

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة فرحات عباس سطيف 1  
UNIVERSITE FERHAT ABBAS—SETIF 1

**Thèse de Doctorat en Sciences**

Présentée au Département d'Electrotechnique

Faculté de Technologie

Pour obtenir le diplôme de

**Doctorat Sciences en Automatique**

Par

**M<sup>lle</sup> ZEHAR Djamila**

Thème

## **Commande par mode glissant des systèmes sous-actionnés**

Soutenue le **27/04/2019** devant la commission d'examen composée de :

KHABER Farid	Prof. à l'université Sétif 1	Président
BENMAHAMMED Khier	Prof. à l'université Sétif 1	Directeur de thèse
KHEMLICHE Mabrouk	Prof. à l'université Sétif 1	Examineur
ABDESSEMED Foudil	Prof. à l'université de Batna	Examineur
BOUMEHRAZ Mohamed	Prof. à l'université de Biskra	Examineur
CHERIF Aida	MCA à l'université de BBA	Examinatrice

## Résumé :

L'objectif principal de ce travail est l'élaboration d'une loi de commande stabilisante pour une catégorie des systèmes mécaniques sous actionnés (SMSA), en présence des incertitudes paramétriques et des perturbations.

En tant qu'une commande robuste, la commande par mode glissant d'ordre un (MGO1) a été appliquée à ces systèmes, malheureusement l'effet de broutement généré par cette commande et qui affecte pratiquement les actionneurs du système, limite son utilisation.

La première solution proposée dans ce travail est d'utiliser les modes glissants d'ordre deux (MGO2). Cette dernière a permis de diminuer l'effet de broutement mais elle présente certaine sensibilité aux perturbations.

Une autre alternative a été exploitée, qui consiste à utiliser l'observateur par mode glissant (OMG), cette technique a permis d'estimer les états du système et de répondre aux problèmes de perturbations et de broutement.

**Mots Clés :** Mode glissant d'ordre un, mode glissant d'ordre deux, observateur, stabilité, robustesse, systèmes mécaniques sous actionnés.

## Abstract:

The main objective of this work is the elaboration of a stabilizing control law, for a category of mechanical underactuated systems, in the presence of parametric uncertainties and disturbances.

As a robust control, the first order sliding mode control has been applied to these systems, unfortunately the chattering effect generated by this control which affects practically the actuators of the system, limits its use.

The first solution proposed in this work is to use the second order sliding modes control. This latter has reduced the chattering effect, but has some sensitivity to disturbances.

Another alternative has been exploited, which consists of using the sliding mode observer, this technique has allowed to estimate the states of the system and to respond to disturbance and chattering problems.

**Key Words:** First order sliding mode, second order sliding mode, observer, stability, robustness, underactuated systems.

## ملخص:

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو وضع قانون مراقبة الاستقرار لفئة من الأنظمة الميكانيكية الخاملة , في ظل وجود اضطرابات بارامترية و اضطرابات خارجية. تم تطبيق التحكم في وضع الانزلاق الأول من أجل هذه الأنظمة بما انه يعتبر تحكم قوي ، وللأسف ، فإن تأثير الشاترين الناتج عن هذه الضبط الذي يؤثر على مشغلات النظام ، يحد من استخدامه. الحل الأول المقترح في هذا العمل هو استخدام التحكم في أوضاع الانزلاق من الدرجة الثانية. هذا الأخير قلل من تأثير الشاترين ، ولكن لديه بعض الحساسية للاضطرابات تم استغلال بديل آخر ، والذي يتألف من استخدام مراقب الوضع الانزلاقي ، وقد سمحت هذه التقنية لتقدير حالات النظام والاستجابة لمشاكل الاضطراب و الشاترين.

**الكلمات المفتاحية:** وضع الانزلاق من الدرجة الأولى ، وضع انزلاق من الدرجة الثانية ، مراقب ، استقرار ، متانة ، أنظمة خاملة.

## *Dédicaces*

---

À la mémoire de ma mère et mon père

À toute ma famille

À mes amis et mes collègues

À ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à réaliser ce modeste travail

## *Remerciements*

---

---

Je remercie tout d'abord « ALLAH » de m'avoir donné la santé, le courage et la volonté pour achever ce modeste travail.

Je tiens aussi à remercier le directeur de cette thèse, Prof. Benmahammed Khier, pour m'avoir fait confiance, puis pour m'avoir guidé, encouragé et conseillé tout au long de ces années de recherche, à la fois difficiles et fructueuse sur le plan scientifique.

J'adresse mes remerciements au Prof. Khaber Farid, pour avoir accepté de juger ce travail et m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance. J'ai beaucoup estimé ses cours fructueux durant ma formation en ingénierat et en magister, et je le remercie encore pour toutes ses remarques et suggestions.

Mes remerciements s'adressent également et vivement au Prof. Khemliche Mabrouk, qui a contribué à ma formation durant l'ingénierat et le magister dont je lui en suis toujours et sincèrement reconnaissante.

Un grand merci aux Prof. Abdessemed Foudil et Prof. Boumehraz Mohamed qui m'ont fait un grand honneur d'accepter l'évaluation de cette thèse.

Mes vifs remerciements vont aussi à Dr. Chérif. Aida, pour sa participation au jury, pour ses encouragements, et ses conseils pertinents.

## ***TABLE DES MATIÈRES***

- *Liste des abréviations*
- *Liste des figures*

### INTRODUCTION GENERALE

1. Problématique des systèmes mécaniques sous actionnés (SMSA).....	1
2. Etat de l'art sur la commande des SMSA .....	3
3. Objectif de la thèse.....	6
4. Contenu des chapitres .....	6
5. Publications et Communications .....	7

### CHAPITRE I

#### SYSTEMES SOUS ACTIONNES : DEFINITION ET CLASSIFICATION

I.1. Introduction .....	9
I.2. Modélisation des systèmes mécaniques complètement actionnés.....	9
I.3. Les systèmes mécaniques sous actionnés .....	12
I.3.1. Définition littérale .....	12
I.3.2. Définition mathématique .....	12
I.4. Les systèmes mécaniques sous actionnés non holonomes.....	13
I.5. Exemples des systèmes mécaniques sous actionnés.....	15
I.5.1. Le Pendule Inversé sur Chariot, le Pendule Rotationnel et le Pont Roulant .....	15
I.5.2. L'Acrobot et le Pendubot .....	17
I.5.3. Le système TORA.....	18
I.5.4. Le Pendule à Roue Inertielle .....	19
I.5.5. La Bille sur Rail .....	20
I.5.6. La Masse Glissante sur Chariot .....	20
I.6. Classification des SMSA de deuxième ordre .....	21
I.6.1. Classification de Seto et Baillieul.....	21
I.6.1.1 Principe de construction du CFD.....	22
I.6.2. Classification de Olfati Saber.....	24
I.7. Conclusion.....	27

## CHAPITRE II

### COMMANDE PAR MODE GLISSANT D'ORDRE UN

II.1. Introduction.....	28
II.2. Théorie de la commande à structure variable.....	29
II.2.1. Structure par commutation au niveau de l'organe de commande.....	29
II.2.2. Structure de commutation d'une contre réaction d'état .....	30
II.2.3. Structure de commutation au niveau de l'organe de commande par l'ajout d'une commande équivalente .....	31
II.3. Description théorique de la commande par mode glissant.....	31
II.3.1. Principe de fonctionnement .....	31
II.3.2. Conception de la commande par mode glissant.....	32
II.3.2.1. <i>Choix de la surface de glissement</i> .....	33
II.3.2.2. <i>Conditions d'existence et de convergence</i> .....	33
II.3.2.3. <i>Détermination de la loi de commande</i> .....	34
II.3.3. Phénomène de broutement (chattering).....	35
II.3.4. Solution pour atténuer le phénomène de broutement.....	36
II.4. Commande par mode glissant d'un SMSA de deuxième ordre .....	37
II.4.1. Représentation d'état d'un SMSA d'ordre deux .....	37
II.4.2. Première structure de commande par mode glissant.....	38
II.4.3. Deuxième structure de commande par mode glissant.....	42
II.4.4. Simulation .....	44
II.4.4.1. <i>Application de la première structure au pendule inversé sur chariot sous         actionné</i> .....	44
II.4.4.2. <i>Application de la première structure au pendule inversé sur chariot sous actionné avec         perturbation</i> .....	46
II.4.4.3. <i>Application de la deuxième structure au pendule inversé sur chariot sous         actionné</i> .....	48
II.4.4.4. <i>Application de la première structure au pendule inversé sur chariot sous actionné avec         perturbation</i> .....	50
II.5. Conclusion .....	51

## CHAPITRE III

### COMMANDE PAR MODE GLISSANT D'ORDRE DEUX

III.1. Introduction .....	53
---------------------------	----

III.2. Principe de fonctionnement d'un régime glissant d'ordre supérieur.....	54
III.3. Notion de précision des modes glissants réels.....	54
III.4. Commande par mode glissant d'ordre deux.....	56
III.4.1. Algorithme de Twisting.....	58
III.4.2. Algorithme de Super Twisting.....	61
III.5. Inconvénients des commandes à régimes glissants d'ordre supérieur.....	62
III.6. Application de la commande par mode glissant d'ordre deux à un SMSA d'ordre deux : .....	62
III.6.1. Algorithme de Twisting.....	62
III.6.2. Résultats de simulation.....	63
III.6.2.1. Cas sans perturbations.....	63
III.6.2.2. Cas avec perturbations.....	65
III.6.3. Algorithme de super Twisting.....	66
III.6.4. Résultats de simulation.....	67
III.6.4.1. Cas sans perturbations.....	67
III.6.4.2. Cas avec perturbations.....	69
III.7. Conclusion.....	70

## CHAPITRE IV

### OBSERVATEUR PAR MODE GLISSANT D'UN SMSA D'ORDRE DEUX

IV.1. Introduction.....	72
IV.2. Observabilité et principe d'observateur.....	73
IV.3. Observateur d'un système linéaire.....	74
IV.4. Observateur d'un système non linéaire.....	75
IV.4.1. Observateur classique par mode glissant.....	75
IV.4.2. Principe de séparation.....	77
IV.4.3. Observateur triangulaire par mode glissant.....	78
IV.5. Application de l'observateur par mode glissant à un SMSA d'ordre deux.....	82
IV.5.1. Construction de l'observateur.....	82
IV.5.2. Conception de la commande.....	84
IV.5.3. Résultats de simulation.....	88
IV.5.3.1. Cas sans incertitudes paramétriques ou perturbations.....	88
IV.5.3.2. Cas avec incertitudes paramétriques ou perturbations.....	91
IV.6. Comparaison entre les résultats de simulation des commandes appliquées.....	93
IV.6.1. Cas sans perturbations.....	93

IV.6.2. Cas avec perturbations .....	95
IV.6. Conclusion .....	97
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES .....	98
ANNEXE A .....	100
ANNEXE B .....	102
ANNEXE C .....	104
ANNEXE D .....	107
Références Bibliographiques .....	112

## *Liste des abréviations*

---

SMSA :	Système Mécanique Sous Actionné
CFD :	Control Flow Diagram
CMG :	Commande par Modes Glissant
MGO1 :	Mode Glissant d'Ordre Un
MGO1ST1 :	Mode Glissant d'Ordre Un : Structure 1
MGO1ST2 :	Mode Glissant d'Ordre Un : Structure 2
MGO2 :	Mode Glissant d'Ordre Deux
MGOS :	Mode Glissant d'Ordre Supérieur
MC :	Mode de Convergence
MG :	Mode de Glissement
MRP :	Mode du Régime Permanent
CSV :	Commande à Structure Variable
OMG :	Observateur par Mode Glissant
ATW :	Algorithme de Twisting
ASTW :	Algorithme de Super Twisting
LQR :	Linear Quadratique Regulation

## *Liste des figures*

---

---

Figure I.1 Le Pendule Inversé sur Chariot .....	15
Figure I.2 Le Pendule Rotationnel.....	16
Figure I.3 Le Pont Roulant .....	17
Figure I.4 L'Acrobot (a) et le Pendubot (b) .....	17
Figure I.5 Le système TORA.....	18
Figure I.6 Le Pendule à Roue Inertielle.....	19
Figure I.7 La Bille sur Rail.....	20
Figure I.8 La masse glissante sur chariot.....	21
Figure I.9 Structure chaîne.....	23
Figure I.10 Structure arbre .....	23
Figure I.11 Structure point isolé.....	23
Figure II.1 Structure par commutation au niveau de l'organe de commande .....	30
Figure II.2 Structure de commutation d'une contre réaction d'état.....	30
Figure II.3 Structure de commutation au niveau de l'organe de commande par l'ajout d'une commande équivalente.....	31
Figure II.4 Les différents modes de la trajectoire sur le plan de phase.....	32
Figure II.5 Mode de glissement.....	33
Figure II.6 La commande équivalente.....	35
Figure II.7 La commande discontinue.....	35
Figure II.8 Le phénomène de broutement.....	36
Figure II.9 La première structure de la surface de glissement.....	38
Figure II.10 La deuxième structure de la surface de glissement .....	42
Figure II.11 Evolution de l'état $x(t)$ .....	45
Figure II.12 Evolution de l'état $\theta(t)$ .....	45
Figure II.13 Les surfaces $S_1(t)$ , $S_2(t)$ et $S_3(t)$ .....	45
Figure II.14 Le signal de commande $U(t)$ .....	46
Figure II.15 Evolution de l'état $x(t)$ .....	46
Figure II.16 Evolution de l'état $\theta(t)$ .....	47
Figure II.17 Les surfaces $S_1(t)$ , $S_2(t)$ et $S_3(t)$ .....	47
Figure II.18 Le signal de commande $U(t)$ .....	47
Figure II.19 Evolution de l'état $x(t)$ .....	48
Figure II.20 Evolution de l'état $\theta(t)$ .....	48

Figure II.21 Les surfaces $S_1(t)$ , $S_2(t)$ et $S(t)$ .....	49
Figure II.22 Le signal de commande $U(t)$ .....	49
Figure II.23 Evolution de l'état $x(t)$ .....	50
Figure II.24 Evolution de l'état $\theta(t)$ .....	50
Figure II.25 Les surfaces $S_1(t)$ , $S_2(t)$ et $S(t)$ .....	51
Figure II.26 Le signal de commande $U(t)$ .....	51
Figure III.1 Trajectoire d'un mode glissant du second ordre .....	56
Figure III.2 Trajectoire de l'ATW dans le plan de phase .....	58
Figure III.3 Trajectoire de phase dans l'ASTW .....	62
Figure III.4 Evolution de l'état $x(t)$ .....	63
Figure III.5 Evolution de l'état $\theta(t)$ .....	63
Figure III.6 La surface $S_3(t)$ .....	64
Figure III.7 Le signal de commande $U(t)$ .....	64
Figure III.8 Evolution de l'état $x(t)$ .....	65
Figure III.9 Evolution de l'état $\theta(t)$ .....	65
Figure III.10 La surface $S_3(t)$ .....	66
Figure III.11 Le signal de commande $U(t)$ .....	66
Figure III.12 Evolution de l'état $x(t)$ .....	67
Figure III.13 Evolution de l'état $\theta(t)$ .....	67
Figure III.14 La surface $S_3(t)$ .....	68
Figure III.15 Le signal de commande $U(t)$ .....	68
Figure III.16 Evolution de l'état $x(t)$ .....	69
Figure III.17 Evolution de l'état $\theta(t)$ .....	69
Figure III.18 La surface $S_3(t)$ .....	70
Figure III.19 Le signal de commande $U(t)$ .....	70
Figure IV.1 Schéma de principe d'un observateur .....	74
Figure IV.2 Structure de commande d'un observateur par mode glissant d'un SMSA .....	86
Figure IV.3 Evolution de l'état $x(t)$ et ses états : estimé et désiré .....	88
Figure IV.4 Evolution de l'état $\dot{x}(t)$ et son état estimé .....	89
Figure IV.5 Evolution de l'état $\theta(t)$ et ses états : estimé et désiré .....	89
Figure IV.6 Evolution de l'état $\dot{\theta}(t)$ et son état estimé .....	89
Figure IV.7 Les surfaces $S_1(t)$ , $S_2(t)$ et $S(t)$ .....	90
Figure IV.8 Le signal de commande $U(t)$ .....	90
Figure IV.9 Evolution de l'état $x(t)$ et ses états : estimé et désiré .....	91
Figure VI.10 Evolution de l'état $\dot{x}(t)$ et son état estimé .....	91

Figure IV.11 Evolution de l'état $\theta(t)$ et ses états : estimé et désiré.....	92
Figure IV.12 Evolution de l'état $\dot{\theta}(t)$ et son état estimé.....	92
Figure IV.13 Les surfaces $S_1(t)$ , $S_2(t)$ et $S(t)$ .....	92
Figure IV.14 Le signal de commande $U(t)$ .....	93
Figure IV.15 La position $x(t)$ et sa valeur désirée.....	94
Figure IV.16 L'ongle $\theta(t)$ et sa valeur désirée .....	94
Figure IV.17 Le signal de commande $U(t)$ .....	94
Figure IV.18 La position $x(t)$ et sa valeur désirée .....	95
Figure IV.19 L'ongle $\theta(t)$ et sa valeur désirée .....	96
Figure IV.20 Le signal de commande $U(t)$ .....	96

---

# INTRODUCTION GENERALE

---

## 1. Problématique des systèmes mécaniques sous actionnés (SMSA)

Le développement technologique a conduit à la réalisation des systèmes de plus en plus complexes et hautement non linéaires. Pendant les dernières décennies, l'analyse et la commande des systèmes mécaniques non linéaires ont attiré beaucoup d'attention, spécialement dans les domaines de robotique, d'automatisation et de la commande. Les systèmes mécaniques sont des systèmes qui font partie de l'univers physique et qui sont construits par l'être humain, ces derniers servent à réaliser des tâches sous l'ordre d'un système de commande approprié et sous l'influence de l'environnement.

Le but de répondre aux besoins de l'être humain et la recherche de les satisfaire, afin d'avoir une qualité de vie meilleur, ont poussé les chercheurs de faire des études approfondies et de développer différentes théories de commande applicables sur les systèmes mécaniques.

Puisque les systèmes mécaniques sont de nature non linéaire, les scientifiques ont pensé d'abord à approcher leur comportement par des modèles linéaires. L'automatique moderne dispose d'un ensemble d'outils bien maîtrisés pour l'analyse et la commande de ces systèmes, cependant cette approximation linéaire n'est valable que dans un domaine de fonctionnement limité, à grand échelle des systèmes mécaniques (en robotique par exemple), cette approximation perd toute sa signification, ce qui exige de trouver d'autres solutions tout en gardant la nature non linéaire du système. L'analyse et la commande de ces systèmes ne sont pas des tâches faciles, la plupart des travaux dans la littérature proposent des méthodes limitées à des formes bien particulières, c'est-à-dire que ces techniques ne sont pas généralisées. En effet, afin de faciliter l'étude de tels systèmes, de nombreuses hypothèses sur la structure, la commandabilité et l'observabilité du système sont utilisées.

Principalement, les applications en robotique, en automobile et en automatique, sont des sources essentielles qui motivent l'analyse et la commande d'une catégorie des systèmes mécaniques non linéaires importants, connus sous le nom « systèmes mécaniques sous actionnés » (SMSA).

Les SMSA, sont des systèmes mécaniques non linéaires avec un nombre d'actionneurs indépendants moins que le nombre de degrés de liberté à contrôler. Dans les dernières années, il y a eu un intérêt majeur dans le développement des stratégies de commande stabilisantes pour ces systèmes, et des algorithmes sous actionnés, pour des systèmes mécaniques qui peuvent être sous actionnés par conception, ou par un échec de l'un de ces actionneurs.

La restriction sur le nombre d'actionneurs rend la commande de ces systèmes plus difficile. Le caractère de sous actionnement provient de plusieurs raisons, soit la dynamique de ces systèmes est sous actionnée, comme les avions, les hélicoptères, les sous-marins, ...etc. Soit ce caractère est dû par conception, puisque les actionneurs sont chers et parfois très lourds, par conséquent ils sont évités dans la conception des systèmes, comme dans les robots à articulations flexibles, et dans les spacecrafts où le poids d'équipement est limité. Soit dû à une défaillance d'actionneurs, où la solution matérielle aux échecs d'actionneurs peut être atteinte en équipant le système par des actionneurs redondants, la solution logicielle est d'autre part une alternative de réduction du cout et du poids, puisqu'elle consiste à changer la loi de commande qui contrôle le système en utilisant seulement le reste d'actionneurs, quand l'échec est détecté, donc la solution logicielle est plus économique que la solution matérielle, ce qui est important dans les applications robotique, spatiales et marines. Une autre raison, c'est que le sous actionnement est imposé artificiellement, pour créer des SMSA d'ordre faible, afin de simplifier la tâche des chercheurs dans l'étude des SMSA. Ces systèmes d'ordre faible sont des banchmarks académiques, tels que le pendule inversé sur chariot, le pendubot, l'arobot, la balle et la poutre, ...etc.

La commande des SMSA est en constante évolution depuis plusieurs années, mais la complexité de ces derniers (non linéarité et sous actionnement) rend la tâche de l'élaboration et le développement d'une commande pour l'ensemble de ces systèmes un peu difficile, et s'effectue plus lentement, en plus les résultats qui sont établis pour les systèmes non linéaires ne sont pas directement applicables au cas des SMSA.

Certains chercheurs sont arrivés à classifier les SMSA selon des propriétés structurelles et dynamiques, ce travail difficile non seulement a mené à créer un nombre important de classes, mais certaines classes comportent un seul SMSA, ce qui exige à les étudier cas par cas.

Les SMSA destinés aux applications dans les laboratoires (banchmarks), font l'objet d'études approfondies et une source de connaissance qui permet de développer de plus en plus de nouvelles techniques de commande, pour cette raison cette catégorie de SMSA est de grande importance, et l'étude de l'ensemble de tous les SMSA repose sur cette dernière.

La difficulté et l'intérêt de la commande des SMSA ont permis d'avoir des études exploitables, riches et fructueuses en théorie et en pratique, mais ça reste encore une porte ouverte à des nouvelles recherches.

## 2. Etat de l'art sur la commande des SMSA

La recherche dans le domaine des SMSA est beaucoup plus concentrée sur l'obtention des stratégies de commande et de nouvelles algorithmes plus développés et applicables sur tout l'ensemble de ce type de systèmes. Cette recherche a connu une évolution depuis l'apparition de la notion du Lagrangien, jusqu'à nos jours, car l'intérêt de simplifier et d'unifier la structure sur laquelle l'application d'une commande appropriée pourra atteindre l'objectif, reste encore une tâche difficile à accomplir.

Plusieurs méthodes de contrôle ont été appliquées aux SMSA, parmi les travaux les plus essentiels on trouve ceux basés sur l'énergie, où ces méthodes de commande sont appliquées sur le pendule inversé sur chariot [12], le pendubot [75], l'acrobot [45, 76], le pendule rotationnel [4], cette technique de commande standard, repose sur le balancement du système d'une position initiale arbitraire, pour l'amener aux voisinages de domaine de linéarité, et afin d'atteindre une configuration d'équilibre, une commande linéaire telles que le régulateur LQR et placement de pôle sont appliquées. Ces derniers exemples sont inspirés principalement de la structure d'un être humain, dont l'objectif est d'étendre l'ensemble des théories développées à une structure plus complexe. En utilisant ces méthodes l'objectif de commande est achevé pour plusieurs exemples, mais malheureusement, il n'y pas une analyse de stabilité qui généralise et garantie cet objectif.

D'autres méthodes basées sur la passivité ont été appliquées aux SMSA de type pendulaire, ces méthodes reposent aussi principalement sur le balancement de la structure, afin de l'amener dans ce cas à une orbite homocline, et puis utiliser une commande linéaire. Cependant cette technique a été appliquée sur des exemples spéciaux de systèmes pendulaires. Dans la littérature on trouve le travail de Fantouni [16], celui de Spong [77]. D'autres chercheurs ont exploité la technique de passivité mais après avoir transformé le système à la forme en cascade, comme dans le travail de Jankovic et Sepulchre [67] où leur système d'application est le système TORA (Translated Oscillator Rotational Actuator) ou encore le travail de Kolesnichenko [37]. L'inconvénient de cette méthode est la restriction de domaine d'application, en plus on ne trouve pas de prototypes réels qui utilisent cette technique. Similaire aux méthodes basées sur l'énergie, cette technique aussi ne possède pas une analyse et une preuve de stabilité.

Le besoin de créer des algorithmes sous actionnés, s'est posé dans plusieurs situations pratiques, notamment la stabilisation et la poursuite des trajectoires pour les navires et les véhicules sous-marins, où ces systèmes peuvent être sous actionnés en raison de l'échec d'actionneurs. Plusieurs recherches ont été effectuées, précisément la stabilisation exponentielle présentée par Raynoglou [61] où il a utilisé une commande par retour d'état discontinue invariante dans le temps, pour la stabilisation asymptotique d'une surface d'un navire utilisant deux propulseurs indépendants. Le Travail présenté dans [59] qui a utilisé une transformation appropriée des coordonnées pour des systèmes linéaires variant dans le temps. Le travail de Pettersen et Egelend [60], qui ont proposé une commande par retour d'état variant dans le temps, pour la stabilisation asymptotique des deux modèles : dynamique et cinématique d'un véhicule sous-marin. La méthode du backstepping a été considérée comme étant un outil efficace pour la stabilisation globale des véhicules sous-marins avec un nombre de degrés de liberté minimal. Récemment cette technique a été largement appliquée pour commander des bateaux, plusieurs travaux ont entamé le problème de stabilisation et de poursuite comme ceux trouvés dans [26]. Les commandes par mode glissant d'ordre un (MGO1) et d'ordre deux (MGO2) ont été aussi exploitées, en raison de leur robustesse, comme dans les travaux [14, 46, 88].

Le VTOL (Vertical take Off and Landing) aircraft, est un système sous actionné qui a été étudié et pris en compte lors de sa propriété de non minimum de phase, il a été utilisé comme un banc d'essai pour différentes méthodes de stabilisation et de poursuite de trajectoire [54]. On peut citer quelques exemples des travaux les plus attirants, comme celui de Fantouni et Hauser, ils ont présenté leur travail sur ce type de systèmes dans [18, 30]. Une performance de suivi des sorties et de la robustesse par rapport aux incertitudes des paramètres système et les perturbations externes sont examinés et étudiés, comme dans le travail de Y.J. Huang et al. [33]. Le travail de Minh-Duc Hua et al. [32] ont proposé d'utiliser une nouvelle commande par retour d'état non linéaire qui permet aussi de compenser les erreurs de modélisation et les perturbations. On trouve aussi le travail de [66] qui propose une commande en cascade pour stabiliser l'équilibre du système.

Les SMSA non holonomes font l'objet d'études distinctes, cela est dû à la différence de structures des modèles associés. Du point de vue de l'automaticien, la difficulté pour des systèmes non holonomes se situe au niveau du modèle cinématique, alors que celle des SMSA est liée à leurs dynamiques. Pour certaines catégories de SMSA, l'absence d'actionneurs se traduit par la présence de contraintes non holonomes du second ordre. Parmi les travaux dans ce contexte, il y a ceux dans [51, 54, 55].

Dans ce travail, on s'intéresse à la commande des SMSA d'ordre deux, il y a presque une vingtaine d'années que cette catégorie de systèmes a connu une grande importance, parce que ces derniers sont destinés aux applications des laboratoires, et représentent un point d'extension et une base pour la commande des SMSA d'ordre élevé. Plusieurs méthodes de commande non linéaire traditionnelles ne sont pas directement applicables pour le contrôle de cette catégorie des SMSA. Au cours des années récentes, plusieurs méthodes basées sur la technique du backstepping, la commande adaptative, le mode glissant, la commande floue et les réseaux de neurones, ont été développées.

On peut citer quelques travaux essentiels, comme celui de Olfati Saber [54], où il a utilisé la méthode de backstepping, après avoir fait un changement de coordonnées afin d'avoir la forme triangulaire, exigée par cette méthode. Et le travail de A. Choukchou [11], où la méthode de backstepping a été utilisée pour la structure chaîne des SMSA ainsi que pour une catégorie de la structure arbre transformée à une structure chaîne. Les contrôleurs à base de la logique floue est une alternative attractive, ces derniers sont différents des autres contrôleurs parce qu'ils peuvent travailler sans équations dynamiques explicites, ce qui est un avantage pour les systèmes qui possèdent des modèles incertains, mais l'utilisation de cette commande nécessite la détermination des fonctions d'appartenance par un expert. L'application d'un contrôleur flou à un système sous actionné a été introduite depuis plusieurs années, comme dans les travaux de [25, 72, 80], une combinaison avec la commande adaptative a été traitée comme dans [25]. La commande par réseaux de neurones a été aussi abordée et appliquée aux SMSA, parmi les travaux on trouve [85, 87].

Dans les travaux où la méthode de backstepping a été exploitée, les auteurs ont mentionnés que cette procédure donne des expressions de commande très compliquées, pour autant d'autres chercheurs préféreraient d'utiliser la commande par mode glissant (CMG) qui est une commande facile et robuste par rapport aux incertitudes paramétriques et aux perturbations. Plusieurs études ont été faites utilisant cette commande et principalement pour les SMSA d'ordre deux, comme dans le travail de Rong Xu [86], de Wang [84] et de [91].

D'autres travaux portent sur la combinaison de plusieurs techniques tels la commande adaptative floue, les réseaux de neurones, le backstepping, la commande optimale, avec la commande par mode glissant, afin d'exploiter leurs avantages, comme dans [1, 48, 53, 57]. Des recherches concernant la commande par mode glissant d'ordre supérieur (MGOS), comme dans [62, 63] ont été aussi réalisées, afin de diminuer l'effet de broutement. Une autre alternative des

commandes robustes est la commande synergétique, elle a été également utilisée afin d'éviter le problème de broutement des modes glissants, comme dans les travaux [92, 93, 94].

Le système bille sur rail est un SMSA d'ordre deux, mais vu sa complexité plusieurs chercheurs ont concentré leurs études sur cet exemple, parmi leurs travaux : ceux de Hauser et al [31], qui utilisent les méthodes de linéarisation approximative, de Teel [78], qui utilise les méthodes de saturation pour la stabilisation des systèmes en cascade en la forme feedforward. Ainsi le travail de Teel et Praly [79] qui ont étudié la stabilisation par retour de sortie. On trouve aussi le travail de [67] où la stabilisation de système a été achevée par la construction des fonctions de Lyapunov. Les théorèmes de MG et de la commande adaptative floue (CAF) ont été exploités pour la synthèse d'une commande robuste dans le travail de Yeong-Hwa Chang [10].

### **3. Objectifs de la thèse**

Les objectifs de la thèse s'articulent autour des points suivants :

- Présenter les différentes classes de systèmes mécaniques sous actionnés (SMSA) d'ordre deux, déjà étudiés et exposés dans la littérature, ainsi que leurs propriétés.
- Exposer deux structures de commande par mode glissant pour une classe des SMSA d'ordre deux.
- Traiter le problème de broutement (chattering) en utilisant le MGO2.
- Déterminer une loi de commande en utilisant l'observateur par mode glissant (OMG), afin de stabiliser le système, d'estimer ses états et de réduire le phénomène de broutement (chattering).

### **4. Contenu des chapitres**

Ce manuscrit comporte quatre chapitres en plus de cette introduction, qui sont structurés comme suit :

#### **Chapitre I : Systèmes mécaniques sous actionnés d'ordre deux : Définitions et classification**

Au cours de ce chapitre, nous présentons un aperçu sur la modélisation des systèmes mécaniques complètement actionnés et SMSA de deuxième ordre, qui se base sur le principe du Lagrangien, ensuite nous donnerons des définitions du concept du sous-actionnement et d'un système non holonome. Par la suite, quelques exemples des SMSA d'ordre deux seront présentés, et

à la fin du chapitre on présentera les deux classifications des SMSA les plus connues dans la littérature.

## **Chapitre II : Commande par mode glissant d'ordre un**

Dans ce chapitre, nous présenterons le formalisme classique de la commande par MGO1, nous proposerons par la suite d'élaborer deux structures de commande par mode glissant dédiées à la stabilisation globale asymptotique des SMSA d'ordre deux. A travers cette étude des lois de commande seront développées et une analyse de stabilité basée sur le principe de Lyapunov sera donnée. La robustesse des techniques proposées sera illustrée par des exemples, à la fin de ce chapitre.

## **Chapitre III : Commande par mode glissant d'ordre deux**

Dans cette partie, nous donnerons les notions de base et les propriétés de la commande par MGOS, et précisément les MGO2, vu leur large utilisation par les chercheurs. La commande par MG travaille directement sur la deuxième dérivée ou les dérivées d'ordre supérieur de la surface de glissement. Ce contrôleur est connu par sa simplicité et sa précision, mais il nécessite de connaître les dérivées de la surface de glissement. Une application à un SMSA d'ordre deux sera proposée à la fin de ce chapitre.

## **Chapitre IV : Observateur par mode glissant d'un SMSA d'ordre deux**

Dans ce chapitre, nous introduisons un observateur non linéaire par mode glissant, nous allons présenter sa structure et son analyse, ensuite une étude de cet observateur sera portée sur une classe des SMSA d'ordre deux, dans le but d'estimer les états du système qui seront utilisés pour élaborer une loi de commande stabilisable par mode glissant, et afin de réduire l'effet de broutement (chattering). Pour montrer la robustesse et les performances de cette stratégie de commande, nous allons l'appliquer à un exemple de SMSA d'ordre deux.

A la fin de ce manuscrit, nous donnerons une conclusion générale et des perspectives pour les prochaines recherches.

## **5. Publications et communications**

### **Articles de revues internationales :**

**Djamila Zehar** and Khier Benmahammed, *Optimal sliding mode control of the pendubot*, International Research Journal of Computer Science and Information Systems, Vol. 2(3) pp. 45-

51, 2013.

**Djamila Zehar**, Khier Benmahammed, and KhalissaBehih, *Control for underactuated systems using sliding mode observer*, International Journal of Control, Automation and Systems Vol.16(2) pp:739-748, 2018.

**Djamila Zehar**, Khier Benmahammed, Khalissa Behih and Aida Cherif, *Terminal Synergetic Control of Crane System*, Journal of Engineering and Applied Sciences, Vol.13(3), pp: 3308-3313, 2018.

#### **Communications internationales:**

Behih Khalissa, **Zehar Djamila**, Benmahammed Khier and Abdelmalik Taleb Ahmed, *Fuzzy adaptive backstepping sliding mode control of the cart-pendulum system*, 3rd International Conference on Control, Engineering & Information Technology (CEIT), Tlemcen, Algeria, 2015.

**Djamila Zehar**, Khier Benmahammed, Khalissa Behih and Aida Cherif, *Stabilization of an underactuated system using synergetic control*, The 3rd international conference on power electronics and their applications ICPEA, EIDjelfa, Algeria, 2017.

**Djamila Zehar**, Benmahammed Khier, Aida Chérif and Khalissa Behih, *Fast Terminal Synergetic Control of Underactuated System*, 15th Multi-Conference on Systems, Signals and Devices, Hammamet, Tunisia, 2018.

# CHAPITRE I

## SYSTEME SOUS ACTIONNE : DEFINITION ET CLASSIFICATION

---

### I.1 Introduction

La classe de SMSA a fait l'objet de recherches scientifiques actives à cause de leurs différentes applications dans plusieurs domaines. Le but principal de l'étude de ces systèmes et de commander certaines variables en parallèle, sachant que les systèmes sous actionnés admettent un nombre de degrés de liberté supérieur au nombre d'actionneurs, c'est-à-dire une seule entrée doit commander plusieurs degrés de liberté simultanément. Le manque d'actionneurs complique la tâche de commande de ce genre de systèmes.

Dans ce chapitre, on va présenter un aperçu sur la modélisation des systèmes mécaniques complètement actionnés et sous actionnés, en se basant sur le formalisme d'Euler Lagrange. On va montrer les propriétés structurelles et dynamiques d'un SMSA, et utilisant ces dernières une classification sera donnée. Deux méthodes de classification sont inspirées de la littérature et qui permettent de trouver une commande appropriée pour chaque classe, sachant la complexité des SMSA, une classe peut contenir un seul exemple, ce qui traduit l'étude de ces systèmes au cas par cas.

Nous présenterons quelques systèmes de cette catégorie, et nous citerons l'intérêt et l'objectif de commande de tels systèmes.

### I.2 Modélisation des systèmes mécaniques complètement actionnés

Afin de pouvoir modéliser un système mécanique par des équations mathématiques, on commence par choisir un ensemble de coordonnées permettant de le décrire. Ces coordonnées sont généralement nommées coordonnées généralisées. Cette dénomination provient de l'époque où l'utilisation des coordonnées cartésiennes était la plus naturelle.

L'intérêt du choix des coordonnées généralisées réside dans la simplicité de la démarche de la modélisation puis de l'analyse de ces systèmes. Une fois les coordonnées généralisées choisies, on peut procéder de deux manières :

– Soit on fait une étude des forces agissant sur le système, et on applique la seconde loi de la dynamique de Newton, disant que la somme des forces appliquées est égale à la masse multipliée par l'accélération.

– Soit on étudie les différentes énergies échangées par le système, puis on exprime le Lagrangien avant d'appliquer la formule d'Euler-Lagrange.

Cette deuxième méthode, en général plus simple à mettre en œuvre, est décrite dans ce qui suit.

Le Lagrangien d'un système physique est une fonction importante permettant de décrire les équations de mouvements des variables dynamiques de ce système, où deux quantités scalaires du mouvement sont utilisées : l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

Tout système mécanique d'un certain nombre de degrés de liberté, est caractérisé à chaque instant  $t$  par une fonction, définie par les coordonnées et les vitesses généralisées, elle est dite le Lagrangien  $L(q, \dot{q})$ , et elle exprimée par :

$$L(q, \dot{q}) = T - V = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - V(q) \quad (\text{I.1})$$

où  $T$  est l'énergie cinétique,  $V$  est l'énergie potentielle,  $M$  est une matrice symétrique et définie positive, elle représente la matrice d'inertie, et  $q \in Q$  désigne le vecteur de configuration, appartenant à une variété de configuration  $n$ -dimensionnelle.

La modélisation des systèmes mécaniques, peut se faire à l'aide des équations d'Euler Lagrange, c'est un formalisme qui relie les équations d'évolution du système mécanique aux forces appliquées, et il est donné par :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = F(q)U \quad (\text{I.2})$$

où  $U \in \mathbb{R}^m$  et  $F(q) = (f_1(q), f_2(q), \dots, f_m(q))$  est la matrice des forces externes.

Le système (I.1) est considéré comme un système mécanique complètement actionné si :

$m = \text{rang}(F(q)) = n$ , ce qui signifie que la matrice  $F(q)$  est inversible. Ou d'une autre manière on peut dire qu'un système mécanique est complètement actionné si le nombre des entrées de commande est égal au nombre des variables de configuration.

A l'aide de l'équation (I.2) on peut déduire les équations de mouvement comme suit :

$$\sum_j m_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{q}_i \dot{q}_j + g_k(q) = e_k^T F(q)U, \quad k = 1, \dots, n \quad (\text{I.3})$$

où  $g_k(q) = \partial_{qk} V(q)$  et  $\Gamma_{ij}^k(q)$  sont les symboles de Christoffel, définies par :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right) \quad (\text{I.4})$$

et  $e_k$  est la  $k^{\text{ième}}$  base standard dans  $\mathbb{R}^n$ .

