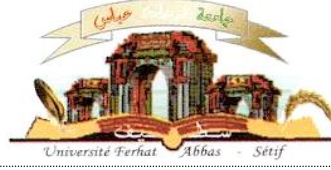


الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Ferhat Abbas Sétif 1
Faculté des Sciences



جامعة فرحات عباس، سطيف 1
كلية العلوم

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

N° / /2019

THÈSE

Présentée par

GRAZEM Mohamed

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Filière : MATHÉMATIQUES

Spécialité : EDO

THÈME

**Etude qualitative de classes de systèmes différentiels
planaires**

Soutenue publiquement le 02/05/2019

DEVANT LE JURY

| | | | |
|------------|-------------------|--------------------|--|
| Président | CHITER | Lakhdar | Prof. Université Ferhat Abbas Sétif 1 |
| Rapporteur | BENDJEDDOU | Ahmed | Prof. Université Ferhat Abbas Sétif 1 |
| Examineurs | BERBOUCHA | Ahmed | Prof. Université Abderrahmane Mira Béjaïa |
| | BOUDAUD | Abdelmadjid | Prof. Université Mohamed Boudiaf M'sila |

Année universitaire 2018/2019

REMERCIEMENTS

Je remercie *ALLAH* le tout puissant de m'avoir donné la force et la volonté pour achever ce travail.

J'exprime ma reconnaissance à mon directeur de thèse, Monsieur *Ahmed BENDJEDDOU*, professeur au département de Mathématiques de l'université Ferhat Abbas Sétif 1 d'avoir accepté de diriger cette thèse. Je le remercie pour ses nombreux conseils, orientations, encouragements, suggestions et corrections durant la réalisation de ce travail.

Je voudrais exprimer ma gratitude envers les membres de jury pour leur disponibilité :

Monsieur *Lakhdar CHITER*, professeur au département de Mathématiques de l'université Ferhat Abbas Sétif 1 qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Messieurs le professeur *Ahmed BERBOUCHA* du département de Mathématiques de l'université Abderrahmane Mira Béjaïa et le professeur *Abdelmadjid BOUDAOU* du département de Mathématiques de l'université Mohamed Boudiaf M'sila qui ont accepté d'être les examinateurs de cette thèse. Je les en remercie et leur exprime ma profonde reconnaissance.

Sans oublier mes collègues de l'université de Boumerdes : en particulier Messieurs *R. BOUDJEMA* et *R. GUETTAF*, Mesdames *N. METREF*, *S. TAHAR* et *A. MOULOUD*, pour leur soutien, leur amitié et leur discussion scientifique très intéressante.

Je voudrais profiter de cette occasion pour remercier ma famille : *mes parents, mes frères* et *sœurs* qui m'ont accompagné moralement tout au long de ces années.

Bien sûr, je remercie *ma femme* pour son soutien moral et ses encouragements durant toutes ces années.

Enfin, j'exprime ma reconnaissance et gratitude à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

| | |
|---|----------|
| Introduction générale | 1 |
| 1 Rappels et notions de base | 5 |
| 1.1 Introduction | 6 |
| 1.2 Systèmes différentiels planaires polynômiaux | 6 |
| 1.2.1 Solutions d'un système différentiel | 7 |
| 1.2.2 Champ de vecteurs, orbite, portrait de phase | 8 |
| 1.2.3 Flot | 8 |
| 1.3 Points singuliers | 9 |
| 1.3.1 Linéarisation et matrice jacobienne | 10 |
| 1.3.2 Equivalence topologique | 10 |
| 1.3.3 Théorème de Hartman-Grobman | 11 |
| 1.3.4 Stabilité de l'équilibre | 11 |
| 1.3.5 Classification des points singuliers d'un système linéaire dans le plan (tr, \det) | 12 |
| 1.4 Courbes invariantes | 14 |
| 1.5 Problème d'intégrabilité | 15 |
| 1.5.1 Intégrales premières | 15 |
| 1.5.2 Facteurs intégrants | 16 |
| 1.5.3 Facteurs intégrants inverses | 17 |
| 1.5.4 Facteurs exponentiels | 17 |
| 1.6 Solutions périodiques, cycles limites | 18 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1.7 | Existence de cycles limites | 20 |
| 1.7.1 | Critères d'existence de cycles limites | 22 |
| 1.8 | Stabilité des cycles limites | 23 |
| 1.8.1 | Types de cycles limites | 23 |
| 1.8.2 | Fonction du premier retour de Poincaré | 24 |
| 1.8.3 | Stabilité et fonction de Poincaré | 26 |
| 2 | Sur quelques classes de systèmes de Kolmogorov | 30 |
| 2.1 | Introduction | 31 |
| 2.2 | Classe I : Systèmes quintiques intégrables à cycle limite algébrique | 32 |
| 2.2.1 | Intégrabilité | 33 |
| 2.2.2 | Existence de cycles limites | 34 |
| 2.2.3 | Exemples d'applications | 39 |
| 2.3 | Classe II : Systèmes quintiques intégrables à cycle limite non-algébrique | 40 |
| 2.3.1 | Intégrabilité | 42 |
| 2.3.2 | Existence de cycles limites | 43 |
| 2.3.3 | Exemples d'applications | 52 |
| 2.4 | Conclusion | 54 |
| 3 | Coexistence de trois cycles limites pour une classe de systèmes septique | 55 |
| 3.1 | Introduction | 55 |
| 3.2 | Intégrabilité | 57 |
| 3.3 | Existence de cycles limites | 58 |
| 3.3.1 | Résultat principal | 59 |
| 3.3.2 | Lemmes préliminaires | 61 |
| 3.3.3 | Preuve du résultat principal | 65 |
| 3.4 | Exemples d'applications | 74 |
| 3.5 | Conclusion | 77 |
| | Conclusion et perspectives | 78 |
| | Bibliographie | 80 |

Introduction générale

Après l'apparition du concept de calcul infinitésimal, dans les travaux *d'Isaac Newton (1642-1727)* et de *Gottfried W. Leibniz (1646-1716)* dans la seconde moitié du XVIIe siècle, la notion d'équation différentielle a trouvé son domaine d'application dans divers problèmes de la géométrie et de la mécanique par les mathématiciens et les scientifiques. Autrement dit, les phénomènes relatifs aux problèmes posés, sont modélisés par des équations différentielles qui permettent de les expliquer. Cela a engendré une explosion de la recherche pour l'étude de ces équations.

La préoccupation majeure des scientifiques de l'époque était la résolution par des formules explicites de ces équations. Comme la plupart des phénomènes issus de la pratique régis par des équations différentielles sont non linéaires, ces formules sont souvent impossibles à déterminer. Certains mathématiciens se sont orientés alors vers une résolution numérique qui consiste à approcher les solutions par le biais de différentes méthodes. Le problème rencontré dans ces méthodes est que le calcul des solutions ne se fait que sur un intervalle de temps fini. Dans ce cas, les propriétés globales des solutions ne sont pas entièrement déterminées.

Henri Poincaré (1854-1912) publia en 1881, un mémoire "sur les courbes définies par une équation différentielle" [46] où il présenta une autre approche dite qualitative pour l'étude des équations différentielles, qui privilégie les propriétés des solutions, sans les déterminer de façon explicite.

Dans cette thèse, on s'intéresse à deux aspects importants de la théorie qualitative des systèmes différentiels planaires, à savoir **les intégrales premières** et **les cycles limites**.

La notion d'intégrale première est apparue pour la première fois dans les travaux de G. Darboux *(1842-1917)* [19] en 1878. Il construit des intégrales dites générales pour des équations

tions différentielles ordinaires du premier ordre, ayant suffisamment de courbe algébriques invariantes.

L'importance de cette notion a été établie par Henri Poincaré [49] dans sa présentation d'une méthode pour obtenir des intégrales premières polynômiales ou rationnelles.

De manière générale, la recherche des intégrales premières permet de donner une classification de toutes les trajectoires d'un système donné. Pour les systèmes polynomiaux, l'existence d'une intégrale première détermine leur portrait de phase [13]. Plusieurs travaux ont été consacré à l'étude de l'intégrabilité de systèmes différentiels, voir par exemples [13, 15, 18, 21, 35, 38].

Concernant les cycles limites, Henri Poincaré est le premier qui en parle dans son second mémoire "sur les courbes définies par une équation différentielle" [47] en 1882. Il les présente dans [48] comme étant des courbes fermées qui satisfont le système et dont les autres courbes définies par le même système se rapprochent asymptotiquement sans jamais les atteindre (pour plus de détails sur les cycles limites voir les livres [55, 20, 16]).

En 1900, *David Hilbert (1862-1943)* [29] a posé 23 problèmes lors du second congrès international des mathématiques. Dans le problème 16, il soulève la question du nombre et de la disposition de cycles limites. Ce problème reste jusqu'à présent non résolu.

A la fin de l'année 1920, *Van der Pol (1889-1959)*, *Liénard (1889-1959)* et *Andronov (1901-1952)* ont observé que l'oscillation dans un circuit de tube vide possède une trajectoire fermée, ils ont alors prouvé que cette trajectoire est un cycle limite. Ce qui a donné un élan considérable aux mathématiciens et physiciens pour l'étude approfondie des propriétés de cycles limites, notamment, l'existence, l'unicité, etc...

En biologie, le premier modèle possédant un cycle limite est celui introduit en 1936 par le mathématicien russe *Andrei Kolmogorov (1903-1987)* qui porte son nom et ayant la forme suivante :

$$\begin{cases} x' = xf(x, y) \\ y' = yg(x, y) \end{cases}$$

où f et g sont des fonctions de classe C^1 sur un ouvert de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

Il y a énormément de travaux s'intéressant à l'étude de cycles limites pour des systèmes de type de Kolmogorov, voir par exemple [31, 32, 37, 41, 42, 54], mais très peu concernent

des cycles limites exprimés d'une façon explicite. Les seuls cycles limites connus étaient algébriques, voir par exemple, les travaux de Bendjeddou et al. [3, 9, 10].

Par rapport aux cycles limites algébriques, notre contribution consiste à construire une classe de systèmes de type de Kolmogorov qui admet une conique comme courbe invariante. A l'aide de la forme réduite de l'ellipse obtenue nous déterminons les conditions suffisantes pour montrer que cette dernière est un cycle limite hyperbolique.

En 1995, *Odani* [44] a montré que le cycle limite apparaissant dans l'équation de Van der Pol n'est pas algébrique mais sans l'exprimer explicitement. Depuis 2006, d'autres chercheurs mathématiciens ont publié des articles où ils donnent l'expression explicite des cycles limites non algébriques dont ils ont prouvé l'existence pour des systèmes polynômiaux [2, 5, 8, 22, 27].

Dans le même contexte, nous avons construit une classe de systèmes de type Kolmogorov ayant $(1, 1)$ comme point singulier. A l'aide d'une translation de vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de l'écriture en coordonnées polaires du système obtenu et grâce à l'expression de l'intégrale première, nous déterminons des hypothèses pour que cette classe admette un cycle limite hyperbolique non algébrique.

Certains auteurs se sont intéressé à la coexistence des cycles limites algébriques et non algébriques. En 2006, *J. Giné et M. Grau* [27] ont donné les expressions explicites de ces cycles limites algébriques et non algébriques d'un système différentiel de degré 9 qu'ils ont étudié. Tandis que, en 2008, *E. Sáez et I. Szántó* [50] ont prouvé qu'une classe de systèmes polynômiaux de Kukles de degré 5 possède un cycle limite algébrique donné par l'ellipse invariante qui coexiste avec d'autres cycles limites non algébriques sans donner leurs expressions explicites. Récemment, *A. Bendjeddou et R. Cheurfa* [5] ont montré la coexistence de deux cycles limites, l'un algébrique et l'autre non algébrique pour un système de degré 5 en donnant leurs expressions explicites.

Pour notre part, nous avons construit une classe de systèmes différentiels polynomiaux planaires :

$$\begin{cases} x' = f(x, y) , \\ y' = g(x, y) , \end{cases}$$

où f et g sont des polynômes, dans le but est de montrer qu'il admet plus d'un cycle limite. Nous montrons premièrement, que ce système admet un cercle centré à l'origine comme courbe invariante et que c'est un cycle limite. En second lieu, nous déterminons des hypothèses pour montrer que cette classe admet d'autres cycles limites grâce à l'expression de l'intégrale première obtenue, en exprimant le système en coordonnées polaires.

Cette thèse est structurée comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques notions préliminaires sur les systèmes différentiels planaires. On définit la notion de points singuliers, la linéarisation des systèmes différentiels non linéaires au voisinage de points singuliers, le portrait de phase, les courbes invariantes, ainsi que les solutions périodiques. On énoncera des critères pour l'existence de cycles limites. De plus, on rappellera un théorème qui caractérise la stabilité d'un cycle limite.

Dans le deuxième chapitre, deux classes de systèmes différentiels polynomiaux quintiques de type Kolmogorov où f et g sont des polynômes de degrés 5 ont été traitées. Plus précisément, nous donnons des conditions suffisantes d'existence de cycles limites hyperboliques dans le quadrant réaliste $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 0\}$ ainsi que leurs expressions explicites.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à l'étude d'une classe de systèmes différentiels polynomiaux de degré sept, afin d'aboutir aux conditions suffisantes d'existence de cycles limites hyperboliques et de donner leurs expressions explicites.

Nous terminons notre travail par une conclusion et quelques perspectives.

Notons que le travail de cette thèse a fait l'objet de deux publications :

M. Grazem, A. Bendjeddou and R. Cheurfa [28]; "*Coexistence of Three Limit Cycles for a Septic Polynomial Differential Systems*" a été accepté pour publication dans le journal "Int. J. Dynamical Systems and Differential Equations". Paper Code : IJDSDE-211728.

A. Bendjeddou and M. Grazem [6]; *A class of quintic Kolmogorov systems with explicit non-algebraic limit cycle*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, Vol. 12, N° 3 (2019), 285–297.

Chapitre 1

Rappels et notions de base

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| 1.1 | Introduction | 6 |
| 1.2 | Systèmes différentiels planaires polynômiaux | 6 |
| 1.2.1 | Solutions d'un système différentiel | 7 |
| 1.2.2 | Champ de vecteurs, orbite, portrait de phase | 8 |
| 1.2.3 | Flot | 8 |
| 1.3 | Points singuliers | 9 |
| 1.3.1 | Linéarisation et matrice jacobienne | 10 |
| 1.3.2 | Equivalence topologique | 10 |
| 1.3.3 | Théorème de Hartman-Grobman | 11 |
| 1.3.4 | Stabilité de l'équilibre | 11 |
| 1.3.5 | Classification des points singuliers d'un système linéaire dans le plan (tr, \det) | 12 |
| 1.4 | Courbes invariantes | 14 |
| 1.5 | Problème d'intégrabilité | 15 |
| 1.5.1 | Intégrales premières | 15 |
| 1.5.2 | Facteurs intégrants | 16 |

| | | |
|------------|--|-----------|
| 1.5.3 | Facteurs intégrants inverses | 17 |
| 1.5.4 | Facteurs exponentiels | 17 |
| 1.6 | Solutions périodiques, cycles limites | 18 |
| 1.7 | Existence de cycles limites | 20 |
| 1.7.1 | Critères d'existence de cycles limites | 22 |
| 1.8 | Stabilité des cycles limites | 23 |
| 1.8.1 | Types de cycles limites | 23 |
| 1.8.2 | Fonction du premier retour de Poincaré | 24 |
| 1.8.3 | Stabilité et fonction de Poincaré | 26 |

1.1 Introduction

Ce chapitre contient quelques notions générales et principales pour l'étude qualitative des systèmes différentiels polynomiaux. On commence par définir les systèmes différentiels polynomiaux, on examinera les notions de : flot, point singulier, la linéarisation des systèmes différentiels non linéaires au voisinage des points singuliers, le portrait de phase, intégrabilité des systèmes différentiels, orbite périodique et cycles limite. On rappellera les théorèmes fondamentaux : le théorème d'existence et d'unicité, théorème de Grobman-Hartman et quelques théorèmes d'existence de cycles limites. En fin, on terminera ce chapitre avec le concept de la stabilité du cycle limite.

1.2 Systèmes différentiels planaires polynômiaux

Définition 1.1. *On appelle système différentiel du plan, un système de la forme :*

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)) \\ y' = \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)) \end{cases} \quad (1.2.1)$$

où P et Q sont des polynômes à coefficients réels, on dit aussi que (1.2.1) est un système différentiel planaire polynômial.

- Le système (1.2.1) est de degré d où $d = \max(\deg P, \deg Q)$.
- Si P et Q ne dépendent pas de t explicitement, alors le système (1.2.1) est dit autonome.

1.2.1 Solutions d'un système différentiel

On appelle solution du système (1.2.1) toute application dérivable

$$\begin{aligned} X : I \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto X(t) = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

où I est un intervalle non vide telle que, pour tout $t \in I$, le couple $(x(t), y(t))$ satisfait ce système.

Si $X_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$ et $X_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$ sont deux solutions définies sur I_1 et I_2 respectivement. On dira que $(x_2(t), y_2(t))$ est un prolongement de $(x_1(t), y_1(t))$ si $I_1 \subset I_2$ et $\forall t \in I_1, (x_1(t), y_1(t)) = (x_2(t), y_2(t))$.

Le couple $(x(t), y(t))$ est une solution maximale sur I si elle n'admet pas de prolongement sur I . Autrement dit, pour toute autre solution $(u(t), v(t))$, on a si $I \subset J$ et $\forall t \in I, (x(t), y(t)) = (u(t), v(t))$ alors $I = J$.

Un résultat important de l'existence et de l'unicité d'une solution est le théorème suivant:

Théorème 1.1. (Cauchy-Lipschitz) *Considérons le système (1.2.1) avec la condition initiale $X(t_0) = X_0 = (x_0, y_0)$ où $F = (P, Q)$ est une fonction continue dans un voisinage de X_0 et $t_0 \in I$. Alors,*

Si F est localement Lipschitzienne sur \mathbb{R}^2 , il existe une unique solution maximale $X(t)$ de (1.2.1) qui passe par le point X_0 .

Le problème qui consiste à trouver une solution du système (1.2.1) satisfaisant à la condition initiale $X(t_0) = X_0$, est appelé *problème de Cauchy*.

1.2.2 Champ de vecteurs, orbite, portrait de phase

Avant de passer à l'étude d'un système différentiel, il est pratique de représenter graphiquement le champ de vecteurs qui nous donne des renseignements précieux sur les différentes formes des solutions possibles ainsi que leur comportement asymptotique.

Définition 1.2. On appelle *champ de vecteurs*, une région du plan simplement connexe dans laquelle il existe en tout point M de $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un seul vecteur $\frac{dM}{dt}$. C'est -à-dire une application

$$\begin{aligned} \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ M(x, y) &\longmapsto \frac{dM}{dt} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où P, Q sont de classe $C^1(\Omega)$.

Remarque 1.1. Le champ de vecteur associé au système (1.2.1) est noté $\chi = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$. On peut l'écrire aussi sous la forme suivante :

$$\chi = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$$

Définition 1.3. L'ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ est appelé le *plan de phases* du champ de vecteurs (ou du système différentiel associé), les solutions $X(t), t \in I$ d'un champ de vecteurs χ représentent dans le plan de phases des courbes appelées *des orbites* et l'ensemble $\{(t, X(t)) \mid t \in I\}$ s'appelle une *trajectoire* du système (1.2.1).

Corollaire 1.1. Les orbites d'un champ de vecteurs χ forment une partition de plan de phases Ω .

Ce corollaire est une conséquence directe du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Définition 1.4. Le *portrait de phases* d'un champ de vecteurs χ est l'ensemble des orbites dans le plan de phases.

1.2.3 Flot

Soit $M(x, y)$ un point de \mathbb{R}^2 , on note $\varphi_t(x, y)$ la position de $M(x, y)$ après un déplacement d'une durée t ($t \in I \subseteq \mathbb{R}$).

