern form which is coinciding with the following exact solution in terms of infinite series

$$v(x, y, t) = \left(1 + t - \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \right) e^{xy}.$$

So, the exact solution of Eqs. (27)-(28) in a closed form of elementary function will be

$$v(x, y, t) = (\cos t + \sin t) e^{xy},$$

which is the same result obtained by (ADM) [4] and (HPTM) [5], for the same test problem.

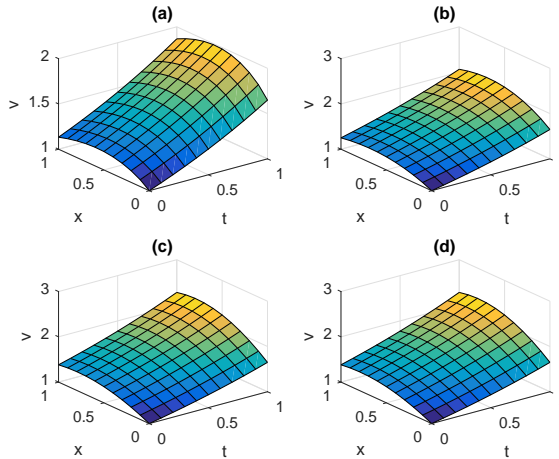


Figure 1: The surface graph of the 4-term approximate solution by (FNNDM) and the exact solution for Example 1 when $y = 0.5$: (a) v when $\alpha = 1.5$, (b) v when $\alpha = 1.75$, (c) v when $\alpha = 2$, and (d) v exact.

t	$\alpha = 1.7$	$\alpha = 1.8$	$\alpha = 1.95$	$\alpha = 2$	exact solution	$ v_{\text{exact}} - v_{\text{FNNDM}} $
0.1	1.3953	1.3999	1.4046	1.4058	1.4058	3.2196×10^{-13}
0.3	1.5522	1.5735	1.5991	1.6061	1.6061	2.1569×10^{-9}
0.5	1.6359	1.6755	1.7272	1.7424	1.7424	1.3095×10^{-7}
0.7	1.6540	1.7088	1.7854	1.8093	1.8093	1.9680×10^{-6}
0.9	1.6137	1.6775	1.7728	1.8040	1.8040	1.4947×10^{-5}

Table 1: The numerical values of the 4-term approximate solution and the exact solution for Example 1 when $x = y = 0.5$.

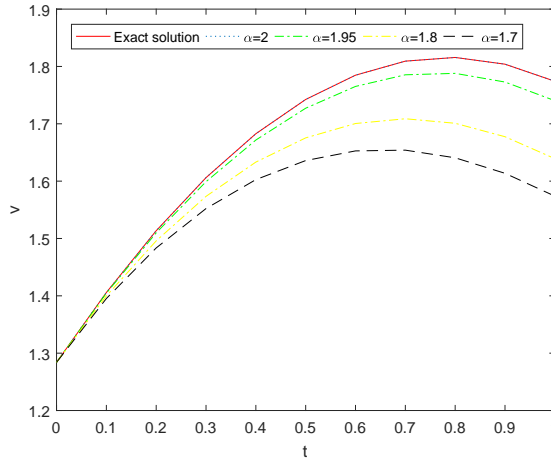


Figure 2: The behavior of the 4-term approximate solution by (FNDM) and the exact solution for Example 1 for different values of α when $x = y = 0.5$.

Example 2 Consider the following nonlinear time-fractional wave-like equation with variable coefficients

$$D_t^\alpha v = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_x v_{xx} v_{xxx}) + v_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_{xx}^3) - 18v^5 + v, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (30)$$

with initial conditions

$$v(x, 0) = e^x, \quad v_t(x, 0) = e^x, \quad (31)$$

where D_t^α is the Caputo fractional derivative operator of order α , and v is a function of $(x, t) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^+$.

By applying the steps involved in (FNDM) as presented in Section 3 to Eqs. (30)-(31), we have

$$\begin{aligned} v_0(x, t) &= (1 + t) e^x, \\ v_1(x, t) &= \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} \right) e^x, \\ v_2(x, t) &= \left(\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha + 2)} \right) e^x, \\ &\dots \end{aligned}$$

So, the solution of Eqs. (30)-(31) can be expressed by

$$\begin{aligned}
 v(x, t) &= \left(1 + t + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha + 2)} + \dots \right) e^x \\
 &= (E_\alpha(t^\alpha) + tE_{\alpha,2}(t^\alpha)) e^x,
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

where $E_\alpha(t^\alpha)$ and $E_{\alpha,2}(t^\alpha)$ are the Mittag-Leffler functions, defined by Eqs. (6) and (7).

Taking $\alpha = 2$ in (32), the solution of Eqs. (30)-(31) has the general pattern form which is coinciding with the following exact solution in terms of infinite series

$$v(x, t) = \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \right) e^x.$$

So, the exact solution of Eqs. (30)-(31) in a closed form of elementary function will be

$$v(x, t) = e^{x+t},$$

which is the same result obtained by (ADM) [4] and (HPTM) [5], for the same test problem.

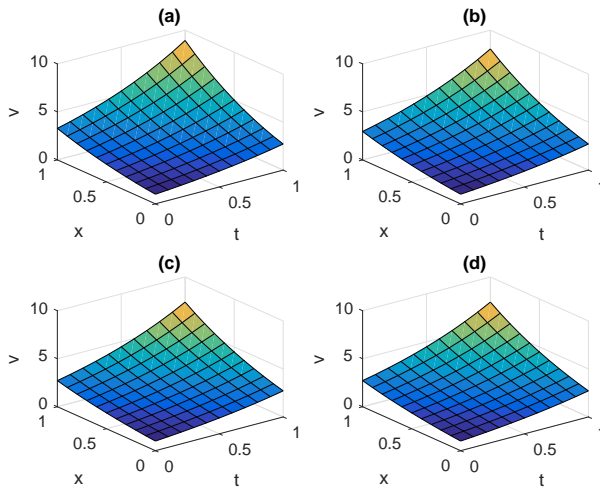


Figure 3: The surface graph of the 4-term approximate solution by (FNDM) and the exact solution for Example 2: (a) v when $\alpha = 1.5$, (b) v when $\alpha = 1.75$, (c) v when $\alpha = 2$, and (d) v exact.

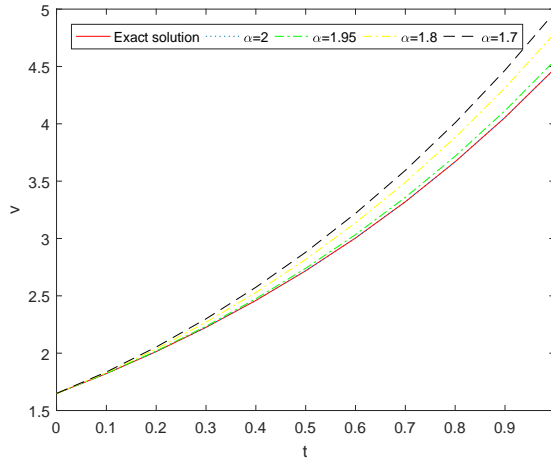


Figure 4: The behavior of the 4-term approximate solution by (FNDM) and the exact solution for Example 2 for different values of α when $x = 0.5$.

t	$\alpha = 1.7$	$\alpha = 1.8$	$\alpha = 1.95$	$\alpha = 2$	exact solution	$ v_{\text{exact}} - v_{\text{FNDM}} $
0.1	1.8357	1.8298	1.8236	1.8221	1.8221	4.1350×10^{-13}
0.3	2.2994	2.2697	2.2350	2.2255	2.2255	2.7750×10^{-9}
0.5	2.8800	2.8174	2.7402	2.7183	2.7183	1.6907×10^{-7}
0.7	3.5940	3.4901	3.3585	3.3201	3.3201	2.5543×10^{-6}
0.9	4.4670	4.3129	4.1140	4.0552	4.0552	1.9535×10^{-5}

Table 2: The numerical values of the 4-term approximate solution and the exact solution for Example 2 when $x = 0.5$.

Example 3 Consider the following one dimensional nonlinear time-fractional wave-like equation with variable coefficients

$$D_t^\alpha v = x^2 \frac{\partial}{\partial x} (v_x v_{xx}) - x^2 (v_{xx})^2 - v, \quad 1 < \alpha \leq 2, \tag{33}$$

with initial conditions

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = x^2, \tag{34}$$

where D_t^α is the Caputo fractional derivative operator of order α , and v is a function of $(x, t) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^+$.

By applying the steps involved in (FNDM) as presented in Section 3 to Eqs. (33)-(34), we have

$$\begin{aligned} v_0(x, t) &= tx^2, \\ v_1(x, t) &= -\frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)}x^2, \\ v_2(x, t) &= \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha + 2)}x^2, \\ &\dots \end{aligned}$$

So, the solution of Eqs. (33)-(34) can be expressed by

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, t) \\ &= x^2 \left(t - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha + 2)} - \dots \right) \\ &= x^2 (tE_{\alpha,2}(-t^\alpha)), \end{aligned} \tag{35}$$

where $E_{\alpha,2}(-t^\alpha)$ is the Mittag-Leffler function, defined by Eq. (6).

Taking $\alpha = 2$ in (35), the solution of Eqs. (33)-(34) has the general pattern form which is coinciding with the following exact solution in terms of infinite series

$$v(x, t) = x^2 \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \right).$$

So, the exact solution of Eqs. (33)-(34) in a closed form of elementary function will be

$$v(x, t) = x^2 \sin t,$$

which is the same result obtained by (ADM) [4] and (HPTM) [5], for the same test problem.

Remark 2 The numerical results (See Figures 1, 2,..., 6) and (Tables 1, 2 and 3), affirm that when α approaches 2, our results approach the exact solutions.

Remark 3 In this paper, we only apply four terms to approximate the solutions, if we apply more terms of the approximate solutions, the accuracy of the approximate solutions will be greatly improved.

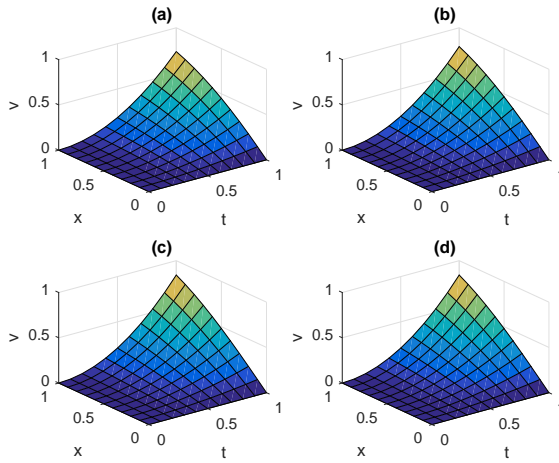


Figure 5: The surface graph of the 4-term approximate solution by (FNDM) and the exact solution for Example 3: (a) v when $\alpha = 1.5$, (b) v when $\alpha = 1.75$, (c) v when $\alpha = 2$, and (d) v exact.

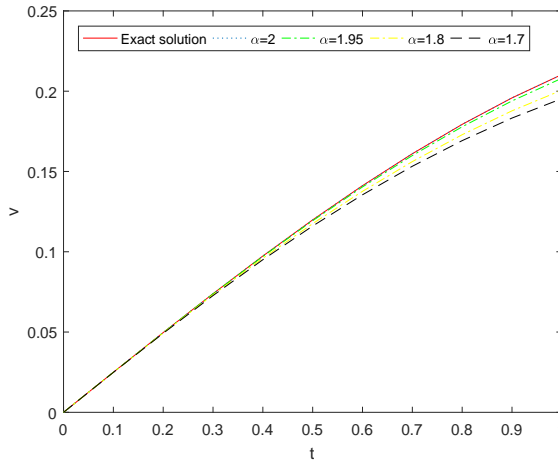


Figure 6: The behavior of the 4-term approximate solution by (FNDM) and the exact solution for Example 3 for different values of α when $x = 0.5$.

t	$\alpha = 1.7$	$\alpha = 1.8$	$\alpha = 1.95$	$\alpha = 2$	<i>exact solution</i>	$ v_{\text{exact}} - v_{\text{FNDM}} $
0.1	0.02488	0.02492	0.02495	0.02496	0.02496	6.8887×10^{-16}
0.3	0.07271	0.07319	0.07374	0.07388	0.07388	1.3549×10^{-11}
0.5	0.11604	0.11752	0.11934	0.11986	0.11986	1.3425×10^{-9}
0.7	0.15325	0.15615	0.15994	0.16105	0.16105	2.7677×10^{-8}
0.9	0.18327	0.18777	0.19394	0.19583	0.19583	2.6495×10^{-7}

Table 3: The numerical values of the 4-term approximate solution and the exact solution for Example 3 when $\kappa = 0.5$.

5 Conclusion

In this paper, the (FNDM) has been successfully applied to study a certain class of nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients. The results show that the (FNDM) is an efficient and easy to use technique for finding approximate and exact solutions for this equation. The obtained approximate solutions using the suggested method is in excellent agreement with the exact solution. This confirms our belief that the efficiency of our technique gives it much wider applicability for general classes of nonlinear problems.

Acknowledgment

The authors are very grateful to the referees for carefully reading the paper and for their important remarks and suggestions which have improved the paper.

References

- [1] S. Abbasbandy, Homotopy perturbation method for quadratic Riccati differential equation and comparison with Adomians decomposition method, *Appl. Math. Comput.*, **172** (1) (2006), 485–490.
- [2] F. B. M. Belgacem, R. Silambarasan, Theory of natural transform, *Math. Eng. Sci. Aerosp.*, **3** (1) (2012), 105–135.
- [3] M. Ganjiani, Solution of nonlinear fractional differential equations using homotopy analysis method, *Appl. Math. Model.*, **34** (2010), 1634–1641.

- [4] M. Ghoreishi, A. I. B. Ismail, N. H. M. Ali, Adomain decomposition method for nonlinear wave-like equation with variable coefficients, *Appl. Math. Sci.*, **4** (49) (2010), 2431–2444.
- [5] V. G. Gupta, S. Gupta, Homotopy perturbation transform method for solving nonlinear wave-like equations of variable coefficients, *J. Inf. Comput. Sci.*, **8** (3) (2013), 163–172.
- [6] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [7] K. S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, New York, 1993.
- [8] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1999.
- [9] I. Podlubny, Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **5** (2002), 367–386.
- [10] Z. Odibat, S. Momani, A generalized differential transform method for linear partial differential equations of fractional order, *Appl. Math. Lett.*, **21** (2008), 194–199.
- [11] Z. Odibat, S. Momani, Modified homotopy perturbation method: application to quadratic Riccati differential equation of fractional order, *Chaos Solitons Fractals*, **36** (1) (2008), 167–174.
- [12] Y. Zhang, Time-Fractional Generalized Equal Width Wave Equations: Formulation and Solution via Variational Methods, *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, **14** (4) (2014), 410–425.
- [13] Y. Zhu, Q. Chang, S. Wu, A new algorithm for calculating Adomian polynomials, *Appl. Math. Comput.*, **169** (2005), 402–416.

Received: May 31, 2018



Research article

A new numerical technique for solving Caputo time-fractional biological population equation

Ali Khalouta* and Abdelouahab Kadem

Laboratory of Fundamental and Numerical Mathematics, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Ferhat Abbas University of Sétif 1, Sétif 19000, Algeria

* **Correspondence:** Email: nadjibkh@yahoo.fr

Abstract: In this paper, we propose a new numerical technique called modified generalized Taylor fractional series method (MGTFSM) for solving Caputo time-fractional biological population equation. We present our obtained results in the form of a new theorem. This method based on constructing series solutions in a form of rapidly convergent series with easily computable components and without need of linearization, discretization, perturbation or unrealistic assumptions. The accuracy and efficiency of the method is tested by means of three numerical examples. The results prove that the proposed method is very effective and simple for solving fractional partial differential equations.

Keywords: biological population equation; Caputo fractional derivative; modified generalized Taylor fractional series method

Mathematics Subject Classification: Primary 35R11, 26A33; Secondary 74G10, 34K28

1. Introduction

Fractional calculus is a field of applied mathematics that deals with derivatives and integrals of arbitrary orders [6, 9, 11, 17]. Recently, fractional partial differential equations play an important role in interpretation and modeling of many of realism matters appear in applied mathematics and physics including fluid mechanics, electrical circuits, diffusion, damping laws, relaxation processes, optimal control theory, chemistry, biology, and so on [7, 13–16]. Therefore, the search of the solutions for fractional partial differential equations is an important aspect of scientific research.

Many powerful and efficient methods have been proposed to obtain numerical solutions and analytical solutions of fractional partial differential equations. The most commonly used ones are: Adomian decomposition method (ADM) [5], variational iteration method (VIM) [18], new iterative method (NIM) [8], fractional difference method (FDM) [11], reduced differential transform method (RDTM) [1], homotopy analysis method (HAM) [3], homotopy perturbation method (HPM) [4].

The main objective of this paper is to present a new numerical technique called modified generalized Taylor fractional series method (MGTFSM) to obtain the approximate and exact solutions of Caputo time-fractional biological population equation. The proposed algorithm provides the solution in a rapid convergent series which may lead to the solution in a closed form. The main advantage of the proposed method compare with the existing methods is, that method solves the nonlinear problems without using linearization and any other restriction.

Consider the following Caputo time-fractional biological population equation

$$D_t^\alpha u = \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2} + F(u), \quad (1.1)$$

with the initial condition

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (1.2)$$

where $D_t^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ is the Caputo fractional derivative operator of order α , $0 < \alpha \leq 1$, $u = u(x, y, t)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$ denotes the population density and F represents the population supply due to birth and death, α is a parameter describing the order of the fractional derivative.

The plan of our paper is as follows: In Section 2, we present some necessary definitions and properties of the fractional calculus theory. In Section 3, we will propose an analysis of the modified generalized Taylor fractional series method (MGTFSM) for solving the Caputo time-fractional biological population equation (1.1) subject to the initial condition (1.2). In Section 4, we present three numerical examples to show the efficiency and effectiveness of this method. In Section 5, we discuss our obtained results represented by figures and tables. These results were verified with Matlab (version R2016a). Section 6, is devoted to the conclusions on the work.

2. Basic definitions

In this section, we present some basic definitions and properties of the fractional calculus theory which are used further in this paper . For more details see, [9, 11].

Definition 2.1. A real function $u(X, t)$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}^+$, is considered to be in the space $C_\mu(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)$, $\mu \in \mathbb{R}$, if there exists a real number $p > \mu$, so that $u(X, t) = t^p v(X, t)$, where $v \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)$, and it is said to be in the space C_μ^n if $u^{(n)} \in C_\mu(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)$, $n \in \mathbb{N}$.

Definition 2.2. The Riemann-Liouville fractional integral operator of order $\alpha \geq 0$ of $u \in C_\mu(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)$, $\mu \geq -1$, is defined as follows

$$I_t^\alpha u(X, t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} u(X, \xi) d\xi, & \alpha > 0, t > \xi > 0, \\ u(X, t), & \alpha = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

where $\Gamma(\cdot)$ is the well-known Gamma function.

Definition 2.3. The Caputo time-fractional derivative operator of order $\alpha > 0$ of $u \in C_{-1}^n(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)$, $n \in \mathbb{N}$, is defined as follows

$$D_t^\alpha u(X, t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - \xi)^{n-\alpha-1} u^{(n)}(X, \xi) d\xi, & n - 1 < \alpha < n, \\ u^{(n)}(X, t), & \alpha = n. \end{cases} \quad (2.2)$$

For this definition we have the following properties

(1)

$$D_t^\alpha(c) = 0, \text{ where } c \text{ is a constant.}$$

(2)

$$D_t^\alpha t^\beta = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha} & \text{if } \beta > n-1, \\ 0, & \text{if } \beta \leq n-1. \end{cases}$$

Definition 2.3. The Mittag-Leffler function is defined as follows

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0. \quad (2.3)$$

For $\alpha = 1$, $E_\alpha(z)$ reduces to e^z .

3. Analysis of modified generalized Taylor fractional series method (MGTFSM)

Theorem 3.1. Consider the Caputo time-fractional biological population equation of the form (1.1) with the initial condition (1.2).

Then, by MGTFSM the solution of equations (1.1)-(1.2) is given in the form of infinite series which converges rapidly to the exact solution as follows

$$u(x, y, t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)}, (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in [0, R),$$

where $u_i(x, y)$ the coefficients of the series and R is the radius of convergence.

Proof. In order to achieve our goal, we consider the following Caputo time-fractional biological population equation of the form (1.1) with the initial condition (1.2).

