République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ferhat Abbas SETIF 1
Faculté des Sciences exactes
Département de *M*athématiques

N° d'ordre ....

THÈSE

En vue de l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option

Mathématiques Appliquées

Etude mathématique de quelques problèmes en mécanique des milieux continus

---

Présentée par

Leila Ait kaki

devant le jury composé de

Président :	**B. Merouani**	*Pr*	*Université de Setif 1*
Directeur de Thèse :	**M. Denche**	*Pr*	*Université de Constantine 1*
Examinateurs :	**N. Hemici**	*Pr*	*Université de Setif 1*
	A. Ayadi	*Pr*	*Université de Oum El Bouagui*
	N. Abada	*MCA*	*ENS de Constantine*

Remerciement

Je remercie Monsieur mohamed Denche d'avoir accepté de rapporter cette thèse, pour sa patience et sa confiance ont été pour moi un appui considérable. Qu'il trouve dans ce travail un hommage à sa personne.

Je remercie monsieur Mircea Sofonea qui m'a initié à la recherche en mécanique de contact et qui m'a aussi prodigué de nombreux documents pour débuter mon travail de recherche. Qu'il en soit remercié.

Je remercie monsieur Merouani Boubakeur d'avoir accepté de présider le jury aussi je remercie messieurs Ayadi Abdelhamid, Hemici Naceredine et Madame Abada Nadjet d'avoir gentiment acceptés d'être membres du jury.

Je n'oubli pas de remercier messieurs le directeur de l'école normale supérieure de Constantine Boushaba Mahmoud et le chef de département des mathématiques Benyahia Azzedine pour m'avoir sincèrement encouragé à finaliser cette thèse.

Table des matières

Notations

Soit Ω un domaine de $\mathbf{R}^d$ $(d=1,\cdots 3)$, on note par

$\bar{\Omega}$	l'adhérence de Ω.
Γ	la frontiére de Ω
$\Gamma_i(i=1,2,3)$	une partie mesurable de Γ.
$mes\Gamma_i$	la mesure de Lebesgue de Γ_i.
$\boldsymbol{u}=(u_i)$	un champ vectoriel de Ω.
ν	la normale unitaire extérieure de Γ.
v_ν, $\boldsymbol{v}_\tau$	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel $\boldsymbol{v}$.
$\sigma=(\sigma_{ij})$	le champ tensoriel de déformation.
σ_ν	la composante de la force du champ appliquée sur une section de normale n.
$\sigma\nu=(\sigma_\nu,\sigma_\tau)$	
σ_τ	la composante tangentielle du vecteur $\sigma\mathbf{n}$.
$u_{i,j}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$	la dérivée partielle de la composante u_i par rapport à composante i$^{\text{ème}}$ de la varia
$\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_{ij})$	le champ tensoriel de déformations de Cauchy.
$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})$	$\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$
$dom(\varphi)$	Domaine effectif d'une fonction φ.
$epi(\varphi)$	épigraphe de φ.
φ s.c.i	φ est semi-continue inférieurement.
$\partial\varphi$	Sous différentiel de φ.

Si H est un espace de Hilbert réel on note

H^d	l'espace $\{\boldsymbol{u}=(u_i)\mid u_i\in H\}$
$(\cdot,\cdot)_H$	le produit scalaire dans H.
$\lvert\cdot\rvert_H$	la norme dans H.
$\langle\cdot,\cdot\rangle_{H,H'}$	le produit dualité entre H et son dual H".
ψ_K	la fonction indicatrice d'un ensemble $K\subset H$
χ_K	la fonction caractéristique de $K\subset H$
$u_n\to u$	la convergence de la suite (u_n) vers u pour la topologie forte de H.
$u_n\rightharpoonup u$	la convergence de la suite (u_n) vers u pour la topologie faible de H.
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$.
H_1	l'espace $\{\boldsymbol{u}\mid\varepsilon(\boldsymbol{u})\in\mathcal{H}\}$.
$\mathcal{H}$	l'espace $\left\{\boldsymbol{u}\in L^2(\Omega)^{d\times d}\mid u_{ij}=u_{ji}\in L^2(\Omega)\right\}$.
$\mathcal{H}_1$	$\{\boldsymbol{\sigma}\in\mathcal{H}\mid Div\boldsymbol{\sigma}\in H\}$.
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ.de dual $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
H_Γ	$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
H'_Γ	le dual de H_Γ.
$\gamma: H_\Gamma\to H'_\Gamma$	l'application trace des fonctions vectrorielles.

Soit un intervalle de temps $[0,T]$, on note pour $\forall k\in\mathbb{N}$, $1\leq p\leq+\infty$,

$C(0;T,H)$	l'espace des fonctions vectorielles continues de $[0,T]$ dans H.
$C^1(0;T,H)$	l'espace des fonctions vectorielles continuement différentiables de $[0,T]$ dans H.
$L^p(0;T,H)$	l'espace des fonctions mesurables de $[0,T]$ dans H.
$\lvert\cdot\rvert_{L^p(0;T,H)}$	la norme dans $L^p(0;T,H$ avec $\lvert u\rvert_{L^p(0;T,H)} = \left(\int_0^T \lvert u(t)\rvert_H^p \ dt\right)^{\frac{1}{p}}$.
$W^{1,p}(0;T,H)$	l'espace de Sobolev des fonctions de $[0,T]$ dans H.
$\lvert\cdot\rvert_{W^{1,p}(0;T,H)}$	la norme dans $W^{1,p}(0;T,H)$ avec $\lvert u\rvert_{W^{1,p}(0;T,H)} = \lvert u\rvert_{L^p(0;T,H)} + \lvert\dot{u}\rvert_{L^p(0;T,H)}$.

Introduction générale

1 Introduction

L'étude du problème de contact de solides déformables est de connaitre la réaction des structures lorsqu'elles subissent des forces, puis d'étudier leurs comportement ; leurs déformation, leurs mouvement. Compte tenu de la complexité des phénomènes de contact, leur modélisation mathématique ménent à des problèmes aux limites non linéaires souvent mal posés. Pour une étude mathématique complète de ces problèmes(de la modélisation à l'analyse numérique et variationnelle) une théorie mathématique de la mécanique du contact (T.M.M.C) a été assise. Dans ce travail nous allons considérer des modèles mathématiques qui tiennent compte à la fois des différents comportements des matériaux tel que l'élasticité, la viscoélasticité et un phénomène sous-jacent au contact qui est la piézoélectricité du matériau.

La piézoélectricité est la propriété que possèdent certains corps de se polariser électriquement sous l'action d'une contrainte mécanique appelée effet direct de piézoélectricité. L'effet inverse de piézoélectricité est la capacité qu'a un corps à se déformer lorsqu'il est soumis à un champ électrique .

De manière plus générale, l'effet direct permet de réaliser des capteurs (capteur de pression etc). Tandis que l'effet inverse est utilisé dans la fabrication des actionneurs comme les injecteurs à commande piézoélectrique en automobile, les amortisseurs piézoélectriques qui jouent un rôle fondamental dans l'attenuation des vibrations indésirables et les ultrasons transducteurs qui s'appliquent dans le domaine d'imagerie médicale en échographie par exemple. Il existe plusieurs types de matériaux piézoéléctriques, cela va des cristaux tel le quartz, le sel de seignette, la tourmaline, aux céramiques qui sont des polycristaux tel que les titanates, zirconates de plomb, niobates, baryum, les polymères semi-cristallins tel que les poly-venyl-difluoridène (PVDF), les fibres de carbone. Ils forment une des catégories des matériaux dits intélligents, Ils sont adaptifs, évolutifs et réunissent à la fois matière et fonctionnalité.

L'étude mathématique des phénomènes piézoélectriques est dûe à Voigt 1894 dont les travaux sont réunis dans un ouvrage qui sert de référence [68]. D'autre travaux ont suivis [29, 48, 49, 53, 64–66].

Le contact des corps solides, avec ou sans frottement, est une contrainte mécanique souvent rencontrée en modélisation. Citons par exemple le frottement d'une tôle dans un procédé d'emboutissage, le contact d'un pneu sur la route, le déploiement d'un airbag. Signorini en 1933 fût le premier à donner une formulation du problème de contact unilatéral sans frottement. C'est Fichera [22] qui réalise une étude de ce problème en utilisant des techniques des inéquations variationnelles elliptiques. Dans le livre de Duvaut et Lions [19], paru en 1972, on trouve de nouveaux résultats d'existence et d'unicité. Ensuite, Nécas, Jaruek et Haslinger [50] vont à partir de 1980, résoudre un problème statique de contact unilatéral avec frottement. Les résulats d'existence les plus généraux sont donnés ensuite par Kato [34] et par Eck et Jaruek [31]. Une très grande investigation dans l'étude variationnelle et numérique des problèmes de contact avec ou sans frottement d'un matériau élastique, plastique, viscoélastique, viscoplastique et d'autre, a été menée dans plusieurs travaux. L'étude du problème de contact d'un matériau piézoélectrique a fait l'objet de quelques travaux citons par exemple [6, 9, 21, 39, 40, 45, 47, 52, 60, 61].

L'endommagement est un phénomène trés important en ingénierie, son effet apparait directement sur la structure des machines. On porte un intéret considérable pour les modèles d'endommagement des matériau. Les modèles mathématiques récents sur l'endommagement des matériels, ont été inspirés du modèle de Kachanov dans les années 1960 (voir [33] pour les détails), par la suite d'autre modèles mathématiques d'endommagement introduisant une variable interne qui la fonction d'endommagement, elle mesure l'endommagement de la matière, on peut les trouver dans les monographies [25, 26], ainsi que dans les études récentes [23, 24, 56]. Le processus d'endommagement introduit une fonction $\beta \in [0,1]$. L'évolution de la fonction d'endommagement est donnée par une inclusion de type parabolique. Il n'y a pas d'endommagement lorsque $\beta = 1$ et il est complètement endommagé lorsque $\beta = 0$. lorsque $0 < \beta < 1$, il y a un endommagement partiel et le système a une capacité de charge réduite.

Dans cette thèse nous examinons quelques problèmes de contact avec et sans frottement pour lesquels les conditions aux limites font parfois intervenir l'aspect mécanique et électrique du contact. Plus précisement nous proposons d'obtenir dans le cadre d'une analyse variationnelle l'existence, l'unicité, la régularité des solutions et le comportement de celles-ci lorsque le matériau change de propriété physique et lorque la condition de frottement est perturbée.

Au chapitre un nous présentons les résultats génériques et généraux, utiles à comprendre le modèle mathématique de contact d'un matériau électro-viscoélastique avec une fondation déformable isolatrice ou non et un cadre variationnel nécessaire à l'étude des problèmes aux limites.

Le chapitre deux est consacré à l'étude d'une classe de problèmes d'évolution quasi statiques modélisant le contact frottant d'un coprs électro-viscoélastique avec une fondation conductrice. Cette classe problèmes traduisant un phénomène non linéaire de mécanique de contact, ils sont formulés à l'aide d'inéquations variationnelles d'évolution en terme de déplacement et une équation variationnelle en terme de potentiel électrique. Les conditions au bord sont mélées, elles font intervenir à la fois le caractére mécanique et électrique du contact. Nous montrons l'existence et l'unicité des solutions, puis un exemple est donné à la fin du chapitre. ce travail est une continuation des travaux cités dans [6, 39], notre contribution consiste à faire une généralisation des cas et l'amélioration de la condition de régularité de la solution en terme de potentiel électrique.

Le chapitre trois est dédié à l'étude du cas dynamique de la classe de problèmes de contact frottant cité en amont. Nous supposons que la fondation est isolatrice, nous montrons l'existence et l'unicié des solutions. Nous donnons ensuite un exemple de contact.

Au chapitre quatre nous étudions un problème de contact dynamique sans frottement, pour lequel les conditions au bord électriques sont physiquement réelles. Nous procèdons par une méthode régularisation des conditions au bord qui nous permettera de montrer l'existence et l'unicité de solutions du problème régularisé, ensuite moyennant des estimations à priori nous faisons un passage à la limite et nous démontrons l'existence de solutions du problème physique. Ces résultats sont obtenus en utilisant des techniques de calcul sur les équations du type parabolique, des arguments de point fixe de Banach, ainsi que des résultats de compacité.

Au chapitre cinq, nous nous interssons au même problème donné au chapitre quatre tout en tenant compte du processus d'endommagement. Une formulation variationnelle du problème est d'abord établie. Ensuite nous étudions l'existence et l'unicité de la solution approchée du problème. Moyennant des estimations a priori sur la solutions approchée, nous effectuons un passage à la limite pour retrouver la solution faible du problème de contact parfait.

Chapitre I

Modèle mathématique et Préleminaires

Cette partie est consacrée à présenter d'une part, un modèle mathématique du problème de contact d'un matériau piézoélectrique avec une fondation et d'autre part donner un cadre fonctionnel qui permettra de faire une étude mathématique.

1 Cadre physique

Dans le but de donner un modèle géneral de contact d'un matériau piézoélectrique, nous allons d'abord citer quelques principes de la mécanique des milieux continus en introduisant l'équation de Cauchy, les lois de comportement, les conditions de contact et les lois de frottement. Ensuite, nous présentons les différents systèmes d'équations générés de différentes conditions au bord (conditions de contact avec et sans frottement).

On considère à l'instant $t \in [0, T]$ avec $T > 0$, un coprs solide piézoélectrique occupant un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2, 3)$, de frontière regulière $\partial\Omega = \Gamma$, subdivisée en trois parties disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 qui représente la surface de contact dite la fondation, (voir figure I.1). On suppose que le corps est fixé sur Γ_1, le déplacement est donc nul sur Γ_1. On applique des forces volumiques f_0 sur le corps Ω et des forces de tractions f_2 sur la frontière Γ_2 de Ω. Dans le but de formuler les conditions au bord électrique on subdivise $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ en deux ouverts disjoints Γ_a et Γ_b.

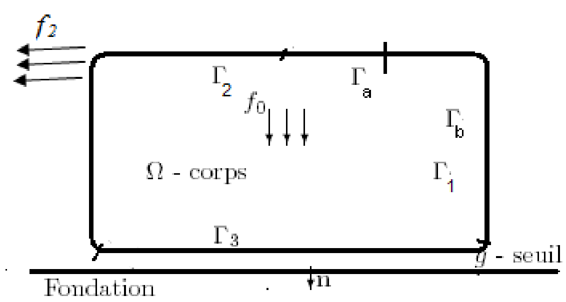

Figure I.1 – Position Physique

On dénote par $\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2, 3)$ et par "$\cdot$" et $|\cdot|$ respectivement le produit scalaire et la norme Euclidienne dans $\mathbb{S}^d$ (resp dans $\mathbb{R}^d$).

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_i v_i \qquad |u| = (u\cdot u)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^d, i=1,\cdots d,$$
$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau} = \sigma_{ij}\tau_{ij} \qquad |\tau| = (\tau\cdot\tau)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{S}^d, i=1,\cdots d, j=1,\cdots d.$$

Les indices i, j prennent leurs valeurs entre 1 et d, avec la convention de l'indice muet.

Les inconnues sont le champ de déplacement $\boldsymbol{u}$: $\Omega\times[0,T] \to \mathbb{R}^d$ et le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$: $\Omega\times[0,T] \to \mathbb{S}^d$. Le potentiel électrique φ : $\Omega\times[0,T] \to \mathbb{R}$ et un champ de déplacement électrique $\mathbf{D}$: $\Omega\times[0,T] \to \mathbb{R}^d$. Pour simplifier les écritures on évitera de préciser la dépendence des inconnues par rapport à la variable d'espace $\mathbf{x}\in\bar{\Omega}$ et la variable de temps $t\in[0,T]$.
On suppose que la frontière Γ est continuement Lipshitzienne, le vecteur normal ν est donc bien défini pour tout vecteur $\boldsymbol{v}$ régulier, on note $\boldsymbol{v}_\nu$ et $\boldsymbol{v}_\tau$ la composante normale et tangentielle $\boldsymbol{v}$ sur Γ et par

$$v_\nu = \boldsymbol{v}\cdot\nu = u_i\nu_i, \qquad \boldsymbol{v}_\tau = \boldsymbol{v} - v_\nu\nu.$$

Pour un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ régulier (par exemple C^1), l'application trace de $\boldsymbol{\sigma}$ est le vecteur $\boldsymbol{\sigma}\nu$. On définit les composantes normale et tangentielle de $\boldsymbol{\sigma}$ par

$$\sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma}\nu)\cdot\nu = \sigma_{ij}\nu_i\nu_j, \qquad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma}\nu - \boldsymbol{\sigma}_\nu\nu.$$

On note par $\boldsymbol{\varepsilon}$ le champ tensoriel de déformation, on se place dans le cas des petites déformations, en élasticité linéaire, on a

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i,j = 1,\cdots p.$$

On note par $\dot{\boldsymbol{u}}$ la dérivée de $\boldsymbol{u}$ par rapport au temps t et par $u_{,i}$ la dérivée partielle de u par rapport à la variable d'espace $\boldsymbol{x}$.

1.1 Modèle Mathématique

Pour établir un modèle mathématique décrivant l'équilibre d'un corps matériel piézo-électrique soumis à des forces extérieures, rappelons les définitions des inconnues, champ de déplacement, tenseur de contraintes, champ électrique et vecteur de déplacement D.

Champ de déplacement $\boldsymbol{u}$ Un champ de déplacement $u(x)$ est le champ vectoriel défini en tout point x de la configuration de départ en fonction de la nouvelle position X par l'équation $u(x) = X - x$.

Champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ Un champ tensoriel de contrainte est l'état de contrainte du solide c'est à dire les efforts intérieurs mis en jeu entre les portions déformées du corps matériel.

Potentiel électrique φ La pression exercée sur le corps piézoélectrique crée une polarisation de charges électriques qui génèrent un courant électrique. La grandeur définissant l'état électrique est appelée potentiel électrique.

Champ de déplacement électrique $\boldsymbol{D}$ C'est un vecteur résultant de l'application du champ électrique E (par définition $E = -\nabla\varphi$) sur le corps matériel étudié.

Afin de gérer ces inconnues nous avons quatre équations découlant des principes fondamentaux de la mécanique des milieux continus et d'électricité.

Equations d'équilibre L'évolution de tout système mécanique soumis à l'action des efforts mécaniques (volumiques ou surfaciques) respecte le principe fondamental de la dynamique. Dans les milieux continus les équations d'équilibre mécanique sont définies par

$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}} + Div\boldsymbol{\sigma} = f, \quad \text{dans } \Omega. \tag{I.1}$$

ρ est la masse volumique. Cette équation décrit le mouvement de tous les points d'un solide en réponse á l'action des forces extérieures agissant sur le solide. Dans le cas quasi-statique, l'equation (I.1) se réduit á

$$Div\boldsymbol{\sigma} = f, \quad \text{dans } \Omega. \tag{I.2}$$

Dans le cas la piézoélectricité nous rajoutons l'équation d'équilibre

$$div\ \boldsymbol{D} = \boldsymbol{q}_0,\ \Omega, \tag{I.3}$$

où q_0 est la densité volumique de charge du matériau.

Lois de comportement : La caractérisation de la déformation à partir de la configuration initiale est donnée par des lois de comportement qui expriment le tenseur des contraintes actuel $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction du mouvement passé et des changements d'état que la portion du corps a subi. Les lois de comportement dans le cas d'un corps piézoélectrique se traduisent par une expression mathématique du tenseur de contraintes en fonction de grandeurs mécaniques et éléctriques. Par exemple la loi de comportement du corps matériel électro-viscoélastique est donnée par les équations

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}) + \mathcal{G}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi, \text{ dans } \Omega, \tag{I.4}$$

$$\boldsymbol{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) - \gamma\nabla\varphi, \text{ dans } \Omega. \tag{I.5}$$

où $\mathcal{A}$ est l'opérateur de viscosité linéaire ou non linéaire dépendant de la vitesse du déplacement $\boldsymbol{u}$, $\mathcal{G}$ l'opérateur d'élasticité dépendant du déplacement $\boldsymbol{u}$, $\mathcal{E} = (e_{ijk})$ est le tenseur piézoélectrique tel que sa transposé $\mathcal{E}^* = (e_{kij})$ avec

$$\mathcal{E}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathcal{E}^*\boldsymbol{v}, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3.$$

et $\gamma = (\gamma_{ij})$ le tenseur de perméabilité électrique. Dans le cas élastique l'équation (I.4) devient

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{G}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi, \ \ \Omega, \tag{I.6}$$

1.2 Conditions de contact et lois de frottement

Nous allons énoncer explicitement quelques types de conditions au bord mécaniques et électriques que nous retrouverons dans cete thèse.

1.2.1 Conditions de contact

Nous commonçons par les conditions imposées sur la partie Γ_3 de la frontière de Ω, qui est en contact avec la fondation.

Contact bilatéral Lorsqu'il n'y a pas de séparation entre le corps et la fondation et le contact reste maintenu entre le corps et la zone de contact. Dans ce cas le contact est dit contact bilatéral, il se traduit mathématiquement par $u_\nu = 0$.

Contact unilatéral Dans le cas où le corps matériel rentre en contact avec une fondation rigide (une fondation qui ne subi pas de déformation), cela empêche une interpénétration du corps avec la fondation, cela se traduit par l'inégalité

$$u_\nu \leq 0, \tag{I.7}$$

Dans le cas où l'interstice de contact a pour valeur g, l'inégalité (I.7) s'écrit

$$u_\nu \leq g. \tag{I.8}$$

Nous avons deux situations, soit le corps quitte la base rigide, donc il n'y a pas de contact et nous avons $u_\nu < g$ dans ce cas les contraintes normales sont nulles $\sigma_\nu = 0$, ou bien il y'a contact, i.e. $u_\nu = g$ et dans ce cas la base rigide exerce une réaction normale orientée vers Ω. donc $\sigma_\nu \leq 0$.

Nous résumons ces deux situations par

$$u_\nu \leq g, \qquad \sigma_\nu \leq 0, \qquad \sigma_\nu (u_\nu - g) = 0. \tag{I.9}$$

Ces conditions de contact sont appelées "Conditions de Signorini", elle ont été utilisées dans plusieurs travaux, par exemple dans [34, 50, 64, 65]. La condition (I.9) montre clairement que σ_ν est une application multivoque,

$$\sigma_\nu (u_\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } u_\nu < g, \\ \in (-\infty, 0], & \text{si } u_\nu = g. \end{cases}$$

Cette irrégularité est résolue par l'utilisation du modèle de compliance normale. En effet la condition de non pénétration du corps matériel à l'intérieur de la fondation $(u_\nu - g \leq 0)$ est relaxée permettant une petite pénétration, ce qui laisse à supposer que la fondation est déformable.

Contact avec compliance normale La contrainte normale σ_ν est régularisée par une fonction positive notée p_ν, donnée en fonction de la pénétration $u_\nu - g$ par

$$-\sigma_\nu = p_\nu (u_\nu - g).$$

Un exemple de la fonction de compliance normale est donnée par

$$p_\nu (r) = c_\nu r_+,$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max(0, r)$. Ici p_ν est une fonction croissante par rapport $u_\nu - g$,(lorsque le corps penétre à l'intérieur de la fondation $(u_\nu - g \geq 0)$, la fonction p_ν reste croissante et positive). La réaction de la fondation est orientée vers le corps matériel $(\sigma_\nu \leq 0)$. Ce modèle de contact a simplifié l'étude du point de vue mathématique, tout en gardant un sens mécanique. Ce modèle a été au début étudié dans beaucoup de travaux, citons [34, 51] ensuite [4, 36, 55].

1.2.2 Lois de frottement

Dans ce paragraphe, nous allons citer quelques lois de frottement que nous utiliserons dans notre travail.

A la surface du contact d'un corps matériel avec une fondation, la contrainte tangentielle $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ joue un rôle important dans la nature du glissement, si celle ci est nulle $(\boldsymbol{\sigma}_\tau = 0)$, on dit qu'on a un glissement sans frottement ou "glissement parfait". Dans le cas contraire on dit que l'on a un le glissement avec frottement. Il devient nécessaire dans ce cas de modéliser ce frottement par une loi. Une loi de frottement est la condition donnée sur la composante tangentielle de containte $\boldsymbol{\sigma}_\tau$, qu'on appelle aussi la force de frottement, la vitesse de déplacement $\dot{\boldsymbol{u}}_\tau$ et le déplacement tangentiel $\boldsymbol{u}_\tau$. Nous allons énoncer quelques lois de frottement.

Loi de Tresca

Lorsque la force tangentielle est inférieure à un certain seuil S le corps reste bloqué dans la fondation et dès que celle ci dépasse le seuil S, le corps perd sa resistence et entre en glissement. Ce phénomène est interprété par la loi de Tresca. La condition imposée sur la zone de contact est donc la suivante :

$$\|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq S,$$

S est appelé seuil de frottement. Dans le cas statique, on a,

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = -S\frac{\boldsymbol{u}_\tau}{\|\boldsymbol{u}_\tau\|}, \quad \text{si, } \boldsymbol{u}_\tau \neq 0. \tag{I.10}$$

Dans le cas quasi-statique les forces de frottement s'écrivent

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = -S\frac{\dot{\boldsymbol{u}}_\tau}{\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau\|}, \quad \text{si, } \dot{\boldsymbol{u}}_\tau \neq 0. \tag{I.11}$$

Loi de Coulomb Cette loi a été initialement intoduite par Amontons [3], mais c'est grâce à Coulomb [16] que cette-ci est devenue connue. Il montre que le seuil S est proportionnel à la composante normale de la force exercée sur la zone de contact. Le coefficient de frottement dépend de la matière du corps et de la fondation rigide. Cette loi s'interprète par la condition

$$\|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu\left|\sigma_\nu\right|,$$

où μ est une fonction positive appelée aussi seuil de frottement. Dans le cas statique on a

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < \mu\left|\sigma_\nu\right|, \text{ alors, } & \boldsymbol{u}_\tau = 0, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = \mu\left|\sigma_\nu\right|, \text{ alors, } & \exists\lambda > 0, \text{ tel que, } \boldsymbol{u}_\tau = -\lambda\boldsymbol{\sigma}_\tau. \end{cases} \tag{I.12}$$

Dans le cas quasi-statique

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < \mu\left|\sigma_\nu\right|, \text{ alors } \dot{\boldsymbol{u}}_\tau = 0, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = \mu\left|\sigma_\nu\right|, \text{ alors } \exists\lambda > 0 \text{ tel que } \dot{\boldsymbol{u}}_\tau = -\lambda\boldsymbol{\sigma}_\tau. \end{cases} \tag{I.13}$$

Il est clair que cette loi définit comme pour la loi de Signorini, une application multivoque de $\boldsymbol{u}_\tau$ dans (I.12) ou bien de $\dot{\boldsymbol{u}}_\tau$ dans (I.13), nous avons donc par exemple

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau\left(\boldsymbol{u}_\tau\right) = \begin{cases} \mu\sigma_\nu, \quad \text{si } \dot{\boldsymbol{u}}_\tau < 0 \\ \in \left]\mu\sigma_\nu, -\mu\sigma_\nu\right[, \quad \text{si } \dot{\boldsymbol{u}}_\tau = 0, \\ \mu\sigma_\nu, \quad \text{si } \dot{\boldsymbol{u}}_\tau > 0. \end{cases}$$

Dans la loi de Coulomb la composante normale des réactions dépend localement du déplacement et la vitesse, elle donne lieu à un problème mathématique mal posé. La régularisation de la loi de Coulomb par la convolution de la composante normale des réactions par des fonctions très régulières a été proposée par G. Duvaut et J. Nećas, elle conduit à un problème qui a un sens mathématique. La régularisation de la composante normale peut s'obtenir aussi en utilisant le modèle de compliance normale.

2 Espaces fonctionnels

Nous allons rappeler ici quelques définitions et théorèmes classiques d'analyse fonctionnelle qui seront utilisés dans cette thèse. Pour les démonstrations on renvoie à la bibliographie. Partout dans ce travail, on considère que Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$($d = 2, 3$) de frontière Γ. On suppose que Γ est de classe C^k,(au voisinage de tout point de la frontière Γ, il existe un difféomorphisme de classe C^k qui redresse localement la frontière en un hyperplan $\mathbb{R}^{d-1}$ et Ω est situé localement d'un seul coté de la frontière).

2.1 Espaces des fonctions à valeurs réelles

Nous rappelons ici quelques résultats sur les espaces de Sobolev de fonctions à valeurs réelles.

Pour tout $s \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, on note D_i l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_i}$, par le muti-index $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d)$ où $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ et par D^α avec $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{d} \alpha_i$, l'opérateut différentiel d'ordre α donné par

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_i^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}, \text{ avec } D^0 \text{ reprÃ©sente l'identité.}$$

On note par $K \subset\subset \Omega$ un sous ensemble K de Ω qui est relativement compact dans Ω($\bar{K}$ est compact inclus dans Ω). Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on considère l'espace des fonctions réelles m fois continuement différentiable sur Ω

$$C^m(\Omega) = \{v \in C(\Omega) : \ D^\alpha v \in C(\Omega) \ \text{ pour } \forall \alpha \text{ tel que } \ |\alpha| \leq m\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{C^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha v(x)|$$

On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact et par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace dual de $\mathcal{D}(\Omega)$ appelé l'espace des distributions muni de la topologie forte dual.

Pour p donné $1 \leq p < \infty$, on désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions Lebesgue mesurables sur Ω, muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dans le cas $p = \infty$, on rappelle l'espace des fonctions essentiellement bornées (bornée sur presque tout Ω) muni de la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess\,|v(x)| = \inf\{c : |v(x)| \leq c \ \text{ p.p. dans } \Omega\}.$$

Théorème 1. *Si p, q et r sont trois réels dans $[1, \infty[$ liés par la relation $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, pour un certain $\alpha \in [0, 1]$. Alors, pour tout $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, on a $u \in L^r(\Omega)$ et, on a*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^\alpha_{L^p(\Omega)} + \|u\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)}.$$

Pour tout m entier positif nous définissons l'espace de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad |\alpha| \leq m\},$$

il est muni de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \max_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \text{si } p = \infty. \end{aligned}$$

On pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

il est un espace de Hilbert. Rappelons que $W_0^{m,p}(\Omega)$ est l'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ et que nous avons les injections $W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ (voir [1]). L'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_0^{m,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{W_0^{m,p}(\Omega)} &= \max_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \text{si } p = \infty. \end{aligned}$$

On note $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$. Rappelons que pour $p = 1$ et Ω borné, l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte. L'espace dual de $W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace $W^{-m,q}(\Omega)$ où $q = \frac{dp}{d-mp}$ et

$m \geq 1$. L'espace $W^{-m,q}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{-m,q}(\Omega)} = \sup_{v \in W_0^{m,p}(\Omega)} \frac{(u,v)}{\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)}},$$

avec $(\cdot,\cdot)$ est le produit de dualité entre $W^{-m,q}(\Omega)$ et $W^{m,p}(\Omega)$. Nous avons l'inclusion $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$.

Dans le cas d'un ouvert Ω régulier nous avons le résultat suivant

Théorème 2. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, alors nous avons*

1. $H^1(\Omega) \hookrightarrow C\left(\bar{\Omega}\right)$ *avec injection compacte si $d = 1$,*
2. $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *avec injection compacte pour $1 \leq q < \infty$ si $d = 2$ et pour $q = 6$ si $d = 3$,*
3. $H^2(\Omega) \hookrightarrow C\left(\bar{\Omega}\right)$ *avec injection compacte si $d = 1, d = 2$.*

Si en plus Ω est de classe C^1, l'injection de $C^1\left(\bar{\Omega}\right) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ est dense.

Nous allons énoncer ici les résultats qui donnent un sens à une fonction régulière presque partout sur la frontière Γ.

Théorème 3 (Théorème de trace dans $H^1(\Omega)$)**.** *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 de frontière $\partial\Omega = \Gamma$. On peut définir de façon unique une application $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ linéaire et continue, tel que si en plus $v \in C^1\left(\bar{\Omega}\right)$, on a $\gamma_0 v(x) = v(x)$ pour tout $x \in \Gamma$.*

L'application $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^{1/2}(\Gamma)$ est linéaire continue et surjective. En particulier, il existe un constante $c > 0$ tel que pour tout fonction $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$|u|_{L^{1/2}(\Gamma)} \leq c\,|u|_{H^1(\Omega)}$$

Théorème 4 (Théorème de trace dans $W^{m,p}(\Omega)$)**.** *Soit Ω un ouvert de classe C^{m+1}. Alors pour tout $m > 0$ et $p \geq 1$, il existe une application linéaire continue*

$$\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n) : W^{m,p}(\Omega) \to L^p(\Gamma)^m,$$

tel que $\gamma v = (\gamma_0 v, \gamma_1 v, \cdots, \gamma_n v)$, avec $\gamma_j v$ est la trace d'ordre j de v.

Lorsque $v \in C^m\left(\bar{\Omega}\right)$, $\gamma_j v$ sont données par $\gamma_j v = \dfrac{\partial^j v(x)}{\partial \nu^j}$, où ν est le vecteur unitaire normal à Γ.

