

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS SETIF-1

FACULTE DE TECHNOLOGIE

THESE

Présentée au département d'Electronique

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Filière : Electronique

Option : Electronique

Par

BOUBEZOULA Mabrouk

THEME

***Modélisation et commande d'un manipulateur
mobile à roues***

Soutenue le 02 Mai 2019 devant le Jury:

FERHAT HAMIDA Abdelhak	Professeur	Univ. F. Abbas Sétif 1	Président
HASSAM Abdelouahab	Professeur	Univ. F. Abbas Sétif 1	Directeur de thèse
SAIDI Lamir	Professeur	Univ. Batna 2	Examineur
SLIMANE Noureddine	Professeur	Univ. Batna 2	Examineur

Dédicaces

Je dédie ce travail

À la mémoire de mes parents

Remerciements

Je remercie tout d'abord **ALLAH** de m'avoir prêté santé et volonté pour mener à terme cette thèse du doctorat.

Je remercie chaleureusement toutes les personnes qui m'ont aidé pendant l'élaboration de ma thèse et notamment mon directeur de thèse **Pr. HASSAM Abdelouahab**, pour son intérêt et son soutien, sa grande disponibilité et ses nombreux conseils durant la réalisation de ma thèse.

Je tiens également à remercier vivement les membres de jury pour avoir accepté d'évaluer cette thèse :

Monsieur **FERHAT HAMIDA Abdelhak**, Professeur à l'Université de Sétif 1, d'avoir accepté de juger mon travail et de présider le jury de soutenance de cette thèse.

Messieurs **SAIDI Lamir**, Professeur à l'Université de Batna 2, et **SLIMANE Noureddine**, Professeur à l'Université de Batna 2, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être les examinateurs de cette thèse.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Dr. **BOUTALBI Oussama**, Dr. **BOUKEAZATA Boualem** et Pr. **BOUKTHIR Tarek** pour leurs conseils au cours de l'élaboration de cette thèse.

Enfin, pour tous ceux qui, de près ou de loin, ont rendu ce travail possible.

Table des matières

Dédicaces	ii
Remerciements.....	iii
Table des matières	iv
Liste des figures	VII
Liste des tableaux	X
INTRODUCTION GENERALE	1
<i>CHAPITRE I</i>	6
MODELISATION D'UN MANIPULATEUR MOBILE A ROUES.....	6
I.1. Introduction.....	6
I.2. Bras manipulateur	6
I.2.1. Préliminaires	6
I.2.2. Description d'un bras manipulateur	9
I.2.3. Modélisation d'un bras manipulateur	10
I.2.3.1. Modèle géométrique direct	11
I.2.3.2. Le modèle géométrique inverse	12
I.2.3.3. Modèle cinématique direct	12
I.2.3.4. Modèle cinématique inverse.....	12
I.2.3.5. Modèle dynamique direct	12
I.2.3.6. Exemple illustratif	16
I.3. Les robots mobiles à roues	20
I.3.1. Types des roues	21
I.3.2. Les contraintes de roulement sans glissement des roues sur le sol:.....	22
I.3.3. Robot mobile à deux roues différentielles :	22
I.4. Modélisation d'un manipulateur mobile à roues	28
I.4.1. Exemple illustratif.....	31
I.5. Conclusion	34
<i>CHAPITRE II</i>.....	35
PLATITUDE ET SYSTEMES PLATS.....	35
II.1. Introduction	35
II.2. La platitude différentielle.....	35
II.2.1. Définitions.....	35

II.2.2. Equivalence des systèmes	36
II.2.3. Equivalence de Lie-Bäcklund	36
II.2.4. Système plat.....	37
II.3. Changement du comportement dynamique par rétroaction.....	38
II.3.1. Linéarisation par bouclage statique	38
II.3.2. Linéarisation par bouclage dynamique.....	39
II.3.3. La platitude et linéarisation.....	39
II.4. La platitude et la planification du mouvement.....	39
II.4.1. Planification du mouvement sans contrainte.....	40
II.4.1.1. Trajectoires de repos à repos	41
II.4.1.2. Le problème de suivi.....	42
II.5. Exemples	43
II.5.1. Masses-ressorts	43
II.5.2. Portique en 2D	44
II.5.3. Robot mobile à deux roues différentielles.....	47
II.5.4. Exemple d'application : manipulateur mobile plan	48
II.6. Conclusion.....	52

CHAPITRE III..... 53

MODE GLISSANT 53

III.1. Introduction.....	53
III.2. Préliminaires	53
III.2.1. Systèmes à structure variable et modes glissants	53
III.2.2. Condition de Fillipov	54
III.3. Commande par mode glissant (SMC)	55
III.3.1. Formulation de problème.....	55
III.3.2. Conception de la commande par mode glissant (SMC).....	55
III.3.2.1. Surface de glissement.....	55
III.3.2.2. Loi de commande.....	58
III.3.2.3. Commande par mode glissant à base de la commande équivalente	59
III.4. Problème de chattering	61
III.4.1. Mode glissant d'ordre deux.....	61
III.4.2. Approche par couche limite.....	63
III.4.3. Approche basée sur l'observateur.....	63
III.5. Méthode de gain dépendant de l'état	63
III.6. Conclusion	67

CHAPITRE IV	68
COMMANDE ROBUSTE D'UN MANIPULATEUR MOBILE A	
ROUES	68
Introduction.....	68
IV.1. Commande d'un Robot mobile à roues différentielles.....	68
IV.1.1. Modélisation et Formulation du problème.....	68
IV.1.2. Concept de la platitude pour le robot mobile.....	70
IV.1.3. Spécification de la tâche et de la planification de la trajectoire.....	71
IV.1.3.1. Planification du chemin.....	71
IV.1.3.2. Planification de trajectoires.....	74
IV.1.4. Conception du contrôleur et analyse de stabilité.....	76
IV.1.5. Validation expérimentale.....	79
IV.2. Manipulateur mobile.....	86
IV.2.1. Modélisation cinématique du manipulateur mobile à roues.....	86
IV.2.2. Concept de la platitude du MMR.....	88
IV.2.3. Approche de la platitude.....	88
IV.2.4. Planification des trajectoires.....	89
IV.2.4.1. Planification de trajectoire pour la plate-forme mobile :.....	89
IV.2.4.2. Planification de trajectoire du bras manipulateur planaire :.....	89
IV.2.5. Conception des contrôleurs basé sur le modèle cinématique.....	90
IV.2.6. Résultats de simulation.....	91
IV.3. Commande platitude-robuste basée sur le modèle dynamique du robot manipulateur.....	95
IV.3.1. Développement du contrôleur.....	95
IV.3.2. Résultats de simulations.....	95
IV.4. Conclusion.....	97
CONCLUSION GENERALE	99
ANNEXE A	101
Bibliographies.....	106

Liste des figures

Figure I.1 Représentation symbolique des articulations rotoïde et prismatique du robot.....	7
Figure I.2 Les différents types de chaînes des bras manipulateurs.	9
Figure I.3 Description d'un bras manipulateur à chaîne ouverte.	9
Figure I.4 les paramètres de Denavit-Hartenberg.	10
Figure I.5 Caractéristiques du $i^{\text{ème}}$ segment d'un robot manipulateur à chaîne ouverte.....	13
Figure I.6 Un bras manipulateur planaire de 2ddl.....	16
Figure I.7 Modèle simplifié d'un robot mobile.....	21
Figure I.8 Robot mobile à roues différentielles.....	23
Figure I.9 Manipulateur mobile.	31
Figure II.1 Système masse-ressort	43
Figure II.2 Portique en deux dimensions.	44
Figure II.3 Robot mobile à deux roues différentielles.	47
Figure II.4 Manipulateur mobile plan.	49
Figure II.5 Le schéma bloc du contrôleur basé sur la platitude.	51
Figure II.6 Suivi de trajectoire de la plate-forme mobile.....	51
Figure II.7 Erreur de suivi.	52
Figure II.8 Suivi de trajectoire des variables articulaires : θ_1, θ_2	52
Figure II.9 Erreur de suivi.	52
Figure III.1 Représentation d'un VSS contrôlé.....	54
Figure III.2 la condition de Filippov.	54
Figure III.3 l'idée de mode glissant.	57
Figure III.4 Structure de régulation par commutation au niveau de l'organe de commande d'état.	58
Figure III.5 Structure de régulation par commutation au niveau de la contre réaction d'état.	58
Figure III.6 Structure de régulation par ajout de la commande équivalente.	59
Figure III.7 Fonction <i>sign</i>	60
Figure III.8 Phénomène de chattering.	61
Figure III.9 Twisting Algorithme pour l'atténuation du chattering.	62

Figure III.10 Couche limite.....	63
Figure III.11 Trajectoire du système pour $M_0 = 4$ et les conditions initiales $(x_1, x_2) = (2, 3)$	65
Figure III.12 Trajectoire du système pour $M_0 = 4$ et les conditions initiales $(x_1, x_2) = (4, 4)$	65
Figure III.13 Trajectoire du système pour $M_0 = 7$ et les conditions initiales $(x_1, x_2) = (4, 4)$	66
Figure III.14 Trajectoire du système pour $M_0 = 2$ et les condition initial $(x_1, x_2) = (3, 3)$	66
Figure III.15 Trajectoire du système pour $M_0 = 2$ et les conditions initiales $(x_1, x_2) = (10, 10)$.	67
Figure IV.1 Robot mobile à deux roues différentielles.....	69
Figure IV.2 Exemples des chemins générés avec courbes de Bézier de degré cinq en modifiant les points de contrôle.....	73
Figure IV.3 Profile de mouvement et ses dérivés	75
Figure IV.4 Le prototype Pioneer 3DX (vue arrière).....	79
Figure IV.5 Poursuite de la trajectoire du robot.....	82
Figure IV.6 Erreur de suivi de trajectoire sans perturbation.....	82
Figure IV.7 Suivi de la trajectoire avec perturbation: (a) Perturbation à amplitude aléatoire de valeur 0.03. (b) trajectoire du robot. (c) Erreur de suivi.	83
Figure IV.8 Suivi de la trajectoire avec perturbation: (a) Perturbation à amplitude aléatoire de valeur 0.04. (b) trajectoire du robot. (c) Erreur de suivi.	84
Figure IV.9 Résultats des tests pratiques.	86
Figure IV.10 Un modèle simplifié d'un MMR.....	87
Figure IV.11 suivi de la trajectoire (avec les points de contrôle $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (2, 0)$, $P_3 = (1, 5)$, $P_4 = (2, 5)$, $P_5 = (3, 5)$) : (a) trajectoire du robot mobile. (b) l'erreur de suivi. ...	93
Figure IV.12 suivi de la trajectoire (avec les points de contrôle $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (2, 0)$, $P_2 = (4, 0)$, $P_3 = (-1, 5)$, $P_4 = (1, 5)$, $P_5 = (3, 5)$): (a) trajectoire du robot mobile. (b) l'erreur de suivi.	94
Figure IV.13 Suivi de la trajectoire (avec les points de contrôle $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (3, 0)$, $P_2 = (5, 0)$, $P_3 = (-2, 5)$, $P_4 = (0, 5)$, $P_5 = (3, 5)$): (a) trajectoire du robot mobile. (b) L'erreur de suivi.	94
Figure IV.14 Suivi de la trajectoire: (a) trajectoire pour θ_3 . (b) Erreur de suivi.....	94
Figure IV.15 Suivi de la trajectoire: (a) trajectoire pour θ_4 . (b) Erreur de suivi.....	94
Figure IV.16 Suivi de la trajectoire: (a) trajectoire pour θ_3 . (b) Erreur de suivi.....	96

Figure IV.17 Suivi de la trajectoire:(a) trajectoire pour θ_4 . (b) Erreur de suivi.....96

Figure IV.18 Entrées de commande.....97

Liste des tableaux

Tableau I.1 les matrices de rotation autour de chaque axe.....	7
Tableau I.2 Les paramètres D-H du robot.....	16
Tableau I.3 les différents types de roues.....	21
Tableau I.4 Paramètres des roues robot mobile Pioneer 3DX.....	23
Tableau IV.1 Relation sorties plate et l'espace d'état du robot mobile.....	71
Tableau IV.2 Tangente au point de départ (cible) pour les six cas de la Figure IV.2.....	73
Tableau IV.3 les conditions initiales pour les sorties plates.....	76
Tableau IV.4 Conditions initiales pour les sorties plates.....	90

INTRODUCTION GENERALE

La robotique est un facteur dominant au développement de la société humaine au cours des années. C'est un domaine qui nécessite la synergie d'une variété de domaines scientifiques tels que l'ingénierie mécanique, électrique, électronique, informatique. Dans cette symbiose, les besoins humains et les préférences devraient être principalement respectés, incorporés et mis en œuvre.

Traditionnellement, les robots manipulateurs sont attachés au sol ou à des bases fixes. L'espace de travail d'un tel manipulateur a un volume limité qui peut être atteint par l'organe terminal du manipulateur. Les tâches doivent être soigneusement structurées de manière à ce que le manipulateur puisse atteindre les pièces à assembler par exemple. Ceci est généralement réalisé au moyen de courroies transporteuses ou d'autres dispositifs de transport.

Il y a eu beaucoup d'intérêt pour les robots mobiles, qui sont généralement une plate-forme mobile ou un véhicule, équipé d'un ordinateur et de divers capteurs. En plus ce type de robots est caractérisé par un espace de travail large et a la capacité de se déplacer d'un endroit vers un autre dans un environnement inconnu. Malgré ces avantages, les robots mobiles restent limités du point de vue manipulation des objets.

Le sujet de cette thèse s'inscrit dans le cadre de la modélisation des manipulateurs mobiles à roues. Un manipulateur mobile se compose d'un robot manipulateur monté sur une plate-forme mobile à roues (ou d'un robot mobile). Il combine la capacité de manipulation agile offerte par le bras manipulateur et la mobilité offerte par la plate-forme mobile.

Ces dernières années, on s'est intéressé de plus en plus à l'application des manipulateurs mobiles à des tâches pratiques de positionnement ou d'assemblage. Ces tâches exigent une très grande précision et stabilité de la performance. Le but de la tâche de positionnement est de trouver une trajectoire désirée, exprimée en coordonnées généralisées, le long de laquelle le manipulateur mobile se déplace de sa configuration initiale vers une configuration finale.

Au-delà de la pertinence évidente des manipulateurs mobiles à roues (MMR) dans des applications industrielles et de service, son problème de contrôle de mouvement a suscité l'intérêt des chercheurs en raison de ses défis théoriques et pratiques [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7]. En fait, ces systèmes sont des exemples typiques de systèmes mécaniques sous-actionnés avec des contraintes holonomes et non holonomes[8]. Conventionnellement, les algorithmes de commande des robots sont découplés en deux étapes, en générale, la planification de trajectoire et le suivi de trajectoire. Cette division a été adoptée principalement comme un moyen d'alléger

les difficultés dans le traitement de la dynamique des manipulateurs complexes [9]. Les trajectoires planifiées doivent être sûres, lisses, adaptables aux environnements et satisfont les contraintes du système et les algorithmes de contrôle de suivi doivent être suffisamment stables, précis et robustes [10].

De nombreux chercheurs se sont intéressés à la fois à la planification des trajectoires et à la conception du contrôle de suivi. Les auteurs dans [11] ont proposé une technique de contrôle optimale pour la planification de trajectoire d'un robot mobile spatial dans des environnements encombrés. Jiao *et al* [12] ont proposé une approche de planification de trajectoire sans collision basée sur la courbe de Bézier. Dans [13], un contrôleur de suivi adaptatif robuste a été utilisé pour traiter les bornes supérieures inconnues des incertitudes et des perturbations des paramètres. Boukattaya *et al* [14] ont abordé le problème de contrôle du suivi de trajectoire des manipulateurs mobiles soumis à des contraintes non-holonomes avec la présence de perturbations externes et d'incertitudes dynamiques en utilisant un contrôle adaptatif basé sur la passivité. Karray *et al* [15] ont proposé un estimateur adaptatif tel que la vitesse du manipulateur mobile converge vers la trajectoire désirée et ont appliqué un contrôleur flou pour éviter la collision. Une méthodologie intégrée de planification et de contrôle a été présentée pour deux types différents de manipulateurs mobiles planaires sous-actionnés, avec une base mobile à deux roues différentielles et une base mobile de type voiture, respectivement [16]. Les auteurs dans [17] abordent le problème du contrôle de position des manipulateurs mobiles opérant dans l'espace de travail avec des contraintes d'état. Le problème de contrôle de position en présence d'incertitudes cinématiques et dynamiques est résolu en se basant sur la théorie de stabilité de Lyapunov. De nouvelles lois adaptatives, étendant la capacité des algorithmes classiques à traiter à la fois les incertitudes cinématiques holonomiques et non holonomiques, sont proposées. Le même auteur dans [18] propose une autre solution pour le même problème, utilisant une nouvelle forme du mode glissant terminal (TSM). Les auteurs dans [19] traitent le problème de suivi de trajectoire pour les manipulateurs mobiles non-holonomes. Ce problème est décomposé en deux parties indépendantes : l'organe terminal du bras manipulateur doit suivre une trajectoire décrite par rapport à la plate-forme se déplaçant en continu le long de la trajectoire désirée située sur le plan. L'objectif présenté dans l'article [20] est la planification de trajectoire point-à-point pour les manipulateurs mobiles basée sur une méthode d'optimisation en tenant compte des contraintes holonomiques et non holonomiques et des contraintes d'inégalité résultant de limitations mécaniques. L'article [21] présente le contrôle d'un manipulateur mobile non-holonyme utilisant la linéarisation par rétroaction et la double algèbre quaternion (dual

quaternion algebra). Le contrôleur agit comme un générateur de trajectoire pour l'organe terminal. Les signaux d'entrée pour la base mobile non-holonome et le bras manipulateur sont générés en utilisant le pseudo-inverse de la matrice jacobienne du système entier. Le contrôleur proposé est basé sur une fonction de Lyapunov pour assurer la stabilité du système. Xia *et al* [22] ont proposé une méthode de contrôle de suivi efficace basée sur le Neuro-Flou (FNN) et le filtre de Kalman étendu (EKF) pour qu'un manipulateur mobile à roues suive, efficacement, la trajectoire de référence. Zhong *et al* [23] ont proposé d'utiliser une combinaison de contrôle flou adaptatif et l'approche backstepping basée sur un modèle dynamique pour résoudre le problème de suivi de trajectoire en présence de glissement sur le sol.

Dans ce domaine de recherche, une technique très répandue qui combine la planification du mouvement et la conception de contrôle est l'approche de la platitude, qui est introduite pour la première fois par Fliess[24] [25]. La platitude peut être considérée du point de vue de la planification de trajectoire ainsi que d'une méthode de linéarisation par rétroaction exacte d'un point de vue de contrôle de suivi[26]. Les auteurs dans [27] ont proposé un schéma de conception de contrôle multi-variable utilisé pour le suivi de trajectoire basé sur le modèle cinématique d'un robot mobile. Veslin *et al* [28] ont appliqué les propriétés de la platitude différentielle pour le suivi de trajectoire d'un véhicule non-holonome. Rahee Walambe [29] s'est concentré sur la génération et le suivi de trajectoires basées sur les splines pour le robot mobile de type véhicule qui est de nature différentiellement plat. Une méthodologie intégrée de planification et de contrôle a été présentée pour deux types différents de manipulateurs mobiles planaires sous-actionnés, avec une base mobile à deux roues différentielles et une base mobile de type voiture, [30].

Indépendamment de ses capacités, l'un des principaux inconvénients des stratégies de commande basées sur la linéarisation exacte par rétroaction, comme dans le cas des systèmes à sortie plate, est sa sensibilité aux perturbations externes et à la dynamique non modélisée bornée. D'un point de vue de commande, les techniques de contrôle adaptatif [31] et la commande par mode glissant (SMC)[32] apportent des outils puissants pour résoudre des problèmes de robustesse pratique et ils prouvent leur efficacité dans de nombreux domaines d'application. L'algorithme SMC est principalement caractérisé par son haut niveau de précision et de robustesse contre les dynamiques non modélisées et les perturbations externes[33].

Notre travail concerne les approches de contrôle découplé pour la commande de mouvement d'un MMR. D'un côté, les courbes de Bézier paramétrées sont utilisées pour définir l'évolution géométrique du robot dans son environnement. Le choix de ces courbes, qui ont une

caractéristique lisse et flexible, permettent de définir des tâches sûres et complexes d'un WMM. Les coordonnées cartésiennes du mouvement peuvent être obtenues directement en utilisant les courbes de Bézier paramétrées et les conditions initiales du mouvement pour assurer une interpolation efficace entre la position de départ et la position cible du robot. On peut alors obtenir la représentation temporelle de la trajectoire désirée en définissant les paramètres en fonction du temps. Cependant, il est difficile de réguler la vitesse du robot le long de cette trajectoire, car ces paramètres et la longueur de la courbe ne sont pas linéairement liées. Ces difficultés peuvent être simplifiées si les courbes planifiées sont paramétrées en fonction de leur longueur d'arc. Après avoir décrit le paramétrage de la courbe en longueur d'arc, une fonction lisse est introduite pour spécifier l'évolution dynamique du robot le long de la trajectoire désirée. D'un autre côté des trajectoires polynomiales sont planifiées pour les coordonnées généralisées du bras manipulateur.

La première étape de la conception de la commande développée dans ce travail consiste à définir la surface de glissement dans l'espace de sortie plate du système. Dans ce cas, le système est représenté par une simple chaîne de deux intégrateurs découplés, ce qui simplifie le choix d'une telle surface de commutation. Ensuite, des entrées de commande discontinues, avec des gains adaptatifs, sont introduites comme deuxième étape pour ramener la surface de glissement à zéro en temps fini, malgré les incertitudes du modèle et les perturbations externes. En plus de sa grande précision de suivi et de sa robustesse, la motivation derrière l'utilisation du SMC avec un gain adaptatif est la réduction des phénomènes de chattering qui représente le principal inconvénient de l'algorithme SMC[32].

Cette thèse est articulée autour de quatre chapitres qui sont organisés de la manière suivante.

Le **Chapitre un** est consacré à la modélisation dynamique d'un manipulateur mobile à roues (MMR). En considérant que le manipulateur mobile est composé d'un bras manipulateur monté sur une plate-forme mobile, on aborde le chapitre par la modélisation géométrique, cinématique et dynamique du bras manipulateur. Nous présenterons ensuite la plate-forme mobile à deux roues différentielles et termineront par la modélisation du système entier.

Le **Chapitre deux** comporte la platitude différentielle et les systèmes plats. Tout d'abord, on donne une brève introduction sur la platitude différentielle et l'équivalence des systèmes qui est la base de cette théorie. Quelques systèmes mécaniques plats tels que masse-ressort, portique en 2D et le robot mobile à deux roues différentielles sont présentés.

Le mode glissant d'ordre un est présenté dans le **chapitre trois** où on trouve une formulation

du problème. Une conception d'un contrôleur du mode glissant basé sur la commande équivalente est proposée. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à la conception d'un contrôleur basé sur la méthode de gain dépendant de l'état pour diminuer le chattering.

Le **quatrième chapitre** est réservé au détail de la contribution de cette thèse. Dans un premier temps, on a abordé le problème de planification des mouvements de robots mobiles avec des contraintes géométriques et dynamiques. Une commande à base du mode glissant est ensuite proposée pour assurer une exécution précise des tâches planifiées. Une étude comparative a été faite pour prouver l'efficacité de l'approche proposée. Les algorithmes développés ont été validés expérimentalement en utilisant le prototype du laboratoire *Pioneer 3DX*.

Une extension de cette approche est finalement élaborée pour assurer une manipulation efficace du manipulateur mobile MMR. On terminera ce travail par une conclusion générale et quelques perspectives sur les futurs travaux.

CHAPITRE I

MODELISATION D'UN MANIPULATEUR MOBILE A ROUES

I.1. Introduction

De nos jours, de nouvelles applications robotiques apparaissent, où les humains et les robots collaborent dans de multiples tâches, allant des tâches ménagères aux interventions chirurgicales. Ces applications traitent des interactions complexes entre l'homme et l'environnement, nécessitant la modélisation des robots et des techniques de contrôle pour améliorer les performances[34].

Ce chapitre est consacré à la modélisation géométrique, cinématique ainsi que la modélisation dynamique d'un manipulateur mobile à roues qui se déplace sur une plate-forme mobile à deux roues différentielles. On va commencer par la modélisation d'un bras manipulateur à chaîne ouverte, ensuite une plate-forme mobile se basant sur le nombre et le type des roues sur lesquelles elle se déplace, puis le système entier (manipulateur mobile) et nous terminerons par un exemple explicatif d'un manipulateur mobile plan, qui sera exploité dans le dernier chapitre.

I.2. Bras manipulateur

Cette partie est axée sur la description de la structure et la modélisation d'un bras manipulateur série qui est constitué d'un ensemble de segments relié entre eux par des articulations.

I.2.1. Préliminaires

- *Articulation*

L'articulation est une jonction de deux segments de robot leur permettant une mobilité relative. Les articulations sont en général rotatives (rotoïde) ou linéaires (prismatiques). Une articulation rotoïde permet une rotation relative entre deux liens. Une articulation prismatique permet un mouvement linéaire entre deux liens. Un exemple pratique des deux types d'articulations est présenté dans la Figure I.1.

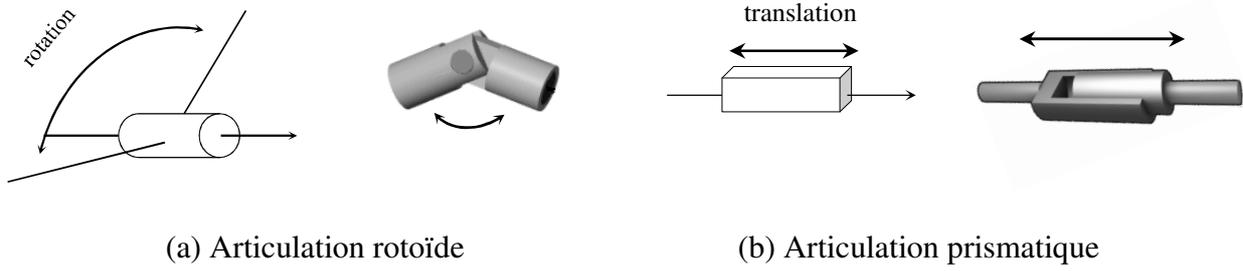


Figure I.1 Représentation symbolique des articulations rotoïde et prismatique du robot.

- **Translation ou Déplacement**

La position d'un repère i par rapport à un repère j peut être donnée par le vecteur suivant

$${}^jP_i = \begin{bmatrix} {}^jP_i^x & {}^jP_i^y & {}^jP_i^z \end{bmatrix}^T$$

Les éléments de ce vecteur sont les coordonnées cartésiennes de l'origine o_i par rapport au repère j .

- **Orientation ou Rotation**

L'orientation d'un repère i par rapport à un repère j peut être donnée par la relation des vecteurs unitaire de base $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ en fonction des vecteurs unitaire de base $(\vec{x}_j, \vec{y}_j, \vec{z}_j)$, ce qui donne une matrice d'ordre 3×3 connue sous le nom matrice de rotation et notée jR_i . Les éléments de la matrice jR_i sont le résultat du produit scalaire des vecteurs de base des deux repères.

$${}^jR_i = \begin{pmatrix} \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j & \vec{y}_i \cdot \vec{x}_j & \vec{z}_i \cdot \vec{x}_j \\ \vec{x}_i \cdot \vec{y}_j & \vec{y}_i \cdot \vec{y}_j & \vec{z}_i \cdot \vec{y}_j \\ \vec{x}_i \cdot \vec{z}_j & \vec{y}_i \cdot \vec{z}_j & \vec{z}_i \cdot \vec{z}_j \end{pmatrix} \quad (\text{I.1})$$

Les rotations élémentaires d'un repère i autour des axes x_j , y_j et z_j sont illustrées dans le Tableau I.1

Matrice de rotation autour de l'axe x_j	Matrice de rotation autour de l'axe y_j	Matrice de rotation autour de l'axe z_j
$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$	$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tableau I.1 les matrices de rotation autour de chaque axe.

Remarque I-1 : en résumé, jR_i est la matrice de rotation qui transforme un vecteur exprimé dans le repère de coordonnées i en un vecteur exprimé dans le repère de coordonnées j .

- **Matrice de transformation homogène**

Avec des transformations homogènes, les vecteurs de position et les matrices de rotation sont combinés dans une notation compacte. Tout vecteur ${}^i r$ exprimé dans un repère de coordonnées i peut être exprimé par rapport à un repère de coordonnées j si la position et l'orientation du i sont connues par rapport au repère j .

$${}^j r = {}^jR_i {}^i r + {}^jP_i$$

Cette équation peut être écrite sous la forme

$$\begin{pmatrix} {}^j r \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^jR_i & {}^jP_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^i r \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.2})$$

où : ${}^jT_i = \begin{pmatrix} {}^jR_i & {}^jP_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de transformation homogène et $\begin{pmatrix} {}^j r \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} {}^i r \\ 1 \end{pmatrix}$ sont la

représentation homogène des vecteurs de position ${}^j r$ et ${}^i r$.

La matrice jT_i donne les coordonnées d'un vecteur défini dans un repère i par rapport au repère j . Son inverse iT_j transforme les vecteurs d'un repère j vers un repère i .

$${}^jT_i^{-1} = {}^iT_j = \begin{pmatrix} {}^jR_i^T & -{}^jR_i^T {}^jP_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.3})$$

Remarque I-2 : la matrice de transformation homogène pour une simple rotation, notée *Rot*, autour d'un axe, prenons par exemple une rotation θ autour de l'axe \bar{z} , est

$$Rot(\bar{z}, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.4})$$

même chose, la matrice de transformation homogène pour une simple translation, notée *Trans*, le long d'un axe, par exemple une translation d le long de l'axe \bar{x} , est

$$Trans(\bar{x}, d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.5})$$

- **Types de chaînes d'un bras manipulateur**

La structure mécanique d'un robot est une chaîne de corps rigides assemblés par des liaisons, les chaînes peuvent être soit ouvertes simples, fermées, arborescentes ou parallèles.

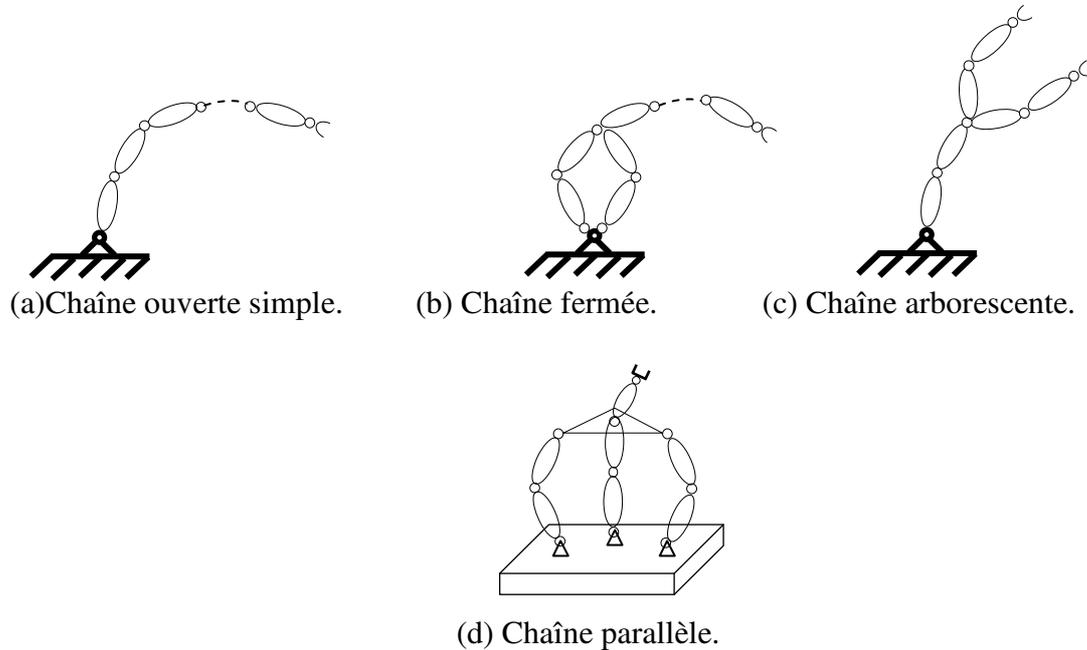


Figure I.2 Les différents types de chaînes des bras manipulateurs.

- **Degré de liberté d'un bras manipulateur à chaîne ouverte**

Le nombre de degrés de liberté d'un bras manipulateur à chaîne ouverte est égal au nombre total d'articulations contrôlées indépendamment.

I.2.2. Description d'un bras manipulateur

Un bras manipulateur est constitué, en général, des segments (corps rigides) reliés entre eux par des liaisons (articulations) rotoïde ou prismatique.

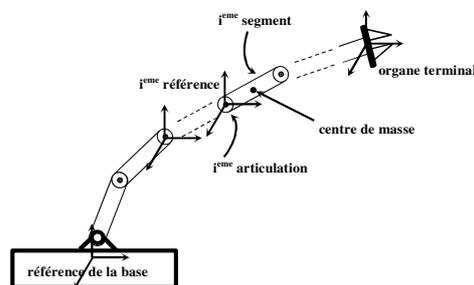


Figure I.3 Description d'un bras manipulateur à chaîne ouverte.

la convention la plus utilisée pour sélectionner les repères liés à chaque articulation, pour permettre la modélisation d'un bras manipulateur, est la convention Denavit-Hartenberg connue sous l'abréviation D-H [35]. Cette convention peut être représentée dans la figure suivante :

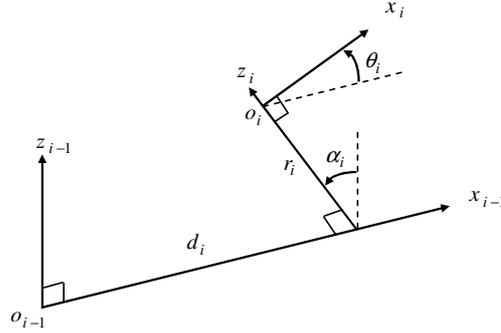


Figure I.4 les paramètres de Denavit-Hartenberg.

où $(o_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ et (o_i, x_i, y_i, z_i) sont les repères lié, respectivement, à la $(i-1)^{eme}$ et la i^{eme} articulations du robot.

Les paramètres de D-H sont définis comme suit :

- l'axe $y_i = z_i \wedge x_i$
- z_i axe de la liaison/l'articulation.
- x_i perpendiculaire commune entre z_i et z_{i-1} .
- α_i l'angle entre z_{i-1} et z_i mesuré autour de x_{i-1} .
- r_i la distance entre z_{i-1} et z_i mesurée suivant/le long de l'axe x_{i-1} .
- θ_i l'angle entre x_{i-1} et x_i mesuré autour de z_{i-1} .
- d_i la distance entre x_{i-1} et x_i mesurée le long de l'axe z_{i-1} .

I.2.3. Modélisation d'un bras manipulateur

Un bras manipulateur peut être défini par un vecteur $q_b = [q_{b_1}, q_{b_2}, \dots, q_{b_{n_b}}]^T$ de n_b coordonnées généralisées, où q_{b_i} (où $i = 1 \dots n_b$) sont les variables articulaires. La position de l'organe terminal (OT) est définie par un vecteur $X_b = [x_{b_1}, x_{b_2}, \dots, x_{b_{m_b}}]^T$ de m_b coordonnées opérationnelles, où x_{b_i} (où $i = 1 \dots m_b$) représente la position et l'orientation de l'OT dans l'espace. En se basant sur la convention D-H, la matrice de transformation homogène entre deux repères $i-1$ et i est donnée par le produit matriciel suivant :

$$\begin{aligned}
 {}^i T_{i-1} &= \text{Trans}_{z_{i-1}, d_i} \text{Rot}_{z_{i-1}, \theta_i} \text{Trans}_{x_{i-1}, r_i} \text{Rot}_{x_{i-1}, \alpha_i} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & r_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & r_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I.6)
 \end{aligned}$$

$$Rot_{x_{i-1}, \alpha_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ la matrice de rotation autour de l'axe X.}$$

$$Trans_{x_{i-1}, r_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ la matrice de translation le long de l'axe X.}$$

$$X.Rot_{z_{i-1}, \theta_i} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 & 0 \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ la matrice de rotation autour de l'axe Z.}$$

$$Trans_{z_{i-1}, d_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ la matrice de translation le long de l'axe Z.}$$

L'équation (I.6) peut être réécrite sous la forme

$${}^i T_{i-1} = \begin{bmatrix} {}^i R_{i-1} & {}^i P_{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I.7)$$

où ${}^i R_{i-1}$ est la matrice de rotation entre le repère i et $i-1$. ${}^i P_{i-1}$ donne la position du repère i par rapport au repère $i-1$.

Dans le cas général, pour un bras manipulateur à chaîne ouverte de n variables articulaires, la matrice de transformation homogène qui donne la position et l'orientation de l'OT par rapport à la base du robot est donnée par le produit matriciel:

$${}^n T_0 = {}^n T_{n-1} {}^{n-1} T_{n-2} \dots {}^1 T_0 \quad (I.8)$$

1.2.3.1. Modèle géométrique direct

Le modèle géométrique direct d'un bras manipulateur est la transformation entre l'espace opérationnel (où la position X_b de l'organe terminal est définie) et l'espace articulaire (où la configuration q_b du robot est définie).

$$X_b = f_b(q_b) \quad (I.9)$$

Compte tenu de la convention D-H, le modèle géométrique est donné par le produit matriciel suivant

$$X_b = {}^n T_0 X^{OT} \quad (\text{I.10})$$

où ${}^n T_0$ donné dans l'équation (I.8) et X^{OT} est la position de l'organe terminal par rapport à la référence n .

1.2.3.2. Le modèle géométrique inverse

Le modèle géométrique inverse exprime les variables articulaires q_b en fonction des variables opérationnelles X_b , c'est-à-dire

$$q_b = g_b(X_b) \quad (\text{I.11})$$

Il n'existe pas une méthode standard applicable pour résoudre le problème de la géométrie inverse, il existe quelques méthodes analytiques et numériques pour résoudre un tel problème, on peut se référer à[36].

1.2.3.3. Modèle cinématique direct

Le modèle cinématique direct est la transformation entre les vitesses opérationnelles \dot{X}_a et les vitesses généralisées \dot{q}_a comme indique l'équation suivante:

$$\dot{X}_b = J_b(q_b) \dot{q}_b \quad (\text{I.12})$$

$J_b(q_b) = \frac{df_{b_i}(q_{b_i})}{dq_{b_i}}$ est la matrice jacobienne de dimension $m_b \times n_b$.

1.2.3.4. Modèle cinématique inverse

Le modèle cinématique inverse donne les vitesses articulaires \dot{q}_b en fonction des vitesses opérationnelles \dot{X}_b , comme le montre l'équation suivante :

$$\dot{q}_b = J_b^{-1}(q_b) \dot{X}_b \quad (\text{I.13})$$

1.2.3.5. Modèle dynamique direct

Le modèle dynamique exprime la relation entre les couples/forces $Q_{b_i}(\tau_{b_i} / F_{b_i})$ articulaires en fonction des accélérations articulaires $\ddot{q}_{b_i}(\ddot{\theta}_{b_i} / \ddot{d}_{b_i})$. Les deux techniques les plus utilisées pour la modélisation dynamique d'un système robotique sont : le formalisme Euler-Newton- ou Euler-Lagrange, ce dernier sera utilisé dans la suite de ce travail. Le Lagrangien est défini par la différence entre l'énergie cinétique du robot et son énergie potentielle.

$$L = E_c - E_p \quad (\text{I.14})$$

On considère un robot manipulateur à chaîne ouverte de n_b liaisons (rotoïde ou prismatique). le $i^{\text{ème}}$ segment du robot a les caractéristiques suivantes (voir Figure I.5) : q_i la variable articulaire ; m_i la masse, I_i le moment d'inertie (autour d'un axe à travers le centre de gravité et parallèle à l'axe z) ; l_i la longueur, l_{ci} la distance entre l'articulation i et le centre de masse du segment ; τ_i le couple ; g_i la gravité le long de l'axe vertical, E_{ci}, E_{pi} l'énergie cinétique et potentielle respectivement. P_{ci} est le vecteur des coordonnées opérationnelles du centre de gravité du segment.