Assume that the solution takes the following infinite series form

$$u(x, y, t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)}. \quad (3.1)$$

Consequently, the approximate solution of equations (1.1)-(1.2), can be written in the form of

$$u_n(x, y, t) = \sum_{i=0}^n u_i(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} = u_0(x, y) + \sum_{i=1}^n u_i(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)}. \quad (3.2)$$

By applying the operator D_t^α on equation (3.2), and using the properties (1) and (2), we obtain the formula

$$D_t^\alpha u_n(x, y, t) = \sum_{i=0}^{n-1} u_{i+1}(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)}. \quad (3.3)$$

Next, we substitute both (3.2) and (3.3) in (1.1). Therefore, we have the following recurrence relations

$$0 = \sum_{i=0}^{n-1} u_{i+1}(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{i=0}^n u_i(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} \right)^2$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\sum_{i=0}^n u_i(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} \right)^2 - F \left(\sum_{i=0}^n u_i(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} \right).$$

We follow the same analogue used in obtaining the Taylor series coefficients. In particular, to calculate the function $u_n(x, y)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, we have to solve the following

$$D_t^{(n-1)\alpha} \{G(x, y, t, \alpha, n)\} \downarrow_{t=0} = 0,$$

where

$$\begin{aligned} G(x, y, t, \alpha, n) = & \sum_{i=0}^{n-1} u_{i+1}(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{i=0}^n u_i(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} \right)^2 \\ & - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\sum_{i=0}^n u_i(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} \right)^2 - F \left(\sum_{i=0}^n u_i(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} \right). \end{aligned}$$

Now, we calculate the first terms of the sequence $\{u_n(x, y)\}_1^N$.

For $n = 1$ we have

$$\begin{aligned} G(x, y, t, \alpha, 1) = & u_1(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(u_0(x, y) + u_1(x, y) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right)^2 \\ & - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(u_0(x, y) + u_1(x, y) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right)^2 - F \left(u_0(x, y) + u_1(x, y) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right). \end{aligned}$$

Solving $G(x, y, 0, \alpha, 1) = 0$, yields

$$u_1(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0^2(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_0^2(x, y) + F(u_0(x, y)).$$

For $n = 2$ we have

$$\begin{aligned} G(x, y, t, \alpha, 2) = & u_1(x, y) + u_2(x, y) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ & - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(u_0(x, y) + u_1(x, y) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + u_2(x, y) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right)^2 \\ & - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(u_0(x, y) + u_1(x, y) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + u_2(x, y) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right)^2 \\ & - F \left(u_0(x, y) + u_1(x, y) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + u_2(x, y) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Applying D_t^α on both sides of equation (3.4) gives

$$\begin{aligned} D_t^\alpha G(x, y, t, \alpha, 2) = & u_2(x, y) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left(u_0(x, y) + u_1(x, y) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + u_2(x, y) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right) \right. \\ & \left. \times \left(u_1(x, y) + u_2(x, y) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\left(u_0(x, y) + u_1(x, y) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + u_2(x, y) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right) \right. \\
& \times \left. \left(u_1(x, y) + u_2(x, y) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \right] - \left(u_1(x, y) + u_2(x, y) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \\
& \times F' \left(u_0(x, y) + u_1(x, y) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + u_2(x, y) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right).
\end{aligned}$$

Solving $D_t^\alpha \{G(x, y, t, \alpha, 2)\} \downarrow_{t=0} = 0$, yields

$$u_2(x, y) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [u_0(x, y)u_1(x, y)] + 2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} [u_0(x, y)u_1(x, y)] + u_1(x, y)F'(u_0(x, y)).$$

To calculate $u_3(x, y)$, we consider $G(x, y, t, \alpha, 3)$ and we solve

$$D_t^{2\alpha} \{G(x, y, t, \alpha, 3)\} \downarrow_{t=0} = 0,$$

we have

$$\begin{aligned}
u_3(x, y) &= 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [3u_1(x, y)u_2(x, y) + u_0(x, y)u_3(x, y)] \\
&+ 2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} [3u_1(x, y)u_2(x, y) + u_0(x, y)u_3(x, y)] \\
&+ u_2(x, y)F'(u_0(x, y)) + u_1^2(x, y)F''(u_0(x, y)),
\end{aligned}$$

and so on.

In general, to obtain the coefficient function $u_k(x, y)$ we solve

$$D_t^{(k-1)\alpha} \{G(x, y, t, \alpha, k)\} \downarrow_{t=0} = 0.$$

Finally, the solution of equations (1.1)-(1.2), can be expressed by

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, y, t) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n u_i(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)}.
\end{aligned}$$

The proof is complete.

4. Test examples

In this section, we test the validity and efficiency of the proposed method to solve three numerical examples of Caputo time-fractional biological population equation.

We define E_n to be the absolute error between the exact solution u and the approximate solution u_n , as follows

$$E_n(x, y, t) = |u(x, y, t) - u_n(x, y, t)|, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Example 4.1. Consider the Caputo time-fractional biological population equation in the form

$$D_t^\alpha u = \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2} + hu, \quad (4.1)$$

with the initial condition

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) = \sqrt{xy}. \quad (4.2)$$

By applying the steps involved in the MGTFSM as presented in Section 3, we have the solution of equations (4.1)-(4.2) in the form

$$u(x, y, t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)},$$

and

$$u_i(x, y) = h^i \sqrt{xy}, \text{ for } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

So, the solution of equations (4.1)-(4.2), can be expressed by

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sqrt{xy} \left(1 + h \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + h^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + h^3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right) \\ &= \sqrt{xy} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ht^\alpha)^i}{\Gamma(i\alpha + 1)} = \sqrt{xy} E_\alpha(ht^\alpha), \end{aligned} \quad (4.3)$$

where $E_\alpha(ht^\alpha)$ is the Mittag-Leffler function, defined by (2.3).

Taking $\alpha = 1$ in (4.3), we have

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sqrt{xy} \left(1 + ht + \frac{(ht)^2}{2!} + \frac{(ht)^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \sqrt{xy} \exp(ht), \end{aligned}$$

which is an exact solution to the standard form biological population equation [10].

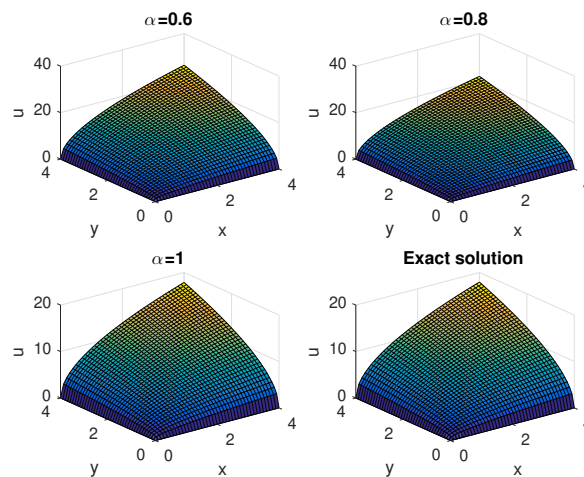


Figure 1. The surface graph of the exact solution u and the approximate solution u_6 by MGTFSM for different values of α for Example 4.1 when $h = 1$ and $t = 1.5$.

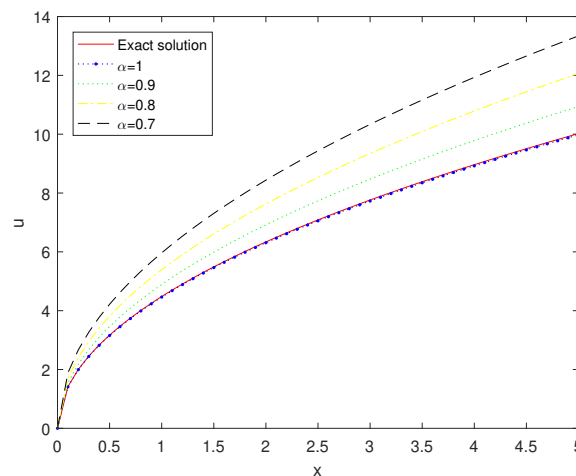


Figure 2. The behavior of the exact solution u and the approximate solution u_6 by MGTFSM for different values of α for Example 4.1 when $h = y = 1$ and $t = 1.5$.

Table 1. Comparison of the absolute errors for the obtained results and the exact solution for Example 4.1 when $h = 1, n = 6$ and $\alpha = 1$.

$t/x, y$	0.1	0.3	0.5	0.7
0.1	1.4090×10^{-10}	4.2269×10^{-10}	7.0449×10^{-10}	9.8629×10^{-10}
0.3	1.0576×10^{-7}	3.1727×10^{-7}	5.2879×10^{-7}	7.4030×10^{-7}
0.5	2.3354×10^{-6}	7.0062×10^{-6}	1.1677×10^{-5}	1.6348×10^{-5}
0.7	1.8129×10^{-5}	5.4387×10^{-5}	9.0645×10^{-5}	1.2690×10^{-4}
0.9	8.4486×10^{-5}	2.5346×10^{-4}	4.2243×10^{-4}	5.9140×10^{-4}

Example 4.2. Consider the Caputo time-fractional biological population equation in the form

$$D_t^\alpha u = \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2} + u, \quad (4.4)$$

with the initial condition

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) = \sqrt{\sin x \sinh y}. \quad (4.5)$$

By applying the steps involved in the MGTFSM as presented in Section 3, we have the solution of equations (4.4)-(4.5) in the form

$$u(x, y, t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)},$$

and

$$u_i(x, y) = \sqrt{\sin x \sinh y}, \text{ for } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

So, the solution of equations (4.4)-(4.5), can be expressed by

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sqrt{\sin x \sinh y} \left(1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right) \\ &= \sqrt{\sin x \sinh y} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} = \sqrt{\sin x \sinh y} E_\alpha(t^\alpha), \end{aligned} \quad (4.6)$$

where $E_\alpha(t^\alpha)$ is the Mittag-Leffler function, defined by (2.3).

Taking $\alpha = 1$ in (4.6), we have

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sqrt{\sin x \sinh y} \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \left(\sqrt{\sin x \sinh y} \right) \exp(t), \end{aligned}$$

which is an exact solution to the standard form biological population equation [12].

Table 2. Comparison of the absolute errors for the obtained results and the exact solution for Example 4.2 when $n = 6$ and $\alpha = 1$.

$t/x, y$	0.1	0.3	0.5	0.7
0.1	1.4090×10^{-10}	4.2268×10^{-10}	7.0425×10^{-10}	9.8497×10^{-10}
0.3	1.0576×10^{-7}	3.1726×10^{-7}	5.2860×10^{-7}	7.3932×10^{-7}
0.5	2.3354×10^{-6}	7.0059×10^{-6}	1.1673×10^{-5}	1.6326×10^{-5}
0.7	1.8129×10^{-5}	5.4385×10^{-5}	9.0614×10^{-5}	1.2673×10^{-4}
0.9	8.4486×10^{-5}	2.5345×10^{-4}	4.2228×10^{-4}	5.9061×10^{-4}

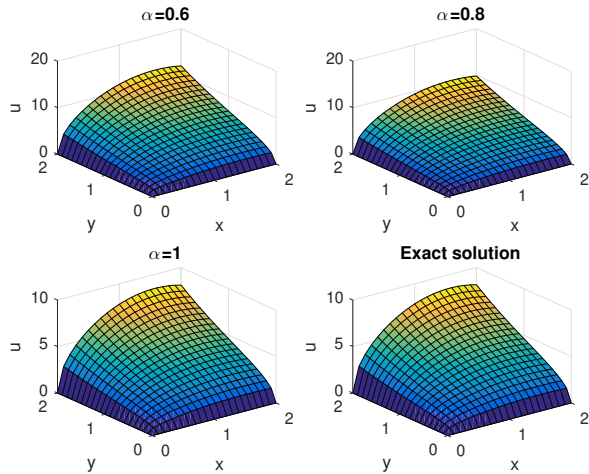


Figure 3. The surface graph of the exact solution u and the approximate solution u_6 by MGTFSM for different values of α for Example 4.2 when $t = 1.5$.

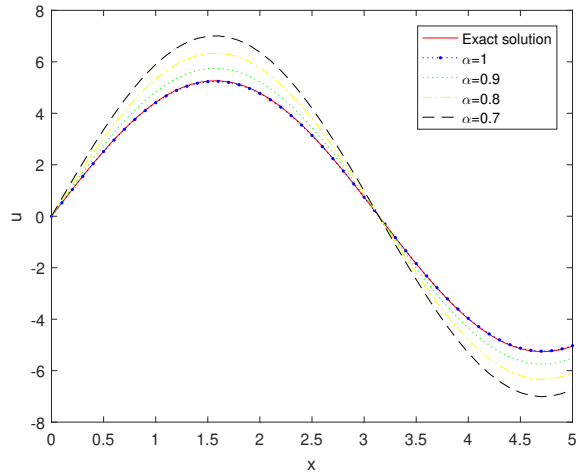


Figure 4. The behavior of the exact solution u and the approximate solution u_6 by MGTFSM for different values of α for Example 4.2 when $y = 1$ and $t = 1.5$.

Example 4.3 Consider the Caputo time-fractional biological population equation in the form

$$D_t^\alpha u = \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2} + hu(1 - ru), \tag{4.7}$$

with the initial condition

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) = \exp\left(\sqrt{\frac{hr}{8}}(x + y)\right). \tag{4.8}$$

By applying the steps involved in the MGTFSM as presented in Section 3, we have the solution of

equations (4.7)-(4.8) in the form

$$u(x, y, t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)},$$

and

$$u_i(x, y) = h^i \exp\left(\sqrt{\frac{hr}{8}}(x + y)\right), \text{ for } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

So, the solution of equations (4.7)-(4.8), can be expressed by

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \exp\left(\sqrt{\frac{hr}{8}}(x + y)\right) \left(1 + h \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + h^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + h^3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots\right) \\ &= \exp\left(\sqrt{\frac{hr}{8}}(x + y)\right) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ht^\alpha)^i}{\Gamma(i\alpha + 1)} \\ &= \exp\left(\sqrt{\frac{hr}{8}}(x + y)\right) E_\alpha(ht^\alpha), \end{aligned} \quad (4.9)$$

where $E_\alpha(ht^\alpha)$ is the Mittag-Leffler function, defined by (2.3).

Taking $\alpha = 1$ in (4.9), we have

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \exp\left(\sqrt{\frac{hr}{8}}(x + y)\right) \left(1 + ht + \frac{(ht)^2}{2!} + \frac{(ht)^3}{3!} + \dots\right) \\ &= \exp\left(\sqrt{\frac{hr}{8}}(x + y) + ht\right), \end{aligned}$$

which is an exact solution to the standard form biological population equation [2].

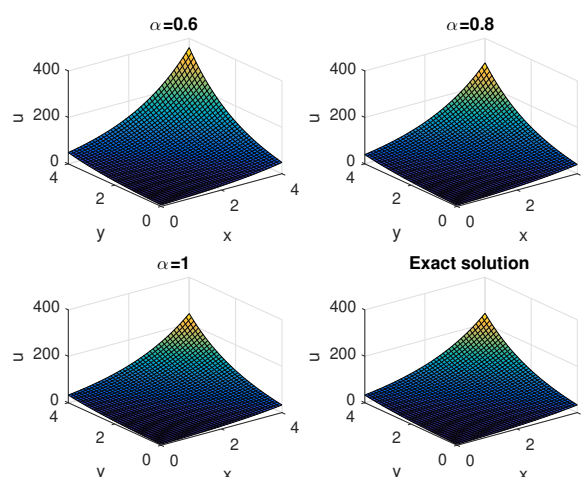


Figure 5. The surface graph of the exact solution u and the approximate solution u_6 by MGTFSM for different values of α for Example 4.3 when $h = 1$, $r = 2$ and $t = 1.5$.

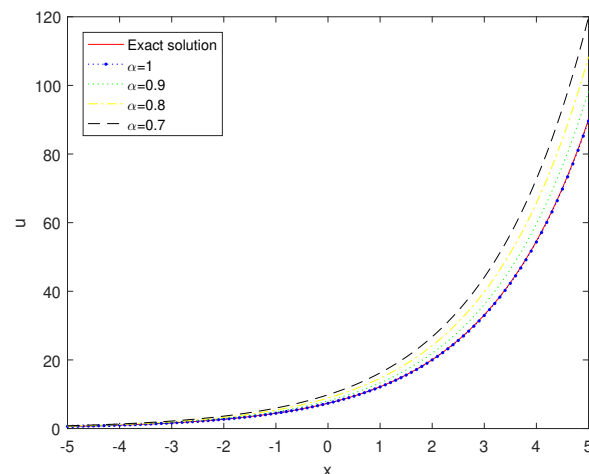


Figure 6. The behavior of the exact solution u and the approximate solution u_6 by MGTFSM for different values of α for Example 4.3 when $h = y = 1, r = 2$ and $t = 1.5$.

Table 3. Comparison of the absolute errors for the obtained results and the exact solution for Example 4.3 when $h = 1, r = 2, n = 6$ and $\alpha = 1$.

$t/x, y$	0.1	0.3	0.5	0.7
0.1	1.5572×10^{-9}	1.9019×10^{-9}	2.3230×10^{-9}	2.8373×10^{-9}
0.3	1.1688×10^{-6}	1.4276×10^{-6}	1.7436×10^{-6}	2.1297×10^{-6}
0.5	2.5810×10^{-5}	3.1525×10^{-5}	3.8504×10^{-5}	4.7029×10^{-5}
0.7	2.0036×10^{-4}	2.4472×10^{-4}	2.9890×10^{-4}	3.6507×10^{-4}
0.9	9.3372×10^{-4}	1.1404×10^{-3}	1.3929×10^{-3}	1.7013×10^{-3}

5. Numerical results and discussion

In this section the numerical results for Examples 4.1, 4.2 and 4.3 are presented. Figures 1, 3 and 5 represents the surface graph of the exact solution and the approximate solution $u_6(x, y, t)$ at $\alpha = 0.6, 0.8, 1$. Figures 2, 4 and 6 represents the behavior of the exact solution and the approximate solution $u_6(x, y, t)$ at $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9, 1$. These figures affirm that when the order of the fractional derivative α tends to 1, the approximate solutions obtained by MGTFSM tends continuously to the exact solutions. Tables 1–3 show the absolute errors between the exact solution and the approximate solution $u_6(x, y, t)$ at $\alpha = 1$ for different values of x, y and t . These tables clarifies the convergence of the approximate solutions to the exact solutions.

In addition, numerical results have confirmed the theoretical results and high accuracy of the proposed scheme.

Remark 5.1. In this paper, we only apply Six terms to approximate the solutions, if we apply more terms of the approximate solutions, the accuracy of the approximate solutions will be greatly improved.

6. Conclusion

In this paper, a new numerical technique called modified generalized Taylor fractional series method (MGTFSM) has been successfully applied for solving the Caputo time-fractional biological population equation. The method was applied to three numerical examples. The results show that the MGTFSM is an efficient and easy to use technique for finding approximate and exact solutions for these problems. The obtained approximate solutions using the suggested method is in excellent agreement with the exact solutions. This confirms our belief that the efficiency of our technique gives it much wider applicability for general classes of fractional problems.

Acknowledgments

The authors are very grateful to the guest editors of this special issue and would like to express their sincere thanks to the referees for the careful and noteworthy reading of the paper and for their constructive comments and suggestions which are improved the paper substantially.

Conflict of interest

The authors declare that there is no conflict of interest in this paper.

References

1. O. Acana, M. M. Al Qurashib and D. Baleanu, *Reduced differential transform method for solving time and space local fractional partial differential equations*, J. Nonlinear Sci. Appl., **10** (2017), 5230–5238.
2. A. A. M. Arafa, S. Z. Rida and H. Mohamed, *Homotopy Analysis Method for Solving Biological Population Model*, Commun. Theor. Phys., **56** (2011), 797–800.
3. A. Elsaïd, *Homotopy analysis method for solving a class of fractional partial differential equations*, Commun. Nonlinear Sci., **16** (2011), 3655–3664.
4. A. M. A. El-Sayed, A. Elsaïd, I. L. El-Kalla, et al. *A homotopy perturbation technique for solving partial differential equations of fractional order in finite domains*, Appl. Math. Comput., **218** (2012), 8329–8340.
5. Z. Hammouch and T. Mekkaoui, *Adomian decomposition method for solving a time-fractional Burger-Huxley's equation*, Nonlinear Stud., **19** (2012), 489–496.
6. R. Hilfer, *Applications of fractional Calculus in Physics*, World Scientific, 2000.
7. M. M. Khader and K. M. Saad, *A numerical study using Chebyshev collocation method for a problem of biological invasion: fractional Fisher equation*, Int. J. Biomath., **11** (2018), 1850099.
8. A. Khalouta and A. Kadem, *Comparison of New Iterative Method and Natural Homotopy Perturbation Method for Solving Nonlinear Time-Fractional Wave-Like Equations with Variable Coefficients*, Nonlinear Dyn. Syst. Theory, **19** (2019), 160–169.
9. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and Application of Fractional Differential equations*, Elsevier, North-Holland, 2006.