Proposition 1 (Formule de Green)**.** *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 de frontière $\partial\Omega = \Gamma$. Si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, elles vérifent*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx + \int_\Gamma u(x)v(x)n_i(x)ds$$

où $n = (n_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la normale unité extérieure à Ω. De même si $\mathbf{u}$ est une fonction vectorielle de $\left(L^2(\Omega)\right)^n$ tel que $div\mathbf{u} \in L^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega v(x) div\mathbf{u}(x)dx = -\int_\Omega \mathbf{u}(x)\nabla v(x)dx + \int_\Gamma v(x)\mathbf{u}(x).n(x)ds$$

Soit maintenant un domaine Ω de classe C^1, ils existent deux applications linéaires qui sont déterminées par respectivement γ_ν dqui est éfinie de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$ et γ_T de $H^1(\Omega)$ dans $H_T^{1/2}(\Gamma)$ tel que

$$\gamma(v) = \gamma_\nu(v)\nu + \gamma_T(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{I.14}$$

où

$$H_T^{1/2}(\Gamma) = \{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)\,; \gamma_\nu(\varphi) = 0\}.$$

Si $v \in \left(C^\infty\left(\bar{\Omega}\right)\right)^n$,, on a $\gamma_\nu(v) = v|_\Gamma \cdot n$ et $\gamma_T(v) = v|_\Gamma - (v|_\Gamma \cdot \nu)\,\nu$. Les applications $\gamma_\nu(v)$ et $\gamma_T(v)$ sont surjectives. Pour simplifier l'écriture, on désignera respectivement par v_ν et v_T les traces normales et tangentielle $\gamma_\nu(v)$ et $\gamma_T(v)$.

2.2 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

On introduit dans cette section quelques propriétés d'espaces fonctionnels qui serviront plutard à l'etude des problèmes d'évolution.

2.2.1 L'espace $L^p(0,T;X)$

On considère un espace de Banach et un intervalle $[0,T]$, $T > 0$. Soit X un espace de Banach, $p \in [1,\infty]$.

Définition 1. *On désigne par $L^p(0,T;X)$ l'ensemble des classes de fonctions mesurables tel que pour tout $t \in [0,T]$, la fonction défine par $\|f(t)\|_X$ est dans $L^p([0,T])$. Pour $p = \infty$, $L^\infty(0;T;X)$ est l'ensemble de fonctions mesurables u définies sur $[0,T]$, tel qu'il existe $C > 0$,$\|f(t)\|_X \leq C$, presque partout dans $[0,T]$.*

2.2.2 Propriétés de l'espace $L^p(0,T;X)$

1. L'espace $L^p(0,T;X)$ sont munis de la normes

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p(0,T;X)} &= \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,\ \ p < \infty, \\
\|f\|_{L^\infty(0,T;X)} &= \sup_{t\in[0,T]} ess\ \ \|f(t)\|_X = \inf\left\{C > 0, \|f(t)\|_X \leq C \text{ p.p. } t\right\},
\end{aligned}$$

2. Pour tout $1 \leq p < \infty$, sont des espaces de Banach et $C([0,T];X)$ est dense dans $L^p(0,T;X)$.
3. Si $1 < p < \infty$ et si X est réflexif, alors $L^p(0,T;X)$ est réflexif.
4. L'espace $L^2(0,T;X)$ est un espace de Hilbert, si X est un espace de Hilbert.
5. Pour tout $1 \leq p < \infty$, $L^p(0,T;X)$ est un espace séparable, si X est séparable.
6. Le dual de $L^p(0,T;X)$, $(L^p(0,T;X))' = L^{p'}(0,T;X)$, où p' est l'exposant conjugué de p et dont le produit de dualité entre l'espace $L^p(0,T;X)$ et son dual est donné par
$$\langle f, g \rangle = \int_0^T (f(t), g(t))_X \; dt, \;\; \forall g \in L^{p'}(0,T;X).$$

Nous citons ici quelques résultats qui caractérisent les ensembles compacts dans $L^p(0,T;X)$. Pour les démonstrations nous renvoyons le lecteur à [59] et aux references citées.

Théorème 5. *Soit $\mathcal{F} \subset L^p(0,T;X)$, F est relativement compact dans $L^p(0,T;X)$, pour $1 \leq p < \infty$ et dans $C(0,T;X)$ pour $p = \infty$, si et seulement si*
- $\left\{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\; dt \mid f \in \mathcal{F}\right\}$ *est relativement compact dans X, $0 < t_1 < t_2 < T$.*
- $\|f(t+h) - f(t)\|_{L^p(0;T-h,X)} \to 0$ *lorsque $h \to 0$, uniformément pour tout f de $\mathcal{F}$.*

Nous citons un résultat conséquent à ce théorème, ceci dans le cas où des fonctions f possédent des dérivées intégrables au sens des distributions. Soit $\mathcal{D}'(]0,T[\,,X)$ l'espace des distributions de $]0,T[$ dans X, l'espace des formes linéaires continues définies de $\mathcal{D}(]0,T[)$ dans X. On définit la distribution dérivée $\dot{f}$ d'une fonction par $\left\langle \dot{f}, \varphi \right\rangle = -\langle f, \dot{\varphi}\rangle$, si la fonction f ainsi que ses dérivées sont intégrables.

2.2.3 L'espace $W^{1,p}(0,T;X)$

Définition 2. *On définit l'espace*
$$W^{1,p}(0,T;X) = \{u \in L^p(0,T;X) \;\; \text{tel que } \dot{u} \in L^p(0,T;X)\},$$
muni de la norme
$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \|\dot{u}\|_{L^p(0,T;X)}, \;\; p < \infty,$$
ou de la norme équivalente
$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \left(\|u\|_{L^p(0,T;X)} + \|\dot{u}\|_{L^p(0,T;X)}\right)^{\frac{1}{p}}, \;\; p < \infty.$$

Pour $p = 2$, on note $H^1(0,T;X) = W^{1,2}(0,T;X)$, c'est un espace de Hilbert.

On introduit ici la définition des espaces intermédiaires ou les espaces de Gelfand qui sont importants dans les problèmes d'evolution.

Définition 3. *Les espaces (V, H, V') sont des espaces triple de Gelfand, si les proprtiétés suivantes sont vérifiées*

a) *V est un espace de Banach séparable, réflexif, H est un éspace de Hilbert séparable muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$*

b) *l'inclusion $V \subset H$ est continue avec V dense dans H,*

c) *On identifie H avec H' „ on a $(H \subset V'$ avec $(v, h)_{V,V'} = \langle v, h \rangle$ $\forall v \in V$, $\forall h \in H)$.*

On définit les espaces de Sobolev relatifs aux espaces triple de Gelfand (V, H, V'). Soit $1 < p < \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on pose

$$W^{1,p}(0, T; V, H) = \{u \in L^p(0, T; V) \text{ tel que } \dot{u} \in L^p(0, T; V')\},$$

Proposition 2. *Soit X un espace de Banach réflexif et H un espace de Hilbert tel que X s'injecte continuement dans H avec X dense dans H. soit $u \in L^P(0, T; X)$ tel que $u \in L^q(0, T; X')$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $u \in C(0, T; H)$.*

Nous citons ici quelques théorèmes de compacité dans les espaces intermédiares dû à J.L. Lions [44].

Théorème 6. *Soit X, B, Y trois espaces de Banach telque $X \subset B \subset Y$ avec injection compacte de X dans B et soit $\mathcal{F} \subset L^P(0, T; B)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. On suppose que*

1. *$\mathcal{F}$ est borné dans $L^P(0, T; X)$,*
2. *$\|f(t + h) - f(t)\|_{L^P(0,T-h;Y)} \to 0$, uniformément pour tout $f \in \mathcal{F}$.*

Alors, $\mathcal{F}$ est ralativement compact dans $L^P(0, T; B)$ (et dans $C(0, T; B)$ si $p = \infty$).

Corollaire 1. *Si $\mathcal{F}$ est borné dans $L^P(0, T; X)$ avec $1 \leq p < \infty$ et $\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \{\dot{f} \mid f \in \mathcal{F}\}$ est borné dans $L^P(0, T; Y)$, alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $L^P(0, T; B)$.*

Dans le cas où d'epaces X et Y sont en plus réflexifs et l'inclusion $X \subset B$ est continue. Nous avons le résultat dû à Lions, Aubin et Simon.

Théorème 7. *Soit X, B, Y des espaces de Banach tel que X, Y sont réflexifs, $X \subset B \subset Y$ avec l'injection de $X \hookrightarrow B$ est compacte et l'injection $B \hookrightarrow Y$ est continue. Soit $1 < p < \infty$ et $1 < p' < \infty$, $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$. Alors l'injection de $W^{1,p}(0, T; X, Y) \hookrightarrow L^p(0, T; B)$ est compacte.*

2.2.4 Quelques propriétés de fonctions de Carathéodory

Définition 4 (fonction de Carathéodory)**.** *f est dite une fonction de Carathéodory sur $Q \times \mathbb{R}$ si pour tout réel u, la fonction $(t, x) \to f(t, x, u)$ est mesurable et pour presque tout (t, x) de Q, la fonction $u \to f(t, x, u)$ est continue.*

Théorème 8. *Si f est de Carathéodory, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie fermée $C_\varepsilon \subset Q$ telle que mes$(Q \diagdown C_\varepsilon) < \varepsilon$ et la restriction de f à $C_\varepsilon \times \mathbb{R}$ est continue.*

Définition 5 (opérateur de Nemytskii)**.** *On appelle opérateur de Nemytskii, l'opérateur qui à u associe $F(u) = f(.,.,u)$.*

Théorème 9. *Si f est de Carathéodory et si $\exists\, a_1 \in L^2(Q)$, $\exists a_2 \in \mathbb{R}$, pour p.p. (t,x) dans Q , $\forall u \in \mathbb{R}$*

$$|F(u)| \leq a_1 + a_2|u|. \tag{I.15}$$

Alors, l'opérateur de Nemytskii F associé à f est continu dans $L^2(Q)$, i.e. si u_n converge vers u dans $L^2(Q)$, alors $F(u_n)$ converge vers $F(u)$ dans $L^2(Q)$ et réciproquement, si la condition (I.15) est vérifiée, alors l'opérateur de Nemytskii associé à f est continu dans $L^2(Q)$.

3 Quelques définitions sur les opérateurs univoques et multivoques

Soit X un espace de Banach et X^* son dual, soit $(\cdot,\cdot)$ le produit de dualité entre X et X^*. Nous allons donner quelques définitions sur les opérateurs univoques et multivoques, pour plus de détails le lecteur peut consulter ([69], [18]).

Définition 6. *Un opérateur $T : X \to X'$ est dit*

1. *borné, s'il transforme tout borné de X en un borné de X' ;*
2. *hémicontinu, si l'application réelle $t \longmapsto (T(u+tv), w)$ est continue sur $[0,1]$, pour tout u,v,w $\in X$;*
3. *demicontinu, si pout tout $x_n \to x$ dans X„ on a $Tx_n \to Tx$ faiblement dans X' ;*
4. *monotone, si $(Tx - Ty, x - y) \geq 0$ pour tout $x, y \in X$;*
5. *maximal monotone, si T est monotone et pour tout x,y$\in X$ et $x' \in X'$ vérifiant $(Tx - x', x - y) \geq 0$, alors $x' = Ty$;*
6. *fortement monotone, s'il existe $c > 0$, $p > 0$ tel que $(Tx - Ty, x - y) \geq c\,\|x - y\|^p$;*
7. *pseudo-monotone, si pour tout $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans X et $\limsup\,(Tx_n, x_n - x) \leq 0$, alors $\liminf\,(Tx_n, x_n - v) \geq (Tx, x - v)$ pour tout $v \in X$.*

Remarque 1. *Si l'opérateur T est borné hémicontinu et monotone, alors il est pseudo-monotone*

Si T est pseudo-monotone et coercif, alors $\forall f \in X'$ $\exists u \in X$ tel que $Tu = f$.

Théorème 10. *Soit V est un espace de Banach réflexif et séparable et A un opérateur de V dans V' borné, hémicontinu et monotone. Alors A est continu de V fort dans V' faible.*

Définition 7. *Un opérateur $T : X \to 2^{X'}$ est dit*

1. *borné, si $T(B\ )$ est borné dans X' pour tout borné B de X ;*
2. *semi-continu-supérieurement , si $T^{-1}(C) = \{x \in C \ \mid Tx \cap C \neq 0\}$ est fermé dans X, pour tout $C \in X$;*
3. *monotone, si pour tout $x, y \in X$ et $x', y' \in X'$, on a $(x' - y', x - y) \geq 0$;*
4. *coercif, s'il existe une fonction réelle c de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{r\to\infty} c(r) = +\infty$ et tel que pour tout $x \in X$ et $x' \in Tx$, on a $(x', x) \geq c(\|x\|)\|x\|$;*
5. *pseudo-monotone s'il satisfait,*

a) *pour tout $x \in X$, Tx est un ensemble non vide convexe et faiblement compact dans X'*

b) *T est semi-continu supérieurement défini de tout ensemble de dimension finie de X dans un X' muni de la topologie faible,*

c) *si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans X, $x'_n \in Tx_n$ et $\limsup\,(x'_n, x_n - x) \leq 0$, alors pour tout $y \in X$ il existe $x'(y) \in Tx$ tel que $(x'(y,)x - y) \leq \liminf\,(x'_n, x_n - y)$.*

3.0.5 Sous-différentiel d'une fonction convexe

Il bien connu que la théorie des opérateurs monotones a commencer par la monotonie des fonctions convexes. Plus généralement pour toute fonction $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ propre convexe semi-continue inférieurement s.c.i., on définit le **sous-différentiel** $\partial\varphi : X \to 2^{X'}$ par

$$\partial\varphi(x) = \{h \in X' | < h, y - x > \leq \varphi(y) - \varphi(x), \forall y \in X\}. \tag{I.16}$$

C'est le modèle le plus simple de l'opérateur maximal monotone. En particulier, si φ_K la fonction indicatrice du convexe K de X, alors

$$N_K(x) = \partial\varphi_K(x) = \{h \in X' | < h, y - x > \leq 0, \forall y \in C\},$$

est le cone normal de K en x.

Plus généralement, soit $\varphi : X \to R \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et s.c.i, avec $D(\varphi) = \{x \in X | \varphi(x) < \infty\}$. Trouver un élément $u \in D(\varphi)$ tel que

$$(Au - f, x - u) \geq \varphi(x) - \varphi(u) \geq 0, \forall x \in D(\varphi), \tag{I.17}$$

En utilisant la définition du sous-différentiel (I.16), l'inéquation variationnelle (I.17) est équivalente à

$$f \in Au + \partial\varphi(u), \tag{I.18}$$

en particulier, si $\varphi = \varphi_K$ (fonction indicatrice du convexe K) l'inéquation variationnelle (I.17) est équivalente à

$$f \in Au + \partial\varphi_K(u), \tag{I.19}$$

Faisant usage des formes (I.17) et (I.18), la théorie des inégalités variationnelle se prolonge dans le cadre de diverses généralisations du concept du sous-différentiel aux fonctions non lisses, non convexes, ce qui fait appel au sous-différentiel généralisé au sens de Clarke qui est donné pour une fonction localement Lipschitzienne. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur au monographes [15, 28].

3.1 Quelques lemmes techniques

Lemme 1 (Inégalité de Cauchy [58]). *Pour tout réel positif a et b et pour tout ε strictement positif, on a*

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2.$$

Lemme 2 (Inégalités de Young). *Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tout réel positif a et b, on a*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

De plus, on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$ab \leq \frac{\varepsilon a^p}{p} + \frac{(1-\varepsilon)^q\, b^q}{q}.$$

Lemme 3 (Gronwall). *Soient $y \in L^\infty(]0,T[)$ et $g \in L^1(]0,T[)$ deux fonctions positives et y_0 une constante positive, telles que pour presque tout $t \in]0,T[$*

$$y(t) \leq y_0 + \int_0^t g(s)y(s)ds.$$

Alors, on a pour presque tout $t \in]0,T[$

$$y(t) \leq y_0 \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right).$$

3.2 Quelques éléments d'analyse non linéaire

Dans cette section nous rappelons quelques résultats concernant les inéquations variationnelles d'évolution et les inclusions différentielles non linéaire qu'on retrouvent dans l'etude des problèmes proposés dans cette thèse.

3.2.1 Quelques résultats sur les équations et inéquations variationnelles

Soit V et H deux espaces de Hilbert tel que $V \subset H \subset V'$, avec injection dense et continue de V dans H, et soit $A : V \to V'$ un opérateur hemicontinu monotone vérifiant

$$\exists \alpha_0 > 0,\ \alpha_1 \in \mathbb{R} \quad \text{tel que } (Au, u)_{V',V} \geq \alpha_0 \left|u\right|_V^2 + \alpha_1, \forall u \in V, \tag{I.20}$$

Alors pour un $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0, T; V')$, il existe une unique fonction u vérifiant

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C\left(0, T; H\right), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; V')$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t), \qquad \text{p.p.} t \in \left(0, T\right), \tag{I.21}$$

$$u(0) = u_0, \tag{I.22}$$

Théorème 11. *Soit $(V,\ H, V')$ un triple espaces de Gefland, soit K un sous-ensemble fermé de V. Soit $a\left(.,.\right) : V \times V \to R$ la forme bilinéaire symetrique, continue qui satisfait*

$$\exists\ \alpha_0 > 0,\ \alpha_1 \in \mathbb{R} \qquad \textit{tel que } a\left(u, u\right)_{V',V} \geq \alpha_0 \left|u\right|_V^2 + \alpha_1 \left|u\right|_H^2, \ \forall u \in V. \tag{I.23}$$

Alors pour une donnée $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0, T; H)$, il existe une unique fonction u vérifiant

$$u \in L^2(0, T; V) \cap H^1(\left[0, T\right]; H)$$

pour tout $t \in [0, T]$, $u(t) \in K$ et pour presque tout $t \in (0, T)$

$$(\dot{u}(t), v - u(t)) + a\left(u(t), v - u(t)\right) \geq \left(f(t), v - u(t)\right)_H, \quad \forall u \in K \tag{I.24}$$

$$u(0) = u_0. \tag{I.25}$$

Soit maintenant X un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme

$\|\cdot\|_X$, on considère le problème suivant, trouver $x : [0,T] \to X$ tel que

$$\begin{aligned}&(A\dot{x}, y-\dot{x})_X + (Bx, y-x)_X + j(x,y) - j(x,\dot{x})\\&\geq (f, y-\dot{x})_X \quad \forall\, y \in X,\ t \in [0,T],\end{aligned} \tag{I.26}$$

$$x(0) = x_0. \tag{I.27}$$

Pour étudier le problème (I.26), (I.27) nous avons besoin de quelques hypothèses

– L'opérateur $A : X \to X$ est fortement monotone et de Lipschitz i.e.

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe } m_A > 0 \text{ tel que} \\ \qquad (Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_X \geq m_A \|x_1 - x_2\|_X^2 \quad \forall\, x_1, x_2 \in X. \\ \text{(b) Il existe } L_A > 0 \text{ tel que} \\ \qquad \|Ax_1 - Ax_2\|_X \leq L_A \|x_1 - x_2\|_X \quad \forall\, x_1, x_2 \in X. \end{cases} \tag{I.28}$$

– L'opérateur non linéaire $B : X \to X$ est continuement Lipschitzien et il existe $L_B > 0$ tel que

$$\|Bx_1 - Bx_2\|_X \leq L_B \|x_1 - x_2\|_X \quad \forall\, x_1, x_2 \in X. \tag{I.29}$$

– La fonctionnelle $j : X \times X \to \mathbb{R}$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(a) } j(x,\cdot) \text{ est convexe s.c.i. pour tout} \in X. \\ \text{(b) Il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ \qquad j(x_1, y_2) - j(x_1, y_1) + j(x_2, y_1) - j(x_2, y_2) \\ \qquad\quad \leq m \|x_1 - x_2\|_X \|y_1 - y_2\|_X \quad \forall\, x_1, x_2, y_1, y_2 \in X. \end{cases} \tag{I.30}$$

On suppose aussi que

$$f \in C(0,T,X), \quad x_0 \in X. \tag{I.31}$$

Alors nous avons le résultat suivant, qui est un résultat standard de la théorie des inéquations variationnelles d'évolution (voir par exemple [27, 55]).

Théorème 12. *Supposons les hypothèses (I.28)–(I.31) sont vérifiées. Alors le problème*

$$\begin{aligned}&(A(\dot{x}(t)), v - \dot{x}(t))_X + (B(x(t)), v - \dot{x}(t))_X + \\ &j(x(t), v) - j(u(t), \dot{x}(t)) \geq (f(t), v - \dot{x}(t))_X, \quad v,\end{aligned} \tag{I.32}$$

$$x(0) = x_0. \tag{I.33}$$

– *admet une unique solution* $x \in C^1(0,T,X)$.

– *Si* x_1 *et* x_2 *sont deux solutions du problème donné par* (I.26) *et* (I.27) *qui correspondent respectivement aux données* $f_1, f_2 \in C(0,T;X)$, *alors il existe* $c > 0$ *te que*

$$\|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\|_X \leq c\,(\|f_1(t) - f_2(t)\|_X + \|x_1(t) - x_2(t)\|_X) \quad \forall\, t \in [0, T]. \tag{I.34}$$

– *Si, en plus $f \in W^{1,p}(0, T; X)$, avec $p \in [1, \infty]$, alors la solution x satisfait $x \in W^{2,p}(0, T; X)$.*

Nous présentons ici un résultat qui montre l'existence et l'unicité d'une solution pour les inéquations d'évolution écrites sous formes d'inclusion. Pour la démonstration voir Barbu [8]

Théorème 13. *Soit V et H deux espaces de Hilbert tel que $V \subset H \subset V'$, avec injection dense et continue de V dans H, et soit $A : V \to V'$ un opérateur linéaire continu et symetrique vérifiant la condition de coercivité*

$$\exists \alpha_0 > 0,\ \alpha_1 \in \mathbb{R} \quad \textit{tel que}\ \ (Au, u)_{V',V} \geq \alpha_0 \,|u|_V^2 + \alpha_1 \,|u|_H^2 \,, \forall u \in V. \tag{I.35}$$

Soit $M : V \to 2^{V'}$ un opérateur multivoque maximal monotone. Soit f une fonction donnée dans $W^{1;1}\,(0, T; H)$ et u_0, v_0 deux données vérifiant

$$u_0 \in V,\ v_0 \in D(M)\ \ \textit{et}\ \ (Au_0 + Mv_0) \cap H \neq \varnothing. \tag{I.36}$$

Alors il existe une solution unique $u \in W^{1;\infty}\,(0, T; V) \cap W^{2;\infty}\,(0, T; H)$ vérifiant le problème

$$\left\{ \begin{array}{c} \ddot{u}(t) + Au + M\dot{u} \ni f(t),\ p.p.t \in (0, T)\,, \\ u(0) = 0, \quad \dot{u}\,(0) = v_0. \end{array} \right. .$$

Chapitre II

Problème de contact frottant quasi-statique

Introduction

Nous étudions ce chapitre une classe de problèmes variationnels d'évolution modélisant un contact avec frottements d'un corps piézoélectique avec une fondation conductive. Nous nous intéressons à l'évolution, à la fois de la déformation du corps et du potentiel électrique dans un intervalle de temps $[0, T]$. Ceci nous conduit à un système d'inéquations variationnelles.

Le but dans ce travail est de donné une généralisation du cas donné dans l'article [39] à une classe de problèmes modélisant des contacts frottants d'un corps piézoélectrique avec une fondation conductrice et d'affaiblir les hypothèses d'existence et d'unicité. Nous appliquons ce résultat à un exemple de contact frottant modélisé par la loi de compliance normale et une version de la loi de frottement de Coulomb. Nous supposons qu'il y a des charges électriques sur la partie du corps qui rentre en contact avec la base et qui disparaissent lorsque ce contact est perdu, des conditions au bord électriques et mécaniques sont par conséquent prises en considération. . Le processus est supposé électriquement statique (tous les effets de radiation sont négligables) et mécaniquement quasi statique (les termes d'inertie dans les équations d'équilibre sont supposés négligéables). Le contenu de ce chapitre est accepté pour publication [2].

1 Existence et unicité des solutions du problème $(\mathcal{P}_V)$

Soit à résoudre le problème variationnel $\mathcal{P}_V$ suivant, Trouver le déplacement $u : [0, T] \to V$ et le potentiel électrique $\varphi : [0, T] \to W$ tel que

$$\begin{aligned}&(A\dot{u}(t), v - \dot{u}(t))_V + (Bu(t), v - \dot{u}(t))_V + (E^*\varphi(t), v - \dot{u}(t))_V \\ &+j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V,\end{aligned} \tag{II.1}$$

pout tout $v \in V$ et $t \in [0, T]$,

$$(C\varphi(t), \zeta)_W - (Eu(t), \zeta)_W + (h(u(t), \varphi(t)), \zeta)_W = (q(t), \zeta)_W, \tag{II.2}$$

pour tout $\zeta \in W$ et $t \in [0,T]$, avec

$$u(0) = u_0. \tag{II.3}$$

Ici V et W sont respectivement l'espace des déplacements et des potentiels admissibles(ce sont certains espaces de Banach vérifiant $V \subset \mathcal{H} \subset V'$ et $W \subset H \subset W'$, avec $\mathcal{H}$ et H des espaces de Banach réflexifs). Les opérateurs A, B, E, E^*, C et D sont respectivement les opérateurs liés aux lois életro-mécanique données precédemment dans le chapitre1. Les fonctionnelles J et h sont respectivement données en fonction des conditions mécaniques et électriques au bord de la surface. La fonctionnelle h donnée dans (II.2) est définie par

$$(h(u,\varphi),\zeta)_W = \int_{\Gamma_C} \psi(u_\nu - g)\phi_L(\varphi - \varphi_0)\zeta\, da, \tag{II.4}$$

φ_0 est le potentiel électrique de la fondation. La fonction ϕ_L est donnée par

$$\phi_L(s) = \begin{cases} -L & \text{si} \quad s < -L, \\ s & \text{si} \quad -L \le s \le L, \\ L & \text{si} \quad s > L, \end{cases} \tag{II.5}$$

où L une valeur positive assez grande, elle peut être arbitrairement grande, plus élevée que tout pic possible de tension dans le système. Un exemple de fonction ψ de Lipschitz peut-être donnée par

$$\psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r < 0, \\ k\dfrac{r}{\delta} & \text{si} \quad 0 \le r \le \delta, \\ k & \text{si} \quad r > \delta, \end{cases} \tag{II.6}$$

Nous donnons ici la liste des hypothèses sur les données du problème. On suppose que A est non linéaire fortement monotone et continuement Lipshitzien sur V et B est un opérateur non linéaire contiuement Lipshitzien dans V, pour plus de details (voir [57]).

$$\begin{cases} \text{(a) } A : V \to V. \\ \text{(b) Il } L_A > 0 \text{ tel que} \\ \qquad |Au_1 - Au_2|_V \le L_A\,|u_1 - u_2|_V \qquad \forall\, u_1, u_2 \in V. \\ \text{(c) il existe } m_A > 0 \text{ tel que} \\ \qquad (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_V \ge m_A\,|u_1 - u_2|_V^2 \quad u_1, u_2 \in V. \end{cases} \tag{II.7}$$

$$\begin{cases} \text{(a) } B : V \to \mathbb{V}. \\ \text{(b) il existe } L_B > 0 \text{ tel que} \\ \qquad |Bu_1 - Bu_2|_V \le L_B\,|u_1 - u_2|_V \qquad \forall\, u_1, u_2 \in V. \end{cases} \tag{II.8}$$

les opérateurs E^* et E sont linéaires et vérifient

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(a) } E^* : W \to V. \\ \text{(b) il existe } C_{E^*} > 0 \text{ tel que} \\ \qquad |E^* w|_{\mathcal{H}} \leq C_{E^*} \, |w|_W \,, \qquad \forall\, u \in V, \\ \text{(c) } E : V \to W \\ \qquad |Eu|_H \leq C_E \, |u|_V \qquad \forall\, u \in V, \\ \text{(d) } \langle E^* w, v \rangle = \langle w, Eu \rangle \end{array}\right. \tag{II.9}$$

C est un opérateur linéaire coercif

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(a) } C : W \to W. \\ \text{(b) il existe } M_C > 0 \text{ tel que} \\ \qquad |C\tau|_W \leq M_C \, |\tau|_W \qquad \forall\, \tau \in W. \\ \text{(c) il existe } L_C > 0 \text{ tel que} \\ \qquad (C\tau, C\tau)_W \geq m_C \, |\tau|_W^2 \qquad \forall\, \tau \in W. \end{array}\right. \tag{II.10}$$

La fonction ψ satisfait

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(a) } \psi : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) } \exists\, L_\psi > 0 \, \text{tel que } |\psi(x,u_1) - \psi(x,u_2)| \leq L_\psi |u_1 - u_2| \\ \qquad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(c) } \exists\, M_\psi > 0 \, \text{tel que } |\psi(x,u)| \leq M_\psi \; \forall\, u \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(e) } x \mapsto \psi(x,u) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}. \\ \text{(e) } x \mapsto \psi(x,u) = 0, \text{ pour tout } u \leq 0. \end{array}\right. \tag{II.11}$$

La fonctionnelle $j : X \times X \to \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(a) } j(u,\cdot) \text{ est convexe s.c.i. dans } V \text{ pour tout } u \in V. \\ \text{(b) il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ \qquad j(u_1,v_2) - j(u_1,v_1) + j(u_2,v_1) - j(u_2,v_2) \\ \qquad\quad \leq m \, |u_1 - u_2|_V \, |v_1 - v_2|_V \quad \forall\, u_1, u_2, v_1, v_2 \in V. \end{array}\right. \tag{II.12}$$

$$f \in W^{1,p}(0,T;\mathcal{H}) \,, \tag{II.13}$$

$$q \in W^{1,p}(0,T;H) \,, \tag{II.14}$$

$$u_0 \in V \,. \tag{II.15}$$

Théorème 14. *On suppose II.7–II.15 satisfaites. Alors il existe une unique solution du Problème $\mathcal{P}_V$. La solution u satisfait*

$$u \in W^{2,p}(0,T;V), \quad \varphi \in W^{1,p}(0,T;W). \tag{II.16}$$

Preuve du théorème 14

Nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution u de l'inéquation variationnelle (II.1), vérifient le théorème 12. Pour cela nous considèrons le problème suivant Problème $\mathcal{P}_\eta^1$, et une fonction $\eta \in C([0,T],V)$.

Trouver le champ de déplacement $u_\eta : [0,T] \to V$ tel que

$$(A(\dot{u}_\eta(t)), v - \dot{u}_\eta(t))_V + (B(u_\eta(t)), v - \dot{u}_\eta(t))_V + (\eta(t), v - \dot{u}_\eta(t))_V$$
$$+j(u_\eta(t), v) - j(u_\eta(t), \dot{u}_\eta(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}_\eta(t))_V \quad \forall\, v \in V,\ t \in [0,T], \tag{II.17}$$
$$u_\eta(0) = u_0. \tag{II.18}$$

Nous avons les résultats suivants sur $\mathcal{P}_\eta^1$.

Lemme 4. *(1) Il existe une unique solution $u_\eta \in C^1([0,T];V)$ du problème (1.10) et (II.18).*

(2) Si u_1 et u_2 sont deux solutions de (1.10) et (II.18) correspondantes aux données η_1, $\eta_2 \in C([0,T];V)$, alors il existe $c > 0$ tel que

$$|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)|_V \leq c\left(|\eta_1(t) - \eta_2(t)|_Q + |u_1(t) - u_2(t)|_V\right) \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{II.19}$$

(3) Si en plus $\eta \in W^{1,p}(0,T;V)$ pour $p \in [1,\infty]$, alors la solution $u_\eta \in W^{2,p}(0,T;V)$.

Démonstration. Nous appliquons le théorème 12 où $X = V$, en notant le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_V$ et de la norme $|\cdot|_V$, nous définissons $f_\eta : [0,T] \to V$ par

$$(f_\eta(t), v)_V = (f(t) - \eta(t), v)_V, \tag{II.20}$$

pour tout $u, v \in V$ et $t \in [0,T]$. Des hypothèses (II.7), (II.8) et (III.8) montrent que les opérateurs A, B et j satisfont les conditions (I.28), (I.29) et (I.30) du théorème 12.

En plus, si la fonction $f \in W^{1,p}(0,T;\mathcal{H})$, comme $\eta \in C([0,T];V)$, on déduit qu' à partir de (II.20) $f_\eta \in C([0,T];V)$. nous notons que (**??**) entraine que la condition (I.31) est satisfaite. Nous déduisons que le lemme 1.29 n'est autre qu'une conséquence du théorème 12. □

Dans le la suite on note $u_\eta \in C^1([0,T],V)$ la solution du problème $\mathcal{P}_\eta^1$, obtenu par Lemme 1.29. Nous posons le problème variationnel lié au potentiel électrique.

Problème$\mathcal{P}_\eta^2$.

Trouver le potentiel $\varphi_\eta : [0,T] \to W$ **tel que**

$$\begin{aligned}&(C(\varphi_\eta(t)), \zeta)_W - (E(u_\eta(t)), \zeta)_W + (h(u_\eta(t), \varphi_\eta(t)), \zeta)_W = (q(t), \zeta)_W,\\ &\forall \zeta \in W,\ t \in [0,T].\end{aligned} \tag{II.21}$$

pour le problème bien posé $\mathcal{P}_\eta^2$**, nous avons le résultat**

Lemme 5. *Il existe une unique solution* $\varphi_\eta \in W^{1,p}(0,T;W)$ *vérifiant* (II.21).