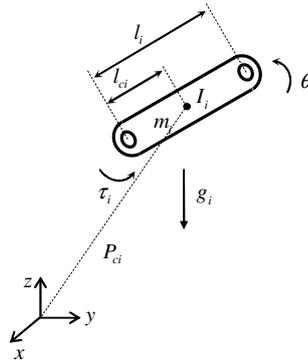


Figure I.5 Caractéristiques du $i^{\text{ème}}$ segment d'un robot manipulateur à chaîne ouverte.

Les équations dynamiques du robot peuvent être développées en utilisant l'équation de Lagrange (I.14) pour chaque variable articulaire :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_{bi}, \quad i = 1, \dots, n_b \quad (\text{I.15})$$

où : $E_c = \sum_{i=1}^n E_{ci}$, $E_p = \sum_{i=1}^n E_{pi}$.

E_{ci}, E_{pi} : sont les énergies cinétique et potentielle pour le $i^{\text{ème}}$ segment du bras manipulateur et sont données par l'équation :

$$E_{ci} = \frac{1}{2} m_i v_{ci}^T v_{ci} + \frac{1}{2} \omega_i^T R_i I_i R_i^T \omega_i \quad (\text{I.16})$$

où v_{ci} et ω_i sont la vitesse linéaire et angulaire, R_i la matrice de rotation du segment i par rapport au repère de référence.

$$\begin{cases} v_{ci} = \dot{P}_{ci} = J_{v1}^i \dot{q}_1 + J_{v2}^i \dot{q}_2 + \dots + J_{vi}^i \dot{q}_i = J_v^i \dot{q} \\ \omega_i = J_{\omega 1}^i \dot{q}_1 + J_{\omega 2}^i \dot{q}_2 + \dots + J_{\omega i}^i \dot{q}_i = J_{\omega}^i \dot{q} \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

P_{ci} : est le vecteur de position du segment par rapport au repère de la base.

J_v^i et J_w^i sont les matrices jacobiennes pour chaque segment, données par

$$J_v^i = \begin{bmatrix} J_{v1}^i & J_{v2}^i & \dots & J_{vi}^i & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_w^i = \begin{bmatrix} J_{w1}^i & J_{w2}^i & \dots & J_{wi}^i & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} J_v^i \\ J_w^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{j-i} \times (p_{ci} - p_{j-1}) \\ z_{j-i} \end{bmatrix} \text{ pour une articulation rotoïde.}$$

$$\begin{bmatrix} J_v^i \\ J_w^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{j-i} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ pour une articulation prismatique.}$$

- L'énergie cinétique totale du robot manipulateur est

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (m_i v_{ci}^T v_{ci} + \omega_i^T R_i I_i R_i^T \omega_i) \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \sum_{i=1}^n \left[m_i J_v^{i T}(q) J_v^i(q) + J_w^{i T}(q) R_i I_i R_i^T J_w^i(q) \right] \dot{q} \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

- L'énergie potentielle est

$$E_p = \sum_{i=1}^n g^T p_{ci} m_i \quad (\text{I.19})$$

on substitue (I.18) et (I.19) dans le lagrangien du robot, on trouve

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \sum_{i=1}^n g^T p_{ci} m_i$$

après développement mathématique, l'équation du mouvement du robot devient

$$\sum_{j=1}^n M_{ij} \ddot{q}_{b_j} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_{b_k}} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{kj}}{\partial q_{b_i}} \right] \dot{q}_{b_k} \dot{q}_{b_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_{b_i}} = Q_{b_i} \quad (\text{I.20})$$

on définit le terme $c_{kji}(q)$ par

$$c_{kji}(q) = \frac{\partial M_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \quad \text{et} \quad g_k(q) = \frac{\partial E_p}{\partial q_k}.$$

donc l'équation (I.20) devient

$$\sum_{j=1}^n M_{ij}(q_b) \ddot{q}_{b_j} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ijk}(q_b) \dot{q}_{b_k} \dot{q}_{b_j} + g_i(q_b) = Q_{bi} \quad (\text{I.21})$$

en réécrivant (I.21) sous forme matricielle :

$$M(q_b) \ddot{q}_b + C(q_b, \dot{q}_b) \dot{q}_b + G(q_b) = Q_b \quad (\text{I.22})$$

où $q_b \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur des coordonnées généralisées, $M(q_b)$ matrice, d'ordre $n \times n$, d'inerties, $C(q_b, \dot{q}_b) \dot{q}_b$ vecteur, de degré n , des forces de centrefuge et Coriolis, $G(q_b)$ est le vecteur de force de gravité, Q_b vecteur de couple/force de contrôle.

Remarque I-3 [37]

Les elements de la matrice $C(q_b, \dot{q}_b)$ peuvent être calculés d'une autre manière en utilisant les symboles de Christoffel comme indiqué dans l'annexe A.

Le modèle dynamique décrit par l'équation (I.22) peut avoir les différentes propriétés suivantes [34] [36] :

Propriété 1: la matrice d'inertie $M(q_b)$ est symétrique, définie positive et bornée, c.à.d.

$$M(q_b) = M(q_b)^T > 0 \quad (\text{I.23})$$

et il existe des constantes positives ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 \leq \rho_2$) tels que :

$$\forall q \in \mathfrak{R}^n : \rho_1 I_n \leq M(q_b) \leq \rho_2 I_n \quad (\text{I.24})$$

Propriété 2: $\dot{M}(q_b) - 2C(q_b, \dot{q}_b)$ est anti-symétrique, c-à-d pour n'importe quel vecteur $x \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ l'équation suivante est vérifiée :

$$x^T (\dot{M}(q_b) - 2C(q_b, \dot{q}_b)) x = 0 \quad (\text{I.25})$$

Propriété 3: les termes de gravité et de frottement sont bornés:

$$|G(q_b)| \leq g_b(q_b), |F(q_b)| \leq f_b(\dot{q}) \quad (\text{I.26})$$

Propriété 4: le modèle dynamique d'un manipulateur est une fonction linéaire des paramètres géométriques et mécaniques des articulations (masse, inertie, frottement...).

$$M(q_b) \ddot{q}_b + C(q_b, \dot{q}_b) \dot{q}_b + G(q_b) + F(\dot{q}_b) = Y(q_b, \dot{q}_b, \ddot{q}_b) \alpha \quad (\text{I.27})$$

$Y(q_b, \dot{q}_b, \ddot{q}_b)$ appelée matrice de regression qui dépend de la position, la vitesse et l'accélération des variables articulaires. α : vecteur contenant les paramètres géométriques/mécaniques du système.

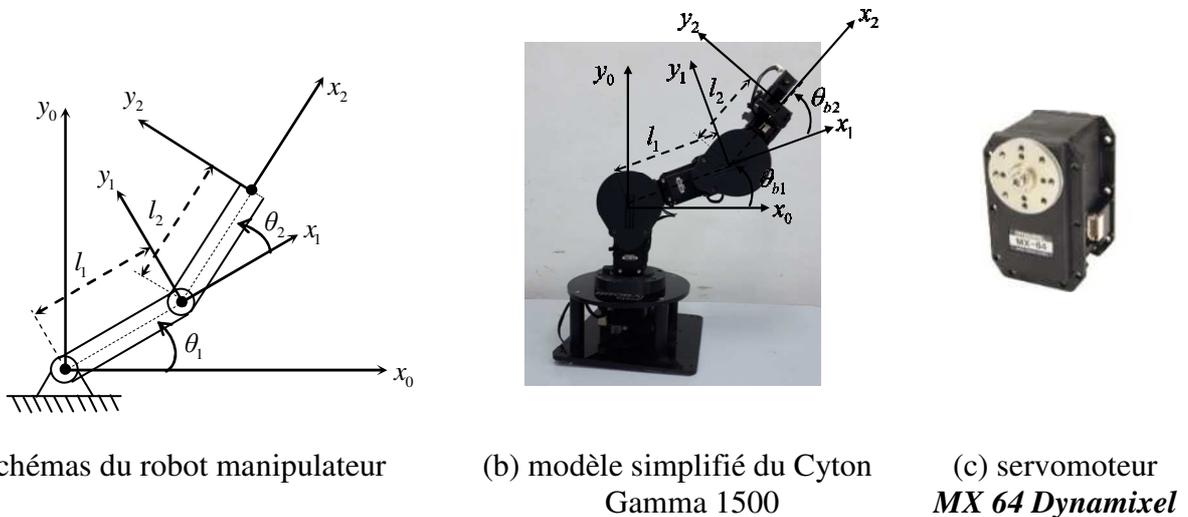
La **propriété 4** est exploitée pour identifier les paramètres dynamiques (paramètres inertiels et de frottement), pour réduire la complexité de calcul du modèle dynamique et pour développer des

schémas de contrôle adaptatif [38].

I.2.3.6. Exemple illustratif

Cet exemple présente la modélisation géométrique, cinématique et dynamique d'un bras manipulateur planaire de deux degré de liberté (*ddl*), montré dans la Figure I.6.a. Il s'agit d'un modèle simplifié du prototype *Robai Cyton Gamma 1500* (Figure I.6.b), du notre laboratoire de recherche **LSI** (Laboratoire des Systèmes Intelligents), composé de deux articulations rotoïdes motorisées par deux servomoteurs de type *MX 64 Dynamixel* avec un rapport de réduction de

$$k_r = \frac{60}{12} = 5, \text{ voir Figure I.6.c .}$$



(a) schémas du robot manipulateur

(b) modèle simplifié du Cyton Gamma 1500

(c) servomoteur *MX 64 Dynamixel*

Figure I.6 Un bras manipulateur planaire de 2ddl.

	q	α	d	r
articulation 1	θ_{b1}	0	0	l_1
articulation 2	θ_{b2}	0	0	l_2

Tableau I.2 Les paramètres D-H du robot.

- **Modèle géométrique direct**

Considérant le bras manipulateur planaire de la Figure I.6.(a), où l'axe z_i ($i=0,1,2$) est perpendiculaire aux plans (x_i, y_i) , et chaque articulation est reliée par un repère (o_i, x_i, y_i, z_i) . En se basant sur la convention D-H, avec les paramètres du robot donnés dans le Tableau I.2. Les matrices de transformation homogènes sont déterminées à partir de l'équation (I.6)

$${}^1T_0 = \begin{bmatrix} \cos \theta_{b_1} & -\sin \theta_{b_1} & 0 & l_1 \cos \theta_{b_1} \\ \sin \theta_{b_1} & \cos \theta_{b_1} & 0 & l_1 \sin \theta_{b_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2T_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_{b_2} & -\sin \theta_{b_2} & 0 & l_2 \cos \theta_{b_2} \\ \sin \theta_{b_2} & \cos \theta_{b_2} & 0 & l_2 \sin \theta_{b_2} \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2T_0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) & -\sin(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) & 0 & l_1 \cos \theta_{b_1} + l_2 \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) \\ \sin(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) & \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) & 0 & l_1 \sin \theta_{b_1} + l_2 \sin(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les deux premiers éléments de la dernière colonne de la matrice 2T_0 donnent les coordonnées de l'OT par rapport à la base

$$\begin{cases} x = l_1 \cos \theta_{b_1} + l_2 \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) \\ y = l_1 \sin \theta_{b_1} + l_2 \sin(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) \end{cases} \quad (\text{I.28})$$

- **Modèle cinématique direct**

Pour calculer les vitesses généralisées du robot, on dérive l'équation (I.28) par rapport au temps, ce qui donne le modèle cinématique direct du robot par

$$\begin{cases} \dot{x} = -l_1 \dot{\theta}_{b_1} \sin \theta_{b_1} - l_2 (\dot{\theta}_{b_1} + \dot{\theta}_{b_2}) \sin(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) \\ \dot{y} = l_1 \dot{\theta}_{b_1} \cos \theta_{b_1} + l_2 (\dot{\theta}_{b_1} + \dot{\theta}_{b_2}) \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -(l_1 \sin \theta_{b_1} + l_2 \sin(\theta_{b_1} + \theta_{b_2})) \dot{\theta}_{b_1} - l_2 \sin(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) \dot{\theta}_{b_2} \\ \dot{y} = (l_1 \cos \theta_{b_1} + l_2 \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2})) \dot{\theta}_{b_1} + l_2 \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) \dot{\theta}_{b_2} \end{cases} \quad (\text{I.29})$$

On réécrit l'équation (I.29) sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_1 \sin \theta_{b_1} + l_2 \sin(\theta_{b_1} + \theta_{b_2})) & -l_2 \sin(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) \\ (l_1 \cos \theta_{b_1} + l_2 \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2})) & l_2 \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{b_1} \\ \dot{\theta}_{b_2} \end{bmatrix} = J_b(\theta_b) \dot{\theta}_b \quad (\text{I.30})$$

où la matrice jacobienne $J_b(\theta_b)$ du robot est

$$J_b(\theta_b) = \begin{bmatrix} -(l_1 \sin \theta_{b_1} + l_2 \sin(\theta_{b_1} + \theta_{b_2})) & -l_2 \sin(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) \\ (l_1 \cos \theta_{b_1} + l_2 \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2})) & l_2 \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) \end{bmatrix}$$

- **Modèle dynamique**

L'équation dynamique du robot manipulateur est obtenue en exploitant les équations (I.18) et (I.19) pour calculer leur énergie cinétique et potentielle. D'abord, on doit calculer les matrices jacobiennes des vitesses linéaires et angulaires du robot:

$$J_v^1 = \begin{bmatrix} l_{c1} \sin \theta_{b1} & 0 \\ -l_{c1} \cos \theta_{b1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_v^2 = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_{b1} - l_{c2} \sin(\theta_{b1} + \theta_{b2}) & -l_{c2} \sin(\theta_{b1} + \theta_{b2}) \\ -l_{c1} \cos \theta_{b1} + l_{c2} \cos(\theta_{b1} + \theta_{b2}) & l_{c2} \cos(\theta_{b1} + \theta_{b2}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_\omega^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad J_\omega^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

l_{c2} , l_{c1} , I_1 et I_2 sont les centres des masses et les moments d'inertie de chaque segment respectivement.

Puisque les deux axes, z_1, z_2 associés aux articulations 1 et 2, sont parallèles à l'axe z_0 lié à la base, il n'est pas nécessaire de calculer R_1, R_2 (les matrices de rotation de chaque segment par rapport à la base).

- L'énergie cinétique du robot est

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[m_1 J_v^1 T J_v^1 + m_2 J_v^2 T J_v^2 + J_\omega^1 T I_1 J_\omega^1 + J_\omega^2 T I_2 J_\omega^2 \right] \dot{q} \quad (I.31)$$

En substituant les expressions de $J_v^1, J_v^2, J_\omega^1, J_\omega^2$ dans l'équation (I.31), ce qui donne les éléments de la matrice d'inertie M

$$M_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos \theta_{b2}) + I_1 + I_2$$

$$M_{12} = M_{21} = m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos \theta_{b2}) + I_2$$

$$M_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2$$

Les symboles de Christoffel sont calculés à partir de la matrice M

$$h_{ijk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \right]$$

$$h_{111} = \frac{1}{2} \frac{\partial M_{11}}{\partial q_1} = 0$$

$$h_{112} = \frac{\partial M_{21}}{\partial q_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{11}}{\partial q_2} = m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_{b2}$$

$$h_{121} = h_{211} = \frac{1}{2} \frac{\partial M_{11}}{\partial q_2} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_{b2}$$

$$h_{122} = h_{212} = \frac{\partial M_{22}}{\partial q_1} = 0$$

$$h_{221} = \frac{\partial M_{12}}{\partial q_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{22}}{\partial q_1} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_{b2}$$

$$h_{222} = \frac{\partial M_{22}}{\partial q_2} = 0$$

On déduit la matrice $C(q, \dot{q})$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} (-m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_{b2}) \dot{\theta}_{b2} & (-m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_{b2}) (\dot{\theta}_{b1} + \dot{\theta}_{b2}) \\ (m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_{b2}) \dot{\theta}_{b1} & 0 \end{bmatrix}$$

- l'énergie potentielle du robot

$$E_{c1} = m_1 g l_{c1} \sin \theta_{b1}, \quad E_{c2} = m_2 g (l_1 \sin \theta_{b1} + l_{c2} \sin(\theta_{b1} + \theta_{b2}))$$

$$E_c = E_{c1} + E_{c2} = (m_1 l_{c1} + m_2 l_2) g \sin \theta_{b1} + m_2 g l_2 \sin(\theta_{b1} + \theta_{b2})$$

$$g_1 = \frac{\partial E_c}{\partial \theta_{b1}} = (m_1 l_{c1} + m_2 l_2) g \cos \theta_{b1} + m_2 g l_2 \cos(\theta_{b1} + \theta_{b2})$$

$$g_2 = \frac{\partial E_c}{\partial \theta_{b2}} = m_2 g l_2 \cos(\theta_{b1} + \theta_{b2})$$

Après développement, en utilisant l'équation de Lagrange (I.15), l'équation finale qui décrit le modèle dynamique du robot illustré dans la Figure I.6 devient

$$M(\theta_b) \ddot{q} + C(\theta_b, \dot{\theta}_b) \dot{\theta}_b + G(\theta_b) = \tau \quad (\text{I.32})$$

D'où :

$$M(\theta_b) = \begin{pmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos \theta_{b2}) + I_1 + I_2 & m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos \theta_{b2}) + I_2 \\ m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos \theta_{b2}) + I_2 & m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{pmatrix}$$

$$C(\theta_b, \dot{\theta}_b) = \begin{pmatrix} (-m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_{b2}) \dot{\theta}_{b2}^2 - 2(m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_{b2}) \dot{\theta}_{b1} \dot{\theta}_{b2} \\ (m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_{b2}) \dot{\theta}_{b1}^2 \end{pmatrix}$$

$$G(\theta_b) = \begin{pmatrix} (m_1 l_{c1} + m_2 l_2) g \cos \theta_{b1} + m_2 g l_2 \cos(\theta_{b1} + \theta_{b2}) \\ m_2 g l_2 \cos(\theta_{b1} + \theta_{b2}) \end{pmatrix}$$

$$\tau = [\tau_1 \quad \tau_2]^T$$

Maintenant on va vérifier les deux propriétés (1 et 4). On constate que la matrice M du robot est symétrique et définie positive. Maintenant, on va vérifier la propriété antisymétrique de la matrice : $\dot{M}(\theta_b) - 2C(\theta_b, \dot{\theta}_b)$

$$\dot{M}(\theta_b) - 2C(\theta_b, \dot{\theta}_b) = \begin{pmatrix} -2m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_{b2} \dot{\theta}_{b2} & -m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_{b2} \dot{\theta}_{b2} \\ -m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_{b2} \dot{\theta}_{b2} & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_{b2} \dot{\theta}_{b2} & -m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_{b2} (\dot{\theta}_{b2} + \dot{\theta}_{b2}) \\ m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_{b2} \dot{\theta}_{b2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{M}(\theta_b) - 2C(\theta_b, \dot{\theta}_b) = \begin{pmatrix} 0 & 2m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_{b2} \dot{\theta}_{b1} + m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_{b2} \dot{\theta}_{b2} \\ -(2m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_{b2} \dot{\theta}_{b1} + m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_{b2} \dot{\theta}_{b2}) & 0 \end{pmatrix}$$

- La propriété de linéarité du modèle dynamique

Rappelant l'équation (I.27):

$$M(\theta_b) \ddot{\theta}_b + C(\theta_b, \dot{\theta}_b) \dot{\theta}_b + G(\theta_b) + F(\dot{\theta}_b) = Y(\theta_b, \dot{\theta}_b, \ddot{\theta}_b) \alpha \quad (\text{I.33})$$

$$Y(\theta_b, \dot{\theta}_b, \ddot{\theta}_b)\alpha = \tau \quad (\text{I.34})$$

On peut définir le vecteur de paramètres

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5]^T$$

$$\alpha_1 = m_1 l_{c1}, \quad \alpha_2 = m_1 l_{c1}^2 + I_1, \quad \alpha_3 = m_2, \quad \alpha_4 = m_2 l_{c2}, \quad \alpha_5 = m_2 l_{c2}^2 + I_2$$

ensuite

$$Y(\theta_b, \dot{\theta}_b, \ddot{\theta}_b) = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} \\ 0 & 0 & 0 & y_{24} & y_{25} \end{bmatrix}$$

avec

$$y_{11} = g \cos \theta_{b1}$$

$$y_{15} = \ddot{\theta}_{b1} + \ddot{\theta}_{b2}$$

$$y_{12} = \ddot{\theta}_{b1}$$

$$y_{24} = l_1 \cos \theta_{b2} \ddot{\theta}_{b1} + l_1 \sin \theta_{b2} \dot{\theta}_{b1}^2 + g \cos(\theta_{b1} + \theta_{b2})$$

$$y_{13} = l_1^2 \ddot{\theta}_{b1} + l_1 g \cos \theta_{b1}$$

$$y_{25} = \ddot{\theta}_{b1} + \ddot{\theta}_{b2}$$

$$y_{14} = 2l_1 \cos \theta_{b2} \dot{\theta}_{b1} \ddot{\theta}_{b2} + l_1 \cos \theta_{b2} \ddot{\theta}_{b2} - 2l_1 \sin \theta_{b2} \dot{\theta}_{b1} \dot{\theta}_{b2} - l_1 \sin \theta_{b2} \dot{\theta}_{b1}^2 + g \cos(\theta_{b1} + \theta_{b2})$$

Les éléments y_{ij} sont en fonction de $\theta_{bi}, \dot{\theta}_{bi}, \ddot{\theta}_{bi}, g$ et l_1 .

□

I.3. Les robots mobiles à roues

La majorité des robots industriels, exemple robot manipulateur, qui ne peuvent se déplacer que dans un espace de travail spécifique. Les robots mobiles ont la particularité de se mouvoir librement à l'intérieur d'un espace de travail prédéfini pour atteindre leurs objectifs. Cette capacité de mobilité les rend appropriés pour un large domaine d'applications dans des environnements structurés ou non structurés. Les robots mobiles comprennent également les véhicules aériens sans pilote (UAV) et les véhicules sous-marins autonomes (AUV) [39]. En général, les robots mobiles à roues consomment moins d'énergie et se déplacent plus rapidement que les autres mécanismes de locomotion (par exemple les robots à pattes ou les robots à chenilles)[34]. Dans cette section, on se limite aux robots mobiles à roues, en particulier les robots mobiles à deux roues différentielles.

Un schéma simplifié du robot mobile à roue est donné dans la Figure I.7. La position du robot mobile est décrite par un vecteur $X_p = [x_p, y_p, \theta_p]^T$ par rapport au repère fixe (o, x, y) , où (x_p, y_p) sont les coordonnées cartésiennes du robot et θ_p son angle d'orientation.

On définit la matrice de rotation du robot autour de l'axe vertical Z par :

$$R(\theta_p) = \begin{bmatrix} \cos \theta_p & -\sin \theta_p & 0 \\ \sin \theta_p & \cos \theta_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

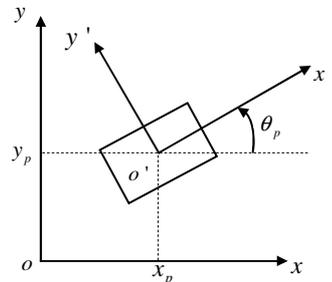


Figure I.7 Modèle simplifié d'un robot mobile.

La modélisation cinématique des robots mobiles (plate-formes) est basée, essentiellement, sur le nombre et le type des roues sur lesquelles ils se déplacent[40].

I.3.1. Types des roues

On résume dans le Tableau I.3 les différents types des roues utilisées dans la robotique mobile:

Type de roues	Schémas	Exemple	Description
Roues fixes			dont l'axe de rotation passe par le centre des roues
Roues centrées orientables			dont l'axe d'orientation passe par le centre des roues
roues folles			dont l'axe d'orientation ne passe pas par le centre de la roue.
Roues suédoise ou roue omnidirectionnelle			dont la composante nulle de la vitesse de glissement au point de contact n'est pas dans le plan de la roue

Tableau I.3 les différents types de roues.

I.3.2. Les contraintes de roulement sans glissement des roues sur le sol:

La modélisation des robots à roues est basée sur les contraintes de roulement sans glissement (r.s.g) des roues sur le sol, Compion [40] a classé ce type de contraintes comme suit :

- Dans le plan de la roue.
- Dans le plan orthogonal de la roue.

Donc pour chaque type de roue est caractérisé par deux types contraints de r.s.g:

- **Roues fixes et roues centrées orientables**

$$[-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l \cos \beta] R^T(\theta) \dot{X}_p + r \dot{\phi} = 0 \quad (\text{I.35})$$

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin \beta] R^T(\theta) \dot{X}_p = 0 \quad (\text{I.36})$$

- **Roues folles/décentrés orientables**

$$[-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l \cos \beta] R^T(\theta) \dot{X}_p + r \dot{\phi} = 0 \quad (\text{I.37})$$

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad d + l \sin \beta] R^T(\theta) \dot{X}_p + d \dot{\beta} = 0 \quad (\text{I.38})$$

- **Roues suédoises**

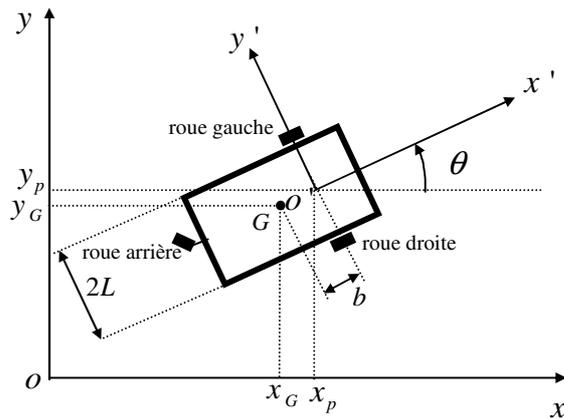
$$[-\sin(\alpha + \beta + \gamma) \quad \cos(\alpha + \beta + \gamma) \quad l \cos(\beta + \gamma)] R^T(\theta) \dot{X}_p + r \cos \gamma \dot{\phi} = 0 \quad (\text{I.39})$$

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin \beta] R^T(\theta) \dot{X}_p = 0 \quad (\text{I.40})$$

Campion a classé les robots mobiles à roues en quatre types suivant le nombre et le type de roues, parmi eux le robot mobile à deux roues différentielles qui est le sujet de la section suivante.

I.3.3. Robot mobile à deux roues différentielles :

Les robots mobiles à deux roues différentielles sont constitués de deux roues gauche/droite motorisées par deux moteurs alignés sur le même axe et une (des) roue (s) décentré-orientable (s), n'intervient pas dans le modèle cinématique du système, utilisé pour assurer l'équilibre mécanique du robot. Un exemple pratique, existe au sein de notre laboratoire de recherche **LSI**, de ce type de robot est le robot mobile Pioneer 3DX illustré dans la figure suivante :



(a) Modèle simplifié de Pioneer



(b) Robot mobile Pioneer 3DX

Figure I.8 Robot mobile à roues différentielles.

(o', x', y') est un repère mobile relié au centre de l'axe des roues (gauche et droite), (x_p, y_p) sont les coordonnées du point o' dans un repère fixe (o, x, y) . (x_G, y_G) sont les coordonnées du centre de gravité du robot mobile. θ_p l'angle d'orientation du robot.

La position du point o' par rapport au repère (o, x, y) est :

$$\begin{cases} x_p = x_G + b \cos \theta_p \\ y_p = y_G + b \sin \theta_p \end{cases} \quad (\text{I.41})$$

donc on déduit les coordonnées du centre de gravité

$$\begin{cases} x_G = x_p - b \cos \theta_p \\ y_G = y_p - b \sin \theta_p \end{cases} \quad (\text{I.42})$$

- **Le modèle cinématique du robot mobile**

Du fait que le robot se déplace en utilisant les deux roues gauche et droite (ces deux roues sont de type fixe), le modèle cinématique est donné en se basant sur les deux contraintes (I.35) et (I.36). En premier lieu, on donne les paramètres des deux roues par rapport à o' , qui sont résumés dans le tableau suivant :

Roue	1	2
α	$-\pi/2$	$\pi/2$
β	0	0
θ	θ_r	θ_l
L	L	L

Tableau I.4 Paramètres des roues robot mobile Pioneer 3DX.

avec θ_r, θ_l sont les déplacements angulaires de chaque roue.

On substitue les variables $(\alpha, \beta, \theta, L)$ du Tableau I.4 dans les équations (I.35) et (I.36) ce qui

donne les équations des contraintes du robot

➤ dans le plan de la roue :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & L \\ -1 & 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{I.43})$$

➤ Dans le plan orthogonal de la roue :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_p & \sin \theta_p & 0 \\ -\sin \theta_p & \cos \theta_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{I.44})$$

On note :

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L \\ -1 & 0 & L \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les deux contraintes peuvent être réécrites sous la forme compactée :

$$\begin{cases} J_1 R^T(\theta) \dot{X}_p + J_2 \dot{\theta} = 0 \\ CR^T(\theta) \dot{X}_p = 0 \end{cases} \quad (\text{I.45})$$

La contrainte $(CR^T(\theta) \dot{X}_p = 0)$ implique que le vecteur $R^T(\theta) \dot{X}_p$ doit appartenir à l'espace nul de la matrice C , ce dernier peut être donné par :

$$\text{Nullspace}(C) = N = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.46})$$

Donc il existe un vecteur η_p de dimension deux tel que :

$$\dot{X}_p = R(\theta_p) N \eta_p = \begin{bmatrix} \cos \theta_p & 0 \\ \sin \theta_p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \eta_p \quad (\text{I.47})$$

où $R(\theta_p)^T = R^{-1}(\theta_p)$, $\eta_p = [v \ \omega]$ est le vecteur de commande du robot. Avec v et ω sont les vitesses longitudinales et angulaires du robot respectivement.

on substitue le vecteur η_p dans (I.47), on trouve

$$\begin{cases} \dot{x}_p = v \cos \theta_p \\ \dot{y}_p = v \sin \theta_p \\ \dot{\theta}_p = \omega \end{cases} \quad (\text{I.48})$$

Les vitesses v, ω peuvent s'exprimer en fonction de $\dot{\theta}_r, \dot{\theta}_l$ comme suit :

$$\begin{cases} v = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) \\ \omega = \frac{r}{2L}(\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_l) \end{cases} \quad (\text{I.49})$$

On dérive l'équation (I.42) par rapport au temps et on utilise (I.48), (I.49). Le modèle cinématique du robot illustré dans la Figure I.8, en incluant aussi les vitesses angulaire, $\dot{\theta}_r, \dot{\theta}_l$, est donné sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \\ \dot{\theta}_p \\ \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2}(\cos \theta_p - \frac{b}{L} \sin \theta_p) & \frac{r}{2}(\cos \theta_p + \frac{b}{L} \sin \theta_p) \\ \frac{r}{2}(\sin \theta_p + \frac{b}{L} \cos \theta_p) & \frac{r}{2}(\sin \theta_p - \frac{b}{L} \cos \theta_p) \\ \frac{r}{2L} & \frac{r}{2L} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix}$$

Dans ce qui suit, on utilise le modèle réduit du robot

$$\begin{cases} \dot{x}_G = \frac{r}{2}(\cos \theta_p - \frac{b}{L} \sin \theta_p) \dot{\theta}_r + \frac{r}{2}(\cos \theta_p + \frac{b}{L} \sin \theta_p) \dot{\theta}_l \\ \dot{y}_G = \frac{r}{2}(\sin \theta_p + \frac{b}{L} \cos \theta_p) \dot{\theta}_r + \frac{r}{2}(\sin \theta_p - \frac{b}{L} \cos \theta_p) \dot{\theta}_l \\ \dot{\theta}_p = \frac{r}{2L}(\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_l) \end{cases}$$

- **Le Modèle dynamique du robot mobile**

La dynamique des robots mobiles est un domaine difficile et a suscité une attention considérable des chercheurs et des ingénieurs au fil des ans. La plupart des robots mobiles, employés dans la pratique, utilisent des roues conventionnelles et sont soumis à des contraintes non-holonomes qui nécessitent un traitement particulier[39]. La modélisation dynamique des robots traite la dérivation des équations dynamiques du mouvement du robot. Ceci peut être effectué en utilisant

l'équation de Lagrange suivante qui donne le modèle dynamique du robot mobile non-holonome

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_p} + A^T(q_p) \lambda = E \tau_p \quad (\text{I.50})$$

où $A(q_p)_{n \times m}$ est une matrice de m contraintes non-holonome avec

$$A(q_p) \dot{q}_p = 0 \quad (\text{I.51})$$

λ est un vecteur du multiplicateur de Lagrange.

L'équation de Lagrange donne, après développement mathématique, l'équation du mouvement suivante

$$M(q_p) \ddot{q}_p + C(q_p, \dot{q}_p) \dot{q}_p + g(q_p) + A^T(q_p) \lambda = E \tau \quad (\text{I.52})$$

où E est une matrice non singulière.

Pour éliminer le terme de la contrainte $A(q_p)$ dans l'équation (I.52), et obtenir un modèle sans contrainte en utilisant une matrice $S(q_p)_{n \times (n-m)}$ qui vérifie l'égalité suivante

$$S^T(q_p) A^T(q_p) = 0 \quad (\text{I.53})$$

A partir des équations (I.51) et (I.53) on peut vérifier qu'il existe un vecteur $\eta(t)$ de dimension $n-m$ tel que :

$$\dot{q}_p(t) = S(q_p) \eta(t) \quad (\text{I.54})$$

En multipliant l'équation (I.52) par $S(q_p)^T$ et en utilisant (I.53), (I.54) on obtient :

$$\bar{M}(q_p) \dot{\eta}_p + \bar{C}(q_p, \dot{q}_p) \dot{\eta}_p + \bar{g}(q_p) = \bar{E} \tau \quad (\text{I.55})$$

où : $\bar{M} = S^T M S$, $\bar{C} = S^T M \dot{S} + S^T C S$, $\bar{g} = S^T g$, $\bar{E} = S^T E$.

Le modèle réduit, sans contrainte, (I.55) décrit l'évolution dynamique du vecteur $q_p(t)$ de dimension n en terme de l'évolution dynamique du vecteur $\eta_p(t)$ de dimension $(n-m)$.

Pour illustrer la modélisation dynamique des robots mobiles non-holonome, prenant par exemple, le robot mobile à roues de la Figure I.8. Ce type de robot est caractérisé par la contrainte non-holonome suivante :

$$\dot{x}_p \sin \theta_p - \dot{y}_p \cos \theta_p = 0 \quad (\text{I.56})$$

On a le vecteur de position du robot $X_p = [x_p, y_p, \theta_p]^T$, l'équation (I.56) peut être exprimé comme suit :

$$A(X_p) \dot{X}_p = 0 \quad (\text{I.57})$$

avec $A(X_p) = [\sin \theta_p \quad -\cos \theta_p \quad 0]$, on choisit un vecteur de base $S(X_p)$ de l'espace nul de $A(X_p)$ comme :

$$S(X_p) = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \theta_p & \frac{r}{2} \cos \theta_p \\ \frac{r}{2} \sin \theta_p & \frac{r}{2} \sin \theta_p \\ \frac{r}{2L} & \frac{r}{2L} \end{bmatrix}$$

L'équation (I.57) peut être écrite comme suit

$$\dot{X}_p = S(X_p) \eta_p \quad (\text{I.58})$$

où $\eta_p = [\dot{\theta}_r \quad \dot{\theta}_l]^T$

Après la définition de la contrainte non-holonome du robot, on passe au calcul de ses énergies cinétique et potentielle.

L'énergie cinétique du robot est

$$K = K_1 + K_2 + K_3 \quad (\text{I.59})$$

où :

$$K_1 = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2)$$

$$K_2 = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}_p$$

$$K_3 = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_r^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_l^2$$

m : la masse du robot

v : la vitesse linéaire du centre de gravité du robot G

I_o : le moment d'inertie du robot par rapport à O'

I_0 : le moment d'inertie de la roue plus du rotor du moteur

On a

$$\begin{cases} \dot{x}_G = \dot{x}_p - b \dot{\theta}_p \sin \theta_p \\ \dot{y}_G = \dot{y}_p - b \dot{\theta}_p \cos \theta_p \end{cases} \quad (\text{I.60})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_p = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) \cos \theta_p \\ \dot{y}_p = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) \sin \theta_p \\ \dot{\theta}_p = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_l) \end{cases} \quad (\text{I.61})$$

Substituant (I.60) et (I.61) et dans (I.59) l'énergie cinétique du robot sera

$$\begin{aligned} K(\dot{\theta}_r, \dot{\theta}_l) = & \left[\frac{mr^2}{8} + \frac{(I_{o'} + mb^2)r^2}{8L^2} + \frac{I_{o'}}{2} \right] \dot{\theta}_r^2 + \left[\frac{mr^2}{8} + \frac{(I_{o'} + mb^2)r^2}{8L^2} + \frac{I_{o'}}{2} \right] \dot{\theta}_l^2 \\ & + \left[\frac{mr^2}{4} - \frac{(I_{o'} + mb^2)r^2}{4L^2} \right] \dot{\theta}_r \dot{\theta}_l \end{aligned}$$

On constate que l'énergie cinétique du robot est exprimée en fonction des vitesses angulaires des roues $\dot{\theta}_r, \dot{\theta}_l$. Du fait que le robot se déplace sur le plan horizontal donc l'énergie potentielle est nulle, donc le Lagrangien L est égal à l'énergie cinétique K seulement. Par conséquent, les équations de Lagrange de ce type de robot sont :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_r} = \tau_r \quad (\text{I.62})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_l} = \tau_l$$

$$M_{11} \ddot{\theta}_r + M_{12} \ddot{\theta}_l = \tau_r \quad (\text{I.63})$$

$$M_{21} \ddot{\theta}_r + M_{22} \ddot{\theta}_l = \tau_l$$

avec :

$$M_{11} = M_{22} = \left[\frac{mr^2}{4} + \frac{(I_{o'} + mb^2)r^2}{8L^2} + I_{o'} \right]$$

$$M_{12} = M_{21} = \left[\frac{mr^2}{4} - \frac{(I_{o'} + mb^2)r^2}{8L^2} \right]$$

□

I.4. Modélisation d'un manipulateur mobile à roues

On garde la même notation des vecteurs et matrices utilisée dans les sections précédentes notamment la description du bras manipulateur et du robot mobile (qui est considéré dans cette section comme la plateforme mobile pour le manipulateur mobile) [41].

En général, un manipulateur mobile à roues est composé d'un bras manipulateur, de n_b coordonnées généralisées, monté sur une plateforme mobile à roues, de n_p coordonnées

généralisées.

Un manipulateur mobile peut être décrit par un vecteur q , de degré $n_b + n_p$, de coordonnée généralisée :

$$q = [q_b \ q_p]^T \quad (\text{I.64})$$

où : q_b vecteur de coordonnées généralisées pour le bras manipulateur.

q_p vecteur de coordonnées généralisées pour la plate-forme mobile.

La situation de l'organe terminal peut être définie par un vecteur X de m coordonnées opérationnelles

$$X = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_m]^T \quad (\text{I.65})$$

- **Modèle géométrique direct**

Le modèle géométrique direct donne la relation entre le vecteur X en fonction du vecteur q

$$X = f(q) \quad (\text{I.66})$$

- **Modèle géométrique inverse**

Exprime les coordonnées généralisées en fonction des coordonnées opérationnelles

$$q = g(X) \quad (\text{I.67})$$

- **Modèle cinématique direct**

Donne les vitesses opérationnelles, les vitesses de l'OT, en fonction des vitesses généralisées

$$\dot{X} = J(q)\dot{q} \quad (\text{I.68})$$

où $J(q)$ la matrice jacobienne du manipulateur mobile.

- **Modèle cinématique inverse**

Les vitesses généralisées sont calculées en fonction des vitesses opérationnelles, en d'autres termes en inversant la matrice $J(q)$

$$\dot{q} = [J(q)]^{-1} \dot{X} \quad (\text{I.69})$$

- **Modèle dynamique direct**

Utilisant l'équation de Lagrange pour donner le modèle dynamique du manipulateur mobile sous la contrainte non-holonome de la plate-forme.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + A^T(q)\lambda = E\tau \quad (\text{I.70})$$

où : $q = [q_b \ q_p]^T$ sont les coordonnées généralisées du manipulateur mobile et $L = E_c - E_p$ est le Lagrangien du système.

l'énergie cinétique totale du manipulateur mobile est égale à l'énergie cinétique de la plate-forme mobile plus celle du bras manipulateur : $E_c = E_{c_b} + E_{c_p}$.