Passant à la forme vectorielle, on aura :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = F(q)U \quad (\text{I.5})$$

Où  $C(q, \dot{q})$  est une matrice formée des éléments  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{kj}^i \dot{q}_k$ . Le terme  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  contient deux types de termes contenant  $\dot{q}_i \dot{q}_j$  appelés termes Centrifuge ( $i = j$ ) et termes Coriolis ( $i \neq j$ ).  $G(q)$  contient le terme de gravité (pour plus de détails voir [73]).

Les systèmes mécaniques complètement actionnés sont linéarisables par un retour d'état exact (ils ne possèdent pas une dynamique des zéros), en appliquant la commande suivante :

$$U = F(q)^{-1}(M(q)v + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)) \quad (\text{I.6})$$

En définissant les variables  $x_1 = q, x_2 = \dot{q}$ , ce qui donne :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = v \end{cases}$$

On obtient un double intégrateur  $\ddot{q} = v$  et on peut appliquer les concepts de l'automatique linéaire classiques. Ceci signifie que le contrôle des systèmes mécaniques complètement actionnés et sans perturbations ne pose pas de défis en termes de contrôle [64].

Ou on peut introduire la transformation de Legendre suivante, sachant que  $M$  est une matrice symétrique définie positive (c'est-à-dire inversible):

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = M(q)\dot{q} \quad (\text{I.7})$$

Les dynamiques du système mécanique représentées dans (I.5), peuvent être réécrites sous la forme normale de Legendre suivante :

$$\begin{cases} \dot{q} = M^{-1}(q)p \\ \dot{p} = -G(q) + \tilde{C}^T(q, p)M^{-1}(q)p + F(q)U \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

où  $\tilde{C}(q, p) = C(q, M^{-1}(q)p)$ .

Choisissant les variables  $x_1 = q, x_2 = p$ , (I.8) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = M^{-1}(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 = -G(x_1) + x_2^T Q(x_1)x_2 + F(x_1)U \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

Ou de la forme générale suivante :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)U \quad (\text{I.10})$$

Qui est un système non linéaire affine en la commande avec le vecteur d'état  $x = [x_1, x_2]^T$ .

Les méthodes d'analyse et de commande développées sont applicables à ce type de systèmes, qui sont complètement actionnés.

### I.3 Les systèmes mécaniques sous actionnés (SMSA)

#### I.3.1 Définition littérale

Un SMSA est un système qui possède moins d'actionneurs de commande que de degrés de liberté à contrôler. En général les degrés de liberté non actionnés sont contrôlés par des éléments passifs comme les butés et les ressorts. Cette classe de systèmes a fait l'objet de recherches scientifiques actives fournies par leurs larges applications dans différentes disciplines.

Un système mécanique peut être sous actionné de plusieurs façons, la plus évidente est celle imposée par la dynamique du système associé par exemples : avions, hélicoptères, bateaux, sous-marins, systèmes de locomotion sans roues, ou encore par conception dans le but de réduire le poids et le coût de certaines applications pratiques telles que les satellites et les robots à articulations flexibles, où le poids de l'équipement est un facteur très important pour leur bon fonctionnement. Le sous actionnement peut être dérivé lorsqu'il y a un dysfonctionnement dans l'un des actionneurs, alors le contrôleur sous actionné établi peut s'introduire en cas d'urgence afin d'échapper à l'échec de tout le système. Ou encore imposé artificiellement pour générer des systèmes complexes pour un ordre pas très élevé, tels que le Pendule Inversé, l'Acrobot, le Pendubot, le Tora, la Bille sur rail,...etc. Pour certains systèmes sous actionnés, le manque d'actionneurs est souvent interprété comme des contraintes sur l'accélération c'est à dire comme des contraintes non holonomes du second ordre [54].

#### I.3.2 Définition mathématique

On peut définir mathématiquement un système sous actionné, comme suit : Un système mécanique contrôlé associé au vecteur de configuration  $q \in Q$  et au lagrangien  $L(q, \dot{q})$  satisfaisant les équations d'Euler-Lagrange (I.2) est appelé un système mécanique sous actionné si  $m = \text{rang}(F(q)) < n = \dim(q)$ .

D'après ces définitions, on peut dire que la structure dynamique des SMSA n'est pas linéarisable par une simple loi par retour d'état [54].

### I.4 Les systèmes mécaniques sous actionnés non holonomes

Plusieurs SMSA sont sujets à des contraintes non holonomes. En général dans la mécanique classique, le mouvement d'un système non holonome est soumis à des contraintes, qui peuvent survenir à partir de la structure du mécanisme ou de la façon dont le système est actionné [3].

Pour un système mécanique une contrainte est défini par :

$$\phi(q) \cdot \dot{q} = 0 \quad (\text{I.11})$$

où  $q$  représente le vecteur des coordonnées généralisées, l'expression (I.11) est appelée contrainte non intégrable ou non holonome, si elle ne peut pas être écrite comme la dérivée du temps d'une fonction des coordonnées généralisées, et ainsi elle ne peut être résolue par intégration.

Les contraintes non holonomes sont divisées en deux classes, contraintes non holonomes de premier ordre et contraintes non holonome du second ordre. Les contraintes du premier ordre sont définies comme des contraintes sur les coordonnées généralisées et sur les vitesses, elles sont de la forme :

$$\phi(q, \dot{q}) = 0 \quad (\text{I.12})$$

Les contraintes (I.12) sont non intégrables et issues de la cinématique du système.

Et les contraintes du second ordre sont définies comme des contraintes sur les coordonnées généralisées, sur les vitesses et sur les accélérations. Elles sont de la forme :

$$\phi(q, \dot{q}, \ddot{q}) = 0 \quad (\text{I.13})$$

Les contraintes (I.13) sont non intégrables et survenues de la dynamique du système.

**Exemple1** : On considère le modèle d'un système non linéaire d'ordre deux, suivant [41] :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= Ux_2 \\ \dot{x}_2 &= -Ux_1 \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

où  $x_1, x_2$  sont les états et  $U$  l'entrée de commande

Ce modèle possède la contrainte sur les vitesses suivante :

$$x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = 0 \quad (\text{I.15})$$

La contrainte (I.15) est intégrable, ce qui donne :

$$\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = \text{constante} \quad (\text{I.16})$$

Donc elle est appelée « contrainte holonome ».

**Exemple 2** : soit le système suivant [41]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= U_2 \\ \dot{x}_2 &= U_1 \\ \dot{x}_3 &= x_1 U_1 + x_2 U_2\end{aligned}\tag{I.17}$$

La contrainte sur les vitesses est donnée par :

$$x_1 \dot{x}_2 + x_2 \dot{x}_1 - \dot{x}_3 = 0\tag{I.18}$$

Cependant (I.18) n'est pas intégrable, donc elle est appelée contrainte non holonome.

L'étude des systèmes non holonomes et des SMSA est apparente, cela est dû à la différence de structure de leurs modèles. Du point de vue de l'automaticien, la difficulté pour des systèmes non holonomes se situe au niveau du modèle cinématique (contraintes matérielles), alors que celle des systèmes sous actionnés est liée à leurs dynamiques (contraintes non matérielles) [52, 54]. Pour un SMSA si on rajoute le nombre d'actionneurs manquants, il devient un système complètement actionné et pourra fonctionner correctement, mais si ce système possède des contraintes non holonomes, le fait de rajouter des actionneurs ne pourra pas toujours résoudre le problème de commande.

**Exemple 3** : considérant les équations d'un robot mobile sous actionné suivantes [3] :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V \cos \theta \\ \dot{y} &= V \sin \theta \\ \dot{\theta} &= U\end{aligned}\tag{I.19}$$

où  $(x, y, \theta)$  sont les coordonnées généralisées,  $V$  est la vitesse de déplacement,  $U$  est la vitesse angulaire, et qui représentent les entrées de commande.

Ce système est soumis à une contrainte de vitesse non intégrable donnée par :

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0\tag{I.20}$$

Ce système est sous actionné parce qu'on a trois degrés de liberté et deux entrées. Il possède une contrainte de vitesse empêchant le déplacement dans le sens latéral, il s'en suit qu'en fin de compte, il n'est possible de commander que deux degrés de liberté tout en disposant toujours de deux entrées.

**Remarque I.1:**

Pour certains systèmes sous actionnés, l'absence d'actionneurs se traduit par la présence de contraintes non holonomes du second ordre.

## I.5 Exemples des systèmes mécaniques sous actionnés d'ordre deux

Dans cette partie, on présentera des exemples très connus des SMSA d'ordres deux, comprenant le Pendule Inversé sur Chariot, le Pendubot, l'Acrobot, le Pendule Rotationnel, le système de la Bille sur Rail, le système TORA, la Masse Glissante sur Chariot, et le système du Pont Roulant.

Ces exemples sont considérés comme des benchmarks dans la communauté des automaticiens.

### I.5.1 Le Pendule Inversé sur Chariot, le Pendule Rotationnel et le Pont Roulant

Le Pendule Inversé sur Chariot [76] est un SMSA largement utilisé comme un banc d'essai pour simuler et implanter les lois de commande non linéaire. Il est présenté sur la figure (I.1), ce système comporte deux éléments : un chariot libre en translation et un pendule solidaire et libre en rotation, le tout est commandé par un seul moteur électrique. La tâche de commande consiste à balancer le pendule de sa position d'équilibre basse ( $q_2 = \pi \text{ modulo } 2\pi$ ) et le ramener à la position d'équilibre instable ( $q_2 = 0 \text{ modulo } 2\pi$ ), pour tout  $q_1$ .

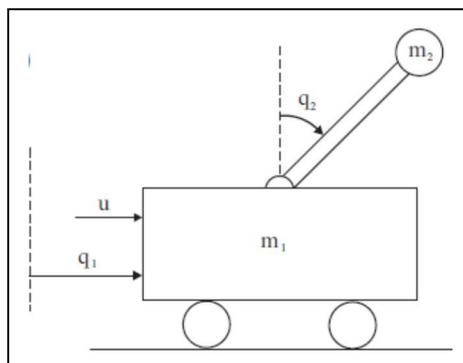


Figure I.1 Le Pendule Inversé sur Chariot

Les équations dynamiques sont données par :

$$\begin{aligned} (b_{11})\ddot{q}_1 + (b_{12}\cos(q_1))\ddot{q}_2 + (c_{11}\dot{q}_1 \sin(q_1)) \dot{q}_2 &= U \\ b_{21} \cos(q_1) \ddot{q}_1 + b_{22}\ddot{q}_2 + d_{21}\sin(q_1) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

$$b_{11} = m_1 + m_2, \quad b_{12} = b_{21} = m_2 l, \quad b_{22} = m_2 l^2 + I$$

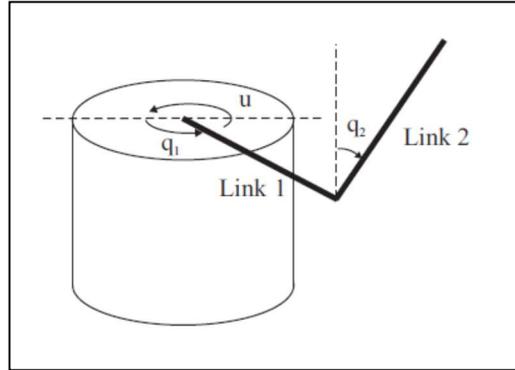
$$c_{11} = -m_2 l, \quad d_{21} = -m_2 g l$$

où  $m_1, m_2$  sont respectivement les masses du chariot et du pendule,  $l$  est la distance du centre de gravité du pendule à son axe de rotation,  $g$  est la constante de gravitation,  $U$  est l'entrée de commande.

Le Pendule Rotationnel ou le Pendule de Furuta [19] a été conçu par K. Furuta [24] pour contrer le handicap de la course limitée (en translation horizontale) du pendule inversé classique. Le bras

actionné en rotation dans le plan horizontal permet une course infinie (voir figure (I.2)), ce qui facilite la conception du contrôle. A l'autre extrémité du bras vient s'ajouter un pendule libre en rotation dans le plan vertical orthogonal au bras.

L'objectif de commande dans le Pendule Rotationnel est de ramener le lien 2 de sa position stable basse ( $q_2 = \pi$ ) à sa position d'équilibre haute instable ( $q_2 = 0$ ), tout en garantissant sa stabilité.



**Figure I.2** Le Pendule Rotationnel

Les équations dynamiques du mouvement sont données par :

$$\begin{aligned} (b_{11} + b_{12}(\sin(q_2)^2))\ddot{q}_1 + (b_{13}\cos(q_2))\ddot{q}_2 + (c_{11}\dot{q}_2\sin(2q_2))\dot{q}_1 + (c_{12}\dot{q}_2\sin(q_2) \\ + c_{13}\dot{q}_1\sin(2q_2))\dot{q}_2 = U \end{aligned} \quad (I.22)$$

$$b_{21}\cos(q_2)\ddot{q}_1 + b_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}\dot{q}_1\sin(2q_2) + d_{11}\sin(q_2) = 0$$

$$b_{11} = I_1 + m_1l_1^2 + m_2L_1^2, \quad b_{12} = m_2l_2^2, \quad b_{13} = b_{21} = m_2L_1l_2, \quad b_{22} = m_2l_2^2 + I_2$$

$$c_{11} = \frac{1}{2}m_2l_2^2, \quad c_{12} = -m_2L_1l_2, \quad c_{13} = c_{11}, \quad d_{11} = -m_2gl_2$$

où  $m_i, I_i$ , et  $L_i$  sont respectivement la masse, l'inertie, et la longueur du centre de masse du  $i^{\text{ème}}$  bras.  $U$  est l'entrée de commande.

Le Pont Roulant [15] est présenté sur la figure (I.3), il a les mêmes équations dynamiques que le Pendule Inversé sur Chariot sauf pour l'élément  $d_{21} = m_2gl$ , mais il possède un objectif de commande totalement différent. La tâche de commande consiste à réduire le balancement de la charge suspendue tout en contrôlant le mouvement du chariot.

où  $m_1, m_2$  sont respectivement les masses du chariot et du pendule,  $l$  est la distance du centre de gravité du pendule à son axe de rotation,  $g$  est la constante de gravitation,  $U$  est l'entrée de commande.

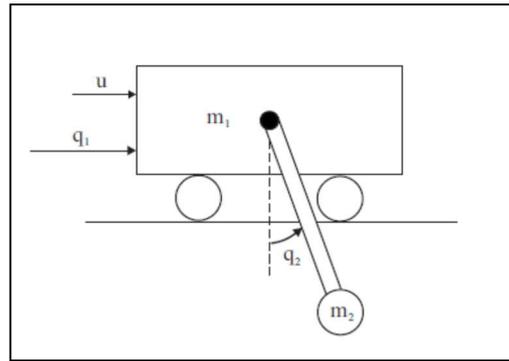


Figure I.3 Le Pont Roulant

### I.5.2 L'Acrobot et le Pendubot

L'Acrobot [74] est présenté dans la figure (I.4.a), il est constitué de deux bras manipulateurs qui peuvent tourner autour de leurs axes respectifs. Le premier, est de masse  $m_1$  et de longueur  $l_1$ , est en rotation libre, tandis que le deuxième, est de masse  $m_2$  et de longueur  $l_2$ , il est actionnée par un couple de commande  $U$ .

Le Pendubot [17] est présenté par la figure (I.4.b), graphiquement il est similaire à l'Acrobot, la différence se situe au niveau de la position de l'actionneur, car dans ce dernier c'est la première tige qui est actionnée. Cependant la différence dans la localisation d'actionneur implique une différence major dans leur commande.

L'objectif de commande pour les deux systèmes, consiste à stabiliser les deux bras manipulateurs à leur point d'équilibre haut ( $q_1 = \frac{\pi}{2}, q_2 = 0$ ) à partir de n'importe quelle condition initiale.

Ces deux systèmes partagent les mêmes équations dynamiques suivantes, sauf pour le vecteur de d'entrée.

Pour l'Acrobot, on a :

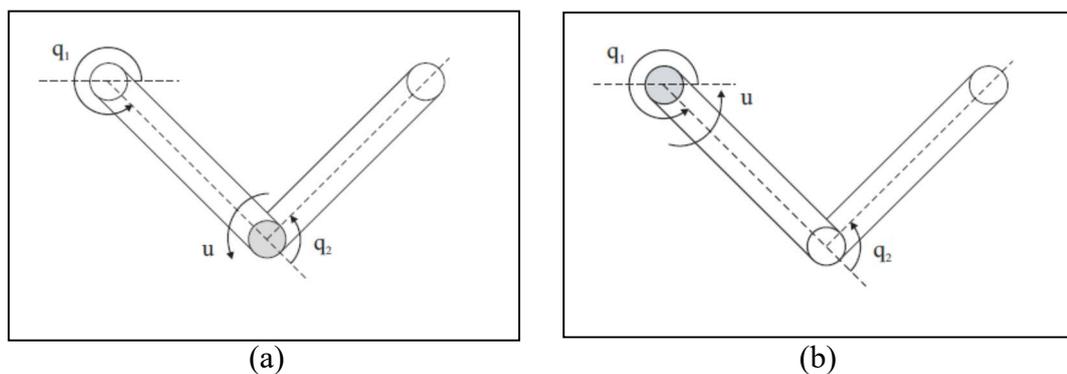


Figure I.4 L'Acrobot (a) et le Pendubot (b)

$$\begin{aligned}
& (b_{11} + b_{12}\cos(q_2))\ddot{q}_1 + (b_{13} + b_{14}\cos(q_2))\ddot{q}_2 + (c_{11}\sin(q_2)\dot{q}_2)\dot{q}_1 \\
& + (c_{12}\sin(q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))\dot{q}_2 + d_{11}\cos(q_1) + d_{12}\cos(q_1 + q_2) = 0 \\
& (b_{21} + b_{22}\cos(q_2))\ddot{q}_1 + b_{23}\ddot{q}_2 + (c_{21}\sin(q_2)\dot{q}_1)\dot{q}_1 + d_{21}\cos(q_1 + q_2) = U
\end{aligned} \tag{I.23}$$

Pour le Pendubot, on a :

$$\begin{aligned}
& (b_{11} + b_{12}\cos(q_2))\ddot{q}_1 + (b_{13} + b_{14}\cos(q_2))\ddot{q}_2 + (c_{11}\sin(q_2)\dot{q}_2)\dot{q}_1 \\
& + (c_{12}\sin(q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))\dot{q}_2 + d_{11}\cos(q_1) + d_{12}\cos(q_1 + q_2) = U \\
& (b_{21} + b_{22}\cos(q_2))\ddot{q}_1 + b_{23}\ddot{q}_2 + (c_{21}\sin(q_2)\dot{q}_1)\dot{q}_1 + d_{21}\cos(q_1 + q_2) = 0
\end{aligned} \tag{I.24}$$

où :

$$b_{11} = I_1 + I_2 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2), \quad b_{12} = 2m_2 l_1 l_{c2}, \quad b_{13} = I_2 + m_2 l_{c2}^2, \quad b_{14} = m_2 l_1 l_{c2}$$

$$b_{21} = b_{23} = b_{13}$$

$$\begin{aligned}
c_{11} = c_{12} = -m_2 l_1 l_{c2}, \quad c_{21} = m_2 l_1 l_{c2}, \quad d_{11} = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1)g, \\
d_{12} = d_{21} = m_2 l_{c2}g
\end{aligned}$$

où  $m_i, I_i$ , et  $L_i$  sont respectivement la masse, l'inertie, et la longueur du centre de masse du  $i^{\text{ème}}$  bras.  $U$  est l'entrée de commande.

### I.5.3 Le système TORA

Le système Tora [54] représenté par la figure (I.5) se compose d'une plateforme d'oscillation commandée par l'intermédiaire d'une masse excentrique. La tâche de commande est de trouver une loi de commande, tel que le déplacement horizontal  $q_1$  tend vers zéro,

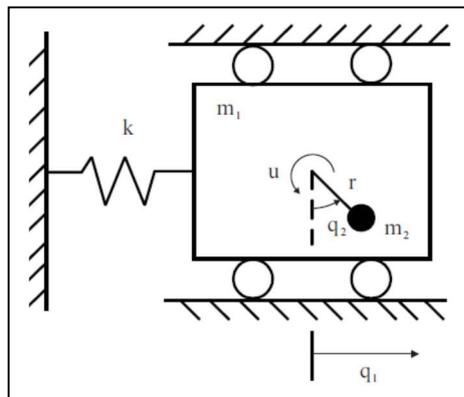


Figure I.5 Le système TORA

Les équations dynamiques sont données par :

$$\begin{aligned} b_{11}\ddot{q}_1 + (b_{12} \cos(q_2))\ddot{q}_2 + (c_{11}\dot{q}_2 \sin(q_2))\dot{q}_2 + d_{11}q_1 &= 0 \\ (b_{21} \cos(q_2))\ddot{q}_1 + (b_{22})\ddot{q}_2 &= U \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

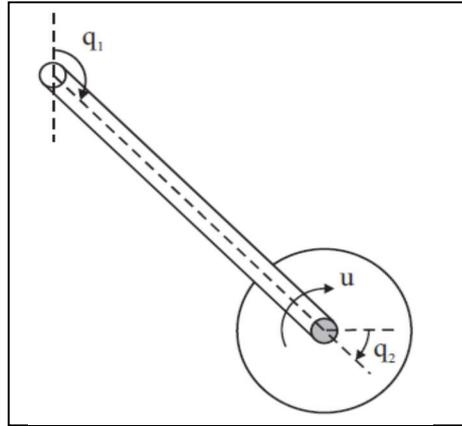
où :

$$b_{11} = m_1 + m_2, \quad b_{12} = b_{21} = m_2 r, \quad b_{22} = I + m_2 r^2, \quad c_{11} = -m_2 r, \quad d_{11} = k$$

où  $m_1$  est la masse totale du chariot et de la masse excentrique,  $m_2$  est la masse excentrique,  $r$  est le rayon de rotation,  $k$  est la raideur du ressort,  $I$  est l'inertie de la masse excentrique,  $U$  est l'entrée de commande.

#### I.5.4 Le Pendule à Roue Inertielle

Le pendule à roue inertielle [54], représenté sur la figure (I.6), est constitué d'un pendule libre en rotation autour d'un axe lié au sol, l'autre extrémité du pendule étant reliée à un disque actionné qui ne peut que tourner. La tâche de commande consiste à balancer le pendule en tournant le disque, et le stabiliser à sa position d'équilibre ( $q_1 = 0$ ).



**Figure I.6** Le Pendule à Roue Inertielle

Les équations dynamiques sont données par :

$$\begin{aligned} b_{11}\ddot{q}_1 + b_{12}\ddot{q}_2 + d_{11} \sin(q_1) &= 0 \\ b_{21}\ddot{q}_1 + b_{22}\ddot{q}_2 &= U \end{aligned} \quad (\text{I.26})$$

$$b_{11} = I_1 + I_2 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2, \quad b_{12} = b_{21} = b_{22} = I_2, \quad d_{11} = -(m_1 l_1 + m_2 L_1)g$$

où  $m_1, m_2, I_1, I_2$  sont respectivement les masses et les inerties du pendule et de la roue,  $L_1$  et  $l_1$  représentent la longueur et la longueur du centre du pendule.

### I.5.5 La Bille sur Rail

Le système Bille sur Rail [31] est composé d'une bille et d'un rail, le but de commande est de ramener la bille à partir de n'importe quelle condition initiale au centre du rail où l'entrée de commande est appliquée sur ce dernier, comme la montre la figure (I.7).

Les équations dynamiques sont les suivantes :

$$\begin{aligned} (b_{11}q_2^2)\ddot{q}_1 + (c_{11}q_2\dot{q}_2)\dot{q}_1 + (c_{12}q_2\dot{q}_1)\dot{q}_2 + d_{11}q_2\cos(q_1) &= U \\ (b_{22}q_2^2)\ddot{q}_2 + (c_{21}q_2\dot{q}_1)\dot{q}_1 + d_{21}\sin(q_1) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.27})$$

$$b_{11} = I + I_b + mq_2^2, \quad b_{22} = \frac{I_b}{r^2} + m, \quad c_{11} = c_{12} = m, \quad c_{21} = -m, \quad d_{11} = d_{21} = mg$$

où  $I$  est l'inertie de la poutre,  $m$  et  $I_b$  sont respectivement la masse et l'inertie de la bille.

$r$  est la distance entre le centre de masse de la bille et la poutre (le modèle conventionnel correspond à  $r = 0$ ).

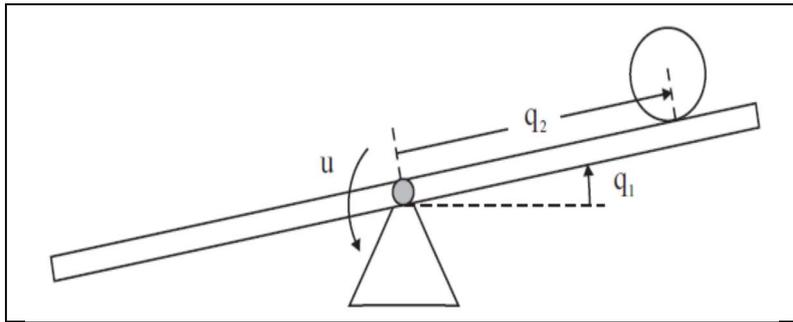


Figure I.7 La Bille sur Rail

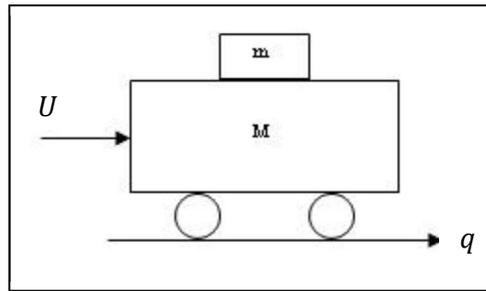
### I.5.6 Masse Glissante sur Chariot

Le système de masse glissante sur chariot [11] est présenté par la figure (I.8), dans ce système on suppose qu'il existe un frottement non linéaire  $B$  entre la masse  $m$  et le chariot de masse  $M$ , on note  $q_1$  la position de la masse  $m$  par rapport au chariot et  $q_2$  la position du chariot. Le but de contrôle est de stabiliser la masse  $m$  à sa position d'équilibre  $q_1 = 0$ , en appliquant la commande  $U$  sur le chariot afin de se déplacer à une position  $q_2$ .

Les équations du mouvement sont données par :

$$\begin{aligned} b_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}\dot{q}_1 + c_{12}\dot{q}_2 &= 0 \\ b_{21}\ddot{q}_1 + c_{21}\dot{q}_1 + c_{22}\dot{q}_2 &= U \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

$$\text{Avec : } b_{11} = m, \quad b_{21} = M, \quad c_{11} = c_{22} = -B, \quad c_{12} = c_{21} = B$$



**Figure I.8** La masse glissante sur chariot

## I.6 Classification des SMSA de deuxième ordre

Dans cette partie, on classera les SMSA basant sur leurs propriétés, et selon la redondance et le fait que certaines de ces propriétés ont été moins étudiées pour des applications pratiques, dans ce travail on s'intéresse au classement des SMSA de deuxième ordre seulement, et on se concentre sur certains particuliers qui apparaissent fréquemment dans la littérature.

Dans la littérature, seulement deux classifications pour les SMSA sont disponibles. La 1<sup>ère</sup> est due à Seto et Baillieul et la 2<sup>ème</sup> est due à Olfati Saber.

### I.6.1 Classification de Seto et Baillieul

La classification des SMSA proposée par Daming Seto et John Baillieul, est basée sur une caractéristique graphique des SMSA développée dans un diagramme de circuit de contrôle, appelée CFD (Control Flow Diagram), qui sert à représenter les forces d'interactions à travers les degrés de liberté du système sous actionné [68].

Suivant Seto et Baillieul, trois types de structures sont présentés : structure chaîne, structure arbre et point isolé. La commande proposée pour les SMSA qui possèdent une structure chaîne, est basée sur la technique de backstepping, malheureusement cette technique n'est pas applicable pour les autres structures (arbre et point isolé), ce qui reste un problème de recherche ouvert qui s'énonce afin de trouver une technique de commande commune et applicable sur les trois types de structure.

Dans cette classification, il s'agit de comprendre les relations existant entre les éléments d'un système en étudiant les forces d'interactions qui couplent les degrés de liberté, et développer un caractère graphique pour capturer les dynamiques du système donné. Pour cela on associe à chaque mécanisme un diagramme de circuit de contrôle appelé CFD.

### I.6.1.1 Principe de construction du CFD

Considérons un système mécanique de deux degrés de liberté décrit dans les coordonnées généralisées  $q = (q_1, q_2)$  appelées variables de configuration. Les équations du mouvement sont données par :

$$M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) = F(q)U \quad (\text{I.29})$$

Où :  $N(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$

Où  $C(q, \dot{q})$  est une matrice qui contient les termes Centrifuge et les termes Coriolis et  $G(q)$  contient le terme de gravité.

**Définition I.1.** Pour chaque point  $(q^0, \dot{q}^0)$  et chaque voisinage  $\rho$  de  $(q^0, \dot{q}^0)$ , on associe au système (I.29) un organigramme appelé CFD construit de la manière suivante [10,11] :

1. Réécrire l'équation (I.29) sous la forme :

$$\ddot{q} = M^{-1}(F(q)U - N(q, \dot{q})) = H(q, \dot{q}, U) \quad (\text{I.30})$$

2. Choisir ( $n + m = 3$ ) sommets  $q_1, q_2$  et  $U$ .
3. Pour chaque sommet  $q_i, i \in [1,2]$ , tracer une branche de  $U$  et  $q_k, k \in [1,2]$  avec  $k \neq i$ , vers  $q_i$  si la fonction  $H_i$  dépend explicitement de  $U, q_k$  ou  $\dot{q}_k$  et associer le nombre  $a_i$  aux branches entre  $q_i$  et  $U$ , et le nombre  $b_{ik}$  aux branches reliant  $q_k$  à  $q_i$ . Les valeurs de  $a_i$  et  $b_{ik}$  sont déterminées par :

$$a_i = \begin{cases} 2 & \text{si } \frac{\partial H_i}{\partial U} \neq 0 \text{ en } (q^0, \dot{q}^0) \\ -2 & \text{si } \frac{\partial H_i}{\partial U} \neq 0 \forall (q, \dot{q}) \in U \text{ sauf en } (q^0, \dot{q}^0) \end{cases}$$

$$b_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\partial H_i}{\partial \dot{q}_k} \neq 0 \text{ en } (q^0, \dot{q}^0) \\ -1 & \text{si } \frac{\partial H_i}{\partial \dot{q}_k} \neq 0 \forall (q, \dot{q}) \in U \text{ sauf en } (q^0, \dot{q}^0) \\ 2 & \text{si } \frac{\partial H_i}{\partial \dot{q}_k} = 0 \forall (q, \dot{q}) \in U \text{ mais } \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \neq 0 \text{ en } (q^0, \dot{q}^0) \\ -2 & \text{si } \frac{\partial H_i}{\partial \dot{q}_k} = 0 \forall (q, \dot{q}) \in U \text{ mais } \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \neq 0 \forall (q, \dot{q}) \in U \text{ sauf en } (q^0, \dot{q}^0) \end{cases}$$

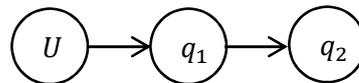
4. Associer une longueur pour chaque chemin de commande de  $U$  vers  $q_i, i \in [1,2]$  par l'addition des valeurs absolues des nombres assignés à chaque branche. Pour chaque

variable de configuration  $q_i$ , garder le chemin de commande avec la longueur la plus courte, et parmi eux éliminer tous les chemins de commande singuliers (c'est à dire les chemins de commande contenant toute branche avec un nombre négatif).

Les trois types de structure : la structure chaîne, arbre et point isolé, sont données par la définition suivante :

**Définition I.2.** Supposons que  $G$  soit un graphe du CFD, contenant une entrée de commande.

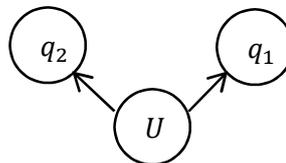
1.  $G$  a une structure chaîne s'il y a un sommet avec un chemin de contrôle, tel que ce sommet appartient à un et seulement un chemin de commande, voir figure (I.9).



**Figure I.9** Structure chaîne

Le système Masse Glissante sur Chariot possède la structure chaîne.

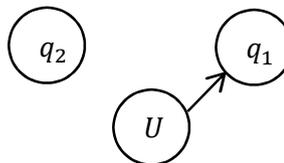
2.  $G$  a une structure arbre si pour un sommet, chaque ensemble de chemin de contrôle correspondant ne contient pas certains sommets, comme dans la figure (I.10).



**Figure I.10** Structure arbre

Le Pendule Inverse sur Chariot, le Pendubot, l'Acrobot et le système TORA possèdent une structure arbre.

3.  $G$  a une structure de sommet isolé, si  $G$  contient seulement des sommets pour lesquels il n'y a que le chemin de contrôle singulier ou pas de chemin de contrôle dans le CFD.



**Figure I.11** Structure point isolé

Le système Bille sur Rail possède la structure point isolé.

**Remarque I.2:**

- Evidemment, la structure chaîne est la moins difficile à contrôler, il apparaît même que les systèmes avec une telle structure peuvent être commandés à travers par exemple la méthode de backstepping puisque les degrés de liberté et les commandes sont reliées en série.
- Par contre, les systèmes avec une structure arbre, n'ont pas les mêmes avantages, parce qu'on a besoin de contrôler certains degrés de liberté en parallèle dans le sens, qu'une entrée de commande doit contrôler plus qu'une variable simultanément, ce qui limite l'atteignabilité des objectifs de commande.
- Pour les systèmes avec une structure en point isolé, certains objectifs de commande sont difficiles voire impossibles à atteindre du fait que la commande n'a pas d'influence sur quelques variables.

**I.6.2 Classification de Olfati Saber**

Cette classification, a donné lieu à deux classes essentielles des SMSA de deuxième ordre on se basant sur la propriété structurelle qui est l'actionnement ou pas des variables de forme, où ces systèmes possèdent une symétrie cinétique par rapport à  $q_1$  ( $\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$ ,  $T$  est l'énergie cinétique) et leur matrice d'inertie dépend de  $q_2$  qui s'appelle variable de forme et indépendante de  $q_1$  qui s'appelle variable externe, c'est-à-dire on a :  $M(q) = M(q_2)$ . Plusieurs exemples de problème de commande non linéaire, tels que le Pendule Inversé sur Chariot, la Bille sur Rail, le Pendule Rotationnel, le Pendule à Roue Inertielle, le système TORA, le Pendubot et l'Acrobot...etc., appartiennent à la classe des SMSA de deuxième ordre [54].

Les équations d'Euler-Lagrange de mouvement de ces systèmes, sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} &= U_1 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= U_2 \end{aligned} \quad (I.31)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} m_{11}(q_2)\ddot{q}_1 + m_{12}(q_2)\ddot{q}_2 + \frac{d}{dq_2} m_{11}(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{d}{dq_2} m_{12}(q_2)\dot{q}_2^2 - g_1(q_1, q_2) &= U_1 \\ m_{21}(q_2)\ddot{q}_1 + m_{22}(q_2)\ddot{q}_2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dq_2} m_{11}(q_2)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dq_2} m_{22}(q_2)\dot{q}_2^2 - g_2(q_1, q_2) &= U_2 \end{aligned} \quad (I.32)$$

où  $g_1(q_1, q_2) = -\frac{\partial V}{\partial q_1}$ ,  $g_2(q_1, q_2) = -\frac{\partial V}{\partial q_2}$ ,  $m_{11}$ ,  $m_{12}$ ,  $m_{21}$  et  $m_{22}$  sont les éléments de la matrice d'inertie  $M$ .

Pour  $U_1 = 0$  le SMSA appartient à la classe-I ( $q_2$  est actionné).

Pour  $U_2 = 0$  le SMSA appartient à la classe-II ( $q_1$  est actionné).

Olfati Saber a défini une commande appropriée suivant la forme de système, après utilisation de la linéarisation partielle proposée par Spong. Pour la forme normale triangulaire (feedback strict), il a utilisé la méthode de backstepping, pour la forme feedforward il a utilisé la commande en forwarding, et pour les systèmes sous la forme non triangulaire restent un problème ouvert

Il a été montré, que tout système sous actionné de Classe-I peut être transformé en un système sous une forme feedback stricte.

**Proposition I.1 :** (Classe-I : forme normale) On considère un SMSA avec deux degrés de liberté classe I, à partir de son lagrangien, ce système peut avoir le changement de coordonnées global suivant :

$$\begin{aligned} z_1 &= q_1 + \gamma(q_2) \\ z_2 &= m_{11}(q_2)p_1 + m_{12}(q_2)p_2 = \frac{\partial L}{\partial q_1} \\ \xi_1 &= q_2 \\ \xi_2 &= p_2 \end{aligned} \quad (I.33)$$

$$\text{où : } \gamma(q_2) = \int_0^{q_2} m_{11}^{-1}(\theta)m_{12}(\theta)d\theta$$

Ce changement de coordonnées transforme les dynamiques du système à un système non linéaire en cascade de la forme feedback stricte suivante :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= m_{11}^{-1}(\xi_1)z_2 \\ \dot{z}_2 &= g_1(z_1 - \gamma(\xi_1), \xi_1) \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \tau \end{aligned} \quad (I.34)$$

où  $u$  est la nouvelle commande obtenue de la linéarisation partielle par feedback et  $g_1(q_1, q_2) = -\frac{\partial V(q)}{\partial q_1}$

**Remarque I.3 :** L'Acrobot, le Pendule Rotationnel et le Tora sont des systèmes mécaniques sous actionnés de Classe-I, ils peuvent être transformés en la forme feedback stricte.

**Proposition I.2 :** (Classe-II : forme normale) On considère un SMSA avec deux degrés de liberté classe-II, à partir de son lagrangien, ce système peut avoir le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{aligned}
z_1 &= q_1 + \gamma(q_2) \\
z_2 &= m_{21}(q_2)p_1 + m_{22}(q_2)p_2 = \frac{\partial L}{\partial q_2} \\
\xi_1 &= q_2 \\
\xi_2 &= p_2
\end{aligned} \tag{I.35}$$

où  $\gamma(q_2) = \int_0^{q_2} m_{21}^{-1}(\theta)m_{22}(\theta)d\theta$  est défini sur l'ensemble  $\Omega = \{q_2 | m_{21}(q_2) \neq 0\}$

Ce changement de coordonnées transforme les dynamiques du système à un système non linéaire en cascade de la forme non triangulaire quadratique suivante :

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= m_{21}^{-1}(\xi_2)z_2 \\
\dot{z}_2 &= g_2(z_1 - \gamma(\xi_2), \xi_2) + \frac{\frac{d}{d\xi_1}m_{11}(\xi_1)}{2m_{21}^2(\xi_1)}z_2^2 + \\
&\quad \left( \frac{\frac{d}{d\xi_1}m_{21}(\xi_1)}{m_{21}(\xi_1)} - \frac{m_{22}(\xi_1)\frac{d}{d\xi_1}m_{11}(\xi_1)}{2m_{21}^2(\xi_1)} \right) z_2\xi_2 + \\
&\quad \left( \frac{m_{22}^2(\xi_1)}{2m_{21}^2(\xi_1)} \frac{d}{d\xi_1}m_{11}(\xi_1) - \frac{m_{22}(\xi_1)}{m_{21}(\xi_1)} \frac{d}{d\xi_1}m_{21}(\xi_1) + \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi_1}m_{22}(\xi_1) \right) \xi_2^2 \\
\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
\dot{\xi}_2 &= \tau
\end{aligned} \tag{I.36}$$

où  $u$  est la commande obtenue par la linéarisation partielle.