Définition 1.5. On appelle flot (associé au champ de vecteur (P, Q)) l'application

$$\begin{aligned}\varphi : I \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, (x, y)) &\longmapsto \varphi_t(x, y)\end{aligned}$$

vérifiant les trois propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}i) \quad &\frac{d}{dt}\varphi_t(x, y) = (P(\varphi_t(x, y)), Q(\varphi_t(x, y))) \\ ii) \quad &\varphi_0(x, y) = (x, y) \\ iii) \quad &\varphi_{t+s}(x, y) = \varphi_t(\varphi_s(x, y))\end{aligned}$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $t, s \in I$.

i) et *ii)* signifient que $\varphi_t(x, y)$ est la solution maximale qui passe par (x, y) lorsque $t = 0$. *iii)* est une nouvelle formulation du caractère autonome de (1.2.1) : au lieu de se déplacer pendant $t + s$ on peut le faire pendant t , prendre une pause, ensuite poursuivre, puis finir son bout de chemin pendant une durée s : entre-temps le champ de vecteurs n'a pas été modifié.

1.3 Points singuliers

Les points singuliers jouent un rôle important dans l'étude des systèmes différentiels en particulier ceux qui sont non-linéaires au voisinage de ces points. En effet, Henri Poincaré (1854-1912) a montré que le calcul des solutions n'est pas nécessaire, et qu'il suffit de connaître leurs comportements à travers l'étude des points dits singuliers

Définition 1.6. Un point (x^*, y^*) est dit point singulier du système (1.2.1) s'il vérifie

$$P(x^*, y^*) = Q(x^*, y^*) = 0.$$

Remarque 1.2. La notion de point d'équilibre est la même que celle de point singulier pour le champ de vecteurs. On parle plutôt de point singulier lorsque l'on regarde le champ de vecteurs pour lui-même et de point d'équilibre lorsque on s'intéresse aux trajectoires.

1.3.1 Linéarisation et matrice jacobienne

La plupart des systèmes existants dans la nature sont non linéaires. La démarche la plus naturelle pour étudier le comportement des trajectoires d'un système différentiel autonome non linéaire, au voisinage d'un point singulier, consiste à se ramener à l'étude du système linéaire associé.

On note $J_\chi(x^*, y^*)$ la matrice jacobienne associée au champ de vecteurs χ au voisinage d'un point singulier (x^*, y^*) définie par :

$$J_\chi(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial P}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

Le linéarisé du système non linéaire (1.2.1) est donné par :

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial P}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (1.3.1)$$

Définition 1.7. *Un point singulier du système (1.2.1) est dit hyperbolique si les valeurs propres de la matrice $J_\chi(x^*, y^*)$ ont toutes une partie réelle non nulle. Dans le cas contraire, le point singulier est dit non hyperbolique.*

1.3.2 Equivalence topologique

Comme le comportement asymptotique du système non linéaire au voisinage d'un équilibre hyperbolique peut être déduit du système linéarisé, une question se pose alors : comment peut-on établir une équivalence au voisinage du point d'équilibre entre le système linéarisé et le système non linéaire? D'une manière générale, afin de comparer les flots pour des champs de vecteurs linéaires ou non linéaires, il est judicieux de définir pour toute classification, une relation d'équivalence pour laquelle il existe une application qui transforme pour tout t , les orbites de l'un en orbites de l'autre. On définit en premier lieu ce qu'est un homéomorphisme.

Définition 1.8. *Un homéomorphisme de \mathbb{R}^2 est une application $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ bijective continue ainsi que sa réciproque.*

Définition 1.9. Deux systèmes autonomes dans le plan

$$\begin{cases} x' = P_1(x(t), y(t)), \\ y' = Q_1(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (\text{A})$$

et

$$\begin{cases} x' = P_2(x(t), y(t)), \\ y' = Q_2(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (\text{B})$$

définis sur deux ouverts Ω et V de \mathbb{R}^2 respectivement sont topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme

$$h : \Omega \longrightarrow V$$

tel que h transforme les orbites de (A) en des orbites de (B) et préserve leur orientation.

1.3.3 Théorème de Hartman-Grobman

Ce théorème nous permet de réduire l'étude d'un système différentiel au voisinage d'un point singulier hyperbolique à l'étude d'un système linéaire topologiquement équivalent à (1.2.1) au voisinage de l'origine.

Théorème 1.2. *Supposons que la matrice jacobienne au point singulier (x^*, y^*) a deux valeurs propres λ_1 et λ_2 telles que $\operatorname{Re}(\lambda_1) \neq 0$ et $\operatorname{Re}(\lambda_2) \neq 0$, alors les solutions du système (1.2.1) sont données approximativement par les solutions du système linéarisé (1.3.1) au voisinage du point singulier.*

Autrement dit le portrait de phase du système linéarisé constitue, au voisinage de ce point d'équilibre, une bonne approximation de celui du système (1.2.1).

Remarque 1.3. *Dans le cas où $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$, le point singulier (x^*, y^*) est appelé centre pour le système linéarisé. La détermination de sa nature dans le cas du système (1.2.1) nécessite d'autres investigations: c'est le problème du centre.*

1.3.4 Stabilité de l'équilibre

Un système non linéaire quelconque peut avoir plusieurs positions d'équilibres qui peuvent être stables ou instables. Soit (x^*, y^*) un point d'équilibre du système (1.2.1). Notons $X^* = (P(x^*, y^*); Q(x^*, y^*))$ et $X(t) = (P(x(t), y(t)); Q(x(t), y(t)))$.

Définition 1.10. On dit que:

i) (x^*, y^*) est stable si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \|(x, y) - (x^*, y^*)\| < \eta \implies (\forall t > 0, \|X(t) - X^*\| < \varepsilon)$$

ii) (x^*, y^*) est asymptotiquement stable si et seulement si (x^*, y^*) est stable et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t) - X^*\| = 0.$$

Remarque 1.4. La stabilité asymptotique impose que la limite des trajectoires lorsque $t \rightarrow +\infty$ soit le point d'équilibre, tandis que la stabilité neutre (stable mais pas asymptotiquement stable) impose seulement que les trajectoires restent dans un voisinage du point d'équilibre sans nécessairement tendre vers ce point.

1.3.5 Classification des points singuliers d'un système linéaire dans le plan (tr , \det)

Le flot de (1.2.1) au voisinage d'un point singulier (x^*, y^*) est classé selon les valeurs propres de la matrice $J_\chi((x^*, y^*))$, son déterminant, ainsi que sa trace. Les valeurs propres de J_χ sont les solutions de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 - tr(J_\chi)\lambda + \det(J_\chi) = 0$$

avec

$$tr(J_\chi) = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{et} \quad \det(J_\chi) = \lambda_1 \lambda_2$$

La nature des valeurs propres dépend du signe du discriminant $\Delta = (tr(J_\chi))^2 - 4 \det(J_\chi)$.

Trois cas se présentent :

1^{er} Cas : $\Delta = 0$

On a alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, c'est -à-dire $\det(J_\chi) = \lambda^2 > 0$ et $tr(J_\chi) = 2\lambda$. Par conséquent, si la trace est positive ($\lambda > 0$), on a un noeud dégénéré instable, si la trace est négative ($\lambda < 0$), on a un noeud dégénéré stable.

2^{ème} Cas : $\Delta > 0$

On a alors deux valeurs propres réelles distinctes.

- i) Si $\det(J_\chi) < 0$: λ_1 et λ_2 sont de signe opposé, alors (x^*, y^*) est un col.
- ii) Si $\det(J_\chi) > 0$ et $\text{tr}(J) > 0$: $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, alors (x^*, y^*) est un noeud instable.
- iii) Si $\det(J_\chi) > 0$ et $\text{tr}(J) < 0$: $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, alors (x^*, y^*) est un noeud stable.

3^{ème} Cas : $\Delta < 0$

On a alors deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, c'est -à-dire $\det(J_\chi) = \alpha^2 + \beta^2 > 0$ et $\text{tr}(J_\chi) = 2\alpha$.

- i) Si $\text{tr}(J_\chi) < 0$, alors (x^*, y^*) est un foyer stable.
- ii) Si $\text{tr}(J_\chi) > 0$, alors (x^*, y^*) est un foyer instable.
- iii) Si $\text{tr}(J_\chi) = 0$, alors (x^*, y^*) est un centre.

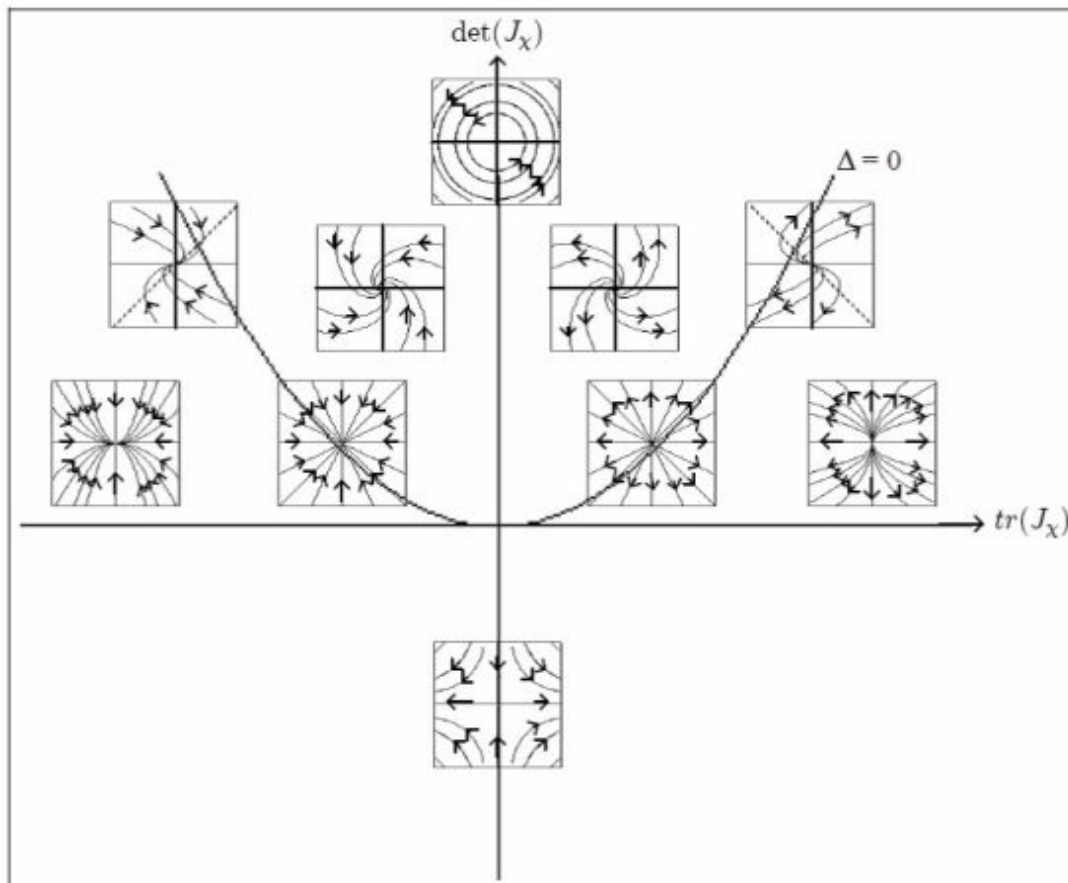


Figure 1.1. Résumé de différents portraits de phase possibles du système (1.3.1), en fonction du signe de la trace et du déterminant de la matrice Jacobienne J_χ .

1.4 Courbes invariantes

Dans l'étude des équations différentielles la recherche des invariants est primordiale. Il est en effet plus intéressant de considérer les ensembles du portrait de phase qui ne sont pas transformés par le flux en d'autres ensembles au cours du temps.

Définition 1.11. (*Ensembles invariants*) Une partie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ est dite invariante par l'application φ_t si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_t(\Omega) \subseteq \Omega$.

Définition 1.12. Soit $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 dans l'ouvert Ω . L'ensemble

$$C_f = \{(x, y) \in \Omega / f(x, y) = 0\}$$

est dit courbe invariante, s'il existe une fonction k de classe C^1 dans Ω , appelée cofacteur, qui satisfait la relation suivante :

$$P(x, y) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = k(x, y) f(x, y) \quad (1.4.1)$$

pour tout $(x, y) \in \Omega$.

Remarque 1.5. Les points singuliers et les solutions d'une équation différentielle sont invariants par le flot. La réciproque est fautive, on peut trouver des courbes invariantes par le flot, qui ne sont pas solutions d'équations différentielles.

Remarque 1.6. L'identité (1.4.1) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\nabla f \cdot F = kf \quad (1.4.2)$$

où $F((x, y)) = (P(x, y); Q(x, y))$, ∇f est le vecteur gradient de $f(x, y)$, défini par $\nabla f((x, y)) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y))$ et "." désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^2 . Nous désignons par $\frac{\partial f}{\partial t}$ ou f' la fonction $\nabla f \cdot F$ sur l'ensemble des solutions du système (1.2.1).

Remarque 1.7. Lorsque le cofacteur $k(x, y)$ est un polynôme, C_f est une courbe invariante de cofacteur polynomial.

Définition 1.13. Une courbe invariante C_f est dite algébrique si $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ et elle est invariante par le flot du système (1.2.1) dont le cofacteur $k(x, y)$ est toujours un polynôme de degré inférieur ou égal à $d - 1$.

Proposition 1.3. Soient $f(x, y) = 0$ et $g(x, y) = 0$ deux courbes algébriques invariantes du système (1.2.1) de cofacteurs respectifs $k_f(x, y)$ et $k_g(x, y)$, alors le produit $(fg)(x, y) = 0$ est aussi une courbe algébrique invariante dont le cofacteur est $k_f(x, y) + k_g(x, y)$.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} P \frac{\partial fg}{\partial x} + Q \frac{\partial fg}{\partial y} &= P \left(\frac{\partial f}{\partial x} g + \frac{\partial g}{\partial x} f \right) + Q \left(\frac{\partial f}{\partial y} g + \frac{\partial g}{\partial y} f \right) \\ &= g \left(P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} \right) + f \left(P \frac{\partial g}{\partial x} + Q \frac{\partial g}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

ce qui implique

$$P \frac{\partial fg}{\partial x} + Q \frac{\partial fg}{\partial y} = g k_f f + f k_g g$$

car $f(x, y) = 0$ et $g(x, y) = 0$ sont deux courbes algébriques invariantes du système (1.2.1).

Par conséquent,

$$P \frac{\partial fg}{\partial x} + Q \frac{\partial fg}{\partial y} = fg(k_f + k_g)$$

D'où, le produit $(fg)(x, y) = 0$ est une courbe algébrique invariante de cofacteur $k_f(x, y) + k_g(x, y)$. ■

Remarque 1.8. Une courbe algébrique $f(x, y) = 0$ est irréductible, si $f(x, y)$ est un polynôme irréductible dans l'anneau $\mathbb{R}[x, y]$.

1.5 Problème d'intégrabilité

1.5.1 Intégrales premières

L'intégrabilité d'un système différentiel repose sur l'existence d'intégrales premières. Comment montrer leur existence ou les déterminer explicitement, demeure une question sans réponse satisfaisante.

Définition 1.14. On appelle *intégrale première* du système (1.2.1) de classe C^j sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, toute fonction $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^j(\Omega)$ constante sur chaque trajectoire de ce système et non localement constante sur Ω .

Ces conditions sont équivalentes à

$$P(x, y) \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = 0$$

et H non localement constante sur Ω .

Le problème d'intégrabilité est la recherche d'une expression explicite d'une intégrale première. Les notions facteur intégrant et facteur intégrant inverse permettent de déduire l'expression de cette dernière.

1.5.2 Facteurs intégrants

Définition 1.15. La fonction R est un *facteur intégrant* du système (1.2.1) sur l'ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ si $R \in C^1(\Omega)$, $R \neq 0$ sur Ω et

$$\frac{\partial(RP)}{\partial x} = -\frac{\partial(RQ)}{\partial y}, \quad \text{div}(RP, RQ) = 0 \quad \text{ou} \quad P \frac{\partial R}{\partial x} + Q \frac{\partial R}{\partial y} = -R \text{div}(P, Q) \quad (1.5.1)$$

où $\text{div}(P, Q) = \text{div}(\chi) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ est la *divergence* du champ de vecteurs $\chi = (P, Q)$.

Il est clair que si la fonction H vérifie les conditions :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = RQ \\ \frac{\partial H}{\partial y} = -RP \end{cases}$$

c'est une intégrale première donnée par :

$$H(x, y) = -\int R(x, y)P(x, y)dy + h(x)$$

ou

$$H(x, y) = \int R(x, y)Q(x, y)dx + h(y)$$

1.5.3 Facteurs intégrants inverses

Définition 1.16. La fonction V est un facteur intégrant inverse du système (1.2.1) sur l'ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ si $V \in C^1(\Omega)$, $V \neq 0$ sur Ω et

$$P \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) + Q \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V.$$

Le facteur intégrant inverse est une courbe algébrique invariante de cofacteur $k(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = \operatorname{div}(P, Q)$.

Il est facile de vérifier que si V est définie sur Ω , la fonction $R = \frac{1}{V}$ définie sur $\Omega \setminus \{V = 0\}$ est un facteur intégrant du système (1.2.1), ce qui permet de calculer l'intégrale première de ce dernier sur $\Omega \setminus \{V = 0\}$.

L'intégrale première H associée au facteur intégrant inverse V peut être calculée par l'intégrale

$$H(x, y) = \int (Q(x, y)dx - P(x, y)dy)/V(x, y) \quad (1.5.2)$$

Lorsque un système différentiel possède une intégrale première rationnelle $H = \frac{h}{g}$, alors toutes les courbes invariantes sont algébriques et définies par $f_c = 0$ où $f_c = h - cg$ pour une certaine constante $c \in \mathbb{R}$.

1.5.4 Facteurs exponentiels

Un objet dit facteur exponentiel joue un rôle similaire à celui des courbes algébriques invariantes dans la recherche d'une intégrale première d'un champ de vecteurs polynomial χ .

Définition 1.17. Soient h et g deux polynômes premiers entre eux. La fonction $F = \exp(h/g)$ est dite facteur exponentiel du système (1.2.1), s'il existe un polynôme $k(x, y)$ de degré inférieur ou égal à $d - 1$ tel que

$$P \frac{\partial \exp(h/g)}{\partial x} + Q \frac{\partial \exp(h/g)}{\partial y} = k \exp(h/g).$$

Comme précédemment, on dit que $k(x, y)$ est le cofacteur de $\exp(h/g)$.

La proposition suivante, donne la relation entre la notion de la courbe invariante et le facteur exponentiel.

Proposition 1.4. *Si $F(x, y) = \exp(h/g)$ est un facteur exponentiel et g est une fonction non constante, alors $g = 0$ est une courbe algébrique invariante telle que h satisfait l'équation*

$$P \frac{\partial h}{\partial x} + Q \frac{\partial h}{\partial y} = h k_g + g k_F$$

où k_g et k_F sont respectivement les cofacteurs de g et F .

Définition 1.18. *Soit la fonction*

$$f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \dots f_r^{\lambda_r} (\exp(\frac{h_1}{g_1^{n_1}}))^{\mu_1} (\exp(\frac{h_2}{g_2^{n_2}}))^{\mu_2} \dots (\exp(\frac{h_l}{g_l^{n_l}}))^{\mu_l} \quad (1.5.3)$$

où $r, l \in \mathbb{N}$, $f_i(x, y) = 0$ ($1 \leq i \leq r$) et $g_j(x, y) = 0$ ($1 \leq j \leq l$) des courbes algébriques invariantes du système (1.2.1), $h_j(x, y)$ ($1 \leq i \leq l$) des polynomes de $\mathbb{R}[x, y]$, λ_i ($1 \leq i \leq r$) et μ_j ($1 \leq j \leq l$) des nombres complexes et n_j ($1 \leq j \leq l$) des nombres entiers non négatifs. Les fonctions précédentes sont dites fonctions de Darboux (généralisées).