En tenant compte que l'énergie potentielle de la plate-forme mobile est nulle donc l'énergie potentielle totale du manipulateur mobile sera égale à l'énergie du bras manipulateur : $E_p = E_{p_b}$.

L'équation dynamique qui décrit le mouvement du manipulateur mobile est

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + A^T(q)\lambda = B(q)\tau \quad (\text{I.71})$$

$M(q) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ est une matrice définie positive, symétrique et bornée, $C(q)\dot{q} \in \mathfrak{R}^n$ est un vecteur qui dénote les force centrifuge et de Coriolis, $G(q) \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur de la force de gravité, $B(q) \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ matrice de transformation d'entrée, $\tau \in \mathfrak{R}^m$ couple d'entrée, $A(q) \in \mathfrak{R}^{l \times n}$ matrice de contrainte cinématique, l contrainte, de la plate-forme mobile, λ vecteur de multiplicateur de Lagrange.

En considérant que le manipulateur mobile est composé de deux systèmes donc les matrices de l'équation (I.71) peuvent être réécrites comme suit :

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_p & M_{pa} \\ M_{ap} & M_a \end{bmatrix}, \quad C(q_m, \dot{q}_m) = \begin{bmatrix} C_p & C_{pa} \\ C_{ap} & C_a \end{bmatrix}, \quad G(q_m) = \begin{bmatrix} G_p \\ G_a \end{bmatrix}, \quad B(q_m) = \begin{bmatrix} B_p & 0 \\ 0 & B_a \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_p \\ \tau_a \end{bmatrix}$$

La plate-forme mobile soumise à l contraintes non-holonomes s'exprime comme suit :

$$A(q_p)\dot{q}_p = 0 \quad (\text{I.72})$$

où $A(q_p) = [A_1^T(q_p), \dots, A_l^T(q_p)]^T : \mathfrak{R}^{n_p} \rightarrow \mathfrak{R}^{l \times n_p}$ est la matrice des contraintes cinématique qui est supposée avoir le rang complet l . La contrainte (I.72) implique l'existence de vecteur $\sigma \in \mathfrak{R}^{n_p - l}$ tel que

$$\dot{q}_p = S(q_p)\sigma \quad (\text{I.73})$$

$S(q_p)$ appartient à l'espace nul de la matrice $A(q_p)$, qui satisfait l'équation suivante

$$S(q_p)^T A(q_p)^T = 0 \quad (\text{I.74})$$

On substitue l'équation (I.73) dans (I.71), ensuite on multiplie le résultat par $S(q_p)^T$, pour éliminer λ , on obtient

$$\bar{M}(q_m)\dot{\sigma} + \bar{C}(q_m, \dot{q}_m)\sigma + \bar{G}(q_m) = \bar{B}(q_m)\tau \quad (\text{I.75})$$

où

$$\bar{M}(q_m) = S^T(q_m)M(q_m)S(q_m), \quad \bar{C}(q_m) = S^T(q_m)(C(q_m, \dot{q}_m)S(q_m) + M(q_m)\dot{S}(q_m)),$$

$$\bar{G}(q_m) = S^T(q_m)G(q_m), \quad \bar{B}(q_m) = S^T(q_m)B(q_m).$$

I.4.1. Exemple illustratif

Considérant le manipulateur mobile composé du bras manipulateur planaire (Figure I.6) monté sur la plate-forme mobile (Figure I.8), on obtient le manipulateur mobile donné dans la figure suivante :

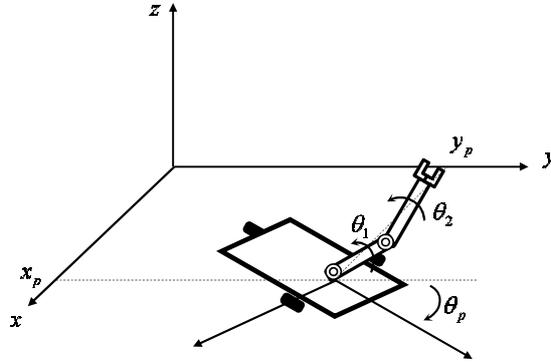


Figure I.9 Manipulateur mobile.

Les mêmes notations restent toujours valables pour les variables définies dans les sections précédentes. On rappelle les équations (I.28) du MGD du bras manipulateur

$$\begin{cases} x = l_1 \cos \theta_{b_1} + l_2 \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) \\ y = l_1 \sin \theta_{b_1} + l_2 \sin(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) \end{cases}$$

Dans ce cas la base du bras manipulateur n'est plus fixe, ces coordonnées sont en fonction des coordonnées de la plate-forme mobile. On peut déduire le modèle géométrique direct du manipulateur mobile de la Figure I.9 et pour alléger le calcul, en tenant compte que $b = 0$ (les deux points G et O' , de la Figure I.8, sont superposés)

- **Modèle géométrique direct**

Les coordonnées opérationnelles de l'OT du robot sont données en fonction des variables $x_p, y_p, \theta_p, \theta_{b_1}, \theta_{b_2}$ par :

$$\begin{cases} x_m = x_p + l_1 \cos \theta_p \cos \theta_{b_1} + l_2 \cos \theta_p \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) \\ y_m = y_p + l_1 \sin \theta_p \cos \theta_{b_1} + l_2 \sin \theta_p \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) \\ z_m = l_1 \sin \theta_{b_1} + l_2 \sin(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) \end{cases} \quad (\text{I.76})$$

- **Modèle cinématique direct**

On dérive l'équation (I.76) par rapport au temps et en tenant compte du modèle cinématique de la plate-forme mobile (I.61), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_m = \left[\frac{r}{2} \cos \theta_p - (l_1 \sin \theta_p \cos \theta_{b_1} \dot{\theta}_p + l_2 \sin \theta_p \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2})) \frac{r}{2} \cos \theta_p \right] \dot{\theta}_r \\ \quad \left[\frac{r}{2} \cos \theta_p - (l_1 \sin \theta_p \cos \theta_{b_1} \dot{\theta}_p + l_2 \sin \theta_p \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2})) \frac{r}{2} \cos \theta_p \right] \dot{\theta}_l \\ \quad - [l_1 \cos \theta_p \sin \theta_{b_1} + l_2 \cos \theta_p \sin(\theta_{b_1} + \theta_{b_2})] \dot{\theta}_{b_1} - l_2 \cos \theta_p \sin(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) \dot{\theta}_{b_2} \\ \dot{y}_m = \left[\frac{r}{2} \sin \theta_p + (l_1 \cos \theta_p \cos \theta_{b_1} + l_2 \cos \theta_p \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2})) \frac{r}{2} \cos \theta_p \right] \dot{\theta}_r \\ \quad \left[\frac{r}{2} \sin \theta_p \dot{\theta}_l + (l_1 \cos \theta_p \cos \theta_{b_1} + l_2 \cos \theta_p \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2})) \frac{r}{2} \cos \theta_p \right] \dot{\theta}_l \\ \quad - [l_1 \sin \theta_p \sin \theta_{b_1} \dot{\theta}_{b_1} + l_2 \sin \theta_p \sin(\theta_{b_1} + \theta_{b_2})] \dot{\theta}_{b_1} - l_2 \sin \theta_p \sin(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) \dot{\theta}_{b_2} \\ \dot{z}_m = [l_1 \dot{\theta}_{b_1} \cos \theta_{b_1} + l_2 \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2})] \dot{\theta}_{b_1} + l_2 \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) \dot{\theta}_{b_2} \end{array} \right. \quad (\text{I.77})$$

On peut réécrire l'équation (I.77) sous forme matricielle comme suit

$$\dot{X} = J(q)\dot{q} \quad (\text{I.78})$$

où : $\dot{X} = [\dot{x}_m, \dot{y}_m, \dot{z}_m]^T$ et $\dot{q} = [\dot{\theta}_r, \dot{\theta}_l, \dot{\theta}_{b_1}, \dot{\theta}_{b_2}]^T$

La matrice jacobienne $J(q)$ est donnée par :

$$J(q) = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{24} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} & j_{34} \end{bmatrix}$$

$$j_{11} = \frac{r}{2} \cos \theta_p - (l_1 \sin \theta_p \cos \theta_{b_1} \dot{\theta}_p + l_2 \sin \theta_p \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2})) \frac{r}{2} \cos \theta_p ,$$

$$j_{12} = \frac{r}{2} \cos \theta_p - (l_1 \sin \theta_p \cos \theta_{b_1} \dot{\theta}_p + l_2 \sin \theta_p \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2})) \frac{r}{2} \cos \theta_p ,$$

$$j_{13} = -l_1 \cos \theta_p \sin \theta_{b_1} - l_2 \cos \theta_p \sin(\theta_{b_1} + \theta_{b_2})$$

$$j_{21} = \frac{r}{2} \sin \theta_p + (l_1 \cos \theta_p \cos \theta_{b_1} + l_2 \cos \theta_p \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2})) \frac{r}{2} \cos \theta_p ,$$

$$j_{22} = \frac{r}{2} \sin \theta_p \dot{\theta}_l + (l_1 \cos \theta_p \cos \theta_{b_1} + l_2 \cos \theta_p \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2})) \frac{r}{2} \cos \theta_p ,$$

$$j_{23} = -l_1 \sin \theta_p \sin \theta_{b_1} \dot{\theta}_{b_1} - l_2 \sin \theta_p \sin(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) ,$$

$$j_{24} = -l_2 \sin \theta_p \sin(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) ,$$

$$j_{31} = j_{32} = 0 , \quad j_{33} = l_1 \dot{\theta}_{b_1} \cos \theta_{b_1} + l_2 \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) , \quad j_{34} = l_2 \cos(\theta_{b_1} + \theta_{b_2}) .$$

- *Le modèle dynamique du manipulateur mobile*

le modèle dynamique du manipulateur mobile donne le vecteur des couples $\tau = [\tau_r \ \tau_l \ \tau_1 \ \tau_2]^T$, et regroupe les deux systèmes, en fonction des accélérations généralisées \ddot{q} . D'abord, on commence par le calcul des coordonnées opérationnelles de chaque articulation du robot manipulateur par rapport à la référence fixe (o, x, y, z) en incluant les coordonnées de la plateforme mobile, ensuite on calcule l'énergie cinétique et potentielle du robot afin de calculer/déduire l'équation de Lagrange sous contrainte qui donne le modèle dynamique du système.

- Les coordonnées du premier segment :

$$\begin{cases} x_1 = x_p + \frac{l_1}{2} \cos \theta_p \cos \theta_{a1} \\ y_1 = y_p + \frac{l_1}{2} \sin \theta_p \cos \theta_{a1} \\ z_1 = \frac{l_1}{2} \sin \theta_{a1} \end{cases}$$

- Les coordonnées du deuxième segment :

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{l_2}{2} \cos \theta_p \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2}) \\ y_2 = y_1 + \frac{l_2}{2} \sin \theta_p \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2}) \\ z_2 = z_1 + \frac{l_2}{2} \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2}) \end{cases}$$

Dans ce cas la contrainte cinématique du robot est

$$A(q)\dot{q} = 0 \quad (\text{I.79})$$

avec $A(X) = [\sin \theta_p \ -\cos \theta_p \ 0 \ 0 \ 0]$. Où $S(q)$ qui satisfait l'équation (I.73) est donnée par

$$S(q) = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \theta_p & \frac{r}{2} \cos \theta_p & 0 & 0 \\ \frac{r}{2} \sin \theta_p & \frac{r}{2} \sin \theta_p & 0 & 0 \\ \frac{r}{2L} & \frac{r}{2L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On définit le vecteur de commande σ , de l'équation(I.73), par $\sigma = [\dot{\theta}_r, \dot{\theta}_l, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T$.

- L'énergie cinétique totale est la somme des énergies cinétiques de chaque sous-système :

$$E_c = E_{c_p} + E_{c_{b1}} + E_{c_{b2}}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) + \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}_p^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} I_{b1} \dot{\theta}_{a1}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} I_{b2} (\dot{\theta}_{b1}^2 + \dot{\theta}_{b2}^2) \quad (\text{I.80})$$

- L'énergie potentielle totale du système, en tenant compte que l'énergie potentielle de la plate-forme mobile est nulle, est :

$$E_p = \frac{l_1}{2} m_1 g \sin \theta_{b1} + m_2 g (l_1 + \frac{l_2}{2} \sin \theta_{b2}) \quad (\text{I.81})$$

Pour l'équation du mouvement du manipulateur mobile, on prend en considération la contrainte cinématique de la plate-forme mobile (I.79), qui revêt la forme suivante :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau - A(q) \lambda \quad (\text{I.82})$$

avec $L = E_c - E_p$, τ est le vecteur de couple actionnant la plate-forme mobile et le bras manipulateur, λ est le multiplicateur de Lagrange. On substitue les équations (I.80) (I.81), dans (I.82), on obtient :

$$M(q) \ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) = B(q) \tau - A^T(q) \lambda \quad (\text{I.83})$$

Le détail de chaque matrice $M(q), V(q, \dot{q}), G(q), B(q), A(q)$ se trouve dans l'annexe A.

□

I.5. Conclusion

Ce chapitre donne un résumé sur la modélisation des robots, notamment, un bras manipulateur à chaînes ouverte ensuite un robot mobile à roues et on va terminer par un manipulateur mobile qui est le sujet principale de ce travail.

Dans ce chapitre, la modélisation géométrique, cinématique et dynamique d'un manipulateur mobile à deux roues est présentée. Ce manipulateur mobile est composé d'un bras manipulateur, de deux *ddl*, monté sur une plate-forme mobile à deux roues différentielles. Les exemples de modélisation donnés dans ce chapitre seront exploités dans ce qui suit de ce travail.

CHAPITRE II

PLATITUDE ET SYSTEMES PLATS

II.1. Introduction

La théorie de la platitude différentielle est actuellement une direction principale dans le contrôle des systèmes non-linéaire. Elle permet de développer des méthodes de linéarisation globale pour la dynamique des systèmes non linéaires. Elle facilite également la résolution des problèmes de contrôle non linéaire compliqué [42]. Cette approche peut être aussi vue comme un moyen qui simplifie la tâche de planification des mouvements [46].

Ce chapitre a pour but d'introduire les concepts de base de la théorie de la platitude différentielle et les systèmes plats, qui sont équivalents aux systèmes linéaires via un type spécial de rétroaction appelé endogène [25]. Quelques exemples des systèmes plats seront présentés, notamment un portique 2D, un robot mobile à roues... Un exemple d'application d'un manipulateur mobile plan sera illustré en détail et sera consolidé avec des résultats de simulation.

II.2. La platitude différentielle

Le concept de la platitude différentielle représente une propriété fondamentale qui caractérise certains systèmes non linéaires, y compris une grande classe de robots. Il introduit une notion d'équivalence entre un système non linéaire et un système linéaire commandable. Cette équivalence porte le nom d'équivalence par bouclage dynamique ou statique dans le cadre de l'algèbre différentielle et d'équivalence de Lie Bäcklund dans le cadre de la géométrie différentielle.

II.2.1. Définitions

Définition II-1

On dit qu'un système est commandable à l'instant t_0 s'il est possible, au moyen d'un vecteur de commande sans contrainte, de le transférer d'un état $x(t_0)$ à n'importe quel autre état dans un intervalle de temps fini.

Définition II-2

Un système trivial $(\mathfrak{X}_\infty^m, F_m)$ de coordonnées $(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots)$ et le champ de vecteur, noté F_m , donné par

$$F_m(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots) = (\dot{y}, \ddot{y}, \dots) \quad (\text{II.1})$$

Il décrit n'importe quel système composé de m chaînes indépendantes d'intégrateurs de longueurs arbitraire (c.-à-d. forme normale de Brunovsky de systèmes linéaires commandables).

II.2.2. Equivalence des systèmes

Deux systèmes sont "équivalents" s'il y a une transformation inversible échangeant leurs trajectoires. La notion d'équivalence réside dans le fait qu'elle admet une interprétation en termes de rétroaction dynamique[43] [44].

Considérons deux systèmes (M, F) , (N, G) et une application lisse $\psi: M \rightarrow N$ (chaque élément d'une application lisse ne dépend que de nombreuses coordonnées). si $t \rightarrow \xi(t)$ est une trajectoire du (M, F) , c.à.d.

$$\forall \xi, \dot{\xi}(t) = F(\xi(t)) \quad (\text{II.2})$$

L'application $t \rightarrow \zeta(t) = \psi(\xi(t))$ satisfait

$$\dot{\zeta}(t) = \frac{\partial \psi}{\partial \xi}(\xi(t))\dot{\xi}(t) = \frac{\partial \psi}{\partial \xi}(\xi(t))F(\xi(t)) \quad (\text{II.3})$$

si le champ de vecteurs F et G sont reliés par

$$\forall \xi, G(\psi(\xi)) = \frac{\partial \psi}{\partial \xi}(\xi)F(\xi) \quad (\text{II.4})$$

donc $\dot{\zeta}(t) = G(\psi(\xi(t))) = G(\zeta(t))$

ce qui signifie que $t \rightarrow \zeta(t) = \psi(\xi(t))$ est une trajectoire de (N, G) . De plus, ψ a une inverse lisse de Φ , alors F, G sont aussi reliés par Φ , et il y a une correspondance biunivoque entre les trajectoires des deux systèmes. Dans ce cas on dit que ψ , reliant F et G , est une transformation endogène.

II.2.3. Equivalence de Lie-Bäcklund

On est maintenant dans le but de définir la relation d'équivalence entre deux systèmes (M, F) et (N, G) avec $M = X \times U \times \mathfrak{R}_\infty^m$ de dimension n et $N = Y \times V \times \mathfrak{R}_\infty^q$ de dimension p [45].

Définition II-3

Soit $(x_0, \bar{u}_0) \in M$ et $(y_0, \bar{v}_0) \in N$, les deux systèmes (M, F) (E, \bar{f}) et (N, G) (H, \bar{g}) sont localement équivalents à $((x_0, \bar{u}_0), (y_0, \bar{v}_0))$ dans le sens de l'équivalence de **Lie-Bäcklund**, ou l'équivalence de **L-B**, s'il existe :

- Une application Φ de N vers M tel que $(x_0, \bar{u}_0) = \Phi(y_0, \bar{v}_0)$, de class C^∞ d'un voisinage de $(y_0, \bar{v}_0) \in N$ vers le voisinage $(x_0, \bar{u}_0) \in M$ et inversible dans ces voisinages, de sorte que $\Phi_* \bar{g} = \bar{f}$.
- Et réciproquement, s'il existe une application Ψ tel que $(y_0, \bar{v}_0) = \Psi(x_0, \bar{u}_0)$, de class C^∞ d'un voisinage de $(x_0, \bar{u}_0) \in M$ vers le voisinage $(y_0, \bar{v}_0) \in N$ et inversible dans ces voisinages, tel que $\Psi_* \bar{f} = \bar{g}$.

L'application Φ (or Ψ) appelée **Lie-Bäcklund** isomorphisme.

Φ est isomorphisme **Lie-Bäcklund** si $(x_0, \bar{u}_0) = (x, u, \dot{u}, \dots)$, dans le voisinage de $(x_0, \bar{u}_0) \in M$, et s'il existe $(y_0, \bar{v}_0) = (y, v, \dot{v}, \dots) \in N$ dans le voisinage de (y_0, \bar{v}_0) avec $(x_0, \bar{u}_0) = \Phi(y_0, \bar{v}_0)$, tel que $(x, \bar{u}) = \Phi(y, \bar{v})$ ou bien

$$x = \varphi_0(y, \bar{v}), u = \varphi_1(y, \bar{v}), \dot{u} = \varphi_2(y, \bar{v}), \dots \quad (\text{II.5})$$

et réciproquement, si $(y_0, \bar{v}_0) = (y, v, \dot{v}, \dots) \in N$ dans le voisinage de (y_0, \bar{v}_0) , et s'il existe $(x_0, \bar{u}_0) = (x, u, \dot{u}, \dots)$ dans le voisinage de $(x_0, \bar{u}_0) \in M$, de sorte que $(y_0, \bar{v}_0) = \Psi(x_0, \bar{u}_0)$, ou bien

$$y = \psi_0(x, \bar{u}), v = \psi_1(x, \bar{u}), \dot{v} = \psi_2(x, \bar{u}), \dots \quad (\text{II.6})$$

II.2.4. Système plat

Un système non linéaire est différentiellement plat, s'il existe un vecteur de sorties plates F , de dimension égale au nombre d'entrées du système, tel que tous les états et les entrées du système peuvent être donnés en fonction de ces sorties plates et ses dérivées.

Plus précisément, un système non linéaire donné par:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) & x \in \mathfrak{X}^n, u \in \mathfrak{X}^n \\ y &= g(x) & y \in \mathfrak{X}^m \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Où x, u, y sont la variable d'état, l'entrée et la sortie du système.

Le système (II.7) est dit différentiellement plat, pour un vecteur donné

$$F = \zeta(x, u, \dot{u}, \dots, u^p), \quad F \in \mathfrak{X}^m \quad (\text{II.8})$$

tel que :

$$x = \phi(F, \dot{F}, \dots, F^l) \quad (\text{II.9})$$

$$u = \psi(F, \dot{F}, \dots, F^l) \quad (\text{II.10})$$

Donc F est appelé sortie plate et le comportement dynamique du système (II.7) peut être décrit par le comportement dynamique des sorties plates.

Définition II-4

Un système (M, F) est plat en $p \in M$, s'il est équivalent en p à un système trivial.

Définition II-5

On considère un système plat (M, F) et Ψ sa transformation endogène. Le premier élément de Ψ est appelé sortie plate.

Corollaire II-1

Pour les systèmes plats, la dimension du vecteur de la sortie plate est égale à la dimension du vecteur d'entrée du système.

Théorème II-1

L'équivalence de L-B préserve les points d'équilibre [46].

II.3. Changement du comportement dynamique par rétroaction

La linéarisation d'un système par bouclage est un problème ouvert. L'importance pratique de la linéarisation par bouclage est très grande et réside dans le fait qu'on peut transporter des propriétés d'un système non linéaire à un système linéaire, ce qui permet de proposer une solution simple à l'un des problèmes de fond de l'automatique, à savoir la stabilisation autour d'une trajectoire quelconque [31]. Pour introduire les notions de base pour la linéarisation exacte par bouclage, on considère le système non linéaire d'une forme générale :

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathfrak{R}^n, u \in \mathfrak{R}^m \quad (m \leq n) \quad (\text{II.11})$$

D'où : x est le vecteur d'état et u le vecteur de commande.

II.3.1. Linéarisation par bouclage statique

Le système (II.11) est linéarisable par bouclage statique, s'il est possible de trouver un difféomorphisme

$$z = \phi(x), \quad z \in \mathfrak{R}^n \quad (\text{II.12})$$

et une loi de commande par bouclage

$$u = \alpha(z) + \beta(z)v, \quad v \in \mathfrak{R}^m \quad (\text{II.13})$$

de sorte que le système (II.11) est transformé en un système linéaire équivalent

$$\dot{z} = Az + Bv \quad (\text{II.14})$$

Où :

v est une nouvelle entrée de commande qui doit être définie pour assurer la stabilisation du système (II.14).

Les matrices A et B sont : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

II.3.2. Linéarisation par bouclage dynamique

Le système (II.11) est linéarisable par bouclage dynamique s'il existe un ensemble de nouveaux états $z \in \mathfrak{R}^q$ et entrées $v \in \mathfrak{R}^m$:

$$\begin{cases} \dot{z} = a(x, z, v) \\ u = b(x, z, v) \end{cases} \quad (\text{II.15})''$$

de sorte que le système (II.11) est transformé en un système linéaire équivalent sous la forme (II.14) par un bouclage statique.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour prouver qu'un système est linéarisable par bouclage dynamique demeure toujours parmi les axes de recherches. Certaines conditions suffisantes pour une linéarisation par bouclage dynamique, on trouve, par exemple, la linéarisation par prolongation [47].

II.3.3. La platitude et linéarisation

Comme un système plat est équivalent à un système trivial (Définition II-6) , on obtient immédiatement le théorème suivant :

Théorème II-2 : Une dynamique plate est linéarisable par bouclage (statique ou dynamique) et changement de coordonnées approprié [46].

II.4. La platitude et la planification du mouvement

La paramétrisation inversible (II.5) et (II.6), crée une bijection locale entre la solution des variables d'état du système original et des trajectoires arbitraires planifiées dans l'espace de sortie plate. En spécifiant les trajectoires désirées des sorties plates, les trajectoires des variables d'état et d'entrée sont entièrement définies sans résoudre les équations différentielles[48].

On considère un système non-linéaire

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (\text{II.16})$$

A l'instant initial t_i et compte tenu les conditions initiales du système $x(t_i) = x_i$, $u(t_i) = u_i$ et à l'instant final t_f les condition finales $x(t_f) = x_f$, $u(t_f) = u_f$.

Le problème de la planification de mouvement consiste à trouver une trajectoire $t \rightarrow (x(t), u(t))$ pour $t \in [t_i, t_f]$ qui satisfaisant (II.16) et les conditions initiales et finales.

II.4.1. Planification du mouvement sans contrainte

Les conditions de la platitude se résument à l'existence d'une sortie plate telle que toutes les variables du système, les états et les entrées, peuvent être exprimées en fonction de cette sortie plate et d'un nombre fini de ses dérivées successives.

Il en résulte que, si l'on veut construire une trajectoire dont les conditions initiales et finales sont précisées, il suffit de calculer la trajectoire correspondante dans l'espace des sorties plates.

$$\begin{aligned} x &= \varphi_0(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)}) \\ u &= \varphi_1(y, \dot{y}, \dots, y^{(r+1)}) \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Puisque les valeurs initiales et finales de x et u sont données et en utilisant la surjectivité de (φ_0, φ_1) on peut obtenir les valeurs initiales et finales de $(y, \dot{y}, \dots, y^{(r+1)})$.

Il suffit alors de trouver une trajectoire $t \rightarrow y(t)$ au moins $r+1$ fois différentiables qui satisfait à ces conditions initiales et finales, puisque x et u sont déduits de y et ses dérivés jusqu'à l'ordre $r+1$ par (II.17). De plus, il n'est pas nécessaire que la trajectoire $y(t)$ soit requise pour satisfaire à n'importe quelle équation différentielle, on peut simplement la calculer par interpolation polynomiale.

- *Le cas général*

On suppose qu'on a

à l'instant t_i :

$$\begin{cases} y_1(t_i), \dots, y_i^{(r+1)}(t_i) \\ \vdots \\ y_m(t_i), \dots, y_m^{(r+1)}(t_i) \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

et à l'instant t_f :

$$\begin{cases} y_1(t_f), \dots, y_i^{(r+1)}(t_f) \\ \vdots \\ y_m(t_f), \dots, y_m^{(r+1)}(t_f) \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

Les équations donnent $2(r+2)$ conditions pour chaque m composants de y .

Si on veut concevoir (y_1, y_2, \dots, y_m) dans une forme de m polynômes par rapport au temps, chaque composant de y doit avoir au moins $2(r+2)$ coefficients pour satisfaire les conditions initiales et finales, et doit donc être au moins de degré $2r+3$.

On note $T = t_f - t_i$, $\tau(t) = \frac{t-t_i}{T}$ et $y_j(t) = \sum_{k=0}^{2r+3} a_{j,k} \tau^k(t)$, $j = 1, \dots, m$.

Les coefficients $a_{j,k}$ seront calculés en utilisant les dérivés successives de y_j à l'instant initial et final (II.18) et (II.19), dont les dérivées successives de y_j sont données par

$$y_j^{(k)}(t) = \frac{1}{T^k} \sum_{l=k}^{2r+3} \frac{l!}{(l-k)!} a_{j,l} \tau^{l-k}(t), \quad j=1, \dots, m$$

donc à l'instant $\tau = 0$ qui correspond à $t = t_i$

$$y_j^{(k)}(t_i) = \frac{k!}{T^k} a_{j,l}, \quad k=0, \dots, r+1, \quad j=1, \dots, m$$

et à l'instant $\tau = 1$ qui correspond à $t = t_f$

$$y_j^{(k)}(t_f) = \frac{1}{T^k} \sum_{l=k}^{2r+3} \frac{l!}{(l-k)!} a_{j,l}, \quad k=0, \dots, r+1, \quad j=1, \dots, m$$

ce qui donne $2r+4$ équations pour $2r+4$ coefficients $(a_{j,0}, \dots, a_{j,2r+3})$ avec $j=1, \dots, m$. Ce système d'équation peut se réduire à $r+2$ équations pour $r+2$ coefficients $(a_{j,r+2}, \dots, a_{j,2r+3})$, puisque les $r+2$ premières équations sont résolues avec

$$a_{j,k} = \frac{T^k}{k!} y_j^{(k)}(t_i), \quad k=0, \dots, r+1$$

Les autres $r+2$ coefficients sont donnés par:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r+2 & r+3 & \dots & 2r+3 \\ (r+1)(r+2) & (r+2)(r+3) & \dots & (2r+2)(2r+3) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (r+2)! & \frac{(r+3)!}{2} & \dots & \frac{(2r+3)!}{(r+2)!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j,r+2} \\ \vdots \\ a_{j,2r+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_j(t_f) - \sum_{l=0}^{r+1} \frac{T^l}{l!} y_j^{(l)}(t_i) \\ \vdots \\ T^k \left(y_j^{(k)}(t_f) - \sum_{l=k}^{r+1} \frac{T^{l-k}}{(l-k)!} y_j^{(l)}(t_i) \right) \\ \vdots \\ T^{r+k} \left(y_j^{(r+1)}(t_f) - y_j^{(r+1)}(t_i) \right) \end{pmatrix}$$

II.4.1.1. Trajectoires de repos à repos

Si les points initiaux $(x(t_i), u(t_i))$ et finaux $(x(t_f), u(t_f))$ sont des points d'équilibre, on a $\dot{x}(t_i) = 0$, $\dot{u}(t_i) = 0$ et $\dot{x}(t_f) = 0$, $\dot{u}(t_f) = 0$.

Selon le Théorème II-1 $y(t_i)$, $y(t_f)$ sont des points d'équilibre, et en exploitant l'équation

$$\begin{aligned} x &= \varphi_0(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)}) \\ u &= \varphi_1(y, \dot{y}, \dots, y^{(r+1)}) \end{aligned}$$

on a :

$$x(t_i) = \varphi_0(y(t_i), 0, \dots, 0), \quad u(t_i) = \varphi_1(y(t_i), 0, \dots, 0) \quad (\text{II.20})$$

$$x(t_f) = \varphi_0(y(t_f), 0, \dots, 0), \quad u(t_f) = \varphi_1(y(t_f), 0, \dots, 0) \quad (\text{II.21})$$

Suivant les deux équations ci-dessus, on peut déduire facilement que toutes les dérivées de y sont remplacées par zéro dans les deux instants t_i et t_f .

II.4.1.2. Le problème de suivi

Pour résoudre le problème de la planification de la trajectoire, il suffit de connaître un modèle dynamique et le temps, c'est-à-dire les données anticipatives: la trajectoire de référence a été calculée dans un intervalle de temps en fonction de ce que nous savons de l'évolution du système. Si le modèle dynamique du système est complètement connu et si les perturbations ne produisent pas des écarts significatifs par rapport aux trajectoires de référence dans l'espace de travail, la conception en boucle ouverte peut être parfois suffisante. Cependant, si les perturbations créent des écarts significatifs par rapport aux trajectoires de référence, dans ce cas on peut fermer la boucle, en utilisant les mesures pour calculer à chaque fois l'écart par rapport à la trajectoire désirée et déduire un certain terme de correction dans le contrôle pour diminuer cet écart.

Pour un système plat, s'il y a suffisamment de capteurs pour mesurer tous les états du système, le suivi de trajectoire peut être conçu en établissant l'équivalence à un système trivial par bouclage dynamique endogène.

En effet, si y est une sortie plate d'un système dont la variable d'état est x et l'entrée u et si y_d est la trajectoire désirée de la sortie plate, on note $e_i = y_i - y_d$, $i = 1, \dots, m$ est l'erreur entre la sortie plate et sa trajectoire désirée.

On pose $y^{(r+1)} = v$ et $v_d = y_d^{(r+1)}$ donc l'erreur est

$$e^{(r+1)} = v - v_d + w$$

où w est un terme de perturbation non mesurée.

Il suffit alors de poser :

$$v_i = v_{di} - \sum_{j=0}^r k_{i,j} e_i^{(j)}, \quad i = 1, \dots, m$$

Les gains $k_{i,j}$ sont choisis de tel sorte que les racines des m polynômes,

$$s^{r+1} + \sum_{j=0}^r k_{i,j} s^{(j)} = 0, \quad i = 1, \dots, m \text{ ont la partie réelle négative. Par conséquent, si par exemple}$$

$w \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$, l'erreur e converge exponentiellement vers 0 :

$$e_i^{(r+1)} = -\sum_{j=0}^r k_{i,j} e_i^{(j)} + w_j, \quad i = 1, \dots, m$$

et toutes les sorties plates et leurs dérivées convergent vers leurs trajectoires désirées $y_d, \dots, y_d^{(r+1)}$. Utilisant l'isomorphisme de Lie-Bäcklund pour calculer x et u du système original à partir des sorties plates et leurs dérivées

$$x = \varphi_0(y, \dots, y^{(r)}), \quad u = \varphi_1(y, \dots, y^{(r)})$$

On conclut que les variables x et u du système original convergent localement de façon exponentielle vers leur référence.

II.5. Exemples

On va introduire quelques systèmes mécaniques qui sont différentiellement plats.

II.5.1. Masses-ressorts

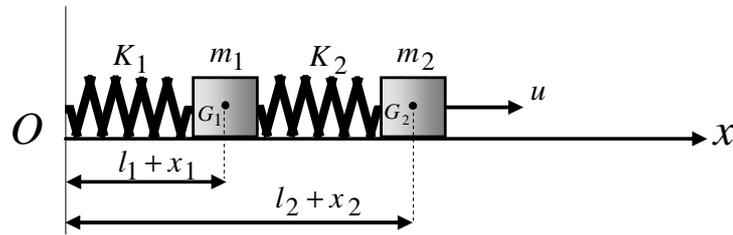


Figure II.1 Système masse-ressort

Considérons le système composé de deux corps rigides de masse m_1 et m_2 respectivement, reliés par deux ressorts de raideur K_1 et K_2 , soumises à des frottements visqueux $\gamma_1(\dot{x}_1)$ et $\gamma_2(\dot{x}_2)$, se déplaçant le long de l'axe (Ox) comme le montre la Figure II.1. La position des centres de gravité G_1 et G_2 des deux corps noté par $l_1 + x_1$ et $l_2 + x_2$ respectivement, où l_1 et l_2 représentent la position de G_1 et G_2 à l'état de repos.

Supposant que $\gamma_1(\dot{x}_1)$ et $\gamma_2(\dot{x}_2)$ sont positives, leurs dérivées secondes existent et continues, et $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 0$. Donc l'équation du mouvement du système en appliquant une entrée u au point G_2 , est donnée par :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + \gamma_1(\dot{x}_1) = k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + \gamma_2(\dot{x}_2) = u. \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

Pour représenter l'équation (II.22) sous forme implicite, il suffit d'éliminer la seconde équation, soit :

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + \gamma_1(\dot{x}_1) - k_2 (x_2 - x_1) = 0 \quad (\text{II.23})$$

A partir de la première partie de l'équation (II.22), on peut exprimer x_2 et u en fonction de x_1

$$x_2 = \frac{1}{k_2} (m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 + \gamma_1(\dot{x}_1)) \quad (\text{II.24})$$

En calculant la deuxième dérivée de l'équation (II.24), on trouve:

$$\ddot{x}_2 = \frac{1}{k_2} (m_1 x_1^{(4)} + (k_1 + k_2) \ddot{x}_1 + \gamma_1''(\dot{x}_1)) \quad (\text{II.25})$$

En substituant l'équation (II.25) dans la seconde équation de (II.22),

$$u = \frac{m_1 m_2}{k_2} x_1^{(4)} + \left(\frac{m_2 k_1}{k_2} + m_2 + m_1 \right) \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + \gamma_1(\dot{x}_1) + \frac{m_2}{k_2} \left(\gamma_1''(\dot{x}_1) \dot{x}_1^2 + \gamma_1'(\dot{x}_1) x_1^{(3)} \right) + \gamma_2(\dot{x}_2) \left(\frac{m_1}{k_2} x_1^{(3)} + \frac{1}{k_2} \left((k_1 + k_2) \dot{x}_1 + \gamma_1'(\dot{x}_1) \dot{x}_1 \right) \right) \quad (\text{II.26})$$

Ce qui montre que x_2 et u peuvent s'exprimer en fonction de x_1 et un nombre fini de ses dérivées, et ainsi que le système (II.22) est plat avec x_1 comme sortie plate.

On peut réécrire l'équation (II.26) comme :

$$x_1^{(4)} = \frac{m_1 m_2}{k_2} \left(u - f(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, x_1^{(3)}) \right) \quad (\text{II.27})$$

La rétroaction linéarisante est donnée par:

$$x_1^{(4)} = \varepsilon \quad (\text{II.28})$$

donc la linéarisation par bouclage est donnée par :

$$\varepsilon = \frac{m_1 m_2}{k_2} \left(u - f(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1, x_1^{(3)}) \right) \quad (\text{II.29})$$

L'équation (II.28) montre bien la relation linéaire entre la sortie plate et la commande ε , dans ce cas la linéarisation est par bouclage statique.

□

II.5.2. Portique en 2D

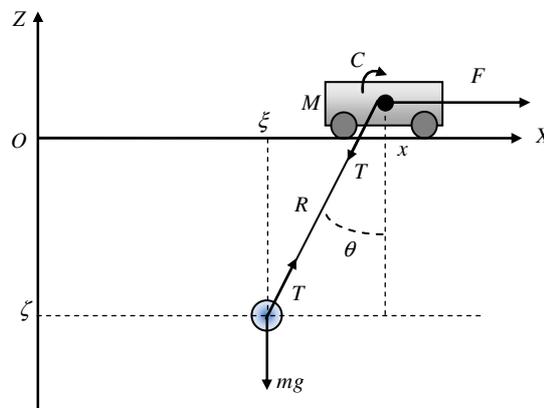


Figure II.2 Portique en deux dimensions.

Un chariot, de masse M , roule le long de l'axe (ox) d'un portique en deux dimensions (Figure II.2) déplaçant une charge dans le plan (oxz), sa position est dénotée par la coordonnée x . Il est actionné par un moteur qui produit une force horizontale d'intensité F . De plus, le chariot porte un treuil de rayon ρ autour duquel s'enroule un câble hissant une charge attachée à son extrémité. La position de la charge, de masse m , dans le repère fixe (oxz) est donnée par les coordonnées (ξ, ζ) . Le couple exercé sur le treuil, par un second moteur noté C . La longueur du câble, sa tension et son angle par rapport à l'axe vertical z sont notés par R , T et θ respectivement[46] [49]. L'espace de travail est limité par $R < R_0$ pour éviter que la charge touche le sol, et supposant que la tension du câble est positive. On utilise la convention de signe angulaire pour θ :

$$\begin{cases} \theta \leq 0 & \text{si } \xi \leq x \\ \theta > 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Supposons aussi que le frottement visqueux, noté $\gamma_1(\dot{x}_1)$, y compris le frottement aérodynamique du câble, opposant le mouvement du chariot et un autre frottement visqueux, noté $\gamma_2(\dot{R}_1)$, résiste au mouvement du treuil. Les fonctions γ_1 et γ_2 sont positives et $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 0$. Le câble du treuil est supposé rigide.