10. Y. Liu, Z. Li and Y. Zhang, *Homotopy perturbation method to fractional biological population equation*, *Fractional Differential Calculus*, **1** (2011), 117–124.
11. I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1999.
12. P. Roul, *Application of Homotopy Perturbation Method to Perturbation Biological Population Model*, *Appl. Appl. Math.*, **5** (2010), 272–281.
13. K. M. Saad, S. Deniz and D. Baleanu, *On a new modified fractional analysis of Nagumo equation*, *Int. J. Biomath.*, **12** (2019), 1950034.
14. K. M. Saad, M. M. Khader, J. F. Gómez-Aguilar, et al. *Numerical solutions of the fractional Fisher's type equations with Atangana-Baleanu fractional derivative by using spectral collocation methods*, *Chaos*, **29** (2019), 023116.
15. K. M. Saad, D. Baleanu and A. Atangana, *New fractional derivatives applied to the Korteweg–de Vries and Korteweg–de Vries–Burger's equations*, *Comput. Appl. Math.*, **37** (2018), 5203–5216.
16. K. M. Saad and E. H. Faissal AL-Sharif, *Comparative study of a cubic autocatalytic reaction via different analysis methods*, *Discrete & Continuous Dynamical Systems - S*, **12** (2019), 665–684.
17. S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives*, Gordon and Breach Science, Yverdon, Switzerland, 1993.
18. V. Turut and N. Güzel, *On solving Partial Differential Equations of Fractional Order by Using the Variational Iteration Method and Multivariate Padé Approximations*, *Eur. J. Pure Appl. Math.*, **6** (2013), 147–171.



©2019 the Author(s), licensee AIMS Press. This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>)



Research article

A new computational for approximate analytical solutions of nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients

Ali Khalouta* and Abdelouahab Kadem

Laboratory of Fundamental and Numerical Mathematics, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Ferhat Abbas University of Sétif 1, Sétif 19000, Algeria

* **Correspondence:** Email: nadjibkh@yahoo.fr.

Abstract: The main purpose of this paper is to present a new computational for approximate analytical solutions of nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients using the fractional residual power series method (FRPSM). The fractional derivative is considered in the Caputo sense. This method is based on the generalized Taylor series formula and residual error function. Unlike other analytical methods, FRPSM has a special advantage, that it solves the nonlinear problems without using linearization, discretization, perturbation or any other restrictions. By numerical examples, it is shown that the FRPSM is a simple, effective, and powerful method for finding approximate analytical solutions of nonlinear fractional partial differential equations.

Keywords: nonlinear time-fractional wave-like equations; Caputo fractional derivative; fractional residual power series method

Mathematics Subject Classification: Primary: 35R11, 26A33; Secondary: 74G10, 35C05

1. Introduction

Fractional calculus is a branch of mathematical analysis, which studies the generalization of integrals and derivatives of integer order to arbitrary order, that can be real or complex. In recent years, many scientists and researchers have been interested in the topic of fractional calculus because of its several applications in many fields, such as physics, chemistry, engineering, and so on. See for example [9–11, 19, 23–25].

Theory and applications of nonlinear fractional partial differential equations (NFPDEs) play an important role in the various fields of engineering and science, including fluid flow, diffusion, viscoelasticity, quantum mechanics, electromagnetic, electrochemistry, biological population models and other applications. The exact solutions of NFPDEs are sometimes too complicated to be attained by conventional techniques due to the computational complexities of nonlinear parts involving them.

Therefore, to search of solutions for NFPDEs there are variety of numerical and analytical methods found in literature, among them: Adomian decomposition method (ADM) [22] variational iteration method (VIM) [6], new iterative method (NIM) [12], reduced differential transform method (RDTM) [2], homotopy analysis method (HAM) [3], homotopy perturbation method (HPM) [8]. The residual power series method (RPSM), that was first proposed by Omar Abu Arqub [1], is implemented to obtaine analytic approximate solutions of fractional partial differential equations and convergence of RPSM for these equations is considered [5, 7, 17, 21].

The main aim of this paper is to apply the fractional residual power series method (FRPSM) to find approximate analytical solutions of nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients in the form

$$D_t^{2\alpha} u = \sum_{i,j=1}^N F_{1ij}(X, t, u) \frac{\partial^{k+m}}{\partial x_i^k \partial x_j^m} F_{2ij}(u_{x_i}, u_{x_j}) \quad (1.1)$$

$$+ \sum_{i=1}^N G_{1i}(X, t, u) \frac{\partial^p}{\partial x_i^p} G_{2i}(u_{x_i}) + H(X, t, u) + S(X, t),$$

with the initial conditions

$$u(X, 0) = f_0(X), D_t^\alpha u(X, 0) = f_1(X), \quad (1.2)$$

where $D_t^{2\alpha} = D_t^\alpha D_t^\alpha$ is the Caputo time-fractional derivative operator of order 2α , $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, $u = \{u(X, t), X = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N, t \geq 0, N \in \mathbb{N}^*\}$, F_{1ij}, G_{1i} $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ are nonlinear functions of X, t and u , F_{2ij}, G_{2i} $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ are nonlinear functions of derivatives of u with respect to x_i and x_j $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$, respectively. Also H, S are nonlinear functions and k, m, p are integers. When $\alpha = 1$, the equation (1.1) reduces to the classical wave-like equations with variable coefficients.

Recently, we have used many numerical techniques to solve this kind of equations, where the Caputo time-fractional derivative operator is D_t^α , $1 < \alpha \leq 2$. Note that, the solution of Eqs. (1.1)-(1.2) obtained by the FRPSM is quite different from the solutions found in [12–15].

The rest of the paper is structured as follows: In Section 2, we present basic definitions and properties of fractional calculus theory and fractional power series. In Section 3, we introduce our results of fractional residual power series method (FRPSM) for the nonlinear time-fractional wave-like equations (1.1) with the initial conditions (1.2). In Section 4, we propose three numerical examples in order to show the validity and effectiveness of this approach. In Section 5, we discuss our obtained results represented by figures and table. Finally, conclusions are drawn in the last section.

2. Basic definitions of fractional calculus theory

In this section, we give the necessary notations and basic definitions and properties of fractional calculus theory, which are used further in this paper. For more details, see [16, 18, 20].

Definition 2.1. A real function $u(X, t)$, $X \in \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}^+$, is considered to be in the space $C_\mu(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)$, $\mu \in \mathbb{R}$, if there exists a real number $p > \mu$, so that $u(X, t) = t^p v(X, t)$, where $v \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)$, and it is said to be in the space C_μ^n if $u^{(n)} \in C_\mu(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)$, $n \in \mathbb{N}$.

Definition 2.2. The Riemann-Liouville fractional integral operator of order $\alpha > 0$ of $u \in C_\mu(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)$, $\mu \geq -1$, is defined as follows

$$I_t^\alpha u(X, t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \xi)^{\alpha-1} u(X, \xi) d\xi, & \alpha > 0, t > \xi > t_0 \geq 0, \\ u(X, t), & \alpha = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Definition 2.3. The Caputo time-fractional derivative operator of order $\alpha > 0$ of $u \in C_{-1}^n(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)$, $n \in \mathbb{N}$, is defined as follows

$$D_t^\alpha u(X, t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_{t_0}^t (t - \xi)^{n-\alpha-1} u^{(n)}(X, \xi) d\xi, & n - 1 < \alpha < n, \\ u^{(n)}(X, t), & \alpha = n. \end{cases} \quad (2.2)$$

The following are the basic properties of the Caputo time-fractional derivative operator which we will need here.

Let $n - 1 < \alpha \leq n$ and $\beta \geq -1$. Then

(1)

$$D_t^\alpha(c) = 0, \text{ where } c \text{ is a constant.}$$

(2)

$$D_t^\alpha (t - t_0)^\beta = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t - t_0)^{\beta-\alpha} & \text{if } \beta > n - 1, \\ 0, & \text{if } \beta \leq n - 1. \end{cases}$$

For the Riemann-Liouville fractional integral and Caputo time-fractional derivative, we have the following relation

$$I_t^\alpha D_t^\alpha u(X, t) = u(X, t) - \sum_{k=0}^{n-1} u^{(k)}(X, t_0^+) \frac{(t - t_0)^k}{k!}, X \in \mathbb{R}^N, t > t_0 \geq 0. \quad (2.3)$$

Now, we introduce some definitions and theorems related to the fractional power series (FPS) which are used in this paper. For more details, see [4].

Definition 2.4. A power series of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(X)(t - t_0)^{n\alpha} = c_0(X) + c_1(X)(t - t_0)^\alpha + c_2(X)(t - t_0)^{2\alpha} + \dots \quad (2.4)$$

where $m - 1 < \alpha \leq m$ and $t \geq t_0$ is called the multiple fractional power series (MFPS) about t_0 , where t is a variable and $c_n(X)$ are constants called the coefficients of the series.

Theorem 2.1. Suppose that $u(X, t)$ has a MFPS representation at $t = t_0$ of the form

$$u(X, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(X)(t - t_0)^{n\alpha}, \quad (2.5)$$

$$0 \leq m - 1 < \alpha \leq m, X \in \mathbb{R}^N, t_0 \leq t \leq t_0 + R,$$

and R is the radius of convergence of the MFPS.

If $u \in C(\mathbb{R}^N \times [t_0, t_0 + R])$ and $D_t^{n\alpha} u \in C(\mathbb{R}^N \times (t_0, t_0 + R))$ for $n = 0, 1, 2, \dots$, then the coefficients $C_n(X)$ will take the form of

$$c_n(X) = \frac{D_t^{n\alpha} u(X, t_0)}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \quad (2.6)$$

where $D_t^{n\alpha} = D_t^\alpha . D_t^\alpha \dots D_t^\alpha$ (n -times).

3. FRPSM for time-fractional wave-like equations

Theorem 3.1. Consider the nonlinear time-fractional wave-like equations (1.1) with the initial conditions (1.2). Then, the solution of Eqs. (1.1)-(1.2) is given in the form of infinite series which converges rapidly to the exact solution as follows

$$u(X, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(X) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1, 0 \leq t < R, X \in \mathbb{R}^N, N \in \mathbb{N}^*,$$

where $f_n(X)$ are the coefficients of the series have been constructed by FRPSM and R is the radius of convergence.

Proof. We consider the following nonlinear time-fractional wave-like equations (1.1) with the initial conditions (1.2).

First we define

$$\begin{aligned} N(u, u_{x_i}, u_{x_j}) &= \sum_{i,j=1}^N F_{1ij}(X, t, u) \frac{\partial^{k+m}}{\partial x_i^k \partial x_j^m} F_{2ij}(u_{x_i}, u_{x_j}), \\ M(u, u_{x_i}) &= \sum_{i=1}^N G_{1i}(X, t, u) \frac{\partial^p}{\partial x_i^p} G_{2i}(u_{x_i}), \\ K(u) &= H(X, t, u). \end{aligned}$$

Eq. (1.1) is written in the form

$$D_t^{2\alpha} u = N(u, u_{x_i}, u_{x_j}) + M(u, u_{x_i}) + K(u) + S(X, t). \quad (3.1)$$

The FRPSM assumes the solution for Eq. (3.1) as a multiple fractional power series about the initial point $t = 0$, as follows

$$u(X, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(X) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \quad (3.2)$$

where R is the radius of convergence of the MFPS.

In the next step, the k^{th} truncated series of $u(X, t)$ that is $u_k(X, t)$ can be written as

$$u_k(X, t) = \sum_{n=0}^k f_n(X) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Since the initial conditions in Eq. (1.2). Then, the approximate solution to (3.1) can be written in the form of

$$u(X, t) = f_0(X) + f_1(X) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \sum_{n=2}^{\infty} f_n(X) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)},$$

where $f_0(X) + f_1(X)\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ is considered to be the 1st FRPS approximate solution of $u(X, t)$.

Then $u_k(X, t)$ could be reformulated as

$$u_k(X, t) = f_0(X) + f_1(X)\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{n=2}^k f_n(X)\frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}, k = 2, 3, 4, \dots \quad (3.4)$$

Now, we define the residual function as

$$\text{Res}(X, t) = D_t^{2\alpha}u - N(u, u_{x_i}, u_{x_j}) - M(u, u_{x_i}) - K(u) - S(X, t), \quad (3.5)$$

and the k^{th} truncated residual function as

$$\text{Res}_k(X, t) = D_t^{2\alpha}u_k - N(u_k, u_{kx_i}, u_{kx_j}) - M(u_k, u_{kx_i}) - K(u_k) - S(X, t), k = 2, 3, 4, \dots \quad (3.6)$$

It is clear that $\text{Res}(X, t) = 0$ and $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Res}_k(X, t) = \text{Res}(X, t)$ for each $X \in \mathbb{R}^N$ and $t \geq 0$. In fact this lead to $D_t^{(n-2)\alpha}\text{Res}(X, t) = 0$ for $n = 2, 3, 4, \dots, k$ because the fractional derivative of a constant is zero in the Caputo sense. Also, the fractional derivative $D_t^{(n-2)\alpha}$ of $\text{Res}(X, t)$ and $\text{Res}_k(X, t)$ are matching at $t = 0$ for each $n = 2, 3, 4, \dots, k$, that is,

$$D_t^{(n-2)\alpha}\text{Res}(X, 0) = D_t^{(n-2)\alpha}\text{Res}_k(X, 0) = 0, n = 2, 3, 4, \dots, k. \quad (3.7)$$

To clarify the FRPS technique, we substitute the k^{th} truncated series of $u(X, t)$ into Eq. (3.6), find the fractional derivative formula $D_t^{(n-2)\alpha}$ of $\text{Res}_k(X, t)$ and then, we solve the obtained algebraic (3.7), to get the required coefficients $f_n(X)$, $n = 2, 3, 4, \dots$ in Eq. (3.4). Thus the $u_k(X, t)$ approximate solutions can be obtained respectively.

4. Numerical examples

In this section, we describe the method explained in the Section 3. Three numerical examples of nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients are considered to validate the capability, reliability and efficiency of FRPSM.

Example 4.1. Consider the 2-dimensional nonlinear time-fractional wave-like equation with variable coefficients

$$D_t^{2\alpha}u = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(u_{xx}u_{yy}) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(xyu_xu_y) - u, \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \quad (4.1)$$

with the initial conditions

$$u(x, y, 0) = e^{xy}, D_t^\alpha u(x, y, 0) = e^{xy}, \quad (4.2)$$

where $D_t^{2\alpha}$ is the Caputo fractional derivative operator of order 2α , u is a function of $x, y, t \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

For $\alpha = 1$, the exact solution of Eqs. (4.1)-(4.2) is given by [14]

$$u(x, y, t) = (\cos(t) + \sin(t))e^{xy}.$$

According to FRPSM described in Section 3, by applying on the Eqs. (4.1)-(4.2), we have

First, the 1st FRPS approximate solution of $u(x, y, t)$ is

$$u_2(x, y, t) = e^{xy} + e^{xy} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}. \quad (4.3)$$

Secondly, construct the k^{th} truncated series and k^{th} residual function of Eqs. (4.1)-(4.2) as follow

$$u_k(x, y, t) = e^{xy} + e^{xy} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \sum_{n=2}^k f_n(x, y) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \quad (4.4)$$

$$\text{Res}_k(x, y, t) = D_t^{2\alpha} u_k - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (u_{kxx} u_{kyy}) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (xy u_{kx} u_{ky}) + u_k. \quad (4.5)$$

By (3.7), we have

$$D_t^{(k-2)\alpha} \text{Res}_k(x, y, 0) = 0, k = 2, 3, 4, \dots \quad (4.6)$$

Taking $k = 2$ in (4.6), we obtain

$$f_2(x, y) = -e^{xy}.$$

Then, the 2nd truncated approximate solution will be

$$u_2(x, y, t) = e^{xy} + e^{xy} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - e^{xy} \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}.$$

In a similar way, taking $k = 3, 4, 5$ in (4.6), we have

$$\begin{aligned} f_3(x, y) &= -e^{xy}, \\ f_4(x, y) &= e^{xy}, \\ f_5(x, y) &= e^{xy}. \end{aligned}$$

Then the 5th order truncated approximate solution of Eqs. (4.1)-(4.2) can be obtained as follows

$$\begin{aligned} u_5(x, y, t) &= e^{xy} + e^{xy} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - e^{xy} \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - e^{xy} \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \\ &\quad + e^{xy} \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} + e^{xy} \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(5\alpha + 1)}. \end{aligned}$$

Following the same step, then the solution of Eqs. (4.1)-(4.2) can be expressed by

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \left(1 - \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} - \dots \right) e^{xy} \\ &\quad + \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(5\alpha + 1)} - \dots \right) e^{xy} \\ &= (\cos(t^\alpha, \alpha) + \sin(t^\alpha, \alpha)) e^{xy}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

When $\alpha = 1$, the exact solution is

$$u(x, y, t) = (\cos(t) + \sin(t)) e^{xy}.$$

Remark 4.1. Comparing our obtained result (4.7) with the results in [12–15], it can be seen that the result is new.

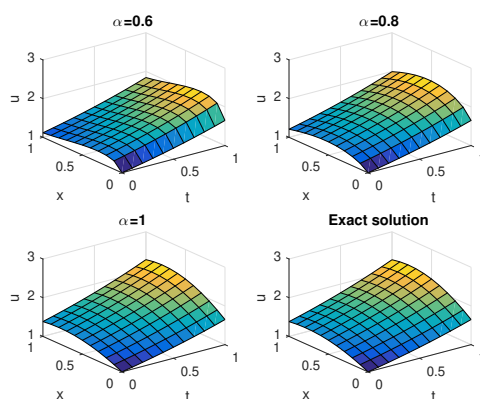


Figure 1. 3D plots for the 5th FRPSM approximate solution and exact solution for different values of α for Example 4.1 when $y = 0.5$.

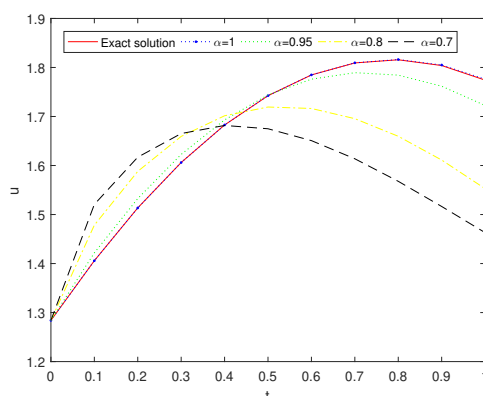


Figure 2. 2D plots for the 5th FRPSM approximate solution and exact solution for different values of α for Example 4.1 when $x = y = 0.5$.

Table 1. Numerical values of the 5th FRPS approximate solution and exact solution for different values of α for Example 4.1 when $x = y = 0.5$.

t	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1$	Absolute error	
	u_{FRPSM}	u_{FRPSM}	u_{FRPSM}	u_{FRPSM}	u_{exact}	$ u_{exact} - u_{FRPSM} $
0.1	1.5207	1.4784	1.4394	1.4058	1.4058	1.8085×10^{-9}
0.3	1.6652	1.6594	1.6375	1.6061	1.6061	1.3536×10^{-6}
0.5	1.6750	1.7193	1.7411	1.7425	1.7424	2.9725×10^{-5}
0.7	1.6137	1.6956	1.7634	1.8095	1.8093	6.7065×10^{-2}
0.9	1.5164	1.6112	1.714	1.805	1.8040	1.0547×10^{-3}

Example 4.2. Consider the following nonlinear time-fractional wave-like equation with variable coefficients

$$D_t^{2\alpha} u = u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_x u_{xx} u_{xxx}) + u_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_{xx}^3) - 18u^5 + u, \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \quad (4.8)$$

with the initial conditions

$$u(x, 0) = e^x, D_t^\alpha u(x, 0) = e^x, \quad (4.9)$$

where $D_t^{2\alpha}$ is the Caputo fractional derivative operator of order 2α , and u is a function of $x, t \in]0, 1[\times \mathbb{R}^+$.

For $\alpha = 1$, the exact solution of Eqs. (4.8)-(4.9) is given by [14]

$$u(x, t) = \exp(t + x).$$

According to FRPSM described in Section 3, by applying on the Eqs. (4.8)-(4.9), we have

First, the 1st FRPS approximate solution of $u(x, t)$ is

$$u_2(x, t) = e^x + e^x \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}. \quad (4.10)$$

Secondly, construct the k^{th} truncated series and k^{th} residual function of Eqs. (4.8)-(4.9) as follow

$$u_k(x, t) = e^x + e^x \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \sum_{n=2}^k f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \quad (4.11)$$

$$\text{Res}_k(x, t) = D_t^{2\alpha} u_k - (u_k)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_{kx} u_{kxx} u_{kxxx}) - (u_{kx})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_{kxx})^3 + 18(u_k)^5 - u_k. \quad (4.12)$$

By (3.7), we have

$$D_t^{(k-2)\alpha} \text{Res}_k(x, 0) = 0, k = 2, 3, 4, \dots \quad (4.13)$$

Taking $k = 2$ in (4.13), we obtain

$$f_2(x) = e^x.$$

Then the 2nd truncated approximate solution will be

$$u_2(x, t) = e^x + e^x \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + e^x \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}.$$

In a similar way, taking $k = 3, 4, 5$ in (4.13), we have

$$\begin{aligned} f_3(x) &= e^x, \\ f_4(x) &= e^x, \\ f_5(x) &= e^x. \end{aligned}$$

Then the 5th order truncated approximate solution of Eqs. (4.8)-(4.9) can be obtained as follows:

$$\begin{aligned} u_5(x, t) &= e^x + e^x \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + e^x \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + e^x \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \\ &\quad + e^x \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} + e^x \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(5\alpha + 1)}. \end{aligned}$$

Following the same step, then the solution of Eqs. (4.8)-(4.9) can be expressed by

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \left(1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} + \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(5\alpha + 1)} + \dots \right) e^x \\
 &= \exp((t^\alpha, \alpha) + x).
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

When $\alpha = 1$, the exact solution is

$$u(x, t) = \exp(t + x).$$

Remark 4.2. Comparing our obtained result (4.14) with the results in [12–15], it can be seen that the result is new.