Le problème d'intégrabilité consiste aussi à trouver une classe de fonctions d'une intégrale première (polynomiale, rationnelle, Darboux, élémentaire, Liouville, etc...) du système (1.2.1). Pour cela, on introduit les fonctions suivantes

Définition 1.19. *Une fonction est élémentaire si elle est construite par des fonctions usuelles à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques et de compositions de fonctions.*

Définition 1.20. *Une fonction est de Liouville si elle est construite par des fonctions usuelles à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques, de compositions et d'intégrations de fonctions.*

1.6 Solutions périodiques, cycles limites

Le comportement asymptotique des solutions est l'une des questions essentielles, souvent difficile, que l'on se pose à propos des équations différentielles.

Définition 1.21. La solution $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ du système (1.2.1) est dite périodique s'il existe $T > 0$ tel que :

$$\gamma(t) = \gamma(t + T) \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

T est alors sa période.

Remarque 1.9. Les points singuliers du système (1.2.1) sont des solutions périodiques constantes.

Exemple 1. L'oscillateur harmonique est régi par l'équation différentielle $x'' + \omega^2 x = 0$ est équivalent au système

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\omega^2 x. \end{cases}$$

Ce système s'intègre facilement puisque $\frac{dy}{dx} = -\omega^2 \frac{x}{y}$, la solution est donc $y^2 + \omega^2 x^2 = c$. Autrement, ce système possède une famille continue, à un paramètre, de solutions périodiques représentées dans le plan des phases par des ellipses.

Un résultat important est énoncé dans le théorème suivant applicable dans le cas d'une orbite périodique γ donnée d'une manière implicite sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, c'est à dire, lorsqu'il existe une courbe invariante $f(x, y) = 0$ telle que $\gamma \subseteq \{(x, y) \in \Omega / f(x, y) = 0\}$.

Théorème 1.5. [26] Considérons le système (1.2.1), $\gamma(t)$ une orbite périodique de période T et supposons que $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une courbe invariante telle que $\gamma \subseteq \{(x, y) \in \Omega / f(x, y) = 0\}$ et $k(x, y)$ est le cofacteur de la courbe invariante. Si $\nabla f(p) \neq 0 \forall p \in \gamma$, alors

$$\int_0^T k(\gamma(t)) dt = \int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt.$$

Remarque 1.10. L'hypothèse $\nabla f(p) \neq 0$ signifie que f ne contient pas des points singuliers.

Un comportement possible pour une trajectoire est de tendre vers une orbite périodique. Dans le cas d'un système planaire cela signifie que les trajectoires tendent vers ce que l'on appelle un cycle limite.

Définition 1.22. Un cycle limite est une orbite périodique (trajectoire fermée) isolée.

Une trajectoire fermée est une orbite non réduite à un point qui revient à la solution initiale après un certain temps. Isolée signifie que les trajectoires voisines ne sont pas fermées, elles spiralent autour du cycle limite en s'en éloignant ou en s'en approchant.

Exemple 2. *Les battements du coeur, les rythmes biologiques du corps humain (température, sécrétion d'hormones), les oscillations dans les réactions chimiques sont des cycles limites.*

Remarque 1.11. *Les cycles limites n'apparaissent que dans les systèmes non linéaires. Un système linéaire peut avoir des orbites fermées mais non isolées : en d'autres termes, si $x(t)$ est une solution périodique, alors $cx(t)$ sera une solution pour toute constante $c \neq 0$.*

Définition 1.23. *Un cycle limite algébrique est un cycle limite qui est contenu dans les zéros d'une courbe algébrique invariante.*

1.7 Existence de cycles limites

Parmi les problèmes importants et souvent difficiles à étudier dans la théorie qualitative des équations différentielles, est la détermination des cycles limites d'un système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y), \end{cases}$$

où P, Q sont des polynômes réels dont les variables sont x et y .

Remarque 1.12. *Les systèmes différentiels polynomiaux de degré 1 n'admettent pas de cycles limites.*

Ci-dessous, un exemple classique où on peut écrire l'expression explicite du cycle limite.

Exemple 3. *Soit le système d'équations suivant :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \frac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (1.7.1)$$

En coordonnées polaires, le système (1.7.1) devient :

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = r(1-r^2), \\ \frac{d\theta}{dt} = 1. \end{cases} \quad (1.7.2)$$

Remarquons que $(0,0)$ est le seul point critique de (1.7.1).

Le système différentiel (1.7.2) est équivalent à l'équation différentielle de Bernoulli suivante

$$\frac{dr}{d\theta} = r - r^3, \quad (1.7.3)$$

dont la solution générale est

$$r(\theta) = [1 + ce^{-2\theta}]^{-\frac{1}{2}}.$$

Ce qui entraîne que, la solution de (1.7.3) satisfaisant à la condition initiale $r(0) = r_0$ est donnée par :

$$r(\theta) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2\theta} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Donc la seule solution périodique de l'équation (1.7.3) est

$$r(\theta) = 1.$$

D'où

$$(\gamma) : x^2 + y^2 = 1$$

est le seul cycle limite du système (1.7.1).

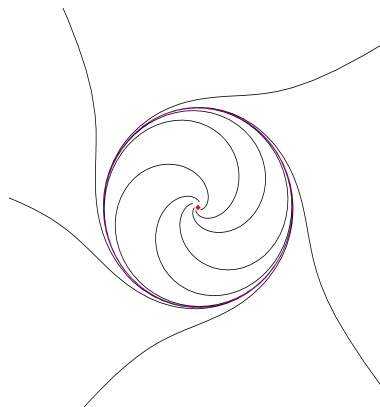


Figure 1.2. Cycle limite du système (1.7.1).

1.7.1 Critères d'existence de cycles limites

Théorème 1.6. [25] Soient deux courbes fermées C et C' dans \mathbb{R}^2 , l'une entourant l'autre. Si en chaque point de C , le vecteur vitesse (P, Q) de la trajectoire qui y passe est dirigé vers l'extérieur, et si en chaque point de C' il est dirigé vers l'intérieur, alors il existe au moins un cycle limite compris entre C et C' .

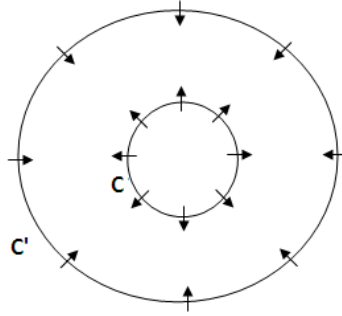


Figure 1.3. Existence d'un cycle limite compris entre C et C' .

Giacomini, Llibre et Viano dans [24], ont présenté une méthode pour étudier l'existence et la non-existence de cycles limites d'un champ de vecteur planaire, en se basant sur les deux critères suivants :

Critère 1. [24]

Considérons le système :

$$\begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.7.4)$$

P et Q définis sur l'ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ et de classe $C^1(\Omega)$, soit $(x(t), y(t))$ une solution périodique de (1.7.4) de période T . Supposons que $U = U(x, y)$ (de classe C^1) est une solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$P(x, y) \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = k(x, y)U(x, y) \quad (x, y) \in \Omega \quad (1.7.5)$$

où le cofacteur $k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 vérifiant :

$$\int_0^T k(x(t), y(t)) dt \neq 0.$$

Alors la trajectoire fermée :

$$\gamma(t) = \{(x(t), y(t)) \in \Omega : t \in [0, T]\}$$

est contenu dans $\Sigma = \{(x, y) \in \Omega : U(x, y) = 0\}$ et γ n'est pas contenu dans un anneau circulaire, de plus si P et Q sont analytiques, alors γ est un cycle limite.

Remarque 1.13. Ce critère montre que lorsque nous connaissons explicitement la solution $U(x, y)$ de l'équation (1.7.5), on a plus d'informations sur les solutions périodiques du système, parce que si γ est une trajectoire fermée, elle doit satisfaire :

$$\gamma \text{ est contenu dans } \Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : U(x, y) = 0\} \text{ ou } \int_{\gamma} k(x(t), y(t)) dt = 0.$$

Critère 2. [24] Considérons le système (1.7.4) et supposons que :

- 1) P, Q de classe $C^1(\Omega)$
- 2) $U = U(x, y)$ de classe $C^1(\Omega)$ une solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$P \frac{\partial U}{\partial x} + Q \frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) U. \quad (1.7.6)$$

Si γ est un cycle limite, alors γ est contenu dans

$$\Sigma = \{(x, y) \in \Omega : U(x, y) = 0\}.$$

1.8 Stabilité des cycles limites

Dans [34], D.W. Jordan et P. Smith ont expliqué que les trajectoires avoisinantes ne sont pas fermées et se comportent comme des spirales qui s'approchent ou s'éloignent du cycle limite lorsque $t \rightarrow +\infty$. Ceci concerne aussi bien les trajectoires $\gamma(t)$ qui démarrent de l'intérieur à celles qui démarrent de l'extérieur par rapport aux conditions initiales. Ces solutions sont relativement de moindre importance en comparaison avec la solution périodique.

1.8.1 Types de cycles limites

(a) Le cycle limite γ est stable (ou attractif), si les trajectoires intérieures et extérieures tendent en spirales vers l'orbite fermée γ quand $t \rightarrow +\infty$.

(b) Le cycle limite γ est instable (ou répulsif), si les trajectoires intérieures et extérieures tendent en spirales vers l'orbite fermée γ quand $t \rightarrow -\infty$.

(c) Le cycle limite γ est semi-stable, si les trajectoires spirales intérieures tendent vers l'orbite fermée γ quand $t \rightarrow +\infty$, les autres (extérieures) tendent vers γ quand $t \rightarrow -\infty$, et vice-versa.

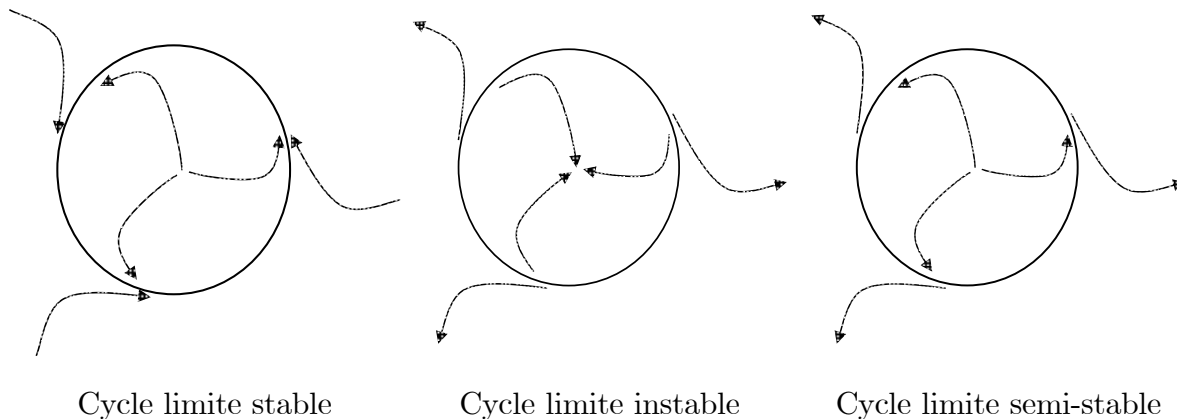


Figure 1.4. Classification des cycles limites

1.8.2 Fonction du premier retour de Poincaré

Pour étudier la stabilité des orbites périodiques, l'outil le plus fondamental est la fonction du premier retour de Poincaré, définie par Henri Poincaré en 1881, voir [46]. L'idée est la suivante :

Si Γ est une orbite périodique du système (1.2.1) passant par le point $X_0 = (x_0, y_0)$ et Σ une droite perpendiculaire à Γ en X_0 , alors pour tout point $X = (x, y) \in \Sigma$ suffisamment proche de X_0 , la solution de (1.2.1) passant par X en $t = 0$, va retraverser la droite Σ au point $\Pi(X)$ proche de X_0 , la fonction $X \mapsto \Pi(X)$ s'appelle la fonction de Poincaré.

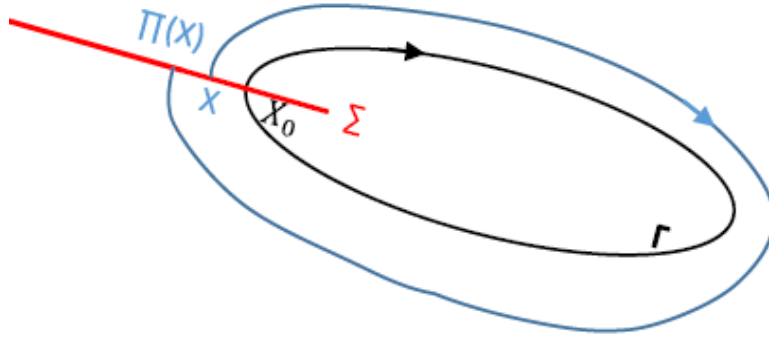


Figure 1.5. L'application de Poincaré $\Pi(X) = \phi_{\tau(X)}(X)$

Le théorème suivant établit l'existence et la continuité de la fonction de Poincaré $\Pi(X)$.

Théorème 1.7. [45, p.212] *Soit*

$$\Gamma = \{X \in \mathbb{R}^2 / X = \phi_t(X_0), \quad 0 \leq t \leq T\}$$

une orbite périodique de (1.2.1) de période T . Soit Σ la droite orthogonale à Γ en X_0 , c'est à dire :

$$\Sigma = \{X \in \mathbb{R}^2 / (X - X_0) \cdot (P(X_0), Q(X_0)) = 0\}.$$

Alors il existe un voisinage ouvert $N(X_0)$ de X_0 et une unique fonction $\tau : N(X_0) \rightarrow \mathbb{R}$, définie et continûment différentiable, tel que $\tau(X_0) = T$ et

$$\phi_{\tau(X)}(X) \in \Sigma \text{ pour tout } X \in N(X_0).$$

Preuve. Soit la fonction de classe C^1 :

$$F(t, X) = (\phi_t(X) - X_0) \cdot (P(X_0), Q(X_0)).$$

Comme l'orbite Γ passe par X_0 , alors on a :

$$F(T, X_0) = 0.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(T, X_0) &= \left(\frac{\partial \phi_t}{\partial t} \Big|_{t=T} \right) (X_0) \cdot (P(X_0), Q(X_0)) \\ &= (P(X_0), Q(X_0)) \cdot (P(X_0), Q(X_0)) \\ &= \|(P(X_0), Q(X_0))\|^2 \neq 0, \end{aligned}$$

puisque X_0 ne peut pas être un point singulier. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert $N(X_0)$ de X_0 et une unique fonction τ définie et continûment différentiable sur ce voisinage telle que $\tau(X_0) = T$ et

$$F(\tau(X), X) = 0 \text{ pour tout } X \in N(X_0),$$

c'est à dire :

$$\phi_{\tau(X)}(X) \in \Sigma \text{ pour tout } X \in N(X_0).$$

■

Définition 1.24. *La fonction continûment différentiable*

$$\begin{aligned} \Pi : N(X_0) \cap \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ X &\longmapsto \Pi(X) = \phi_{\tau(X)}(X) \end{aligned}$$

est appelée l'application de premier retour de Poincaré, associée à l'orbite périodique Γ .

Définition 1.25. *La fonction continûment différentiable*

$$\begin{aligned} \tau : N(X_0) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto \tau(X) \end{aligned}$$

est appelée fonction temps de premier retour de Poincaré.

Définition 1.26. *Un point fixe de l'application Π est un point X tel que $\Pi(X) = X$. Il correspond à une orbite périodique du système (1.2.1).*

1.8.3 Stabilité et fonction de Poincaré

Par la translation de vecteur $X_0 \in \Gamma \cap \Sigma$, la droite Σ sera transformée en une ligne passant par le point origine 0. De même les points X et $\Pi(X)$ seront transformés en s et $\Pi(s)$ respectivement (voir les deux figures ci-dessous). Selon le théorème précédent, l'application de Poincaré $\Pi(s)$ existe et est définie au voisinage de zéro (i.e. $\exists \delta > 0 : \Pi(s)$)

est définie pour tous $|s| < \delta$ et on a $\Pi(0) = 0$.

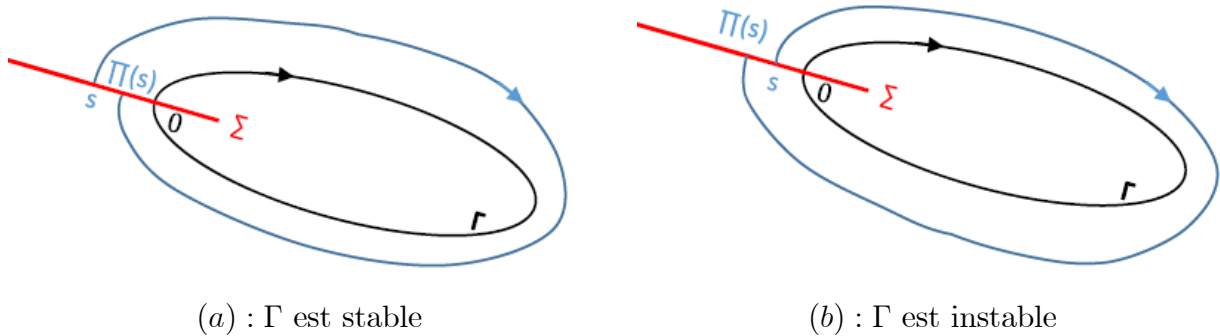


Figure 1.6. Stabilité et fonction de Poincaré

Dans le but de donner le lien entre la stabilité de l'orbite périodique Γ et la dérivée de l'application de Poincaré le long de la droite Σ au point zéro. On introduit la fonction de déplacement :

$$d(s) = \Pi(s) - s.$$

Il est clair que : $d(0) = 0$ et $d'(s) = \Pi'(s) - 1$, il en résulte du théorème des accroissements finis que pour $|s| < \delta$

$$d(s) = d'(\sigma) s$$

pour certains σ entre 0 et s .

Supposons que $d'(0) \neq 0$, comme d est continu, alors le signe de $d'(s)$ sera le même que celui de $d'(0)$ pour $|s|$ suffisamment petit. Deux cas en découlent : $d'(0) < 0$ et $d'(0) > 0$.

i) Si $d'(0) < 0$, il s'ensuit que $d(s) < 0$ pour $s > 0$ et que $d(s) > 0$ pour $s < 0$ ce qui entraîne que le cycle Γ est un cycle limite stable (voir le figure (a) ci-dessus).

ii) Si $d'(0) > 0$, il s'ensuit que $d(s) > 0$ pour $s > 0$ et que $d(s) < 0$ pour $s < 0$ ce qui entraîne que le cycle Γ est instable (voir le figure (b) ci-dessus).

par conséquent :

Si $\Pi(0) = 0$ et $\Pi'(0) < 1$, le cycle Γ est un cycle limite stable et si $\Pi(0) = 0$ et $\Pi'(0) > 1$, le cycle Γ est instable.

Exemple 4. On reprend l'exemple 3.

En coordonnées polaires, les solutions de (1.7.1) sont de la forme :

$$r(\theta; r_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2\theta} \right]^{\frac{-1}{2}}.$$

Pour $\theta = 2\pi$, on obtient l'application de premier retour de Poincaré :

$$\Pi(r_0) = r(2\pi; r_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{\frac{-1}{2}}.$$

L'unique point fixe de Π est $r_0 = 1$, il correspond au cycle limite Γ du système (1.7.1).

On a :

$$\Pi'(r_0) = e^{-4\pi} r_0^{-3} \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{\frac{-3}{2}},$$

et

$$\Pi'(1) = e^{-4\pi}.$$

Comme $\Pi'(1) < 1$, alors Γ est stable.