**Remarque I.4 :** Le Pendubot, le Pendule Inverse sur Chariot, le Pendule Rotationnel, le Pont Roulant et la Bille sur Rail sont des systèmes mécaniques sous actionnés de Classe-II, ils peuvent être transformés en la forme non triangulaire quadratique.

**Proposition I.3 :** (Classe-II: la forme feedforward) Considérant un SMSA d'ordre deux classe-II qui satisfait les conditions suivantes :

- 1-  $g_2(q_1, q_2)$  est indépendante de  $q_1$  c'est-à-dire  $D_{q_1}D_{q_2}V(q) = 0$ .
- 2-  $m_{11}$  est constante.
- 3-  $\psi(q_2) = g_2(q_2)/m_{21}(q_2)$  satisfait  $\psi'(0) \neq 0$ .

En appliquant le changement de coordonnées suivant :

$$y_1 = z_1, \quad y_2 = \frac{z_2}{m_{21}(q_2)}$$

Ce qui permet de transformer le système de la forme normale (I.35) à un système non linéaire en cascade de la forme feedforward suivante :

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= \psi(q_2) + \left( \frac{d}{d\xi_1} m_{22}(\xi_1) - \frac{m_{22}(\xi_1)}{m_{21}^2(\xi_1)} \frac{d}{d\xi_1} m_{21}(\xi_1) \right) \xi_2^2 \\
\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
\dot{\xi}_2 &= \tau
\end{aligned} \tag{I.37}$$

**Remarque I.5:** le système Pendule Inversé sur Chariot peut être transformé en un système non linéaire en cascade, de la forme feedforward, car il satisfait les conditions de la proposition I.3 ( $\psi(q_2) = g \tan(q_2)$ ) ce qui donne  $\psi'(0) = g \neq 0$ ).

Pour cette classification, Olfati saber [54] a proposé une procédure de commande pour les systèmes se transformant en des formes normales en stricte feedback et en feedforward et quelques suggestions de commande pour les formes normales non triangulaires. A chaque fois, son contrôle est constitué de deux étapes : premièrement la stabilisation du système réduit obtenu après réduction du système initial et deuxièmement, la stabilisation du système global par une procédure de backstepping ou forwarding en fonction de la forme normale associée. Olfati saber a donné un théorème pour la stabilisation des systèmes réduits associés à des formes normales en stricte feedback. Non seulement l'application de ce théorème est un peu limitée, où on la trouve dans le seul exemple de l'Acrobot, la commande construite en deux étapes conduit à des explosions de termes impliquant des expressions très compliquées.

## I.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a donné quelques généralités sur les systèmes mécaniques complètement actionnés et sous-actionnés avec deux degrés de liberté, ainsi que leur modélisation. Quelques exemples de SMSA de deuxième ordre et qui sont jugés comme des benchmarks de la commande non linéaire sont donnés. On a discuté leurs classifications les plus connues dans la littérature, celle de Seto et Baillieul qui divise les SMSA d'ordre deux en trois classes de différentes structures appelées structure chaîne, structure arbre et structure point isolé, et celle de Reza Olfati Saber qui regroupe ces systèmes suivant leurs propriétés structurelles (actionnement ou pas des degrés de liberté) en deux classes essentielles. Ces classifications sont totalement différentes, et les commandes appliquées ne sont pas implicites dans les deux cas, où une simple loi par retour d'état (feedback) n'est pas directement applicable. Lors de la complexité des propriétés de systèmes mécaniques sous actionnés, ils en existent ceux qui sont traité d'une manière particulière.

# CHAPITRE II

## COMMANDE PAR MODE GLISSANT D'ORDRE UN

---

### II.1 Introduction

Une attention considérable a été concentrée sur la commande des systèmes physiques, qui sont le plus souvent non linéaires, mal définis et ayant des paramètres non constants. Les lois de commandes classiques peuvent être insuffisantes, car elles sont non robustes et ne donnent pas de bons résultats, surtout lorsque les exigences sur la précision et autres caractéristiques dynamiques des systèmes sont un peu strictes, et sachant que le modèle mathématique constitue souvent une description approchée de la réalité physique. Pour remédier ces problèmes on fait souvent appel à des lois de commande insensibles aux variations paramétriques, aux perturbations et aux non linéarités. Dans cet objectif, plusieurs outils sont proposés dans la littérature, comme la commande floue, la commande adaptative, la commande  $H_{inf}$ , la commande à structure variable ...etc.

Une technique de commande qui gère naturellement la présence de certaines classes d'incertitudes et de perturbations est la commande par mode glissant (CMG), dans laquelle une loi de commande discontinue dirige l'état vers une hyper surface définie de manière appropriée, appelée surface de glissement, et qui rend l'origine d'espace d'état un point d'équilibre asymptotiquement stable, pour le système en boucle fermée [34].

La CMG n'est autre qu'un cas particulier de la théorie des systèmes à structure variable, basée essentiellement sur la résolution des équations différentielles à second membre discontinu, initiée par Filippov en 1960, utilisée dès la parution des livres d'Emelyanov, d'Utkin et de Slotine.

Les principaux avantages du mode glissant, sont [43] :

- La possibilité d'atteindre les performances désirées à savoir, la grande précision, la rapidité de la réponse et la stabilité.
- La robustesse face à une classe large des perturbations ou d'incertitudes du modèle.
- Le besoin d'une quantité réduite d'information, en comparaison avec les techniques de commandes classiques.
- La possibilité de stabilisation de certains systèmes non linéaires qui ne sont pas stabilisable par une loi de commande par retour d'état continu.

Les applications de la commande par régime glissant depuis sa création ont été nombreuses, elles comprennent une grande gamme de domaines, par exemple l'électronique de puissance, la commande des bras manipulateurs, la commande des moteurs électriques et des systèmes mécaniques d'une façon générale...etc.

Ce chapitre est destiné à introduire les éléments théoriques nécessaires à la compréhension du fonctionnement de la CMG, à donner une démarche de synthèse de la loi de commande et de mettre le point sur le problème de broutement (chattering) induit par cette technique. A la fin de ce chapitre une application de cette commande sous deux approches à une classe des SMSA d'ordre deux sera présentée.

## II.2 Théorie de la commande à structure variable

La commande à structure variable (CSV) par sa nature est une commande non linéaire, elle est basée sur la commutation de fonctions des variables d'état, utilisées pour créer une variété ou une hyper surface de glissement, dont le but est de forcer la dynamique du système à converger à cette hyper surface de glissement et de l'y maintenir [50].

On peut distinguer trois structures de base pour la synthèse de la loi de commande, elles correspondent au fonctionnement tout ou rien des interrupteurs de puissance. Ces structures seront présentées dans le paragraphe suivant.

### II.2.1 Structure par commutation au niveau de l'organe de commande

La structure par commutation au niveau de l'organe de commande est la plus simple, cette configuration permet la variation de la structure de système par simple commutation, au niveau de l'organe de commande qui doit être conçue de sorte que la grandeur de commande ne prenne que deux valeurs  $U_{max}$  et  $U_{min}$  [82], comme la montre la figure II.1, la commutation entre ces deux valeurs est imposée par la loi de commande suivante :

$$U = \begin{cases} U_{max} & \text{si } S(x) > 0 \\ U_{min} & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

tel que:  $S(x)$  est la loi de commutation.

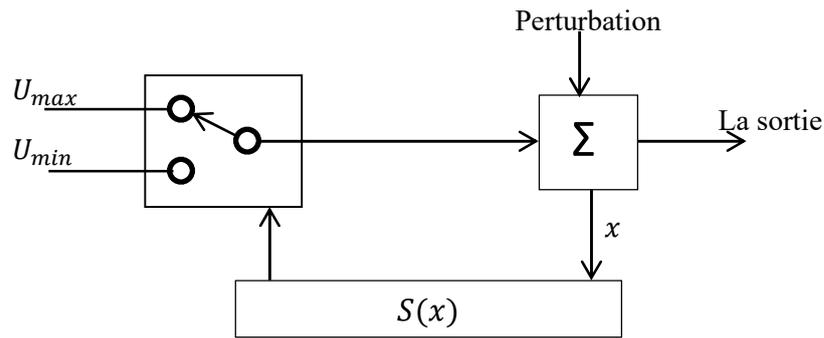


Figure II.1 Structure par commutation au niveau de l'organe de commande

### II.2.2 Structure de commutation d'une contre réaction d'état

La structure par commutation au niveau d'une contre réaction est la moins exigeante au niveau de la sollicitation de la commande, le schéma de cette structure est donné par la figure II.2, elle s'appuie sur la commande par contre réaction d'état classique où le réglage de la dynamique du système est réalisé par les gains  $k_1$  et  $k_2$ , selon la position du commutateur, le vecteur d'état  $x$  et mis en contre réaction soit par  $-k_1$  soit par  $-k_2$ , ceci est fait à l'aide de la loi de commande suivante [82] :

$$U = \begin{cases} -k_1 x & \text{si } S(x) > 0 \\ -k_2 x & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

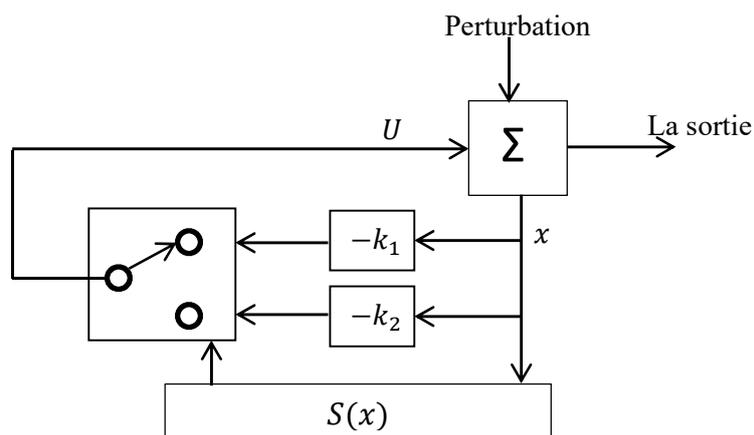


Figure II.2 Structure de commutation d'une contre réaction d'état

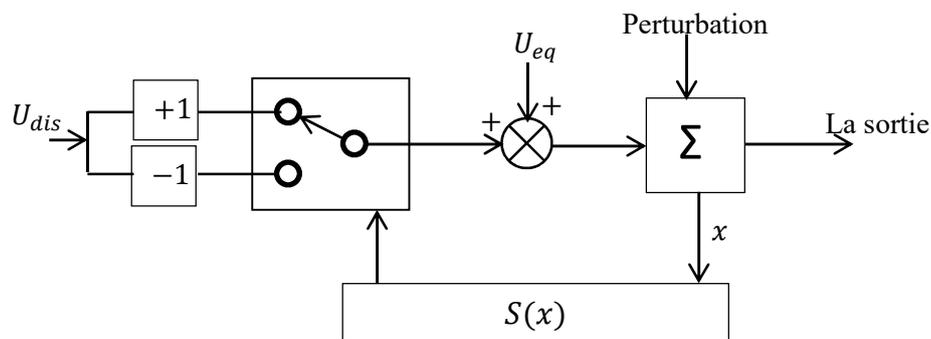
### II.2.3 Structure de commutation au niveau de l'organe de commande par l'ajout d'une commande équivalente

La structure de commutation au niveau de l'organe de commande par l'ajout d'une commande équivalente est présentée par la figure II.3. Cette structure permet de pré-positionner l'état désiré du système en régime permanent qui soit stable en réduisant le phénomène de broutement, grâce à la commande équivalente. Cette structure est simple à réaliser et a été utilisée dans beaucoup d'applications [28].

La loi de commande est donnée par :

$$U = \begin{cases} U_{eq} + U_{dis} & \text{si } S(x) > 0 \\ U_{eq} - U_{dis} & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

où  $U_{eq}$  est la commande équivalente, et  $U_{dis}$  est la commande de commutation.



**Figure II.3** Structure de commutation au niveau de l'organe de commande par l'ajout d'une commande équivalente.

## II.3 Description théorique de la commande par mode glissant

### II.3.1 Principe de fonctionnement

Soit le système non linéaire d'ordre 'n' suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) + b(x, t)U \\ y(t) = h(x, t) \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

où  $x = [x, \dot{x}, \dots, x^{n-1}]$  est le vecteur d'état,  $U$  est le vecteur de commande,  $f(x, t)$ ,  $b(x, t)$  et  $h(x, t)$  sont des fonctions non linéaires,  $y(t)$  est le vecteur de sortie.

L'objectif de CMG est de déterminer une loi de commande  $U$  qui va attirer les états  $x$  du système dans une région convenable appelée surface de glissement, choisie préalablement en fonction des

spécifications dynamiques désirées du système, et de les maintenir sur cette surface, ce qui veut dire que la sortie du système  $y(t)$  pourra suivre un signal de référence donné et borné [56].

On peut montrer l'atteignabilité de la surface de glissement par la figure II.4, suivant trois parties ou modes distincts de la trajectoire sur le plan de phase, qui sont :

- 1- Le mode de convergence (MC) : c'est le mode durant lequel l'état du système se déplace à partir de n'importe quel point initial dans le plan de phase et tend vers la surface de glissement  $S(x) = 0$ . Ce mode est caractérisé par la loi de commande et le critère de convergence.
- 2- Le mode de glissement (MG) : c'est le mode durant lequel la variable d'état a atteint la surface de glissement et tend vers l'origine en se glissant sur cette surface du plan de phase. La dynamique de ce mode est caractérisée par le choix de la surface de glissement  $S(x) = 0$ .
- 3- Le mode du régime permanent (MRP) : ce mode est ajouté pour l'étude de la réponse du système autour de son point d'équilibre (origine du plan de phase). Il est caractérisé par la qualité et les performances de la commande.

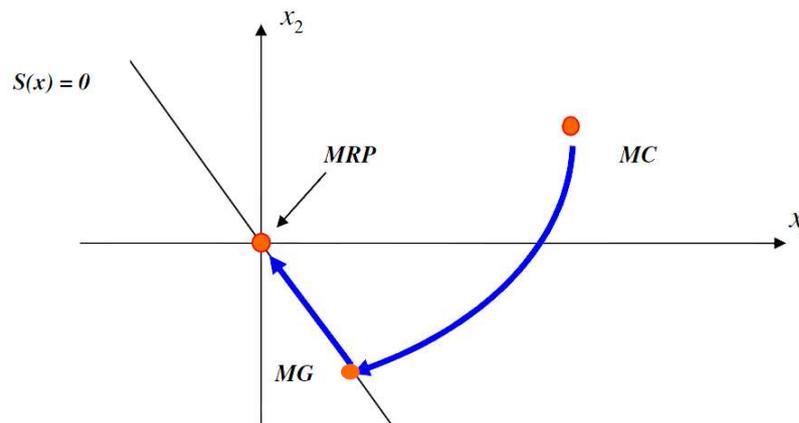


Figure II.4 Les différents modes de la trajectoire sur le plan de phase

### II.3.2 Conception de la commande par mode glissant

La mise en œuvre de la CMG se fait en trois étapes :

- Définition et choix de la surface de glissement.
- Etablissement de condition de convergence.
- Détermination de la loi de commande qui permet d'atteindre la surface et d'y maintenir.

### II.3.2.1 Choix de la surface de glissement

Soit un système non linéaire décrit par l'équation (II.4) et soit  $x_d$  la valeur désirée, on définit l'erreur de poursuite par :

$$e(x) = x - x_d \quad (\text{II.5})$$

En ce qui concerne la forme de la surface, deux possibilités se présentent, soit dans le plan de phase ou dans l'espace d'état, dans ce dernier cas on trouve la méthode dite « loi de commutation par contre réaction », dans celle-ci la synthèse de la loi de commande utilise les concepts de réglage par contre réaction d'état, son inconvénient majeur réside dans le fait qu'elle présente une réponse transitoire lente, et une conception très difficile.

Dans le cas de plan de phase, la surface de commutation est une fonction scalaire où la variable à régler glisse sur cette dernière pour atteindre l'origine du plan de phase, ainsi la surface représente le comportement dynamique désiré du système.

J.J. Slotine propose la formule générale de la surface de glissement suivante [10] :

$$S(x) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right)^{r-1} e(x) \quad (\text{II.6})$$

tel que :  $\lambda$  est une constante positive et  $r$  est le degré relatif qui présente le nombre minimum de fois qu'il faut dériver la sortie  $y(t)$  par rapport au temps pour faire apparaître l'entrée  $U(t)$ .

L'objectif de commande est de maintenir la surface à zéro, dont l'unique solution est :  $e(x) = 0$ .

### II.3.2.2 Conditions d'existence et de convergence

Le MG d'un système de deuxième ordre est montré sur la figure II.5, il est assuré par la commutation des états grâce aux commandes  $U_{max}$  et  $U_{min}$ , les commutations ont lieu sur les droites décalées parallèlement de  $\pm\Delta S$ .

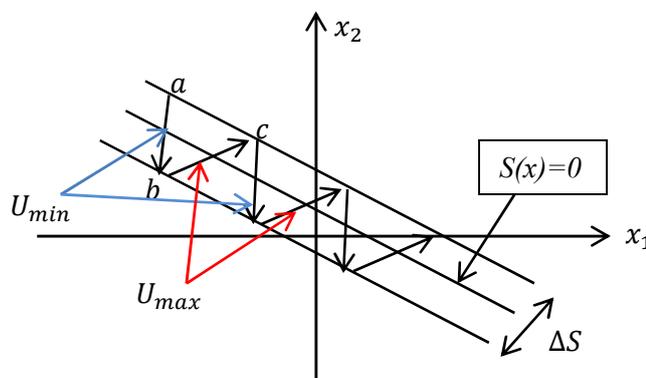


Figure II.5 Mode de glissement

L'étude de l'existence du MG, comme l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre, est basée sur la méthode de Lyapunov.

Afin de garantir l'attractivité de la surface  $S(x) = 0$ , on considère une fonction de Lyapunov  $V$  définie positive, dont la dérivée par rapport au temps le long des trajectoires du système en boucle fermée est définie négative [50].

Considérons la fonction de Lyapunov, suivante :

$$V(x) = \frac{1}{2} S^2(x) \quad (\text{II.7})$$

Sa dérivée temporelle est donnée par :

$$\dot{V}(x) = S(x)\dot{S}(x) < 0 \quad (\text{II.8})$$

Si la condition (II.8) est vérifiée, alors la variable de glissement et sa dérivée sont de signes contraires quel que soit le temps et que le zéro est un centre attracteur pour  $S(x)$ .

Le temps d'atteignabilité (reaching time) « tr » dépend directement du choix de  $S(x)$ .

Pour une convergence en temps fini, la condition (II.8) qui ne garantit qu'une convergence asymptotique est remplacée par une condition plus restrictive, dite «  $\eta$ -attractivité », elle est donnée par [70]:

$$\dot{V}(x) = S(x)\dot{S}(x) < -\eta|S(x)|, \quad \eta > 0 \quad (\text{II.9})$$

### Remarque II.1:

Il n'est pas suffisant que la dynamique de glissement soit asymptotiquement stable, il faut aussi que le domaine de glissement passe par le point d'équilibre désiré.

### II.3.2.3 Détermination de la loi de commande

Une fois la surface de glissement est choisie, ainsi que le critère de convergence, il reste à déterminer la commande nécessaire pour attirer les variables à régler vers la surface, puis glisser vers le point d'équilibre. La CMG se compose de deux termes, un terme discontinu de haute fréquence et un terme continu de basse fréquence, comme suit [8] :

$$U = U_{eq} + U_{dis} \quad (\text{II.10})$$

tels que :  $U_{eq}$  est la commande équivalente, présentée par la figure II.6, elle caractérise le comportement du système sur la surface de glissement, décrivant un mouvement idéal.

Physiquement elle peut être vue comme la valeur moyenne de la commande réelle, elle est obtenue grâce aux conditions d'invariance de la surface de glissement suivante [8] :

$$\dot{S}(x) = S(x) = 0 \quad (\text{II.11})$$

$U_{dis}$  est la commande discontinue, présentée par la figure II.7, elle garantit l'attractivité des variables d'état à contrôler vers la surface de glissement, elle est exprimée par [8]:

$$U_{dis} = -k \text{sign}(S(x)) \quad (\text{II.12})$$

Avec :  $k > 0$

### II.3.3 Phénomène de broutement (chattering)

Un régime glissant idéal requiert une commande pouvant commuter à une fréquence infinie, cependant pour une utilisation pratique, seule une commutation à une fréquence finie est possible.

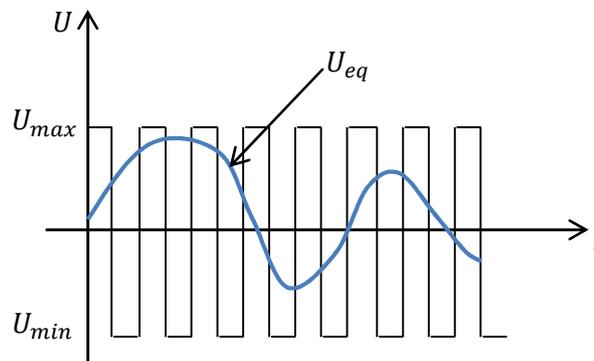


Figure II.6 La commande équivalente

$$\text{sign}(S(x)) = \begin{cases} +1 & \text{si } S(x) > 0 \\ -1 & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

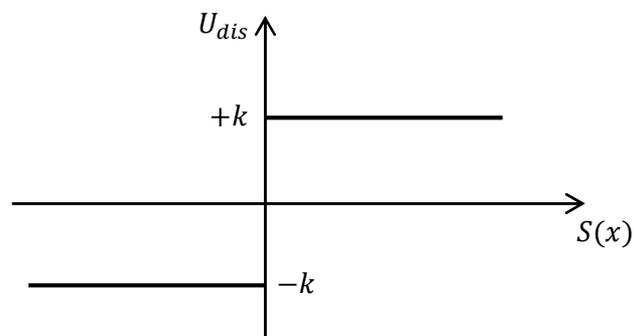
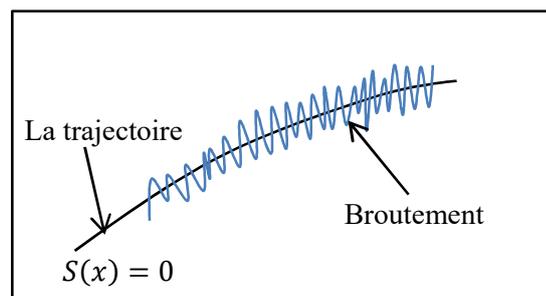


Figure II.7 La commande discontinue

Ainsi durant le régime glissant, les discontinuités appliquées à la commande peuvent entraîner un phénomène de broutement appelé chattering, comme le montre la figure II.8, celui-ci se caractérise par de fortes oscillations des trajectoires du système autour de la surface de glissement. Les deux principales raisons à l'origine de ce phénomène sont d'une part les retards de commutation au niveau de la commande et d'autre part, la présence de dynamiques parasites en série avec le système commandé. Ces dynamiques regroupent les dynamiques des actionneurs et des capteurs présentés dans le système bouclé et sont généralement négligées (non modélisées) lors de la synthèse de la loi de commande. Ainsi les commutations trop rapides de la commande discontinues sont susceptibles d'exciter les modes propres des dynamiques négligées. Ce phénomène peut être si pénalisant que l'utilisation d'une loi de CMG peut dans certaines applications être exclue, vu que son utilisation peut dégrader les performances et même conduire à l'instabilité. De plus le broutement peut provoquer d'importantes oscillations mécaniques au niveau des actionneurs et par conséquent engendrer leur usure rapide [70].



**Figure II.8** Le phénomène de broutement

### II.3.4 Solutions pour atténuer le phénomène de broutement

Afin de réduire le phénomène de broutement de nombreuses solutions ont été proposées depuis les récents progrès des travaux de Slotine, Sira-Ramirez et autres [39]. Ce phénomène peut être réduit en remplaçant la fonction « signe » par approximation à gains élevé sous forme de fonctions d'adoucissement, qui se regroupent dans la catégorie de la solution par couche limite (fonction « sat », « atan », « tanh », fonction « smooth », commande avec un seuil, commande avec composante intégral), dans ce cas le régime glissant n'est plus dans  $S$ , mais au voisinage de celui-ci. Ce qui entraîne un régime pseudo-glissant. Une autre solution est d'utiliser les lois d'approche mentionnées dans [27], dont la première est donnée par :

$$\dot{S} = -k \operatorname{sign}(S) - \alpha S, \quad k > 0, \alpha > 0 \quad (\text{II.14})$$

Cette loi contient un terme proportionnel à la fonction de glissement qui permet au système d'atteindre plus rapidement la surface de glissement lorsque celui-ci est éloigné, de plus le terme

proportionnel allège le travail de la partie discontinue  $sign(S)$ , et permet par conséquent une réduction des commutations sur la commande.

La deuxième loi d'approche, figure une puissance fractionnaire de la fonction de glissement, qui est multipliée par le signe de celle-ci, elle est donnée par :

$$\dot{S} = -k[S]^\rho sign(S) \quad (\text{II.15})$$

où  $\rho$  est un réel compris entre 0 et 1.

D'autres auteurs ont proposé d'utiliser les systèmes flous comme des approximateurs non linéaires de la fonction discontinue [50], ou d'utiliser les modes glissants d'ordre supérieur (MGOS) [47], dont le principe est de rejeter les discontinuités au niveau des dérivées supérieures de l'entrée de commande. Cette sera présentée en détail dans le chapitre III.

## II.4 Commande par mode glissant d'un SMSA de deuxième ordre

### II.4.1 Représentation d'état d'un SMSA d'ordre deux

Un SMSA est présenté par l'équation (I.5) avec  $m = rang(F(q)) < n = \dim(q)$ .

Considérons le vecteur d'état suivant :  $x = [q_1 \dot{q}_1 q_2 \dot{q}_2]^T$  et posons :

$$\begin{aligned} f(x, \dot{x}) &= -M^{-1}(x)[C(x, \dot{x}) + G(x)] \\ b(x, \dot{x}) &= -M^{-1}(x) \end{aligned}$$

Un SMSA avec deux degré de liberté, peut être décrit par l'équation suivante :

$$\dot{x} = f(x, \dot{x}) + b(x, \dot{x})U \quad (\text{II.16})$$

avec :  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $U \in \mathbb{R}^m$ .

L'équation (I.5) peut être décrite par la représentation d'état de deux sous-systèmes suivants :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_1(x) + b_1(x)U + d1(x) \end{cases} \\ \Sigma_2 &\begin{cases} \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + b_2(x)U + d2(x) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Avec :  $\Sigma_1, \Sigma_2$  sont les deux sous-systèmes.  $f_1(x) \leq N_1$ ,  $f_2(x) \leq N_2$ ,  $b_1(x) \leq B_1$ ,  $b_2(x) \leq B_2$ ,  $d_1(x) \leq \rho_1$ ,  $d_2(x) \leq \rho_2$  où  $N_1, N_2, B_1, B_2, \rho_1$  et  $\rho_2$  sont des constantes positives.

Afin d'appliquer la CMG à cette représentation, deux approches seront proposées dans les sections suivantes, elles se diffèrent dans la structure des surfaces de glissement.

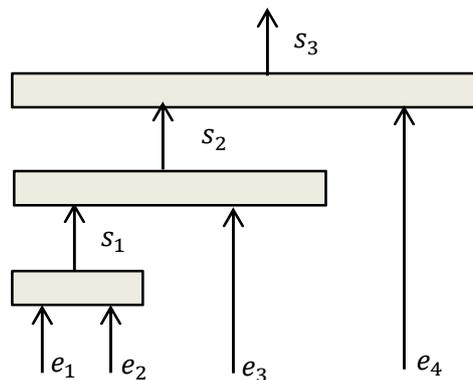
### II.4.2 Première structure de commande par mode glissant

D'après l'équation (II.17), on peut considérer une surface de glissement pour chaque sous-système, cette approche est appelé commande par mode glissant incrémental [29].

La conception de la commande est réalisée en trois étapes (voir figure II.9) :

- 1- Deux variables d'erreur des deux premières variables d'état sont choisies pour construire la surface de glissement du premier niveau.
- 2- Une variable d'erreur de la troisième variable d'état et la surface de glissement du premier niveau sont choisies pour construire de la surface de glissement de deuxième niveau.
- 3- Une variable d'erreur de la quatrième variable d'état et la surface de glissement de deuxième niveau sont choisies pour construire la dernière surface de glissement.

À la fin une commande globale du système est obtenue ainsi que la sélection des paramètres des surfaces de glissements.



**Figure II.9** La première structure de la surface de glissement

L'objectif est de construire l'entrée de commande  $U$  qui mène simultanément les erreurs  $e_1, e_2, e_3, e_4$  vers zéro, tels que  $e_1 = x_1 - x_{1d}, e_2 = x_2 - \dot{x}_{1d}, e_3 = x_3 - x_{3d}, e_4 = x_4 - \dot{x}_{3d}$  et  $x_{1d}, x_{3d}$  sont les valeurs désirées.

La première surface est choisie comme :

$$s_1 = \lambda_1 e_1 + e_2 \quad (\text{II.18})$$

La deuxième surface est choisie comme :

$$s_2 = \lambda_2 e_3 + s_1 \quad (\text{II.19})$$

De la même façon la troisième et la dernière surface de glissement est donnée par :

$$s_3 = \lambda_3 e_4 + s_2 \quad (\text{II.20})$$

Les fonctions de Lyapunov  $V_1, V_2$  et  $V_3$  sont définies comme suit :

$$V_1 = \frac{1}{2}s_1^2 = \frac{1}{2}\lambda_1^2 e_1^2 + \lambda_1 e_1 e_2 + \frac{1}{2}e_2^2 \quad (\text{II.21})$$

Pour que  $V_1$  soit supérieur à zéro il faut que  $\lambda_1 e_1 e_2 > 0$ .

$$V_2 = \frac{1}{2}s_2^2 = \frac{1}{2}\lambda_2^2 e_3^2 + \lambda_2 e_3 s_1 + \frac{1}{2}s_1^2 \quad (\text{II.22})$$

Pour que  $V_2$  soit supérieur à zéro il faut que  $\lambda_2 e_3 s_1 > 0$ , donc on a :  $\frac{1}{2}s_1^2 < \frac{1}{2}s_2^2 \Rightarrow 0 \leq V_1 \leq V_2$ .

$$V_3 = \frac{1}{2}s_3^2 = \frac{1}{2}\lambda_3^2 e_4^2 + \lambda_3 e_4 s_2 + \frac{1}{2}s_2^2 \quad (\text{II.23})$$

Pour que  $V_3$  soit supérieur à zéro il faut que  $\lambda_3 e_4 s_2 > 0$ , donc  $\frac{1}{2}s_2^2 < \frac{1}{2}s_3^2 \Rightarrow 0 \leq V_1 \leq V_2 \leq V_3$ .

Les  $\lambda_i, i = \{1, 2, 3\}$  sont des constants choisis tels que:  $\lambda_1 e_1 e_2 > 0$ ,  $\lambda_2 e_3 s_1 > 0$  et  $\lambda_3 e_4 s_2 > 0$

La loi de la commande équivalente du système complet est construite à base des lois de commande équivalente des sous-systèmes, de la manière suivante :

$$\dot{s}_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 \dot{e}_1 + \dot{e}_2 = 0 \Rightarrow \dot{e}_2 = -\lambda_1 \dot{e}_1 = (f_1 + b_1 U_{eq1} - \ddot{x}_{1d} + d_1)$$

$$U_{eq1} = \frac{-(\lambda_1 x_2 + f_1 - \ddot{x}_{1d} - \lambda_1 \dot{x}_{1d})}{b_1} \quad (\text{II.24})$$

$$\text{et } \dot{s}_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 \dot{e}_3 + \dot{s}_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 \dot{e}_3 + \lambda_1 \dot{e}_1 + \dot{e}_2 = 0 \Rightarrow \dot{e}_2 = -\lambda_2 \dot{e}_3 - \lambda_1 \dot{e}_1$$

$$\Rightarrow U_{eq2} = \frac{-(\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_4 + f_1 - \lambda_1 \dot{x}_{1d} - \ddot{x}_{1d} - \lambda_2 \dot{x}_{3d})}{b_1} \quad (\text{II.25})$$

$$\text{et } \dot{s}_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 \dot{e}_4 + \dot{s}_2 = 0 \Rightarrow \lambda_3 \dot{e}_4 + \lambda_2 \dot{e}_3 + \lambda_1 \dot{e}_1 + \dot{e}_2 = 0$$

$$\Rightarrow U_{eq3} = \frac{-(\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_4 + \lambda_3 f_2 + f_1 - \lambda_1 \dot{x}_{1d} - \ddot{x}_{1d} - \lambda_2 \dot{x}_{3d} - \lambda_3 \ddot{x}_{3d})}{\lambda_3 b_2 + b_1} \quad (\text{II.26})$$

A partir de la fonction de Lyapunov  $V_3$  on peut faire sortir l'expression de la commande de commutation, comme suit :

D'après l'équation (II.23), on a :

$$\dot{V}_3 = s_3 \dot{s}_3 = s_3 (\lambda_3 \dot{e}_4 + \dot{s}_2) = s_3 (\lambda_3 f_2 + \lambda_3 b_2 U + \lambda_2 x_4 + \lambda_1 x_2 + f_1 + b_1 U - \lambda_1 \dot{x}_{1d} - \ddot{x}_{1d} - \lambda_2 \dot{x}_{3d} - \lambda_3 \ddot{x}_{3d} + \lambda_3 d_2 + d_1) \blacksquare$$

$$= s_3(\lambda_3 f_2 + \lambda_2 x_4 + \lambda_1 x_2 + f_1 + (\lambda_3 b_2 + b_1)U_{eq} + (\lambda_3 b_2 + b_1)U_{dis} - \lambda_1 \dot{x}_{1d} - \ddot{x}_{1d} - \lambda_2 \dot{x}_{3d} - \lambda_3 \ddot{x}_{3d} + \lambda_3 d_2 + d_1) \quad (\text{II.27})$$

Pour que  $\dot{V}_3 \leq 0$  choisissons :

$$U_{dis} = \frac{-1}{(\lambda_3 b_2 + b_1)} (k \text{sign}(s_3)) \quad (\text{II.28})$$

La commande totale est donnée par :

$$U = U_{eq} + U_{dis} = \frac{-(\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_4 + \lambda_3 f_2 + f_1 - \lambda_1 \dot{x}_{1d} - \ddot{x}_{1d} - \lambda_2 \dot{x}_{3d} - \lambda_3 \ddot{x}_{3d}) - (k \text{sign}(s_3))}{\lambda_3 b_2 + b_1} \quad (\text{II.29})$$

où  $k$  est une constante positive.

### Preuve de la stabilité :

A partir de (II.27) et (II.29), on a :

$$\int_0^t \dot{V}_3 d\tau = \int_0^t s_3 (-k \text{sign}(s_3) + \lambda_3 d_2 + d_1) d\tau \leq - \int_0^t (k - \Delta) |s_3| d\tau \quad (\text{II.30})$$

tel que :  $\Delta = \sup(\lambda_3 \rho_2 + \rho_1)$  et en choisissant  $k > \Delta$

$$\text{Alors :} \quad V_3(t) - V_3(0) \leq - \int_0^t (k - \Delta) |s_3| d\tau$$

$$\text{et puisque} \quad 0 \leq V_3(t) \leq V_3(0) - \int_0^t (k - \Delta) |s_3| d\tau$$

$$\text{On a aussi :} \quad V_3(0) - \int_0^t (k - \Delta) |s_3| d\tau \leq V_3(0) < \infty$$

On peut obtenir :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (k - \Delta) |s_3| d\tau \leq V_3(0) < \infty \quad (\text{II.31})$$

Donc :

$$0 \leq \int_0^t (k - \Delta) |s_3| d\tau < \infty \quad (\text{II.32})$$

D'un autre coté on a :  $0 \leq V_1 \leq V_2 \leq V_3$ , alors :

$$\int_0^\infty V_2 d\tau \leq \int_0^\infty V_3 d\tau \quad (\text{II.33})$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{1}{2} (\lambda_2 e_3 + s_1)^2 d\tau \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{2} s_3^2 d\tau = \frac{1}{2} \left( \int_0^{\infty} (\lambda_2^2 e_3^2) d\tau + \int_0^{\infty} (2\lambda_2 e_3 s_1) d\tau + \int_0^{\infty} s_1^2 d\tau \right) < \infty$$

alors :

$$\int_0^{\infty} s_1^2 d\tau < \infty \Rightarrow s_1 \in L_2 \quad (\text{II.34})$$

A partir de (II.23), on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} V_3 d\tau &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} s_3^2 d\tau = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\lambda_3 e_4 + s_2)^2 d\tau = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\lambda_3^2 e_4^2 + 2\lambda_3 e_4 s_2 + s_2^2) d\tau \\ &= \left( \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \lambda_3^2 e_4^2 d\tau + \int_0^{\infty} \lambda_3 e_4 s_2 d\tau + \int_0^{\infty} \frac{1}{2} s_2^2 d\tau \right) < \infty \text{ puisque } \int_0^{\infty} s_3^2 d\tau < \infty \end{aligned}$$

alors :

$$\int_0^{\infty} s_2^2 d\tau < \infty \Rightarrow s_2 \in L_2 \quad (\text{II.35})$$

D'après l'équation (II.32) :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |s_3| d\tau &< \infty \quad (\text{II.36}) \\ \Rightarrow \int_0^{\infty} |\lambda_3 e_4 + s_2| d\tau &= \left( \int_0^{\infty} |\lambda_3 e_4| d\tau + \int_0^{\infty} |s_2| d\tau \right) < \infty \end{aligned}$$

alors :

$$\int_0^{\infty} |s_2| d\tau < \infty \Rightarrow s_2 \in L_1 \quad (\text{II.37})$$

$$\text{en plus, on a : } \int_0^{\infty} |s_2| d\tau = \int_0^{\infty} |\lambda_3 e_3 + s_1| d\tau = \left( \int_0^{\infty} |\lambda_3 e_3| d\tau + \int_0^{\infty} |s_1| d\tau \right) < \infty$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} |s_1| d\tau < \infty \Rightarrow s_1 \in L_1 \quad (\text{II.38})$$

Utilisant le lemme de Barbalat, suivant [28] :

**Lemme II.1 :** soit  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction uniformément continue sur  $[0, \infty)$ , supposons que

$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi(\tau) d\tau$  existe et elle est finie, alors  $\phi \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} s_i = 0 \quad (\text{II.39})$$

Ce qui veut dire que toutes les surfaces de glissement sont asymptotiquement stables.