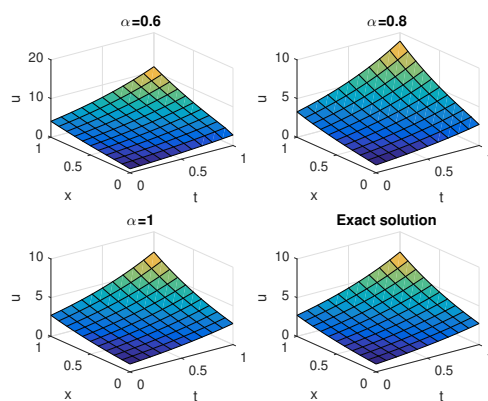


Figure 3. 3D plots for the 5th FRPSM approximate solution and exact solution for different values of α for Example 4.2.

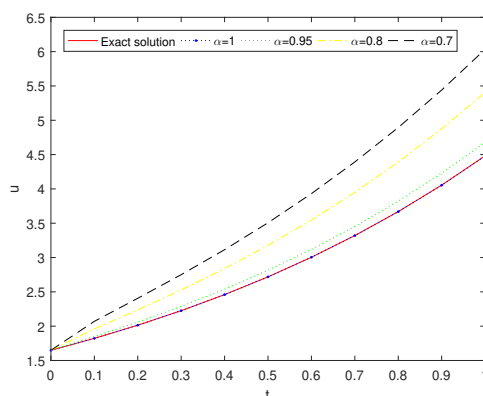


Figure 4. 2D plots for the 5th FRPSM approximate solution and exact solution for different values of α for Example 4.2 when $x = 0.5$.

Table 2. Numerical values of the 5th FRPS approximate solution and exact solution for different values of α for Example 4.2 when $x = 0.5$.

t	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1$	Absolute error	
	u_{FRPSM}	u_{FRPSM}	u_{FRPSM}	u_{FRPSM}	u_{exact}	$ u_{exact} - u_{FRPSM} $
0.1	2.0702	1.9606	1.8809	1.8221	1.8221	2.323×10^{-9}
0.3	2.7499	2.5282	2.3585	2.2255	2.2255	1.7436×10^{-6}
0.5	3.5066	3.1781	2.9222	2.7182	2.7183	3.8504×10^{-5}
0.7	4.3927	3.9506	3.6011	3.3198	3.3201	2.9890×10^{-4}
0.9	5.4403	4.8764	4.4228	4.0538	4.0552	1.3929×10^{-3}

Example 4.3 Consider the following one dimensional nonlinear time-fractional wave-like equation with variable coefficients

$$D_t^{2\alpha} u = x^2 \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_{xx}) - x^2 (u_{xx})^2 - u, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (4.15)$$

with the initial conditions

$$u(x, 0) = 0, \quad D_t^\alpha u(x, 0) = x^2, \quad (4.16)$$

where $D_t^{2\alpha}$ is the Caputo fractional derivative operator of order 2α , and u is a function of $x, t \in]0, 1[\times \mathbb{R}^+$.

For $\alpha = 1$, the exact solution of Eqs. (4.15)-(4.16) is given by [14]

$$u(x, t) = x^2 \sin(t).$$

According to FRPSM described in Section 3, by applying on the Eqs. (4.15)-(4.16), we have

First, the 1st FRPS approximate solution of $u(x, t)$ is

$$u_2(x, t) = x^2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}. \quad (4.17)$$

Secondly, construct the k^{th} truncated series and k^{th} residual function of Eqs. (4.15)-(4.16) as follow

$$u_k(x, t) = x^2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \sum_{n=2}^k f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \quad (4.18)$$

$$\text{Res}_k(x, t) = D_t^{2\alpha} u_k - x^2 \frac{\partial}{\partial x} (u_{kx} u_{kxx}) - x^2 (u_{kxx})^2 - u_k. \quad (4.19)$$

By (3.7), we have

$$D_t^{(k-2)\alpha} \text{Res}_k(x, t) = 0, \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (4.20)$$

Taking $k = 2$ in (4.18), we obtain

$$f_2(x) = 0.$$

Then the 2nd truncated approximate solution will be

$$u_2(x, t) = x^2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

In a similar way, taking $k = 3, 4, 5$ in (4.20), we have

$$\begin{aligned} f_3(x) &= -x^2, \\ f_4(x) &= 0, \\ f_5(x) &= x^2. \end{aligned}$$

Then the 5th order truncated approximate solution of Eqs. (4.15)-(4.16) can be obtained as follows:

$$u_5(x, t) = x^2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - x^2 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + x^2 \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(5\alpha + 1)}.$$

Following the same step, then the solution of Eqs. (4.15)-(4.16) can be expressed by

$$\begin{aligned} u(x, t) &= x^2 \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(5\alpha + 1)} - \dots \right) \\ &= x^2 \sin(t^\alpha, \alpha). \end{aligned} \quad (4.21)$$

When $\alpha = 1$, the exact solution is

$$u(x, t) = x^2 \sin(t).$$

Remark 4.3. Comparing our obtained result (4.21) with the results in [12–15], it can be seen that the result is new.

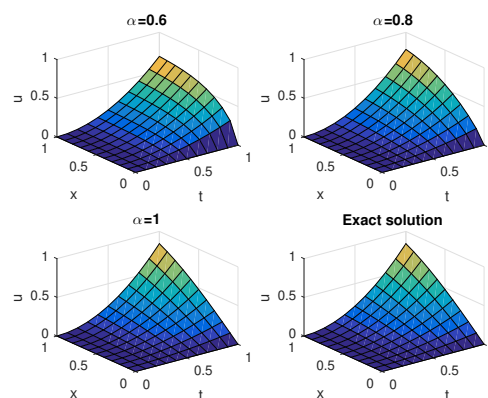


Figure 5. 3D plots for the 5th FRPSM approximate solution and exact solution for different values of α for Example 4.3.

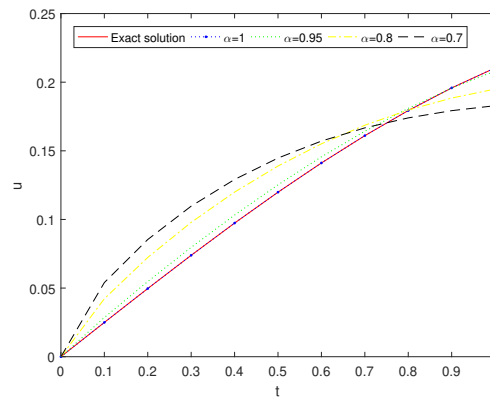


Figure 6. 2D plots for the 5th FRPSM approximate solution and exact solution for different values of α for Example 4.3 when $x = 0.5$.

Table 3. Numerical values of the 5th FRPS approximate solution and exact solution for different values of α for Example 4.3 when $x = 0.5$.

t	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1$	Absolute error	
	u_{FRPSM}	u_{FRPSM}	u_{FRPSM}	u_{FRPSM}	u_{exact}	$ u_{exact} - u_{FRPSM} $
0.1	0.054	0.042209	0.032605	0.024958	0.024958	4.9596×10^{-12}
0.3	0.10969	0.097871	0.085658	0.07388	0.07388	1.0835×10^{-8}
0.5	0.14473	0.13893	0.13028	0.11986	0.11986	3.8618×10^{-7}
0.7	0.16673	0.16866	0.16664	0.16106	0.16105	4.0574×10^{-6}
0.9	0.17926	0.18843	0.19429	0.19586	0.19583	2.346×10^{-5}

5. Numerical results and discussion

In this section, we discuss and evaluate the numerical results of the approximate solutions for Examples 4.1, 4.2 and 4.3 respectively. Figures 1, 3 and 5 represents the surface graph of the 5th FRPSM approximate solution at $\alpha = 0.6, 0.8, 1$ and the exact solution. Figures 2, 4 and 6 represents the behavior of the 5th FRPSM approximate solution at $\alpha = 0.7, 0.8, 0.95, 1$ and the exact solution. These figures affirm that when the order of the fractional derivative α approaches 1, the approximate solutions obtained by FRPSM approach the exact solutions.

Tables 1–3 represents the numerical values of the 5th FRPSM approximate solution for different values of α and the exact solution. These tables clarifies the convergence of the approximate solutions to the exact solutions.

6. Conclusion

In this paper, fractional residual power series method (FRPSM) is successfully applied to find approximate analytical solutions of time-fractional wave-like equations with variables coefficients. This method was tested on three numerical examples. Numerical results obtained confirm the easily,

accurately and efficiency of the proposed method. The advantage of the FRPSM is that it reduces significantly the numerical computations to find approximate analytical solutions for this type of equations compared to current methods such as the perturbation technique, differential transform method (DTM) and Adomian decomposition method (ADM), thus, we can conclude that, the FRPSM is simple, effective, and practically method for solving many other nonlinear fractional partial differential equations.

Acknowledgments

The authors are thankful to a Professor Hamouche Zakia and to the anonymous referees for their careful checking of the details and for their valuable suggestions and comments which cause substantial improvements in the paper.

References

1. O. Abu Arqub, *Series solution of fuzzy differential equations under strongly generalized differentiability*, J. Adv. Res. Appl. Math., **5** (2013), 31–52.
2. O. Acan, M. M. Al Qurashi and D. Baleanu, *Reduced differential transform method for solving time and space local fractional partial differential equations*, J. Nonlinear Sci. Appl., **10** (2017), 5230–5238.
3. M. Dehghan, J. Manafian and A. Saadatmandi, *Solving nonlinear fractional partial differential equations using the homotopy analysis method*, Numer. Meth. Part. D. E., **26** (2009), 448–479.
4. A. El-Ajou, O. Abu Arqub, Z. Al Zhour, et al. *New results on fractional power series: theories and applications*, Entropy, **15** (2013), 5305–5323.
5. A. El-Ajou, O. AbuArquba and Sh. Momanib, *Approximate analytical solution of the nonlinear fractional KdV–Burgers equation: A new iterative algorithm*, J. Comput. Phys., **293** (2015), 81–95.
6. A. Elsaid, *The variational iteration method for solving Riesz fractional partial differential equations*, Comput. Math. Appl., **60** (2010), 1940–1947.
7. A. A. Freihet and M. Zuriqat, *Analytical Solution of Fractional Burgers–Huxley Equations via Residual Power Series Method*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **40** (2019), 174–182.
8. P. K. Gupta and M. Singh, *Homotopy perturbation method for fractional Fornberg–Whitham equation*, Comput. Math. Appl., **61** (2011), 250–254.
9. K. Hosseini, A. Bekir, M. Kaplan, et al. *On a new technique for solving the nonlinear conformable time-fractional differential equations*, Opt. Quant. Electron., **49** (2017), 343.
10. M. Kaplan, A. Bekir, A. Akbulut, et al. *The modified simple equation method for nonlinear fractional differential equations*, Rom. J. Phys., **60** (2015), 1374–1383.
11. M. Kaplan and A. Bekir, *Construction of exact solutions to the space–time fractional differential equations via new approach*, Optik, **132** (2017), 1–8.

12. A. Khalouta and A. Kadem, *Comparison of New Iterative Method and Natural Homotopy Perturbation Method for Solving Nonlinear Time-Fractional Wave-Like Equations with Variable Coefficients*, *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, **19** (2019), 160–169.
13. A. Khalouta and A. Kadem, *Fractional natural decomposition method for solving a certain class of nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients*, *Acta Universitatis Sapientiae: Mathematica*, **11** (2019), 99–116.
14. A. Khalouta and A. Kadem, *A New Technique for Finding Exact Solutions of Nonlinear Time-Fractional Wave-Like Equations with Variable Coefficients*, *Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb.*, 2019.
15. A. Khalouta and A. Kadem, *A New iterative natural transform method for solving nonlinear Caputo time-fractional partial differential equations*, *Appear in: Jordan J. Math. Stat.*, 2019.
16. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and Application of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006.
17. A. Kumar, S. Kumar and M. Singh, *Residual power series method for fractional Sharma-Tasso-Oleiver equation*, *Commun. Numer. Anal.*, **2016** (2016), 1–10.
18. K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Willey and Sons, New York, 1993.
19. Z. Pinar, *On the explicit solutions of fractional Bagley-Torvik equation arises in engineering*, *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA)*, **9** (2019), 52–58.
20. I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1999.
21. F. Tchier, M. Inc, Z. S. Korpinar, et al. *Solutions of the time fractional reaction–diffusion equations with residual power series method*, *Adv. Mech. Eng.*, **8** (2016), 1–10.
22. H. Thabet and S. Kendre, *New modification of Adomian decomposition method for solving a system of nonlinear fractional partial differential equations*, *Int. J. Adv. Appl. Math. and Mech.*, **6** (2019), 1–13.
23. S. Uçar, E. Uçar, N. Özdemira, et al. *Mathematical analysis and numerical simulation for a smoking model with Atangana–Baleanu derivative*, *Chaos Solitons Fractals*, **118** (2019), 300–306.
24. M. Yavuz, *Novel solution methods for initial boundary value problems of fractional order with conformable differentiation*, *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA)*, **8** (2017), 1–7.
25. M. Yavuz and N. Özdemira, *Comparing the new fractional derivative operators involving exponential and Mittag-Leffler kernel*, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, **13** (2020), 995–1006.

An efficient method for solving nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients

Ali Khalouta^{1*} and Abdelouahab Kadem²

^{1*}Laboratory of Fundamental Mathematics and Numerical, Departement of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Sétif 1, 19000 Sétif, Algeria.

²Laboratory of Fundamental Mathematics and Numerical, Departement of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Sétif 1, 19000 Sétif, Algeria.

E-mail: nadjibkh@yahoo.fr^{1*}, abdelouahabk@yahoo.fr²

Abstract

In this paper, fractional residual power series method (FRPSM) is effectively applied for finding the approximate analytical solutions of general nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients. This method based on constructing series solutions in a form of rapidly convergent series with easily computable components and without need of linearization, discretization, perturbation or unrealistic assumptions. Numerical results are given and then they are compared with the exact solutions both numerically and graphically. By numerical examples, it is shown that the FRPSM is very simple, efficient and convenient for solving different forms of nonlinear fractional partial differential equations.

2010 Mathematics Subject Classification. **35R11.** 26A33, 35C05, 74G10

Keywords. general nonlinear time-fractional wave-like equations, approximate analytical solutions, Caputo fractional derivative, fractional residual power series method.

1 Introduction

In recent years, the nonlinear fractional partial differential equations (NFPDEs) have achieved great attention among researchers due to its wide range of applications in many fields of physics, mechanics, electrochemistry, viscoelasticity, nonlinear control theory, image processing, nonlinear biological systems, astrophysics, and other fields of science and engineering [3, 9, 12, 13, 14, 20, 23]. So, there has been significant interest in developing methods for the solutions of NFPDEs. Exact solutions of NFPDEs are sometimes too complicated to be attained by conventional techniques due to the computational complexities of nonlinear parts involving them. Therefore, for the study of solution of NFPDEs there are variety of analytical and approximate methods found in literature. Among them most common methods are: Adomian decomposition method (ADM) [25], variational iteration method (VIM) [27], fractional difference method (FDM) [22], differential transform method (DTM) [6], homotopy perturbation method (HPM) [11].

The residual power series method (RPSM) was initially developed to compute the numerical solutions of the first-order and the second-order fuzzy differential equations [1]. This method provides a power series solution with rapid convergence. It has been advantageously implemented for the nonlinear fractional Korteweg–de Vries–Burgers equation [7], for the fractional foam drainage equation [4], for the time-fractional two-component evolutionary system of order two [5] and for other equations [2]. It has been proven that the RPSM is a convenient and effective method in its application.

The main objective of the present paper is to use the fractional residual power series method to find the approximate analytical solutions for the general time-fractional wave-like equations with variable coefficients of the form

$$D_t^\alpha u = \sum_{i,j=1}^N F_{1ij}(X, t, u) \frac{\partial^{k+m}}{\partial x_i^k \partial x_j^m} F_{2ij}(u_{x_i}, u_{x_j}) \quad (1.1)$$

$$+ \sum_{i=1}^N G_{1i}(X, t, u) \frac{\partial^p}{\partial x_i^p} G_{2i}(u_{x_i}) + H(X, t, u) + S(X, t),$$

with the initial conditions

$$u(X, 0) = a_0(X), u_t(X, 0) = a_1(X), \quad (1.2)$$

where D_t^α is the Caputo fractional derivative operator of order α , $1 < \alpha \leq 2$, $u = u(X, t)$ is an unknown function where $X = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ and $t > 0$, F_{1ij}, G_{1i} $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$, are nonlinear functions of X, t and u , F_{2ij}, G_{2i} $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$, are nonlinear functions of derivatives of u with respect to x_i and x_j $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$, respectively. Also H, S are nonlinear functions and k, m, p are integers.

These types of equations are of considerable significance in various fields of applied sciences, mathematical physics, nonlinear hydrodynamics, engineering physics, biophysics, human movement sciences, astrophysics and plasma physics. These equations describe the evolution of erratic motions of small particles that are immersed in fluids, fluctuations of the intensity of laser light, velocity distributions of fluid particles in turbulent flows.

This article is organized as follows. In Section 2, we present some fundamental definitions of fractional calculus. In Section 3, we present the basic idea of the fractional power series (FPS). In Section 4, we introduce our results of fractional residual power series method (FRPSM) for general nonlinear time-fractional partial differential equation, in particular for the general nonlinear time-fractional wave-like equations (1.1) with the initial conditions (1.2). In Section 5, we have proposed some examples in order to show the validity and effectiveness of this approach. Finally, we present our obtained results (Graphs and Tables), comparing them with their exact associated forms. These results were verified with Matlab (version 7.9.0.529 (R2009b)).

2 Basic definitions of fractional calculus theory

For the reader's convenience, we recall some concepts, definitions and basic results from fractional calculus theory, which are useful in the following discussion. These definitions and concepts can be found in [8, 18, 19, 21, 22, 24, 26], and references therein. Throughout this paper, the set of real numbers and the set of integer numbers are denoted by \mathbb{R} and \mathbb{N} , respectively.

Definition 2.1. A real function $u(X, t)$, $X \in \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}^+$, is considered to be in the space $C_\mu(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)$, $\mu \in \mathbb{R}$, if there exists a real number $p > \mu$, so that $u(X, t) = t^p v(X, t)$, where $v \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)$, and it is said to be in the space C_μ^n if $u^{(n)} \in C_\mu(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)$, $n \in \mathbb{N}$.

Definition 2.2. The Riemann-Liouville fractional integral operator of order $\alpha > 0$ of $u \in C_\mu(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)$, $\mu \geq -1$ is defined as follows

$$I_t^\alpha u(X, t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \xi)^{\alpha-1} u(X, \xi) d\xi, & \alpha > 0, t > \xi > t_0 \geq 0, \\ u(X, t), & \alpha = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

where

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \alpha > 0,$$

is the well-known gamma function.

Some properties of the operator I_t^α , which we will need here, are as follows.

For $u \in C_\mu(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)$, $\mu \geq -1$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\gamma \geq -1$ and $t > t_0 \geq 0$, we have

$$I_t^\alpha I_t^\beta u(X, t) = I_t^{\alpha+\beta} u(X, t) = I_t^\beta I_t^\alpha u(X, t),$$

$$I_t^\alpha (t - t_0) = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\alpha + \gamma + 1)} (t - t_0)^{\alpha+\gamma}.$$

Theorem 2.3. [10] Let $t_0 < T$, $\alpha > 0$ and $u \in C(\mathbb{R}^N \times [t_0, T])$. Moreover, assume that v is Lebesgue integrable on $\mathbb{R}^N \times [t_0, T]$ and that v does not change its sign in $\mathbb{R}^N \times [t_0, T]$. Then, for almost every $t \in (t_0, T]$ there exists some $\tau \in (t_0, t) \subset (t_0, T)$ such that

$$I_t^\alpha (uv)(X, t) = u(\tau) I_t^\alpha v(X, t). \quad (2.2)$$

If additionally $\alpha \geq 1$ or $v \in C(\mathbb{R}^N \times [0, T])$, then this result holds for every $t \in (0, T]$.