Le modèle mathématique du système, le chariot plus la masse, est donné par

$$\begin{cases} m\ddot{\xi} = -T \sin \theta \\ m\ddot{\zeta} = T \cos \theta - mg \\ M\ddot{x} = -\gamma_1(\dot{x}) + F + T \sin \theta \\ \frac{J}{\rho}\ddot{R} = -\gamma_2(\dot{R}) - C + T\rho \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

Les contraintes géométriques entre les coordonnées du chariot et de la charge sont :

$$\begin{cases} \xi = x + R \sin \theta \\ \zeta = -R \cos \theta \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

On note que ce modèle n'est pas donné sous forme explicite. Il contient les variables (T, θ) dont les dérivées n'apparaissent pas explicitement, et les deux équations différentielles et algébriques relient (ξ, ζ) à x, R, T et θ . En effet, une représentation explicite du système peut être obtenue en considérant les variables d'états $(x, \dot{x}, R, \dot{R}, \theta, \dot{\theta})$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{M}{m} + \sin^2 \theta\right) \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \left(\frac{J}{m\rho^2} + 1\right) 0 \\ \cos \theta & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{R} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R\dot{\theta}^2 + g \cos \theta) \sin \theta - \frac{1}{m} \gamma_1(\dot{x}) + \frac{F}{m} \\ R\dot{\theta}^2 + g \cos \theta - \frac{1}{m\rho} \gamma_2(\dot{R}) + \frac{C}{m\rho} \\ -2\dot{R}\dot{\theta} - g \sin \theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

après l'inversion de la matrice de la partie gauche de (II.32).

Cette représentation est obtenue comme suit :

d'abord, en dérivant l'équation (II.31) deux fois par rapport au temps

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = \ddot{x} + R \sin \theta + 2\dot{R}\dot{\theta} \cos \theta + R\ddot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \ddot{\zeta} = -\ddot{R} \cos \theta + 2\dot{R}\dot{\theta} \sin \theta + R\ddot{\theta} \sin \theta + R\dot{\theta}^2 \cos \theta \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

Ensuite, on combine les deux premières équations de (II.30) en deux étapes :

- Dans un premier temps en multipliant la première par $\cos \theta$ et la deuxième par $\sin \theta$ puis on fait la somme.
- Dans un second temps en multipliant la première par $\sin \theta$ et la deuxième par $\cos \theta$ puis on fait la soustraction.

On a :

$$\begin{cases} \ddot{\xi} \cos \theta + (\ddot{\zeta} + g) \sin \theta = 0, \\ m\ddot{\xi} \sin \theta - m(\ddot{\zeta} + g) \cos \theta = T. \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

En éliminant T des deux premières équations (II.30) :

$$\tan \theta = -\frac{\ddot{\xi}}{\ddot{\zeta} + g} \quad (\text{II.35})$$

et utilisant (II.31), on trouve:

$$\begin{cases} \tan \theta = -\frac{\xi - x}{\zeta}, \\ (\xi - x)^2 + \zeta^2 = R^2. \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

Pour terminer, éliminons θ de (II.35) et (II.36), on obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} (\ddot{\zeta} + g)(\xi - x) = \ddot{\xi}\zeta, \\ (\xi - x)^2 + \zeta^2 = R^2. \end{cases} \quad (\text{II.37})$$

Ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \xi - \frac{\ddot{\xi}\zeta}{\ddot{\zeta} + g}, \\ R^2 = \zeta^2 + \left(\frac{\ddot{\xi}\zeta}{\ddot{\zeta} + g} \right), \\ \theta = \arctan \left(\frac{\ddot{\xi}}{\ddot{\zeta} + g} \right), \\ T^2 = m^2 \left(\ddot{\xi}^2 + (\ddot{\zeta} + g)^2 \right). \end{array} \right. \quad (\text{II.38})$$

puis, en utilisant les deux dernières équations de (II.30), on trouve :

$$\begin{aligned} F &= M\ddot{x} + \gamma_1(\dot{x}) - T \sin \theta \\ &= (M + m)\ddot{\xi} - M \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\ddot{\xi}\zeta}{\ddot{\zeta} + g} \right) + \gamma_1(\dot{x}) \left(\xi - \frac{d}{dt} \left(\frac{\ddot{\xi}\zeta}{\ddot{\zeta} + g} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

Et par conséquent :

$$\begin{aligned} C &= -\frac{J}{\rho} \ddot{R} - \gamma_2(\dot{R}) + T \rho \\ &= -\frac{J}{\rho} \frac{d^2}{dt^2} \sqrt{\zeta^2 + \left(\frac{\ddot{\xi}\zeta}{\ddot{\zeta} + g} \right)^2} - \gamma_2 \left(\frac{d}{dt} \sqrt{\zeta^2 + \left(\frac{\ddot{\xi}\zeta}{\ddot{\zeta} + g} \right)^2} \right) + m\rho \sqrt{\ddot{\xi}^2 + (\ddot{\zeta} + g)^2} \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

Les variables du système x, R, θ, T, F, C , y compris l'entrée, peuvent être exprimées en fonction de ξ et ζ (les coordonnées de la charge considérées comme des sorties plates) et ses dérivées, Ce qui montre que la portique est un système plat.

II.5.3. Robot mobile à deux roues différentielles

Considérons le robot défini dans la section I.3 et supposons que le point de son centre de gravité G coïncide avec le point milieu de l'axe des roues, (x, y) sont les coordonnées cartésiennes par rapport à la référence fixe (oxy) et θ son angle d'orientation.

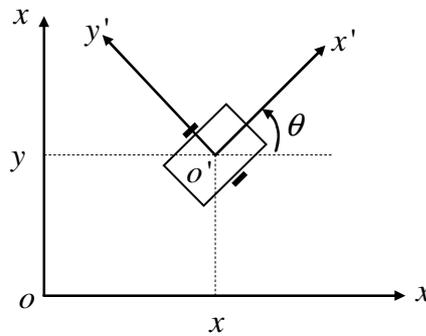


Figure II.3 Robot mobile à deux roues différentielles.

Le modèle cinématique du robot est :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

v, ω : sont les variables de commande du robot. On réécrit l'équation (II.41) sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (\text{II.42})$$

L'équation (II.42) présente la singularité, on doit la différencier encore une fois[50]:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{v} \cos \theta - v \omega \sin \theta \\ \ddot{y} = \dot{v} \sin \theta + v \omega \cos \theta \end{cases} \quad (\text{II.43})$$

où \dot{v} est la nouvelle entrée du système.

Utilisons les équations (II.41), (II.42) et (II.43) pour calculer v, \dot{v}, θ et $\dot{\theta}$ en fonction de x, y et leurs dérivées :

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right), \quad \dot{\theta} = \omega = \frac{\dot{x}\ddot{y} + \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad \dot{v} = \frac{\dot{x}\ddot{y} + \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

Donc toutes les variables $x, y, \theta, v, \dot{v}, \omega$ sont exprimées en fonction de $x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}$ ce qui montre que x, y sont des sorties plates et le robot peut être considéré comme système plat.

Remarque II-1 dans ce cas la linéarisation est par bouclage dynamique, contrairement au cas de la masse ressort.

□

II.5.4. Exemple d'application : manipulateur mobile plan

Considérons le manipulateur mobile plan[51] évoluant sur le plan (oxy) , composé d'un bras manipulateur, θ_1, θ_2 ses variables articulaires, monté sur une plate-forme mobile à deux roues différentielles, x, y ses coordonnées cartésiennes et θ son angle d'orientation.

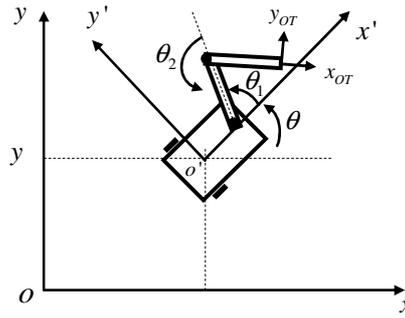


Figure II.4 Manipulateur mobile plan.

Le modèle cinématique du manipulateur mobile est donné par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.45})$$

Le problème sera traité séparément, pour la plate-forme mobile puis pour le bras manipulateur, c.à.d. en définissant les sorties plates pour chaque sous système. La plate-forme mobile a été traitée dans le paragraphe II.5.3, il reste de définir les sorties plates pour le bras manipulateur. Le modèle cinématique de ce dernier est :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.46})$$

$[w_1 \ w_2]^T$ est le vecteur de commande. On peut déduire que θ_1, θ_2 sont des sorties plates pour le bras manipulateur.

- **Conception du contrôleur**

On définit le vecteur des sorties plates du manipulateur mobile comme

$$[F_1, F_2, F_3, F_4] = [x, y, \theta_1, \theta_2] \quad (\text{II.47})$$

Les équations (II.43) et (II.46) peuvent être linéarisées en utilisant le changement d'entrées suivant:

$$\ddot{F}_1 = \sigma_1, \ddot{F}_2 = \sigma_2, \dot{F}_3 = \sigma_3, \dot{F}_4 = \sigma_4 \quad (\text{II.48})$$

Considérons les trajectoires désirées des sorties plates $F_i^d(t), i = 1, \dots, 4$ (qui seront planifiées par la suite), la loi de commande pour les nouvelles entrées peut être définie par :

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \ddot{F}_1^d + p_1 \dot{e}_1 + p_2 e_1 \\
\sigma_2 &= \ddot{F}_2^d + q_1 \dot{e}_2 + q_2 e_2 \\
\sigma_3 &= \dot{F}_3^d + r_3 e_3 \\
\sigma_4 &= \dot{F}_4^d + r_4 e_4
\end{aligned} \tag{II.49}$$

Où $p_1, p_2, q_1, q_2, r_3, r_4$ sont les gains du contrôleur et $e = F_i^d - F_i$ est l'erreur entre la trajectoire désirée et celle mesurée des sorties plates.

L'équation (II.49) peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned}
\ddot{e}_1 + p_1 \dot{e}_1 + p_2 e_1 &= 0 \\
\ddot{e}_2 + q_1 \dot{e}_2 + q_2 e_2 &= 0 \\
\dot{e}_3 + r_3 e_3 &= 0 \\
\dot{e}_4 + r_4 e_4 &= 0
\end{aligned} \tag{II.50}$$

Les gains du contrôleur peuvent être choisis de telle sorte que toutes les racines des équations caractéristiques de l'erreur (II.50) (en boucle fermée) se trouvent dans le demi-plan gauche du plan complexe, pour assurer la stabilité exponentielle.

- *Trajectoires désirées*

En se basant sur un simple polynôme pour planifier les trajectoires désirées pour un ensemble de conditions initiales données. Compte tenu de l'intervalle de temps $t \in [0, T]$ et les conditions initiales des variables d'états et des entrées du système:

$$\begin{aligned}
&x(0), y(0), v(0), \dot{v}(0), \omega(0), \theta_1(0), \theta_2(0), \dot{\theta}_1(0), \dot{\theta}_2(0) \\
&x(T), y(T), v(T), \dot{v}(T), \omega(T), \theta_1(T), \theta_2(T), \dot{\theta}_1(T), \dot{\theta}_2(T).
\end{aligned} \tag{II.51}$$

Qui sont transformés en des conditions initiales correspondantes dans les sorties plates utilisant (II.44) et (II.46):

$$\begin{aligned}
&F_1(0), \dot{F}_1(0), \ddot{F}_1(0), F_2(0), \dot{F}_2(0), \ddot{F}_2(0), F_3(0), \dot{F}_3(0), \ddot{F}_3(0), \dot{F}_4(0), \ddot{F}_4(0) \\
&F_1(T), \dot{F}_1(T), \ddot{F}_1(T), F_2(T), \dot{F}_2(T), \ddot{F}_2(T), F_3(T), \dot{F}_3(T), \ddot{F}_3(T), \dot{F}_4(T), \ddot{F}_4(T).
\end{aligned} \tag{II.52}$$

Les trajectoires $F_i^d(t)$, où $i=1,2,3,4.$, planifiées dans l'espace des sorties plates doivent satisfaire ces conditions initiales.

On va utiliser dans cet exemple, pour les trajectoires désirées $F_i^d(t)$, la forme polynomiale suivante :

$$\begin{aligned}
F_1^d(t) &= a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t^1 + a_0, \\
F_2^d(t) &= b_5 t^5 + b_4 t^4 + b_3 t^3 + b_2 t^2 + b_1 t^1 + b_0, \\
F_3^d(t) &= c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t^1 + c_0, \\
F_4^d(t) &= d_3 t^3 + d_2 t^2 + d_1 t^1 + d_0.
\end{aligned} \tag{II.53}$$

Les coefficients $a_j, b_j, c_k, d_k, (j=0...5, k=0...3)$ sont déterminés en utilisant les conditions

initiales (II.52).

• *Résultats de simulation*

Le schéma bloc du contrôleur du manipulateur mobile plan est donné dans la Figure II.5, qui comporte trois blocs principaux : le premier bloc utilisé pour la planification des trajectoires et la conception du contrôleur, le deuxième bloc est utilisé pour le passage de l'espace des sorties plates vers l'espace des états du système et le dernier bloc représente les équations des états du système.

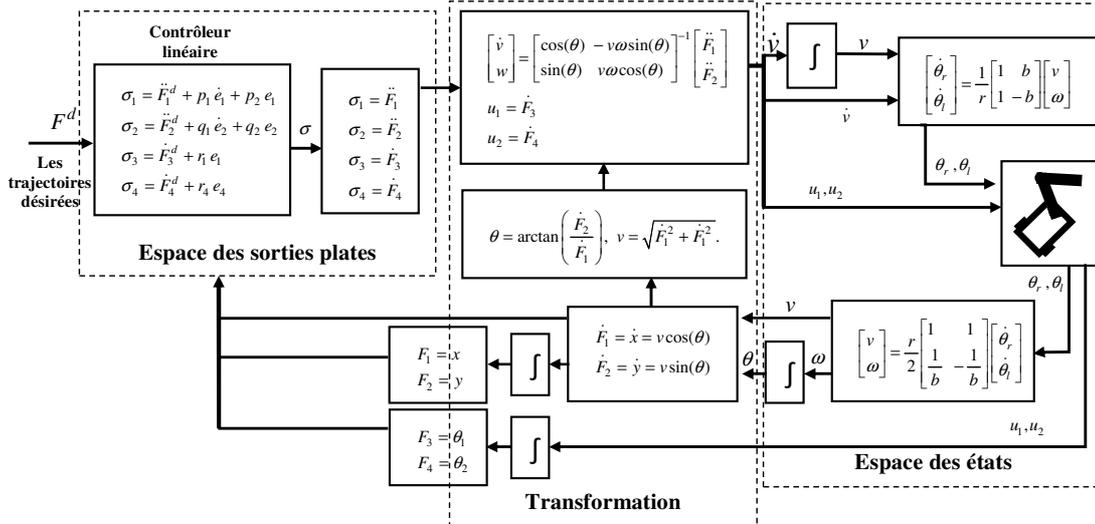


Figure II.5 Le schéma bloc du contrôleur basé sur la platitude.

Les figures Figure II.6 et Figure II.8 présentent les variables d'états du manipulateur mobile. On constate que les trajectoires mesurées sont superposées sur les trajectoires désirées, ce qui est traduit par les courbes des erreurs données dans les figures Figure II.7 et Figure II.9, qui restent très faibles tout au long du déplacement du robot.

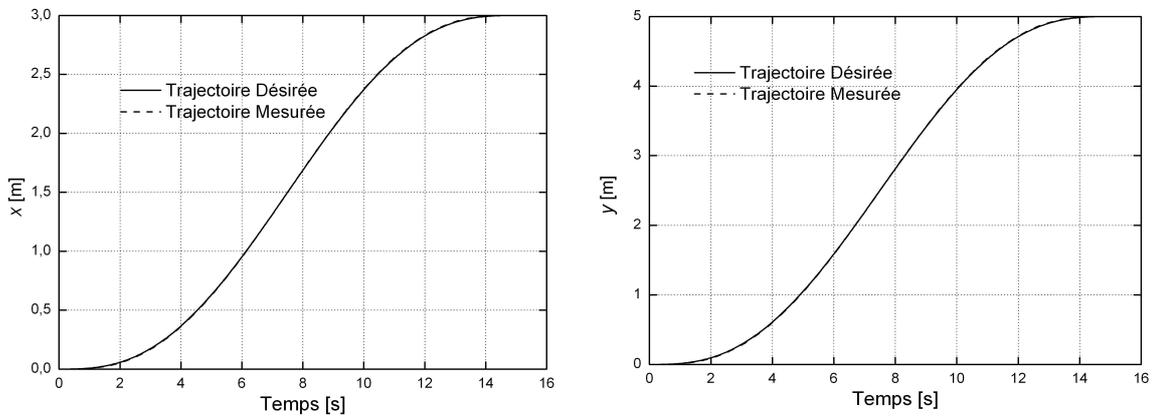


Figure II.6 Suivi de trajectoire de la plate-forme mobile.

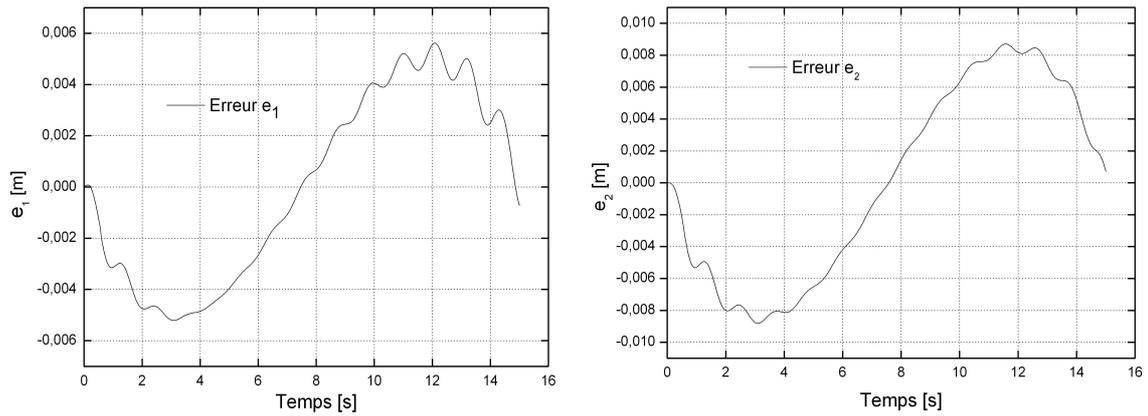


Figure II.7 Erreur de suivi.

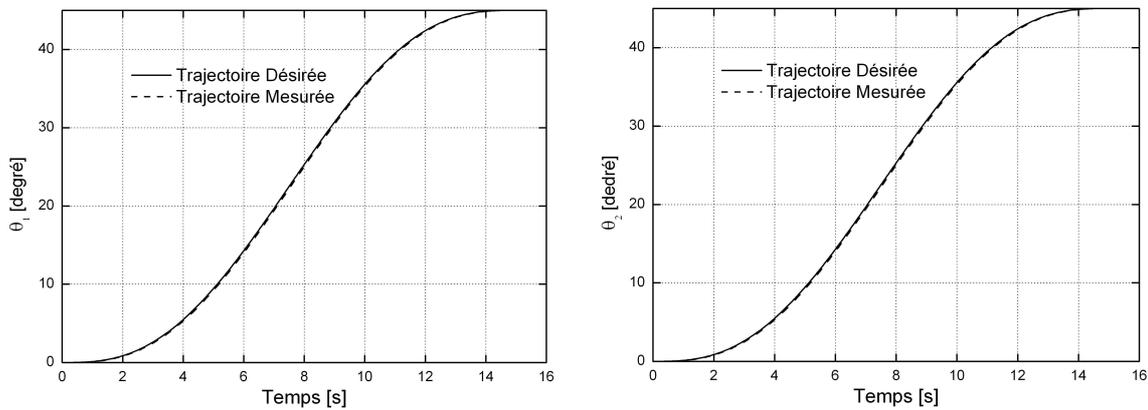
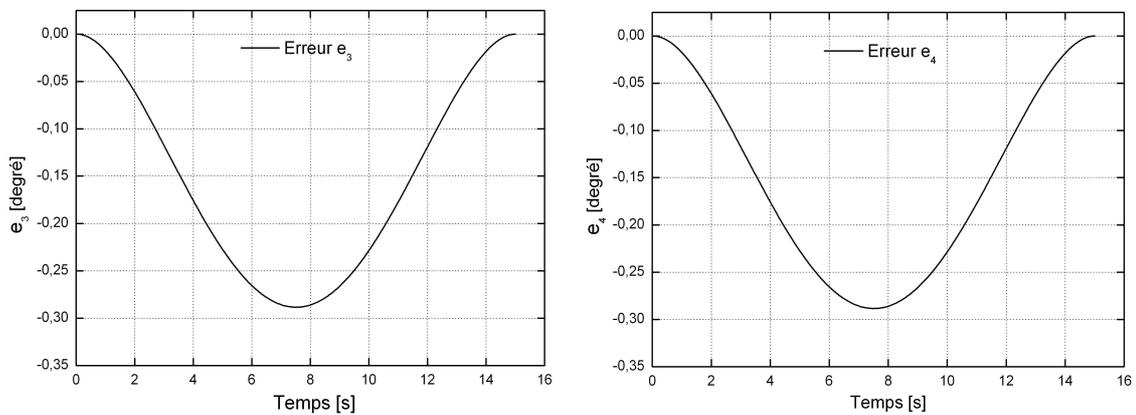
Figure II.8 Suivi de trajectoire des variable articulaires : θ_1, θ_2 .

Figure II.9 Erreur de suivi.

II.6. Conclusion

Quelques notions de base sur la platitude différentielle et le système plat sont présentées. La platitude offre une simplicité de conception de contrôleur et la planification de trajectoires des systèmes dans l'espace plat. Malgré cela ce type de linéarisation par rétroaction reste limitée vis-à-vis de la sensibilité des incertitudes du système et les perturbations externes, l'idée principale dans ce travail est d'utiliser un contrôleur basé sur le mode glissant, ce qui est l'objectif du chapitre suivant.

CHAPITRE III

MODE GLISSANT

III.1. Introduction

La prise en compte des différentes sources d'incertitudes dans le développement d'une loi de commande est nécessaire pour améliorer les performances du système en termes de la précision et de la robustesse de la tâche exécutée. Ces incertitudes peuvent être de nature paramétrique, comme par exemple les propriétés dynamiques du système, ou encore de nature non paramétrique, comme par exemple des phénomènes non modélisés. Pour résoudre ce problème, des recherches sont menées dans le développement des techniques de commande robustes, telles que, la commande connue par H_∞ [52] [53] [54], la commande adaptative [55] [56] [31] et la commande par mode glissant (SMC) qui constitue le sujet principal du présent chapitre. Il est devenu plus populaire grâce à sa simplicité d'implémentation, ses propriétés de robustesse contre les incertitudes/perturbations externes et son application aux systèmes linéaires et non linéaires. Le SMC permet de remplacer les problèmes de $n^{\text{ième}}$ ordre par des problèmes de premier ordre équivalents [31].

Dans ce chapitre, on va commencer par quelques définitions de base de la théorie par mode glissant, ensuite des étapes de conception du contrôleur basé sur SMC. On va diminuer le chattering, le problème majeur de cette commande, en utilisant un contrôleur basé sur un gain dépendant de l'état. On finira par un exemple d'application sur un système du deuxième ordre.

III.2. Préliminaires

III.2.1. Systèmes à structure variable et modes glissants

Le concept des "SYSTÈMES A STRUCTURE VARIABLE" (Variable Structure system (VSS)) et ses applications à la théorie du contrôle sont principalement issus des travaux de chercheurs de l'ancienne Russie, à partir des années soixante [57] [58] [59] [60] [61].

En principe, les VSS peuvent être représentés par la connexion en parallèle de plusieurs sous-systèmes continus différents (appelés "STRUCTURES") qui agissent à la fois dans le chemin d'entrée-sortie (voir Figure III.1). Une certaine logique de commutation planifiée dans le temps les structures pertinentes qui peuvent être contrôlées ou autonomes.

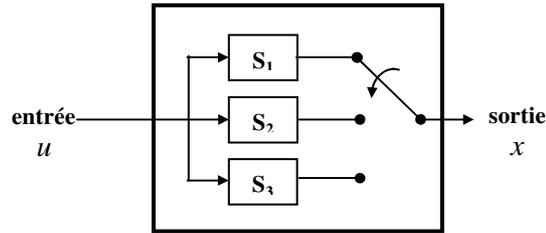


Figure III.1 Représentation d'un VSS contrôlé.

Une description mathématique possible du VSS présentée dans la Figure III.1 est :

$$\dot{x} = \begin{cases} x+u & \text{si } x < -1 \\ 2+u & \text{si } -3 < x < 2 \\ -3x+u & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

III.2.2. Condition de Filippov

La dynamique des VSSs est caractérisée par une équation différentielle avec le côté droit discontinu[62], Filippov a d'abord donné la solution pour ce type de système. La direction de mouvement d'un point le long de la surface de glissement est spécifiée par un vecteur (F_0) de Filippov. Selon Filippov, si l'état du vecteur de mouvement d'un côté de la surface de glissement est F^+ et de l'autre côté est F^- , alors le vecteur résultant est donné par la somme des deux vecteurs.

$$F_0 = \mu F^+ + (1-\mu)F^-, \quad 0 < \mu < 1 \quad (\text{III.1})$$

Le paramètre μ dépend des amplitudes et directions des vecteurs F^+ , F^- et du gradient de la surface de glissement s . Dans le cas de n vecteurs, cette condition est généralisée à une combinaison linéaire de tous les vecteurs où la somme des coefficients de la combinaison est l'unité (Figure III.2).

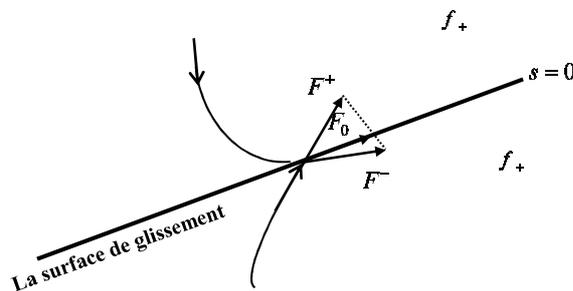


Figure III.2 la condition de Filippov.

III.3. Commande par mode glissant (SMC)

III.3.1. Formulation de problème

On considère le système mono-entrée, mono-sortie (single-input/single-output SISO) décrit par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t) & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n(t) = f(x) + b(x)u(t) + d(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

avec : $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ est le vecteur d'état, $f(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions, non linéaires mesurables, du temps et des états, avec : $b(x) \geq b > 0$ ou b est une constante donnée ; $u(t)$: est la commande. $d(t)$: est une fonction inconnue introduite pour exprimer les incertitudes de modélisation et les perturbations externe et considérée comme étant bornée: $|d(t)| \leq D$.

L'objectif de la commande est de suivre avec précision une entrée désirée $x_d(t)$, malgré la présence d'incertitudes, l'imprécision du modèle et les variations paramétriques dans $f(x)$ et $b(x)$, c.à.d. $e(t) = x(t) - x_d(t)$ tend vers zéro malgré la présence des incertitudes.

III.3.2. Conception de la commande par mode glissant (SMC)

L'approche de la commande par mode glissant comporte deux étapes:

- **La première** étape est le choix d'une surface, linéaire ou non, (en conséquence appelée "surface de glissement") dans l'espace d'état de sorte que le système contrôlé montre les performances désirées.
- **La seconde** étape est représentée par la conception d'un retour d'état discontinu capable de forcer la variable d'état du système à atteindre, en temps fini, une telle surface et rester sur cette surface.

III.3.2.1. Surface de glissement

- Définition

Soit $s(x, t) : X \times R^+ \rightarrow R$ une fonction suffisamment différentiable et considérée telle que son annulation permettra de satisfaire l'objectif de commande [31]. La fonction $s(x, t)$ est appelée variable de glissement ou de commutation.

L'ensemble : $s(t) = \{x / s(x, t) = 0\}$ représente alors une sous-variété de x de dimension $(n-1)$ appelée surface de glissement ou contrainte de commutation.

- **Choix de la surface de glissement**

La surface de glissement peut avoir la forme d'un Polynôme de Hurwitz. Dans ce cas la surface de glissement $s(t)$ est un polynôme monique et est une combinaison linéaire des variables d'états du système.

$$s(x, t) = e^{n-1} + \dots + c_2 \ddot{e} + c_1 \dot{e} + c_0 e \quad (\text{III.3})$$

où $e(t) = x(t) - x_d(t)$ et n est l'ordre du système.

Les coefficients $c_i (0 \leq i \leq n-2)$ sont choisis de telle sorte que les racines du polynôme (III.3) ont une partie réelle négative.

La difficulté réside dans le choix des coefficients c_i pour des grandes valeurs de n . Slotine [31] propose une forme générale pour déterminer la surface de glissement qui assure la convergence d'une variable vers sa valeur désirée :

$$s(x, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e(t), \quad \lambda > 0 \quad (\text{III.4})$$

λ est une constante positive qui assure que (III.4) est un polynôme d'Hurwitz. Par exemple pour $n = 2$ la surface de glissement est égale à $s(t) = \dot{e}(t) + \lambda e(t)$.

- **Degré relatif**

Le degré relatif est défini comme le nombre de fois que la sortie d'un système doit être dérivée pour que l'entrée de commande apparaisse.

Un régime glissant d'ordre n existe sur la surface s si et seulement si le système (III.2) est de degré relatif n par rapport à $s(x, t)$.

- **Condition d'attractivité**

Dans la littérature de la commande par mode glissant, l'entrée de commande est conçue pour assurer l'attractivité. Cette condition spécifie si les trajectoires des variables d'états du système sont toujours confinées vers la surface de glissement ou non. L'attractivité de la surface de glissement peut être exprimée par:

1. La limite de la surface de glissement

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} < 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} s > 0 \quad (\text{III.5})$$

La condition ci-dessus garantit que s et \dot{s} ont des signes opposés, c.-à-d. $s\dot{s} < 0$.

2. La proposition d'une fonction de Lyapunov de la forme

$$V = \frac{1}{2} s^2 \quad (\text{III.6})$$

La condition d'attractivité est vérifiée si la dérivée de V est définie négative, c.-à-d.

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} s^2 = s\dot{s} < 0 \quad (\text{III.7})$$

Malgré la présence d'incertitudes, la loi de commande est conçue pour assurer une convergence temporelle à la surface de glissement. Par conséquent, une condition d'attractivité plus restrictive est donnée par:

$$s\dot{s} \leq -\eta|s| \quad (\text{III.8})$$

La condition (III.8) est appelée condition η -d'attractivité qui assure une convergence temporelle finie à $s = 0$.

- Temps de convergence

Le temps nécessaire pour atteindre la surface de glissement est connu comme le temps de convergence. Après avoir atteint la surface de glissement, les trajectoires se déplacent vers le point d'équilibre, cette dernière phase est appelée la phase de glissement ou le mode glissant. Pendant le mode de convergence, les trajectoires sont sensibles aux perturbations, aux incertitudes et aux variations paramétriques. Cependant, les trajectoires sont insensibles pendant le mode glissant[63]. L'idée de mode glissant peut être décrite comme dans la Figure III.3.

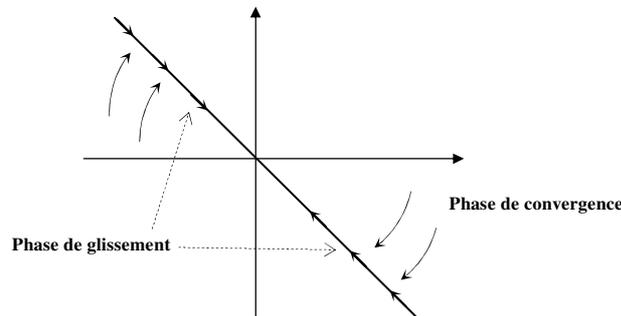


Figure III.3 l'idée de mode glissant.

à partir de l'équation (III.8), on a :

$$\begin{cases} \text{pour } s > 0 \rightarrow \dot{s} \leq -\eta \\ \text{pour } s < 0 \rightarrow \dot{s} \geq \eta \end{cases}$$

Par conséquent, on peut écrire

$$\eta \leq \dot{s} \leq -\eta \quad (\text{III.9})$$

On intègre l'équation (III.9), on trouve :

$$\eta t \leq s(t) - s(0) \leq -\eta t \quad (\text{III.10})$$

quand $t = t_{reach}$, $s(t_{reach}) = 0$ (t_{reach} est le temps de convergence) donc : $-\eta t_{reach} \leq s(0) \leq \eta t_{reach}$ ou bien $|s(0)| \leq \eta t_{reach}$.

On déduit qu'à partir d'une condition initiale $s(0)$, le temps nécessaire pour atteindre la surface de glissement [64] est donné par

$$t_{reach} = \frac{|s(0)|}{\eta} \tag{III.11}$$

III.3.2.2. Loi de commande

La deuxième étape est la conception d'une commande discontinue qui entraînera les trajectoires d'état du système vers la surface de glissement et, lorsqu'elle est atteinte, maintiendra le mouvement de glissement sur celle-ci pour toutes les périodes subséquentes

Dans les systèmes à structure variable basé sur la commande par mode de glissement, trois schémas de régulation sont possibles[65].

- Le schéma de la structure par commutation au niveau de l'organe de commande est donné sur la Figure III.4. Elle correspond au fonctionnement tout ou rien des interrupteurs de puissance.

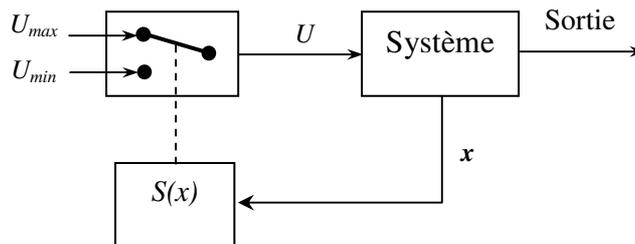


Figure III.4 Structure de régulation par commutation au niveau de l'organe de commande d'état. Dans ce cas la loi de commutation est donnée selon

$$U = \begin{cases} U_{max} & \text{si } S(x) > 0 \\ U_{min} & \text{si } S(x) < 0 \end{cases}$$

- Le schéma de la structure par commutation au niveau d'une contre réaction d'état est illustré dans la Figure III.5. Elle s'appuie sur la commande par contre réaction d'état classique où le réglage de la dynamique du système est réalisé par les gains de réglage.

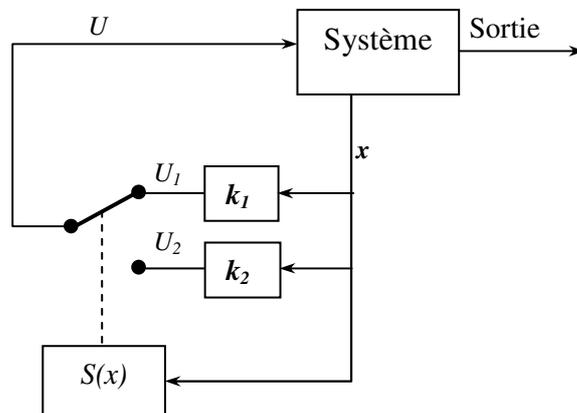


Figure III.5 Structure de régulation par commutation au niveau de la contre réaction d'état.

La loi de commutation en fonction de contre-réaction d'état est donnée par

$$U = \begin{cases} U_1 = k_1 x & \text{si } S(x) > 0 \\ U_2 = k_2 x & \text{si } S(x) < 0 \end{cases}$$

- Le schéma de la structure par commutation au niveau de l'organe de commande en ajoutant une commande équivalente Figure III.6.

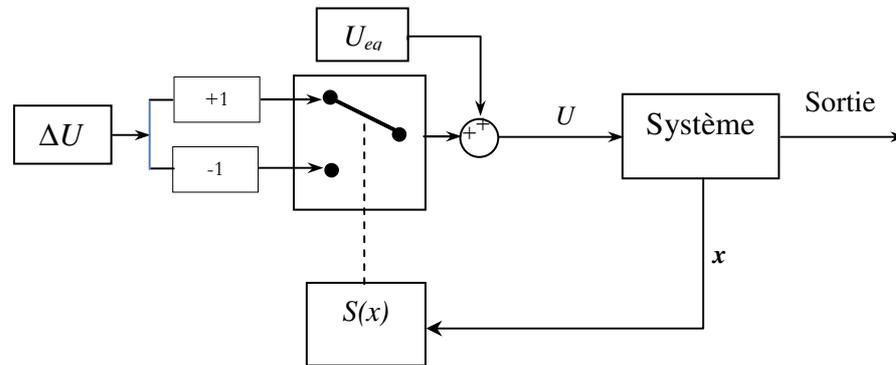


Figure III.6 Structure de régulation par ajout de la commande équivalente.

Cette structure permet de pré-positionner l'état futur du système grâce à la commande équivalente.

III.3.2.3. Commande par mode glissant à base de la commande équivalente

Une procédure simple permet de calculer facilement et de manière systématique un algorithme de commande par mode glissant d'ordre un.

La commande par mode glissant se décompose généralement ainsi : $u = u_{eq} + u_{sw}$ où u_{eq} représente la commande équivalente, et u_{sw} est l'action discontinue (de commutation).

- u_{eq} déterminée à partir de la condition de convergence permet de décrire le mouvement de glissement idéal, c'est-à-dire dans le cas d'un système sans incertitudes. Elle est obtenue grâce aux conditions d'invariance de la surface donnée par : $s = \dot{s} = 0$
- u_{sw} est l'action discontinue qui assure la convergence en temps fini vers la surface de glissement et le rejet d'une certaine classe de perturbations. La forme la plus simple est la fonction relais donnée par l'équation :

$$sign(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \\ -1 & \text{si } s < 0 \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

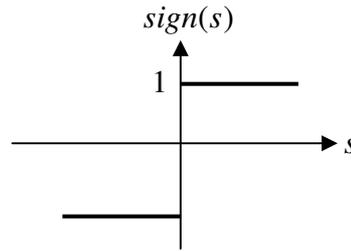


Figure III.7 Fonction $sign$.

Arrivée à la perturbation, l'amplitude de la discontinuité doit être supérieure aux bornes dans lesquelles évoluent les incertitudes de modèle et les perturbations.

La commande équivalente u_{eq} peut être perçue comme un moyen, dans le cas d'un système incertain, de minimiser la composante haute fréquence d'une commande à régime glissant classique représentée par u_{sw} .

Exemple III-1

Soit un système non-linéaire suivant :

$$\ddot{x} = f(x, t) + g(x, t)u(t) \quad (\text{III.13})$$

Où : $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathfrak{R}$ est l'entrée de commande. $f(x, t)$, $g(x, t)$ sont des fonctions non-linéaires de temps et des états.

Pour la conception de la commande, une surface de glissement linéaire $s(x)$ est définie par

$$s(x) = \lambda e + \dot{e}$$

λ est une constante positive et $e = x - x_d$ est l'erreur entre l'état mesuré et l'état désiré.

La dérivée temporelle de la surface de glissement est

$$\begin{aligned} \dot{s}(x) &= \lambda(\dot{x} - \dot{x}_d) + (\ddot{x} - \ddot{x}_d) \\ &= \lambda(\dot{x} - \dot{x}_d) + (f(x, t) + g(x, t)u(t) - \ddot{x}_d) \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Le terme $g(x, t)$ est supposé inversible. La commande équivalente correspondante est écrite comme :

$$u_{eq} = \frac{1}{g(x, t)} (-\lambda(\dot{x} - \dot{x}_d) - (f(x, t) - \ddot{x}_d)) \quad (\text{III.15})$$

Pour rendre la loi de commande robuste contre les incertitudes, un terme discontinu est ajouté

$$u_{sw}(t) = \begin{cases} u^+(s) & \text{sign}(s(x)) > 0 \\ u^-(s) & \text{sign}(s(x)) < 0 \end{cases} \quad u^+ \neq u^- \quad (\text{III.16})$$

Donc la loi de contrôle comprend deux termes

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_{sw}(t)$$

où u_{sw} est le contrôle correctif utilisé pour atteindre la surface de glissement et compenser les

écarts par rapport à cette surface et u_{eq} est la commande équivalente utilisée pour rester sur cette surface et pour rendre la dérivée de la surface de glissement égale à zéro.

La loi de commande totale incluant la commande équivalente est :

$$u(t) = \frac{1}{g(x,t)} (-\lambda(\dot{x} - \dot{x}_d) - (f(x,t) - \ddot{x}_d)) - k \text{sign}(s(x)) \quad (\text{III.17})$$

où k est le gain de commutation qui peut être sélectionné en fonction de la condition d'attractivité. \square

III.4. Problème de chattering

Le terme chattering, dans la commande par mode glissant, décrit le phénomène des oscillations de fréquence finie et d'amplitude finie (voir Figure III.8) apparaissant quand les trajectoires du système atteignent la surface de glissement. Ces oscillations sont causées soit par une dynamique rapide qui a été négligée dans le processus de modélisation, soit par l'utilisation d'un contrôleur discontinu avec une fréquence d'échantillonnage finie[66]. Le chattering éventuel peut être réduit par l'une des méthodes suivantes[67] [68]: mode glissant d'ordre deux, solution de couche limite, solution basée sur un observateur, méthode de gain dépendant de l'état qui sera présenté dans la suite de cette partie.