Si en plus φ_{η_1} *et* φ_{η_2} *sont deux solutions de* (II.21) *correspondent respectivement à* η_1, $\eta_2 \in C([0,T];V)$ *alors il existe* $c > 0$, *tel que*

$$|\varphi_{\eta_1}(t) - \varphi_{\eta_2}(t)|_W \le c\, |u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)|_V \quad \forall t \in [0,T]. \tag{II.22}$$

Démonstration. Soit $t \in [0,T]$, le problème $\mathcal{P}_\eta^2$ peut s'écrire à l'aide d'un problème d'opérateur. Trouver $\varphi_\eta : [0,T] \to W$ tel que $\forall\, t \in [0,T]$

$$\mathbf{A}_\eta(t)\varphi_\eta(t) = q(t)$$

avec $\mathbf{A}_\eta(t) : W \to W$ est donné par le théorème de representation de Riesz,

$$(\mathbf{A}_\eta(t)\varphi, \zeta)_W = (C(\varphi), \zeta)_W - (E(u_\eta(t)), \zeta)_W + (h(u_\eta(t), \varphi), \zeta)_W, \quad \forall \varphi, \zeta \in W \tag{II.23}$$

Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in W$, on a, d'après la coercivité de l'opérateur C (II.10)(a), la monotonie de la fonction ϕ_L définie par (II.5) et les valeurs de la fonction ψ (voir (II.11)) qui sont positives, on trouve que

$$\begin{aligned}&(\mathbf{A}_\eta(t)\varphi_1 - \mathbf{A}_\eta(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W && \text{(II.24)}\\ &\ge m_C\, |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 + \int_{\Gamma_C} \psi(u_{\eta\nu}(t) - g)\Big(\phi_L(\varphi_1 - \varphi_0) - \phi_L(\varphi_2 - \varphi_0)\Big)(\varphi_1 - \varphi_2)\, da\\ &\ge m_C\, |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 && \text{(II.25)}\end{aligned}$$

nous utilisons la bornitude de l'opérateur C(II.10)(b), et celle de ψ ($|\psi(u_i - g)| \le M_\psi$), avec le fait que la fonction ϕ_L donnée par (II.5) est Lipschitzienne, en plus des inégalités de trace de Sobolev, on déduit

$$\begin{aligned}&(\mathbf{A}_\eta(t)\varphi_1 - \mathbf{A}_\eta(t)\varphi_2, \zeta)_W\\ &\le M_C\, |\varphi_1 - \varphi_2|_W\, |\zeta|_W + M_\psi \int_{\Gamma_C} |\varphi_1 - \varphi_2|\, |\zeta|\, da \quad \forall \zeta \in W,\\ &\le (M_C + M_\psi c_0^2)\, |\varphi_1 - \varphi_2|_W\, |\zeta|_W\,,\end{aligned}$$

ceci implique

$$|\mathbf{A}_\eta(t)\varphi_1 - \mathbf{A}_\eta(t)|_W \leq (M_C + M_\psi c_0^2)\,|\varphi_1 - \varphi_2|_W\,. \tag{II.26}$$

d'où $\mathbf{A}_\eta(t)$ est un opérateur fortement monotone et Lipschitzien sur W , donc il existe une unique $\varphi_\eta(t) \in W$, solution de l'équation $\mathbf{A}_\eta(t)\varphi_\eta(t) = q(t)$. Ce qui entraine $\varphi_\eta(t) \in W$ est unique solution du problème variationnel $\mathcal{P}_\eta^2$.

Nous démontrons maintenant que $\varphi_\eta \in W^{1,p}(0,T;W)$. Soit $t_1, t_2 \in [0,T]$, pour simplifier les notations, on pose $\varphi_\eta(t_i) = \varphi_i$, $u_{\eta\nu}(t_i) = u_i$, $q_b(t_i) = q_i$, pour $i = 1, 2$. En utilisant (II.10)(a), (II.9), nous trouvons

$$\begin{aligned}
&m_C\,|\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 + \int_{\Gamma_C} \psi(u_1 - g)\phi_L(\varphi_1 - \varphi_0) - \psi(u_2 - g)\phi_L(\varphi_2 - \varphi_0)\,(\varphi_1 - \varphi_2)\;da \\
&\leq c_E\,|u_1 - u_2|_V\,|\varphi_1 - \varphi_2|_W + |q_1 - q_2|_W\,|\varphi_1 - \varphi_2|_W\,;
\end{aligned} \tag{II.27}$$

nous ajoutons et retronchons la quantité $\int_{\Gamma_C} \psi(u_1 - g)\phi_L(\varphi_2 - \varphi_0)\,(\varphi_1 - \varphi_2)$ dans les deux membres de l'inégalité (II.27)

$$\begin{aligned}
&m_C\;|\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 + \int_{\Gamma_C} \psi(u_1 - g)\Big(\phi_L(\varphi_1 - \varphi_0) - \phi_L(\varphi_2 - \varphi_0)\Big)\;(\varphi_1 - \varphi_2)\;da \\
&+ \int_{\Gamma_C} \Big(\psi(u_1 - g) - \psi(u_2 - g)\Big)\phi_L(\varphi_2 - \varphi_0)\,(\varphi_1 - \varphi_2)\;da \\
&\leq c_E\,|u_1 - u_2|_V\,|\varphi_1 - \varphi_2|_W + |q_1 - q_2|_W\,|\varphi_1 - \varphi_2|_W\,;
\end{aligned}$$

ceci entaine que

$$\begin{aligned}
&m_C\;|\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 + \int_{\Gamma_C} \psi(u_1 - g)\Big(\phi_L(\varphi_1 - \varphi_0) - \phi_L(\varphi_2 - \varphi_0)\Big)\;(\varphi_1 - \varphi_2)\;da \\
&\leq c_E\,|u_1 - u_2|_V\,|\varphi_1 - \varphi_2|_W + |q_1 - q_2|_W\,|\varphi_1 - \varphi_2|_W \\
&\quad + \int_{\Gamma_C} |\psi(u_1 - g) - \psi(u_2 - g)\phi_L(\varphi_2 - \varphi_0)|\,|\varphi_1 - \varphi_2|\;da,
\end{aligned}$$

rappelons que $\psi \geq 0$, et ϕ_L monotone, on a

$$\psi(u_1 - g)\Big(\phi_L(\varphi_1 - \varphi_0) - \phi_L(\varphi_2 - \varphi_0)\Big)\;(\varphi_1 - \varphi_2)\;\geq 0. \tag{II.28}$$

Nous utilisons le fait que ψ est monotone, que $|\phi_L(\varphi_1 - \varphi_0)| \leq L$, avec les inégalités de traces, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&m_C\;|\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 \\
\leq\;&\Big[(c_E + L_\psi L c_0 \widetilde{c}_0)\;|u_1 - u_2|_V + |q_1 - q_2|_W\Big]\,|\varphi_1 - \varphi_2|_W\,.
\end{aligned} \tag{II.29}$$

ce qui entaine d'après (II.29) que

$$|\varphi_1 - \varphi_2|_W \leq \frac{(c_E + L_\psi L c_0 \widetilde{c}_0)}{m_C} |u_1 - u_2|_V + \frac{1}{m_C} |q_1 - q_2|_W . \tag{II.30}$$

Comme $u_\eta \in C^1([0,T];H)$, $q \in W^{1,p}(0,T;W)$(1.27), l'estimation (II.30) implique que $\varphi_\eta \in W^{1,p}(0,T;W)$.

Pour tout $t \in [0,T]$, soit $\eta_1, \eta_2 \in C([0,T];V)$, $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$, $u_{\eta_i} = u_i$, pour $i = 1,2$. Nous utilisons (II.27) et les mêmes arguments que la preuve de (II.29), nous obtenons

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W \leq \frac{1}{m_\beta}(c_E + L_\psi L c_0 \widetilde{c}_0) \; |u_1 - u_2|_V .$$

Ce qui donne l'estimation (III.13), ceci conclue donc la preuve du lemme 5. □

Nous considèrons maintenant l'opérateur $T : C([0,T];V) \to C([0,T];V)$ defini par

$$T\eta(t) = E^* \left(\varphi_\eta(t)\right) \qquad \forall\, \eta \in C([0,T];V), \;\; t \in [0,T]. \tag{II.31}$$

Pour tout $\eta \in C([0,T];V)$, φ_η est solution du problème $\mathcal{P}^2_\eta$, i.e $\varphi_\eta(t) \in W$, comme par définition de E^* avec le fait que $\varphi_\eta \in W^{1,2}(0,T,W)$, on déduit que $E^* \left(\varphi_\eta\right) \in C([0,T];V)$. L'opétateur T est bien défini. Nous montrons que T admet un unique point fixe.

Lemme 6. *Soit V un espace de Banach muni de la norme $|\cdot|_V$ et $T > 0$. Soit $T : C([0,T];V) \to C([0,T];V)$ un opérateur vérifiant*

$$|T\eta_1(t) - T\eta_2(t)|_V \leq c \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_V \, ds.$$

pour tout η_1,$\eta_2 \in C([0,T];V)$. Alors, il existe un unique $\bar{\eta} \in C([0,T];V)$ tel que $T\bar{\eta} = \bar{\eta}$.

Démonstration. soit $\eta_1, \eta_2 \in C([0,T];V)$ et notant u_i et φ_i les fonctions u_{η_i} et φ_{η_i} obtenues dans le lemme 1.29 lemme 5, pour $i = 1,2$. Soit $t \in [0,T]$. En utilisant (II.31) et (II.9), nous obtenons

$$|T\eta_1(t) - T\eta_2(t)|_V \leq c \; |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W ,$$

rappellons que d'une part (III.13), on trouve

$$|T\eta_1(t) - T\eta_2(t)|_V \leq c \; |u_1(t) - u_2(t)|_V . \tag{II.32}$$

et que d'autre part l'estimation (II.19) nous permet d'avoir

$$|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)|_V \leq c\Big(\; |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_V + |u_1(s) - u_2(s)|_V \; \Big).$$

Comme $u_i \in C^1(0,T,V)$, alors, on a

$$u_i(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}_i(s)\,ds$$

c'est à dire que

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V \leq \int_0^t |\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)|_V \; ds, \tag{II.33}$$

donc

$$|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)|_V \leq c\Big(|\eta_1(t) - \eta_2(t)|_V + \int_0^t |\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)|_V \; ds\Big).$$

On déduit d'après le lemme de Gronwall

$$\int_0^t |\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)|_V \; ds \leq c\int_0^s |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_V \; ds. \tag{II.34}$$

avec (II.32)–(II.34), on conclut que

$$|T\eta_1(t) - T\eta_2(t)|_V \leq \bar{c}\int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_V \; ds. \tag{II.35}$$

Pour montrer que T est une contraction, on muni l'espace $C([0,T];V)$ d'une norme équivalente Ã la norme classique $|\cdot|_{C([0,T];V)}$, notée $|\cdot|^*_{C([0,T];V)}$ et tel que

$$|u|^* = \max_{t\in[0,T]} e^{-\alpha t}\,|u|_V\,,$$

avec $\alpha > \bar{c}$. Reprenons l'inégalité (II.35) et multiplions la par $e^{-\alpha t}$, on a

$$\begin{aligned}
e^{-\alpha t}\,|T\eta_1(t) - T\eta_2(t)|_V &\leq \bar{c}e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}e^{-\alpha s}\,|\eta_1(s) - \eta_2(s)|_V \; ds\\
e^{-\alpha t}\,|T\eta_1(t) - T\eta_2(t)|_V &\leq \bar{c}e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}ds\,|\eta_1 - \eta_2|^*_{C([0,T];V)}\\
|T\eta_1 - T\eta_2|^*_{C([0,T];V)} &\leq \frac{\bar{c}}{\alpha}\,|\eta_1 - \eta_2|^*_{C([0,T];V)}\,,
\end{aligned}$$

avec le choix de α l'opérateur T est une contraction, d'où il existe un unique $\bar{\eta} \in C([0,T];V)$ tel que $T\bar{\eta} = \bar{\eta}$. Nous avons $\varphi_{\widetilde{\eta}} \in W^{1,p}(0,T;W)$, nous remplaçons η par $\bar{\eta}$ l'unique solution de $T\eta = \eta$ et tenons compte du fait que $T\eta\bar{(t)} = E^*\left(\varphi_{\bar{\eta}}(t)\right)$, nous déduisons alors que le couple $(u_{\bar{\eta}}, \varphi_{\bar{\eta}})$ est l'unique solution des problèmes respectifs $\mathcal{P}^1_{\bar{\eta}}$ et $\mathcal{P}^2_{\bar{\eta}}$. Par conséquent $(u_{\bar{\eta}}, \varphi_{\bar{\eta}})$ est l'unique solution du problème $\mathcal{P}_V$. La régularité donnée dans (II.16) est une conséquence du lemme 1.29 et 5. Ainsi s'achève la démonstration du théorème 14. □

2 Application : contact quasi-statique électro-viscoélastique avec compliance normale et frottement de Coulomb

Nous donnons ici l'exemple de contact avec frottement sec de Coulomb modélisé par la condition de compliance normale, d'un matériau électro-viscoélastique avec une fondation conductive.

Rappelons que les équations d'équilibre et d'état d'un corps électro-viscoélastique sont données par

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi \quad \textbf{dans } \Omega \times (0,T), \tag{II.36}$$

$$\mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\beta}\nabla\varphi \quad \textbf{dans } \Omega \times (0,T), \tag{II.37}$$

$$\operatorname{Div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \textbf{dans } \Omega \times (0,T), \tag{II.38}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} - q_0 = 0 \quad \textbf{dans } \Omega \times (0,T), \tag{II.39}$$

Les conditions au bord $\Gamma_D \cup \Gamma_N$ sont celles de Dirichlet et Neumann

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \textbf{sur } \Gamma_D \times (0,T), \tag{II.40}$$

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \mathbf{f}_N \quad \textbf{sur } \Gamma_N \times (0,T), \tag{II.41}$$

les conditions mécaniques au bord sur la surface de contact Γ_C sont les suivantes

$$\boldsymbol{\sigma}_\nu = -\,p_\nu\left(u_\nu - g\right)\textbf{, dans } \Gamma_3 \times (0,T)\,, \tag{II.42}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu p_\nu(u_\nu - g),\ \textbf{dans } \Gamma_3 \times (0,T)\,, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < \mu p_\nu(u_\nu - g) \Longrightarrow \dot{\mathbf{u}}_\tau = \mathbf{0}, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = \mu p_\nu(u_\nu - g) \Longrightarrow \exists\lambda > 0 \textbf{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda\dot{\mathbf{u}}_\tau, \end{array}\right. \tag{II.43}$$

Les conditions électriques sont données par

$$\varphi = 0 \quad \textbf{sur } \Gamma_a \times (0,T), \tag{II.44}$$

$$\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\nu} = q_b \quad \textbf{sur } \Gamma_b \times (0,T), \tag{II.45}$$

$$\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\nu} = \psi(u_\nu - g)\phi_L(\varphi - \varphi_0) \quad \textbf{sur } \Gamma_C \times (0,T), \tag{II.46}$$

La condition initiale est

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad \textbf{dans } \Omega. \tag{II.47}$$

On suppose que $mes\ \Gamma_D > 0$ **et** $mes\ \Gamma_a > 0$**. Nous donnons ici la liste des hypothèses sur les données du problème, comme suit**
L'opérateur de viscosité $\mathcal{A}$ **et un opérateur d'élasticité** $\mathcal{G}$ **satisfont les conditions :**

$$\left\{\begin{array}{l}\text{(a) } \mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d.\\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que}\\ \qquad \|\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)\| \leq L_{\mathcal{A}}\|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2\|\\ \qquad \forall\, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega.\\ \text{(c) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que}\\ \qquad (\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)) \cdot (\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2) \geq m_{\mathcal{A}}\|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2\|^2\\ \qquad \forall\, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \ \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega.\\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega,\\ \qquad \text{pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d.\\ \text{(e) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } \mathcal{H}.\end{array}\right. \tag{II.48}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{a) } \mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d,\\ \text{b) il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que}\\ |\mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)| \leq L_{\mathcal{G}}\,|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2|\,,\\ \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \ \text{ p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega, \ \text{ tel que}\\ \text{c) l'application } \boldsymbol{x} \longmapsto \mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \ \forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d,\\ \text{d) l'application } \boldsymbol{x} \longmapsto \mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } \mathcal{H}.\end{array}\right. \tag{II.49}$$

Le tenseur électrique $\mathcal{E}$ ***et le tenseur de permeabilité*** $\boldsymbol{\beta}$ **satisfont**

$$\left\{\begin{array}{l}\text{(a) } \mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}^d.\\ \text{(b) } \mathcal{E}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = (e_{ijk}(\mathbf{x})\tau_{jk}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Omega.\\ \text{(c) } e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega).\end{array}\right. \tag{II.50}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{(a) } \boldsymbol{\beta} : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d.\\ \text{(b) } \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{E}) = (\beta_{ij}(\mathbf{x})E_j) \quad \forall \mathbf{E} = (E_i) \in \mathbb{R}^d, \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Omega.\\ \text{(c) } \beta_{ij} = \beta_{ji} \in L^\infty(\Omega).\\ \text{(d) Il existe } m_\beta > 0 \ \text{ tel que } \ \beta_{ij}(\mathbf{x})E_iE_j \geq m_\beta\|\mathbf{E}\|^2\\ \forall \mathbf{E} = (E_i) \ \in {}^d, \ \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega.\end{array}\right. . \tag{II.51}$$

La fonction de compliance normale p_ν **satisfait**

$$\left\{\begin{array}{l}\text{(a) } p_\nu : \Gamma_C \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+.\\ \text{(b) } \exists\, L_\nu > 0 \text{ tel que } |p_\nu(\mathbf{x}, u_1) - p_\nu(\mathbf{x}, u_2)| \leq L_\nu|u_1 - u_2|\\ \forall\, u_1, u_2 \ \in \mathbb{R}, \ \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_C.\\ \text{(c) } \mathbf{x} \mapsto p_\nu(\mathbf{x}, u) \text{ mesurable sur } \Gamma_C, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}.\\ \text{(d) } \mathbf{x} \mapsto p_\nu(\mathbf{x}, u) = 0, \text{ pour tout } u \leq 0.\end{array}\right. \tag{II.52}$$

Nous posons

$$\begin{aligned}
&H = \{\boldsymbol{u} = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\} = \left(L^2(\Omega)\right)^d,\\
&\mathcal{W} = \{\boldsymbol{D} \in H \mid div\boldsymbol{D} \in L^2(\Omega)\},\\
&\mathcal{H} = \left\{\boldsymbol{\sigma} = (\sigma)_{ij} \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\right\},\\
&H_1 = \{\boldsymbol{u} = (u_i) \mid \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \in \mathcal{H}\},\\
&\mathcal{H}_1 = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} \mid Div\boldsymbol{\sigma} \in H\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &= \{\mathbf{v} \in H_1 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_D\},\\
W &= \{\zeta \in H^1(\Omega) : \zeta = 0 \text{ sur } \Gamma_a\},
\end{aligned}$$

où $H^1(\Omega)$ est l'espace de Sobolev classique, définit sur $L^2(\Omega)$. Les espaces V, W sont munis de produits scalaires respectifs

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}, \quad (\varphi, \zeta)_W = (\nabla\varphi, \nabla\zeta)_{L^2(\Omega)} \tag{II.53}$$

Moyennant l'hyopthèse sur la mesure de Γ_D et Γ_a, on a les inégalités de Korn et Friedrichs-Poincaré suivantes

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})|_{\mathcal{H}} &\geq c_F\, |\mathbf{v}|_{H_1} \quad \forall\, \mathbf{v} \in V,\\
|\varphi|_W &\geq \tilde{c}_F\, |\varphi|_{H^1} \quad \forall \varphi \in W.
\end{aligned} \tag{II.54}$$

où $c_F > 0$ est une constante dépendante seulement de Ω, Γ_a et Γ_C. Comme on a d'après le théorème de trace de Sobolev, l'existence d'une constante c_0, dépendante de Ω, Γ_a et Γ_C, tel que

$$\|\zeta\|_{L^2(\Gamma_C)} \leq c_0 \|\zeta\|_W \quad \forall\, \zeta \in W, \tag{II.55}$$

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_C)^d} \leq \widetilde{c}_0 \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall\, \mathbf{v} \in V. \tag{II.56}$$

La fonction seuil g, le potential φ_0, la fonction de friction μ, les forces volumiques et surfaciques, les densités de charges q_0, q_b et le déplacement initial u_0 satisfont

$$g \in L^2(\Gamma_3), g \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3, \quad \varphi_0 \in L^2(\Gamma_3), \tag{II.57}$$

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3), \mu \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3, \quad |\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq \mu_0, \tag{II.58}$$

$$\boldsymbol{f}_0 \in W^{1,p}\left(0, T; L^2(\Omega)^d\right), \ \boldsymbol{f}_2 \in W^{1,p}\left(0, T; L^2(\Gamma_2)^d\right), \tag{II.59}$$

$$q_0 \in W^{1,p}\left(0, T; L^2(\Omega)\right), \ q_b \in W^{1,p}\left(0, T; L^2(\Gamma_b)\right), \tag{II.60}$$

$$u_0 \in V. \tag{II.61}$$

2.1 Formulation variationnelle du problème

Nous multiplions l'équation (II.38) par $\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}}$ où $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, on a

$$\int_\Omega div\sigma\ (\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}})dx=\int_\Omega f_0(\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}})dx,$$

en appliquant la formule de Green sur σ que l'on suppose assez régulier

$$\int_\Omega \sigma\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}})dx-\int_\Gamma(\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}})\sigma\nu ds=\int_\Omega f_0(\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}})dx,$$

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)),\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})-\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}}+(\mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)),\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}}\\ &+(\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t),\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}}-\textstyle\int_\Gamma(\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}})\sigma\nu ds=(f_0,\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}})_V\ ,\end{aligned}\tag{II.62}$$

Comme, on a $v_\nu=\boldsymbol{v}\cdot\nu$ et $\boldsymbol{v}_\tau=\boldsymbol{v}-v_\nu\nu$, $\sigma_\nu=(\boldsymbol{\sigma}\nu)\cdot\nu$ et $\boldsymbol{\sigma}\nu=\boldsymbol{\sigma}_\tau+\sigma_\nu\nu$, on utilise la décomposition en composantes normales et tangentielles du vecteur déplacement et du vecteur contrainte sur Γ :

$$\begin{aligned}u_\nu=u_in_i,&\quad \mathbf{u}_\tau=\mathbf{u}-u_\nu n\\ \sigma_\nu=\sigma_{ij}n_in_j,&\quad (\sigma_\tau)_i=\sigma_{ij}n_j-\sigma_\nu n_i,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\int_\Gamma\sigma n(\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}})da&=\int_{\Gamma_N}\sigma\nu(\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}})da+\int_{\Gamma_D}\sigma\nu(\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}})da+\int_{\Gamma_C}\sigma\nu(\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}})da,\\ &=\int_{\Gamma_D}f_N(\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}})da+\int_{\Gamma_C}\left[\sigma_\tau(\mathbf{v}_\tau-\dot{\mathbf{u}}_\tau)+\sigma_\nu(v_\nu-\dot{u}_\nu)\right]da;\\ &=\int_{\Gamma_D}f_N(\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}})da+\int_{\Gamma_C}\sigma_\tau(\mathbf{v}_\tau-\dot{\mathbf{u}}_\tau)da+\int_{\Gamma_C}\sigma_\nu(v_\nu-\dot{u}_\nu)da;\end{aligned}$$

Comme d'une part de la condition au bord (II.43), on a

$$\begin{aligned}-\textstyle\int_{\Gamma_C}\sigma_\tau(\mathbf{v}_\tau-\dot{\mathbf{u}}_\tau)\,da&=\textstyle\int_{\Gamma_C}(-\sigma_\tau\mathbf{v}_\tau+\sigma_\tau\dot{\mathbf{u}}_\tau)\ da\\ &\leq\textstyle\int_{\Gamma_C}\|\sigma_\tau\|\,\|\mathbf{v}_\tau\|\ da+\int_{\Gamma_C}\sigma_\tau\dot{\mathbf{u}}_\tau\ da,\\ &\leq\textstyle\int_{\Gamma_C}\|\sigma_\tau\|\,\|\mathbf{v}_\tau\|\ da-\int_{\Gamma_C}\lambda\,\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|\,\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|\ \ da,\end{aligned}$$

rappelons que $\lambda\,\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|=\|\sigma_\tau\|$ et $\|\sigma_\tau\|=\mu p_\nu(u_\nu-g)$, alors

$$-\int_{\Gamma_C}\sigma_\tau(\mathbf{v}_\tau-\dot{\mathbf{u}}_\tau)\,da\leq\int_{\Gamma_C}\mu p_\nu(u_\nu-g)\|\mathbf{v}_\tau\|\,da-\int_{\Gamma_C}\mu p_\nu(u_\nu-g)\,\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|\ da,$$

et d'autre part d'après (II.42), on a

$$\begin{aligned}-\int_{\Gamma_C}\sigma_\nu(v_\nu-\dot{u}_\nu)da&=\int_{\Gamma_C}p_\nu\,(u_\nu-g)\,(v_\nu-\dot{u}_\nu)da\\ &=\int_{\Gamma_C}p_\nu\,(u_\nu-g)\,v_\nu da-\int_{\Gamma_C}p_\nu\,(u_\nu-g)\,\dot{u}_\nu da\end{aligned}$$

L'équation (II.62) devient

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} \\ + \textstyle\int_{\Gamma_C} \mu p_\nu(u_\nu - g)\|\mathbf{v}_\tau\|\, da - \int_{\Gamma_C} \mu p_\nu(u_\nu - g)\,\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|\; da \\ + \textstyle\int_{\Gamma_C} p_\nu\,(u_\nu - g)\, v_\nu da - \int_{\Gamma_C} p_\nu\,(u_\nu - g)\, \dot{u}_\nu da \\ \geq (f_0, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}})_V + \textstyle\int_{\Gamma_D} f_N(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) da,\end{aligned}$$

Nous définissons les fonctionnelles $j : V \times V \to \mathbb{R}$, $f : [0, T] \to V$, par

$$j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_C} p_\nu(u_\nu - g) v_\nu\, da + \int_{\Gamma_C} \mu p_\nu(u_\nu - g)\|\mathbf{v}_\tau\|\, da, \tag{II.63}$$

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V = \int_\Omega \mathbf{f}_0(t)\mathbf{v}\, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{f}_N(t)\mathbf{v}\, da, \tag{II.64}$$

pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\varphi, \zeta \in W$ et $t \in [0, T]$, on a la formulation variationnelle suivante

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} \\ + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V,\end{aligned} \tag{II.65}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \tag{II.66}$$

Il est facile de voir que si l'équation (II.39) est multipliée par une fonction test $\zeta \in W$, nous obtenons

$$(\boldsymbol{\beta}\nabla\varphi(t), \nabla\zeta)_W - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \nabla\zeta)_W + (h(\mathbf{u}(t), \varphi(t)), \zeta)_W = (q(t), \zeta)_W, \tag{II.67}$$

où $h : V \times W \to W$ et $q : [0, T] \to W$ sont définies par

$$(h(\mathbf{u}, \varphi), \zeta)_W = \int_{\Gamma_C} \psi(u_\nu - g)\phi_L(\varphi - \varphi_0)\zeta\, da, \tag{II.68}$$

$$(q(t), \zeta)_W = -\int_\Omega q_0(t)\zeta\, dx - \int_{\Gamma_b} q_b(t)\zeta\, da. \tag{II.69}$$

Problème $(\mathcal{P}_0)$ **Trouver le déplacement** $\mathbf{u} : \boldsymbol{\Omega}\times [0, T] \to V$ **et le potentiel électrique** $\varphi : [0, T] \to W$ **qui satisfont (II.65), (II.66) et (II.67).**

2.2 Existence et unicité des solutions du problème $(\mathcal{P}_0)$

L'existence et unicité des solutions du problème $(\mathcal{P}_0)$ est une application directe du théorème 14.

Théorème 15. *On suppose que les conditions (II.48)-(II.61) sont vérifiées, alors il existe une unique solution* (u, φ) *du problème* $(\mathcal{P}_0)$ *vérifiant la régularité (II.16).*

Démonstration. Soit $A : V \to V$ et $B : V \to V$ deux opérateurs donnés par

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}, \quad (B\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}},$$

pour tout u, $v \in V$, en utilisant (II.48(a)) et (II.49(b)), les opérateurs A et B sont continuement Lipschitzien. Les hypothèses (1.36) et (II.48(c)) montrent que A est monotone sur V,

$$(A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V \geq m_A \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 \quad \forall\, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V.$$

Comme les conditions (II.52) et (3) sont vérifiées, la fonctionelle j définie par (II.63) satifait (III.8), en effet $j(u, \cdot)$ est convexe par rapport à la deuxième variable, on a

$$\begin{aligned}
j(\mathbf{u}, t\mathbf{v}+(1-t)\,w) &= \int_{\Gamma_C} p_\nu(u_\nu - g)\,(tv_\nu + (1-t)\,w_\nu)\;da \\
&\quad + \int_{\Gamma_C} \mu p_\nu(u_\nu - g)\|t\mathbf{v}_\tau + (1-t)\,\mathbf{w}_\tau\|\,da, \\
&\leq t\int_{\Gamma_C} p_\nu(u_\nu - g)v_\nu + (1-t)\int_{\Gamma_C} p_\nu(u_\nu - g)w_\nu + \\
&\quad t\int_{\Gamma_C} \mu p_\nu(u_\nu - g)\|\mathbf{v}_\tau\| + (1-t)\int_{\Gamma_C} \mu p_\nu(u_\nu - g)\|\mathbf{w}_\tau\|\,da \\
&\leq t\left[\int_{\Gamma_C} p_\nu(u_\nu - g)v_\nu + \int_{\Gamma_C} \mu p_\nu(u_\nu - g)\|\mathbf{v}_\tau\|\right] + \\
&\quad (1-t)\left[\int_{\Gamma_C} p_\nu(u_\nu - g)v_\nu + \int_{\Gamma_C} \mu p_\nu(u_\nu - g)\|\mathbf{v}_\tau\|\right].
\end{aligned}$$

Elle est semi continue inférieurement par rapport à la deuxième variable, en effet soit $(\mathbf{v}_n)_n \in V$ convergente faiblement dans V, alors elle est bornée dans V, d'après le théorème de trace de Sobolev (II.56)

$$\|\mathbf{v}_n\|_{L^2(\Gamma_C)} \leq \tilde{c}_0\|\mathbf{v}_n\|_V \leq \text{cste.}, \tag{II.70}$$

la suite $(\mathbf{v}_n)_n$ est donc bornée $L^2(\Gamma_C)$, ce qui entraine que les suites $(v_{\nu n})_n$ et $(\|\mathbf{v}_{\tau n}\|)_n$ sont bornées dans $L^2(\Gamma_C)$, donc elles sont faiblement convergentes vers respectivement v_ν et $\mathbf{v}_\tau$, nous avons donc pour une fonction $\mu p_\nu(u_\nu - g) \in L^2(\Gamma_C)$,

$$\int_{\Gamma_C} p_\nu(u_\nu - g)v_{n\nu}\;da \underset{n\to\infty}{\to} \int_{\Gamma_C} p_\nu(u_\nu - g)v_\nu da, \tag{II.71}$$

$$\int_{\Gamma_C} \mu p_\nu(u_\nu - g)\|\mathbf{v}_{n\tau}\|\;da \underset{n\to\infty}{\to} \int_{\Gamma_C} \mu p_\nu(u_\nu - g)\|\mathbf{v}_\tau\|da. \tag{II.72}$$

en faisant la somme des deux termes (II.71) et (II.72) on trouve que

$$j(\mathbf{u}, \mathbf{v}_n) \underset{n\to\infty}{\to} j\,(u, \mathbf{v})\,,$$

d'où $j\,(u, \cdot)$ est semi continue inférieurement par rapport $\mathbf{v}$ et cela pour tout $\mathbf{u} \in V$. En vue du théorème de trace de Sobolev (II.56) la fonctionnelle j vérifie $\forall\, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$,

$$j(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + j(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) =$$

$$\begin{array}{c}
\int_{\Gamma_C} p_\nu(u_{1\nu} - g)v_{2\nu} da + \int_{\Gamma_C} \mu p_\nu(u_{1\nu} - g)\|\mathbf{v}_{2\tau}\| da \\
- \int_{\Gamma_C} p_\nu(u_{1\nu} - g)v_{1\nu} da - \int_{\Gamma_C} \mu p_\nu(u_{1\nu} - g)\|\mathbf{v}_{1\tau}\| da + \\
\int_{\Gamma_C} p_\nu(u_{2\nu} - g)v_{1\nu} da + \int_{\Gamma_C} \mu p_\nu(u_{2\nu} - g)\|\mathbf{v}_{1\tau}\| da \\
- \int_{\Gamma_C} p_\nu(u_{2\nu} - g)v_{2\nu} da - \int_{\Gamma_C} \mu p_\nu(u_{2\nu} - g)\|\mathbf{v}_{2\tau}\| da
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
= \left[\int_{\Gamma_C} p_\nu(u_{1\nu} - g)v_{2\nu} da - \int_{\Gamma_C} p_\nu(u_{2\nu} - g)v_{2\nu} da\right] \\
+ \left[\int_{\Gamma_C} p_\nu(u_{2\nu} - g)v_{1\nu} da - \int_{\Gamma_C} p_\nu(u_{1\nu} - g)v_{1\nu} da\right] \\
+ \left[\int_{\Gamma_C} \mu p_\nu(u_{1\nu} - g)\|\mathbf{v}_{1\tau}\| da + \int_{\Gamma_C} \mu p_\nu(u_{2\nu} - g)\|\mathbf{v}_{1\tau}\| da\right] \\
+ \left[\int_{\Gamma_C} \mu p_\nu(u_{1\nu} - g)\|\mathbf{v}_{2\tau}\| da - \int_{\Gamma_C} \mu p_\nu(u_{2\nu} - g)\|\mathbf{v}_{2\tau}\| da\right]
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\leq L_\nu \left|u_{1\nu} - u_{2\nu}\right|_{L^2(\Gamma_C)} \left|v_{1\nu} - v_{2\nu}\right|_{L^2(\Gamma_C)} + L_\nu \left|\mu\right|_{L^\infty(\Gamma_C)} \left|u_{1\nu} - u_{2\nu}\right|_{L^2(\Gamma_C)} \left|\|\mathbf{v}_{1\tau}\| - \|\mathbf{v}_{2\tau}\|\right|_{L^2(\Gamma_C)} \\
\leq L_\nu \left(1 + |\mu|_{L^\infty(\Gamma_C)}\right) |u_1 - u_2|_{L^2(\Gamma_C)} |v_1 - v_2|_{L^2(\Gamma_C)}, \\
\leq \tilde{c}_0^2 L_\nu \left(1 + |\mu|_{L^\infty(\Gamma_C)}\right) |u_1 - u_2|_V |v_1 - v_2|_V .
\end{array}$$

il existe $m > 0$, $m = \tilde{c}_0^2 L_\nu \left(1 + |\mu|_{L^\infty(\Gamma_C)}\right)$, tel que la fonctionnelle j vérifie la propriété (III.8(b))
En utilisant le théorème de représentation de Riesz, nous définissons les opérateurs $C : W \to W$ et $E : V \to W$ par

$$\begin{aligned}
(C\varphi(t), \zeta)_W &= (\boldsymbol{\beta}\nabla\varphi(t), \nabla\zeta)_W - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \nabla\zeta)_W, \\
(E(u_\eta(t)), \zeta)_W &= (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \nabla\zeta)_W.
\end{aligned}$$

Il est simple de voir que la fonctionnelle $h(\mathbf{u}(t), \varphi(t))$ et $q(t)$ données par (II.68) et (II.69) coincident avec (1.37) et (1.27) du problème $(\mathcal{P}_V)$. Ainsi toutes les conditions du théorème 14 sont vérifiées, le problème $(\mathcal{P}_0)$ admet donc une solution unique vérifiant (II.16). □

Chapitre III

Problème dynamique de contact frottant

1 Introduction

Nous nous intéressons ici au problème de contact frottant lorsque l'on tient compte des termes d'inertie dans les équations d'équilibre, le processus est alors dynamique. Le système variationnel qui y découle est formé d'une inéquation d'evolution de type hyperbolique et d'une équation elliptique en temps. L'étude du cas dynamique de contact d'un corps piézoélectrique avec une fondation rigide ou déformable n'a pas conduit à beaucoup de travaux vû la complexité de la modélisation des problèmes de contact en plus des propriétés piézoélectriques du matériau, nous citons l'exemple de [7, 13, 21, 32, 41]. Dans ce chapitre nous allons étudier l'existence et l'unicité de solutions d'un problème variationnnel modélisant un contact frottant avec une fondation déformable et isolante. Le corps est supposé électro-viscoélastique avec une partie élastique linéaire et la partie viscosité non linéaire. A la surface de contact la composante normale du tenseur de contrainte est donné par une loi normale de compliance et la composante tangentielle suit la de loi de Coulomb, ce qui assure une condition au bord avec un comportement monotone en terme de sous-différentiel. La technique que nous utilisons repose sur des résultats classiques sur les inclusions différentielles et la méthode du point fixe.
Soit à résoudre le problème variationnel $\mathcal{P}_V$ suivant

Problème $\mathcal{P}_V$.

