MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ FERHAT ABBAS - SETIF 1

THESE

Présentée à la faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du Diplôme de

DOCTORAT

Option : Mathématiques Appliquées

Par

Mr **LETOUFA Yassine**

THÈME

Sur la convergence asymptotique d'un problème aux limites non linéaire avec frottement

Soutenue le : .../06/ 2019

devant le jury

Président :	Mr	A. Merouani	Prof	Université Ferhat Abbas -Sétif 1
Rapporteur :	Mr	H. Benseridi	Prof	Université Ferhat Abbas -Sétif 1
Examinateur :	Mr	A. Debbouche	Prof	Université 08 mai 1945 de Guelma
Examinateur :	Mr	D. Achour	Prof	Université de M'sila

Remerciements

Je tiens à remercier avant tout Mr. Benseridi Hamid, pour son aide, son soutien indéfectible et sa disponibilité bienveillante tout au long de mes recherches.

Je remercie vivement, Mr. A. Merouani, professeur à l'université de Ferhat Abbas Sétif pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je suis également reconnaissant à messieurs les professeurs A. Debbouche et D. Achour d'avoir bien voulu faire partie du jury, de leur lecture attentive du manuscrit et de leurs précieuses suggestions.

Je tiens aussi à manifester toute ma gratitude envers tous les membres du conseil scientifique.

L'ambiance conviviale qui règne à la Faculté des Sciences de l'Université Ferhat Abbas est pour beaucoup dans la réalisation de ce travail, et je suis heureux de témoigner des bonnes conditions dont j'ai bénéficié.

Ma gratitude va enfin à ma famille qui a su m'entourer de son affection et me stimuler parfois, à mes collègues qui m'ont soutenu par leur amitié, leur humour dévastateur durant ces dernières années à Sétif.

Table des matières

Introduction générale

L'objet de la thèse de doctorat est l'étude du comportement asymptotique de quelques problèmes aux limites modélisant le comportement fluides ou de différents matériaux dans le cas dynamique et stationnaire et ce dans des domaines bornés en dimension trois en film mince avec les conditions de frottement non linéaires sur le bord. L'un des buts de l'analyse asymptotique est d'obtenir une équation en dimension 2 d'espace (2D) qui permet de décrire raisonnablement le phénomène se produisant dans un domaine tri-dimensionnel (3D). Ce processus est mis à l'œuvre en passant à la limite vers 0 sur l'épaisseur du domaine (3D) supposé mince. C'est-à-dire, les domaines physiques sont définis de telle sorte que la hauteur est beaucoup plus petite que la longueur.

Ces problèmes mécaniques qui font l'objet de notre étude dans cette thèse sont très fréquents dans les applications dans la nature et il est donc important de pouvoir modéliser ces phénomènes. Sous les hypothèses d'élasticité et de viscoélasticité, par exemple le pneu, le modèle de la fièvre hémorragique Lassa et le modèle des eaux souterraines due dans un aquifère qui fuit [2, 3]. D'autres applications sont associées au mécanisme du roulement à billes.

On s'intéresse aussi aux phénomènes décrivant le milieu viscoplastique dans la mécanique de fluide, il existe de nombreux matériaux dans l'industrie présentant le comportement de ce milieu qui sont la pâte dentifrice, certaines peintures...,et ceci correspond à un comportement de solide parfait sous faibles contraintes, et le comportement de fluide visqueux qui dépasse le seuil de contrainte. Ces fluides portent le nom de fluides de Bingham, qui représentent un cas particulier des fluides non Newtoniens [22, 33].

Les recherches scientifiques en mécanique sont articulées autour de deux composantes principales: l'une consacrée aux lois de comportement et l'autre aux conditions aux limites imposées au milieu.

Plusieurs travaux ont été réalisés sur le contact mécanique avec les différentes lois de comportement et conditions de frottement proches de notre problème, mais ces documents étaient consacrés uniquement aux résultats d'existence et d'unicité de la solution faible sous plusieurs l'hypothèse. Permettez-nous de mentionner, par exemple, le travail effectué par [23], dans lequel les auteurs ont obtenu l'existence et l'unicité par la construction d'une cartographie appropriée qui représente une contraction sur un espace de Hilbert.

D'autres problèmes similaires peuvent être trouvés dans des monographies telles que [24], et la littérature citée ici. Au cours des dernières années, certains documents de recherche ont été écrits traitant à la fois l'analyse asymptotique d'un fluide incompressible dans un domaine mince tridimensionnel, lorsqu'une dimension du domaine fluide tend vers zéro ([13, 14, 15, 19]). Les auteurs dans [8] ont étudié l'analyse asymptotique et numérique de problèmes de contact unilatéraux avec le frottement de Coulomb entre un corps élastique et une fine couche mince élastique.

Plus récemment, l'analyse asymptotique d'un problème dynamique d'élasticité isotherme avec un frottement non linéaire du type Tresca a été étudiée dans [9].

La convergence asymptotique d'un problème dynamique d'élasticité linéaire non isotherme avec frottement a été étudiée dans [31]. Les solutions numériques de ce type de problème sont étudiées par exemple dans [26, 27].

En plus, les auteurs dans [4] ont donné une nouvelle solution de fonction hyperbolique pour une équation différentielle partielle non linéaire découlant de la physique mathématique.

Cependant, nous abordons ici deux problèmes de transmission entre deux domaines tridimensionnels Ω_1^ε et Ω_2^ε en film mince (les épaisseurs relatives au paramètre ε), et nous supposons qu' il n'y a pas de séparation entre les domaines pendant le processus, c'est-à-dire que le contact est bilatéral. Nous avons donc la même difficulté induite par l'absence des hypothèses de symétrie que dans le problème du revêtement. On cherche à connaitre le comportement asymptotique de l'ensemble $\Omega^\varepsilon = \Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$ lorsque ε tend vers zéro.

Un grand nombre de ces problèmes a été traité en régime stationnaire. Cependant, Benseridi et al [19, 31] ont étudié un phénomène dynamique lié au système d'élasticité. A cet effet, nous allons considérer aussi l'un des problèmes dynamiques pour les fluides qui prend en compte la pression comme seconde inconnue, puis de passer en vue de quelle mesure nous pouvons obtenir un comportement asymptotique de ce phénomène pendant un intervalle de temps.

Du point de vue mathématique, l'analyse asymptotique est plus ardue dans la mesure où en général, le problème limite (l'équation 2D) fait intervenir une équation qui tient compte de l'anisotropie et la dynamique du milieu. Il s'agit donc d'identifier les inconnues destinées à faire apparaître cette équation dans le problème.

Donc notre thèse suit le formalisme général suivant : elle se compose de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, on introduit des notations générales de la mécanique de milieux continu ainsi que, les différentes équations et des outils concernant l'analyse fonctionnelle, pour faciliter la lecture de cette thèse et comprendre les problèmes traités dans la suite.

Dans le seconde chapitre, nous considérons la déformation en régime stationnaire pour deux corps élastiques isothermes en film mince qui occupent deux domaines Ω_1^ε et Ω_2^ε en dimension trois avec contact bilatéral et des conditions de frottement non linéaires de type Tresca. **Les corps dispose aux différentes des lois comportement sont données par** la loi de Hooke [31, 34], et il est soumis aux différentes forces volumiques. Dans ce cadre, on décrite la position du problème et les conditions aux limites, concernant le champ de déplacements, et le champ des contraintes qui nous permettent de faire la formulation variationnelle du problème mécanique de départ, puis nous étudions l'existence et l'unicité de solution faible du problème, ensuite nous allons étudier la convergence de cette solution dans un domaine fixe, par l'utilisation du petit changement de variable, compte tenu de la faible épaisseur de l'écoulement. On peut alors transformer le problème initial posé dans le domaine $\Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$ en un nouveau problème sur un domaine fixe $\Omega_1 \cup \Omega_2$ indépendamment du paramètre ε. Puis on cherche des estimations à priori indépendantes de ε, le passage à la limite sur ε nous permet d'obtenir l'existence et l'unicité de la solution faible du problème limite. L'équation spécifique de Reynolds correspondante est aussi prouvée dans [25] sous la forme faible, ce qui nous permet de déterminer le champ limite $(\mathbf{u}_1^\star, \mathbf{u}_2^\star)$ dans $\Omega_1 \times \Omega_2$ telle que :

$$\int_\omega \left(\widetilde{\mathcal{F}} + \mu_1 \int_0^h \mathbf{u}_1^\star(x', y) dy + \mu_2 \int_{-h}^0 \mathbf{u}_2^\star(x', y) dy \right) \nabla\psi(x') dx' = 0, \forall \psi \in H^1(\omega),$$

où μ_1 et μ_2 sont les coefficients de Lamé qui sont spécifiques aux corps Ω_1^ε et Ω_2^ε respectivement, ω est la zone de contact entre les deux corps, h est l'épaisseur des corps Ω_1, Ω_2 et $\widetilde{\mathcal{F}}$ est une fonction qui dépend des forces volumique s'appliquant sur $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

L'objet du troisième chapitre est d'étude de l'analyse asymptotique d'un problème de transmission lié par les fluides de Bingham en régime stationnaire avec des viscosités différentes μ_1 et μ_2, dans des domaines Ω_1^ε , Ω_2^ε supposés minces, avec des conditions de frottement de type de Tresca à l'interface de contact entre deux domaines. Nous commençons à décrire le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler, et la formulation variationnelle du problème concernant le champ de vitesse et le champ de la pression, puis en passant à l'étude de l'analyse asymptotique du problème, pour cela nous effectuons un changement d'échelle, par rapport à l'épaisseur du domaine $\Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$ comme dans le deuxième chapitre de cette thèse. Ensuite, nous utilisons les différentes inégalités de Poincaré, Cauchy-Schwartz, Young, Hölder et Korn pour obtenir des estimations à priori. Ce qui nous permet de faire un passage à la limite afin d'obtenir le problème limite et l'équation de Reynolds faible. Dans ce cas nous avons obtenu ([10]) :

$$\int_\omega \left(\frac{h^3}{3} \nabla \left(p_1^\star + p_2^\star\right) + \tilde{F} + \mu_1 \int_0^h \mathbf{u}_1^\star(x', y) dy \ + \mu_2 \int_{-h}^0 \mathbf{u}_2^\star(x', y) dy + \right.$$
$$\left. \hat{\alpha}_1 \int_0^h \tilde{\pi}_1 \left(x', y\right) dy - \hat{\alpha}_2 \int_{-h}^0 \tilde{\pi}_2 \left(x', y\right) dy \right) .\nabla\phi\left(x'\right) dx' = 0, \forall \phi \in H^1(\omega),$$

où $\hat{\alpha}_1$ et $\hat{\alpha}_2$ sont le seuil de plasticité de milieux Ω_1 et Ω_2 respectivement, et $(\mathbf{u}_1^\star, \mathbf{u}_2^\star)$, $(p_1^\star, p_2^\star)$ sont le champ de vitesse et la pression des problèmes limites dans $\Omega_1 \cup \Omega_2$. En plus, nous obtenons aussi des conditions aux limites de Tresca que nous avons déjà mise dans le problème initial. On trouve

$$\mu_1 \tau_1^\star + \hat{\alpha}_1 \pi_1^\star = \mu_2 \tau_2^\star + \hat{\alpha}_2 \pi_2^\star \text{ p.p sur } \omega$$

et pour $l = 1, 2$, on a

$$\begin{cases} |\mu_l \tau_l^\star + \hat{\alpha}_l \pi_l^\star| < \hat{k} \implies s_1^\star = s_2^\star \\ |\mu_l \tau_l^\star + \hat{\alpha}_l \pi_l^\star| = \hat{k} \implies \exists \lambda \geq 0, \quad s_1^\star = s_2^\star + \lambda \left(\mu_l \tau_l^\star + \hat{\alpha}_l \pi_l^\star\right) \end{cases} \text{sur } \omega,$$

où

$s_l^\star = \mathbf{u}_l^\star(x,0),\ \tau_l^\star = \dfrac{\partial \mathbf{u}_l^\star}{\partial z}(x,0),\ \pi_l^\star = \dfrac{\partial u_l^\star/\partial z}{|\partial u_l^\star/\partial z|}(x,0)$ et $\hat{k}$ représente le seuil de frottement de Tresca.

Enfin, le dernier chapitre, sera consacré à l'étude du système de Stokes dans le cas d'évolution, dans un domaine borné Ω^ε à trois dimensions en film mince avec des conditions de Tresca sur la frontière inférieure du domaine. Ici nous supposons que la frontière supérieure du domaine est soumise à la condition de Fourier. Le domaine physique Ω^ε sur lequel sont posées les équations a la forme

$$\Omega^\varepsilon = \left\{(x, x_3) \in \mathbb{R}^3, \ \ (x,0) \in \omega \ \ 0 < x_3 < \varepsilon h\,(x)\right\}.$$

où ω est la frontière inférieure du domaine, Γ_1^ε est la frontière supérieure à décrire en géométrie par la fonction εh . Γ_L^ε est la frontière latérale et ε est un paramètre avec $\varepsilon \ll 1$. Ce paramètre est de l'ordre de 0.0001 dans la mécanique de lubrification évoquant le modèle de fluide a été considérée dans les ouvrages [1, 5, 32].

Les équations gouvernées avec les conditions aux limites et initiales par cet écoulement est

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \mu \Delta u^\varepsilon + \nabla p = f^\varepsilon & \text{dans } \ \Omega^\varepsilon \times \left]0,T\right[, \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \ \Omega^\varepsilon \times \left]0,T\right[, \\ u^\varepsilon.\nu = 0 & \text{sur } \ (\omega \cup \Gamma_1^\varepsilon) \times \left]0,T\right[, \\ u^\varepsilon = g & \text{sur } \ \Gamma_L^\varepsilon \times \left]0,T\right[, \\ \sigma_\tau(u^\varepsilon) = -l^\varepsilon u^\varepsilon & \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon \times \left]0,T\right[, \\ \left.\begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \implies u_\tau^\varepsilon = s \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \implies \exists \beta \geq 0 \text{ tel que } u_\tau^\varepsilon\,(t) = s - \beta \sigma_\tau^\varepsilon \end{array}\right\} & \text{sur } \omega \times \left]0,T\right[, \\ u^\varepsilon\,(0) = 0. & \end{cases}$$

où $f^\varepsilon,\ k^\varepsilon,\ l^\varepsilon$ et g sont des données du problème.

Nous présentons d'abord le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler et la formulation faible du problème couplé en vitesse-pression. Dans la suite, nous montrons que pour $\varepsilon > 0$ fixé l'existence et l'unicité de solutions faibles pour ce problème, les démonstrations sont basées sur des arguments des inéquations d'évolution non linéaires, à savoir la régularisation, la compacité et la monotonie. Ensuite, on étudie l'analyse asymptotique du problème en faisant un changement d'échelle, $z = \dfrac{x_3}{\varepsilon}$ pour ramener l'étude sur un domaine Ω indépendant de ε, sur lequel nous définissons de nouvelles inconnues. Nous prouvons certaines estimations à priori sur la solution indépendamment de ε et du temps t en utilisant le lemme de type Granwall, les inégalités de Korn et de Poincaré. Grâce à ces estimations, on obtient un théorème de convergence, qui nous permet de passer au problème limite. Donc, le système précédent converge vers le système suivant

$$\begin{aligned}
-\mu\frac{\partial^2 u_i^\star}{\partial z^2} &= \hat{f}_i(t) - \frac{\partial}{\partial x_i}p^\star(t), i=1,2, \text{dans } L^2(\Omega),\\
&\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \mu\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}(t)\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_i - u_i^\star(t))dx'dz - \sum_{i=1}^{2}\int_\omega p^\star(x',t)\hat{\phi}_i(x',h(x'))\frac{\partial h}{\partial x_i}dx'\\
&-\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega p^\star(x',t)\frac{\partial\hat{\phi}_i}{\partial x_i}dx'dz + \sum_{i=1}^{2}\hat{l}\int_\omega u_i^\star(x',h(x'),t)\left[\hat{\phi}_i(x',h(x')) - u_i^\star(x',h(x'),t))\right]dx'\\
+J\left(\hat{\phi}\right) - J(u^\star) &\geq \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \hat{f}_i(t)\,u_i^\star(t)\,dx'dz, \quad \forall\hat{\phi}\in\Pi(K), \forall t\in\,]0,T[,\\
u^\star(x',z,0) &= 0,
\end{aligned}$$

où $\Pi(K)$ est un convexe de $H^1(\Omega)^2$ et $\hat{l}$ est une constante liée à la condition de Fourier.

Tous ces résultats de cette thèse, permettent une dérivation formelle de l'équation de Reynolds justifiée récemment par des références [14, 15, 19, 22, 32], soit en considérant le cas homogène ou stationnaire. Cette idée n'est pas nouvelle, mais les différents chercheurs ont utilisé cette équation de type Reynolds depuis plusieurs années pour décrire le comportement d'un écoulement visqueux entre deux surfaces proches en mouvement relatif dans des références historiques [29, 30] en 1886-1899.

Notations

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d\,(d=2,3)$, on note par

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω.
Γ	la frontière de Ω supposée régulière, partitionnée en trois parties mesurables disjointes deux à deux.
ν	la normale unitaire sortante à Γ.
v_ν, v_τ	les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel v défini sur $\overline{\Omega}$.
$C^1\left(\overline{\Omega}\right)$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur Ω.
$C_0^\infty\left(\Omega\right)=D\left(\Omega\right)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω.
$D'\left(\Omega\right)$	l'espace de distributions sur Ω.
$L^p\left(\Omega\right)$	l'espace des fonctions Lebesgue-mesurables de puissance p-ième integrable sur Ω.
$L^\infty\left(\Omega\right)$	l'espace des fonctions Lebesgue-mesurables sur Ω telles que $\exists$ c>0: $\left\vert u\left(x\right)\right\vert \leq c,\ p.p$ sur Ω.
$H^1\left(\Omega\right)$	l'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω.
$H_0^1\left(\Omega\right)$	l'adhérence de $D\left(\Omega\right)$ dans $H^1\left(\Omega\right)$.
$H^{-1}\left(\Omega\right)$	l'espace dual de $H_0^1\left(\Omega\right)$.
$H^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma\right)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ.
$H_{\Gamma_i}^1\left(\Omega\right)$	l'espace $\left\{\varphi\in H^1\left(\Omega\right):\varphi=0 \quad \text{sur } \Gamma_i\right\}$.
$\gamma\ :H^1\left(\Omega\right)^d\rightarrow H^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma\right)^d$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.
$L^2\left(\Omega\right)^d$	l'espace $\left\{u=\left(u_i\right)/\ u_i\in L^2\left(\Omega\right),\ i=\overline{1,d}\right\}$.
$H^1\left(\Omega\right)^d$	l'espace $\left\{u=\left(u_i\right)/\ u_i\in H^1\left(\Omega\right),\ i=\overline{1,d}\right\}$.
$\left\Vert\cdot\right\Vert_{0,\Omega}$	la norme de $L^2\left(\Omega\right)^d$.
$\left\Vert\cdot\right\Vert_{1,\Omega}$	la norme de $H^1\left(\Omega\right)^d$.

Si X est un espace de Banach et $d\in\mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes.

$\|.\|_X$	la norme de X.
X^d	l'espace $\left\{x=(x_i)\,/\,x_i\in X,\ i=\overline{1,d}\right\}$.
$x_n \rightarrow x$	la convergente forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans X.
$x_n \rightharpoonup x$	la convergente faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans X.
$L^p(0,T,X)$	l'espace des fonctions f mesurables de $[0,T]$ dans X, telles que $\int_0^T \|f(t)\|_X \, dt < \infty$ avec les modifications usuelles si $p=\infty$.
$\|.\|_{L^p(0,T,X)}$	la norme de $L^p(0,T,X)$.
$C(0,T,X)$	l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans X.

Pour une fonction f, on note par

dom f	le domaine de f.
supp f	le support de f.
$\partial_i f$	la dérivée partielle de f par rapport à la composante x_i.
∇f	le gradient de f.
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de $f = \frac{1}{2}\left(\nabla f + \nabla^T f\right)$.
$Div\ f$	le divergence de f.
$\dot{f}$	la dérivation par rapport au temps.
$\frac{\partial f}{\partial \nu}$	la dérivée normale extérieure.
$\liminf$	la limite inférieure.
δ_{ij}	le symbole de Krönecker.
I_3	le tenseur identité de second ordre sur $\mathbb{R}^d$.
0	le zéro de $\mathbb{R}^d$.
C	une constante générique strictement positive.
$p.p$	presque par tout.
$\|.\|$	la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.
(u,v) , $u.v$	le produit scalaire des vecteurs u et v.

Chapitre 1

Modélisation et outils mathématiques

Résumé . *Le but de ce chapitre est d'introduire les outils mathématiques et mécaniques nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités et il est divisé en deux parties.*

Dans la première, nous commençons par un rappel des résultats essentiels de la théorie des milieux continus et la loi de comportement de l'élasticité linéaire, puis, nous présentons le système d'équations aux dérivées partielles qui modélisent quelques problèmes aux limites modélisant le comportement fluide ou de différents matériaux élastiques dans le cas dynamique et stationnaire et ce dans un domaine borné en dimension trois, ensuite nous décrivons les différentes conditions de contact et la loi de frottement qui interviennent dans tout le document.

La deuxième partie est consacrée à quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle, concernant les espaces de Sobolev et les espaces à valeurs vectorielles, ainsi que leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. Elle comprend des rappels sur les résultats classiques de l'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert, on y présente ici quelques résultats fondamentaux sur les fonctions convexes et sur la différentiabilité, les notions principales de la convergence faible, et on termine cette partie par un bref rappel sur les inéquations variationnelles elliptiques et d'évolution, ainsi que les lemmes de type Gronwall.

1.1 Modélisation

L'objet de cette section est d'établir le cadre physique et mathématique décrivant des problèmes de contact en mécanique des solides et des fluides utilisés dans cette thèse en suivant [11], [18], [20], [23], [32] et [34]. Ceci se traduit mathématiquement par l'établissement d'un système d'équations aux dérivées partielles posé sur un domaine de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2,\, 3)$. Ce système comprend la loi de comportement du matériau ou fluide, l'équation du mouvement et de l'énergie du corps ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis.

1.1.1 Les équations de conservation

Considérons un milieu continu qui occupe un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^3$ pendant un intervalle de temps $[0, T]$. Lorsque l'hypothèse des milieux continus est vérifiée, nous considérons un milieu continu qui occupe un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^3$ pendant un intervalle de temps $[0, T]$ régi par les principes de la thermomécanique des milieux continus qui permettent d'établir les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Nous allons préciser ici l'ensemble des équations correspondantes, dans Ω, on a :

L'équation de conservation de la quantité de mouvement. Soit $u(x, t)$ le champ des vecteurs vitesse à l'instant $t \in [0, T]$ des points $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ du milieu continu en mouvement par rapport au repère (ox), $\sigma(x, t)$ de composantes σ_{ij} $(i,\, j = 1, 2, 3)$, est le tenseur des contraintes. La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence entre le tenseur des forces extérieures et le tenseur des accélérations pour un système matériel quelconque, conduit à l'équation du mouvement suivante :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u \right) = Div\ \sigma + f\ , \tag{1.1.1}$$

où le vecteur f, de composantes f_i $(i = 1, 2, 3)$, représente une densité massique des forces extérieures, $\rho = \rho\,(x, t)$ est la densité du milieu continu au point $x \in \Omega$ et Div désigne l'opérateur divergence, c'est-à-dire

$$Div\ \sigma = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{1.1.2}$$

L'équation de conservation de la masse. La forme locale de la conservation de la masse s'applique seulement sur un point $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ de l'élément de volume $d\Omega$ du milieu.

L'expression générale de l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u.\nabla \rho + \rho \operatorname{div}(u) = 0 \tag{1.1.3}$$

Le processus d'évolution modélisé par (1.1.1) contient un terme non linéaire par rapport aux composantes de la vitesse, dans certaines situations l'équation (1.1.1) peut se simplifier. S'il s'agit d'un problème statique le premier membre des équations (1.1.1) est identiquement nul et on les appelle équations d'équilibre ;

$$Div\ \sigma + f\ = 0, \tag{1.1.4}$$

Elles sont alors linéaires par rapport aux composantes σ_{ij} du tenseur des contraintes. Cette situation s'applique également lorsque le champ de vitesse u varie très lentement par rapport au temps dans le cas où les deux termes $\rho \frac{\partial u}{\partial t}$ et $\rho u.\nabla u$ sont négligeables (processus quasistatique).

L'hypothèse d'incompressibilité du volume pour les milieux fluides, un fluide est dit incompressible lorsque son volume demeure constant sous l'action d'une pression externe. L'hypothèse d'incompressibilité très réaliste physiquement, se traduit par

$$TrD(u) = 0 \tag{1.1.5}$$

où $D(u)$ est le tenseur des taux de déformation, de composantes

$$d_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad 1 \leq i, j \leq 3. \tag{1.1.6}$$

Le milieu est dit *homogène*, si sa densité est indépendante de x . Donc l'équation de conservation de la masse se réduit à

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

ρ constante indépendante de x et t. Il est même possible de poser $\rho = 1$, ce qui est fait dans la suite, et revient simplement à choisir l'unité de densité de la masse.

Dans le cas du milieu non-isotherme, l'équation de conservation de l'énergie du premier principe de la thermodynamique. Cependant, nous considérerons toujours que la température du milieu sera constante dans tous les problèmes posés dans cette thèse.

D'un point de vue mathématique, nous disposons trop d'inconnues par rapport au nombre d'équations. Il est facile de voir que les fonctions inconnues sont au nombre de neuf, représentées par les composantes σ_{ij} $(i,\ j = 1, 2, 3)$ du tenseur des contraintes (symétrique) et les composantes u_i $(i = 1, 2, 3)$ de la vitesse. Donc les équations précédentes sont insuffisantes pour décrire les mouvements des milieux continus, elles doivent être complétées par d'autres relations que l'on appelle *lois de comportement*, qui sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement de ces lois. Nous présentons ci-dessous la loi de comportement de l'élasticité linéaire et la loi de comportement viscoplastique du fluide de Bingham traitées dans cette thèse.

1.1.2 Loi de comportement élastique linéaire (en HPT)

La forme générale dépendant linéairement des déformations, se situe où est d'autre part dans le cadre de la description des solides lentement déformables en l'absence d'effets thermique et de contraintes initiales on a:

$$\sigma_{ij}(u) = E_{ijkl}\ d_{kl}(u)\ . \tag{1.1.7}$$

où on adopte la convention de sommation des indices répétés. Ici, la notation u représente le *champ des déplacements* par rapport à une position initiale privilégiée. Les fonctions E_{ijkl} composantes du tenseur du quatrième ordre, sont les coefficients d'élasticité du matériau, avec la condition $E = (E_{ijkl})$ symétrique :

$$E_{\ ijkl} = E_{\ jikl} = E_{\ klij} \tag{1.1.8}$$

Ainsi la condition d'ellipticité de E a lieu: $\exists \alpha > 0$ tel que

$$E_{\ ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq \alpha\,|\xi|^2$$

Dans le cas d'un matériau *homogène,* les coefficients E_{ijkl} sont constants (indépendants au point x de Ω). Dans le cas *non-homogène* E_{ijkl} dépendent du point x de Ω et dans le cas d'un matériau *homogène* E_{ijkl} sont constants. Lorsque de plus le solide élastique a un comportement *isotrope* (c'est-à-dire le matériau ayant le même comportement dans toutes les directions), on obtient *la loi de comportement de Hooke*, et elle s'applique à la plupart des matériaux: acier, béton.... Dans le cas isotrope, le tenseur d'élasticité E est défini par

$$E_{\ ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}. \tag{1.1.9}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé qui sont spécifiques à chaque matériau. Leur expression en fonction du module de Young E et du coefficient de Poisson ν, est

$$E = \frac{\mu\,(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2\,(\lambda + \mu)}.$$

En utilisant (1.1.7), (1.1.8) et (1.1.9) on peut alors démontrer que le tenseur des contraintes σ d'un *corps homogène élastique et isotrope* est :

$$\sigma(u) = 2\mu D\,(u) + \lambda Tr D\,(u)\,I. \tag{1.1.10}$$

Le système linéaire que constitue l'équation (1.1.10) s'inverse facilement:

$$D\,(u) = \frac{1+\nu}{E}\sigma(u) - \frac{\nu}{E}Tr\sigma(u)I.$$

Dans le cas des solides déformables, on aura à écrire a priori la conservation de la masse et de la quantité de mouvement, mais sous l'hypothèse de petites transformations, la divergence des déplacements est très petite et la conservation de la masse se réduit alors approximativement à la conservation de la masse volumique du solide lors de sa déformation $\rho \simeq \rho_0$. Compte tenu de la relation (1.1.10), la conservation de la quantité de mouvement (1.1.4) s'écrit vectoriellement:

$$2\mu Div\ (D\,(u)\,) + \lambda\,\mathrm{div}\,u + f\ = 0.$$

1.1.3 Loi de comportement du fluide de Bingham

On présente ici une description de la loi de comportement viscoplastique du fluide de Bingham traité dans cette thèse. Ce fluide est un milieu viscoplastique rigide, incompressible vérifiant les lois générales de la mécanique des milieux continus et ayant une loi de comportement non-linéaire particulière. Il existe de nombreux matériaux dans la nature et l'industrie présentant le comportement du milieu Bingham. Par exemple la pâte dentifrice, le cas de certaines huiles ou de certaines boues, utilisées dans la technique des forages pétrolières ainsi que dans certaines peintures. On l'utilise aussi pour décrire l'écoulement à haute température de certains corps solides. Celles-ci le matériau commence à s'écouler seulement si les forces appliquées dépassent une certaine limite, dite le seuil de plasticité. Les modèles mathématiques de ces milieux impliquent la loi constitutive des fluides visqueux incompressibles avec un composant tensoriant supplémentaire et rentre dans la catégorie des fluides non-Newtoniens.

L'hypothèse d'incompressibilité du volume, donné par la relation (1.1.5) est équivalente à la condition suivante

$$\operatorname{div}(u) = 0, \tag{1.1.11}$$

où u est le champs des vecteurs vitesse. Pour décrire ce modèle. Notons par σ le tenseur des contraintes de Cauchy et son déviateur

$$\sigma^D = p\delta + \sigma,$$

tel que $-p = \frac{1}{n}Tr\,(\sigma)$ représente la partie sphérique du tenseur des contraintes correspondant à la pression, où les composantes σ_{ij}^D du tenseur des contraintes sont données par:

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^D = \alpha \dfrac{D_{ij}}{(D_{II})^{\frac{1}{2}}} + 2\mu D_{ij}, \text{ si } D_{II} \neq 0, \\ |\sigma^D| \leq \alpha, \qquad\qquad\qquad \text{si } D_{II} = 0 \end{cases} \tag{1.1.12}$$

La notation D_{II} désigne la norme matricielle:

$$D_{II} = \frac{1}{2} D_{ij}.D_{ij}$$

Les scalaires positifs α et μ sont respectivement le seuil de plasticité et la viscosité du fluide de Bingham.

On peut aussi inverser l'équation constitutive (1.1.12). Si $|\sigma^D| \leq \alpha$, d'après (1.1.12) on a $D_{II} = 0$ et si $|\sigma^D| > \alpha$ on trouve facilement $D_{II} \neq 0$.

Par ailleurs, il est facile de voir que

$$\begin{aligned}|\sigma^D| &= \alpha + 2\mu D_{II},\\ D_{II} &= \frac{1}{2\mu}\left(|\sigma^D| - \alpha\right),\end{aligned}$$

donc si on combine cette formule avec (1.1.12), l'équation inverse de (1.1.12) s'écrit:

$$D = \begin{cases} \dfrac{1}{2\mu}\left(1 - \dfrac{\alpha}{|\sigma^D|}\right)\sigma^D & \text{si } \left|\sigma^D\right| > \alpha, \\ 0 & \text{si } |\sigma^D| \leq \alpha \end{cases} \tag{1.1.13}$$

Remarque 1.1.1. Dans la loi de comportement (1.1.12), le choix $\alpha = 0$ conduit à un fluide visqueux incompressible Newtonien. Par conséquent, pour α assez petit, le fluide de Bingham peut être considéré comme un modèle de contact des fluides visqueux Newtoniens. Si α est strictement positif, on observe des zones rigides au sein de l'écoulement. Lorsque α croit, ces zones rigides augmentent et peuvent bloquer complètement l'écoulement. Cette propriété s'appelle propriété de blocage. Le fluide de Bingham possède la particularité supplémentaire, mise en évidence par la loi de comportement (1.1.12), tant que le seuil α n'est pas atteint, le fluide se déforme comme un milieu rigide sans couler.

Les équations générales modélisant l'écoulement d'un fluide de Bingham dans un domaine ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^3$ pendant un intervalle de temps $[0, T]$, sont données par le système (1.1.1), (1.1.11) et (1.1.12). Les fonctions inconnues de ce problème sont le champ des vitesse u et la pression p.

1.1.4 Conditions aux limites de contact et lois de frottement.

Nous présenterons les différentes conditions aux limites utilisées pour la fermeture du problème que nous utilisons par la suite dans cette thèse. Nous décrivons aussi bien l'aspect mathématique et mécanique de ces conditions. Par condition de contact nous comprenons une relation impliquant les composantes normales du champ des déplacements, des vitesse ou des contraintes.

Par loi de frottement nous comprenons une relation impliquant la contrainte tangentielle σ_τ et la vitesse tangentielle v_τ ou le déplacement vitesse tangentiel u_τ et nous considérons ici σ_τ comme une force de frottement. Supposons dans cette section que le milieu occupe un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\Omega = \{(x',\, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \, (x',0) \in \omega, \quad 0 < x_3 < h(x')\}$$

de frontière régulière notée $\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_L \cup \overline{\omega}$, où Γ_1 est la frontière supérieure d'équation $x_3 = H(x_1, x_2)$, Γ_L est la frontière latérale, ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine Ω. On suppose que H est une fonction de classe C^1 définie sur ω telle que

$$0 < H_{\min} \leq H(x') \leq H_{\max} \quad \forall (x', 0) \in \omega.$$

Sur Γ, on décompose le déplacement et le vecteur de contraintes en composantes normale et tangentielle comme suit

$$u_\nu = u.\nu, \qquad u_\tau = u - u_\nu.\nu, \qquad \sigma_\nu = (\sigma.\nu)\,.\nu, \qquad \sigma_\tau = \sigma.\nu - (\sigma_\nu)\,.\nu, \tag{1.1.14}$$

où ν représente la normale sortante de la frontière du domaine Ω. On différencie alors :
• Γ_L, la surface où l'on impose une contrainte

$$u = g$$

où $g = (g_1, g_2, g_3)$ est une fonction donnée avec $g_3 = 0$.
• Γ_1, la surface où on a des conditions imposées en vitesse (condition de Dirichlet) :

$$u = 0$$

• ω, la surface en contact. La force surfacique de réaction avec l'outil (autre sous domaine) se décompose en σ_τ et σ_ν. Ici, le contact se fait de façon bilatérale si le contact est maintenu pendant le mouvement, il n'y a pas de séparation entre le corps et l'obstacle. ce qui se traduit par

$$u_\nu = 0$$

la vitesse est donc inconnue sur cette surface.
Quand $\sigma_\tau = 0$, il s'agit du cas sans frottement, cette façon de voir le contact implique que la force de contact tangentielle est nulle dans la zone de contact. On est dans le cas d'un glissement parfait.

On suppose qu'il existe une force tangentielle sur la zone de contact qui sera modélisé par la loi non linéaire de type de Tresca. Néanmoins cette force tangentielle est non nulle dans la plupart des contacts réels. On introduit alors la loi de frottement de Tresca la plus simple qui relie la composante tangentielle aux autres variables du système. On a

$$\begin{cases} \text{Si} \ \ |\sigma_\tau| < k \ \ \text{alors}\ u_\tau \ = s, \\ \text{Si} \ \ |\sigma_\tau| = k \ \ \text{alors}\ \sigma_\tau = s - \lambda\ u_\tau \ \ \text{avec}\ \lambda \geq 0, \end{cases} \tag{1.1.15}$$

où s est la vitesse de cisaillement et k désigne le seuil de frottement fixe qui est supposé connu et qui ne dépend pas de la contrainte normale. Cette loi se caractérise par la propriété suivante: Tant que la contrainte tangentielle n'a pas atteint le seuil, le milieu continu ne peut pas se déplacer par rapport à l'obstacle et il y a blocage. Lorsque ce seuil est atteint le milieu peut se déplacer tangentiellement par rapport à la fondation ce qui déduit un glissement. La contrainte tangentielle s'oppose au champ u.

Remarque 1.1.2 ([20, 22]). *La condition* (1.1.15) *est équivalente à la relation suivante:*

$$(u_\tau - s)\,\sigma_\tau + k|u_\tau - s| = 0 \quad \text{sur} \ \ \omega.$$

Contact bilatéral entre deux domaines. Supposons dans ce paragraphe que le milieu occupant deux domaines Ω_1 et Ω_2 de $\mathbb{R}^3$ où les deux domaines sont en contact à travers une zone fixe ω de $\mathbb{R}^2$, i.e. il n'y a pas de séparation entre les deux corps pendant le processus, il s'agit d'un contact bilatéral. En posant $\Omega_1 = \omega \times]0, H[$ et $\Omega_2 = \omega \times]-H, 0[$, où H est une fonction de classe C^1 définie sur ω par

$$0 < H_{\min} \leq H(x') \leq H_{\max} \quad \forall (x', 0) \in \omega.$$

Les frontières des Ω_1, Ω_2 seront notées $\partial\Omega_1 = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_{L_1}$ et $\partial\Omega_2 = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_{L_2}$ respectivement. Γ_1 est la surface supérieure définie par $x_3 = H(x')$. Γ_2 est la surface inférieure définie par $x_3 = -H(x')$ et $\Gamma_{L_1}, \Gamma_{L_2}$ sont les frontières latérales. On note par $\boldsymbol{\nu} = (0, 0, -1)$ le vecteur normal extérieur unitaire sur la frontière ω orientée vers l'extérieur de Ω_1 et vers l'intérieur de Ω_2.

On définit les composantes normale et tangentielle des champs de vecteur et de tenseur sur la frontière ω, pour $l = 1$, 2 tel que

$$\mathbf{v}_{l\nu} = \mathbf{v}_l.\nu, \qquad \mathbf{v}_{l\tau} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{l\nu}.\nu_l, \qquad \sigma_{l\nu} = (\sigma_l.\nu_{li})\,.\nu_{lj}, \qquad \sigma_{l\tau_i} = \sigma_{lij}.\nu_l - \sigma_{l\nu}.\nu_{li},$$

avec $\boldsymbol{\nu}=\nu_1 = -\nu_2$. Les principes de la mécanique des milieux continus du contact se fait de façon bilatérale impliquent l'égalité des contraintes normale et tangentielle à travers la zone de contact ω qu'on la considérer comme une partie du bord de Ω_1 ou de Ω_2. Donc

$$\sigma_{1\nu} = \sigma_{2\nu}, \qquad \mathbf{u}_{1\nu_1}+\mathbf{u}_{2\nu_2} = 0.$$

On note alors

$$\sigma_\tau = \sigma_{1\tau} = -\sigma_{2\tau}, \qquad \sigma_{\boldsymbol{\nu}} = \sigma_{1\nu}.$$

Dans les deuxième et troisième chapitre, nous allons considérer ce cadre avec la loi de frottement de Tresca.

1.2 Outils mathématiques

Dans cette partie, nous introduisons les espaces fonctionnels utilisés dans cette thèse. Donnons quelques propriétés et théorèmes nécessaires qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations. Nous rappelons ensuite les espaces de Sobolev utilisés en mécanique des milieux continus et les inéquations variationnelles qu'on rencontre dans notre étude sur les problèmes mécaniques. Pour plus de détails sur cette partie on renvoie aux ouvrages [16], [18], [20], [21], [28] et [34]. Partout dans ce chapitre Ω est un domaine borné Lipschitzien de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$, de frontière Γ, i.e., il est représentable localement comme le graphe d'une fonction Lipschitzienne sur un ouvert de $\mathbb{R}^{d-1}$et Ω étant situé localement d'un seul coté de Γ.

1.2.1 Rappels sur les espaces de Sobolev

Nous définissons ici les espaces de Sobolev qui sont les espaces de fonctions permettant de résoudre les formulations variationnelles d'équations aux dérivées partielles, tout d'abord on commence par un bref rappel de quelques résultats sur les espaces de distributions et de Lebesgue.

Dans la suite, Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$. On désigne par $C_0^\infty(\Omega)$ (ou $D(\Omega)$) l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω.

On munit $C_0^\infty(\Omega)$ de la «pseudo-topologie», c'est-à-dire qu'on définit une notion de convergence dans $C_0^\infty(\Omega)$.