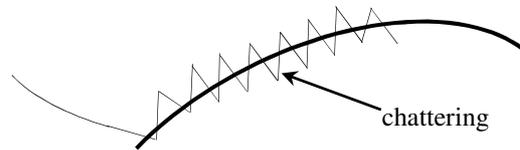


Figure III.8 Phénomène de chattering.

III.4.1. Mode glissant d'ordre deux

Un contrôleur par mode glissant d'ordre deux (SOSMC) est un cas particulier de contrôle par mode glissant d'ordre supérieur qui préserve les propriétés désirables, notamment l'invariance et la réduction d'ordre, mais permet de réduire leur principal inconvénient : l'effet de « chattering » au voisinage de la surface de glissement [69] [70].

Il existe une grande variété de propositions de contrôleurs par mode glissant de second ordre qui apporte des solutions au problème de chattering. Dans cette section, trois algorithmes les plus connus seront présentés, notamment l'algorithme Twisting, Super Twisting et Sous-Optimale (Sub-Optimal).

Considérons le système décrit par l'équation suivante :

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u \quad (\text{III.18})$$

$x \in \mathfrak{X}^n$ est le vecteur d'état du système, $f(t, x)$, $g(t, x)$ sont deux fonctions continues et u la

commande du système.

On définit la surface de glissement par : $s = s(t, x) \in \mathfrak{R}$

- **Algorithme Super-Twisting**

L'un des algorithmes les plus utilisés, est particulièrement destiné aux systèmes de degré relatif un. La commande par mode glissant basée sur cet algorithme est donnée par :

$$v(t) = v_1 + v_2 ; \text{avec} \begin{cases} v_1 = -\alpha |s|^t \text{sign}(s), & t \in]0, 0.5] \\ v_2 = \beta \text{sign}(s) \end{cases} \quad (\text{III.19})$$

Avec α, β des constantes positives.

- **Algorithme Twisting**

Il est principalement destiné aux systèmes de degré relatif deux. L'algorithme Twisting (TA) peut être écrit par :

$$u(t) = -a \text{sign}(s) - b \text{sign}(\dot{s}) \quad (\text{III.20})$$

Avec a, b constantes positives.

Cet algorithme est principalement destiné aux systèmes de degré relatif deux. Donc pour adapter cet algorithme pour un système avec un degré relatif égal à un, on doit prendre la dérivée de la commande u comme une nouvelle entrée, comme le montre le schéma suivant :

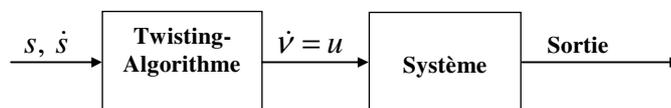


Figure III.9 Twisting Algorithme pour l'atténuation du chattering.

L'entrée de commande u est définie dans ce cas comme une sortie d'un intégrateur ce qui permet de lisser la commande.

Derrière cet algorithme de mode glissant d'ordre deux, il existe plusieurs approches qui ont pour but fondamental l'atténuation du phénomène du chattering, par exemple :

- Vazquez *et al* [71], Orlov *et al* [72] proposent de combiner le twisting algorithm avec un PD (Proportionnel + Dérivateur) classique.

$$u(t) = -K_p s - K_d \dot{s} - a \text{sign}(s) - b \text{sign}(\dot{s}) \quad (\text{III.21})$$

Cette structure est principalement similaire à l'approche de la commande équivalente.

- Torres-González *et al* [73], Sanchez *et al* [74] ont développé une nouvelle version de twisting algorithm sous le nom de « Continuous TA ». L'idée est toujours de soutenir la commande discontinue avec une commande continue. La partie continue est définie dans ce cas comme l'intégrale d'une commande discontinue.

$$\begin{aligned} u &= -k_1 |s|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(s) - k_2 |\dot{s}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\dot{s}) + \eta \\ \dot{\eta} &= -k_3 \text{sign}(s) - k_4 \text{sign}(\dot{s}) \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

- Algorithme Sous-Optimal

De manière similaire de l'algorithme Twisting, ce contrôleur est principalement destiné aux systèmes relatifs degré deux. La commande par mode glissant basée sur cet algorithme est donnée par :

$$u = -\alpha(t)U \text{sign}(s - \beta s_M) \quad (\text{III.23})$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } (s - \beta s_M)s_M \geq 0 \\ \alpha^* & \text{si } (s - \beta s_M)s_M < 0 \end{cases}$$

Où : $\alpha^* > 1$, $0 \leq \beta < 1$, $U > 0$ et s_M est la dernière valeur de s au moment où sa dérivée \dot{s} atteint zéro.

III.4.2. Approche par couche limite

L'approche de la couche limite s'adresse au chattering en augmentant les dimensions physiques de la surface de glissement de telle sorte que les modes de glissement seraient établis à la proximité de la surface plutôt qu'exactement à la surface.

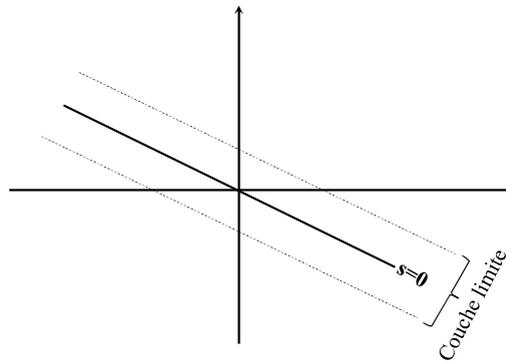


Figure III.10 Couche limite.

III.4.3. Approche basée sur l'observateur

La dynamique non modélisée d'un système physique est l'une des causes mises en évidence de la production de chattering. Cette méthode met en œuvre le SMC avec un observateur convergent asymptotique dans la boucle fermée. L'observateur est destiné à contourner la dynamique non modélisée et donc à produire un mode de glissement presque idéal.

III.5. Méthode de gain dépendant de l'état

Cette section offre une autre méthode d'atténuer le phénomène de chattering sans avoir conçu un système supplémentaire comme par exemple dans le cas d'un observateur asymptotique qui a besoin d'informations préliminaires sur le système. Dans [32], les auteurs ont démontré que

l'amplitude de chattering est proportionnelle à un gain qui peut être réduit, sans perdre la garantie d'existence du mode glissant, en utilisant une méthode de gain dépendant de l'état proposé par Utkin [68], cette méthode sera illustrée, par la suite, pour un système du second ordre.

On considère un système décrit par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + u \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

Avec une surface de glissement $s = \lambda x_1 + x_2$, où λ est une constante positive.

La commande u est donnée par

$$\begin{cases} u = -M \text{sign}(s) \\ M = M(x_1) = M_0(|x_1| + \delta) \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

où M_0 est une constante positive, et δ est une constante positive suffisamment petite. On note que le gain M n'est pas constant mais une fonction de l'état x_1 . La constante M_0 doit être sélectionnée pour forcer l'apparition d'un mode de glissement le long de la surface de commutation. Il peut être trouvé analytiquement à partir des équations (III.24) et (III.25) que:

$$\dot{s} = (a_1 - a_2 \lambda - \lambda^2) x_1 - M_0(|x_1| + \delta) \text{sign}(s) \quad (\text{III.26})$$

le mode glissement existe si

$$M_0 \geq |a_1 - a_2 \lambda - \lambda^2| \quad (\text{III.27})$$

Pour illustrer les performances de la commande montrée par l'équation (III.25), une comparaison a été faite avec un contrôleur à gain fixe.

Les équations des deux contrôleurs sont données par :

$$\begin{cases} u_1 = -M_0 \text{sign}(s) \\ u_2 = -M_0(|x_1| + \delta) \text{sign}(s) \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

u_1 : un contrôleur à gain fixe.

u_2 : un contrôleur à gain variable (dépendant de l'état).

Des simulations ont été effectuées, parfois on change les conditions initiales des variables d'état et d'autres fois on change la valeur du gain M_0 .

On peut voir que l'amplitude de chattering est réduite de manière significative en utilisant le contrôleur u_2 par rapport au résultat en utilisant un contrôleur conventionnel u_1 , comme montre les résultats de simulation dans les Figure III.11-12. Une autre remarque, quand on change les conditions initiales du variable d'état, le système sous le contrôleur u_1 perd la phase de

convergence, par contre, avec l'entrée u_2 le système garde sa stabilité et converge vers le point d'équilibre comme le montre les Figure III.14-14.

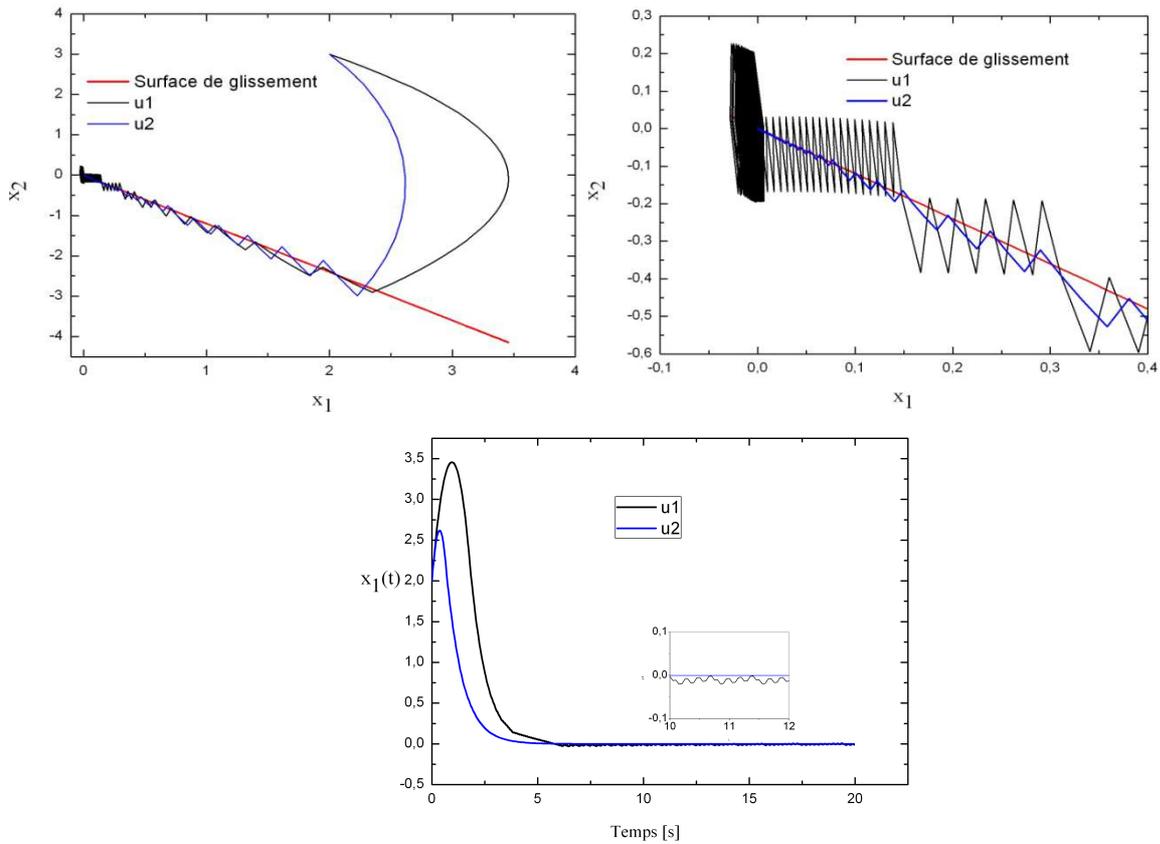


Figure III.11 Trajectoire du système pour $M_0 = 4$ et les conditions initiales $(x_1, x_2) = (2, 3)$

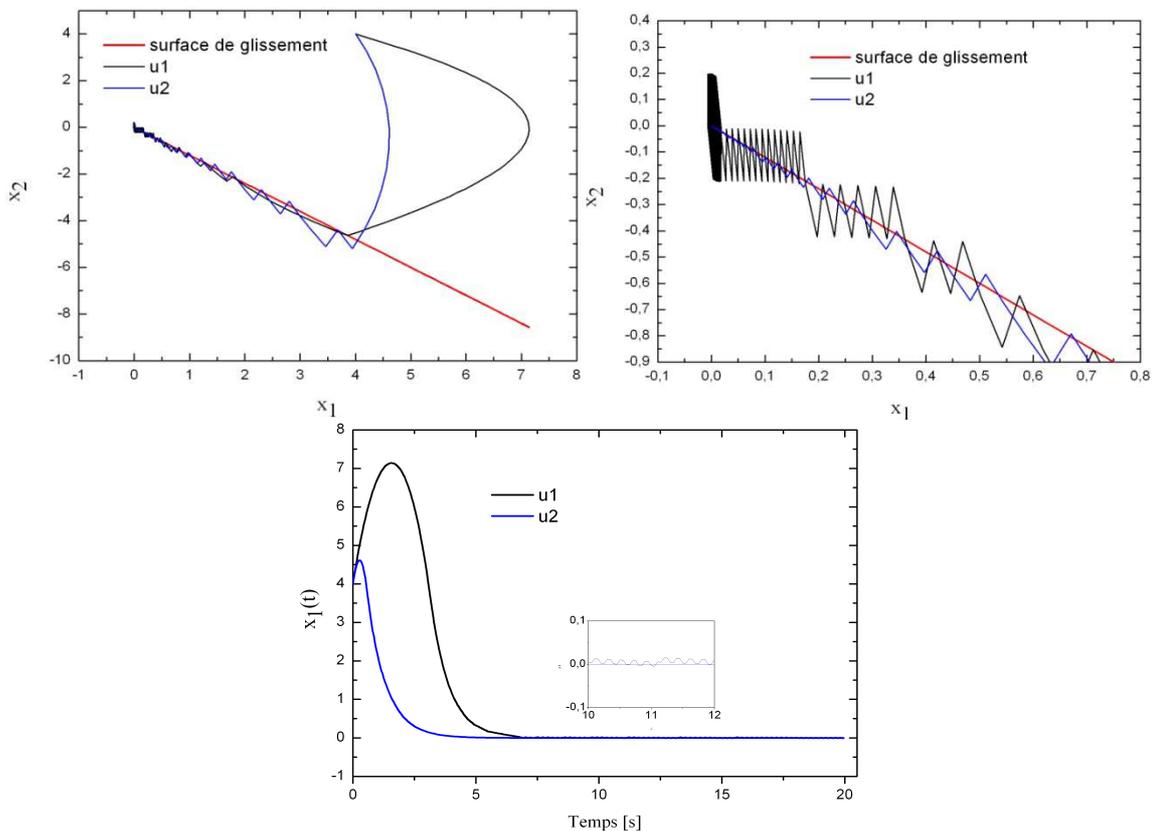


Figure III.12 Trajectoire du système pour $M_0 = 4$ et les conditions initiales $(x_1, x_2) = (4, 4)$

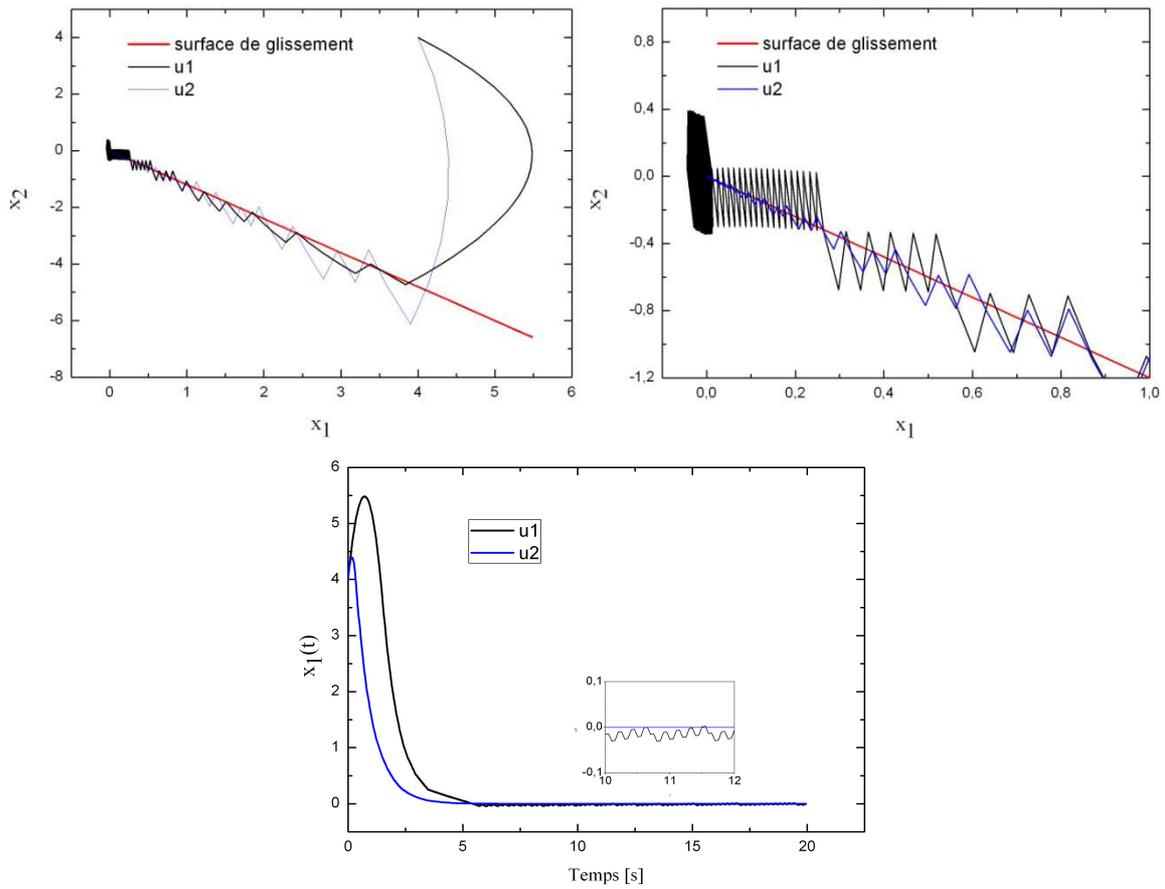


Figure III.13 Trajectoire du système pour $M_0 = 7$ et les conditions initiales $(x_1, x_2) = (4, 4)$

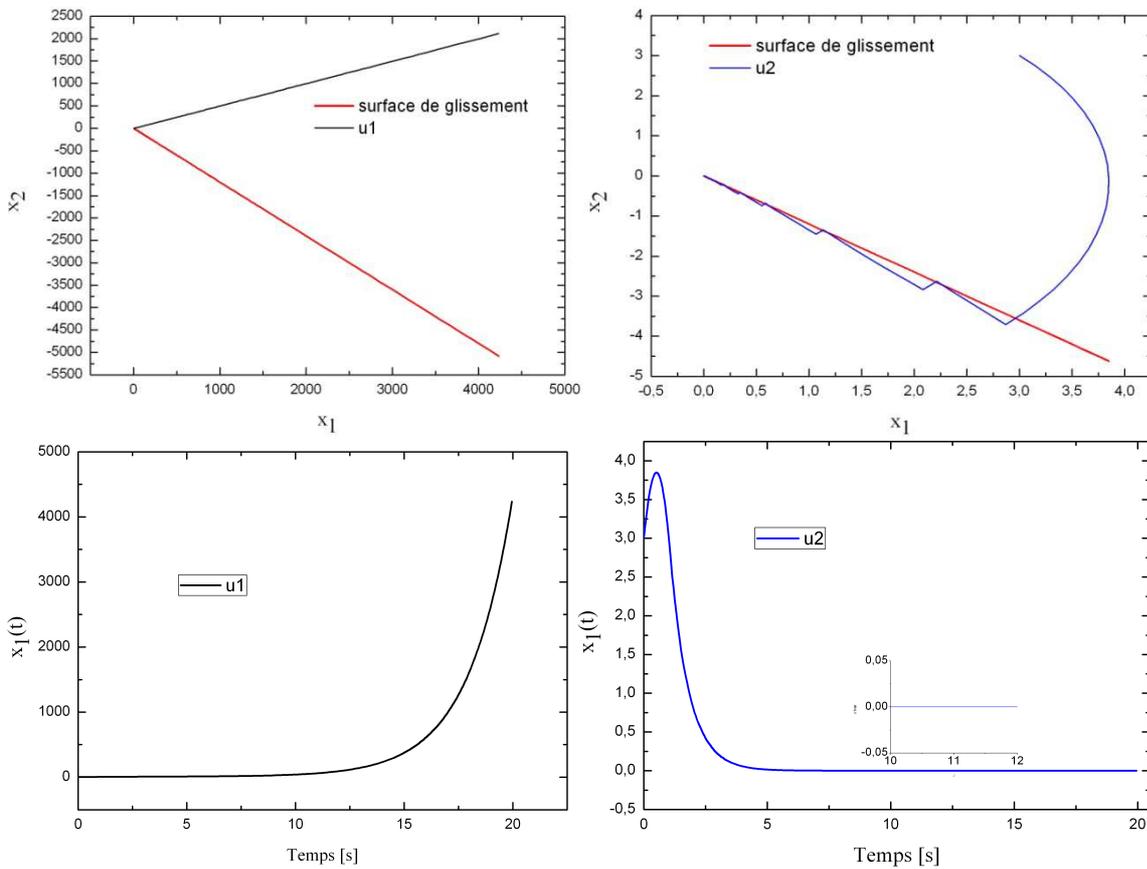


Figure III.14 Trajectoire du système pour $M_0 = 2$ et les condition initiales $(x_1, x_2) = (3, 3)$

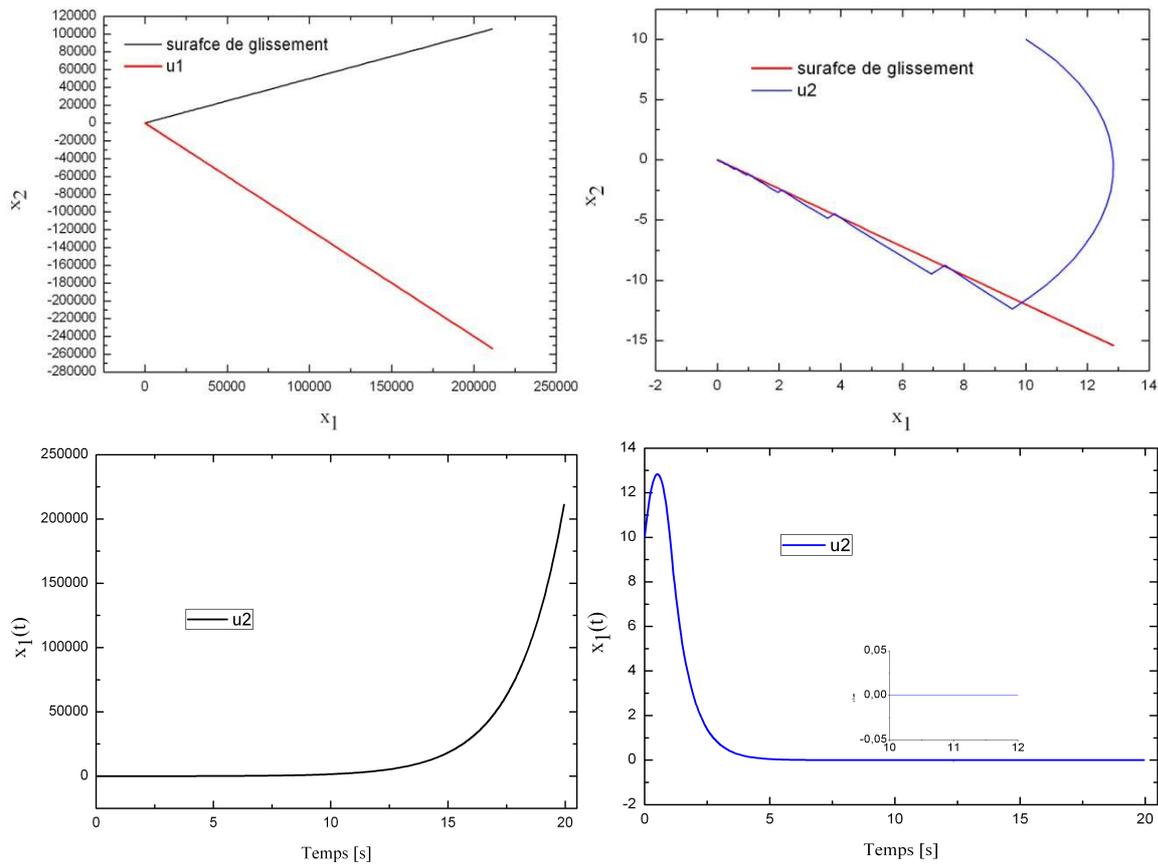


Figure III.15 Trajectoire du système pour $M_0 = 2$ et les conditions initiales $(x_1, x_2) = (10, 10)$

III.6. Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté la théorie de la commande par mode glissant d'ordre-1, l'intérêt primordial de cette commande se situe dans sa simplicité de mise en œuvre. Cependant, son inconvénient majeur réside dans le chattering, qui a été réduit en utilisant une commande basée sur le gain dépendant de la variable d'état du système.

Le contrôleur proposé dans le chapitre suivant est basé sur la platitude présentée dans le Chapitre II et sur la commande par mode glissant.

CHAPITRE IV

COMMANDE ROBUSTE D'UN MANIPULATEUR MOBILE A ROUES

Introduction

Le but de ce chapitre est la conception et la validation d'une approche de commande pour des manipulateurs mobiles. Cette approche consiste à la génération des trajectoires admissibles pour le robot puis la définition d'une loi de commande qui assure une exécution robuste et précise des tâches associées aux systèmes. Pratiquement, les manipulateurs mobiles sont des systèmes fortement non-linéaires avec des contraintes holonome et non-holonome, ce qui augmente considérablement les défis de planification et de commande. L'idée principale de la conception de la loi de commande est basée sur le fait que les systèmes étudiés sont naturellement plats. Une linéarisation dynamique exacte peut être atteinte dans l'espace plat en appliquant une rétroaction appropriée, de sorte que des techniques de contrôle linéaire puissent être appliquées. Ce type de techniques basées sur la linéarisation exacte par rétroaction de contrôle est très sensible aux incertitudes de modélisation et perturbations externes qui influent le système, on fait appel donc à des techniques robustes. Un contrôleur basé sur le mode glissant à gain dépendant de l'état sera proposé pour l'amélioration des performances du système en terme de robustesse, stabilité et précision d'exécution des tâches planifiées, ainsi que l'atténuation du phénomène du Chattering. L'efficacité de l'approche proposée est illustrée initialement avec des tests pratiques en considérant l'exemple typique du modèle Pioneer 3DX. Une extension de l'approche proposée sera donnée ensuite pour résoudre les problèmes liés aux manipulateurs mobiles.

IV.1. Commande d'un Robot mobile à roues différentielles

Dans cette partie, on considère le problème de conception d'un contrôleur robuste pour un robot mobile à deux roues différentielles.

IV.1.1. Modélisation et Formulation du problème

On reprend le robot mobile décrit dans la section I.3, et on considère que son centre de gravité G coïncide avec le centre d'axe des roues gauche/droite. Le vecteur des coordonnées généralisées est défini comme $q = [x, y, \theta, \theta_D, \theta_G]^T$, où $[x, y]$ sont les coordonnées cartésiennes du centre de gravité du robot par rapport à un repère fixe (O, X, Y) , θ est l'orientation du robot par rapport à l'axe X , θ_R, θ_L sont les positions angulaires des roues droite/gauche respectivement.

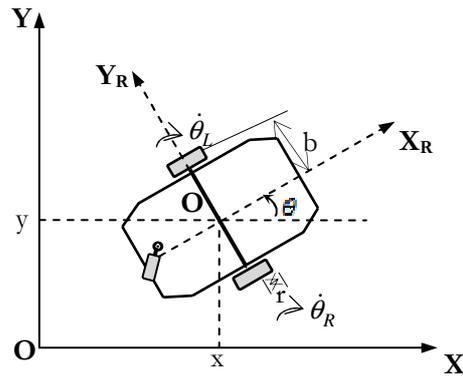


Figure IV.1 Robot mobile à deux roues différentielles.

Le modèle cinématique en configuration, incluant les positions angulaires des roues, du robot est donné par:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_R \\ \dot{\theta}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r \cos(\theta)}{2} & \frac{r \cos(\theta)}{2} \\ \frac{r \sin(\theta)}{2} & \frac{r \sin(\theta)}{2} \\ \frac{r}{2L} & \frac{-r}{2L} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_R \\ \dot{\theta}_L \end{bmatrix} \quad (\text{IV.1})$$

en introduisant l'entrée de commande suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_D \\ \dot{\theta}_G \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 1 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

et en substituant (IV.2) dans (IV.1) on obtient :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega = g_1(q) \cdot v + g_2(q) \cdot \omega \quad (\text{IV.3})$$

$$\text{avec } \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_R \\ \dot{\theta}_L \end{bmatrix}.$$

v, ω sont les vitesses longitudinale et angulaire du robot mobile qui sont considérées comme les entrées de commande pour le robot.

On considère le modèle (IV.3), le problème de conception de la commande de la robot mobile est principalement contraint de deux points de vue :

- La contrainte non-holonyme du robot est donnée par l'équation [75]

$$\dot{x} \cos(\theta) - \dot{y} \sin(\theta) = 0 \quad (\text{IV.4})$$

ou bien
$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Ce qui implique qu'un suivi parfait est achevé si des trajectoires de références sont réalisables pour le robot mobile.

- L'algorithme de commande utilisant la rétroaction est très sensible à l'incertitude du modèle mathématique et les perturbations externes.

Donc, une solution efficace pour le problème de contrôle de suivi nécessite d'abord la planification des trajectoires réalisables et ensuite de trouver une loi de commande de rétroaction appropriée qui assure le suivi précis des trajectoires planifiées et assure le rejet des incertitudes paramétriques et non paramétriques.

IV.1.2. Concept de la platitude pour le robot mobile

Du fait que le robot mobile, Figure IV.1, est un système plat, voir paragraphe II.5.3. Les sorties plates choisies sont les coordonnées cartésiennes du robot.

$$F = [F_1, F_2]^T = [x, y]^T$$

On a démontré qu'on doit arriver à la deuxième dérivée des sorties plates pour que les variables de commande du robot apparaissent

$$\ddot{F} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -v \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & v \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \omega \end{bmatrix}$$

avec $\xi = \dot{v}$ est la nouvelle entrée.

On définit l'entrée de la commande ξ et ω comme :

$$\begin{cases} \xi = u_1 \cos(\theta) + u_2 \sin(\theta), \\ v = \int \xi dt, \\ \omega = \frac{u_2 \cos(\theta) - u_1 \sin(\theta)}{v}. \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

Le modèle cinématique du robot mobile peut être réécrit comme suit :

$$\ddot{F} = u = [u_1 \ u_2]^T \quad (\text{IV.6})$$

où u est le nouveau vecteur de commande qui sera conçu dans la suite de cette partie.

D'après le paragraphe II.5.3, les variables d'état et les entrées du système peuvent être formulées

en fonction des sorties plates et leurs dérivées comme le montre le Tableau IV.1

Les états et les entrées du système	Sorties plates
$x = F_1, y = F_2$ $\dot{x} = \dot{F}_1, \dot{y} = \dot{F}_2$ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{F}_2}{\dot{F}_1}\right)$	$x = F_1, y = F_2$ $\dot{x} = \dot{F}_1, \dot{y} = \dot{F}_2$
$v = \sqrt{\dot{F}_1^2 + \dot{F}_2^2}, \dot{v} = \frac{\dot{F}_1\ddot{F}_2 + \dot{F}_2\ddot{F}_1}{\sqrt{\dot{F}_1^2 + \dot{F}_2^2}}$ $\dot{\theta} = \omega = \frac{\dot{F}_1\ddot{F}_2 - \dot{F}_2\ddot{F}_1}{\dot{F}_1^2 + \dot{F}_2^2}$	$\dot{F}_1 = \dot{x} = v \cos(\theta)$ $\dot{F}_2 = \dot{y} = v \sin(\theta)$ $\ddot{F}_1 = \dot{v} \cos(\theta) - v\omega \sin(\theta)$ $\ddot{F}_2 = \dot{v} \sin(\theta) + v\omega \cos(\theta)$

Tableau IV.1 Relation sorties plate et l'espace d'état du robot mobile.

Ces propriétés seront utilisées dans la suite de ce chapitre pour la planification de trajectoires ainsi que pour le développement du contrôleur de suivi, car dans l'espace de sorties plates le système est représenté par une chaîne d'intégrateurs découplés comme le montre l'équation (IV.6).

IV.1.3. Spécification de la tâche et de la planification de la trajectoire

Le but de cette partie est la génération des trajectoires qui permettant des mouvements accessible pour les manipulateurs mobiles avec des contraintes géométrique et dynamique. L'approche proposée dans ce chapitre consiste à définir le chemin que doit suivre le robot en utilisant des courbes de Béziens. La vitesse du mouvement du robot le long de ce chemin est défini en deuxième étape en utilisant une fonction polynomiale d'ordre cinq.

IV.1.3.1. Planification du chemin

Les courbes de Bézier seront prises en compte pour la planification du chemin désirée de la plate-forme mobile. Une courbe de Bézier bidimensionnelle de degré n peut être représentée sous une forme paramétrique comme [76] :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\tau) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{n!}{i!(n-i)!} \right) \tau^i (1-\tau)^{n-i} P_i, \quad \tau \in [0,1] \\ m_i = B_i^n(\tau) = \binom{n}{i} (1-\tau)^{n-i} \tau^i \end{array} \right. , \quad i \in \{0,1,\dots,n\} \quad (\text{IV.7})$$

Où, le choix des points P_0 et P_n coïncident avec les points de départ et d'arrivée. P_i

, $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, sont les points de contrôle. Le choix des points P_i permet de contrôler les paramètres géométriques du chemin, à savoir la courbure et la tangente. Le choix du nombre et des positions des points de contrôle est relié principalement avec les différentes contraintes géométriques du modèle et son environnement de fonctionnement, c.-à-d. contrainte non-holonome et évitement d'obstacles.

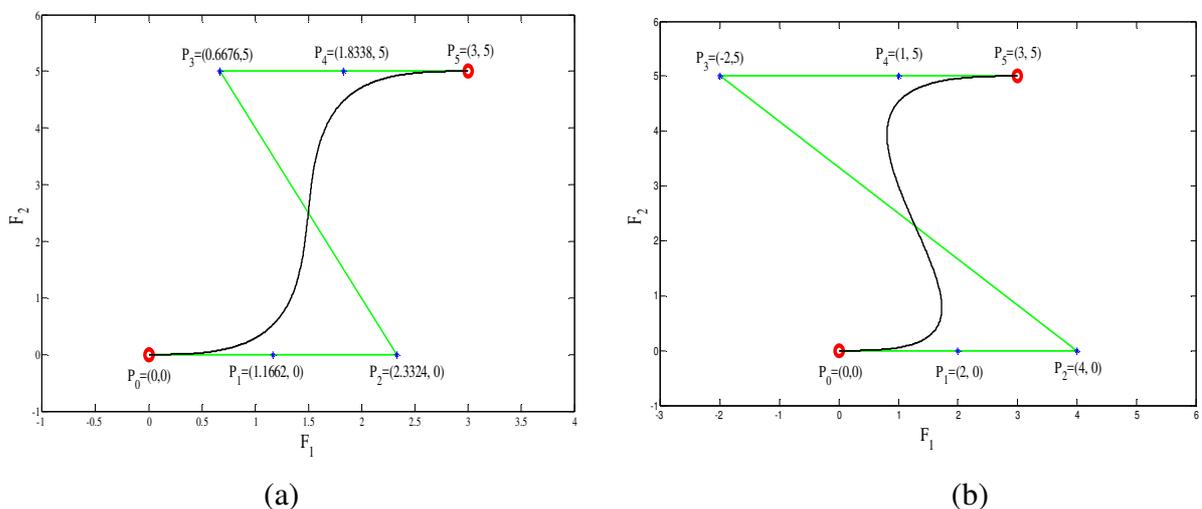
Les propriétés fondamentales de cette courbe sont:

- Les courbes de Bézier permettent d'interpoler n'importe quels deux points P_0 et P_n .
- Ces courbes sont entièrement contenues dans un polygone convexe des points de contrôle P_i .
- Elles sont différenciables partout et sont donc continues à n'importe quel degré (C^∞ continue).
- Le vecteur tangentiel à la courbe de Bézier au début (fin) est parallèle à la ligne reliant les deux premiers (deux derniers) points de contrôle, ce qui permet d'assurer la faisabilité des trajectoires planifiées.
- Les points de contrôle rendent ces courbes plus flexibles et facile à manipuler pour résoudre différents types de problème tels que, l'évitement d'obstacles et l'optimisation de la courbure des trajectoires planifiées sous différentes contraintes.

Exemple IV-1

La figure suivante présente un exemple d'une courbe de Bézier de degré cinq (quintique), qui sera utilisée dans la suite de ce chapitre, avec les quatre points de contrôle, les points départ/cible et le polygone qui contient la courbe apparaissent en différentes couleurs.

On voit bien que la manipulation des points de contrôle nous permet de prédire la forme et les tangentes des chemins planifiés. La tangente au point de départ (cible) change en variant les lignes reliant les deux premiers (deux derniers) points de contrôle.



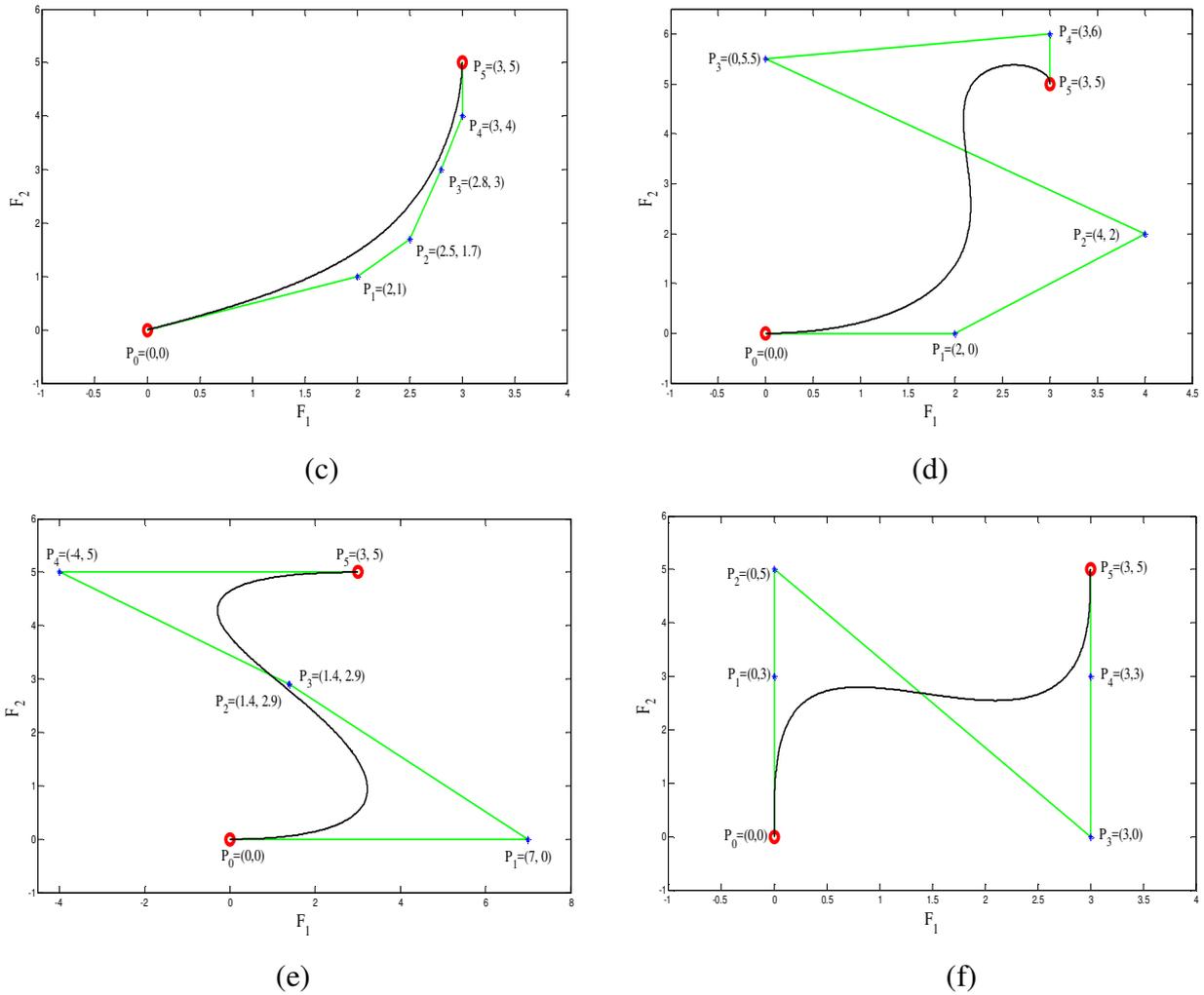


Figure IV.2 Exemples des chemins générés avec courbes de Bézier de degré cinq en modifiant les points de contrôle.