Definition 2.4. The Caputo time-fractional derivative operator of order $\alpha > 0$ of $u \in C_{-1}^n(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)$, $n \in \mathbb{N}$, is defined as follows

$$D_t^\alpha u(X, t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\xi)^{n-\alpha-1} u^{(n)}(X, \xi) d\xi, & n-1 < \alpha < n, \\ u^{(n)}(X, t), & \alpha = n. \end{cases} \quad (2.3)$$

For the Riemann-Liouville fractional integral and Caputo fractional derivative, we have the following relation

$$I_t^\alpha D_t^\alpha u(X, t) = u(X, t) - \sum_{k=0}^{n-1} u^{(k)}(X, t_0^+) \frac{(t-t_0)^k}{k!}, X \in \mathbb{R}^N, t > t_0 \geq 0. \quad (2.4)$$

Definition 2.5. The Mittag-Leffler function is defined as follows

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0. \quad (2.5)$$

A further generalization of (2.5) is given in the form

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0. \quad (2.6)$$

For $\alpha = 1$, $E_\alpha(z)$ reduces to e^z .

3 Fractional power series (FPS)

In this section, we will introduce a general form of generalized Taylor's formula that contains the Caputo derivatives. For more details, see [2].

Definition 3.1. A power series of the form

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} C_{ij}(X)(t-t_0)^{i\alpha+j}, \quad (3.1)$$

where $0 \leq m-1 < \alpha \leq m$ and $t \geq t_0$, is called a multiple fractional power series (MFPS) about $t = t_0$, t is a variable and $C_{ij}(X)$ are functions of $X \in \mathbb{R}^N$, called the coefficients of the series.

Lemma 3.2. Suppose that $u \in C(\mathbb{R}^N \times [t_0, t_0 + R])$ and $D_t^{i\alpha}u \in C(\mathbb{R}^N \times (t_0, t_0 + R))$ for $i \in \{0, 1, 2, \dots, n+1\}$, where $0 \leq m-1 < \alpha \leq m$. Then we have

$$\begin{aligned} I_t^{(n+1)\alpha} D_t^{(n+1)\alpha} u(X, t) &= \frac{D_t^{(n+1)\alpha} u(X, \tau)}{\Gamma((n+1)\alpha + 1)} (t-t_0)^{(n+1)\alpha}, \\ X &\in \mathbb{R}^N, t_0 \leq \tau \leq t < t_0 + R. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Proof. Using the definition of the Riemann-Liouville fractional integral operator (2.1) and the mean value theorem for fractional integrals (2.2), we have

$$\begin{aligned} I_t^{(n+1)\alpha} D_t^{(n+1)\alpha} u(X, t) &= \frac{1}{\Gamma((n+1)\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\xi)^{(n+1)\alpha-1} D_t^{(n+1)\alpha} u(X, \xi) d\xi \\ &= \frac{D_t^{(n+1)\alpha} u(X, \tau)}{\Gamma((n+1)\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\xi)^{(n+1)\alpha-1} d\xi \\ &= \frac{D_t^{(n+1)\alpha} u(X, \tau)}{\Gamma((n+1)\alpha + 1)} (t-t_0)^{(n+1)\alpha}. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Theorem 3.3. Suppose that $u \in C(\mathbb{R}^N \times [t_0, t_0 + R])$, $D_t^{i\alpha}u \in C(\mathbb{R}^N \times (t_0, t_0 + R))$, and $D_t^{i\alpha}u$ can be differentiated $(m-1)$ -times with respect to t on $(t_0, t_0 + R)$ for $i \in \{0, 1, 2, \dots, n+1\}$, where $0 \leq m-1 < \alpha \leq m$. Then we have

$$\begin{aligned} u(X, t) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} \frac{D_t^{i\alpha+j} u(X, t_0)}{\Gamma(i\alpha + j + 1)} (t-t_0)^{i\alpha+j} + \frac{D_t^{(n+1)\alpha} u(X, \tau)}{\Gamma((n+1)\alpha + 1)} (t-t_0)^{(n+1)\alpha}, \\ X &\in \mathbb{R}^N, t_0 \leq \tau \leq t < t_0 + R. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Proof. From certain properties of the operator I_t^α , the concept of sequential fractional derivatives

(See [22]), and the propertie (2.4), we have

$$\begin{aligned}
I_t^{(n+1)\alpha} D_t^{(n+1)\alpha} u(X, t) &= I_t^{n\alpha} ((I_t^\alpha D_t^\alpha) D_t^{n\alpha} u(X, t)) = I_t^{n\alpha} ((I_t^m D_t^m) D_t^{n\alpha} u(X, t)) \\
&= I_t^{n\alpha} \left(D_t^{n\alpha} u(X, t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\partial^j}{\partial t^j} D_t^{n\alpha} u(X, t_0) \frac{(t-t_0)^j}{j!} \right) \\
&= I_t^{n\alpha} D_t^{n\alpha} u(X, t) - I_t^{n\alpha} \left(\sum_{j=0}^{m-1} D_t^j D_t^{n\alpha} u(X, t_0) \frac{(t-t_0)^j}{j!} \right) \\
&= I_t^{(n-1)\alpha} \left((I_t^m D_t^m) D_t^{(n-1)\alpha} u(X, t) \right) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{D_t^{n\alpha+j} u(X, t_0)}{\Gamma(n\alpha+j+1)} (t-t_0)^{n\alpha+j} \\
&= I_t^{(n-1)\alpha} \left(D_t^{(n-1)\alpha} u(X, t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\partial^j}{\partial t^j} D_t^{(n-1)\alpha} u(X, t_0) \frac{(t-t_0)^j}{j!} \right) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{D_t^{n\alpha+j} u(X, t_0)}{\Gamma(n\alpha+j+1)} (t-t_0)^{n\alpha+j} \\
&= I_t^{(n-1)\alpha} D_t^{(n-1)\alpha} u(X, t) - I_t^{(n-1)\alpha} \left(\sum_{j=0}^{m-1} D_t^j D_t^{(n-1)\alpha} u(X, t_0) \frac{(t-t_0)^j}{j!} \right) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{D_t^{n\alpha+j} u(X, t_0)}{\Gamma(n\alpha+j+1)} (t-t_0)^{n\alpha+j} \\
&= I_t^{(n-2)\alpha} \left((I_t^m D_t^m) D_t^{(n-2)\alpha} u(X, t) \right) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{D_t^{(n-1)\alpha+j} u(X, t_0)}{\Gamma((n-1)\alpha+j+1)} (t-t_0)^{(n-1)\alpha+j} \\
&\quad - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{D_t^{n\alpha+j} u(X, t_0)}{\Gamma(n\alpha+j+1)} (t-t_0)^{n\alpha+j}.
\end{aligned}$$

If we keep repeating this process, then after n -times of computations, we can find that

$$I_t^{(n+1)\alpha} D_t^{(n+1)\alpha} u(X, t) = u(X, t) - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} \frac{D_t^{i\alpha+j} u(X, t_0)}{\Gamma(i\alpha+j+1)} (t-t_0)^{i\alpha+j}.$$

Using (3.2), we get

$$\begin{aligned}
u(X, t) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} \frac{D_t^{i\alpha+j} u(X, t_0)}{\Gamma(i\alpha+j+1)} (t-t_0)^{i\alpha+j} + \frac{D_t^{(n+1)\alpha} u(X, \tau)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} (t-t_0)^{(n+1)\alpha}, \\
t_0 &\leq \tau \leq t < t_0 + R.
\end{aligned}$$

In the generalized Taylor's series the partial sums are

$$T_n(X, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} \frac{D_t^{i\alpha+j} u(X, t_0)}{\Gamma(i\alpha + j + 1)} (t - t_0)^{i\alpha+j},$$

and in general, $u(X, t)$ is the sum of its generalized Taylor's series if $u(X, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(X, t)$. On the other aspect as well, if we let $R_n(X, t) = u(X, t) - T_n(X, t)$, then $R_n(X, t)$ is the remainder of the generalized Taylor's series.

Corollary 3.4. If $\left| D_t^{(n+1)\alpha} u(X, t) \right| \leq M(X)$ on $t_0 \leq t \leq d$ where $0 \leq m - 1 < \alpha \leq m$, then $R_n(X, t)$ the remainder of the generalized Taylor's series will satisfy the inequality

$$|R_n(X, t)| \leq \frac{M(X)}{\Gamma((n+1)\alpha + 1)} (t - t_0)^{(n+1)\alpha}, t_0 \leq t \leq d.$$

4 FRPSM for general nonlinear time-fractional partial differential equation

Theorem 4.1. Consider a general nonlinear time-fractional partial differential equation

$$D_t^\alpha u(X, t) + Lu(X, t) + Nu(X, t) = g(X, t), 0 \leq m - 1 < \alpha \leq m, X \in \mathbb{R}^N, t > 0, \quad (4.1)$$

with the initial conditions

$$\frac{\partial^j u(X, 0)}{\partial t^j} = a_j(X), X \in \mathbb{R}^N, j = 0, 1, 2, \dots, m - 1, \quad (4.2)$$

where D_t^α is the Caputo fractional derivative of order α , L is a linear differential operator, N represents a general nonlinear differential operator, and g is the source term.

Then, by FRPSM the solution of Eqs. (4.1)-(4.2) is given in the form of infinite series which converges rapidly to the exact solution as follows

$$u(X, t) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{a_j(X)}{j!} t^j + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} f_{ij}(X) \frac{t^{i\alpha+j}}{\Gamma(i\alpha + j + 1)}, \quad (4.3)$$

$$X \in \mathbb{R}^N, 0 \leq t < R.$$

where f_{ij} $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$, are the coefficients of the series, and R is the radius of convergence of the MFPS.

Proof. In order to achieve our goal, we consider the following generalized nonlinear time-fractional partial differential equation (4.1) with the initial conditions (4.2).

The FRPS method assumes the solution for Eqs. (4.1)-(4.2) as a fractional power series about the initial point $t = 0$, as follows

$$u(X, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} f_{ij}(X) \frac{t^{i\alpha+j}}{\Gamma(i\alpha + j + 1)}, m - 1 < \alpha \leq m, \quad (4.4)$$

$$X \in \mathbb{R}^N, 0 \leq t < R,$$

From Eq. (4.4), we have

$$\frac{\partial^j u(X, 0)}{\partial t^j} = j! f_{0j}(X) = a_j(X), j \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\},$$

then

$$f_{0j}(X) = \frac{a_j(X)}{j!}, j \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}.$$

Hence, we can obtain the initial guess approximation of u as

$$u_{(0, m-1)}(X, t) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{a_j(X)}{j!} t^j, X \in \mathbb{R}^N, 0 \leq t < R. \quad (4.5)$$

So, Eq. (4.4) could be reformulated as

$$\begin{aligned} u(X, t) &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{a_j(X)}{j!} t^j + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} f_{ij}(X) \frac{t^{i\alpha+j}}{\Gamma(i\alpha+j+1)}, \\ X &\in \mathbb{R}^N, 0 \leq t < R. \end{aligned} \quad (4.6)$$

In the following step, we will let $u_{(k,l)}$ denotes the (k, l) -truncated series, that is

$$\begin{aligned} u_{(k,l)}(X, t) &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{a_j(X)}{j!} t^j + \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^l f_{ij}(X) \frac{t^{i\alpha+j}}{\Gamma(i\alpha+j+1)}, \\ X &\in \mathbb{R}^N, 0 \leq t < R, \end{aligned} \quad (4.7)$$

where $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ and $l \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$. Now applying the FRPS for determining the coefficients f_{ij} of Eq. (4.7), we define the residual function as

$$\begin{aligned} \text{Res}(X, t) &= D_t^\alpha u(X, t) + Lu(X, t) + Nu(X, t) - g(X, t), \\ X &\in \mathbb{R}^N, 0 \leq t < R. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Therefore, the (k, l) -truncated residual function is

$$\begin{aligned} \text{Res}_{(k,l)}(X, t) &= D_t^\alpha u_{(k,l)}(X, t) + Lu_{(k,l)}(X, t) + Nu_{(k,l)}(X, t) - g(X, t), \\ X &\in \mathbb{R}^N, 0 \leq t < R. \end{aligned} \quad (4.9)$$

As described in [1],[7], it is clear that $\text{Res}(X, t) = 0$ for each $X \in \mathbb{R}^N$ and $t \in [0, R)$. Therefore $D_t^{(i-1)\alpha} D_t^j \text{Res}(X, t) = 0$ for each $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ and $j \in \{0, 1, 2, \dots, l\}$, since the fractional derivative of a constant function in the Caputo sense is zero, and in the mean time, the fractional derivatives $D_t^{(i-1)\alpha} D_t^j$ for each $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ and $j \in \{0, 1, 2, \dots, l\}$ of $\text{Res}(X, t) = 0$ and $\text{Res}_{(i,j)}(X, t)$ are matching at $(X, t) = (X, 0)$.

$$\begin{aligned} D_t^{(i-1)\alpha} D_t^j \text{Res}(X, 0) &= D_t^{(i-1)\alpha} D_t^j \text{Res}_{(i,j)}(X, 0) = 0, \\ X &\in \mathbb{R}^n, i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}, j \in \{0, 1, 2, \dots, l\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

To get the form of the required coefficients f_{ij} in Eq. (4.7) for $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ and $j \in \{0, 1, 2, \dots, l\}$, we apply the following FRPS technique:

First, we substitute (k, l) -th truncated series of u into Eq. (4.9). Second we find then the fractional derivative formula $D_t^{(i-1)\alpha} D_t^j \text{Res}_{(i,j)}(\cdot, \cdot)$ $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, l\}$, we substitute $t = 0$ in the following formula, equate it to zero, and then solve the obtained algebraic Eq. (4.10). Q.E.D.

Let us consider a general nonlinear time-fractional wave-like equation (1.1) with the initial conditions (1.2).

First we define

$$\begin{aligned} Nu &= \sum_{i,j=1}^N F_{1ij}(X, t, u) \frac{\partial^{k+m}}{\partial x_i^k \partial x_j^m} F_{2ij}(u_{x_i}, u_{x_j}), \\ Mu &= + \sum_{i=1}^N G_{1i}(X, t, u) \frac{\partial^p}{\partial x_i^p} G_{2i}(u_{x_i}), \\ Ku &= H(X, t, u). \end{aligned}$$

Eq.(1.1) is written in the form

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u(X, t) &= Nu(X, t) + Mu(X, t) + Ku(X, t) + S(X, t), \\ X &\in \mathbb{R}^N, t > 0, 1 < \alpha \leq 2. \end{aligned}$$

According to Eq. (4.6), the solution of Eqs. (1.1)-(1.2) can be expressed as

$$u(X, t) = a_0(X) + a_1(X)t + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^1 f_{ij}(X) \frac{t^{i\alpha+j}}{\Gamma(i\alpha+j+1)}, \quad (4.11)$$

where

$$u_{(0,1)}(x, y, t) = a_0(X) + a_1(X)t, \quad (4.12)$$

is the initial guess approximation which is obtained by Eq. (4.5).

To find the coefficients f_{ij} for $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$ and $j \in \{0, 1\}$, we use the same steps as in above.

5 Examples and numerical results

In this section, the applicability of the FRPSM shall be demonstrated by test examples.

We define $E_{(k,l)}$ to be the absolute error between the exact solution u and the FRPS approximate solution $u_{(k,l)}$, where $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ and $l \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, as follows

$$\begin{aligned} E_{(k,l)}(X, t) &= |u(X, t) - u_{(k,l)}(X, t)|, \\ k &\in \{0, 1, 2, 3, \dots\}, l \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}. \end{aligned}$$

Example 5.1. Consider the 2-dimensional nonlinear time-fractional wave-like equation with variable coefficients

$$D_t^\alpha u = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (u_{xx} u_{yy}) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (xy u_x u_y) - u, t > 0, 1 < \alpha \leq 2, \quad (5.1)$$

with initial conditions

$$u(x, y, 0) = e^{xy}, u_t(x, y, 0) = e^{xy}, (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{5.2}$$

By applying the steps involved in the FRPSM as presented in Section 4, we have the solution of Eqs (5.1)-(5.2) is in the form

$$u(x, y, t) = e^{xy} + e^{xy}t + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^1 f_{ij}(x, y) \frac{t^{i\alpha+j}}{\Gamma(i\alpha + j + 1)}, \tag{5.3}$$

and the coefficients f_{ij} for $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$ and $j \in \{0, 1\}$, take the following values

$$\begin{cases} f_{i0}(x, y) = f_{i1}(x, y) = -e^{xy} & \text{for } i \in \{1, 3, 5, \dots\}, \\ f_{i0}(x, y) = f_{i1}(x, y) = e^{xy} & \text{for } i \in \{2, 4, 8, \dots\}. \end{cases}$$

Therefore, according to Eq. (5.3), the FRPS solution of Eqs. (5.1)-(5.2) can be written in the form of infinite series as follows

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \left(1 + t - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha + 2)} - \dots \right) e^{xy} \\ &= \left(t \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 2)} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} \right) e^{xy} \\ &= (tE_{\alpha,2}(-t^\alpha) + E_\alpha(-t^\alpha)) e^{xy}, \end{aligned}$$

where $E_\alpha(-t^\alpha)$ and $E_{\alpha,2}(-t^\alpha)$ are the Mittag-Leffler functions, defined by Eqs. (2.5) and (2.6).

Particularly, when $\alpha = 2$, the exact solution of Eqs. (5.1)-(5.2) is given by

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \left(1 + t - \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \right) e^{xy} \\ &= (\cos t + \sin t) e^{xy}. \end{aligned}$$

The above expressions is exactly same as those given by the NIM, NHPM [15], NVIM [16], and FNDM [17].

$t/x, y$	0.1	0.3	0.5	0.7
0.1	1.4226×10^{-9}	1.5411×10^{-9}	1.8085×10^{-9}	2.2991×10^{-9}
0.3	1.0648×10^{-6}	1.1535×10^{-6}	1.3536×10^{-6}	1.7208×10^{-6}
0.5	2.3382×10^{-5}	2.5330×10^{-5}	2.9725×10^{-5}	3.7787×10^{-5}
0.7	1.8000×10^{-4}	1.9499×10^{-4}	2.2882×10^{-4}	2.9089×10^{-4}
0.9	8.2963×10^{-4}	8.9872×10^{-4}	1.0547×10^{-3}	1.3407×10^{-3}

TABLE 1. Comparison of the absolute errors for the obtained results and the exact solution for Example 5.1 when $(k, l) = (2, 1)$ and $\alpha = 2$.

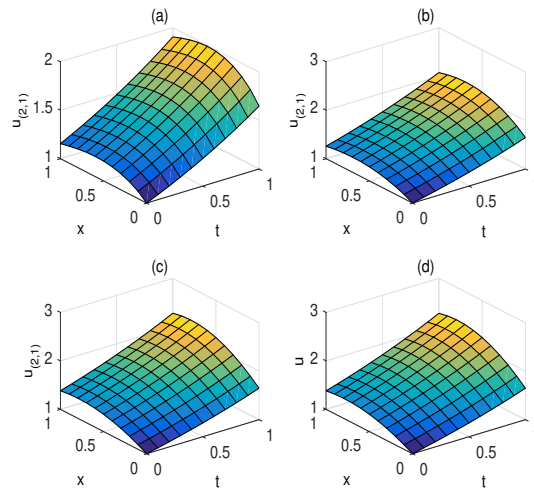


FIGURE 1. The surface graph of the exact solution u and the FRPS approximate solution $u_{(2,1)}$ for Example 5.1 when $y = 0.5$: (a) $u_{(2,1)}$ when $\alpha = 1.5$, (b) $u_{(2,1)}$ when $\alpha = 1.75$, (c) $u_{(2,1)}$ when $\alpha = 2$, and (d) u is exact.

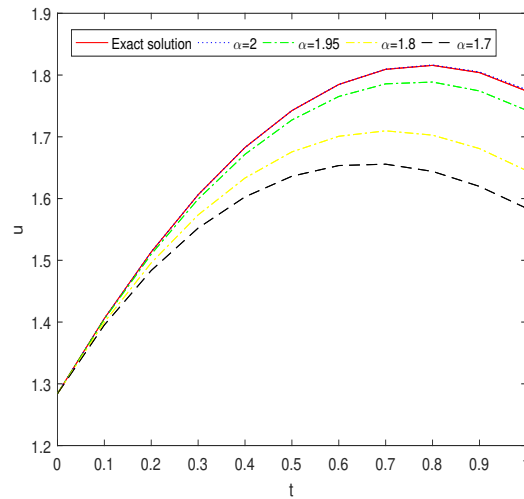


FIGURE 2. The behavior of the exact solution and the FRPS approximate solution $u_{(2,1)}$ for different values of α for Example 5.1 in the case when $x = y = 0.5$.