L'espace des distributions $D^{'}(\Omega)$ est le «dual» de $D(\Omega)$, c'est-à-dire l'espace de formes linéaires continues sur $D(\Omega)$. On note $\langle T, \phi \rangle = T(\phi)$ le produit de dualité entre une distribution $T \in D^{'}(\Omega)$ et une fonction $\phi \in D(\Omega)$: ce produit de dualité généralise l'intégrale usuelle $\int_\Omega T\phi \; dx$. En effet, on vérifie que si f est une fonction localement intégrable dans Ω, alors on peut définir une distribution T_f par

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_\Omega f\phi \; dx.$$

On peut aussi munir $D^{'}(\Omega)$ d'une notion de convergence : on dit qu'une suite $T_n \in D^{'}(\Omega)$ **converge au sens des distributions** vers $T \in D^{'}(\Omega)$ si, pour tout $\phi \in D(\Omega)$,

$$\lim_{n \to +\infty} \langle T, \phi_n \rangle = \langle T, \phi \rangle.$$

Définissons maintenant la **dérivation au sens des distributions :** si $T \in D^{'}(\Omega)$, la dérivée $\dfrac{\partial T}{\partial x_i} \in D^{'}(\Omega)$ est définie par :

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \phi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \rangle, \; \forall \phi \in D(\Omega). \tag{1.2.1}$$

Pour $1 \leq p < \infty$, de façon usuelle, nous désignons par $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables et $p-$ intégrables au sens de la mesure de Lebesgue.

On note $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées. Nous munissons ces espaces de leurs normes usuelles $\|.\|_{L^p(\Omega)}$. Pour tout p, $1 \leq p \leq \infty$ on notera q l'exposant conjugué de p défini par $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ avec la convention $\dfrac{1}{\infty} = 0$. Pour tout $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, on a $uv \in L^1(\Omega)$ et $\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} . \|v\|_{L^q(\Omega)}$ (l'inégalité de Hölder).

L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v\,(x)\,dx, \qquad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

De plus, l'inégalité de Cauhy-Schwarz, correspondant à l'inégalité de Hölder pour $p = 2$, est vérifée i.e.

$$\int_\Omega u(x)v\,(x)\,dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

Quelques théorèmes de ces espaces $L^p(\Omega)$ sont résumés ci-après.

Théorème 1.2.1 (Théorème de la convergence dominée de Lebesgue). *Soit* (u_n) *une suite de fonctions de* $L^1(\Omega)$. *On suppose que*

(i) $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ *p.p. sur* Ω,

(ii) il existe une fonction $v \in L^1(\Omega)$ *telle que pour chaque* n, $|u_n(x)| \leq v(x)$ *p.p. sur* Ω.

Alors $u \in L^1(\Omega)$ *et* $\|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} \longrightarrow 0$.

Remarque 1.2.1. *Il résulte de l'inégalité de Hölder que si* (u_n) *est une suite telle que* $u_n \to u$ *dans* $L^p(\Omega)$, *et* (v_n) *une suite telle que* $v_n \to v$ *dans* $L^q(\Omega)$. *on obtient que la suite* $(u_n v_n) \subset L^1(\Omega)$ *converge vers* uv *dans* $L^1(\Omega)$, *ce qui implique* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega u_n v_n \, dx = \int_\Omega uv \, dx$.

Théorème 1.2.2. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite de fonctions intégrables telle que* $u_n \to u$ *dans* $L^1(\Omega)$. *Alors, il existe une sous suite* $(u_{n_k})_k$ *et* $v \in L^1(\Omega)$ *telle que*

$$u_n \to v \quad \text{p.p dans } \Omega \qquad \text{et} \quad |u_{n_k}| \leq v \qquad \text{p.p dans } \Omega.$$

L'espace de Sobolev. Il est en fait un espace de distributions. Il est défini comme suit:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in \{1, \ ..., d\} \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\},$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle de v au sens des distributions (1.2.1). Pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on note par ∇u le vecteur de composante $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ c'est un élément de l'espace $L^2(\Omega)^d$.

$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (u(x)v(x) \ + \nabla u(x).\nabla v(x)) \, dx$$

et la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On sait que $C^1(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$. Soit maintenant $H_0^1(\Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. On note par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$; c'est un espace de distributions sur Ω.

D'autre part, nous avons les résultats suivants :

(1) $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ avec injection compacte, *(Théorème de Rellich)*

(2) $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega))' \subset H^{-1}(\Omega)$,

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega),\ i = \overline{1,d}$, pour tout $u \in L^2(\Omega)$ et les opérateurs de dérivation $\dfrac{\partial}{\partial x_i} : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ sont continus,

(4) $u \in H^{-1}(\Omega)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega),\ i = \overline{1,d} \implies u \in L^2(\Omega)$.

Voici l'inégalité très utile portant sur les normes de Sobolev.

Proposition 1.2.5 (Inégalité de Poincaré). *Soit Ω un ouvert de borné de $\mathbb{R}^d$, alors il existe une constante C telle que pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} .$$

En particulier, $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme équivalente à celle de $H_0^1(\Omega)$ ($H_0^1(\Omega)$ désigne le sous espace vectoriel des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur $\partial\Omega$).

Théorème 1.2.7. (Traces des fonctions et formule de Green) *Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$. Alors il existe un opérateur linéaire continu $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$, appelé opérateur trace, tel que*

$$\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma) \text{ est compact.}$$

On définit l'espace vectoriel $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ comme suit :

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \left\{\gamma(u);\quad u \in H^1(\Omega)\right\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega} = \inf\left\{\|u\|_{1,\Omega};\quad \gamma(u) = f\right\}.$$

Les *deux propriétés les plus remarquables et utiles pour notre thèse sont les suivantes :*

(1) *Si $u \in H^1(\Omega)$, alors $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est linéaire surjectif et*

$$\|\gamma(u)\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega} \leq C \|u\|_{1,\Omega} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

(2) *Si Ω est borné régulier de classe C^1. Alors, pour toutes fonctions u et v de $H^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}dx + \int_\Gamma u(x)v(x)\nu_i(x)dx,$$

où $\nu = (\nu_i)_{1\leq i\leq d}$ est la normale unité extérieure à Γ.

Formule de Green pour la mécaniques.

Pour décrire cette formule, on a besoin de certaines notations associés aux inconnues mécaniques u et σ. Nous désignons par S_d l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^3$. Ainsi, pour $u,\ v \in \mathbb{R}^3$, $u.v = u_i v_i$, $|u| = (u.u)^{\frac{1}{2}}$, et pour $\sigma,\ \tau \in S_d$, $\sigma.\tau = \sigma_{ij}\tau_{ij}$, $|\sigma| = (\sigma.\sigma)^{\frac{1}{2}}$.

Nous avons besoin des espaces $L^2(\Omega)^d$, $H^1(\Omega)^d$, qui sont des espaces de Hilbert réels munis respectivement des produits scalaires canoniques $(.,.)_{0,\Omega}$, $(.,.)_{1,\Omega}$ qui sont définis par

$$(u,v)_{0,\Omega} = \int_\Omega u_i v_i \ dx,$$

$$(u,v)_{1,\Omega} = \int_\Omega u_i v_i \ dx + \int_\Omega u_{i,j} v_{i,j} \ dx,$$

$$\|v\|_{1,\Omega} = (v,v)_{1,\Omega}^{\frac{1}{2}}.$$

On utilise les opérateurs de déformation $d : H^1(\Omega)^d \rightarrow L^2(\Omega)_s^{d\times d}$ et de divergence Div : $H_{Div}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)^d$ ils sont bien définis par (1.1.2) et (1.1.6), où

$$\begin{aligned} L^2(\Omega)_s^{d\times d} &= \left\{\sigma = (\sigma_{ij}) \ / \ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \ / \ i,j = \overline{1,d}\right\}, \\ H_{Div}(\Omega) &= \left\{\sigma \in L^2(\Omega)_s^{d\times d} \ / \quad Div(\sigma) \in L^2(\Omega)^d\right\}. \end{aligned}$$

Ces deux espaces respectifs sont des espaces de Hilbert réels munis de leurs produits scalaires notés encore $(.,.)_{0,\Omega}$et $(.,.)_{1,\Omega}$:

$$(\sigma,\tau)_{0,\Omega} = \int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij} \ dx,$$

$$(\sigma,\tau)_{1,\Omega} = (\sigma,\tau)_{0,\Omega} + (Div(\sigma), Div(\tau))_{0,\Omega}.$$

Les normes sur les espaces $L^2(\Omega)^d$, $H^1(\Omega)^d$, $L^2(\Omega)_s^{d\times d}$ et $H_{Div}(\Omega)$ sont notées par $\|.\|_{0,\Omega}$, $\|.\|_{1,\Omega}$, $\|.\|_{0,\Omega}$ et $\|.\|_{1,\Omega}$, respectivement. Comme dans le cas de l'espace $H^1(\Omega)$, on peut prouver que l'espace

$$C^1(\bar{\Omega})_s^{d\times d} = \left\{\sigma = (\sigma_{ij}) \ / \ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in C^1(\bar{\Omega}) \ / \ i,j = \overline{1,d}\right\}$$

est dense dans $H_{Div}(\Omega)$. Donc, on peut maintenant définir l'application de trace γ : $H^1(\Omega)^d \to L^2(\Gamma)^d$ qui est linéaire continue, et elle n'est pas surjective. On définit l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^d$ comme suit :

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d = \left\{\gamma(u);\quad u \in H^1(\Omega)^d\right\}$$

ce sous espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Le dual de l'espace de Sobolev $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ est noté par $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$, et $\langle .,. \rangle_{H^{-\frac{1}{2}},H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$ le produit de dualité entre $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ et son dual. En outre, si $\sigma \in H_{Div}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})_s^{d\times d}$ et $v \in H^1(\Omega)^d$, nous avons

$$\langle \sigma\nu, \gamma(v) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}},H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \int\limits_{\Gamma} \sigma\nu.v d\Gamma,$$

tel que $\sigma\nu = (\sigma_{ij}.\nu_j)_{i=\overline{1,d}}$ est un élément dans l'espace $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$. Donc la formule de Green suivante est satisfaite

$$\int_\Omega \sigma : d(u)\, dx + \int_\Omega Div(\sigma).u\ dx = \int\limits_{\Gamma} \sigma\nu.v\ d\Gamma \quad .$$

Un résultat essentiel pour les applications du prochain chapitre est l'inégalité suivante :

Théorème 1.2.9 (Inégalité de Korn ([20])). *Soit Ω un domaine régulier borné de $\mathbb{R}^d$ de classe C^1. Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)^d$, on a :*

$$\int_\Omega v_i v_i\ dx + \int_\Omega d_{ij}(v)\, d_{ij}(v)\, dx \geq C \|v\|_{1,\Omega}^2 .$$

Tout au long de cette thèse, dans les problèmes mécaniques, supposons que le milieu occupe des domaines minces, c'est-à-dire des domaines physiques où la “hauteur” est beaucoup plus petite que la “surface”. Pour $0 < \varepsilon < 1$ fixé, on applique le théorème précédent dans un domaine Ω^ε sous la forme

$$\Omega^\varepsilon = \left\{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x', 0) \in \omega, \quad 0 < x_3 < \varepsilon h(x')\right\},$$

la frontière Γ^ε est partitionnée en trois parties mesurables disjointes et régulières, où Γ_1^ε est la frontière supérieure d'équation $x_3 = \varepsilon h(x')$, Γ_L^ε est la frontière latérale et la frontière inférieure ω c' est un domaine de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_3 = 0$. On suppose que h est une fonction de classe C^1 définie sur ω telle que

$$0 < h_{\min} \leq h(x') \leq h_{\max} \quad \forall (x', 0) \in \omega.$$

Nous aurons besoin de l'espace K^ε de $H^1(\Omega^\varepsilon)^3$ pour avoir certaines des conditions aux limites précédemment soumises :

$$K^\varepsilon = \{v \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3 : v = 0 \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon \cup \ \Gamma_1^\varepsilon,\ v.\nu = 0 \text{ sur } \omega\},$$

et il est clair que c'est un espace convexe fermé non vide.
Puisque $mes\ (\Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon) > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur K^ε : il existe une constante $C_K > 0$ qui ne dépend ni de ε ni de v , telle que

$$\int_{\Omega^\varepsilon} d_{ij}(v)\, d_{ij}(v)\, dx = \|D(v)\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} \geq C_K \|\nabla v\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} . \quad \forall v \in K^\varepsilon.$$

Pour des détails sur ce résultat de ce théorème nous renvoyons à [22, 35].

1.2.2 Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Dans cette partie nous rappelons quelques résultats concernant les inéquations variationnelles elliptiques et les inéquations variationnelles d'évolution paraboliques du premier ordre qui interviennent dans l'étude des problèmes mécaniques. Nous donnons aussi quelques théorèmes de convergence faible dans un espace de Hilbert. Nous commençons par ce rappel sur les fonctions convexes, les fonctions semi-continues inférieurement et la différentiabilité.

Fonctions convexes et différentiabilité

Etant donné un espace vectoriel réel X, soit $\phi : X \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction. On note par dom (ϕ) l'ensemble défini par:

$$\text{dom } (\phi) = \{u \in X \ : \ \phi(u) < +\infty\}$$

ϕ est dite propre si dom $(\phi) \neq \varnothing$. ϕ est dite convexe si

$$\phi(\lambda u + (1-\lambda) v) \leq \lambda \phi(u) + (1-\lambda)\phi(v) \quad \forall u,\ v \in \text{dom } (\phi),\ \forall \lambda \in [0,1],$$

ϕ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u,\ v \in$dom (ϕ) et tels que $u = v$.

Soit X un espace topologique, une fonction $\phi : X \to \bar{\mathbb{R}}$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) si l'ensemble $\{u \in X \ : \ \phi(u) < \alpha\}$ est fermé pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Si une fonction ϕ est s.c.i en u et si (u_n) est une suite qui converge vers u on a $\liminf\limits_{n\to\infty} \ \phi(u_n) \geq \phi(u)$. Réciproquement, si pour toute suite $(u_n) \to u$ on a $\liminf\limits_{n\to\infty} \ \phi(u_n) \geq \phi(u)$. La norme d'un espace normé est semi-continue inférieurement pour la topologie faible. On a donc, pour tout $u \in X : (u_n) \rightharpoonup u$ on a $\liminf\limits_{n\to\infty} \ \|u_n\| \geq \|u\|$.

Théorème 1.2.1. *Soit X un espace de Hilbert et soit $\phi : X \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction convexe et propre. Alors ϕ est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est semi-continue inférieurement pour la topologie faible de X.*

Proposition 1.2.1. *Soit X un espace topologique et soient $\phi, \ \psi : X \to \ ]-\infty, +\infty]$ deux fonctions semi-continues inférieurement en $u \in X$. Alors $\phi + \psi$ est semi-continue inférieurement en u.*

Une fonction $\phi : X \to \bar{\mathbb{R}}$ est dite Gâteaux-différentiable en un point $u \in X$ s'il existe un élément $\nabla\phi(u) \in X$ tel que

$$\begin{aligned} \langle \phi'(u), v \rangle_X &= \frac{d}{d\lambda} \, \phi(u + \lambda v) \Big|_{\lambda=0} \\ &= \lim_{\lambda\to 0} \lambda^{-1} \left(\phi(u + \lambda v) - \phi(u) \right), \ \forall v \in X. \end{aligned}$$

L'élément $\phi'(u)$ est appelé la différentielle au sens de Gâteaux de ϕ au point u. La fonction ϕ est dite Gâteaux-différentiable si elle Gâteaux-différentiable en tout point de X, dans ce cas l'opérateur $\phi : u \in X \to \phi'(u) \in X$ s'appelle le gradient de la fonction ϕ.

Nous donnons une caractérisation de la convexité en termes de différentielle au sens de Gâteaux de la façon suivante.

Proposition 1.2.2. *Soit X un espace de Hilbert et soit $\phi : X \to \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux-différentiable. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) ϕ *est convexe,*

(ii) $\phi(v), -\phi(u) \geq \langle \phi'(u), v - u \rangle_X \ , \quad \forall u, \ v \in X,$

(iii) $\langle \phi'(v) - \phi'(u), v - u \rangle_X \geq 0 \ , \quad \forall u, \ v \in X.$

Convergence faible dans les espaces de Hilbert.

Une suite $(f_n) \subset X$ converge faiblement dans X vers un élément $f \in X$, et on note $f_n \rightharpoonup f$, si pour tout $v \in X$, le produit scalaire $\langle f_n, v \rangle_X$ converge vers $\langle f, v \rangle_X$ dans $\mathbb{R}$. f s'appelle limite faible de la suite (f_n) .

Théorème 1.2.2 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet). *Soit X un espace de Hilbert réel et $\langle f, v \rangle_X$ un produit scalaire de X. Pour tout $\varphi \in X'$, il existe $f \in X$ unique tel que*

$$\langle \varphi, v \rangle_{X' \times X} = \langle f, v \rangle_X \quad \forall v \in X \quad et \quad \|\varphi\|_{X'} = \|f\|_X \, .$$

L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur X peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\varphi \to f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier X et X'. Donc tout espace de Hilbert est réflexif, on a le théorème suivant:

Théorème 1.2.3. *Soit (f_n) une suite bornée de X, il existe alors un élément $x \in X$ et une sous-suite de (f_n) notée (f_η) telle que $f_\eta \rightharpoonup f$.*

Proposition 1.2.3.

(1) *Toute suite faiblement convergente est bornée.*

(2) Soient (f_n) une suite qui *converge faiblement vers u* et (g_n) une suite qui *converge fortement vers g. Alors*

$$\lim_{n \to +\infty} \langle f_n, g_n \rangle_X = \langle f, g \rangle_X \, .$$

(3) *Si X et Y sont des espaces de Hilbert réels, et si $u \in L(X, Y)$, alors l'image par u de toute suite dans X faiblement convergente vers un élément $x \in X$ est faiblement convergente dans Y vers $u(x)$.*

Le résultat crucial suivant est une conséquence du théorème de Riesz-Fréchet et du théorème de Banach-Alaoglu [28].

Théorème 1.2.4 (Théorème de compacité faible de la boule unité fermée des espaces de Hilbert). *Si X est un espace de Hilbert, alors toute suite bornée dans X admet une sous-suite faiblement convergente.*

Inéquations variationnelles elliptiques et d'évolution

Nous commençons ce paragraphe par quelques propriétés des formes bilinéaires dans un espace de Hilbert. Donc, on considère un espace de Hilbert X muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle_X$ et la norme associée $\|.\|_X$ et X' l'espace dual de X en notant par $\langle .,. \rangle_{X'\times X}$ pour le produit de dualité entre X et X'.
On dit qu'une forme bilinéaire $a : X \times X \to \mathbb{R}$ est:

(i) Continue, s'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$a(u,v) \leq C \|u\|_X \|v\|_X \ , \qquad \forall u, v \in X$$

(ii) Coercive, s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \ , \qquad \forall v \in X$$

Théorème 1.2.5. (Représentation des formes bilinéaires). *Soit $a : X \times X \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue sur $X \times X$. Alors il existe un unique opérateur linéaire borné $A \in L(X; X')$ tel que:*

$$\forall u, v \in X : a(u,v) = (Au, v)_{X'\times X}.$$

De plus

$$\|a\|_X = \|A\|_{L(X;X')} \,.$$

Nous rappelons un théorème d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles de $2^{\text{ème}}$ espèce qu'on va utiliser dans le deuxième et troisième chapitre de cette thèse.

Théorème 1.2.6. *Soit K un convexe fermé non-vide d'un espace de Hilbert X, muni de la norme $\|.\|_X$, $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercitive de $K \times K$ dans $\mathbb{R}$, et J une fonctionnelle de K dans $\bar{\mathbb{R}}$ convexe, semi-continue inférieurement et propre, alors pour tout forme linéaire $\mathcal{L}$ définie sur X, il existe un unique u dans X solution de l'inéquation variationnelle :*

$$a(u, v-u) + J(v) - J(u) \geq \mathcal{L}(v-u) \,.$$

Pour préciser les problèmes d'évolution posés au quatrième chapitre on a besoin d'outils supplémentaires, que nous allons introduire maintenant. Soit $T > 0$ et soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach réel. On définit les espaces à valeurs vectorielles suivants :

$$C(0,T;X) = \{u : [0,T] \to X \ \ \text{continue}\} \,,$$

$$L^p(0,T;X) = \left\{ u : [0,T] \to X \text{ mesurable } ; \ \int_0^T \|u(t)\|_X \, dt \prec \infty \right\}, 1 \leq p < \infty,$$
$$L^\infty(0,T;X) = \{u : [0,T] \to X \text{ mesurable } ; \ \exists C > 0 \ \ \|u(t)\|_X \leq C \ \ p.p.t\},$$

munis des normes

$$\|u\|_{C(0,T;X)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X ,$$
$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \ dt \right)^{\frac{1}{p}} ,$$
$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf\{C > 0 \ ; \ \ \|u(t)\|_X \leq C \ \ \text{p.p. } t \ \}.$$

Pour tout $1 \leq p < \infty$, $L^p(0,T,X)$ est un espace de Banach et $C(0,T;X)$ est dense dans $L^p(0,T,X)$. Si $1 \leq p < \infty$ et si X est réflexif, alors $L^p(0,T,X)$ est réflexif. Par ailleurs, on a les résultats suivants.

Proposition 1.2.4.

(1) *Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $\langle .,. \rangle_X$, alors $L^2(0,T;\,X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire*

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_X \ dt.$$

(2) $L^r(0,T;\ X) \subset L^q(0,T;\ X)$, *avec injection continue,* $1 \leq q \leq r \leq \infty$.

(3) *Si X est un espace de Hilbert, alors*

$$L^p(0,T;X)' = L^q(0,T;X), \text{si } 1 < p,q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$
$$L^1(0,T;X)' = L^\infty(0,T;X).$$

On désigne par $H^1(0,T;X)$ l'espace de Sobolev sur $]0,T[$ à valeurs dans X, défini par

$$H^1(0,T;X) = \left\{ u; \quad u \in \ L^2(0,T;\ X) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t} \in \ L^2(0,T;\ X) \right\},$$

tel que la dérivée $\dfrac{\partial}{\partial t}$ est définie par

$$\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(t)\, \phi(t) \ dt = -\int_0^T u(t) \frac{\partial}{\partial t} \phi(t) \ dt \ , \quad \forall \phi \in C_0^\infty(]0,T[).$$

$C_0^\infty(]0,T[)$ étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables, à support compact dans $]0,T[$.

Théorème 1.2.7. *Soit X un espace de Banach réflexif et soit $u \in L^2(0,T;X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $u \in H^1(0,T;X)$,

(ii) *Il existe* $u_0 \in X$ *et* $g \in L^2(0,T;X)$, *telle que* $u(t) = u_0 + \int_0^t g(s)\,ds, \ \ \forall t \in [0,T]$.

Théorème 1.2.8. *Soit $(X,(.,.)_X)$ un espace de Hilbert et soit $u \in H^1(0,T;X)$. Alors :*

(1) $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_X^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t), u(t)\right)_X$ *p.p.* $t \in]0,T[$,

(2) $\frac{1}{2}\|u(t)\|_X^2 = \frac{1}{2}\|u(0)\|_X^2 + \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial t}(s), u(s)\right)_X ds$ *pour tout* $t \in [0,T]$.

Soient X, Y deux espaces de Hilbert de normes respectives $\|.\|_X$, $\|.\|_Y$ qui vérifient l'hypothèse suivante

$$\begin{cases} X \text{ dense dans } Y, \\ X \subset Y \subset X', \end{cases} \tag{1.2.2}$$

et soit K un sous-ensemble fermé non vide et convexe de X. On se donne une forme bilinéaire $a : K \times K \to \mathbb{R}$ continue sur K qui satisfait:

$$\begin{aligned} \text{il existe } \rho \text{ et } \alpha &> 0 \text{ tels que} \\ a(v,v) + \rho\|v\|_Y^2 &\geq \alpha\|v\|_X^2 \qquad \forall v \in X. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

On a le théorème :

Théorème 1.2.9. *On suppose que les hypothèses* $(1.2.2)$, $(1.2.3)$ *ont lieu. Alors, pour tout* $u_0 \in K$ *et* $f \in L^2(0,T;X')$, *il existe une unique fonction u qui satisfait*

$$u \in L^2(0,T;X) \cap C(0,T;Y) \cap H^1(0,T;X'), \tag{1.2.4}$$

$$u(t) \in K, \qquad \forall t \in [0,T], \tag{1.2.5}$$

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(t), v - u(t) \right\rangle_{X' \times X} + a(u(t), v - u(t)) \\ &\geq \langle f, v - u(t)\rangle_{X' \times X} \quad , \quad \forall v \in K, \ \ p.p. \ t \in (0,T), \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

$$u(0) = u_0. \tag{1.2.7}$$

En outre, si $u_0 \in K$ *et* $f \in L^2(0,T;Y)$ *alors, la solution u de* $(1.2.6)$ *et* $(1.2.7)$ *vérifie*

$$u \in L^2(0,T;X) \cap H^1(0,T;Y).$$

Les démonstrations des deux théorèmes précédents peuvent être trouvés par exemple dans [16, 20]. Avec les notions introduites jusqu'ici, on va voir que le problème d'évolution posé au quatrième chapitre de cette thèse entre dans le cadre suivant :

Trouver une fonction u telle que

$$
\begin{gathered}
u \in L^2(0,T;X)\ , \qquad u' \in L^2(0,T;X')\ , \\
\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(t), v-u(t) \right\rangle_{X'\times X} + a(u(t), v-u(t)) + J\left(v\right) - J\left(u(t)\right) \\
\geq \langle f, v-u(t)\rangle_{X'\times X} \quad , \quad \forall v \in K, \ \ \text{p.p. } t \ \in (0,T)\, , \\
u(0) = u_0\ ,
\end{gathered}
$$

J est une fonction de K dans $\bar{\mathbb{R}}$ convexe, semi-continue inférieurement et propre.

1.2.3 Lemmes de type Gronwall

Nous finissons en posant quelques lemmes du type Gronwall [6], qui nous seront utiles notamment dans la démonstration d'unicité des solutions faibles et d'estimations des solutions.

Lemme 1.2.1. *Soit $n \in C\left([0,T]\,;\mathbb{R}\right)$ telle que $n\left(t\right) \geq 0$ pour tout $t \in \left]0,T\right[$ et $a \geq 0$ une constante. Si la fonction $\phi \in C\left(0,T;\mathbb{R}\right)$:*

$$
\phi\left(t\right) \leq n\left(t\right) + a\int_0^t \phi\left(s\right) ds \quad \forall t \in [0,T]\,,
$$

Alors

$$
\int_0^t \phi\left(s\right) ds \leq \exp\left(aT\right) \int_0^t n\left(s\right) ds \quad .
$$

Corollaire 1.2.1. *Soit $n \in C\left([0,T]\,;\mathbb{R}\right)$ telle que, $n\left(t\right) \geq 0$ pour tout $t \in \left]0,T\right[$, et soit $a \geq 0$. Si $\phi \in C\left(0,T;\mathbb{R}\right)$ est une fonction telle que*

$$
\phi\left(t\right) \leq a + \int_0^t n\left(s\right)\phi\left(s\right) ds \quad \forall t \in [0,T]\,,
$$

Alors

$$
\phi\left(t\right) \leq a \exp\left(\int_0^t n\left(s\right) ds\right), \quad \forall t \in [0,T]\,.
$$

Le corollaire 1.2.1 est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. En supposant qu'il existe deux solutions, en notant par ϕ la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer ϕ sous la forme

$$
\phi\left(t\right) \leq \int_0^t n\left(s\right)\phi\left(s\right) ds \quad \forall t \in [0,T]\,,
$$

avec une certaine fonction $n \geq 0$. L'application du corollaire donne immédiatement la nullité de ϕ.

Lemme 1.2.2. *Soient* m *et* $n \in C([0,T];\mathbb{R})$ *telles que* $m(t) \geq 0$, $n(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in]0,T[$, $a \geq 0$ *une constante. Soit également* $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que*

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\,\phi(t)\,dt + \int_0^s n(t)\,\phi^2(t)\,dt, \ \ \forall s \in [0,T],$$

Alors

$$|\phi(s)| \leq \left(a + \int_0^s m(t)\,dt\right)\exp\left(\int_0^s n(t)\,dt\right), \ \ \forall s \in [0,T].$$

Dans le cas particulier $n = 0$ le lemme 1.2.2 devient :

Corollaire 1.2.2. *Soit* $m \in C([0,T];\mathbb{R})$ *telle que* $m(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in]0,T[$, $a \geq 0$ *une constante. Soit également* $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que*

$$\frac{1}{2}\phi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\,\phi(t)\,dt, \ \ \forall s \in [0,T],$$

Alors

$$|\phi(s)| \leq \left(a + \int_0^s m(t)\,dt\right), \ \ \forall s \in [0,T].$$

Chapitre 2

Analyse asymptotique d'un problème de contact avec frottement entre deux corps élastiques

Résumé

Dans ce travail, on a montré dans une première étape, l'existence et l'unicité d'une solution faible de ce problème de transmission. Ensuite nous avons étudié l'analyse asymptotique de ce problème en faisant un changement d'échelle, ce qui nous a permis de ramener l'étude sur un nouveau domaine indépendant du paramètre ε. Grâce à des estimations à priori indépendantes de , nous avons montré le théorème essentiel de convergence permettant de passer à la limite lorsque ε tend vers zéro et de montrer donc l'existence et l'unicité de la solution du problème limite.

2.1 Introduction et position du problème

Nous considérons deux corps élastiques occupant deux domaines bornés Ω_1^ε et Ω_2^ε de $\mathbb{R}^3$. On note par ε $(0<\varepsilon<1)$ est un petit paramètre qui tend vers zéro, avec ses frontières $\partial\Omega_1^\varepsilon$ et $\partial\Omega_2^\varepsilon$ de classe C^1 et sont divisées en trois parties mesurables disjointes données par

$$\partial\Omega_1^\varepsilon=\bar{\omega}\cup\bar{\Gamma}_1^\varepsilon\cup\bar{\Gamma}_{L_1}^\varepsilon \text{ et } \partial\Omega_2^\varepsilon=\bar{\omega}\cup\bar{\Gamma}_2^\varepsilon\cup\bar{\Gamma}_{L_2}^\varepsilon,$$

où

ω est une région fixe dans le plan $x'=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$.

Γ_1^ε est la surface supérieure définie par $x_3=\varepsilon h(x')$ et Γ_2^ε est la surface inférieure définie par $x_3=-\varepsilon h(x')$, telle que h est une fonction bornée lisse $0<h_*\leq h(x')\leq h^*$ pour tout $(x',0)$ dans ω.

$\Gamma_{L_1}^\varepsilon,\Gamma_{L_2}^\varepsilon$ sont les frontières latérale.

On désigne par Ω^ε le domaine $\Omega_1^\varepsilon\cup\Omega_2^\varepsilon$ et on suppose que

$$\Omega_1^\varepsilon=\{x=(x',x_3)\in\mathbb{R}^3,(x',0)\in\omega,\quad 0<x_3<\varepsilon h(x')\},$$

et

$$\Omega_2^\varepsilon=\{x=(x',x_3)\in\mathbb{R}^3,(x',0)\in\omega,\quad -\varepsilon h(x')<x_3<0\}.$$

Les corps sont soumis à des forces volumiques données de densités $\mathbf{f}_1^\varepsilon,\mathbf{f}_2^\varepsilon$ respectivement.

On note $\mathbf{u}_l^\varepsilon=(u_{li}^\varepsilon)_{1\leq i\leq 3}:\Omega_l^\varepsilon\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $l=1,\,2$ le champ des déplacements, $\sigma_l^\varepsilon=\left(\sigma_{lij}^\varepsilon\right)_{1\leq i,j\leq 3}:\Omega_l^\varepsilon\longrightarrow\mathbb{S}_3$, $l=1,2$, le tenseur de contraintes de Cauchy donné par la loi de Hooke [25]:

$$\sigma_{lij}^\varepsilon(\mathbf{u}_l^\varepsilon)=2\mu_l d_{ij}(\mathbf{u}_l^\varepsilon)+\lambda_l d_{kk}(\mathbf{u}_l^\varepsilon)\,\delta_{ij}$$

où μ_l,λ_l sont les coefficients de Lamé qui sont spécifiques à chaque corps, et $d(\mathbf{v})=(d_{ij}(\mathbf{v}))_{1\leq i,j\leq 3}$ le tenseur de taux de déformation avec $d_{ij}(\mathbf{v})=\dfrac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i})$, et $\delta=(\delta_{ij})$ le tenseur d'identité.

En outre, $n_l=(n_{l1},n_{l2},n_{l3})$ représente le vecteur normal externe unitaire sur $\partial\Omega_l^\varepsilon$, $l=1,2$. On note par $\mathbf{n}=(0,0,-1)$ le vecteur normal extérieur unitaire sur la frontière ω orientée vers l'extérieur de Ω_1^ε et vers l'intérieur de Ω_2^ε.

Pour tout vecteur $\mathbf{v}^\varepsilon \in H^1\left(\Omega_l^\varepsilon\right)^3$ nous désignons par $\mathbf{v}_N^\varepsilon$ et $\mathbf{v}_{\tau_i}^\varepsilon$ les composantes normale et tangentielle sur la frontière $\partial\Omega_l^\varepsilon$, données par

$$\mathbf{v}_N^\varepsilon = \mathbf{v}^\varepsilon.n, \quad \mathbf{v}_{\tau_i}^\varepsilon = \mathbf{v}_i^\varepsilon - \mathbf{v}_N^\varepsilon.n_i$$

On note aussi σ_{lN}^ε et $\sigma_{l\tau}^\varepsilon = \left(\sigma_{l\tau_i}^\varepsilon\right)_{1\leq i\leq 3}$, $l = 1,\, 2$ les traces tangentielles d'une fonction $\sigma^\varepsilon \in L^2\left(\Omega_l^\varepsilon\right)^{3\times 3}$, données par

$$\sigma_{lN}^\varepsilon = \left(\sigma_l^\varepsilon.n_{li}\right).n_{lj}, \quad \sigma_{l\tau_i}^\varepsilon = \sigma_{lij}^\varepsilon.n_l - \sigma_{lN}^\varepsilon.n_{li}$$

Le déplacement sur le bord Γ_l^ε, $l = 1, 2$ est supposé fixé,

$$\mathbf{u}_l^\varepsilon = 0,\, l = 1, 2$$

Sur le bord $\Gamma_{L_l}^\varepsilon$, $l = 1, 2$ le déplacement est connu et donné par une fonction de g_l.

$$\mathbf{u}_l^\varepsilon = g_l \text{ avec } \; g_{l3} = 0,\, l = 1, 2$$

Nous décrivons maintenant les conditions sur la surface commune ω. Nous supposons que le contact est bilatéral, c'est-à-dire

$$\mathbf{u}_{1\nu_1}^\varepsilon + \mathbf{u}_{2\nu_2}^\varepsilon = 0 \text{ sur } \omega,$$

$$\sigma_1^\varepsilon.\nu_1 = -\sigma_2^\varepsilon.\nu_2 \text{ sur } \omega,$$

et comme

$$\nu_1 = -\nu_2 \text{ sur } \omega,$$

alors

$$\sigma_{1\nu}^\varepsilon = \sigma_{2\nu}^\varepsilon \text{ et } \sigma_{1\tau}^\varepsilon = -\sigma_{2\tau}^\varepsilon \text{ sur } \omega.$$

Cependant, si on pose $\sigma_\tau^\varepsilon = \sigma_{1\tau}^\varepsilon$ le déplacement tangentiel est inconnu et supposé satisfaire à la condition limite de Tresca :

$$\left\{\begin{array}{c} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \implies \mathbf{u}_{1\tau}^\varepsilon - \mathbf{u}_{2\tau}^\varepsilon = s \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \implies \exists\lambda \geq 0,\; \mathbf{u}_{1\tau}^\varepsilon - \mathbf{u}_{2\tau}^\varepsilon = s - \lambda\sigma_\tau^\varepsilon \end{array}\right. \qquad \text{sur } \omega.$$

où $|.|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$, s la vitesse de cisaillement et k^ε le seuil de frottement.

Le problème de transmission en régime permanent pour les corps élastiques est donné par le problème mécanique suivant

Problème P^ε. Trouver un champ de déplacement $\mathbf{u}_l^\varepsilon = (u_{li}^\varepsilon)_{1\leq i\leq 3} : \Omega_l^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $l = 1, 2$ tel que

$$\operatorname{div}\sigma_1^\varepsilon + \mathbf{f}_1^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_1^\varepsilon. \tag{2.1.1}$$

$$\operatorname{div}\sigma_2^\varepsilon + \mathbf{f}_2^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_2^\varepsilon, \tag{2.1.2}$$

$$\sigma_1^\varepsilon\left(\mathbf{u}_1^\varepsilon\right) = 2\mu_1 d\left(\mathbf{u}_1^\varepsilon\right) + \lambda_1 d_{kk}\left(\mathbf{u}_1^\varepsilon\right)\delta \text{ dans } \Omega_1^\varepsilon, \tag{2.1.3}$$

$$\sigma_2^\varepsilon\left(\mathbf{u}_2^\varepsilon\right) = 2\mu_2 d\left(\mathbf{u}_2^\varepsilon\right) + \lambda_2 d_{kk}\left(\mathbf{u}_2^\varepsilon\right)\delta \text{ dans } \Omega_2^\varepsilon, \tag{2.1.4}$$

$$\mathbf{u}_1^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon, \tag{2.1.5}$$

$$\mathbf{u}_2^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_2^\varepsilon, \tag{2.1.6}$$

$$\mathbf{u}_1^\varepsilon = g_1 \text{ sur } \Gamma_{L_1}^\varepsilon, \tag{2.1.7}$$

$$\mathbf{u}_2^\varepsilon = g_2 \text{ sur } \Gamma_{L_2}^\varepsilon, \tag{2.1.8}$$

$$\mathbf{u}_1^\varepsilon.\mathbf{n} - \mathbf{u}_2^\varepsilon.\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \omega, \tag{2.1.9}$$

$$\sigma_1^\varepsilon.\mathbf{n} - \sigma_2^\varepsilon.\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \omega, \tag{2.1.10}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_\tau^\varepsilon ;= \sigma_{1\tau}^\varepsilon = -\sigma_{2\tau}^\varepsilon \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \implies \mathbf{u}_{1\tau}^\varepsilon - \mathbf{u}_{2\tau}^\varepsilon = s \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \implies \exists\lambda \geq 0,\ \mathbf{u}_{1\tau}^\varepsilon - \mathbf{u}_{2\tau}^\varepsilon = s - \lambda\sigma_\tau^\varepsilon \end{array}\right. \quad \text{sur } \omega. \tag{2.1.11}$$

Lemme 2.1.1 *([20]). La condition* (2.11) *est équivalente à la relation suivante*

$$\left(\mathbf{u}_1^\varepsilon - \mathbf{u}_2^\varepsilon - s\right)\sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon |\left(\mathbf{u}_1^\varepsilon - \mathbf{u}_2^\varepsilon - s\right)| = 0 \quad sur\ \omega.$$

2.2 Formulation faible

Nous désignons par S_3 l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^3$ et $|.|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$. Pour $u,\ v \in \mathbb{R}^3$, $u.v = u_i v_i$, $|u| = (u.u)^{\frac{1}{2}}$, et pour $\sigma,\ \tau \in S_3$, $\sigma.\tau = \sigma_{ij}\tau_{ij}$, $|\sigma| = (\sigma.\sigma)^{\frac{1}{2}}$.

Pour formuler la solution faible du problème (2.1.1) - (2.1.11), nous utiliserons la notation

$$\begin{aligned} H^1\left(\Omega_l^\varepsilon\right)^3 &= \left\{\mathbf{v}\in L^2\left(\Omega_l^\varepsilon\right)^3 : \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\in L^2\left(\Omega_l^\varepsilon\right),\ \forall i,j=1,...,3\right\}, \\ V\left(\Omega_l^\varepsilon\right) &= \left\{\mathbf{v}\in H^1\left(\Omega_l^\varepsilon\right)^3 :\ \mathbf{v}=0 \text{ sur } \Gamma_l^\varepsilon\cup\Gamma_{L_l}^\varepsilon\right\},\ l=1,2 \end{aligned}$$

sont des espaces de Hilbert réels muni de la norme $||.||_{1.\Omega_l^\varepsilon}$ et du produit scalaire $\langle .,.\rangle_{1.\Omega_l^\varepsilon}$. La norme de $L^2\left(\Omega_l^\varepsilon\right)^3$ sera noté $||.||_{0.\Omega_l^\varepsilon}$.

On note encore par $\|(.,.)\|_{1,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon}$ la norme de l'espace $H^1\left(\Omega_1^\varepsilon\right)^3\times H^1\left(\Omega_2^\varepsilon\right)^3$, et par $\|(.,.)\|_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon}$ la norme de l'espace $L^2\left(\Omega_1^\varepsilon\right)^3\times L^2\left(\Omega_2^\varepsilon\right)^3$.