Trouver le déplacement $u : [0, T] \to V$ et le potentiel électrique $\varphi : [0, T] \to W$ tel que

$$\begin{aligned}&\langle \ddot{u}(t), v - \dot{u}(t)\rangle_H + \langle A\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)\rangle_V + \langle Bu(t), v - \dot{u}(t)\rangle_V +\\&\langle E^*\varphi(t), v - \dot{u}(t)\rangle_V + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_H,\end{aligned} \tag{III.1}$$

pout tout $v \in V$ et p.p. $t \in [0, T]$,

$$(C\varphi(t), \zeta)_W - (Eu(t), \zeta)_W = (q(t), \zeta)_W, \tag{III.2}$$

pour tout $\zeta \in W$ et p.p. $t \in [0,T]$, avec

$$u(0) = u_0, \qquad \dot{u}(0) = v_0. \tag{III.3}$$

Les espaces V et W sont respectivement l'espace des déplacements et des potentiels admissibles ce sont des espaces de Banach vérifiant $V \subset H \subset V'$ et $W \subset \boldsymbol{H} \subset W'$, avec H et $\boldsymbol{H}$ sont des espaces de Banach réflexifs. Les opérateurs A, B, E, E^*,C et D sont respectivement les opérateurs liés aux lois életro-mécanique données precèdemment dans le chapitre1. Nous présentons ici les hypothèses sur les données. On suppose que A est non linéaire fortement monotone et continuement Lipshitzien sur V et B est un opérateur linéaire continu symétrique coercif dans V i.e.

$$\begin{cases} \textbf{(a) } A : V \to V. \\ \textbf{(b) Il existe } L_A > 0 \textbf{ tel que} \\ \qquad |Au_1 - Au_2|_V \leq L_A \, |u_1 - u_2|_V \qquad \forall\, u_1, u_2 \in \mathbb{V}. \\ \textbf{(c) il existe } m_A > 0 \textbf{ tel que} \\ \qquad (Au_1 - \ Au_2, u_1 - u_2)_V \geq m_A \, |u_1 - u_2|_V^2 \quad u_1, u_2 \in \mathbb{V}, \\ \textbf{e) } A \textbf{ borné, i.e. il existe } c_A > 0 \textbf{ tel que} \\ \qquad |Au|_V \leq c_A, \ \forall u \in B\,(0, r)\,,\ r > 0. \end{cases} \tag{III.4}$$

$$\begin{cases} \textbf{(a) } B : V \to V \textbf{ linéaire continu ;} \\ \textbf{(b) il existe } \alpha_B > 0 \ , \ \omega_B \in \mathbb{R} \textbf{ tel que} \\ \qquad (Bu, Bu)_V + \omega_B \, |u|_H{}^2 \geq \alpha_B \, |u|_V{}^2 \qquad \forall\, u_1, u_2 \in \mathbb{V}. \end{cases} \tag{III.5}$$

les opérateurs E^* et E sont linéaires et vérifient

$$\begin{cases} \textbf{(a) } E^* : W \to V. \\ \textbf{(b) il existe } C_{E^*} > 0 \textbf{ tel que} \\ \qquad |E^* w|_V \leq C_{E^*} \, |w|_W \,, \qquad \forall\, u \in V, \\ \textbf{(c) } E : V \to W \\ \qquad |Eu|_W \leq C_E \, |u|_V \qquad \forall\, u \in V, \\ \textbf{(d) } \ \langle E^* w, v \rangle_V = \langle w, Eu \rangle_W \,; \forall\, u \in V, \ \forall\, u \in V, \forall\, w \in W. \end{cases} \tag{III.6}$$

C est un opérateur linéaire coercif

$$\begin{cases} \textbf{(a) } C : W \to W. \\ \textbf{(b) il existe } M_C > 0 \textbf{ tel que} \\ \qquad |C\tau|_W \leq M_C \, |\tau|_W \qquad \forall\, \tau \in W. \\ \textbf{(c) il existe } L_C > 0 \ \textbf{ tel que} \\ \qquad (C\tau, C\tau)_W \geq m_C \, |\tau|_W^2 \qquad \forall\, \tau \in W. \end{cases} \tag{III.7}$$

La fonctionnelle $j : X \times X \to \mathbb{R}$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(a) } j(u,\cdot) \;\; \textbf{est convexe s.c.i. dans } V \;\; \textbf{pour tout } u \in V. \\ \text{(b) } \textbf{il existe } m > 0 \;\; \textbf{tel que} \\ \qquad j(u_1,v_2) - j(u_1,v_1) + j(u_2,v_1) - j(u_2,v_2) \\ \qquad\quad \leq m \, |u_1 - u_2|_V \, |v_1 - v_2|_V \quad \forall\, u_1,u_2,v_1,v_2 \in V. \end{cases} \tag{III.8}$$

Nous supposons aussi

$$f \in W^{1,1}(0,T;H), \tag{III.9}$$

$$q \in W^{1,\infty}(0,T;\boldsymbol{H}), \tag{III.10}$$

$$u_0 \in V \;\; \textbf{,} \;\; v_0 \in D(\partial j_2) \quad \textbf{avec} \tag{III.11}$$

$$\langle Av_0, v - v_0\rangle_H + \langle Bu_0, v - v_0\rangle_V + j(u_0,v) - j(u_0,v_0)$$

$$\geq \langle f(0), v - v_0\rangle_{V"} \quad \forall v \in V. \tag{III.12}$$

ici ∂j_2 est le sous-différentiel de la fonction j par rapport la deuxième variable au sens de l'analyse convexe. Remarquons que le système d'équations est couplé. Nous réduisons son étude à celle d'une inéquation variationnelle, par le bias d'un résultat que l'on présente dans le paragraphe suivant.

1.1 Existence et unicité du potentiel électrique φ

Lemme 7. *Sous les hypothèses (III.6, III.7) et pour tout $u(t) \in V$, il existe une unique solution $\varphi_u \in W$ vérifiant l'equation (III.2). L'application $S : u \longmapsto \varphi_u$ est Lipshitzienne. Si de plus $u \in W^{1,\infty}(0,T,V)$ alors $\varphi_u \in W^{1,\infty}(0,T,W)$. Soient φ_{u_1}et φ_{u_2} deux solutions de (III.2) correspondant Ã respectivement à u_1, $u_2 \in W^{1,\infty}(0,T,W)$ alors il existe $c > 0$, tel que*

$$|\varphi_{u_1}(t) - \varphi_{u_2}(t)|_W \leq \frac{C_E}{m_C} \, |u_{u_1}(t) - u_{u_2}(t)|_V \quad p.p.\, t \in (0,T). \tag{III.13}$$

Démonstration. **Existence et unicité**

Soit $t \in [0,T]$ et soit $u(t) \in V$ fixé, il est est clair que lorsqu'on pose $f(t) = Eu(t)+q(t)$, f est une forme linéaire de W dans $\mathbb{R}$, l'équation variationnelle (III.2) admet donc une solulion unique $\varphi(t)$ dans W (théorème de Lax-Milgram). Pour deux valeurs u_1 et u_2 correspondent deux solutions φ_{u_1} et φ_{u_2} vérifient

$$(C(\varphi_{u_1} - \varphi_{u_2}), \varphi_1 - \varphi_2)_W = (E(u_1 - u_2), \varphi_{u_1} - \varphi_{u_2})_W,$$

de la coercivité de C et l'hypothèse (III.6), on trouve

$$|\varphi_{u_1} - \varphi_{u_2}|_W \leq \frac{C_E}{m_C} |u_1 - u_2|_V .$$

D'où l'application $S : u \longmapsto \varphi_u$ est Lipshitzienne sur V.

Régularité

Si on suppose maintenant que $u \in W^{1,\infty}(0,T,V)$, soit $t_i \in [0,T]$, $i = 1,2$, posons $u_i(t) = u_i$ et $\varphi_i(t) = \varphi_i$, $i = 1,2$, remplaçons les respectivement dans (III.2) et utilisons une autre fois la coercivité de C et l'hypothèse (III.6), on trouve

$$|\varphi_1 - \varphi_2|_W \leq \frac{C_E}{m_C} |u_1 - u_2|_V .$$

Ceci montre que si $u \in W^{1,\infty}(0,T,V)$, alors $\varphi \in W^{1,\infty}(0,T,W)$. □

1.2 Existence et unicité du champ de déplacement u

Théorème 16. *On suppose III.4–III.12 sont satisfaites. Alors il existe une solution unique u du Problème $\mathcal{P}_V$ et satisfait*

$$u \in W^{1,\infty}(0,T;V) \cap W^{2,\infty}(0,T;H). \tag{III.14}$$

Nous notons par cste. une constante positive indépendante du temps et dont sa valeur peut changer d'une ligne à l'autre.

Posons $Su(t) = \varphi(t)$ où $\varphi(t)$ est solution de l'équation de (III.2) correspondent à la solution $u(t)$ de l'inéquation (III.1). Cette dernière s'écrit

$$\begin{aligned}&\langle \ddot{u}(t), v - \dot{u}(t)\rangle_H + \langle A\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)\rangle_V + \langle Bu(t), v - \dot{u}(t)\rangle_V + \\ &\langle E^*Su(t), v - \dot{u}(t)\rangle_V + j(u(t),v) - j(u(t),\dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_H, \quad \textbf{p.p. } t, \quad v \in V.\end{aligned} \tag{III.15}$$

où $\langle \cdot,\cdot\rangle_H$ est le produit de dualité entre V et V'. Remarquons que (III.2) s'écrit sous forme d'inclusion différentielle suivante

$$\ddot{u}(t) + A\dot{u}(t) + Bu(t) + \partial j_2\left(u(t),\dot{u}(t)\right) + E^*Su(t) \ni f(t), \quad \textbf{p.p. } t \in [0,T],$$

Résoudre le problème $\mathcal{P}_V$ est équivalent à résoudre le problème suivant noté $\mathcal{P}_I$

$$\begin{aligned}&\ddot{u}(t) + Bu(t) + R(u(t),\dot{u}(t)) + E^*Su(t) \ni f(t), \quad \textbf{p.p. } t \in [0,T], \\ &u(0) = u_0, \qquad \dot{u}(0) = v_0,\end{aligned} \tag{III.16}$$

où l'opérateur $R(u,\dot{u}) = A\dot{u} + \partial j_2\left(u,\dot{u}\right)$.

1.2.1 Existence et unicité de solution du problème $\mathcal{P}_I$

Théorème 17. *On suppose que les conditions III.4–III.12 sont satisfaites. Alors,*

1. *il existe une solution unique u du Problème $\mathcal{P}_I$. La solution u satisfait*

$$u \in W^{1,\infty}(0,T;V) \cap W^{2,\infty}(0,T;H). \tag{III.17}$$

2. *il existe une solution unique vérifiant l'équation (III.2) avec*

$$\varphi \in W^{1,\infty}(0,T;W). \tag{III.18}$$

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de $\mathcal{P}_I$, nous cherchons la solution d'un problème intermédiaire et nous utilisons des résultats classiques sur l'existence de solutions des inclusions différentielles et la méthode du point fixe. Soit une fonction avec $\mu \in W^{1,\infty}(0,T;V)$ fixé tel que $\mu(0) = u_0$ et soit le problème noté $\mathcal{P}_I^\mu$, trouver $u : [0,T] \to V$ vérifiant

$$\begin{aligned} &\ddot{u}(t) + R(\mu(t), \dot{u}(t)) + Bu(t) \ni F(t), \quad \textbf{p.p. } t \in [0,T]\,\textbf{,} \\ &u(0) = u_0\textbf{,} \qquad \dot{u}(0) = v_0\textbf{,} \end{aligned} \tag{III.19}$$

1.2.2 Existence et unicité de solution du problème $\mathcal{P}_I^\mu$

Lemme 8. *Sous les hypothèses III.4–III.12, il existe une solution unique u au Problème $\mathcal{P}_I^\mu$ avec $u \in W^{1,\infty}(0,T;V) \cap W^{2,\infty}(0,T;H)$.*

Si u_1 et u_2 sont deux solutions de $\mathcal{P}_I^\mu$ correspondantes aux données $\eta_1, \eta_2 \in W^{1,\infty}(0,T;V)$, alors il existe $c > 0$ tel que

$$|\dot{u}_1 - \dot{u}_2|_{L^2(0,t;V)} \leq cste. \left\{ |\mu_2 - \mu_1|_{L^2(0,t;V)} + |u_1 - u_2|_{L^2(0,t;V)} \right\}. \tag{III.20}$$

Démonstration. Nous allons appliquer le théorème 13 au problème $\mathcal{P}_I^\mu$. En effet nous posons $Au(t) = Bu(t)$ et $F_\mu(t) = f(t) + E^* S\mu(t)$ et $M(\dot{u}(t)) = R(\mu(t), \dot{u}(t))$.

On a $B : V \to V'$ est par hypothèse un opérateur linéaire continu symétrique et coercif. La fonction F_μ est dans $W^{1,1}(0,T;V)$ puisque que E^*S est un opérateur Lipshitzien borné dans V et $\mu \in W^{1,\infty}(0,T;V)$. L'opérateur multivoque $M : V \to 2^{V'}$ est maximal monotone par rapport à $\dot{u}(t)$, il est en fait la somme de deux opérateurs le premier A qui est par hypothèse (III.4 (a)-(e)) monotone continu (donc hémicontinu) borné et du deuxième opérateur $\partial j_2(\mu(t), \dot{u}(t))$ qui est le sous differentiel d'une fonction propre convexe semi continue inférieurement, il est donc maximal monotone. On conclut d'après les résultats d'analyse fonctionnelle sur les opérateurs maximaux monotones que la somme $R\big(\mu(t), \dot{u}(t)\big)$ est maximal monotone (voir par exemple barbu [8]).

Comme $u_0 \in V$, $v_0 \in D(\partial j_2)$ et de plus comme la condition (III.12) est vérifiée avec $\mu(0) = u_0$ et $f(0) \in V \subset H$, donc ceci entraine qu'il existe un élement $(f(0))$ à la fois dans $(Bu_0 + Mv_0)$ et dans H, d'où la condition (I.36) $Bu_0 + Mv_0 \cap H \neq \varnothing$ est vérifiée. Les conditions du théorème 13 sont toutes vérifiées, il existe donc une solution unique $u_\mu \in W^{1;\infty}(0,T;V) \cap W^{2;\infty}(0,T;H)$ solution du problème $\mathcal{P}_I^\mu$.

Soit maintenant deux fonctions μ_1 μ_2 de $W^{1;\infty}(0,T;V)$ et $u_{\mu_1}(t)$, $u_{\mu_2}(t)$ notées respectivement u_1 et u_2 les deux solutions des problèmes respectifs $\mathcal{P}_I^{\mu_1}$ et $\mathcal{P}_I^{\mu_2}$. Rapellons que $\mathcal{P}_I^{\mu_i}$ $i = 1,2$ s'écrivent aussi

$$\begin{aligned}&\langle \ddot{u}_i, v - \dot{u}_i\rangle_H + \langle A\dot{u}_i, v - \dot{u}_i\rangle_V + \langle Bu_i, v - \dot{u}_i\rangle_V + \\ &+ j(\mu_i, v) - j(\mu_i, \dot{u}_i) \geq (F_{\mu_i}, v - \dot{u}_i)_H, \quad v \in V.\end{aligned} \tag{III.21}$$

En remplaçant respectivement dans (III.21) v par $\dot{u}_2$ ensuite par $\dot{u}_1$ et en soustrayant les deux problèmes obtenus on trouve

$$\begin{aligned}&\langle \ddot{u}_2 - \ddot{u}_1, \dot{u}_2 - \dot{u}_1\rangle_H + \langle A\dot{u}_2 - A\dot{u}_1, \dot{u}_2 - \dot{u}_1\rangle_V + \langle B(u_2 - u_1), \dot{u}_2 - \dot{u}_1\rangle_V + \\ &+ j(\mu_2, \dot{u}_1) - j(\mu_2, \dot{u}_2) + j(\mu_1, \dot{u}_2) - j(\mu_1, \dot{u}_1) \leq (E^* S(\mu_2 - \mu_1), \dot{u}_2 - \dot{u}_1)_H,\end{aligned}$$

en utilisant la propriété de la forte monotonie de A, la condition de Lipshitz de B, la propriété (III.8(b)) sur j, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\dot{u}_2 - \dot{u}_1|_H^2 + m_A |\dot{u}_1 - \dot{u}_2|_V^2 \quad &\leq \quad m|\mu_2 - \mu_1|_V |\dot{u}_2 - \dot{u}_1|_V + \frac{C_{E^*}C_E}{m_C}|\mu_2 - \mu_1|_V |\dot{u}_2 - \dot{u}_1|_V \\ &\quad + C_B |u_2 - u_1|_V |\dot{u}_2 - \dot{u}_1|_V,\end{aligned}$$

Pour alléger les écritures nous notons dans toute la suite cste. le sup $\left\{m, \frac{C_{E^*}C_E}{m_C}, C_B\right\}$ et toutes les constantes qui appraissent dans les toutes les estimations. Moyennant l'inégalité $|ab| \leq \frac{\alpha}{2}|a|^2 + \frac{2}{\alpha}|b|^2$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, nous avons

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}|\dot{u}_2 - \dot{u}_1|_H^2 + m_A|\dot{u}_1 - \dot{u}_2|_V^2 &\leq \text{cste.}\left\{\alpha|\dot{u}_1 - \dot{u}_2|_V^2 + \tfrac{2}{\alpha}|\mu_2 - \mu_1|_V^2 + \tfrac{2}{\alpha}|u_1 - u_2|_V^2\right\}, \\ \tfrac{d}{dt}|\dot{u}_2 - \dot{u}_1|_H^2 + (m_A - \alpha\text{cste.})|\dot{u}_1 - \dot{u}_2|_V^2 &\leq \text{cste.}\left\{|\mu_2 - \mu_1|_V^2 + |u_1 - u_2|_V^2\right\}.\end{aligned}$$

nous choisissons un α tel que $m_A - \alpha$cste.> 0, puis nous intégrons de 0 à T, nous trouvons

$$|\dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)|_H^2 + (m_A - \alpha\text{cste.})|\dot{u}_1 - \dot{u}_2|_{L^2(0,t;V)}^2 \leq \text{cste.}|\mu_2 - \mu_1|_{L^2(0,t;V)}^2 + |u_1 - u_2|_{L^2(0,t;V)}^2.$$

On conclut que

$$|\dot{u}_1 - \dot{u}_2|_{L^2(0,t;V)} \leq \text{cste.}\left\{|\mu_2 - \mu_1|_{L^2(0,t;V)} + |u_1 - u_2|_{L^2(0,t;V)}\right\}.$$

$\square$

Pour montrer le théorème17, nous allons introduire l'opérateur

$$\mathcal{F} : K \to K$$
$$\mu \mapsto u_\mu \text{ **la solution du problème** } \mathcal{P}_I^\mu$$

où

$$K = \left\{ \mu \in L^2(0,T;V) : \mu \in W^{1,\infty}(0,T;V) \text{ **et** } \mu(0) = u_0 \right\}.$$

Lemme 9. *L'opérateur $\mathcal{F}$ admet un unique point fixe $\mu_* \in K$.*

Démonstration. Soit μ_1, $\mu_2 \in K$ qui un ensemble fermé de $L^2(0,T;V)$ et notant u_i les fonctions u_{μ_i}, nous avons d'une part $u_i(t) = \int_0^t \dot{u}_i(s)ds + u_0$, $(u_i \in W^{1,\infty}(0,T;V))$ et d'autre part

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}\mu_2 - \mathcal{F}\mu_2|_V &= |u_1 - u_2|_V \\ &= \left| \int_0^t (\dot{u}_2(s) - \dot{u}_2(s))\, ds \right|_V \leq \int_0^t |(\dot{u}_2(s) - \dot{u}_2(s))|_V\, ds, \\ &\leq \sqrt{T}\, |\dot{u}_1 - \dot{u}_2|_{L^2(0,t;V)} \leq \text{cste.} \left\{ |\mu_2 - \mu_1|_{L^2(0,t;V)} + |u_1 - u_2|_{L^2(0,t;V)} \right\}, \end{aligned}$$

ce qui entraine

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}\mu_2 - \mathcal{F}\mu_2|_V^2 &= |u_1 - u_2|_V^2 \\ &\leq \text{cste.} \left\{ |\mu_2 - \mu_1|^2_{L^2(0,t;V)} + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V^2\, ds \right\}, \\ &= \text{cste.} \left\{ |\mu_2 - \mu_1|^2_{L^2(0,t;V)} + \int_0^t |\mathcal{F}\mu_2(s) - \mathcal{F}\mu_2(s)|_V^2\, ds \right\}, \\ &\leq \text{cste.} \left\{ |\mu_2 - \mu_1|^2_{L^2(0,t;V)} + \int_0^t |\mathcal{F}\mu_2(s) - \mathcal{F}\mu_2(s)|_V^2\, ds \right\}, \end{aligned}$$

nous appliquons le lemme de Gronwall sur la fonction $|\mathcal{F}\mu_2 - \mathcal{F}\mu_2|_V^2$ on trouve

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}\mu_2 - \mathcal{F}\mu_2|^2_{L^2(0,t;V)} &= |u_1 - u_2|^2_{L^2(0,t;V)} \\ &\leq \text{cste.} \int_0^t |\mu_2 - \mu_1|^2_{L^2(0,s;V)}\, ds \\ &\leq \text{cste.}t\, |\mu_2 - \mu_1|^2_{L^2(0,t;V)}, \end{aligned}$$

On refait le même raisonnement sur $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{F}^2\mu_2 - \mathcal{F}^2\mu_2 \right|^2_{L^2(0,t;V)} &\leq \text{cste.} \int_0^t |\mathcal{F}\mu_2 - \mathcal{F}\mu_1|^2_{L^2(0,s;V)}\, ds \\ &\leq \text{cste.} \int_0^t s\, |\mu_2 - \mu_1|^2_{L^2(0,s;V)}\, ds, \\ &\leq \text{cste.} \int_0^t s ds\, |\mu_2 - \mu_1|^2_{L^2(0,t;V)} \\ &= \text{cste.} \frac{t^2}{2}\, |\mu_2 - \mu_1|^2_{L^2(0,t;V)}. \end{aligned}$$

En reitérant l'opération sur $\underbrace{\digamma \circ \digamma \circ \digamma \circ \cdots \digamma}_{n \text{ fois}}$ noté $\digamma^n$, on trouve

$$|\digamma^n \mu_2 - \digamma^n \mu_2|^2_{L^2(0,t;V)} \leq \text{cste.}\frac{t^n}{n!} |\mu_2 - \mu_1|^2_{L^2(0,t;V)} ,$$

Ce qui donne aussi

$$|\digamma^n \mu_2 - \digamma^n \mu_2|^2_{L^2(0,T;V)} \leq \text{cste.}\frac{T^n}{n!} |\mu_2 - \mu_1|^2_{L^2(0,T;V)} .$$

Nous déduisons, en appliquant le théorème du point fixe de Banach, que l'opérateur $\digamma^n$ et par conséquent l'opérateur $\digamma$ admet un unique point fixe $\mu_* \in K \subset W^{1,\infty}(0,T;V)$ vérifiant $u_{\mu_*} = \mu_*$ et $u_{\mu_*}(0) = \mu_*(0) = u_0$. □

Pour ce point fixe μ_* l'unique solution de $\mathcal{P}_I^{\mu_*}$ est $u_{\mu_*} \in W^{1;\infty}(0,T;V) \cap W^{2;\infty}(0,T;H)$ qui aussi la solution unique du problème $\mathcal{P}_I$. Pour la solution u_{μ_*}nous obtenons l'existence et l'unicité de la solution $\varphi_{u_{\mu_*}} \in W^{1;\infty}(0,T;W)$ de l'équation (III.2). D'où l'existence et l'unicité de la $(u,\varphi) = \left(u_{\mu_*}, \varphi_{u_{\mu_*}}\right) \in [W^{1;\infty}(0,T;V) \cap W^{2;\infty}(0,T;H)] \times W^{1;\infty}(0,T;W)$ solution du problème $\mathcal{P}_V$.

2 Application : contact dynamique avec compliance normale et frottement de Coulomb

Nous considérons l'exemple de contact avec frottement de Coulomb quasi-statique modélisé par la condition de compliance normale, d'un matériau électro-viscoélastique avec une fondation non conductive. Nous supposons que l'accéleration du système ρ est non négligeable ce qui rend le processus de déplacement dynamique. On renormalise ρ, on prend $\rho = 1$. Rappelons que les équations d'équilibre et d'état d'un corps électro-viscoélastique sont données par

$$\boldsymbol{\sigma} = c\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi \quad \textbf{dans } \Omega \times (0,T), \tag{III.22}$$

$$\mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\beta}\nabla\varphi \quad \textbf{dans } \Omega \times (0,T), \tag{III.23}$$

$$\ddot{\mathbf{u}} - \operatorname{Div}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \textbf{dans } \Omega \times (0,T), \tag{III.24}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = q(t) \quad \textbf{dans } \Omega \times (0,T), \tag{III.25}$$

ici c est le coefficient de viscoélasticité il est positif, le corps montre un aspect viscoélastique tant que $c > 0$, il devient élastique si $c = 0$. La loi de frottement quasi-statique de Coulomb donne les conditions au bord sur la surface de

contact Γ_3**,**

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g) \quad \textbf{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{III.26}$$

$$\|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq p_\tau(u_\nu - g),$$

$$\dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_\tau = -p_\tau(u_\nu - g)\frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|} \quad \textbf{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{III.27}$$

pour les conditions électriques nous supposons la frontière Γ **est divisée en deux partitions** $\Gamma_a \cup \Gamma_b$

$$\varphi = 0 \quad \textbf{sur } \Gamma_a \times (0,T), \tag{III.28}$$

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \textbf{sur } \Gamma_b \times (0,T), \tag{III.29}$$

les conditions au bord $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ **sont celles de Dirichlet et Neumann**

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \textbf{sur } \Gamma_1 \times (0,T), \tag{III.30}$$

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \mathbf{f}_N \quad \textbf{sur } \Gamma_2 \times (0,T). \tag{III.31}$$

et les conditions initiales

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0 \quad \textbf{dans } \Omega.$$

Nous imposons sur les données du problème les hypothèses suivantes
L'opérateur de viscosité $\mathcal{A}$ **et un opérateur qui satisfait les conditions**

$$\left\{\begin{array}{l}
\textbf{(a) } \mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d. \\
\textbf{(b) Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \textbf{ tel que} \\
\|\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)\| \leq L_{\mathcal{A}}\|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2\| \\
\qquad \forall\, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \textbf{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\
\textbf{(c) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \textbf{ tel que} \\
\qquad (\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)) \cdot (\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2) \geq m_{\mathcal{A}}\|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2\|^2 \\
\qquad \forall\, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \textbf{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\
\textbf{(d) L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \textbf{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\
\qquad \textbf{pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d. \\
\textbf{(e) Il existe } c_{\mathcal{A}} > 0 \textbf{ tel que} \\
\qquad \|\mathcal{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\| \leq c_{\mathcal{A}}\|\boldsymbol{\xi}\| + d_{\mathcal{A}} \quad \forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d, \textbf{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega.
\end{array}\right. \tag{III.32}$$

et l'opérateur d'élasticité $\mathcal{B}$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(a) } \mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d. \ \mathcal{B} = (b_{ijkl}) \\ \text{(b) } \mathcal{B}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = (b_{ijkl}(\mathbf{x})\tau_{jk}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \quad \textbf{p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) } b_{ijkl} \in L^\infty(\Omega).\forall i,j,k,l \\ \text{(d) } \textbf{Il existe } m_{\mathcal{B}} > 0 \textbf{ tel que} \\ \qquad \mathcal{B}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} \geq m_{\mathcal{B}} \|\boldsymbol{\xi}\|^2 \qquad \textbf{pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d. \end{cases} \tag{III.33}$$

Le tenseur électrique $\mathcal{E}$ et le tenseur de permeabilité β satisfont les conditions (II.50) et (II.51) La fonction de compliance normale p_r $(r = \nu, \tau)$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(a) } p_r : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) } \exists\, L_r > 0 \,\textbf{tel que } |p_r(\mathbf{x}, u_1) - p_r(\mathbf{x}, u_2)| \leq L_\nu |u_1 - u_2| \\ \forall\, u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \ \textbf{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(c) } \mathbf{x} \mapsto p_r(\mathbf{x}, u) \,\textbf{mesurable sur}\, \Gamma_3, \textbf{ pour tout}\, u \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) } \mathbf{x} \mapsto p_r(\mathbf{x}, u) = 0, \textbf{ pour tout}\, u \leq 0. \end{cases} \tag{III.34}$$

Nous posons

$$\begin{aligned} & H = \{\boldsymbol{u} = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\} = \left(L^2(\Omega)\right)^d, \\ & \mathcal{W} = \{\boldsymbol{D} \in H \mid div \boldsymbol{D} \in L^2(\Omega)\}, \\ & \mathcal{H} = \left\{\boldsymbol{\sigma} = (\sigma)_{ij} \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\right\}, \\ & H_1 = \{\boldsymbol{u} = (u_i) \mid \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \in \mathcal{H}\}, \\ & \mathcal{H}_1 = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} \mid Div \boldsymbol{\sigma} \in H\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \{\mathbf{v} \in H_1 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \textbf{ dans } \ \Gamma_1\}, \\ W &= \{\zeta \in H^1(\Omega) : \zeta = 0 \textbf{ dans } \Gamma_a\}, \end{aligned}$$