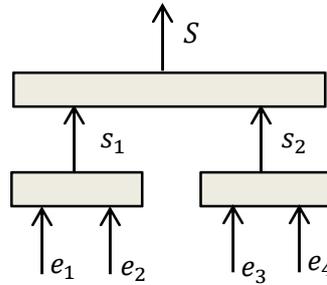
**Théorème II.1:** On considère le système sous actionné d'ordre deux (II.17), si la loi de commande est choisie par (II.29), dont les surfaces de glissement sont donnés par (II.18), (II.19) et (II.20) alors les erreurs convergent asymptotiquement vers zéro et les surfaces de glissement sont asymptotiquement stable.

### II.4.3 Deuxième structure de commande par mode glissant

Pour l'équation (II.17), la construction de la surface de glissement est divisé en deux niveaux (voir figure (II.10)), dans le premier niveau on peut considérer une surface de glissement pour chaque sous-système ( $s_1 = 0, s_2 = 0$ ) de la forme :

$$\begin{aligned} s_1 &= \lambda_1 e_1 + e_2 \\ s_2 &= \lambda_2 e_3 + e_4 \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

Où  $\lambda_1, \lambda_2$  sont des constantes positives,  $e_i = x_i - x_{id}, i = \{1, 2, 3, 4\}$ , et  $x_{id}$  est la valeur désirée.



**Figure II.10** La deuxième structure de la surface de glissement

Pour déterminer la commande équivalente de chaque sous-système, on prend :  $s_1 = \dot{s}_1 = 0$  et  $s_2 = \dot{s}_2 = 0$ .

Ce qui donne :

$$U_{eq1} = \frac{-\lambda_1 x_2 - f_1(x) + \lambda_1 \dot{x}_{1d} + \ddot{x}_{1d}}{b_1(x)} \quad (\text{II.41})$$

$$U_{eq2} = \frac{-\lambda_2 x_4 - f_2(x) + \lambda_2 \dot{x}_{3d} + \ddot{x}_{3d}}{b_2(x)} \quad (\text{II.42})$$

Le deuxième niveau sera une combinaison linéaire entre les deux surfaces de glissement du premier niveau, sous la forme suivante :

$$S = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 \quad (\text{II.43})$$

où  $\alpha_1, \alpha_2$  sont des paramètres constants, ils sont choisis tel que :  $\alpha_1 \alpha_2 s_1 s_2 \geq 0$ .

Ainsi, la commande équivalente s'exprime par :

$$U_{eq} = \frac{\alpha_1 b_1(x) U_{eq1} + \alpha_2 b_2(x) U_{eq2}}{\alpha_1 b_1(x) + \alpha_2 b_2(x)} \quad (\text{II.44})$$

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2} S^2 \quad (\text{II.45})$$

Alors :

$$\dot{V} = S\dot{S} = S(\alpha_1 \dot{s}_1 + \alpha_2 \dot{s}_2) \quad (\text{II.46})$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = S[ & \alpha_1 (\lambda_1 x_2 - \lambda_1 \dot{x}_{1d} + f_1(x) + b_1(x)U - \ddot{x}_{1d} + d_1) \\ & + \alpha_2 (\lambda_2 x_4 - \lambda_2 \dot{x}_{3d} + f_2(x) + b_2(x)U - \ddot{x}_{3d} + d_2)] \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

Choisissons la commande équivalente (II.44), et afin de vérifier la condition d'attractivité ( $\dot{V} < 0$ ) et assurer la stabilité du système, on prend la commande de commutation comme suit :

$$U_{dis} = \frac{-k \text{sign}(S(x))}{\alpha_1 b_1(x) + \alpha_2 b_2(x)} \quad (\text{II.48})$$

Alors la commande totale est donnée par :

$$\begin{aligned} U = U_{eq} + U_{dis} &= \frac{\alpha_1 b_1(x) U_{eq1} + \alpha_2 b_2(x) U_{eq2}}{\alpha_1 b_1(x) + \alpha_2 b_2(x)} + \frac{-k \text{sign}(S(x))}{\alpha_1 b_1(x) + \alpha_2 b_2(x)} \\ &\Rightarrow \\ U &= \frac{\alpha_1 b_1(x) U_{eq1} + \alpha_2 b_2(x) U_{eq2} - k \text{sign}(S(x))}{\alpha_1 b_1(x) + \alpha_2 b_2(x)} \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

avec  $k$  constante positive.

### Preuve de la stabilité :

D'après les équations (II.23) et (II.26), on a :

$$\begin{aligned} \dot{V} = S\dot{S} &= S(-k \text{sign}(S)) \leq 0 \quad \dot{V} = S\dot{S} = S(-k \text{sign}(S) + (\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2)) \\ &\Rightarrow \dot{V} \leq -(k - \xi) |S| \leq 0 \end{aligned}$$

tel que :  $\xi = \sup(\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2)$  et choisissant  $k > \xi$

Intégrant les deux côtés :

$$\int_0^t \dot{V} d\tau \leq - \int_0^t (k - \xi) |S| d\tau \quad (\text{II.50})$$

$$\Rightarrow V(t) - V(0) \leq - \int_0^t (k - \xi) |S| d\tau \quad (\text{II.51})$$

puisque  $(k - \xi)|S| > 0$ , alors :

$$V(t) \leq V(0) - \int_0^t (k - \xi) |S| d\tau < \infty \quad (\text{II.52})$$

et on a :

$$\begin{aligned} V(0) &\geq V(t) + \int_0^t (k - \xi) |S| d\tau \geq \int_0^t (k - \xi) |S| d\tau \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (k - \xi) |S| d\tau &\leq V(0) < \infty \end{aligned} \quad (\text{II.53})$$

Appliquant le lemme de Barbalat, on aura :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S = 0 \quad (\text{II.54})$$

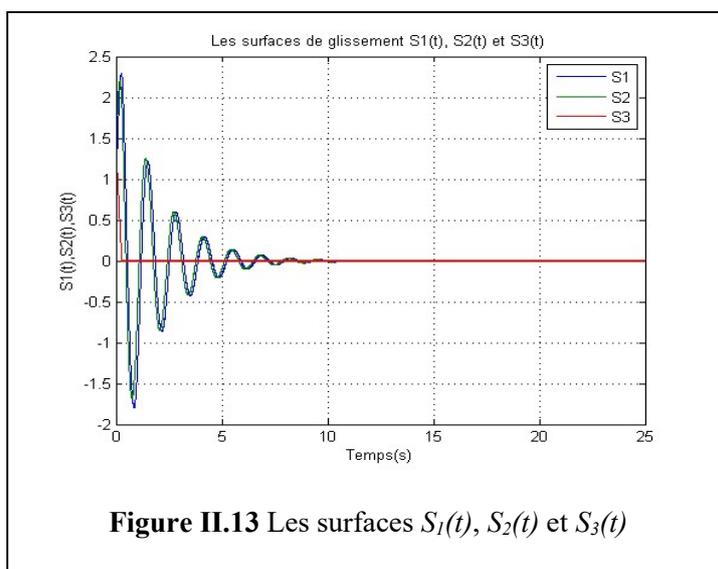
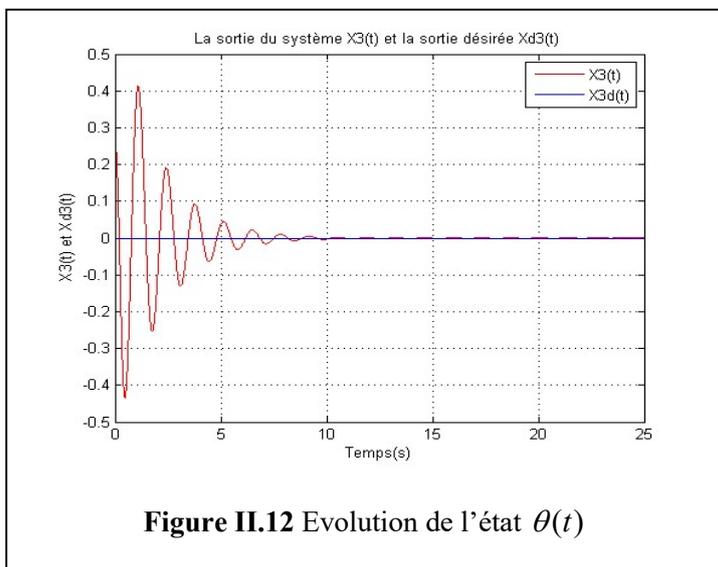
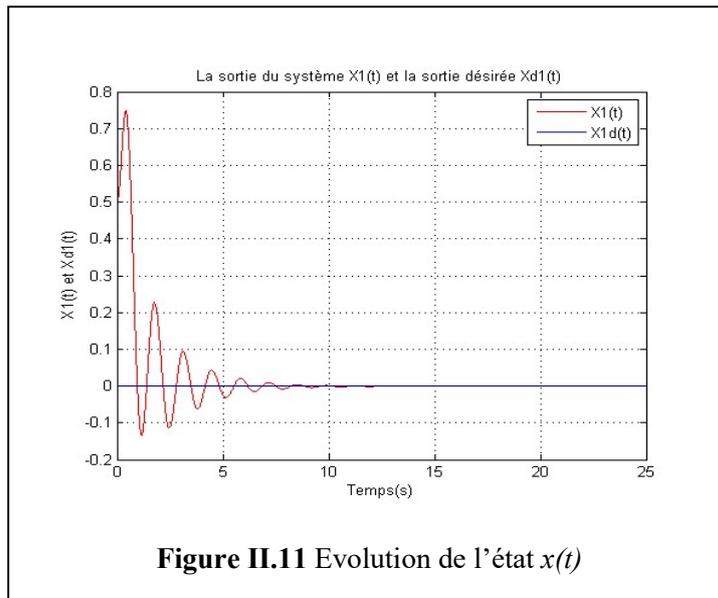
Ce qui signifie que la surface de glissement est asymptotiquement stable.

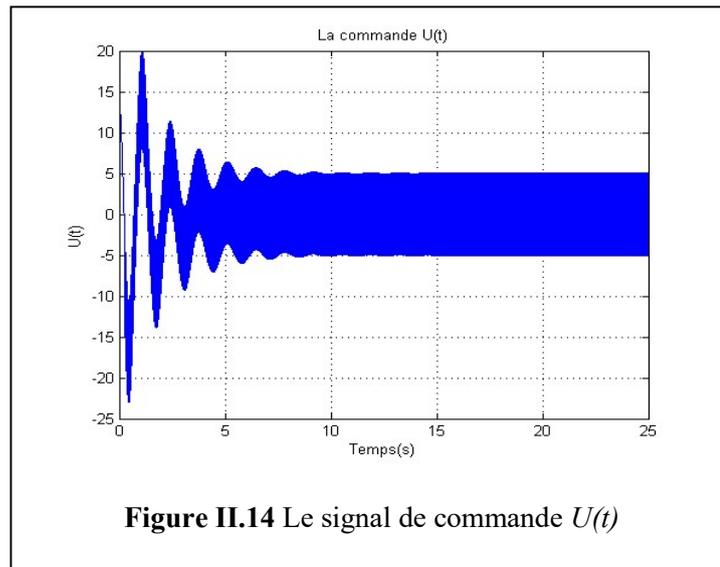
**Théorème II.2:** On considère le système sous actionné d'ordre deux (II.17), si la loi de commande est choisie par (II.49), dont les surfaces de glissement sont définies par (II.40), (II.43), alors les erreurs convergent asymptotiquement vers zéro et les surfaces de glissement sont asymptotiquement stable.

## II.4.4 Simulations

### II.4.4.1 Application de la première structure au pendule inversé sous actionné

L'objectif de commande est ramener le pendule à la position verticale tout en gardant la stabilité du chariot, partant des conditions initiales :  $x = [0.5, 0, \frac{\pi}{12}, 0]^T$  et de vecteur de sorties désirées  $y_d(t) = [0, 0]^T$ . Dans cette simulation, les paramètres du système sont donnée par:  $M = 2kg$ ,  $m = 0.1kg$ ,  $l = 0.25m$ .

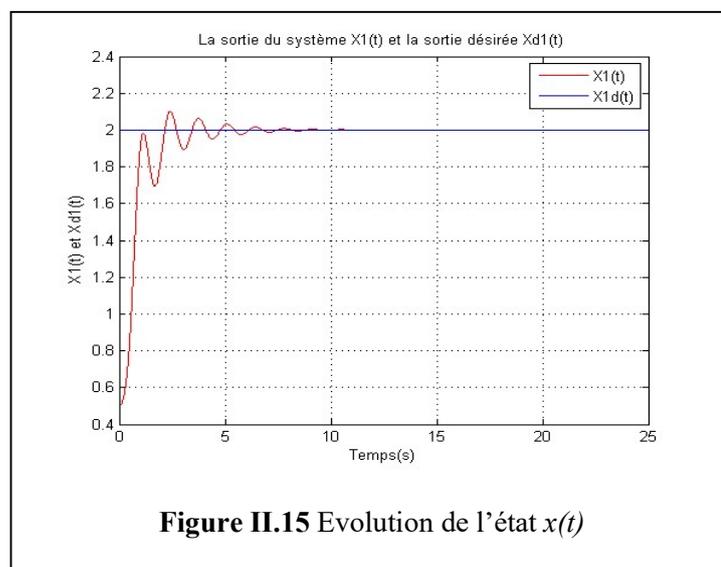


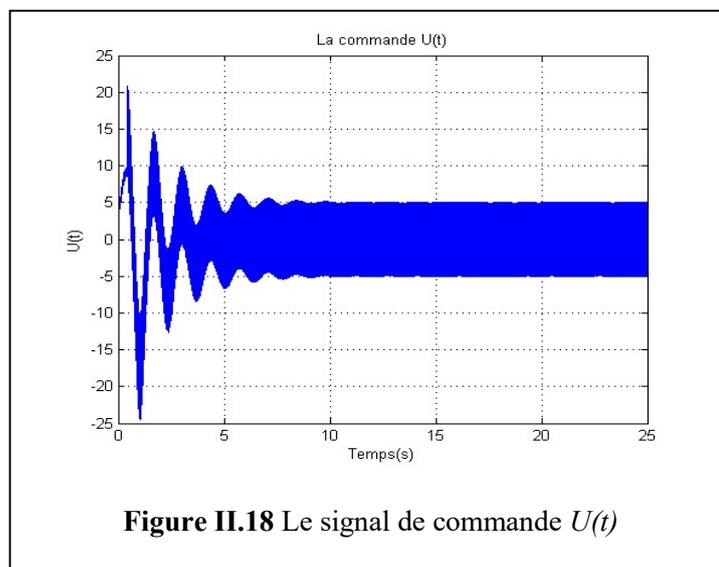
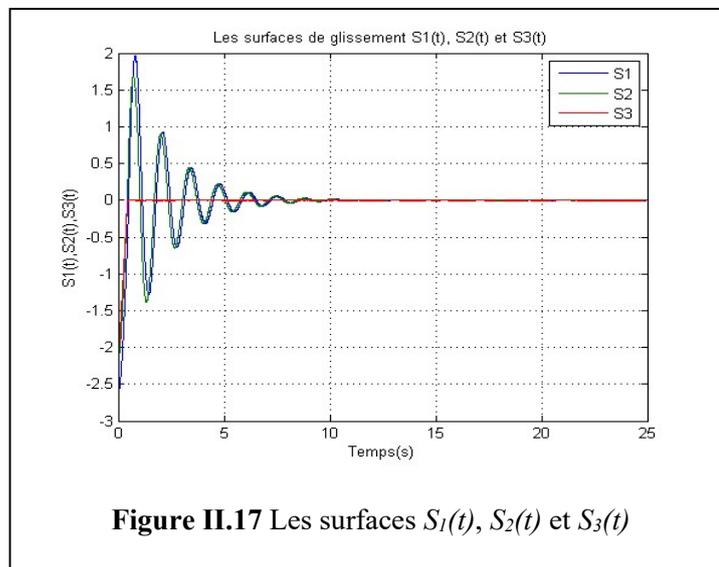
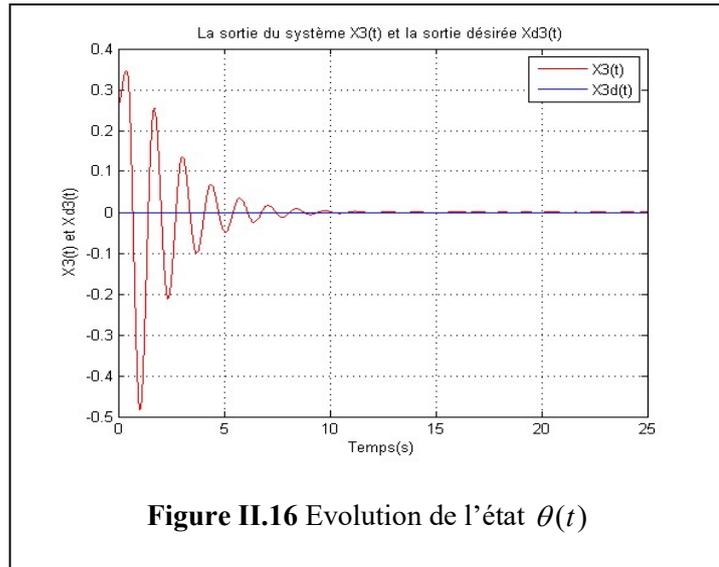


D'après les figures (II.11) et (II.12), on peut remarquer que les états de système on pu suivre leur états de référence, en appliquant la commande présentée par la figure (II.14). Les surfaces de glissement montrées par la figure (II.13) sont stables et convergent asymptotiquement vers zéro. On remarque aussi la présence de phénomène de chattering dans le signal de commande, qui agit négativement sur les actionneurs.

#### II.4.4.2 Application de la première structure au pendule inversé sous actionné avec perturbation

Le vecteur de perturbation est donné par:  $P(t) = 0.08 * randn(1, tf)$  on suppose aussi qu'il y a un changement au niveau de la masse du pendule:  $\pm \Delta m = 0.1 kg$ . Le vecteur d'état initial  $x = [0.5, 0, \frac{\pi}{12}, 0]^T$ . Le vecteur de sorties désirées est choisi comme suit:  $y_d(t) = [2, 0]^T$ .

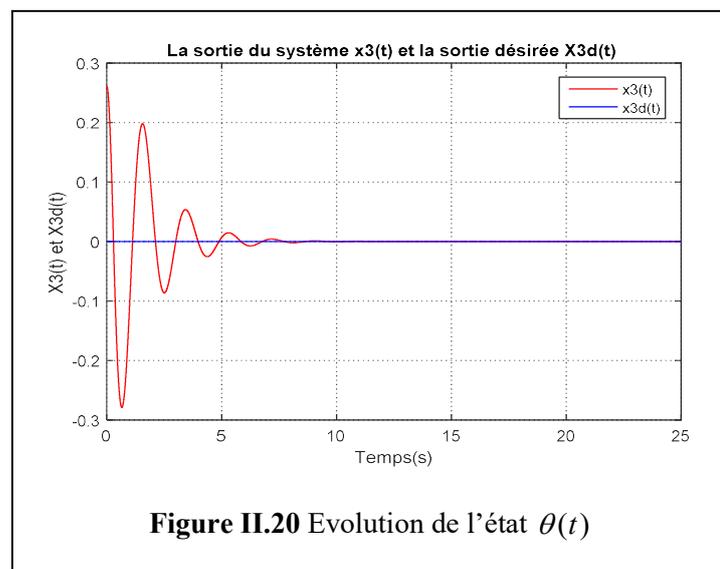
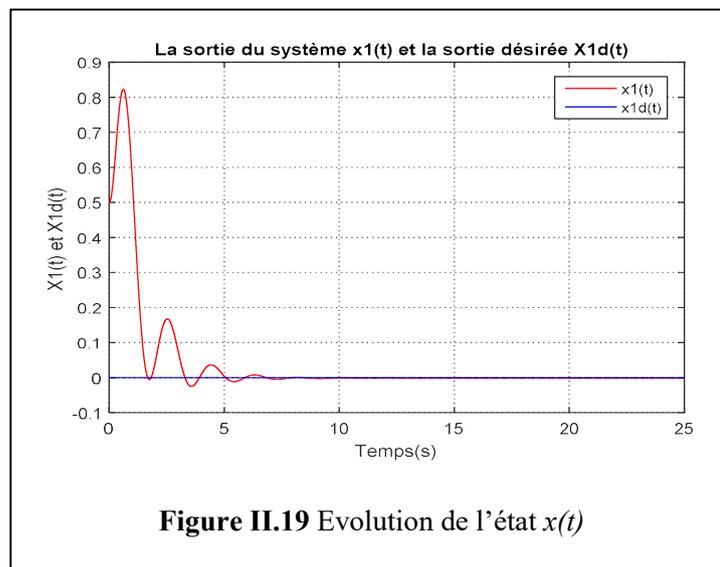


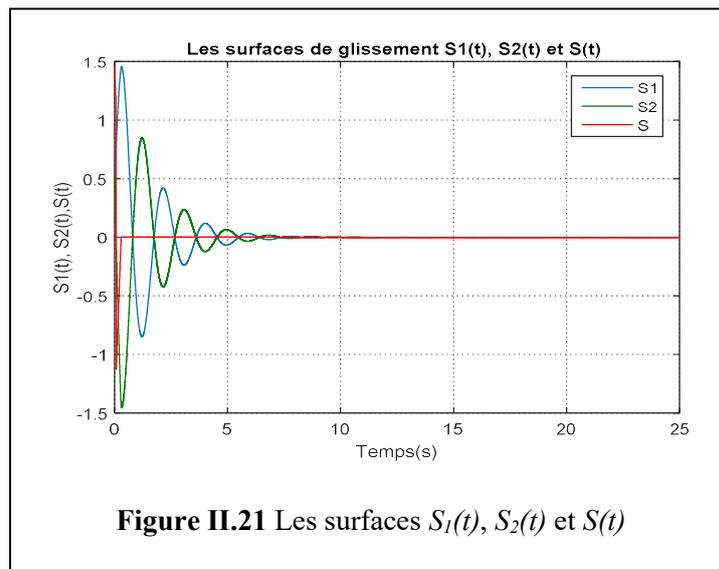


D'après les figures (II.15) et (II.16), malgré la présence des perturbations on remarque que les états convergent vers leurs états désirés et les surfaces de glissement présentées par la figure (II.17) sont stables. La figure (II.18) montre le signal de commande où le phénomène de broutement est toujours présent.

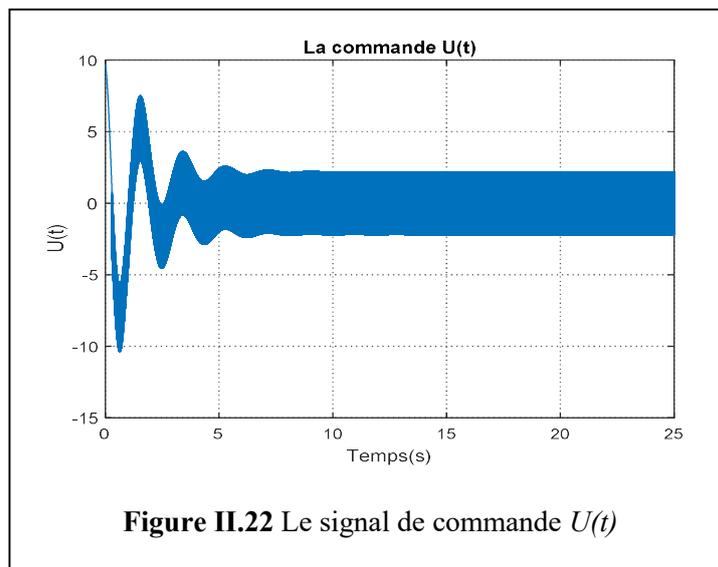
#### II.4.4.3 Application de la deuxième structure au pendule inversé sous actionné :

Les conditions initiales sont données par :  $x = [0.5, 0, \frac{\pi}{12}, 0]^T$  et le vecteur de sorties désirées  $y_d(t) = [0, 0]^T$ . Dans cette simulation, les paramètres du système sont donnée par:  $M = 2kg$ ,  $m = 0.1kg$ ,  $l = 0.25m$ .





**Figure II.21** Les surfaces  $S_1(t)$ ,  $S_2(t)$  et  $S(t)$

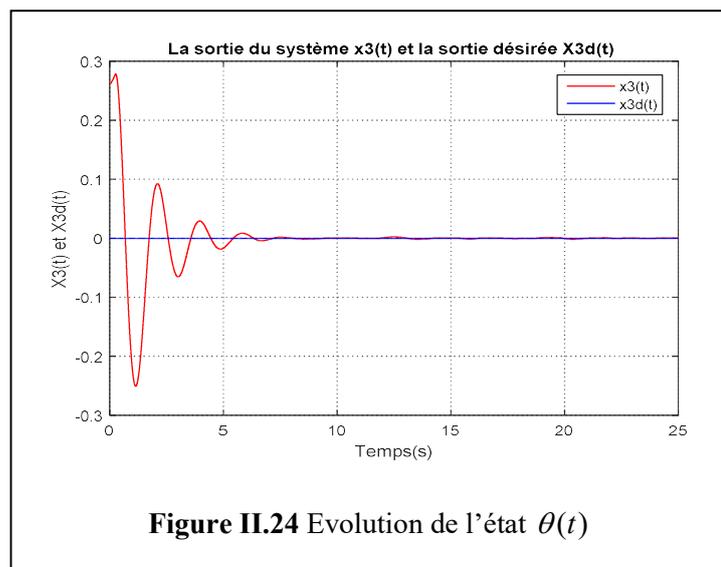
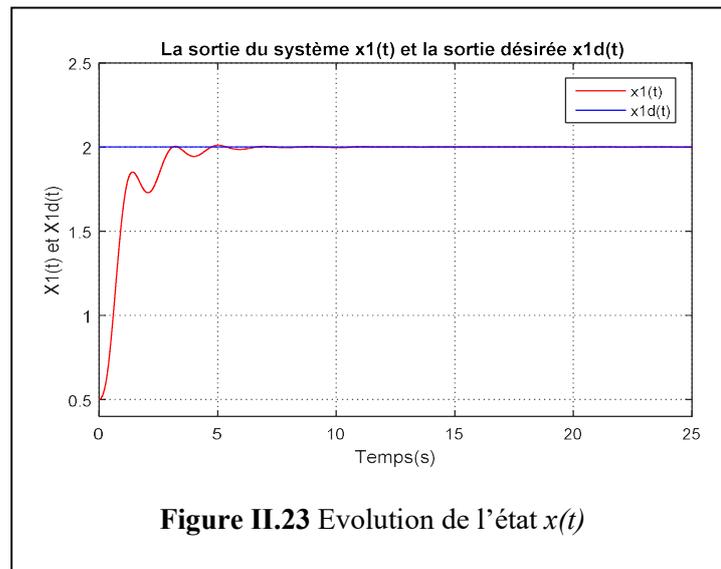


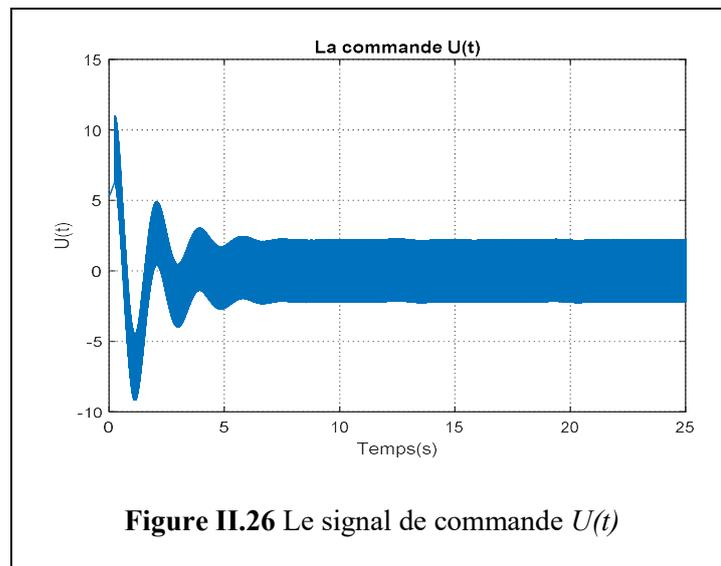
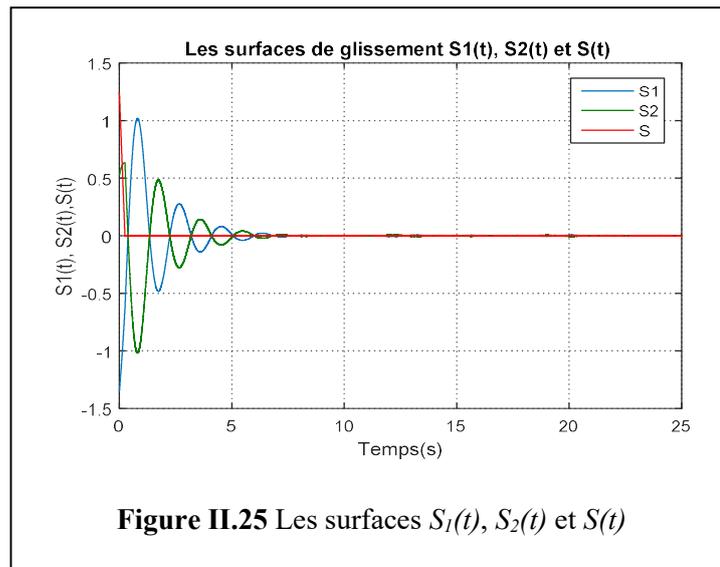
**Figure II.22** Le signal de commande  $U(t)$

La figure (II.22) représente la commande appliquée au système, cette dernière a permis aux états du système d'atteindre les états désirés qui sont présentés par les figures (II.19) et (II.20). Ainsi la convergence des surfaces de glissement vers zéro est achevée, cela est montré par la figure (II.21). On peut remarquer que le phénomène de broutement a diminué un peu par rapport aux résultats de la première structure et la convergence est un peu plus rapide.

#### II.4.4.4 Application de la deuxième structure au pendule inversé sous actionné avec perturbation

Afin de vérifier la robustesse de la commande appliquée, un vecteur de perturbation est supposé présent, sous la forme :  $P(t) = 0.08 * \text{randn}(1,tf)$  on suppose aussi qu'il y a une incertitude concernant le modèle du système, on prend par exemple un changement de la masse du pendule :  $\pm \Delta m = 0.1 \text{kg}$ . Le vecteur initial est :  $x = [0.5, 0, \frac{\pi}{12}, 0]^T$  et le vecteur de sorties désirées est donné par :  $y_d(t) = [2, 0]^T$ .





D'après les figures (II.23) et (II.24), on peut remarquer que les états de système ont pu suivre leurs états désirés, en appliquant la commande présentée par la figure (II.26). Les surfaces de glissement montrées par la figure (II.25) sont stables et convergent asymptotiquement vers zéro. On peut conclure que la commande appliquée est robuste vis à vis des perturbations.

## II.5 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté, la théorie de la CMG et ses principes de base. Ensuite on a proposé deux structure de CMG appliquées sur un SMSA d'ordre deux. Une analyse de stabilité, basée sur le théorème de Lyapunov est montrée. D'après les résultats de simulation on a prouvé

l'efficacité de la commande proposée, où le grand intérêt de cette commande se situe dans la simplicité de mise en œuvre, et la propriété d'invariance de la commande qui permet d'asservir des systèmes incertains et perturbés. La discontinuité de la commande de commutation est un inconvénient majeur, dont plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature, l'une de ces solutions est l'utilisation des MGOS. Cette dernière sera présentée dans le chapitre suivant.

# CHAPITRE III

## COMMANDE PAR MODE GLISSANT D'ORDRE DEUX

---

### III.1 Introduction

La théorie des MG est une bonne alternative pour surmonter les problèmes des incertitudes et des perturbations mais cette dernière s'est heurtée au problème de la réticence qui se voit dans les discontinuités au voisinage de la surface de glissement, et qui s'est avérée être un inconvénient majeur. En particulier, il est difficile dans de telles conditions d'envisager des développements pour des applications pratiques quand leur implantation implique une usure relativement rapide des organes de commande du processus. Les chercheurs Russes ont proposés de déplacer le problème de discontinuité due à l'élément de commutation de la loi de commande en régime glissant, sur les dérivées d'ordres supérieur de la variable de glissement au lieu d'agir sur la première dérivée.

Dans les années 80, Emel'yanov a généralisé le concept des MG classiques qui assure la robustesse à ce qui est appelé les MG d'ordre supérieur. Préservant les principaux avantages de l'approche par MGO1, ils réduisent le phénomène de réticence qui est l'inconvénient majeur de CMG, en garantissant même une meilleure précision de convergence par rapport aux imperfections de modèle ou d'organes de commande. L'ordre de glissement caractérise en particulier le degré de continuité des dynamiques du système au voisinage de la surface et correspond au nombre de dérivées continues de la variable à contraindre. Pour cela, des algorithmes de commande capables de générer des régimes glissants de tout ordre doivent être synthétisés [22].

L'inconvénient d'un MGOS réside dans l'information nécessaire sur les dérivées de la surface de glissement, qui sont calculées en fonction des variables d'état du système. Vu la difficulté de calculer les dérivées de la surface et de l'état, on retrouve dans la littérature de nombreux algorithmes par MGO2.

Dans ce chapitre les commandes proposées sont basées sur le MGO2, quelques algorithmes tels que le Twisting (ATW) le Super-Twisting (ASTW) seront présentés, et une application à un SMSA sera effectuée.

### III.2 Principe de fonctionnement d'un régime glissant d'ordre supérieur

Considérons un système non linéaire incertain dont la dynamique est décrite par :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,t) + g(x,t)U \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{III.1}$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est la variable d'état,  $t \in \mathbb{R}^+$  est la variable du temps,  $U$  est la commande, c'est une fonction discontinue et bornée,  $f$  et  $g$  sont des champs de vecteurs suffisamment différentiables mais connus de façon incertaine.

Soit  $S(x,t)$  la variable du glissement et  $r \in \mathbb{R}$  est l'ordre du mode glissant, il désigne le degré relatif du système, qui signifie le nombre minimum de fois qu'il faut dériver la surface, par rapport au temps, pour faire apparaître la commande explicitement.

Un régime glissant standard est basé sur l'annulation de la dérivée première par rapport au temps de la surface de glissement, alors qu'un mode glissant d'ordre  $r$  agit sur les  $(r - 1)$  premières dérivées [50].

Afin de forcer la variable  $S(x,t)$  et ses  $(r - 1)$  premières dérivées successives vers zéro en un temps fini, la commande agit d'une façon discontinue sur la  $r^{i\text{ème}}$  dérivée de  $S(x,t)$  :

$$S = \dot{S} = \ddot{S} = \dots = S^{(r-1)} = 0\tag{III.2}$$

où  $r$  est calculé en déterminant les dérivées successives de  $S$ :

$$\begin{aligned}r &= 1, \text{ si } \frac{\partial}{\partial U} \dot{S} \neq 0 \\ r &\geq 2, \text{ si } \frac{\partial}{\partial U} S^i = 0 \text{ (} i=1, \dots, r-1 \text{) et } \frac{\partial}{\partial U} S^r \neq 0\end{aligned}\tag{III.3}$$

L'un des problèmes majeurs pour l'implantation des algorithmes par mode glissant d'ordre  $r$  est que le nombre d'informations nécessaires augmente avec l'ordre du mode glissant [50].

On s'intéresse dans ce qui suit aux algorithmes de commande par MGO2, qui sont utilisés en majorité dans la littérature.

### III.3 Notion de précision des modes glissants réels

Un régime glissant est qualifié d'idéal quand les organes de commande commutent à une fréquence infinie. Toutefois, ce n'est pas le cas en pratique étant données les

imperfections de ces derniers et de ce fait, le régime glissant ne prend place que dans un proche voisinage de la surface considérée. Ce comportement est qualifié de régime glissant réel. Le cas idéal, quant à lui, doit être interprété comme des trajectoires limites lorsque les imperfections deviennent inexistantes et lorsque la fréquence de commutation tend vers l'infini [22].

En plus de réduire le broutement de la commande, une commande à régimes glissants d'ordre  $r$  améliore, pour un glissement réel, la précision de convergences vers l'ensemble de glissement d'ordre  $r$ . Dans cette partie, les principaux résultats sur la précision d'une commande à régimes glissants d'ordre  $r$  sont présentés. On s'intéresse au cas d'un glissement réel [7].

**Définition III.1 :** Soit  $\gamma: \mathbb{R}^\lambda \rightarrow \mathbb{R}^{\lambda'}$  une fonction telle que  $\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Un algorithme de commande réel (conduisant à un régime glissant réel) sur la contrainte  $S = 0$  est dit d'ordre  $r$  ( $r > 0$ ) par rapport à  $\gamma(\varepsilon)$  si pour tout ensemble local de conditions initiales il existe un temps  $t_1$  et une constante  $C$  tels que,  $\forall t > t_1$ , l'inégalité suivante soit satisfaite

$$|S| \leq C |\gamma(\varepsilon)|^r \quad (\text{III.4})$$

Cette définition implique en outre que l'inégalité ci-dessus est vérifiée en temps fini.

Lorsque  $\gamma(\varepsilon)$  est le plus petit intervalle de continuité de la commande, les mots "par rapport à  $\gamma$ " sont en général omis.

La définition suivante est une extension aux algorithmes concernant des lois de commande discontinues et des fréquences de commutations bornées.

**Définition III.2 :** Soit un algorithme, dépendant d'un paramètre  $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^n$  générant un régime glissant sur la surface  $S$ , et dont l'action est continue par morceau par rapport au temps, avec des intervalles de continuité pas plus petits que  $\tau(\varepsilon) > 0$ , où  $\tau(\varepsilon) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Si cet algorithme est d'ordre  $r$  par rapport à  $\tau$ , on dit alors que c'est un algorithme par MG réel d'ordre  $r$  par rapport à la surface  $S$ .

**Proposition III.1 :** Supposons que la  $r^{\text{ième}}$  dérivée totale par rapport au temps de  $S$ ,  $S^{(r)}$  soit bornée. Alors il existe des constantes  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{r-1}$  telles que, en régime établi :

$$|S| \leq c_0 \tau^r, \quad |\dot{S}| \leq c_1 \tau^{r-1}, \quad |\ddot{S}| \leq c_2 \tau^{r-2}, \dots, \quad |S^{(r-1)}| \leq c_{r-1} \tau$$

Il résulte de ces définitions qu'un algorithme d'ordre  $r$  permettra, si la méthode d'intégration est à pas variable majoré par  $\tau$ , d'obtenir la précision de convergence suivante :

$$|S| = o(\tau^r), \quad |\dot{S}| = o(\tau^{r-1}), \dots, |S^{(r-1)}| = o(\tau)$$

On dit alors qu'on a un régime glissant réel d'ordre  $r$  par rapport à  $S$ .

Pour un mode glissant d'ordre  $r$  la précision de convergence est de  $\tau^r$ .

Ainsi, obtenir une bonne précision de convergence d'un MG requiert non seulement de maintenir la fonction contrainte à zéro, mais également ses dérivées successives. Ceci donne un argument supplémentaire aux MGOS [22].