De plus, nous avons besoin des espaces fonctionnels suivants :

$$V^\varepsilon=\left\{(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)\in V\left(\Omega_1^\varepsilon\right)\times V\left(\Omega_2^\varepsilon\right):\ \mathbf{v}_1.\mathbf{n}-\mathbf{v}_2.\mathbf{n}=0 \text{ on } \omega\right\}.$$

V^ε est un espace de Hilbert réel muni de produit interne canonique $\langle .,.\rangle_{V^\varepsilon}$ et la norme $\|(.,.)\|_{V^\varepsilon}$, où

$$\|(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)\|_{V^\varepsilon}=\left(\|\mathbf{v}_1\|^2_{V\left(\Omega_1^\varepsilon\right)}+\|\mathbf{v}_2\|^2_{V\left(\Omega_2^\varepsilon\right)}\right)^{1/2}.$$

Nous supposons que la fonction g_l introduite dans la section 2.1 est dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_l^\varepsilon)^3$, l'espace des traces de fonctions de $H^1(\Omega_l^\varepsilon)^3$ sur $\partial\Omega_l^\varepsilon$.

$$\int_{\partial\Omega_l^\varepsilon} g_l.\nu_l ds=0,\ l=1,2$$

Donc, on peut montrer par [5] que cette condition est équivalente à l'existence d'une fonction $G^\varepsilon=\left(G_l^\varepsilon\right)_{1\le l\le 2}$ vérifiant

$$G_l^\varepsilon\in H^1\left(\Omega_l^\varepsilon\right)^3 \text{ with } G_l^\varepsilon=g_l \text{ on } \Gamma_{L_l}^\varepsilon,\ G_l^\varepsilon=0 \text{ on } \ \Gamma_l^\varepsilon,\ G_l^\varepsilon.\mathbf{n}=0 \text{ on } \omega \tag{2.2.1}$$

Lemme 2.2.1 *Soit* $(\mathbf{u}_1^\varepsilon,\mathbf{u}_2^\varepsilon)$ *solution de (2.1.1)–(2.1.11), alors elle vérifie le problème variationnel suivant*

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{Trouver } \left(\mathbf{u}_1^\varepsilon,\mathbf{u}_2^\varepsilon\right) \textit{ dans } V^\varepsilon, \textit{ telle que} \\ \mathcal{A}\left(\left(\mathbf{u}_1^\varepsilon,\mathbf{u}_2^\varepsilon\right),\left(\varphi_1-\mathbf{u}_1^\varepsilon,\varphi_2-\mathbf{u}_2^\varepsilon\right)\right)+J^\varepsilon\left(\varphi_1,\varphi_2\right)-J^\varepsilon\left(\mathbf{u}_1^\varepsilon,\mathbf{u}_2^\varepsilon\right)\ge \\ \int_{\Omega_1^\varepsilon}\mathbf{f}_1^\varepsilon\cdot\left(\varphi_1-\mathbf{u}_1^\varepsilon\right)dx+\int_{\Omega_2^\varepsilon}\mathbf{f}_2^\varepsilon\cdot\left(\varphi_2-\mathbf{u}_2^\varepsilon\right)dx,\quad \forall\left(\varphi_1,\varphi_2\right)\in V^\varepsilon, \end{array}\right. \tag{2.2.2}$$

où

$$\mathcal{A}\left((\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2),(\varphi_1,\varphi_2)\right)=\sum_{1\le l\le 2}\left\{2\mu_l\int_{\Omega_l^\varepsilon}d_{ij}\left(\mathbf{u}_l\right)d_{ij}\left(\varphi_l\right)dx+\lambda_l\int_{\Omega_l^\varepsilon}\operatorname{div}\left(\mathbf{u}_l\right)\operatorname{div}\left(\varphi_l\right)dx\right\},$$

$$J^\varepsilon\left(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\right)=\int_\omega k^\varepsilon|\left(\mathbf{v}_{1\tau}-\mathbf{v}_{2\tau}-s\right)|dx'.$$

Preuve. Supposons que $(\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon)$ solution de (2.1.1)–(2.1.11) soit suffisamment régulière.

En multipliant l'équation (2.1.1) par $\varphi_1 - \mathbf{u}_1^\varepsilon$, et l'équation (2.1.2) par $\varphi_2 - \mathbf{u}_2^\varepsilon$, où $(\varphi_1, \varphi_2) \in V^\varepsilon$, et en utilisant la formule de Green sur chaque sous domaine Ω_l^ε, $l = 1, 2$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1^\varepsilon} \sigma_{1ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\varphi_{1i} - u_{1i}^\varepsilon)\, dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \sigma_{2ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\varphi_{2i} - u_{2i}^\varepsilon)\, dx - \\
&- \int_{\partial\Omega_1^\varepsilon} \sigma_{1ij}^\varepsilon n_{1j} (\varphi_{1i} - u_{1i}^\varepsilon)\, ds - \int_{\partial\Omega_2^\varepsilon} \sigma_{2ij}^\varepsilon n_{2j} (\varphi_{2i} - u_{2i}^\varepsilon)\, ds \\
&= \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_{1i}^\varepsilon (\varphi_{1i} - u_{1i}^\varepsilon)\, dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_{2i}^\varepsilon (\varphi_{2i} - u_{2i}^\varepsilon)\, dx, \forall (\varphi_1, \varphi_2) \in V^\varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

En utilisant maintenant les conditions aux limites (2.1.5)–(2.1.8), on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega_1^\varepsilon} \sigma_{1ij}^\varepsilon n_{1j} (\varphi_{1i} - u_{1i}^\varepsilon)\, ds + \int_{\partial\Omega_2^\varepsilon} \sigma_{2ij}^\varepsilon n_{2j} (\varphi_{2i} - u_{2i}^\varepsilon)\, ds \\
= &\int_\omega \sigma_1^\varepsilon \mathbf{n} (\varphi_1 - \mathbf{u}_1^\varepsilon)\, dx' + \int_\omega - \sigma_2^\varepsilon \mathbf{n} (\varphi_2 - \mathbf{u}_2^\varepsilon)\, dx',
\end{aligned}$$

de la condition (2.1.10), on trouve $\sigma_\nu^\varepsilon ;= \sigma_{1\nu}^\varepsilon = \sigma_{2\nu}^\varepsilon$ sur ω et de la condition (2.1.11) on a $\sigma_\tau^\varepsilon ;= \sigma_{1\tau}^\varepsilon = -\sigma_{2\tau}^\varepsilon$ sur ω, donc le deuxième membre s'écrit

$$\int_\omega \sigma_\tau^\varepsilon \left[(\varphi_{1\tau} - \mathbf{u}_{1\tau}^\varepsilon) - (\varphi_{2\tau} - \mathbf{u}_{2\tau}^\varepsilon)\right] dx' + \int_\omega \sigma_\nu^\varepsilon \left[(\varphi_{1\tau} - \mathbf{u}_{1\tau}^\varepsilon) .\mathbf{n} - (\varphi_{2\tau} - \mathbf{u}_{2\tau}^\varepsilon) .\mathbf{n}\right] dx',$$

en utilisant la condition (2.1.9), on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega_1^\varepsilon} \sigma_{1ij}^\varepsilon n_{1j} (\varphi_{1i} - u_{1i}^\varepsilon)\, ds + \int_{\partial\Omega_2^\varepsilon} \sigma_{2ij}^\varepsilon n_{2j} (\varphi_{2i} - u_{2i}^\varepsilon)\, ds \\
= &\int_\omega \sigma_\tau^\varepsilon \left[(\varphi_{1\tau} - \varphi_{2\tau}) - (\mathbf{u}_{1\tau}^\varepsilon - \mathbf{u}_{2\tau}^\varepsilon)\right] dx'.
\end{aligned}$$

Donc (2.2.3) devient comme suit

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1^\varepsilon} \sigma_{1ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\varphi_{1i} - u_{1i}^\varepsilon)\, dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \sigma_{2ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (\varphi_{2i} - u_{2i}^\varepsilon)\, dx + \\
&+ J^\varepsilon (\varphi_1, \varphi_2) - J^\varepsilon (\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon) - \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_{1i}^\varepsilon (\varphi_{1i} - u_{1i}^\varepsilon)\, dx - \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_{2i}^\varepsilon (\varphi_{2i} - u_{2i}^\varepsilon)\, dx = \\
&\int_\omega \left\{\sigma_\tau^\varepsilon \left[(\varphi_{1\tau} - \varphi_{2\tau} - s) - (\mathbf{u}_{1\tau}^\varepsilon - \mathbf{u}_{2\tau}^\varepsilon - s)\right] + k^\varepsilon \left[|\varphi_{1\tau} - \varphi_{2\tau} - s| - |\mathbf{u}_{1\tau}^\varepsilon - \mathbf{u}_{2\tau}^\varepsilon - s|\right]\right\} dx'
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.1.1, le deuxième membre est positif, on trouve alors

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}\left((\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon), (\varphi_1 - \mathbf{u}_1^\varepsilon, \varphi_2 - \mathbf{u}_2^\varepsilon)\right) + J^\varepsilon (\varphi_1, \varphi_2) - J^\varepsilon (\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon) \geq \\
&\int_{\Omega_1^\varepsilon} \mathbf{f}_1^\varepsilon \cdot (\varphi_1 - \mathbf{u}_1^\varepsilon)\, dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \mathbf{f}_2^\varepsilon \cdot (\varphi_2 - \mathbf{u}_2^\varepsilon)\, dx, \ \forall (\varphi_1, \varphi_2) \in V^\varepsilon.
\end{aligned}$$

■

Lemme 2.2.2 *Supposons que* $(\mathbf{f}_1^\varepsilon, \mathbf{f}_2^\varepsilon) \in L^2(\Omega_1^\varepsilon)^3 \times L^2(\Omega_2^\varepsilon)^3$, $k^\varepsilon \in L^\infty(\omega)$ *et* $k^\varepsilon \geq 0$ *presque partout sur* ω*. Alors, il existe un et un seul* $(\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon) \in V^\varepsilon$ *satisfaisant le problème (2.2.2).*

Preuve. La forme bilinéaire $\mathcal{A}(.,.)$ est coercitive sur $V^\varepsilon \times V^\varepsilon$. En effet, soit $(\mathbf{v}_1^\varepsilon, \mathbf{v}_2^\varepsilon)$ un élément de V^ε. Par l'inégalité de Korn, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\left(\left(\mathbf{v}_1^\varepsilon, \mathbf{v}_2^\varepsilon\right), \left(\mathbf{v}_1^\varepsilon, \mathbf{v}_2^\varepsilon\right)\right) &\geq 2\mu_1 \int_{\Omega_1^\varepsilon} d_{ij}\left(\mathbf{v}_1^\varepsilon\right) d_{ij}\left(\mathbf{v}_1^\varepsilon\right) dx + 2\mu_2 \int_{\Omega_2^\varepsilon} d_{ij}\left(\mathbf{v}_2^\varepsilon\right) d_{ij}\left(\mathbf{v}_2^\varepsilon\right) dx \\
&\geq 2C_K \left(\mu_1 \left\|\mathbf{v}_1^\varepsilon\right\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)}^2 + \mu_2 \left\|\mathbf{v}_2^\varepsilon\right\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)}^2\right) \\
&\geq 2\mu_- C_k \left\|\left(\mathbf{v}_1^\varepsilon, \mathbf{v}_2^\varepsilon\right)\right\|_{V^\varepsilon}^2,
\end{aligned}$$

où $C_k > 0$, est la constante de Korn, et $\mu_- = \min(\mu_1, \mu_2)$.

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{A}\left(\left(\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon\right), \left(\mathbf{v}_1^\varepsilon, \mathbf{v}_2^\varepsilon\right)\right)\right| \\
\leq\ & \sum_{1 \leq l \leq 2} \left(2\mu_l \int_{\Omega_l^\varepsilon} \left|d_{ij}\left(\mathbf{u}_l^\varepsilon\right) d_{ij}\left(\mathbf{v}_l^\varepsilon\right)\right| dx + \lambda_l \int_{\Omega_l^\varepsilon} \left|\operatorname{div}\left(\mathbf{u}_l^\varepsilon\right) \operatorname{div}\left(\mathbf{v}_l^\varepsilon\right)\right| dx\right) \\
\leq\ & \sum_{1 \leq l \leq 2} \left(2\mu_l \left\|\mathbf{u}_l^\varepsilon\right\|_{1,\Omega_l^\varepsilon} \left\|\mathbf{v}_l^\varepsilon\right\|_{1,\Omega_l^\varepsilon} + \lambda_l \left\|\mathbf{u}_l^\varepsilon\right\|_{1,\Omega_l^\varepsilon} \left\|\mathbf{v}_l^\varepsilon\right\|_{1,\Omega_l^\varepsilon}\right) \\
\leq\ & C \left\|\left(\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon\right)\right\|_{V^\varepsilon} \left\|\left(\mathbf{v}_1^\varepsilon, \mathbf{v}_2^\varepsilon\right)\right\|_{V^\varepsilon},
\end{aligned}$$

pour $C = \max_{1 \leq l \leq 2} (2\mu_l + \lambda_l)$

La forme bilinéaire $\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ est continue et coercitive sur $V^\varepsilon \times V^\varepsilon$, de plus j est une fonction convexe et continue sur V^ε. Alors il existe un unique solution $(\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon)$ dans V^ε satisfaisant l'inégalité variationnelle (2.2.2). ■

2.3 Analyse asymptotique du problème

Cette section est consacrée à l'étude asymptotique du déplacement $\mathbf{u}^\varepsilon = (\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon)$, solution de notre problème variationnel. Nous effectuons un changement d'échelle, le problème initial posé sur le domaine $\Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$ qui dépend d'un petit paramètre ε se ramène à un nouveau problème équivalent posé sur le domaine fixe $\Omega_1 \cup \Omega_2$ qui est indépendant de ε. Pour cela, on introduit un changement de la variable $z = \dfrac{x_3}{\varepsilon}$. Donc pour (x', x_3) dans $\Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$, on a (x', z) dans $\Omega_1 \cup \Omega_2$, tel que

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{(x', z) \in \mathbb{R}^3, (x', 0) \in \omega\ ,\ \ 0 < z < h(x')\}, \\
\Omega_2 &= \{(x', z) \in \mathbb{R}^3, (x', 0) \in \omega\ ,\ -h(x') < z < 0\}.
\end{aligned}$$

On note $\partial\Omega_l = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_l \cup \bar{\Gamma}_{L_l}$, $l = 1, 2$, sa frontière.

Nous définissons maintenant sur Ω_l de nouvelles inconnues

$$\begin{cases} \hat{u}^{\varepsilon}_{li}(x', z) = u^{\varepsilon}_{li}(x', x_3), \ i = 1, 2, \\ \hat{u}^{\varepsilon}_{l3}(x', z) = \varepsilon^{-1} u^{\varepsilon}_{l3}(x', x_3). \end{cases} \quad l = 1, 2 \tag{2.3.1}$$

Pour les données du problème (P^{ε}), on suppose qu'elles dépendent de ε de la manière suivante

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{f}}_l(x', z) = \varepsilon^2 \mathbf{f}^{\varepsilon}_l(x', x_3), \\ \hat{k} = \varepsilon k^{\varepsilon}, \\ \hat{g}_l(x', z) = g^{\varepsilon}_l(x', x_3), \end{cases} \quad l = 1, 2 \tag{2.3.2}$$

avec $\hat{\mathbf{f}}_l$, $\hat{k}$ et $\hat{g}_l$ ne dépendant pas de ε.

Soit $\hat{G}(x', z)$ tel que

$$G^{\varepsilon} = (G^{\varepsilon}_l)_{1 \le l \le 2}, \ \hat{G}_l = \hat{g}_l \ \text{ sur } \partial\Omega_l.$$

Le vecteur G^{ε}_l introduit précédemment sera défini de la manière suivante

$$\begin{cases} \hat{G}_{li}(x', z) = G^{\varepsilon}_{li}(x', x_3), \ i = 1, 2, \\ \hat{G}_{l3}(x', z) = \varepsilon^{-1} G^{\varepsilon}_{l3}(x', x_3). \end{cases} \quad l = 1, 2 \tag{2.3.3}$$

Formulation variationnelle du problème dans $\Omega_1 \cup \Omega_2$

Nous introduisons maintenant le cadre fonctionnel sur $\Omega_1 \cup \Omega_2$ comme ce qui suit

$$\begin{aligned} V(\Omega_l) &= \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega_l)^3 : \ \mathbf{v} = 0 \text{ on } \Gamma_l \cup \Gamma_{L_l} \right\}, \\ V &= \left\{ (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in V(\Omega_1) \times V(\Omega_2) : \ \mathbf{v}_1.\mathbf{n} - \mathbf{v}_2.\mathbf{n} = 0 \text{ on } \omega \right\}, \\ H_z(\Omega_l) &= \left\{ \overline{v}_l = (v_{l1}, v_{l2}) \in L^2(\Omega_l)^2 : \frac{\partial \overline{v}_{li}}{\partial z} \in L^2(\Omega_l), i = 1, 2 \text{ et } \ \overline{v}_l = 0 \text{ sur } \Gamma_l \right\}, \\ H_z &= H_z(\Omega_1) \times H_z(\Omega_2), \\ \overline{V(\Omega_l)} &= \left\{ \overline{\varphi}_l \in H^1(\Omega_l)^2 : \overline{\varphi}_l = (\varphi_{l1}, \varphi_{l2}), \ \overline{\varphi}_{li} = 0 \text{ sur } \Gamma_l \cup \Gamma_{L_l} \text{ pour } i = 1, 2 \right\}, \end{aligned}$$

$H_z(\Omega_l)$, $l = 1, 2$, est un espace de Banach pour la norme

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_l\|_{H_z(\Omega_l)} &= \left\{ \sum_{i=1}^{2} \left(\|v_{li}\|^2_{0,\Omega_l} + \left\| \frac{\partial v_{li}}{\partial z} \right\|^2_{0,\Omega_l} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \|(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\|_{H_z} &= \left(\|\mathbf{v}_1\|^2_{H_z(\Omega_1)} + \|\mathbf{v}_2\|^2_{H_z(\Omega_2)} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En multipliant (2.2.2) par ε et en passant au domaine fixe $\Omega_1 \cup \Omega_2$ on montre que le problème variationnel est équivalent au problème suivant

$$\begin{cases} PV : \text{Trouver } (\hat{\mathbf{u}}_1^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}_2^\varepsilon) \in V, \text{ telle que} \\ \qquad \mathcal{A}\left((\hat{\mathbf{u}}_1^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}_2^\varepsilon), (\hat{\varphi}_1 - \hat{\mathbf{u}}_1^\varepsilon, \hat{\varphi}_2 - \hat{\mathbf{u}}_2^\varepsilon)\right) + \hat{J}(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) - \\ \qquad -\hat{J}(\hat{\mathbf{u}}_1^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}_2^\varepsilon) \geq \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_1^\varepsilon} \hat{\mathbf{f}}_{1i} (\hat{\varphi}_{1i} - \hat{\mathbf{u}}_{1i}^\varepsilon)\, dx + \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} \hat{\mathbf{f}}_{13} (\hat{\varphi}_{13} - \hat{\mathbf{u}}_{13}^\varepsilon)\, dx + \\ \qquad + \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_2^\varepsilon} \hat{\mathbf{f}}_{2i} (\hat{\varphi}_{2i} - \hat{\mathbf{u}}_{2i}^\varepsilon)\, dx + \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} \hat{\mathbf{f}}_{23} (\hat{\varphi}_{23} - \hat{\mathbf{u}}_{23}^\varepsilon)\, dx, \quad \forall (\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) \in V \end{cases} \tag{2.3.4}$$

où

$$\hat{J}(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) = \int_\omega \hat{k} \left|(\hat{\varphi}_{1\tau} - \hat{\varphi}_{2\tau} - s)\right| dx'$$

et

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}\left((\hat{\mathbf{u}}_1^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}_2^\varepsilon), (\hat{\varphi}_1 - \hat{\mathbf{u}}_1^\varepsilon, \hat{\varphi}_2 - \hat{\mathbf{u}}_2^\varepsilon)\right) \\ = \; & \varepsilon^2 \sum_{1 \leq i,j,l \leq 2} \left\{ \mu_l \int_{\Omega_l} \left(\frac{\partial \hat{u}_{li}^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_{lj}^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{\varphi}_{li} - \hat{u}_{li}^\varepsilon)\, dx' dz \right\} + \\ & + \sum_{1 \leq i,l \leq 2} \left\{ \mu_l \int_{\Omega_l} \left(\frac{\partial \hat{u}_{li}^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_{l3}^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_{li} - \hat{u}_{li}^\varepsilon) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\varphi}_{l3} - \hat{u}_{l3}^\varepsilon) \right] dx' dz \right\} + \\ & + \sum_{1 \leq l \leq 2} \left\{ 2\mu_l \varepsilon^2 \int_{\Omega_l} \frac{\partial \hat{u}_{l3}^\varepsilon}{\partial z} . \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\varphi}_{l3} - \hat{u}_{l3}^\varepsilon)\, dx dz + \lambda_l \varepsilon^2 \int_{\Omega_l} \operatorname{div}(\hat{u}_l^\varepsilon) . \operatorname{div}(\hat{\varphi}_l - \hat{u}_l^\varepsilon)\, dx' dz \right\}. \end{aligned}$$

2.4 Estimation à priori

Nous essayons maintenant d'étudier les estimations à priori sur $(\hat{\mathbf{u}}_1^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}_2^\varepsilon)$. Pour cela nous avons besoin d'établir des lemmes qui seront utilisés dans la suite de ce travail.

Lemme 2.4.1 *(Inégalité de Poincaré). On rappelle que* $0 < h(x') < h^*$, $\forall x' \in \omega$, *on a l'inégalité suivante*

$$\|(\hat{u}_{1i}^\varepsilon, \hat{u}_{2i}^\varepsilon)\|_{0,\Omega_1 \times \Omega_2} \leq h^* \left\| \left(\frac{\partial \hat{u}_{1i}^\varepsilon}{\partial z}, \frac{\partial \hat{u}_{2i}^\varepsilon}{\partial z} \right) \right\|_{0,\Omega_1 \times \Omega_2}, \; i = 1, 2, 3.$$

Preuve. En observant que pour $x = (x', z) \in \omega \times]0, h(x')[$;

$$\hat{u}^{\varepsilon}_{1i}(x', \xi) = -\int_z^{h(x')} \frac{\partial \hat{u}^{\varepsilon}_{1i}}{\partial \zeta}(x', \zeta)\, d\zeta \text{ et } \hat{u}^{\varepsilon}_{2i}(x', -\xi) = -\int_z^{h(x')} \frac{\partial \hat{u}^{\varepsilon}_{2i}}{\partial \zeta}(x', -\zeta)\, d\zeta,$$

(car $\hat{u}^{\varepsilon}_{1i}(x', h(x')) = 0$ et $\hat{u}^{\varepsilon}_{2i}(x', -h(x')) = 0$) et par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on voit que

$$\begin{aligned} \left|\hat{u}^{\varepsilon}_{1i}(x', \xi)\right|^2 + \left|\hat{u}^{\varepsilon}_{2i}(x', -\xi)\right|^2 &= \left|-\int_z^{h(x')} \frac{\partial \hat{u}^{\varepsilon}_{1i}}{\partial \zeta}(x', \zeta)\, d\zeta\right|^2 + \left|-\int_z^{h(x')} \frac{\partial \hat{u}^{\varepsilon}_{2i}}{\partial \zeta}(x', -\zeta)\, d\zeta\right|^2 \\ &\leq h^* \int_0^{h(x')} \left|\frac{\partial \hat{u}^{\varepsilon}_{1i}}{\partial \zeta}(x', \zeta)\right|^2 d\zeta + h^* \int_0^{h(x')} \left|\frac{\partial \hat{u}^{\varepsilon}_{2i}}{\partial \zeta}(x', -\zeta)\right|^2 d\zeta. \end{aligned}$$

Nous intégrons cette inéquation par rapport à z de 0 à $h(x')$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^{h(x')} \left|\hat{u}^{\varepsilon}_{1i}(x', \xi)\right|^2 d\zeta + \int_0^{h(x')} \left|\hat{u}^{\varepsilon}_{2i}(x', -\xi)\right|^2 d\zeta \\ \leq\ & (h^*)^2 \int_0^{h(x')} \left|\frac{\partial \hat{u}^{\varepsilon}_{1i}}{\partial \zeta}(x', \zeta)\right|^2 d\zeta + (h^*)^2 \int_0^{h(x')} \left|\frac{\partial \hat{u}^{\varepsilon}_{2i}}{\partial \zeta}(x', -\zeta)\right|^2 d\zeta, \end{aligned}$$

on utilise le changement de variable dans le deuxième terme, puis en intégrant sur ω, on trouve

$$\begin{aligned} &\int_\omega \int_0^{h(x')} \left|\hat{u}^{\varepsilon}_{1i}(x', \xi)\right|^2 d\zeta dx' + \int_\omega \int_{-h(x')}^0 \left|\hat{u}^{\varepsilon}_{2i}(x', \xi)\right|^2 d\zeta dx' \\ \leq\ & (h^*)^2 \left(\int_\omega \int_0^{h(x')} \left|\frac{\partial \hat{u}^{\varepsilon}_{1i}}{\partial \zeta}(x', \zeta)\right|^2 d\zeta dx' + \int_\omega \int_{-h(x')}^0 \left|\frac{\partial \hat{u}^{\varepsilon}_{2i}}{\partial \zeta}(x', \zeta)\right|^2 d\zeta dx' \right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\|\hat{u}^{\varepsilon}_{1i}\|^2_{0,\Omega_1} + \|\hat{u}^{\varepsilon}_{2i}\|^2_{0,\Omega_2} \leq (h^*)^2 \left(\left\|\frac{\partial \hat{u}^{\varepsilon}_{1i}}{\partial z}\right\|^2_{0,\Omega_1} + \left\|\frac{\partial \hat{u}^{\varepsilon}_{2i}}{\partial z}\right\|^2_{0,\Omega_2} \right)$$

d'où

$$\|(\hat{u}^{\varepsilon}_{1i}, \hat{u}^{\varepsilon}_{2i})\|_{0,\Omega_1\times\Omega_2} \leq h^* \left\| \left(\frac{\partial \hat{u}^{\varepsilon}_{1i}}{\partial z}, \frac{\partial \hat{u}^{\varepsilon}_{2i}}{\partial z} \right) \right\|_{0,\Omega_1\times\Omega_2}.$$

■

Lemme 2.4.2 *(Inégalité de Korn [14]). Pour tout $(\varphi_1, \varphi_2) \in V^\varepsilon$, on a*

$$\|\nabla \varphi_l\|_{0,\Omega^\varepsilon_l} \leq C \|D(\varphi_l)\|_{0,\Omega^\varepsilon_l}, l = 1, 2$$

où C est une constante positive qui ne dépend pas de ε et de φ.

Théorème 2.4.1 *Étant donnés* $(\mathbf{f}_1^\varepsilon, \mathbf{f}_2^\varepsilon) \in L^2(\Omega_1^\varepsilon)^3 \times L^2(\Omega_2^\varepsilon)^3$ *et* k^ε *une fonction positive dans* $L^\infty(\omega)$*, il existe une constante* $c > 0$ *qui ne dépend pas de* ε *telle que*

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \sum_{1\le i,j\le 2} \left\| \left(\frac{\partial \hat{u}_{1i}^\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial \hat{u}_{2i}^\varepsilon}{\partial x_j} \right) \right\|_{0,\Omega_1\times\Omega_2}^2 + \varepsilon^2 \left\| \left(\frac{\partial \hat{u}_{13}^\varepsilon}{\partial z}, \frac{\partial \hat{u}_{23}^\varepsilon}{\partial z} \right) \right\|_{0,\Omega_1\times\Omega_2}^2 + \\ + \sum_{1\le i\le 2} \left(\left\| \left(\frac{\partial \hat{u}_{1i}^\varepsilon}{\partial z}, \frac{\partial \hat{u}_{2i}^\varepsilon}{\partial z} \right) \right\|_{0,\Omega_1\times\Omega_2}^2 + \varepsilon^4 \left\| \left(\frac{\partial \hat{u}_{13}^\varepsilon}{\partial x_i}, \frac{\partial \hat{u}_{23}^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \right\|_{0,\Omega_1\times\Omega_2}^2 \right) \le c\end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Preuve. Soit $(\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon)$ la solution du problème (2.2.2), donc

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}\left((\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon), (\varphi_1 - \mathbf{u}_1^\varepsilon, \varphi_2 - \mathbf{u}_2^\varepsilon)\right) + J^\varepsilon(\varphi_1, \varphi_2) - \\ -J^\varepsilon(\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon) \ \ge \ & \int_{\Omega_1^\varepsilon} \mathbf{f}_1^\varepsilon \cdot (\varphi_1 - \mathbf{u}_1^\varepsilon)\, dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \mathbf{f}_2^\varepsilon \cdot (\varphi_2 - \mathbf{u}_2^\varepsilon)\, dx, \ \forall (\varphi_1, \varphi_2) \in V^\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\left((\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon), (\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon)\right) \le \mathcal{A}\left((\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon), (\varphi_1, \varphi_2)\right) + J^\varepsilon(\varphi_1, \varphi_2) - \\ -J^\varepsilon(\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon) + \int_{\Omega_1^\varepsilon} \mathbf{f}_1^\varepsilon \cdot \mathbf{u}_1^\varepsilon dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \mathbf{f}_2^\varepsilon \cdot \mathbf{u}_2^\varepsilon dx - \int_{\Omega_1^\varepsilon} \mathbf{f}_1^\varepsilon \cdot \varphi_1 dx - \\ - \int_{\Omega_2^\varepsilon} \mathbf{f}_2^\varepsilon \cdot \varphi_2 dx, \ \forall (\varphi_1, \varphi_2) \in V^\varepsilon, \end{aligned}$$

et comme $J^\varepsilon(\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon) \ge 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\left((\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon), (\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon)\right) \le \mathcal{A}\left((\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon), (\varphi_1, \varphi_2)\right) + J^\varepsilon(\varphi_1, \varphi_2) + \\ + \int_{\Omega_1^\varepsilon} \mathbf{f}_1^\varepsilon \cdot \mathbf{u}_1^\varepsilon dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \mathbf{f}_2^\varepsilon \cdot \mathbf{u}_2^\varepsilon dx - \int_{\Omega_1^\varepsilon} \mathbf{f}_1^\varepsilon \cdot \varphi_1 dx - \\ - \int_{\Omega_2^\varepsilon} \mathbf{f}_2^\varepsilon \cdot \varphi_2 dx, \ \forall (\varphi_1, \varphi_2) \in V^\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

D'après la coercivité de $\mathcal{A}(.,.)$, il existe C_K indépendant de ε telle que

$$C_K \left(2\mu_1 \left\| \nabla \mathbf{u}_1^\varepsilon \right\|_{0,\Omega_1^\varepsilon}^2 + 2\mu_2 \left\| \nabla \mathbf{u}_2^\varepsilon \right\|_{0,\Omega_2^\varepsilon}^2 \right) \le \mathcal{A}\left((\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon), (\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon)\right). \tag{2.4.3}$$

En appliquant les inégalités de Hölder et de Young, on trouve la majoration suivante

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}\left(\left(\mathbf{u}_1^\varepsilon,\mathbf{u}_2^\varepsilon\right),\left(\varphi_1,\varphi_2\right)\right)\\
\leq\ & \sum_{1\leq l\leq 2}\left\{\int_{\Omega_l^\varepsilon}2\mu_l\left|d_{ij}\left(\mathbf{u}_l^\varepsilon\right)\right|\left|d_{ij}\left(\varphi_l\right)\right|dx+\lambda_l\int_{\Omega_l^\varepsilon}\left|\operatorname{div}\left(\mathbf{u}_l^\varepsilon\right)\right|\left|\operatorname{div}\left(\varphi_l\right)\right|dx\right\}\\
\leq\ & \sum_{1\leq l\leq 2}\left\{\left(\int_{\Omega_l^\varepsilon}\sqrt{\frac{\mu_l C_K}{2}}\left|d_{ij}\left(\mathbf{u}_l^\varepsilon\right)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega_l^\varepsilon}\frac{2\sqrt{2\mu_l}}{\sqrt{C_K}}\left|d_{ij}\left(\varphi_l\right)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right\}+\\
&+\sum_{1\leq l\leq 2}\left\{\left(\int_{\Omega_l^\varepsilon}\frac{\sqrt{\mu_l C_K}}{2}\left|\operatorname{div}\left(\mathbf{u}_l^\varepsilon\right)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega_l^\varepsilon}\frac{2\lambda_l}{\sqrt{\mu_l C_K}}\left|\operatorname{div}\left(\varphi_l\right)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\\
\leq\ & \sum_{1\leq l\leq 2}\left(\frac{\mu_l C_K}{4}\left\|d_{ij}\left(\mathbf{u}_l^\varepsilon\right)\right\|_{L^2\left(\Omega_l^\varepsilon\right)}^2+\frac{4\mu_l}{C_K}\left\|d_{ij}\left(\varphi_l\right)\right\|_{L^2\left(\Omega_l^\varepsilon\right)}^2\right)+\\
&+\sum_{1\leq l\leq 2}\left(\frac{\mu_l C_K}{8}\int_{\Omega_l^\varepsilon}\left|\operatorname{div}\left(\mathbf{u}_l^\varepsilon\right)\right|^2dx+\frac{2\left(\lambda_l\right)^2}{\mu_l C_K}\int_{\Omega_l^\varepsilon}\left|\operatorname{div}\left(\varphi_l\right)\right|^2dx\right),
\end{aligned}$$

et comme $\sum_{1\leq i,j\leq 2}\left|d_{ij}\left(\mathbf{v}\right)\right|^2\leq\left|\nabla\mathbf{v}\right|^2$ et $\left|\operatorname{div}\left(\mathbf{v}\right)\right|^2\leq\left|\nabla\mathbf{v}\right|^2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\left(\left(\mathbf{u}_1^\varepsilon,\mathbf{u}_2^\varepsilon\right),\left(\varphi_1,\varphi_2\right)\right)\leq\sum_{1\leq l\leq 2}&\left\{\frac{\mu_l C_K}{4}\left\|\nabla\mathbf{u}_l^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_l^\varepsilon}^2+\frac{4\mu_l}{C_K}\left\|\nabla\varphi_l\right\|_{0,\Omega_l^\varepsilon}^2+\right.\\
&\left.+\frac{\mu_l C_K}{8}\left\|\nabla\mathbf{u}_l^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_l^\varepsilon}^2+\frac{2\left(\lambda_l\right)^2}{\mu_l C_K}\left\|\nabla\varphi_l\right\|_{0,\Omega_l^\varepsilon}^2\right\}.
\end{aligned}\tag{2.4.4}$$

En appliquant les inégalités de Cauchy-Schwartz et de Young, on trouve

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\Omega_1^\varepsilon}\mathbf{f}_1^\varepsilon\cdot\mathbf{u}_1^\varepsilon dx+\int_{\Omega_2^\varepsilon}\mathbf{f}_2^\varepsilon\cdot\mathbf{u}_2^\varepsilon dx\right|\\
\leq\ & \left\|\mathbf{f}_1^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_1^\varepsilon}\left\|\mathbf{u}_1^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_1^\varepsilon}+\left\|\mathbf{f}_2^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_2^\varepsilon}\left\|\mathbf{u}_2^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_2^\varepsilon}\\
\leq\ & \varepsilon h^*\left\|\nabla\mathbf{u}_1^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_1^\varepsilon}\left\|\mathbf{f}_1^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_1^\varepsilon}+\varepsilon h^*\left\|\nabla\mathbf{u}_2^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_2^\varepsilon}\left\|\mathbf{f}_2^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_2^\varepsilon}\\
\leq\ & \frac{\mu_1 C_K}{2}\left\|\nabla\mathbf{u}_1^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_1^\varepsilon}^2+\frac{\left(\varepsilon h^*\right)^2}{2\mu_1 C_K}\left\|\nabla\mathbf{f}_1^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_1^\varepsilon}^2+\\
&+\frac{\mu_2 C_K}{2}\left\|\nabla\mathbf{u}_2^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_2^\varepsilon}^2+\frac{\left(\varepsilon h^*\right)^2}{2\mu_2 C_K}\left\|\nabla\mathbf{f}_2^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_2^\varepsilon}^2\ .
\end{aligned}\tag{2.4.5}$$

De même

$$\left|\int_{\Omega_1^\varepsilon}\mathbf{f}_1^\varepsilon\cdot\varphi_1 dx+\int_{\Omega_2^\varepsilon}\mathbf{f}_2^\varepsilon\cdot\varphi_2 dx\right|\leq\sum_{1\leq l\leq 2}\left(\frac{\mu_l C_K}{2}\left\|\nabla\varphi_l\right\|_{0,\Omega_l^\varepsilon}^2+\frac{\left(\varepsilon h^*\right)^2}{2\mu_l C_K}\left\|\nabla\mathbf{f}_l^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_l^\varepsilon}^2\right).\tag{2.4.6}$$

En utilisant (2.4.3)-(2.4.6), et en choisissant $\varphi_1 = G_1^\varepsilon$ et $\varphi_2 = G_2^\varepsilon$, l'inégalité (2.4.2) devient comme suit

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq l\leq 2} 2\mu_l C_K \left\|\nabla \mathbf{u}_l^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_l^\varepsilon}^2 &\leq \mathcal{A}\left(\left(\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon\right), \left(\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon\right)\right) \\
&\leq \sum_{1\leq l\leq 2} \left\{ \frac{\mu_l C_K}{4} \left\|\nabla \mathbf{u}_l^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_l^\varepsilon}^2 + \frac{4\mu_l}{C_K} \left\|\nabla G_l^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_l^\varepsilon}^2 + \frac{\mu_l C_K}{8} \left\|\nabla \mathbf{u}_l^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_l^\varepsilon}^2 + \right. \\
&\quad + \frac{2\left(\lambda_l\right)^2}{\mu_l C_K} \left\|\nabla G_l^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_l^\varepsilon}^2 + \frac{\mu_l C_K}{2} \left\|\nabla \mathbf{u}_l^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_l^\varepsilon}^2 + \frac{\left(\varepsilon h^*\right)^2}{2\mu_l C_K} \left\|\nabla \mathbf{f}_l^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_l^\varepsilon}^2 + \\
&\quad \left. + \frac{\mu_l C_K}{2} \left\|\nabla G_l^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_l^\varepsilon}^2 + \frac{\left(\varepsilon h^*\right)^2}{2\mu_l C_K} \left\|\nabla \mathbf{f}_l^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_l^\varepsilon}^2 \right\}
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\sum_{1\leq l\leq 2} \frac{9}{8}\mu_l C_K \left\|\nabla \mathbf{u}_l^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_l^\varepsilon}^2 \leq \sum_{1\leq l\leq 2} \left\{ \frac{\left(\varepsilon h^*\right)^2}{\mu_l C_K} \left\|\nabla \mathbf{f}_l^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_l^\varepsilon}^2 + \left(\frac{2\left(\lambda_l\right)^2}{\mu_l C_K} + \frac{\mu_l C_K}{2} + \frac{4\mu_l}{C_K} \right) \left\|\nabla G_l^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_l^\varepsilon}^2 \right\}. \tag{2.4.7}$$

Pour $0 < \varepsilon < 1$, on voit que

$$\varepsilon^2 \left\|\mathbf{f}_l^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_l^\varepsilon}^2 = \varepsilon^{-1} \left\|\hat{\mathbf{f}}_l\right\|_{0,\Omega_l}^2 \quad \text{et} \quad \left\|\frac{\partial u_{l3}^\varepsilon}{\partial x_3}\right\|_{0,\Omega_l^\varepsilon}^2 = \varepsilon^{-1} \left\|\frac{\partial \hat{u}_{l3}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{0,\Omega_l}^2 .$$

En multipliant (2.4.7) par ε, on trouve

$$\begin{aligned}
& C_K \left(\frac{9}{8}\mu_1 \varepsilon \left\|\nabla \mathbf{u}_1^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_1^\varepsilon}^2 + \frac{9}{8}\mu_2 \varepsilon \left\|\nabla \mathbf{u}_2^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_2^\varepsilon}^2 \right) \\
\leq\ & \frac{\varepsilon^3\left(h^*\right)^2}{\mu_1 C_K} \left\|\nabla \mathbf{f}_1^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_1^\varepsilon}^2 + \left(\frac{2\left(\lambda_1\right)^2}{\mu_1 C_K} + \frac{\mu_1 C_K}{2} + \frac{4\mu_1}{C_K} \right) \varepsilon \left\|\nabla G_1^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_1^\varepsilon}^2 + \\
& + \frac{\varepsilon^3\left(h^*\right)^2}{\mu_2 C_K} \left\|\nabla \mathbf{f}_2^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_2^\varepsilon}^2 + \left(\frac{2\left(\lambda_2\right)^2}{\mu_2 C_K} + \frac{\mu_2 C_K}{2} + \frac{4\mu_2}{C_K} \right) \varepsilon \left\|\nabla G_2^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_2^\varepsilon}^2 \\
\leq\ & \frac{\left(h^*\right)^2}{\mu_1 C_K} \left\|\nabla \hat{\mathbf{f}}_1\right\|_{0,\Omega_1}^2 + \left(\frac{2\left(\lambda_1\right)^2}{\mu_1 C_K} + \frac{\mu_1 C_K}{2} + \frac{4\mu_1}{C_K} \right) \varepsilon \left\|\nabla \hat{G}_1\right\|_{0,\Omega_1}^2 + \\
& + \frac{\left(h^*\right)^2}{\mu_2 C_K} \left\|\nabla \hat{\mathbf{f}}_2\right\|_{0,\Omega_2}^2 + \left(\frac{2\left(\lambda_2\right)^2}{\mu_2 C_K} + \frac{\mu_2 C_K}{2} + \frac{4\mu_2}{C_K} \right) \varepsilon \left\|\nabla \hat{G}_2\right\|_{0,\Omega_2}^2 .
\end{aligned}$$