En plus nous avons les conditions

$$g \in L^2(\Gamma_3), g \geq 0 \textbf{ p.p. on } \Gamma_3, \quad \varphi_0 \in L^2(\Gamma_3), \tag{III.35}$$

$$\boldsymbol{f}_0 \in W^{1,1}\left(0, T; L^2(\Omega)^d\right), \ \boldsymbol{f}_N \in L^2\left(0, T; L^2(\Gamma_2)^d\right), \tag{III.36}$$

$$q \in W^{1,\infty}\left(0, T; L^2(\Omega)\right), \tag{III.37}$$

$$\mathbf{u}_0 \ \in V. \tag{III.38}$$

2.1 Formulation variationnelle du problème

Nous multiplions l'équation (III.24) par $\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}$ où $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, on a

$$\int_\Omega \textbf{div } \sigma \ (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) dx = \int_\Omega f_0 (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) dx,$$

en appliquant la formule de Green sur σ que l'on suppose assez régulier

$$\begin{aligned}&(c\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)),\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})-\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}}+(\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)),\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}}\\&+(\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t),\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}}-\textstyle\int_\Gamma(\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}})\sigma\nu ds=(f_0,\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}})_H\,,\end{aligned}\tag{III.39}$$

En utilisant les mêmes techniques utilisées precèdement on trouve

$$\int_\Gamma \sigma n(\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}})da=\int_{\Gamma_1} f_N(\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}})da+\int_{\Gamma_3}\sigma_\tau(\mathbf{v}_\tau-\dot{\mathbf{u}}_\tau)da+\int_{\Gamma_3}\sigma_\nu(v_\nu-\dot{u}_\nu)da;$$

Comme d'une part de la condition au bord (III.27), on a

$$\begin{aligned}-\textstyle\int_{\Gamma_3}\sigma_\tau(\mathbf{v}_\tau-\dot{\mathbf{u}}_\tau)\,da&=\textstyle\int_{\Gamma_3}(-\sigma_\tau\mathbf{v}_\tau+\sigma_\tau\dot{\mathbf{u}}_\tau)\,da\\&\le\textstyle\int_{\Gamma_3}\|\sigma_\tau\|\,\|\mathbf{v}_\tau\|\,da+\int_{\Gamma_3}\sigma_\tau\dot{\mathbf{u}}_\tau\,da,\\&\le\textstyle\int_{\Gamma_3}\|\sigma_\tau\|\,\|\mathbf{v}_\tau\|\,da-\int_{\Gamma_3}p_\tau(u_\nu-g)\dfrac{\dot{\mathbf{u}}_\tau\cdot\dot{\mathbf{u}}_\tau}{\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|}\,da,\end{aligned}$$

comme, on a $\|\sigma_\tau\|=p_\tau(u_\nu-g)$ ceci entraine d'une part

$$-\int_{\Gamma_3}\sigma_\tau(\mathbf{v}_\tau-\dot{\mathbf{u}}_\tau)\,da\le\int_{\Gamma_3}p_\tau(u_\nu-g)\|\mathbf{v}_\tau\|\,da-\int_{\Gamma_3}p_\tau(u_\nu-g)\,\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|\,da,$$

et d'autre part d'après (III.26), on a

$$\begin{aligned}-\int_{\Gamma_3}\sigma_\nu(v_\nu-\dot{u}_\nu)da&=\int_{\Gamma_3}p_\nu\,(u_\nu-g)\,(v_\nu-\dot{u}_\nu)da;\\&=\int_{\Gamma_3}p_\nu\,(u_\nu-g)\,v_\nu da-\int_{\Gamma_3}p_\nu\,(u_\nu-g)\,\dot{u}_\nu da\end{aligned}$$

L'équation (III.39) devient

$$\begin{aligned}&(\ddot{\mathbf{u}}(t),\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}})_H+(c\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)),\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})-\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}}\\&+(\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)),\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}}+(\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t),\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}}\\&+\textstyle\int_{\Gamma_3}p_\tau(u_\nu-g)\|\mathbf{v}_\tau\|\,da+\int_{\Gamma_3}p_\nu\,(u_\nu-g)\,v_\nu da+\int_{\Gamma_1}f_N\mathbf{v}da\\&-\textstyle\int_{\Gamma_3}p_\tau(u_\nu-g)\,\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|\,da-\int_{\Gamma_3}p_\nu\,(u_\nu-g)\,\dot{u}_\nu da-\int_{\Gamma_1}f_N\dot{\mathbf{u}}\,da\ge(f_0,\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}})_H\,,\end{aligned}$$

Soient alors $j:V\times V\to\mathbb{R}$ et $f:[0,T]\to V$, définies par

$$j(\mathbf{u},\mathbf{v})=\int_{\Gamma_3}p_\nu(u_\nu-g)v_\nu\,da+\int_{\Gamma_3}p_\tau(u_\nu-g)\|\mathbf{v}_\tau\|\,da+\int_{\Gamma_1}f_N\mathbf{v}da,\tag{III.40}$$

$$(\mathbf{f}(t),\mathbf{v})_H=\int_\Omega\mathbf{f}_0(t)\mathbf{v}\,dx,\tag{III.41}$$

pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ et p.p. $t \in [0, T]$. On a la formulation variationnelle suivante

$$
\begin{aligned}
&(\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}})_H + (c\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} \\
&+ (\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + \\
&j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (f_0(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_H,
\end{aligned}
\tag{III.42}
$$

avec

$$
\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0\,; \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0. \tag{III.43}
$$

On suppose que $\mathbf{v}_0 \in \partial j_2$ sous différentiel de j par rapport à la seconde variable et

$$
\mathbf{v}_0 \in \partial j_2 \tag{III.44}
$$

$$
(c\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{v}_0))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_0))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \tag{III.45}
$$

$$
\geq \langle f_0(0), \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \rangle_H \quad \forall v \in V. \tag{III.46}
$$

Il est facile de voir que l'équation (III.25) multipliée par une fonction test $\zeta \in W$ sous les conditions (III.28) et (III.29) nous donne

$$
(\boldsymbol{\beta}\nabla\varphi(t), \nabla\zeta)_{\mathrm{W}} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \nabla\zeta)_{\mathrm{W}} = (q(t), \zeta)_W, \tag{III.47}
$$

Problème 18 ($\mathcal{P}_0^d$)**.** *Trouver le déplacement* $\mathbf{u} : [0, T] \to V$ *et le potentiel électrique* $\varphi : [0, T] \to W$ *qui satisfont (III.42), (III.43) et (III.47).*

L'existence des solutions faibles du problème ($\mathcal{P}_0^d$) est une application directe du théorème 16.

Théorème 19. *Si les conditions (III.32)-(III.38) avec (III.44) et (III.46) sont vérifiées, alors il existe une unique solution* (u, φ) *du problème* ($\mathcal{P}_0^d$) *vérifiant la régularité (III.17) et III.18.*

Démonstration. A l'aide du théorème de représentation de Riesz, nous définissons les opérateurs $C : W \to W$ et $E : V \to W$ par

$$
\begin{aligned}
(C\varphi(t), \zeta)_W &= (\boldsymbol{\beta}\nabla\varphi(t), \nabla\zeta)_{\mathrm{W}}, \\
(E(\mathbf{u}(t)), \zeta)_W &= (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \nabla\zeta)_{\mathrm{W}}, \\
(E^*\varphi(t), \mathbf{u}(t))_V &= (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_{\mathrm{W}}.
\end{aligned}
$$

Sous les conditions sur le tenseur électrique $\mathcal{E}$ et le tenseur de permeabilité $\boldsymbol{\beta}$ (II.50) et (II.51) avec la condition (III.37) et pour $\mathbf{u}(t)$ fixe dans V, il est clair qu'il existe un unique $\varphi(t) \in W$ vérifiant (III.47), ce qui permet de définir l'opérateur $Su(t) = \varphi(t)$.

Soit $A : V \to V$ et $B : V \to V$ deux opérateurs donnés par

$$(A\mathbf{u}(t), \mathbf{v})_V = (c\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}, \qquad (B\mathbf{u}(t), \mathbf{v})_V = (\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}},$$

en utilisant (III.32(a),(d)), l'opérateur A est borné. Les hypothèses (III.32(c)) montrent que A est monotone sur V,

$$(A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V \geq m_A \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 \quad \forall\, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V.$$

l'opérateur A est hémi-continu $\forall u; v \in V$; l'application $s \in [0,1] \to \langle A(\mathbf{u} + s\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle$ est continue, effet soit $(s_n)_n \in [0,1]$ tel que $s_n \underset{n\to\infty}{\to} s$

$$\begin{aligned} |\langle cA(\mathbf{u}+s_n\mathbf{v}) - cA(\mathbf{u}+s\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle_V| &= |(c\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}+s_n\dot{\mathbf{v}}) - c\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}+s\dot{\mathbf{v}}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}| \\ &\leq c\, C_{\mathcal{A}}\, |s_n - s|\, |\dot{\mathbf{v}}|_V\, |\mathbf{v}|_V \underset{n\to\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

Les hypothèses sur l'opérateur B (III.5(a)-(d)) montrent qu'il est linéaire borné et coercif. La fonctionelle j définie par (III.40) satifait les conditions données par (III.8). En effet, elle est convexe semi continue inférieurement par rapport à la deuxième variable. En vue du théorème de trace de Sobolev (II.56) la fonctionnelle j vérifie pour $\forall\, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$,

$$j(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - j(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + j(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) =$$

$$\begin{gathered} \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{1\nu} - g) v_{2\nu} da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_{1\nu} - g)\|\mathbf{v}_{2\tau}\| da \\ - \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{1\nu} - g) v_{1\nu} da - \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_{1\nu} - g)\|\mathbf{v}_{1\tau}\| da + \\ \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{2\nu} - g) v_{1\nu} da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_{2\nu} - g)\|\mathbf{v}_{1\tau}\| da \\ - \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{2\nu} - g) v_{2\nu} da - \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_{2\nu} - g)\|\mathbf{v}_{2\tau}\| da \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} = \int_{\Gamma_3} \left[p_\nu(u_{1\nu} - g) - p_\nu(u_{2\nu} - g)\right] v_{2\nu} da \\ + \int_{\Gamma_3} \left[p_\tau(u_{1\nu} - g) - p_\tau(u_{2\nu} - g)\right] \|\mathbf{v}_{2\tau}\| da \\ + \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{2\nu} - g)\,(v_{1\nu} - v_{1\nu})\, da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_{1\nu} - g)\,(\|\mathbf{v}_{1\tau}\| - \|\mathbf{v}_{1\tau}\|)\, da \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \leq L_\nu\, |u_{1\nu} - u_{2\nu}|_{L^2(\Gamma_3)}\, |v_{1\nu} - v_{2\nu}|_{L^2(\Gamma_3)} + L_\tau\, |u_{1\nu} - u_{2\nu}|_{L^2(\Gamma_3)}\, |\|\mathbf{v}_{1\tau}\| - \|\mathbf{v}_{2\tau}\||_{L^2(\Gamma_3)} \\ \leq \tilde{c}_0^2\,(L_\nu + L_\tau)\, |u_1 - u_2|_V\, |v_1 - v_2|_V\,. \end{gathered}$$

il existe $m > 0$, $m = \tilde{c}_0^2\,(L_\nu + L_\tau)$, tel que la fonctionnelle j vérifie la propriéte (III.8(b)). $\square$

Existence et unicité du problème $\left(\mathcal{P}_0^d\right)$ **Le problème $(\mathcal{P}_0^d)$ n'est autre que le problème $\mathcal{P}_V$ avec toutes ses conditions (III.4–III.12). Ce qui nous permet de reécrire sous forme du problème $(\mathcal{P}_I)$ et ensuite de lui appliquer le théorème17. Nous concluons alors que le problème $(\mathcal{P}_0^d)$ admet une solution unique** (u, φ)

vérifiant les régularités (III.17) (III.18). Le théorème19 est ainsi démontré.

3 Etude de convergence du problème liée à la perturbation de la loi de compliance

Nous donnons ici des résultats de convergence qui consiste à montrer que la solution du problème perturbé converge vers celle du problème ($\mathcal{P}_V^d$) lorsque la fonction potentielle perturbée du frottement converge vers celle qui correspond au problème ($\mathcal{P}_V^d$). Pour tout n nous considérons une suite de problèmes variationnels notés ($\mathcal{P}_V^n$).

Problème 20 ($\mathcal{P}_V^n$). *Trouver le déplacement* $\mathbf{u}_n\colon[0,T] \to V$ *et le potentiel électrique* $\varphi_n : [0,T] \to W$ *pour tout* $\mathbf{v} \in V$, $\zeta \in W$ *et p.p.* $t \in [0,T]$, *on a*

$$\begin{aligned}
&(\ddot{\mathbf{u}}_n(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_n)_H + (c\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_n(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_n(t)))_{\mathcal{H}}\\
&+ (\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_n(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_n(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_n(t)))_{\mathcal{H}} \qquad \text{(III.48)}\\
&+ j_n(\mathbf{u}_n(t), \mathbf{v}) - j_n(\mathbf{u}_n(t), \dot{\mathbf{u}}_n(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_n(t))_V,
\end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{\beta}\nabla\varphi_n(t), \nabla\zeta)_W - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n(t)), \nabla\zeta)_W = (q(t), \zeta)_W,$$

avec

$$\mathbf{u}_n(0) = \mathbf{u}_{n0}\,;\;\; \dot{\mathbf{u}}_n(0) = \mathbf{v}_{n0},\;\; \mathbf{v}_{n0} \in D(\partial j_n). \qquad \text{(III.49)}$$

La fonctionnelle j_n est donnée par

$$j_n(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu^n(u_\nu - g)v_\nu\, da + \int_{\Gamma_3} p_\tau^n(u_\nu - g)\|\mathbf{v}_\tau\|\, da + \int_{\Gamma_1} f_N\mathbf{v}da,$$

où p_r^n est la fonction de perturbation de la fonction de compliance $p_r(r = \tau, \sigma)$. Nous supposons que la fonction p_r et sa perturbation p_r^n $(r = \tau, \sigma)$, satisfont

$$\begin{aligned}
&\text{Il existe } a_r : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\; b_r : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\; q \in [1, 2[\text{ tel que}\\
&a)\;\; |p_r^n(\mathbf{x}, u) - p_r(\mathbf{x}, u)| \leq a_r(n)|u|^q + b_r(n),\\
&\qquad\quad \forall u \in \mathbb{R},\; \text{p.p } x \text{ dans } \Gamma_3,\;\; \forall n \in \mathbb{N}^*. \qquad \text{(III.50)}\\
&b)\;\; a_r(n) \to 0,\;\; b_r(n) \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.
\end{aligned}$$

b) les suites $(\mathbf{u}_{n0})$ et $(\mathbf{v}_{n0})$ appartiennent à V et vérifient

$$\mathbf{u}_{n0} \to \mathbf{u}_0,\quad \mathbf{v}_{n0} \to \mathbf{v}_0,\; \text{dans } H.$$

où $\mathbf{u}_0$ et $\mathbf{v}_0$ sont les données initiales du problème ($\mathcal{P}_V^d$), nous supposons aussi que toutes les hypothèses imposées sur ($\mathcal{P}_V^d$) sont les mêmes que celles imposées pour les problèmes ($\mathcal{P}_V^n$).

Il est clair que d'après le théorème 19 on a l'existence et l'unicité de solutions (u_n, φ_n) du problème $\mathcal{P}_V^n$ et $(\mathbf{u}, \varphi)$ de $\mathcal{P}_V^d$ dans $[W^{1,\infty}(0,T;V) \cap W^{2,\infty}(0,T;H)] \times W^{1,\infty}(0,T;W)$. En plus nous avons le résultat suivant

Lemme 10. *Soient $(\mathbf{u}_n, \varphi_n)$ et $(\mathbf{u}, \varphi)$ les solutions des problèmes respectifs $(\mathcal{P}_V^n)$ et $(\mathcal{P}_V^e)$, alors on a*

$$|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}|_{C(0,T;V)} + |\mathbf{u}_n - \mathbf{u}|_{C^1(0,T;H)} \leq cste. \{|\mathbf{u}_{0n} - \mathbf{u}_0|_V + |\mathbf{v}_{0n} - \mathbf{v}_0|_H + h_n\}, \tag{III.51}$$

où $h_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n &\to u \text{ dans } C(0,T;V) \cap C^1(0,T;H), \\ \varphi_n &\to \varphi \text{ dans } C(0,T;W). \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $t \in [0,T]$ repmlaçons dans (III.49) $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ et dans (III.42) $v = \dot{\mathbf{u}}_n$, soustrayons les deux inégalités obtenues

$$\begin{aligned} &(\ddot{\mathbf{u}}_n - \ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}_n - \dot{\mathbf{u}})_H + (c\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_n) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}), \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_n) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}))_{\mathcal{H}} \\ &+ (\mathcal{B}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})], \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_n) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla(\varphi_n - \varphi), \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_n) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}))_{\mathcal{H}} \\ &+ j_n(\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}) - j_n(\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}_n) + j(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) - j(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}_n) \leq 0, \end{aligned}$$

En utilisant la coercivité de $\mathcal{A}$, de $\mathcal{B}$, la linéarité de $\mathcal{E}^*$, et en intégrant de 0 à t, on trouve

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|\dot{\mathbf{u}}_n(t) - \dot{\mathbf{u}}(t)|_H^2 + m_{\mathcal{A}}|\dot{\mathbf{u}}_n - \dot{\mathbf{u}}|_{L^2(0,t;V)}^2 + \alpha_{\mathcal{B}}|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}|_{L^2(0,t;V)}^2 \\ \leq\ &\frac{1}{2}|\mathbf{v}_{n0} - \mathbf{v}_0|_H^2 + (\mathcal{B}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{0n}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0)], \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{0n}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0))_{\mathcal{H}} \\ &+ \int_0^t |j_n(\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}) - j(\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}})| + |j(\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}_n) - j_n(\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}_n)|\, ds \\ &+ \int_0^t j(\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}_n) - j(\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}) + j(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) - j(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}_n) ds. \end{aligned} \tag{III.52}$$

Utilisons maintenant les propriétés de j_n et j,((III.50)), on a

$$\begin{aligned} \int_0^t |j_n(\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}) - j(\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}})|\, ds \ &\leq \sum_{r=\tau,\nu} \Big[\frac{1}{2\alpha}a_r(n)|\mathbf{u}_n|_{L^2(0,t;V)}^2 + \frac{\alpha}{2}a_r(n)\,|\dot{\mathbf{u}}|_{L^2(0,t;V)}^2 \\ &\quad + \frac{T}{2\alpha}b_r(n)^2 + \frac{\alpha}{2}|\dot{\mathbf{u}}|_{L^2(0,t;V)}\Big] \\ &\leq \sum_{r=\tau,\nu} \Big[\frac{1}{2\alpha}a_r(n)|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}|_{L^2(0,t;V)}^2 + \text{ cste}\left(a_r(n) + b_r(n)^2\right)|\dot{\mathbf{u}}|_{L^2(0,t;V)}^2\Big], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^t |j(\mathbf{u}_n,\dot{\mathbf{u}}_n)-j_n(\mathbf{u}_n,\dot{\mathbf{u}}_n)| &\leq \sum_{r=\tau,\nu}\left[\frac{1}{2\alpha}a_r(n)|\mathbf{u}_n|^2_{L^2(0,t;V)}+\frac{\alpha}{2}\left(a_r(n)+1\right)|\dot{\mathbf{u}}_n|^2_{L^2(0,t;V)}+\frac{T}{2\alpha}b_r(n)^2\right]\\
&\leq \sum_{r=\tau,\nu}\left[a_r(n)\left(\frac{1}{2\alpha}|\mathbf{u}_n-\mathbf{u}|^2_{L^2(0,t;V)}+\frac{\alpha}{2}|\dot{\mathbf{u}}_n-\dot{\mathbf{u}}|^2_{L^2(0,t;V)}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{T}{2\alpha}b_r(n)^2+\frac{\alpha}{2}|\dot{\mathbf{u}}_n-\dot{\mathbf{u}}|^2_{L^2(0,t;V)}\right]\\
&\quad+\sum_{r=\tau,\nu}\left[\frac{1}{2\alpha}a_r(n)|\mathbf{u}|^2_{L^2(0,t;V)}+\frac{\alpha}{2}a_r(n)\,|\dot{\mathbf{u}}|^2_{L^2(0,t;V)}+\frac{\alpha}{2}\,|\dot{\mathbf{u}}|_{L^2(0,t;V)}\right],
\end{aligned}$$

on applique la propriété (III.8) avec $u_1=\mathbf{u}$, $u_2=\mathbf{u}_n$, $v_1=\dot{\mathbf{u}}_n$, $v_2=\dot{\mathbf{u}}$ on tire

$$\int_0^t j(\mathbf{u}_n,\dot{\mathbf{u}}_n)-j(\mathbf{u}_n,\dot{\mathbf{u}})+j(\mathbf{u},\dot{\mathbf{u}})-j(\mathbf{u},\dot{\mathbf{u}}_n)ds\leq \mathrm{c}\left\{\frac{1}{2\alpha}|\mathbf{u}_n-\mathbf{u}|^2_{L^2(0,t;V)}+\frac{\alpha}{2}|\dot{\mathbf{u}}_n-\dot{\mathbf{u}}|^2_{L^2(0,t;V)}\right\},$$

Combinons les estimations ci-dessus et les remplaçons dans (1.20), on retrouve avec un choix de α vérifiant à la fois $m_{\mathcal{A}}-\frac{\alpha}{2}\sum_{r=\tau,\nu}(a_r(n)+c)=C_1>0$ et $\alpha_{\mathcal{B}}-\frac{1}{2\alpha}\sum_{r=\tau,\nu}(a_r(n)+c)=C_2>0$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,|\dot{\mathbf{u}}_n(t)-\dot{\mathbf{u}}(t)|^2_H+C_1\,|\dot{\mathbf{u}}_n-\dot{\mathbf{u}}|^2_{L^2(0,t;V)}+C_2\,|\mathbf{u}_n-\mathbf{u}|^2_{L^2(0,t;V)}\\
\leq\ &\text{cste}\sum_{r=\tau,\nu}\left[(a_r(n)+b_r(n))\left(|\mathbf{u}|^2_{L^2(0,t;V)}+|\dot{\mathbf{u}}|^2_{L^2(0,t;V)}\right)\right]\\
&+\frac{1}{2}\,|\mathbf{v}_{n0}-\mathbf{v}_0|^2_H+|\mathcal{B}|_\infty\,|\mathbf{u}_{n0}-\mathbf{u}_0|^2_H\,.
\end{aligned}$$

A partir des convergence $|\dot{\mathbf{u}}_n-\dot{\mathbf{u}}|^2_{L^2(0,t;V)}\to 0$ et $|\mathbf{u}_n-\mathbf{u}|^2_{L^2(0,t;V)}\to 0$, en déduit que

$$|\mathbf{u}_n-\mathbf{u}|^2_{W^{1,2}(0,T;V)}\to 0,$$

comme, on sait que $W^{1,2}(0,T;V)$ s'injecte continuement dans $C(0,T;H)$, alors on a $|\mathbf{u}_n-\mathbf{u}|^2_{C(0,T;H)}\to 0$, en plus de la convergence

$$\max_{t\in[0,T]}|\dot{\mathbf{u}}_n(t)-\dot{\mathbf{u}}(t)|^2_H\underset{n\to+\infty}{\to}0.$$

Il s'en suit que $|\mathbf{u}_n-\mathbf{u}|^2_{C^1(0,T;H)}\to 0$, ceci montre que les convergences demandées au lemme 10 sont vérifiés. □

Chapitre IV

Etude de contact électriquement parfait

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions le contact entre un corps électro visco-élastique et une base conductrice déformable. Ce contact est modélisé à l'aide de la fonction de compliance normale, on suppose que le processus soit dynamique. Les problèmes de contact dynamique conforme ont été examinés dans [5, 37] et les références qui s'y trouvent.

Notre objectif ici est d'étendre certains résultats obtenus dans [39], lorsque les conditions électriques sont presque parfaites. Notre premier but est d'obtenir une formulation variationnelle du problème avec une condition régularisée sur le champ électrique, dans une partie de la frontière et de prouver l'existence et l'unicité de solutions faibles. Le second est d'étudier la convergence de ces solutions vers des solutions uniques du problème variationnel de contact électrique presque parfait. Cette étape répond à certaines questions laissées en suspens dans l'article précédent [39]. La démonstration est basée sur la théorie des équations d'évolution avec des opérateurs monotones et des arguments de point fixe, des estimations à priori des solutions régularisées, suivi d'un passage à la limite lorsque $\delta \to 0$. Ceci étant en considérant certains résultats de compacité. Les résultats de ce travail ont fait l'objet d'une publication citée dans [17].

Nous considérons le problème de contact suivant

Problème $\mathcal{P}$. Trouver un déplacement $\boldsymbol{u} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, un potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$, tel que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}) + \mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi \text{ dans } \Omega \times (0,T)\,, \tag{IV.1}$$

$$\boldsymbol{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) - \beta\nabla\varphi \qquad \text{dans } \Omega \times (0,T)\,, \tag{IV.2}$$

$$\ddot{\boldsymbol{u}} = Div\ \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}_0 \qquad \text{dans } \Omega \times (0,T)\,, \tag{IV.3}$$

$$div\ \boldsymbol{D} = \boldsymbol{q}_0 \qquad \textbf{dans } \Omega \times \times (0, T)\,, \tag{IV.4}$$

$$\boldsymbol{u} \ = 0, \qquad \textbf{sur } \Gamma_1 \times (0, T)\,, \tag{IV.5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\nu \ = \boldsymbol{f}_2 \quad \textbf{sur } \Gamma_2 \times (0, T)\,, \tag{IV.6}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\nu = -p\,(u_\nu - g)\ ,\ \boldsymbol{u}_\tau = 0 \ \ \textbf{sur } \Gamma_3 \times (0, T)\,, \tag{IV.7}$$

$$\varphi = 0 \quad \textbf{sur } \Gamma_a \times (0, T)\,, \tag{IV.8}$$

$$\boldsymbol{D}\cdot\nu = q_b \quad \textbf{sur}\,\Gamma_b \times (0, T)\,, \tag{IV.9}$$

$$\boldsymbol{D}\cdot\nu = k\chi_{[0,+\infty)}\,(u_\nu - g)\,\phi_L\,(\varphi - \varphi_0)\ \ \textbf{sur } \Gamma_3 \times (0, T)\,, \tag{IV.10}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad \dot{\boldsymbol{u}}(0) = \boldsymbol{v}_0, \quad \textbf{dans } \Omega. \tag{IV.11}$$

$\chi_{[0,+\infty)}$ **est la fonction characteristique de l'intervalle** $[0, +\infty)$ **donnée par**

$$\chi_{[0,+\infty)}(r) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } r < 0, \\ 1 & \textbf{si } r \geq 0. \end{cases}$$

On pose

$$V = \{\boldsymbol{v} \in H_1 \mid \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0},\ \textbf{dans } \Gamma_1\}\,, W = \left\{\xi \in H^1 \mid \xi = 0,\ \textbf{dans } \Gamma_a\right\},$$

On suppose que $mes\Gamma_1 > 0$ **et** $mes\Gamma_a > 0$**, d'où les inegalités de Korn's et Friederichs-Poincaré sont vérifiées. Comme on suppose que l'opérateur de viscosité** $\mathcal{A}$ **satisfait II.48 avec** $\mathcal{A}\,(x, \boldsymbol{0})$ **appartient à** $\mathcal{H}$ **p.p.** $x \in \Omega$ **.L'opérateur d'élasticité** $\mathcal{G}$ **sarisfait la relation (II.49). Le tenseur électrique** $\mathcal{E}$ **et le tenseur de permeabilité** $\boldsymbol{\beta}$ **vérifient respectivement les propriétés (II.50) et (II.51). La compliance normale satisfait (II.52). Nous avons les condtions suivantes**

$$g \ \in \ L^2(\Gamma_3), \qquad g \geq 0 \textbf{ p.p. sur } \Gamma_3, \tag{IV.12}$$

$$\boldsymbol{u}_0 \ \in \ V, \quad \boldsymbol{v}_0 \in H. \tag{IV.13}$$

$$\boldsymbol{f}_0 \in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)^d\right), \tag{IV.14}$$
$$\boldsymbol{f}_2 \in L^2\left(0,T;L^2\left(\Gamma_2\right)^d\right), \tag{IV.15}$$

$$q_0 \in W^{1,p}\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right), \tag{IV.16}$$
$$q_b \in W^{1,p}\left(0,T;L^2\left(\Gamma_b\right)\right), \tag{IV.17}$$
$$\varphi_0 \in L^2(\Gamma_3). \tag{IV.18}$$

Soit L une constante positive tel que $\varphi - \varphi_0$ est majorée par L. Pour une bonne position du problème nous introduisons la fonctions de troncature

$$\phi_L(s) \begin{cases} -L & \textbf{si } s < -L, \\ s & \textbf{si } -L < s < L, \\ L & \textbf{si } s > L. \end{cases} \tag{IV.19}$$

Soit un élément $\boldsymbol{f}(t) \in V'$ définie par

$$(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v})_{V',V} = (\boldsymbol{f}_0(t), \boldsymbol{v})_H + (\boldsymbol{f}_2(t), \boldsymbol{v})_{L^2(\Gamma_2)^d}, \forall \boldsymbol{v} \in V \textbf{ p.p. } t \in (0,T). \tag{IV.20}$$

On voit bien que les conditions (1.22), (1.21) (1.23) et (1.24) impliquent que $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V')$ et $q \in W^{1,p}(0,T;W)$. Soit maintenant $j : V \times V \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle définie par

$$j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_3} p(u_\nu - g) v_\nu \, da, \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V, \tag{IV.21}$$

En utilisant le théorème de représentation de Riesz on définit $q(t) \in W$ et $Ju \in V$ par

$$(q(t), \xi)_W = -\left(q_0(t), \xi\right)_{L^2(\Omega)} - \left(q_b(t), \xi\right)_{L^2(\Gamma_b)}, \quad \forall \xi \in W, \, t \in (0,T), \tag{IV.22}$$

$$(Ju, v)_V = j\left(u, v\right) \tag{IV.23}$$

Définissons $l : V \times W \to H$ par

$$\begin{aligned} \left(l\left(\boldsymbol{u}, \varphi\right), \xi\right) \quad = \quad & \int_{\Gamma_3} \chi_{(0,+\infty[}\left(u_\nu - g\right) \phi_L\left(\varphi - \varphi_0\right) \xi \, da, \\ & \forall \boldsymbol{u} \in V, \quad \forall \xi, \, \varphi \in W. \end{aligned} \tag{IV.24}$$

En utilisant les hypothèses (II.52), (1.17), (1.18) et (1.19), les intégrales (1.26) et (1.29) sont bien définies.

Si $\{\boldsymbol{u}, \varphi\}$ un système de fonctions régulières vérifiant (1.1)-(1.13), tenons compte des relations (1.26) et (1.29), en déduit la formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}$, noté $\mathcal{P}_V$.

2 Formulation variationnelle

Problème$\mathcal{P}_V$. trouver $\boldsymbol{u} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, et $\varphi : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned}&(\ddot{\boldsymbol{u}}(t), \boldsymbol{v})_{V',V} + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} + \\ &(\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} + j\left(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}\right) = (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v})_{V',V}, \ \forall \boldsymbol{v} \in V, \text{ p.p. } t \in (0,T),\end{aligned} \tag{IV.25}$$

$$\begin{gathered}(\beta\nabla\varphi(t), \nabla\xi)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t), \nabla\xi)_{\mathcal{H}} + \left(l\left(\boldsymbol{u}(t), \varphi(t)\right), \xi\right)_W = (q(t), \xi)_W, \\ \forall \xi \in W, \text{ p.p. } t \in (0,T),\end{gathered} \tag{IV.26}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad \dot{\boldsymbol{u}}(0) = \boldsymbol{v}_0. \tag{IV.27}$$

Pour la résolution de $\mathcal{P}_V$, nous considérons la fonction de $\chi_{(0,+\infty[}$ notée ψ_δ et définie par

$$\psi_\delta(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ k\frac{r}{\delta} & \text{si } 0 \leq r \leq \delta, \\ k & \text{si } r \geq \delta, \end{cases} \tag{IV.28}$$

δ un paramètre qui tendra ensuite vers zéro. On voit bien que $\psi_\delta : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, est croissante et vérifie

$$\begin{gathered}|\psi_\delta(u_1) - \psi_\delta(u_2)| \leq k\,|u_1 - u_2| \\ \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3.\end{gathered} \tag{IV.29}$$

en plus ψ_δ satisfait

a) L'application $\boldsymbol{x} \longmapsto \psi_\delta(\boldsymbol{x}, r)$ est Lebesgue mesurable sur Γ_3,$\forall r \in \mathbb{R}$,
b) pour $r \leq 0, \quad \psi_\delta(\boldsymbol{x}, r) = 0$ p.p. $\boldsymbol{x} \in \Gamma_3$.

Remplaçons $\chi_{(0,+\infty[}$ par la fonction ψ_δ revient à remplacer l dans P_V par la fonctionnelle h_δ definie de $V \times W \to W$ et on a

$$\begin{aligned}\left(h_\delta\left(\boldsymbol{u}, \varphi\right), \xi\right) &= \int_{\Gamma_3} \psi_\delta\left(u_\nu - g\right)\phi_L\left(\varphi - \varphi_0\right)\xi \; da, \\ &\qquad \forall \boldsymbol{u} \in V, \ \forall \xi, \ \varphi \in W \text{ p.p. } t \in (0,T).\end{aligned} \tag{IV.30}$$

2.1 Résultats d'existence et du problème $\mathcal{P}_R$

Nous introduisons le problème régularisé $\mathcal{P}_R$.