### III.4 Commande par mode glissant d'ordre deux

Considérons le système non linéaire décrit par l'équation (III.1), supposant que  $f$  et  $S$  sont des fonction de classes  $C^1$  et  $C^2$  et que les seules informations actuelles disponibles, sont les valeurs actuelles de  $t$ ,  $U(t)$ ,  $S(x,t)$  et peut être le signe de la dérivée par rapport au temps de  $S$ . Différenciant deux fois la variable glissement de  $S$ , les relations suivantes sont dérivées:

$$\dot{S} = \frac{\partial}{\partial t} S(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} S(x,t) \dot{x} \quad (\text{III.5})$$

$$\ddot{S} = \frac{\partial}{\partial t} \dot{S}(t,x,U) + \frac{\partial}{\partial x} \dot{S}(t,x,U) \dot{x} + \frac{\partial}{\partial U} \dot{S}(t,x,U) \dot{U}(t) \quad (\text{III.6})$$

L'objectif de commande est d'établir un régime glissant d'ordre deux par rapport à  $S$ , tel que  $S = \dot{S} = 0$  (Voir figure III.1).

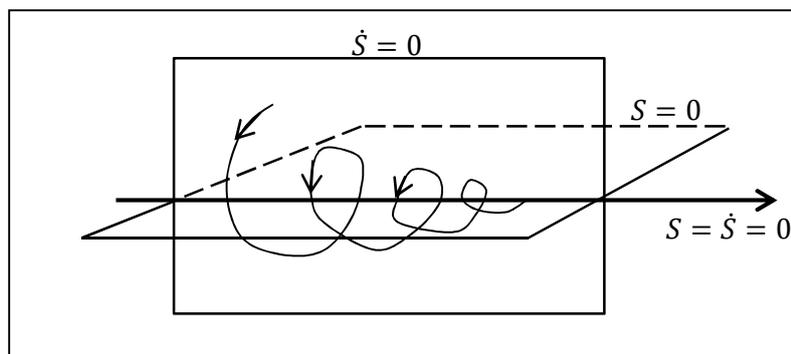


Figure III.1 Trajectoire d'un mode glissant du second ordre

Si le système (III.1) est de degré relatif 1 par rapport à  $S$ , c'est-à-dire  $\frac{\partial}{\partial U} \dot{S} \neq 0$ , on a :

$$\ddot{S} = \alpha(x, t) + \beta(x, t)\dot{U} \quad (\text{III.7})$$

tels que :  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions bornées.

Si le système (III.1) est de degré relatif 2 par rapport à  $S$ , c'est-à-dire  $\frac{\partial}{\partial U}\ddot{S} \neq 0$ , on a :

$$\ddot{S} = \alpha(x, t) + \beta(x, t)U \quad (\text{III.8})$$

Pour énoncer un problème de contrôle rigoureux (atteignabilité de la surface de glissement et bornitude de  $\ddot{S}$ ), les conditions suivantes sont supposées :

- 1- Les valeurs de commande font partie de l'ensemble  $\nu = \{U : |U| \leq U_M\}$  où  $U_M > 1$  est une constante réelle, en plus la solution du système est bien définie pour tout  $t$ , à condition que  $U(t)$  soit continue et  $\forall t U(t) \in \nu$ .
- 2- Il existe  $U_1 \in (0, 1)$  tel que pour n'importe quelle fonction continue  $U(t)$  avec  $|U(t)| > U_1$ , il y a  $t_1$  tel que  $S(t)U(t) > 0$  pour tout  $t > t_1$ . Cependant la commande  $U(t) = -U_M \text{sign}(S(t_0))$  où  $t_0$  est la valeur initiale du temps, permet d'atteindre la variété  $S=0$  en temps fini.
- 3- Soit  $\dot{S}(x, t, U)$  la dérivée par rapport au temps totale de la variable de glissement  $S(x, t)$ , il existe des constants positifs  $S_0$ ,  $U_0 < 1$ ,  $\Gamma_m$ ,  $\Gamma_M$ , tel que si  $|S(x, t)| < S_0$  alors :

$$0 < \Gamma_m \leq \frac{\partial}{\partial U}\dot{S}(x, t, U) \leq \Gamma_M, \quad \forall U \in \nu, x \in X \quad (\text{III.9})$$

Et l'inégalité  $|U| > U_0$  entraîne  $\dot{S}U > 0$ .

- 4- Il existe une constante positive  $\Phi$  tel que dans la région  $|S(x, t)| < S_0$  l'inégalité suivante soit satisfaite  $\forall t, x \in X, U \in \nu$  :

$$\left| \frac{\partial}{\partial t}\dot{S}(x, t, U) + \frac{\partial}{\partial x}\dot{S}(x, t, U)\dot{x} \right| \leq \Phi \quad (\text{III.10})$$

Toute solution de (III.7) ou de (III.8) doit satisfaire l'inclusion différentielle :

$$\ddot{S} \in [-\Phi, \Phi] + [\Gamma_m, \Gamma_M]U.$$

La deuxième condition signifie que commençant à partir de n'importe quel point dans l'espace d'état, il est possible de définir une commande appropriée  $U(t)$  qui dirige la variable de glissement dans un ensemble de telle sorte que la condition de bornitude sur les

dynamiques de glissement définies par la troisième et la quatrième condition sont satisfaites. En particulier, ils déclarent que la dérivée seconde de la variable glissante  $S$ , évaluée avec des valeurs fixes du contrôle  $U$ , est uniformément bornée dans un domaine borné [58].

Plusieurs algorithmes du MGO2 ont été proposés dans la littérature, parmi ces algorithmes, on peut citer :

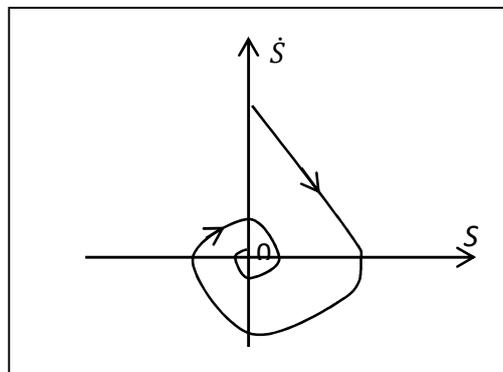
- Algorithme de Twisting (ATW)
- Algorithme de Super Twisting (ASTW).
- Algorithme de la loi de convergence prédéfinie (Prescribed Convegence Law).
- Algorithme sous-optimal.

Dans les paragraphes suivant on va détailler les deux algorithmes ATW et ASTW car ils sont les plus utilisés, le choix de ces algorithmes est justifié par la simplicité de mise en œuvre et par un besoin d'une quantité d'information relativement faible sur l'état du système.

#### III.4.1 Algorithme de Twisting (ATW)

Le contrôleur de Twisting est historiquement le premier algorithme de la commande par MGO2, qui conduit la sortie du système et ses dérivés à l'origine en un temps fini et en présence des perturbations bornées [69].

Dans cet algorithme la trajectoire de système tourne autour de l'origine de plan de phase  $(S, \dot{S})$  en s'en approchant d'une manière spirale, comme le montre la figure III.2. La valeur absolue des intersections de la trajectoire avec les axes ainsi que les temps de rotation diminuent en progression géométrique. La valeur de la dérivée de la commande commute à chaque croisement d'axe, ce qui nécessite la disponibilité du signe de la dérivée par rapport au temps de la variable de glissement  $S$  [83].



**Figure III.2** Trajectoire de l'ATW dans le plan de phase

Posant  $y_1 = S$ ,  $y_2 = \dot{S}$ , le problème posé revient à la stabilisation en temps fini du système auxiliaire du second ordre modélisé par :

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= \alpha(x,t) + \beta(x,t)U \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions mal connues, mais satisfont (III.9), (III.10).

### Glissement idéal :

**Théorème :** considérons le système (III.8), et la surface de glissement  $S$ , la loi de commande [22]

$$U = \begin{cases} -\lambda_m \text{sign}(y_1), & \text{si } y_1 y_2 \leq 0 \\ -\lambda_M \text{sign}(y_1), & \text{si } y_1 y_2 > 0 \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

où  $\lambda_m, \lambda_M$  vérifient :

$$\begin{aligned} \lambda_M &> 4 \frac{\Gamma_M}{S_0}, \\ \lambda_m &> \frac{\Phi}{\Gamma_m}, \\ (\Gamma_m \lambda_M) - \Phi &> (\Gamma_M \lambda_m) + \Phi, \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

est un algorithme glissant d'ordre deux par rapport à  $S$ , pour un degré relatif  $r = 2$ .

La borne supérieure du temps de convergence peut être précisée, et ceci quel que soit le quadrant du plan de phase  $(y_1, y_2)$  où se situent les conditions initiales :

$$T_{tw\infty} \leq t_{M1} + \Theta_{tw} \frac{1}{1-\theta_{tw}} \sqrt{y_{1M1}}$$

$y_{1M1}$  représente la valeur de  $S$  la première fois que l'axe des abscisses dans le plan  $(s, \dot{s})$  est traversé,  $t_{M1}$  étant l'instant correspondant.  $\Theta$  et  $\theta$  sont donnés par les relations :

$$\begin{aligned} \Theta_{tw} &= \sqrt{2} \frac{\Gamma_m \lambda_M + \Gamma_M \lambda_m}{(\Gamma_m \lambda_M - \Phi) \sqrt{\Gamma_M \lambda_m + \Phi}} \\ \theta_{tw} &= \sqrt{\frac{\Gamma_M \lambda_m + \Phi}{\Gamma_m \lambda_M - \Phi}} \end{aligned}$$

Dans le cas où le système est de degré relatif  $r = 1$ , la loi de commande, appliquée au système (III.7) est :

$$\dot{U} = \begin{cases} -U & \text{si } |U| > U_M \\ -\lambda_m \text{sign}(S) & \text{si } s\dot{s} \leq 0, |U| \leq U_M \\ -\lambda_M \text{sign}(S) & \text{si } s\dot{s} > 0, |U| \leq U_M \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

### Glissement réel :

Nous présentons ici la version réelle d'ATW. L'intérêt de cette forme est qu'elle ne requiert pas d'information sur la dérivée de la surface considérée et qu'elle prend en compte des contraintes d'ordre pratique telles que l'échantillonnage des mesures et de la loi de commande. Pour des raisons de simplification, la période d'échantillonnage (notée  $\tau$ ) considérée est la même pour la prise de mesures et la commande.

Définissons alors la loi de commande suivante [22]:

$$U = \begin{cases} -\lambda_m \text{sign}(S), & \text{si } S\Delta_s \leq 0, \\ -\lambda_M \text{sign}(S), & \text{si } S\Delta_s > 0, \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

avec :

$$\Delta_s = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ S(k\tau) - S((k-1)\tau), & k \geq 1 \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

et  $\lambda_m, \lambda_M$  vérifient les conditions (III.13).

### Amélioration de la vitesse de convergence :

Afin de réduire le temps de convergence vers l'ensemble  $S = \dot{S} = 0$ , la loi de commande est donnée par [22]:

$$U = -a^2 S - 2a\dot{S} - \begin{cases} -\lambda_m \text{sign}(S), & \text{si } S\dot{S} \leq 0 \\ -\lambda_M \text{sign}(S), & \text{si } S\dot{S} > 0 \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

où  $a$  est un paramètre positif qui permet la rapidité de convergence du système.

Pour les systèmes affines par rapport à la commande, une autre loi proposée par Levant, pour un degré relatif  $r = 2$ , donnée par [42] :

$$U = -r_1 \text{sign}(s) - r_2 \text{sign}(\dot{s}) \quad (\text{III.18})$$

avec  $r_1$  et  $r_2$  sont des constantes positives, La convergence en temps fini est garantie par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
r_1 &> r_2 > 0 \\
(r_1 + r_2)\Gamma_m - \Phi &> (r_1 - r_2)\Gamma_M + \Phi \\
(r_1 - r_2)\Gamma_m &> \Phi
\end{aligned} \tag{III.19}$$

### III.4.2 Algorithme de Super Twisting (ASTW)

Cet algorithme a été développé pour contrôler les systèmes avec un degré relatif un afin d'éviter le chattering. Dans ce cas également, les trajectoires tournent autour de l'origine sur le plan de phase  $(S, \dot{S})$  tout en s'approchant vers l'origine, comme le montre la figure (III.3) [58].

La loi de commande est donnée par:

$$U = U_1(t) + U_2(t) \tag{III.18}$$

$$\dot{U}_1 = \begin{cases} -U & \text{si } |U| > U_M \\ -W \text{sign}(S) & \text{si } |U| \leq U_M \end{cases} \tag{III.19}$$

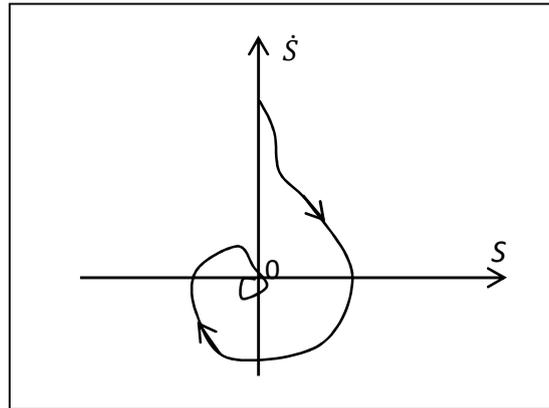
$$U_2 = \begin{cases} -\lambda S_0^\rho \text{sign}(S) & \text{si } |S| > S_0 \\ -\lambda |S_0|^\rho \text{sign}(S) & \text{si } |S| \leq S_0 \end{cases} \tag{III.20}$$

où les constantes  $W$  et  $\lambda$  sont positives et fixées de telle sorte que les conditions suffisantes de convergence en temps fini suivantes soient vérifiées :

$$\begin{aligned}
W &> \frac{\Phi}{\Gamma_m} \\
0 &< \rho < 0.5 \\
\lambda^2 &\geq \frac{4\Phi\Gamma_M(W + \Phi)}{\Gamma_m^2\Gamma_m(W - \Phi)}
\end{aligned} \tag{III.21}$$

Ce contrôleur peut être simplifié dans le cas où  $S_0 = \infty$ , il est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
U &= -\lambda |S|^\rho \text{sign}(S) + U_1(t) \\
\dot{U}_1 &= -W \text{sign}(S)
\end{aligned} \tag{III.22}$$



**Figure III.3** Trajectoire de phase dans l'ASTW

### III.5 Inconvénients des commandes à régimes glissants d'ordre supérieur

Plus  $r$  est grand, meilleure est la précision de convergence dans un glissement réel vers la surface. Néanmoins plus  $r$  est grand, plus il est nécessaire d'avoir, à chaque commutation, des informations sur les  $(r - 1)$  dérivées de  $S$ . Bien que l'on puisse réduire ces informations, dans certains cas aux  $(r - 2)$  dérivées de  $S$ , cette condition freine l'utilisation de commande d'ordre supérieur à 3. En effet, plus on dérive la sortie ( $y$ ), plus on risque d'amplifier le bruit dans les dérivées de la sortie ( $y^{r-1}$ ), ce qui rend la commande instable.

Pour une commande à régime glissant d'ordre  $r$ , la commande discontinue est appliquée sur  $S^r$  ce qui a l'avantage d'obtenir en sortie de la chaîne d'intégrateurs une commande continue. Néanmoins ces intégrateurs réduisent les composantes hautes fréquences de la commande, nécessaires pour compenser les incertitudes du modèle standard. Cette chaîne d'intégrateur a aussi comme inconvénient de ralentir la commande, ce qui se traduit par une réduction des performances des commandes à régimes glissants d'ordre supérieur pour l'asservissement du système, particulièrement en suivi d'une consigne dont les variations sont rapides [22].

### III.6 Application de la commande par mode glissant d'ordre deux à un SMSA d'ordre deux :

#### III.6.1 Algorithme de Twisting (ATW):

L'objectif de la commande par MGO2 est de diminuer l'effet de broutement. Utilisant la même surface de glissement donnée dans le chapitre précédent, la commande de Twisting est donnée par :

$$\dot{U} = \begin{cases} -U & \text{si } |U| > U_M \\ -\lambda_m \text{sign}(S_3) & \text{si } S_3 \dot{S}_3 \leq 0, |U| \leq U_M \\ -\lambda_M \text{sign}(S_3) & \text{si } S_3 \dot{S}_3 > 0, |U| \leq U_M \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

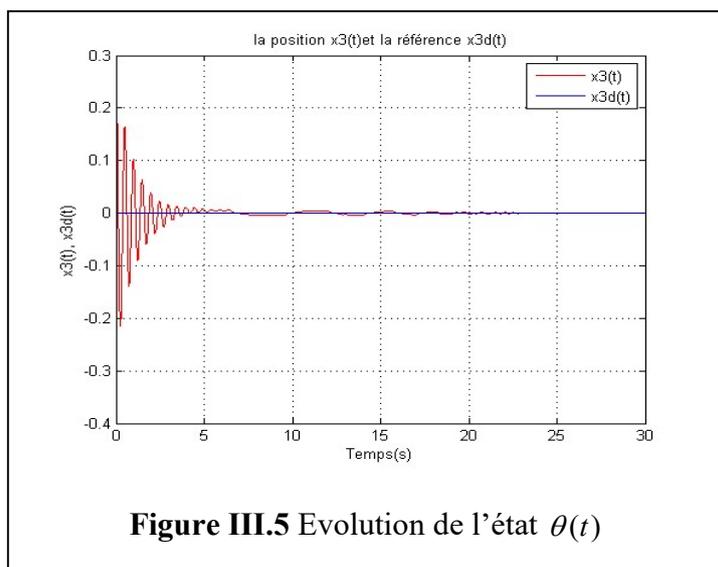
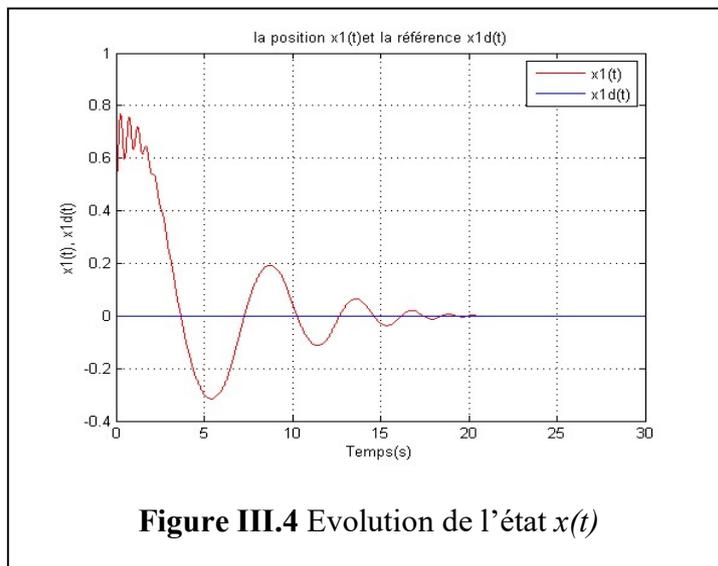
où  $\lambda_M$  et  $\lambda_m$  sont des constantes qui vérifient les conditions (III.13).

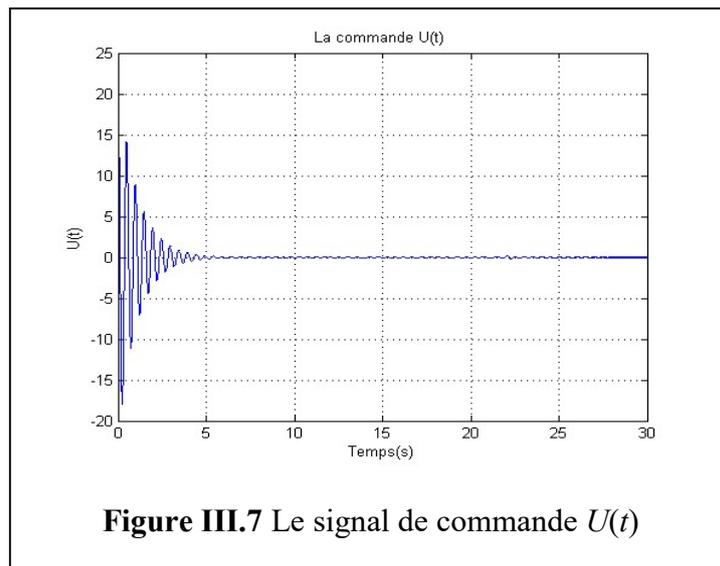
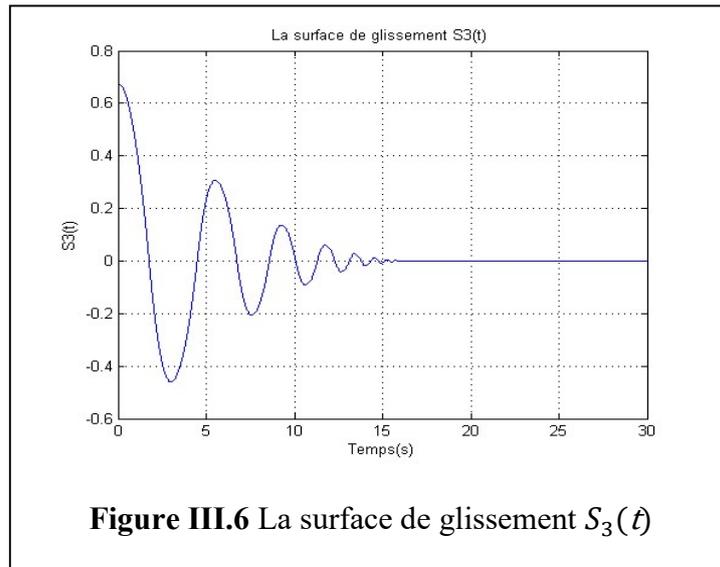
### III.6.2 Résultats de simulation

Prenons le même exemple du pendule inversé sur chariot, en vue de le ramener à sa position stable (0,0), une loi de commande par l'algorithme de Twisting est appliquée.

Les conditions initiales sont données par :  $x = [0.5, 0, \frac{\pi}{12}, 0]^T$ .

#### III.6.2.1 Cas sans perturbations

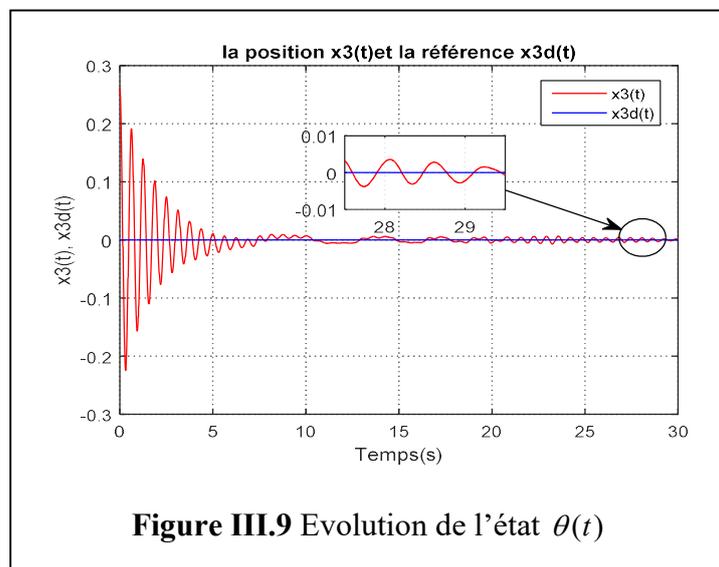
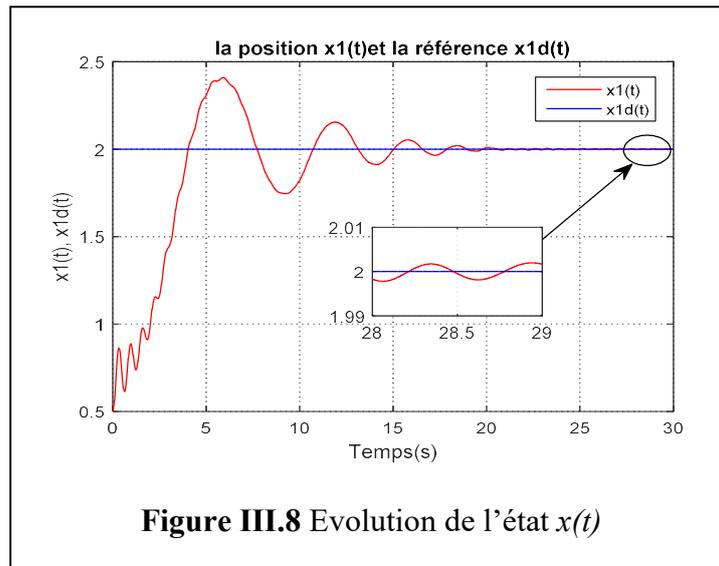


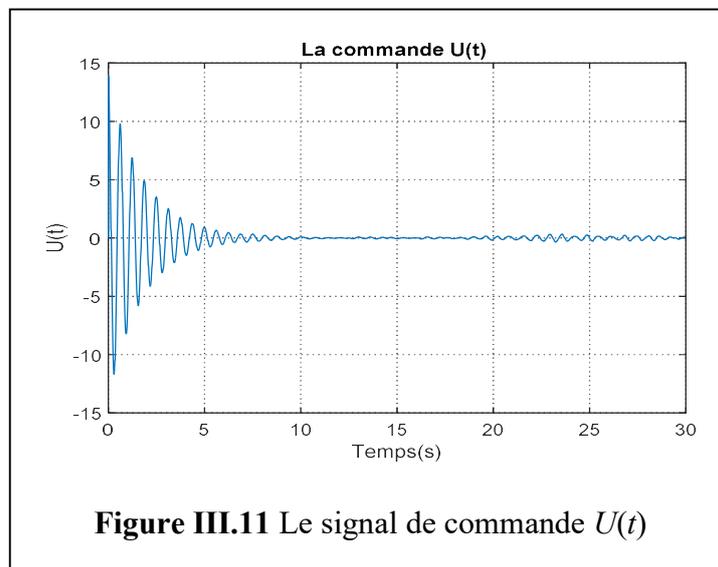
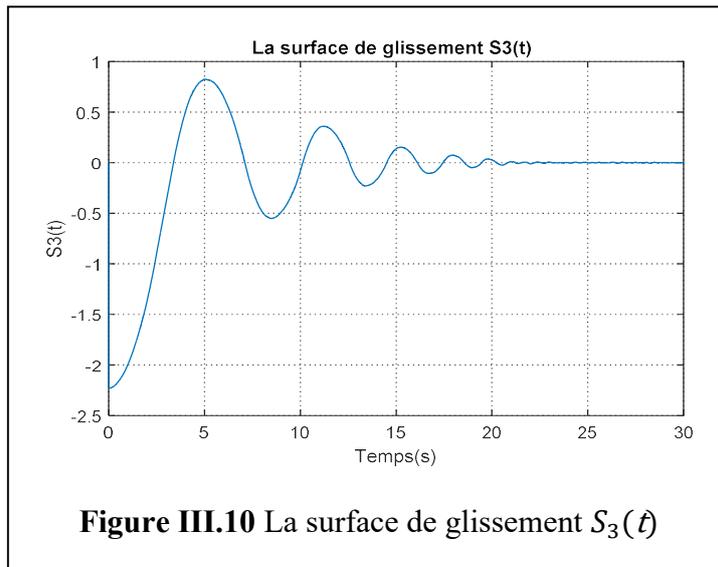


Les figures (III.4) et (III.5) montrent que le système a pu suivre la référence, la surface de glissement présentée par la figure (III.6) est stable, et la commande de la figure (III.7) est lisse, ce qui montre que notre objectif est atteint (la réduction du phénomène de broutement), mais malgré ça et puisque le système est augmenté par la nouvelle variable qui est la commande, le système devient plus complexe et par conséquent la commande devient lente ce qui est devenu difficile d'être réalisable en pratique.

### III.6.2.2 Cas avec perturbations

On considère le vecteur de perturbation suivant :  $P(t) = 0.08 * randn(1,tf)$  et l'incertitude paramétrique sur la masse du pendule :  $\pm \Delta m = 0.1kg$  . Gardant les mêmes conditions initiales, mais avec un autre vecteur de sorties désirées :  $y_d(t) = [2, 0]^T$ .





D'après les figures (III.8), (III.9) on voit que la réponse de système est très lente, les états mettent un temps plus long pour atteindre les états désirés. On peut voir aussi que les perturbations agissent non seulement sur la lenteur du système mais aussi sur sa précision, La surface de glissement présentée par la figure (III.10) est stable, et la commande dans la figure (III.11) est plus en moins lisse. On peut dire que la propriété de robustesse est limitée.

### III.6.3 Algorithme de Super Twisting (ASTW)

Choisissons la même surface de glissement, la loi de la commande Super Twisting est donnée par :

$$U = U_1 + U_2 \quad (\text{III.25})$$

tels que :

$$U_1 = -k_1 |S_3|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(S_3) - k_2 S_3 \quad (\text{III.26})$$

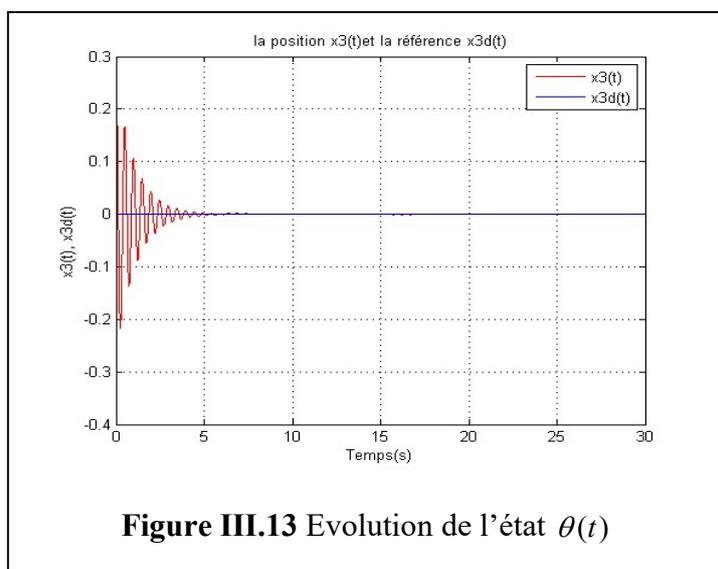
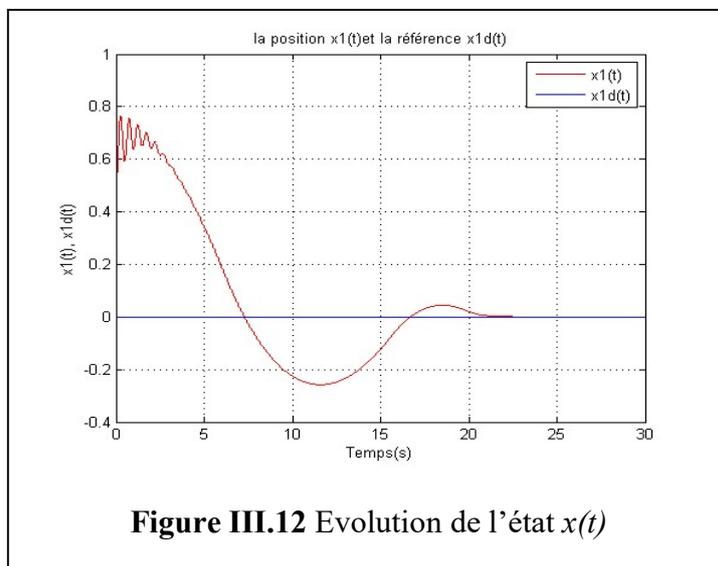
$$\dot{U}_2 = -k_3 \text{sign}(S_3) - k_4 S_3 \quad (\text{III.27})$$

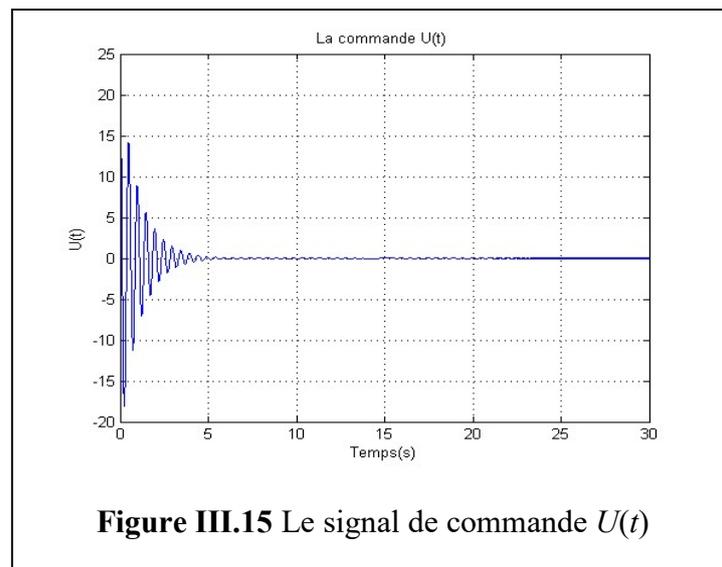
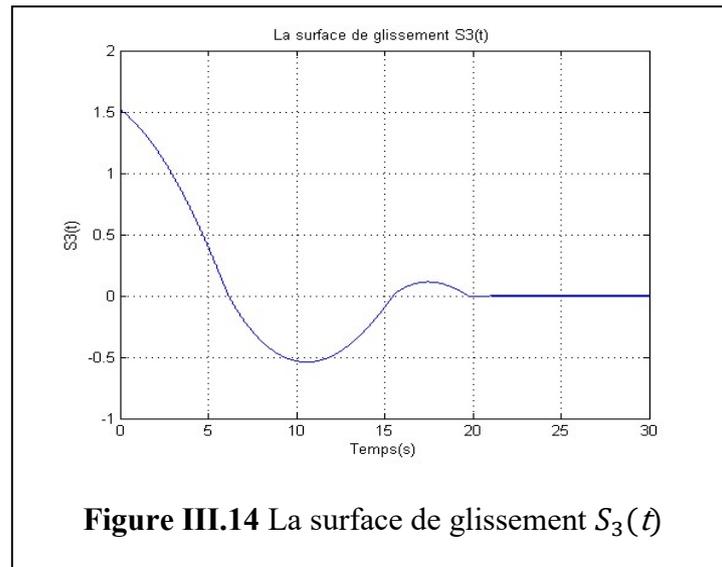
où  $k_1, k_2, k_3$  et  $k_4$  sont des constantes positives.

### III.6.4 Résultats de simulation

La commande Super Twisting est appliquée sur le même exemple du pendule, sachant que les conditions initiales sont choisies comme suit :  $x(t) = [0.5, 0, \frac{\pi}{12}, 0]^T$  et le vecteur de sorties désirées :  $y_d(t) = [0, 0]^T$ .

#### III.6.4.1 Cas sans perturbations

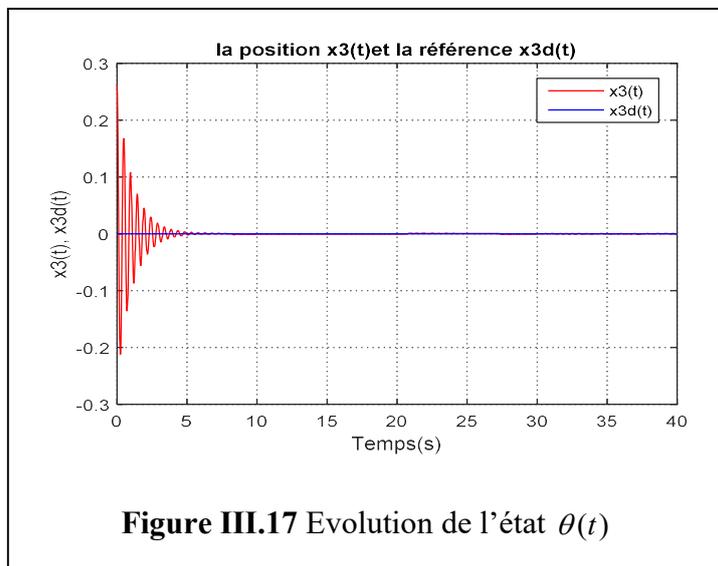
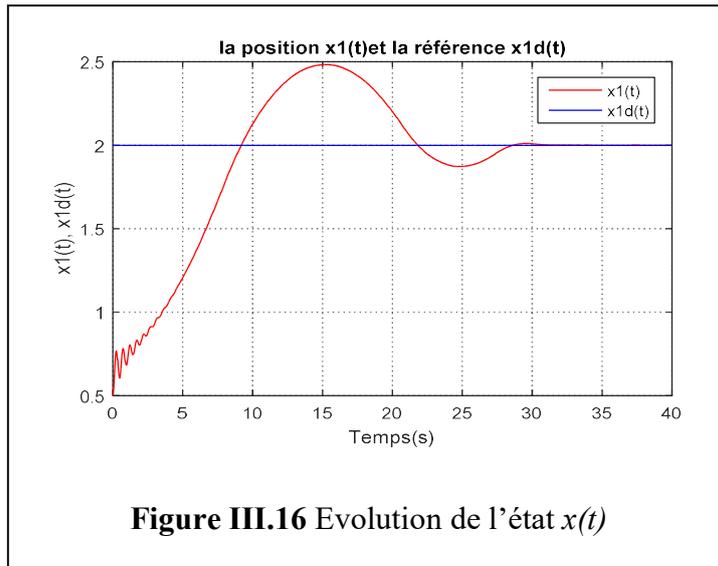


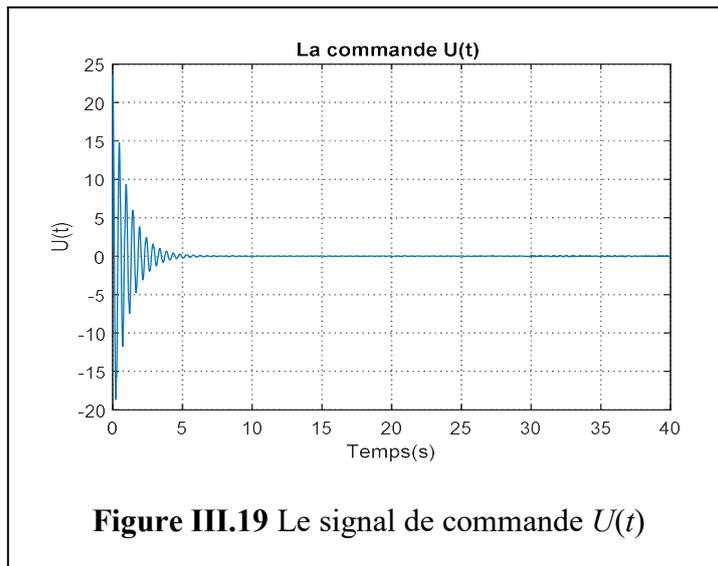
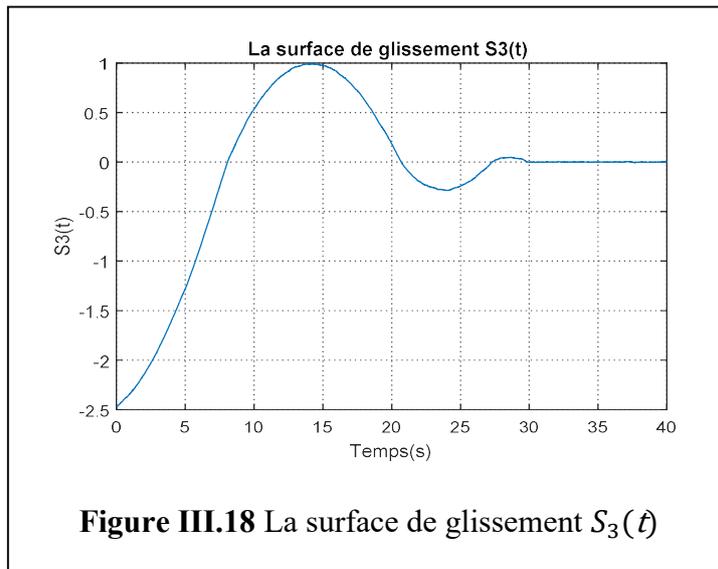


Les figures (III.12) et (III.13) montrent que les états du système convergent vers les états désirés, la surface de glissement dans la figure (III.14) est stable, et le broutement est considérablement diminué dans la figure (III.15) de la commande. Malheureusement le temps de calcul de la commande est un peu lent.