Pour $0<\varepsilon<1$, on voit que

$$\begin{aligned}
& C_K \left(\frac{9}{8}\mu_1\varepsilon\left\|\nabla\mathbf{u}_1^\varepsilon\right\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon}+\frac{9}{8}\mu_2\varepsilon\left\|\nabla\mathbf{u}_2^\varepsilon\right\|^2_{0,\Omega_2^\varepsilon}\right) \\
\leq\ & \frac{(h^*)^2}{\mu_1 C_K}\left\|\nabla\hat{\mathbf{f}}_1\right\|^2_{0,\Omega_1}+\left(\frac{2(\lambda_1)^2}{\mu_1 C_K}+\frac{\mu_1 C_K}{2}+\frac{4\mu_1}{C_K}\right)\left\|\nabla\hat{G}_1\right\|^2_{0,\Omega_1}+ \\
& +\frac{(h^*)^2}{\mu_2 C_K}\left\|\nabla\hat{\mathbf{f}}_2\right\|^2_{0,\Omega_2}+\left(\frac{2(\lambda_2)^2}{\mu_2 C_K}+\frac{\mu_2 C_K}{2}+\frac{4\mu_2}{C_K}\right)\left\|\nabla\hat{G}_2\right\|^2_{0,\Omega_2}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
& \frac{9}{8}\mu_- C_K\ \varepsilon\left(\left\|\nabla\mathbf{u}_1^\varepsilon\right\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon}+\left\|\nabla\mathbf{u}_2^\varepsilon\right\|^2_{0,\Omega_2^\varepsilon}\right) \\
\leq\ & \frac{(h^*)^2}{\mu_- C_K}\left\|\nabla\hat{\mathbf{f}}_1\right\|^2_{0,\Omega_1}+\left(\frac{2(\lambda_+)^2}{\mu_- C_K}+\frac{\mu_+ C_K}{2}+\frac{4\mu_+}{C_K}\right)\left\|\nabla\hat{G}_1\right\|^2_{0,\Omega_1}+ \\
& +\frac{(h^*)^2}{\mu_- C_K}\left\|\nabla\hat{\mathbf{f}}_2\right\|^2_{0,\Omega_2}+\left(\frac{2(\lambda_+)^2}{\mu_- C_K}+\frac{\mu_+ C_K}{2}+\frac{4\mu_+}{C_K}\right)\left\|\nabla\hat{G}_2\right\|^2_{0,\Omega_2}
\end{aligned}$$

avec $\mu_-=\min(\mu_1,\mu_2)$, $\mu_+=\max(\mu_1,\mu_2)$ et $\lambda_+=\max(\lambda_1,\lambda_2)$.

donc

$$\begin{aligned}
& \frac{9}{8}\mu_- C_K\ \varepsilon\left\|(\nabla\mathbf{u}_1^\varepsilon,\nabla\mathbf{u}_2^\varepsilon)\right\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon}\leq\frac{(h^*)^2}{\mu_- C_K}\left\|\left(\nabla\hat{\mathbf{f}}_1,\nabla\hat{\mathbf{f}}_2\right)\right\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2}+ \\
& +\left(\frac{(\lambda_+)^2}{\mu_- C_K}+\frac{\mu_+ C_K}{2}+\frac{4\mu_+}{C_K}\right)\left\|\left(\nabla\hat{G}_1,\nabla\hat{G}_2\right)\right\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2}
\end{aligned}$$

donc

$$\varepsilon\left\|(\nabla\mathbf{u}_1^\varepsilon,\nabla\mathbf{u}_2^\varepsilon)\right\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon}\leq c$$

où

$$\begin{aligned}
c &= \frac{8}{9\mu_- C_K}c_0; \\
c_0 &= \frac{(h^*)^2}{\mu_- C_K}\left\|\left(\nabla\hat{\mathbf{f}}_1,\nabla\hat{\mathbf{f}}_2\right)\right\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2}+\left(\frac{(\lambda_+)^2}{\mu_- C_K}+\frac{\mu_+ C_K}{2}+\frac{4\mu_+}{C_K}\right)\left\|\left(\nabla\hat{G}_1,\nabla\hat{G}_2\right)\right\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2}.
\end{aligned}$$

En observant que pour ε

$$\begin{aligned}
\varepsilon\left\|(\nabla\mathbf{u}_1^\varepsilon,\nabla\mathbf{u}_2^\varepsilon)\right\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon} &= \varepsilon^2\sum_{1\leq i,j\leq 2}\left\|\left(\frac{\partial\hat{u}_{1i}^\varepsilon}{\partial x_j},\frac{\partial\hat{u}_{2i}^\varepsilon}{\partial x_j}\right)\right\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2}+\varepsilon^2\left\|\left(\frac{\partial\hat{u}_{13}^\varepsilon}{\partial z},\frac{\partial\hat{u}_{23}^\varepsilon}{\partial z}\right)\right\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2}+ \\
& +\sum_{1\leq i\leq 2}\left(\left\|\left(\frac{\partial\hat{u}_{1i}^\varepsilon}{\partial z},\frac{\partial\hat{u}_{2i}^\varepsilon}{\partial z}\right)\right\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2}+\varepsilon^4\left\|\left(\frac{\partial\hat{u}_{13}^\varepsilon}{\partial x_i},\frac{\partial\hat{u}_{23}^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\right\|^2_{0,\Omega_1\times\Omega_2}\right)
\end{aligned}$$

Ce qui montre bien l'inégalité (2.4.1). ■

2.5 Résultat de convergence et problème limite

On a le résultat suivant:

Théorème 2.5.1 *Sous les hypothèses du lemme 2.4.3, il existe* $(u^\star_{1i}, u^\star_{2i})$ *dans* H_z $(i = 1, 2)$ *tel que pour toute sous suite de* $(\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon_1, \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon_2)$ *notée encore* $(\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon_1, \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon_2)$ *on a les résultats de convergence suivants*

$$(\hat{u}^\varepsilon_{1i}, \hat{u}^\varepsilon_{2i}) \rightharpoonup (u^\star_{1i}, u^\star_{2i}), \quad (1 \leq i \leq 2) \quad \textit{faiblement dans } H_z, \tag{2.5.1}$$

$$\left(\varepsilon \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_{1i}}{\partial x_j}, \varepsilon \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_{2i}}{\partial x_j}\right) \rightharpoonup (0,0), \quad (1 \leq i,j \leq 2) \quad \textit{faiblement dans } L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2), \tag{2.5.2}$$

$$\left(\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_{13}}{\partial x_i}, \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_{23}}{\partial x_i}\right) \rightharpoonup (0,0), \quad (1 \leq i \leq 2) \quad \textit{faiblement dans } L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2), \tag{2.5.3}$$

$$\left(\varepsilon \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_{13}}{\partial z}, \varepsilon \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_{23}}{\partial z}\right) \rightharpoonup (0,0) \quad \textit{faiblement dans } L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2), \tag{2.5.4}$$

$$(\varepsilon \hat{u}^\varepsilon_{13}, \varepsilon \hat{u}^\varepsilon_{23}) \rightharpoonup (0,0) \quad \textit{faiblement dans } L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2). \tag{2.5.5}$$

Preuve. D'après le lemme 2.4.3, il existe une constante C indépendante de ε telle que

$$\left\| \left(\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_{1i}}{\partial z}, \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_{2i}}{\partial z} \right) \right\|^2_{0,\Omega_1 \times \Omega_2} \leq C, \qquad i = 1, 2.$$

En utilisant cette estimation avec l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\|(\hat{u}^\varepsilon_{1i}, \hat{u}^\varepsilon_{2i})\|_{0,\Omega_1 \times \Omega_2} \leq h^* \left\| \left(\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_{1i}}{\partial z}, \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_{2i}}{\partial z} \right) \right\|_{0,\Omega_1 \times \Omega_2}, \ i = 1, 2,$$

c'est-à-dire que $(\hat{u}^\varepsilon_{1i}, \hat{u}^\varepsilon_{2i})$ est borné dans H_z pour $i = 1, 2$, ceci implique l'existence de $(u^\star_{1i}, u^\star_{2i})$ dans H_z tel que $(\hat{u}^\varepsilon_{1i}, \hat{u}^\varepsilon_{2i})$ converge faiblement vers $(u^\star_{1i}, u^\star_{2i})$ dans H_z.
D'autre part, grâce au lemme 2.4.3, on a

$$\varepsilon \left\| \left(\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_{1i}}{\partial x_j}, \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_{2i}}{\partial x_j} \right) \right\|_{0,\Omega_1 \times \Omega_2} \leq c$$

alors il existe un élément $w \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ telle que $\left(\varepsilon \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_{1i}}{\partial x_j}, \varepsilon \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_{2i}}{\partial x_j}\right)$ converge faiblement vers w. De plus, il vient de (2.5.1) que $\left(\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_{1i}}{\partial x_j}, \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_{2i}}{\partial x_j}\right)$ converge vers $\left(\frac{\partial \hat{u}^\star_{1i}}{\partial x_j}, \frac{\partial \hat{u}^\star_{2i}}{\partial x_j}\right)$, donc pour tout $\varphi_l \in L^2(\Omega_l)$, on a

$$\int_{\Omega_l} \varepsilon \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_{li}}{\partial x_j} \varphi_l dx dz = \varepsilon \int_{\Omega_l} \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon_{li}}{\partial x_j} \varphi_l dx dz.$$

Lorsque ε tend vers 0, on obtient

$$\int_{\Omega_l} w_l \varphi_l dx dz = 0,$$

et donc $w = 0$ dans $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$. Ce qui donne la convergence faible de (2.5.2).

Aussi les convergences (2.5.3)-(2.5.4) découlent à partir de (2.4.1). Pour démontrer (2.5.5), on utilise l'inégalité de Poincaré avec l'estimation (2.4.1), donc il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend pas de ε telle que

$$\left\| \left(\varepsilon \hat{u}_{13}^{\varepsilon}, \varepsilon \hat{u}_{23}^{\varepsilon} \right) \right\|_{0,\Omega_1 \times \Omega_2} \leq h^* \left\| \left(\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_{13}^{\varepsilon}}{\partial z}, \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_{23}^{\varepsilon}}{\partial z} \right) \right\|_{0,\Omega_1 \times \Omega_2} \leq C,$$

on a donc la convergence de $\left(\varepsilon \hat{u}_{13}^{\varepsilon}, \varepsilon \hat{u}_{23}^{\varepsilon} \right)$ vers une fonction w dans $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ et $\left(\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_{13}^{\varepsilon}}{\partial z}, \varepsilon \frac{\partial \hat{u}_{23}^{\varepsilon}}{\partial z} \right)$ converge faiblement vers $\frac{\partial w}{\partial z}$ dans $L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$. D'après (2.5.4) et l'unicité de la limite faible, on déduit que $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ p.p dans $\Omega_1 \times \Omega_2$, c'est-à-dire que w ne dépend pas de la variable z. D'autre part, $\varepsilon \hat{u}_{l3}^{\varepsilon} \rightharpoonup w_l$ implique $\gamma\left(\varepsilon \hat{u}_{l3}^{\varepsilon} \right) \to \gamma(w_l)$, avec γ est l'application de trace, mais $\gamma\left(\varepsilon \hat{u}_{l3}^{\varepsilon} \right) = \varepsilon \hat{u}_{l3}^{\varepsilon}|_{\partial \Omega_l} = 0$, donc $\gamma(w_l) = w_l = 0$ sur $\partial \Omega_l$, de sorte que $w = 0$ p.p sur $\Omega_1 \times \Omega_2$. ∎

Théorème 2.5.2 *Avec les mêmes hypothèses du théorème 2.5.1,* $\left(\mathbf{u}_1^{\star}, \mathbf{u}_2^{\star} \right)$ *vérifie*

$$\left(-\mu_1 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1^{\star}}{\partial z^2}, -\mu_2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_2^{\star}}{\partial z^2} \right) = \left(\hat{\mathbf{f}}_1, \hat{\mathbf{f}}_2 \right) \text{ dans } L^2(\Omega_1)^2 \times L^2(\Omega_2)^2, \tag{2.5.6}$$

$$\begin{aligned} \mu_1 \sum_{1 \leq i \leq 2} \int_{\Omega_1} \frac{\partial u_{1i}^{\star}}{\partial z} . \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_{1i} - u_{1i}^{\star} \right) dx' dz + \mu_2 \sum_{1 \leq i \leq 2} \int_{\Omega_2} \frac{\partial u_{2i}^{\star}}{\partial z} . \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_{2i} - u_{2i}^{\star} \right) dx' dz + \\ + \hat{J}\left(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2 \right) - \hat{J}\left(\mathbf{u}_1^{\star}, \mathbf{u}_2^{\star} \right) \geq \sum_{1 \leq i \leq 2} \int_{\Omega_1} \hat{f}_{1i} \left(\hat{\varphi}_{1i} - u_{1i}^{\star} \right) dx' dz + \\ + \sum_{1 \leq i \leq 2} \int_{\Omega_2} \hat{f}_{2i} \left(\hat{\varphi}_{2i} - u_{2i}^{\star} \right) dx' dz, \forall \left(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2 \right) \in \overline{V(\Omega_1)} \times \overline{V(\Omega_2)}. \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Preuve. En utilisant les résultats de convergence du théorème 2.5.1, dans l'inéquation variationnelle (2.3.4), et comme J est convexe et semi-continue inférieurement

$\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\inf\int_\omega \hat{k}\left|\left(\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon_{1\tau}-\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon_{2\tau}-s\right)\right|dx \geq \int_\omega \hat{k}\left|\left(\mathbf{u}^\star_1-\mathbf{u}^\star_2-s\right)\right|dx\right)$, on obtient

$$\mu_1\sum_{1\leq i\leq 2}\int\limits_{\Omega_1}\frac{\partial \hat{u}^\star_{1i}}{\partial z}.\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\varphi}_{1i}-\hat{u}^\star_{1i}\right)dx'dz+\mu_2\sum_{1\leq i\leq 2}\int\limits_{\Omega_2}\frac{\partial \hat{u}^\star_{2i}}{\partial z}.\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\varphi}_{2i}-\hat{u}^\star_{2i}\right)dx'dz+$$
$$\hat{J}\left(\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2\right)-\hat{J}\left(\mathbf{u}^\star_1,\mathbf{u}^\star_2\right)\geq\sum_{1\leq i\leq 2}\int\limits_{\Omega_1}\hat{f}_{1i}\left(\hat{\varphi}_{1i}-u^\star_{1i}\right)dx'dz+\sum_{1\leq i\leq 2}\int\limits_{\Omega_2}\hat{f}_{2i}\left(\hat{\varphi}_{2i}-u^\star_{2i}\right)dx'dz,$$
$$\forall\left(\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2\right)\in V.$$

On choisit maintenant $\hat{\varphi}_{1i}=u^\star_{1i}\pm\psi_{1i}$, $\hat{\varphi}_{2i}=u^\star_{2i}\pm\psi_{2i}$ pour $i=1,2$, avec $\left(\psi_{1i},\psi_{2i}\right)_{1\leq i\leq 2}\in H^1_0\left(\Omega_1\right)\times\in H^1_0\left(\Omega_2\right)$, et $\hat{\varphi}_{13}=u^\star_{13}$, $\hat{\varphi}_{23}=u^\star_{23}$, on trouve

$$\begin{aligned}&\mu_1\sum_{1\leq i\leq 2}\int_{\Omega_1}\frac{\partial u^\star_{1i}}{\partial z}.\frac{\partial \psi_{1i}}{\partial z}dx'dz+\mu_2\sum_{1\leq i\leq 2}\int_{\Omega_2}\frac{\partial u^\star_{2i}}{\partial z}.\frac{\partial \psi_{2i}}{\partial z}dx'dz\\ =\;&\sum_{1\leq i\leq 2}\int_{\Omega_1}\hat{f}_{1i}\psi_{1i}dx'dz+\sum_{1\leq i\leq 2}\int_{\Omega_2}\hat{f}_{2i}\psi_{2i}dx'dz.\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned}&-\int_{\Omega_1}\mu_1\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u^\star_{1i}}{\partial z}\right).\psi_{1i}dx'dz-\int_{\Omega_2}\mu_2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u^\star_{2i}}{\partial z}\right).\psi_{2i}dx'dz\\ =\;&\int_{\Omega_1}\hat{f}_{1i}\psi_{1i}dx'dz+\int_{\Omega_2}\hat{f}_{2i}\psi_{2i}dx'dz.\end{aligned}$$

Alors
$$\left\langle\left(-\mu_1\frac{\partial^2 u^\star_{1i}}{\partial z^2}-\hat{f}_{1i}\;,-\mu_2\frac{\partial^2 u^\star_{2i}}{\partial z^2}-\hat{f}_{2i}\;\right),\left(\psi_{1i},\psi_{2i}\right)\right\rangle=0,\;\; i=1,2,$$
$$\forall\left(\psi_{1i},\psi_{2i}\right)\in H^1_0\left(\Omega_1\right)\times\in H^1_0\left(\Omega_2\right),$$

ce qui implique

$$\left(-\mu_1\frac{\partial^2 u^\star_{1i}}{\partial z^2},-\mu_2\frac{\partial^2 u^\star_{2i}}{\partial z^2}\right)=\left(\hat{f}_{1i},\hat{f}_{2i}\right),\;\; i=1,2 \text{ dans } H^{-1}\left(\Omega_1\right)\times H^{-1}\left(\Omega_2\right), \tag{2.5.8}$$

et comme $\left(\hat{f}_{1i},\hat{f}_{2i}\right)\in L^2\left(\Omega_1\right)\times L^2\left(\Omega_2\right)$, alors (6.8) est valable dans $L^2\left(\Omega_1\right)\times L^2\left(\Omega_2\right)$. ■

Théorème 2.5.3 *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent, les traces*

$$s^\star_l=\mathbf{u}^\star_l(x',0),\quad \pi^\star_l\;=\frac{\partial \mathbf{u}^\star_l}{\partial z}(x',0),\;\; l=1,2$$

vérifient

$$\mu_1\pi^\star_1=\mu_2\pi^\star_2 \tag{2.5.9}$$

$$\int_\omega \widehat{k} \ \left(|\psi + s_1^\star - s_2^\star - s| - |s_1^\star - s_2^\star - s|\right) dx' - \int_\omega \mu_l \pi_l^\star \psi dx' \geq 0, \forall \psi \in L^2(\omega)^2 \qquad (2.5.10)$$

et la condition aux limites de Tresca suivante

$$\begin{cases} \mu_l \left|\pi_l^\star\right| < \hat{k} \Rightarrow s_1^\star - s_2^\star = s \\ \mu_l \left|\pi_l^\star\right| = \hat{k} \Rightarrow \exists \beta > 0 \ \textit{tel que} \ s_1^\star - s_2^\star = s + \beta \mu_l \pi_l^\star \end{cases} \quad p.p \ sur \ \ \omega, \qquad (2.5.11)$$

aussi $\pi_l^\star, s_l^\star$ *vérifient l'équation généralisée faible de Reynolds*

$$\int_\omega \left(\widetilde{\mathcal{F}} + \mu_1 \int_0^h \mathbf{u}_1^\star(x', y) dy + \mu_2 \int_{-h}^0 \mathbf{u}_2^\star(x', y) dy \right) .\nabla \psi(x') dx' = 0, \forall \psi \in H^1(\omega) \qquad (2.5.12)$$

où

$$\mathcal{F}_1(x', y) = \int_0^y \int_0^\xi \widehat{\mathbf{f}}_1(x', \theta) d\theta d\xi, \ \mathcal{F}_2(x', y) = \int_y^0 \int_\xi^0 \widehat{\mathbf{f}}_2(x', \theta) d\theta d\xi,$$

$$\mathcal{F}(x', y) = \mathcal{F}_1(x', y) + \mathcal{F}_2(x', -y) \ \textit{ et } \widetilde{\mathcal{F}}(x') = \int_0^h \mathcal{F}(x', y) dy - \ h \mathcal{F}(x', h).$$

Preuve. L'inéquation (2.3.4) s'écrit

$$\varepsilon^2 \sum_{1 \leq i,j,l \leq 2} \left\{ \mu_l \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial \hat{u}_{li}^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_{lj}^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\hat{\varphi}_{li} - \hat{u}_{li}^\varepsilon \right) dx' dz \right\} +$$
$$+ \sum_{1 \leq i,l \leq 2} \left\{ \mu_l \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial \hat{u}_{li}^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_{l3}^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi_{li} - \hat{u}_{li}^\varepsilon \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\hat{\varphi}_{l3} - \hat{u}_{l3}^\varepsilon \right) \right] dx' dz \right\} +$$
$$+ \varepsilon^2 \sum_{1 \leq l \leq 2} \left(2\mu_l \int_{\Omega_1} \frac{\partial \hat{u}_{l3}^\varepsilon}{\partial z} . \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_{l3} - \hat{u}_{l3}^\varepsilon \right) dx' dz \right) + \varepsilon^2 \sum_{1 \leq l \leq 2} \left(\lambda_l \int_{\Omega_1} \operatorname{div}\left(\hat{u}_l^\varepsilon\right) . \operatorname{div}\left(\hat{\varphi}_l - \hat{u}_l^\varepsilon\right) dx' dz \right) +$$
$$+ \int_\omega \hat{k} \left| \left(\hat{\varphi}_{1\tau} - \hat{\varphi}_{2\tau} - s \right) \right| dx' - \int_\omega \hat{k} \left| \left(\hat{\mathbf{u}}_{1\tau}^\varepsilon - \hat{\mathbf{u}}_{2\tau}^\varepsilon - s \right) \right| dx' \geq \sum_{1 \leq i \leq 2} \left(\int_{\Omega_1} \hat{f}_{1i} \left(\hat{\varphi}_{1i} - \hat{u}_{1i}^\varepsilon \right) dx' dz \right) +$$
$$+ \varepsilon \int_{\Omega_1} \hat{f}_{13} \left(\hat{\varphi}_{13} - \hat{u}_{13}^\varepsilon \right) dx' dz + \sum_{1 \leq i \leq 2} \left(\int_{\Omega_2} \hat{f}_{2i} \left(\hat{\varphi}_{2i} - \hat{u}_{1i}^\varepsilon \right) dx' dz \right) + \varepsilon \int_{\Omega_2} \hat{f}_{23} \left(\hat{\varphi}_{23} - \hat{u}_{23}^\varepsilon \right) dx' dz.$$

En utilisant les techniques de [14, lemme 5.3], on peut choisir $\hat{\varphi}_{1i} = u_{1i}^\star + \psi_{1i}$, $\hat{\varphi}_{2i} = u_{2i}^\star + \psi_{2i}$ pour $i = 1, 2$, avec $(\psi_{1i}, \psi_{2i}) \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_{L_1}}(\Omega_1) \times \in H^1_{\Gamma_2 \cup \Gamma_{L_2}}(\Omega_2)$, où

$$H^1_{\Gamma_l \cup \Gamma_{L_l}}(\Omega_l) = \left\{ \varphi_l \in H^1(\Omega_l); \ \varphi_l = 0 \text{ sur } \Gamma_l \cup \Gamma_{L_l} \right\}, l = 1, 2,$$

donc

$$\mu_1 \sum_{1\leq i\leq 2} \int_{\Omega_1} \frac{\partial u_{1i}^\star}{\partial z}.\frac{\partial \psi_{1i}}{\partial z} dx'dz + \mu_2 \sum_{1\leq i\leq 2} \int_{\Omega_2} \frac{\partial u_{2i}^\star}{\partial z}.\frac{\partial \psi_{2i}}{\partial z} dx'dz +$$
$$+ \hat{J}\left(\psi_1 + s_1^\star, \psi_2 + s_2^\star\right) - \hat{J}\left(s_1^\star, s_2^\star\right) \geq \sum_{1\leq i\leq 2} \int_{\Omega_1} \hat{f}_{1i}.\psi_{1i} dx'dz +$$
$$+ \sum_{1\leq i\leq 2} \int_{\Omega_2} \hat{f}_{2i}.\psi_{2i} dx'dz,$$

et comme $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ sur ω, et par l'application de la formule de Green sur chaque domaine, il vient

$$\begin{aligned}
& \sum_{1\leq i\leq 2} \int_{\Omega_1} \left\{-\mu_1 \frac{\partial^2 u_{1i}^\star}{\partial z^2}\right\}.\psi_{1i} dx'dz + \int_\omega \mu_1 \tau_1^\star.\psi_1 d\sigma + \\
& + \sum_{1\leq i\leq 2} \int_{\Omega_2} \left\{-\mu_2 \frac{\partial^2 u_{2i}^\star}{\partial z^2}\right\}.\psi_{2i} dx'dz + \int_\omega -\mu_2 \tau_2^\star.\psi_2 d\sigma + \\
& + \int_\omega \hat{k}\left(\left|\psi_1 - \psi_2 + s_1^\star - s_2^\star - s\right| - \left|s_1^\star - s_2^\star - s\right|\right) dx' \\
\geq \; & \sum_{1\leq i\leq 2} \int_{\Omega_1} \hat{f}_{1i}.\psi_{1i} dx'dz + \sum_{1\leq i\leq 2} \int_{\Omega_2} \hat{f}_{2i}.\psi_{2i} dx'dz,
\end{aligned}$$

en utilisant (2.5.4), on déduit que pour tout $\psi_l \in H^1_{\Gamma_l \cup \Gamma_{L_l}}(\Omega_l)^2$, $l = 1, 2$,

$$\int_\omega \hat{k}\left(\left|\psi_1 - \psi_2 + s_1^\star - s_2^\star - s\right| - \left|s_1^\star - s_2^\star - s\right|\right) dx' - \int_\omega \left(\mu_1 \pi_1^\star \psi_1 - \mu_2 \pi_2^\star \psi_2\right) dx' \geq 0$$

cette inégalité reste valable pour tout $\psi_l \in \mathcal{D}(\omega)^2$, $l = 1, 2$, et par la densité de $\mathcal{D}(\omega)$ dans $L(\omega)$ on déduit que

$$\begin{aligned}
& \textstyle\int_\omega \hat{k}\left(\left|\psi_1 - \psi_2 + s_1^\star - s_2^\star - s\right| - \left|s_1^\star - s_2^\star - s\right|\right) dx' - \\
& - \textstyle\int_\omega \left(\mu_1 \pi_1^\star.\psi_1 - \mu_2 \pi_2^\star.\psi_2\right) dx' \geq 0, \;\; \forall \psi_1, \psi_2 \in L^2(\omega)^2.
\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

En particulier pour $\psi_1 = \psi_2; = \pm\psi$, on trouve donc

$$\int_\omega \left(\mu_1 \pi_1^\star - \mu_2 \pi_2^\star\right).\psi dx' = 0, \;\; \forall \psi \in L^2(\omega)^2$$

ceci implique

$$\mu_1 \pi_1^\star = \mu_2 \pi_2^\star \text{ dans } L^2(\omega)^2 \tag{2.5.14}$$

De (2.5.13) et (2.5.14), on déduit facilement l'inégalité (2.5.10). Nous obtenons aussi (2.5.11) comme dans le cas du problème des fluides [1, 5]

Pour prouver (2.5.12), on intègre deux fois la première équation de (2.5.6) entre 0 et z, et la deuxième entre z et 0, on obtient

$$\begin{cases} -\mu_1 u_{1i}^\star(x', z) \ + \mu_1 s_{1i}^\star + \mu_1 z \pi_{1i}^\star = \displaystyle\int_0^z \int_0^\xi \widehat{f_{1i}}(x', y) dy d\xi \\ \mu_2 z \pi_{2i}^\star - \mu_2 u_{2i}^\star(x', z) \ + \mu_2 s_{2i}^\star = \displaystyle\int_z^0 \int_\xi^0 \widehat{f_{2i}}(x', y) dy d\xi \end{cases} \quad i = 1, 2 \tag{2.5.15}$$

en particulier pour $z = h$ dans le première équation de (2.5.15) et la deuxième $z = -h$, donc

$$\begin{cases} \mu_1 s_{1i}^\star + \mu_1 h \pi_{1i}^\star = \displaystyle\int_0^h \int_0^\xi \widehat{f_{1i}}(x', y) dy d\xi \\ -\mu_2 h \pi_{2i}^\star + \mu_2 s_{2i}^\star = \displaystyle\int_{-h}^0 \int_\xi^0 \widehat{f_{2i}}(x', y) dy d\xi \end{cases} \quad i = 1, 2 \tag{2.5.16}$$

ce qui, par addition et comme $\mu_1 \pi_1^\star = \mu_2 \pi_2^\star$, déduit

$$\mu_1 s_1^\star + \mu_2 s_2^\star = \int_0^h \int_0^\xi \widehat{f_{1i}}(x', y) dy d\xi + \int_{-h}^0 \int_\xi^0 \widehat{f_{2i}}(x', y) dy d\xi \tag{2.5.17}$$

Intégrant la première équation de (2.5.15) entre 0 et h et la deuxième entre $-h$ et 0, on obtient

$$\begin{cases} -\mu_1 \displaystyle\int_0^h \mathbf{u}_1^\star(x', y) dy \ + \mu_1 s_1^\star h + \frac{h^2}{2} \mu_1 \pi_1^\star = \int_0^h \mathcal{F}_1(x', y) dy \\ -\dfrac{h^2}{2} \mu_2 \pi_2^\star - \mu_2 \displaystyle\int_{-h}^0 \mathbf{u}_2^\star(x', y) dy \ + \mu_2 s_2^\star h = \int_{-h}^0 \mathcal{F}_2(x', y) dy \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{F}_1(x', y) = \int_0^y \int_0^\xi \widehat{\mathbf{f}}_1(x', \theta) d\theta d\xi \text{ et } \mathcal{F}_2(x', y) = \int_y^0 \int_\xi^0 \widehat{\mathbf{f}}_2(x', \theta) d\theta d\xi,$$

en sommant les deux équations, et comme $\mu_1 \pi_1^\star = \mu_2 \pi_2^\star$, on trouve

$$h\left(\mu_1 s_1^\star + \mu_2 s_2^\star\right) - \mu_1 \int_0^h \mathbf{u}_1^\star(x', y) dy - \mu_2 \int_{-h}^0 \mathbf{u}_2^\star(x', y) dy = \int_0^h \mathcal{F}(x', y) dy \tag{2.5.18}$$

avec

$$\mathcal{F}(x', y) = \mathcal{F}_1(x', y) + \mathcal{F}_2(x', -y),$$

de (2.5.17)-(2.5.18), on déduit (2.5.12). ∎

Théorème 2.5.4 *La solution* $(\mathbf{u}_1^\star, \mathbf{u}_2^\star)$ *du problème limite* (2.5.4)-(2.5.5) *est unique dans* H_z.

Preuve. Supposons qu'il existe deux solutions $(\mathbf{u}_1^\star, \mathbf{u}_2^\star)$ et $(\mathbf{v}_1^\star, \mathbf{v}_2^\star)$ *de (2.5.4)-(2.5.5)*, alors

$$\begin{aligned} &\mu_1 \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_1} \frac{\partial u_{1i}^\star}{\partial z} . \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_{1i} - u_{1i}^\star\right) dx'dz + \mu_2 \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_2} \frac{\partial u_{2i}^\star}{\partial z} . \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_{2i} - u_{2i}^\star\right) dx'dz + \\ &\quad + J\left(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2\right) - J\left(\mathbf{u}_1^\star, \mathbf{u}_2^\star\right) \geq \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_1} \hat{f}_{1i} \left(\hat{\varphi}_{1i} - u_{1i}^\star\right) dx'dz + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_2} \hat{f}_{2i} \left(\hat{\varphi}_{2i} - u_{2i}^\star\right) dx'dz, \forall \left(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2\right) \in \overline{V\left(\Omega_1\right)} \times \overline{V\left(\Omega_2\right)} \end{aligned} \tag{2.5.19}$$

$$\begin{aligned} &\mu_1 \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_1} \frac{\partial v_{1i}^\star}{\partial z} . \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_{1i} - v_{1i}^\star\right) dx'dz + \mu_2 \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_2} \frac{\partial v_{2i}^\star}{\partial z} . \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_{2i} - v_{2i}^\star\right) dx'dz + \\ &\quad + J\left(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2\right) - J\left(\mathbf{v}_1^\star, \mathbf{v}_2^\star\right) \geq \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_1} \hat{f}_{1i} \left(\hat{\varphi}_{1i} - v_{1i}^\star\right) dx'dz + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_2} \hat{f}_{2i} \left(\hat{\varphi}_{2i} - v_{2i}^\star\right) dx'dz, \forall \left(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2\right) \in \overline{V\left(\Omega_1\right)} \times \overline{V\left(\Omega_2\right)} \end{aligned} \tag{2.5.20}$$

on prend $\widehat{\varphi}_1 = \mathbf{v}_1^\star$ et $\widehat{\varphi}_2 = \mathbf{v}_2^\star$ dans (2.5.19), puis $\widehat{\varphi}_1 = \mathbf{u}_1^\star$ et $\widehat{\varphi}_2 = \mathbf{u}_2^\star$ dans (2.5.20) et en sommant les deux inéquations, il vient pour $\overline{W} = \left(\overline{W}_1, \overline{W}_2\right); \overline{W}_1 = \mathbf{u}_1^\star - \mathbf{v}_1^\star$ et $\overline{W}_2 = \mathbf{u}_2^\star - \mathbf{v}_2^\star$,

$$\mu_1 \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{W}_{1i}\right) . \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{W}_{1i}\right) dx'dz + \mu_2 \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{W}_{2i}\right) . \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{W}_{2i}\right) dx'dz \leq 0$$

ceci implique

$$\mu_1 \left\| \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{W_1}\right) \right\|_{0,\Omega_1}^2 + \mu_2 \left\| \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{W_2}\right) \right\|_{0,\Omega_2}^2 \leq 0$$

donc

$$\left\| \frac{\partial}{\partial z} \overline{W}_1 \right\|_{0,\Omega_1}^2 = 0 \quad et \quad \left\| \frac{\partial}{\partial z} \overline{W}_2 \right\|_{0,\Omega_2}^2 = 0$$

utilisant l'inégalité de Poincaré, on déduit que

$$\left\| \overline{W}_1 \right\|_{H_z(\Omega_1)} = 0 \quad et \quad \left\| \overline{W}_2 \right\|_{H_z(\Omega_2)} = 0.$$

donc $\left\| \overline{W} \right\|_{H_z} = 0$ ■

Chapitre 3

Comportement asymptotique d'un problème de transmission gouverné par le fluide de Bingham

Résumé

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'analyse asymptotique d'un problème problème de transmission entre deux fluides Bingham en régime stationnaire avec des viscosités différentes, dans un domaine de faible épaisseur et les conditions de frottement non linéaire de type de Tresca à l'interface de contact. Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la section 1 nous introduisons quelques notations et le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler. Dans la section 2, nous présentons le problème mécanique et sa formulation variationnelle puis prouvons l'existence de solutions faibles. Dans la section 3, nous effectuons un changement d'échelle, par rapport à l'épaisseur du domaine. Dans la section 4, nous trouvons quelques estimations sur les solutions de notre problème

Ensuite, nous prouvons le résultat de convergence faible et décrivons le problème limite. Enfin, nous obtenons toutes les propriétés de notre problème original.

3.1 Introduction et cadre fonctionnel du problème

Notations and préliminaires

On note S_3 l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^3$ et $|.|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$. Ainsi, pour tout $u, v \in \mathbb{R}^3$, $u{\cdot}v = u_i v_i$, $|v| = (v{\cdot}v)^{1/2}$, et pour tout $\sigma, \tau \in S_3$, $\sigma.\tau = \sigma_{ij}\tau_{ij}$, $|\tau| = (\tau,\tau)^{1/2}$. Ici et ci-dessous, les indices i et j sont compris entre 1 et 3 et la convention de sommation sur des indices répétés est adoptée.

Soient Ω_1^ε et Ω_2^ε deux domaines bornés en $\mathbb{R}^3$. Nous utilisons un indice l pour indiquer qu'une quantité est liée au domaine $\Omega_l^\varepsilon, l = 1, 2$, où $(0 < \varepsilon < 1)$ est un petit paramètre qui tendra vers zéro. Pour chaque domaine Ω_l^ε, nous supposons que sa frontière $\partial\Omega_l^\varepsilon$ est de la classe C^1 et est divisée en trois parties mesurables disjointes, $\partial\Omega_1^\varepsilon = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \bar{\Gamma}_{L_1}^\varepsilon$ et $\partial\Omega_2^\varepsilon = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_2^\varepsilon \cup \bar{\Gamma}_{L_2}^\varepsilon$, où ω est une région fixe dans le plan $x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. La surface supérieure Γ_1^ε est définie par $x_3 = \varepsilon h(x')$, et la surface inférieure Γ_2^ε est définie par $x_3 = -\varepsilon h(x')$ avec h une fonction régulière et bornée telle que $0 < h_* \leq h(x) \leq h^*$ pour tout $(x, 0)$ dans ω. $\Gamma_{L_l}^\varepsilon, l = 1, 2$ est la frontière latérale. Nous désignons par Ω^ε le domaine $\Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$ et on se met

$$\Omega_1^\varepsilon = \{(x, x_3) \in \mathbb{R}^3, (x, 0) \in \omega, \quad 0 < x_3 < \varepsilon h(x)\},$$
$$\Omega_2^\varepsilon = \{(x, x_3) \in \mathbb{R}^3, (x, 0) \in \omega, \quad -\varepsilon h(x) < x_3 < 0\}.$$

On introduit le cadre fonctionnel suivant:

$$\begin{aligned}
H^1(\Omega_l^\varepsilon)^3 &= \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega_l^\varepsilon)^3 : \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega_l^\varepsilon),\ \forall i, j = 1, ..., 3 \right\}, \\
V(\Omega_l^\varepsilon) &= \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega_l^\varepsilon)^3 :\ \mathbf{v} = 0 \text{ on } \Gamma_l^\varepsilon \cup \Gamma_{L_l}^\varepsilon, \mathbf{v}.\nu = 0 \text{ on } \omega \right\}, \ l = 1, 2 \\
V_{\mathrm{div}}(\Omega_l^\varepsilon) &= \{ \mathbf{v} \in V(\Omega_l^\varepsilon) : \mathrm{div}(\mathbf{v}) = 0 \text{ in } \Omega_l^\varepsilon \}, \\
L_0^2(\Omega_l^\varepsilon) &= \left\{ q \in L^2(\Omega_l^\varepsilon) : \int_{\Omega_l^\varepsilon} q \ dx dx_3 = 0 \right\}, l = 1, 2.
\end{aligned}$$

Tous ces espaces sont munis de leurs normes naturelles $||.||_{1.\Omega_l^\varepsilon}$ et d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle_{1.\Omega_l^\varepsilon}$.

De plus, nous avons besoin des espaces fonctionnels suivants

$$\begin{aligned}
V^\varepsilon &= \{ (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in V(\Omega_1^\varepsilon) \times V(\Omega_2^\varepsilon) :\ \mathbf{v}_1.\nu_1 + \mathbf{v}_2.\nu_2 = 0 \text{ sur } \omega \}, \\
V_{div}^\varepsilon &= V_{\mathrm{div}}(\Omega_1^\varepsilon) \times V_{\mathrm{div}}(\Omega_2^\varepsilon) \ \text{ et } L_0^2 = L_0^2(\Omega_1^\varepsilon) \times L_0^2(\Omega_2^\varepsilon)
\end{aligned}$$

L'espace V^{ε} est un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire canonique $\langle .,. \rangle_{V^{\varepsilon}}$ et de norme associée $\|(.,.)\|_{V^{\varepsilon}}$, où $\|(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\|_{V^{\varepsilon}} = \left(\|\mathbf{v}_1\|^2_{V(\Omega_1^{\varepsilon})} + \|\mathbf{v}_2\|^2_{V(\Omega_2^{\varepsilon})} \right)^{1/2}$.

On désigne par $\|(.,.)\|_{1,\Omega_1^{\varepsilon}\times\Omega_2^{\varepsilon}}$ la norme de l'espace $H^1(\Omega_1^{\varepsilon})^3 \times H^1(\Omega_2^{\varepsilon})^3$. Le vecteur ν_l la normale unitaire sortante à $\partial\Omega_l^{\varepsilon}$. Pour tout vecteur $\mathbf{v}_l^{\varepsilon} \in H^1(\Omega_l^{\varepsilon})^3$, $l = 1, 2$ nous utilisons la notation $\mathbf{v}_l^{\varepsilon}$ pour la trace de $\mathbf{v}_l^{\varepsilon}$ sur $\partial\Omega_l^{\varepsilon}$ et on note par $\mathbf{v}_{l\nu}^{\varepsilon}$ and $\mathbf{v}_{l\tau}^{\varepsilon}$ les composantes normale et tangentielle de $\mathbf{v}_l^{\varepsilon}$ sur la frontière, donnée par

$$\mathbf{v}_{l\nu}^{\varepsilon} = \mathbf{v}_l^{\varepsilon}.\nu_l, \quad \mathbf{v}_{l\tau}^{\varepsilon} = \mathbf{v}_l^{\varepsilon} - \mathbf{v}_{l\nu}^{\varepsilon}\nu_l, \text{ with } \nu = \nu_1 = -\nu_2.$$

De même, les composantes normales et tangentielles $\sigma_{l\nu}^{\varepsilon}$ et $\sigma_{l\tau}^{\varepsilon} \in \mathbb{R}^3$, du tenseur des contraintes sont définies par

$$\sigma_{l\nu}^{\varepsilon} = (\sigma_l^{\varepsilon}\nu_l).\nu_l, \quad \sigma_{l\tau}^{\varepsilon} = \sigma_l^{\varepsilon}\nu_l - \sigma_{l\nu}^{\varepsilon}.\nu_l.$$

3.2 Le modèle et sa formulation variationnelle

Le cadre physique est le suivant. Nous considérons deux fluides de Bingham qui occupent les domaines Ω_1^{ε} et Ω_2^{ε}. Les deux fluides sont en contact bilatéral, avec un frottement, le long de la partie commune ω.