Example 5.2. Consider the following nonlinear time-fractional wave-like equation with variable coefficients

$$D_t^\alpha u = u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_x u_{xx} u_{xxx}) + u_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_{xx}^3) - 18u^5 + u, t > 0, 1 < \alpha \leq 2, \quad (5.4)$$

with initial conditions

$$u(x, 0) = e^x, u_t(x, 0) = e^x, x \in]0, 1[. \quad (5.5)$$

By applying the steps involved in the FRPSM as presented in Section 4, we have the solution of Eqs (5.4)-(5.5) is in the form

$$u(x, t) = e^x + e^x t + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^1 f_{ij}(x) \frac{t^{i\alpha+j}}{\Gamma(i\alpha+j+1)}, \quad (5.6)$$

and the coefficients f_{ij} for $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$ and $j \in \{0, 1\}$, take the following values

$$f_{i0}(x) = f_{i1}(x) = e^x \text{ for } i \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Therefore, according to Eq. (5.6), the FRPS solution of Eqs. (5.4)-(5.5) can be written in the form of infinite series as follows

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left(1 + t + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)} + \dots \right) e^x \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} + t \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+2)} \right) e^x = (E_\alpha(t^\alpha) + tE_{\alpha,2}(t^\alpha)) e^x, \end{aligned}$$

where $E_\alpha(t^\alpha)$ and $E_{\alpha,2}(t^\alpha)$ are the Mittag-Leffler functions, defined by Eqs (2.5) and (2.6).

Particularly, when $\alpha = 2$, the exact solution of Eqs. (5.4)-(5.5) is given by

$$u(x, t) = \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \right) e^x = e^{x+t}.$$

The above expressions is exactly same as those given by the NIM, NHPM [15], NVIM [16], and FNDM [17].

t/x	0.1	0.3	0.5	0.7
0.1	1.5572×10^{-9}	1.9019×10^{-9}	2.3230×10^{-9}	2.8373×10^{-9}
0.3	1.1688×10^{-6}	1.4276×10^{-6}	1.7436×10^{-6}	2.1297×10^{-6}
0.5	2.5810×10^{-5}	3.1525×10^{-5}	3.8504×10^{-5}	4.7029×10^{-5}
0.7	2.0036×10^{-4}	2.4472×10^{-4}	2.9890×10^{-4}	3.6507×10^{-4}
0.9	9.3372×10^{-4}	1.1404×10^{-3}	1.3929×10^{-3}	1.7013×10^{-3}

TABLE 2. Comparison of the absolute errors for the obtained results and the exact solution for Example 5.2 when $(k, l) = (2, 1)$ and $\alpha = 2$.

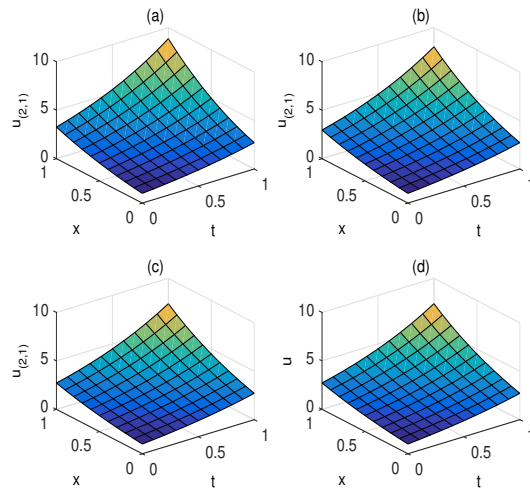


FIGURE 3. The surface graph of the exact solution u and the FRPS approximate solution $u_{(2,1)}$ for Example 5.2: (a) $u_{(2,1)}$ when $\alpha = 1.5$, (b) $u_{(2,1)}$ when $\alpha = 1.75$, (c) $u_{(2,1)}$ when $\alpha = 2$, and (d) u is exact.

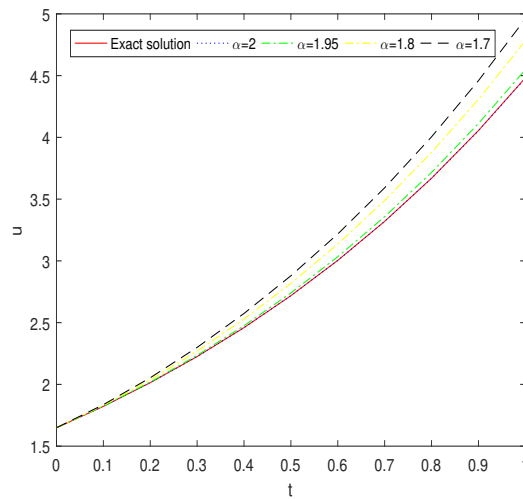


FIGURE 4. The behavior of the exact solution and the FRPS approximate solution $u_{(2,1)}$ for different values of α for Example 5.2 in the case when $x = 0.5$.

Example 5.3. Consider the following one-dimensional nonlinear time-fractional wave-like equation with variable coefficients

$$D_t^\alpha u = x^2 \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_{xx}) - x^2 (u_{xx}^2) - u, t > 0, 1 < \alpha \leq 2, \tag{5.7}$$

with initial conditions

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = x^2, x \in]0, 1[. \tag{5.8}$$

By applying the steps involved in the FRPSM as presented in Section 4, we have the solution of Eqs (5.7)-(5.8) is in the form

$$u(x, t) = x^2 t + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^1 f_{ij}(x) \frac{t^{i\alpha+j}}{\Gamma(i\alpha+j+1)}, \tag{5.9}$$

and the coefficients f_{ij} for $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$ and $j \in \{0, 1\}$, take the following values

$$\begin{cases} f_{i0}(x) = 0 & \text{for } i \in \{1, 2, 3, \dots\}, \\ f_{i1}(x) = (-1)^i x^2 & \text{for } i \in \{1, 2, 3, \dots\}. \end{cases}$$

Therefore, according to Eq. (5.9), the FRPS solution of Eqs. (5.7)-(5.8) can be written in the form of infinite series as follows

$$\begin{aligned} u(x, t) &= x^2 \left(t - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)} - \frac{t^{3\alpha+1}}{\Gamma(3\alpha+2)} + \dots \right) \\ &= x^2 \left(t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+2)} \right) = x^2 (tE_{\alpha,2}(-t^\alpha)), \end{aligned}$$

where $E_{\alpha,2}(-t^\alpha)$ is the Mittag-Leffler function, defined by Eq. (2.6).

Particularly, when $\alpha = 2$, the exact solution of Eqs. (5.7)-(5.8) is given by

$$u(x, t) = x^2 \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots \right) = x^2 \sin t.$$

The above expressions is exactly same as those given by the NIM, NHPM [15], NVIM [16], and FNDM [17].

t/x	0.1	0.3	0.5	0.7
0.1	1.9839×10^{-13}	1.7855×10^{-12}	4.9596×10^{-12}	9.7209×10^{-12}
0.3	4.3339×10^{-10}	3.9005×10^{-9}	1.0835×10^{-8}	2.1236×10^{-8}
0.5	1.5447×10^{-8}	1.3903×10^{-7}	3.8618×10^{-7}	7.5692×10^{-7}
0.7	1.6229×10^{-7}	1.4606×10^{-6}	4.0574×10^{-6}	7.9524×10^{-6}
0.9	9.3840×10^{-7}	8.4456×10^{-6}	2.3460×10^{-5}	4.5982×10^{-5}

TABLE 3. Comparison of the absolute errors for the obtained results and the exact solution for Example 5.3 when $(k, l) = (2, 1)$ and $\alpha = 2$.

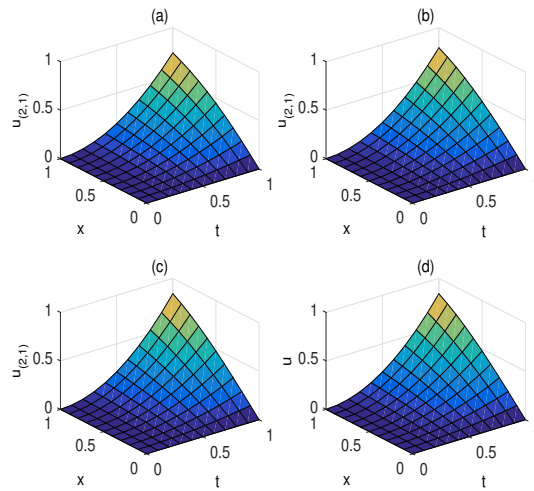


FIGURE 5. The surface graph of the exact solution u and the FRPS approximate solution $u_{(2,1)}$ for Example 5.3: (a) $u_{(2,1)}$ when $\alpha = 1.5$, (b) $u_{(2,1)}$ when $\alpha = 1.75$, (c) $u_{(2,1)}$ when $\alpha = 2$, and (d) u is exact.

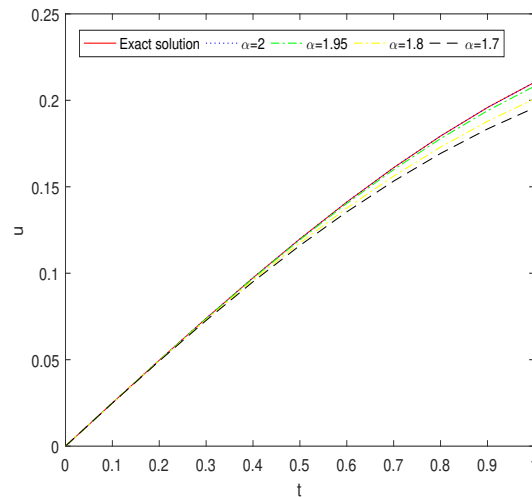


FIGURE 6. The behavior of the exact solution and the FRPS approximate solution $u_{(2,1)}$ for different values of α for Example 5.3 in the case when $x = 0.5$.

Remark 5.4. From the numerical results of $u(x, y, t)$ for different values of the fractional derivative α and for different values of x, y and t , we remark that when the fractional derivative $1 < \alpha \leq 2$ tends to 2, the approximate solutions obtained by FRPSM tends continuously to the exact solutions.

6 Conclusion

In this paper, the fractional residual power series method (FRPSM) is successfully applied to find approximate analytical solutions of general nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients. Throughout this article, it has been observed that there exists a very good agreement between the approximate solutions obtained by this method and exact solutions. When we set fractional derivative $\alpha = 2$ in the FRPSM approximate solutions, we get exact solutions. Therefore we can conclude that the FRPSM is quite effective, convenient and practically well suited for finding approximate analytical solutions of such types of fractional partial differential equations.

Acknowledgements

The authors would like to thank Professor Hvedri Inassaridze (Editor-in-Chief) as well as the anonymous referees who has made valuable and careful comments, which improved the paper considerably.

References

- [1] O. Abu Arqub, *Series solution of fuzzy differential equations under strongly generalized differentiability*, Journal of Advanced Research in Applied Mathematics, **5** (2013), No. 3, 31–52.
- [2] O. Abu Arqub, A. El-Ajou, Z. Al Zhour and Sh. Momani, *Multiple Solutions of Nonlinear Boundary Value Problems of Fractional Order: A New Analytic Iterative Technique*, Entropy, **16** (2014), 471–493.
- [3] O.P. Agrawal and D. Baleanu, *Hamiltonian formulation and a direct numerical scheme for Fractional Optimal Control Problems*, Journal of Vibration and Control, **13** (2007), 1269–1281.
- [4] M. Alquran, *Analytical solutions of fractional foam drainage equation by residual power series method*, Mathematical Sciences, **8** (2014), 153–160.
- [5] M. Alquran, *Analytical solutions of time-fractional two-component evolutionary system of order 2 by residual power series method*, The Journal of Applied Analysis and Computation, **5** (2015), 589–599.
- [6] A. Arikoglu and I. Ozkol, *Solution of fractional differential equations by using differential transform method*, Chaos, Solitons & Fractals, **34** (2007), 1473–1481.
- [7] A. El-Ajou, O. Abu Arqub and S. Momani, *Approximate analytical solution of the nonlinear fractional KdV-Burgers equation a new iterative algorithm*, Journal of Computational Physics, **293** (2015), 81–94.
- [8] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas and J. J. Trujillo, *Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos in Fractional Calculus Models and Numerical Methods*, World Scientific, (2012).

- [9] M. Dalir and M. Bashour. *Applications of fractional calculus*, Applied Mathematical Sciences, **45** (2010), 1021–1032.
- [10] K. Diethelm, *The Mean Value Theorems and a Nagumo-Type Uniqueness Theorem for Caputo's Fractional Calculus*, Fractional Calculus and Applied Analysis, **15** (2012), 304–313
- [11] A. A. Hemeda, *Homotopy Perturbation Method for Solving Partial Differential Equations of Fractional Order*, International Journal of Mathematical Analysis, **6** (2012), No. 49, 2431–2448.
- [12] R. Herrmann, *Fractional Calculus: An Introduction for Physicists*, World Scientific, New Jersey, 2014.
- [13] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, New Jersey, 2000.
- [14] I. S. Jesus and J. A. Tenreiro Machado, *Fractional control of heat diffusion systems*, Nonlinear Dynamic, **54** (2008), 263–282.
- [15] A. Khalouta and A. Kadem, *Comparison of New Iterative Method and Natural Homotopy Perturbation Method for Solving Nonlinear Time-Fractional Wave-Like Equations with Variable Coefficients*, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, **19**(1-SI) (2019), 160–169.
- [16] A. Khalouta and A. Kadem, *A New Technique for Finding Exact Solutions of Nonlinear Time-Fractional Wave-Like Equations with Variable Coefficients*, Accepted by: Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics, (2019).
- [17] A. Khalouta and A. Kadem, *Fractional natural decomposition method for solving a certain class of nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients*, Acta Universitatis Sapientiae Mathematica, **11** (2019), No. 1, 99–116.
- [18] A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and Application of Fractional Differential equations*, Elsevier, North-Holland, 2006.
- [19] V. Lakshmikantham, S. Leela and D. J. Vasundhara, *Theory of Fractional Dynamic Systems*, Cambridge Scientific Publishers, 2009.
- [20] R. L. Magin, *Fractional Calculus in Bioengineering*, Begell House, Connecticut, 2006.
- [21] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley, New York, 1993.
- [22] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, (1999).
- [23] I. Podlubny, *Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation*, Fractional Calculus and Applied Analysis, **5** (2002), 367–386.
- [24] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives. Theory and Applications*, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.
- [25] A. M. Shukur, *Adomian Decomposition Method for Certain Space-Time Fractional Partial Differential Equations*, IOSR Journal of Mathematics, **11** (2015), No. 1, 55-65.

- [26] V. E. Tarasov, *Fractional vector calculus and fractional Maxwell's equations*, Annals of Physics, **323** (2008), 2756–2778.
- [27] Y. Zhang, *Time-Fractional Generalized Equal Width Wave Equations: Formulation and Solution via Variational Methods*, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, **14** (2014), No. 4, 410–425.

A NEW TECHNIQUE FOR FINDING EXACT SOLUTIONS OF NONLINEAR TIME-FRACTIONAL WAVE-LIKE EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

ALI KHALOUTA AND ABDELOUAHAB KADEM

Abstract. In this paper, we give the exact solutions in terms of Mittag-Leffler functions for nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients by using a new technique, it is a combination of natural transform and variational iteration method called natural variational iteration method (NVIM). This technique enables us to overcome the difficulties arising in identifying the general Lagrange multiplier. The numerical results shows that this method is highly effective and is practically suitable for use in these equations. Three numerical examples are given to verify the accuracy and efficiency of the proposed technique.

1. Introduction

Fractional partial differential equations are widely used in interpretation and modeling of many of realism matters appear in applied mathematics and physics including fluid mechanics, electrical circuits, diffusion, damping laws, relaxation processes, mathematical biology, and so on. Therefore, to seek the solution of fractional partial differential equations is an important aspect of scientific research. Several mathematical methods including: Adomian decomposition method (ADM) [14], variational iteration method (VIM) [18] homotopy analysis method (HAM) [15] and homotopy perturbation method (HPM) [4], have been developed to obtain the exact and approximate analytic solutions.

Recently, a new option has appeared, includes the combination of Laplace transform, Sumudu transform or natural transform with the previously mentioned methods to facilitate and improve the resolution speed of fractional partial differential equations. Among wich are: Laplace homotopy analysis method [3], Laplace decomposition method [7], Laplace variational iteration method [17], homotopy perturbation Sumudu transform method [16], homotopy analysis Sumudu transform method [10], variational iteration Sumudu transform method [1], natural transform homotopy perturbation method [11], natural decomposition method [12], homotopy analysis natural transform method [13].

In this paper we will suggest a new technique to the search for exact solutions of nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients. This

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35R11, 26A33, Secondary 33E12, 35C05.

Key words and phrases. nonlinear time-fractional wave-like equations, Liouville-Caputo fractional derivative, Mittag-Leffler functions, natural transform, variational iteration method.

technique is a combination of two powerful methods, natural transform and variational iteration method, called natural variational iteration method (NVIM).

Consider the following nonlinear time-fractional wave-like equations

$$\begin{aligned}
 D_t^\alpha v &= \sum_{i,j=1}^n F_{1ij}(X, t, v) \frac{\partial^{k+m}}{\partial x_i^k \partial x_j^m} F_{2ij}(v_{x_i}, v_{x_j}) \\
 &+ \sum_{i=1}^n G_{1i}(X, t, v) \frac{\partial^p}{\partial x_i^p} G_{2i}(v_{x_i}) + H(X, t, v) + S(X, t),
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

with the initial conditions

$$v(X, 0) = a_0(X), \quad v_t(X, 0) = a_1(X),
 \tag{1.2}$$

where D_t^α is the Liouville-Caputo fractional derivative operator of order α , $1 < \alpha \leq 2$.

Here $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, F_{1ij}, G_{1i} $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ are nonlinear functions of X, t and v , F_{2ij}, G_{2i} $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, are nonlinear functions of derivatives of v with respect to x_i and x_j $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, respectively. Also H, S are nonlinear functions and k, m, p are integers.

These types of equations are of considerable significance in various fields of applied sciences, mathematical physics, nonlinear hydrodynamics, engineering physics, biophysics, human movement sciences, astrophysics and plasma physics. These equations describe the evolution of erratic motions of small particles that are immersed in fluids, fluctuations of the intensity of laser light, velocity distributions of fluid particles in turbulent flows.

The plan of this paper is structured as follows. In Section 2, we introduce some necessary definitions of the fractional calculus theory and natural transform, two theorems are introduced with their proofs related of the natural transform of fractional derivatives . In Section 3, we give a brief review of variational iteration method (VIM). In section 4, we introduce our results to solve the nonlinear time-fractional wave-like equations (1.1) with the initial conditions (1.2) by the natural variational iteration method (NVIM). In section 5, we present three numerical examples to show the efficiency of this technique and we present our obtained results graphically. All numerical results are obtained using Matlab (version R2016a). Finally, conclusions are drawn in the last section.

2. Basic definitions

In this section, we give some basic notions about fractional calculus, natural transform and natural transform of fractional derivatives which are used further in this paper.

2.1. Fractional calculus. We give some basic definitions and important properties of the fractional calculus theory as the Riemann-Liouville fractional integral and Liouville-Caputo fractional derivative (see[9]).

Definition 2.1. A real function $f(t), t > 0$, is considered to be in the space C_μ , $\mu \in \mathbb{R}$ if there exists a real number $p > \mu$, so that $f(t) = t^p h(t)$, where $h(t) \in C([0, \infty[)$, and it is said to be in the space C_μ^n if $f^{(n)} \in C_\mu$, $n \in \mathbb{N}$.

Definition 2.2. The Riemann-Liouville fractional integral operator of order $\alpha \geq 0$ of $f \in C_\mu, \mu \geq -1$ is defined as follows

$$I^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi, & t > 0, \alpha > 0, \\ f(t), & \alpha = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

where $\Gamma(\cdot)$ is the well-known gamma function.

Definition 2.3. The Liouville-Caputo fractional derivative of order $\alpha > 0$ of $f \in C_{-1}^n, n \in \mathbb{N}$ is defined as follows

$$D^\alpha f(t) = \begin{cases} I^{n-\alpha} f^{(n)}(t), & t > 0, n - 1 < \alpha < n, \\ f^{(n)}(t), & \alpha = n. \end{cases} \tag{2.2}$$

For the Riemann-Liouville fractional integral and Liouville-Caputo fractional derivative, we have the following relation

$$I^\alpha D^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!}, t > 0. \tag{2.3}$$

Definition 2.4. (Partial derivatives of time-fractional order) Let n to be the smallest integer that exceeds α . The Liouville-Caputo time-fractional derivative operator of order $\alpha \in \mathbb{R}^+$ is defined as follows

$$D_t^\alpha v(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - \xi)^{n-\alpha-1} v^{(n)}(x, \xi) d\xi, & n - 1 < \alpha < n, \\ v^{(n)}(x, t), & \alpha = n. \end{cases} \tag{2.4}$$

Definition 2.5. The Mittag-Leffler function is defined as follows

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \alpha \in \mathbb{C}, Re(\alpha) > 0. \tag{2.5}$$

A further generalization of (2.5) is given in the form

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0. \tag{2.6}$$

For $\alpha = 1, E_\alpha(z)$ reduces to e^z .