Le théorème suivant permet de prouver l'existence de la dérivée de Π et de donner son expression.

Théorème 1.8. [45, p.216] Soit $\gamma(t)$ une solution périodique de (1.2.1) de période T , alors la dérivée de la fonction de Poincaré $\Pi(s)$ le long d'une ligne droite Σ qui est normale à $\Gamma = \{X \in \mathbb{R}^2 / X = \gamma(t) - \gamma(0) \quad 0 \leq t \leq T\}$ en $X = (0, 0)$ est donnée par :

$$\Pi'(0) = \exp \int_0^T \operatorname{div}(P(\gamma(t)), Q(\gamma(t))) dt.$$

Le corollaire suivant caractérise la stabilité d'un cycle limite

Corollaire 1.2. [45, p.216] Soit $\gamma(t)$ une orbite périodique du système (1.2.1) de période T .

Alors,

γ est un cycle limite stable si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt < 0,$$

et est un cycle limite instable si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt > 0.$$

Il peut être un cycle limite stable, instable ou semi-stable ou peut appartenir à une bande continue de cycles si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt = 0.$$

Remarque 1.14. Lorsque la quantité $\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt$ est différente de zéro, on dit que le cycle limite γ est hyperbolique.

Exemple 5. Dans l'exemple 3., on a :

$$\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)^T$$

et

$$\operatorname{div}(P, Q) = 2 - 4x^2 - 4y^2,$$

d'autre part

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{div}(\gamma(\theta)) d\theta = \int_0^{2\pi} (2 - 4\cos^2 \theta - 4\sin^2 \theta) d\theta = -4\pi.$$

Puisque $\int_0^{2\pi} \operatorname{div}(\gamma(\theta)) d\theta < 0$, $\gamma(t)$ est alors un cycle limite hyperbolique stable.

Chapitre 2

Sur quelques classes de systèmes de Kolmogorov

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| 2.1 | Introduction | 31 |
| 2.2 | Classe I : Systèmes quintiques intégrables à cycle limite algébrique | 32 |
| 2.2.1 | Intégrabilité | 33 |
| 2.2.2 | Existence de cycles limites | 34 |
| 2.2.3 | Exemples d'applications | 39 |
| 2.3 | Classe II : Systèmes quintiques intégrables à cycle limite non-algébrique | 40 |
| 2.3.1 | Intégrabilité | 42 |
| 2.3.2 | Existence de cycles limites | 43 |
| 2.3.3 | Exemples d'applications | 52 |
| 2.4 | Conclusion | 54 |

2.1 Introduction

La modélisation mathématique des phénomènes dans diverses disciplines, notamment en biologie, est devenue incontournable. Ces modèles sont régis par des équations d'évolutions qui se présentent sous forme d'équations différentielles ordinaires, fonctionnelles, à retards, aux dérivées partielles ou stochastiques. Le problème principal est l'étude du comportement des solutions des équations ou des systèmes modélisant ces phénomènes.

En biologie, le premier modèle connu est celui de la dynamique des populations. Il a été proposé indépendamment par *Alfred James Lotka (1880-1949)* en 1925 et *Vito Volterra (1860-1940)* en 1926, d'où le nom *Lotka-Volterra*⁽¹⁾.

Ce modèle décrit les interactions entre une population de proies et une population de prédateurs : les variables d'état sont x et y où x représente le nombre de proies et y le nombre de prédateurs. Du point de vue mathématique, ce modèle s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = x (a - by), \\ \dot{y} = y (-c + dx), \end{cases}$$

où $a > 0$ est le taux de natalité (naturel) des proies, $c > 0$ le taux de mortalité (naturel) des prédateurs et $b > 0$, $d > 0$ des coefficients d'interaction entre les deux populations.

Ce modèle ne présente pas de cycles limites, mais il reste le point de départ de plusieurs modèles proposés actuellement. Parmi ces modèles on a celui introduit en 1936 par le mathématicien russe *Andrei Kolmogorov (1903-1987)* qui porte son nom et ayant la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = x f(x, y), \\ \dot{y} = y g(x, y), \end{cases} \quad (2.1.1)$$

où f et g sont de classe C^1 et représentent respectivement les taux de croissance des deux populations x et y .

De nombreux chercheurs se sont intéressés à l'étude des systèmes de Kolmogorov, notamment, l'intégrabilité [13, 14, 21, 38] et l'existence de cycles limites [31, 32, 41, 42, 53, 54].

La recherche de l'expression explicite des cycles limites des systèmes différentiels est une tâche difficile, plus particulièrement, celui de Kolmogorov. À notre connaissance, toutes les

⁽¹⁾Connu aussi sous le nom "proie-prédateur"

expressions explicites des cycles limites a nos jours n'étaient qu'algébriques (voir les travaux de Bendjeddou et al [3, 9, 10]).

Dans ce chapitre, nous présentons deux classes de systèmes de Kolmogorov quintiques dont nous étudions l'intégrabilité et l'existence des cycles limites dans le quadrant réaliste $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$ ainsi que leurs expressions explicites.

2.2 Classe I : Systèmes quintiques intégrables à cycle limite algébrique

Dans cette section, nous nous intéressons à une classe de systèmes de Kolmogorov quintiques de la forme :

$$\begin{cases} x'=x \left(\begin{array}{l} (cx^2 + axy - ay^2 - (2a + c)x + ay + 2a)y^2 \\ +a(x^2 + xy - 2x - 3y + 2)((x - 1)^2 + 1) \end{array} \right), \\ y'=y \left(\begin{array}{l} (ax^2 + axy + cy^2 - 3ax - (2a + c)y + 2a)x^2 \\ +a(xy - y^2 + x + 2y - 2)((y - 1)^2 + 1) \end{array} \right), \end{cases} \quad (2.2.1)$$

où a et c sont deux paramètres réelles.

Proposition 2.1. *Si $ac < 0$, alors $(1, 1)$ est le seul point singulier du système (2.2.1) dans le premier quadrant et qui est un noeud stable pour $c < 0$ et instable pour $c > 0$.*

Preuve. Le point $(1, 1)$ est un point singulier du système (2.2.1).

Nous avons :

$$(x - 1)Q_5(x, y) - (y - 1)P_5(x, y) = a(x + y)((x - 1)^2 + (y - 1)^2)^2$$

où

$$P_5(x, y) = x \left(\begin{array}{l} (cx^2 + axy - ay^2 - (2a + c)x + ay + 2a)y^2 \\ +a(x^2 + xy - 2x - 3y + 2)((x - 1)^2 + 1) \end{array} \right),$$

$$Q_5(x, y) = y \left(\begin{array}{l} (ax^2 + axy + cy^2 - 3ax - (2a + c)y + 2a)x^2 \\ +a(xy - y^2 + x + 2y - 2)((y - 1)^2 + 1) \end{array} \right).$$

Comme $a \neq 0$, alors le point $(1, 1)$ est le seul point singulier dans le premier quadrant.

Nature: Les valeurs propres du système linéarisé associé vérifient $(\lambda - c)^2 = 0$, ce qui assure que $(1, 1)$ est un noeud stable pour $c < 0$ et instable pour $c > 0$. ■

Proposition 2.2. *Le système (2.2.1) admet*

$$U(x, y) = ax^2 + cxy + ay^2 - 2ax - 2ay + 2a$$

comme courbe algébrique invariante de cofacteur $k(x, y) = 2ax^4 + 2ax^3y + 2cx^2y^2 + 2axy^3 - 2ay^4 - 6ax^3 - (6a + c)x^2y - (2a + c)xy^2 + 6ay^3 + 8ax^2 + 4axy - 8ay^2 - 4ax + 4ay$

Preuve. On :

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = 2ax + cy - 2a,$$

et

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = 2ay + cx - 2a.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt}(x, y) &= x' \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + y' \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) \\ &= x \left(\begin{array}{l} (cx^2 + axy - ay^2 - (2a + c)x + ay + 2a)y^2 \\ + a(x^2 + xy - 2x - 3y + 2)((x - 1)^2 + 1) \end{array} \right) (2ax + cy - 2a) \\ &\quad + y \left(\begin{array}{l} (ax^2 + axy + cy^2 - 3ax - (2a + c)y + 2a)x^2 \\ + a(xy - y^2 + x + 2y - 2)((y - 1)^2 + 1) \end{array} \right) (2ay + cx - 2a) \\ &= K(x, y)U(x, y). \end{aligned}$$

D'où le resultat. ■

2.2.1 Intégrabilité

Le théorème suivant prouve l'intégrabilité du système (2.2.1).

Théorème 2.3. *Le système de Komogorov (2.2.1) est intégrable. Son intégrale première $H_1(x, y)$ est donnée par :*

$$H_1(x, y) = \frac{U(x, y)}{xy} \exp\left(-\arctan \frac{y-1}{x-1}\right).$$

Preuve. On a :

$$\frac{\partial H_1}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{xy((x-1)^2 + (y-1)^2)} \left(\begin{array}{l} (2ax + cy - 2a)((x-1)^2 + (y-1)^2) \\ + (y-1)U \end{array} \right) \exp\left(-\arctan \frac{y-1}{x-1}\right)$$

et

$$\frac{\partial H_1}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{xy((x-1)^2 + (y-1)^2)} \left(\begin{array}{l} (cx + 2ay - 2a)((x-1)^2 + (y-1)^2) \\ + (1-x)U \end{array} \right) \exp\left(-\arctan \frac{y-1}{x-1}\right).$$

En remplaçant les dérivées partielles $\frac{\partial H_1}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial H_1}{\partial y}(x, y)$ par leurs expressions dans

$$\frac{dH_1}{dt}(x, y) = \frac{\partial H_1}{\partial x}(x, y) \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H_1}{\partial y}(x, y) \times \frac{dy}{dt},$$

on obtient :

$$\frac{dH_1}{dt}(x, y) = 0.$$

■

2.2.2 Existence de cycles limites

Pour ce système, nous prouvons l'existence d'un cycle limite algébrique en donnant son expression explicite. Pour cela, nous utilisons les lemmes suivants :

Lemme 2.4. Soient a et c deux paramètres réels tels que $c^2 - 4a^2 < 0$ et $ac < 0$. Alors la courbe $(\Gamma) : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / U(x, y) = 0\}$ est une ellipse et sa forme réduite est

$$(\Gamma') : \frac{(X - \gamma)^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1 \tag{2.2.2}$$

$$\text{où } \alpha = \sqrt{\frac{-4ac}{(2a+c)^2}}, \beta = \sqrt{\frac{4ac}{c^2 - 4a^2}} \text{ et } \gamma = \frac{2\sqrt{2}a}{2a+c}.$$

Preuve. Par la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$:

$$\begin{cases} x = \lambda(X - Y) \\ y = \lambda(X + Y) \end{cases} \text{ où } \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$U(x, y)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= U(\lambda(X - Y), \lambda(X + Y)) = V(X, Y) \\
 &= a\lambda^2(X - Y)^2 + c\lambda^2(X - Y)(X + Y) + a\lambda^2(X + Y)^2 \\
 &\quad - 2a\lambda(X - Y) - 2a\lambda(X + Y) + 2a \\
 &= \lambda^2(2a + c)X^2 - 4a\lambda X + \lambda^2(2a - c)Y^2 + 2a.
 \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
 \lambda^2(2a + c)X^2 - 4a\lambda X &= \lambda^2(2a + c) \left(X^2 - \frac{4a}{\lambda(2a + c)}X \right) \\
 &= \lambda^2(2a + c) \left(\left(X - \frac{2a}{\lambda(2a + c)} \right)^2 - \left(\frac{4a^2}{\lambda^2(2a + c)^2} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 V(X, Y) &= \lambda^2(2a + c) \left(\left(X - \frac{2a}{\lambda(2a + c)} \right)^2 - \left(\frac{4a^2}{\lambda^2(2a + c)^2} \right) \right) + \lambda^2(2a - c)Y^2 + 2a \\
 &= \lambda^2(2a + c) \left(X - \frac{2a}{\lambda(2a + c)} \right)^2 + \lambda^2(2a - c)Y^2 + 2a - \lambda^2(2a + c) \left(\frac{4a^2}{\lambda^2(2a + c)^2} \right) \\
 &= \lambda^2(2a + c) \left(X - \frac{2a}{\lambda(2a + c)} \right)^2 + \lambda^2(2a - c)Y^2 + 2a - \frac{4a^2}{2a + c} \\
 &= \lambda^2(2a + c) \left(X - \frac{2a}{\lambda(2a + c)} \right)^2 + \lambda^2(2a - c)Y^2 + \frac{2ac}{2a + c}.
 \end{aligned}$$

Comme

$$U(x, y) = 0 \Leftrightarrow V(X, Y) = 0.$$

Alors

$$\lambda^2(2a + c) \left(X - \frac{2a}{\lambda(2a + c)} \right)^2 + \lambda^2(2a - c)Y^2 + \frac{2ac}{2a + c} = 0.$$

Ce qui implique

$$\lambda^2(2a + c) \left(X - \frac{2a}{\lambda(2a + c)} \right)^2 + \lambda^2(2a - c)Y^2 = -\frac{2ac}{2a + c}.$$

En divisant les deux membres par $-\frac{2ac}{2a + c}$, on obtient :

$$\frac{\left(X - \frac{2a}{\lambda(2a + c)} \right)^2}{\frac{-2ac}{\lambda^2(2a + c)^2}} + \frac{Y^2}{\frac{2ac}{\lambda^2(c^2 - 4a^2)}} = 1.$$

Comme $c^2 - 4a^2 < 0$ et $ac < 0$, alors $\frac{-2ac}{\lambda^2(2a+c)^2} > 0$ et $\frac{2ac}{\lambda^2(c^2-4a^2)} > 0$.

D'où, la forme réduite (2.2.2). ■

Lemme 2.5. *L'ellipse (Γ) définit une solution périodique du système (2.2.1).*

Preuve. D'après la proposition (2.2.), l'ellipse (Γ) est une courbe algébrique invariante de cofacteur

$$\begin{aligned} k(x, y) = & 2ax^4 + 2ax^3y + 2cx^2y^2 + 2axy^3 - 2ay^4 - 6ax^3 - (6a+c)x^2y \\ & - (2a+c)xy^2 + 6ay^3 + 8ax^2 + 4axy - 8ay^2 - 4ax + 4ay. \end{aligned}$$

Il reste à montrer que (Γ) est non singulière pour le système (2.2.1).

Par l'absurde, supposons que (Γ) contient un point singulier (x_0, y_0) du système (2.2.1), donc (x_0, y_0) est une solution du système

$$\begin{cases} \left(\begin{array}{l} \frac{1}{a^2} (a^2x^2 + a(a-c)xy + (c^2 - a^2)y^2 - 2a^2x - a^2y + 2a^2) U(x, y) \\ + \frac{c}{a^2} ((2a^2 - c^2)xy - 2a(a-c)x - acy^2 + 2acy - 2ac) y^2 \end{array} \right) = 0, \\ \left(\begin{array}{l} \frac{1}{a^2} ((a^2 - c^2)x^2 + a(a+c)xy - a^2y^2 - a^2x + 2a^2y - 2a^2) U(x, y) \\ + \frac{c}{a^2} (acx^2 + (c^2 - 2a^2)xy - 2acx + 2a(a-c)y + 2ac) x^2 \end{array} \right) = 0. \end{cases}$$

Alors, dans le premier quadrant positif du plan, on a :

$$\begin{cases} ((2a^2 - c^2)x_0y_0 - acy_0^2 - 2a(a-c)x_0 + 2acy_0 - 2ac) = 0, \\ (acx_0^2 + (c^2 - 2a^2)x_0y_0 - 2acx_0 + 2a(a-c)y_0 + 2ac) = 0. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} ax_0(cx_0 + 2ay_0 - 2a) = 0, \\ -ay_0(2ax_0 + cy_0 - 2a) = 0. \end{cases}$$

car

$$-acy_0^2 = c(ax_0^2 + cx_0y_0 - 2ax_0 - 2ay_0 + 2a)$$

et

$$acx_0^2 = -c(cx_0y_0 + ay_0^2 - 2ax_0 - 2ay_0 + 2a)$$

Donc l'unique point vérifiant le système précédent est $(x_0, y_0) = \left(\frac{2a}{c+2a}, \frac{2a}{c+2a} \right)$, or ce point n'est pas un point singulier du système (2.2.1). Donc (Γ) est une orbite périodique.

■

Théorème 2.6. *Le système (2.2.1) admet l'ellipse (Γ) comme cycle limite hyperbolique. De plus, le cycle limite est :*

- 1) *instable si $a > 0$ et $c < 0$,*
- 2) *stable si $a < 0$ et $c > 0$.*

Preuve. Soit T la période de (Γ) .

Pour montrer que (Γ) est un cycle limite, il suffit de vérifier que $\int_0^T \text{div}(\Gamma(t))dt \neq 0$.

Selon le théorème 3 du [24], on a :

$$\int_0^T \text{div}(\Gamma(t))dt = \int_0^T K(\Gamma(t))dt.$$

Dans le nouveau repère et avec les coordonnées

$$\begin{cases} x = \lambda(X - Y) \\ y = \lambda(X + Y) \end{cases} ; \text{ avec } \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} K(x, y) &= K(\lambda(X - Y), \lambda(X + Y)) \\ &= 2\lambda \begin{pmatrix} \lambda^3(2a + c)X^4 - 8a\lambda^3X^3Y - 2c\lambda^3X^2Y^2 - 8a\lambda^3XY^3 \\ + \lambda^3(c - 2a)Y^4 - \lambda^2(4a + c)X^3 + 20a\lambda^2X^2Y \\ + \lambda^2(4a + c)XY^2 + 4a\lambda^2Y^3 + 2a\lambda X^2 - 16a\lambda XY - 2a\lambda Y^2 + 4aY \end{pmatrix} \\ &= K'(X, Y) \end{aligned}$$

et

$$\int_0^T K(\Gamma(t))dt = \int_0^T K'(\Gamma'(t))dt.$$

A l'aide de la paramétrisation de (Γ') donnée par :

$$\begin{cases} X = \alpha \cos \theta + \gamma \\ Y = \beta \sin \theta \end{cases} ; \text{ avec } \gamma = \frac{2\sqrt{2}a}{2a + c}.$$