Problème$\mathcal{P}_R$. Trouver $\boldsymbol{u}_\delta : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ et $\varphi_\delta : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$, tel que

$$\begin{aligned}&(\ddot{\boldsymbol{u}}_\delta(t), \boldsymbol{v})_{V',V} + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_\delta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\delta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} \\ &+ (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_\delta(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} + j\left(\boldsymbol{u}_\delta(t), \boldsymbol{v}\right) = (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v})_{V',V}\,\mathbf{,} \quad \forall \boldsymbol{v} \in V \ \textbf{p.p. } t \in (0,T)\,,\end{aligned} \tag{IV.31}$$

$$\begin{gathered}(\beta\nabla\varphi_\delta(t), \nabla\xi)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\delta(t), \nabla\xi)_{\mathcal{H}} + (h_\delta\left(\boldsymbol{u}_\delta(t), \varphi_\delta(t)\right), \xi)_W = (q(t), \xi)_W \\ \forall \xi \in W\mathbf{,}\ \textbf{p.p. } t \in (0,T)\,\mathbf{,}\end{gathered} \tag{IV.32}$$

$$\boldsymbol{u}_\delta(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad \dot{\boldsymbol{u}}_\delta(0) = \boldsymbol{v}_0, \tag{IV.33}$$

Pour une simplification de l'étude on pose $\boldsymbol{u}_\delta = \boldsymbol{u}$ et $\varphi_\delta = \varphi$ et nous démontrons l'existence et l'unicité de solutions de $\mathcal{P}_R$.

Théorème 21. *Nous supposons les conditions (II.48)- (1.37) vérifiées. Alors il existe une unique solution du problème $\mathcal{P}_R$. En plus les solutions vérifient le résultat de régularité suivant*

$$\boldsymbol{u} \in W^{1,2}(0,T;V) \cap C^1([0,T];H), \qquad \ddot{\boldsymbol{u}} \in L^2(0,T;V'), \qquad \varphi \in W^{1,2}(0,T;W). \tag{IV.34}$$

La preuve du théorème 24 est donnée en différentes étapes. Soient pour une fonction $\eta \in L^2(0,T;V')$ fixé les problèmes intermédiares suivants

Problème $\mathcal{P}^1_\eta$. trouver $\boldsymbol{u}_\eta : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ tel que

$$\begin{gathered}(\ddot{\boldsymbol{u}}_\eta(t), \boldsymbol{v})_H + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_\eta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} + (\eta(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} = (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v})\,\mathbf{,} \\ \forall \boldsymbol{v} \in V \ \textbf{p.p. } t \in (0,T)\,,\end{gathered} \tag{IV.35}$$

$$\boldsymbol{u}_\eta(0) = \boldsymbol{u}_0, \ \dot{\boldsymbol{u}}_\eta(0) = \boldsymbol{v}_0, \tag{IV.36}$$

Problème $\mathcal{P}^2_\eta$ trouver $\varphi : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{gathered}(\beta\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\xi)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\eta(t), \nabla\xi)_{\mathcal{H}} + (h_\delta\left(\boldsymbol{u}_\eta(t), \varphi_\eta(t)\right), \xi)_W = (q(t), \xi)_W\,\mathbf{,} \\ \forall \xi \in W \ \textbf{p.p. } t \in (0,T)\,\mathbf{,}\end{gathered} \tag{IV.37}$$

Lemme 11. *Il existe une unique solution $\boldsymbol{u}_\eta$ du $\mathcal{P}^\eta_1$, vérifiant*

$$\boldsymbol{u}_\eta \in W^{1,2}(0,T;V) \cap C^1([0,T];H), \qquad \ddot{\boldsymbol{u}}_\eta \in L^2(0,T;V'). \tag{IV.38}$$

Si $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ sont deux solutions de $\mathcal{P}^\eta_1$ correspondantes aux données η_1, $\eta_2 \in L^2(0,T;V')$, alors

$$|\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)|^2_V \le \frac{1}{m_{\mathcal{A}}}\left[\int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|^2_H\, ds\right]. \tag{IV.39}$$

Démonstration. Il simple de voir que l'opérateur $A : V \to V$ défini par

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_{V,V} = (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}}, \tag{IV.40}$$

est monotone et continu (conditions (II.48)) On rappelle que $\boldsymbol{f} - \eta \in L^2(0,T;V')$ et $\boldsymbol{v}_0 \in H$, d'après (1.25) et (2.3). Appliquons maitenant le Théorème 3.2.1 de la page 22, Il existe une unique fonction $\boldsymbol{v}_\eta$ qui satisfait

$$\boldsymbol{v}_\eta \in L^2(0,T;V) \cap C([0,T];H), \quad \dot{\boldsymbol{v}}_\eta \in L^2(0,T;V'), \tag{IV.41}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}_\eta(t) + A\boldsymbol{v}_\eta(t) = f(t), \qquad \text{p.p. } t \in (0,T), \tag{IV.42}$$

$$\boldsymbol{v}_\eta(0) = \boldsymbol{v}_0. \tag{IV.43}$$

Soit $\boldsymbol{u}_\eta : [0,T] \to V$ une fonction telle que

$$\boldsymbol{u}_\eta(t) = \int_0^t \boldsymbol{v}_\eta(s)\, ds + u_0. \tag{IV.44}$$

comme $\boldsymbol{v}_\eta \in C([0,T];H)$, alors $\boldsymbol{u}_\eta$ est bien définie. Il est clair qu'en utilisant (IV.40), (IV.41), (IV.42), (IV.43), et (IV.44), on déduit que $\boldsymbol{u}_\eta$ est l'unique solution du problème $\mathcal{P}^1_\eta$, avec la régularité (2.6).

Soit η_1, $\eta_2 \in L^2(0,T;V')$ pour lesquelles $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, sont solutions des problèmes $\mathcal{P}^1_{\eta_i}$, $i = 1,2$. retenons que l'hypothèse (II.48) avec $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2 \in W^{1,2}(0,T;V)$ et notons par $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ définies par (IV.44). on a alors

$$m_{\mathcal{A}} \int_0^t |\boldsymbol{v}_1(s) - \boldsymbol{v}_2(s)|_V^2 \quad ds \leq \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{H'}^2 \quad ds,$$

ce qui donne

$$|\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)|_V^2 \leq \frac{1}{m_{\mathcal{A}}} \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{H'}^2 \quad ds.$$

□

Pour l'existence et l'unicité de solution du problème $\mathcal{P}^2_\eta$, nous avons le résultat

Lemme 12. *Il existe une unique solution*

$$\varphi_\eta \in W^{1,2}(0,T;W), \tag{IV.45}$$

du problème $\mathcal{P}^2_\eta$. Si φ_1, φ_2 sont deux solutions de $\mathcal{P}^2_\eta$ correspondantes aux données η_1 et

$\eta_2 \in L^2(0,T;V')$, *il existe une constante* $c > 0$ *tel que*

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|_W \leq c\, |\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)|_V \,. \tag{IV.46}$$

Démonstration. Definissons l'opérateur $A(t) : W \to W$, pour $t \in [0,T]$, par

$$\begin{aligned} A_\eta(t)\varphi(t), \xi_W &= (\gamma \nabla \varphi(t), \nabla \xi)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\eta(t), \nabla \xi)_{\mathcal{H}} \\ &+ \left(h_\delta\left(\boldsymbol{u}_\eta(t), \varphi(t)\right), \xi\right)_W, \qquad \forall \xi \in W. \end{aligned}$$

Soit φ_1, $\varphi_2 \in W$, comme γ satisfait (**??**), la fonction ϕ_L est monotone et $\psi_\delta \geq 0$, ce qui donne

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W \geq m_\gamma\, |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 \,.$$

ainsi l'opérateur $A_\eta(t)$ est forttement monotone. Sous les conditions (**??**) et (**??**), on a

$$(A_\eta(t)\varphi_1 - A_\eta(t)\varphi_2, \xi)_W \leq c\, |\varphi_1 - \varphi_2|_W\, |\xi|_W \,,$$

d'où $A_\eta(t)$ continu au sens de Lipshitz. L'équation $A_\eta(t)\varphi(t) = q(t)$, admet donc une et une seule solution $\varphi_\eta(t) \in W$, pour $q(t) \in W$. La fonction $\varphi_\eta(t)$ est l'unique solution du problème $\mathcal{P}^2_\eta$.

ontrons que $\varphi_\eta \in W^{1,2}(0,T;W)$, Soit t_1, $t_2 \in [0,T]$et $\varphi_\eta(t_1) = \varphi_1$, $\varphi_\eta(t_2) = \varphi_2$, $\boldsymbol{u}_\eta(t_1) = \boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_\eta(t_2) = \boldsymbol{u}_2$, $q(t_1) = q_1$, $q(t_2) = q_2$, rappelons que la fonction ψ_δ est positive et ϕ_L est monotone. Nous déduisons alors des relations (**??**), (**??**), (**??**), (**??**), (1.36), et la bornitude de ψ_δ, ϕ_L, que

$$\begin{aligned} &m_\gamma\, |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2 + \int_{\Gamma_3} \psi_\delta\left(u_{1\nu} - g\right)\left[\phi_L\left(\varphi_1 - \varphi_0\right) - \phi_L\left(\varphi_2 - \varphi_0\right)\right]\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \\ &\leq \left[c_{\mathcal{E}}\, |\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|_V + |q_1 - q_2|_W\right] |\varphi_1 - \varphi_2|_W \\ &+ \int_{\Gamma_3} |\psi_\delta\left(u_{1\nu} - g\right) - \psi_\delta\left(u_{2\nu} - g\right)|\, |\phi_L\left(\varphi_1 - \varphi_0\right)|\, |\varphi_1 - \varphi_2|\, da, \\ &\leq \left[\left(c_{\mathcal{E}} + Lkc_0\bar{c}_0\right) |\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|_V + |q_1 - q_2|_W\right] |\varphi_1 - \varphi_2|_W \,, \end{aligned}$$

ce qui entraine

$$|\varphi_1 - \varphi_2|_W \leq c\left[|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|_V + |q_1 - q_2|_W\right]. \tag{IV.47}$$

Comme $q_i \in W^{1,2}\left(0,T;W\right)$ et $u_i \in W^{1,2}(0,T;V)$, $i = 1,2$, alors on a $\varphi_\eta \in W^{1,2}(0,T;W)$. Montrons maintenant l'estimation(2.9). Soit η_1, $\eta_2 \in L^2(0,T;V')$ et φ_1, φ_2, sont les solutions respectives de $\mathcal{P}^2_{\eta_i}$, $i = 1,2$, et$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, sont les solutions respectives de $\mathcal{P}^1_{\eta_i}$, $i = 1,2$. En utilisant les mêmes arguments que précedement on trouve

$$|\varphi_1 - \varphi_2|_W \leq \frac{1}{m_\gamma}\left(c_{\mathcal{E}} + kLc_0\bar{c}_0\right) |\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|_V \,.$$

□

Définissons l'opérateur $\Lambda : L^2(0,T;V') \to L^2(0,T;V')$ par

$$(\Lambda\eta(t), v)_{V',V} = \Big(\mathcal{G}\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\eta), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\right)_{\mathcal{H}} + (J\boldsymbol{u}_\eta, \boldsymbol{v}) + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_\eta, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\Big)_{\mathcal{H}}, \tag{IV.48}$$

où $\boldsymbol{u}_\eta$, φ_η sont respectivement les solutions uniques de $\mathcal{P}^1_\eta$ et $\mathcal{P}^2_\eta$. Alors nous avons le résultat.

Théorème 22. *L'opérateur Λ définit par (2.19) admet un seul point fixe $\eta^* \in L^2(0,T;V')$.*

Démonstration. Soit $t \in [0,T]$, $\eta_i \in L^2(0,T;V')$, $i = 1,2$, on note par $\boldsymbol{u}_{\eta_i} = \boldsymbol{u}_i$ et $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$, $i = 1,2$. on utilise (1.15 (b)), (II.50) et (II.52) on déduit que

$$|\Lambda\eta_1, -\Lambda\eta_2|_{V'} \leq c\left[|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|_V + |\varphi_1 - \varphi_2|_W\right].$$

On applique maintenant les inégalités (2.7), (2.9), on a

$$|\Lambda(\eta_1) - \Lambda(\eta_2)|_{V'} \leq c\,|\eta_1 - \eta_2|_{L^2(0,t;V')}.$$

ce qui entraine

$$|\Lambda\eta_1 - \Lambda\eta_2|_{L^2(0,T;V')} \leq Tc\left[|\eta_1 - \eta_2|_{L^2(0,T;V')}\right],$$

En reitérant le raisonnement n fois, on trouve

$$|\Lambda^n\eta_1 - \Lambda^n\eta_2|_{L^2(0,T;V')} \leq \frac{(Tc)^n}{n!}\,|\eta_1 - \eta_2|_{L^2(0,T;V')} \tag{IV.49}$$

ce qui montre que l'opérateur Λ est une contraction sur $L^2(0,T;V')$. Le théorème de Banach nous permet de conclure que Λ admet un unique point fixe $\eta^* \in L^2(0,T;V')$. □

Nous revenons à la démonstration du théorème 24

Démonstration. Existence. Soit $\eta^* \in L^2(0,T;V')$ le point fixe de Λ et $(\boldsymbol{u}_{\eta^*};\varphi_{\eta^*})$ sont les solutions de $\mathcal{P}^1_{\eta^*}$ et $\mathcal{P}^2_{\eta^*}$. En utilisant (1.39), (1.40) et (2.19), avec $\Lambda(\eta^*) = \eta^*$, on déduit que $(\boldsymbol{u}_{\eta^*};\varphi_{\eta^*})$ est solution du problème régularisé $\mathcal{P}_R$. La régularité (2.1) par le lemme 11 et Lemme 12.

Unicitè. L'unicité de la solution dans le théorème 24 est une conséquence du point fixe de l'opérateur Λ donné par (2.19). □

3 Existence et unicité de solutions du problème $\mathcal{P}_V$

Théorème 23. *Supposons que toutes les conditions (II.48)-(1.37) sont vérifiées. Alors il existe une unique solution au problème $\mathcal{P}_V$ qui satisfait*

$$\boldsymbol{u} \in W^{1,2}(0,T;V) \cap C^1([0,T];H), \quad \ddot{\boldsymbol{u}} \in L^2(0,T;V), \quad \varphi \in W^{1,2}(0,T;W). \tag{IV.50}$$

Rappellons que l'existence et l'unicité de solutions de $\mathcal{P}_R$, n'est autre que l'existence d'une suite $\boldsymbol{u}_\delta$ et φ_δ solutions de (1.39) et (1.40), avec la condition initiale (1.42) et la régularité (2.1). Pour montrer l'existence et l'unicité de solutions notées $\boldsymbol{u}$ and φ du problème donné par (1.31), (1.32) et (1.34), nous faisons un passage à la limite lorsque $\delta \to 0$, dans le problème $\mathcal{P}_R$,moyennant quelques estimations à priori sur les suites $\boldsymbol{u}_\delta$ et φ_δ, les propriétés de $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$, j, ϕ, h et aussi quelques résultats de compacité.

3.1 Estimations à priori

3.1.1 Estimations sur (φ_δ)

Nous remplaçons $\xi = \varphi_\delta(t)$ dans (1.40)

$$\begin{aligned}&(\beta\nabla\varphi_\delta(t), \nabla\varphi_\delta(t))_{\mathcal{H}} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\delta(t), \nabla\varphi_\delta(t))_{\mathcal{H}} \\ &+ \textstyle\int_{\Gamma_3} \psi_\delta\left(u_\nu(t) - g\right)\phi_L\left(\varphi_\delta(t) - \varphi_0\right)\varphi_\delta(t)\ da = (q(t), \varphi_\delta(t))_W\,,\end{aligned}$$

tenant compte de (II.51), (II.50), (1.19), (1.27) et (1.35), on déduit que

$$|\varphi_\delta(t)|_W^2 \leq \left[c\,|\boldsymbol{u}_\delta(t)|_V + |q(t)|_W\right]|\varphi_\delta(t)|_W\,,$$

alors

$$|\varphi_\delta|_{L^2(0,T;W)} \leq c\,|\boldsymbol{u}_\delta|_{L^2(0,T;V)} + |q|_{L^2(0,T;W)}\,. \tag{IV.51}$$

3.1.2 Estimations sur $(\boldsymbol{u}_\delta)$

rappelons $\boldsymbol{u}_\delta \in W^{1,2}(0,T;V)$ et $\mathcal{A}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}\right) \in \mathcal{H}$, $\mathcal{G}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0},0\right) \in \mathcal{H}$ remplaçons les fonctions $\boldsymbol{v}$=$\boldsymbol{v}_\delta(t) = \dot{u}_\delta(t)$ dans (1.39), on trouve

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\,|\boldsymbol{v}_\delta(t)|_H^2 + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_\delta(t)) - \mathcal{A}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}\right), \boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{v}_\delta(t)\right))_{\mathcal{H}} \\ &+ (\mathcal{A}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}\right), \boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{v}_\delta(t)\right))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\delta(t)) - \mathcal{G}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}\right), \boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{v}_\delta(t)\right))_{\mathcal{H}} \\ &+ (\mathcal{G}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0},0\right), \boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{v}_\delta(t)\right))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_\delta(t), \boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{v}_\delta(t)\right))_{\mathcal{H}} + j\left(\boldsymbol{u}_\delta(t), \boldsymbol{v}_\delta(t)\right) \\ &= (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_\delta(t))_{V'}\,,\end{aligned} \tag{IV.52}$$

Pour alléger l'écriture nous notons $\mathcal{A}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}\right) = \mathcal{A}_0$ et $\mathcal{G}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}\right) = \mathcal{G}_0$, tenons compte toujours des hypothèses (II.48), (II.49), (II.52), et la propriété de trace, on a

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\,|\boldsymbol{v}_\delta(t)|_H^2 + m_{\mathcal{A}}\,|\boldsymbol{v}_\delta(t)|_V^2 \\ \leq\ &(L_{\mathcal{G}} + L_p c_0)\,|\boldsymbol{u}_\delta(t)|_V\,|\boldsymbol{v}_\delta(t)|_V \\ &+ \left[\textbf{cste}\ \ |\varphi_\delta(t)|_{W\ L^2(\Omega)} + |\boldsymbol{f}(\mathbf{t})|_{V'} + |\mathcal{G}_0|_{\mathcal{H}} + |\mathcal{A}_0|_{\mathcal{H}}\right]|\boldsymbol{v}_\delta(t)|_V\,,\end{aligned} \tag{IV.53}$$

soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, comme

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left|\boldsymbol{v}_\delta(t)\right|_H^2 + m_{\mathcal{A}}\left|\boldsymbol{v}_\delta(t)\right|_V^2 \\
\leq\ & \left(L_{\mathcal{G}} + L_p\tilde{c}_0\right)\frac{\alpha}{2}\left|\boldsymbol{u}_\delta(t)\right|_V^2 + \frac{1}{2\alpha}\left(L_{\mathcal{G}} + L_p\tilde{c}_0 + 1\right)\left|\boldsymbol{v}_\delta(t)\right|_V^2 \\
&+\frac{\textbf{cste }\alpha}{2}\left[\left|\varphi_\delta(t)\right|_W^2 + \left|\boldsymbol{f}(t)\right|_{V'}^2 + \left|\mathcal{G}_0\right|_{\mathcal{H}}^2 + \left|\mathcal{A}_0\right|_{\mathcal{H}}^2\right], \qquad \text{(IV.54)}
\end{aligned}$$

on choisit $\alpha < \frac{2m_{\mathcal{A}}}{(L_{\mathcal{G}}+L_p\tilde{c}_0+1)}$, avec l'estimation

$$\left|\varphi_\delta(t)\right|_W \leq \textbf{cste}\ \left|\boldsymbol{u}_\delta(t)\right|_V + \left|q(t)\right|_W,$$

et une intégration de 0 à t dans (2.32), on trouve

$$\begin{aligned}
&\left|\boldsymbol{v}_\delta(t)\right|_H^2 + cste\left|\boldsymbol{v}_\delta\right|_{L^2(0,t;V)}^2 \leq \left[\frac{1}{2\alpha}\left(L_{\mathcal{G}} + L_p\tilde{c}_0\right) + cste\right]\left|\boldsymbol{u}_\delta\right|_{L^2(0,t;V)}^2 \qquad \text{(IV.55)}\\
&+\left|\boldsymbol{f}\right|_{L^2(0,T;V')}^2 + T\left|\mathcal{G}_0\right|_{\mathcal{H}}^2 + T\left|\mathcal{A}_0\right|_{\mathcal{H}}^2 + \left|\boldsymbol{v}_0\right|_H^2.
\end{aligned}$$

Soit $\tilde{f} = \left|\boldsymbol{f}\right|_{L^2(0,T;V')}^2 + T\left|\mathcal{G}_0\right|_{\mathcal{H}}^2 + T\left|\mathcal{A}_0\right|_{\mathcal{H}}^2 + \left|\boldsymbol{v}_0\right|_H^2$, on déduit de (2.33)

$$\left|\boldsymbol{v}_\delta\right|_{L^2(0,t;V)}^2 \leq \textbf{cste}\ \left|\boldsymbol{u}_\delta\right|_{L^2(0,t;V)}^2 + \tilde{f}. \qquad \text{(IV.56)}$$

à partir de la régularité (2.1), nous avons $u_\delta \in C^1(0,T.V)$ et on peut écrire donc

$$\boldsymbol{u}_\delta(t) = \int_0^t \boldsymbol{v}_\delta(s)ds + u_0,$$

ce qui implique

$$\left|\boldsymbol{u}_\delta(t)\right|_V^2 \leq \textbf{cste.}\ \left[\left|\boldsymbol{v}_\delta\right|_{L^2(0,t;V)}^2 + \left|u_0\right|_{L^2(0,T;V)}^2\right]. \qquad \text{(IV.57)}$$

Des estimations (2.34) et (2.35) on a

$$\left|\boldsymbol{u}_\delta(t)\right|_V^2 \leq \left|\boldsymbol{u}_\delta\right|_{L^2(0,t;V)}^2 + cste \qquad \text{(IV.58)}$$

Appliquons le lemme de Gronwall à $\left|\boldsymbol{u}_\delta(t)\right|_V^2$ on trouve

$$\left|\boldsymbol{u}_\delta\right|_{L^2(0,T;V)} \leq \textbf{cste.} \qquad \text{(IV.59)}$$

L'estimation (2.37) sur $\boldsymbol{u}_\delta$, et celle sur φ_δ donnée par (2.23), on trouve

$$\left|\varphi_\delta\right|_{L^2(0,T;W)} \leq \textbf{cste,} \qquad \text{(IV.60)}$$

nous déduisons aussi à partir de la bornitude de la suite $(\boldsymbol{u}_\delta)$ dans $L^2(0,T;V)$ la relation (2.34) que la dérivée $\dot{\boldsymbol{u}}_\delta$ est aussi bornée dans $L^2(0,T;V)$,

$$|\dot{\boldsymbol{u}}_\delta|^2_{L^2(0,T;V)} \leq \text{cste.} \tag{IV.61}$$

Pour l'estimation de la dérivée seconde $\ddot{\boldsymbol{u}}_\delta$ dans $L^2(0,T;V')$, rappellons l'équation

$$\begin{aligned}&(\ddot{\boldsymbol{u}}_\delta(t),\boldsymbol{v})_{V',V} = \mathcal{A}\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_\delta(t)),\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\right)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\delta(t)),\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}}\\ &-(\mathcal{E}^*\nabla\varphi_\delta(t),\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} - j\left(\boldsymbol{u}_\delta(t),\boldsymbol{v}\right) = (\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v})_{V',V}, \quad \forall \boldsymbol{v}\in V,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}|(\ddot{\boldsymbol{u}}_\delta(t),\boldsymbol{v})|_{V',V} \;\leq\; & \left[L_{\mathcal{A}}\,|\dot{\boldsymbol{u}}_\delta(t)|_V + L_{\mathcal{G}}\,|\boldsymbol{u}_\delta(t)|_V + \right.\\ & \left. c_{\mathcal{E}}\,|\nabla\varphi_\delta\,(t)|_H + L_p\,|\boldsymbol{u}_\delta(t)|_V + |\boldsymbol{f}(t)|_V\right]|\boldsymbol{v}|_V\,,\end{aligned}$$

ce qui entraine que

$$|\ddot{\boldsymbol{u}}_\delta|_{L^2(0;T,V')} \leq \text{cste}. \tag{IV.62}$$

3.2 Passage à la limite $(\delta \to 0)$

Pour faire un passage à la limite nous allons utiliser un résultat de compacité cité à la page 18 sur les problèmes d'évolution

La convergence de la suite $(\boldsymbol{u}_\delta)$.

Nous appliquons le corollaire 1, on prend succesivement $X = Y = H = V$ et $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{u}_\delta\}$ et $X = V$, $H = H$ et $Y = V'$ pour $\mathcal{F} = \{\dot{\boldsymbol{u}}_\delta\}$, les conditions du corollaire sont satisfaites pour $p = 2$. De (2.37) et (2.40) $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{u}_\delta\}$ est relativement compact dans $L^2(0,T;V)$, et $\mathcal{F} = \{\dot{\boldsymbol{u}}_\delta\}$ est relativement compact dans $L^2(0,T;H)$. d'où il existe une sous suite notée aussi $(\boldsymbol{u}_\delta)$ telle que

$$\boldsymbol{u}_\delta \to \boldsymbol{u}, \quad \text{fortement dans } L^2(0,T;V), \tag{IV.63}$$

La convegence dans $L^2(0,T;V)$ implique que

$$\boldsymbol{u}_\delta \to \boldsymbol{u}, \quad \text{fortement dans } L^2(0,T;H), \tag{IV.64}$$

à partir de (2.37), le théorème de trace donné sur $\boldsymbol{u}_\delta$, il existe une sous-suite $\{\gamma\boldsymbol{u}_\delta\}$ telle que

$$\gamma\boldsymbol{u}_\delta \to \gamma\boldsymbol{u}, \quad \text{fortement dans } L^2(0,T;L^2(\Gamma_3)), \tag{IV.65}$$

il existe aussi une sous suite $\{\dot{\boldsymbol{u}}_\delta\}$ telle que

$$\dot{\boldsymbol{u}}_\delta \to \dot{\boldsymbol{u}}, \quad \textbf{fortement dans } L^2(0,T;H). \tag{IV.66}$$

L'estimation (2.41) permet d'avoir

$$\ddot{\boldsymbol{u}}_\delta \rightharpoonup \ddot{\boldsymbol{u}}, \quad \textbf{faiblement dans } L^2(0,T;V'). \tag{IV.67}$$

La convergence de la suite (φ_δ).
De relation (2.9) on tire

$$\varphi_\delta \to \varphi, \quad \textbf{fortement dans } L^2(0,T;W), \tag{IV.68}$$

Preuve du Théorème 26. La convergence forte (2.42), avec la convergence faible (2.46) dans $L^2(0,T;V')$ nous permet de passer à la limite dans l'équation du système $\mathcal{P}_R$. Nous avons d'abord

$$(\ddot{\boldsymbol{u}}_\delta, \boldsymbol{v})_{V',V} \to (\ddot{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v})_{V',V} \ , \quad \forall \boldsymbol{v} \in V, \text{ p.p. } t \in (0,T) \, .$$

et avec la convergence forte de $\dot{\boldsymbol{u}}_\delta$ dans $L^2(0,T;V)$ l'hypothèse (II.48)(b) sur $\mathcal{A}$ on trouve

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_\delta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}\,(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} \to (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}\,(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} \, , \quad \forall \boldsymbol{v} \in V, \text{ p.p. } t \in (0,T) \, .$$

La convergence forte de $\boldsymbol{u}_\delta$ dans $L^2(0,T;V)$ (voir (2.43) avec la propriété (II.49)(b) implique

$$(\mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\delta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})_{\mathcal{H}}) \to (\mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} \, , \tag{IV.69}$$

$$\forall \boldsymbol{v} \in V, \text{ a.e. , p.p. } t \in (0,T) \, . \tag{IV.70}$$

La convergence (2.47) avec l'hypothèse (II.50) sur $\mathcal{E}$, on trouve

$$(\mathcal{E}^* \nabla \varphi_\delta(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} \to (\mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} \ , \quad \forall \boldsymbol{v} \in V, \text{ p.p. } t \in (0,T) \, ,$$

et la propriété sur la fonction de compliance on déduit que

$$j\,(\boldsymbol{u}_\delta(t), \boldsymbol{v}) \to j\,(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) \ , \quad \forall \boldsymbol{v} \in V, \text{ p.p. } t \in (0,T) \, .$$

Pour retouver la deuxième équation $\mathcal{P}_V$. rappelons l'équation électrique

$$(\gamma \nabla \varphi_\delta(t), \nabla \xi)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\delta(t), \nabla \xi)_{\mathcal{H}} + (h_\delta\,(\boldsymbol{u}_\delta(t), \varphi_\delta(t))\,, \xi)_W = (q(t), \xi)_W$$
$$\forall \xi \in W, \text{ p.p. } (0,T) \, ,$$

Les convergences (2.47) et (2.42) nous permettent de faire aisement le passage à la limite

dans $(\gamma\nabla\varphi_\delta(t),\nabla\xi)_{\mathcal{H}}$ et dans $(\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\delta(t),\nabla\xi)_{\mathcal{H}}$.
Rappelons que $h_\delta\left(\boldsymbol{u}_\delta(t),\varphi_\delta(t)\right)$ s'écrit

$$\left(h_\delta\left(\boldsymbol{u}_\delta(t),\varphi_\delta(t)\right),\xi\right)=\int_{\Gamma_3}\psi_\delta\left(u_{\delta\nu}(t)-g\right)\phi_L\left(\varphi_\delta(t)-\varphi_0\right)\xi\,da.$$

D'abord de la convergence (2.44), on a

$$u_{\delta\nu}(t)\to u_\nu(t),\ \text{ fortement dans } L^2(\Gamma_3),\text{ p.p. }(0,T)\,, \tag{IV.71}$$

aussi nous avons la convergence ponctuelle pour $r\in\mathbb{R}^+$,

$$\psi_\delta\left(r\right)\to k\chi_{[0,+\infty[}(r)\text{ when }\delta\to 0,$$

comme ψ_δ est Lipshitzienne avec $\psi_\delta\left(0\right)=0$ donc, on a

$$\left|\psi_\delta\left(u_\nu-g\right)\right|_{L^2(\Gamma_3)}\leq\left|u_\nu-g\right|_{L^2(\Gamma_3)}\,,$$

Du théorème de convergence dominée de Lebesgue, on trouve

$$\psi_\delta\left(u_\nu-g\right)\to k\chi_{[0,+\infty[}\left(u_\nu-g\right),\ \text{ fortement dans } L^2(\Gamma_3). \tag{IV.72}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned}
&\left|\psi_\delta\left(u_{\delta\nu}-g\right)-k\chi_{[0,+\infty[}\left(u_\nu-g\right)\right|_{L^2(\Gamma_3)}\\
&=\left|\psi_\delta\left(u_{\delta\nu}-g\right)-\psi_\delta\left(u_\nu-g\right)+\psi_\delta\left(u_\nu-g\right)-k\chi_{[0,+\infty[}\left(u_\nu-g\right)\right|_{L^2(\Gamma_3)}\\
&\leq\left|\psi_\delta\left(u_{\delta\nu}-g\right)-\psi_\delta\left(u_\nu-g\right)\right|_{L^2(\Gamma_3)}\\
&\quad+\left|\psi_\delta\left(u_\nu-g\right)-k\chi_{[0,+\infty[}\left(u_\nu-g\right)\right|_{L^2(\Gamma_3)}\\
&\leq k\left|u_{\delta\nu}-u_\nu\right|_{L^2(\Gamma_3)}+\left|\psi_\delta\left(u_\nu-g\right)-k\chi_{[0,+\infty[}\left(u_\nu-g\right)\right|_{L^2(\Gamma_3)}\,,
\end{aligned}$$

utilisons (IV.71), (IV.72) et les convergences ci dessus, nous avons d'une part la convergence

$$\psi_\delta\left(u_{\delta\nu}-g\right)\to k\chi_{[0,+\infty[}\left(u_\nu-g\right),\ \text{ dans } L^2(\Gamma_3),\text{ p.p. }(0,T)\,.$$

D'autre part, comme

$$\left|\phi_L\left(\varphi_\delta-\varphi_0\right)-\phi_L\left(\varphi-\varphi_0\right)\right|_{L^2(\Gamma_3)}\leq\text{cste}L_\phi\left|\varphi_\delta-\varphi\right|_{L^2(\Gamma_3)}\,,$$

La convergence forte de φ_δ dans $L^2(0,T;W)$ et le théorème de trace, on trouve

$$\phi_L\left(\varphi_\delta-\varphi_0\right)\to\phi_L\left(\varphi-\varphi_0\right),\quad\text{dans } L^2(\Gamma_3),\text{ p.p. } t.$$

On a donc

$$\psi_\delta\left(u_{\delta\nu}-g\right)\phi_L\left(\varphi_\delta-\varphi_0\right)\to k\chi_{[0,+\infty[}\left(u_\nu-g\right)\phi_L\left(\varphi-\varphi_0\right),\ \text{p.p. in } \Gamma_3,$$

Les bornitudes des fonctions ϕ_L, ψ_δ independement de δ avec le théorème de convergence dominé, on a

$$\psi_\delta\left(u_{\delta\nu}-g\right)\phi_L\left(\varphi_\delta-\varphi_0\right)\to k\chi_{[0,+\infty[}\left(u_\nu-g\right)\phi_L\left(\varphi-\varphi_0\right),\ \text{fortement dans } L^2(\Gamma_3),$$

Par conséquence on a

$$h_\delta\left(\boldsymbol{u}_\delta,\varphi_\delta\right)\to l\left(\boldsymbol{u},\varphi\right),\ \text{p.p. } (0,T).$$

Nous concluons que φ est solution de l'équation électrique (1.32) du problème $\mathcal{P}_V$.