On note par $\mathbf{u}_l^{\varepsilon} = (u_{li}^{\varepsilon})_{1\le i\le 3}$, $l = 1, 2$ le champ de vitesse, par $\sigma_l^{\varepsilon} = \left(\sigma_{lij}^{\varepsilon}\right)_{1\le i,j\le 3}$, $l = 1, 2$, le tenseur des contraintes et par $D(\mathbf{u}_l^{\varepsilon})$ les tenseurs de déformations linéarisées. Nous modélisons les matériaux avec le tenseur de contrainte total de Cauchy

$$\sigma_l^{\varepsilon}(\mathbf{u}_l^{\varepsilon}) = -p_l^{\varepsilon} I + \sigma_l^{D,\varepsilon}, \ l = 1, 2$$

où $\sigma_l^{D,\varepsilon}$ désigne la partie déviateur, et p_l^{ε} la pression. Le fluide est supposé être viscoplastique, et la relation entre $\sigma_l^{D,\varepsilon}$ et $D(\mathbf{u}_l^{\varepsilon})$ est donnée par le modèle de Bingham:

$$\begin{cases} \sigma_l^{D,\varepsilon} = \alpha_l^{\varepsilon} \dfrac{D(\mathbf{u}_l^{\varepsilon})}{|D(\mathbf{u}_l^{\varepsilon})|} + 2\mu_l^{\varepsilon} D(\mathbf{u}_l^{\varepsilon}), & \text{when } D(\mathbf{u}_l^{\varepsilon}) \neq 0; \\ |\sigma_l^{D,\varepsilon}| \le \alpha_l^{\varepsilon}, & \text{when } D(\mathbf{u}_l^{\varepsilon}) = 0, \end{cases}$$

où $\alpha_l^{\varepsilon} \ge 0$ est le seuil de plasticité, $\mu_l^{\varepsilon} > 0$ est la viscosité, $\mathbf{u}_l^{\varepsilon}$ est le champ de vitesse et $D(\mathbf{u}_l^{\varepsilon}) = \dfrac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}_l^{\varepsilon} + (\nabla\mathbf{u}_l^{\varepsilon})^T)$. Pour tout tenseur $\tau = (\tau_{ij})$, la notation $|\tau|$ représente la norme matricielle: $|\tau| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{i,j} \tau_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}$.

• L'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$-div\,(\sigma_l^\varepsilon) = \mathbf{f}_l^\varepsilon, l = 1,2 \quad \text{in} \;\; \Omega_l^\varepsilon$$

où le vecteur $\mathbf{f}_l^\varepsilon$, $l = 1,2$ de composantes f_{il}^ε $(i = 1,2,3)$, représente une densité massique des forces extérieures.

• L'équation d'incompressibilité

$$\mathrm{div}(u_l^\varepsilon) = 0, \; l = 1,2 \quad \text{in } \Omega_l^\varepsilon$$

Nous décrivons les conditions aux limites sur la frontière $\partial\Omega_l^\varepsilon$. Nous supposons que

• Sur la surface supérieure, nous supposons

$$u_l^\varepsilon = 0, \, l = 1,2 \;\; \text{on } \Gamma_l^\varepsilon$$

• Sur la frontière latérale, la vitesse est connue et est parallèle au ω-plan

$$\mathbf{u}_l^\varepsilon = 0, \; l = 1,2, \text{ on } \Gamma_{L_l}^\varepsilon.$$

• Les conditions sur la surface commune ω. Nous supposons que le contrat est bilatéral [23], c'est-à-dire

$$\mathbf{u}_{1\boldsymbol{\nu}}^\varepsilon + \mathbf{u}_{2\boldsymbol{\nu}}^\varepsilon = 0 \text{ on } \omega$$

Et le fait que

$$\nu_1 = -\nu_2 \text{ and } \sigma_1^\varepsilon.\nu_1 = -\,\sigma_2^\varepsilon.\nu_2 \text{ on } \omega.$$

Par conséquent,

$$\sigma_{\boldsymbol{\nu}}^\varepsilon = \sigma_{1\boldsymbol{\nu}}^\varepsilon = \sigma_{2\boldsymbol{\nu}}^\varepsilon \text{ et } \sigma_{\boldsymbol{\tau}}^\varepsilon = \sigma_{1\boldsymbol{\tau}}^\varepsilon = -\sigma_{2\boldsymbol{\tau}}^\varepsilon \text{ on } \omega.$$

Cependant, la vitesse tangentielle est inconnue et satisfait la condition limite de Tresca:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \implies \mathbf{u}_{1\tau}^\varepsilon - \mathbf{u}_{2\tau}^\varepsilon = 0 \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \implies \exists\lambda \geq 0, \; \mathbf{u}_{1\tau}^\varepsilon - \mathbf{u}_{2\tau}^\varepsilon = -\lambda\sigma_\tau^\varepsilon \end{array} \right. \quad \text{on } \omega.$$

Le problème de transmission en régime stationnaire pour le fluide Bingham est donné par le problème suivant.

Problème P^ε. Trouver le champ de vitesse $\mathbf{u}_l^\varepsilon = (u_{li}^\varepsilon)_{1\le i\le 3} : \Omega_l^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $l = 1, 2$ tel que

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{div}\sigma_1^\varepsilon + \mathbf{f}_1^\varepsilon = 0 \\ \operatorname{div}(u_1^\varepsilon) = 0 \end{array}\right\} \text{ dans } \Omega_1^\varepsilon, \tag{3.2.1}$$

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{div}\sigma_2^\varepsilon + \mathbf{f}_2^\varepsilon = 0 \\ \operatorname{div}(u_2^\varepsilon) = 0 \end{array}\right\} \text{ dans } \Omega_2^\varepsilon, \tag{3.2.2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_1^\varepsilon(\mathbf{u}_1^\varepsilon) = -p_1^\varepsilon I + \sigma_1^{D,\varepsilon} \\ \sigma_1^{D,\varepsilon} = \alpha_1^\varepsilon \dfrac{D(\mathbf{u}_1^\varepsilon)}{|D(\mathbf{u}_1^\varepsilon)|} + 2\mu_1^\varepsilon D(\mathbf{u}_1^\varepsilon), \text{ si } D(\mathbf{u}_1^\varepsilon) \neq 0; \\ |\sigma_1^{D,\varepsilon}| \le \alpha_1^\varepsilon, \qquad\qquad \text{si } D(\mathbf{u}_1^\varepsilon) = 0, \end{array}\right\} \text{ dans } \Omega_1^\varepsilon, \tag{3.2.3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_2^\varepsilon(\mathbf{u}_2^\varepsilon) = -p_2^\varepsilon I + \sigma_2^{D,\varepsilon} \\ \sigma_2^{D,\varepsilon} = \alpha_2^\varepsilon \dfrac{D(\mathbf{u}_2^\varepsilon)}{|D(\mathbf{u}_2^\varepsilon)|} + 2\mu_2^\varepsilon D(\mathbf{u}_2^\varepsilon), \text{ si } D(\mathbf{u}_2^\varepsilon) \neq 0; \\ |\sigma_2^{D,\varepsilon}| \le \alpha_2^\varepsilon, \qquad\qquad \text{si } D(\mathbf{u}_2^\varepsilon) = 0, \end{array}\right\} \text{ dans } \Omega_2^\varepsilon, \tag{3.2.4}$$

$$u_1^\varepsilon = 0, \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_{L_1}^\varepsilon \tag{3.2.5}$$

$$u_2^\varepsilon = 0, \text{ sur } \Gamma_2^\varepsilon \cup \Gamma_{L_2}^\varepsilon \tag{3.2.6}$$

$$\mathbf{u}_1^\varepsilon.\boldsymbol{\nu} - \mathbf{u}_2^\varepsilon.\boldsymbol{\nu} = 0 \text{ sur } \omega, \tag{3.2.7}$$

$$\sigma_1^\varepsilon.\boldsymbol{\nu} - \sigma_2^\varepsilon.\boldsymbol{\nu} = 0 \text{ sur } \omega, \tag{3.2.8}$$

$$\left\{\begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \implies \mathbf{u}_{1\tau}^\varepsilon - \mathbf{u}_{2\tau}^\varepsilon = 0 \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \implies \exists\lambda \ge 0,\ \mathbf{u}_{1\tau}^\varepsilon - \mathbf{u}_{2\tau}^\varepsilon = -\lambda\sigma_\tau^\varepsilon \end{array}\right. \text{ sur } \omega. \tag{3.2.9}$$

Sur chaque sous domaine Ω_l^ε de Ω^ε on effectue le produit de (3.2.1) par $\varphi_1 - \mathbf{u}_1^\varepsilon$, et (3.2.2) par $\varphi_2 - \mathbf{u}_2^\varepsilon$. Puis en utilise la formule de Green, et par addition, on trouve

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_1^\varepsilon} \sigma_{1ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_{1i} - u_{1i}^\varepsilon)\,dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \sigma_{2ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_{2i} - u_{2i}^\varepsilon)\,dx - \\ &- \int_{\partial\Omega_1^\varepsilon} \sigma_{1ij}^\varepsilon n_{1j}(\varphi_{1i} - u_{1i}^\varepsilon)\,ds - \int_{\partial\Omega_2^\varepsilon} \sigma_{2ij}^\varepsilon n_{2j}(\varphi_{2i} - u_{2i}^\varepsilon)\,ds \\ = &\int_{\Omega_1^\varepsilon} f_{1i}^\varepsilon(\varphi_{1i} - u_{1i}^\varepsilon)\,dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_{2i}^\varepsilon(\varphi_{2i} - u_{2i}^\varepsilon)\,dx, \forall(\varphi_1, \varphi_2) \in V^\varepsilon. \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions (3.2.1)-(3.2.9) et en utilisant le lemme 2.1.1, chapitre 1, on trouve la formulation faible :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon) \in V_{\text{div}}^\varepsilon \text{ et } p_l^\varepsilon \in L_0^2(\Omega_l^\varepsilon), l = 1,2 \text{ tel que} \\ \mathcal{A}\left((\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon), (\varphi_1 - \mathbf{u}_1^\varepsilon, \varphi_2 - \mathbf{u}_2^\varepsilon)\right) - \sum_{1 \le l \le 2} (p_l^\varepsilon, \operatorname{div} \varphi_l) + J^\varepsilon(\varphi_1, \varphi_2) - J^\varepsilon(\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon) \\ \ge \int_{\Omega_1^\varepsilon} \mathbf{f}_1^\varepsilon (\varphi_1 - \mathbf{u}_1^\varepsilon)\, dx + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \mathbf{f}_2^\varepsilon (\varphi_2 - \mathbf{u}_2^\varepsilon)\, dx dx_3, \quad \forall (\varphi_1, \varphi_2) \in V^\varepsilon, \end{cases} \tag{3.2.10}$$

où

$$\mathcal{A}\left((\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), (\varphi_1, \varphi_2)\right) = \sum_{1 \le l \le 2} \left\{ 2\mu_l \int_{\Omega_l^\varepsilon} d_{ij}(\mathbf{u}_l)\, d_{ij}(\varphi_l)\, dx dx_3 \right\},$$

$$(p_l^\varepsilon, \operatorname{div} \varphi_l) = \int_{\Omega_l^\varepsilon} p_l^\varepsilon \ \operatorname{div}(\varphi_l) \ \ dx dx_3, 1 \le l \le 2,$$

$$J^\varepsilon(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \int_\omega k^\varepsilon |(\mathbf{v}_{1\tau} - \mathbf{v}_{2\tau})| dx + \sqrt{2}\alpha_1^\varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(\mathbf{v}_1)|\, dx dx_3 + \sqrt{2}\alpha_2^\varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(\mathbf{v}_2)|\, dx dx_3,$$

Les résultats d'existence et d'unicité de la solution faible du problème (3.2.1)-(3.2.9) sont obtenus dans le théorème suivant.

Théorème 3.2.1. *Supposons que* $(\mathbf{f}_1^\varepsilon, \mathbf{f}_2^\varepsilon) \in L^2(\Omega_1^\varepsilon)^3 \times L^2(\Omega_2^\varepsilon)^3$, $k^\varepsilon \in L_+^\infty(\omega)$, *Alors il existe un unique* $\mathbf{u}^\varepsilon = (\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon) \in V_{div}^\varepsilon$ *et* $p^\varepsilon = (p_1^\varepsilon, p_2^\varepsilon) \in L_0^2(\Omega^\varepsilon)$ *(à une constante additive) solution du problème* (3.2.10).

Preuve. Lorsque les fonctions test appartiennent à V_{div}^ε, on obtient le problème variationnel :

Trouver $(\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon) \in V_{div}^\varepsilon$ tel que

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}\left((\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon), (\varphi_1 - \mathbf{u}_1^\varepsilon, \varphi_2 - \mathbf{u}_2^\varepsilon)\right) + J^\varepsilon(\varphi_1, \varphi_2) - J^\varepsilon(\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon) \\ \ge \quad &\int_{\Omega_1^\varepsilon} \mathbf{f}_1^\varepsilon (\varphi_1 - \mathbf{u}_1^\varepsilon)\, dx dx_3 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \mathbf{f}_2^\varepsilon (\varphi_2 - \mathbf{u}_2^\varepsilon)\, dx dx_3, \forall \varphi \in V_{div}^\varepsilon. \end{aligned}$$

• En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons que la forme bilinéaire $\mathcal{A}(.,.)$ est continue. Puis, on pose $\overline{\mu} = \max(\mu_1^\varepsilon, \mu_2^\varepsilon)$ il existe une constante $C(\Omega^\varepsilon) > 0$, telle que

$$|\mathcal{A}(\varphi, \psi)| \le (2\overline{\mu} + C(\Omega^\varepsilon)) \left\|(\varphi_1, \varphi_2)\right\|_{1, \Omega_1^\varepsilon \times \Omega_2^\varepsilon} \left\|(\psi_1, \psi_2)\right\|_{1, \Omega_1^\varepsilon \times \Omega_2^\varepsilon}, \tag{3.2.11}$$

Pour tout $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in V_{div}^\varepsilon$ et $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in V_{div}^\varepsilon$.

• Maintenant, par les techniques de [27] on peut montrer l'existence d'une constante $c > 0$ telle que

$$\mathcal{A}\left((\varphi_1, \varphi_2), (\varphi_1, \varphi_2)\right) \ge c \left\|(\varphi_1, \varphi_2)\right\|_{1, \Omega_1^\varepsilon \times \Omega_2^\varepsilon}^2, \forall (\varphi_1, \varphi_2) \in V_{div}^\varepsilon.$$

Ainsi, la forme bilinéaire $\mathcal{A}(.,.)$ est coercitive sur $V_{div}^\varepsilon \times V_{div}^\varepsilon$.

• D'autre part, nous avons [19, 22]

$$|j(\varphi) - j(\psi)| \leq \left(\sqrt{|\omega|}\, \|k^\varepsilon\|_{\infty,\omega} C\left(\Omega^\varepsilon\right) + \sqrt{2}\overline{\alpha}\right) \|\varphi - \psi\|_{1,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon}, \forall\left(\varphi,\psi\right) \in \left(V_{div}^\varepsilon\right)^2,$$

Où $\overline{\alpha} = \max(\alpha_1^\varepsilon, \alpha_2^\varepsilon)$. Ainsi, l'application j est une fonction convexe, continue et propre sur V_{div}^ε.

Donc d'après le théorème de Stampacchia, on a l'existence et l'unicité de $(\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon)$ dans V^ε satisfaisant l'inégalité variationnelle (3.2.10).

• La preuve de l'existence de $p_l^\varepsilon \in L_0^2(\Omega_l^\varepsilon)$ tel que $(\mathbf{u}_l^\varepsilon, p_l^\varepsilon), l = 1, 2$ satisfait (3.2.10) est donnée par l'analogue de [21: Theorem 4.1 and remark 4.2]. ■

Théorème 3.2.2. *Soit* $(\mathbf{u}_1^\varepsilon, \mathbf{u}_2^\varepsilon)$ *une solution du problème* (3.2.10), *alors*

$$\mathcal{A}\left(\left(\mathbf{u}_1^\varepsilon,\mathbf{u}_2^\varepsilon\right),\left(\mathbf{u}_1^\varepsilon,\mathbf{u}_2^\varepsilon\right)\right) + \sqrt{2}\alpha_1^\varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} \left|D\left(\mathbf{u}_1^\varepsilon\right)\right| dxdx_3 + \sqrt{2}\alpha_2^\varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} \left|D\left(\mathbf{u}_2^\varepsilon\right)\right| dxdx_3 +$$

$$\int_\omega k^\varepsilon |\left(\mathbf{u}_{1\tau} - \mathbf{u}_{2\tau}\right)| dx \leq \frac{1}{2}\overline{\mu} C_k \left\|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\right\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon} + \frac{\left(\varepsilon h^*\right)^2}{\underline{\mu} C_k} \left\|f^\varepsilon\right\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon}, \tag{3.2.12}$$

où $C_k > 0$ *et* $\underline{\mu} = \min(\mu_1^\varepsilon, \mu_2^\varepsilon)$.

Preuve. En choisissant $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) = (0, 0)$ en tant que fonction test en inégalité (2.2.10), on obtient

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}\left(\left(\mathbf{u}_1^\varepsilon,\mathbf{u}_2^\varepsilon\right),\left(\mathbf{u}_1^\varepsilon,\mathbf{u}_2^\varepsilon\right)\right) + \int_\omega k^\varepsilon |\left(\mathbf{u}_{1\tau}^\varepsilon - \mathbf{u}_{2\tau}^\varepsilon\right)| dx + \\ &+\sqrt{2}\alpha_1^\varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} \left|D\left(\mathbf{u}_1^\varepsilon\right)\right| dxdx_3 + \sqrt{2}\alpha_2^\varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} \left|D\left(\mathbf{u}_2^\varepsilon\right)\right| dxdx_3 \\ \leq\ & \sum_{1\leq l\leq 2} \int_{\Omega_l^\varepsilon} \mathbf{f}_l^\varepsilon \mathbf{u}_l^\varepsilon dxdx_3 \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Nous rappelons l'inégalité de Poincaré et de Young respectivement :

$$\left\|\mathbf{u}^\varepsilon\right\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon} \leq 2h^{\star 2}\varepsilon^2 \left\|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\right\|^2_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon} \tag{3.2.14}$$

$$ab \leq \eta^2 \frac{a^2}{2} + \eta^{-2}\frac{b^2}{2},\ \forall\left(a,b\right) \in \mathbb{R} \tag{3.2.15}$$

$$\sqrt{a+b} \leq a + b$$

On a

$$\left|\left(\mathbf{f}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon\right)\right| \leq \left\|\mathbf{f}^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon} \left\|\mathbf{u}^\varepsilon\right\|_{0,\Omega_1^\varepsilon\times\Omega_2^\varepsilon}$$

puis utilisant l'inégalité de Poincaré, nous obtenons

$$|(\mathbf{f}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon)| \leq \sqrt{2\varepsilon h^\star} \, \|\mathbf{f}^\varepsilon\|_{0,\Omega_1^\varepsilon \times \Omega_2^\varepsilon} \|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\|_{0,\Omega_1^\varepsilon \times \Omega_2^\varepsilon} . \tag{3.2.16}$$

Par l'inégalité de Young, nous avons

En utilisant (3.2.14) et (3.2.16), puis la relation (3.2.15) pour $\eta = \sqrt{\overline{\mu} C_k}$, nous allons obtenir

$$|(\mathbf{f}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon)| \leq \frac{1}{2}\overline{\mu} C_k \|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\|_{0,\Omega_1^\varepsilon \times \Omega_2^\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2 h^{\star 2}}{2\underline{\mu} C_k} \|\mathbf{f}^\varepsilon\|_{0,\Omega_1^\varepsilon \times \Omega_2^\varepsilon} . \tag{3.2.17}$$

De (3.2.13) et (3.2.15), on en déduit (3.2.12). ■

3.3 Le problème dans le domaine fixe

Cette section est consacrée à l'étude des estimations a priori de la vitesse et de la pression.

Pour cela on étudie l'analyse asymptotique du problème (3.2.1)-(3.2.9), nous allons transposer le problème initialement posé sur le domaine Ω_l^ε qui dépend d'un petit paramètre ε à un problème équivalent posé sur un domaine fixe Ω_l qui est indépendant de ε. Pour cela, nous introduisons le changement de variable $z=\dfrac{x_3}{\varepsilon}$, en conséquence pour (x, x_3) dans Ω_l^ε on a (x, z) dans

$$\Omega_1 = \{(x,z) \in \mathbb{R}^3, (x,0) \in \omega \ , \quad 0 < z < h\,(x)\}$$

$$\Omega_2 = \{(x,z) \in \mathbb{R}^3, (x,0) \in \omega \ , \ -h\,(x) < z < 0\}.$$

et on note $\partial\Omega_l = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_l \cup \bar{\Gamma}_{L_l}$, $l = 1, 2$ sa frontière.

On définit les fonctions suivantes dans Ω_l

$$\begin{cases} \hat{u}_{li}^\varepsilon\,(x,z) = u_{li}^\varepsilon\,(x,x_3)\,,\ i = 1,2, & \\ \hat{u}_{l3}^\varepsilon\,(x,z) = \varepsilon^{-1} u_{l3}^\varepsilon\,(x,x_3)\,, & l = 1,2 \\ \widehat{p_l}(x,z) = \varepsilon^2 p_l^\varepsilon(x,x_3) & \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Pour les données du problème (3.2.1)-(3.2.9), nous supposons qu'elles dépendent de ε de la manière suivante:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{f}}_l\,(x,z) = \varepsilon^2 \mathbf{f}_l^\varepsilon\,(x,x_3)\,, & \\ \hat{k} = \varepsilon k^\varepsilon, \ \ \hat{\alpha}_l = \varepsilon \alpha_l^\varepsilon & \end{cases} \qquad l = 1,2 \tag{3.3.2}$$

avec $\hat{f}_l$ et $\hat{k}$ indépendantes de ε.

Maintenant, nous présentons le cadre fonctionnel sur $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Nous notons

$$
\begin{aligned}
V(\Omega_l) &= \left\{ \widehat{\mathbf{v}} \in H^1(\Omega_l)^3 : \ \widehat{\mathbf{v}} = 0 \text{ on } \Gamma_l \cup \Gamma_{L_l} \right\}, \\
V_{\mathrm{div}}(\Omega_l) &= \left\{ \mathbf{v} \in V(\Omega_l) : \mathrm{div}(\mathbf{v}) = 0 \text{ in } \Omega_l \right\}, \\
L_0^2(\Omega_l) &= \left\{ \widehat{q} \in L^2(\Omega_l) : \int_{\Omega_l^\varepsilon} \widehat{q}\, dxdz = 0 \right\}, l = 1, 2 \\
V &= \left\{ (\widehat{\mathbf{v}}_1, \widehat{\mathbf{v}}_2) \in V(\Omega_1) \times V(\Omega_2) : \ \widehat{\mathbf{v}}_1 . \boldsymbol{\nu}_1 + \widehat{\mathbf{v}}_2 . \boldsymbol{\nu}_2 = 0 \text{ on } \omega \right\}, \\
V_{\mathrm{div}} &= V_{\mathrm{div}}(\Omega_1) \times V_{\mathrm{div}}(\Omega_2), \\
L_0^2 &= L_0^2(\Omega_1) \times L_0^2(\Omega_2), \\
H_z(\Omega_l) &= \left\{ \widehat{\mathbf{v}}_l = (\widehat{\mathbf{v}}_{l1}, \widehat{\mathbf{v}}_{l2}) \in L^2(\Omega_l)^2 : \frac{\partial \widehat{\mathbf{v}}_{li}}{\partial z} \in L^2(\Omega_l), i = 1, 2 \text{ and } \ \widehat{\mathbf{v}}_l = 0 \text{ on } \Gamma_l \right\}, \\
H_z &= H_z(\Omega_1) \times H_z(\Omega_2).
\end{aligned}
$$

$H_z(\Omega_l)$, $l = 1, 2$, est un espace de Banach pour la norme:

$$
\begin{aligned}
\|\widehat{\mathbf{v}}_l\|^2_{H_z(\Omega_l)} &= \sum_{i=1}^{2} \left(\|\widehat{\mathbf{v}}_{li}\|^2_{0,\Omega_l} + \left\| \frac{\partial \widehat{\mathbf{v}}_{li}}{\partial z} \right\|^2_{0,\Omega_l} \right), \\
\|(\widehat{\mathbf{v}}_1, \widehat{\mathbf{v}}_2)\|^2_{H_z} &= \|\widehat{\mathbf{v}}_1\|^2_{H_z(\Omega_1)} + \|\widehat{\mathbf{v}}_2\|^2_{H_z(\Omega_2)}.
\end{aligned}
$$

Avec ces nouvelles notations, le problème variationnel (3.2.10) équivaut au problème suivant:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\text{Trouver } \ (\hat{\mathbf{u}}_1^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}_2^\varepsilon) \in V, \ \text{ tel que} \\
&\qquad \mathcal{A}\left((\hat{\mathbf{u}}_1^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}_2^\varepsilon), (\hat{\varphi}_1 - \hat{\mathbf{u}}_1^\varepsilon, \hat{\varphi}_2 - \hat{\mathbf{u}}_2^\varepsilon) \right) - \sum_{1 \le l \le 2} (\widehat{p}_l, \mathrm{div}\, \hat{\varphi}_l) + \hat{J}(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) - \\
&\quad - \hat{J}(\hat{\mathbf{u}}_1^\varepsilon, \hat{\mathbf{u}}_2^\varepsilon) \ge \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_1^\varepsilon} \hat{f}_{1i}(\hat{\varphi}_{1i} - \hat{\mathbf{u}}_{1i}^\varepsilon)\, dxdz + \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} \hat{f}_{13}(\hat{\varphi}_{13} - \hat{\mathbf{u}}_{13}^\varepsilon)\, dxdz + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_2^\varepsilon} \hat{f}_{2i}(\hat{\varphi}_{2i} - \hat{\mathbf{u}}_{2i}^\varepsilon)\, dxdz + \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} \hat{f}_{23}(\hat{\varphi}_{23} - \hat{\mathbf{u}}_{23}^\varepsilon)\, dxdz, \quad \forall (\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) \in V
\end{aligned}
\right.
\tag{3.3.3}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}\left(\left(\hat{\mathbf{u}}_1^\varepsilon,\hat{\mathbf{u}}_2^\varepsilon\right),\left(\hat{\varphi}_1-\hat{\mathbf{u}}_1^\varepsilon,\hat{\varphi}_2-\hat{\mathbf{u}}_2^\varepsilon\right)\right)\\
&=\varepsilon^2\sum_{l=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\mu_l\int_{\Omega_l}\left(\frac{\partial\hat{u}_{li}^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_{lj}^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\hat{\varphi}_{li}-\hat{u}_{li}^\varepsilon\right)dxdz+\\
&+\sum_{l=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\mu_l\int_{\Omega_l}\left(\frac{\partial\hat{u}_{li}^\varepsilon}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_{l3}^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\varphi}_{li}-\hat{u}_{li}^\varepsilon\right)dxdz+\\
&+\sum_{l=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\mu_l\int_{\Omega_l}\varepsilon^2\left(\frac{\partial\hat{u}_{li}^\varepsilon}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_{l3}^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\hat{\varphi}_{l3}-\hat{u}_{l3}^\varepsilon\right)dxdz\\
&+\sum_{l=1}^{2}2\mu_l\varepsilon^2\int_{\Omega_l}\frac{\partial\hat{u}_{l3}^\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\varphi}_{l3}-\hat{u}_{l3}^\varepsilon\right)dxdz.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{J}\left(\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2\right) &= \int_\omega\hat{k}\left|\left(\hat{\varphi}_{1\tau}-\hat{\varphi}_{2\tau}\right)\right|dx+\sqrt{2}\hat{\alpha}_1\int_{\Omega_1^\varepsilon}\left|\widetilde{D}\left(\hat{\varphi}_1\right)\right|dxdz+\sqrt{2}\hat{\alpha}_2\int_{\Omega_2^\varepsilon}\left|\widetilde{D}\left(\hat{\varphi}_2\right)\right|dxdz\\
\left(\hat{\mathbf{p}},\operatorname{div}\hat{\varphi}\right) &= \sum_{l=1}^{2}\int_{\Omega_l^\varepsilon}^{\varepsilon}\hat{p}_l\operatorname{div}\left(\hat{\varphi}_l\right)\,dxdz,\\
\left|\widetilde{D}\left(\hat{\varphi}_l\right)\right| &= \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\sum\limits_{i,j=1}^{2}\varepsilon^2\left(\frac{\partial\hat{\varphi}_{li}}{\partial x_j}+\frac{\hat{\varphi}_{lj}}{\partial x_i}\right)^2+\\ \\ \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial\hat{\varphi}_{li}}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\hat{\varphi}_{l3}}{\partial x_i}\right)^2+\varepsilon^2\left(\frac{\partial\hat{\varphi}_{l3}}{\partial z}\right)^2\end{pmatrix}^{\frac{1}{2}},\quad l=1,2
\end{aligned}
$$

3.4 Estimations à priori

Le théorème suivant donne des estimations sur le champ de vitesse $\hat{u}^\varepsilon$ et la pression $\hat{p}^\varepsilon$ dans le domaine fixe Ω.

Théorème 3.4.1. *Soit* $(\mathbf{u}_1^\varepsilon,\mathbf{u}_2^\varepsilon)\in V_{\mathrm{div}}^\varepsilon$ et $(p_1^\varepsilon,p_2^\varepsilon)\in L_0^2(\Omega_1^\varepsilon)\times\ L_0^2(\Omega_2^\varepsilon)$ *la solution du problème variationnel* (3.2.10), *alors il existe une constante* $c_1>0$ *indépendante de* ε *telle que*

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^2\sum_{1\le i,j\le 2}\left\|\frac{\partial\hat{u}_{1i}^\varepsilon}{\partial x_j}\right\|_{0,\Omega_1}^2+\varepsilon^2\sum_{1\le i,j\le 2}\left\|\frac{\partial\hat{u}_{2i}^\varepsilon}{\partial x_j}\right\|_{0,\Omega_2}^2+\sum_{1\le i\le 2}\left\|\frac{\partial\hat{u}_{1i}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{0,\Omega_1}^2\\
&+\sum_{1\le i\le 2}\left\|\frac{\partial\hat{u}_{2i}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{0,\Omega_2}^2+\varepsilon^2\left\|\frac{\partial\hat{u}_{13}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{0,\Omega_1}^2+\varepsilon^2\left\|\frac{\partial\hat{u}_{23}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{0,\Omega_2}^2+
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{1\leq i\leq 2}\varepsilon^4\left\|\frac{\partial \hat{u}_{13}^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right\|_{0,\Omega_1}^2+\sum_{1\leq i\leq 2}\varepsilon^4\left\|\frac{\partial \hat{u}_{23}^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right\|_{0,\Omega_2}^2\leq c_1 \tag{3.4.1}$$

Preuve. Nous multiplions (3.2.12) par ε, on en déduit

$$\varepsilon\mathcal{A}\left(\left(\mathbf{u}_1^{\varepsilon},\mathbf{u}_2^{\varepsilon}\right),\left(\mathbf{u}_1^{\varepsilon},\mathbf{u}_2^{\varepsilon}\right)\right)+\sqrt{2}\hat{\alpha}_1\int_{\Omega_1^{\varepsilon}}\left|\widetilde{D}\left(\widehat{\mathbf{u}}_1\right)\right|dxdz+\sqrt{2}\hat{\alpha}_2\int_{\Omega_2^{\varepsilon}}\left|\widetilde{D}\left(\widehat{\mathbf{u}}_2\right)\right|dxdz+$$
$$\int_{\omega}\widehat{k}|\left(\widehat{\mathbf{u}}_{1\tau}-\widehat{\mathbf{u}}_{2\tau}\right)|dx\leq\frac{1}{2}\overline{\mu}\varepsilon C_k\left\|\nabla\mathbf{u}^{\varepsilon}\right\|_{0,\Omega_1^{\varepsilon}\times\Omega_2^{\varepsilon}}^2+\frac{\varepsilon^3\left(h^*\right)^2}{\underline{\mu}C_k}\left\|f^{\varepsilon}\right\|_{0,\Omega_1^{\varepsilon}\times\Omega_2^{\varepsilon}}^2, \tag{3.4.2}$$

et comme $\varepsilon^2\left\|\mathbf{f}^{\varepsilon}\right\|_{0,\Omega_1^{\varepsilon}\times\Omega_2^{\varepsilon}}^2=\varepsilon^{-1}\left\|\hat{\mathbf{f}}\right\|_{0,\Omega_1\times\Omega_2}^2$, on a

$$\varepsilon\mathcal{A}\left(\left(\mathbf{u}_1^{\varepsilon},\mathbf{u}_2^{\varepsilon}\right),\left(\mathbf{u}_1^{\varepsilon},\mathbf{u}_2^{\varepsilon}\right)\right)+\sqrt{2}\hat{\alpha}_1\int_{\Omega_1^{\varepsilon}}\left|\widetilde{D}\left(\widehat{\mathbf{u}}_1\right)\right|dxdz+\sqrt{2}\hat{\alpha}_2\int_{\Omega_2^{\varepsilon}}\left|\widetilde{D}\left(\widehat{\mathbf{u}}_2\right)\right|dxdz+$$
$$\int_{\omega}\widehat{k}|\left(\widehat{\mathbf{u}}_{1\tau}-\widehat{\mathbf{u}}_{2\tau}\right)|dx\leq\frac{1}{2}\overline{\mu}\varepsilon C_k\left\|\nabla\mathbf{u}^{\varepsilon}\right\|_{0,\Omega_1^{\varepsilon}\times\Omega_2^{\varepsilon}}^2+\frac{\left(h^*\right)^2}{\underline{\mu}C_k}\left\|\hat{\mathbf{f}}\right\|_{0,\Omega_1\times\Omega_2}^2, \tag{3.4.3}$$

De l'inégalité de Korn , (3.4.3) devient comme

$$\frac{1}{2}\overline{\mu}\varepsilon C_k\left\|\nabla\mathbf{u}^{\varepsilon}\right\|_{0,\Omega_1^{\varepsilon}\times\Omega_2^{\varepsilon}}^2+\sqrt{2}\hat{\alpha}_1\int_{\Omega_1^{\varepsilon}}\left|\widetilde{D}\left(\widehat{\mathbf{u}}_1\right)\right|dxdz+\sqrt{2}\hat{\alpha}_2\int_{\Omega_2^{\varepsilon}}\left|\widetilde{D}\left(\widehat{\mathbf{u}}_2\right)\right|dxdz+$$
$$\int_{\omega}\widehat{k}|\left(\widehat{\mathbf{u}}_{1\tau}-\widehat{\mathbf{u}}_{2\tau}\right)|dx\leq\frac{\left(h^*\right)^2}{\underline{\mu}C_k}\left\|\hat{\mathbf{f}}\right\|_{0,\Omega_1\times\Omega_2}^2. \tag{3.4.4}$$

On utilise le fait que $\varepsilon\left\|\nabla\mathbf{u}^{\varepsilon}\right\|_{0,\Omega_1^{\varepsilon}\times\Omega_2^{\varepsilon}}^2=\left\|\nabla\hat{\mathbf{u}}^{\varepsilon}\right\|_{0,\Omega_1\times\Omega_2}^2$, donc le premier membre de (3.4.1) et de (3.4.4), est majoré par une constante indépendante de ε. On déduit alors l'estimation que nous avons dû prouver avec $c_1=\left(\frac{1}{2}\overline{\mu}C_k\right)^{-1}\frac{(h^*)^2}{\underline{\mu}C_k}\left\|\hat{\mathbf{f}}\right\|_{0,\Omega_1\times\Omega_2}^2$.

Ce qui termine la preuve. ■

Théorème 3.4.2 *Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème 3.4.1, il existe une constante $c_2>0$ indépendante de ε telle que*

$$\left\|\frac{\partial\hat{p}_l}{\partial x_i}\right\|_{-1,\Omega_l}\leq c_2 \quad \textit{pour } 1\leq l,i\leq 2 \tag{3.4.5}$$
$$\left\|\frac{\partial\hat{p}_l}{\partial z}\right\|_{-1,\Omega_l}\leq \varepsilon c_2. \tag{3.4.6}$$

Preuve. Pour obtenir la première estimation de la pression dans (3.4.5), nous choisissons dans (3.3.3) : $\hat{\varphi}_l = \hat{\mathbf{u}}_l + \psi_l, \psi_l \in H_0^1(\Omega_l)^3$, $1 \leq l \leq 2$, on obtient

$$\mathcal{A}\left(\left(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2\right), \left(\psi_1, \psi_2\right)\right) - \sum_{1 \leq l \leq 2} \left(\widehat{p}_l, \operatorname{div} \psi_l\right) + \sqrt{2} \sum_{l=1}^{2} \hat{\alpha}_l \int_{\Omega_l^\varepsilon} \left| \widetilde{D}\left(\widehat{\mathbf{u}}_l + \psi_l\right) \right| dxdz$$
$$-\sqrt{2} \sum_{l=1}^{2} \hat{\alpha}_l \int_{\Omega_l^\varepsilon} \left| \widetilde{D}\left(\widehat{\mathbf{u}}_l\right) \right| dxdz \geq \sum_{l=1}^{2} \int_{\Omega_l^\varepsilon} \hat{\mathbf{f}}_l \psi_l dxdz$$

puis

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq l \leq 2} \left(\widehat{p}_l, \operatorname{div} \psi_l\right) \quad \leq \quad & \mathcal{A}\left(\left(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2\right), \left(\psi_1, \psi_2\right)\right) + \sqrt{2} \sum_{l=1}^{2} \hat{\alpha}_l \int_{\Omega_l^\varepsilon} \left| \widetilde{D}\left(\widehat{\mathbf{u}}_l + \psi_l\right) \right| dxdz \\ & -\sqrt{2} \sum_{l=1}^{2} \hat{\alpha}_l \int_{\Omega_l^\varepsilon} \left| \widetilde{D}\left(\widehat{\mathbf{u}}_l\right) \right| dxdz - \sum_{l=1}^{2} \int_{\Omega_l^\varepsilon} \hat{\mathbf{f}}_l \psi_l dxdz.\end{aligned}$$

Comme $\left| \widetilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon + \psi\right) \right| \leq \sqrt{2} \left(\left| \widetilde{D}\left(\hat{u}^\varepsilon\right) \right| + \left| \widetilde{D}\left(\psi\right) \right| \right)$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq l \leq 2} \left(\widehat{p}_l, \operatorname{div} \psi_l\right) \quad \leq \quad & \mathcal{A}\left(\left(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2\right), \left(\psi_1, \psi_2\right)\right) + 2 \max(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) \sum_{l=1}^{2} \int_{\Omega_l^\varepsilon} \left| \widetilde{D}\left(\psi_l\right) \right| dxdz + \\ & \left(2 - \sqrt{2}\right) \max(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) \sum_{l=1}^{2} \int_{\Omega_l^\varepsilon} \left| \widetilde{D}\left(\widehat{\mathbf{u}}_l\right) \right| dx - \sum_{l=1}^{2} \int_{\Omega_l^\varepsilon} \hat{\mathbf{f}}_l \psi_l dxdz.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq l \leq 2} \left(\widehat{p}_l, \operatorname{div} \psi_l\right) \leq \overline{\mu} \sum_{l=1}^{2} \left\| \widetilde{D}\left(\widehat{\mathbf{u}}_l\right) \right\|_{0,\Omega_l} \left\| \psi_l \right\|_{1,\Omega_l} + 2 \max(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) \sqrt{\left|\Omega_1 \cup \Omega_2\right|} \sum_{l=1}^{2} \left\| \psi_l \right\|_{1,\Omega_l} + \\ \left(2 - \sqrt{2}\right) \max(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) \sum_{l=1}^{2} \left\| \widetilde{D}\left(\widehat{\mathbf{u}}_l\right) \right\|_{0,\Omega_l} + \left\| \hat{\mathbf{f}} \right\|_{0,\Omega_1 \times \Omega_2} \left\| \psi \right\|_{1,\Omega_1 \times \Omega_2},\end{aligned} \quad (3.4.7)$$

D'une manière similaire, nous choisissons dans (3.3.3): $\hat{\varphi}_l = \hat{\mathbf{u}}_l - \psi_l, \psi_l \in H_0^1(\Omega_l)^3$, $1 \leq l \leq 2$, on trouve

$$\begin{aligned}-\sum_{1 \leq l \leq 2} \left(\widehat{p}_l, \operatorname{div} \psi_l\right) \leq \overline{\mu} \sum_{l=1}^{2} \left\| \widetilde{D}\left(\widehat{\mathbf{u}}_l\right) \right\|_{0,\Omega_l} \left\| \psi_l \right\|_{1,\Omega_l} + 2 \max(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) \sqrt{\left|\Omega_1 \cup \Omega_2\right|} \sum_{l=1}^{2} \left\| \psi_l \right\|_{1,\Omega_l} + \\ \left(2 - \sqrt{2}\right) \max(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) \sum_{l=1}^{2} \left\| \widetilde{D}\left(\widehat{\mathbf{u}}_l\right) \right\|_{0,\Omega_l} + \left\| \hat{\mathbf{f}} \right\|_{0,\Omega_1 \times \Omega_2} \left\| \psi \right\|_{1,\Omega_1 \times \Omega_2},\end{aligned} \quad (3.4.8)$$

On déduit de (3.4.7) et (3.4.8) que

$$\left|\sum_{1\leq l\leq 2}(\widehat{p}_l, \operatorname{div}\psi_l)\right| \leq \overline{\mu}\sum_{l=1}^{2}\left\|\widetilde{D}\left(\widehat{\mathbf{u}}_l\right)\right\|_{0,\Omega_l}\|\psi_l\|_{1,\Omega_l} + 2\max(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2)\sqrt{|\Omega_1\cup\Omega_2|}\sum_{l=1}^{2}\|\psi_l\|_{1,\Omega_l} + \left(2-\sqrt{2}\right)\max(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2)\sum_{l=1}^{2}\left\|\widetilde{D}\left(\widehat{\mathbf{u}}_l\right)\right\|_{0,\Omega_l} + \left\|\hat{\mathbf{f}}\right\|_{0,\Omega_1\times\Omega_2}\|(\psi_1,\psi_2)\|_{1,\Omega_1\times\Omega_2}, \tag{3.4.9}$$

Lorsque $i=1,2$ nous choisissons $\psi_l=(\xi,0,0)$ puis $\psi_l=(0,\xi,0)$, dans l'inégalité (3.4.9), on a donc

$$\sum_{l=1}^{2}\left|\int_{\Omega}\frac{\partial\hat{p}_l}{\partial x_i}\,\psi_l dxdz\right| \leq \left(c_3+2\max(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2)\sqrt{|\Omega_1\cup\Omega_2|}+\left\|\hat{\mathbf{f}}\right\|_{0,\Omega_1\times\Omega_2}\right)\|(\psi_1,\psi_2)\|_{1,\Omega_1\times\Omega_2} + \left(2-\sqrt{2}\right)c_4\max(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2). \tag{3.4.10}$$

Finalement, pour obtenir (3.4.6), nous prenons l'inégalité (3.4.9), $\psi=(0,0,\xi)$. ■

3.5 Étude du Problème limite

Théorème 3.5.1 *Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème 3.4.1, il existe* $(\mathbf{u}_1^\star,\mathbf{u}_2^\star)=(u_{1i}^\star,u_{2i}^\star)$ *dans* H_z , $i=1,2$ *et* $(p_1^\star,p_2^\star)\in L_0^2(\Omega_1)\times\ L_0^2(\Omega_2)$ *tels que*

$$(\hat{u}_{1i}^\varepsilon,\hat{u}_{2i}^\varepsilon)\rightharpoonup(u_{1i}^\star,u_{2i}^\star)\,,\ i=1,2\quad \textit{faiblement dans } H_z, \tag{3.5.1}$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\hat{u}_{1i}^\varepsilon}{\partial x_j},\frac{\partial\hat{u}_{2i}^\varepsilon}{\partial x_j}\right)\rightharpoonup(0,0)\,,\ i,j=1,2\ \textit{faiblement dans}\ \ L^2(\Omega_1)\times\ L^2(\Omega_2), \tag{3.5.2}$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\hat{u}_{13}^\varepsilon}{\partial z},\frac{\partial\hat{u}_{23}^\varepsilon}{\partial z}\right)\rightharpoonup(0,0)\,,\ \ \textit{faiblement dans}\ \ L^2(\Omega_1)\times\ L^2(\Omega_2), \tag{3.5.3}$$

$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial\hat{u}_{13}^\varepsilon}{\partial x_i},\frac{\partial\hat{u}_{23}^\varepsilon}{\partial x_i}\right)\rightharpoonup(0,0)\,,\ i=1,2\ \textit{faiblement dans}\ L^2(\Omega_1)\times\ L^2(\Omega_2), \tag{3.5.4}$$

$$\varepsilon\left(\hat{u}_{13}^\varepsilon,\hat{u}_{23}^\varepsilon\right)\rightharpoonup(0,0)\,,\ \ \textit{faiblement dans}\ \ L^2(\Omega_1)\times\ L^2(\Omega_2), \tag{3.5.5}$$

$$(\hat{p}_1^\varepsilon,\hat{p}_2^\varepsilon)\rightharpoonup(p_1^\star(x),p_2^\star(x))\,,\ \textit{faiblement dans}\ L_0^2(\Omega_1)\times\ L_0^2(\Omega_2). \tag{3.5.6}$$

Preuve. Pour la preuve de ce théorème, nous suivons les mêmes étapes que dans le cas homogène dans [19].