On a :

$$\begin{aligned} K'(X, Y) &= K(\alpha \cos \theta + \gamma, \beta \sin \theta) \\ &= 2\lambda \begin{pmatrix} A \sin \theta + B \cos \theta + C \sin 2\theta + D \cos 2\theta + E \sin 3\theta \\ + F \cos 3\theta + G \sin 4\theta + H \cos 4\theta + I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 A &= a\beta (5\alpha^2\lambda^2 + 3\beta^2\lambda^2 + 20\lambda^2\gamma^2 - 8\lambda^3\gamma^3 - 16\lambda\gamma - 6\alpha^2\lambda^3\gamma - 6\beta^2\lambda^3\gamma + 4) \\
 B &= \frac{1}{4}\alpha\lambda \left(\begin{array}{l} 16a\gamma + 32a\lambda^2\gamma^3 + 16c\lambda^2\gamma^3 - 12a\alpha^2\lambda + 4a\beta^2\lambda - 48a\lambda\gamma^2 \\ -3c\alpha^2\lambda + c\beta^2\lambda - 12c\lambda\gamma^2 + 24a\alpha^2\lambda^2\gamma + 12c\alpha^2\lambda^2\gamma - 4c\beta^2\lambda^2\gamma \end{array} \right) \\
 C &= \frac{1}{4}\alpha\lambda \left(\begin{array}{l} 16a\gamma + 32a\lambda^2\gamma^3 + 16c\lambda^2\gamma^3 - 12a\alpha^2\lambda + 4a\beta^2\lambda - 48a\lambda\gamma^2 \\ -3c\alpha^2\lambda + c\beta^2\lambda - 12c\lambda\gamma^2 + 24a\alpha^2\lambda^2\gamma + 12c\alpha^2\lambda^2\gamma - 4c\beta^2\lambda^2\gamma \end{array} \right) \\
 D &= \frac{1}{4}\alpha\lambda \left(\begin{array}{l} 16a\gamma + 32a\lambda^2\gamma^3 + 16c\lambda^2\gamma^3 - 12a\alpha^2\lambda + 4a\beta^2\lambda - 48a\lambda\gamma^2 \\ -3c\alpha^2\lambda + c\beta^2\lambda - 12c\lambda\gamma^2 + 24a\alpha^2\lambda^2\gamma + 12c\alpha^2\lambda^2\gamma - 4c\beta^2\lambda^2\gamma \end{array} \right) \\
 E &= -a\beta\lambda^2 (-5\alpha^2 + \beta^2 + 6\alpha^2\lambda\gamma - 2\beta^2\lambda\gamma) \\
 F &= \frac{1}{4}\alpha\lambda^2 (-4a\alpha^2 - 4a\beta^2 - c\alpha^2 - c\beta^2 + 8a\alpha^2\lambda\gamma + 4c\alpha^2\lambda\gamma + 4c\beta^2\lambda\gamma) \\
 G &= -a\alpha\beta\lambda^3 (\alpha^2 - \beta^2) \\
 H &= \frac{1}{8}\lambda^3 (\alpha^2 + \beta^2) (2a\alpha^2 - 2a\beta^2 + c\alpha^2 + c\beta^2) \\
 I &= \frac{1}{8}\lambda \left(\begin{array}{l} (8(2a+c)\gamma^4 + 8(3\alpha^2(2a+c) - c\beta^2)\gamma^2 + (6a\alpha^4 - 6a\beta^4 + 3c\alpha^4 + 3c\beta^4 - 2c\alpha^2\beta^2))\lambda^2 \\ -4\gamma(3\alpha^2 - \beta^2 + 2\gamma^2)(4a+c)\lambda + 8a(\alpha^2 - \beta^2 + 2\gamma^2) \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
 \int_0^T K(\Gamma(t))dt &= \int_0^{2\pi} 2\lambda \left(\begin{array}{l} A \sin \theta + B \cos \theta + C \sin 2\theta + D \cos 2\theta + E \sin 3\theta + \\ + F \cos 3\theta + G \sin 4\theta + H \cos 4\theta + I \end{array} \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} I d\theta = 4\pi\lambda I \quad \text{car } \int_0^{2\pi} \sin n\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos m\theta d\theta = 0 \text{ pour tous } n, m \in \mathbb{Z} \\
 &= \frac{\pi}{2}\lambda^2 \left(\begin{array}{l} \left(8(2a+c)\gamma^4 + 8(3\alpha^2(2a+c) - c\beta^2)\gamma^2 + \right. \\ \left. + (6a\alpha^4 - 6a\beta^4 + 3c\alpha^4 + 3c\beta^4 - 2c\alpha^2\beta^2) \right) \lambda^2 \\ -4\gamma(3\alpha^2 - \beta^2 + 2\gamma^2)(4a+c)\lambda + 8a(\alpha^2 - \beta^2 + 2\gamma^2) \end{array} \right) \\
 &= 32a^2\pi \frac{c}{(c^2 - 4a^2)} \frac{(2a^2 + c^2 - 2ac)}{(2a+c)^2}.
 \end{aligned}$$

Comme $\int_0^T K(\Gamma(t))dt \neq 0$ puisque $ac < 0$ et $2a^2 + c^2 - 2ac > 0$, alors (Γ) est un cycle limite hyperbolique. De plus,

- 1) si $a > 0$ et $c < 0$, alors $\int_0^T K(\Gamma(t))dt > 0$ et le cycle limite (Γ) est instable.
- 2) si $a < 0$ et $c > 0$, alors $\int_0^T K(\Gamma(t))dt < 0$ et le cycle limite (Γ) est stable. ■

2.2.3 Exemples d'applications

Nous donnons ici quelques exemples pour illustrer l'applicabilité du théorème 2.6. . Le tracé du portrait de phase dans le disque de Poincaré, présentant un cycle limite dans le premier quadrant a été effectué par le programme P4 pour chaque exemple.

Exemple 6. Dans le système (2.2.1), on prend $a = 3$ et $c = -2$, ($c^2 - 4a^2 < 0$ et $ac < 0$), on obtient le système :

$$\begin{cases} x' = x \begin{pmatrix} (-2x^2 + 3xy + 3y^2 + x + 3y - 4) y^2 \\ +3(x^2 + xy - 2x - 3y + 2) ((x - 1)^2 + 1) \end{pmatrix}, \\ y' = y \begin{pmatrix} (3x^2 + 3xy - 2y^2 - 9x + y + 6) x^2 \\ +3(xy - y^2 + x + 2y - 2) ((y - 1)^2 + 1) \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (2.2.3)$$

qui admet un cycle limite algébrique, instable et hyperbolique donné par l'expression ci-dessous :

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 6x - 6y + 6 = 0.$$

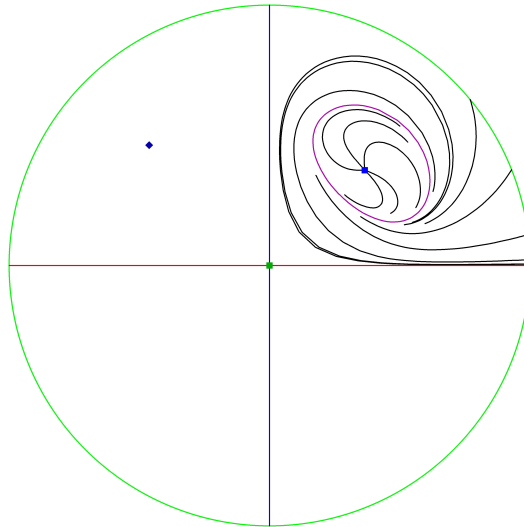


Figure 2.1. Le portrait de phase dans le disque de Poincaré du système (2.2.3), montrant un cycle limite instable dans le premier quadrant.

Exemple 7. Dans le système (2.2.1), on prend $a = -3$ et $c = 2$, ($c^2 - 4a^2 < 0$ et $ac < 0$), on obtient le système :

$$\begin{cases} x' = x \begin{pmatrix} (2x^2 - 3xy - 2y^2 - x - 3y - 6) y^2 \\ -3(x^2 + xy - 2x - 3y + 2) ((x - 1)^2 + 1) \end{pmatrix}, \\ y' = y \begin{pmatrix} (-3x^2 - 3xy + 2y^2 + 9x - y - 6) x^2 \\ -3(xy - y^2 + x + 2y - 2) ((y - 1)^2 + 1) \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (2.2.4)$$

qui admet un cycle limite algébrique, stable et hyperbolique donné par l'expression ci-dessous :

$$-3x^2 + 2xy - 3y^2 + 6x + 6y - 6 = 0.$$

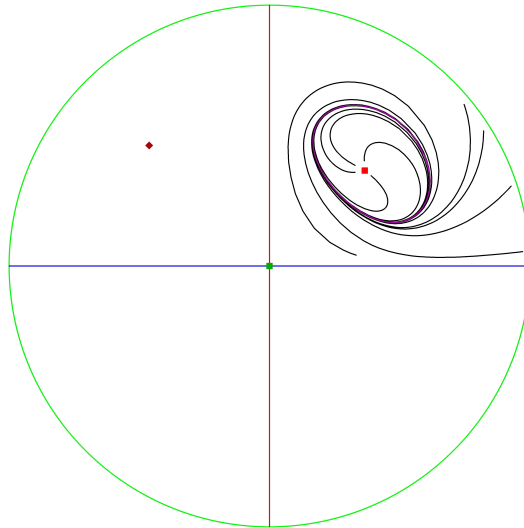


Figure 2.2. Le portrait de phase dans le disque de Poincaré du système (2.2.4), montrant un cycle limite stable dans le premier quadrant.

2.3 Classe II : Systèmes quintiques intégrables à cycle limite non-algébrique

Soit le système polynomial de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = x P_4(x, y), \\ \dot{y} = y Q_4(x, y), \end{cases} \quad (2.3.1)$$

où

$$\begin{aligned} P_4(x, y) = & 4\lambda - 4(\beta + 2\lambda)x + 2(2\beta - 3\lambda)y + 2(3\beta + 4\lambda)x^2 + 2(4\lambda - \beta)xy + 2(\lambda - 2\beta)y^2 \\ & - 4(\beta + \lambda)x^3 - (\beta + 5\lambda)x^2y + (6\beta - 2\lambda - 1)xy^2 + (\lambda - \beta)y^3 + \\ & + (\beta + \lambda)x^4 + (\beta + \lambda)x^3y + (1 - 2\beta)x^2y^2 + (\lambda - \beta)xy^3 + (\beta - \lambda)y^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_4(x, y) = & -4\lambda + 2(2\beta + \lambda)x + 4(2\lambda - \beta)y + 2\lambda x^2 - 6\beta xy + 2(3\beta - 4\lambda)y^2 \\ & - 3(\beta + \lambda)x^3 + (2\beta - 2\lambda - 1)x^2y + (5\beta - \lambda)xy^2 + 4(\lambda - \beta)y^3 \\ & + (\beta + \lambda)x^4 + (\beta + \lambda)x^3y + (1 - 2\beta)x^2y^2 + (\lambda - \beta)xy^3 + (\beta - \lambda)y^4, \end{aligned}$$

avec λ, β des paramètres réelles.

En appliquant une translation de vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ au système (2.3.1), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x} = (x + 1) \left((x - 2y + x^2 + xy - y^2) ((\beta + \lambda)x^2 + (\lambda - \beta)y^2) + x(y + 1)^2(x + 1) \right), \\ \dot{y} = (y + 1) \left((2x + y + x^2 + xy - y^2) ((\beta + \lambda)x^2 + (\lambda - \beta)y^2) + y(x + 1)^2(y + 1) \right). \end{cases} \quad (2.3.2)$$

En coordonnées polaires (r, θ) , le système (2.3.2) devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{8}r(f_1(\theta)r^4 + f_2(\theta)r^3 + f_3(\theta)r^2 + f_4(\theta)r + 8), \\ \dot{\theta} = r^2(\lambda + \beta \cos 2\theta)(2 + r(\cos \theta + \sin \theta)), \end{cases} \quad (2.3.3)$$

où

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= 1 + 4\beta + 4\lambda(2 \cos 2\theta + \sin 2\theta) + (4\beta - 1) \cos 4\theta + 2\beta \sin 4\theta, \\ f_2(\theta) &= 4((2\beta + 4\lambda + 1) \cos \theta + \sin \theta + (2\beta - 1) \cos 3\theta + \sin 3\theta), \\ f_3(\theta) &= 8(1 + \lambda + \beta \cos 2\theta + 2 \sin 2\theta), \\ f_4(\theta) &= 16(\cos \theta + \sin \theta). \end{aligned}$$

Pour obtenir des solutions du système (2.3.1) dans le premier quadrant, il est nécessaire de considérer que $r \cos \theta > -1$ et $r \sin \theta > -1$ c'est à dire $(2 + r(\cos \theta + \sin \theta)) > 0$.

Proposition 2.7. *Si $\lambda + |\beta| < \frac{-1}{2}$, alors $(1, 1)$ est le seul point singulier du système (2.3.1) dans le premier quadrant et qui est un noeud instable.*

Preuve. Le point $(1, 1)$ est un point singulier du système (2.3.1).

Unicité: Supposons qu'il existe un autre point singulier (x_0, y_0) , alors

$$(x_0 - 1)y_0Q_4(x_0, y_0) - (y_0 - 1)x_0P_4(x_0, y_0) = 0.$$

Or lorsque $\lambda + |\beta| < \frac{-1}{2}$, on a $(\lambda + \beta \cos 2\theta) < 0$. Donc $\frac{d\theta}{dt} < 0$

où

$$\dot{\theta} = \frac{(x-1)yQ_4(x,y) - (y-1)xP_4(x,y)}{(x-1)^2 + (y-1)^2}.$$

Contradiction. D'où le point $(1, 1)$ est unique.

Nature: Les valeurs propres du système linéarisé associé vérifient $(\lambda - 1)^2 = 0$, ce qui assure que $(1, 1)$ est un noeud instable. ■

Remarque 2.1. Les orbites $(r(t), \theta(t))$ du système (2.3.3) ont une orientation opposée par rapport aux orbites $(x(t), y(t))$ du système (2.3.1).

2.3.1 Intégrabilité

Le théorème suivant prouve l'intégrabilité du système (2.3.1).

Théorème 2.8. Les systèmes (2.3.3) et (2.3.1) sont intégrables. Leurs intégrales premières sont données respectivement par :

$$H_2(r, \theta) = \frac{r^2}{(r \cos \theta + 1)(r \sin \theta + 1)} e^{-\theta} - \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds,$$

$$I_2(x, y) = \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2}{xy} e^{-\arctan \frac{y-1}{x-1}} - \int_0^{\arctan \frac{y-1}{x-1}} \frac{e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds.$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_2}{\partial r}(r, \theta) &= r \frac{2 + r(\cos \theta + \sin \theta)}{(r \cos \theta + 1)^2 (r \sin \theta + 1)^2} e^{-\theta} \\ &= \frac{\dot{\theta}}{r(\lambda + \beta \cos 2\theta)(r \cos \theta + 1)^2 (r \sin \theta + 1)^2} e^{-\theta}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_2}{\partial \theta}(r, \theta) &= \left(-r^2 \frac{r^2 \cos 2\theta + r(\cos \theta - \sin \theta)}{(r \cos \theta + 1)^2 (r \sin \theta + 1)^2} - \frac{r^2}{(r \cos \theta + 1)(r \sin \theta + 1)} - \frac{1}{\lambda + \beta \cos 2\theta} \right) e^{-\theta} \\ &= \frac{-\dot{r}}{r(\lambda + \beta \cos 2\theta)(r \cos \theta + 1)^2 (r \sin \theta + 1)^2} e^{-\theta}. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} \frac{dH_2}{dt}(r, \theta) &= \frac{\partial H_2}{\partial r}(r, \theta) \times \frac{dr}{dt} + \frac{\partial H_2}{\partial \theta}(r, \theta) \times \frac{d\theta}{dt} \\ &= \frac{\dot{r} \times \dot{\theta} \times e^{-\theta}}{r(\lambda + \beta \cos 2\theta)(r \cos \theta + 1)^2(r \sin \theta + 1)^2} + \frac{\dot{\theta} \times (-\dot{r}) \times e^{-\theta}}{r(\lambda + \beta \cos 2\theta)(r \cos \theta + 1)^2(r \sin \theta + 1)^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc H_2 est une intégrale première du système (2.3.3).

Il est clair que :

$$r^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \text{ et } \theta = \arctan \frac{y - 1}{x - 1}.$$

En remplaçant r et θ par leurs expressions données ci-dessus dans H_2 , on obtient :

$$I_2(x, y) = \frac{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}{xy} e^{-\arctan \frac{y-1}{x-1}} - \int_0^{\arctan \frac{y-1}{x-1}} \frac{e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds.$$

■

2.3.2 Existence de cycles limites

Le théorème ci-dessous est un résultat de l'existence de cycles limites du système (2.3.1).

Théorème 2.9. *Considérons le système polynômial (2.3.1), les assertions suivantes sont vraies :*

1) *Si $\beta \neq 0$ et $\lambda + |\beta| < \frac{-1}{2}$, alors le système (2.3.1) admet un cycle limite non algébrique, stable et hyperbolique dont l'expression en coordonnées polaires (r, θ) est donnée par :*

$$r(\theta, r_0) = \frac{A(\theta)(\cos \theta + \sin \theta) + \sqrt{A^2(\theta) + 4A(\theta) - A^2(\theta) \sin 2\theta}}{2 - A(\theta) \sin 2\theta},$$

avec $A(\theta) = \exp(\theta) \left(\frac{r_0^2}{r_0 + 1} + \int_0^\theta \frac{\exp(-s)}{\lambda + \beta \cos 2s} ds \right)$ et

$$r_0 = \frac{\sqrt{e^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds}}{2(e^{2\pi} - 1)} \left(\begin{array}{l} \sqrt{e^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds +} \\ + \sqrt{e^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds + 4(e^{2\pi} - 1)} \end{array} \right).$$

2) Si $\beta = 0$ et $\lambda < \frac{-1}{2}$, alors le système (2.3.1) admet un cycle limite algébrique, stable et hyperbolique dont l'expression en coordonnées polaires (r, θ) est donnée par :

$$r(\theta, r_0) = \frac{(\cos \theta + \sin \theta) + \sqrt{1 - 4\lambda - \sin 2\theta}}{-(2\lambda + \sin 2\theta)},$$

et en coordonnées cartésiennes par :

$$\lambda(x-1)^2 + \lambda(y-1)^2 + xy = 0.$$

Pour la démonstration du théorème (2.8.), on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.10. Soit $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda + |\beta| < \frac{-1}{2}$, on a :

1)

$$0 < \frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - 1} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds < 2.$$

2) La fonction g définie sur $[0, 2\pi[$ par :

$$g(\theta) = 2 \exp(-\theta) + \int_0^\theta \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds,$$

est strictement décroissante.

De plus,

$$g(\theta) > \frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - 1} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds.$$

3)

$$0 < A(\theta) = \exp(\theta) \left(\frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - 1} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds + \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds \right) < 2.$$

Preuve.

1) Nous avons :

$$\lambda + \beta \cos 2s \leq \lambda + |\beta| < \frac{-1}{2},$$

ce qui entraîne que

$$0 < \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} < 2e^{-s},$$

par conséquent :

$$0 < \frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - 1} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds < \frac{2e^{2\pi}}{e^{2\pi} - 1} \int_0^{2\pi} e^{-s} ds,$$

finalement

$$0 < \frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - 1} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds < 2.$$

2) Sur l'intervalle $[0, 2\pi[$, la fonction g est différentiable et

$$g'(\theta) = -2 \exp(-\theta) + \frac{-\exp(-\theta)}{\lambda + \beta \cos 2\theta} = -\exp(-\theta) \left(2 + \frac{1}{\lambda + \beta \cos 2\theta} \right),$$

Puisque $\lambda + \beta \cos 2\theta \leq \lambda + |\beta|$, alors

$$g'(\theta) \leq -\exp(-\theta) \left(2 + \frac{1}{\lambda + |\beta|} \right) < 0.$$

Donc g est une fonction strictement décroissante.

D'autre part, à partir de l'assertion 1) du lemme 2.10., on a :

$$\frac{1}{e^{2\pi} - 1} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds < 2e^{-2\pi},$$

ce qui entraîne que

$$\frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - 1} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds - \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds < 2e^{-2\pi} \text{ car } \frac{1}{e^{2\pi} - 1} = \left(\frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - 1} - 1 \right),$$

par conséquent :

$$\frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - 1} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds < 2e^{-2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds = g(2\pi).$$

Comme g est une fonction strictement décroissante, alors

$$\frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - 1} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds < g(\theta).$$

3) Montrons d'abord que A est strictement positif. De la relation de Chasles, on a :

$$A(\theta) = \exp(\theta) \left(\frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - 1} \left(\int_0^\theta \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds + \int_\theta^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds \right) - \int_0^\theta \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds \right),$$

ce qui équivaut à écrire :

$$A(\theta) = \exp(\theta) \left(\frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - 1} \int_\theta^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds + \left(\frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - 1} - 1 \right) \int_0^\theta \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds \right).$$

Comme $\frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi}-1} - 1 > 0$ et $\frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} > 0$, alors $A(\theta) > 0$.