### III.6.3.2 Cas avec perturbations

On considère la même perturbation appliquées sur le système dans la commande Twisting :  $P(t) = 0.08 * randn(1,tf)$  et la même incertitude paramétrique sur la masse du pendule :  $\pm\Delta m = 0.1kg$  le vecteur de sorties désirées est :  $y_d(t) = [2, 0]^T$ . Les résultats sont donnés par les figures suivantes :





On peut voir que les états du système ont pu atteindre la référence mais avec un temps de réponse un peu long, ce qui est montré sur les figures (III.16) et (III.17). La figure (III.18) présente la surface de glissement qui est stable. Le signal de commande est donné sur la figure (III.19). On peut dire que les perturbations agissent sur les performances du système, ce qui dégrade la propriété de robustesse des MG.

### III.7 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté les bases principales de la commande par MGOS, qui est une extension des MGO1, et qui conserve la caractéristique de la robustesse de ces

derniers. Cette commande permet de réduire l'effet de broutement, au voisinage de la surface de glissement. Notre travail est basé sur les MGO2, dans cette partie nous avons décrit les deux algorithmes les plus utilisés dans la littérature qui sont ATW et ASTW, où les conditions suffisantes de convergence sont détaillées pour chaque algorithme.

Une commande par MGO2 a été appliquée à un SMSA, des résultats satisfaisants sont obtenus, ce qui a prouvé l'efficacité de cette commande.

En revanche des avantages de cette commande, quelques inconvénients se présentent et peuvent limiter l'utilisation de cette dernière. Le principal inconvénient est le besoin de connaître les variables d'état et leurs dérivées. En plus la chaîne d'intégrateur qui permet d'avoir une commande continue mène à ralentir cette dernière, et par conséquent réduire les performances de système. Pour remédier à ces problèmes tout en répondant au problème de broutement, et gardant la propriété de robustesse, une autre solution sera présentée dans le chapitre suivant qui concerne l'utilisation d'un observateur par mode glissant (OMG).

# CHAPITRE IV

## OBSERVATEUR PAR MODE GLISSANT D'UN SMSA D'ORDRE DEUX

---

### IV.1 Introduction

La mise en œuvre de lois des commandes basées sur le modèle non linéaire du système, nécessite parfois la connaissance du vecteur d'état complet du système à chaque instant. Mais, dans la plupart des cas, les seules grandeurs accessibles du système sont les variables d'entrées et de sorties, il est possible qu'à partir de ces informations de reconstruire l'état du modèle choisi pour élaborer la commande. De ce fait, l'idée repose sur l'utilisation d'un observateur.

Un observateur est un système dynamique que l'on peut appeler capteur informatique, puisqu'il est souvent implanté sur ordinateur afin de reconstituer ou d'estimer en temps réel l'état courant d'un système, à partir des mesures disponibles, des entrées du système et une connaissance à priori du modèle. Il nous permet alors de suivre l'évolution de l'état en tant qu'information sur le système.

La possibilité de reconstituer une information interne sur le système au moyen des grandeurs externes disponibles peut être utile à plusieurs niveaux :

- La commande du procédé, qui nécessite bien souvent la connaissance de son état interne.
- La surveillance du procédé, à travers les écarts entre le comportement de l'observateur et celui du procédé.
- L'identification du procédé, au moyen de l'estimation des grandeurs constantes qui assignent des paramètres au modèle.

Or, la stabilité en boucle fermée ne peut être garantie à priori si la loi de la commande et l'observateur sont synthétisés séparément, le principe de séparation est vérifié seulement pour les systèmes linéaires, dont le problème est résolu par les observateurs de Luenberger.

Pour les systèmes non linéaires, la synthèse d'observateurs est encore un problème ouvert. En général, la dynamique des systèmes non linéaires est approximée en utilisant des systèmes flous, mais ce dernier est en besoin des règles floues établies par un expert. De plus, et précisément dans la méthode de Mamdani, l'analyse de stabilité pour les systèmes flous est difficile, car elle manque

de descriptions mathématiques. Dans la littérature, de nombreuses stratégies avec fonction de Lyapunov ont été introduites, comme le contrôleur PID flou [36], le contrôleur adaptatif flou [89] le contrôleur de réseau neuronal flou [20].

Cependant, ces méthodes peuvent être utilisées pendant de longues périodes, ce qui nécessite un temps de calcul long et une puissante calculatrice.

Une des classes les plus connues des observateurs robustes est celle des OMG. Ce type d'observateur est basé sur la théorie des CSV.

Le but d'utiliser un observateur dans ce travail, est non seulement la reconstitution de vecteur d'état, mais aussi pour diminuer l'effet de broutement, qui se présente dans la CMG.

## IV.2 Observabilité et principe d'un observateur

L'observabilité d'un processus est un concept très important en automatique. En effet, pour reconstruire l'état d'un système, il faut savoir, a priori, si les variables d'état sont observables ou non.

En général, pour des raisons de réalisation technique, de coût, etc..., la dimension du vecteur de sortie est inférieure à celle de l'état. Ceci entraîne qu'à l'instant donné «  $t$  », l'état  $x(t)$  ne peut pas être déduit algébriquement de la sortie  $y(t)$  à cet instant. Par contre, sous des conditions d'observabilité qui seront explicitées plus loin, cet état peut être déduit de la connaissance des entrées et sorties sur un intervalle de temps passé:  $u([0, t])$ ,  $y([0, t])$ .

L'objectif d'un observateur est de reconstruire des grandeurs dont on ne peut ou ne désire pas mesurer l'état par une méthode directe, il sert à fournir avec une précision garantie une estimation de la valeur courante de l'état en fonction des entrées et sorties passées. Cette estimation devant être obtenue en temps réel, l'observateur revêt usuellement la forme d'un système dynamique [40].

**Définition IV.1:** on appelle observateur (ou reconstituteur d'état) d'un système dynamique «  $S$  » [23] :

$$S: \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

Un système dynamique auxiliaire «  $O$  » dont les entrées sont constituées des vecteurs d'entrée et de sortie du système à observer et dont le vecteur de sortie  $\hat{x}(t)$  est l'état estimé :

$$O: \begin{cases} \dot{z}(t) = \hat{f}(z(t), u(t), y(t)) \\ \hat{w}(t) = \hat{h}(z(t), u(t), y(t)) \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

Telle que l'erreur entre le vecteur d'état  $x(t)$  et  $\hat{x}(t)$  tend asymptotiquement vers zéro.

$$\|e(t)\| = \|x(t) - \hat{x}(t)\| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty \quad (\text{IV.3})$$

Donc, l'observation se fait en deux étapes :

- L'estimation se fait en boucle ouverte par le calcul des grandeurs d'état à l'aide de modèles proches du système.
- La correction se fait en boucle fermée.

Le schéma d'un tel observateur est donné sur la figure (IV.1) [40].

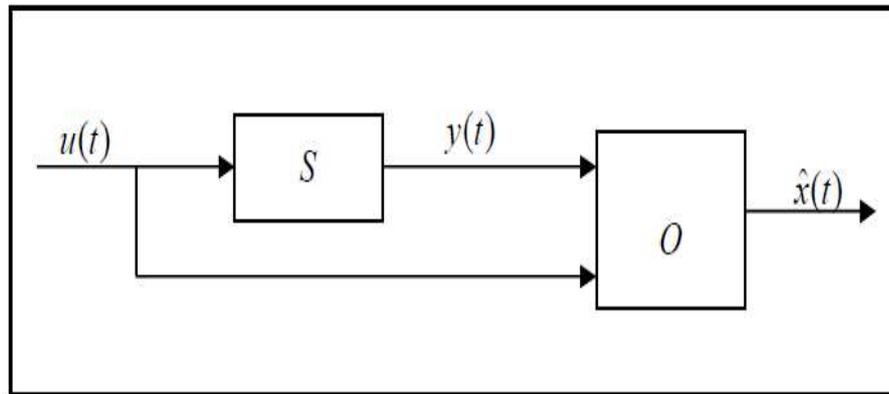


Figure IV.1 Schéma de principe d'un observateur

L'existence d'un tel observateur est liée à la notion d'observabilité de «  $S$  ».

L'observabilité caractérise la propriété de pouvoir récupérer (de façon statique ou dynamique) par une combinaison des mesures et de leurs dérivées toutes les grandeurs d'état d'un système.

### IV.3 Observateur d'un système linéaire :

Considérons le système dynamique linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

$x(t) \in R^n, u(t) \in R^m$ , et  $y(t) \in R^p$ . Les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  ont des dimensions appropriées.

La matrice d'observabilité du système (IV.4) est définie par :

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

L'observabilité du système (IV.4) est garantie si le rang de la matrice d'observabilité  $O$  est égal à «  $n$  », O'Reilly a présenté un deuxième critère; le système (IV.4) est complètement observable si :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} PI - A \\ C \end{pmatrix} = n \quad (\text{IV.6})$$

Pour tout  $P$  complexe. Si un système linéaire est complètement observable, il est globalement observable, c'est-à-dire que toutes les composantes du vecteur d'état du système sont observables, et donc peuvent être reconstruites par un observateur. Si le système est non linéaire, nous devons distinguer l'observabilité globale de l'observabilité locale [40].

#### IV.4 Observateur d'un système non linéaire

Considérons un système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

où les variables :  $x \in X \subset R^n$ ,  $u \in U \subset R^m$  et  $y \in Y \subset R^p$ . représentent respectivement l'état, l'entrée ou la commande et la sortie du système.  $f$  et  $h$  sont des champs de vecteurs supposés suffisamment continûment dérivables sur  $X$ .

La plupart des observateurs qui existent dans la littérature ont la structure suivante :

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = f(\hat{x}, u) + \eta(y, \hat{x}) \\ y(t) = h(\hat{x}(t)) \end{cases} \quad (\text{IV.8})$$

C'est-à-dire une copie du modèle plus un terme correcteur  $\eta(y, \hat{x})$  qui établit la convergence de  $\hat{x}$  vers  $x$  [58].

##### IV.4.1. Observateur classique par mode glissant

La mise en œuvre des lois de commandes basées sur le modèle non linéaire du système, nécessite parfois la connaissance du vecteur d'état complet du système à chaque instant. Cependant, dans la plupart des cas, seule une partie de l'état est accessible à l'aide de capteurs. Pour reconstituer l'état complet du système, l'idée repose sur l'utilisation d'un capteur logiciel, appelé

observateur. Un observateur est un système dynamique qui à partir de l'entrée du système (la commande), de la sortie mesurée, ainsi que d'une connaissance a priori du modèle, fournira en sortie un état estimé qui devra tendre vers l'état réel (figure (IV.1)). Plusieurs techniques sont optées mais elles restent restreintes dans leurs applications, dans l'observateur étendu de Leunberger par exemple [44], un modèle linéarisé est nécessaire, ou un changement de coordonnées est effectué, ce qui nécessite un ensemble d'équations différentielles partielles non linéaires, ce qui est si difficile à réaliser. Une autre technique d'estimation largement étudiée pour l'estimation de système dynamique est le filtre de Kalman étendu [65], malheureusement, les preuves de stabilité et de convergence établies pour les systèmes linéaires ne pouvaient pas être étendues aux systèmes non linéaires.

Une des classes les plus connues des observateurs robustes est celle des OMG. Ce type d'observateur est utilisé aussi pour réduire le phénomène de broutement (chattering) lors de l'application d'une commande discontinue. Il consiste à générer les modes glissants idéaux dans une boucle auxiliaire d'observation, telle que cette boucle d'observateur n'intègre aucune dynamique non modélisée. La boucle principale est poursuivie de la boucle d'observateur. Sous les dynamiques de cet observateur aucun problème de broutement n'est apparait et le système évolue comme si la commande équivalente est appliquée [2].

Le principe de l'OMG est de contraindre la dynamique du système d'ordre "n" à converger vers la surface de glissement  $S$  de dimension "n-p", en utilisant des fonctions discontinues (p est la dimension du vecteur capteur) [71].

Pour le système (IV.7), une structure d'un OMG classique s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, u) + \Lambda \text{sign}(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = \hat{h}(\hat{x}) \end{cases} \quad (\text{IV.9})$$

Dans ce cas, la surface de glissement est donnée par :

$$s(x) = y - \hat{y} \quad (\text{IV.10})$$

Le terme de correction utilisé est proportionnel à la fonction discontinue *signe* appliquée à l'erreur de sortie. L'étude de la stabilité et de la convergence pour de tels observateurs, est basée sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov.

L'étude de la stabilité et de convergence utilise les concepts de résolutions de Filippov [21], ainsi que les méthodes dites du vecteur équivalent développées par Utkin [81] pour la commande, et par [13] pour les observateurs.

Notre choix de ce type d'observateurs se justifie par les bonnes propriétés qui peuvent être obtenues et parmi lesquelles nous citerons :

- Une convergence en temps fini vers la surface de glissement  $s(x) = y - \hat{y} = 0$  si entre autre les conditions d'attractivité vers cette surface sont vérifiées.
- Une réduction de dimension du système d'observation à  $n - p$  états avec  $n$  la dimension de l'état  $x$ , et  $p$  la dimension du vecteur de sortie.
- Comme la fonction *signe* est équivalente à un grand gain au voisinage de l'origine, nous obtenons une certaine robustesse vis-à-vis d'erreurs de modèle et de perturbations bornées.

L'exploitation de ces propriétés, et l'utilisation d'observateurs à modes glissant à structures particulières, nous permettent d'obtenir des dynamiques d'erreurs d'observation plus simple et plus facilement stabilisables pour des formes de système plus large que la forme injection de sortie [38]. Ainsi, pour des systèmes qui se mettent sous forme d'observation triangulaire [6], nous allons voir dans le paragraphe suivant comment obtenir la convergence de l'erreur d'observation vers zéro en temps fini.

#### IV.4.2 Principe de séparation

La dynamique de l'erreur d'observation  $e = x - \hat{x}$  est aussi non linéaire dépendante de l'état de l'entrée du système.

$$\dot{e} = f(x, u) - f(x - e) - \eta(y, \hat{x}) \quad (\text{IV.11})$$

Le principe de séparation n'est donc plus vérifié et la commande n'étant plus indépendante de l'observateur. Par ailleurs il faut tenir compte de la dynamique de (IV.9) si on veut faire la synthèse d'une commande basée sur  $\hat{x}$ .

Il est à noter que ces contraintes ne se posent pas pour les systèmes linéaires et également pour les systèmes qui se mettent sous injection de sortie c'est-à-dire dans le cas où la non linéarité ne dépend que des grandeurs connues (les entrées et les mesures) [6] .

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(y, u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

Un observateur avec compensation du terme non linéaire peut s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \varphi(y, u) + G(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C(\hat{x}) \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

et permet alors d'obtenir une dynamique d'erreur d'observation linéaire indépendante de l'entrée et de l'état :

$$\dot{e} = (A - GC) e \quad (\text{IV.14})$$

De manière générale pour des systèmes quelconques, il existe différentes classes d'observateurs, nous avons choisi d'étudier des OMG pour les avantages qu'ils présentent en simplicité de mise en œuvre et de robustesse.

#### IV.4.3 Observateur triangulaire par mode glissant

L'observateur par mode glissant (OMG) triangulaire a été développé pour des systèmes qui peuvent se mettre sous la forme suivante appelée forme triangulaire d'observation :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \\ y = x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + g_1(x_1)u \\ x_3 + g_2(x_1, x_2)u \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n + g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})u \\ f_n(x) + g_n(x)u \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{IV.15})$$

Où les  $g_i$  et  $f_n$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$  sont des fonctions analytiques,  $x = [x_1 x_2 \dots x_n]^T \in R^n$  l'état du système,  $u \in R^m$  est le vecteur d'entrée et  $y \in R$  la sortie que nous considérons pour des raisons de simplicité d'écriture.

La structure de l'observateur proposé est la suivante :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} \\ \dot{\hat{x}}_n \\ \hat{y} = \hat{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_2 + g_1(x_1)u + c_1 \text{sign}_1(x_1 - \hat{x}_1) \\ \hat{x}_3 + g_2(x_1, \bar{x}_2)u + c_2 \text{sign}_2(\bar{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{x}_n + g_{n-1}(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1})u + c_{n-1} \text{sign}_{n-1}(\bar{x}_{n-1} - \hat{x}_{n-1}) \\ f_n(x, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + g_n(x, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)u + c_n \text{sign}_n(\bar{x}_n - \hat{x}_n) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

Où les variables  $x_i$  sont données par :

$$\bar{x}_i = \hat{x}_i + c_{i-1} \text{sign}_{moy, i-1}(\bar{x}_{i-1} - \hat{x}_{i-1})$$

tel que :  $i = \{2, \dots, n\}$

Avec  $sign_{moy,i-1}$  désignant la fonction  $sign_{i-1}$  filtrée par un filtre passe bas ; la fonction  $sign_i(.)$  est mise à zéro s'il existe  $j \in \{1, i\}$  tel que  $\bar{x}_j - \hat{x}_j \neq 0$  (par définition  $\bar{x}_1 = x_1$ ), si non  $sign_i(.)$  est prise égale à la fonction  $sign_i(.)$  classique. Grâce à cela nous imposons que le terme correcteur ne soit "actif" que si la condition  $\bar{x}_j - \hat{x}_j = 0$  pour  $j = 1, 2, \dots, i$  est vérifiée.

Pour ce type d'observateur, nous avons une convergence en temps fini (par étapes) de l'erreur d'observation. En outre, il permet la séparation de la synthèse de l'observateur et de la commande; il facilite l'étude de stabilité en boucle fermée. La convergence en temps fini de l'observateur est assurée par le théorème suivant :

**Théorème IV.1:** Considérons le système (IV.15) et l'observateur (IV.16). Si le système est à entrées bornées et à états bornés (BIBS) pour une durée finie  $[0, T]$ , alors pour tout état initial  $x(0)$ ,  $\hat{x}(0)$  et toute entrée bornée  $u$ , il existe un choix de  $\lambda_i$  tel que l'état de l'observateur  $\hat{x}$  converge en un temps fini vers l'état  $x$  du système [49].

**Preuve du théorème :**

Considérons la dynamique de l'erreur d'observation  $e = x - \hat{x}$  et procédons étape par étape. Pour  $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ , nous avons :

$$\dot{e}_1 = e_2 - c_1 sign(e_1) \quad \text{avec} \quad e_2 = x_2 - \hat{x}_2$$

Si  $c_1 > |e_2|_{max}$  pour  $t < t_1$  alors la surface de glissement  $e_1 = 0$  est attractive et est atteinte après un temps fini  $t_1$  ce qui fait que  $\dot{e}_1 = 0$ .

Il existe une fonction continue notée  $sign_{eq}$  définie par  $e_2 - c_1 sign_{eq}(e_1) = 0$  impliquant  $\bar{x}_2 = x_2$  sur la surface de glissement, puisque  $sign_{eq} = sign_{moy}$ , alors :

$$\dot{e}_1 = x_2 - (\hat{x}_2 - c_2 sign_{eq}(x_1 - \bar{x}_1)) = x_2 - \bar{x}_2 = 0$$

Une fois  $x_2$  connu, nous allons passer à la dynamique de  $e_2$ . Nous avons après  $t_1$  comme nous l'avons vu,  $x_2 = \bar{x}_2$  ce qui implique que :

$$g_1(x_1, x_2) - g_1(x_1, \bar{x}_2) = 0$$

Alors  $\dot{e}_2 = e_3 - c_2 sign(e_2)$ , et suivant le même raisonnement si  $c_2 > |e_3|_{max}$  pour  $t < t_2$ , nous aurons après un temps fini  $t_2 > t_1$  la convergence vers la surface  $e_2 = 0$ . La dynamique du reste de l'erreur d'observation sur la surface de glissement est donnée par  $\dot{e}_2 = 0$  et on déduit donc  $x_3 = \bar{x}_3$  car :

$$\dot{e}_2 = x_3 - \hat{x}_2 - c_2 \text{sign}_{eq}(e_2) = x_3 - \bar{x}_3 = 0$$

En réitérant  $(n - 1)$  fois ce processus, nous avons après un temps  $t_{n-1}$  convergence de toute l'erreur d'observation vers la surface  $e_1 = e_2 = \dots e_{n-1} = 0$  et par conséquent  $\bar{x}$  tend vers  $x$ , en un temps fini  $t_{n-1}$  tout l'état est connu et l'erreur d'observation est nulle.

Nous allons maintenant nous intéresser à la stabilité de l'observateur en déroulant étape par étape le processus de convergence de l'observateur.

A partir de (IV.15) et (IV.16) et en considérant les conditions initiales  $x_1(0) \neq \hat{x}_1(0)$  (si ce n'est pas le cas nous sommes sur la surface de  $e_1 = 0$  à l'instant initial, nous passons directement à l'étape 2).

• **Etape 1** : Vu que les fonctions  $\text{sign}_i$  sont prises égales à zéro pour  $i > 1$ . nous obtenons la dynamique suivante pour l'erreur d'observation  $e = x - \hat{x}$ .

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} \\ \dot{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2 - c_1 \text{sign}_1(x_1 - \hat{x}_1) \\ e_3 + g_2(x_1, x_2)u - g_2(x_1, \hat{x}_2)u \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n + g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})u - g_{n-1}(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n-1})u \\ f_n(x) - f_n(x, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

Etant donné que nous prenons une entrée  $u$  bornée, le système n'explose pas en temps fini (le système est supposé (BIBS) en temps fini par hypothèse); l'erreur d'observation est aussi bornée. Soit alors une fonction de Lyapunov :

$$V_1 = \frac{e_1^2}{2} \quad (\text{IV.18})$$

Nous avons alors  $\dot{V}_1 = e_1 \dot{e}_1 = e_1(e_2 - c_1 \text{sign}_1(e_1))$ . En choisissant  $c_1 > |e_2|_{\max}$  pour  $t < t_1$

l'erreur d'observation  $e_1$  converge vers zéro en un temps fini  $t_1$ .

• **Etape 2** : comme dans l'étape 1, l'erreur  $e_2$  reste bornée par hypothèse. Il faut, cependant, que  $c_1 > |e_2|_{\max}$  pour rester sur la surface  $e_1 = 0$ , mais cela est vérifié le fait que  $e_2$  est strictement décroissante après  $t_1$ .

Le but de cette étape est d'atteindre la surface  $e_1 = e_2 = 0$ . Sur la surface  $e_1 = 0$ , la dynamique de l'erreur d'observation devient :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{e}_{n-1} \\ \dot{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e_3 + g_2(x_1, x_2)u - g_2(x_1, \hat{x}_2)u - c_2 \text{sign}_2(e_2) = e_3 - c_2 \text{sign}_2(e_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n + g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})u - g_{n-1}(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n-1})u \\ f_n(x) - f_n(x, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

Soit la deuxième fonction de Lyapunov :

$$V_2 = \frac{e_1^2}{2} + \frac{e_2^2}{2} \quad (\text{IV.20})$$

Alors, si la condition  $c_2 > |e_2|_{\max}$  est satisfaite pour  $t > t_1$ , nous avons  $e_2=0$ ,

$$e_2 - c_1 \text{sign}_{e_2}(e_1) = 0, \text{ et :}$$

$$\dot{V}_2 = e_2(e_3 - c_2 \text{sign}_{e_2}(e_1))$$

Par conséquent, si  $c_2 > |e_3|_{\max}$  alors  $e_2$  converge vers zéro après un temps  $t_2 > t_1$ . De plus

$\dot{V}_2 < 0$ , et l'erreur d'observation est strictement décroissante durant la période  $[t_1, t_2]$  ce qui implique que si la condition sur  $c_1$  est vérifiée avant  $t_1$  elle est obligatoirement aussi après  $t_1$ . Nous obtenons, en vertu du principe du vecteur équivalent, après  $t_2$   $\bar{x}_3 = x_3$ .

Ainsi étape par étape nous obtenons la convergence des composantes de l'erreur d'observation vers zéro et celle de  $\tilde{x}$  vers  $x$ , sous les conditions que durant  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $c_i > |e_{i+1}|_{\max}$ .

• **Etape n** : cette étape commence à l'instant  $t_{n-1}$ , à cet instant  $e_k = 0$  pour tous  $k < n$ . Alors, la dynamique de l'erreur d'observation devient :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{e}_{n-1} \\ \dot{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ f_n(x) - f_n(x, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) - \lambda_n \text{sign}_n(\bar{x}_n - \hat{x}_n) = -c_n \text{sign}_n(\bar{x}_n - \hat{x}_n) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.21})$$

Alors,  $e_n$  converge en un temps fini  $t_n > t_{n-1}$  pour toute valeur de  $c_n > 0$  si, évidemment toutes les conditions sur les  $c_k$ ,  $k < n$  sont elles aussi vérifiées. Ces conditions resteront satisfaites après  $t_{n-1}$ . Ainsi le théorème est vérifié.

## IV.5 Application de l'observateur par mode glissant à un SMSA d'ordre deux

### IV.5.1 Construction de l'observateur

On considère la représentation d'état d'un SMSA d'ordre deux suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ f_1(x) \\ x_4 \\ f_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_1(x) \\ 0 \\ b_2(x) \end{pmatrix} U + \begin{pmatrix} 0 \\ d_1(x) \\ 0 \\ d_2(x) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.22})$$

$$y(t) = (x_1, x_3)^T \quad (\text{IV.23})$$

Où  $x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T$  est le vecteur d'état tels que :  $x_1 = q_1$ ,  $x_2 = \dot{q}_1$ ,  $x_3 = q_2$  et  $x_4 = \dot{q}_2$ ,  $f_1, f_2, b_1$  et  $b_2$  des fonctions non linéaires nominales bornées.  $y(t)$  est le vecteur de sortie.  $d_1(x)$  et  $d_2(x)$  présentent les incertitudes et les perturbations.

Supposition .1 : le système (IV.22) est observable.

Supposition .2 : le système (IV.22) est BIBO stable sur  $t \in [0, T]$ .

Supposition .3 : les incertitudes et les perturbations sont bornés :  $|d_1(x)| \leq \rho_1$  et  $|d_2(x)| \leq \rho_2$  Où  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont des constantes positives connues.

On propose la dynamique d'observateur triangulaire suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \\ \dot{\hat{x}}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_2 & +\mu_1 \text{sign}_{11}(x_1 - \hat{x}_1) \\ \hat{f}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4) + \hat{b}_1(\bar{x}_3)U + \mu_2 \text{sign}_{12}(\bar{x}_2 - \hat{x}_2) \\ \hat{x}_4 & +\mu_3 \text{sign}_{23}(x_3 - \hat{x}_3) \\ \hat{f}_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4) + \hat{b}_2(\bar{x}_3)U + \mu_4 \text{sign}_{24}(\bar{x}_4 - \hat{x}_4) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.24})$$

où  $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{b}_1$  et  $\hat{b}_2$  sont respectivement les fonctions  $f_1, f_2, b_1$  et  $b_2$  après estimations des variables d'état.

La fonction  $\text{sign}_{ij}$  est la fonction « sign » classique du  $i^{\text{ème}}$  sous-système si  $\bar{x}_j - \hat{x}_j = 0$ , où  $i = \{1, 2\}$  et  $j = \{1, 2\}$  pour le premier sous-système,  $j = \{3, 4\}$  pour le deuxième sous-système, sinon  $\text{sign}_{ij}$  est égal à zéro.

$$\text{Avec : } \begin{cases} \bar{x}_1 = x_1 \\ \bar{x}_2 = \hat{x}_2 + \mu_1 \text{atan}\left(\frac{\pi}{2}(\bar{x}_1 - \hat{x}_1)\right) \end{cases}, \text{ et } \begin{cases} \bar{x}_3 = x_3 \\ \bar{x}_4 = \hat{x}_4 + \mu_3 \text{atan}\left(\frac{\pi}{2}(\bar{x}_3 - \hat{x}_3)\right) \end{cases}$$

« *atan* » est la fonction arc tangent usuelle qui est connue comme une approximation continue de la fonction « *sign* ».

Les erreurs d'estimation sont:  $e_{1e} = x_1 - \hat{x}_1, e_{2e} = x_2 - \hat{x}_2, e_{3e} = x_3 - \hat{x}_3, e_{4e} = x_4 - \hat{x}_4$

**Théorème IV.1:** Supposons que l'observateur (IV.24) est construit pour le système (IV.22), dont les variables d'état sont estimées en choisissant des paramètres appropriés  $\mu_i (i=1,2,\dots,n)$  pour n'importe quelles conditions initiales, et les suppositions 1, 2 et 3 sont vérifiées, alors les variables d'état estimées convergent vers les variables d'état du système réel en temps fini [90].

### Preuve du théorème :

La dynamique d'erreurs d'observation est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_{1e} \\ \dot{e}_{2e} \\ \dot{e}_{3e} \\ \dot{e}_{4e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{2e} & -\mu_1 \text{sign}_{n_{11}}(x_1 - \hat{x}_1) \\ f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) - \hat{f}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4) - \mu_2 \text{sign}_{n_{12}}(\bar{x}_2 - \hat{x}_2) + d_1(x) \\ e_{4e} & -\mu_3 \text{sign}_{n_{23}}(x_3 - \hat{x}_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) - \hat{f}_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4) - \mu_4 \text{sign}_{n_{24}}(\bar{x}_4 - \hat{x}_4) + d_2(x) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.25})$$

### Etape 1 :

Pour le premier sous-système, on a :

$$\dot{e}_{1e} = \dot{x}_1 - \dot{\hat{x}}_1 = x_2 - \hat{x}_2 - \mu_1 \text{sign}_{n_{11}}(x_1 - \hat{x}_1) \quad (\text{IV.26})$$

$$\dot{e}_{1e} = e_{2e} - \mu_1 \text{sign}_{n_{11}}(x_1 - \hat{x}_1) \quad (\text{IV.27})$$

La fonction de Lyapunov est donnée par :

$$V_{11} = \frac{1}{2} e_{1e}^2 \quad (\text{IV.28})$$

$$\dot{V}_{11} = e_{1e} \dot{e}_{1e} = e_{1e} (e_{2e} - \mu_1 \text{sign}_{n_{11}}(x_1 - \hat{x}_1)) \quad (\text{IV.29})$$

On choisit :  $\mu_1 > \max|e_{2e}| \rightarrow e_{1e}$  tends vers zéro en temps fini, et par conséquent  $\dot{e}_{1e} = 0$  ce qui implique que  $e_{2e} = \mu_1 \text{sign}_{n_{11}}(x_1 - \hat{x}_1)$ , d'un autre coté nous avons  $\bar{x}_2 = \hat{x}_2 + e_{2e} = x_2$ .

Pour le deuxième sous-système, on a la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_{21} = \frac{1}{2} e_{3e}^2 \quad (\text{IV.30})$$

$$\dot{V}_{21} = e_{3e} \dot{e}_{3e} = e_{3e} (e_{4e} - \mu_3 \text{sign}_{n_{23}}(x_3 - \hat{x}_3)) \quad (\text{IV.31})$$

On choisit :  $\mu_3 > \max|e_{4e}| \rightarrow e_{3e}$  tends vers zéro en temps fini, et par conséquent  $\dot{e}_{3e} = 0$  ce qui implique que  $e_{4e} = \mu_3 \text{sign}_{n_{23}}(x_3 - \hat{x}_3)$  et d'un autre coté nous avons :  $\bar{x}_4 = \hat{x}_4 + e_{4e} = x_4$ .

**Etape 2 :**

On a :

$$\dot{e}_{1e} = 0 \quad (\text{IV.32})$$

$$\dot{e}_{2e} = -\mu_2 \text{sign}_{12}(\bar{x}_2 - \hat{x}_2) + d_1(x) \quad (\text{IV.33})$$

et :

$$\dot{e}_{3e} = 0 \quad (\text{IV.34})$$

$$\dot{e}_{4e} = -\mu_4 \text{sign}_{24}(\bar{x}_4 - \hat{x}_4) + d_2(x) \quad (\text{IV.35})$$

La nouvelle fonction de Lyapunov du premier sous-système, devient :

$$V_1 = \frac{1}{2} e_{1e}^2 + \frac{1}{2} e_{2e}^2 \quad (\text{IV.36})$$

$$\dot{V}_1 = e_{1e} \dot{e}_{1e} + e_{2e} \dot{e}_{2e} \quad (\text{IV.37})$$

$$\text{On a : } \dot{e}_{1e} = 0 \Rightarrow \dot{V}_1 = e_{2e} \dot{e}_{2e} = e_{2e} (-\mu_2 \text{sign}_{12}(\bar{x}_2 - \hat{x}_2) + d_1(x))$$

$$\Rightarrow \dot{V}_1 \leq -\mu_2 |e_{2e}| + \rho_1 |e_{2e}|$$

Pour le deuxième sous-système, on a :

$$V_2 = \frac{1}{2} e_{3e}^2 + \frac{1}{2} e_{4e}^2 \quad (\text{IV.38})$$

$$\dot{V}_2 = e_{3e} \dot{e}_{3e} + e_{4e} \dot{e}_{4e} \quad (\text{IV.39})$$

$$\text{On a : } \dot{e}_{3e} = 0 \Rightarrow \dot{V}_2 = e_{4e} \dot{e}_{4e} = e_{4e} (-\mu_4 \text{sign}_{24}(\bar{x}_4 - \hat{x}_4) + d_2(x))$$

$$\Rightarrow \dot{V}_2 \leq -\mu_4 |e_{4e}| + \rho_2 |e_{4e}|$$

Afin d'obtenir  $\dot{V}_1 < 0$  et  $\dot{V}_2 < 0$  on doit choisir  $\mu_2 > \rho_1$  et  $\mu_4 > \rho_2$ .

**IV.5.2 Conception de la commande :**

Après estimation des états de système, on peut construire les surfaces de glissement du premier niveau comme suit :

$$S_1 = \lambda_1 e_1 + e_2 \quad (\text{IV.40})$$

$$S_2 = \lambda_2 e_3 + e_4 \quad (\text{IV.41})$$

où  $\lambda_1, \lambda_2$  sont des constantes positives.

Les erreurs dynamiques sont données par :  $e_1 = \hat{x}_1 - x_{1d}, e_2 = \hat{x}_2 - \dot{x}_{1d}, e_3 = \hat{x}_3 - x_{3d},$

$e_4 = \hat{x}_4 - \dot{x}_{3d}$ , avec  $x_{1d}, x_{3d}$  sont les états désirés.

La commande équivalente peut être déduite de l'annulation des dérivés des surfaces de glissement comme suit :

Dans le premier niveau, on dérive  $S_1$  et  $S_2$  par rapport au temps, ce qui donne :

$$\dot{S}_1 = \lambda_1 \dot{e}_1 + \dot{e}_2 \quad (\text{IV.42})$$

$$\dot{S}_2 = \lambda_2 \dot{e}_3 + \dot{e}_4 \quad (\text{IV.43})$$

Les lois des commandes équivalentes sont :

$$U_{eq1} = \frac{-1}{\hat{b}_1} (\hat{f}_1 + \lambda_1 \dot{e}_1 - \ddot{x}_{1d}) \quad (\text{IV.44})$$

$$U_{eq2} = \frac{-1}{\hat{b}_2} (\hat{f}_2 + \lambda_2 \dot{e}_3 - \ddot{x}_{3d}) \quad (\text{IV.45})$$

Pour le deuxième niveau, on propose la surface de glissement suivante :

$$S = \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 \quad (\text{IV.46})$$

Les paramètres  $\sigma_1, \sigma_2$  sont des constantes positives, sont choisies tel que :  $\sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \geq 0$

La loi de commande totale est donnée par :

$$U = U_{eq11} + U_{eq22} + U_{dis} \quad (\text{IV.47})$$

$$\text{telles que : } U_{eq11} = \frac{\sigma_1 \hat{b}_1}{\sigma_1 \hat{b}_1 + \sigma_2 \hat{b}_2} U_{eq1}, \quad U_{eq22} = \frac{\sigma_2 \hat{b}_2}{\sigma_1 \hat{b}_1 + \sigma_2 \hat{b}_2} U_{eq2}$$

Où la commande de commutation est choisie comme suit :

$$U_{dis} = \frac{-1}{\sigma_1 \hat{b}_1 + \sigma_2 \hat{b}_2} (k \cdot \text{sign}(S) + \beta \cdot S) \quad (\text{IV.48})$$

telles que  $k$  et  $\beta$  des constantes positives.

L'objectif de ce travail peut être résumé par la figure (IV.2).

**Théorème IV.2:** Pour le SMSA donné par l'équation (IV.22), les surfaces de glissement sont choisies par (IV.40), (IV.41) et (IV.46) avec la loi de commande définie par l'équation (IV.47), alors le vecteur de sortie peut suivre ses références et ainsi tout le système est globalement asymptotiquement stable [90].