On déduit de (3.4.1) et (3.2.14) que la suite $(\widehat{u}_{1i}^{\varepsilon}, \widehat{u}_{2i}^{\varepsilon})_{\varepsilon}$ $i = 1, 2$ est bornée dans $L^2(0.T, H_z)$, donc (2.5.1), (2.5.2) et (2.5.4) sont clairement de l'estimation (3.4.1) .

On utilise le fait que div $(\widehat{\mathbf{u}}_l^{\varepsilon}) = 0$, $l = 1, 2$ avec (2.5.2), on trouve (2.5.3).

La convergence (3.5.4) découle directement de (3.4.3) et (3.4.4) .

Pour la preuve (3.5.5), nous utilisons les mêmes étapes que dans la preuve du théorème 2.5.1 [chapt. 2].

Pour démontrer (3.5.6), on utilise (3.4.5)-(3.4.6) avec l'inégalité suivante ([20]) :

$$\|(\hat{p}_1^{\varepsilon}, \hat{p}_2^{\varepsilon})\|_{0,\Omega_1\times\Omega_2} \leq K\left\{\sum_{1\leq l,i\leq 2}\left\|\frac{\partial \hat{p}_l}{\partial x_i}\right\|_{-1,\Omega_l} + \sum_{1\leq l\leq 2}\left(\left\|\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \hat{p}_l}{\partial z}\right\|_{-1,\Omega_l} + \int_{\Omega_l}\hat{p}_l^{\varepsilon}dxdz\right)\right\}.$$

Comme $(\hat{p}_1^{\varepsilon}, \hat{p}_2^{\varepsilon}) \in L_0^2(\Omega_1) \times\ L_0^2(\Omega_2)$, on déduit que

$$\|(\hat{p}_1^{\varepsilon}, \hat{p}_2^{\varepsilon})\|_{0,\Omega_1\times\Omega_2} \leq Kc_2.$$

Donc il existe une sous suite extraire $(\hat{p}_1^{\varepsilon}, \hat{p}_2^{\varepsilon})$ qui converge faiblement vers $(p_1^{\star}, p_2^{\star})$ dans $L^2(\Omega_1) \times\ L^2(\Omega_2)$.

Grâce au (3.4.6), on écrit pour tout $(\varphi_{1,}\varphi_2) \in H_0^1(\Omega_1) \times H_0^1(\Omega_2)$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial z}(\hat{p}_1^{\varepsilon}, \hat{p}_2^{\varepsilon}), (\varphi_{1,}\varphi_2)\right\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} &= \left\langle \frac{\partial \hat{p}_1^{\varepsilon}}{\partial z}, \varphi_1\right\rangle_{H^{-1}(\Omega_1)\times H_0^1(\Omega_1)} + \left\langle \frac{\partial \hat{p}_2^{\varepsilon}}{\partial z}, \varphi_2\right\rangle_{H^{-1}(\Omega_2)\times H_0^1(\Omega_2)} \\
&\leq \sum_{1\leq l\leq 2}\left\|\frac{\partial \hat{p}_l^{\varepsilon}}{\partial z}\right\|_{-1,\Omega_l}\|\varphi_l\|_{H_0^1(\Omega_l)} \\
&\leq \varepsilon c_2\left\|(\varphi_{1,}\varphi_2)\right\|_{H_0^1(\Omega_1)\times H_0^1(\Omega_2)}
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$-\left\langle \hat{p}_1^{\varepsilon}, \frac{\partial}{\partial z}\varphi_1\right\rangle_{H^{-1}(\Omega_1)\times H_0^1(\Omega_1)} - \left\langle \hat{p}_2^{\varepsilon}, \frac{\partial}{\partial z}\varphi_2\right\rangle_{H^{-1}(\Omega_2)\times H_0^1(\Omega_2)} \leq \varepsilon c_2\left\|(\varphi_{1,}\varphi_2)\right\|_{H_0^1(\Omega_1)\times H_0^1(\Omega_2)}.$$

En remplaçant $(\varphi_{1,}\varphi_2)$ par $(-\varphi_{1,} - \varphi_2)$, puis on passe ε au zéro, on trouve

$$-\left\langle p_1^{\star}, \frac{\partial}{\partial z}\varphi_1\right\rangle_{H^{-1}(\Omega_1)\times H_0^1(\Omega_1)} - \left\langle p_2^{\star}, \frac{\partial}{\partial z}\varphi_2\right\rangle_{H^{-1}(\Omega_2)\times H_0^1(\Omega_2)} = 0.$$

Donc

$$-\left\langle \frac{\partial}{\partial z}(p_1^{\star}, p_2^{\star}), (\varphi_{1,}\varphi_2)\right\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = 0, \ \forall (\varphi_{1,}\varphi_2) \in H_0^1(\Omega_1) \times H_0^1(\Omega_2).$$

Cela signifie que la pression limite $(p_1^\star, p_2^\star)$ ne dépend pas de la variable z, ce qui donne (3.5.6). $\square$ $\blacksquare$

Théorème 3.5.2 *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 3.4.1, la solution* $\{(\mathbf{u}_1^\star, \mathbf{u}_2^\star), (p_1^\star, p_2^\star)\}$ *satisfait*

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2}\mu_1\int_{\Omega_1}\frac{\partial u_{1i}^\star}{\partial z}\frac{\partial(\hat{\phi}_{1i}-u_{1i}^\star)}{\partial z}dxdz+\sum_{i=1}^{2}\mu_2\int_{\Omega_2}\frac{\partial u_{2i}^\star}{\partial z}\frac{\partial(\hat{\phi}_{2i}-u_{2i}^\star)}{\partial z}dxdz\\
&-\int_{\Omega_1}p_1^\star(x)\left(\frac{\partial\hat{\phi}_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\hat{\phi}_{12}}{\partial x_2}\right)dxdz-\int_{\Omega_2}p_2^\star(x)\left(\frac{\partial\hat{\phi}_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial\hat{\phi}_{22}}{\partial x_2}\right)dxdz\\
&+\sum_{l=1}^{2}\hat{\alpha}_l\int_{\Omega_l}\left(\left|\frac{\partial\hat{\phi}_l}{\partial z}\right|-\left|\frac{\partial u_l^\star}{\partial z}\right|\right)dxdz+\int_{\omega}\hat{k}(|\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2|-|\mathbf{u}_1^\star-\mathbf{u}_2^\star|)dx\\
&\qquad\geq\sum_{l=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}(\hat{f}_{li},\hat{\phi}_{li}-u_{li}^\star),\ \ \forall\hat{\phi}_l\in\Pi(V_l).
\end{aligned}\tag{3.5.7}$$

où

$$\Pi(V_l)=\left\{\overline{\phi}=\left(\hat{\phi}_1,\hat{\phi}_2\right)\in H^1(\Omega)^2:\exists\hat{\phi}_3\ tq\ \ \phi=\left(\hat{\phi}_1,\hat{\phi}_2,\hat{\phi}_3\right)\in V_l\right\}.$$

Preuve. En passant tous les termes non linéaires à droite et les termes linéaires à gauche dans l'inégalité variationnelle (3.3.3). Ensuite, nous appliquons (lim inf) à gauche et lim à droite, en utilisant les résultats de convergence du Théorème 3.5.1, nous déduisons

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\mu_l\int_{\Omega_l}\frac{\partial u_{li}^\star}{\partial z}\frac{\partial u_{li}^\star}{\partial z}dxdz+\int_{\omega}\hat{k}|\mathbf{u}_1^\star-\mathbf{u}_2^\star|dx+\sum_{l=1}^{2}\hat{\alpha}_l\int_{\Omega_l}\left|\frac{\partial u_l^\star}{\partial z}\right|dxdz\\
\leq\ &\sum_{l=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\mu_l\int_{\Omega_l}\frac{\partial u_{li}^\star}{\partial z}\frac{\partial\hat{\phi}_{li}}{\partial z}dxdz+\sum_{l=1}^{2}\int_{\Omega}p_l^\star\frac{\partial\hat{\phi}_{l3}}{\partial z}dxdz+\\
&+\int_{\omega}\hat{k}|\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2|dx+\sum_{l=1}^{2}\hat{\alpha}_l\int_{\Omega_l}\left|\frac{\partial\hat{\phi}_l}{\partial z}\right|dxdz+\\
&+\sum_{l=1}^{2}\int_{\Omega_l}p_l^\star(x)\left(\frac{\partial\hat{\phi}_{l1}}{\partial x_1}+\frac{\partial\hat{\phi}_{l2}}{\partial x_2}\right)dxdz+\sum_{l=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}(\hat{f}_{li},\hat{\phi}_{li}-u_{li}^\star),
\end{aligned}$$

on en déduit directement (5.7). $\blacksquare$

Remarque 3.5.1 ([14, 22]) *Les solutions limites* $\{(\mathbf{u}_1^\star, \mathbf{u}_2^\star), (p_1^\star, p_2^\star)\}$ *vérifient :*

$$\sum_{l=1,2}\int_{\Omega_l}p_l^\star(x)\left(\frac{\partial u_{l1}^\star}{\partial x_1}+\frac{\partial u_{l2}^\star}{\partial x_2}\right)dxdz=0.\tag{3.5.8}$$

Lemme 3.5.1. *L'inégalité variationnelle* (3.5.7) *est équivalente à :*

$$\sum_{l=1}^{2}\mu_l\int_{\Omega_l}\left|\frac{\partial\mathbf{u}_l^\star}{\partial z}\right|^2dxdz+\sum_{l=1}^{2}\hat{\alpha}_l\int_{\Omega_l}\left|\frac{\partial\mathbf{u}_l^\star}{\partial z}\right|dxdz+\int_{\omega}\hat{k}|\mathbf{u}_1^\star-\mathbf{u}_2^\star|dx=\sum_{l=1}^{2}\int_{\Omega_l}\hat{\mathbf{f}}_l\mathbf{u}_l^\star dxdz,\tag{3.5.9}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{2}\mu_l\int_{\Omega_l}\frac{\partial \mathbf{u}_l^\star}{\partial z}\frac{\partial \hat{\phi}_l}{\partial z}dxdz+\int_{\omega}\hat{k}|\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2|dx+\sum_{l=1}^{2}\hat{\alpha}_l\int_{\Omega_l}\left|\frac{\partial \hat{\phi}_l}{\partial z}\right|dxdz\\ &\qquad\geq\ \sum_{l=1}^{2}\int_{\Omega_l}\hat{\mathbf{f}}_l\hat{\phi}_l dxdz,\ \forall\hat{\phi}_l\in\Pi\left(V_l\right).\end{aligned}\tag{3.5.10}$$

Preuve. On choisit $\hat{\phi}_l = 2\mathbf{u}_l^\star$ et $\hat{\phi}_l = (\mathbf{u}_l^\star + \psi_l)$, avec $\psi_l \in \Pi\left(V_l\right)$ respectivement dans (3.5.7), on obtient (3.5.9) et (3.5.10). ■

Théorème 3.5.3. *Avec les mêmes hypothèses du théorème 3.5.2, les solutions limites* $\{(\mathbf{u}_1^\star, \mathbf{u}_2^\star), (p_1^\star, p_2^\star)\}$ *satisfait*

$$\begin{aligned}\sigma_l^* &= \tilde{\sigma}_l^* - \nabla p_l^* \ \textit{dans}\ \Omega_l,\\ \widetilde{\sigma}_l^\star &= \mu_l\tfrac{\partial \mathbf{u}_l^*}{\partial z}+\hat{\alpha}_l.\pi_l,\ l=1,2\end{aligned}\tag{3.5.11}$$

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_1\tfrac{\partial \mathbf{u}_1^*}{\partial z}+\hat{\alpha}_1\pi_1\right) &= \hat{\mathbf{f}}_1-\nabla p_1^\star\ \ \textit{dans}\ L^2(\Omega_1)^2,\\ -\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_2\tfrac{\partial \mathbf{u}_2^*}{\partial z}+\hat{\alpha}_2\pi_2\right) &= \hat{\mathbf{f}}_2-\nabla p_2^\star\ \ \textit{dans}\ L^2(\Omega_2)^2,\end{aligned}\tag{3.5.12}$$

où π_l *obtenu par le théorème de Hahn-Banach* ([17]) *par*

$$\pi_l = \frac{\partial u_l^\star/\partial z}{|\partial u_l^\star/\partial z|},\ l=1,2.$$

Preuve. Avant de commencer la démonstration, nous avons besoin de définir les applications linéaires suivantes :

$$\left.\begin{aligned}&\Lambda:\Pi\left(V_1\right)\times\Pi\left(V_2\right)\longrightarrow L^1(\omega)^2\times L^1(\Omega_1)^2\times L^1(\Omega_2)^2\\ &\left(\hat{\psi}_1,\hat{\psi}_2\right)\longmapsto\Lambda\left(\hat{\psi}_1,\hat{\psi}_2\right)=\left(\hat{k}\left(\hat{\psi}_1-\hat{\psi}_2\right)_{|\omega},\frac{\partial\hat{\psi}_1}{\partial z},\frac{\partial\hat{\psi}_2}{\partial z}\right),\\ &\left(F\circ\Lambda\right)\left(\hat{\psi}_1,\hat{\psi}_2\right)=\sum_{l=1}^{2}\int_{\Omega_l}\mu_l\tfrac{\partial \mathbf{u}_l^*}{\partial z}\frac{\partial\hat{\psi}_l}{\partial z}dxdz-\sum_{l=1}^{2}\int_{\Omega_l}\hat{\mathbf{f}}_l\hat{\psi}_l dxdz.\end{aligned}\right\}\tag{3.5.13}$$

On choisit $\hat{\phi}_1 = \hat{\psi}_1$, $\hat{\phi}_2 = \hat{\psi}_2$, puis $\hat{\phi}_1 = -\hat{\psi}_1$, $\hat{\phi}_2 = -\hat{\psi}_2$ dans (3.5.10), on déduit directement la continuité de F. Donc, par le théorème de Hahn-Banach, il existe
$(\chi, \pi_l) \in L^\infty(\omega)^2 \times L^\infty(\Omega_l)^2$, avec $\|\chi\|_{\omega,\infty} \leq 1$, $\|\pi_l\|_{\Omega_l,\infty} \leq 1$, tel que

$$F\left(\hat{k}\left(\gamma_{|\omega}\hat{\psi}_1-\gamma_{|\omega}\hat{\psi}_2\right),\frac{\partial\hat{\psi}_1}{\partial z},\frac{\partial\hat{\psi}_2}{\partial z}\right)=-\int_{\omega}\chi\hat{k}\left(\hat{\psi}_1-\hat{\psi}_2\right)dx'-\sum_{l=1}^{2}\hat{\alpha}_l\int_{\Omega_l}\pi_l\frac{\partial\hat{\psi}_l}{\partial z}dx'dz.\tag{3.5.14}$$

Pour (3.5.12), on utilise l'analogue de [19; $Theorem$ 4.1]. ■

3.6 Propriétés des solutions et équation de Reynolds

Théorème 3.6.1 *Sous les mêmes hypothèses des théorèmes précédents, nous avons les résultats suivants :*

$$\mu_1\tau_1^\star + \hat{\alpha}_1\pi_1^\star = \mu_2\tau_2^\star + \hat{\alpha}_2\pi_2^\star \text{ dans } L^2(\omega)^2 \tag{3.6.1}$$

$$\hat{k}\,|u_1^\star - u_2^\star| + (\mu_l\tau_l^\star + \hat{\alpha}_l\pi_l^\star)\,.(u_1^\star - u_2^\star) = 0 \quad \text{dans } \omega. \tag{3.6.2}$$

$$\int_\omega \widehat{k}\ \left(|\psi + s_1^\star - s_2^\star| - |s_1^\star - s_2^\star|\right) dx - \int_\omega (\mu_l\tau_l^\star + \hat{\alpha}_l\pi_l^\star)\,\psi dx \geq 0, \forall \psi \in L^2(\omega)^2 \tag{3.6.3}$$

$$\begin{cases} |\mu_l\tau_l^\star + \hat{\alpha}_l\pi_l^\star| < \hat{k} \implies s_1^\star = s_2^\star \\ |\mu_l\tau_l^\star + \hat{\alpha}_l\pi_l^\star| = \hat{k} \implies \exists\lambda \geq 0, \quad s_1^\star = s_2^\star + \lambda\left(\mu_l\tau_l^\star + \hat{\alpha}_l\pi_l^\star\right) \end{cases} \text{dans } \omega, \tag{3.6.4}$$

où

$$s_l^\star = \mathbf{u}_l^\star(x,0),\ \tau_l^\star = \frac{\partial \mathbf{u}_l^\star}{\partial z}(x,0) \text{ et } \pi_l^\star = \pi_l(x,0)\,, \quad l = 1,2.$$

Preuve. De (3.5.13) et (3.5.14), on trouve

$$-\int_\omega \chi\hat{k}\left(\hat{\psi}_1 - \hat{\psi}_2\right) dx' - \sum_{l=1}^{2}\hat{\alpha}_l\int_{\Omega_l}\pi_l\frac{\partial\hat{\psi}_l}{\partial z}dx'dz = \sum_{l=1}^{2}\int_{\Omega_l}\mu_l\frac{\partial \mathbf{u}_l^*}{\partial z}\frac{\partial\hat{\psi}_l}{\partial z}dxdz - \sum_{l=1}^{2}\int_{\Omega_l}\hat{\mathbf{f}}_l\hat{\psi}_l dxdz$$

On peut choisir $\hat{\psi}_l \in H^1_{\Gamma_l\cup\Gamma_{L_l}}(\Omega_l)^2$, $l = 1,2$, où

$$H^1_{\Gamma_l\cup\Gamma_{L_l}}(\Omega_l) = \left\{\hat{\psi}_l \in H^1(\Omega_l) :\ \hat{\psi}_l = 0 \text{ on } \Gamma_l\cup\Gamma_{L_l}\right\},\ l = 1,2$$

En utilisant la formule de Green sur chaque corps Ω_l, $l = 1,2$, on obtient

$$-\int_\omega \chi\hat{k}\left(\hat{\psi}_1 - \hat{\psi}_2\right) dx' - \int_\omega \left\{(\mu_1\tau_1^\star + \hat{\alpha}_1\pi_1^\star)\,\hat{\psi}_1 - (\mu_2\tau_2^\star + \hat{\alpha}_2\pi_2^\star)\,\hat{\psi}_2\right\} dx' = 0, \tag{3.6.5}$$

En particulier pour tout $\hat{\psi}_l \in \mathcal{D}(\omega)^2$, $l = 1,2$, et par la densité de $\mathcal{D}(\omega)$ dans $L(\omega)$, dans le cas particulier [*Chapitre* 2; *Théorème* 2.5.2] pour $\hat{\psi}_1 = \hat{\psi}_2 = \hat{\psi}$, nous trouvons (3.6.1). Si nous choisissons $\hat{\psi}_2 = 0$ ou $\hat{\psi}_1 = 0$ dans (3.6.5), on trouve **:**

$$\chi\hat{k} + (\mu_l\tau_l^\star + \hat{\alpha}_l\pi_l^\star) = 0 \text{ dans } \omega,$$

$$|u_1^\star - u_2^\star| = \chi\ \left(u_1^\star - u_2^\star\right) \text{ dans } \omega.$$

Ce qui montre bien (3.6.2). La preuve de (3.6.3) et (3.6.4) est similaire à celle donnée dans le cas du problème de fluide [12, 22]. ■

Théorème 3.6.2. *Avec les mêmes hypothèses du théorème précédent,* $\{(\mathbf{u}_1^\star, \mathbf{u}_2^\star), (p_1^\star, p_2^\star)\}$ *vérifient l'équation généralisée faible de Reynolds*

$$\int_\omega \left(\frac{h^3}{3} \nabla \left(p_1^\star + p_2^\star\right) + \tilde{F} + \mu_1 \int_0^h \mathbf{u}_1^\star(x', y) dy \ + \mu_2 \int_{-h}^0 \mathbf{u}_2^\star(x', y) dy \ + \right. \tag{3.6.6}$$

$$\left. \hat{\alpha}_1 \int_0^h \tilde{\pi}_1 \left(x', y\right) dy - \hat{\alpha}_2 \int_{-h}^0 \tilde{\pi}_2 \left(x', y\right) dy \right) .\nabla \phi \left(x'\right) dx' = 0, \forall \phi \in H^1(\omega)$$

avec

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}_1 \left(x', y\right) &= \int_0^y \frac{\partial \mathbf{u}_1^\star / \partial \xi}{\left|\partial \mathbf{u}_1^\star / \partial \xi\right|} \left(x', \xi\right) d\xi - h \frac{\partial \mathbf{u}_1^\star / \partial \xi}{\left|\partial \mathbf{u}_1^\star / \partial \xi\right|} \left(x', y\right), \\
\tilde{\pi}_2 \left(x', y\right) &= \int_y^0 \frac{\partial \mathbf{u}_2^\star / \partial \xi}{\left|\partial \mathbf{u}_2^\star / \partial \xi\right|} \left(x', \xi\right) d\xi - h \frac{\partial \mathbf{u}_2^\star / \partial \xi}{\left|\partial \mathbf{u}_2^\star / \partial \xi\right|} \left(x', y\right), \\
\tilde{F}(x') &= \int_0^h F(x', y) dy - hF(x', h).
\end{aligned}$$

Preuve. Pour prouver (3.6.6), nous intégrons deux fois la première équation de (3.5.12) entre 0 et z, et la seconde entre z et 0, on obtient

$$\left| \begin{array}{l}
-\mu_1 \mathbf{u}_1^\star(x', z) \ + \mu_1 s_1^\star - \hat{\alpha}_1 \int_0^z \frac{\partial u_1^\star / \partial \xi}{\left|\partial \mathbf{u}_1^\star / \partial \xi\right|} \left(x', \xi\right) d\xi + \left(\mu_1 \tau_1^\star + \hat{\alpha}_1 \pi_1^\star\right) z \\
\qquad = \int_0^z \int_0^\xi \hat{\mathbf{f}}_1(x', y) dy d\xi - \nabla p_1^\star \frac{z^2}{2}, \\
-\mu_2 \mathbf{u}_2^\star(x', z) \ + \mu_2 s_2^\star + \hat{\alpha}_2 \int_z^0 \frac{\partial \mathbf{u}_2^\star / \partial \xi}{\left|\partial \mathbf{u}_2^\star / \partial \xi\right|} \left(x', \xi\right) d\xi + \left(\mu_2 \tau_2^\star + \hat{\alpha}_2 \pi_2^\star\right) z \\
\qquad = \int_z^0 \int_\xi^0 \hat{\mathbf{f}}_2(x', y) dy d\xi - \nabla p_2^\star \frac{z^2}{2}.
\end{array} \right\} \tag{3.6.7}$$

Ensuite, pour $z = h$ dans la première équation (3.6.7) et dans la seconde $z = -h$, et le fait que $\mathbf{u}_l^\star(x', h) = 0, l = 1, 2$ nous trouvons

$$\left| \begin{array}{l} \mu_1 s_1^\star - \hat{\alpha}_1 \int\limits_0^h \frac{\partial \mathbf{u}_1^\star/\partial\xi}{|\partial \mathbf{u}_1^\star/\partial\xi|}(x',\xi)\, d\xi + (\mu_1\tau_1^\star + \hat{\alpha}_1\pi_1^\star)\, h = \int\limits_0^h \int\limits_0^\xi \hat{\mathbf{f}}_1(x',y)dyd\xi - \nabla p_1^\star \frac{h^2}{2}, \\ \mu_2 s_2^\star + \hat{\alpha}_2 \int\limits_{-h}^0 \frac{\partial \mathbf{u}_2^\star/\partial\xi}{|\partial \mathbf{u}_2^\star/\partial\xi|}(x',\xi)\, d\xi - (\mu_2\tau_2^\star + \hat{\alpha}_2\pi_2^\star)\, h = \int\limits_{-h}^0 \int\limits_\xi^0 \hat{\mathbf{f}}_2(x',y)dyd\xi - \nabla p_2^\star \frac{h^2}{2}. \end{array} \right\} \tag{3.6.8}$$

Maintenant, nous intégrons la première équation de (3.6.7) entre 0 et h, et la seconde entre $-h$ et 0, nous obtenons

$$\left| \begin{array}{l} -\mu_1 \int\limits_0^h \mathbf{u}_1^\star(x',y)dy \; + \mu_1 s_1^\star h - \hat{\alpha}_1 \int\limits_0^h \int\limits_0^y \frac{\partial \mathbf{u}_1^\star/\partial\xi}{|\partial \mathbf{u}_1^\star/\partial\xi|}(x',\xi)\, d\xi dy \\ \quad + \frac{h^2}{2}(\mu_1\tau_1^\star + \hat{\alpha}_1\pi_1^\star) = \int\limits_0^h \int\limits_0^y \int\limits_0^\xi \hat{\mathbf{f}}_1(x',\rho)\, d\rho d\xi dy - \nabla p_1^\star \frac{h^3}{6}, \\ -\mu_2 \int\limits_{-h}^0 \mathbf{u}_2^\star(x',y)dy \; + \mu_2 s_2^\star h + \hat{\alpha}_2 \int\limits_{-h}^0 \int\limits_y^0 \frac{\partial \mathbf{u}_2^\star/\partial\xi}{|\partial \mathbf{u}_2^\star/\partial\xi|}(x',\xi)\, d\xi dy \\ \quad - \frac{h^2}{2}(\mu_2\tau_2^\star + \hat{\alpha}_2\pi_2^\star) = \int\limits_{-h}^0 \int\limits_y^0 \int\limits_\xi^0 \hat{\mathbf{f}}_2(x',\rho)\, d\rho d\xi dy - \nabla p_2^\star \frac{h^3}{6}. \end{array} \right\} \tag{3.6.9}$$

Par (3.6.1) et (3.6.8), on en déduit

$$\begin{aligned} & \mu_1 s_1^\star + \mu_2 s_2^\star - \hat{\alpha}_1 \int\limits_0^h \frac{\partial \mathbf{u}_1^\star/\partial\xi}{|\partial \mathbf{u}_1^\star/\partial\xi|}(x',\xi)\, d\xi + \hat{\alpha}_2 \int\limits_{-h}^0 \frac{\partial \mathbf{u}_2^\star/\partial\xi}{|\partial \mathbf{u}_2^\star/\partial\xi|}(x',\xi)\, d\xi \\ = & \int\limits_0^h \int\limits_0^\xi \hat{\mathbf{f}}_1(x',y)dyd\xi + \int\limits_{-h}^0 \int\limits_\xi^0 \hat{\mathbf{f}}_2(x',y)dyd\xi - \nabla p_1^\star \frac{h^2}{2} - \nabla p_2^\star \frac{h^2}{2}, \end{aligned} \tag{3.6.10}$$

Et de (5.15) et (3.6.9), on déduit

$$\begin{aligned}
&\mu_1 s_1^\star h + \mu_2 s_2^\star h - \hat{\alpha}_1 \int_0^h \int_0^y \frac{\partial \mathbf{u}_1^\star/\partial\xi}{|\partial \mathbf{u}_1^\star/\partial\xi|}(x',\xi)\, d\xi dy + \hat{\alpha}_2 \int_{-h}^0 \int_y^0 \frac{\partial \mathbf{u}_2^\star/\partial\xi}{|\partial \mathbf{u}_2^\star/\partial\xi|}(x',\xi)\, d\xi dy \\
= \;& \mu_1 \int_0^h \mathbf{u}_1^\star(x',y)dy \; + \mu_2 \int_{-h}^0 \mathbf{u}_2^\star(x',y)dy \; + \int_0^h \int_0^y \int_0^\xi \hat{\mathbf{f}}_1(x',\rho)\, d\rho d\xi dy \\
&+ \int_{-h}^0 \int_y^0 \int_\xi^0 \hat{\mathbf{f}}_2(x',\rho)\, d\rho d\xi dy - \nabla p_1^\star \frac{h^3}{6} - \nabla p_2^\star \frac{h^3}{6}.
\end{aligned} \tag{3.6.11}$$

En multipliant (3.6.10) par $-h$ et l'addition avec (3.6.11) nous obtenons

$$\begin{aligned}
&-\hat{\alpha}_1 \int_0^h \int_0^y \frac{\partial \mathbf{u}_1^\star/\partial\xi}{|\partial \mathbf{u}_1^\star/\partial\xi|}(x',\xi)\, d\xi dy + \hat{\alpha}_2 \int_{-h}^0 \int_y^0 \frac{\partial \mathbf{u}_2^\star/\partial\xi}{|\partial \mathbf{u}_2^\star/\partial\xi|}(x',\xi)\, d\xi dy + \\
&+ h\hat{\alpha}_1 \int_0^h \frac{\partial \mathbf{u}_1^\star/\partial\xi}{|\partial \mathbf{u}_1^\star/\partial\xi|}(x',\xi)\, d\xi - h\hat{\alpha}_2 \int_{-h}^0 \frac{\partial \mathbf{u}_2^\star/\partial\xi}{|\partial \mathbf{u}_2^\star/\partial\xi|}(x',\xi)\, d\xi \\
= \;& \mu_1 \int_0^h \mathbf{u}_1^\star(x',y)dy \; + \mu_2 \int_{-h}^0 \mathbf{u}_2^\star(x',y)dy \; + \int_0^h F(x',y)dy - hF(x',h) + \frac{h^3}{3}\nabla\left(p_1^\star + p_2^\star\right)
\end{aligned}$$

avec

$$F(x',y) = \int_0^y \int_0^\xi \hat{\mathbf{f}}_1(x',\rho) d\rho d\xi + \int_{-y}^0 \int_\xi^0 \hat{\mathbf{f}}_2(x',\rho) d\rho d\xi.$$

Ce qui donne (3.6.6). ■

Théorème 3.6.3 *La solution* $(\mathbf{u}_1^\star, \mathbf{u}_2^\star)$ *du problème limite* (3.5.7) *est unique dans* H_z.

Preuve. Supposons que le problème (3.5.7) a une solution $(\mathbf{v}_1^\star, \mathbf{v}_2^\star)$ différente de $(\mathbf{u}_1^\star, \mathbf{u}_2^\star)$, donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^2 \mu_1 \int_{\Omega_1} \frac{\partial v_{1i}^\star}{\partial z} \frac{\partial(\hat{\phi}_{1i} - v_{1i}^\star)}{\partial z} dxdz + \sum_{i=1}^2 \mu_2 \int_{\Omega_2} \frac{\partial v_{2i}^\star}{\partial z} \frac{\partial(\hat{\phi}_{2i} - v_{2i}^\star)}{\partial z} dxdz \\
&- \int_{\Omega_1} p_1^\star(x) \left(\frac{\partial \hat{\phi}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\phi}_{12}}{\partial x_2} \right) dxdz - \int_{\Omega_2} p_2^\star(x) \left(\frac{\partial \hat{\phi}_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\phi}_{22}}{\partial x_2} \right) dxdz \\
&+ \sum_{l=1}^2 \hat{\alpha}_l \int_{\Omega_l} \left(\left| \frac{\partial \hat{\phi}_l}{\partial z} \right| - \left| \frac{\partial v_l^\star}{\partial z} \right| \right) dxdz + \int_\omega \hat{k}(|\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2| - |\mathbf{v}_1^\star - \mathbf{v}_2^\star|) dx \\
&\qquad \geq \sum_{l=1}^2 \sum_{i=1}^2 (\hat{f}_{li}, \hat{\phi}_{li} - v_{li}^\star), \quad \forall \hat{\phi}_l \in \Pi(V_l).
\end{aligned} \tag{3.6.12}$$

En prenant $\widehat{\varphi}_1 = \mathbf{v}_1^\star$ et $\widehat{\varphi}_2 = \mathbf{v}_2^\star$ dans (3.5.7), puis $\widehat{\varphi}_1 = \mathbf{u}_1^\star$ et $\widehat{\varphi}_2 = \mathbf{u}_2^\star$ dans (3.6.12) puis en additionnant les deux inégalités, on trouve pour $\overline{W}_1 = \mathbf{u}_1^\star - \mathbf{v}_1^\star$ et $\overline{W}_2 = \mathbf{u}_2^\star - \mathbf{v}_2^\star$

$$\mu_1 \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{W}_{1i}\right) . \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{W}_{1i}\right) dx'dz + \mu_2 \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{W}_{2i}\right) . \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{W}_{2i}\right) dx'dz \leq 0$$

Maintenant l'inégalité de Poincaré, nous donnons

$$\left\|\overline{W}_1\right\|_{H_z(\Omega_1)} = 0 \quad \text{et} \quad \left\|\overline{W}_2\right\|_{H_z(\Omega_2)} = 0.$$

Donc $\left\|\left(\overline{W}_1, \overline{W}_2\right)\right\|_{H_z} = 0$.

On en déduit que $(\mathbf{u}_1^\star, \mathbf{u}_2^\star) = (\mathbf{v}_1^\star, \mathbf{v}_2^\star)$ dans H_z. ■

Remarque 3.6.1. L'unicité de la pression n'est pas vraie pour le problème limite, mais la pression totale appliquée sur la surface commune ω est toujours constante. Pour justifier, on utilise (3.6.6) pour $\{(\mathbf{v}_1^\star, \mathbf{v}_2^\star), (q_1^\star, q_2^\star)\}$:

$$\int_\omega \left(\frac{h^3}{3} \nabla\left(q_1^\star + q_2^\star\right) + \tilde{F} + \mu_1 \int_0^h \mathbf{v}_1^\star(x', y) dy \; + \mu_2 \int_{-h}^0 \mathbf{v}_2^\star(x', y) dy \; + \right.$$
$$\left. \hat{\alpha}_1 \int_0^h \tilde{\pi}_1\left(x', y\right) dy - \hat{\alpha}_2 \int_{-h}^0 \tilde{\pi}_2\left(x', y\right) dy \right) . \nabla\phi\left(x'\right) dx' = 0, \forall \phi \in H^1(\omega) \qquad (3.6.13)$$

En retranchant (3.6.6) du (3.6.13), puis on prend $\phi = (p_1^\star + p_2^\star) - (q_1^\star + q_2^\star)$, on trouve

$$\left\|\nabla\left\{(p_1^\star + p_2^\star) - (q_1^\star + q_2^\star)\right\}\right\|_{L^2(\omega)} = 0,$$

et d'après l'inégalité de Poincaré $\left(\|\psi\|_{L^2(\omega)} \leq C\,\|\nabla\psi\|_{L^2(\omega)}\right)$, on déduit alors

$$p_1^\star + p_2^\star = q_1^\star + q_2^\star \text{ sur } \omega.$$

d'où l'unicité de la pression totale appliquée sur ω.

Chapitre 4

Étude d'un problème d'évolution dans un domaine mince avec conditions de Fourier et de Tresca

Résumé

Nous étudions dans ce chapitre, l'analyse asymptotique d'un fluide incompressible dans un régime dynamique et mince de dimension trois avec des conditions aux limites mixtes et la loi de frottement de type Tresca. L'énoncé du problème et sa formulation variationnelle sont reformulés dans un domaine fixe. Dans ce cas, les estimations de la vitesse et de la pression sont prouvées et seront utiles pour donner l'équation spécifique de Reynolds associée à des inégalités variationnelles ainsi la preuve de l'unicité de la solution.

4.1 Introduction et position du problème

Dans ce chapitre on étudie le comportement asymptotique d'un fluide de Stokes en régime dynamique dans un domaine mince Ω^{ε} avec frottement de Tresca sur une partie du bord. Le domaine Ω^{ε} est un film mince défini par

$$\Omega^{\varepsilon}=\{x=(x',x_3)\in\mathbb{R}^3;x'\in\omega,\ 0<x_3<\varepsilon h\left(x'\right)\},$$

avec

$$h\in C^2\left(\omega\right),\exists\ \overline{h},\ \underline{h}>0\ :\quad \overline{h}<h\left(x'\right)<\underline{h}.$$

Nous rappelons que Γ^{ε} est sa frontière

$$\Gamma^{\varepsilon}=\bar{\omega}\cup\bar{\Gamma}_1^{\varepsilon}\cup\bar{\Gamma}_L^{\varepsilon}.$$

Le vecteur normal extérieur unitaire à Γ^{ε} sera noté $\nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$.
La normale unitaire extérieure à ω est le vecteur $(0,0,-1)$.
On définit les composantes normales et tangentielles u_{ν}^{ε} et $u_{\tau}^{\varepsilon}=\left(u_{\tau_i}^{\varepsilon}\right)_{1\leq i\leq 3}$ de la vitesse par

$$\begin{aligned} u_{\nu}^{\varepsilon} &= u^{\varepsilon}.\nu,\\ u_{\tau_i}^{\varepsilon} &= u_i^{\varepsilon}-u_{\nu}^{\varepsilon}.\nu_i. \end{aligned}$$

De même, les composantes normales et tangentielles $\sigma_{\nu}^{\varepsilon}$ et $\sigma_{\tau}^{\varepsilon}=\left(\sigma_{\tau_i}^{\varepsilon}\right)_{1\leq i\leq 3}\in\mathbb{R}^3$ du tenseur des contraintes sont définies par

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu}^{\varepsilon} &= \left(\sigma^{\varepsilon}.\nu_i\right).\nu_j,\\ \sigma_{\tau_i}^{\varepsilon} &= \sigma_{ij}^{\varepsilon}.\nu_j-\left(\sigma_{\nu}^{\varepsilon}\right).\nu_i, \end{aligned}$$

où le tenseur σ^{ε} du fluide de Stokes est décomposé comme suit

$$\sigma_{ij}^{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon},p^{\varepsilon}\right)=-p^{\varepsilon}\delta_{ij}+2\mu d_{ij}\left(u^{\varepsilon}\right),\tag{4.1.1}$$

avec

- u^{ε} est la vitesse du fluide,
- p^{ε} est sa pression,
- μ est sa viscosité,

- δ_{ij} est le symbole de Krönecker,
- $(d_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ est le tenseur des taux de déformation :

$$d_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\ 1 \leq i, j \leq 3.$$

Les équations qui gouvernent l'écoulement dynamique du fluide dans le domaine Ω^ε sont les suivantes :

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{Div}(\sigma^\varepsilon) = f^\varepsilon \quad , \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \times]0, T[\tag{4.1.1}$$

$$\sigma^\varepsilon_{ij}(u^\varepsilon, p^\varepsilon) = -p^\varepsilon\delta_{ij} + 2\mu d_{ij}(u^\varepsilon), \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \times]0, T[\tag{4.1.2}$$

$$\operatorname{div} u^\varepsilon = 0, \qquad \text{dans } \Omega^\varepsilon \times]0, T[\tag{4.1.3}$$

Afin d'écrire les conditions aux limites pour la vitesse sur la frontière de Ω^ε, on introduit d'abord la fonction vectorielle g telle que

$$g(t) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\varepsilon)^3 \text{ et } \int_{\Gamma^\varepsilon} g(t).\nu\ ds = 0, \forall t \in]0, T[$$

De la référence [8], on peut montrer par que cette condition est équivalente à l'existence d'un relèvement $G^\varepsilon(t) \in H^1(\Omega_\varepsilon)^3$ de $g(t)$ sur Ω^ε pour tout $t \in [0, T]$ vérifiant

$$\operatorname{div} G^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \quad G^\varepsilon = g \text{ sur } \Gamma^\varepsilon_L, \quad G^\varepsilon.\nu = 0 \text{ sur } \omega \cup \Gamma^\varepsilon_1.$$

La vitesse sur le bord Γ^ε_L est connue et donnée par la fonction g.

$$u^\varepsilon = g \quad \text{sur } \Gamma^\varepsilon_L \times [0, T]. \tag{4.1.4}$$

Sur $\omega \cup \Gamma^\varepsilon_1$ la vitesse est supposée inconnue et elle vérifie la condition de non-pénétration :

$$u^\varepsilon \cdot \nu = 0 \ \text{ sur } (\omega \cup \Gamma^\varepsilon_1) \times]0, T[, \tag{4.1.5}$$

nous supposons la condition non linéaire de Fourier

$$\sigma_\tau(u^\varepsilon) = -l^\varepsilon u^\varepsilon \ \text{ sur } \Gamma^\varepsilon_1 \times]0, T[, \tag{4.1.6}$$

telle que $l^\varepsilon > 0$ est une constante donnée.