2.2. Natural transform. Recently, Fethi Bin Muhammed Belgacem et al. [2] introduced a new integral transform, called natural transform, which is applied to solve an ordinary and partial differential equations.

Definition 2.6. The natural transform is defined over the set of functions

$$A = \left\{ f(t) / \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < M e^{\frac{|t|}{\tau_j}}, if t \in (-1)^j \times [0, \infty) \right\},$$

by the following integral

$$\mathcal{N}^+[f(t)] = R^+(s, u) = \frac{1}{u} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{st}{u}} f(t) dt, s, u \in (0, \infty). \tag{2.7}$$

Some basic properties of the natural transform are given as follows [2].

Property 1: The natural transform is a linear operator. That is, if λ and μ are non-zero constants, then

$$\mathcal{N}^+ [\lambda f(t) \pm \mu g(t)] = \lambda \mathcal{N}^+ [f(t)] \pm \mu \mathcal{N}^+ [g(t)].$$

Property 2: If $f^{(n)}(t)$ is the n^{th} derivative of function $f(t)$ with respect to "t" then its natural transform is given by

$$\mathcal{N}^+ [f^{(n)}(t)] = R_n^+(s, u) = \frac{s^n}{u^n} R^+(s, u) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{n-(k+1)}}{u^{n-k}} f^{(k)}(0).$$

Property 3: (Convolution property) Suppose $F^+(s, u)$ and $G^+(s, u)$ are the natural transforms of $f(t)$ and $g(t)$, respectively, both defined in the set A . Then the natural transform of their convolution is given by

$$\mathcal{N}^+ [(f * g)(t)] = u F^+(s, u) G^+(s, u),$$

where the convolution of two functions is defined by

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\xi)g(t - \xi)d\xi = \int_0^t f(t - \xi)g(\xi)d\xi.$$

Property 4:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+ [1] &= \frac{1}{s}, \\ \mathcal{N}^+ [t] &= \frac{u}{s^2}, \\ \mathcal{N}^+ \left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right] &= \frac{u^{n-1}}{s^n}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Property 5: If $\alpha > -1$, then the natural transform of t^α is given by

$$\mathcal{N}^+ [t^\alpha] = \Gamma(\alpha + 1) \frac{u^\alpha}{s^{\alpha+1}}.$$

2.3. Natural transform of fractional derivatives.

Theorem 2.1. If $R^+(s, u)$ is the natural transform of the function $f(t)$, then the natural transform of the Riemann-Liouville fractional integral of $f(t)$ of order α , is given by

$$\mathcal{N}^+ [I^\alpha f(t)] = \frac{u^\alpha}{s^\alpha} R^+(s, u). \tag{2.8}$$

Proof. The Riemann-Liouville fractional integral for the function $f(t)$ as in (2.1), can be expressed as the convolution

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f(t). \tag{2.9}$$

Applying the natural transform in the Eq. (2.9) and using properties (3) and (5), we have

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+ [I^\alpha f(t)] &= \mathcal{N}^+ \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f(t) \right] = u \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{N}^+ [t^{\alpha-1}] \mathcal{N}^+ [f(t)] \\ &= u \frac{u^{\alpha-1}}{s^\alpha} R^+(s, u) = \frac{u^\alpha}{s^\alpha} R^+(s, u). \end{aligned}$$

The proof is complete. □

Theorem 2.2. Let $n \in \mathbb{N}^*$ and $\alpha > 0$ be such that $n - 1 < \alpha \leq n$ and $R^+(s, u)$ be the natural transform of the function $f(t)$, then the natural transform denoted by $R_\alpha^+(s, u)$ of the Liouville-Caputo fractional derivative of $f(t)$ of order α , is given by

$$\mathcal{N}^+ [D^\alpha f(t)] = R_\alpha^+(s, u) = \frac{s^\alpha}{u^\alpha} R^+(s, u) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{\alpha-(k+1)}}{u^{\alpha-k}} \left[D^k f(t) \right]_{t=0}. \tag{2.10}$$

Proof. Let

$$g(t) = f^{(n)}(t),$$

then by the Definition 2.3 of the Liouville-Caputo fractional derivative, we obtain

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - \xi)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - \xi)^{n-\alpha-1} g(\xi) d\xi \\ &= I^{n-\alpha} g(t). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Applying the natural transform on both sides of (2.11) and using Eq. (2.8), we get

$$\mathcal{N}^+ [D^\alpha f(t)] = \mathcal{N}^+ [I^{n-\alpha} g(t)] = \frac{u^{n-\alpha}}{s^{n-\alpha}} G^+(s, u). \tag{2.12}$$

Also, we have from the property (2)

$$\mathcal{N}^+ [g(t)] = \mathcal{N}^+ [f^{(n)}(t)], \tag{2.13}$$

$$G^+(s, u) = \frac{s^n}{u^n} R^+(s, u) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{n-(k+1)}}{u^{n-k}} \left[f^{(k)}(t) \right]_{t=0}.$$

Hence, (2.12) becomes

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+ [D^\alpha f(t)] &= \frac{u^{n-\alpha}}{s^{n-\alpha}} \left(\frac{s^n}{u^n} R^+(s, u) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{n-(k+1)}}{u^{n-k}} f^{(k)}(0) \right) \\ &= \frac{s^\alpha}{u^\alpha} R^+(s, u) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{\alpha-(k+1)}}{u^{\alpha-k}} \left[D^k f(t) \right]_{t=0} = R_\alpha^+(s, u), \\ -1 &< n - 1 < \alpha \leq n. \end{aligned}$$

The proof is complete. □

3. Variational iteration method

Idea of variational iteration method depends on the general Lagrange’s multiplier method [6]. This method has a main feature, which is the solution of a mathematical problem with linearization assumption used as initial approximation or trial function. This approximation converges rapidly to an accurate solution.

To illustrate the basic concepts of the VIM, we consider the following nonlinear differential equation

$$Lv(x, t) + Nv(x, t) = g(x, t), \tag{3.1}$$

where L is a linear operator and N is a nonlinear operator, and $g(x, t)$ is an inhomogeneous term.

According to the VIM [5], we can construct a correction functional as follows

$$v_{n+1}(x, t) = v_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\xi) [Lv(x, \xi) + N\tilde{v}(x, \xi) - g(x, \xi)] d\xi, \tag{3.2}$$

where $\lambda(\xi)$ is a general Lagrangian multiplier, which can be identified optimally via the variational theory and integration by parts. The subscript n denotes the n^{th} order approximation, \tilde{v}_n is considered as a restricted variation (i.e. $\delta\tilde{v}_n = 0$).

So, we first determine the Lagrange multiplier $\lambda(\xi)$ that will be identified optimally via integration by parts. The successive approximations $v_{n+1}, n \geq 0$ of the solution $v(x, t)$ will be readily obtained upon using the obtained Lagrange multiplier and by using any selective function v_0 . Consequently, the Solution

$$v(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x, t).$$

4. Solution of nonlinear time-fractional wave-like equations by the natural variational iteration method (NVIM)

Theorem 4.1. Consider the nonlinear time-fractional wave-like equations (1.1) with the initial conditions (1.2).

Then, by the NVIM the exact solution of Eqs. (1.1) and (1.2) is given as a limit of the successive approximations $\{v_n(X, t)\}_{n \geq 0}$, in other words,

$$v(X, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(X, t).$$

Proof. In order to achieve our goal, we consider the following nonlinear time-fractional wave-like equations (1.1) with the initial conditions (1.2).

First we define

$$\begin{aligned} Nv &= \sum_{i,j=1}^n F_{1ij}(X, t, v) \frac{\partial^{k+m}}{\partial x_i^k \partial x_j^m} F_{2ij}(v_{x_i}, v_{x_j}), \\ Mv &= \sum_{i=1}^n G_{1i}(X, t, v) \frac{\partial^p}{\partial x_i^p} G_{2i}(v_{x_i}), \\ Kv &= H(X, t, v). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Eq. (1.1) is written in the form

$$D_t^\alpha v(X, t) = Nv(X, t) + Mv(X, t) + Kv(X, t) + S(X, t). \tag{4.2}$$

Applying the natural transform on both sides of (4.2) subject to the initial conditions (1.2) and using the Theorem 2.2, we get

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+ [v(X, t)] &= \frac{1}{s} v(X, 0) + \frac{u}{s^2} v_t(X, 0) + \frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [S(X, t)] \\ &\quad + \frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Nv(X, t) + Mv(X, t) + Kv(X, t)]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

After that, let us take the inverse natural transform on both sides of (4.3) we have

$$v(X, t) = L(X, t) + \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Nv(X, t) + Mv(X, t) + Kv(X, t)] \right), \quad (4.4)$$

where $L(X, t)$ is a term arising from the source term and the prescribed initial conditions.

Take the first partial derivative with respect to "t" of Eq. (4.4) to obtain

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} v(X, t) - \frac{\partial}{\partial t} L(X, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Nv(X, t) + Mv(X, t) + Kv(X, t)] \right). \quad (4.5)$$

According to the variational iteration method, we can construct a correct functional as follows

$$v_{n+1}(X, t) = v_n(X, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial v_n}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Nv_n + Mv_n + Kv_n] \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi} \right] d\xi. \quad (4.6)$$

Or

$$v_{n+1}(X, t) = L(X, t) + \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ [Nv_n(X, t) + Mv_n(X, t) + Kv_n(X, t)] \right). \quad (4.7)$$

Therefore, the exact solution of Eqs. (1.1) and (1.2) is given as a limit of the successive approximations $\{v_n(X, t)\}_{n \geq 0}$, in other words,

$$v(X, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(X, t).$$

This completes the proof. □

5. Illustrative Examples and Numerical Results

In this section, we solve three numerical examples of nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients by using the NVIM.

Example 5.1. Consider the 2-dimensional nonlinear time-fractional wave-like equation with variable coefficients

$$D_t^\alpha v = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (v_{xx} v_{yy}) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (xy v_x v_y) - v, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (5.1)$$

with the initial conditions

$$v(x, y, 0) = e^{xy}, \quad v_t(x, y, 0) = e^{xy}, \quad (5.2)$$

where D_t^α is the Liouville-Caputo fractional derivative operator of order α , v is a function of $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$.

According to (4.7), we can construct the iteration formula as follows

$$v_{n+1}(x, y, t) = e^{xy} + te^{xy} + \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (v_{nxx} v_{nyy}) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (xy v_{nx} v_{ny}) - v_n \right] \right). \tag{5.3}$$

Using the iteration formula (5.3), we obtain

$$\begin{aligned} v_0 &= (1 + t) e^{xy}, \\ v_1 &= \left(1 + t - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} \right) e^{xy}, \\ v_2 &= \left(1 + t - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha + 2)} \right) e^{xy}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Then, the general term in successive approximation is given by

$$v_n(x, y, t) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{(-1)^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} + \frac{(-1)^k t^{k\alpha+1}}{\Gamma(k\alpha + 2)} \right) e^{xy}.$$

So, the exact solution of Eqs. (5.1) and (5.2) in a closed form is given by

$$\begin{aligned} v(x, y, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} + \frac{(-1)^k t^{k\alpha+1}}{\Gamma(k\alpha + 2)} \right) e^{xy} \\ &= (E_\alpha(-t^\alpha) + tE_{\alpha,2}(-t^\alpha)) e^{xy}. \end{aligned}$$

where $E_\alpha(-t^\alpha)$ and $E_{\alpha,2}(-t^\alpha)$ are the Mittag-Leffler functions, defined by Eqs. (2.5) and (2.6).

For $\alpha = 2$, then

$$v(x, y, t) = (E_2(-t^2) + tE_{2,2}(-t^2)) e^{xy} = (\cos t + \sin t) e^{xy}.$$

which is the same result as those obtained by the NIM and NHPM [8] for the same example. The surface and behavior of the solution for this example is graphically presented in Figures 1 and 2 for different fractional orders of α .

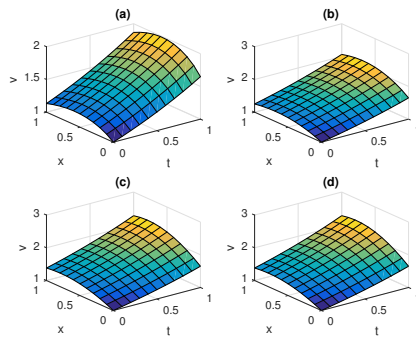


FIGURE 1. The surface graph of the 3th order approximate solution by NVIM and the exact solution of Example 5.1 when $y = 0.5$: (a) v when $\alpha = 1.5$, (b) v when $\alpha = 1.75$, (c) v when $\alpha = 2$, and (d) v is exact.

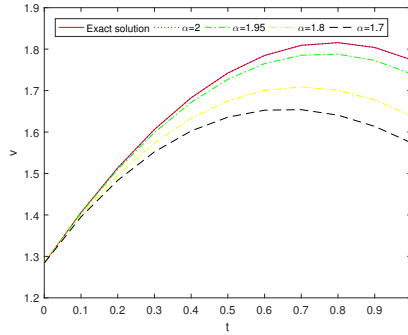


FIGURE 2. The behavior of the exact solution and the 3th order approximate solution by NVIM of v for different values of α for Example 5.1 when $x = y = 0.5$.

t	$\alpha = 1.7$	$\alpha = 1.8$	$\alpha = 1.95$	$\alpha = 2$	exact solution	$ v_{exact} - v_{NVIM} $
0.1	1.3953	1.3999	1.4046	1.4058	1.4058	3.2196×10^{-13}
0.3	1.5522	1.5735	1.5991	1.6061	1.6061	2.1569×10^{-9}
0.5	1.6359	1.6755	1.7272	1.7424	1.7424	1.3095×10^{-7}
0.7	1.6540	1.7088	1.7854	1.8093	1.8093	1.9680×10^{-6}
0.9	1.6137	1.6775	1.7728	1.8040	1.8040	1.4947×10^{-5}

TABLE 1. The numerical values of the 4th order approximate solution and the exact solution for Example 5.1 when $x = y = 0.5$.

Example 5.2. Consider the following nonlinear time-fractional wave-like equation with variable coefficients

$$D_t^\alpha v = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_x v_{xx} v_{xxx}) + v_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_{xx}^3) - 18v^5 + v, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (5.4)$$

with the initial conditions

$$v(x, 0) = e^x, \quad v_t(x, 0) = e^x, \quad (5.5)$$

where D_t^α is the Liouville-Caputo fractional derivative operator of order α , and v is a function of $(x, t) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^+$.

According to (4.7), we can construct the iteration formula as follows

$$v_{n+1}(x, t) = e^x + te^x + \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[v_n^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_{nx} v_{nxx} v_{nxxx}) + v_{nx}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_{nxx}^3) - 18v_n^5 + v_n \right] \right). \quad (5.6)$$

Using the iteration formula (5.6), we obtain

$$\begin{aligned}
 v_0 &= (1+t)e^x, \\
 v_1 &= \left(1+t + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}\right)e^x, \\
 v_2 &= \left(1+t + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)}\right)e^x, \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

and so on.

Then, the general term in successive approximation is given by

$$v_n(x, t) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} + \frac{t^{k\alpha+1}}{\Gamma(k\alpha+2)} \right) e^x.$$

So, the exact solution of Eqs. (5.4) and (5.5) in a closed form is given by

$$\begin{aligned}
 v(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} + \frac{t^{k\alpha+1}}{\Gamma(k\alpha+2)} \right) e^x \\
 &= (E_\alpha(t^\alpha) + tE_{\alpha,2}(t^\alpha)) e^x,
 \end{aligned}$$

where $E_\alpha(t^\alpha)$ and $E_{\alpha,2}(t^\alpha)$ are the Mittag-Leffler functions, defined by Eqs. (2.5) and (2.6).

For $\alpha = 2$, then

$$v(x, t) = (E_2(t^2) + tE_{2,2}(t^2)) e^x = e^{x+t}.$$

which is the same result as those obtained by the NIM and NHPM [8] for the same example. The surface and behavior of the solution for this example is graphically presented in Figures 3 and 4 for different fractional orders of α .

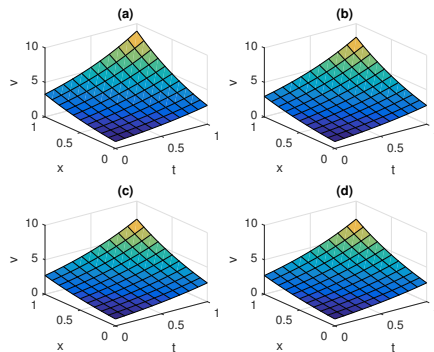


FIGURE 3. The surface graph of the 3th order approximate solution by NVIM and the exact solution of Example 5.2: (a) v when $\alpha = 1.5$, (b) v when $\alpha = 1.75$, (c) v when $\alpha = 2$, and (d) v is exact.

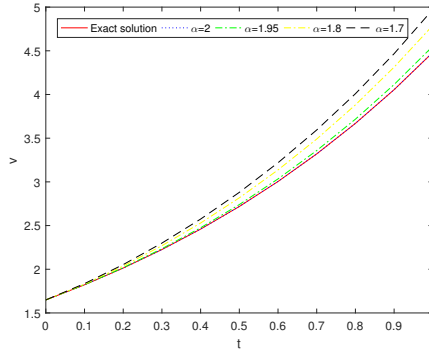


FIGURE 4. The behavior of the exact solution and the 3th order approximate solution by NVIM of v for different values of α for Example 5.2 when $x = 0.5$.

t	$\alpha = 1.7$	$\alpha = 1.8$	$\alpha = 1.95$	$\alpha = 2$	exact solution	$ v_{exact} - v_{NVIM} $
0.1	1.8357	1.8298	1.8236	1.8221	1.8221	4.1350×10^{-13}
0.3	2.2994	2.2697	2.2350	2.2255	2.2255	2.7750×10^{-9}
0.5	2.8800	2.8174	2.7402	2.7183	2.7183	1.6907×10^{-7}
0.7	3.5940	3.4901	3.3585	3.3201	3.3201	2.5543×10^{-6}
0.9	4.4670	4.3129	4.1140	4.0552	4.0552	1.9535×10^{-5}

TABLE 2. The numerical values of the 4th order approximate solution and the exact solution for Example 5.2 when $x = 0.5$.

Example 5.3. Consider the following one-dimensional nonlinear time-fractional wave-like equation with variable coefficients

$$D_t^\alpha v = x^2 \frac{\partial}{\partial x} (v_x v_{xx}) - x^2 (v_{xx})^2 - v, \quad 1 < \alpha \leq 2, \tag{5.7}$$

with the initial conditions

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = x^2, \tag{5.8}$$

where D_t^α is the Liouville-Caputo fractional derivative operator of order α , and v is a function of (x, t) $(x, t) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^+$.

According to (4.7), we can construct the iteration formula as follows

$$v_{n+1}(x, t) = tx^2 + \mathcal{N}^{-1} \left(\frac{u^\alpha}{s^\alpha} \mathcal{N}^+ \left[x^2 \frac{\partial}{\partial x} (v_{nx} v_{nxx}) - x^2 (v_{nxx})^2 - v_n \right] \right). \tag{5.9}$$

Using the iteration formula (5.9), we obtain

$$v_0 = tx^2, v_1 = \left(t - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \right) x^2, v_2 = \left(t - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)} \right) x^2, \dots$$

and so on.

Then, the general term in successive approximation is given by

$$v_n(x, t) = x^2 \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{k\alpha+1}}{\Gamma(k\alpha + 2)} \right).$$

So, the exact solution of Eqs. (5.7) and (5.8) in a closed form is given by

$$v(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x, t) = x^2 \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k\alpha+1}}{\Gamma(k\alpha + 2)} \right) = x^2 (tE_{\alpha,2}(-t^\alpha)),$$

where $E_{\alpha,2}(-t^\alpha)$ is the Mittag-Leffler function, defined by Eq. (2.6).

For $\alpha = 2$, then

$$v(x, t) = x^2 (tE_{2,2}(-t^2)) = x^2 \sin t.$$

which is the same result as those obtained by the NIM and NHPM [8] for the same example. The surface and behavior of the solution for this example is graphically presented in Figures 5 and 6 for different fractional orders of α .

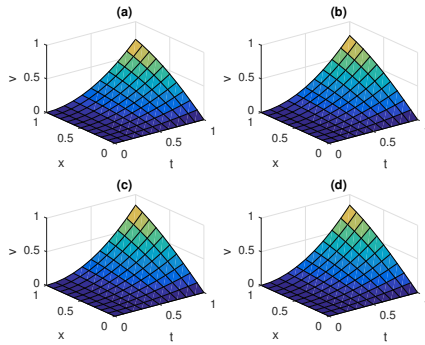


FIGURE 5. The surface graph of the 3th order approximate solution by NVIM and the exact solution of Example 5.3: (a) v when $\alpha = 1.5$, (b) v when $\alpha = 1.75$, (c) v when $\alpha = 2$, and (d) v is exact.