Avant de terminer la démonstration sur l'existence de la solution du problème $\mathcal{P}_V$, rappelons que la convergence forte de $\boldsymbol{u}_\delta$ vers $\boldsymbol{u}$ dans $L^2(0,T;V)$, la convergence de $\dot{\boldsymbol{u}}_\delta$ vers $\dot{\boldsymbol{u}}$ dans $L^2(0,T;H)$ et la régularité $\boldsymbol{u}_\delta\in C^1(0,T;H)$ nous permettent d'obtenir $\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}_0$, $\dot{\boldsymbol{u}}(0)=\boldsymbol{v}_0$. Il est clair que l'unicité de $\boldsymbol{u}$ et φ provienent de l'unicité de la limite. La régularité des solutions $\boldsymbol{u}$ et φ de $\mathcal{P}_V$ sont obtenues à partir des régularités de $\boldsymbol{u}_\delta$ et φ_δ et le passage à la limite. Ainsi le théorème 26 est démontré. $\square$

Chapitre V

Problème dynamique avec endommagement

Nous considérons un problème dynamique qui décrit un contact sans friction et avec endommagement entre le corps électro-viscoélastique et une base conductrice. La friction est modélisé avec loi de la de compliance normale. Nous considèrons des conditions de conductivité électrique pour un problème physique presque parfait. L'évolution de la fonction d'endommagement est donnée par une inclusion de type parabolique.

Dans ce chapitre, nous donnons d'abord des formulations variationnelles du problème mécanique. Ensuite nous étudions l'existence et l'unicité de la solution faible du problème approché. Nous calculons des estimations a priori sur les solutions approchées, ensuite, nous faisons un passage à la limite . La démonstration repose les inéquations d'évolution, le théorème du point fixe de Banach et des résultats de la compacité pour les problèmes d'évolution.

1 Problème mécanique et formulation variationnelle

Problem $\mathcal{P}$. trouver le champ de déplacement $\boldsymbol{u} : \Omega\times[0,T] \to \mathbb{R}^d$, le potentiel électrique $\varphi : \Omega\times[0,T] \to \mathbb{R}$, et une fonction d'endommagement $\beta : \Omega\times[0,T] \to \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}) + \mathcal{G}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}),\beta) + \mathcal{E}^*\nabla\varphi \ \textbf{dans}\ \Omega\times(0,T)\,, \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) - \gamma\nabla\varphi \ \textbf{dans}\ \Omega\times(0,T)\,, \tag{1.2}$$

$$\dot{\beta} - \hat{k}\,\triangle\,\beta + \partial\varphi_K(\beta) \ni \phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}),\beta), \tag{1.3}$$

$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}} = Div\ \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}_0 \qquad \textbf{dans}\ \Omega\times(0,T)\,, \tag{1.4}$$

$$div\ \boldsymbol{D} = \boldsymbol{q}_0 \ \textbf{dans}\ \Omega\times(0,T)\,, \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{u} = 0 \qquad \textbf{sur}\,\Gamma_1\times(0,T)\,, \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\nu = \boldsymbol{f}_2 \qquad \textbf{sur}\ \Gamma_2\times(0,T)\,, \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\nu = -\,p\,(u_\nu - g)\ ,\ \boldsymbol{u}_\tau = 0\ \textbf{sur}\ \Gamma_3\times(0,T)\,, \tag{1.8}$$

$$\varphi = 0 \quad \textbf{sur}\ \ \Gamma_a\times(0,T)\,, \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{D}\cdot\nu = q_b \quad \textbf{sur}\ \ \Gamma_b\times(0,T)\,, \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{D}\cdot\nu = k\chi_{[0,+\infty)}\,(u_\nu - g)\,\phi_L\,(\varphi-\varphi_0)\ \textbf{sur}\ \Gamma_3\times(0,T)\,, \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\nu} = 0\,\textbf{sur}\ \Gamma\times(0,T), \tag{1.12}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{v}_0 \quad \beta(0) = \beta_0\ \textbf{dans}\ \Omega. \tag{1.13}$$

$\chi_{[0,+\infty)}$ **est la fonction characteristique de l'intervalle $[0,+\infty)$ donnée par**

$$\chi_{[0,+\infty)}(r) = \begin{cases} 0 & \textbf{si}\ r<0, \\ 1 & \textbf{si}\ r\geq 0. \end{cases}$$

L'équation (1.3) décrivant l'évolution de la fonction d'endommagement, K désigne l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles définies par le convexe

$$K = \left\{ \xi \in H^1(\Omega) \mid 0 \leq \xi \leq 1 \text{ dans } \Omega \right\},$$

$H^1(\Omega)$ ici est l'espace classique de Sobolev. L'ensemble $\partial\varphi_K$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice φ_K du convexe K. Le reste des équations et données sont les mêmes que celles posées dans le chapitre quatre. Soient les sous espaces de H_1 et H^1notés V et W et soient V' and W' leurs duals respectifs, avec les inclusions denses et cotinues suivantes $V \subset \mathcal{H} \subset V'$ resp $(W \subset L^2(\Omega) \subset W')$. Pour l'étude du problème $\mathcal{P}$ nous posons les hypothèses suivantes

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{(a) } \mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d \\
\text{(b)Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\
|\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)| \leq L_{\mathcal{A}} |\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2| \;\; \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, p.p \; \boldsymbol{x} \in \Omega, \\
\text{(cIl existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\
(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2|^2, \\
\forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ a.e. } \boldsymbol{x} \in \Omega, \\
\text{(d) l'application } \boldsymbol{x} \longmapsto \mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\
\text{(e) l'application } \boldsymbol{x} \longmapsto \mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) \text{ appartient à } \mathcal{H}.
\end{array}\right. \tag{1.14}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{(a) } \mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^d \\
\text{(b) there exist } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que} \\
|\mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \beta_1) - \mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \beta_2)| \leq L_{\mathcal{G}} |\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2| + |\beta_1 - \beta_2|, \\
\forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \;\; \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \text{ a.e. } \boldsymbol{x} \in \Omega, \\
\text{(c) the mapping } \boldsymbol{x} \longmapsto \mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \beta) \text{ is Lebesgue measurable on } \Omega, \\
\forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d, \;\; \forall \beta \in \mathbb{R} \\
\text{(d) the mapping } \boldsymbol{x} \longmapsto \mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}, 0) \text{ belongs to } \mathcal{H}.
\end{array}\right. \tag{1.15}$$

La fonction d'endommagement stisfait

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{(a) } \phi : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
\text{(b) there exist } L_{\phi} > 0 \text{ tel que} \\
|\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \beta_1) - \phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \beta_2)| \leq L_{\phi} |\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2| + |\beta_1 - \beta_2|, \\
\forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \;\; \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega, \\
\text{(c) the mapping } \boldsymbol{x} \longmapsto \phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \beta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\
\forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d, \;\; \forall \beta \in \mathbb{R} \\
\text{(d) the mapping } \boldsymbol{x} \longmapsto \phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}, 0) \text{ est dans } \mathcal{H}.
\end{array}\right. \tag{1.16}$$

Le tenseur piezoélectrique $\mathcal{E}$ et le tenseur de permeabilité γ satisfont respectivement les propriétés (II.50) et (II.51). La compliance normale satisfait (II.52). La fonction d'interstice g et le potentiel initial φ_0 vérifient

$$g \in L^2(\Gamma_3), \qquad g \geq 0, \text{ a.e. on } \Gamma_3 \tag{1.17}$$

$$\varphi_0 \in L^2(\Gamma_3), \tag{1.18}$$

On suppose qu'il existe une large valeur de L plus grande que tout pick de voltage de sorte que $\varphi - \varphi_0$ reste borné par L. Cette condition ne pose aucun problème physique et ce qui permet de définir une fonction régulière ϕ_L donnée par

$$\phi_L(s) \begin{cases} -L & \text{if } s < -L, \\ s & \text{if} - L < s < L, \\ L & \text{if } s > L. \end{cases} \tag{1.19}$$

Cette troncature permet de résoudre le problème, il suffit de voir que ϕ_L est de Lipshitz et monotone. nous supposons que

$$\hat{k} > 0, \qquad \beta_0 \in K, \tag{1.20}$$

$$\boldsymbol{u}_0 \in V, \qquad \boldsymbol{v}_0 \in H.$$

Les forces volumique et surfacique ont les régularités suivantes

$$\mathrm{f}_0 \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)^d\right), \tag{1.21}$$

$$\boldsymbol{f}_2 \in L^2\left(0, T; L^2(\Gamma_2)^d\right), \tag{1.22}$$

$$q_0 \in W^{1,p}\left(0, T; L^2(\Omega)\right), \tag{1.23}$$

$$q_b \in W^{1,p}\left(0, T; L^2(\Gamma_b)\right). \tag{1.24}$$

Nous définissons $\boldsymbol{f}(t) \in V'$ by

$$(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v})_{V',V} = (\boldsymbol{f}_0(t), \boldsymbol{v})_H + (\boldsymbol{f}_2(t), \boldsymbol{v})_{L^2(\Gamma_2)^d}, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in V, \text{ a.e. } t \in (0,T), \tag{1.25}$$

Soit $j : V \times V \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle définie par

$$j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_3} p(u_\nu - g) v_\nu \, da, \quad \forall \boldsymbol{u}, \, \boldsymbol{v} \in V. \tag{1.26}$$

et par le théorème de représentation de Riesz on définit $q(t) \in W$ et $Ju \in V$ par

$$(q(t), \xi)_W = -(q_0(t), \xi)_{L^2(\Omega)} - (q_b(t), \xi)_{L^2(\Gamma_b)}, \quad \forall \xi \in W, \textbf{ a.e. } t \in (0,T), \tag{1.27}$$

$$(Ju, v)_V = j(u, v) \tag{1.28}$$

Moyennant les relations (1.22), (1.21) (1.23) et (1.24) on trouve $\boldsymbol{f} \in W^{1,p}(0,T;V')$, $q \in W^{1,p}(0,T;W)$. Soit $l : V \times W \to W$ définie par

$$\begin{aligned} (l(\boldsymbol{u}, \varphi), \xi) &= \int_{\Gamma_3} \chi_{(0,+\infty[}(u_\nu - g)\, \phi_L(\varphi - \varphi_0)\, \xi \, da, \\ & \forall \boldsymbol{u} \in V, \forall \xi, \varphi \in W. \end{aligned} \tag{1.29}$$

La forme bilinéaire $a : W \times W \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$a(\zeta, \eta) = \hat{k} \int_\Omega \nabla\zeta \nabla\eta \, dx, \quad \forall \zeta, \eta \in W. \tag{1.30}$$

Les conditions (II.43), (1.17), (1.18) et (1.19), les intégrales (1.26) et (1.29) sont bien définies.

Avec le triplet $\{\boldsymbol{u}, \varphi, \beta\}$ de fonctions régulières qui satisfont (1.1)-(1.13), $\boldsymbol{u}(t) \in V$, $\varphi(t) \in W$ et $\beta(t) \in H^1$, et avec les relations (1.26), (1.29), on peut donner une formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}$, noté $\mathcal{P}_V$.

Problem $\mathcal{P}_V$. Trouver le champ de déplacement $\boldsymbol{u} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, le potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ et la fonction d'endommagement $\beta : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} &(\ddot{\boldsymbol{u}}(t), \boldsymbol{v})_{V',V} + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)), \beta(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} \\ &+ (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} + j(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v})_{V',V}, \\ &\qquad \forall \boldsymbol{v} \in V \textbf{ p.p. } t \in (0,T), \end{aligned} \tag{1.31}$$

$$\begin{aligned} &(\gamma\nabla\varphi(t), \nabla\xi)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t), \nabla\xi)_{\mathcal{H}} + (l(\boldsymbol{u}(t), \varphi(t)), \xi)_W = (q(t), \xi)_W, \quad \geq \\ &\qquad \forall \xi \in W \textbf{ p.p. } t \in (0,T), \end{aligned} \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned} &\beta(t) \in K, \quad \left(\dot{\beta}(t), \zeta - \beta(t)\right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \zeta - \beta(t)) \\ &\geq (\phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)), \beta(t)), \zeta - \beta(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \zeta \in K \textbf{ p.p. } t \in (0,T), \end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \ \ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{v}_0, \ \beta(0) = \beta_0. \tag{1.34}$$

pour résoudre $\mathcal{P}_V$, nous considérons la fonction troncature de $\chi_{(0,+\infty[}$ notée ψ_n

définie par

$$\psi_n(r) = \begin{cases} 0 & \textbf{if } r < 0, \\ kr\frac{1}{n} & \textbf{if } 0 \leq r \leq \frac{1}{n}, \\ k & \textbf{if } r \geq \frac{1}{n}, \end{cases} \tag{1.35}$$

n est un paramètre qui tendra par la suite vers $+\infty$. On voit que ψ_n est positive croissante et Lipshtzienne,

$$\begin{gathered} \textbf{il existe } k > 0 \textbf{ tel que } |\psi_n(u_1) - \psi_n(u_2)| \leq k\,|u_1 - u_2| \\ \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R} \textbf{ p.p. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3, \end{gathered} \tag{1.36}$$

Supposons que ψ_n satisfait

$$\begin{gathered} \textbf{l'application } x \longmapsto \psi_n(x,r) \textbf{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}, \\ \textbf{Pour } r \leq 0, \quad \psi_n(x,r) = 0 \textbf{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{gathered}$$

Remplaçons $\chi_{(0,+\infty[}$ par la fonction régulière ψ_n ainsi la fonction l dans P_V est remplacée par la fonction h_n definie de $V \times W \to W$ et tel que

$$(h_n(\boldsymbol{u},\varphi),\xi) = \int_{\Gamma_3} \psi_n(u_\nu - g)\,\phi_L(\varphi - \varphi_0)\,\xi\,da, \tag{1.37}$$

$$\forall \boldsymbol{u} \in V,\ \forall \xi,\ \varphi \in W, \textbf{ a.e. } t \in (0,T), \tag{1.38}$$

Soit donc le problème régularisé $\mathcal{P}_R$.

Problem $\mathcal{P}_R$. Trouver le champ de déplacement $\boldsymbol{u}_n : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, le potentiel électrique $\varphi_n : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ et la fonction d'endommagement $\beta_n : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{gathered} (\ddot{\boldsymbol{u}}_n(t), \boldsymbol{v})_{V',V} + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_n(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_n(t)), \beta_n(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} \\ + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_n(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} + j(\boldsymbol{u}_n(t), \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v})_{V',V}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in V \textbf{ p.p. } t \in (0,T), \end{gathered} \tag{1.39}$$

$$\begin{gathered} (\gamma\nabla\varphi_n(t), \nabla\xi)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_n(t), \nabla\xi)_{\mathcal{H}} + (h_n(\boldsymbol{u}_n(t), \varphi_n(t)), \xi)_W = (q(t), \xi)_W \\ \forall \xi \in W \textbf{ p.p. } (0,T), \end{gathered} \tag{1.40}$$

$$\begin{gathered} \beta_n(t) \in K, \quad \left(\dot{\beta}_n(t), \zeta - \beta_n(t)\right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta_n(t), \zeta - \beta_n(t)) \\ \geq (\phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_n(t)), \beta_n(t)), \zeta - \beta_n(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \zeta \in K \textbf{ p.p. } (0,T). \end{gathered} \tag{1.41}$$

$$\boldsymbol{u}_n(0) = \boldsymbol{u}_0,\ \boldsymbol{u}_n(0) = \boldsymbol{v}_0,\ \beta_n(0) = \beta_0. \tag{1.42}$$

Pour simplifier les écritures on pose $\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{u}$, $\varphi_n = \varphi$, $\beta_n = \beta$, et on démontre l'existence et l'unicité des solutions de $\mathcal{P}_R$.

2 Existence et unicité des solutions de $\mathcal{P}_R$

Théorème 24. *Supposons les hypothèses (1.14)-(1.37) vérifient. Alors il existe une solution unique du problème $\mathcal{P}_R$. En plus la solution satisfait les régularités suivantes*

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u} \in W^{1,2}(0,T;V) \cap C^1([0,T];H), \qquad \ddot{\boldsymbol{u}} \in L^2(0,T;V'), \\
&\varphi \in W^{1,2}(0,T;W),, \quad \beta \in K, \quad \beta \in W^{1,2}\left(0;T,L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

La preuve du théorème 24 se ferra en trois étapes.

Nous supposons que (1.14)-(1.24) vérifiées et soient $(\eta^1,\eta^2) \in L^2(0,T;V \times L^2(\Omega))$**. Nous considèrons les problèmes suivants.**

Problem $\mathcal{P}^1_\eta$ Trouver un champ de déplacement $\boldsymbol{u}_\eta : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ tel que

$$\begin{gathered}
(\ddot{\boldsymbol{u}}_\eta(t),\boldsymbol{v})_H + (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_\eta(t)),\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} + \left(\eta^1(t),\boldsymbol{v}\right)_V = (\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v})_H \\
\forall \boldsymbol{v} \in V, \ \textbf{p.p } t \in (0,T),
\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{u}_\eta(0) = \boldsymbol{u}_0, \ \ \boldsymbol{u}_\eta(0) = \boldsymbol{v}_0, \tag{2.3}$$

Problem $\mathcal{P}^\eta$ trouver le potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{gathered}
(\gamma\nabla\varphi_\eta(t),\nabla\xi)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\eta(t),\nabla\xi)_{\mathcal{H}} + \left(h_n\left(\boldsymbol{u}_\eta(t),\varphi_\eta(t)\right),\xi\right)_W = (q(t),\xi)_W \\
\forall \xi \in W, \ \textbf{p.p. dans } \ (0,T),
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Problem $\mathcal{P}^\eta_2$ trouver la fonction d'endommagement $\beta_\eta : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned}
&\beta_\eta(t) \in K, \ \ \left(\dot{\beta}_\eta(t),\zeta - \beta_\eta(t)\right)_{L^2(\Omega)} + a\left(\beta_\eta(t),\zeta - \beta_\eta(t)\right) \\
&\geq \left(\eta^2(t),\zeta - \beta_\eta(t)\right)_{L^2(\Omega)}, \ \ \forall \zeta \in K \ \textbf{p.p. dans } \ (0,T).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\beta_\eta(0) = \beta.$$

Noter que les trois problèmes sont découplés, ceci permet d'établir séparement l'existence et l'unicité de la solution de chaque problème.

Lemme 13. *Il existe une et une seule solution $\boldsymbol{u}_\eta$ au problème $\mathcal{P}^\eta_1$. En plus elle vérifie*

$$\boldsymbol{u}_\eta \in W^{1,2}(0,T;V) \cap C^1([0,T];H), \qquad \ddot{\boldsymbol{u}}_\eta \in L^2(0,T;V'). \tag{2.6}$$

Si $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ sont deux solutions de $\mathcal{P}^\eta_1$ correspondant au données η^1_1, $\eta^1_2 \in L^2(0,T;V)$, alors il existe $c > 0$ tel que

$$|\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)|^2_V \leq \frac{1}{m_{\mathcal{A}}}\left[\int_0^t \left|\eta^1_1(s) - \eta^1_2(s)\right|^2_V ds\right]. \tag{2.7}$$

Démonstration. elle est similaire à celle donnée au lemme 11. Comme on a $\boldsymbol{v}_\eta \in C([0,T]\,;H)$, donc $\boldsymbol{u}$ est bien définie, il est clair en utilisant (IV.40), (IV.41), (IV.42), (IV.43) et (IV.44), en déduit que $\boldsymbol{u}_\eta$ est l'unique solution du problème $\mathcal{P}^1_\eta$, avec la régularité (2.6). De même si on prend η^1_1, $\eta^1_2 \in L^2(0,T;V)$ pour lesquelles $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ sont les solutions respectives de $\mathcal{P}^{\eta_i}_1$, $i=1,2$. tenant compte de (1.14) et le fait que $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2 \in W^{1,2}(0,T;V)$ avec $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ définies par (IV.44). nous déduisons que

$$m_{\mathcal{A}}\int_0^t |\boldsymbol{v}_1(s)-\boldsymbol{v}_2(s)|^2_V \quad ds \leq \int_0^t \left|\eta^1_1(s)-\eta^1_2(s)\right|^2_{V'} \quad ds,$$

□

Pour l'existence et l'unicité du problème $\mathcal{P}^\eta$, on a le résultat suivant

Lemme 14. *Il existe une solution unique*

$$\varphi_\eta \in W^{1,2}(0,T;W), \tag{2.8}$$

au problème $\mathcal{P}^\eta$. Si φ_1, φ_2 sont deux solutions du problème $\mathcal{P}^\eta$ correspondant qux données $\eta_1$et $\eta_2 \in L^2(0,T;V)$, alors il existe $c>0$ telle que

$$|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|_W \leq c\,|\boldsymbol{u}_1(t)-\boldsymbol{u}_2(t)|_V\,. \tag{2.9}$$

Démonstration. La démonstration est la même que celle donnée au lemme 12. Avec les mêmes arguments nous déduisons que

$$|\varphi_1-\varphi_2|_W \leq \frac{1}{m_\gamma}\left(c_{\mathcal{E}}+kLc_0\bar{c}_0\right)|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2|_V\,..$$

□

Pour l'existence et l'unicité du problème β_η du problème $\mathcal{P}^\eta_2$, on a le lemme suivant

Lemme 15. *Il existe une solution unique β_η au problème $\mathcal{P}^\eta_2$ tel que*

$$\beta_\eta \in W^{1,2}\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\cap L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right). \tag{2.10}$$

Si β_1, β_2 sont deux solutions du problème $\mathcal{P}^{\eta_i}_2$, correspondant aux données η^2_i notées $\tau_i \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, $i=1,2$, alors nous avons

$$|\beta_1(t)-\beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^t \left|\eta^2_1(s)-\eta^2_2(s)\right|^2_{L^2(\Omega)} ds. \tag{2.11}$$

Démonstration. Soit $a: W\times W \to \mathbb{R}$ tel que

$$a\left(\zeta,\xi\right)=\hat{k}\int_\Omega \nabla\zeta\nabla\xi\;dx,\quad \forall\zeta,\,\xi\in H^1\left(\Omega\right),\text{ p.p } t\in(0,T)\,. \tag{2.12}$$

Comme $\hat{k} > 0$, cela permet de voir que a satisfait les conditions du théorème 11 avec $\beta_0 \in K$ .Il existe donc un unique solution du problème $\mathcal{P}_2^\eta$. Si $\eta = (\eta^1, \eta^2) \in L^2(0,T; V \times L^2(\Omega))$, il existe une unique fonction β_η satisfaisant

$$\beta_\eta \in K,\ \beta_\eta \in W^{1,2}(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2\left(0,T; H^1(\Omega)\right), \tag{2.13}$$

$$\left(\dot{\beta}_\eta(t), \zeta - \beta_\eta\right) + a\left(\beta_\eta(t), \zeta - \beta_\eta\right) \geq \left(\eta^2(t), \zeta - \beta_\eta\right), \quad \forall \zeta \in K \quad \text{p.p. } t \in (0,T) \tag{2.14}$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0. \tag{2.15}$$

Soit $t \in [0,T]$ et β_1, β_2 les deux solutions du problème $\mathcal{P}_2^{\eta_i}$, correspondant à $\eta_i^2 = \tau_i$, $i = 1,2$, nous avons donc

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \hat{k}\int_0^t |\nabla(\beta_1(s) - \beta_2(s))|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.16}$$

$$\leq \int_0^t |\tau_1 - \tau_2|^2_{L^2(\Omega)}\, ds + \int_0^t |\beta_1(t) - \beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)}\, ds. \tag{2.17}$$

comme τ_i, $i = 1,2$, appartiennent à $L^2(0,T; L^2(\Omega))$, appliquons le lemme de Gronwall à $|\beta_1(t) - \beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)}$, on trouve

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^t |\tau_1(s) - \tau_2(s)|^2_{L^2(\Omega)}\, ds. \tag{2.18}$$

Soit maintenant l'opérateur Λ défini par

$$\Lambda : L^2\left(0,T; V \times L^2(\Omega)\right) \to L^2\left(0,T; V \times L^2(\Omega)\right)$$

où $L^2\left(0,T; H \times L^2(\Omega)\right)$ est un espace de Banach

$$\left|\left(\eta^1, \eta^2\right)\right|_{L^2(0,T;V\times L^2(\Omega))} = \left|\eta^1\right|_{L^2(0,T;V)} + \left|\eta^2\right|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$$

$$\Lambda(\eta) = \left(\mathcal{G}\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\eta), \beta_\eta\right) + Ju_\eta + \mathcal{E}^*\nabla\varphi_\eta\ ;\ \phi\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{u}_\eta\right), \beta_\eta\right)\right), \tag{2.19}$$

où $\boldsymbol{u}_\eta$, φ_η, β_η sont respectivement l'unique solution des problèmes $\mathcal{P}_1^\eta$, $\mathcal{P}^\eta$et $\mathcal{P}_2^\eta$. On a le résultat suivant. □

Théorème 25. *L'opérateur Λ admet un unique point fixe*

$$\eta^* \in L^2\left(0,T; V \times L^2(\Omega)\right).$$

Démonstration. Soit $t \in [0,T]$, $\eta_i \in L^2\left(0,T; V \times L^2(\Omega)\right)$, $i = 1,2$, $\eta_1 = \left(\eta_1^1, \tau_1^2\right), \eta_2 =$

(η_2^1, τ_2^2) ,et utilisant les notations $\boldsymbol{u}_{\eta_i} = \boldsymbol{u}_i$, $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$ et $\beta_{\tau_i} = \beta_i$, $i = 1, 2$, alors

$$|\Lambda\eta_1 - \Lambda\eta_2|_{V\times L^2(\Omega)} \leq |\mathcal{G}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_1), \beta_1) - \mathcal{G}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_2), \beta_2)|_{V'}$$
$$+c\,|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|_V + c_{\mathcal{E}}\,|\varphi_1 - \varphi_2|_W + |\phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_1), \beta_1) - \phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_2), \beta_2)|_{L^2(\Omega)}.$$

En appliquant les propriétés (1.15 (b)), (1.16 (b)), (**??**), (II.43) nous déduisons

$$|\Lambda\eta_1, -\Lambda\eta_2|_{V\times L^2(\Omega)} \leq c\left[|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2|_V + |\varphi_1 - \varphi_2|_W + |\beta_1 - \beta_2|_{L^2(\Omega)}\right].$$

tenant compte des inégalités (2.7), (2.9), (2.11), nous trouvons

$$\begin{aligned} & |\Lambda\eta_1 - \Lambda\eta_2|_{V\times L^2(\Omega)} \\ \leq\ & c\left[\left|\eta_1^1 - \eta_2^1\right|_{L^2(0,t;V)} + \left|\eta_1^2 - \eta_2^2\right|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}\right] \\ \leq\ & c\,|\eta_1 - \eta_2|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))} \end{aligned}$$

Réiterant les estimations n fois on conclut que

$$|\Lambda^n\eta_1 - \Lambda^n\eta_2|_{V\times L^2(\Omega)} \tag{2.20}$$
$$\leq \frac{(Tc)^n}{n!}\,|\eta_1 - \eta_2|_{L^2(0,T;V\times L^2(\Omega))} \tag{2.21}$$

D'où l'opérateur Λ est donc une contraction de $L^2(0, T; V \times L^2(\Omega))$ dans lui même. Le théorème du point fixe de Banach assure que Λ a un point fixe unique.

$$(\eta^*; \tau^*) \in L^2\left(0, T; V \times L^2(\Omega)\right).$$

□

Démonstration. du théorème 24

Existence. Soit $(\eta^*; \tau^*) \in L^2(0, T; V \times L^2(\Omega))$ le point fixe de Λ et $(\boldsymbol{u}_{\eta^*}; \varphi_{\eta^*}; \beta_{\tau^*})$ une solution des problèmes $\mathcal{P}_1^{\eta^*}$, $\mathcal{P}_2^{\eta^*}$et $\mathcal{P}^{\tau^*}$. Moyennant les régularités (1.39), (1.40), (1.41) et (2.19). et tenant compte du fait que $\Lambda(\eta^*; \tau^*) = (\eta^*; \tau^*)$, nous déduisons que $(\boldsymbol{u}_{\eta^*}; \varphi_{\eta^*}; \beta_{\tau^*})$ est la solution du problème $\mathcal{P}_R$. La régularité de la solution (2.1) provient du lemme 13, lemme 14 et le lemme 15.

Unicité. l'unicité de la solution est la conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ donné par (2.19). □

Théorème 26. *Supposons que les conditions suivantes (1.14)-(1.30) sont vérifiées. Alors il existe une unique solution de $\mathcal{P}_V$ .De plus la solution satisfait*

$$\boldsymbol{u} \in W^{1,2}(0, T; V) \cap C^1([0, T]; H), \qquad \ddot{\boldsymbol{u}} \in L^2(0, T; V), \tag{2.22}$$
$$\varphi \in W^{1,2}(0, T; W), \qquad \beta \in W^{1,2}\left(0; T, L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0, T; H^1(\Omega)\right).$$

Rappelons que la solution unique du problème régularisé $\mathcal{P}_R$, est la suite $\boldsymbol{u}_n$, φ_n, et β_n solutions des équations (1.39), (1.40), (1.41), avec les conditions initiales (1.42) avec la régularité (2.1). Pour montrer que $\boldsymbol{u}$, φ et β solutions des équations (1.31), (1.32), (1.33) avec (1.34). nous faisons passage à la limite lorque $n \to \infty$ dans le problème $\mathcal{P}_R$. Et cela moyennant des estimations a priori sur $\boldsymbol{u}_n$, φ_n, et β_n, les propriétés sur $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$, j, ϕ, h et quelques résultats de compacité.