Sur ω, supposons qu'il existe le frottement qui est modélisé par la loi non linéaire de Tresca :

$$\left.\begin{array}{r} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \implies u_\tau^\varepsilon(t) = s \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \implies \exists \beta \geq 0 \text{ tel que } u_\tau^\varepsilon(t) = s - \beta\sigma_\tau^\varepsilon \end{array}\right\} \text{sur } \omega \times]0, T[\,, \tag{4.1.7}$$

où $|.|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$, s la vitesse de cisaillement et k^ε le seuil de frottement.

Le problème complet consiste donc à trouver un champ de vitesse u^ε et une pression p^ε vérifiant les équations (4.1.1)-(4.1.7) avec la condition initiale suivante

$$u^\varepsilon(x, 0) = 0, \ \ \forall x \in \Omega^\varepsilon. \tag{4.1.8}$$

Afin de donner la formulation variationnelle du problème (4.1.1)-(4.1.8) , nous allons établir le lemme suivant :

Lemme 4.1.1 ([19]) *La condition* (4.1.7) *est équivalente à la relation suivante :*

$$(u_\tau^\varepsilon - s)\,\sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon|u_\tau^\varepsilon - s| = 0 \quad \text{sur} \ \ \omega \times]0, T[\,. \tag{4.1.10}$$

4.2 Formulation variationnelle du problème

Nous commençons par décrire le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler, et nous définissons la formulation variationnelle du problème (4.1.1)-(4.1.8). Pour l'ouvert Ω^ε on définit l'espace suivant :

$$H^1(\Omega^\varepsilon)^3 = \left\{ v \in \left(L^2(\Omega^\varepsilon)\right)^3 : \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega^\varepsilon)\,, \ \forall i, j = 1, ..., 3 \right\},$$

l'espace de Sobolev muni de la norme $||.||_{1.\Omega^\varepsilon}$, où la norme de $\left(L^2(\Omega^\varepsilon)\right)^3$ sera noté $||.||_{0.\Omega^\varepsilon}$. Nous utilisons les ensembles et les espaces vectoriels suivants

$$K^\varepsilon = \left\{\phi \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3 : \phi = G^\varepsilon \text{ on } \Gamma_L^\varepsilon, \ \phi.\nu = 0 \text{ on } \omega \cup \ \Gamma_1^\varepsilon\right\},$$

$$K_{\text{div}}^\varepsilon = \{\phi \in K^\varepsilon : \text{div}(\phi) = 0\}\,,$$

$$H^1_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega^\varepsilon) = \left\{\varphi \in H^1(\Omega^\varepsilon) : \ \ \varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon \ \right\},$$

$$L_0^2(\Omega^\varepsilon) = \left\{ q \in L^2(\Omega^\varepsilon) : \int_{\Omega^\varepsilon} q dx = 0 \right\}.$$

Pour simplifier l'écriture, on pose

$$a(u^\varepsilon,\phi) = 2\mu\int_{\Omega^\varepsilon} d_{ij}\left(u^\varepsilon\right) d_{ij}\left(\phi\right) dx, \tag{4.2.1}$$

$$\breve{a}(u^\varepsilon,\phi-u^\varepsilon) = a(u^\varepsilon,\phi-u^\varepsilon)+l^\varepsilon\int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon.\left(\phi-u^\varepsilon\right)d\tau, \tag{4.2.2}$$

$$(f,\varphi) = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i\phi_i dx. \tag{4.2.3}$$

Pour $\phi\in H^1(\Omega^\varepsilon)^3$, on définit la fonctionnelle J^ε par

$$J^\varepsilon(\phi)=\int_\omega k^\varepsilon\left|\phi-s\right|\ dx' \tag{4.2.4}$$

Remarque 4.2.1. La forme bilinéaire $\breve{a}(.,.)$ est coercive et continue sur $K^\varepsilon_{\text{div}}\times K^\varepsilon_{\text{div}}$. Soient ψ et ϕ des éléments de $K^\varepsilon_{\text{div}}$. Par l'inégalité de Korn et de Cauchy-Schwartz, on obtient ([27]) :

$$\breve{a}(\psi,\psi)=a(\psi,\psi)+l^\varepsilon\int_{\Gamma_1^\varepsilon}\psi^2 d\tau\geq 2\mu C_K\left\|\psi\right\|^2_{1,\Omega^\varepsilon},$$
$$\left|\breve{a}(\varphi,\psi)\right|\leq\left(2\mu+l^\varepsilon C_0\left(\Omega^\varepsilon\right)\right)\left\|\varphi\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}\left\|\psi\right\|_{1,\Omega^\varepsilon},$$

où $C_k>0$ et $C\left(\Omega^\varepsilon\right)>0$.

La fonction J^ε est convexe, semi-continue inférieurement et propre sur $K^\varepsilon_{\text{div}}$ et il existe ([14]) une constante positive $C_0\left(\Omega^\varepsilon\right)>0$ telle que

$$\left|J^\varepsilon(\phi)-J^\varepsilon(\psi)\right|\leq|\omega|^{1/2}\left\|k^\varepsilon\right\|_{\infty,\omega}C_0\left(\Omega^\varepsilon\right)\left\|\varphi-\psi\right\|_{1,\Omega^\varepsilon},\ \forall\left(\varphi,\psi\right)\in K^\varepsilon_{\text{div}}\times K^\varepsilon_{\text{div}}.$$

Lemme 4.2.1. *Si u^ε et p^ε sont des solutions du problème* (4.1.1)-(4.1.8)*, alors elles vérifient le problème variationnel suivant :*

$$\begin{cases} \textit{Trouver } \{u^\varepsilon,\, p^\varepsilon\} \textit{ où } u^\varepsilon(t)\in K^\varepsilon_{\text{div}}\ ,\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\in K^\varepsilon \text{ et } p^\varepsilon(t)\in L^2_0(\Omega^\varepsilon)\ ,\ \textit{telle que} \\ \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t),\phi-u^\varepsilon(t)\right)+a(u^\varepsilon(t),\phi-u^\varepsilon(t))+l^\varepsilon\displaystyle\int_{\Gamma_1^\varepsilon}u^\varepsilon.\left(\phi-u^\varepsilon\right)d\tau+ \\ -\int_{\Omega^\varepsilon}p^\varepsilon \text{ div } \phi dx+J^\varepsilon(\phi)-J^\varepsilon(u^\varepsilon(t))\geq(f^\varepsilon,\phi-u^\varepsilon(t)),\ \forall t\ \in[0,T]\ ,\ \forall\phi\in K^\varepsilon, \\ u^\varepsilon(0)=0. \end{cases}$$

Preuve. En multipliant l'équation (4.1.2) par $(\phi-u^\varepsilon)$, où $\phi\in K^\varepsilon$ et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t),\phi-u^\varepsilon(t)\right)+\int_{\Omega^\varepsilon}\sigma^\varepsilon_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi_i-u^\varepsilon_i(t)\right)dx- \\ &-\int_{\Gamma^\varepsilon}\sigma^\varepsilon_{ij}\nu_j\left(\phi_i-u^\varepsilon_i(t)\right)ds=\int_{\Omega^\varepsilon}f^\varepsilon_i\left(\phi_i-u^\varepsilon_i(t)\right)dx,\quad\forall t\ \in[0,T]\ .\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Les conditions aux limites $(4.1.4)-(4.1.5)$ et le fait que $\sigma_{ij}^{\varepsilon}\nu_j = \sigma_{\tau_i}^{\varepsilon} + \sigma_{\nu}^{\varepsilon}\nu_i$, impliquent que :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma^{\varepsilon}} \sigma_{ij}^{\varepsilon}\nu_j\left(\varphi_i - u_i^{\varepsilon}\right) d\sigma &= \int_{\omega\cup\Gamma_1^{\varepsilon}} \sigma_{ij}^{\varepsilon}\nu_j\left(\varphi_i - u_i^{\varepsilon}\right) dx' \\
&= \int_{\omega\cup\Gamma_1^{\varepsilon}} \sigma_{\tau_i}^{\varepsilon}\left(\varphi_i - u_i^{\varepsilon}\right) dx' + \int_{\omega\cup\Gamma_1^{\varepsilon}} \sigma_{\nu}^{\varepsilon}\nu_i\left(\varphi_i - u_i^{\varepsilon}\right) dx' \\
&= \int_{\omega\cup\Gamma_1^{\varepsilon}} \sigma_{\tau_i}^{\varepsilon}\left(\varphi_i - u_i^{\varepsilon}\right) dx'.
\end{aligned}$$

De $(4.1.6)-(4.1.7)$ et si on ajoute et on retranche le terme $\int_{\omega} k^{\varepsilon}\left(|\varphi - s| - |u^{\varepsilon} - s|\right) dx'$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma^{\varepsilon}} \sigma_{ij}^{\varepsilon}\nu_j\left(\varphi_i - u_i^{\varepsilon}\right) d\sigma + \int_{\omega} k^{\varepsilon}\left(|\varphi - s| - |u^{\varepsilon} - s|\right) dx' \\
= \quad & -l^{\varepsilon}\int_{\Gamma_1^{\varepsilon}} u^{\varepsilon}.\left(\phi - u^{\varepsilon}\right) d\tau + \int_{\omega} \sigma_{\tau}^{\varepsilon}.\left(\varphi - u^{\varepsilon}\right) dx' + \int_{\omega} k^{\varepsilon}\left(|\varphi - s| - |u^{\varepsilon} - s|\right) dx'.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4.1.1, on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma^{\varepsilon}} \sigma_{ij}^{\varepsilon}\nu_j\left(\varphi_i - u_i^{\varepsilon}\right) d\sigma + \int_{\omega} k^{\varepsilon}\left(|\varphi - s| - |u^{\varepsilon} - s|\right) dx' \\
= \quad & -l^{\varepsilon}\int_{\Gamma_1^{\varepsilon}} u^{\varepsilon}.\left(\phi - u^{\varepsilon}\right) d\tau + \int_{\omega} (\sigma_{\tau}^{\varepsilon}.\left(\varphi - s\right) + k^{\varepsilon}|\varphi - s|) dx'.
\end{aligned}$$

Mais le second terme du côté droit est positif, donc (4.2.5) est équivalente à :

$$\left.\begin{array}{c}
\left(\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t), \phi - u^{\varepsilon}(t)\right) + a(u^{\varepsilon}(t), \phi - u^{\varepsilon}(t)) + l^{\varepsilon}\displaystyle\int_{\Gamma_1^{\varepsilon}} u^{\varepsilon}.\left(\phi - u^{\varepsilon}(t)\right) d\tau - \int_{\Omega^{\varepsilon}} p^{\varepsilon} \operatorname{div} \phi dx \\
+J^{\varepsilon}(\phi) - J^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}(t)) \geq (f^{\varepsilon}, \phi - u^{\varepsilon}(t)), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \phi \in K^{\varepsilon}, \\
u^{\varepsilon}(0) = 0,
\end{array}\right\} \tag{4.2.6}$$

où la fonctionnelle J^{ε} est déjà définie dans (4.2.4).

Si nous choisissons la fonction test ϕ dans $K_{\text{div}}^{\varepsilon}$, on trouve le problème variationnel en vitesse

$$\left.\begin{array}{c}
\left(\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t), \phi - u^{\varepsilon}(t)\right) + a(u^{\varepsilon}(t), \phi - u^{\varepsilon}(t)) + l^{\varepsilon}\displaystyle\int_{\Gamma_1^{\varepsilon}} u^{\varepsilon}.\left(\phi - u^{\varepsilon}(t)\right) d\tau \\
+J^{\varepsilon}(\phi) - J^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}(t)) \geq (f^{\varepsilon}, \phi - u^{\varepsilon}(t)), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \phi \in K_{\text{div}}^{\varepsilon}, \\
u^{\varepsilon}(0) = 0.
\end{array}\right\} \tag{4.2.7}$$

4.3 Résultat d'existence et d'unicité du problème variationnel

Dans la suite nous établissons un résultat d'existence et d'unicité. Tout d'abord, on régularise la fonctionnelle J^ε par une famille de fonctionnelles J_ζ^ε $(\zeta > 0)$, telle que

$$J_\zeta^\varepsilon(v) = \int_\omega k^\varepsilon(x,t)\varphi_\zeta\ (|v_\tau|)dx',$$

où $\varphi_\zeta\ (\lambda) = \dfrac{1}{1+\zeta}\ |\lambda|^{(1+\zeta)}$.
On a donc

$$\left\langle \left(\ J_\zeta^\varepsilon\right)'(v)\,,\phi\right\rangle = \int_\omega k^\varepsilon \psi_\zeta(v_\tau).\phi_\tau dx',$$

où $\psi_\zeta(v_\tau) = |v_\tau|^{\zeta-1}\, v_\tau$. (Voir par exemple [9, 20]).
En remplacant dans (4.2.7) la fonction ϕ par $u_\zeta^\varepsilon(t) \pm \lambda\phi$, où $\lambda > 0$ et faisant tendre λ vers 0, on trouve l'équation approchée suivante :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\,,\phi\right) + a\left(u_\zeta^\varepsilon(t)\,,\phi\right) + l^\varepsilon\int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon(t)\,.\phi d\tau \\ &+\left\langle \left(\ J_\zeta^\varepsilon\right)'\left(u_\zeta^\varepsilon(t)\right),\phi\right\rangle = (f^\varepsilon(t)\,,\phi),\ \forall\phi\in K_{\mathrm{div}}^\varepsilon \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

avec

$$u_\zeta^\varepsilon(0) = 0 \tag{4.3.2}$$

Théorème 4.3.1. *Supposons que*

$$f^\varepsilon,\ \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t} \in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right),\ f^\varepsilon(0)\in L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3, \tag{4.3.3}$$

$$k^\varepsilon \in C_0^\infty(\omega),\ k^\varepsilon > 0 \text{ ne depend pas de } t, \tag{4.3.4}$$

$$u^\varepsilon(0) = 0 \text{ sur } \Gamma^\varepsilon, \tag{4.3.5}$$

Alors, il existe un et un seul u^ε dans l'espace $L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)\cap L^2\left(0,T;H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)$ satisfaisant le problème (4.2.7) *avec*

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \in L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)\cap L^2\left(0,T;H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right). \tag{4.3.6}$$

Preuve de l'existence de la solution. Comme dans [9] nous allons commencer la démonstration en supposant que k^ε peut dépendre de t, avec

$$k^\varepsilon, \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t} \in L^\infty\left(\omega \times]0,T[\right) .$$

L'équation (4.3.1) pour $\phi = u^\varepsilon_\zeta(t)$, et comme $\left\langle \left(J^\varepsilon_\zeta\right)'\left(u^\varepsilon_\zeta\right), u^\varepsilon_\zeta \right\rangle \geq 0$, nous donne ce qui suit

$$\left(\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t), u^\varepsilon_\zeta(t)\right) + a\left(u^\varepsilon_\zeta(t), u^\varepsilon_\zeta(t)\right) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \left|u^\varepsilon_\zeta(t)\right|^2 d\tau \leq \left(f^\varepsilon(t), u^\varepsilon_\zeta(t)\right)$$

donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u^\varepsilon_\zeta(t)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} + a(u^\varepsilon_\zeta(t), u^\varepsilon_\zeta(t)) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \left|u^\varepsilon_\zeta(t)\right|^2 d\tau \leq (f^\varepsilon(t), u^\varepsilon_\zeta(t)) \tag{4.3.7}$$

Par la coercivité de la forme $\breve{a}$ comme dans la remarque 4.2.1 et l'intégration de (4.3.7) en t, on trouve

$$\left\|u^\varepsilon_\zeta(t)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} + 4\mu C_K \int_0^t \left\|u^\varepsilon_\zeta(\sigma)\right\|^2_{1,\Omega^\varepsilon} d\sigma \leq 2\int_0^t \left(f^\varepsilon(\sigma), u^\varepsilon_\zeta(\sigma)\right) d\sigma \tag{4.3.8}$$

où C_K est une constante de Korn.

Comme

$$\begin{aligned} 2\int_0^t \left(f^\varepsilon(\sigma), u^\varepsilon_\zeta(\sigma)\right) d\sigma \qquad & \leq 2\int_0^t \left\|f^\varepsilon(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon} \left\|\left(u^\varepsilon_\zeta\right)(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon} d\sigma \\ & \leq \int_0^t \left\|f^\varepsilon(\sigma)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} d\sigma + \int_0^t \left\|\left(u^\varepsilon_\zeta\right)(\sigma)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} d\sigma, \end{aligned}$$

alors, de (4.3.8), il résulte

$$\left\|u^\varepsilon_\zeta(t)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} + \int_0^t \left\|u^\varepsilon_\zeta(\sigma)\right\|^2_{1,\Omega^\varepsilon} d\sigma \leq c + c\int_0^t \left\|u^\varepsilon_\zeta(\sigma)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} d\sigma +$$
$$2\int_0^t \left(f^\varepsilon(\sigma), u^\varepsilon_\zeta(\sigma)\right) \sigma \leq c(1 + \int_0^t \left\|u^\varepsilon_\zeta(\sigma)\right\|^2_{1,\Omega^\varepsilon} d\sigma) +$$
$$2\int_0^t \left\|f^\varepsilon(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon} \left\|\left(u^\varepsilon_\zeta\right)(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon} d\sigma.$$

D'autre part de (4.3.3), on trouve

$$\int_0^t \left\|f^\varepsilon(\sigma)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} \leq \text{constante},$$

d'où

$$\left\|u_\zeta^\varepsilon(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2+\int_0^t\left\|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma\leq c\left(1+\int_0^t\left\|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma\right). \tag{4.3.9}$$

En particulier de (4.3.9), on a

$$\left\|u_\zeta^\varepsilon(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2\leq c\left(1+\int_0^t\left\|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma\right),$$

et d'après le lemme de Gronwall, on trouve

$$\left\|u_\zeta^\varepsilon(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2\leq c. \tag{4.3.10}$$

De $(4.3.9)-(4.3.10)$, on a

$$\left\|u_\zeta^\varepsilon(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2+\int_0^t\left\|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma\leq c \tag{4.3.11}$$

où c est une constante indépendante de ζ.

On dérive (4.3.1) en t, on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t),\phi\right)+a\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t),\phi\right)+l^\varepsilon\int_0^t\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma).\phi d\sigma+\left(\frac{d}{dt}\left(J_\zeta^\varepsilon\right)'\left(u_\zeta^\varepsilon(t)\right),\phi\right)=\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t),\phi\right).$$

Pour $\phi=\dfrac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)$, on trouve

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t),\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)+a\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t),\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)+l^\varepsilon\int_0^t\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma).\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)d\sigma\\+\left\langle\frac{d}{dt}\left(J_\zeta^\varepsilon\right)'\left(u_\zeta^\varepsilon(t)\right),\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\rangle=\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t),\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Mais

$$\begin{aligned}\left\langle\left(J_\zeta^\varepsilon\right)'(v),\phi\right\rangle&=\int_\omega k^\varepsilon\psi_\zeta(v_\tau).\phi_\tau dx'\\&=\int_\omega k^\varepsilon\left|v_\tau\right|^{\zeta-1}v_\tau.\phi_\tau dx'\end{aligned}$$

où $\psi_\zeta(v_\tau)=\left|v_\tau\right|^{\zeta-1}v_\tau$.

En observant la monotonie de l'opérateur $\left(J_\zeta^\varepsilon\right)'$, et par conséquent

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d}{dt}\left(J_\zeta^\varepsilon\right)'(\phi(t)),\phi'(t)\right\rangle &= \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}\psi_\zeta(\phi_\tau(t)).\phi_\tau'(t)dx'+ \\ +\int_\omega k^\varepsilon \lim_{h\to 0}\frac{\psi_\zeta(\phi_\tau(t+h))-\psi_\zeta(\phi_\tau(t))}{h}.\frac{\phi_\tau(t+h)-\phi_\tau(t)}{h}dx' \\ &\geq \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}\psi_\zeta(\phi_\tau(t)).\phi_\tau'(t)dx'.\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

De $(4.3.12)-(4.3.13)$ et si on remplace la fonction ϕ par $\dfrac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + a\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t),\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + l^\varepsilon\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 \\ +\int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial t}\psi_\zeta\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)dx' \leq \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t),\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right).\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

D'autre part, il existe $\rho>0$ et $\alpha>0$, tels que

$$a(v,v)+\rho\left\|v\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \geq \alpha\left\|v\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2.$$

En intégrant (4.3.14) de 0 à t, on en déduit

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \alpha\int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + 2l^\varepsilon\int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 d\sigma \leq \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \\ +\rho\int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + 2\int_0^t \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma),\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right)d\sigma \\ -2\int_0^t\int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial t}\psi_\zeta\left(\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau(\sigma)\right)dx'd\sigma,\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

et comme $\dfrac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}\in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)$, alors avec l'inégalité de Cauchy-Shwartz et Young, on déduit

$$\begin{aligned}2\int_0^t \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma),\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right)d\sigma &\leq 2\int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}d\sigma \\ &\leq \int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma + \int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma.\end{aligned}$$

Donc, l'inéquation (4.3.15) devient comme suit :

$$\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2+\alpha\int_0^t\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma+2l^\varepsilon\int_0^t\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 d\sigma\leq\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2+$$
$$+(\rho+1)\int_0^t\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma+\int_0^t\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma+ \tag{4.3.16}$$
$$+2\left|\int_0^t\int_\omega\frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial t}\psi_\zeta\left(\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau(\sigma)\right)dx'd\sigma\right|.$$

On fait une estimation du terme $\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2$ par (4.3.1)-(4.3.2) et l'hypothèse (4.3.3) comme ce qui suit

$$\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0),\phi\right)=(f^\varepsilon(0),\phi),\ \forall\phi\in K_{\mathrm{div}}^\varepsilon\ ,$$

d'où

$$\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)=f^\varepsilon(0)\in L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3. \tag{4.3.17}$$

Et comme $\frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}=0$ (l'hypothèse (4.3.4)), donc le dernier terme de (4.3.16) est :

$$\int_0^t\int_\omega\frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial t}\psi_\zeta\left(\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau(\sigma)\right)dx'd\sigma=$$
$$\int_\omega\frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}(x',0).\psi_\zeta\left(\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau(t)\right)dx'-\int_\omega\frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}(x',0)\psi_\zeta\left(\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau(0)\right)dx' \tag{4.3.18}$$
$$+\int_0^t\int_\omega\frac{\partial^2 k^\varepsilon}{\partial t^2}(x',0).\psi_\zeta\left(\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau(\sigma)\right)dx'd\sigma=0.$$

De (4.3.16), (4.3.17) et (4.3.18), on a

$$\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2+\int_0^t\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma+l^\varepsilon\int_0^t\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 d\sigma\leq c\left[1+\int_0^t\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma\right].$$

En utilisant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2+\int_0^t\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{1,\Omega^\varepsilon}^2 d\sigma+l^\varepsilon\int_0^t\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 d\sigma\leq c. \tag{4.3.19}$$

On fait maintenant un passage à la limite en ξ, d'après les estimations (4.3.11) et (4.3.119), on peut extraire de u_ζ^ε une suite notée encore u_ζ^ε, telle que

$$\begin{array}{lll} u_\zeta^\varepsilon \longrightarrow u^\varepsilon & \text{dans} & L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right) \cap L^2\left(0,T;H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right) \\ \dfrac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t} \longrightarrow \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} & \text{dans} & L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right) \cap L^2\left(0,T;H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right) \\ u_\zeta^\varepsilon \longrightarrow u^\varepsilon & \text{dans} & H^1\left(0,T;L^2\left(\Gamma_1^\varepsilon\right)^3\right) \end{array} \tag{4.3.20}$$

on déduit de l'équation (4.3.1) que

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}, \phi - u_\zeta^\varepsilon\right) + a\left(u_\zeta^\varepsilon, \phi - u_\zeta^\varepsilon\right) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u_\zeta^\varepsilon.\left(\phi - u_\zeta^\varepsilon\right) d\tau + J_\zeta^\varepsilon\left(\phi\right) \\ &\qquad -J_\zeta^\varepsilon\left(u_\zeta^\varepsilon\right) - \left(f^\varepsilon, \phi - u_\zeta^\varepsilon\right) = J_\zeta^\varepsilon\left(\phi\right) \\ &\qquad - J_\zeta^\varepsilon\left(u_\zeta^\varepsilon\right) - \left\langle \left(J_\zeta^\varepsilon\right)'\left(u_\zeta^\varepsilon\right), \phi - u_\zeta^\varepsilon \right\rangle \geq 0. \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

Prenant dans (4.3.21) $\phi = \phi(t)$, $\phi \in L^2\left(0,T;K_{\text{div}}^\varepsilon\right)$, on en déduit que

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left[\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t), \phi\right) + a(u_\zeta^\varepsilon, \phi) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u_\zeta^\varepsilon.\phi d\tau + J_\zeta^\varepsilon\left(\phi\right) - \left(f^\varepsilon, \phi - u_\zeta^\varepsilon\right)\right] dt \geq \\ &\int_0^T \left[\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t), u_\zeta^\varepsilon(t)\right) + a\left(u_\zeta^\varepsilon, u_\zeta^\varepsilon(t)\right) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \left|u_\zeta^\varepsilon\right|^2 d\tau + J_\zeta^\varepsilon\left(u_\zeta^\varepsilon\right)\right] dt \\ &\qquad = \frac{1}{2}\left\|u_\zeta^\varepsilon(T)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + \int_0^T a(u_\zeta^\varepsilon(t), u_\zeta^\varepsilon(t))dt + \\ &\qquad + l^\varepsilon \int_0^T \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 dt + \int_0^T J_\zeta^\varepsilon\left(u_\zeta^\varepsilon\right) dt, \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

on déduit alors de (4.3.22) que

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left[\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t), \phi - u^\varepsilon\right) + a(u^\varepsilon, \phi) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon.\phi d\tau + J^\varepsilon\left(\phi\right) - \left(f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon\right)\right] dt \geq \\ &+\liminf_{\xi\to 0} \int_0^T a(u_\zeta^\varepsilon(t), u_\zeta^\varepsilon(t))dt + \liminf_{\xi\to 0} l^\varepsilon \int_0^T \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}^2 ds + \liminf_{\xi\to 0} \int_0^T J_\zeta^\varepsilon\left(u_\zeta^\varepsilon\right) dt. \end{aligned} \tag{4.3.23}$$

Les fonctions $u \to \int_0^T a(u,u)dt$, $u \to \int_0^T \left\|u(t)\right\|^2 dt$ et $v \to \int_0^T J^\varepsilon\left(v\right) dt$ sont des fonctions semi-continues inférieurement pour la topologie faible de $L^2\left(0,T;K_{\text{div}}^\varepsilon\right)$, et donc (4.3.23) devient

$$\int_0^T \left[\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \phi - u^\varepsilon \right) + a\left(u^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon\right) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon . \left(\phi - u^\varepsilon\right) d\tau + J^\varepsilon\left(\phi\right) - J^\varepsilon\left(u^\varepsilon\right) \right. \tag{4.3.24}$$
$$\left. - \left(f^\varepsilon, \phi - u^\varepsilon\right)\right] dt \geq 0,\ \ \forall \phi \in L^2\left(0, T; K^\varepsilon_{\mathrm{div}}\right).$$

Enfin, par [9, 20, 31], on passe de (4.3.24) à l'inégalité ponctuelle (4.2.7). $\square$

Preuve de l'unicité de la solution. Soient u_1^ε et u_2^ε deux solutions éventuelles. En choisissant dans (4.2.7) $\phi = u_2^\varepsilon(t)$ dans l'inéquation relative à u_1^ε et $\phi = u_1^\varepsilon(t))$ dans l'inéquation relative à u_2^ε et en posant $w^\varepsilon = u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon$ il vient :

$$- \left(\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t}, w^\varepsilon \right) - a\left(w^\varepsilon, w^\varepsilon\right) - l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \left|w^\varepsilon\right|^2 d\tau \geq 0,$$

donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\|w^\varepsilon(t)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} + a(w^\varepsilon(t), w^\varepsilon(t)) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \left|w^\varepsilon(t)\right|^2 d\tau \leq 0.$$

Comme $a(v, v) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |v|^2 \, d\tau \geq 2\mu C_K \left\|v\right\|^2_{1,\Omega^\varepsilon}$, on a

$$\left\|w^\varepsilon(t)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} + 4\mu C_K \int_0^T \left\|w^\varepsilon(\sigma)\right\|^2_{1,\Omega^\varepsilon} d\sigma \leq \left\|w^\varepsilon(0)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} = 0, \forall t \Rightarrow w^\varepsilon(t) = 0,$$

d'où l'unicité de la solution. $\square$

4.4 Analyse asymptotique du problème

Pour l'analyse asymptotique de notre problème, on utilise le changement d'échelle $z = \dfrac{x_3}{\varepsilon}$. Donc le domaine Ω^ε se transforme en un domaine Ω indépendant de ε définit par

$$\Omega = \{(x', z) \in \mathbb{R}^3, (x', 0) \in \omega \ et \ \ 0 < z < h\left(x'\right)\},$$

et notant $\Gamma = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_L$ sa frontière.

Sur $\Omega \times [0, T]$, nous définissons des nouvelles inconnues

$$\left\{\begin{array}{c}\hat{u}_i^{\varepsilon}\left(x',z,t\right)=u_i^{\varepsilon}\left(x',x_3,t\right),\\ \hat{u}_3^{\varepsilon}\left(x',z,t\right)=\varepsilon^{-1}u_3^{\varepsilon}\left(x',x_3,t\right),\\ \hat{p}^{\varepsilon}\left(x',z,t\right)=\varepsilon^{2}p^{\varepsilon}\left(x',x_3,t\right).\end{array}\right.$$

On suppose que les données du problème (4.1.1)-(4.1.8) dépendent de ε de la manière suivante

$$\begin{aligned}\hat{f}(x',z,t) &= \varepsilon^2 f^{\varepsilon}(x',x_3,t),\ \hat{l}=\varepsilon l^{\varepsilon},\hat{k}=\varepsilon k^{\varepsilon},\\ g_i^{\varepsilon}(x',x_3,t) &= \widehat{g}_i(x',z,t),\ i=1,2 \text{ et } g_3^{\varepsilon}(x',x_3,t)=\varepsilon\widehat{g}_3(x',z,t).\end{aligned}$$

avec $\hat{f}$, $\hat{l}$, $\hat{k}$ et $\widehat{g}$ ne dépendant pas de ε.
Soit $\hat{G}\left(x,z,t\right)$ tel que :

$$\hat{G}=\hat{g}\ \text{ sur } \Gamma\times\left]0,T\right[,$$

4.4.1 Formulation variationnelle du problème dans Ω

Nous introduisons maintenant le cadre fonctionnel sur Ω comme ce qui suit

$$\begin{aligned}K &= \left\{\phi\in H^1(\Omega)^3:\hat{\phi}=0 \text{ on } \Gamma_L,\quad \hat{\phi}.\nu=0 \text{ on } \omega\cup\ \Gamma_1\right\},\\ K_{\text{div}} &= \left\{\hat{\phi}\in K:\text{div}(\hat{\phi})=0\right\},\\ V_z &= \left\{v=(v_1,v_2)\in L^2(\Omega)^2:\frac{\partial v_i}{\partial z}\in L^2(\Omega);\ v=0 \text{ on } \Gamma_L\right\}.\end{aligned}$$

V_z est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{V_z}=\sum_{i=1}^{2}\left(\|v_i\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial v_i}{\partial z}\right\|^2_{0,\Omega}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Pi\left(K\right)=\left\{\varphi\in H^1\left(\Omega\right)^2:\varphi=\left(\varphi_1,\varphi_2\right),\varphi_i=0 \text{ sur } \Gamma_1\cup\Gamma_L \text{ pour } i=1,2\right\},$$

$$L_0^2\left(\Omega\right)=\left\{q\in L^2\left(\Omega\right):\int_{\Omega}q\ dx'dz=0\right\}.$$

En multipliant (4.2.6) par ε et en passant au domaine fixé Ω on montre que le problème variationnel est équivalent au problème suivant

$$\left.\begin{array}{c}
\textit{Trouver}\ \ \widehat{u}^{\varepsilon}(t)\in K\ \text{ et } \hat{p}^{\varepsilon}(t)\in L_0^2(\Omega)\ \ \textit{telle que} \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\varepsilon^2\left(\frac{\partial\widehat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial t}(t),\widehat{\phi}_i-\widehat{u}_i^{\varepsilon}(t)\right)+\varepsilon^4\left(\frac{\partial\widehat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial t}(t),\widehat{\phi}_3-\widehat{u}_3^{\varepsilon}(t)\right)+\widehat{a}\left(\widehat{u}^{\varepsilon}(t),\widehat{\phi}-\widehat{u}^{\varepsilon}(t)\right) \\
\displaystyle-\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{p}^{\varepsilon}\frac{\partial(\hat{\phi}_i-\hat{u}_i^{\varepsilon})}{\partial x_j}dx'dz-\int_{\Omega}\frac{1}{\varepsilon}\hat{p}^{\varepsilon}\frac{\partial(\hat{\phi}_3-\hat{u}_3^{\varepsilon})}{\partial z}dx'dz \\
\displaystyle+\sum_{i=1}^{2}\hat{l}\int_{\omega}\hat{u}_i^{\varepsilon}(x',h(x'),t)\left(\hat{\phi}_i(x',h(x'))-\hat{u}_i^{\varepsilon}(x',h(x'),t)\right)\sqrt{1+|\nabla h^{\varepsilon}(x')|^2}dx'+ \\
\displaystyle+\hat{l}\int_{\omega}\varepsilon^2\hat{u}_3^{\varepsilon}(x',h(x'),t)\left(\hat{\phi}_3(x',h(x'))-\hat{u}_3^{\varepsilon}(x',h(x'),t)\right)\sqrt{1+|\nabla h^{\varepsilon}(x')|^2}dx'+ \\
\displaystyle+\hat{J}\left(\widehat{\phi}\right)-\hat{J}\left(\widehat{u}^{\varepsilon}\right)\geq\sum_{i=1}^{2}\left(\widehat{f}_i^{\,\varepsilon}(t),\phi_i-\widehat{u}_i^{\varepsilon}(t)\right)+\varepsilon\left(\widehat{f}_3^{\,\varepsilon}(t),\phi_3-\widehat{u}_3^{\varepsilon}(t)\right),\ \forall\widehat{\phi}\in K\ ,\ \forall t\ \in[0,T],
\end{array}\right\}\tag{4.4.1}$$

$$\widehat{u}^{\varepsilon}(0)=0\tag{4.4.2}$$

où

$$\begin{array}{c}
\displaystyle\widehat{a}\left(\widehat{u}^{\varepsilon}(t),\widehat{\phi}-\widehat{u}^{\varepsilon}(t)\right)=\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}\varepsilon^2\mu\left(\frac{\partial\hat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial(\hat{\phi}_i-\hat{u}_i^{\varepsilon})}{\partial x_j}dx'dz+ \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\mu\left(\frac{\partial\hat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial(\hat{\phi}_i-\hat{u}_i^{\varepsilon})}{\partial z}dx'dz+\int_{\Omega}2\mu\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial z}\frac{\partial(\hat{\phi}_3-\hat{u}_3^{\varepsilon})}{\partial z}dx'dz+ \\
\displaystyle+\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega}\mu\varepsilon^2\left(\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j^{\varepsilon}}{\partial z}\right)\frac{\partial(\hat{\phi}_3-\hat{u}_3^{\varepsilon})}{\partial x_j}dx'dz\quad,
\end{array}$$

et

$$\widehat{J}(\widehat{\phi})=\int_{\omega}\widehat{k}\left|\widehat{\phi}_{\tau}-s\right|\ dx'.$$

4.4.2 Estimation à priori sur la vitesse

Nous essayons maintenant d'étudier les estimations à priori sur $\hat{u}^{\varepsilon}$. Pour cela nous avons besoin d'établir les inégalités ([14]) suivantes :

Inégalité de Korn

$$\mu\left\|\nabla u^{\varepsilon}(t)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^2\leq a(u^{\varepsilon}(t),u^{\varepsilon}(t))+\mu C(\Gamma_1^{\varepsilon})\int_{\Gamma_1^{\varepsilon}}|u^{\varepsilon}(t)|^2d\tau\tag{4.4.3}$$

où

$$C(\Gamma_1^\varepsilon) = 2||\frac{\partial}{\partial x_2}h^\varepsilon||_{\mathcal{C}(\bar{\omega})}(1 + ||\frac{\partial}{\partial x_1}h^\varepsilon||^2_{\mathcal{C}(\bar{\omega})}).$$

Supposons qu'il y a une condition supplémentaire appliquée sur le bord supérieur Γ_1^ε ([22]) comme suit

$$\mu C(\Gamma_1^\varepsilon) \leq l^\varepsilon. \tag{4.4.4}$$

Donc l'inégalité (4.4.3) implique que

$$\mu \left\|\nabla u^\varepsilon(t)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} \leq a(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon(t)|^2 d\tau \tag{4.4.5}$$

Inégalité de Poincaré

$$\|u^\varepsilon(t)\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} \leq 2\overline{h}^2\varepsilon^2 \left\|\nabla u^\varepsilon(t)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} + 2\overline{h}\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon(t)|^2 d\tau. \tag{4.4.6}$$

Lemme 4.3.1. *On rappelle que* $0 < \underline{h} \leq h(x') \leq \overline{h}$, $h^\varepsilon(x') = \varepsilon h(x')$, $\forall x' \in \omega$, *il existe une constante* C_0 *indépendante de* ε *telle que :*

$$\varepsilon \left(\int_{\Gamma_1^\varepsilon} |\phi|^2 \, d\tau \right) \leq C_0(\Omega, h) \int_{\Omega^\varepsilon} \left(|\phi|^2 + \varepsilon^2 |\nabla \phi|^2 \right) dx, \quad \forall \phi \in K^\varepsilon, \forall \varepsilon \in \left]0, 1\right[. \tag{4.4.7}$$

Preuve. Soit $0 < z < h^\varepsilon(x')$, on a

$$\phi(x', h^\varepsilon(x')) = \phi(x', z) + \int_z^{h^\varepsilon(x')} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(x', \theta)\, d\theta.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on voit que :

$$|\phi(x', h^\varepsilon(x'))|^2 \leq 2|\phi(x', z)|^2 + 2h^\varepsilon(x') \int_0^{h^\varepsilon(x')} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(x', \theta) \right|^2 d\theta,$$

nous intégrons par rapport à z de 0 à $h^\varepsilon(x')$, on obtient

$$h^\varepsilon(x') |\phi(x', h^\varepsilon(x'))|^2 \leq 2 \int_0^{h(x')} |\phi(x', z)|^2 dz + 2(h^\varepsilon(x'))^2 \int_0^{h^\varepsilon(x')} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(x', \theta) \right|^2 d\theta.$$

En multipliant l'inéquation précédente par $\sqrt{1 + |\nabla h^\varepsilon(x')|^2}$ puis en intégrant par rapport à x' sur ω, on trouve