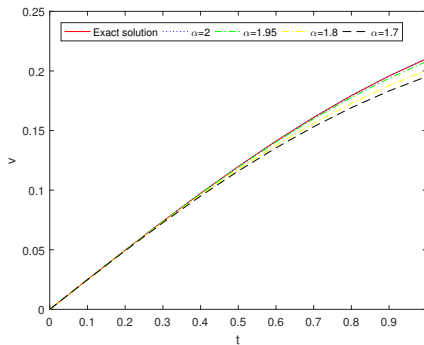


FIGURE 6. The behavior of the exact solution and the 3th order approximate solution by NVIM of v for different values of α for Example 5.3 when $x = 0.5$.

t	$\alpha = 1.7$	$\alpha = 1.8$	$\alpha = 1.95$	$\alpha = 2$	exact solution	$ v_{exact} - v_{NVIM} $
0.1	0.02488	0.02492	0.02495	0.02496	0.02496	6.8887×10^{-16}
0.3	0.07271	0.07319	0.07374	0.07388	0.07388	1.3549×10^{-11}
0.5	0.11604	0.11752	0.11934	0.11986	0.11986	1.3425×10^{-9}
0.7	0.15325	0.15615	0.15994	0.16105	0.16105	2.7677×10^{-8}
0.9	0.18327	0.18777	0.19394	0.19583	0.19583	2.6495×10^{-7}

TABLE 3. The numerical values of the 4th approximate solution and the exact solution for Example 5.3 when $x = 0.5$.

6. Conclusion

In this paper, a new technique called natural variational iteration method (NVIM) is presented for finding the exact solutions of the nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients. This technique is used to overcome the complexity of identifying the general Lagrange multiplier. When compared with the existing published techniques, it is easy to notice that the new technique has many advantages. It is straightforward, easy to understand, and fast, requiring much less computations to perform a limited number of steps of the simple procedure that can be applied to find the exact solution of a wide range of types of fractional partial differential equations. Furthermore, there is no need for using linearization or restrictive assumptions when employing this new method. The method was tested on three numerical examples on different situations. Numerical results obtained by the technique confirm the easily, accurately and efficiency of the technique, and therefore, can be widely applied in others fractional partial differential equations.

Acknowledgements. The authors are very grateful to both the Editor-in-Chief Professor Misir Mardanov, Managing Editor Professor Vugar Ismailov and the referees for carefully reading the paper and for their important remarks and suggestions in order to improve it.

References

- [1] A. S. Abedl-Rady, S. Z. Rida, A. A. M. Arafa and H. R. Abedl-Rahim, Variational Iteration Sumudu Transform Method for Solving Fractional Nonlinear Gas Dynamics Equation, *Int. J. Res. Stu. Sci. Eng. Tech.* **1** (2014), 82–90.
- [2] F. B. M. Belgacem and R. Silambarasan, Theory of natural transform, *Math. Eng. Sci. Aerosp.* **3** (2012), no.1, 105–135.
- [3] V. G. Gupta, P. Kumar, Approximate solutions of fractional linear and nonlinear differential equations using Laplace homotopy analysis method, *Int. J. Nonlinear Sci.* **19** (2015), no.2, 113–120.
- [4] M. Hamdi Cherif, K. Belghaba and D. Ziane, Homotopy perturbation method for solving the fractional Fisher's equation, *Int. J. Anal. Appl.* **10** (2016), no.1, 9–16.
- [5] J. H. He, Variational iteration method—some recent results and new interpretations, *J. Comput. Appl. Math.* **207** (2007), 3–17.
- [6] M. Inokuti, H. Sekine and T. Mura, General use of the Lagrange multiplier in nonlinear mathematical physics. In: Nemat-Nassed S, editor. Variational Method in the Mechanics of Solids, Pergamon Press, Oxford, 1978, 156–162.

- [7] H. Jafari, C. M. Khalique and M. Nazari, Application of the Laplace decomposition method for solving linear and nonlinear fractional diffusion–wave equations, *Appl. Math. Lett.* **24** (2011), 1799–1805.
- [8] A. Khalouta and A. Kadem, Comparison of New Iterative Method and Natural Homotopy Perturbation Method for Solving Nonlinear Time-Fractional Wave-Like Equations with Variable Coefficients, *Nonlinear Dyn. Syst. Theory.* **19**(1-SI) (2019), 160–169.
- [9] A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and Application of Fractional Differential equations*, Elsevier, North-Holland, 2006.
- [10] R. P. Kumar and H. M. Kumar, Homotopy analysis Sumudu transform method for time-fractional third order dispersive partial differential equation, *Adv. Comput. Math.* **43** (2017), 365–383.
- [11] S. Maitama, A Hybrid Natural Transform Homotopy Perturbation Method for Solving Fractional Partial Differential Equations, *Int. J. Differ. Equ.* (2016), 1–7.
- [12] M. S. Rawashdeh and S. Maitama, Solving Coupled System of Nonlinear PDEs Using the Naturel Decomposition Method, *Int. J. of Pure. Appl. Math.* **92** (2014), no.5, 757–776.
- [13] S. Z. Rida, A. A. A. Arafa, A. S. Abedl-Rady and H. R. Abdl-Rahim, Homotopy Analysis Natural Transform Method For Solving Fractional Physique Models, *Int. J. Pure Appl. Math.* **117** (2017), no.1, 19–32.
- [14] L. Song and W. Wang, A new improved Adomian decomposition method and its application to fractional differential equations, *Appl. Math. Mod.* **37** (2013), 1590–1598.
- [15] K. Vishal, S. Kumar and S. Das, Application of homotopy analysis method for fractional Swift Hohenberg equation Revisited, *Appl. Math. Model.* **36** (2012), 3630–3637.
- [16] E. A. Yousif and S. H. M. Hamed, Solution of Nonlinear Fractional Differential Equations Using the Homotopy Perturbation Sumudu Transform Method, *Appl. Math. Sci.* **8** (2014), no.44, 2195–2210.
- [17] A. M. Yang, J. Li, H . M. Srivastava, G-N, Xie and X-J Yang, Local Fractional Laplace Variational Iteration Method for Solving Linear Partial Differential Equations with Local Fractional Derivative, *Discrete Dyn. Nat. Soc.* (2014), 1–8.
- [18] Y. Zhang, Time-Fractional Generalized Equal Width Wave Equations: Formulation and Solution via Variational Methods, *Nonlinear Dyn. Syst. Theory.* **14** (2014), no.12, 410–425.

Ali Khalouta

Laboratory of Fundamental and Numerical Mathematics, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Ferhat Abbas Sétif University 1, 19000 Sétif, Algeria.

E-mail address: nadjibkh@yahoo.fr

Abdelouahab Kadem

Laboratory of Fundamental and Numerical Mathematics, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Ferhat Abbas Sétif University 1, 19000 Sétif, Algeria.

E-mail address: abdelouahabk@yahoo.fr

Received: February 7, 2019; Revised: April 21, 2019; Accepted: April 22, 2019

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

DANS ce travail, de nouvelles méthodes analytiques et numériques ont été proposées pour la résolution des équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaire temporelle. Pour démontrer l'applicabilité et l'efficacité des méthodes proposées nous avons exhibé de nombreux exemples et les résultats montrent que les solutions approximatives obtenues en utilisant ces méthodes sont en excellent accord avec les solutions exactes. Celles-ci donnent la solution sous forme de série qui converge rapidement vers la solution exacte si elle existe.

On peut conclure, que les méthodes proposées sont très puissantes et efficaces pour trouver des solutions approximatives et analytiques pour des équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaire.

Ce domaine de recherche en l'occurrence les équations aux dérivées partielles fractionnaires est très intéressant. Ainsi les perspectives futures sont :

- 1- Recherche des méthodes numériques et analytique pour résoudre les équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaires temporelle et spatiale, moins coûteuses et plus précises que celles proposées dans cette thèse.
- 2- L'application l'une de ces méthodes proposées pour résoudre l'équation aux dérivées partielles d'ordre fractionnaires, mais avec d'autre opérateur de dérivée fractionnaire (au sens de Riemann-Liouville, de Grunwald-Letnikov, et au sens d'Hadamard).

BIBLIOGRAPHIE

- G. Adomian. A review of the decomposition method in applied mathematics. *J. Math. Anal. Appl.*, 135(2) :501–544, 1988.
- G. Adomian. *Solving Frontier Problem of Physics : The Decomposition Method*. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- O. P. Agrawal. Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 272 :368–379, 2002.
- R. Almeida, S. Pooseh, et D. F.M. Torres. Fractional variational problems depending on indefinite integrals. *Nonlinear Anal.*, 75 :1009–1025, 2012.
- O. Abu Arqub. Series solution of fuzzy differential equations under strongly generalized differentiability. *J. Adv. Res. Appl. Math.*, 5(1) :31–52, 2013.
- Z. Ayatia et J. Biazar. On the convergence of homotopy perturbation method. *J. Egypt. Math. Soc.*, 23 :424–428, 2015.
- R. L. Bagley et P. J. Torvik. A theoretical basis for the application of fractional calculus in viscoelasticity. *Journal of Rheology*, 27 :201–210, 1983.
- R. L. Bagley et P. J. Torvik. On the fractional calculus model of viscoelasticity behavior. *Journal of Rheology*, 30 :133–155, 1986.
- F. B. Belgacem et R. Silambarasan. Theory of natural transform. *Math. Eng. Sci. Aerosp.*, 3(1) :99–124, 2012.
- S. Bhalekar et V. Daftardar-Gejji. Convergence of the new iterative method. *Int. J. Differ. Equ.*, Article ID 989065 :1–10, 2011.
- J. Biazara et H. Ghazvini. Convergence of the homotopy perturbation method for partial differential equations. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 10(5) :2633–2640, 2009.
- M. Caputo. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. *Part II, Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 13 :529–539, 1967.
- M. Caputo et F. Mainardi. Linear models of dissipation in anelastic solids. *Riv. Nuovo Cimento (Ser. II)*, 1 :161–198, 1971.
- Y. Cherruault. Convergence of Adomian’s method. *Math. Comput. Model.*, 14(3) :83–86, 1990.
- Y. Cherruault, G. Saccomandi, et B. Some. New results for convergence of adomian’s method applied to integral equations. *Math. Comput. Model.*, 16(2) :85–93, 1992.

- V. Daftardar-Gejji et H. Jafari. An iterative method for solving nonlinear functional equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 316 :753–763, 2006.
- S. Das. *Functional fractional calculus for system identification and controls*. Springer, New York, 2008.
- F. Dubois, A.C. Galucio, et N. Point. *Introduction à la dérivation fractionnaire, théorie et applications*. Techniques de l'Ingénieur AF510, 2010.
- A. El-Ajou, O Abu Arqub, et S. Momani. Approximate analytical solution of the nonlinear fractional KdV–Burgers equation : A new iterative algorithm. *J. Comput. Phys.*, 293 :81–95, 2015.
- A. El-Ajou, O. Abu Arqub, Z. Al Zhour, et S. Momani. New results on fractional power series : theories and applications. *Entropy*, 15 :5305–5323, 2013.
- A. R. El-Nabulsi. The fractional white dwarf hydrodynamical nonlinear differential equation and emergence of quark stars. *Appl. Math. Comput.*, 218(6) :2837–2849, 2011.
- A. Ghorbani. Beyond Adomian polynomials : He polynomials. *Chaos Solitons Fractals*, 39 :1486–1492, 2009.
- J. H. He. Homotopy perturbation technique. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 178(3) :257–262, 1999a.
- J. H. He. Variational iteration method a kind of non linear analytical technique : some exemples. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 34 :699–708, 1999b.
- J. H. He. Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems. *Appl. Math. Comput.*, 114(50) :115–123, 2000.
- J. H. He. Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method. *Appl. Math. Comput.*, 156(2) :527–539, 2004.
- J. H. He. Addendum : new interpretation of homotopy perturbation method. *Internat. J. Modern Phys. B.*, 20(18) :2561–2568, 2006.
- J. H. He. Variational iteration method some recent results and new interpretations. *J. Comput. Intern. J. Math.*, 207(1) :3–17, 2007.
- R. Hilfer. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific Publishing, River Edge, NJ, USA, 2000.
- T. Hélie et D. Matignon. Diffusive representations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with visco-thermal losses. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 16(4) :503–536, 2006.
- H. Jafari, A. Kadem, et D. Baleanu. Variational Iteration Method for a Fractional-Order Brusselator System. *Abstr. Appl. Anal.*, Article ID 496323 :1–6, 2014.
- H. Jafari, A. Kadem, D. Baleanu, et T. Yilmaz. Solutions of the fractional davey-stewartson equations with variational iteration method. *Rom. Rep. Phys.*, 64(2) :337–346, 2012.

- L. Jin. Homotopy perturbation method for solving partial differential equations with variable coefficients. *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, 3(28) : 1395–1407, 2008.
- A. Kadem et D. Baleanu. Analytical method based on walsh function combined with orthogonal polynomial for fractional transport equation. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 15(3) :491–501, 2010.
- A. Kadem et D. Baleanu. Homotopy perturbation method for the coupled fractional lotka-volterra equations. *Rom. J. Phys.*, 56(3) :332–338, 2011a.
- A. Kadem et D. Baleanu. On fractional coupled whitham-broer-kaup equations. *Rom. J. Phys.*, 56(5) :629–635, 2011b.
- J. T. Katsikadelis. Nonlinear Dynamic Analysis of Viscoelastic Membranes Described with Fractional Differential Models. *J. Theoretical Appl. Mech.*, 50(3) :743–753, 2012.
- Y. Keskin et G. Oturanc. Reduced differential transform method for partial differential equations. *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 10(6) :741–749, 2009.
- Y. Keskin et G. Oturanc. The reduced differential transform method : a new approach to factional partial differential equations. *Nonlinear Sci. Lett. A*, 1(6) :207–217, 2010.
- A. Khalouta et A. Kadem. Comparison of New Iterative Method and Natural Homotopy Perturbation Method for Solving Nonlinear Time-Fractional Wave-Like Equations with Variable Coefficients. *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, 19(1-SI) :160–169, 2019a.
- A. Khalouta et A. Kadem. An Efficient Method for Solving Nonlinear Time-Fractional Wave-Like Equations with Variable Coefficients. *Tbilisi Math. J.*, 12(4) :131–147, 2019b.
- A. Khalouta et A. Kadem. Fractional natural decomposition method for solving a certain class of nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients. *Acta Univ. Sapientiae Math.*, 11(1) :99–116, 2019c.
- A. Khalouta et A. Kadem. New analytical method for solving nonlinear time-fractional reaction-diffusion-convection problems. *Apparaître dans : Rev. Colombiana Mat.*, 2019d.
- A. Khalouta et A. Kadem. A New Iterative Natural Transform Method for Solving Nonlinear Caputo Time-Fractional Partial Differential Equations. *Apparaître dans : Jordan J. Math. Stat.*, 2019e.
- A. Khalouta et A. Kadem. A new numerical technique for solving caputo time-fractional biological population equation. *AIMS Mathematics*, 4(5) : 1307–1319, 2019f.
- A. Khalouta et A. Kadem. A New Representation of Exact Solutions for Nonlinear Time-Fractional Wave-Like Equations with Variable Coefficients. *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, 19(2) :319–330, 2019g.

- A. Khalouta et A. Kadem. A New Technique for Finding Exact Solutions of Nonlinear Time-Fractional Wave-Like Equations with Variable Coefficients. *Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb.*, 45(2) :167–180, 2019h.
- A. Khalouta et A. Kadem. A new computational for approximate analytical solutions of nonlinear time-fractional wave-like equations with variable coefficients. *AIMS Mathematics*, 5(1) :1–14, 2020a.
- A. Khalouta et A. Kadem. Solution of the fractional Bratu-type equation via fractinal residual power series method. *Apparaître dans : Tatra Mt. Math. Publ.*, 2020b.
- Z. H. Khan et W.A. Khan. N-transform properties and applications. *NUST J. Eng. Sci.*, 1(1) :127–133, 2008.
- A. Kilbas, H. M. Srivastava, et J. J. Trujillo. *Theory and Application of Fractional Differential equations*. Elsevier, North-Holland, 2006.
- R. L. Magin. *Fractional calculus in bioengineering*. Begell House, Redding, CT, USA, 2006.
- F. Mainardi. *Fractional calculus : Some basic problems in continuum and statistical mechanics*. pages 291–348. In : A. Carpinteri and F. Mainardi, Eds., *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Springer, New York, 1997.
- G. M. Mittag-Leffler. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogène. *Acta Math.*, 29 :101–182, 1905.
- Z. Odibat et S. Momani. The variational iteration method : An efficient scheme for handling fractional partial differential equations in fluid mechanics. *Comput. Math. Appl.*, pages 2199–2208, 2009.
- Z. M. Odibat. A study on the convergence of variational iteration method. *Math. Comput. Model.*, 51 :1181–1192, 2010.
- K. B. Oldham. Fractional differential equations in electrochemistry. *Adv. Eng. Softw.*, 41 :9–12, 2010.
- K. B. Oldham et J. Spanier. *The fractional calculus*. Academic Press, New York, 1974.
- A. Oustaloup. *La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications*. Hermès, Paris, 1995.
- A. Oustaloup, X. Moreau, et M. Nouillant. The crone suspension. *Control Eng. Practice*, 8(4) :1101–1108, 1996.
- T. Pfitzenreiter. A physical basis for fractional derivatives in constitutive equations. *Z. Angew. Math. Mech.*, 84(4) :284–287, 2004.
- I. Podlubny. *Fractional-order system and fractional-order controllers*. UEF-03-94. Slovak Acad. Sci., Kosice, 1994.

-
- I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, New York, 1999.
- M. S. Rawashdeh. A new approach to solve the fractional Harry Dym equations using the FRDTM. *Int. J. Pure Appl. Math.*, 95(4) :553–566, 2014.
- F. Riewe. Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics. *Phys. Rev. E.*, 53 :1890–1899, 1996.
- F. Riewe. Mechanics with fractional derivatives. *Phys. Rev. E.*, 55 :3581–3592, 1997.
- J. Sabatier, O. P. Agrawal, et J. A. Tenreiro Machado. *Advances in fractional calculus : Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*. Springer, 2007.
- J. Singh, D. Kumar, et A. Kiliçman. Numerical Solutions of Nonlinear Fractional Partial Differential Equations Arising in Spatial Diffusion of Biological Populations. *Abstr. Appl. Anal.*, Article ID 535793 :1–12, 2014.
- M. Tatari et M. Dehghan. On the convergence of He’s variational iteration method. *J. Comput. Appl. Math.*, 207 :121–128, 2007.
- J. R. Wang et Y. Zhou. A class of fractional evolution equations and optimal controls. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 12 :262–272, 2011.
- B. Zheng. (G'/G) -expansion method for solving fractional partial differential equations in the theory of mathematical physics. *Commun. Theor. Phys.*, 58 :623–630, 2012.

ملخص

تظهر المعادلات ذات المشتقات الجزئية الغير خطية ذات رتبة كسرية بشكل طبيعي في العديد من المجالات العلمية مثل الفيزياء، الزوجة، الطب، الكيمياء الإلكترونية، نظرية التحكم، إلخ. في كل هذه المجالات العلمية، من المهم إيجاد حلول تحليلية أو تقريبية على الأقل لهذه المشكلات. الهدف من هذه الأطروحة هو إقترح طرق تحليلية وعددية جديدة لحل المعادلات ذات المشتقات الجزئية الغير خطية ذات رتبة كسرية زمنية، حيث المشتق الكسري بمعنى كابيتو. وقد تم إثبات دقة وكفاءة هذه الطرق من خلال تطبيقها على العديد من الأمثلة الملموسة. الكلمات المفتاحية : المعادلات ذات المشتقات الجزئية الغير خطية ذات رتبة كسرية، مشتق كسري بمعنى كابيتو، طرق تحليلية وعددية، حلول تقريبية.

Résumé

LES Les équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaire apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, la viscoélasticité, la médecine, l'électrochimie, la théorie du contrôle, etc. Dans tous ces domaines de recherche, il est important de trouver des solutions analytiques ou du moins approximatives à ces problèmes. Le but de cette thèse est de proposer de nouvelles méthodes analytiques et numériques pour la résolution d'équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaire temporelle, où la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. La précision et l'efficacité de ces méthodes ont été démontrées en les appliquant à de nombreux exemples concrets.

Mots-Clés : équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaire, dérivée fractionnaire au sens de Caputo, méthodes analytiques et numériques, solutions approximatives.

Abstract

NON-linear partial differential equations of a fractional order occur naturally in different scientific fields such as physics, viscoelasticity, medicine, electrochemistry, control theory, etc. In all these areas, it is important or even necessary to find analytical or at least approximate solutions to these problems. The purpose of this thesis is to propose new analytical and numerical methods for solving non-linear partial differential equations of a temporal fractional order, where the fractional derivative is in the Caputo sense. The accuracy and effectiveness of these methods have been proven by applying them to many concrete examples.

Keywords : fractional order non-linear partial differential equations, fractional derivative in the sense of Caputo, analytical and numerical methods, approximate solutions.