#### Preuve de stabilité :

La dérivé de la fonction de Lyapunov est donnée par :

$$\dot{V} = S\dot{S} \quad (\text{IV.49})$$

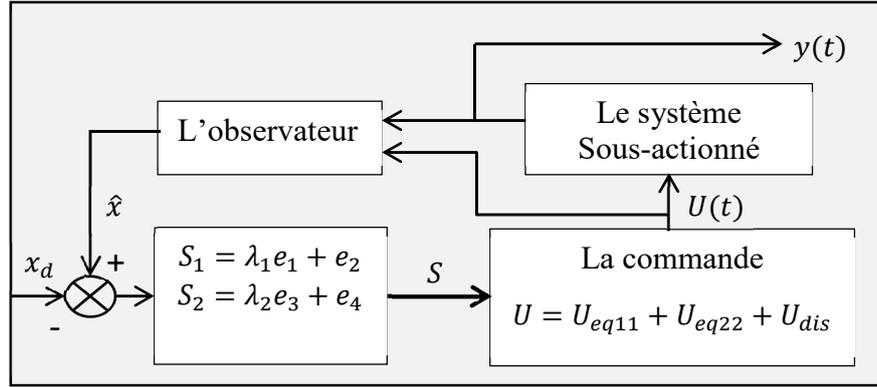


Figure IV.2 Structure de commande d'un observateur par mode glissant d'un SMSA

$$\begin{aligned} \dot{V} = S(\sigma_1 \hat{f}_1 + \sigma_1 \hat{b}_1 U + \sigma_1 \lambda_1 \dot{e}_1 + \sigma_1 d_1 + \sigma_2 \hat{f}_2 + \sigma_2 \hat{b}_2 U + \sigma_2 \lambda_2 \dot{e}_3 \\ + \sigma_2 d_2 - \sigma_1 \ddot{x}_{1d} - \sigma_2 \ddot{x}_{3d}) \end{aligned} \quad (IV.50)$$

Appliquant la commande (IV.47), on aura:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= S(\sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_2 - k \text{sign}(S) - \beta S) \\ &= (\sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_2) |S| - k |S| - \beta S^2 \end{aligned} \quad (IV.51)$$

où  $\rho = \sup(\sigma_1 \rho_1 + \sigma_2 \rho_2)$  et choisissant  $k > \rho$ , alors :

$$\dot{V} = -(k - \rho) |S| - \beta S^2 \leq 0 \quad (IV.52)$$

Intégrant les deux côtés de (IV.52), on a :

$$\int_0^t \dot{V} d\tau = \int_0^t (-(k - \rho) |S| - \beta S^2) d\tau \quad (IV.53)$$

$$\Rightarrow V(t) - V(0) = -\int_0^t ((k - \rho) |S| + \beta S^2) d\tau < \infty, \quad \forall t \geq 0 \quad (IV.54)$$

On a  $V(t)$  est définie positive, ce qui veut dire :

$$0 \leq \int_0^t ((k - \rho) |S| + \beta S^2) d\tau \leq V(0) < \infty \quad (IV.55)$$

Ça implique que :

$$0 \leq (k - \rho) \int_0^\infty (|S|) d\tau < \infty \quad (IV.56)$$

Alors :  $S \in L_1$  ( $L_1$  : est l'espace de la norme-1)

et :

$$0 \leq \int_0^{\infty} (\beta \cdot S^2) d\tau < \infty \quad (\text{IV.57})$$

Alors :  $S \in L_2$  ( $L_2$  : est l'espace de la norme-2)

A partir de (IV.45) et (IV.57), on a :

$$\int_0^{\infty} S^2 d\tau = \int_0^{\infty} (\sigma_1^2 S_1^2 + \sigma_2^2 S_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2) d\tau \quad (\text{IV.58})$$

ainsi :

$$\int_0^{\infty} (2\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2) d\tau \leq \int_0^{\infty} (\sigma_1^2 S_1^2 + \sigma_2^2 S_2^2) d\tau \quad (\text{IV.59})$$

A partir de (IV.58), on a :

$$0 < \int_0^{\infty} (4\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2) d\tau \leq \int_0^{\infty} S^2 d\tau \quad (\text{IV.60})$$

et :

$$\sigma_1 \int_0^{\infty} (S_1^2) + \sigma_2 \int_0^{\infty} (S_2^2) d\tau \leq \int_0^{\infty} S^2 d\tau < \infty \quad (\text{IV.61})$$

On a :  $S_1 \in L_2$  et  $S_2 \in L_2$ , c'est-à-dire que :  $\int_0^{\infty} S_1^2 d\tau < \infty$  et  $\int_0^{\infty} S_2^2 d\tau < \infty$ .

A partir de (IV.56) on a :

$$\int_0^{\infty} (|S|) d\tau = \int_0^{\infty} |S_1| d\tau + \int_0^{\infty} |S_2| d\tau < \infty \quad (\text{IV.62})$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} |S_1| d\tau < \infty, \quad \text{c-à-d} : S_1 \in L_1 \quad (\text{IV.63})$$

et :

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} |S_2| d\tau < \infty, \quad \text{c-à-d} : S_2 \in L_1 \quad (\text{IV.64})$$

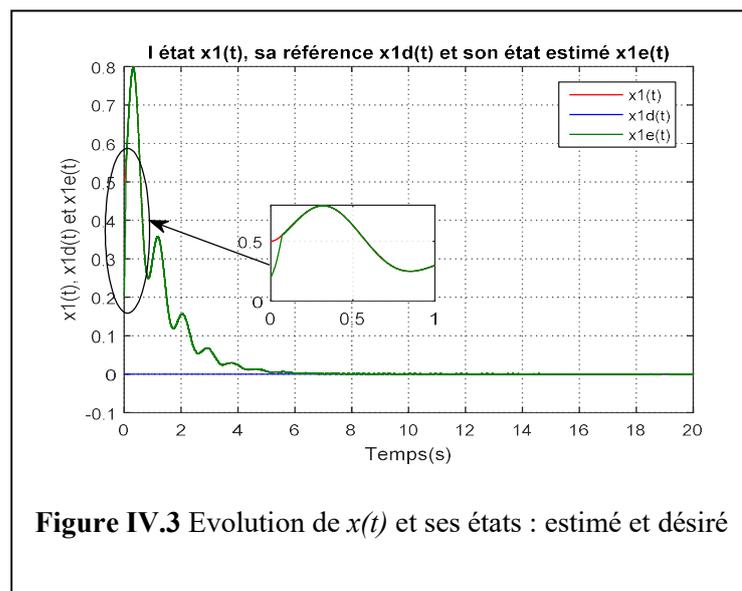
Puisque le vecteur de sorties désirées  $y_d(t)$  et leurs dérivés sont bornées, l'entrée de commande est aussi bornée et  $y(t) \in L_{\infty}$  et à partir des équations (IV.42), (IV.43), on a  $(\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3, \dot{e}_4) \in L_{\infty}$ , par

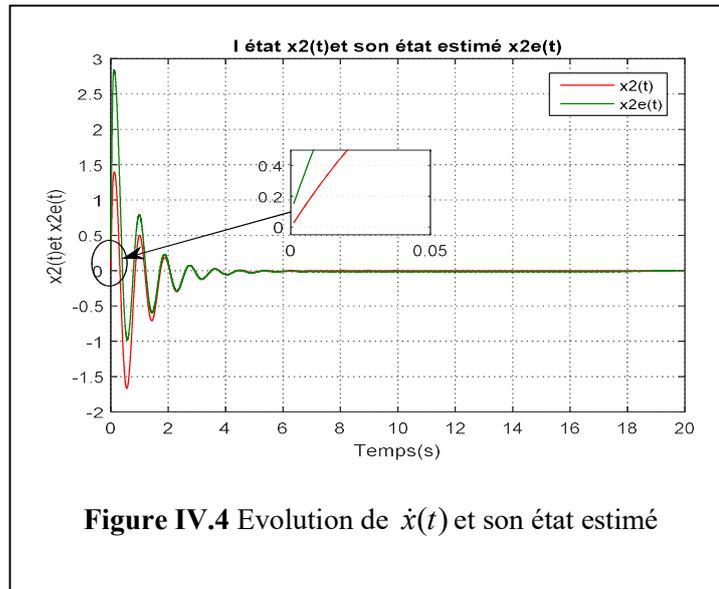
conséquent  $\dot{S}_1 \in L_\infty$  et  $\dot{S}_2 \in L_\infty$ , utilisant le Lemme de Barbalat (Lemme II.1) on a :  $\lim_{t \rightarrow \infty} S_1 = 0$  et , donc on peut conclure que les surfaces de glissement et les erreurs de poursuites convergent asymptotiquement vers zéro, ce qui veut dire que les états estimés convergent vers leurs références.

### IV.5.3 Résultats de simulations

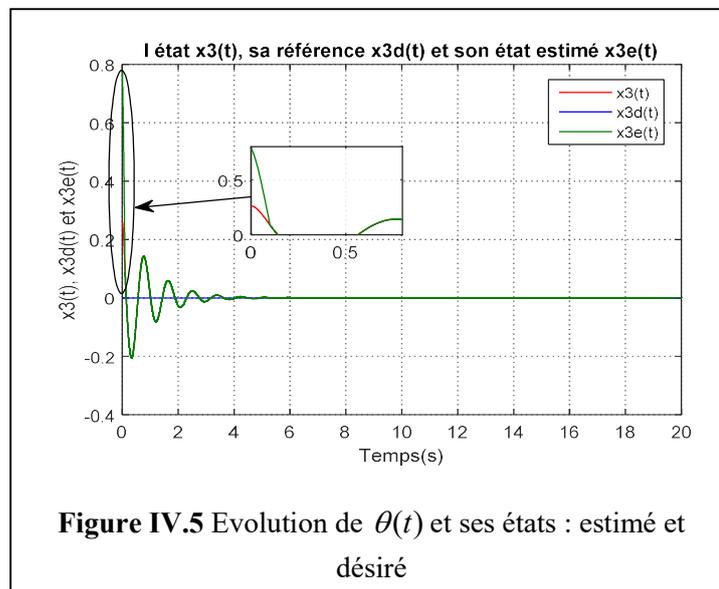
La commande proposée est appliquée sur le même exemple des chapitres précédents qui est le pendule sur chariot sous actionné, afin de pouvoir faire la comparaison des résultats trouvés. Les paramètres du modèle sont donnés par :  $M = 2kg, m = 0.1kg, l = 0.25m$ . Les conditions initiales sont :  $x = [0.5, 0, \frac{\pi}{12}, 0]^T$  et le vecteur de sorties désirées:  $y_d(t) = [0, 0]^T$ .

#### IV.5.3.1 Cas sans incertitudes paramétriques ou perturbations :

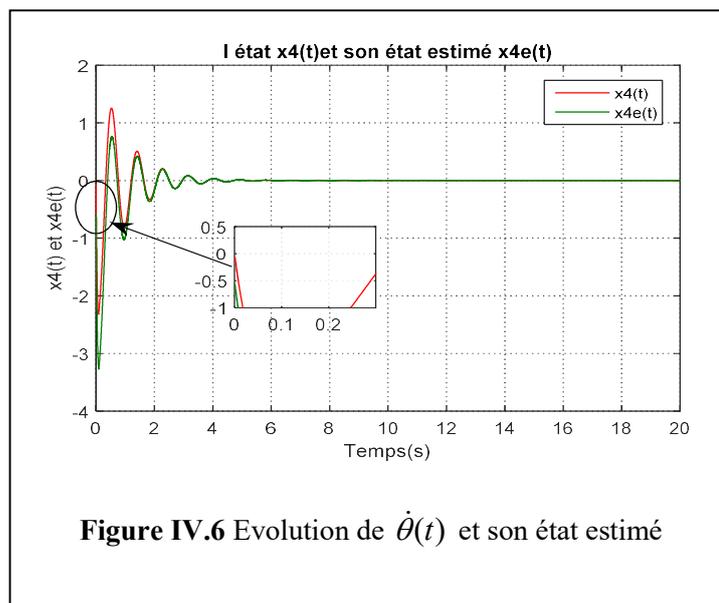




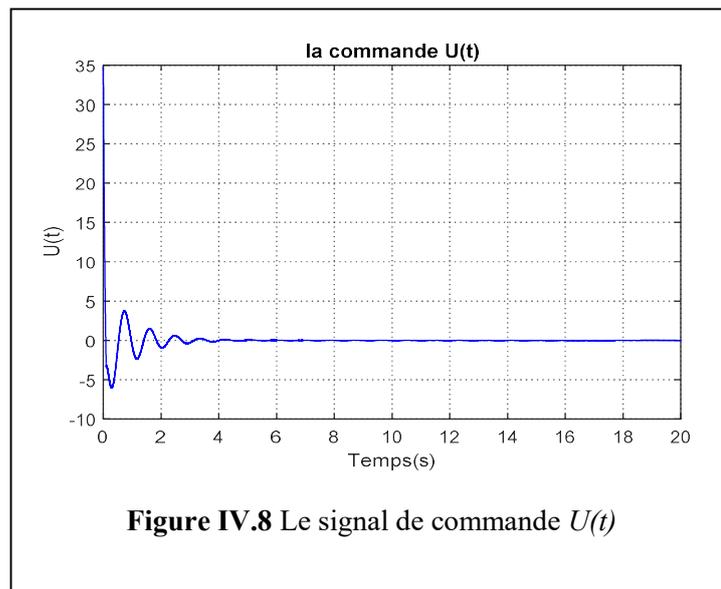
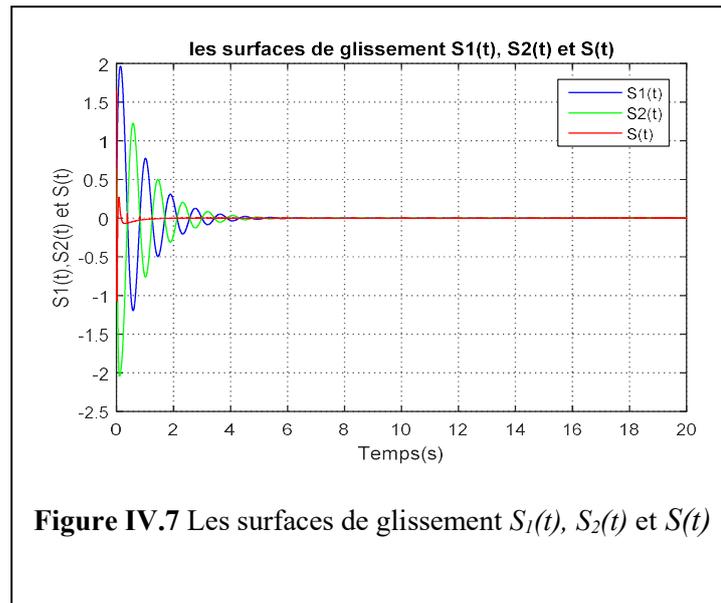
**Figure IV.4** Evolution de  $\dot{x}(t)$  et son état estimé



**Figure IV.5** Evolution de  $\theta(t)$  et ses états : estimé et désiré



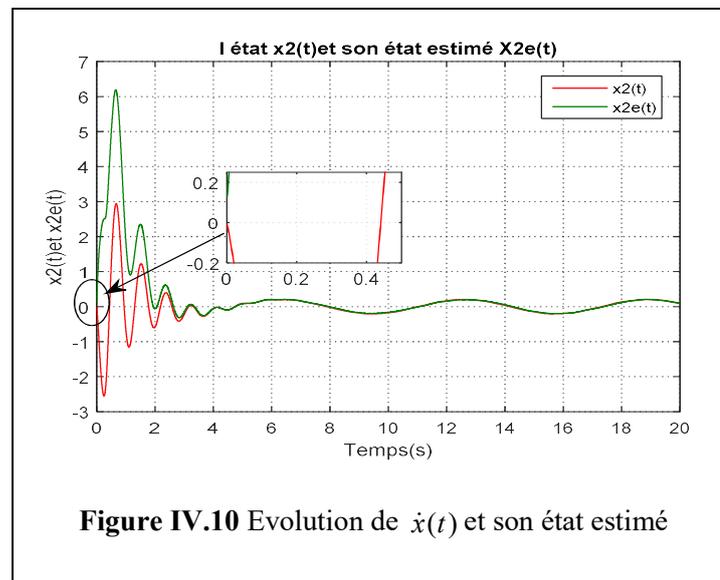
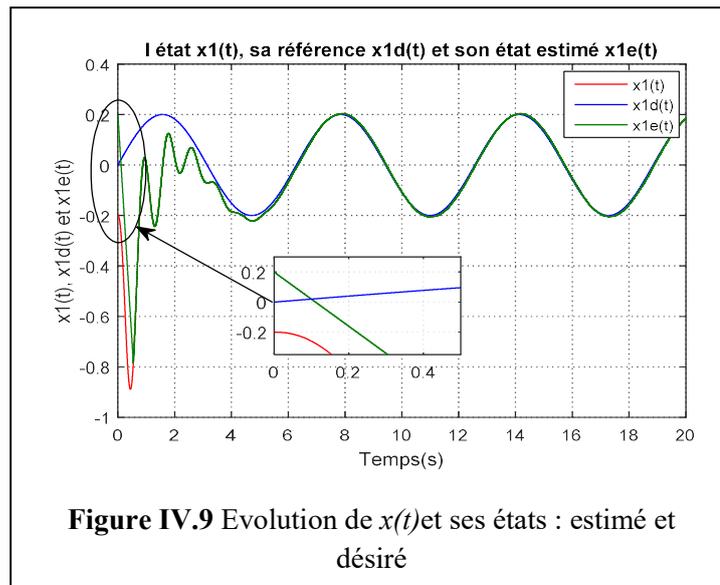
**Figure IV.6** Evolution de  $\dot{\theta}(t)$  et son état estimé

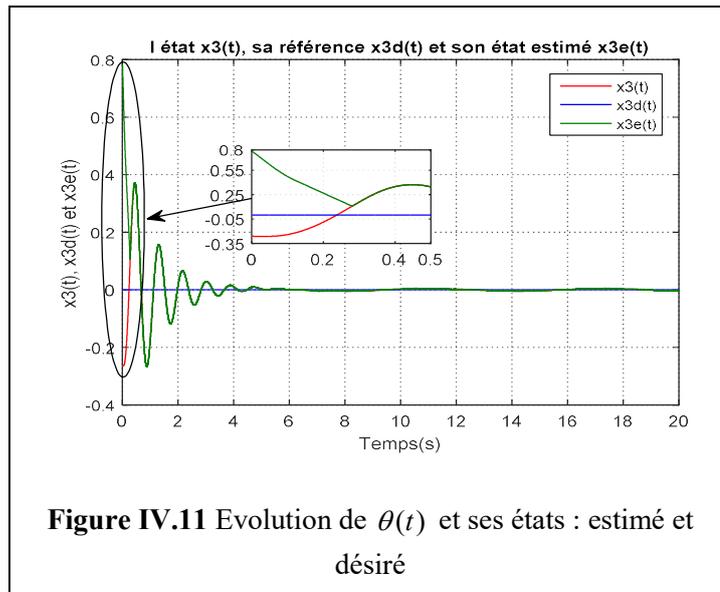


D'après les résultats de simulation, on remarque que la commande appliquée (Figure (IV.8)) force le système de suivre les signaux de référence comme le montrent les figures (IV.3) et (IV.5) après avoir fait une estimation parfaite des états ce qui est montré sur les figures (IV.3), (IV.4), (IV.5) et (IV.6). La figure (IV.7) présente les surfaces de glissement, on peut voir clairement la convergence asymptotique de ces surfaces vers zéro. On remarque aussi d'après les figures de commande et des surfaces de glissement que le phénomène de broutement (chattering) a été considérablement diminué.

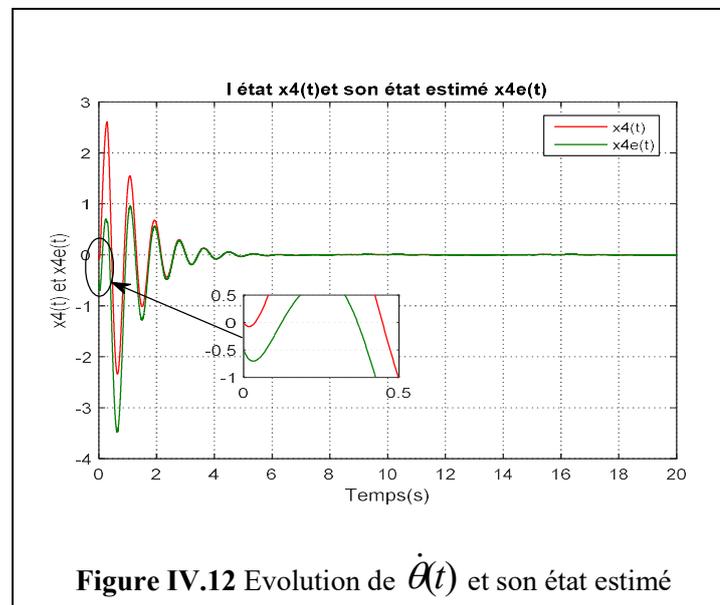
### IV.5.3.2 Cas avec incertitudes paramétriques ou perturbations

Le vecteur des conditions initiales est donné par :  $x = [-0.2, 0, \frac{-\pi}{12}, 0]^T$ , le vecteur de sorties désirées :  $y_d = [0.2 \sin(t), 0]^T$ , on suppose qu'il y a des incertitudes sur les deux masses (celle de chariot et celle du pendule) exprimées par :  $M = 2 + 0.05 \text{randn}(1, tf)$  et  $m = 0.1 + 0.05 \text{randn}(1, tf)$ .

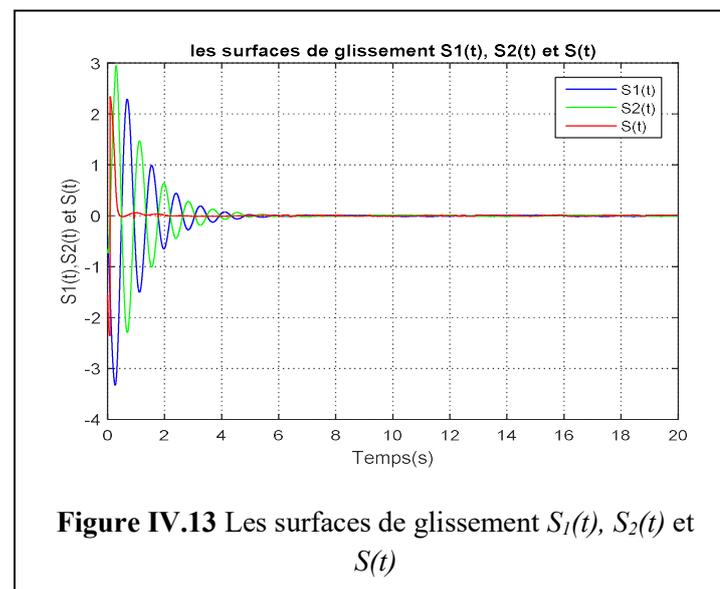




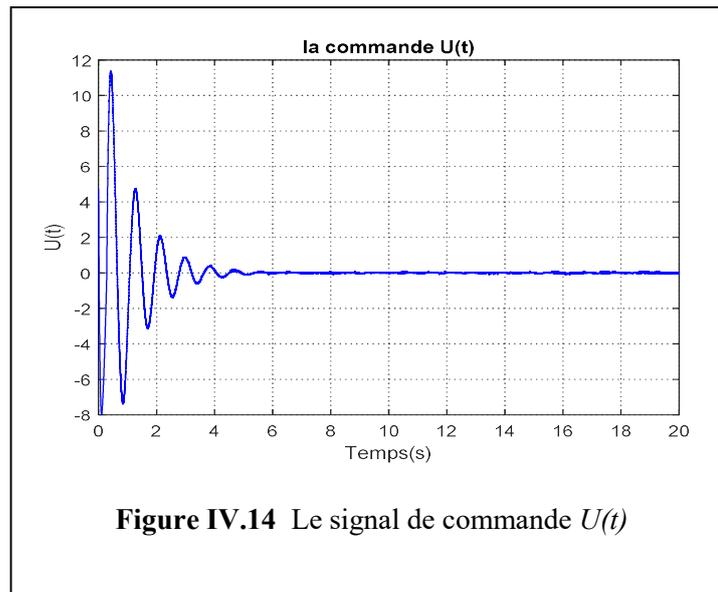
**Figure IV.11** Evolution de  $\theta(t)$  et ses états : estimé et désiré



**Figure IV.12** Evolution de  $\dot{\theta}(t)$  et son état estimé



**Figure IV.13** Les surfaces de glissement  $S_1(t)$ ,  $S_2(t)$  et  $S(t)$



D'après les résultats de simulation, on peut voir que la commande qui est présentée sur la figure (IV.14) assure une bonne poursuite et une bonne estimation des états, comme le montrent les figures (IV.9), (IV.10), (IV.11) et (IV.12) malgré la présence d'incertitudes paramétriques. On remarque aussi que les surfaces de glissement présentées sur la figure (IV.13) sont stables et convergent asymptotiquement vers zéro.

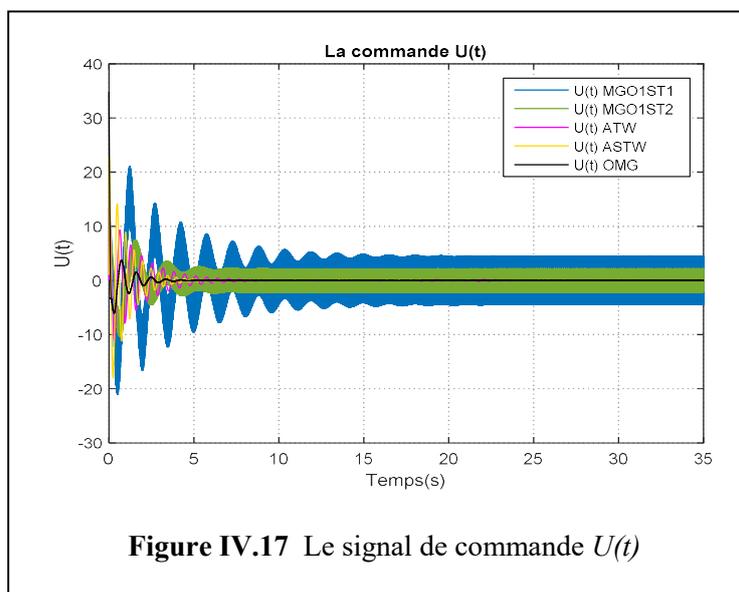
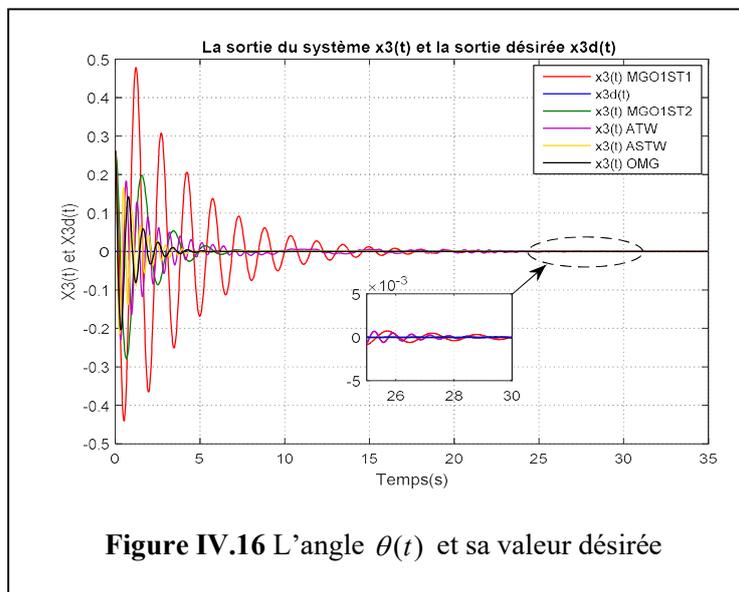
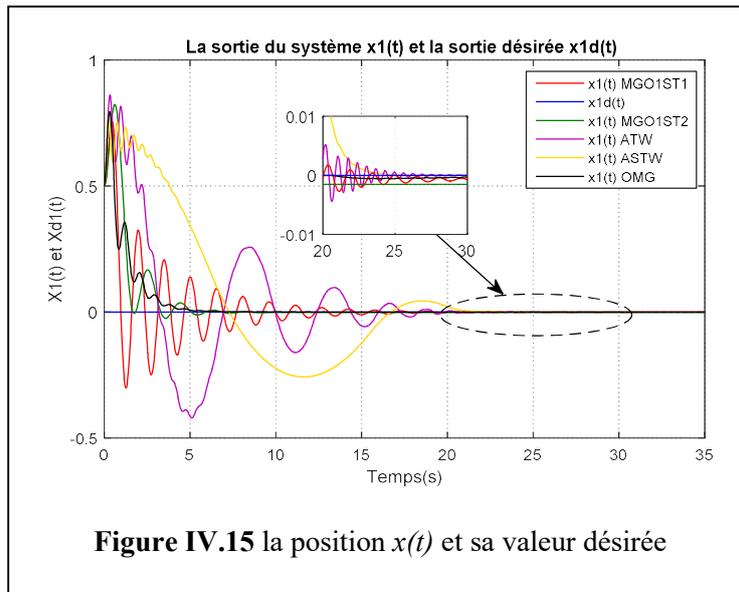
## IV.6 Comparaison entre les résultats de simulation des commandes appliquées

Pour montrer l'efficacité de la méthode proposée dans ce dernier chapitre, on a fait une comparaison entre les résultats de simulation de cette dernière et des méthodes déjà étudiées dans la première partie de ce travail, qui sont la commande par mode glissant classique avec les deux structures et la commande par mode glissant d'ordre deux. On considère le système de pendule sur chariot sous actionné (I.10) présenté dans le premier chapitre, avec les mêmes paramètres et les mêmes conditions initiales prises pour les cas sans et avec perturbations.

### IV.6.1 Cas sans perturbations

Le vecteur d'état initial et le vecteur de sorties désirées sont respectivement les suivants :

$x = [0.5, 0, \frac{\pi}{12}, 0]^T$ ,  $y_d(t) = [0, 0]^T$  et les résultats de simulation sont les suivants :



D'après les figures (IV.15) et (IV.16) on peut voir clairement que l'OMG (qui est montré pas la couleur noire) en comparaison avec les autres méthodes de commande, a permis à l'angle du pendule ( $x_3(t)$ ) et à la position du chariot ( $x_1(t)$ ) d'être stables et de converger rapidement vers leurs états désirés. On voit aussi que les réponses les plus lentes sont celles de de la commande par mode glissant d'ordre deux soit pour l'algorithme de Twisting ou pour l'algorithme de Super-Twisting, car ces algorithmes demandent un temps de calcul très lent, bien que ces deux derniers ont permis d'avoir une réponse avec une très bonne précision, par rapport aux autres commandes. Alors en termes de bonne précision on peut citer les commandes par l'ordre suivant : l'ASTW, l'ATW, l'OMG vient ensuite l'CMG1 de la deuxième structure et puis l'CMG1 de la première structure.

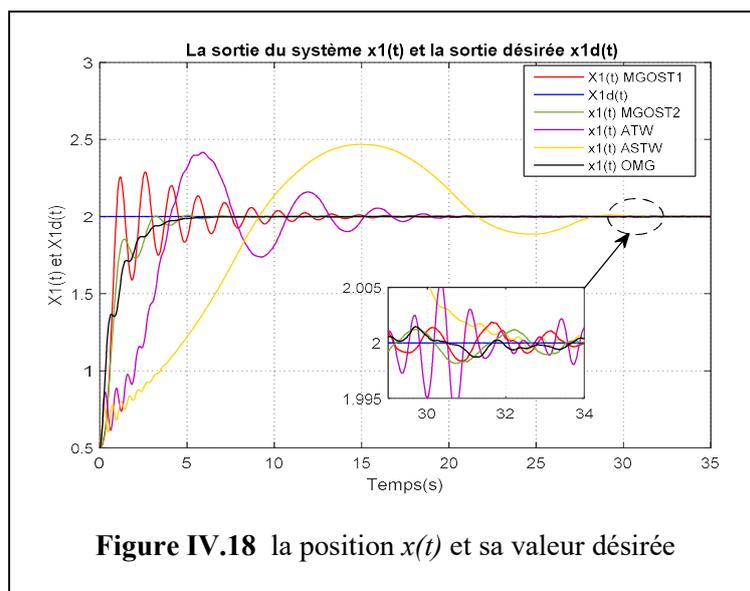
D'après la figure (IV.17) on voit aussi que le phénomène de broutement est beaucoup diminué en utilisant l'OMG et complètement éliminé en utilisant soit l'ATW ou l'ASTW.

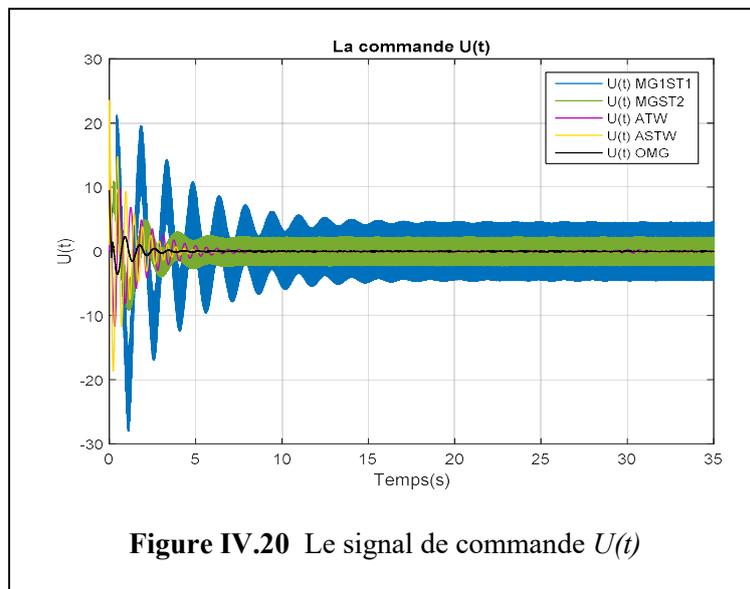
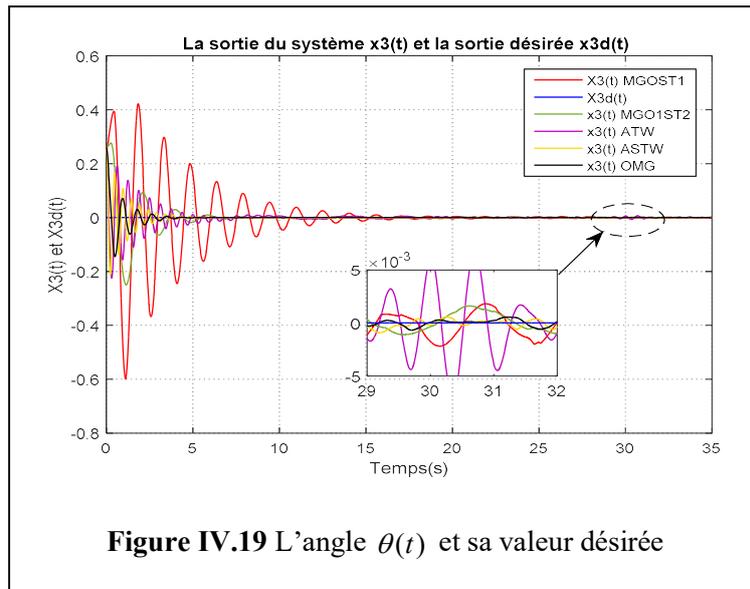
#### IV.6.2 Cas avec perturbations

Le vecteur d'état initial et le vecteur de sorties désirées sont respectivement les suivants :

$x = [0.5, 0, \frac{\pi}{12}, 0]^T$ ,  $y_d(t) = [2, 0]^T$ . Dans ce cas on va appliquer une perturbation de la forme :

$P(t) = 0.08 * randn(1, tf)$  et un changement de la masse du pendule :  $\pm \Delta m = 0.1kg$  qui représente une incertitude paramétrique.





Les figures (IV.18) et (IV.19) montrent la robustesse de l'OMG par rapport aux autres commandes, car cette technique a permis aux états du système ( $x_1(t)$  et  $x_3(t)$ ) qui représentent respectivement la position du chariot et l'angle du pendule d'atteindre leurs valeurs désirées avec une bonne précision et une convergence rapide et en temps fini, malgré la présence des perturbations et des incertitudes paramétriques. On peut voir aussi que la propriété de la bonne précision pour l'ATW et l'ASTW est un peu dégradée.

La figure (IV.20) représente le signal de commande pour les différentes techniques appliquées. On peut remarquer que ce signal a permis de compenser l'effet des perturbations et des incertitudes, et

le phénomène de broutement est parfaitement diminué pour les techniques de commande par mode glissant d'ordre deux (Algorithme de Twisting et Algorithme de Super-Twisting), ainsi que pour l'OMG.

Notre objectif consiste à trouver une commande qui permet de diminuer parfaitement l'effet de broutement et d'atteindre un nombre maximum de performances désirées, ce qui est garanti en appliquant l'OMG. Ce dernier a permis non seulement d'avoir un temps de réponse minimal et une bonne précision (l'erreur de précision est de l'ordre de  $10^{-5}$ ), mais il nous a permis aussi d'estimer les états du système avec une erreur d'estimation négligeable, et de diminuer considérablement le phénomène de broutement, pour les deux cas sans et avec perturbations et incertitudes.

#### **IV.7 Conclusion**

Dans ce chapitre on a présenté un modèle d'OMG, pour la poursuite et la stabilisation d'un système sous actionné d'ordre deux. Cette technique de commande a permis d'améliorer des performances de système en stabilité et en rapidité de réponse en présence ou non de perturbations ou d'incertitudes. Une analyse de stabilité basée sur la synthèse de Lyapunov a été présentée afin de prouver la stabilité des surfaces de glissement et de montrer la convergence des états de système vers leurs états désirés, quelques soient les conditions initiales. On a pu aussi diminuer l'effet de broutement qui présente une contrainte pour les actionneurs de système grâce à la commande proposée.

Les résultats de simulation montrent l'efficacité et la robustesse de l'OMG non linéaire présenté dans ce chapitre.

---

## CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

---

L'étude présentée dans ce manuscrit a pour objectif, d'aborder des techniques de commande robuste, qui constituent une alternative aux commandes classiques généralement employées en automatique, afin de répondre aux objectifs de performance de stabilisation d'un SMSA.

Dans ce cadre nous avons d'abord présenté le principe de fonctionnement et la classification des SMSA d'ordre deux, et montré l'intérêt de l'étude de tels systèmes. Plusieurs exemples des SMSA sont donnés avec leurs modèles mathématiques.

Une commande par mode glissant d'ordre un a été proposée, pour la stabilisation de ces systèmes, malheureusement le phénomène de broutement présente un inconvénient pour cette commande, plusieurs solutions ont été étudiées dans la littérature, parmi ses solution est l'utilisation des modes glissant d'ordre supérieurs, on a opté pour cette solution en utilisant le MGO2 pour faire diminuer l'effet de broutement dans la commande des SMSA, mais une telle solution reste limite et agit négativement sur les performances de système, dans le cas de présence des perturbations.

L'approche proposée, se base sur une combinaison de deux techniques, à savoir le mode glissant pour sa simplicité et son aptitude de prendre en compte les incertitudes du modèle et les perturbations externes, c'est-à-dire pour sa robustesse, et l'observateur non linéaire qui nous a permet d'avoir plus de précision dans la réponse du système, d'assurer une convergence des états estimés en temps fini, ainsi la reconstruction du vecteur d'état mène à minimiser le nombre de capteurs nécessaires, pour la mise en œuvre de la commande, en plus cet observateur sert à atténuer le phénomène de broutement.

Cette approche a été appliquée à un SMSA d'ordre deux, et les résultats de simulation ont montré son efficacité et son pouvoir de présenter des performances satisfaisantes en terme de précision, stabilité et robustesse. A l'égard de ces avantages, l'inconvénient de cette technique est sa faiblesse de traiter le cas de présence de perturbations non bornées, et la difficulté dans le choix des gains d'observateur, surtout lorsque la taille du vecteur d'état du système devient importante.

Dans le cadre des perspectives, on peut citer les points suivants :

- Utiliser la commande adaptative, afin de traiter le problème des perturbations non bornées.
- Introduire la commande optimale pour faciliter de faire le bon choix des gains d'observateur.

- Utiliser la commande par mode glissant terminal afin d'avoir une réponse plus rapide du système.
- Implantation de la commande développée pour des validations expérimentales, en utilisant des microcontrôleurs PICs.

# ANNEXE A

## Propriétés dynamiques du pendule inversé sur chariot sous actionné

### A.1 Le pendule inversé sur chariot

D'après l'équation (I.17) le modèle de pendule inverse sur chariot sous actionné, peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1(q, \dot{q}) \\ C_2(q, \dot{q}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

### A.2 Intégrabilité :

D'après l'équation (A.1), on a :

$$G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 g l \sin(q_1) \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Et :

$$\ddot{q}_1 \cos(q_1) + \left(l + \frac{I}{m_2 l}\right) \ddot{q}_2 - g \sin(q_1) = 0 \quad (\text{A.3})$$

La contrainte (A.3) ne satisfait pas la première condition d'intégrabilité partielle, puisque  $G_2$  n'est pas constant. Par conséquent le pendule inversé sur chariot est un système non holonome de deuxième ordre (type accélération).