Montrons maintenant que $A(\theta) < 2$. De l'assertion 2) du lemme 2.10., on a :

$$\frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi}-1} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds < 2e^{-\theta} + \int_0^\theta \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds,$$

ce qui implique

$$\left(\frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi}-1} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds + \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds \right) < 2e^{-\theta},$$

donc

$$A(\theta) = \exp(\theta) \left(\frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi}-1} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds + \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds \right) < 2,$$

d'où

$$0 < A(\theta) < 2.$$

■

Preuve du théorème 2.9..

Supposons que $\lambda + |\beta| < \frac{-1}{2}$. Par le théorème 2.8., les solutions du système (2.3.3) sont données par :

$$\frac{r^2}{(r \cos \theta + 1)(r \sin \theta + 1)} - \exp(\theta) \left(k + \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds \right) = 0, \quad (2.3.4)$$

où $k \in \mathbb{R}$.

Si on note

$$A(\theta) = \exp(\theta) \left(k + \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds \right).$$

Dans la région où $2 - A(\theta) \sin 2\theta \neq 0$ et $A^2(\theta) + 4A(\theta) - A^2(\theta) \sin 2\theta \geq 0$, l'équation (2.3.4) admet les deux solutions suivantes :

$$r_{1,2}(\theta) = \frac{A(\theta) (\cos \theta + \sin \theta) \pm \sqrt{A^2(\theta) + 4A(\theta) - A^2(\theta) \sin 2\theta}}{2 - A(\theta) \sin 2\theta}. \quad (2.3.5)$$

Notons que le système (2.3.2) admet une solution périodique si et seulement si le système (2.3.3) admet une solution 2π -périodique strictement positive.

Pour $\theta = 0$, on a :

$$r_1(0) = \frac{1}{2} \left(A(0) + \sqrt{A(0)(A(0)+4)} \right) \text{ et } r_2(0) = \frac{1}{2} \left(A(0) - \sqrt{A(0)(A(0)+4)} \right),$$

avec $A(0) = k$. C'est à dire :

$$r_1(0) = \frac{1}{2} \left(k + \sqrt{k(k+4)} \right) \text{ et } r_2(0) = \frac{1}{2} \left(k - \sqrt{k(k+4)} \right).$$

$r_{1,2}(0)$ sont définis si et seulement si $k \in]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$.

Sur l'intervalle $]-\infty, -4[$, $r_1(0)$ et $r_2(0)$ sont toutes les deux négatives, et sur $]0, +\infty[$, $r_1(0)$ est positif et $r_2(0)$ est négatif.

Par conséquent, la seule solution positive de l'équation (2.3.4) est :

$$r(\theta) = r_1(\theta) = \frac{A(\theta)(\cos\theta + \sin\theta) + \sqrt{A^2(\theta) + 4A(\theta) - A^2(\theta)\sin 2\theta}}{2 - A(\theta)\sin 2\theta}, \quad (2.3.6)$$

avec $A(\theta) = \exp(\theta) \left(k + \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds \right)$ et $k = \frac{r^2(0)}{r(0) + 1} > 0$.

La solution de l'équation (2.3.4) avec la condition initiale $r(0, r_0) = r_0 > 0$ est alors donnée par :

$$r(\theta, r_0) = \frac{A(\theta)(\cos\theta + \sin\theta) + \sqrt{A^2(\theta) + 4A(\theta) - A^2(\theta)\sin 2\theta}}{2 - A(\theta)\sin 2\theta},$$

avec $A(\theta) = \exp(\theta) \left(\frac{r_0^2}{r_0 + 1} + \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds \right)$ et $r_0 = r(0)$.

Une telle solution est périodique si elle satisfait la condition $r(0, r_0) = r(2\pi, r_0)$.

Pour $\theta = 2\pi$, on obtient :

$$r(2\pi, r_0) = \frac{1}{2} \left(A(2\pi) + \sqrt{A(2\pi)(A(2\pi) + 4)} \right),$$

avec $A(2\pi) = e^{2\pi} \left(\frac{r_0^2}{r_0 + 1} + \int_0^{2\pi} \frac{e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds \right)$.

La résolution de l'équation $r(0, r_0) = r(2\pi, r_0)$ donne :

$$r_0 = \frac{\sqrt{e^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds}}{2(e^{2\pi} - 1)} \left(\begin{array}{l} \sqrt{e^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds +} \\ + \sqrt{e^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds + 4(e^{2\pi} - 1)} \end{array} \right).$$

Par des simplifications, on obtient :

$$\frac{r_0^2}{r_0 + 1} = \frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - 1} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds.$$

Enfin, la solution générale de (2.3.3) est donnée explicitement par :

$$r(\theta, r_0) = \frac{A(\theta)(\cos\theta + \sin\theta) + \sqrt{A^2(\theta) + 4A(\theta) - A^2(\theta)\sin 2\theta}}{2 - A(\theta)\sin 2\theta}, \quad (2.3.7)$$

avec $A(\theta) = \exp(\theta) \left(\frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi}-1} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds + \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds \right)$ et $r_0 = r(0)$.

Périodicité de la solution $r(\theta, r_0)$.

Comme $r(\theta, r_0)$ s'écrit en fonction de $A(\theta)$, $\sin \theta$ et $\cos \theta$, alors elle sera 2π -périodique si $A(\theta)$ est 2π -périodique. On a :

$$\begin{aligned} A(\theta + 2\pi) &= e^{\theta+2\pi} \left(\frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi}-1} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds + \int_0^{\theta+2\pi} \frac{e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds \right) \\ &= e^{\theta+2\pi} \left(\frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi}-1} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds + \int_0^{2\pi} \frac{e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds + \int_{2\pi}^{\theta+2\pi} \frac{e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds \right) \\ &= e^\theta e^{2\pi} \left(\frac{1}{e^{2\pi}-1} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds + \int_{2\pi}^{\theta+2\pi} \frac{e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds \right). \end{aligned}$$

Par le changement de variable $u = s - 2\pi$, on obtient :

$$\int_{2\pi}^{\theta+2\pi} \frac{e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds = e^{-2\pi} \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds.$$

En substituant dans $A(\theta + 2\pi)$, on aura :

$$A(\theta + 2\pi) = e^\theta \left(\frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi}-1} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds + e^{2\pi} e^{-2\pi} \int_0^\theta \frac{e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds \right).$$

D'où

$$A(\theta + 2\pi) = A(\theta).$$

La positivité stricte de $r(\theta, r_0)$.

Par l'assertion 3) du lemme 2.10., on a $0 < A(\theta) < 2$, alors le dénominateur de $r(\theta, r_0)$ est strictement positif. On distingue deux cas :

i) Si $(\cos \theta + \sin \theta) > 0$, le numérateur de $r(\theta, r_0)$ est strictement positif, par conséquent $r(\theta, r_0)$ l'est également.

ii) Si $(\cos \theta + \sin \theta) < 0$, on a :

$$4A(\theta) - 2A^2(\theta) \sin 2\theta > 0,$$

ce qui implique

$$A^2(\theta) + 4A(\theta) - A^2(\theta) \sin 2\theta > A(\theta) + A^2(\theta) \sin 2\theta,$$

c'est à dire

$$A^2(\theta) + 4A(\theta) - A^2(\theta) \sin 2\theta > (-A(\theta) (\cos \theta + \sin \theta))^2.$$

Par le passage à la racine carrée, on aura :

$$\sqrt{A^2(\theta) + 4A(\theta) - A^2(\theta) \sin 2\theta} > -A(\theta) (\cos \theta + \sin \theta).$$

Par conséquent :

$$A(\theta) (\cos \theta + \sin \theta) + \sqrt{A^2(\theta) + 4A(\theta) - A^2(\theta) \sin 2\theta} > 0.$$

Donc $r(\theta, r_0)$ est strictement positive.

Finalement $r(\theta, r_0)$ défini par (2.3.7) est une solution périodique.

Montrons que cette solution périodique est un cycle limite. Pour cela, on définit la fonction de premier retour de Poincaré :

$$\gamma \mapsto \Pi(\gamma) = r(2\pi, \gamma) = \frac{1}{2} \left(A(2\pi) + \sqrt{A^2(2\pi) + 4A(2\pi)} \right),$$

avec $A(2\pi) = \exp(2\pi) \left(\frac{\gamma^2}{\gamma+1} + \int_0^{2\pi} \frac{e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds \right)$ et on montre que la fonction de premier retour de Poincaré vérifie $\left. \frac{d\Pi(\gamma)}{d\gamma} \right|_{\gamma=r_0} \neq 1$, voir [20].

On remarque que :

$$\sqrt{A^2(2\pi) + 4A(2\pi)} = \frac{e^\pi}{(\gamma+1)} \sqrt{(\gamma^2 + D\gamma + D) (e^{2\pi} (\gamma^2 + D\gamma + D) + 4(\gamma+1))},$$

avec

$$D = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds.$$

On a :

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} (A(2\pi)) = \frac{\gamma(\gamma+2)}{(\gamma+1)^2} e^{2\pi},$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{e^\pi}{(\gamma+1)} \sqrt{(\gamma^2 + D\gamma + D) (e^{2\pi} (\gamma^2 + D\gamma + D) + 4(\gamma+1))} \right) \\ &= \frac{\gamma(\gamma+2) e^\pi}{(\gamma+1)^2} \frac{(e^{2\pi} (\gamma^2 + D\gamma + D) + 2(\gamma+1))}{\sqrt{(\gamma^2 + D\gamma + D) (e^{2\pi} (\gamma^2 + D\gamma + D) + 4(\gamma+1))}}, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{2} \left(A(2\pi) + \sqrt{A^2(2\pi) + 4A(2\pi)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\gamma(\gamma+2) e^\pi}{(\gamma+1)^2} \left(\frac{(e^{2\pi} (\gamma^2 + D\gamma + D) + 2(\gamma+1))}{\sqrt{(\gamma^2 + D\gamma + D) (e^{2\pi} (\gamma^2 + D\gamma + D) + 4(\gamma+1))}} + e^\pi \right). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi(\gamma)}{\gamma} \Big|_{\gamma=r_0} &= \frac{1}{2} \frac{\gamma(\gamma+2)}{(\gamma+1)^2} e^\pi \left(\frac{(e^{2\pi}(\gamma^2 + D\gamma + D) + 2(\gamma+1))}{\sqrt{(\gamma^2 + D\gamma + D)(e^{2\pi}(\gamma^2 + D\gamma + D) + 4(\gamma+1))}} + e^\pi \right) \Big|_{\gamma=r_0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{r_0(r_0+2)}{(r_0+1)^2} e^\pi \left(\frac{(e^{2\pi}(r_0^2 + Dr_0 + D) + 2(r_0+1))}{\sqrt{(r_0^2 + Dr_0 + D)(e^{2\pi}(r_0^2 + Dr_0 + D) + 4(r_0+1))}} + e^\pi \right). \end{aligned}$$

Puisque $\lambda + |\beta| < \frac{-1}{2}$, $D < 0$ et $A > 0$ alors

$$0 < (r_0^2 + Dr_0 + D) < r_0^2.$$

Donc

$$(e^{2\pi}(r_0^2 + Dr_0 + D) + 4(r_0+1)) < (e^{2\pi}r_0^2 + 4(r_0+1)) < e^{2\pi}(r_0^2 + 2r_0 + 1) = e^{2\pi}(r_0+1)^2.$$

Il s'ensuit que :

$$\sqrt{(r_0^2 + Dr_0 + D)(e^{2\pi}(r_0^2 + Dr_0 + D) + 4(r_0+1))} < \sqrt{r_0^2 e^{2\pi}(r_0+1)^2} = e^\pi r_0(r_0+1),$$

c'est à dire :

$$\frac{1}{\sqrt{(r_0^2 + Dr_0 + D)(e^{2\pi}(r_0^2 + Dr_0 + D) + 4(r_0+1))}} > \frac{1}{e^\pi r_0(r_0+1)},$$

ce qui entraîne que :

$$\frac{(e^{2\pi}(r_0^2 + Dr_0 + D) + 2(r_0+1))}{\sqrt{(r_0^2 + Dr_0 + D)(e^{2\pi}(r_0^2 + Dr_0 + D) + 4(r_0+1))}} > \frac{2(r_0+1)}{e^\pi r_0(r_0+1)} = \frac{2}{e^\pi r_0}.$$

car $(e^{2\pi}(r_0^2 + Dr_0 + D) + 2(r_0+1)) > 2(r_0+1)$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi(\gamma)}{d\gamma} \Big|_{\gamma=r_0} &> \frac{1}{2} \frac{r_0(r_0+2)}{(r_0+1)^2} e^\pi \left(\frac{2}{e^\pi r_0} + e^\pi \right), \\ &> \frac{(r_0+2)}{(r_0+1)^2} + \frac{1}{2} \frac{r_0(r_0+2)}{(r_0+1)^2} e^{2\pi}, \\ &> \frac{(r_0+2)}{(r_0+1)^2} \left(1 + \frac{e^{2\pi}}{2} r_0 \right), \\ &> \frac{(r_0+2)}{(r_0+1)^2} (1+r_0) \text{ because } \frac{e^{2\pi}}{2} > 1 \\ &> \frac{(r_0+2)}{(r_0+1)} > 1. \end{aligned}$$

D'où

$$\left. \frac{d\Pi(\gamma)}{d\gamma} \right|_{\gamma=r_0} > 1.$$

La solution périodique du système (2.3.3) est donc un cycle limite instable et hyperbolique, c'est donc un cycle limite stable et hyperbolique pour le système (2.3.1).

1) Si $\beta \neq 0$, ce cycle limite est non algébrique, dû à l'expression de $A(\theta)$.

Plus précisément, en coordonnées Cartésiennes $\left(r^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2, \theta = \arctan\left(\frac{y-1}{x-1}\right) \right)$, la courbe définie par ce cycle limite a pour expression :

$$f(x, y) = \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2}{xy} - B(x, y) = 0,$$

avec

$$B(x, y) = \exp\left(\arctan\left(\frac{y-1}{x-1}\right)\right) \left(\frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi}-1} \left(\int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds \right) + \int_0^{\arctan\frac{y-1}{x-1}} \frac{e^{-s}}{\lambda + \beta \cos 2s} ds \right).$$

Il n'existe pas d'entier n pour lequel $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ et $\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$ s'annulent en même temps. On calcul par exemple $\frac{\partial f}{\partial y}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-x^2 + 2x + y^2 - 2}{xy^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2 + (y-1)^2} \left[B(x, y) + \frac{1}{\lambda + \beta \cos\left(2 \arctan\left(\frac{y-1}{x-1}\right)\right)} \right].$$

Puisque $B(x, y)$ réapparaît, il restera à n'importe quel ordre de dérivation, donc la courbe $f(x, y) = 0$ est non-algébrique et le cycle limite du système (2.3.1) l'est également. Ceci achève la preuve de l'assertion 1) du théorème 2.9..

2) Si $\beta = 0$, on a $\int_0^\theta \frac{\exp(-s)}{\lambda} ds = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\theta})$ et $e^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-e^{-s}}{\lambda} ds = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{2\pi})$, par simplification on obtient :

$$r_0 = \frac{-1}{2\lambda} \left(\sqrt{1 - 4\lambda} + 1 \right),$$

et

$$\frac{r_0^2}{r_0 + 1} = \frac{-1}{\lambda} = A(\theta).$$

En substituant les valeurs de r_0 et $A(\theta)$ dans (2.3.7), la solution de (2.3.3) devient :

$$\begin{aligned} r(\theta, r_0) &= \frac{\frac{-1}{\lambda}(\cos \theta + \sin \theta) + \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{4}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \sin 2\theta}}{2 + \frac{1}{\lambda} \sin 2\theta} \\ &= \frac{\frac{-1}{\lambda}(\cos \theta + \sin \theta) + \frac{-1}{\lambda} \sqrt{1 - 4\lambda - \sin 2\theta}}{\frac{1}{\lambda}(2\lambda + \sin 2\theta)} \\ &= \frac{(\cos \theta + \sin \theta) + \sqrt{1 - 4\lambda - \sin 2\theta}}{-(2\lambda + \sin 2\theta)}. \end{aligned}$$

En coordonnées cartésiennes, la courbe définie par ce cycle limite est donnée par l'expression :

$$\lambda(x-1)^2 + \lambda(y-1)^2 + xy = 0.$$

Ceci achève la preuve de l'assertion 2) du théorème 2.9.. ■

2.3.3 Exemples d'applications

Dans cette partie, les exemples présentés illustrent l'applicabilité de notre résultat principal. De plus, un tracé des portraits de phase a été effectué par le programme P4.

Exemple 8. Dans le système (2.3.1), on prend $\lambda = -2$ et $\beta = 1$, $\left(\lambda + |\beta| = -1 < \frac{-1}{2}\right)$, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x} = x \begin{pmatrix} -8 + 12x + 16y - 10x^2 - 18xy - 8y^2 + 4x^3 + 9x^2y \\ +9xy^2 - 3y^3 - x^4 - x^3y - x^2y^2 - 3xy^3 + 3y^4 \end{pmatrix}, \\ \dot{y} = y \begin{pmatrix} 8 - 20y - 4x^2 - 6xy + 22y^2 + 3x^3 + 5x^2y \\ +7xy^2 - 12y^3 - x^4 - x^3y - x^2y^2 - 3xy^3 + 3y^4 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (2.3.8)$$

Ce système admet un cycle limite non algébrique, stable et hyperbolique dont l'expression en coordonnées polaires (r, θ) est

$$r(\theta, r_0) = \frac{A(\theta)(\cos \theta + \sin \theta) + \sqrt{A^2(\theta) + 4A(\theta) - A^2(\theta) \sin 2\theta}}{2 - A(\theta) \sin 2\theta},$$

avec $A(\theta) = \exp(\theta) \left(\frac{r_0^2}{r_0 + 1} + \int_0^\theta \frac{\exp(-s)}{-2 + \cos 2s} ds \right)$ et $r_0 \simeq 1.1877$.

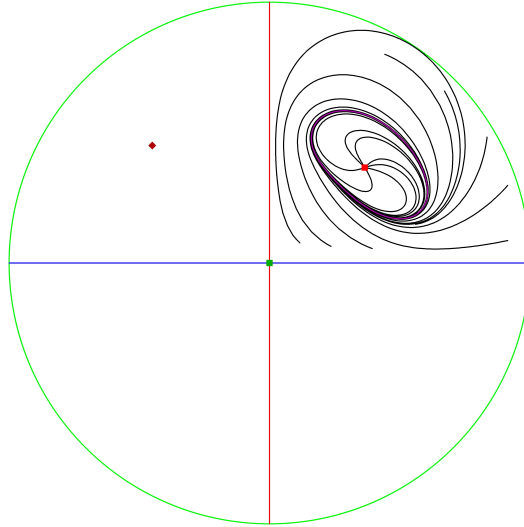


Figure 2.3. Le portrait de phase dans le disque de Poincaré du système (2.3.8), montrant un cycle limite dans le premier quadrant.