Tangente (départ/cible)	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
Courbe	0/0	0/0	26.5°/90°	0°/-90°	0°/0°	90°/90°
Points de contrôle	0/0	0/0	26.5°/90°	0°/-90°	0°/0°	90°/90°

Tableau IV.2 Tangente au point de départ (cible) pour les six cas de la **Figure IV.2**

L'expression analytique d'une courbe de Bézier quintique, avec quatre points de contrôle $\{P_1, \dots, P_4\}$, est donnée par:

$$F(\tau) = m_0 P_0 + m_1 P_1 + m_2 P_2 + m_3 P_3 + m_4 P_4 + m_5 P_5 \tag{IV.8}$$

$$\begin{cases} F_1(\tau) = m_0 x_0 + m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 + m_5 x_5 \\ F_2(\tau) = m_0 y_0 + m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4 + m_5 y_5 \end{cases}$$

où les coefficients $m_0 \dots m_5$ sont des fonctions de paramètre τ et sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
m_0 &= (1-\tau)^5, & m_1 &= 5\tau(1-\tau)^4 \\
m_2 &= 10\tau^2(1-\tau)^3, & m_3 &= 10\tau^3(1-\tau)^2 \\
m_4 &= 5\tau^4(1-\tau), & m_5 &= \tau^5
\end{aligned}$$

$$F(\tau) = [F_1(\tau), F_2(\tau)], \quad 0 \leq \tau \leq 1. \quad \square$$

IV.1.3.2. Planification de trajectoires

Pour spécifier la vitesse du robot le long du chemin planifié, il est plus utile de définir l'évolution géométrique du robot en fonction de la longueur de la courbe parcourue ou l'abscisse curviligne, dénotée s . L'équation qui définit les abscisses curvilignes s à partir d'une forme paramétrique est donnée par:

$$\frac{ds(\tau)}{d\tau} = \left\| \frac{dF(\tau)}{d\tau} \right\| = \sqrt{\left[\frac{dF_1(\tau)}{d\tau} \right]^2 + \left[\frac{dF_2(\tau)}{d\tau} \right]^2} \quad (\text{IV.9})$$

où $\left\| \frac{dF(\tau)}{d\tau} \right\|$ dénote la norme euclidienne de la courbe paramétrée.

L'intégration de l'équation (IV.9) donne les abscisses curvilignes s en fonction de τ , et l'intégrale sera :

$$s = \int \frac{ds(\tau)}{d\tau} du = \int \left\| \frac{dF(\tau)}{d\tau} \right\| du \quad (\text{IV.10})$$

Ainsi, les trajectoires de référence en fonction du temps $F(t)$ peuvent être données directement en définissant le paramètre s en fonction du temps $s = s(t)$. Le choix de la fonction temporelle $s(t)$ doit assurer la minimisation du temps d'exécution de la tâche ainsi que le respect des contraintes dynamiques du robot.

La vitesse du robot dans ce cas est définie comme :

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} = v(s)\dot{s}(t) \quad (\text{IV.11})$$

En utilisant le fait que: $v(s) = 1$, on peut avoir :

$$v(t) = \dot{s}(t) \quad (\text{IV.12})$$

La dernière équation démontre qu'il y a une relation linéaire entre la vitesse du robot et la dérivée temporelle de $s(t)$. Cette relation peut être utile dans la conception de la fonction de mouvement appropriée qui respecte les limites physiques du système.

Un choix raisonnable de la fonction $s(t)$ est :

$$s(t) = a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \quad 0 < t < T \quad (\text{IV.13})$$

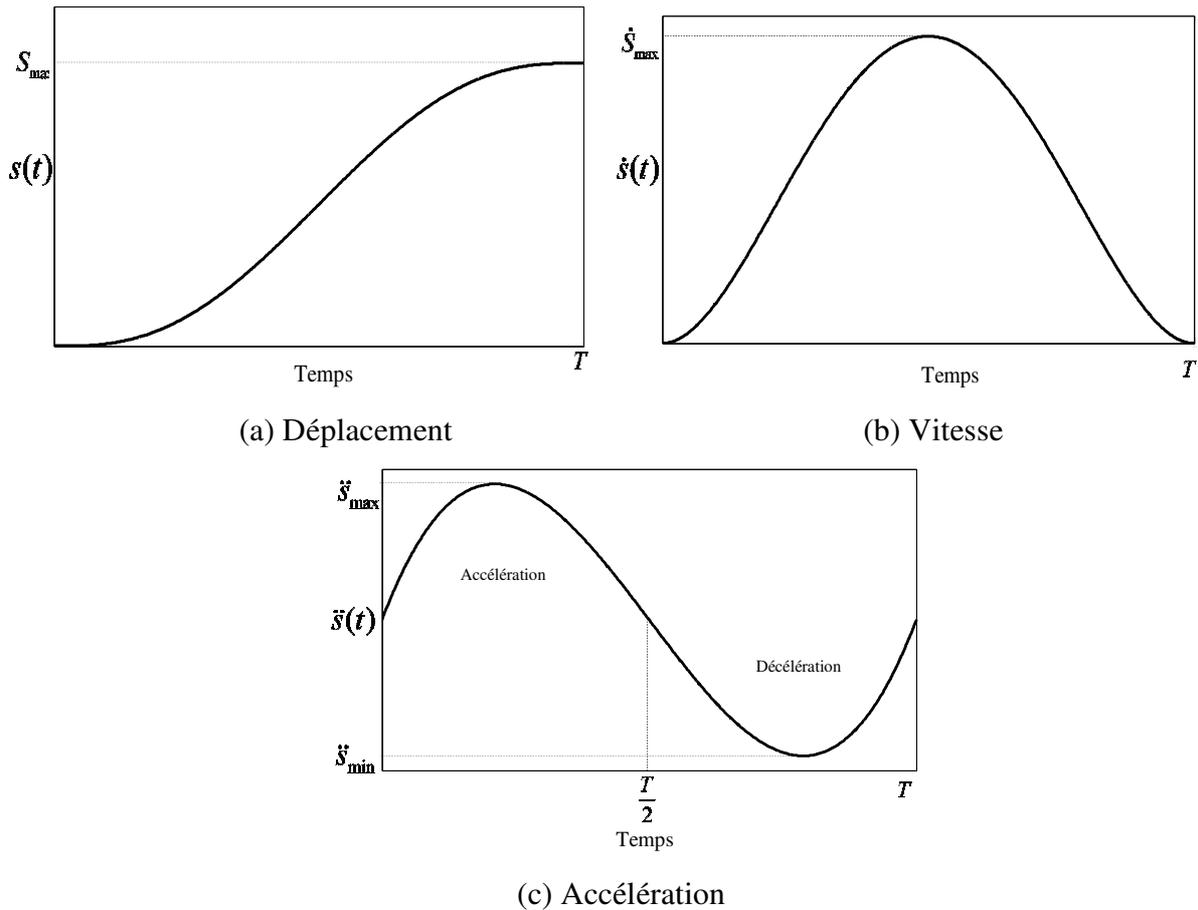


Figure IV.3 Profile du mouvement et ses dérivées

D'où les paramètres a_i et le temps d'exécution T sont choisis afin de garantir les conditions initiales du mouvement et les limites physique du robot. Ce choix garantit une continuité suffisante de la vitesse du robot ainsi que de ses dérivées[38]. La Figure IV.3 montre l'évolution temporelle d'un profil du mouvement $s(t)$ qui assure un déplacement S_{\max} avec une vitesse maximale \dot{S}_{\max} et une accélération maximale \ddot{S}_{\max} dans un temps fini T .

Lorsque les conditions initiales du mouvement sont fixées comme dans le Tableau IV.3, les limites maximales du système (IV.3) sont données sous la forme :

- Vitesse linéaire maximale du robot mobile, limitée par la vitesse de rotation des roues droite/gauche : $v \leq v_{\max}$.

Après la génération du chemin désiré $F_d(\tau)$ du robot et la conception appropriée du profil du mouvement $s(t)$, l'algorithme de génération des trajectoires de référence est donné comme :

Algorithme.1

Entrées : Positions initiale et cible du robot.

Sorties : Vecteur (2x1) des trajectoires désirées de robot dépendantes du temps.

Début

- 1- Définir le chemin du robot en utilisant les courbes de Bézier appropriées $F_d(\tau)$, Equation(IV.7)
- 2- Calculer l'abscisse curviligne le long du chemin $s(\tau)$, Equation (IV.10)
- 3- Définir un profil de mouvement approprié $s(t)$, Equation (IV.13)
- 4- Calculer $\tau[s(t)]$.
- 5- Obtenir le vecteur des trajectoires dépendant du temps $F_d(\tau(t))$,

Fin.

Pour plus de détails sur les approches et les méthodes utilisées pour définir les fonctions $F(s)$ et $s(t)$ [38] [69].

Les conditions initiales pour les variables d'états	Les conditions initiales pour les sorties plates
$x(0) = x_A, y(0) = y_A,$ $\theta(0) = \theta_A,$ $v(0) = v_A, \omega(0) = w_A,$ $\dot{v}(0) = \dot{v}_A.$	$F_1(0) = x(0) = x_A$ $F_2(0) = y(0) = y_A$ $\dot{F}_1(0) = v_0 \cos(\theta_A)$ $\dot{F}_2(0) = v_0 \sin(\theta_A)$ $\ddot{F}_1(0) = \dot{v}_A \cos(\theta_A) - v_A \omega_A \sin(\theta_A)$ $\ddot{F}_2(0) = \dot{v}_A \sin(\theta_A) + v_A \omega_A \cos(\theta_A)$
$x(T) = x_B, y(T) = y_B,$ $\theta(T) = \theta_B,$ $v(T) = v_B, \omega(T) = \omega_B,$ $\dot{v}(T) = \dot{v}_B.$	$F_1(T) = x(T) = x_B$ $F_2(T) = y(T) = y_B$ $\dot{F}_1(T) = \dot{x}(T) = v_B \cos(\theta_B)$ $\dot{F}_2(T) = \dot{y}(T) = v_B \sin(\theta_B)$ $\ddot{F}_1(T) = \dot{v}_B \cos(\theta_B) - v_B \omega_B \sin(\theta_B)$ $\ddot{F}_2(T) = \dot{v}_B \sin(\theta_B) + v_B \omega_B \cos(\theta_B)$

Tableau IV.3 les conditions initiales pour les sorties plates.

IV.1.4. Conception du contrôleur et analyse de stabilité

Dans cette section on met l'accent sur le développement et l'analyse d'un contrôleur du mode glissant approprié qui permet d'assurer le suivi des trajectoires planifiées ainsi que la stabilité et la robustesse du système.

On considère le modèle du robot donné dans l'équation (IV.3) et le vecteur des trajectoires désirées F_d (équation (IV.7)). Le problème de contrôle de suivi est régi dans l'espace de sortie plate (IV.6) en utilisant les équations linéaires indépendantes suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{e}_1 = u_1 + \dot{f}_1, \\ \ddot{e}_2 = u_2 + \dot{f}_2. \end{cases} \quad (\text{IV.14})$$

où :

- $e_i = F_i - F_{id}$ (avec $i = 1, 2$) représente le vecteur de l'erreur de suivi.
- $f_1 = -\dot{F}_{1d} + \Delta f_1$ et $f_2 = -\dot{F}_{2d} + \Delta f_2$ avec $\Delta f_{1,2}$ sont des fonctions additives inconnues qui collectent les perturbations externes (supposées bornées) agissant sur le système.

Les principaux défis du contrôle robuste sont la conception des signaux d'entrées appropriés u_1 et u_2 qui assurent la convergence des erreurs de suivi $e_{1,2}$ vers zéro, le rejet des perturbations externe et la stabilité du système.

- **Conception du contrôleur**

Pour la conception du contrôleur on considère que $\Delta f_{1,2} = 0$. Pour chaque équation de (IV.14), les erreurs de suivi peuvent être écrites sous forme d'un espace d'état :

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{\alpha 1} = \eta_{\alpha 2}, \\ \dot{\eta}_{\alpha 2} = u_\alpha - \dot{f}_\alpha. \end{cases} \quad (\text{IV.15})$$

où $\eta_{\alpha 1} = e_\alpha$ et $\eta_{\alpha 2} = \dot{e}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$).

Le système (IV.15) prend la forme régulière perturbée [30], qui simplifie la conception d'un contrôleur discontinu stable et robuste. Par conséquent, les entrées de commande robustes u_α peuvent être choisies comme :

$$\begin{cases} u_\alpha = -M_\alpha(\eta_{\alpha 1}, \eta_{\alpha 2}, \dot{f}_\alpha) \text{sign}(\sigma_\alpha) \\ \sigma_\alpha = \eta_{\alpha 2} + \lambda_\alpha \eta_{\alpha 1} \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

où $M_\alpha > 0$: représente un gain adaptatif.

$$\text{sign}(\sigma_\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_\alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \sigma_\alpha = 0 \\ -1 & \text{si } \sigma_\alpha < 0 \end{cases} \text{ représente la fonction signe.}$$

σ_α représente la surface de glissement avec λ_α constante positive.

Les gains de contrôle M_α et λ_α doivent être sélectionnés pour forcer l'existence du mode glissant le long de la surface σ_α ainsi que pour garantir la stabilité du système.

Un choix du gain de contrôle M_α est donné par:

$$\begin{cases} M_\alpha = \gamma_\alpha |\eta_{\alpha 1}| + \beta_\alpha |\tilde{\eta}_\alpha| + \delta_\alpha, \\ \tilde{\eta}_\alpha = \eta_{\alpha 2} - \dot{f}_\alpha. \end{cases} \quad (\text{IV.17})$$

avec γ_α , β_α et δ_α sont des constantes positives.

Le choix d'un gain de contrôle adaptatif est motivé par la réduction du phénomène de chattering qui représente l'inconvénient principal des techniques de contrôle par mode glissant.

- **Analyse de la stabilité**

Les conditions de stabilité du système (IV.15) sous la commande (IV.17) sont illustrées par le théorème suivant [77]:

Théorème IV-1 : Le système (IV.15) sous l'entrée de contrôle (IV.16) est stable si et seulement si les paramètres de contrôle satisfont aux inégalités suivantes:

$$\begin{cases} \gamma_\alpha > \lambda_\alpha^2 + \beta_\alpha \lambda_\alpha, \\ \delta_\alpha > \max(\dot{f}_\alpha), \\ \beta_\alpha > 0 \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

Preuve du théorème : Tenant compte que $|a| = a \cdot \text{sign}(a)$, le système (IV.15) sous l'entrée de commande (IV.16), prend la forme :

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{\alpha 1} = \eta_{\alpha 2}, \\ \dot{\eta}_{\alpha 2} = -\gamma_\alpha \text{sign}(\eta_{\alpha 1} \sigma_\alpha) \eta_{\alpha 1} - \beta_\alpha \text{sign}(\vartheta_\alpha \sigma_\alpha) \eta_{\alpha 2} - \delta_\alpha \text{sign}(\sigma_\alpha) + \beta_\alpha \text{sign}(\vartheta_\alpha \sigma_\alpha) f_\alpha + \dot{f}_\alpha. \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

où $\alpha = \{1, 2\}$.

Pour montrer la stabilité du contrôleur proposé, on considère la fonction de Lyapunov suivante:

$$V_\alpha = \frac{1}{2} \sigma_\alpha^2 > 0 \quad (\text{IV.20})$$

La dérivée temporelle de (IV.20) est donnée comme:

$$\dot{V}_\alpha = \sigma_\alpha \dot{\sigma}_\alpha$$

La condition d'existence du mode de glissement sur toute surface s_α peut être formulée comme [32]:

$$\lim_{\sigma_\alpha \rightarrow 0^+} \dot{\sigma}_\alpha < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\sigma_\alpha \rightarrow 0^-} \dot{\sigma}_\alpha > 0 \quad (\text{IV.21})$$

ou

$$\dot{V}_\alpha = \sigma_\alpha \dot{\sigma}_\alpha < 0 \quad (\text{IV.22})$$

En utilisant le fait que le mouvement du système le long de la surface de glissement est régi par :

$$\eta_{\alpha 2} = -\lambda_\alpha \eta_{\alpha 1} \quad ,$$

et en prenant la dérivée temporelle de σ_α :

$$\dot{\sigma}_\alpha = \dot{\eta}_{\alpha 2} + \lambda_\alpha \dot{\eta}_{\alpha 1}$$

en vertu de l'équation: $\text{sign}(\vartheta_\alpha) = -\text{sign}(f_\alpha)$

$$\dot{\sigma}_\alpha = \dot{\eta}_{\alpha 2} + \lambda_\alpha \dot{\eta}_{\alpha 1}$$

$$\dot{\sigma}_\alpha = -\gamma_\alpha \text{sign}(\eta_{\alpha 1} \sigma_\alpha) \eta_{\alpha 1} - \beta_\alpha \text{sign}(\vartheta_\alpha \sigma_\alpha) \eta_{\alpha 2} - \delta_\alpha \text{sign}(\sigma_\alpha) + \beta_\alpha \text{sign}(\vartheta_\alpha \sigma_\alpha) f_\alpha + \dot{f}_\alpha + \lambda_\alpha \dot{\eta}_{\alpha 1}$$

$$\dot{\sigma}_\alpha = -\gamma_\alpha \text{sign}(\eta_{\alpha 1} \sigma_\alpha) \eta_{\alpha 1} + \lambda_\alpha \beta_\alpha \text{sign}(\vartheta_\alpha \sigma_\alpha) \eta_{\alpha 1} - \delta_\alpha \text{sign}(\sigma_\alpha) - \beta_\alpha |f_\alpha| \text{sign}(\sigma_\alpha) + \dot{f}_\alpha - \lambda_\alpha^2 \eta_{\alpha 1}$$

$$\dot{\sigma}_\alpha = \left(-\lambda_\alpha^2 + \lambda_\alpha \beta_\alpha \text{sign}(\vartheta_\alpha \sigma_\alpha) - \gamma_\alpha \text{sign}(\eta_{\alpha 1} \sigma_\alpha) \right) \eta_{\alpha 1} - \delta_\alpha \text{sign}(\sigma_\alpha) - \beta_\alpha |f_\alpha| \text{sign}(\sigma_\alpha) + \dot{f}_\alpha$$

La dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov est donnée comme suit:

$$\dot{V}_\alpha = \sigma_\alpha \dot{\sigma}_\alpha$$

$$\sigma_\alpha \dot{\sigma}_\alpha = -\lambda_\alpha^2 \eta_{\alpha 1} \sigma_\alpha + \lambda_\alpha \beta_\alpha \text{sign}(\vartheta_\alpha \sigma_\alpha) \eta_{\alpha 1} \sigma_\alpha - \gamma_\alpha \text{sign}(\eta_{\alpha 1} \sigma_\alpha) \eta_{\alpha 1} \sigma_\alpha - \delta_\alpha \text{sign}(\sigma_\alpha) \sigma_\alpha - \beta_\alpha |f_\alpha| \text{sign}(\sigma_\alpha) \sigma_\alpha + \dot{f}_\alpha \sigma_\alpha$$

$$\sigma_\alpha \dot{\sigma}_\alpha = \left(-\lambda_\alpha^2 \eta_{\alpha 1} \sigma_\alpha + \lambda_\alpha \beta_\alpha \text{sign}(\vartheta_\alpha \sigma_\alpha) \eta_{\alpha 1} \sigma_\alpha - \gamma_\alpha |\eta_{\alpha 1}| |\sigma_\alpha| \right) - \delta_\alpha |\sigma_\alpha| - \beta_\alpha |f_\alpha| |\sigma_\alpha| + \dot{f}_\alpha \sigma_\alpha$$

$$\sigma_\alpha \dot{\sigma}_\alpha = \left(-\lambda_\alpha^2 + \lambda_\alpha \beta_\alpha \text{sign}(\vartheta_\alpha \sigma_\alpha) \right) \eta_{\alpha 1} \sigma_\alpha - \gamma_\alpha |\eta_{\alpha 1} \sigma_\alpha| - \delta_\alpha |\sigma_\alpha| + \dot{f}_\alpha \sigma_\alpha - \beta_\alpha |f_\alpha| |\sigma_\alpha|$$

$$\sigma_\alpha \dot{\sigma}_\alpha \leq \left(-\lambda_\alpha^2 + \lambda_\alpha \beta_\alpha \right) \eta_{\alpha 1} \sigma_\alpha - \gamma_\alpha |\eta_{\alpha 1} \sigma_\alpha| + \dot{f}_\alpha \sigma_\alpha - \delta_\alpha |\sigma_\alpha| - \beta_\alpha |f_\alpha| |\sigma_\alpha|$$

donc, on peut conclure que $\dot{V}_\alpha = \sigma_\alpha \dot{\sigma}_\alpha \leq 0$ si :

$$\begin{cases} \gamma_\alpha > \lambda_\alpha^2 + \beta_\alpha \lambda_\alpha, \\ \delta_\alpha > \max(\dot{f}_\alpha), \\ \beta_\alpha > 0 \end{cases}$$

IV.1.5. Validation expérimentale

Des tests numériques ont été réalisés pour évaluer les performances de l'approche proposée, en utilisant le prototype de notre laboratoire de recherche **LSI** (Laboratoire des **S**ystèmes **I**ntelligent) Pioneer 3DX (Figure IV.4) qui représente un exemple pratique des robots mobiles à deux roues différentielles. L'interface robotique avancée pour application (ARIA, avec son extension MatLab) a été utilisée pour l'intégration du logiciel de commande du robot proposé. Tous les tests ont été mis en œuvre en temps réel avec un temps d'échantillonnage $T_s = 0.05s$. Un différentiateur numérique basé sur l'algorithme Super-Twisting[78] a été utilisé pour estimer les dérivées en ligne des coordonnées cartésiennes du robot.



Figure IV.4 Le prototype Pioneer 3DX (vue arrière).

L'objectif de la tâche a été fixé pour déplacer le robot de sa configuration initiale $A = (0, 0, 0)$, à une configuration finale $B = (3, 5, 0)$. Les limites sur les vitesses linéaires et angulaires maximales sont imposées comme suit:

$$v_{\max} = 0.3m.s^{-1}, \quad \omega_{\max} = 0.5rad.s^{-1}$$

Afin de permettre au robot d'éviter les collisions lors de son déplacement, les trajectoires désirées $[F_1(s), F_2(s)]^T$ ont été générées en utilisant l'algorithme.1 à l'aide des courbes de Bézier, de degré cinq avec quatre points de contrôle, de la forme[76] :

$$F(s) = m_0P_0 + m_1P_1 + m_2P_2 + m_3P_3 + m_4P_4 + m_5P_5$$

avec :

$$\begin{aligned} m_0 &= (1-s(\tau))^5, & m_1 &= 5s(\tau)(1-s(\tau))^4 \\ m_2 &= 10s(\tau)^2(1-s(\tau))^3, & m_3 &= 10s(\tau)^3(1-s(\tau))^2 \\ m_4 &= 5s(\tau)^4(1-s(\tau)), & m_5 &= s(\tau)^5 \end{aligned}$$

où: P_0, P_5 coïncident avec la position initiale et la position finale respectivement. P_1, P_2, P_3 et P_4 sont les points de contrôle dans ce cas on les choisit comme :

$$P_0 = (0, 0), \quad P_1 = (1.1662, 0), \quad P_2 = (2.3324, 0), \quad P_3 = (0.6676, 5), \quad P_4 = (1.8338, 5), \quad P_5 = (3, 5).$$

Le profil de mouvement $s(t)$ est choisi :

$$s(t) = a_5t^5 + a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \quad (IV.23)$$

Pour garantir le suivi de ces trajectoires, les gains du contrôleur (IV.16) peuvent être choisis en fonction de (IV.18) comme :

$$\gamma_1 = 4, \beta_1 = 0.2, \delta_1 = 0.2, \lambda_1 = 1.9.$$

$$\gamma_2 = 4, \beta_2 = 0.2, \delta_2 = 0.2, \lambda_2 = 1.9.$$

La Figure IV.5 illustre le mouvement du robot le long de sa trajectoire désirée.

Pour une étude comparative, deux contrôleurs ont été considérés dans cette section:

- 1) Tout d'abord, l'équation (IV.24) est régie par le contrôleur continu PD tel que proposé dans[51] [75] :

$$\begin{cases} u_1 = -k_{p_1}e_1 - k_{D_1}\dot{e}_1 - \ddot{F}_{1d}, \\ u_2 = -k_{p_2}e_2 - k_{D_2}\dot{e}_2 - \ddot{F}_{2d}. \end{cases} \quad (IV.24)$$

avec: k_{p_a} and k_{D_a} sont des constants positifs, lesquels sont sélectionnés dans cette partie:

$$k_{p_1} = 4, \quad k_{D_1} = 1.1, \quad k_{p_2} = 4, \quad k_{D_2} = 1.1.$$

- 2) Ensuite, un contrôleur par rétroaction non-linéaire lisse et variable dans le temps proposé par Bruno Siciliano dans[79]. En commençant par l'erreur de suivi, pour les coordonnées cartésiennes du robot, qui prend la forme :

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^d - F_1 \\ F_2^d - F_2 \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix} = R_z(\theta) \begin{bmatrix} F_1^d - F_1 \\ F_2^d - F_2 \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix} \quad (\text{IV.25})$$

L'erreur est calculée par rapport à l'orientation actuelle du robot en utilisant la matrice de rotation $R_z(\theta)$ par rapport à l'axe vertical.

Ou la position désirée du robot est calculée par :

$$\begin{cases} \dot{F}_{1d} = v_d \cos \theta_d \\ \dot{F}_{2d} = v_d \sin \theta_d \\ \dot{\theta}_d = \omega_d \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

Les vitesses linéaire et angulaire du robot sont calculées en utilisant les expressions suivantes[80]:

$$\begin{cases} v = v_d \cos(e_3) - u_1, \\ \omega = \omega_d - u_2. \end{cases} \quad (\text{IV.27})$$

$$v_d(t) = \pm \sqrt{\dot{F}_{1d}^2(t) + \dot{F}_{2d}^2(t)}, \quad \omega_d(t) = \frac{\ddot{F}_{2d}(t)\dot{F}_{1d}(t) - \ddot{F}_{1d}(t)\dot{F}_{2d}(t)}{\dot{F}_{1d}^2(t) + \dot{F}_{2d}^2(t)}, \quad \theta_d(t) = \arctan\left(\frac{\dot{F}_{2d}(t)}{\dot{F}_{1d}(t)}\right)$$

On dérive l'erreur par rapport au temps et en utilisant les deux équation (II.16) et (IV.26), on trouve :

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin e_3 \\ 0 \end{bmatrix} v_d + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.28})$$

On définit la loi de rétroaction non-linéaire

$$\begin{aligned} u_1 &= -k_1(v_d(t), \omega_d(t))e_1, \\ u_2 &= -k_2 v_d(t) \frac{\sin e_3}{e_3} e_2 - k_3(v_d(t), \omega_d(t))e_3. \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

Donc l'équation (IV.27) devient

$$\begin{aligned} v &= v_d \cos(\theta_d - \theta) + k_1((x_d - x) \cos \theta + (y_d - y) \sin \theta), \\ \omega &= \omega_d + k_2 v_d \frac{\sin(\theta_d - \theta)}{\theta_d - \theta} ((y_d - y) \cos \theta - (x_d - x) \sin \theta) + k_3(\theta_d - \theta) \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

où :

$$k_1 = k_3 = 2\zeta \sqrt{(\omega_{rd}(t))^2 + b(v_{rd}(t))^2}$$

$$k_2 = b |v_{rd}(t)|$$

$$\zeta \in [0,1], b > 0, (\zeta = 1, b = 2)$$

En premier lieu, on commence la présentation des résultats de simulation en utilisant le simulateur du robot *MobileSim* pour la comparaison entre les trois contrôleurs.

L'évolution du robot est représentée sur la Figure IV.5, avec des lignes continues. La Figure IV.6 illustre la norme des erreurs de suivi sans perturbation pour les trois cas. On note que, la norme de l'erreur cartésienne est donnée comme:

$$e_N = \sqrt{(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2}$$

Comme une première conclusion tirée de la Figure IV.6, le contrôleur discontinu améliore la précision du mouvement du robot le long de ses trajectoires désirées sans perturbation, on voit bien que la norme de l'erreur de poursuite cartésienne est *0,02mètre* (comme valeur moyenne) pour le contrôleur continu PD et *0,03mètre* pour le contrôleur non linéaire[80], par contre la norme est diminuée jusqu'à *0,005mètre* pour le contrôleur discontinu proposé.

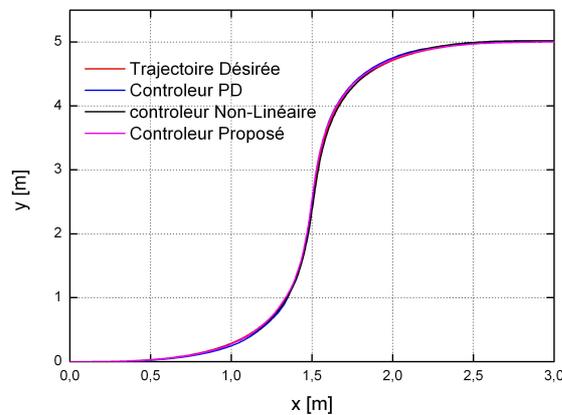


Figure IV.5 Poursuite de la trajectoire du robot.

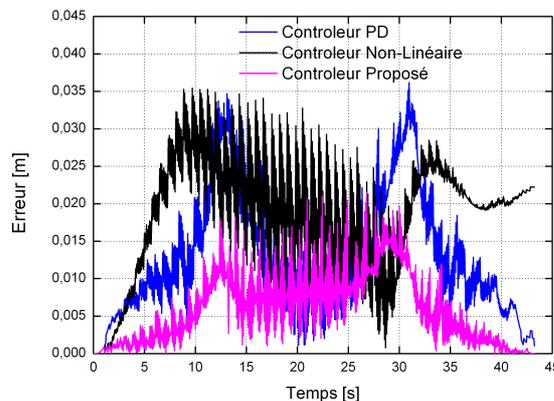


Figure IV.6 Erreur de suivi de trajectoire sans perturbation.

Tests de la robustesse

Afin de clarifier l'importance du contrôleur discontinu proposé, l'entrée de commande du robot mobile est supposée soumise à des signaux de perturbations externes bornée de forme aléatoire :

1. Dans un premier temps, un signal aléatoire d'une valeur maximale de $0,03m/s$ a été introduit, Figure IV.7.a.
2. Dans un second temps, l'amplitude du signal de perturbation a été augmentée jusqu'à $0,04m/s$, comme le montre la Figure IV.8.a.

Les résultats de la simulation illustrés dans la Figure IV.7 et Figure IV.8 confirment et clarifient la stabilité et la robustesse du contrôleur proposé. Dans les deux cas, la norme de l'erreur de suivi a une valeur moyenne approximative de $e_N = 0.005$. Par contre le contrôleur PD ainsi que le contrôleur non-linéaire, les erreurs de suivi sont caractérisées par des valeurs importantes avec l'augmentation des amplitudes des signaux de perturbation, ($e_N \approx 0.02$, $e_N \approx 0.03$) et ($e_N \approx 0.02$, $e_N \approx 0.05$) dans le premier et le second test respectivement.

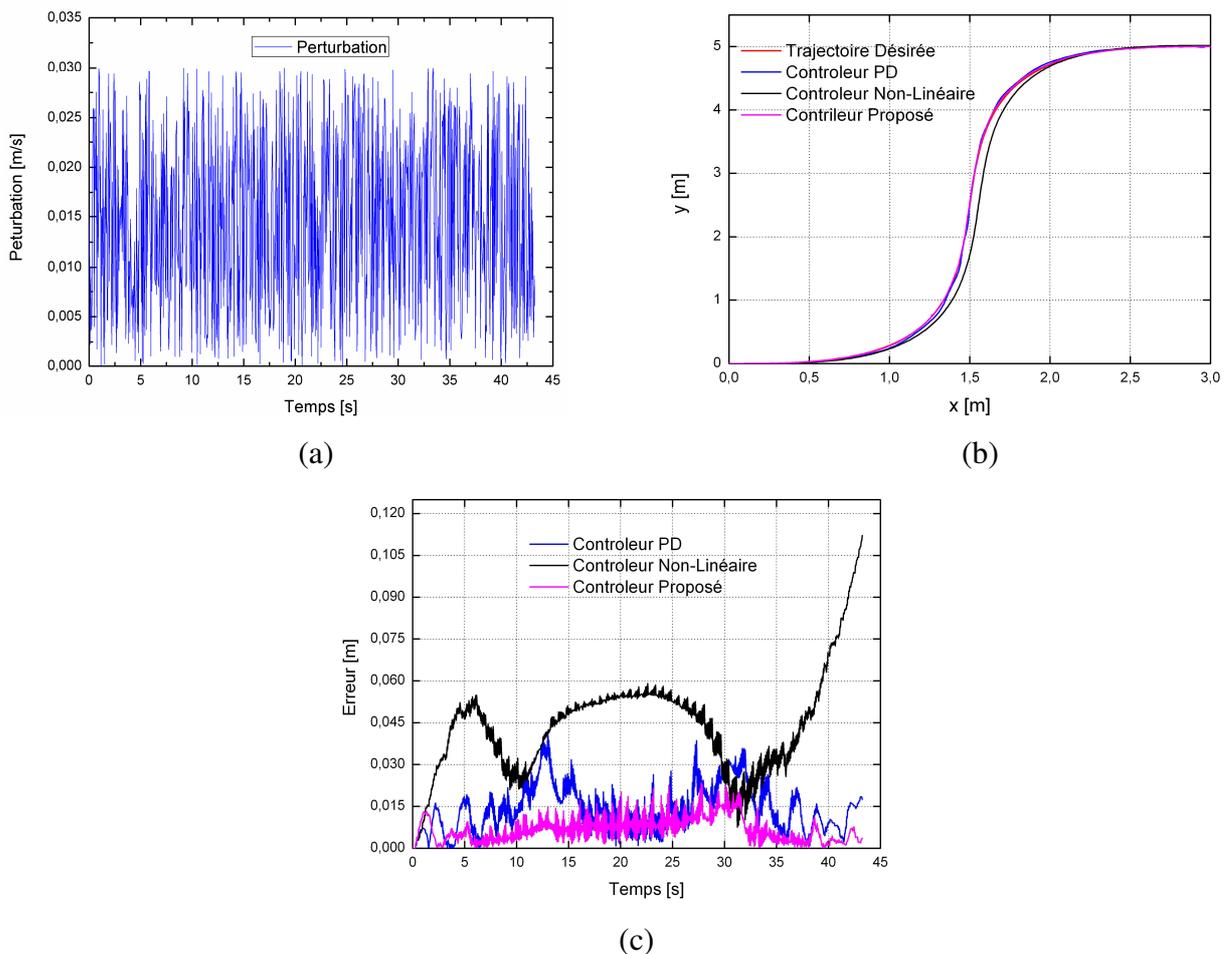


Figure IV.7 Suivi de la trajectoire avec perturbation: (a) Perturbation à amplitude aléatoire de valeur 0.03. (b) trajectoire du robot. (c) Erreur de suivi.

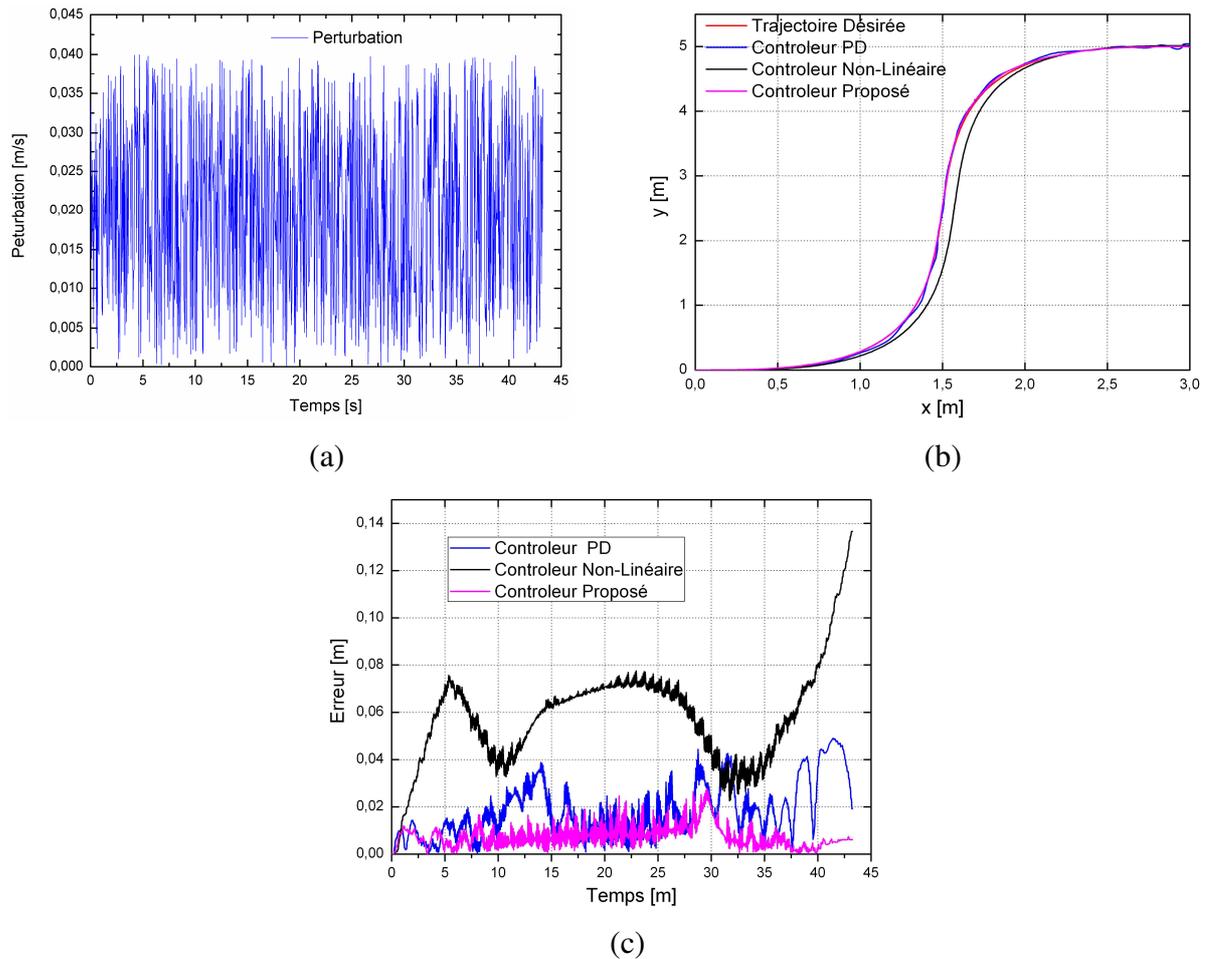
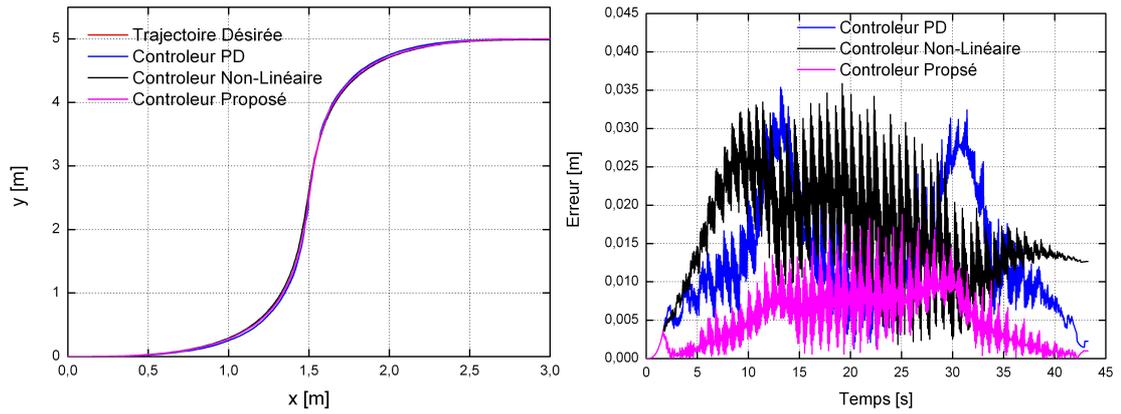


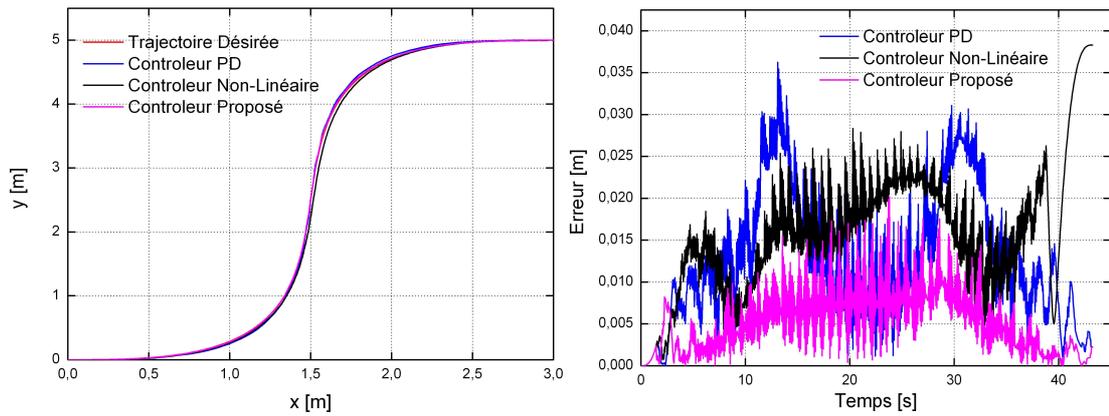
Figure IV.8 Suivi de la trajectoire avec perturbation: (a) Perturbation à amplitude aléatoire de valeur 0.04. (b) trajectoire du robot. (c) Erreur de suivi.