### A.3 La commandabilité linéaire

La représentation d'état de (A.1) est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\sin\theta (mgl\cos\theta - ml^2\dot{\theta}^2)}{l(M + m\sin^2\theta)} + \frac{l}{l(M + m\sin^2\theta)} U \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{((M + m)g - ml\cos\theta\dot{\theta}^2)\sin\theta}{l(M + m\sin^2\theta)} + \frac{-\cos\theta}{l(M + m\sin^2\theta)} U \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Tels que :  $x_1 = q_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{q}_1 = \dot{x}$ ,  $x_3 = q_2 = \theta$ ,  $x_4 = \dot{q}_2 = \dot{\theta}$

La linéarisation du système autour du point d'équilibre  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$  donne l'équation d'état linéarisée suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{lM} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{-1}{lM} \end{pmatrix} U \quad (\text{A.5})$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Tel que y est la sortie du système.

$$\text{Donc : } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{lM} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{-1}{lM} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La condition de commandabilité est vérifiée par le calcul du rang de la matrice de commandabilité suivante :  $\zeta(A, B) = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]$ .

Donc :  $\text{rang}(\zeta(A, B)) = 4$  , ce qui signifie que le système est commandable.

#### A.4 L'observabilité linéaire

La matrice d'observabilité est donnée par :  $o(A, C) = [C, CA, CA^2, CA^3]^T$  .

La condition d'observabilité est vérifiée par le calcul du rang de la matrice d'observabilité :

Donc :  $\text{rang}(o(A, C)) = 4$  , ce qui signifie que le système est observable.

# ANNEXE B

---

## Théorème de Brockett sur la stabilité des systèmes non linéaires

### B.1 Définition

Considérant le système non linéaire suivant :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (\text{B.1})$$

$f(x_0, 0) = 0$ , et  $f(.,.)$  est continuellement différentiable au voisinage de  $(x_0, 0)$ , une condition nécessaire pour l'existence d'une loi de commande continuellement différentiable qui rend l'origine  $(x_0, 0)$  asymptotiquement stable est que [9]:

- 1- Le système linéarisé ne devrait pas avoir de modes incontrôlables, associés à des valeurs propres dont la partie réelle est positive.
- 2- Il existe un voisinage  $\nu$  de  $(x_0, 0)$  tel que pour n'importe quel  $\xi \in \nu$ , il existe un contrôle  $u_\xi(.)$  défini sur  $[0, \infty)$  qui permet d'amener la solution  $\dot{x} = f(x, u_\xi)$  de  $x = \xi$  à  $t = 0$  vers  $x = x_0$  à  $t = \infty$ .
- 3- L'application :  $\gamma: A \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par :  $\gamma: (x, u) \rightarrow f(x, u)$  devrait être sur un ensemble

La première condition représente la condition de rang d'un système linéaire. A noter que dans le cas linéaire, la condition de rang est nécessaire et suffisante pour la commandabilité et l'existence d'une loi de contrôle continue et différentiable pour le contrôle des systèmes linéaires  $\dot{x} = Ax + Bu$ .

La deuxième condition représente la propriété de commandabilité dans le cas non linéaire.

Cette condition n'est pas suffisante pour déterminer une loi de commande avec une certaine régularité. En général, on a besoin de satisfaire plus que la condition de commandabilité, d'où le besoin d'introduire la condition (3) qui correspond à la condition nécessaire de ce théorème.

La troisième condition implique que l'application doit être localement surjective ou que l'image de l'application  $(x, u) \rightarrow f(x, u)$ , pour  $x$  et  $u$  arbitrairement proche de 0, doit contenir un voisinage de l'origine [9].

## B.2 Exemple:

Il existe une loi de commande continue  $(u, v) = (u(x_1, x_2, x_3), v(x_1, x_2, x_3))$  qui rend l'origine du système suivant asymptotiquement stable :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u \\ \dot{x}_2 &= v \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2\end{aligned}\tag{B.2}$$

Et il n'existe pas de loi de commande continue  $(u, v) = (u(x_1, x_2, x_3), v(x_1, x_2, x_3))$  qui stabilise asymptotiquement l'origine du système suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u \\ \dot{x}_2 &= v \\ \dot{x}_3 &= x_2 u - x_1 v\end{aligned}\tag{B.3}$$

La troisième condition de Brockett est vérifiée pour le premier exemple car la solution nulle des équations de vitesse angulaire d'Euler peuvent être rendues asymptotiquement stables avec deux couples de contrôle alignés avec les axes principaux. Alors qu'elle n'est pas vérifiée pour le deuxième exemple, car le système n'a pas de solution pour :  $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0$  et  $\dot{x}_3 \neq 0$ .

# ANNEXE C

---

## Propriétés de robustesse des modes glissants

### C.1 Introduction

De nombreuses techniques de commande ont été développées de façon à être robustes vis-à-vis des incertitudes sur les systèmes considérés. La plupart d'entre elles sont basées sur des méthodes adaptatives, reposant aussi bien sur l'identification ou l'observation, ou sur des méthodes impliquant la stabilité absolue. Bien souvent, elles conduisent à des lois de commande relativement compliquées dont l'implantation se révèle lourde en matière de calculs et de matériels. D'un autre côté, les modes glissants, et ceci peut expliquer l'intérêt croissant pour ces techniques ces dernières années, permettent d'associer qualités de robustesse et réalisation relativement simple [22].

### C.2 Invariance des modes glissants par rapport aux perturbations :

Supposons maintenant un système dynamique non linéaire soumis à des perturbations  $P$  pouvant représenter des incertitudes paramétriques sur le terme nominal de  $f$  ou des perturbations externes indépendantes de l'état :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)U + P \quad (\text{C.1})$$

Avec :  $P = \delta f(x)$

On dit que le régime glissant possède une propriété d'invariance forte vis-à-vis du vecteur perturbateur  $P$ , chaque fois que  $P$  satisfait la définition suivante :

**Définition C.1:** Le régime glissant idéal jouit de propriété d'invariance forte par rapport au signal de perturbation  $P$  chaque fois que la dynamique du système en mode de glissement idéal est indépendante du signal de perturbation  $P$ .

**Théorème C.1:** Un régime glissant sur la variété  $S$ , du système perturbé (C.1), satisfait les propriétés d'invariance vis-à-vis de  $P$ , si et seulement si celui-ci vérifie la condition suivante :

$$P \in \text{Span}\{g(x)\} \quad (\text{C.2})$$

Avec  $\text{Span}$  est l'espace engendré par la base  $g(x)$ .

La condition (C.2) est appelée condition de recouvrement ou "matching condition".

Il faut noter que le système est insensible à de telles perturbations seulement en régime glissant, mais qu'il reste affecté pendant le régime transitoire, i.e. avant que la surface de glissement ne soit atteinte [5].

**Preuve :**

Pour le système dynamique perturbé (C.1), le régime glissant idéal est gouverné par :

$$\dot{x} = F(f + \delta f) \quad (C.3)$$

Avec  $F$  est l'opérateur de projection.

La condition nécessaire vient du fait que si

$$F.P = [I - g(x).(\langle \nabla S, g(x) \rangle)^{-1}.(\nabla S)]P = 0 \quad (C.4)$$

Où  $\nabla S$  désigne le gradient de  $S(x)$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire de deux vecteurs, tel que

$$\langle \nabla S, g(x) \rangle = L_g S$$

Alors, on obtient :

$$P = \{g(x)(\langle \nabla S, g(x) \rangle)^{-1} \nabla S\} P = g(x). \mu(x) \quad (C.5)$$

C'est-à-dire  $P \in \text{Span}\{g(x)\}$  pour toute fonction scalaire continue  $\mu(x)$ .

La condition suffisante vient du fait que si  $P \in \text{Span}\{g(x)\}$  soit  $P = g(x). \mu(x)$  pour toute fonction scalaire  $\mu(x)$ , alors tenant compte que :  $[I - g(x).(\langle \nabla S, g(x) \rangle)^{-1}.(\nabla S)].g(x).U(x) = 0$

(ce qui montre que  $g(x)$  n'a aucune influence dans le mode glissant idéal), l'opérateur annule l'influence de  $P \in \text{Span}\{g(x)\}$  sur la dynamique équivalente.

**Théorème C.2 :** Soit  $P \in \text{Span}\{g(x)\}$  et  $U_{eq}(x)$  la commande équivalente correspondant au régime sur  $S$  d'un système non perturbé. Soient  $U^+(x), U^-(x)$  les bornes fixes de la loi de commande à structure variable, avec  $U^+(x) > U^-(x)$  localement dans  $X$ . Si le régime glissant existe pour le système perturbé (C.1) alors nécessairement le vecteur perturbateur s'écrit  $P = g(x). \mu(x)$ , avec  $\mu(x)$  fonction scalaire continue bornée.

$$U_{eq}(x) - U^-(x) > \mu(x) > U_{eq}(x) - U^+(x) \quad (C.6)$$

**Preuve :**

Si le régime glissant existe pour le système perturbé, alors puisque  $\lim(\langle \nabla S, f + gU^+ \rangle) < 0$  et  $\lim(\langle \nabla S, f + gU^- \rangle) > 0$  (i.e La surface  $S$  sépare  $G$  (domaine de l'espace des variables  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  en deux parties  $G^+$  ( $S > 0$ ) et  $G^-$  ( $S < 0$ ), si dans un petit voisinage les projections  $f + gU^+$  et  $f + gU^-$  sur le vecteur gradient de  $S$  sont de signes contraires, alors la surface  $S$  sera attractive et les champs commandés se dirigent vers celle-ci), on a :

$$\lim_{S \rightarrow 0^+} \langle \nabla S, f + gU^+ + P \rangle = \lim_{S \rightarrow 0^+} \langle \nabla S, f + g(\mu + U^+) \rangle < 0 \quad (\text{C.7})$$

Et

$$\lim_{S \rightarrow 0^-} \langle \nabla S, f + gU^- + P \rangle = \lim_{S \rightarrow 0^-} \langle \nabla S, f + g(\mu + U^-) \rangle > 0 \quad (\text{C.8})$$

Ceci correspond à l'existence du régime glissant pour le système non perturbé avec une loi de commande à structure variable de type :

$$U = \begin{cases} U^+ + \mu & \text{si } S(x) > 0 \\ U^- + \mu & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

Et d'après le théorème suivant :

**Théorème C.3 :** Une condition nécessaire et suffisante d'existence locale des régimes glissants sur  $S$  est que localement dans  $X$  :  $U^-(x) < U_{eq}(x) < U^+(x)$ .

On aura :

$$U^-(x) + \mu(x) < U_{eq}(x) < U^+(x) + \mu(x) \quad (\text{C.10})$$

Ou encore :

$$U_{eq}(x) - U^-(x) > \mu(x) > U_{eq}(x) + U^+(x) \quad (\text{C.11})$$

Cette condition d'invariance par rapport aux perturbations se rapproche à la condition d'invariance par rapport aux perturbations externes développée dans la formalisation classique.

# ANNEXE D

---

## D.1 Preuve de la proposition I.1

### a- Linéarisation partielle par feedback colloqué

Lorsque la variable de configuration  $q_1$  est non actionnée, l'équation (I.32) devient de la forme :

$$\begin{aligned} m_{11}(q_2)\ddot{q}_1 + m_{12}(q_2)\ddot{q}_2 + h_1(q, \dot{q}) &= 0 \\ m_{21}(q_2)\ddot{q}_1 + m_{22}(q_2)\ddot{q}_2 + h_2(q, \dot{q}) &= U_2 \end{aligned} \quad (D.1)$$

Tels que :

$$\begin{aligned} h_1(q, \dot{q}) &= \frac{d}{dq_2} m_{11}(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{d}{dq_2} m_{12}(q_2) \dot{q}_2^2 - g_1(q_1, q_2) \\ h_2(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dq_2} m_{11}(q_2) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dq_2} m_{22}(q_2) \dot{q}_2^2 - g_2(q_1, q_2) \end{aligned}$$

Il est déjà montré que tous les systèmes dynamiques de la forme (D.1), peuvent être partiellement linéarisés en utilisant le changement de commande suivant :

$$U_2 = \alpha_1(q)\tau + \beta_1(q, \dot{q}) \quad (D.2)$$

D'après (D.1), on a :

$$\ddot{q}_1 = -m_{11}^{-1} m_{12}(q_2) \ddot{q}_2 - m_{11}^{-1} h_1(q, \dot{q}) = 0 \quad (D.3)$$

Par substitution de (D.3) dans la deuxième ligne de (D.1), on aura :

$$\ddot{q}_2 (m_{22} - m_{21} m_{11}^{-1} m_{12}) - (m_{21} m_{11}^{-1} h_1(q, \dot{q}) - h_2(q, \dot{q})) = U_2 \quad (D.4)$$

D'après (D.2) et (D.4), on a :

$$\begin{aligned} \tau &= \ddot{q}_2 \\ \alpha_1(q) &= (m_{22} - m_{21} m_{11}^{-1} m_{12}) \\ \beta_1(q, \dot{q}) &= (-m_{21} m_{11}^{-1} h_1(q, \dot{q}) + h_2(q, \dot{q})) \end{aligned}$$

Donc la représentation d'état du système partiellement linéarisé est la suivante :

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= p_1 \\
\dot{p}_1 &= \ddot{q}_1 = f_{01}(q, \dot{q}) + g_{01}(q)\tau \\
\dot{q}_2 &= p_2 \\
\dot{p}_2 &= \ddot{q}_2 = \tau
\end{aligned} \tag{D.5}$$

Tels que :

$$\begin{aligned}
f_{01}(q, \dot{q}) &= -m_{11}^{-1}h_1(q, \dot{q}) \\
g_{01}(q) &= -m_{11}^{-1}m_{12}
\end{aligned}$$

### b- Découplage des deux sous systèmes

On remarque que les deux sous systèmes de (D.5) sont couplés, alors un deuxième changement de coordonnées est nécessaire. Supposons qu'on a le changement de coordonnées (I.33)

Par définition de  $z_1$  et  $z_2$  dans l'équation (I.33), on a :

$$\dot{z}_1 = \dot{q}_1 + \dot{\gamma}(q_2) = p_1 + (m_{11}^{-1}(q_2)m_{12}(q_2)\dot{q}_2) \tag{D.6}$$

D'autre part on a :

$$z_2 = m_{11}p_1 + m_{12}p_2$$

Multipliant (D.6) par  $m_{11}^{-1}$ , on aura :

$$m_{11}^{-1}z_2 = p_1 + m_{11}^{-1}m_{12}p_2 \tag{D.7}$$

D'après (D.6) Et puisque :  $p_2 = \dot{q}_2$ , alors :

$$m_{11}^{-1}z_2 = \dot{z}_1$$

Notant que :  $z_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}$

Dans la première ligne de (I.32), posons :  $U_1 = 0$

Et on a :

$$\dot{z}_2 = \frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial K}{\partial q_1} - \frac{\partial V}{\partial q_1} = g_1(q_1, q_2) \tag{D.8}$$

Le système possède la propriété de la symétrie cinétique par rapport à  $q_1$ , c'est à dire :

$$\frac{\partial K}{\partial q_1} = 0$$

Alors :

$$g_1(q_1, q_2) = -\frac{\partial V}{\partial q_1}$$

D'après la première ligne de (D.1) et puisque :  $q_1 = z_1 - \gamma(q_2)$ , et  $q_2 = \xi_1$ , alors on a :

$$\dot{z}_2 = g_1(z_1 - \gamma(\xi_1), \xi_1) \quad (\text{D.9})$$

## D.2 Preuve de la proposition I.2

### a- Linéarisation partielle par feedback non colloqué

La procédure de linéarisation par feedback non colloqué, permet de linéariser la variable de configuration non actionnée. Cette procédure est possible si le nombre d'entrée de commande est supérieur ou égal au nombre des variables de configuration non actionnées.

Lorsque la variable de configuration  $q_2$  est non actionnée, l'équation (I.32) devient de la forme :

$$\begin{aligned} m_{11}(q_2)\ddot{q}_1 + m_{12}(q_2)\ddot{q}_2 + h_1(q, \dot{q}) &= U_1 \\ m_{21}(q_2)\ddot{q}_1 + m_{22}(q_2)\ddot{q}_2 + h_2(q, \dot{q}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Tels que :

$$\begin{aligned} h_1(q, \dot{q}) &= \frac{d}{dq_2} m_{11}(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{d}{dq_2} m_{12}(q_2) \dot{q}_2^2 - g_1(q_1, q_2) \\ h_2(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dq_2} m_{11}(q_2) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dq_2} m_{22}(q_2) \dot{q}_2^2 - g_2(q_1, q_2) \end{aligned}$$

Il existe un changement de commande qui linéarise la dynamique (D.10), de la forme :

$$U_1 = \alpha_2(q)\tau + \beta_2(q, \dot{q}) \quad (\text{D.11})$$

D'après (D.10), on a :

$$\ddot{q}_1 = -m^{-1}_{21} m_{22}(q_2) \ddot{q}_2 - m^{-1}_{21} h_2(q, \dot{q}) = 0 \quad (\text{D.12})$$

Par substitution de (D.12) dans la première ligne de (D.10), on aura :

$$\ddot{q}_2 (m_{12} - m_{11} m_{21}^{-1} m_{22}) - (m_{11} m_{21}^{-1} h_2(q, \dot{q}) - h_1(q, \dot{q})) = U_1 \quad (\text{D.13})$$

D'après (D.11) et (D.13), on a :

$$\begin{aligned} \tau &= \ddot{q}_2 \\ \alpha(q) &= (m_{12} - m_{11} m_{21}^{-1} m_{22}) \\ \beta(q, \dot{q}) &= (-m_{11} m_{21}^{-1} h_2(q, \dot{q}) + h_1(q, \dot{q})) \end{aligned}$$

Donc la représentation d'état du système partiellement linéarisé est la suivante :

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= p_1 \\ \dot{p}_1 &= \ddot{q}_1 = f_{02}(q, \dot{q}) + g_{02}(q)\tau \\ \dot{q}_2 &= p_2 \\ \dot{p}_2 &= \ddot{q}_2 = \tau\end{aligned}\tag{D.14}$$

Tels que :

$$\begin{aligned}f_{02}(q, \dot{q}) &= -m_{21}^{-1}h_2(q, \dot{q}) \\ g_{02}(q) &= -m_{21}^{-1}m_{22}(q_2)\end{aligned}$$

### b- Découplage des deux sous systèmes

On remarque que les deux sous systèmes de (D.13) sont couplés, alors un deuxième changement de coordonnées est nécessaire. Supposons qu'on a le changement de coordonnées (I.35)

Par définition de  $z_1$  et  $z_2$  dans l'équation (I.35), on a :

$$\dot{z}_1 = \dot{q}_1 + \dot{\gamma}(q_2) = p_1 + (m_{21}^{-1}(q_2)m_{22}(q_2)\dot{q}_2)\tag{D.15}$$

D'autre part on a :

$$z_2 = m_{21}p_1 + m_{22}p_2$$

Multipliant (D.15) par  $m_{11}^{-1}$ , on aura :

$$m_{21}^{-1}z_2 = p_1 + m_{21}^{-1}m_{22}p_2\tag{D.16}$$

D'après (D.15) et (D.16) et puisque :  $p_2 = \dot{q}_2$ , alors :

$$m_{21}^{-1}z_2 = \dot{z}_1$$

Dans la deuxième ligne de (I.32), posons :  $U_2 = 0$

et on a :

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= \frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{\partial K}{\partial q_2} - \frac{\partial V}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial K}{\partial q_2} \neq 0 \\ \dot{z}_2 &= g_2(q_1, q_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial m_{11}(q_2)}{\partial q_2} p_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial m_{21}(q_2)}{\partial q_2} p_1 p_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial m_{22}(q_2)}{\partial q_2} p_2^2\end{aligned}\tag{D.17}$$

Après substitution de :  $q_1 = z_1 - \gamma(q_2)$ ,  $p_1 = (z_2 - m_{22}(q_2)p_2)/m_{21}(q_2)$  et  $\xi_1 = q_2$  dans (D.17), on aura :

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & g_2(z_1 - \gamma(\xi_1), \xi_1) + \frac{\frac{d}{d\xi_1} m_{11}(\xi_1)}{2m_{21}^2(\xi_1)} z_2^2 + \left( \frac{\frac{d}{d\xi_1} m_{21}(\xi_1)}{m_{21}(\xi_1)} - \frac{m_{22}(\xi_1) \frac{d}{d\xi_1} m_{11}(\xi_1)}{2m_{21}^2(\xi_1)} \right) z_2 \xi_2 + \\ & \left( \frac{m_{22}^2(\xi_1)}{2m_{21}^2(\xi_1)} \frac{d}{d\xi_1} m_{11}(\xi_1) - \frac{m_{22}(\xi_1)}{m_{21}(\xi_1)} \frac{d}{d\xi_1} m_{21}(\xi_1) + \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi_1} m_{22}(\xi_1) \right) \xi_2^2 \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

### D.3 Preuve de la proposition I.3

La forme normale (I.37) découle de la preuve de la proposition (I.2) avec un calcul direct des conditions 1 et 2.

Le seul système sous actionné qui répond aux conditions de la proposition I.3 est le pendule sur chariot, pour ce système on a :  $g_2 = g_2(q_2)$  et  $m_{11}$  est constante, en plus  $\psi(q_2) = g \tan(q_2)$  ( $g$  est la constante de gravité), ce qui implique  $\psi(0) = g \neq 0$ .

---

## *Références Bibliographiques*

---

- [1] N. Adhikary, C. Mahanta, “Integral backstepping sliding mode control for underactuated systems: Swing-up and stabilization of the Cart–Pendulum System”, *ISA Transactions* Vol.52, pp: 870–880, 2013.
- [2] C. M. Alaoui, “*Commande et Observateur Par Mode Glissant d’un Système De Pompage et D’un Bras Manipulateur*”, Thèse de doctorat, Université sidi mohamed ben abdellah, 2009.
- [3] N.P.I. Aneke, “*Control of underactuated mechanical systems*”, PhD thesis, Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 2003.
- [4] K. J. Astrom and K. Furuta. “*Swining up a pendulum by energy control*”. IFAC, San Francisco, 1996.
- [5] A. Bachtarzi, “*Commande des systèmes à structure variable : application à un générateur de vapeur*”, Thèse de doctorat, Université de Constantine, Algérie, 2011.
- [6] T. Boukhobza. “*Observateurs à modes glissants et formes d’observabilité et analyse et synthèse des commandes par ordres supérieurs*”. PhD thesis, Université de Paris-Sud Orsay, Laboratoire des Signaux et Systèmes, 1997.
- [7] K.Braikia, M.Chettouh, B.Tondu, P.Acco, and M.Hamerlain. “*Improved control strategy of 2-sliding controls applied to a flexible robot arm*”. *Advanced Robotics*, 2011.
- [8] V. Bregeault, “*Quelques contributions à la théorie de la commande par modes glissants*”, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, France, 2010.
- [9] R.W. Brockett, “*Asymptotic stability and feedback stabilization*”, Birkhausser, 1983.
- [10] Y-H. Chang, C-W. Chang, C-W. Tao, H-W Lin, J-S. Taur, “Fuzzy sliding-mode control for ball and beam system with fuzzy ant colony optimization”, *Expert Systems with Applications* Vol.39, pp:3624–3633, 2012.
- [11] A. Choukchou Braham,”*Contribution à la stabilisation des systèmes mécaniques sous actionnés*”, Thèse de doctorat, Université Aboubakr belkaid Tlemcen, Algérie, 2011.
- [12] C. C. Chung and J. Hauser. “Nonlinear control of a wwinging pendulum”. *Automatica*, Vol.40, pp: 851-862, 1995.

- [13] S. Drakunov and V. Utkin. “Sliding mode observer. Tutorial”. IEEE Conf. on Dec. and Cont., pp: 3376-3379, 1995.
- [14] F. Fahimi, “Sliding-mode formation control for underactuated surface vessels”, IEEE Trans Robotics, pp: 617–622, 2007.
- [15] Y. Fang, W. Dixon, D. Dawson, E. Zergeroglu, “Nonlinear coupling control laws for an underactuated overhead crane system”, IEEE/ASME Transactions on Mechatronics Vol.8, pp: 418–423, 2003.
- [16] I. Fantoni, R. Lozano, and M. Spong. “Passivity based control of the pendubot”. To appear in IEEE Trans. on Automatic Control, 2000.
- [17] I. Fantoni, R. Lozano, M. W. Spong, “Energy based control of the Pendubot”, IEEE Transaction on Automatic Control Vol.45, pp: 725–729, 2000.
- [18] I. Fantoni et R. Lozano. “*Nonlinear control for underactuated mechanical systems*”. Springer, 2002.
- [19] I. Fantoni, R. Lozano, “Stabilization of the Furuta pendulum around its homoclinic orbit”, Int J Control Vol.75, pp: 390–398, 2002.
- [20] H. M. Farahani, J. Askari, M. Zekri, and M. Kamali, “Type-2 fuzzy neural network controller for a class of nonlinear systems”, Proc. of the 21st Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE), May 2013.
- [21] A. F. Phillipov. “Differential equations with discontinuous right-hand side”. Amer.Math. Soc.Trans. Vol.62. pp: 199-231, 1960.
- [22] T. Floquet, “*Contributions à la commande par modes glissants d'ordre supérieur*”, Thèse de doctorat de l'université des sciences et technologie de Lille, Décembre 2000.
- [23] A. J. Fossard et D. “*Normand-Cyrot, Système non linéaire, tome 1 : modélisation- estimation*”. Masson, Paris, 1993.
- [24] K. Furuta, M. Yamakita, S. Kobayashi, and M. Nishimura. “*A new inverted pendulum apparatus for education*”. Advances in control education, Pergamon, 1992.
- [25] B. Gao, F. Ye, J. Xu, and M. Hu, “Fuzzy Lyapunov Synthesis Control Design for an Underactuated 2-Dimensional Translational Oscillator with Rotational Actuator”, The 4th Annual IEEE International Conference on Cyber Technology in Automation, Control and Intelligent Systems, Hong Kong, China, pp: 76-81, June 2014.

- [26] J. Ghommam, F. Mnif, N. Derbel, “Global stabilisation and tracking control of underactuated surface vessels”, IET Control Theory Appl Vol.4, pp: 71–88, 2010.
- [27] A. Girin, “*Contribution à la commande non linéaire d’un système électropneumatique pour une utilisation aéronautique: application sur un benchmark dédié*”, Thèse de doctorat, Université de Nantes, France, 2007.
- [28] S. Hajiri, “*Commande dynamique par mode glissant application a la robustification des processus complexes*”, Thèse de doctorat, Université de Lille, 1997.
- [29] Y. Hao, J. Yi, D. Zhao and D. Qian, “Design of a New Incremental Sliding Mode Controller”, Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation, China, pp: 3407-3412, 2008.
- [30] J. Hauser, S. Sastry et G. Meyer. ”Nonlinear control design for slightly non-minimum phase systems”. Automatica, Vol.28, pp: 665–679, 1992.
- [31] J. Hauser, S. Sastry, P. Kokotovico, “Nonlinear control via approximate input-output linearization: the beam and ball example”, IEEE Transaction on Automatic Control Vol.37, pp: 392–398, 1992.
- [32] M-D Hua, T. Hamel, P. Morin , “A Control Approach for Thrust-Propelled Underactuated Vehicles and its Application to VTOL Drones”, IEEE Transactions on Automatic Control, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Vol. 54 (8), pp: 1837-1853, 2009.
- [33] Y.J. Huang, T.C. Kuo and H.K. Way, “Robust vertical takeoff and landing aircraft control via integral sliding mode”, IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol. 150 (4), July 2003.
- [34] G.P. Incremona, M. Rubagotti and A. Ferrara, “Sliding Mode Control of Constrained Nonlinear Systems”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 62 (6), pp: 2965 – 2972, June 2017.
- [35] H.K. Khalil, “*Nonlinear system*”, Prentice Hall Incs, 1996.
- [36] J. H. Kim and S. J. Oh, “A fuzzy PID controller for nonlinear and uncertain systems”, Soft Computing: A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications, Vol. 4 (2), pp: 123–129, July 2000.
- [37] O. Kolesnichenko, A.S. Shiriaev. ”Partial stabilization of underactuated euler.lagrange systems via a class of feedback transformations”. Systems and Control Letters, Vol. 45(2), pp: 121-132, 2002.

- [38] A. Krener and A. Isidori. “Linearization by output injection and nonlinear observers”. *Syst. & Cont. Lett.*, Vol.3, pp: 47-52, 1983.
- [39] C. Kunusch, P. Puleston, M. Mayosky, “*Sliding mode control of PEM Fuel Cells, Advanced in industrial control*”, Springer Series, 2012.
- [40] B. Larroque, “*Observateurs de systèmes linéaires Application à la détection et localisation de fautes*”, Thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2008.
- [41] A.A. J. Lefeber, “*Tracking control of nonlinear mechanical systems*”, Thèse de doctorat, Universiteit Twente, 2000.
- [42] A. Levant. “Higher-order sliding modes, differentiation and output feedback control”, *International Journal of Control*, Vol. 76 (9), pp: 924–941, 2003.
- [43] S. Li, X. Yu, Z. Man and X. Wang, “*Advances in Variable Structure Systems and Sliding Mode Control—Theory and Applications*”, Studies in Systems, Decision and Control book series (SSDC), Springer, Vol. 115, 2018.
- [44] D. G. Luenberger, “An introduction to observers,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 16 (6), pp: 596-602, December 1971.
- [45] A. Mahindrakar and R. Banavar, “A swing-up of the acrobot based on a simple pendulum strategy,” *International Journal of Control*, Vol. 78 (6), pp: 424–429, 2005.
- [46] S. Mahjoub, F. Mnif, N. Derbel, “Set point stabilisation of a 2DOF underactuated manipulator”, *Journal of Computer*, Vol.6 (2), February 2011.
- [47] S. Mahjoub, F.Mnif, “Second order sliding mode control applied to an inverted pendulum”, *International conference on sciences and techniques of automatic control and computer engineering STA'14*, Sousse Tunisia, Dec 2013.
- [48] S. Mahjoub, F. Mnif, N. Derbel, M. Hamerlain, “Radial-basis-functions neural network sliding mode control for underactuated mechanical system”, *Int. J. Dynam. Control* Vol.2, pp:533–541, 2014.
- [49] N. Manamani. “*Commandes et Observateurs pour systèmes pneumatiques-Méthodologie pour la locomotion à pattes*”. PhD thesis, Université de Paris VI, Laboratoire de Robotique de Paris France, 1998.
- [50] M. Manceur, “*Commande robuste des systèmes non linéaires complexes*”, Thèse de doctorat, Université de Reims Champagne-Ardenne, France, 2012.

- [51] F. Mnif, “On the reduction and control for a class of nonholonomic underactuated systems”, *Journal of electrical engineering*, Vol. 54(1)(2), pp: 22-29, 2003.
- [52] P. Moran and C. Samson, “Stabilisation de trajectoires pour des véhicules non-holonomes ou sous actionnés”, *Journées Nationales de la Recherche en Robotique, JNRR05 Guidel Morbihan*, 2005.
- [53] K. R. Muske, H. Ashrafiuon, S. Nersesov and M. Nikkhah, “Optimal Sliding Mode Cascade Control for Stabilization of Underactuated Nonlinear Systems”, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, Vol.134 (2), 2012.
- [54] R. Olfati Saber. ”*Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles*”. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Departement Electrical Engineering and Computer Science, 2001.
- [55] G. Oriolo and Y. Nakamura, “Control of Mechanical Systems with Second-Order Nonholonomic Constraints: Underactuated Manipulators”, *30th IEEE Conference on Decision and Control Brighton, UK*, December 11–13, 1991.
- [56] H. Ouhba, E. Ouldamara, “*Implémentation de contrôleur par modes glissants (cas de robot mobile de type voiture)*”, Thèse de doctorat, école militaire polytechnique, 2007.
- [57] M-S. Park, D. Chwa, and S-K. Hong, “Antisway Tracking Control of Overhead Cranes With System Uncertainty and Actuator Nonlinearity Using an Adaptive Fuzzy Sliding-Mode Control”, *IEEE Trans. on industrial electronics*, Vol. 55 (11), November 2008.
- [58] W. Perruquetti and J-P. Barbot, “*Sliding mode control in engineering*”, MARCEL DEKKER, INC, New-York, 2002.
- [59] K. Y. Pettersen and E. Egeland. “Exponential stabilization of an underactuated surface vessel”. *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, pp: 1682-1687, 1996.
- [60] K. Pettersen et O. Egeland. “Time-varying exponential stabilization of the position and attitude of an underactuated autonomous underwater vehicle”. In *IEEE Trans. On Automatic Control*, Vol.44(1), pp: 112–115, 1999.
- [61] M. Reyhanoglu, “Control and Stabilization of an Underactuated Surface Vessel”, *Proceedings of the 35<sup>th</sup> Conference on Decision and Control, Kobe, Japan December 1996*.

- [62] S. Riachy, T. Floquet, J-P Richard, “ Stabilisation de systèmes mécaniques sous-actionnés par commande quasi-homogène ”, SEE -Société de l’Electricité, de l’Electronique et des Technologies de l’Information et de la Communication, Vol.4 (3), 2007.
- [63] S. Riachy, Y. Orlov, T. Floquet, R. Santiesteban and J-P Richard, “Second-order sliding mode control of underactuated mechanical systems I: Local stabilization with application to an inverted pendulum”, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, Vol.18, pp: 529–543, 2008.
- [64] S. Riachy, “*Contribution à l’estimation et à la commande de systèmes mécaniques sous-actionnés*”. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lille, Décembre 2008.
- [65] M. I. Ribeiro, “Kalman and Extended Kalman Filters: Concept, Derivation and Properties, Institute for Systems and Robotics”, Lisboa, Portugal, 2004.
- [66] A. Roza, M. Maggiore, “A Class of Position Controllers for Underactuated VTOL Vehicles”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 59 (9), pp: 2580–2585, 2014.
- [67] R. Sepulchre, M. Jankovic et P. Kokotovic. “*Constructive Nonlinear Control*”. Springer-Verlag, 1997.
- [68] D. Seto et J. Baillieul. “Control problems in super articulated mechanical systems”. *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol.39(12), pp: 2442–2453, December 1994.
- [69] Y.B. Shtessel, J.A. Morenob and L.M. Fridman, “Twisting Sliding Mode Control with Adaptation: Lyapunov Design, Methodology and Application”, *Automatica*, Vol.75, pp: 229-235, January 2017.
- [70] J.J. Slotine and W.Li, “*Applied nonlinear control*”, Third edition, Prentice Hall.
- [71] J. J. E. Slotine, J. K. Hedrick, and E. A. Misawa, “Nonlinear state estimation using sliding observers,” *Proc. of the 25th IEEE Conf On Decision and Control*, pp: 332-339, 1986.
- [72] M.I Solihin, Wahyudi and A. Legowo, “Fuzzy-tuned PID Anti-swing Control of Automatic Gantry Crane, *Journal of Vibration and Control*”, Vol.16(1), pp: 127–145, 2010.
- [73] M. W. Spong et M. Vidyasagar. “*Robot Dynamics and Control*”. John Wiley and son, 1989.
- [74] M. W. Spong, “The swing-up control problem for the Acrobot”, *IEEE Control System Magazine* Vol.47, pp: 49–55, 1995.
- [75] M. W. Spong and D. J. Block. “The Pendubot: a mechatronic system for control research and education”. *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, pp: 555-556, New Orleans, Dec. 1995

- [76] M. W. Spong. "Energy based control of a class of underactuated mechanical systems". 1996 IFAC World Congress, Vol.23 (1), pp: 2828-2832, July 1996.
- [77] M. W. Spong. "Passivity-based control of the compass gait biped". IFAC World Congress, Beijing, China, Vol.32 (2), pp: 506-510, July, 1999.
- [78] A. R. Teel. "Saturation to stabilize a class of single-input partially linear composite systems". In IFAC NOLCOS'92 Symposium, pp: 369-374, 1992.
- [79] A. R. Teel et L Praly. "Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback". SIAM Journal of Control and Optimisation, Vol. 33(5), pp: 1443–1488, 1995.
- [80] L. Udawatta, K. Watanabe, K. Izumi and K. Kiguchi, "Control of Underactuated Manipulators Using Fuzzy Logic Based Switching Controller", jirs, pp: 1-20, November 2002.
- [81] V. I. Utkin. "*Sliding modes in control optimisation*". Springer-Verlag, 1992.
- [82] V.Utkin, "Variable structure with sliding modes", IEEE transactions on automatic control, 1997.
- [83] C.Vecchio, "*Sliding Mode Control: theoretical developments and applications to uncertain mechanical systems*". Thèse de doctorat de l'université Degli Studi Di Pavia, Italia, 2011.
- [84] W. Wang, J. Yi, D. Zhao and D. Liu, "Design of a stable sliding-mode controller for a class of second-order underactuated systems", IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol. 151 (6), November 2004.
- [85] D. Xia, L. Wang, and T. Chai, "Neural-Network-Friction Compensation-Based Energy Swing-Up Control of Pendubot", IEEE transactions on industrial electronics, Vol. 61(3), pp:1411-1423, March 2014.
- [86] R. Xu, Ü. Özgüner, "Sliding mode control of a class of underactuated systems", Automatica Vol.44, pp: 233 – 241, 2008.
- [87] C. Yang, Z. Li, R. Cui, and B. Xu, "Neural Network-Based Motion Control of an Underactuated Wheeled Inverted Pendulum Model", IEEE Trans. on neural networks and learning systems, 2014.
- [88] R. Yu, Q. Zhu, G. Xia, Z. Liu, "Sliding mode tracking control of an underactuated surface vessel", IET Control Theory and Applications, Vol.6, pp: 461–466, 2012.

- [89] H. Y. Yue and J. M. Li, “Adaptive fuzzy tracking control for a class of nonlinear systems with unknown distributed time-varying delays and unknown control directions”, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, Vol. 11 (1), pp: 1-25, February 2014.
- [90] D. Zehar, K. Benmahammed, K. Behih, “Control for Underactuated Systems Using Sliding Mode Observer”, *International Journal of Control, Automation and Systems* Vol.16 (2), pp: 739-748, 2018.
- [91] D. Zehar, K. Benmahammed, “Optimal sliding mode control of the pendubot”, *International Research Journal of Computer Science and Information Systems*, Vol.2 (3), pp: 45-51, 2013.
- [92] D. Zehar, K. Benmahammed, K. Behih and A. Cherif, “Stabilization of an underactuated system using synergetic control”, *The 3rd international conference on power electronics and their applications ICPEA*, ElDjelfa, Algeria, 2017.
- [93] D. Zehar, K. Benmahammed, K. Behih and A. Cherif, “Terminal Synergetic Control of Crane System”, *Journal of Engineering and Applied Sciences*, Vol.13 (3), pp: 3308-3313, 2018.
- [94] D. Zehar, K. Benmahammed, A. Chérif and K. Behih, “Fast Terminal Synergetic Control of Underactuated System”, *15th Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*, Hammamet, Tunisia, 2018.