2.1 Estimations a priori

2.1.1 Estimations sur la suite φ_n

En remplaçant $\xi = \varphi_n(t)$ dans (1.40) on trouve

$$|\varphi_n|_{L^2(0,T;W)} \leq \textbf{cste.} \, |\boldsymbol{u}_n|_{L^2(0,T;V)} + |q|_{L^2(0,T;W)} \,. \tag{2.23}$$

2.1.2 Estimation sur la suite β_n

Soit $t \in [0,T]$, comme $\beta_n(t) \in K$ prenant $\zeta = \frac{1}{2}\beta_n(t)$ $(\zeta \in K)$, dans l'inéquation (1.41) alors

$$\begin{aligned}
&\left(\dot{\beta}_n(t), \beta_n(t)\right)_{L^2(\Omega)} + a\left(\beta_n(t), \beta_n(t)\right) \\
&\leq \left(\phi\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{u}_n(t)\right), \beta_n(t)\right) - \phi\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}, 0\right), \beta_n(t)\right)_{L^2(\Omega)} + \left(\phi\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}, 0\right), \beta_n(t)\right)_{L^2(\Omega)} \,.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Comme a est coercive moyennant propriété de ϕ (1.16(b)), et l'inégalité

$$ab \leq \frac{\alpha}{2}a^2 + \frac{1}{2\alpha}b^2, \;\; \forall \alpha, a, b \in \mathbb{R}_+^*, \tag{2.25}$$

ce qui implique $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\beta_n(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} + \hat{k}\left|\nabla\beta_n(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq\;& c\left(\left|\boldsymbol{u}_n(t)\right|_V + \left|\beta_n(t)\right|_{L^2(\Omega)}\right)\left|\beta_n(t)\right|_{L^2(\Omega)} \\
\leq\;& c\left(\frac{1}{2\alpha}\left[\left|\boldsymbol{u}_n(t)\right|^2_V + \left|\beta_n(t)\right|^2_{L^2(\Omega)}\right] + \frac{\alpha}{2}\left|\beta_n(t)\right|^2_{L^2(\Omega)}\right),
\end{aligned}$$

choisissons α tel que $\alpha < 2\hat{k}$, et intégronsensuite de 0 à t

$$\begin{aligned}
&\left|\beta_n(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\hat{k} - \frac{\alpha}{2}\right)\left|\nabla\beta_n(t)\right|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega))} \\
&\leq c\left|\boldsymbol{u}_n(t)\right|^2_{L^2(0,t;V)} + \left|\beta_n(t)\right|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Appliquons le théorème de Gronwall sur $|\beta_n(t)|^2_{L^2(\Omega)}$, on trouve

$$|\beta_n(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\,|\boldsymbol{u}_n(t)|^2_{L^2(0,t;V)}\,,$$

mais comme $\beta_n \in L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right)$ alors

$$|\beta_n|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq c\,|\boldsymbol{u}_n|_{L^2(0,T;V)}\,. \tag{2.27}$$

De (2.26) et (2.27) on déduit

$$|\beta_n|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq c\,|\boldsymbol{u}_n|_{L^2(0,T;V)}\,. \tag{2.28}$$

Pour l'estimation $\dot{\beta}_n$ rappelons l'équation (1.3)

$$\dot{\beta}_n - \hat{k} \bigtriangleup \beta_n + \partial\varphi_K(\beta_n) \ni \phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_n), \beta_n),$$

il existe $g \in \partial\varphi_K(\beta_n)$ tel que

$$\dot{\beta_n}(t) - \hat{k} \bigtriangleup \beta_n(t) + g = \phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_n(t)), \beta_n(t))$$

nous savons que $\partial\varphi_K(\beta_n) \subset K$, donc $0 \leq g \leq 1$ alors pour tout $\zeta \in H^1(\Omega)$

$$\left(\dot{\beta}_n(t), \zeta\right)_{L^2(\Omega)} + \left(\hat{k}\nabla\beta_n(t), \nabla\zeta\right)_{L^2(\Omega)} + (g, \zeta)_{L^2(\Omega)} = \left(\phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_n(t)), \beta_n(t)), \zeta\right)_{L^2(\Omega)}\,,$$

donc, on a

$$\begin{aligned}\left|\left(\dot{\beta}_n(t), \zeta\right)_{L^2(\Omega)}\right| \leq\; & \hat{k}\,|\nabla\beta_n(t)|_{L^2(\Omega)}\,|\nabla\zeta|_{L^2(\Omega)} \\ & + \left[|g|_{L^2(\Omega)} + |\phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_n(t), \beta_n(t))|_{L^2(\Omega)}\right]|\zeta|_{L^2(\Omega)}\,,\end{aligned}$$

Appliquons (2.28) sur $|\nabla\beta_n(t)|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ avec la propriété (1.16 (b)) de ϕ, comme on a $|g|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq c$ ($g \in K$) ceci implique

$$\left|\dot{\beta}_n\right|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq c\,|\boldsymbol{u}_n|_{L^2(0,T;V)} + 1. \tag{2.29}$$

2.1.3 Estimation sur la suite $\boldsymbol{u}_n$

Rappelons la régularité $\boldsymbol{u}_n \in W^{1,2}(0,T;V)$ et le fait que $\mathcal{A}(\boldsymbol{x},\mathbf{0}) \in \mathcal{H}$, $\mathcal{G}(\boldsymbol{x},\mathbf{0},0) \in \mathcal{H}$, maintenant remplaçons $\boldsymbol{v}$=$\boldsymbol{u}_n(t)$ dans (1.39)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left|\boldsymbol{u}_n(t)\right|_H^2 + \left(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_n(t)) - \mathcal{A}(\boldsymbol{x},\mathbf{0}), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_n(t))\right)_{\mathcal{H}}\\
&+ \left(\mathcal{A}(\boldsymbol{x},\mathbf{0}), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_n(t))\right)_{\mathcal{H}} + \left(\mathcal{G}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_n(t)),\beta_n(t)) - \mathcal{G}(\boldsymbol{x},\mathbf{0},0), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_n(t))\right)_{\mathcal{H}}\\
&+ \left(\mathcal{G}(\boldsymbol{x},\mathbf{0},0), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_n(t))\right)_{\mathcal{H}} + \left(\mathcal{E}^*\nabla\varphi_n(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_n(t))\right)_{\mathcal{H}} + j(\boldsymbol{u}_n(t),\boldsymbol{u}_n(t))\\
&= (\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}_n(t))_{V'}\,,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Pour simplifier notons $\mathcal{A}(\boldsymbol{x},\mathbf{0}) = \mathcal{A}_0$, $\mathcal{G}(\boldsymbol{x},\mathbf{0},0) = \mathcal{G}_0$, en utilisant les hypothèses (1.14 et (1.15), ona alors

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left|\boldsymbol{u}_n(t)\right|_H^2 + m_{\mathcal{A}}\left|\boldsymbol{u}_n(t)\right|_V^2\\
\leq\ &(L_{\mathcal{G}} + L_p\tilde{c}_0)\left|\boldsymbol{u}_n(t)\right|_V\left|\boldsymbol{u}_n(t)\right|_V\\
&+\left[c\left|\varphi_n(t)\right|_W + \left|\beta_n(t)\right|_{L^2(\Omega)} + \left|\boldsymbol{f}(\mathbf{t})\right|_{V'} + \left|\mathcal{G}_0\right|_{\mathcal{H}} + \left|\mathcal{A}_0\right|_{\mathcal{H}}\right]\left|\boldsymbol{u}_n(t)\right|_V\,,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

rappelons maintenant (2.25) et soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left|\boldsymbol{u}_n(t)\right|_H^2 + m_{\mathcal{A}}\left|\boldsymbol{u}_n(t)\right|_V^2\\
\leq\ &(L_{\mathcal{G}} + L_p\tilde{c}_0)\frac{\alpha}{2}\left|\boldsymbol{u}_n(t)\right|_V^2 + \left[\frac{1}{2\alpha}(L_{\mathcal{G}} + L_p\tilde{c}_0) + 1\right]\left|\boldsymbol{u}_n(t)\right|_V^2\\
&+c\left|\varphi_n(t)\right|_W^2 + c\left|\beta_n(t)\right|_{L^2(\Omega)}^2 + \left|\boldsymbol{f}(t)\right|_{V'}^2 + \left|\mathcal{G}_0\right|_{\mathcal{H}}^2 + \left|\mathcal{A}_0\right|_{\mathcal{H}}^2 + \left|\boldsymbol{v}_0\right|_H^2\,,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

choisissons $\alpha < \frac{2m_{\mathcal{A}}}{(L_{\mathcal{G}}+L_p\tilde{c}_0)}$, mais comme on a déja

$$\left|\varphi_n(t)\right|_W \leq c\left|\boldsymbol{u}_n(t)\right|_V + \left|q(t)\right|_W \ \textbf{and}\ \left|\beta_n(t)\right|_{L^2(\Omega)} \leq c\left|\boldsymbol{u}_n(t)\right|_{L^2(0,T;V)}.$$

Intégrons de 0 à t dans (2.32) on a

$$\begin{aligned}
&\left|\boldsymbol{u}_n(t)\right|_H^2 + c\left|\boldsymbol{u}_n\right|_{L^2(0,t;V)}^2 \leq \left[\frac{1}{2\alpha}(L_{\mathcal{G}} + L_p\tilde{c}_0) + c\right]\left|\boldsymbol{u}_n\right|_{L^2(0,t;V)}^2\\
&+\left|\boldsymbol{f}\right|_{L^2(0,T;V')}^2 + T\left|\mathcal{G}_0\right|_{\mathcal{H}}^2 + T\left|\mathcal{A}_0\right|_{\mathcal{H}}^2 + \left|\boldsymbol{v}_0\right|_H^2\,,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Soit $\tilde{f} = \left|\boldsymbol{f}\right|_{L^2(0,T;V')}^2 + T\left|\mathcal{G}_0\right|_{\mathcal{H}}^2 + T\left|\mathcal{A}_0\right|_{\mathcal{H}}^2 + \left|\boldsymbol{v}_0\right|_H^2$ on déduit de (2.33) que

$$\left|\boldsymbol{u}_n\right|_{L^2(0,t;V)}^2 \leq c\left|\boldsymbol{u}_n\right|_{L^2(0,t;V)}^2 + \tilde{f}. \tag{2.34}$$

Rappelons (2.1), $u_n \in C^1(0,T.V)$ donc

$$\boldsymbol{u}_n(t) = \int_0^t \boldsymbol{u}_n(s)ds + u_0,$$

ce qui implique que

$$|\boldsymbol{u}_n(t)|_V^2 \leq \left[|\boldsymbol{u}_n|^2_{L^2(0,t;V)} + |u_0|^2_{L^2(0,T;V)}\right]. \tag{2.35}$$

De (2.34) et (2.35) on trouve

$$|\boldsymbol{u}_n(t)|_V^2 \leq |\boldsymbol{u}_n|^2_{L^2(0,t;V)} + c. \tag{2.36}$$

Appliquons le théorème de Gronwall à $|\boldsymbol{u}_n(t)|_V^2$ on trouve

$$|\boldsymbol{u}_n|_{L^2(0,T;V)} \leq c, \tag{2.37}$$

De l'estimation (2.37) sur $\boldsymbol{u}_n$ on déduit celle de φ_n, β_n et $\dot{\beta}_n$ données respectivement par (2.23), (2.28) et (2.29)

$$|\varphi_n|_{L^2(0,T;W)} \leq c \tag{2.38}$$

$$|\beta_n|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq c, \quad \left|\dot{\beta}_n\right|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq c \tag{2.39}$$

Nous déduisons aussi à partir de l'estimation de $(\boldsymbol{u}_n)$ dans $L^2(0,T;V)$ et de l'expression (2.34) que $\dot{\boldsymbol{u}}_n$ est bornée dans $L^2(0,T;V)$, autrement

$$|\dot{\boldsymbol{u}}_n|^2_{L^2(0,T;V)} \leq c. \tag{2.40}$$

Passons à l'estimation de $\ddot{\boldsymbol{u}}$ in $L^2(0,T;V')$, rappelons l'équation

$$\begin{aligned}(\ddot{\boldsymbol{u}}_n(t),\boldsymbol{v})_{V',V} &= \mathcal{A}\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_n(t)),\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\right)_{\mathcal{H}} - \left(\mathcal{G}\left(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_n(t)),\beta_n(t)\right),\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\right)_{\mathcal{H}} \\ &- \left(\mathcal{E}^*\nabla\varphi_n(t),\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\right)_{\mathcal{H}} - j\left(\boldsymbol{u}_n(t),\boldsymbol{v}\right) + \left(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}\right)_{V',V}, \quad \forall \boldsymbol{v}\in V,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}|(\ddot{\boldsymbol{u}}_n(t),\boldsymbol{v})|_{V',V} \leq\ & \left[L_{\mathcal{A}}\,|\dot{\boldsymbol{u}}_n(t)|_V + L_{\mathcal{G}}\,|\boldsymbol{u}_n(t)|_V\,|\beta_n(t)|_{L^2(\Omega)} + \right. \\ & \left. c_{\mathcal{E}}\,|\nabla\varphi_n(t)|_H + L_p\,|\boldsymbol{u}_n(t)|_V + |\boldsymbol{f}(t)|_V\right]|\boldsymbol{v}|_V,\end{aligned}$$

donc on conclut que

$$|\ddot{\boldsymbol{u}}_n|_{L^2(0;T,V')} \leq c. \tag{2.41}$$

2.2 Passage à la limite lorsque $n \to +\infty$

La convergence de la suite $(\boldsymbol{u}_n)_n$.

Nous appliquons le corollaire 1 à la suite $(\boldsymbol{u}_n)$ et $(\dot{\boldsymbol{u}}_n)$, une fois on pose

$X = Y = H = V$ et $\mathcal{F} = \{(\boldsymbol{u}_n)\}$ ensuite on pose $X = V$, $H = H$, et $Y = V'$ pour $\mathcal{F} = \{(\dot{\boldsymbol{u}}_n)\}$, toutes les conditions du corollaire sont vérifiées avec $p = 2$, il suffit de regarder les estimations (2.37), (2.40), ainsi $\mathcal{F} = \{(\boldsymbol{u}_n)\}$ est relativement compact dans $L^2(0,T;V)$. En utilisant les estimations (2.40) et (2.41) pour $\mathcal{F} = \{(\dot{\boldsymbol{u}}_n)\}$ on conclut que ce dernier est relativement compact dans $L^2(0,T;H)$. D'où il existe une sous suite notée toujours $(\boldsymbol{u}_n)$ tel que

$$\boldsymbol{u}_n \to \boldsymbol{u}, \quad \text{fortement dans } L^2(0,T;V), \tag{2.42}$$

La convergence dans $L^2(0,T;V)$ implique la convergence suivante

$$\boldsymbol{u}_n \to \boldsymbol{u}, \quad \text{fortement dans } L^2(0,T;H), \tag{2.43}$$

l'estimation (2.37) et théorème de trace montre que

$$\gamma \boldsymbol{u}_n \to \gamma \boldsymbol{u}, \quad \text{fortement dans } L^2(0,T;L^2(\Gamma_3)), \tag{2.44}$$

Il existe une sous suite notée aussi $\{\dot{\boldsymbol{u}}_\delta\}$ vérifiant

$$\dot{\boldsymbol{u}}_n \to \dot{\boldsymbol{u}}, \quad \text{fortement dans } L^2(0,T;H). \tag{2.45}$$

Maintenant l'estimation (2.41), entraine que

$$\ddot{\boldsymbol{u}}_n \rightharpoonup \ddot{\boldsymbol{u}}, \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;V'). \tag{2.46}$$

La convergence de la suite (φ_n).

Apartir de l'estimation (2.38) on trouve que

$$\varphi_n \rightharpoonup \varphi, \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;W), \tag{2.47}$$

Comme W s'injecte compactement dans $L^2(\Omega)$, alors il existe une sous suite de (φ_n) telle que

$$\varphi_n \to \varphi, \text{ fortement das } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.48}$$

La convergence de la suite $(\beta_n)_n$.

L'estimation (2.39) avec la compacité de l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, on conclut respectivement

$$\nabla\beta_n \rightharpoonup \nabla\beta, \quad \dot{\beta}_n \rightharpoonup \dot{\beta}, \quad \text{faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.49}$$

$$\beta_n \to \beta, \quad \text{fortement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.50}$$

Preuve du théorème 26. Les convergences données ci-dessus (2.42)-(2.49) permettent le passage à la limite dans $\mathcal{P}_R$. On la convergence (2.46) dans $L^2(0,T;V')$ la limite suivante

$$(\ddot{\boldsymbol{u}}_n,\boldsymbol{v})_{V',V} \to (\ddot{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{v})_{V',V} \quad , \qquad \forall \boldsymbol{v} \in V, \text{p.p. } t \in (0,T)\,,$$

Sous l'hypothèse (1.14)(b) de $\mathcal{A}$ on trouve

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_n(t)),\boldsymbol{\varepsilon}\,(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} \to (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)),\boldsymbol{\varepsilon}\,(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}}\,, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in V, \text{p.p. } t \in (0,T)\,,$$

La propriété (1.15)(b) de $\mathcal{G}$ implique que

$$(\mathcal{G}\,(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_n(t)),\beta_n(t))\,,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})_{\mathcal{H}}) \to (\mathcal{G}\,(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)),\beta(t))\,,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}}\,, \tag{2.51}$$
$$\forall \boldsymbol{v} \in V, \text{p.p. } t \in (0,T)\,, \tag{2.52}$$

La convergence (2.47) donne

$$(\mathcal{E}^*\nabla\varphi_n(t),\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} \to (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t),\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_{\mathcal{H}} \quad , \qquad \forall \boldsymbol{v} \in V, \text{ a.e. } t \in (0,T)\,,$$

et de la convergence forte de $\boldsymbol{u}_n$ dans $L^2(0,T;H)$ avec l'hypothèse faites sur p nous avons

$$j\,(\boldsymbol{u}_n(t),\boldsymbol{v}) \to j\,(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}) \quad , \qquad \forall \boldsymbol{v} \in V, \text{ a.e. } t \in (0,T)\,.$$

Ce passage à la limite entraine l'existence de la solution faible $\boldsymbol{u}(t)$ de $\mathcal{P}_V$.

Dans l'équation du potentiel électrique régularisée les convergences (2.47), (2.48), (2.42) permettent de faire un passage à la limite $(\gamma\nabla\varphi_n(t),\nabla\xi)_{\mathcal{H}}$ et $(\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_n(t),\nabla\xi)_{\mathcal{H}}$ et avec les mêmes techniques déja citées dans le cas dynamique sans endommagement, on trouve

$$h_n\,(\boldsymbol{u}_n(t),\varphi_n(t)) \to l\,(\boldsymbol{u}(t),\varphi(t))\,, \quad \text{strongly in } L^2(\Gamma_3)\text{,p.p. dans } (0,T)\,.$$

donc φ est solution de l'équation (1.32) du système $\mathcal{P}_V$.

Rappelons l'équation d'endommagement du systeme $\mathcal{P}_R$

$$\beta_n(t) \in K, \quad \left(\dot{\beta}_n(t),\zeta-\beta_n(t)\right)_{L^2(\Omega)} + a\,(\beta_n(t),\zeta-\beta_n(t))$$
$$\geq (\phi\,(\boldsymbol{\varepsilon}\,(\boldsymbol{u}_n(t))\,,\beta_n(t))\,,\zeta-\beta_n(t))_{L^2(\Omega)}\,, \ \ \forall\zeta \in K, \text{ p.p dans } (0,T)\,.$$

avec les mêmes étapes avant l'estimation (2.39) montre qu'une sous suite $\beta_n(t)$ converge fortement vers $\beta(t)$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et faiblement dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. La dérivée $\dot{\beta}_n(t)$ converge faiblement vers $\dot{\beta}(t)$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. La fonction ϕ est Lipschitzienne, on trouve facilement la convergence relativement à ζ. Pour les termes $\left(\dot{\beta}_n(t),\beta_n(t)\right)_{L^2(\Omega)}$ et $a\,(\beta_n(t),\beta_n(t))$ on utilise la propriété de la la continuité semi inférieure des applications respectives $u \to |u(T)|^2_{L^2(\Omega)}$ de $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ dans $\mathbb{R}^+$ et l'application $u \to |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}$ de

$L^2(0,T;H^1)$ dans $\mathbb{R}^+$. Ce qui donne

$$\left(\dot{\beta}(t),\beta(t)\right)_{L^2(\Omega)} \leq \liminf \left(\dot{\beta}_n(t),\beta_n(t)\right)_{L^2(\Omega)}, \text{ p.p dans } (0,T),$$

$$a\left(\beta(t),\beta(t)\right)_{L^2(\Omega)} \leq \liminf a\left(\beta_n(t),\beta_n(t)\right)_{L^2(\Omega)}, \text{ p.p dans } (0,T).$$

Ainsi le passage à la limite dans l'équation d'endommagement est achevé, donc la fonction $\beta(t)$ est la solution de l'équation (1.33) du problème $\mathcal{P}_V$ pour presque partout $t \in (0,T)$ et presque partout dans $x \in \Omega$. Par passage à la limite β reste dans $[0,1]$. Le passage à la limite assure aussi la régularité

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u} \in W^{1,2}(0,T;V) \cap C^1([0,T];H), \qquad \ddot{\boldsymbol{u}} \in L^2(0,T;V'),\\
&\varphi \in W^{1,2}(0,T;W),, \quad \beta \in K, \quad \beta \in W^{1,2}\left(0;T,L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right).
\end{aligned}$$

Avant de terminer l'existence de solutions de $\mathcal{P}_V$, les régularités $\boldsymbol{u} \in C^1([0,T];H)$ et $\beta \in W^{1,2}\left(0;T,L^2(\Omega)\right)$ permettent de déduire les conditions initiales $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$, $\dot{\boldsymbol{u}}(0) = \boldsymbol{v}_0$, $\beta(0) = \beta_0$. Ce qui achève la démonstration d'existence et d'uinicité du théorème 26. $\square$

Conclusion générale

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à l'étude de quelques problèmes de la mécanique des milieu continu, plus précisément à la mécanique de contact. Nous avons essentiellement envisagé la loi constitutive électro-viscoélastique avec des lois de contact quasistatique . La fondation est supposé légèrement déformable exerçant une pression inconnue suivant la normale sur le corps en fonction de sa pénétration. Ce qui est appelé la condition de compliance normale. Nous proposons deux cas de contact avec et sans frottements et un processus d'évolution quasistatique et dynamique. Les conditions électriques sont introduites dans les cas où la fondation est conductrice, ce qui induit des conditions aux limites plus complexes. Une régularisation de ces dernières ont été nécessaires pour que le problème mathématique soit bien posé. Notre but a été de réaliser l'existence et l'unicité de Solutions généralisées du problème de contact non frottant avec des conditions électriques régularisées améliorant la condition d'existence et de régularité de solution électrique établies. Ensuite moyennant des estimations apriori nous avons améliorer le résultat l'existence et l'unicité de solutions généralisées pour le problème avec conditions électriques plus réalistes. Ces résultats nous ont poussé à les généraliser à une classe de problème de contact frottant dans le cas quasistatique et le cas dynamique. Le contact avec endommagement a été pris en considération et une étude d'existence et unicité de solutions a été étendue pour ce cas là. Cette étude mathématique est reposée sur les résultats des inéquations variationnelles d'évolution et de la compacité et des arguments du point fixe. Le contenu du deuxième chapitre de cette thèse est accepté pour publication [2] et les résultats du quatrième chapitre ont fait l'objet d'une publication citée dans [17].

Bibliographie

[1] R. A. Adams. *Sobolev spaces.* Academic Press, New York San Francisco London, 1975. 14

[2] L. Aitkaki and M. Denche. A variational analysis for some frictional contact problems. *Bol.Soc.Paran.Mat, accepted.* 25, 89

[3] G. Amontons. *"De la résistence dans les machines tant par les frottements..."*. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences,Paris, 1699. 12

[4] L.E. Andersson. A quasistatic frictional problem with normal compliance. *Nonlinear Analysis TMA*, 16(1) :407–486, 1991. 11

[5] K.T. Andrews, A. Klarbring, M. Shillor, and S. Wright. A dynamic contact problem with friction and wear. *Int.J.Eng.Sci.*, 35(14) :1291–1309, 1997. 57

[6] M. Barboteu and M. Sofonea. Modelling and analysis of the unilateral contact of a piezoelectric body with a conductive support. *J. Math. Anal. Appl.*, (358) :2978–2991, 2009. 4, 5

[7] M. Barboteu and M. Sofonea. Solvability of a dynamic contact problem between a piezoelectric body and a conductive foundation. *Appl. Math. Comput.*, (215) :1291–1309, 2009. 41

[8] V. Barbu. *Semi groups and differential equations in Banach spaces.* Noordhoff International, The Northlands, 1976. 24, 45

[9] P. Bisegna, F. Lebon, and F. Maceri. The unilateral frictional contact of piezoelectric body with a rigid support. *in Contact Mecanics, J.A.C, Martin and Manuel D.P Monteiro Marques ; Kluwer Dordrecht*, pages 347–354, 2002. 4

[10] H. Bresis. Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité. *Ann. Inst. Fouriern*, 18(1) :115–175, 1968.

[11] H. Bresis. problèmes unilatéraux. *J. Math. Pures Appl.*, 51(1) :1–168, 1972.

[12] Th. Cazenave and A. Haraux. *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*. Ellipses, Paris, 1990.

[13] O. Chau and V. V. Motreanu. Dynamic contact problems with velocity conditions. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 12(1) :17–26, 2002. 41

[14] P.G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity*. VolumeII :theory of plates, North-Holland, 1997.

[15] F. H. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Wiley, Interscience, New York, 1983. 21

[16] C. A. Coulomb. *Théorie des machines simples*. Mémoires de mathématique et de physique de l'Académie Royale, Paris, 161-342, 1785. 12

[17] M. Denche and L. Aitkaki. A dynamic contact problem for a an electro viscoelastic body. *JMAA*, 11(1) :1–15, 2014. 57, 89

[18] Z. Denkowski, S. Mig ´orski, and N.S. Papageorgiou. *An Introduction to Nonlinear Analysis : Applications*. Kluwer Academic/Plenum, Boston, Dordrecht, London, New York, 2003. 19

[19] G. Duvaut and J.L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, 1972. 4

[20] C. Eck and J. Jaruek. Existence results for the static contact problem with coulomb friction. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 8 :445–468, 1998.

[21] El-H. Essoufi and M. Kabbaj. Existence of solutions of a dynamic signorini's problem with non local friction for viscoelastic piezoelectric materials. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie*, 48 (96) :181–195, 2005. 4, 41

[22] G. Fichera. Problemi elastostatici con vincoli unilaterali : il problema di signorini con ambigue condizioni al contorno. *Mem. Accad. Naz. Lincei Ser.*, VIII(7) :91–140, 1964. 4

[23] M. Frémond, KL. Kuttler, B. Nadjar, and M. Shillor. One dimensional models of damage. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 8(2) :541–570, 1998. 4

[24] M. Frémond, KL. Kuttler, and M. Shillor. Existence and uniqueness of solutions for a one dimensional damage model. *J. Math. Anal. Appl.*, 229 :271–294, 1999. 4

[25] M. Frémond and B. Nadjar. Damage in concrete, the unilateral phenomenon. *Nuclear Engng. Design*, 156 :323–335, 1995. 4

[26] M. Frémond and B. Nadjar. Damage, gradient of damage and principal for virtual work. *Inst. J. Solids*, 33 (8) :1083–1103, 1996. 4

[27] W. Han and M. Sofonea. Evolutionary variational inequalities arising in viscoelastic contact problems. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 38 :556–579, 2000. 23

[28] S. Hu and N. S. Papageorgiou. *Handbook of Multivalued Analysis.* Volume I : Theory, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1997. 21

[29] T. Ikeda. *Fundamentals of piezoelectrecity.* Oxford University Press, Oxford, 1990. 4

[30] J. Jaruek. Contact problem with bounded friction : Coercive case. *Czechoslovak Math. J.*, 33(108) :237–261, 1983.

[31] J. Jarušek and C. Eck. Dynamic contact problems with small coulomb friction for viscoelastic bodies. *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, 9(1) :11–34, 1999. 4

[32] M. Kabbadj and El H. Essoufi. Frictional contact problem in dynamic electroelasticity. *Glasnik Matemati2c7cki*, 43(63) :137–158, 2008. 41

[33] LM. Kachanov. On time to rupture in creep conditions. *(in Russian). Izviestia Akademii Nauk SSSR, OtdelenieTekhnicheskikh Nauk*, 8 :26–31, 1959. 4

[34] Y. Kato. Signorini problem with friction in linear elasticity. *Japan J. Appl. Math.*, 4 :237–268, 1987. 4, 11

[35] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia. *An introduction to Variational Inequalities and their Applications.* Academic Press, New York, 1980.

[36] A. Klarbring, A. Mikelič, and M. Shillor. Frictional contact problems with normal compliance. *Int. J. Engng. Sci.*, 26 :811–832, 1988. 11

[37] K. Kuttler and and M. Sofonea M. Shillor. Set-valued pseudomonotone maps and degenerate evolution inclusions. *Comm. Contemp. Math.*, Vol ,1 No 1 :87–123, 1999. 57

[38] K.L. Kuttler. Quasistatic evolution of damage in an elastic-viscoplastic material. *Electron. J. Diff. Eqns.*, 147 :1–25, 2005.

[39] Z. Lerguet, M Shillor, and M. Sofonea. A frictional contact problem for an electro-viscoelastic body. *Electronic Journal of Differential Equations*, 170 :1–17, 2007. 4, 5, 25, 57

[40] Z. Lerguet, Z. Zellagui, H. Benseridi, and S. Drabla. Variational analysis of an electro viscoelastic contact problem with friction. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 14 :93–100, 2013. 4

[41] Yunxiang Li and Zhenhai Liu. Dynamic contact problem for viscoelastic piezoelectric materials with slip dependent frictionai. *Nonlinear Analysis*, 71 :1414–1424, 2009. 41

[42] J. L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Dunod, Paris, 1968.

[43] J. L. Lions and G. Stampacchia. Variational inequalities. *Comm. Pure Appl. Math.*, XX :493–519, 1967.

[44] J.L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Paris, 1969. 18

[45] F. Maceri and P. Bisegna. The unilateral frictionless contact of a piezoelectric body with a rigid support. *Math. Comp. Modelling*, 28 :19–28, 1998. 4

[46] J. Martins and J.T. Oden. Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal friction and interfacelaws. *Nonlinear Analysis, Theory Meth. Applic.*, 11(3) :407–428, 1987.

[47] S. Migorski and A. Ochal. Dynamic bilateral contact problem for viscoelastic piezoelectric materials with adhesion. *Nonlinear Anal.*, 69 :495–509, 2008. 4

[48] R. D. Mindlin. Polorisation gradient in elastic dielectrics. *Inst. J. Solids Structures*, 4 :637–663, 1968. 4

[49] R. D. Mindlin. Elasticity, piezoelasticity and cristal lattice dynamics. *J, of Elasticity*, 4 :217–280, 1972. 4

[50] J. Nécas, J. Jaruek, and J. Haslinger. On the solution of the variational inequality to the signorini problem with small friction. *Boll. U.M.I.*, 5(17B) :796–811, 1980. 4, 11

[51] J. T. Oden and A. C. Martins. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer Metods in Applied Mechanics and Engineering*, 50, 1-3 :527–634, 1985. 11

[52] Y. Ouafik. A piezoelectric body in frictional contact. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie*, 48 (96) :233–242, 2005. 4

[53] V. Z. Patron and B.A. Kudryavtsev. *Electromagnetoelasticity, piezoelectrics and electrically conductive solids.* Gordon & Breach, London, 1988. 4

[54] J.-C. Paumier. *On the Locking Phenomenon for a Linearly Elastic Clamped Plate.* Rapport Technique LMC-IMAG, RT 76, Janvier 1992.

[55] M. Rochdi, M. Shillor, and M. Sofonea. Quasistatic viscoelastic contact compliance and friction. *Journal of elasticity*, 51 :105–126, 1998. 11, 23

[56] M. Rochdi, M. Shillor, and M. Sofonea. Analysis of a quasistatic viscoelastic problem with friction and damage. *Adv. Math.Sci. Appl.*, 10 :173–189, 2002. 4

[57] M. Shillor, M. Sofonea, and J.J. Telega. *Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact.* Lecture Notes Phys. 655, Springer, Berlin, 2004. 26

[58] R. E. Showalter. *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations.* (Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society), Providence, RI, 1997. 21

[59] J. Simon. Compact sets in the space $l^p(0, t; b)$,. *Ann. Mat. Pura. Appl.*, 146 :65–96, 1987. 17

[60] M. Sofonea and El H. Essoufi. A piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction. *A Mathematical Modelling and Analysis*, 9 :229–242, 2004. 4

[61] M. Sofonea and El H. Essoufi. A quasistatic frictional contact of a viscoelastic piezoelectric body. *Adv, Math. Sci. Appl.*, 14 :613–631, 2004. 4

[62] G. Stampacchia. *Formes bilinéaires coercives sur les ensembles convexes.* C. R. Acad. Sci. Paris, 258, 1964.

[63] G. Stampacchia. *Variational inequalities, Theory and application of monotone operators.* Proceedings of a NATO Advanced Study Institute, Venice, Italy, 1968.

[64] J.J. Telega. *Topics on unilateral contact problems, Nonsmooth mechanics and applications.* eds. Moreau, Panagiotopoulos, 1988. 4, 11

[65] J.J. Telega. Quasi-static signorini's contact problem with friction and duality. *Internat.Ser. Numer. Math.*, 101 :199–214, 1991. 4, 11

[66] R. A. Toupin. The elastics dielectrics. *J, Rat, Mech, Analysis*, 5 :849–915, 1956. 4

[67] H. Weimin, M. Sofonea, and K. Kamran. Analysis and numerical solution of a frictionless contact problem for electro-elastic-visco-plastic materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 :3915–3926, 2007.

[68] W.Voigt. *Lehrbuch der Kristall-Physik.* Teubner, Leipzig, 1910. 4

[69] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and Applications, II A/B.* Springer Verlag, New York, 1990. 19

Résumé

L'objectif de ce travail est l'étude de quelques problèmes mathématiques en mécanique des milieux continus, plus précisèment en mécanique de contact. Les résultats obtenus consiste en l'existence et l'unicité de solutions des problèmes variationnels. La thèse comporte quatres chapitres. Le premier est consacré à la formulation mathématique des problèmes qui feront l'objet de notre étude avec une passage en revue des outils mathématiques utiles pour établir les résultats présentés ici. Au chapitre deux nous étudions une classes de problèmes quasi-variationnels de contact électro-viscoélastiques. Au chapitre trois nous étendons le résultat aux de problèmes de contact frottant dynamiques. Le chapitre quatre est dédié à l'étude d'un contact presque parfait d'un corps électro-viscoélastique avec une fondation conductive. Ensuite au chapitre cinq nous reprenons le cas de contact dynamique non frottant avec une fondation conductive, tout en tenant compte de l'effet d'endommagement du materiel.

Mots clés : électro-élastiques, électro-viscoélastiques, compliance normale, frottement de Coulomb, inéquation quasi-variationnelle, inéquation d'évolution, solution faible, point fixe, sous-différentiel.

Abstract

The aim of this work is the study of some mathematical problems in Continuum Mechanics, more precisely in contact mechanics. The results are the existence and uniqueness of solutions of variational problems. The thesis contains four chapters. The first chapter is devoted to the mathematical formulation of the problems that will be our study with a pass in review of mathematical tools useful in establishing the results presented here. In chapter two we study a class of variational problems quasi-electro-viscoelastic contact. In chapter three we extend the result to the dynamic problem of frictional contact . We give an example of the contact which is a limit case of a problem of electro-elastic contact. Chapter Four is dedicated to the study of an almost perfect contact of an electro-viscoelastic body with a conductive foundation. Then in chapter five we take again the case of dynamic and frictionless contact with a conductive foundation, taking into account the effect of damage of the material.

Keywords : electro-elastic, electro-viscoelastic, normal compliance, Coulomb friction, quasi-variational inequality, evolution inequality, fixed point, subdifferential.