Tests pratiques

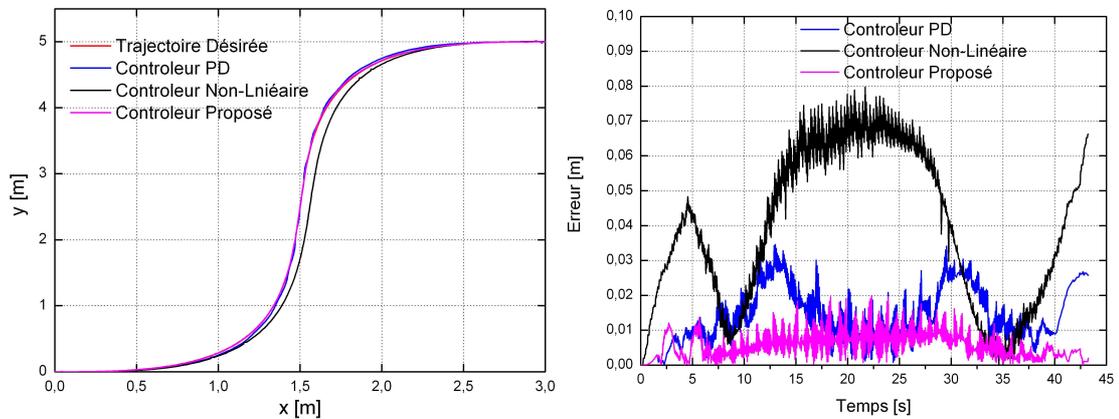
Pour les tests pratiques le robot Pioneer 3-DX est considéré, on a répété les mêmes tâches planifiées précédemment avec les mêmes paramètres des contrôleurs. Le comportement du robot est analysé dans le cas nominal comme le montre la Figure IV.9.a, puis en présence de quelques perturbations externes non modélisées comme les montrent les Figure IV.9.c,d. On voit bien que les résultats expérimentaux sont très proches de ceux obtenus par la simulation. Ces résultats confirment, également, que le contrôleur proposé améliore la précision et la robustesse du système. On note que, lorsque le signal de perturbation ajusté jusqu'à 0,04 valeur maximale (Figure IV.9.d), le système conserve sa stabilité pour le contrôleur proposé, en revanche cette propriété est absente pour le contrôleur PD classique et le robot se déplace suivant une trajectoire aléatoire et dépasse l'espace de travail pour cela on n'a pas pu présenter ce résultat.



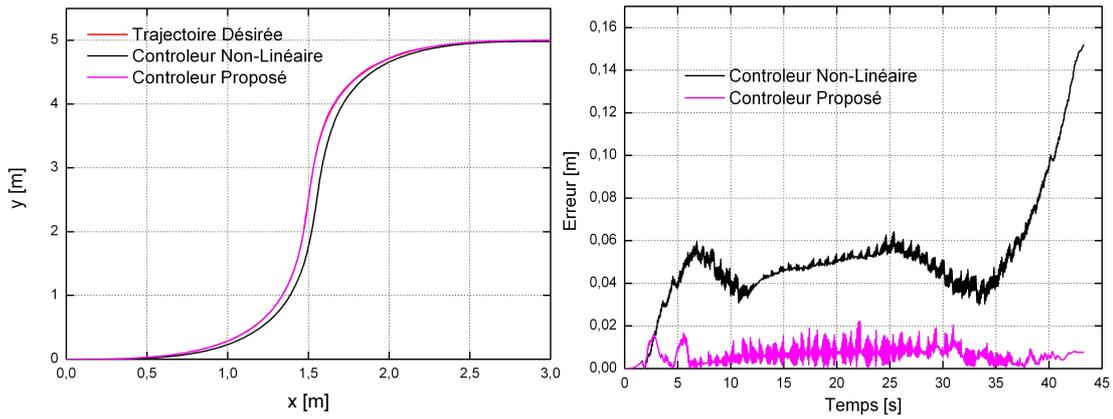
(a) sans perturbation



(b) avec une perturbation d'amplitude max 0.02m/s



(c) avec une perturbation d'amplitude max 0.03m/s



(d) avec une perturbation d'amplitude max 0.04m/s

Figure IV.9 Résultats des tests pratiques.

IV.2. Manipulateur mobile

Cette section représente une extension de l'approche de contrôle proposée précédemment pour la commande d'un Manipulateur Mobile à roues avec des contraintes non-holonome (MMR). Tout d'abord, des courbes de Bézier sont utilisées pour spécifier l'évolution géométrique de la plateforme mobile dans son environnement. Ensuite, un polynôme Quintique est introduit pour définir l'évolution de chaque segment du bras manipulateur. Enfin, le contrôleur par mode glissant utilisé dans la section précédente est adopté, considérant le modèle cinématique du bras puis le modèle dynamique, ici pour garantir la précision et la robustesse du suivi des trajectoires générées.

IV.2.1. Modélisation cinématique du manipulateur mobile à roues

Rappelant le manipulateur mobile à roue présenté dans le paragraphe I.4, composé d'un bras manipulateur monté sur une plate-forme mobile non-holonome à deux roues différentielles, comme le montre la Figure IV.10.

Les coordonnées généralisées du manipulateur mobile sont données par le vecteur suivant:

$$q_m = [q_p, q_b] = [x, y, \theta, \theta_1, \theta_2]$$

où :

$q_p = [x, y, \theta]$ décrit les coordonnées de la plate-forme mobile à roues.

$q_b = [\theta_1, \theta_2]$ décrit les variables angulaires du bras manipulateur.

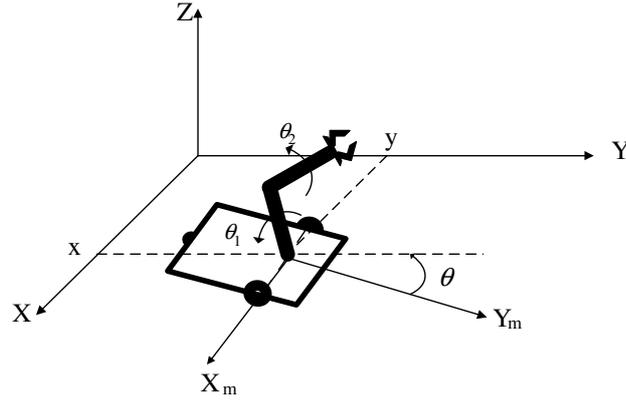


Figure IV.10 Un modèle simplifié d'un MMR.

Le modèle cinématique du MMR incluant les contraintes non-holonomes de la base mobile est donné sous la forme matricielle suivante :

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.31})$$

où v et ω sont respectivement les vitesse linéaire et angulaire de la base mobile, $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$ sont les vitesses des articulations du bras manipulateur.

L'équation (IV.31) peut être réécrite comme suit :

$$\dot{q}_p = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = J_p u_p \quad (\text{IV.32})$$

$$\dot{q}_b = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = J_b u_b \quad (\text{IV.33})$$

Les équations (IV.32) et (IV.33) donnent les modèles mathématiques de chaque sous-système séparément, la base mobile et le bras manipulateur respectivement, du système entier.

où : $u_p^T = [u_1 \ u_2]^T = [v \ \omega]^T$ et $u_b^T = [u_3 \ u_4]^T = [w_1 \ w_2]^T$ sont les entrées de commande pour chaque sous-système. $u_m^T = [u_p \ u_b]^T$ est le vecteur d'entrée du MMR.

La représentation séparée du système peut être utilisée pour simplifier la conception de contrôle du MMR.

IV.2.2. Concept de la platitude du MMR

Cette partie est consacrée à la démonstration de chaque sous système du manipulateur mobile, Figure IV.10, est un système plat. Pour cela, rappelant l'exemple présenté dans le paragraphe II.5.4.

- **Sous-système 1 : Plate-forme mobile**

Dans la section précédente, la plate-forme mobile décrite par l'équation (IV.32) a été démontrée qu'elle est plate avec un vecteur des sorties plates donné comme:

$$F_p^T = [F_1, F_2] = [x, y].$$

- **Sous-système 2 : bras manipulateur planaire**

Les sorties plates pour le bras manipulateur sont choisies comme : $F_b^T = [F_3, F_4] = [\theta_3, \theta_4]$.

Conformément avec l'exemple du paragraphe II.5.4 que les deux sous-systèmes, comme des systèmes plats, donc on peut tirer la conclusion que le système entier, le manipulateur mobile, défini par l'équation (IV.31) est plat avec un vecteur des sorties plates donné par:

$$F = \begin{bmatrix} F_p^T & F_b^T \end{bmatrix}$$

IV.2.3. Approche de la platitude

Le MMR est différentiellement plat par rapport aux coordonnées de son "centre" et les sorties plates ont été choisies comme suit: $[F_1, F_2, F_3, F_4]^T = [x, y, \theta_3, \theta_4]^T$.

Si on définit le vecteur d'entrée de commande $u = [\zeta, \omega, w_1, w_2]^T$ comme :

$$\begin{cases} \zeta = u_1 \cos(\theta) + u_2 \sin(\theta), \\ v = \int \zeta dt, \\ \omega = \frac{u_2 \cos(\theta) - u_1 \sin(\theta)}{v}, \\ \dot{\theta}_1 = w_1, \\ \dot{\theta}_4 = w_2. \end{cases} \quad (IV.34)$$

où u_1, u_2, u_3 et u_4 sont des nouvelles entrées de commande à concevoir.

Le système (IV.31) prend la forme :

$$\begin{bmatrix} \ddot{F}_1 \\ \ddot{F}_2 \\ \dot{F}_3 \\ \dot{F}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (IV.35)$$

Il est noté que ce changement des états du système et des entrées de commande rend le problème de conception d'un contrôleur non linéaire compliqué, un problème de conception simple pour

un système linéaire composé de quatre sous-systèmes découplés.

IV.2.4. Planification des trajectoires

En se basant sur le fait que le MMR se déplace dans des environnements, usuellement, incluant des différents type d'obstacles, la trajectoire conçue de la plate-forme mobile doit être sécurisée et adaptative à l'environnement. La première tâche de l'algorithme de planification de trajectoire, considère la planification des trajectoires désirées du robot mobile en tenant compte des limites physiques du système et de l'évitement des obstacles. La deuxième tâche traite le problème de trouver les entrées nécessaires pour le bras manipulateur lorsque le robot mobile se déplace.

IV.2.4.1. Planification de trajectoire pour la plate-forme mobile :

Gardant la même trajectoire désirée, utilisée dans le paragraphe IV.1.3, pour la plate-forme mobile, avec $F(t) = [F_1, F_2]^T$.

Comme a été déjà vu, cette approche permet de garantir plusieurs niveaux de flexibilités qui permettent la génération des trajectoires faisables et sûres sous différentes contraintes.

IV.2.4.2. Planification de trajectoire du bras manipulateur planaire :

Après avoir généré les trajectoires désirées qui assurent le mouvement de la plate-forme mobile, les trajectoires de référence du robot manipulateur peuvent être assignées directement à l'aide de la fonction d'interpolation définie comme:

$$\begin{cases} F_3 = a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \\ F_4 = b_5 t^5 + b_4 t^4 + b_3 t^3 + b_2 t^2 + b_1 t + b_0. \end{cases} \quad 0 < t < T \quad (\text{IV.36})$$

Les paramètres a_i, b_i et T sont choisis de manière à garantir les conditions initiales du bras manipulateur comme le montre le Tableau IV.4. Ainsi qu'on note que le temps d'exécution T pour le bras manipulateur doit être synchroniser avec les mouvements du chariot mobile. Il est également nécessaire de garantir que toutes les limites physiques du système sont respectées. Ces contraintes sont données sous la forme :

- *Les positions angulaires des articulations*

$$\theta_{1\min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1\max}$$

$$\theta_{2\min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2\max}$$

- *les vitesses angulaires des articulations*

$$\dot{\theta}_{1\min} \leq \dot{\theta}_1 \leq \dot{\theta}_{1\max}$$

$$\dot{\theta}_{2\min} \leq \dot{\theta}_2 \leq \dot{\theta}_{2\max}$$

Etant donné des conditions initiales de la tâche spécifiée et des limites physiques du MMR, c'est-

à-dire la vitesse angulaire de chaque roue et les limites pour chaque articulation, et en se basant sur sa propriété de platitude, les trajectoires désirées peuvent être planifiées soit dans l'espace cartésien, soit dans l'espace plat du système (Tableau IV.3 et Tableau IV.4).

$$\begin{aligned} F(t) &= [F_1(t), F_2(t), F_3(t), F_4(t)]^T \\ &= [x(t), y(t), \theta_3(t), \theta_4(t)]^T \\ &= F(s(t)) = F(s) \circ s(t) \end{aligned} \quad (IV.37)$$

Les conditions initiales pour les variables d'états	Les conditions initiales pour les sorties plates
$x(0) = x_A, y(0) = y_A, \theta(0) = 0, v(0) = 0, w(0) = 0.$ $\theta_1(0) = \theta_{1A}, \dot{\theta}_1(0) = 0, \ddot{\theta}_1(0) = 0.$ $\theta_2(0) = \theta_{2A}, \dot{\theta}_2(0) = 0, \ddot{\theta}_2(0) = 0.$	$F_1(0) = x(0), \dot{F}_1(0) = \dot{x}(0) = v(0) \cos(\theta(0)).$ $F_2(0) = y(0), \dot{F}_2(0) = \dot{y}(0) = v(0) \sin(\theta(0)).$ $F_3(0) = \theta_1(0), \dot{F}_3(0) = 0, \ddot{F}_3(0) = 0.$ $F_4(0) = \theta_2(0), \dot{F}_4(0) = 0, \ddot{F}_4(0) = 0.$
$x(T) = x_B, y(T) = y_B, \theta(T) = 0, v(T) = 0, w(T) = 0.$ $\theta_1(T) = \theta_{1B}, \dot{\theta}_1(T) = 0, \ddot{\theta}_1(T) = 0.$ $\theta_2(T) = \theta_{2B}, \dot{\theta}_2(T) = 0, \ddot{\theta}_2(T) = 0.$	$F_1(T) = x(T), \dot{F}_1(T) = \dot{x}(T).$ $F_2(T) = y(T), \dot{F}_2(T) = \dot{y}(T).$ $F_3(T) = \theta_1(T), \dot{F}_3(T) = 0, \ddot{F}_3(T) = 0.$ $F_4(T) = \theta_2(T), \dot{F}_4(T) = 0, \ddot{F}_4(T) = 0.$

Tableau IV.4 Conditions initiales pour les sorties plates.

IV.2.5. Conception des contrôleurs basé sur le modèle cinématique

Une fois les trajectoires de référence planifiées, il est nécessaire d'identifier les entrées de commande qui forcent le robot à suivre ces trajectoires malgré les perturbations externes et les incertitudes du modèle.

Pour le contrôle des mouvements du bras manipulateurs, on a proposé une commande de la forme :

$$\begin{cases} u_3 = \frac{dw_1}{dt}, u_4 = \frac{dw_2}{dt} \\ w_1 = \int u_3 dt, w_2 = \int u_4 dt, \end{cases} \quad (IV.38)$$

Avec $[u_3 \ u_4]$ représentent des nouvelles entrées de commande pour le bras.

On considère le vecteur d'erreur de suivi défini par:

$$e_i = F_{ci} - F_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

et on prend la deuxième dérivée du vecteur e , pour obtenir le système d'équation formé de quatre double intégrateurs découplés de la forme :

$$\ddot{e}_i = u_i + \dot{f}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (IV.39)$$

où $f_i = -\dot{F}_{id} + \Delta f_i$, avec Δf_i sont des fonctions additives inconnues qui collectent des

perturbations externes (supposées bornées) agissant sur le système.

Les principaux problèmes d'un suivi robuste sont la conception des entrées de commandes appropriées qui assurent la convergence du vecteur d'erreurs de suivi vers zéro, la stabilité du système et sa robustesse.

La procédure de conception du contrôleur proposé qui stabilise le système (IV.39) est la suivante :

$$\dot{e}_\alpha = \vartheta_\alpha + f_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4. \quad (\text{IV.40})$$

$$\ddot{e}_\alpha = \dot{\vartheta}_\alpha + \dot{f}_\alpha$$

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \dot{e} = \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = \ddot{e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{\alpha 1} = \eta_{\alpha 2}, \\ \dot{\eta}_{\alpha 2} = u_\alpha - \dot{f}_\alpha. \end{cases} \quad (\text{IV.41})$$

$$u_\alpha = -\gamma_\alpha \text{sign}(x_{\alpha 1} \sigma_\alpha) x_{\alpha 1} - \beta_\alpha \text{sign}(\vartheta_\alpha \sigma_\alpha) \vartheta_\alpha - \delta \text{sign}(\sigma_\alpha) \quad (\text{IV.42})$$

avec : $\sigma_\alpha = \eta_{\alpha 2} + \lambda_\alpha \eta_{\alpha 1}$ la surface de glissement.

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{\alpha 1} = \eta_{\alpha 2}, \\ \dot{\eta}_{\alpha 2} = -\gamma_\alpha \text{sign}(\eta_{\alpha 1} \sigma_\alpha) \eta_{\alpha 1} - \beta_\alpha \text{sign}(\vartheta_\alpha \sigma_\alpha) \eta_{\alpha 2} - \delta \text{sign}(\sigma_\alpha) + \beta_\alpha \text{sign}(\vartheta_\alpha \sigma_\alpha) \dot{f}_\alpha + \dot{f}_\alpha. \end{cases} \quad (\text{IV.43})$$

Théorème IV-2

Le système (IV.41) sous l'entrée de commande (IV.42) est stable si et seulement si les paramètres de commande satisfont aux inégalités :

$$\begin{cases} \gamma_\alpha > \lambda_\alpha^2 + \beta_\alpha \lambda_\alpha, \\ \delta > \max(\dot{f}_\alpha). \end{cases} \quad (\text{IV.44})$$

La preuve du Théorème IV-2 est le même que celle présentée pour le robot mobile.

IV.2.6. Résultats de simulation

Les résultats de simulation sont présentés pour vérifier les performances et l'efficacité de l'approche proposée. L'algorithme a été implémenté en utilisant le simulateur, *MobileSim*, du robot mobile Pioneer 3DX pour la plate-forme, cependant, l'évolution du bras est simulée sous l'environnement *Matlab*.

Tous les tests ont été mis en œuvre en utilisant un temps d'échantillonnage $T_s = 0.05s$ et en évaluant les dérivées en ligne du vecteur \dot{q} sur la base d'un différentiateur de mode glissant Super-Twisting.

L'objectif de la tâche a été fixé pour déplacer le robot de sa configuration initiale

$A = (x_A, y_A, \theta_{1A}, \theta_{2A}) = (0, 0, 0, 0)$ à une configuration cible $B = (x_B, y_B, \theta_{1B}, \theta_{2B}) = (3, 5, 45^\circ, 45^\circ)$.

Les trajectoires désirées, pour la plate-forme mobile, ont été conçues en changeant les points de contrôle de la courbe de Bézier quintique définie auparavant.

Les limites des vitesses linéaires et angulaires maximales du robot mobile sont données comme suit:

$$v_{\max} = 0.3m.s^{-1}, \quad w_{\max} = 0.5rad.s^{-1}$$

Afin de permettre au robot d'éviter les collisions pendant son mouvement, les trajectoires désirées $[F_{1d}(s), F_{2d}(s)]^T$ ont été générées en utilisant les courbes de Bézier telles que présentées avant:

$$F_{1d}(s) = F_{2d}(s) = m_0P_0 + m_1P_1 + m_2P_2 + m_3P_3 + m_4P_4 + m_5P_5$$

Les points de contrôle initiaux sont choisis comme :

$$P_0 = (0, 0), P_1 = (1.1662, 0), P_2 = (2.3324, 0), P_3 = (0.6676, 5), P_4 = (1.8338, 5), P_5 = (3, 5).$$

Le profil de mouvement $s(t)$ a été sélectionné comme :

$$s(t) = a_5t^5 + a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$$

Ainsi pour le bras manipulateur, les trajectoires désirées $[F_{3d}(t), F_{4d}(t)]^T$ ont été générées à l'aide d'un polynôme de degré cinq donnée par l'équation suivante :

$$F_{3d}(t) = F_{4d}(t) = b_5t^5 + b_4t^4 + b_3t^3 + b_2t^2 + b_1t + b_0$$

avec les coefficients b_i définis à partir des conditions initiales données dans le Tableau IV.4.

Les gains du contrôleur proposé (IV.42) peuvent être sélectionnés selon le Théorème IV-2 comme :

- Pour le robot mobile

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 4, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0.2, \quad \delta_1 = \delta_2 = 0.2, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1.9.$$

- Pour le robot manipulateur

$$\gamma_3 = \gamma_4 = 16.504, \quad \beta_3 = \beta_4 = 0.001, \quad \delta_3 = \delta_4 = 0.2, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 1.9.$$

Pour une étude comparative [51], considérant que l'équation du système est régie par un contrôleur continu exponentiellement stable présenté par :

$$\begin{cases} u_1 = k_{p_1} e_1 + k_{D_1} \dot{e}_1 - \ddot{F}_{1d}, \\ u_2 = k_{p_2} e_2 + k_{D_2} \dot{e}_2 - \ddot{F}_{2d}, \\ u_3 = k_{p_3} e_3 - \dot{F}_{3d} \\ u_4 = k_{p_4} e_4 - \dot{F}_{4d} \end{cases} \quad (IV.45)$$

avec $k_{p\alpha}$ et $k_{d\alpha}$ des constantes positives,

$$k_{p1} = k_{p2} = 4, \quad k_{d1} = k_{d2} = 1.1, \quad k_{p3} = k_{p4} = 40,$$

Les figures (Figure IV.11.a, Figure IV.12.a, Figure IV.13.a) montrent bien que la trajectoire sous le contrôleur proposé converge vers la trajectoire désirée malgré l'augmentation de la courbure du chemin planifié, en revanche, le robot sous le contrôleur PD s'est éloigné de la trajectoire désirée.

L'erreur de suivi présentée par le contrôleur PD augmente avec l'augmentation de la courbure, notamment dans la période de temps $[10s, 20s]$ et $[30s, 40s]$, et la norme de l'erreur est multipliée jusqu'à $Norm(error) = 0.1m$, comme le montre les figures (Figure IV.11.b, Figure IV.12.a et Figure IV.13.b).

De même, pour le bras manipulateur planaire, les trajectoires ont été données par les deux contrôleurs (voir Figure IV.14.a, Figure IV.15.a) qui apparaissent superposées mais la différence clairement montrée dans les Figure IV.14.b, Figure IV.15.b, presque l'erreur donnée par le contrôleur PD est multipliée par dix en la comparant avec l'erreur obtenue par le contrôleur proposé.

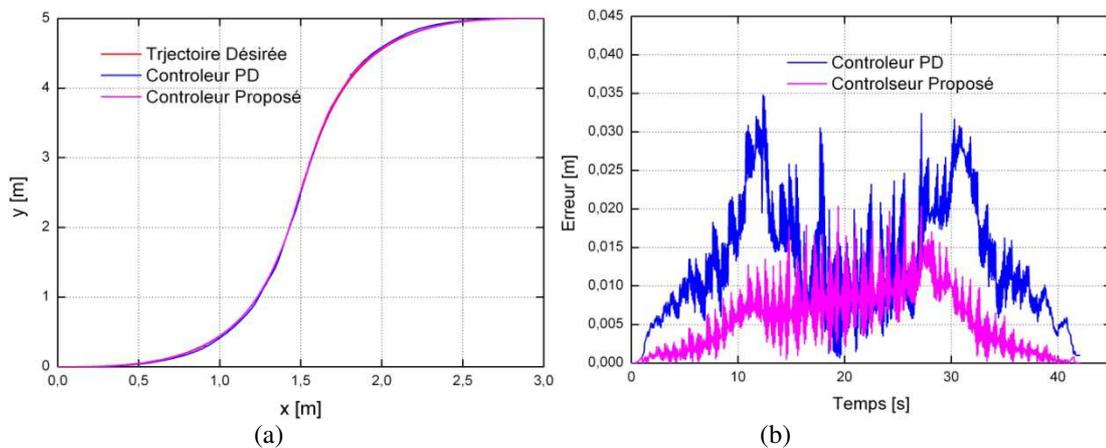
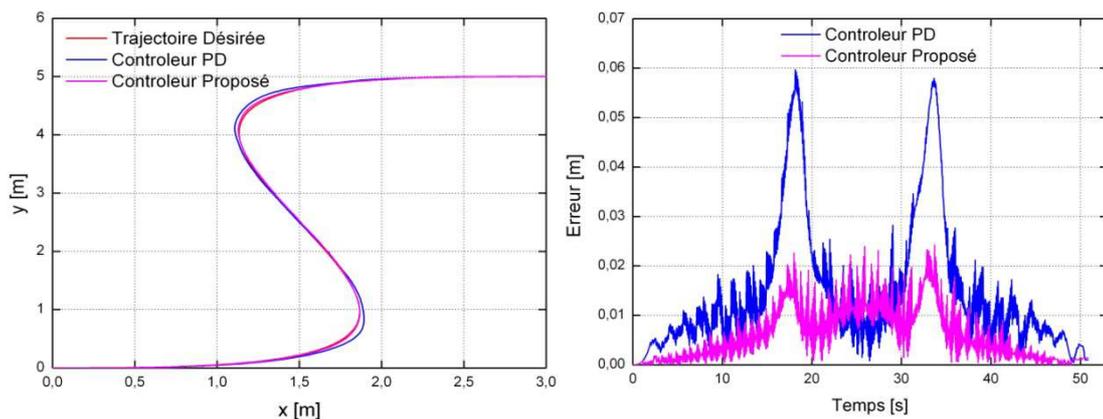


Figure IV.11 suivi de la trajectoire (avec les points de contrôle $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (2, 0)$, $P_3 = (1, 5)$, $P_4 = (2, 5)$, $P_5 = (3, 5)$) : (a) trajectoire du robot mobile. (b) l'erreur de suivi.



(a) (b)
Figure IV.12 suivi de la trajectoire (avec les points de contrôle $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (2,0)$, $P_2 = (4,0)$, $P_3 = (-1, 5)$, $P_4 = (1, 5)$, $P_5 = (3,5)$):(a) trajectoire du robot mobile. (b) l'erreur de suivi.

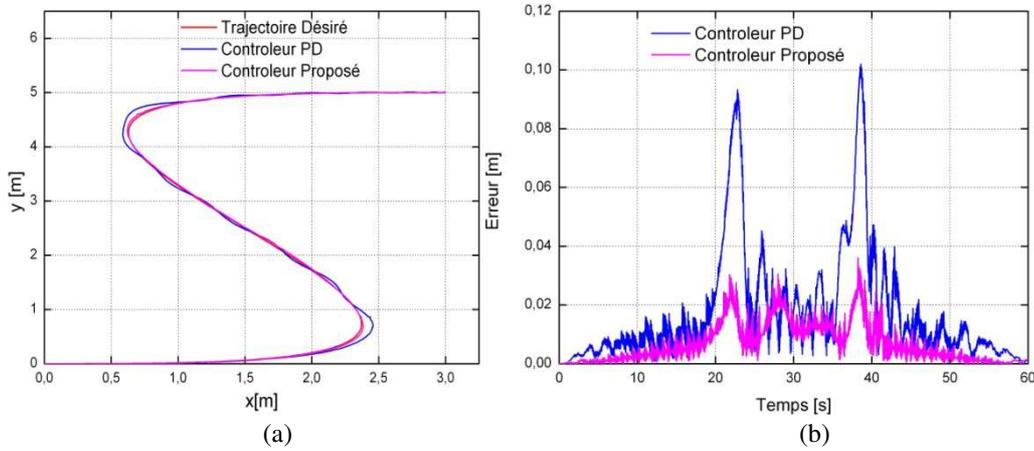


Figure IV.13 Suivi de la trajectoire (avec les points de contrôle $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (3,0)$, $P_2 = (5,0)$, $P_3 = (-2, 5)$, $P_4 = (0, 5)$, $P_5 = (3,5)$): (a) trajectoire du robot mobile. (b) L'erreur de suivi.

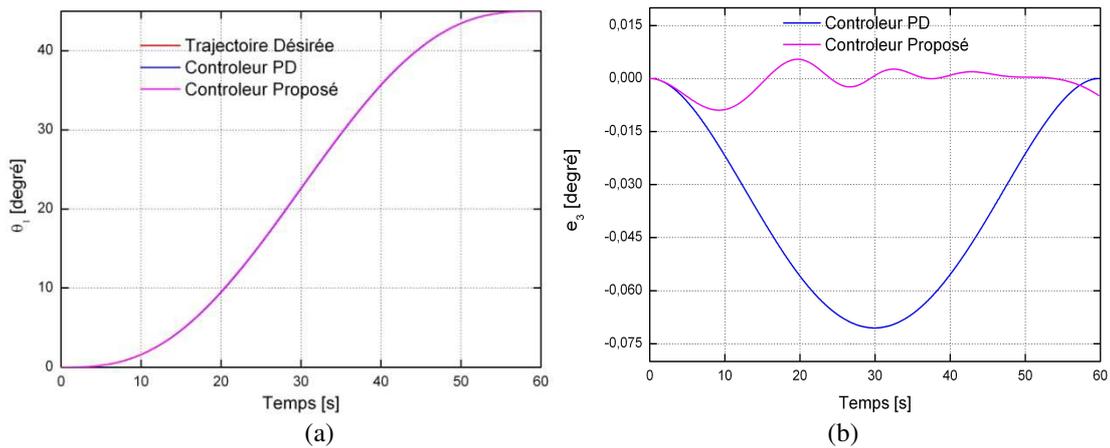


Figure IV.14 Suivi de la trajectoire:(a) trajectoire pour θ_3 . (b) Erreur de suivi.

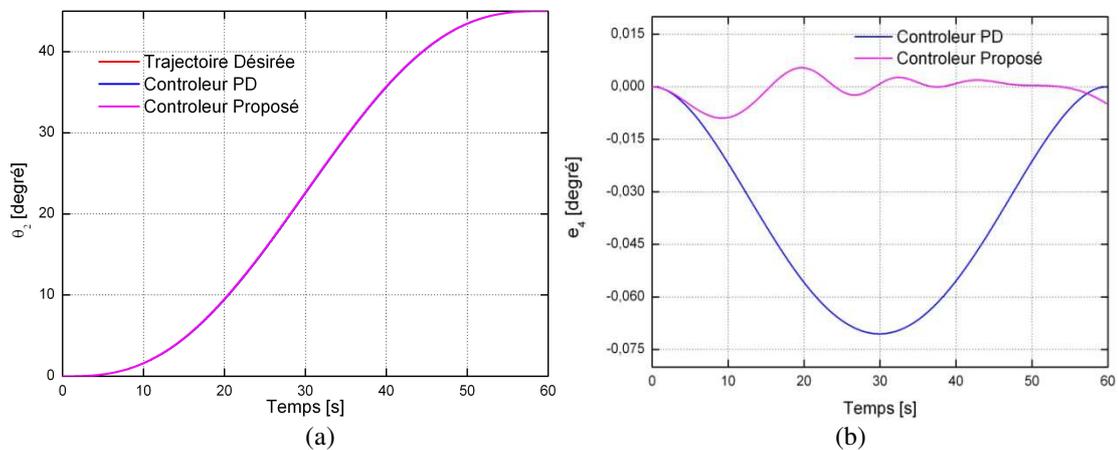


Figure IV.15 Suivi de la trajectoire:(a) trajectoire pour θ_4 . (b) Erreur de suivi.

IV.3. Commande platitude-robuste basée sur le modèle dynamique du robot manipulateur

IV.3.1. Développement du contrôleur

Une extension de l'approche de commande robuste basée sur la platitude du modèle cinématique du bras manipulateur est réétudiée dans cette partie en tenant compte du modèle dynamique du bras. Le problème de contrôle du chariot mobile sera ignoré dans cette partie. Reprenons la représentation dynamique du bras décrite dans l'équation (I.32), le vecteur des variables articulaires $q_b = [\theta_1 \ \theta_2]^T$ peuvent être aussi considérés comme un vecteur des sorties plates comme:

$$F_b = [F_3 \ F_4]^T = [\theta_1 \ \theta_2]^T \quad (IV.46)$$

Pour démontrer cette propriété, on doit arriver à la deuxième dérivée du vecteur (IV.46) pour obtenir :

$$\tau = M\ddot{F}_b + C(F_b)\dot{F}_b + G(F_b) \quad (IV.47)$$

Les équations (IV.46) et (IV.47) montrent bien que les états et les entrées du système sont en fonction du vecteur des sorties plates et ses dérivées, donc le système est plat.

Si on définit une commande linéarisante de la forme :

$$\tau = M V_b + C(F_b)\dot{F}_b + G(F_b) \quad (IV.48)$$

où, V représente une nouvelle loi de commande.

On obtient le système de la forme :

$$\ddot{F}_b = V_b \quad (IV.49)$$

Le système (IV.49) est représenté sous la forme de deux doubles intégrateurs découplés, on peut définir le vecteur de suivi suivant :

$$e_b = F_{bd} - F_b \quad (IV.50)$$

Pour obtenir la dynamique

$$\begin{cases} \ddot{e}_{1b} = v_3 + \dot{f}_{1b}, \\ \ddot{e}_{2b} = v_4 + \dot{f}_{2b}. \end{cases} \quad (IV.51)$$

Donc l'approche de commande par mode glissant à gain dépendant de l'état peut être utilisée pour la stabilisation du système (IV.51). La preuve de la stabilité du système est similaire à celle du robot mobile.

IV.3.2. Résultats de simulations

Pour évaluer les performances de l'approche de commande basée sur le modèle dynamique du bras manipulateur, des simulations effectuées sous l'environnement *MatLab* sont présentées. Les

paramètres du système sont choisis comme:

$$m_1 = m_2 = 0.5kg, \quad I_1 = I_2 = 0.0234kg.m^2, \quad l_1 = l_2 = 0.75m, \quad l_{c1} = l_{c2} = 0.375m.$$

Ainsi que les paramètres des deux contrôleurs sont aussi choisis comme :

- Contrôleur PD défini comme :

$$\begin{cases} v_3 = k_{p_3} e_3 + k_{D_3} \dot{e}_3 - \ddot{F}_{3d}, \\ v_4 = k_{p_4} e_4 + k_{D_4} \dot{e}_4 - \ddot{F}_{4d}. \end{cases}$$

avec : $k_{p_3} = 10, k_{D_3} = 6, k_{p_4} = 10, k_{D_4} = 6$.

- Contrôleur basé sur le mode glissant :

$\lambda_1 = 2, \gamma_1 = 30, \beta_1 = 10, \delta_1 = 0.3$ pour la première articulation.

$\lambda_2 = 2, \gamma_2 = 40, \beta_1 = 20, \delta_1 = 0.6$ pour la deuxième articulation.

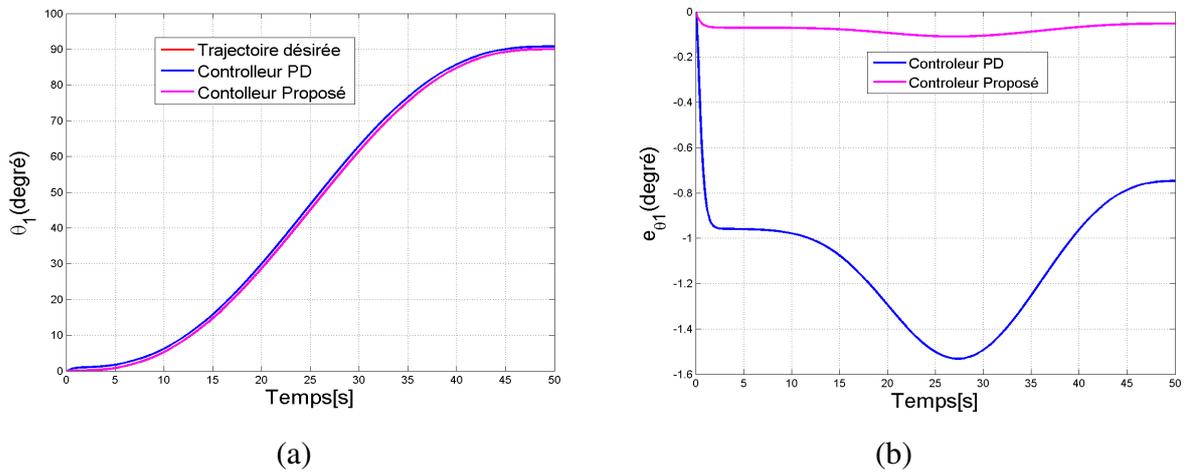


Figure IV.16 Suivi de la trajectoire:(a) trajectoire pour θ_3 . (b) Erreur de suivi.