Exemple 9. Dans le système (2.3.1), on prend $\lambda = -10$ et $\beta = 0$, $\left(\lambda < \frac{-1}{2}\right)$, on obtient

:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \begin{pmatrix} -40 + 80x + 60y - 80x^2 - 80xy - 20y^2 + 40x^3 + 50x^2y \\ +19xy^2 - 10y^3 - 10x^4 - 10x^3y + x^2y^2 - 10xy^3 + 10y^4 \end{pmatrix}, \\ \dot{y} = y \begin{pmatrix} 40 - 20x - 80y - 20x^2 + 80y^2 + 30x^3 + 19x^2y + 10xy^2 \\ -40y^3 - 10x^4 - 10x^3y + x^2y^2 - 10xy^3 + 10y^4 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (2.3.9)$$

Ce système admet un cycle limite algébrique, stable et hyperbolique donné par l'expression :

$$-10(x-1)^2 - 10(y-1)^2 + xy = 0.$$

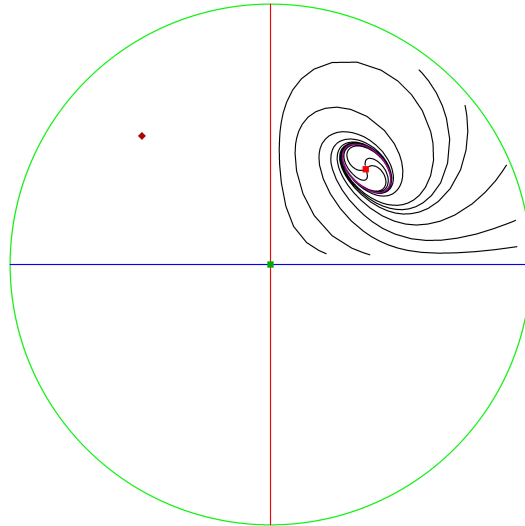


Figure 2.4. *Le portrait de phase dans le disque de Poincaré du système (2.3.9), montrant un cycle limite dans le premier quadrant.*

2.4 Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons construit un système de Kolmogorov qui admet une conique comme courbe invariante. Sous des hypothèses appropriées, nous avons obtenu une ellipse sous sa forme réduite ensuite nous avons prouvé qu'il s'agit d'un cycle limite hyperbolique.

Dans la seconde partie, nous avons construit une classe de systèmes de type Kolmogorov ayant $(1, 1)$ comme point singulier. A l'aide d'une translation de vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de l'écriture en coordonnées polaires du système obtenu et grâce à l'expression de l'intégrale première, nous avons montré que cette classe admette un cycle limite hyperbolique non algébrique.

Chapitre 3

Coexistence de trois cycles limites pour une classe de systèmes septique

Sommaire

| | | |
|------------|------------------------------------|-----------|
| 3.1 | Introduction | 55 |
| 3.2 | Intégrabilité | 57 |
| 3.3 | Existence de cycles limites | 58 |
| 3.3.1 | Résultat principal | 59 |
| 3.3.2 | Lemmes préliminaires | 61 |
| 3.3.3 | Preuve du résultat principal | 65 |
| 3.4 | Exemples d'applications | 74 |
| 3.5 | Conclusion | 77 |

3.1 Introduction

L'existence de cycles limites est intéressante et très importante pour comprendre la dynamique des systèmes différentiels polynomiaux.

Pour un système donné, il est très difficile de connaître le nombre de cycles limites et de savoir s'ils sont algébriques ou non, ainsi que la détermination de leurs expressions explicites.

Au début, les expressions explicites des cycles limites existantes étaient algébriques, ce n'est qu'après 2006, qu'il est devenu possible de trouver des expressions explicites de cycles limites non algébriques.

En 2006, *J. Giné et M. Grau* [27] ont donné les expressions explicites de cycles limites algébriques et non algébriques d'un système différentiel de degré 9 entourant le même point singulier. Récemment, *A. Bebdjeddou et R. Cheurfa* [5] ont montré la coexistence de deux cycles limites, l'un algébrique et l'autre non algébrique pour un système de degré 5 en précisant leurs expressions explicites.

Dans ce chapitre, nous traitons une classe des systèmes différentiels planaires de degré sept de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} \gamma^2 x + x(\gamma - x^2 - y^2)(\lambda - x^2 - y^2)(\alpha x^2 - 4\beta xy + \alpha y^2) + \\ (x^2 + y^2) \left(2\gamma(-x - \lambda y) + (x^2 + y^2)(x + 4\gamma y) - 2y(x^2 + y^2)^2 \right) \end{pmatrix}, \\ \dot{y} = \begin{pmatrix} \gamma^2 y + y(\gamma - x^2 - y^2)(\lambda - x^2 - y^2)(\alpha x^2 - 4\beta xy + \alpha y^2) + \\ (x^2 + y^2) \left(2\gamma(\lambda x - y) + (x^2 + y^2)(-4\gamma x + y) + 2x(x^2 + y^2)^2 \right) \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

où α, β, γ et λ sont des paramètres réels avec $\alpha \neq 0$. Grâce à des conditions appropriées, nous prouvons l'existence de trois cycles limites, deux d'entre eux sont non-algébriques tandis que le troisième est algébrique.

Afin de présenter notre résultat principal, on applique le changement de variables en coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, le système (3.1.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r^2 - \gamma) \left((\alpha - 2\beta \sin 2\theta) r^4 + (1 - \lambda(\alpha - 2\beta \sin 2\theta)) r^2 - \gamma \right), \\ \dot{\theta} = 2r^2 (r^4 - 2\gamma r^2 + \lambda\gamma). \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Proposition 3.1. *Dans les cas $\lambda < \gamma < 0$ et $\lambda > \gamma > 0$, le système (3.1.1) admet l'unique point singulier $(0, 0)$.*

Preuve. C'est clair que $(0, 0)$ est un point singulier.

Pour l'unicité, on suppose qu'il existe un autre (x_0, y_0) . Nous remarquons que pour tout point singulier (x_0, y_0) du système, on a $x_0 Q(x_0, y_0) - y_0 P(x_0, y_0) = 0$, mais x et y sont liés

à $\dot{\theta}$ par $\dot{\theta} = \frac{xQ(x, y) - yP(x, y)}{x^2 + y^2}$, on déduit alors qu'à chaque point $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ on a $\dot{\theta} = 0$. Pour les deux cas $\lambda < \gamma < 0$ et $\lambda > \gamma > 0$, $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ est positif pour tout t . Cela signifie que $(0, 0)$ est le seul point d'équilibre du système (3.1.1).

De plus, les valeurs propres du système linéarisé associé vérifient $(\lambda - \gamma^2)^2 = 0$, ce qui assure que l'origine est un noeud instable. ■

Remarque 3.1. *Les orbites $(r(t), \theta(t))$ du système (3.1.2) ont la même orientation par rapport à $(x(t), y(t))$ du système (3.1.1).*

3.2 Intégrabilité

Le théorème suivant prouve l'intégrabilité du système (3.1.1).

Théorème 3.2. *Les systèmes (3.1.2) et (3.1.1) sont intégrables. Leurs intégrales premières sont données respectivement par :*

$$H_3(r, \theta) = r^2 \frac{(r^2 - \lambda)}{(r^2 - \gamma)} e^{-\alpha\theta - \beta(\cos 2\theta - 1)} - \int_0^\theta e^{-\alpha s - \beta(\cos 2s - 1)} ds,$$

$$I_3(x, y) = (x^2 + y^2) \frac{(x^2 + y^2 - \lambda)}{(x^2 + y^2 - \gamma)} e^{-\alpha(\arctan \frac{y}{x}) + 2\beta \frac{y^2}{x^2 + y^2}} - \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} e^{-\alpha s - \beta(\cos 2s - 1)} ds.$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_3}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{(r^2 - \lambda)}{(r^2 - \gamma)} \right) e^{-\alpha\theta - \beta(\cos 2\theta - 1)} \\ &= 2r \frac{(r^4 - 2\gamma r^2 + \lambda\gamma)}{(\gamma - r^2)^2} e^{-\alpha\theta - \beta(\cos 2\theta - 1)} \\ &= \frac{\dot{\theta}}{r(\gamma - r^2)^2} e^{-\alpha\theta - \beta(\cos 2\theta - 1)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H_3}{\partial \theta}(r, \theta) &= r^2 \frac{(r^2 - \lambda)}{(r^2 - \gamma)} \frac{\partial}{\partial \theta} (e^{-\alpha\theta - \beta(\cos 2\theta - 1)}) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\int_0^\theta e^{-\alpha s - \beta(\cos 2s - 1)} ds \right) \\
 &= -(\alpha - 2\beta \sin 2\theta) r^2 \frac{(r^2 - \lambda)}{(r^2 - \gamma)} e^{-\alpha\theta - \beta(\cos 2\theta - 1)} - e^{-\alpha\theta - \beta(\cos 2\theta - 1)} \\
 &= \frac{r^2 (\lambda - r^2) (\alpha - 2\beta \sin 2\theta) - (r^2 - \gamma)}{(r^2 - \gamma)} e^{-\alpha\theta - \beta(\cos 2\theta - 1)} \\
 &= \frac{(2\beta \sin 2\theta - \alpha) r^4 + (\lambda (\alpha - 2\beta \sin 2\theta) - 1) r^2 + \gamma}{(r^2 - \gamma)} e^{-\alpha\theta - \beta(\cos 2\theta - 1)} \\
 &= \frac{-\dot{r}}{r(\gamma - r^2)^2} e^{-\alpha\theta - \beta(\cos 2\theta - 1)},
 \end{aligned}$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned}
 \frac{dH_3}{dt}(r, \theta) &= \frac{\partial H_3}{\partial r}(r, \theta) \times \frac{dr}{dt} + \frac{\partial H_3}{\partial \theta}(r, \theta) \times \frac{d\theta}{dt} \\
 &= \dot{r} \frac{\dot{\theta}}{r(\gamma - r^2)^2} e^{-\alpha\theta - \beta(\cos 2\theta - 1)} + \dot{\theta} \frac{-\dot{r}}{r(\gamma - r^2)^2} e^{-\alpha\theta - \beta(\cos 2\theta - 1)} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Alors H_3 est une intégrale première du système (3.1.2). De plus, on a :

$$r^2 = x^2 + y^2, \theta = \arctan \frac{y}{x} \text{ et } \cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1}.$$

Ce qui implique que :

$$\cos \left(2 \arctan \frac{y}{x} \right) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Par la substitution dans l'expression de H_3 , on obtient :

$$I_3(x, y) = (x^2 + y^2) \frac{(x^2 + y^2 - \lambda)}{(x^2 + y^2 - \gamma)} e^{-\alpha(\arctan \frac{y}{x}) + 2\beta \frac{y^2}{x^2 + y^2}} - \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} e^{-\alpha s - \beta(\cos 2s - 1)} ds$$

qui représente une intégrale première du (3.1.1). ■

3.3 Existence de cycles limites

Dans ce qui suit, nous présentons notre résultat principal sur les cycles limites du système planaire défini par (3.1.1).

Par souci de commodité, nous utilisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
 A &= e^{2\pi\alpha+\beta} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds, \\
 B_1 &= \frac{1}{2(1 - e^{2\pi\alpha})} \left(A + \lambda(1 - e^{2\pi\alpha}) - \frac{|\alpha|}{\alpha} \sqrt{(A + \lambda(1 - e^{2\pi\alpha}))^2 - 4\gamma(1 - e^{2\pi\alpha})A} \right), \\
 B_2 &= \frac{1}{2(1 - e^{2\pi\alpha})} \left(A + \lambda(1 - e^{2\pi\alpha}) + \frac{|\alpha|}{\alpha} \sqrt{(A + \lambda(1 - e^{2\pi\alpha}))^2 - 4\gamma(1 - e^{2\pi\alpha})A} \right), \\
 M(\theta) &= e^{\alpha\theta + \beta \cos(2\theta)} \left(\frac{e^{2\pi\alpha}}{1 - e^{2\pi\alpha}} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds + \int_0^\theta e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds \right), \\
 C_1 &= \frac{1}{2} \left(M(\theta) + \lambda + \sqrt{(M(\theta) + \lambda)^2 - 4\gamma M(\theta)} \right), \\
 C_2 &= \frac{1}{2} \left(M(\theta) + \lambda - \sqrt{(M(\theta) + \lambda)^2 - 4\gamma M(\theta)} \right).
 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

3.3.1 Résultat principal

Théorème 3.3. *Considérons le système polynomial (3.1.1), alors les assertions suivantes sont vraies :*

(I) *Si $\lambda > \gamma > 0$, le système (3.1.1) admet*

$$r^2(\theta) = \gamma \tag{3.3.2}$$

comme cycle limite hyperbolique, instable lorsque $\alpha < 0$ et stable lorsque $\alpha > 0$. De plus,

(i) *Lorsque $\alpha < 0$, le système (3.1.1) admet deux autres cycles limites stables, hyperboliques qui sont non algébriques pour $\beta \neq 0$ et algébriques pour $\beta = 0$ explicitement donnés en coordonnées polaires (r, θ) par :*

$$\begin{aligned}
 r_1(\theta, r_1^*) &= \sqrt{C_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M(\theta) + \lambda + \sqrt{(M(\theta) + \lambda)^2 - 4\gamma M(\theta)}}, \\
 \text{et} \\
 r_2(\theta, r_2^*) &= \sqrt{C_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M(\theta) + \lambda - \sqrt{(M(\theta) + \lambda)^2 - 4\gamma M(\theta)}},
 \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

avec

$$r_1^* = \sqrt{B_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{1}{1-e^{2\pi\alpha}}(A + \lambda(1 - e^{2\pi\alpha})) + \sqrt{(A + \lambda(1 - e^{2\pi\alpha}))^2 - 4\gamma(1 - e^{2\pi\alpha})A}},$$

et

$$r_2^* = \sqrt{B_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{1}{1-e^{2\pi\alpha}}(A + \lambda(1 - e^{2\pi\alpha})) - \sqrt{(A + \lambda(1 - e^{2\pi\alpha}))^2 - 4\gamma(1 - e^{2\pi\alpha})A}}.$$

(ii) Lorsque $\alpha > 0$, le système (3.1.1) admet un autre cycle limite instable, hyperbolique et non-algébrique pour $\beta \neq 0$ et algébrique pour $\beta = 0$ explicitement donné en coordonnées polaires (r, θ) par :

$$r_1(\theta, r_1^*) = \sqrt{C_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M(\theta) + \lambda + \sqrt{(M(\theta) + \lambda)^2 - 4\gamma M(\theta)}}, \quad (3.3.4)$$

avec

$$r_1^* = \sqrt{B_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{1}{1-e^{2\pi\alpha}} \left(A + \lambda(1 - e^{2\pi\alpha}) - \sqrt{(A + \lambda(1 - e^{2\pi\alpha}))^2 - 4\gamma(1 - e^{2\pi\alpha})A} \right)}.$$

(II) Si $\lambda < \gamma < 0$, deux cas en découlent :

(i) Lorsque $\alpha < 0$, le système (3.1.1) admet un cycle limite stable, hyperbolique et non algébrique pour $\beta \neq 0$ et algébrique pour $\beta = 0$ explicitement donné en coordonnées polaires (r, θ) par :

$$r_1(\theta, r_1^*) = \sqrt{C_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M(\theta) + \lambda + \sqrt{(M(\theta) + \lambda)^2 - 4\gamma M(\theta)}}, \quad (3.3.5)$$

avec

$$r_1^* = \sqrt{B_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{1}{1-e^{2\pi\alpha}} \left(A + \lambda(1 - e^{2\pi\alpha}) + \sqrt{(A + \lambda(1 - e^{2\pi\alpha}))^2 - 4\gamma(1 - e^{2\pi\alpha})A} \right)}.$$

(ii) Lorsque $\alpha > 0$, le système (3.1.1) n'a pas d'orbites périodiques.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : Dans la sous-section 3.2, nous présentons les lemmes importants requis dans la démonstration de notre résultat. La preuve du théorème 3.2. est donnée dans la sous-section 3.3. Quelques exemples sont présentés dans la section 4 pour illustrer l'applicabilité de notre résultat.

3.3.2 Lemmes préliminaires

Afin de prouver le théorème 3.3., nous introduisons les lemmes suivants :

Lemme 3.4. *Dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, on a : $\alpha M(\theta) < 0$ ($\alpha \neq 0$).*

Preuve du lemme 3.4.. Si $\alpha < 0$, alors $(1 - e^{2\pi\alpha}) > 0$, par conséquent $M(\theta) > 0$. Si $\alpha > 0$, on a :

$$\int_0^\theta e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds \leq \int_0^{2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds \text{ pour tous } \theta \in [0, 2\pi],$$

ce qui entraîne que

$$M(\theta) \leq e^{\alpha\theta + \beta \cos(2\theta)} \left(\frac{1}{1 - e^{2\pi\alpha}} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds \right) < 0.$$

■

Lemme 3.5. *Pour les fonctions B_1 and B_2 définies dans (3.3.1), quatre cas se présentent :*

- 1) Lorsque $\lambda > \gamma > 0$ et $\alpha < 0$, on a: $B_1, B_2 > 0$,
- 2) Lorsque $\lambda > \gamma > 0$ et $\alpha > 0$, on a: $B_1 > 0$ et $B_2 < 0$,
- 3) Lorsque $\lambda < \gamma < 0$ et $\alpha < 0$, on a: $B_1 > 0$ et $B_2 < 0$,
- 4) Lorsque $\lambda < \gamma < 0$ et $\alpha > 0$, on a: $B_1, B_2 < 0$.

Preuve du lemme 3.5..

1) Si $\lambda > \gamma > 0$ et $\alpha < 0$, alors

$$(1 - e^{2\pi\alpha}) > 0 \text{ et } A + \lambda(1 - e^{2\pi\alpha}) > 0,$$

ce qui entraîne que

$$B_2 > 0 \text{ et } (A + \lambda(1 - e^{2\pi\alpha}))^2 - 4\gamma(1 - e^{2\pi\alpha})A < (A + \lambda(1 - e^{2\pi\alpha}))^2,$$

par conséquent :

$$B_2 > 0 \text{ et } \sqrt{(A + \lambda(1 - e^{2\pi\alpha}))^2 - 4\gamma(1 - e^{2\pi\alpha})A} < A + \lambda(1 - e^{2\pi\alpha}),$$

d'où

$$B_1 > 0 \text{ et } B_2 > 0.$$

Les preuves des assertions 2), 3) et 4) sont semblables à celles de la première assertion. ■

Nous avons les mêmes resultats du lemme précédent pour les fonctions C_1 et C_2 .

Lemme 3.6. *Pour les fonctions C_1 et C_2 définies dans (3.3.1), on a les quatre cas suivants:*

- 1) Lorsque $\lambda > \gamma > 0$ et $\alpha < 0$, on a: $C_1, C_2 > 0$,
- 2) Lorsque $\lambda > \gamma > 0$ et $\alpha > 0$, on a: $C_1 > 0$ et $C_2 < 0$,
- 3) Lorsque $\lambda < \gamma < 0$ et $\alpha < 0$, on a: $C_1 > 0$ et $C_2 < 0$,
- 4) Lorsque $\lambda < \gamma < 0$ et $\alpha > 0$, on a: $C_1, C_2 < 0$.

Preuve du lemme 3.6..