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\underline{h} \int_\omega |\phi(x', h^\varepsilon(x'))|^2 \sqrt{1 + |\nabla h^\varepsilon(x')|^2} dx' \\
\leq\ & 2\sqrt{1 + \|D_1 h^\varepsilon\|^2} \left(\int_\omega \int_0^{h^\varepsilon(x')} |\phi(x', z)|^2 dz dx' + (\varepsilon\overline{h})^2 \int_\omega \int_0^{h^\varepsilon(x')} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \zeta}(x', \zeta) \right|^2 d\zeta dx' \right),
\end{aligned}$$

pour $0 < \varepsilon < 1$, on voit que

$$\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |\phi|^2 \, d\tau \leq C_0 \int_{\Omega^\varepsilon} \left(|\phi|^2 + \varepsilon^2 |\nabla \phi|^2 \right) dx,$$

où

$$C_0 = \frac{2}{\underline{h}} \left(1 + \left(\overline{h}\right)^2 \right) \sqrt{1 + \|D_1 h\|^2},$$

d'où (4.4.7).□

Théorème 4.3.1. *Supposons que les hypothèses du théorème 4.3.1 sont vérifiées, de plus supposons que la fonction h^ε vérifie l'hypothèse* (4.4.4), *alors, il existe deux constantes A* et *B indépendantes de ε telle que :*

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{2} \left(\int_0^t \left\| \frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds + \left\| \varepsilon \widehat{u}_i^\varepsilon(t) \right\|_{0,\Omega}^2 + \int_0^t \left\| \varepsilon^2 \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \right) + \\ &\sum_{i,j=1}^{2} \int_0^t \left\| \varepsilon \frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds + \int_0^t \left\| \varepsilon \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds + \left\| \varepsilon^2 \widehat{u}_3^\varepsilon(t) \right\|_{0,\Omega}^2 \leq A, \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{2} \left(\int_0^t \left\| \varepsilon \frac{\partial^2 \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial z \partial t}(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds + \left\| \varepsilon^2 \frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Omega}^2 + \int_0^t \left\| \varepsilon^3 \frac{\partial^2 \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i \partial t}(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds \right) + \\ &\sum_{i,j=1}^{2} \int_0^t \left\| \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j \partial t}(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds + \int_0^t \left\| \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial z \partial t}(s) \right\|_{0,\Omega}^2 ds + \left\| \varepsilon^3 \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{0,\Omega}^2 \leq B. \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

Preuve. Soit u^ε la solution du problème (4.2.7), donc

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t), u^\varepsilon(t) \right) + a\left(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)\right) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon(t)|^2 \, d\tau \leq \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t), \phi \right) + \\ &+ a\left(u^\varepsilon(t), \phi\right) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon(t).\phi d\tau + J^\varepsilon(\phi) + \left(f^\varepsilon, u^\varepsilon(t)\right) - \left(f^\varepsilon, \phi\right), \ \forall \phi \in K_{\mathrm{div}}^\varepsilon \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| u^\varepsilon(t) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 + a(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} |u^\varepsilon(t)|^2 \, d\tau \leq \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t), \phi \right) + \\ &+ a(u^\varepsilon(t), \phi) + l^\varepsilon \int_{\Gamma_1^\varepsilon} u^\varepsilon(t).\phi d\tau + J^\varepsilon(\phi) + (f^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) - (f^\varepsilon(t), \phi). \end{aligned}$$

En intégrant en temps pour $s \in [0,t]$, on a

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|u^{\varepsilon}(t)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\int_{0}^{t} a(u^{\varepsilon}(s),u^{\varepsilon}(s))ds+l^{\varepsilon}\int_{0}^{t}\left(\int_{\Gamma_{1}^{\varepsilon}}\left|u^{\varepsilon}(s)\right|^{2}d\tau\right)ds \leq \\
&+\int_{0}^{t}\left(\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(s),\phi\right)ds+\int_{0}^{t} a(u^{\varepsilon}(s),\phi)ds+l^{\varepsilon}\int_{0}^{t}\left(\int_{\Gamma_{1}^{\varepsilon}} u^{\varepsilon}(s).\phi d\tau\right)ds+TJ^{\varepsilon}(\phi)+ \\
&+\int_{0}^{t}\left(f^{\varepsilon}(s),u^{\varepsilon}(s)\right)ds-\int_{0}^{t}(f^{\varepsilon}(s),\phi)ds,
\end{aligned}
\tag{4.4.10}
$$

Par l'inégalité de Young; $ab \leq \eta^{2}\frac{a^{2}}{2}+\eta^{-2}\frac{b^{2}}{2}$, $\forall\,(a,b)\in\mathbb{R}$, on a

$$
\begin{aligned}
a(u^{\varepsilon},\phi) &\leq \frac{1}{2}a(u^{\varepsilon},u^{\varepsilon})+\frac{1}{2}a(\phi,\phi) \\
&\leq \frac{1}{2}a(u^{\varepsilon},u^{\varepsilon})+\mu\left\|\nabla\phi\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2},
\end{aligned}
\tag{4.4.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{0}^{t}\left(\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(s),\phi\right)ds &= (u^{\varepsilon}(t),\phi) \\
&\leq \frac{1}{4}\left\|u^{\varepsilon}(t)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\left\|\phi\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2},
\end{aligned}
\tag{4.4.12}
$$

et en utilisant l'inégalité (4.4.6), on obtient

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{0}^{t}(f^{\varepsilon}(s),u^{\varepsilon}(s))ds\right| \leq \int_{0}^{t}\left\|f^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}\left\|u^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}ds \\
&\leq \int_{0}^{t}\left(\left\|f^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}\left(2\overline{h}^{2}\varepsilon^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla u^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}\right)ds+\int_{0}^{t}\left(\left\|f^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}\left(2\overline{h}\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}}\left\|u^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Gamma_{1}^{\varepsilon}}\right)ds \\
&\leq \frac{\mu}{4}\int_{0}^{t}\left\|\nabla u^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}ds+\frac{2\varepsilon^{2}\overline{h}^{2}}{\mu}\int_{0}^{t}\left\|f^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}ds+\frac{l^{\varepsilon}}{8}\int_{0}^{t}\left\|u^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Gamma_{1}^{\varepsilon}}^{2}ds+\frac{4\overline{h}\varepsilon}{l^{\varepsilon}}\int_{0}^{t}\left\|f^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}ds
\end{aligned}
\tag{4.4.13}
$$

et

$$
\left|-\int_{0}^{t}(f^{\varepsilon}(s),\phi)ds\right| \leq T\frac{\mu}{4}\left\|\nabla\phi\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}ds+\frac{2\varepsilon^{2}\overline{h}^{2}}{\mu}\int_{0}^{t}\left\|f^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}ds+T\frac{l^{\varepsilon}}{4}\left\|\phi\right\|_{0,\Gamma_{1}^{\varepsilon}}^{2}+\frac{2\overline{h}\varepsilon}{l^{\varepsilon}}\int_{0}^{t}\left\|f^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}ds
\tag{4.4.14}
$$

De (4.4.11) − (4.4.14), l'inégalité (4.4.10) devient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\|u^{\varepsilon}(t)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\frac{1}{2}\int_{0}^{t}a(u^{\varepsilon}(s),u^{\varepsilon}(s))ds+\frac{3l^{\varepsilon}}{4}\int_{0}^{t}\left\|u^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Gamma_{1}^{\varepsilon}}^{2}ds &\leq \frac{1}{4}\left\|u^{\varepsilon}(t)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\\ +\left\|\phi\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\frac{\mu}{4}\int_{0}^{t}\left\|\nabla u^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}ds+\frac{5}{4}T\mu\left\|\nabla\phi\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\frac{9}{4}Tl^{\varepsilon}\left\|\phi\right\|_{0,\Gamma_{1}^{\varepsilon}}^{2}+ \\ +TJ^{\varepsilon}(\phi)+\left(\frac{6\overline{h}}{\hat{l}}+\frac{4\overline{h}^{2}}{\mu}\right)\varepsilon^{2}\int_{0}^{t}\left\|f^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}ds.\end{aligned}\tag{4.4.15}$$

On utilise l'inégalité de Korn (4.4.5) dans le membre à gauche de (4.4.15) et d'une réduction de certains termes, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left\|u^{\varepsilon}(t)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\frac{\mu}{4}\int_{0}^{t}\left\|\nabla u^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}ds+\frac{l^{\varepsilon}}{4}\int_{0}^{t}\left\|u^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Gamma_{1}^{\varepsilon}}^{2}ds &\leq \\ +\left\|\phi\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\frac{5}{4}T\mu\left\|\nabla\phi\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\frac{9}{4}Tl^{\varepsilon}\left\|\phi\right\|_{0,\Gamma_{1}^{\varepsilon}}^{2} \\ +TJ^{\varepsilon}(\phi)+\left(\frac{6\overline{h}}{\hat{l}}+\frac{4\overline{h}^{2}}{\mu}\right)\varepsilon^{2}\int_{0}^{t}\left\|f^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}ds.\end{aligned}\tag{4.4.16}$$

Pour t quelconque dans $]0,T[$, en multipliant (4.4.16) par ε et nous choisissons $\phi=G^{\varepsilon}(t)$. Pour estimer les termes $\left\|G^{\varepsilon}(t)\right\|_{0,\Gamma_{1}^{\varepsilon}}^{2}$ et $J^{\varepsilon}(G^{\varepsilon})$, on utilise le lemme 4.4.1 :

$$\begin{aligned}\varepsilon\int_{\Gamma_{1}^{\varepsilon}}\left|G^{\varepsilon}(t)\right|^{2}d\tau &\leq C_{0}(\Omega,h)\int_{\Omega^{\varepsilon}}\left(\left|G^{\varepsilon}(t)\right|^{2}+\varepsilon^{2}\left|\nabla G^{\varepsilon}(t)\right|^{2}\right)dx \\ &\leq C_{0}(\Omega,h)\int_{\Omega}\left(\left|\widehat{G}(t)\right|^{2}+\left|\nabla\widehat{G}(t)\right|^{2}\right)dx\end{aligned}$$

$$\left\|\nabla G^{\varepsilon}\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}\leq\varepsilon^{-1}\left\|\nabla\hat{G}\right\|_{0,\Omega}^{2}.$$

et de la remarque 4.2.1 de la Lipschitzienne de $\widehat{J}$, on a

$$\begin{aligned}\varepsilon J^{\varepsilon}(G^{\varepsilon}) &\leq \widehat{J}\left(\widehat{G}\right) \\ &\leq \left|\omega\right|^{1/2}\left\|\hat{k}\right\|_{\infty,\omega}M(\Omega)\left\|\widehat{G}\right\|_{1,\Omega},\end{aligned}$$

L'utilisation de ces trois dernières inégalités et si on passe au domaine fixe Ω dans le membre de droite dans (4.4.16), nous obtenons une constante A indépendante de ε telle que

$$\varepsilon\left(\left\|u^{\varepsilon}(t)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}+\mu\int_{0}^{t}\left\|\nabla u^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Omega^{\varepsilon}}^{2}ds\right)+\widehat{l}\int_{0}^{t}\left\|u^{\varepsilon}(s)\right\|_{0,\Gamma_{1}^{\varepsilon}}^{2}ds\leq A\tag{4.4.17}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= 4\Bigg(\left\|\widehat{G}\right\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega)^3)} + \frac{5}{4}T\mu\left\|\nabla\widehat{G}\right\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega)^3)} + \frac{9}{4}T\hat{l}\;C_0\left(\Omega,h\right)\left\|\widehat{G}\right\|^2_{L^\infty(0,T,H^1(\Omega)^3)} \\ &\quad + T\left|\omega\right|^{1/2}\left\|\hat{k}\right\|_{\infty,\omega} M\left(\Omega\right)\left\|\widehat{G}\right\|_{L^\infty(0,T,H^1(\Omega)^3)} + \left(\frac{6\overline{h}}{\widehat{l}} + \frac{4\overline{h}^2}{\mu}\right)\left\|\widehat{f^\varepsilon}\right\|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega)^3)}\Bigg). \end{aligned}$$

En passant d'estimation (4.4.17) au domaine fixe Ω, on trouve (4.4.8).

Maintenant, en dérivant (4.3.1) en t et on prend $\phi = \dfrac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t)$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon_\zeta}{\partial t^2}(t), \frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t)\right) + a\left(\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t), \frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t)\right) + l^\varepsilon\left\|\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t)\right\|^2_{0,\Gamma^\varepsilon_1} \\ &\quad + \left\langle \left(J^\varepsilon_\zeta\right)''\left(u^\varepsilon_\zeta(t)\right), \frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t)\right\rangle = \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t)\right) \end{aligned}$$

et comme $\left\langle \left(J^\varepsilon_\zeta\right)''\left(u^\varepsilon_\zeta(t)\right), \dfrac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t)\right\rangle \geq 0$, en intégrant en temps pour $s \in [0,t]$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} + \int_0^t a\left(\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(s), \frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(s)\right)ds + l^\varepsilon\int_0^t \left\|\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(s)\right\|^2_{0,\Gamma^\varepsilon_1} ds \leq \\ &\quad \tfrac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(0)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} + \int_0^t\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s), \frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(s)\right)ds \end{aligned} \tag{4.4.18}$$

On utilise l'inégalité de Poincaré pour $\dfrac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}$ et l'inégalité de Young pour majore le deuxième terme du deuxième membre de (4.4.18), on a donc

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} + \int_0^t a\left(\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(s), \frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(s)\right)ds + \frac{l^\varepsilon}{4}\int_0^t\left(\int_{\Gamma^\varepsilon_1}\left|\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(s)\right|^2 d\tau\right)ds \leq \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(0)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} + \\ &\quad + \frac{\mu}{8}\int_0^t\left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(s)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} ds + \frac{4\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu}\int_0^t\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} ds + \frac{2\overline{h}\varepsilon}{3l^\varepsilon}\int_0^t\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} ds \end{aligned} \tag{4.4.19}$$

Par l'inégalité de Korn, on déduit de l'inégalité (4.4.5) et (4.4.19) que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} + \frac{\mu}{16}\int_0^t\left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(s)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} ds + \frac{l^\varepsilon}{16}\int_0^t\left\|\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(s)\right\|^2_{0,\Gamma^\varepsilon_1} ds \leq \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(0)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} + \\ &\quad + \frac{4\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu}\int_0^t\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} ds + \frac{2\overline{h}\varepsilon}{3l^\varepsilon}\int_0^t\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{0,\Omega^\varepsilon} ds\,. \end{aligned} \tag{4.4.20}$$

Nous devons estimer $\dfrac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(0)$. De (4.3.1) et (4.3.2), on a

$$\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0),\phi\right)=(f^\varepsilon(0),\phi),\ \forall\phi\in K_{\mathrm{div}}^\varepsilon\quad,$$

on utilise les inégalités de Cauchy-Schwartz et de Poincaré puis le lemme 4.4.1, respectivement, comme suit

$$\begin{aligned}(f^\varepsilon(0),\phi) &\leq \|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon}\|\phi\|_{0,\Omega^\varepsilon}\\ &\leq \sqrt{2}\varepsilon\overline{h}\,\|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon}\|\phi\|_{1,\Omega^\varepsilon}+\sqrt{2\varepsilon\overline{h}}\,\|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon}\|\phi\|_{0,\Gamma_1^\varepsilon}\\ &\leq \sqrt{2}\varepsilon\overline{h}\,\|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon}\|\phi\|_{1,\Omega^\varepsilon}+\sqrt{2\overline{h}}C_0(\Omega,h)\,\|f^\varepsilon(0)\|\,\|\phi\|_{1,\Omega^\varepsilon}\end{aligned}$$

Alors

$$\left|\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0),\phi\right)\right|\leq\left(\sqrt{2}\varepsilon\overline{h}\,\|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon}+C_0(\Omega,h)\sqrt{2\overline{h}}\,\|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega^\varepsilon}+\right)\|\phi\|_{1,\Omega^\varepsilon}. \tag{4.4.21}$$

En utilisant le fait que $\varepsilon^2\|f^\varepsilon\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2=\varepsilon^{-1}\left\|\widehat{f}^\varepsilon\right\|_{0,\Omega}^2$. Donc, en multipliant l'inégalité (4.4.21) par $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$ avec $\varepsilon\in\,]0,1[$, il vient que

$$\varepsilon^{\frac{3}{2}}\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}\leq c_0 \tag{4.4.22}$$

où $c_0=\sqrt{2h}\left\|\widehat{f}^\varepsilon(0)\right\|_{0,\Omega}+C_0(\Omega,h)\sqrt{2\overline{h}}\left\|\widehat{f}^\varepsilon(0)\right\|_{0,\Omega}$, (ne dépend pas de ε).
De (4.4.20), (4.4.22) et par passage à la limite inférieure en ζ, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2+\frac{\mu}{16}\int_0^t\left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2ds+\frac{l^\varepsilon}{16}\int_0^t\left(\int_{\Gamma_1^\varepsilon}\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right|^2d\tau\right)ds\leq\frac{1}{2}c_0\varepsilon^{-3}+\\ +\frac{2\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu}\int_0^t\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2ds+\frac{2\overline{h}\varepsilon}{3l^\varepsilon}\int_0^t\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2ds\end{aligned} \tag{4.4.23}$$

En multipliant maintenant (4.4.23) par ε^3, on obtient

$$\varepsilon^3\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2+\varepsilon^3\int_0^t\left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2ds+\varepsilon^2\frac{\hat{l}}{16}\int_0^t\left(\int_{\Gamma_1^\varepsilon}\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right|^2d\tau\right)ds\leq B \tag{4.4.24}$$

où B est une constante qui ne dépend pas de ε, $b=\min(1,\mu,\hat{l})$, $Q=\,]0,T[\,\times\Omega$ et

$$B=\frac{1}{b}\left((c_0)^2+\frac{4\overline{h}^2}{\mu}\left\|\frac{\partial\widehat{f}^\varepsilon}{\partial t}\right\|_{L^2(Q)}^2+\frac{4\overline{h}}{3l}\left\|\frac{\partial\widehat{f}^\varepsilon}{\partial t}\right\|_{L^2(Q)}^2\right).$$

Donc (4.4.9) découle de (4.4.24). □

Théorème 4.3.2. *Sous les hypothèses des théorèmes 4.3.1. On a*

$$\sum_{i=1}^{2} \|\hat{u}_i^\varepsilon\|_{L^2(Q)} + \|\varepsilon \hat{u}_3^\varepsilon\|_{L^2(Q)} \leq A, \tag{4.4.25}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \|\varepsilon \frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}\|_{L^2(Q)} + \|\varepsilon^2 \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}\|_{L^2(Q)} \leq B. \tag{4.4.26}$$

Preuve. Nous appliquons l'inégalité (4.14) dans l'estimation (4.4.17), puis dans l'estimation (4.4.24), on trouve

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \int_0^t \|u^\varepsilon(s)\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 \, ds &\leq A \ , \\ \varepsilon \int_0^t \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s) \right\|_{0,\Omega^\varepsilon}^2 ds &\leq B \ . \end{aligned}$$

En passant au domaine fixe Ω de ces inégalités on obtient (4.4.25) et (4.4.26). □

4.4.3 Estimation à priori sur la pression

Théorème 4.3.3. *Sous les hypothèses des théorèmes 4.3.1, il existe une constante C indépendante de ε telle que*

$$\|\frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_i}\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))} \leq C, \ \text{for } i = 1, 2, \tag{4.4.27}$$

$$\|\frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial z}\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))} \leq C \ \varepsilon \ . \tag{4.4.28}$$

Preuve. Soient $\hat{u}^\varepsilon$ et $\hat{p}^\varepsilon$ des solutions du problème $(4.4.1) - (4.4.2)$, alors si on prend $\hat{\phi} = \hat{u}^\varepsilon(t) + \xi$ avec $\xi \equiv (\xi, 0, 0) \in H_0^1(\Omega)^3$, on trouve

$$\int_\Omega \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1} \xi dx' dz \leq \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \widehat{u}_1^\varepsilon}{\partial t}(t), \xi \right) + \sum_{j=1}^{2} \int_\Omega \left[\varepsilon^2 \mu \left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_1} \right)(t) \right] \frac{\partial \xi}{\partial x_j} dx' dz +$$
$$\int_\Omega \mu \left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_1} \right)(t) \frac{\partial \xi}{\partial z} dx' dz + - \left(\widehat{f}^\varepsilon(t), \xi \right), \quad \forall t \in [0, T].$$

En intégrant cette inéquation en temps pour $s \in [0, t]$ et en utilisant l'inégalité de Hölder puis de l'estimation (4.4.8) et (4.4.26), on trouve la majoration suivante

$$\int_0^t \left(\int_\Omega \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}(x,s)\xi(x,s)dx\right) ds \leq B\left(\int_0^t \|\xi(s)\|_{1,\Omega}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} +$$
$$\sum_{j=1}^{2} \mu A\left(\int_0^t \|\frac{\partial \xi}{\partial x_j}(s)\|_{0,\Omega}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} + \mu A\left(\int_0^t \|\frac{\partial \xi}{\partial z}\|_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}} + c\left(\int_0^t \|\xi(s)\|_{1,\Omega}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part, en remplaçant ξ par $-\xi$, on obtient

$$\left|\int_0^t \left(\int_\Omega \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}(x,s)\xi(x,s)dx\right) ds\right| \leq B\left(\int_0^t \|\xi(s)\|_{1,\Omega}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} +$$
$$\sum_{j=1}^{2} \mu A\left(\int_0^t \|\frac{\partial \xi}{\partial x_j}(s)\|_{0,\Omega}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} + \mu A\left(\int_0^t \|\frac{\partial \xi}{\partial z}\|_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}} + c\left(\int_0^t \|\xi(s)\|_{1,\Omega}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

on déduit que l'application :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1};\ L^2(0,T,H_0^1(\Omega)) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \xi &\longrightarrow \int_0^t \left(\int_\Omega \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}(x,s)\xi(x,s)dx\right) ds \end{aligned}$$

est linéaire et continue, donc $\dfrac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial x_1}$ est une fonction dans le dual de l'espace $L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$. Ce qui prouve (4.4.27) pour $i=1$. Nous choisissons $\hat{\phi} = \hat{u}^\varepsilon(t) \pm \xi, \xi \equiv (0,\xi,0)$ pour prouver le cas $i=2$. De même pour obtenir (4.4.28), on choisit $\hat{\phi} = \hat{u}^\varepsilon(t) + \xi, \xi \equiv (0,0,\xi)$, puis en intégrant en temps pour $s \in [0,t]$, on déduit

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial z}\xi dx'dz \leq \varepsilon^4\left(\frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t),\xi\right) + \int_\Omega 2\mu\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial \xi}{\partial z}dx'dz +$$
$$\sum_{j=1}^{2}\int_\Omega \mu\varepsilon^2\left(\varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial z}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x_j}dx'dz - \left(\widehat{f}^\varepsilon(t),\xi\right),\ \forall t \in [0,T]$$

ce qui implique

$$\left|\int_0^t \left\langle \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \hat{p}^\varepsilon}{\partial z}(s),\xi(s)\right\rangle ds\right| \leq B\|\xi\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} +$$
$$\mu A\left(\sum_{j=1}^{2}\|\frac{\partial \xi}{\partial x_j}\|_{L^2(Q)} + \|\frac{\partial \xi}{\partial z}\|_{L^2(Q)}\right) + c\|\xi\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}. \square$$

4.5 Résultat de convergence et problème limite

Théorème 4.5.1. *Sous les hypothèses des lemmes (4.4.1)-(4.4.3), il existe* $u^\star = (u_1^\star, u_2^\star) \in L^2(0,T,V_z)$ *et* $p^\star \in L^2(0,T,L_0^2(\Omega))$ *tels que*

$$\hat{u}_i \rightharpoonup u_i^\star,\ \varepsilon\frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0, \quad i=1,2 \quad \textit{faiblement dans } L^2(0,T,V_z), \tag{4.5.1}$$

$$\varepsilon\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup 0,\ \varepsilon^2\frac{\partial^2 \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j \partial t} \rightharpoonup 0,\ i,j=1,2 \textit{ faiblement dans } \ L^2(0,T,L^2(\Omega)), \tag{4.5.2}$$

$$\varepsilon\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \rightharpoonup 0,\ \textit{faiblement dans } \ L^2(0,T,L^2(\Omega)), \tag{4.5.3}$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup 0,\ \varepsilon^3\frac{\partial^2 \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i \partial t} \rightharpoonup 0,\ i=1,2 \textit{ faiblement dans } \ L^2(0,T,L^2(\Omega)), \tag{4.5.4}$$

$$\varepsilon\hat{u}_3^\varepsilon \rightharpoonup 0,\ \varepsilon^2\frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0 \textit{ faiblement dans } \ L^2(0,T,L^2(\Omega)), \tag{4.5.5}$$

$$\hat{p}^\varepsilon \rightharpoonup p^\star,\ \textit{faiblement dans } L^2(0,T,L^2(\Omega)). \tag{4.5.6}$$

Preuve. On déduit de (4.4.25) que la suite $(\widehat{u}_1^\varepsilon, \widehat{u}_2^\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^2(0.T,V_z)$, ceci implique l'existence de $(u_1^\star, u_2^\star)$ tel que $(\widehat{u}_1^\varepsilon, \widehat{u}_2^\varepsilon)_\varepsilon$ converge faiblement vers $(u_1^\star, u_2^\star)$ dans $L^2(0,T,V_z)$.

De même, par conséquent, de (4.4.26), on a $\left(\varepsilon\frac{\partial \widehat{u}_1^\varepsilon}{\partial t}, \varepsilon\frac{\partial \widehat{u}_2^\varepsilon}{\partial t}\right)_\varepsilon$ est borné dans $L^2(0.T,V_z)$ et converge vers une limite (l_1,l_2), mais, il vient de (4.4.25) que la suite $(\varepsilon\widehat{u}_1^\varepsilon, \varepsilon\widehat{u}_2^\varepsilon)_\varepsilon$ converge fort vers $(0,0)$ dans $L^2(0.T,V_z)$, de sorte que $(l_1,l_2)=(0,0)$.

Grâce aux (4.4.25), (4.4.26) et (4.5.1), on trouve (4.5.2).

Par les convergences de (4.5.2) et le fait que $\operatorname{div}(\hat{u}^\varepsilon)=0$, on obtient (4.5.3) , i.e

$$\varepsilon\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} = -\sum_{i=1}^{2}\varepsilon\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup 0.$$

De (4.4.25), on trouve $\|\varepsilon\widehat{u}_3^\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq A$, et d'après (4.4.8) on obtient la première convergence dans (4.5.4), aussi la deuxième convergence découle de (4.4.9) et (4.4.26).

Pour d'obtenir (4.5.5), on utilise l'estimation $\|\varepsilon\widehat{u}_3^\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq A$ et le fait que $\operatorname{div}(\hat{u}^\varepsilon)=0$, on trouve la convergence faible de $(\varepsilon\widehat{u}_3^\varepsilon)_\varepsilon$ vers 0, et la deuxième convergence est claire à partir de (4.4.26).

Il vient de (4.4.26) que la suite $\left(\varepsilon^2 \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}\right)_\varepsilon$ est borné dans $L^2\left(0.T, V_z\right)$, et par la suite converge vers une limite θ, d'autre part on a $\varepsilon \hat{u}_3^\varepsilon \rightharpoonup 0$, cela implique que $\varepsilon^2 \hat{u}_3^\varepsilon \to 0$, on trouve donc $\theta = 0$.

Pour démontrer (4.5.6), on utilise (4.4.27), (4.4.28) et l'inégalité suivante :

$$\left\|\hat{p}^\varepsilon(t)\right\|_{0,\Omega} \leq K\left(\left\|\nabla \hat{p}^\varepsilon(t)\right\|_{H^{-1}(\Omega)} + \int_\Omega \hat{p}^\varepsilon(t)\, dxdz\right).$$

Ce qui montre qu'il existe une sous suite extraire $\hat{p}^\varepsilon$ qui converge faiblement vers $p^\star$ dans $L^2(0, T, L^2(\Omega))$. $\square$

Remarque 4.5.1. Pour $t \in]0, T[$. On a [19]

$$p^\star(x', z, t) = p^\star(x', t),\ \forall (x', z) \in \Omega,$$

$$\begin{aligned}\int_\omega p^\star(x', t)\left(u_1^\star(x', h(x'), t)\frac{\partial h}{\partial x_1} + u_2^\star(x', h(x'), t)\frac{\partial h}{\partial x_2}\right) dx' \\ + \int_\Omega p^\star(x', t)\left(\frac{\partial u_1^\star}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^\star}{\partial x_2}\right)(t)\, dx'dz = 0.\end{aligned} \tag{4.5.7}$$

Théorème 4.5.2. *Avec les mêmes hypothèses du théorème 4.5.1, la solution limite (u^*, p^*) vérifie les formules suivantes*

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^2 \int_\Omega \mu \frac{\partial u_i^\star}{\partial z}(t)\frac{\partial}{\partial z}(\hat{\phi}_i - u_i^\star(t))dx'dz - \sum_{i=1}^2 \int_\omega p^\star(x', t)\hat{\phi}_i(x', h(x'))\frac{\partial h}{\partial x_i}dx' \\ -\sum_{i=1}^2 \int_\Omega p^\star(x', t)\frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial x_i}dx'dz + \sum_{i=1}^2 \hat{l}\int_\omega u_i^\star(x', h(x'), t)\left[\hat{\phi}_i(x', h(x')) - u_i^\star(x', h(x'), t))\right] dx' \\ +J\left(\hat{\phi}\right) - J\left(u^\star\right) \geq \sum^2 \int_\Omega \hat{f}_i(t)\, u_i^\star(t)\, dx'dz\ ,\ \forall \hat{\phi} \in \Pi(K), \forall t \in]0, T[, \\ u^\star(x', z, 0) = 0,\end{gathered} \tag{4.5.8}$$

où

$$\Pi(K) = \left\{\overline{\phi} = \left(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2\right) \in H^1(\Omega)^2 : \exists \hat{\phi}_3 \text{ tel que } \phi = \left(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3\right) \in K\right\},$$

$$-\mu \frac{\partial^2 u_i^\star}{\partial z^2} = \hat{f}_i(t) - \frac{\partial}{\partial x_i}p^\star(t),\ i = 1, 2,\ \textit{dans } L^2(\Omega). \tag{4.5.9}$$

Preuve. Dans l'inégalité variationnelle (4.4.1), on passe tous les termes non linéaires à la droite et les termes linéaires à gauche, puis, on applique la limite sur la droite et la limite inférieurement à gauche, en utilisant les résultats de convergence $(4.5.1) - (4.5.6)$

et la formule (4.5.7), on obtient donc (4.5.8). Avec le choix de la fonction test : $\hat{\phi}_i = u_i^*(t) + \hat{\psi}_i,\ \hat{\psi}_i \in H_0^1(\Omega)$ pour $i = 1, 2$, on obtient facilement (4.5.9).

Conclusion.

Jusqu'ici, nous avons apporté les paramètres essentiels du modèle limite de notre problème, il ne nous reste donc qu'à chercher une équation de type Reynolds d'une autre formule de l'équation (4.5.9), ainsi nous récupérons des conditions aux limites que nous avons dejà mises dans le problème initial. Comme références [15, 22, 32] pour le choix des fonctions test, nous avons

$$\begin{cases} \mu \left|\frac{\partial u^\star}{\partial z}(x', 0, t)\right| < \hat{k} \Rightarrow u^\star(x', 0, t) = s \\ \mu \left|\frac{\partial u^\star}{\partial z}(x', 0, t)\right| = \hat{k} \Rightarrow \exists \beta > 0;\ u^\star(x', 0, t) = s + \beta \frac{\partial u^\star}{\partial z}(x', 0, t) \end{cases} \tag{4.5.10}$$

$$\begin{gathered} \frac{h(x')}{2} u^\star(x', 0, t) - \mu \int_0^{h(x')} u^\star(x', y, t)\, dy + \\ + \frac{h(x')}{2} \mu u^\star(x', h(x'), t) = \widetilde{F}\left(\hat{f}, \Omega\right) + \frac{h(x')^3}{12} \nabla p^\star(t) \\ \forall x' \in \omega, \quad \forall t \in \left]0, T\right[, \end{gathered} \tag{4.5.11}$$

où $\widetilde{F}$ dépend seulement de $\hat{f}$ et de Ω.

Il convient de noter que dans le cas dynamique nous avons aussi prouvé l'unicité des solutions $(u^\star, p^\star)$ du problème limite (4.5.8)-(4.5.11). Et ceci veut dire certainement que notre problème est bien défini.

Bibliographie

[1] A. Assemien, G. Bayada, M. Chambat, *Inertial effects in the asymptotic behavior of a thin film flow.* Asymptot Anal, 9 (3), (1994), 177–208.

[2] A. Atangana, *A novel model for the Lassa Hemorrhagic Fever: Deathly Disease for Pregnant Women,* Neural Comput. Appl, 26 (2015), 1895-1903.

[3] A. Atangana, E. F. Doungmo Goufo, *A model of the groundwater flowing within a leaky aquifer using the concept of local variable order derivative*, J. Nonlinear Sci. Appl. 8, (2015), 763-775.

[4] H. M. Baskonus, H. Bulut, *New hyperbolic function solution for some nonlinear partial differential equation arising in mathematical physics*, Entropy, 17 (2015), 4255-4270.

[5] G. Bayada, M. Boukrouche, *On a free boundary problem for the Reynolds equation derived from the Stokes systems with Tresca boundary conditions,* J. Math. Anal. Appl, 282 (2003), 212-231.

[6] G. Bayada, M. Chambat, *The transition between the Stokes equation and the Reynolds equation,* A mathematical proof, Appl. Math. Optim, 14 (1986), 73–93.G. Bayada, L.

[7] Chupin and B.Grec, *Fluides viscoelastiques en film mince*, Institut carmille, Jordan, lyon, (2007).

[8] G. Bayada, K. Lhalouani, *Asymptotic and numerical analysis for unilateral contact problem with Coulomb's friction between an elastic body and a thin elastic soft layer*, Asymptot. Anal. 25 (2001), 329-362.

[9] H. Benseridi, M. Dilmi, *Some inequalities and asymptotic behavior of a dynamic problem of linear elasticity*, Georgian Math. J, 20 (2013), 25- 41.

[10] H. Benseridi, Y. Letoufa, M. Dilmi, *On the Asymptotic Behavior of an interface Problem in a Thin Domain,* M. Proc. Natl. Acad. Sci., India, Sect. A Phys. Sci, (2019), 1-10.

[11] N. Benhaboucha, *Quelques problèmes mathématiques délatifs à la modélisation des conditions aux limites fluide-solide pour des écoulements de faible épaisseur*, Thèse, Université Claude Bernard, Lyon, (2003).

[12] M. Boukrouche, R. El mir, *Asymptotic of a non-Newtonian Fluide in a then domain with Trisca law*, Nonlinear Analysis. Theory Methods and Applixations, 59 (1)-(2), (2004), 85-105.

[13] M. Boukrouche, R. El mir, *On a non-isothermal, non-Newtonian lubrication problem with Tresca law: Existence and the behavior of weak solution,* Nonlinear Anal, 9 (2008), 674-692.

[14] M. Boukrouche, G. Lukaszewicz, *On a lubrication problem with Fourier and Tresca boundary conditions,* Math. Models Methods Appl. Sci, 14 (2004), 913-941.

[15] M. Boukrouche, F. Saidi, *Non-isothermal lubrication problem with Tresca fluid-solid interface law. Part I,* Nonlinear Anal, 7 (2006), 1145-1166.

[16] H. Brezis, *Equation et inéquation non linéaire dans les espaces vectoriels en dualité*, Annales de l'institut Fourier, Tome 18, No.1, (1968), 115-175.

[17] R. Bunoui, S. Kesavan, *Asymptotic behaviour of a Bingham fluid in thin layers*, J. Math. Anal. Appl, 293 (2), (2004), 405-418.

[18] L. Chupin, *Modélisation et Analyse mathématique en films minces*, Institut Camille Jordan - INSA de Lyon (2009).

[19] M. Dilmi, H. Benseridi, A. Saadallah, *Asymptotic analysis of a Bingham fluid in a thin domain with Fourier and Tresca boundary conditions*, Adv. Appl. Math. MEch, 6 (2014), 797-810.

[20] G. Duvant, J. L. Lions, *les Inéquations en Mécanique et en physique*, Dunod, Paris, (1972).

[21] I. Ekeland and R. Temam, *Analyses convexe et problèmes variationnels*, Dunod, Gauthier-Villars Paris (1974).

[22] R. El Mir, *Etude mathématique et analyse asymptotique de quelques problèmes de lubrification par des fluides non-newtoniens avec des conditions de non adhérence aux bords*, Thèse, Université Jean Monnet - Saint-Etienne, (2005).

[23] N. Hemici, A. Matei, *A frictionless contact problem with adhesion between two elastic bodies,* An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform, 30 (2003), 90-99.

[24] J. Koko, *Uzawa block relaxation domain decomposition method for the two-body contact problem with Tresca friction*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 198 (2008), 420-431.

[25] Y. Letoufa, H. Benseridi, M. Dilmi, *Asymptotic study of a frictionless contact problem between two elastic bodies,* J. Math. Computer Sci, 16 (2016), 336-350.

[26] X. Li, *Symmetric Coupling of the Meshless Galerkin boundary node ande finite element methods for Elasticity*, CMES Comput. Model. Eng. Sci, 97 (2014), 483- 507.

[27] X. Li, H. Chen, Y. Wang, *Error analysis in Sobolev spaces for the improved moving leat-square approximation and the improved element-free Galerkin method*, Appl. Math. Comput, 262 (2015), 56-78.

[28] J. L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*, Volume (1), Dunod, Paris (1968).

[29] O. Reynolds, *On the slipperiness of ice,* Man. Lit. Phil. Soc., Memoirs and Proceedings, 43 (1898)-(1899), 199–220.

[30] O. Reynolds, *On the theory of lubrication and its application to Mr Beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil*, Phil. Trans. Roy. Soc., A 117 (1886), 157–234.

[31] A. Saadallah, H. Benseridi, M. Dilmi, S. Drabla, *Estimates for asymptotic convergence of a non-isothermal linear elasticity with friction*, Georgian Math. J, 23 (3), (2016), 435–446.

[32] F. Saidi, *Sur quelques problèmes de lubrification par des fluides newtoniens non isothermes et incompressibles avec des conditions aux bords non linéaires: Etude mathématique et numérique*, Thèse, Université Jean Monnet - Saint-Etienne, (2004).

[33] M. Selmani, B. Merouani, *Analysis of a Class of Frictional Contact Problems for the Bingham Fluid*, Mediterr. J. Mat, 2 (1), (2005), 113-124.

[34] M. Sofonea, *Problèmes non Linéaires dans la Théorie de l'Elasticité*, Cours de Magister de Mathématiques Appliquées à l'Université de Sétif (1993).

[35] M. Sofonea, A. Matei, Mathematical Models in Contact Mechanics, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge University Press, Cambridge (2012).

[36] R. Kh. Zeytounian, *Les Modeles Asymptotiques de la Mecanique des Fluides 1,* LNP0245, Springer, (1986).

Résumé. *Dans cette thèse, nous avons étudié l'analyse asymptotique des solutions de quelques problèmes aux limites modélisant le comportement des fluides non Newtoniens ou de l'élasticité. Cette étude se fait dans des domaines bornés homogènes et non homogènes en dimension trois avec des conditions de frottement non linéaires sur le bord. Tout d'abord, nous avons énoncé la formulation variationnelle des problèmes mécaniques. Ensuite, nous avons montré les principaux résultats concernant les convergences lorsque l'épaisseur tend vers zéro. Dans ce dernier cas, une équation de Reynolds spécifique associée à des inégalités variationnelles est obtenue pour chaque problème.*

Mots clés. *Conditions aux limites, Condition de transmission, Corps élastiques, Contact sans frottement, Equation de Reynolds, Fluide de Bingham , Frottement de Tresca, Stokes*.

Abstract. *In this thesis, we have studied the asymptotic analysis of the solutions of some boundary problems modeling the behavior of non-Newtonian fluids or elasticity. This study is carried in homogeneous and non-homogeneous bounded domains in three dimension with nonlinear friction conditions on the edge. Firstly, we derive the variational formulation of the mechanical problems. Then we showed the main results concerning some convergences when the thickness tends to zero. In this latter case, a specific Reynolds equation associated with variational inequalities is obtained for each problem.*

KeyWords. *Boundary conditions, Elastic bodies, Frictionless contact, Reynolds equation , Bingham fluid, Tresca law, Stokes, Transmission conditions*.

ملخص. في هذه **الأطروحة**، قمنا بدراسة التحليل **التقاربي** لحلول عدة مسائل حدية تنمذج نمط الموائع غير نيوتونية **أو** المرونة. هذه الدراسة تتم في مجالات محدودة، متجانسة وغير متجانسة ثلاثية الأبعاد مع شروط احتكاك غير خطية على **الحافة**. بداية قدمنا العبارة التغييرية للمسائل الميكانيكية. **قمنا بعد ذلك** ببرهان **النتائج الأ**ساسية المتعلقة **بالتقارب لما** الارتفاع يؤول إلى الصفر. في هذه الحالة أعطيت معادلة رينولدس المرفقة لمتراجحات تغييرية من أجل كل مسألة.

الكلمات المفتاحية : **ل**الشروط الحدية ،**شروط العبور، الجسم** المرن ، الاتصال دون احتكاك ، معادلة رينول**دس ، مائع** بنغهام، **احتكاك** تريسكا،**ستوكس**.