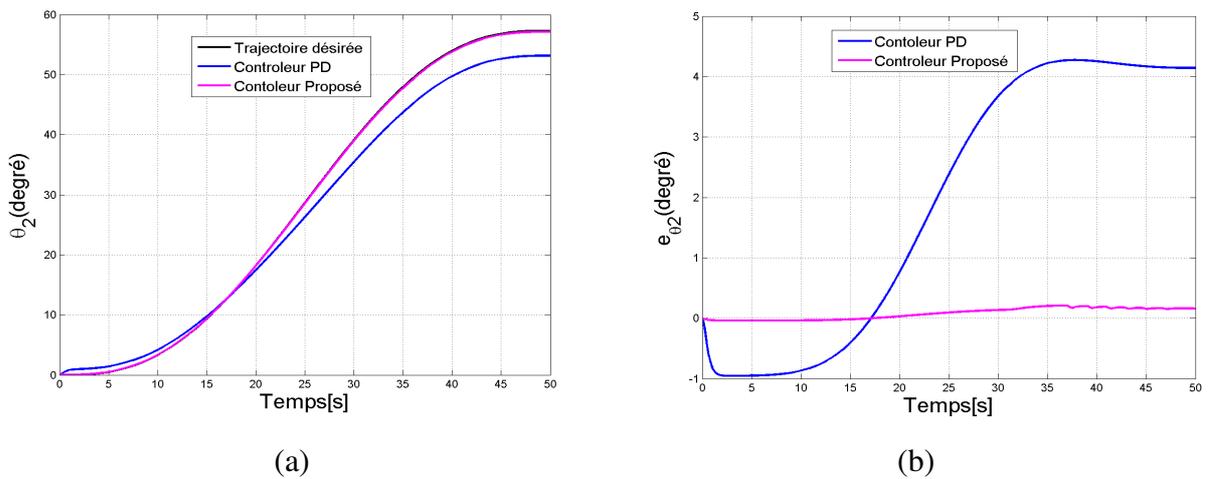


Figure IV.17 Suivi de la trajectoire:(a) trajectoire pour θ_4 . (b) Erreur de suivi.

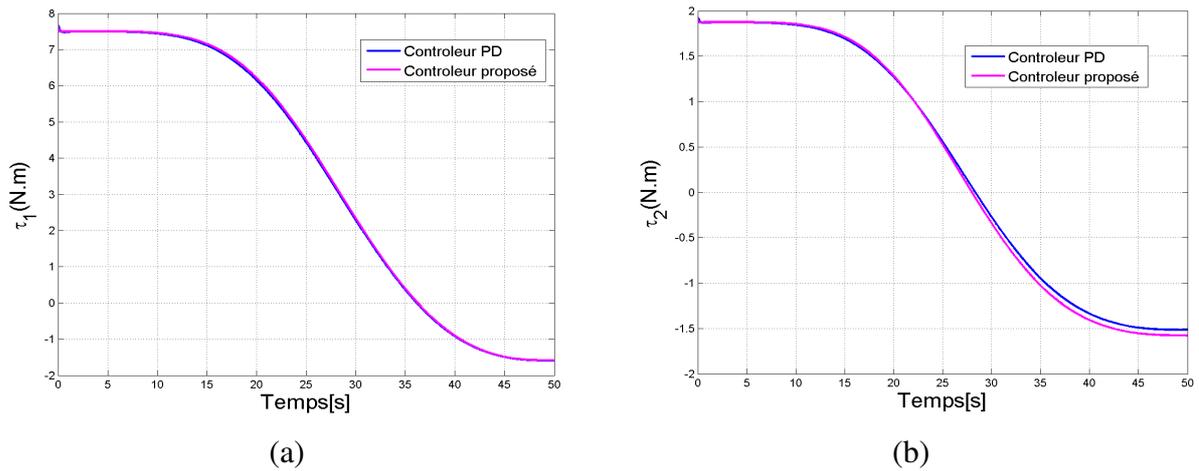


Figure IV.18 Entrées de commande.

L'objectif de la tâche est d'assurer le mouvement du système de la configuration initiale $q_b = [0 \ 0]^T$ vers la configuration finale $q_b = \left[90^\circ \ \frac{180}{\pi} \right]^T$ dans un temps fini. Afin de synchroniser les mouvements du bras et du robot mobile, pour l'exemple de la partie précédente, on a fixé le temps d'exécution $T = 50s$. Pour évaluer la robustesse du système, la masse m_2 est supposée connue avec une incertitude de $\Delta m_2 = 3\%$ (en tenant compte de la charge utile).

On a choisi de simuler l'incertitude sur la masse m_2 puisque le changement dans cette masse influence sur tous les autres paramètres dynamiques du système.

Les Figure IV.16, Figure IV.17 et Figure IV.18 représentent des résultats simulés en appliquant deux contrôleurs : un contrôleur PD classique et le contrôleur proposé. Ces figures montrent bien la robustesse du contrôleur proposé face aux incertitudes paramétriques. Contrairement au contrôleur PD, le contrôleur basé sur le mode glissant permet de minimiser considérablement l'erreur de suivi pour les deux articulations avec des signaux de commande lisses.

IV.4. Conclusion

Dans ce chapitre, une approche de contrôle pour les manipulateurs mobiles à roues est présentée. On a exploité la propriété de platitude du manipulateur mobile pour générer les trajectoires de références dans l'espace des sorties plates, puis un contrôleur robuste basé sur la commande par mode glissant à gain dépendant de l'état est développé. L'approche proposée pour la planification des trajectoires de références permet de synchroniser les mouvements du robot manipulateur et du chariot mobile, ainsi que le respect des différentes contraintes liées au système et son environnement de fonctionnement.

L'algorithme de commande identifié dans ce chapitre permet d'assurer une exécution parfaite

des tâches planifiées ainsi que l'atténuation de chattering. Les résultats pratiques et de simulations montrent bien l'efficacité du contrôleur proposé malgré la présence des perturbations externes.

CONCLUSION GENERALE

Dans cette thèse on a présenté la commande d'un manipulateur mobile pour le suivi de la trajectoire dans l'espace de coordonnées généralisées. Le manipulateur mobile étudié est composé d'un bras manipulateur plan monté sur une plate-forme mobile à deux roues différentielles. D'abord on a abordé le problème de la modélisation du robot qui est la partie essentielle dans la commande des systèmes. La platitude différentielle, les systèmes plats et la commande par mode glissant sont donnés pour aboutir à la conception du contrôleur proposé.

En premier lieu, nous avons traité le problème de contrôle de suivi de trajectoire d'un robot mobile à deux roues différentielles basé sur la platitude différentielle. Ce travail est une extension des travaux réalisés dans la littérature qui sont basés sur la platitude utilisant un contrôleur linéaire, qui est par sa nature sensible aux incertitudes et perturbations externes. L'idée était de planifier un chemin admissible pour le robot dans l'espace des sorties plates en utilisant les courbes de Bézier, puis on assigne la vitesse du robot le long de ce chemin en utilisant des profils de mouvement approprié. Cette structure de planification permet de garantir le respect des différentes contraintes dynamiques et géométriques reliées au système et son environnement de fonctionnement. On a ensuite proposé un contrôleur robuste basé sur le mode glissant, lequel est facile à implémenté et insensible aux incertitudes du modèle et aux perturbations externes, pour que le robot se déplace d'une position initiale vers une position finale. L'adaptation des gains du contrôleur discontinu avec la dynamique de l'erreur de suivi et sa dérivée ont permis d'atténuer considérablement le phénomène de Chattering. Ce dernier représente l'inconvénient majeur du mode glissant conventionnelle. Le contrôleur proposé a été implémenté sur le robot mobile de type Pioneer 3DX via le logiciel Matlab, une comparaison a été faite avec un contrôleur PD et un autre non linéaire. Comme c'était prévu, les résultats présentés montrent l'efficacité du contrôleur proposé en terme de stabilité, précision de suivi et de robustesse.

Dans un second temps, on a procédé les démarches de conception du contrôleur avec le manipulateur mobile. Dans ce stade, le problème est traité pour les deux sous-systèmes séparé, c.-à-d. pour le bras manipulateur et la plate-forme mobile. Toutes les trajectoires sont aussi planifiées dans les sorties plates pour les deux sous-systèmes, concernant la plate-forme mobile

une courbe de Bézier est proposée en changeant sa forme par le changement des coordonnées des point de contrôles dans le cas où le robot se déplace dans des endroits étroits, en outre pour le bras manipulateur plan nous avons utilisé des polynômes de degré cinq. Des résultats simulés sous les environnements *Matlab*, et *MobileSim* ont été illustré afin d'évaluer les performances de l'approche proposée. Les résultats obtenus montrent, aussi, l'efficacité du contrôleur proposé que ce soit le changement de la forme des trajectoires planifiées.

Comme perspectives :

- On envisage d'utiliser le modèle dynamique du manipulateur mobile du laboratoire qui est composé d'un bras manipulateur de sept ddl monté sur la plate-forme défini dans ce travail, qui constitue un seul système, à paramètres inconnus ou partiellement connus pour élaborer un contrôleur basé sur la commande adaptatif-flou.
- On propose la coopération et coordination de multi manipulateurs mobiles pour une application de leader suiveur ...
- La modélisation et la commande d'un robot volant qui porte un bras manipulateur pour les applications aériennes.

Annexe A.

A.1 Les symboles de Christoffel

Rappelant l'équation dynamique d'un bras manipulateur, à chaîne ouverte, de n degrés de liberté :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Q \quad (\text{A.1})$$

$$\sum_{i=1}^n m_{ij}(q)\ddot{q}_i + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n C_{ikm}\dot{q}_k\dot{q}_m + G_i = Q_i \quad (\text{A.2})$$

Avec :

$$M = \sum_{k=1}^n \left(J_{v_k}^T m_k J_{v_k} + \frac{1}{2} J_{\omega_k}^T I_k J_{\omega_k} \right), \quad C = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_i} \right) \quad \text{et} \quad G = \sum_{j=1}^n m_j g^T J_{v_j}$$

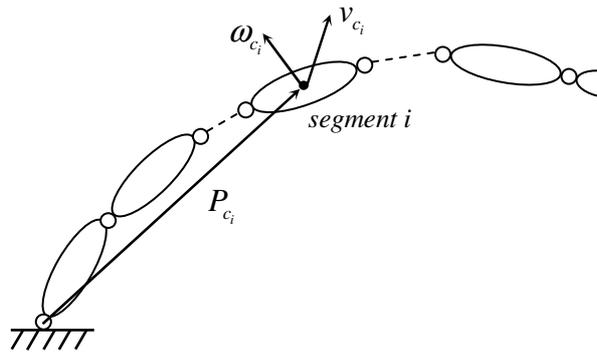


Figure A.1 Bras manipulateur à chaîne ouverte.

$v_{c_i} = J_{v_i} \dot{q}$ la vitesse linéaire du i^{eme} segment.

$\omega_{c_i} = J_{\omega_i} \dot{q}$ la vitesse angulaire du i^{eme} segment.

P_{c_i} la position du centre de gravité du i^{eme} segment.

$$J_{v_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{c_i}}{\partial q_1} & \frac{\partial P_{c_i}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial P_{c_i}}{\partial q_i} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{\omega_i} = [\bar{\epsilon}_1 z_1 \quad \bar{\epsilon}_2 z_2 \quad \dots \quad \bar{\epsilon}_i z_i \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

Les symboles du Christoffel sont donnés en fonction des éléments de la matrice de d'inertie $M(q)$ du bras manipulateur par l'équation suivante :

$$b_{ijk} = \frac{1}{2} (m_{ijk} + m_{ikj} - m_{jki}) \quad (\text{A.3})$$

$$\text{où : } m_{ijk} = \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} .$$

D'abord en calculant les matrices suivante par le moyen de b_{ijk} :

$$\Theta(q) = \begin{bmatrix} b_{1,11} & b_{1,22} & \cdots & b_{1,nn} \\ b_{2,11} & b_{2,22} & \cdots & b_{2,nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n,11} & b_{n,22} & \cdots & b_{n,nn} \end{bmatrix}, [\dot{q}^2] = \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n^2 \end{bmatrix}, \Psi(q) = \begin{bmatrix} 2b_{1,12} & 2b_{1,13} & \cdots & 2b_{1,(n-1)n} \\ 2b_{2,12} & 2b_{2,13} & \cdots & 2b_{2,13} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2b_{n,12} & 2b_{n,13} & \cdots & 2b_{n,(n-1)n} \end{bmatrix}, [\dot{q}\dot{q}] = \begin{bmatrix} \dot{q}_1\dot{q}_2 \\ \dot{q}_1\dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_{(n-1)}\dot{q}_n \end{bmatrix}$$

Ce qui donne le vecteur $C(q, \dot{q})\dot{q}$ par le produit matriciel suivant :

$$C = \Theta(q)_{n \times n} [\dot{q}^2]_{n \times 1} + \Psi(q)_{\left(\frac{n \times (n-1)n}{2}\right)} [\dot{q}\dot{q}]_{\left(\frac{(n-1)n \times 1}{2}\right)} \quad (\text{A.4})$$

□

A.2 Modèle dynamique d'un Manipulateur Mobile à deux Roues différentielle :

Le modèle dynamique du manipulateur mobile présenté dans le paragraphe I.4.1 sous forme programme MatLab en utilisant le calcul symbolique.

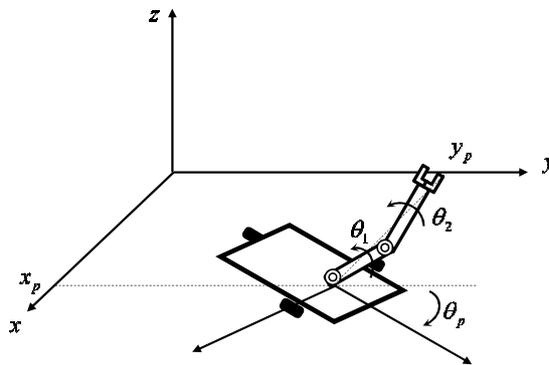


Figure.A.2 Manipulateur mobile.

```
clc, clear all, close all;
```

```
%*****
```

```
%*****LSI Laboratory, Setif-1 University*****
```

```
%*****
```

```
% This program compute the dynamic model of wheeled mobile manipulator composed of  
2DOF planar manipulator robot mounted on a differential mobile robot (Pioneer 3-DX):
```

```
%%
```

```
syms x(t) y(t) th(t) th1(t) th2(t) th1 th2 xdot(t) ydot(t) thdot(t) th1dot(t) th2dot(t) r l1 l2 L m m1
```

m2 I I1 I2 g toR toL to1 to2

%% the following derivatives are function of generalized coordinates q=[xp yp th th1 th2] of
%the system:

% **first link:**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x}_p - \frac{l_1}{2} \dot{\theta}_p \sin \theta_p \cos \theta_{a1} + \frac{l_1}{2} \dot{\theta}_{a1} \cos \theta_p \sin \theta_{a1} \\ \dot{y}_1 = \dot{y}_p + \frac{l_1}{2} \dot{\theta}_p \cos \theta_p \cos \theta_{a1} + \frac{l_1}{2} \dot{\theta}_{a1} \sin \theta_p \sin \theta_{a1} \\ \dot{z}_1 = \frac{l_1}{2} \dot{\theta}_{a1} \cos \theta_{a1} \end{cases}$$

x1dot=xdot-(l1/2)*sin(th)*cos(th1)*thdot-(l1/2)*cos(th)*sin(th1)*th1dot;

y1dot=ydot+(l1/2)*cos(th)*cos(th1)*thdot-(l1/2)*sin(th)*sin(th1)*th1dot;

z1dot=(l1/2)*cos(th1)*th1dot;

% **second link:**

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \dot{x}_1 - \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_p \sin \theta_p \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2}) - \frac{l_2}{2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \cos \theta_p \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2}) \\ \dot{y}_2 = \dot{y}_1 - \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_p \sin \theta_p \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2}) - \frac{l_2}{2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \sin \theta_p \sin(\theta_{a1} + \theta_{a2}) \\ \dot{z}_2 = \dot{z}_1 + \frac{l_2}{2} (\dot{\theta}_{a1} + \dot{\theta}_{a2}) \cos(\theta_{a1} + \theta_{a2}) \end{cases}$$

x2dot=xdot-(l1*sin(th)*cos(th1)+(l2/2)*sin(th)*cos(th1+th2))*thdot-(l1*cos(th)*sin(th1)-(l2/2)*
cos(th)*sin(th1+th2))*th1dot-(l2/2)*cos(th)*sin(th1+th2)*th2dot;

y2dot=ydot+(l1*cos(th)*cos(th1)+(l2/2)*cos(th)*cos(th1+th2))*thdot-(l1*sin(th)*sin(th1)+
(l2/2)*sin(th)*sin(th1+th2))*th1dot-(l2/2)*sin(th)*sin(th1+th2)*th2dot;

z2dot=(l1*cos(th1)+(l2/2)*cos(th1+th2))*th1dot+(l2/2)*cos(th1+th2)*th2dot;

%% **kinetic energy of the system**

$$E_c = \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) + \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}_p^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} I_{b1} \dot{\theta}_{a1}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} I_{b2} (\dot{\theta}_{b1}^2 + \dot{\theta}_{b2}^2)$$

%K=(1/2)*m*(xdot^2+ydot^2)+(1/2)*I*(thdot^2)+(1/2)*m1*(x1dot^2+y1dot^2+z1dot^2)+(1/2)*
(I1+I2)*th1dot^2+(1/2)*m2*(x2dot^2+y2dot^2+z2dot^2)+(1/2)*I2*th2dot^2;

%% potential energy of the system

$$E_p = \frac{l_1}{2} m_1 g \sin \theta_{b1} + m_2 g (l_1 + \frac{l_2}{2} \sin \theta_{b2})$$

%U=(l1/2)*m1*g*sin(th1)+m2*g*(l1+(l2/2)*sin(th2));

%% Lagrangian equation of the system

% L=K-U;

%L(t) = simplify(K - U);

syms q1 q1p q2 q2p q3 q3p q4 q4p q5 q5p

L(t)=subs(L,{xdot, ydot, th, thdot, th1, th1dot, th2, th2dot},[q1p, q2p, q3, q3p, q4, q4p, q5, q5p]);

% first coordinate X

dLdq1 = diff(L, q1);dLdq1=subs(dLdq1,[q1p q2p q3 q3p q4 q4p q5 q5p],[diff(x) diff(y) th diff(th) th1 diff(th1) th2 diff(th2)]);

dLdq1p = diff(L, q1p);dLdq1p=subs(dLdq1p,[q1p q2p q3 q3p q4 q4p q5 q5p],[diff(x) diff(y) th diff(th) th1 diff(th1) th2 diff(th2)]);

% second coordinate Y

dLdq2 = diff(L, q2);dLdq2=subs(dLdq2,[q1p q2p q3 q3p q4 q4p q5 q5p],[diff(x) diff(y) th diff(th) th1 diff(th1) th2 diff(th2)]);

dLdq2p = diff(L, q2p);dLdq2p=subs(dLdq2p,[q1p q2p q3 q3p q4 q4p q5 q5p],[diff(x) diff(y) th diff(th) th1 diff(th1) th2 diff(th2)]);

% third coordinate Theta

dLdq3 = diff(L, q3); dLdq3=subs(dLdq3,[q1p q2p q3 q3p q4 q4p q5 q5p],[diff(x) diff(y) th diff(th) th1 diff(th1) th2 diff(th2)]);

dLdq3p = diff(L, q3p);dLdq3p=subs(dLdq3p,[q1p q2p q3 q3p q4 q4p q5 q5p],[diff(x) diff(y) th diff(th) th1 diff(th1) th2 diff(th2)]);

% fourth coordinate Theta1

dLdq4 = diff(L, q4); dLdq4=subs(dLdq4,[q1p q2p q3 q3p q4 q4p q5 q5p],[diff(x) diff(y) th

```
diff(th) th1 diff(th1) th2 diff(th2));
```

```
dLdq4p = diff(L, q4p);dLdq4p=subs(dLdq4p,[q1p q2p q3 q3p q4 q4p q5 q5p],[diff(x) diff(y) th
diff(th) th1 diff(th1) th2 diff(th2)]);
```

```
% fifth coordinate Theta2
```

```
dLdq5 = diff(L, q5); dLdq5=subs(dLdq5,[q1p q2p q3 q3p q4 q4p q5 q5p],[diff(x) diff(y) th
diff(th) th1 diff(th1) th2 diff(th2)]);
```

```
dLdq5p = diff(L, q5p);dLdq5p=subs(dLdq5p,[q1p q2p q3 q3p q4 q4p q5 q5p],[diff(x) diff(y) th
diff(th) th1 diff(th1) th2 diff(th2)]);
```

```
% First term of Lagrange equation for each coordinate variable:
```

```
dtgLdq1p = diff(dLdq1p, t);
```

```
dtgLdq2p = diff(dLdq2p, t);
```

```
dtgLdq3p = diff(dLdq3p, t);
```

```
dtgLdq4p = diff(dLdq4p, t);
```

```
dtgLdq5p = diff(dLdq5p, t);
```

```
%% Lagrange equation:
```

```
display('The Lagrange equation of the Mobile Manipulator is:');
```

```
eq1= dtgLdq1p - dLdq1 == (1/r)*cos(th)*(toR+toL);
```

```
eq2= dtgLdq2p - dLdq2 == (1/r)*sin(th)*(toR+toL);
```

```
eq3= dtgLdq3p - dLdq3 == (1/r)*(toR-toL);
```

```
eq4= dtgLdq4p - dLdq4 == sym(to1);
```

```
eq5= dtgLdq5p - dLdq5 == sym(to2);
```

```
%%
```

□

Bibliographies

- [1] A. A. Ata, « Dynamic modelling and numerical simulation of a non-holonomic mobile manipulator », *Int. J. Mech. Mater. Des.*, vol. 6, n° 3, pp. 209-216, sept. 2010.
- [2] S. S. Srinivasa *et al.*, « Herb 2.0: Lessons Learned From Developing a Mobile Manipulator for the Home », *Proc. IEEE*, vol. 100, n° 8, pp. 2410-2428, août 2012.
- [3] M. Vona et S. Nh, « Teaching Robotics Software With the Open Hardware Mobile Manipulator », *IEEE Trans. Educ.*, vol. 56, n° 1, pp. 42-47, févr. 2013.
- [4] T. Gonzalez et A. Bravo, « Fuzzy Controller to Change Gravity Center on Mobile Manipulators », *IEEE Lat. Am. Trans.*, vol. 12, n° 6, pp. 991-996, sept. 2014.
- [5] V. Pilania et K. Gupta, « A hierarchical and adaptive mobile manipulator planner with base pose uncertainty », *Auton. Robots*, vol. 39, n° 1, pp. 65-85, juin 2015.
- [6] K.-T. Song, S.-Y. Jiang, et M.-H. Lin, « Interactive Teleoperation of a Mobile Manipulator Using a Shared-Control Approach », *IEEE Trans. Hum.-Mach. Syst.*, vol. 46, n° 6, pp. 834-845, déc. 2016.
- [7] R. Bostelman, S. Foufou, T. Hong, et M. Shah, « Model of Mobile Manipulator Performance Measurement using SysML », *J. Intell. Robot. Syst.*, nov. 2017.
- [8] L. Minh Phuoc, P. Martinet, H. Kim, et S. Lee, « Motion Planning for Non-Holonomic Mobile Manipulator Based Visual Servo under Large Platform Movement Errors at Low Velocity », *IFAC Proc. Vol.*, vol. 41, n° 2, pp. 4312-4317, 2008.
- [9] Kang Shin et N. McKay, « Minimum-time control of robotic manipulators with geometric path constraints », *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 30, n° 6, pp. 531-541, juin 1985.
- [10] M. Kazemi, K. Gupta, et M. Mehrandezh, « Path planning for image-based control of wheeled mobile manipulators », 2012, pp. 5306-5312.
- [11] M. H. Korayem, M. Nazemizadeh, et V. Azimirad, « Optimal trajectory planning of wheeled mobile manipulators in cluttered environments using potential functions », *Sci. Iran.*, vol. 18, n° 5, pp. 1138-1147, oct. 2011.
- [12] J. Jiao, Z. Cao, P. Zhao, X. Liu, et M. Tan, « Bezier curve based path planning for a mobile manipulator in unknown environments », pp. 1864-1868, 2013 .

-
- [13] J. Peng, J. Yu, et J. Wang, « Robust adaptive tracking control for nonholonomic mobile manipulator with uncertainties », *ISA Trans.*, vol. 53, n° 4, pp. 1035-1043, juill. 2014.
- [14] M. Boukattaya, M. Jallouli, et T. Damak, « On trajectory tracking control for nonholonomic mobile manipulators with dynamic uncertainties and external torque disturbances », *Robot. Auton. Syst.*, vol. 60, n° 12, pp. 1640-1647, déc. 2012.
- [15] A. Karray, M. Njah, M. Feki, et M. Jallouli, « Intelligent mobile manipulator navigation using hybrid adaptive-fuzzy controller », *Comput. Electr. Eng.*, vol. 56, pp. 773-783, nov. 2016.
- [16] J.-C. Ryu et S. K. Agrawal, « Planning and control of under-actuated mobile manipulators using differential flatness », *Auton. Robots*, vol. 29, n° 1, pp. 35-52, juill. 2010.
- [17] M. Galicki, « An adaptive non-linear constraint control of mobile manipulators », *Mech. Mach. Theory*, vol. 88, pp. 63-85, juin 2015.
- [18] M. Galicki, « Real-time constrained trajectory generation of mobile manipulators », *Robot. Auton. Syst.*, vol. 78, pp. 49-62, avr. 2016.
- [19] A. Mazur, « Orientation of Doubly Nonholonomic Mobile Manipulator in the Path Tracking Problem », in *Informatics in Control, Automation and Robotics*, vol. 89, J. A. Cetto, J.-L. Ferrier, et J. Filipe, Éd. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011, pp. 171-184.
- [20] G. Pajak et I. Pajak, « Point-to-Point Collision-Free Trajectory Planning for Mobile Manipulators », *J. Intell. Robot. Syst.*, vol. 85, n° 3-4, pp. 523-538, mars 2017.
- [21] F. F. A. Silva et B. V. Adorno, « Whole-body Control of a Mobile Manipulator Using Feedback Linearization and Dual Quaternion Algebra », *J. Intell. Robot. Syst.*, oct. 2017.
- [22] K. Xia *et al.*, « Trajectory tracking control of wheeled mobile manipulator based on fuzzy neural network and extended Kalman filtering », *Neural Comput. Appl.*, nov. 2016.
- [23] G. Zhong, Y. Kobayashi, Y. Hoshino, et T. Emaru, « System modeling and tracking control of mobile manipulator subjected to dynamic interaction and uncertainty », *Nonlinear Dyn.*, vol. 73, n° 1-2, pp. 167-182, juill. 2013.
- [24] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, et P. Rouchon, « On Differentially Flat Nonlinear Systems », *IFAC Proc. Vol.*, vol. 25, n° 13, pp. 159-163, juin 1992.
- [25] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, et P. Rouchon, « Flatness and defect of non-linear
-

-
- systems: introductory theory and examples », *Int. J. Control*, vol. 61, n° 6, pp. 1327-1361, juin 1995.
- [26] V. Hagenmeyer et E. Delaleau, « Robustness Analysis With Respect to Exogenous Perturbations for Flatness-Based Exact Feedforward Linearization », *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 55, n° 3, pp. 727-731, mars 2010.
- [27] A. Luviano-Juárez, J. Cortés-Romero, et H. Sira-Ramírez, « Trajectory Tracking Control of a Mobile Robot Through a Flatness-Based Exact Feedforward Linearization Scheme », *J. Dyn. Syst. Meas. Control*, vol. 137, n° 5, pp. 051001, mai 2015.
- [28] E. Veslin, J. Slama, M. S. Dutra, et O. Lengerke, « Motion planning on Mobile Robots using Differential Flatness », *IEEE Lat. Am. Trans.*, vol. 9, n° 7, pp. 1006-1011, déc. 2011.
- [29] R. Walambe, N. Agarwal, S. Kale, et V. Joshi, « Optimal Trajectory Generation for Car-type Mobile Robot using Spline Interpolation », *IFAC-Pap.*, vol. 49, n° 1, pp. 601-606, 2016.
- [30] J.-C. Ryu et S. K. Agrawal, « Planning and control of under-actuated mobile manipulators using differential flatness », *Auton. Robots*, vol. 29, n° 1, pp. 35-52, juill. 2010.
- [31] J.-J. E. Slotine et W. Li, *Applied nonlinear control*. Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall, 1991.
- [32] V. I. Utkin, J. Guldner, et J. Shi, *Sliding mode control in electromechanical systems*, 2nd ed. Boca Raton, FL : London: CRC Press ; Taylor & Francis [distributeur], 2009.
- [33] A. Levant, « Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control », *Int. J. Control*, vol. 58, n° 6, pp. 1247-1263, déc. 1993.
- [34] B. Siciliano et O. Khatib, Éd., *Springer handbook of robotics*. Berlin: Springer, 2008.
- [35] J. WILEY, « Mark W. Spong, Seth Hutchinson, and M. Vidyasagar », pp. 419.
- [36] R. N. Jazar, *Theory of applied robotics: kinematics, dynamics, and control*, 2nd ed. New York: Springer, 2010.
- [37] M. W. Spong, S. Hutchinson, et M. Vidyasagar, *Robot modeling and control*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2006.
- [38] W. Khalil et E. Dombre, *Modeling, identification & control of robots*. London ; Sterling, VA: Kogan Page Science, 2004.
-

-
- [39] S. G. Tzafestas, *Introduction to mobile robot control*, First edition. Amsterdam: Elsevier, 2014.
- [40] G. Campion, G. Bastin, et B. D'AndrCa-Novel, « Structural Properties and Classification of Kinematic and Dynamic Models of Wheeled Mobile Robots », *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, VOL. 12, NO. 1, pp. 47-62, February, 1996.
- [41] Z. Li, *Fundamentals in Modeling and Control of Mobile Manipulators*. Taylor & Francis Group, 2017.
- [42] G. G. Rigatos, *Nonlinear Control and Filtering Using Differential Flatness Approaches*, vol. 25. Cham: Springer International Publishing, 2015.
- [43] E. Cartan, « Sur l'équivalence absolue de certains systèmes d'équations différentielles et sur certaines familles de courbes », *Bull. Soci233t233 Math233matique Fr.*, vol. 2, pp. 12-48, 1914.
- [44] W. M. Sluis, *Absolute equivalence and its applications to control theory*. Waterloo, Ont: Univ. of Waterloo, 2005.
- [45] M. Fliess, J. Levine, P. Martin, et P. Rouchon, « A Lie-Backlund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems », *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 44, n° 5, p. 922-937, mai 1999.
- [46] J. Lévine, *Analysis and control of nonlinear systems: a flatness-based approach*. Berlin ; New York: Springer, 2009.
- [47] P. Martin et P. Rouchon, « Feedback linearization and driftless systems », *Math. Control Signals Syst.*, vol. 7, n° 3, pp. 235-254, sept. 1994.
- [48] H. J. Sira Ramírez et S. K. Agrawal, *Differentially flat systems*. New York: Marcel Dekker, 2004.
- [49] O. Boutalbi, K. Benmahammed, et M. Boubezoula, « Robust feedback linearizing controller design for an overhead crane system », in *Proceedings of the 6th International Conference on Systems and Control, University of Batna 2, Batna, Algeria, May 7-9, 2017*, 2017, pp. 640-645.
- [50] S. Khesrani, A. Hassam, M. Boubezoula, et F. Srairi, « Modeling and control of mobile platform using flatness-fuzzy based approach with gains adjustment », in *Proceedings of the 6th International Conference on Systems and Control, University of Batna 2, Batna, Algeria, May 7-9, 2017*, 2017, pp. 173-177.
- [51] C. P. Tang, P. T. Miller, V. N. Krovi, J.-C. Ryu, et S. K. Agrawal, « Differential-
-

- Flatness-Based Planning and Control of a Wheeled Mobile Manipulator—Theory and Experiment », *IEEEASME Trans. Mechatron.*, vol. 16, n° 4, pp. 768-773, août 2011.
- [52] J. W. Helton et O. Merino, *Classical control using H [infinity] methods: an introduction to design*. Philadelphia: SIAM, 1998.
- [53] J. Baillieul et T. Samad, Éd., *Encyclopedia of systems and control. Vol. 2: N - Z*. London: Springer, 2015.
- [54] T. Başar et P. Bernhard, *H [infinity symbol]-optimal control and related minimax design problems: a dynamic game approach*. 1991.
- [55] K. J. Åström et B. Wittenmark, *Adaptive control*, 2nd ed. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1995.
- [56] N. M. Filatov et H. Unbehauen, *Adaptive dual control: theory and applications*. Berlin ; New York: Springer, 2004.
- [57] S. V. Emelyanov, « Design Principles of Variable Structure Control Systems' », *Proc. Third IFAC Congr.*, vol. 1, p. 40C.1-40C.6, 1966.
- [58] S. V. Emelyanov, *Variable Structure Systems'*, Nauka, Moscow. 1967.
- [59] S. V. Emelyanov, *Theory of Variable Structure Systems'*, Moscow, Nauka. 1970.
- [60] V. Utkin, « Variable structure systems with sliding modes », *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 22, n° 2, pp. 212-222, avr. 1977.
- [61] S. V. Emel'yanov, « Theory of variable-structure control systems: Inception and initial development », *Comput. Math. Model.*, vol. 18, n° 4, pp. 321-331, oct. 2007.
- [62] A. F. Filippov et F. M. Arscott, *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Dordrecht [etc.: Kluwer Academic Publ, 1988.
- [63] R. A. DeCarlo, S. H. Zak, et G. P. Matthews, « Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial », *Proc. IEEE*, vol. 76, n° 3, pp. 212-232, mars 1988.
- [64] W. Perruquetti et J. P. Barbot, Éd., *Sliding mode control in engineering*. New York: M. Dekker, 2002.
- [65] H. Bühler, *Réglage par mode de glissement: complément au traité d'électricité*. Lausanne: Presses polytechniques romandes, 1986.
- [66] V. Utkin et H. Lee, « CHATTERING PROBLEM IN SLIDING MODE CONTROL SYSTEMS », *IFAC Proc. Vol.*, vol. 39, n° 5, pp. 1, 2006.
- [67] H. Lee et V. I. Utkin, « Chattering suppression methods in sliding mode control systems », *Annu. Rev. Control*, vol. 31, n° 2, pp. 179-188, janv. 2007.

-
- [68] V. I. Utkin et H. Lee, « The Chattering Analysis », 2006, p. 2014-2019.
- [69] Boutalbi, Oussama, « Commande par mode glissant du second ordre d'un portique à trois dimensions », Mémoire de Magistère, Université Ferhat ABBAS - Sétif 1, 2014.
- [70] P.R.E.C.Loni, B. J. Parvat, et S. D. Ratnaparkhi, « A Second Order Sliding Mode Controller Applications in Industrial Process », *Int. J. Eng. Trends Technol.*, vol. 19, n° 4, pp. 217-222, janv. 2015.
- [71] C. Vazquez, J. Collado, et L. Fridman, « Control of a Parametrically Excited Crane: A Vector Lyapunov Approach », *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 21, n° 6, pp. 2332-2340, nov. 2013.
- [72] I. V. Orlov, *Discontinuous systems: Lyapunov analysis and robust synthesis under uncertainty conditions*. London: Springer, 2009.
- [73] V. Torres-González, T. Sanchez, L. M. Fridman, et J. A. Moreno, « Design of Continuous Twisting Algorithm », *Automatica*, vol. 80, pp. 119-126, juin 2017.
- [74] T. Sanchez, J. A. Moreno, et L. M. Fridman, « Output feedback Continuous Twisting Algorithm », *Automatica*, vol. 96, pp. 298-305, oct. 2018.
- [75] G. Oriolo, A. De Luca, et M. Vendittelli, « WMR control via dynamic feedback linearization: design, implementation, and experimental validation », *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 10, n° 6, pp. 835-852, nov. 2002.
- [76] K. Renny Simba, N. Uchiyama, et S. Sano, « Real-time smooth trajectory generation for nonholonomic mobile robots using Bézier curves », *Robot. Comput.-Integr. Manuf.*, vol. 41, pp. 31-42, oct. 2016.
- [77] M. Boubezoula, A. Hassam, et O. Boutalbi, « Robust-flatness Controller Design for a Differentially Driven Wheeled Mobile Robot », *Int. J. Control Autom. Syst.*, vol. 16, n° 4, pp. 1895-1904, août 2018.
- [78] A. Levant, « Robust exact differentiation via sliding mode technique. », *Automatica*, vol. 34, n° 3, pp. 379-384, mars 1998.
- [79] A. De Luca, G. Oriolo, et M. Vendittelli, « Control of Wheeled Mobile Robots: An Experimental Overview », in *Ramsete*, vol. 270, S. Nicosia, B. Siciliano, A. Bicchi, et P. Valigi, Éd. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2001, pp. 181-226.
- [80] B. Siciliano, Éd., *Robotics: modelling, planning and control*. London: Springer, 2009.
-

ملخص: تتناول هذه الرسالة مشكلات النمذجة، تخطيط الحركة وتصميم التحكم لذراع روبوت متحركة فوق قاعدة ذات عجلات (WMMs). تعتبر WMMs أمثلة نموذجية للأنظمة اللاخطية ذات القيود (holonomic et nonholonomic) مع ديناميكيات شديدة التداخل. يعتمد أسلوب التحكم المقترح على مفهومين رئيسيين (أ): خاصية التسطح لـ WMM و (ب) نظرية التحكم في الوضع المنزلق (SMC). استناداً إلى أن WMM هو نظام مسطح، تم تصميم التحكم في الحركة عن طريق تحديد الحركات المرغوبة للروبوت في فضاء المخارج المسطحة للنظام. من أجل التتبع الدقيق للمسارات المرغوبة تم أولاً فرض سطح الانزلاق في مخارج المسطحة للنظام و بعدها، تم إدخال قانون التحكم المتقطع الذي يقود سطح الانزلاق المقترح إلى الصفر و في وقت محدد، بغض النظر عن عدم اليقين في خصائص النموذج وكذا الاضطرابات الخارجية. كما تم إثبات استقرار النظام باستخدام نظرية Lyapunov. من أجل إثبات فعالية الخوارزمية المقترحة تم تقديم محاكاة واختبارات عملية (مع دراسة مقارنة) لتوضيح أداء الروبوت في وجود اضطرابات خارجية مجهولة.

كلمات مفتاحية: ذراع روبوت متحركة فوق قاعدة ذات عجلات (WMM)، مراقبة الحركة، ومفهوم التسطح، التحكم عن طريق وضع انزلاق.

Résumé : Cette thèse aborde les problèmes de modélisation, de planification de mouvement et de commande pour les manipulateurs mobiles à roues (WMMs). Les WMMs sont des exemples typiques de systèmes non linéaires avec des contraintes holonomes et non-holonomes avec une dynamique fortement couplée. L'approche de contrôle proposée est basée sur deux concepts principaux: (i) la propriété de platitude de WMM et (ii) la théorie de la commande par mode de glissement (SMC). En utilisant le fait que le système WMM est différentiellement plat, la conception du contrôle de mouvement est relativement simplifiée en définissant les mouvements désirés du robot dans l'espace des sorties plates du système. La précision et la robustesse du suivi des trajectoires sont assurées en premier lieu, en imposant la surface de glissement depuis l'espace de sortie plate du système. Ensuite, une loi de commande discontinue de gain dépendant de l'état est introduite pour conduire à zéro dans le temps fini une telle surface, malgré les incertitudes du modèle et les perturbations externes. La stabilité du système est prouvée par la théorie de Lyapunov. Comparativement aux algorithmes classiques de contrôle par rétroaction, le contrôleur proposé est appliqué au robot mobile puis au manipulateur mobile composé de 2 ddl robot manipulateur monté sur une plate-forme mobile. Des simulations et des tests pratiques sont présentés pour illustrer les performances de l'approche proposée en présence de perturbations externes inconnues.

Mots Clés : WMM, Control de mouvement, concept de la platitude, control par mode glissant.

Abstract: This dissertation addresses the problems of modeling, motion planning and tracking control design for Wheeled Mobile Manipulators (WMMs). WMMs are typical examples of nonlinear systems with both holonomic and non-holonomic constraints with highly coupled dynamics. The proposed control approach is based on two main concepts: (i) the flatness property of WMM and (ii) the Sliding Mode Control (SMC) theory. Using the fact that the WMM is differentially flat system, the motion control design is relatively simplified by defining the desired motions of the robot in the flat output space of the system. The accurate and the robust trajectories tracking are provided firstly, by imposing the sliding manifold from the flat output space of the system. Secondly, a State-Dependent Gain discontinuous control law is introduced to drive to zero in finite time such sliding manifold, despite model uncertainties and external disturbances. The system stability is proven using the Lyapunov theory. Compared with classical Feedback control algorithms, the proposed controller is applied to the mobile robot and then to the mobile manipulator compound of 2 dof robot manipulator mounted on a mobile platform. Simulation and practical tests are presented to illustrate the performances of the proposed approach in the presence of unknown external disturbances.

Key Words : WMM, motion control, flatness concept, sliding mode control.