3) Si $\lambda < \gamma < 0$ et $\alpha < 0$, alors d'après le lemme (3.4.)

$$M(\theta) > 0 \text{ et } \gamma M(\theta) < 0.$$

On distingue deux cas :

i) $M(\theta) + \lambda < 0$,

on a :

$$C_2 < 0 \text{ et } (M(\theta) + \lambda)^2 - 4\gamma M(\theta) > (M(\theta) + \lambda)^2,$$

ce qui implique

$$C_2 < 0 \text{ et } \sqrt{(M(\theta) + \lambda)^2 - 4\gamma M(\theta)} > -(M(\theta) + \lambda),$$

d'où

$$C_1 > 0 \text{ et } C_2 < 0.$$

ii) $M(\theta) + \lambda > 0$,

on a :

$$C_1 > 0 \text{ et } (M(\theta) + \lambda)^2 - 4\gamma M(\theta) > (M(\theta) + \lambda)^2,$$

ce qui implique

$$C_1 > 0 \text{ et } \sqrt{(M(\theta) + \lambda)^2 - 4\gamma M(\theta)} > (M(\theta) + \lambda),$$

d'où

$$C_1 > 0 \text{ et } C_2 < 0.$$

Les preuves des assertions 1), 2) et 4) sont semblables à celles de la troisième assertion. ■

Lemme 3.7. *La fonction $M(\theta)$ définie dans (3.3.1) est une fonction 2π -périodique.*

Preuve du lemme 3.7.. Nous avons :

$$M(\theta + 2\pi) = e^{2\pi\alpha + \alpha\theta + \beta \cos(2\theta)} \left(\frac{e^{2\pi\alpha}}{1 - e^{2\pi\alpha}} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds + \int_0^{\theta+2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds \right),$$

il s'ensuit que

$$M(\theta + 2\pi) = e^{2\pi\alpha} e^{\alpha\theta + \beta \cos(2\theta)} \left(\frac{e^{2\pi\alpha}}{1 - e^{2\pi\alpha}} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds + \int_0^{2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds + \int_{2\pi}^{\theta+2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds \right),$$

c'est à dire

$$M(\theta + 2\pi) = e^{2\pi\alpha} e^{\alpha\theta + \beta \cos(2\theta)} \left(\left(\frac{e^{2\pi\alpha}}{1 - e^{2\pi\alpha}} + 1 \right) \int_0^{2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds + \int_{2\pi}^{\theta+2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds \right),$$

par changement de variable $u = s - 2\pi$, on obtient :

$$\int_{2\pi}^{\theta+2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds = e^{-2\pi\alpha} \int_0^{\theta} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds,$$

par suite

$$M(\theta + 2\pi) = e^{\alpha\theta + \beta \cos(2\theta)} \left(\frac{e^{2\pi\alpha}}{1 - e^{2\pi\alpha}} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds + e^{2\pi\alpha} e^{-2\pi\alpha} \int_0^{\theta} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds \right),$$

donc

$$M(\theta + 2\pi) = M(\theta).$$

D'où $M(\theta)$ est une fonction 2π -périodique. ■

Lemme 3.8. *Les fonctions C_1 et C_2 définies dans (3.3.1) vérifient les assertions suivantes:*

- 1) Si $\lambda < \gamma < 0$, alors $C_1 - \gamma > 0$,
- 2) Si $\lambda > \gamma > 0$ alors on a :
 - i) $C_1 - \gamma > 0$ lorsque $\alpha > 0$,
 - ii) $C_1 - \gamma > 0$ et $C_2 - \gamma < 0$ lorsque $\alpha < 0$.

Preuve du lemme 3.8..

- 1) Si $\lambda < \gamma < 0$, D'après le lemme 3.6., $C_1 > 0$, alors $C_1 - \gamma > 0$.

2) Pour le cas $\lambda > \gamma > 0$,

Selon (3.3.1), on a :

$$\begin{cases} C_1 - \lambda = \frac{1}{2} \left(M(\theta) - \lambda + \sqrt{(M(\theta) - \lambda)^2 + 4(\lambda - \gamma)M(\theta)} \right), \\ \text{et} \\ C_2 - \lambda = \frac{1}{2} \left(M(\theta) - \lambda - \sqrt{(M(\theta) - \lambda)^2 + 4(\lambda - \gamma)M(\theta)} \right). \end{cases}$$

Il est facile de voir que

$$\frac{C_1 - \lambda}{C_1 - \gamma} C_1 = \frac{C_2 - \lambda}{C_2 - \gamma} C_2 = M.$$

On distingue deux cas :

i) Lorsque $\alpha > 0$, du lemme 3.4., la fonction $M(\theta)$ est négative ce qui implique que $(M(\theta) - \lambda)$ est aussi négative et $\text{sign}(C_1 - \gamma) = -\text{sign}(C_1 - \lambda)$. Donc

$$\sqrt{(M(\theta) - \lambda)^2 + 4(\lambda - \gamma)M(\theta)} < \sqrt{(M(\theta) - \lambda)^2} = |M(\theta) - \lambda| = \lambda - M(\theta),$$

ce qui entraîne que

$$C_1 - \lambda < 0,$$

d'où

$$C_1 - \gamma > 0.$$

ii) Lorsque $\alpha < 0$, du lemme 3.4., la fonction $M(\theta)$ est positive ce qui implique que $\text{sign}(C_1 - \gamma) = -\text{sign}(C_1 - \lambda)$ et $\text{sign}(C_2 - \gamma) = \text{sign}(C_2 - \lambda)$. Donc

$$\begin{cases} \sqrt{(M(\theta) - \lambda)^2 + 4(\lambda - \gamma)M(\theta)} > \sqrt{(M(\theta) - \lambda)^2} = |M(\theta) - \lambda|, \\ \text{et} \\ -\sqrt{(M(\theta) - \lambda)^2 + 4(\lambda - \gamma)M(\theta)} < -|M(\theta) - \lambda|, \end{cases}$$

ce qui entraîne que

$$\begin{cases} C_1 - \lambda > \frac{1}{2} (M(\theta) - \lambda + |M(\theta) - \lambda|) = \begin{cases} M(\theta) - \lambda & \text{si } M(\theta) - \lambda > 0, \\ 0 & \text{si } M(\theta) - \lambda \leq 0, \end{cases} \\ \text{et} \\ C_2 - \lambda < \frac{1}{2} (M(\theta) - \lambda - |M(\theta) - \lambda|) = \begin{cases} 0 & \text{si } M(\theta) - \lambda \geq 0, \\ M(\theta) - \lambda & \text{si } M(\theta) - \lambda < 0, \end{cases} \end{cases}$$

d'où

$$C_1 - \gamma > 0 \text{ et } C_2 - \gamma < 0.$$

■

3.3.3 Preuve du résultat principal

Preuve de l'assertion I) du théorème 3.3.

Il est facile de vérifier que le système (3.1.1) possède

$$(\Gamma) : x^2 + y^2 = \gamma. \tag{3.3.6}$$

comme courbe invariante algébrique avec le cofacteur

$$K(x, y) = 2(x^2 + y^2) \left(\alpha(x^2 + y^2)^2 + (1 - \alpha\lambda)(x^2 + y^2) - 4\beta xy(x^2 + y^2 - \lambda) - \gamma \right).$$

Dans le cas $\lambda > \gamma > 0$, il est clair que (Γ) est une solution périodique de (3.1.1). Soit T la période de cette solution.

Montrons maintenant que (Γ) est un cycle limite hyperbolique. Pour ce faire, il suffit de montrer que $\int_0^T \text{div}(\Gamma) dt \neq 0$, voir [45]. En utilisant le théorème 3 dans [26], on a :

$$\int_0^T \text{div}(\Gamma) dt = \int_0^T K(x, y) dt .$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \int_0^T \text{div}(\Gamma) dt &= \int_0^T 2(x^2 + y^2) \left(\alpha(x^2 + y^2)^2 + (1 - \alpha\lambda)(x^2 + y^2) - 4\beta xy(x^2 + y^2 - \lambda) - \gamma \right) dt \\ &= \oint_{\Gamma} \frac{2(x^2 + y^2) \left(\alpha(x^2 + y^2)^2 + (1 - \alpha\lambda)(x^2 + y^2) - 4\beta xy(x^2 + y^2 - \lambda) - \gamma \right)}{(\gamma^2 x + (x^2 + y^2)(2\gamma(-x - \lambda y) + (x^2 + y^2)(x + 4\gamma y) - 2y(x^2 + y^2)^2))} dx. \end{aligned}$$

Remarquons que $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = \gamma\} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / -\sqrt{\gamma} \leq x \leq \sqrt{\gamma} \text{ et } y = -\sqrt{\gamma - x^2} \right\}, \\ \Gamma_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / -\sqrt{\gamma} \leq x \leq \sqrt{\gamma} \text{ et } y = \sqrt{\gamma - x^2} \right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \operatorname{div}(\Gamma) dt &= \oint_{\Gamma_1} \frac{2(x^2 + y^2) \left(\alpha(x^2 + y^2)^2 + (1 - \alpha\lambda)(x^2 + y^2) - 4\beta xy(x^2 + y^2 - \lambda) - \gamma \right)}{(\gamma^2 x + (x^2 + y^2)(2\gamma(-x - \lambda y) + (x^2 + y^2)(x + 4\gamma y) - 2y(x^2 + y^2)^2))} dx \\
 &\quad + \oint_{\Gamma_2} \frac{2(x^2 + y^2) \left(\alpha(x^2 + y^2)^2 + (1 - \alpha\lambda)(x^2 + y^2) - 4\beta xy(x^2 + y^2 - \lambda) - \gamma \right)}{(\gamma^2 x + (x^2 + y^2)(2\gamma(-x - \lambda y) + (x^2 + y^2)(x + 4\gamma y) - 2y(x^2 + y^2)^2))} dx \\
 &= \int_{-\sqrt{\gamma}}^{\sqrt{\gamma}} \left(-\frac{4\beta}{\gamma}x - \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma - x^2}} \right) dx - \int_{-\sqrt{\gamma}}^{\sqrt{\gamma}} \left(-\frac{4\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma - x^2}} \right) dx \\
 &= -2\alpha \int_{-\sqrt{\gamma}}^{\sqrt{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{\gamma - x^2}} dx = -2\alpha \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{\gamma}} \Big|_{-\sqrt{\gamma}}^{\sqrt{\gamma}} \right) = -2\alpha\pi.
 \end{aligned}$$

Cette solution est donc un cycle limite algébrique, hyperbolique et stable lorsque $\alpha > 0$ et instable lorsque $\alpha < 0$; voir [45].

D'autre part, Dans la région $r^2 \neq \gamma$ et par le théorème 3.2., les solutions du système (3.1.2) sont exprimées comme suit :

$$\frac{(r^2 - \lambda)r^2}{r^2 - \gamma} - M = 0, \quad (3.3.7)$$

avec

$$M(\theta) = e^{\alpha\theta + \beta \cos(2\theta)} \left(k + \int_0^\theta e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds \right), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Par le changement de variable $\rho = r^2$, l'équation(3.3.7) devient :

$$\frac{\rho - \lambda}{\rho - \gamma} \rho - M = 0, \quad (3.3.8)$$

qui admet les deux solutions :

$$\begin{cases} \rho_1(\theta) = \frac{1}{2} \left(M(\theta) + \lambda + \sqrt{(M(\theta) + \lambda)^2 - 4\gamma M(\theta)} \right), \\ \text{et} \\ \rho_2(\theta) = \frac{1}{2} \left(M(\theta) + \lambda - \sqrt{(M(\theta) + \lambda)^2 - 4\gamma M(\theta)} \right). \end{cases} \quad (3.3.9)$$

Notons que le système (3.1.1) admet une solution périodique si et seulement si le système (3.1.2) possède une solution 2π -périodique strictement positive.

Par conséquent, dans la région $r^2 \neq \gamma$, le système (3.1.2) peut avoir au plus deux solutions

périodiques distinctes

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M(\theta) + \lambda + \sqrt{(M(\theta) + \lambda)^2 - 4\gamma M(\theta)}}, \\ \text{et} \\ r_2(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M(\theta) + \lambda - \sqrt{(M(\theta) + \lambda)^2 - 4\gamma M(\theta)}}. \end{array} \right. \quad (3.3.10)$$

Pour $\theta = 0$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M(0) + \lambda + \sqrt{(M(0) + \lambda)^2 - 4\gamma M(0)}}, \\ \text{et} \\ r_2(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M(0) + \lambda - \sqrt{(M(0) + \lambda)^2 - 4\gamma M(0)}}. \end{array} \right.$$

avec

$$M(0) = k \exp(\beta).$$

La condition de périodicité de la solution $r_1(\theta)$ (resp. $r_2(\theta)$) avec la condition initiale $r_1(0, r_1^*) = r_1^* > 0$ (resp. $r_2(0, r_2^*) = r_2^* > 0$) est donnée par :

$$r_1(0, r_1^*) = r_1(2\pi, r_1^*) \quad (\text{resp. } r_2(0, r_2^*) = r_2(2\pi, r_2^*)).$$

Pour $\theta = 2\pi$, on a :

$$r_1(2\pi, r_1^*) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M(2\pi) + \lambda + \sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)}} \\ \left(\text{resp. } r_2(2\pi, r_2^*) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M(2\pi) + \lambda - \sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)}} \right),$$

avec

$$M(2\pi) = e^{2\pi\alpha + \beta} \left(k + \int_0^{2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds \right)$$

où

$$k = \frac{(r_1^*)^2 - \lambda}{e^\beta ((r_1^*)^2 - \gamma)} (r_1^*)^2 \quad (\text{resp. } k = \frac{(r_2^*)^2 - \lambda}{e^\beta ((r_2^*)^2 - \gamma)} (r_2^*)^2).$$

Remarquons que $r_1(0, r_1^*) = r_1(2\pi, r_1^*)$ (resp. $r_2(0, r_2^*) = r_2(2\pi, r_2^*)$) implique que $M(2\pi) = M(0)$.

En résolvant les équations $r_1(0, r_1^*) = r_1(2\pi, r_1^*)$ et $r_2(0, r_2^*) = r_2(2\pi, r_2^*)$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1^* = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{1}{1 - e^{2\pi\alpha}} \left(A + \lambda(1 - e^{2\pi\alpha}) - \frac{|\alpha|}{\alpha} \sqrt{(A + \lambda(1 - e^{2\pi\alpha}))^2 - 4\gamma(1 - e^{2\pi\alpha})A} \right)}, \\ \text{et} \\ r_2^* = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{1}{1 - e^{2\pi\alpha}} \left(A + \lambda(1 - e^{2\pi\alpha}) + \frac{|\alpha|}{\alpha} \sqrt{(A + \lambda(1 - e^{2\pi\alpha}))^2 - 4\gamma(1 - e^{2\pi\alpha})A} \right)}, \end{array} \right. \quad (3.3.11)$$

avec

$$A = e^{2\pi\alpha + \beta} \int_0^{2\pi} e^{(-\alpha s - \beta \cos(2s))} ds > 0,$$

ce qui donne :

$$M(0) = \frac{(r_1^*)^2 - \lambda}{(r_1^*)^2 - \gamma} (r_1^*)^2 = \frac{(r_2^*)^2 - \lambda}{(r_2^*)^2 - \gamma} (r_2^*)^2 = \frac{A}{1 - e^{2\pi\alpha}},$$

et

$$k = \frac{A}{e^\beta (1 - e^{2\pi\alpha})} = \frac{e^{2\pi\alpha}}{1 - e^{2\pi\alpha}} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds.$$

Donc

$$M(\theta) = e^{\alpha\theta + \beta \cos(2\theta)} \left(\frac{e^{2\pi\alpha}}{1 - e^{2\pi\alpha}} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds + \int_0^\theta e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds \right), \quad (3.3.12)$$

qui est une fonction 2π -périodique (voir lemme 3.7.), d'où r_1 et r_2 sont aussi des fonctions 2π -périodiques.

Enfin, par les lemmes 3.5. et 3.6., lorsque $\alpha < 0$ on a :

$$B_1 > 0, B_2 > 0, C_1 > 0 \text{ et } C_2 > 0,$$

ce qui implique que

$$r_1^* > 0, r_2^* > 0, r_1 > 0 \text{ et } r_2 > 0.$$

Donc le système(3.1.2) admet deux solutions périodiques $r_1(\theta, r_1^*)$ et $r_2(\theta, r_2^*)$ données par (3.3.10).

Lorsque $\alpha > 0$, on a :

$$B_1 > 0, C_1 > 0, B_2 < 0 \text{ et } C_2 < 0,$$

ce qui implique que

$$r_1^* > 0, r_1 > 0 \text{ et } r_2^*, r_2 \text{ ne sont pas définis.}$$

Donc, le système (3.1.2) admet une solution périodique $r_1(\theta, r_1^*)$ donnée par (3.3.10) avec $M(\theta)$ défini dans (3.3.12).

Montrons que ces solutions périodiques $r_1(\theta, r_1^*)$ et $r_2(\theta, r_2^*)$ sont des cycles limites hyperboliques lorsque $\alpha < 0$ et $r_1(\theta, r_1^*)$ est un cycle limite hyperbolique lorsque $\alpha > 0$. Pour ce faire, nous présentons les fonctions de premier retour de Poincaré :

$$\left\{ \begin{array}{l} p \mapsto \Pi_1(p) = r_1(2\pi, p) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M(2\pi) + \lambda + \sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)}}, \\ \text{et} \\ p \mapsto \Pi_2(p) = r_2(2\pi, p) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M(2\pi) + \lambda - \sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)}}, \end{array} \right.$$

avec

$$M(2\pi) = e^{2\pi\alpha+\beta} \left(\frac{p^2 - \lambda}{e^\beta (p^2 - \gamma)} p^2 + \int_0^{2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds \right)$$

et montrons que les fonctions Π_1 et Π_2 vérifient $\left. \frac{d\Pi_1(p)}{dp} \right|_{p=r_1^*} \neq 1$ et $\left. \frac{d\Pi_2(p)}{dp} \right|_{p=r_2^*} \neq 1$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} (M(2\pi)) &= \frac{\partial}{\partial p} \left(e^{2\pi\alpha} \frac{p^2 - \lambda}{(p^2 - \gamma)} p^2 + e^{2\pi\alpha+\beta} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds \right) \\ &= \frac{2(p^4 - 2\gamma p^2 + \lambda\gamma)p}{(p^2 - \gamma)^2} e^{2\pi\alpha}, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que

$$\frac{\partial}{\partial p} ((M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)) = 2(M(2\pi) + \lambda - 2\gamma) \left(\frac{2(p^4 - 2\gamma p^2 + \lambda\gamma)p}{(p^2 - \gamma)^2} e^{2\pi\alpha} \right),$$

par suite,

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)} \right) = \frac{(M(2\pi) + \lambda - 2\gamma)}{\sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)}} \left(\frac{2(p^4 - 2\gamma p^2 + \lambda\gamma)p}{(p^2 - \gamma)^2} e^{2\pi\alpha} \right),$$

ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial p} \left(M(2\pi) + \lambda + \sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)} \right) \\ = \frac{M(2\pi) + \lambda + \sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)} - 2\gamma}{\sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)}} \frac{2(p^4 - 2\gamma p^2 + \lambda\gamma)p}{(p^2 - \gamma)^2} e^{2\pi\alpha}, \\ \text{et} \\ \frac{\partial}{\partial p} \left(M(2\pi) + \lambda - \sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)} \right) \\ - \left(M(2\pi) + \lambda - \sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)} \right) + 2\gamma \\ = \frac{2(p^4 - 2\gamma p^2 + \lambda\gamma)p}{\sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)}} \frac{e^{2\pi\alpha}}{(p^2 - \gamma)^2}, \end{array} \right.$$

par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial p} (\Pi_1(p)) = \frac{\sqrt{2} \left(M(2\pi) + \lambda + \sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)} - 2\gamma \right) (p^4 - 2\gamma p^2 + \lambda\gamma) p e^{2\pi\alpha}}{2\sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)} \sqrt{M(2\pi) + \lambda + \sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)} (p^2 - \gamma)^2}}, \\ \text{et} \\ \frac{\partial}{\partial p} (\Pi_2(p)) = \frac{\sqrt{2} \left(- \left(M(2\pi) + \lambda - \sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)} \right) + 2\gamma \right) (p^4 - 2\gamma p^2 + \lambda\gamma) p e^{2\pi\alpha}}{2\sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)} \sqrt{M(2\pi) + \lambda - \sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)} (p^2 - \gamma)^2}}. \end{array} \right.$$

D'autre part, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} M(2\pi)|_{p=r_1^*} = \frac{(r_1^*)^2 - \lambda}{(r_1^*)^2 - \gamma} (r_1^*)^2 \text{ et } \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M(2\pi) + \lambda + \sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)}} \Big|_{p=r_1^*} = r_1^*, \\ \text{et} \\ M(2\pi)|_{p=r_2^*} = \frac{(r_2^*)^2 - \lambda}{(r_2^*)^2 - \gamma} (r_2^*)^2 \text{ et } \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M(2\pi) + \lambda - \sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)}} \Big|_{p=r_2^*} = r_2^*, \end{array} \right.$$

ce qui entraîne que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)} \Big|_{p=r_1^*} = \frac{(r_1^*)^4 - 2\gamma (r_1^*)^2 + \lambda\gamma}{|(r_1^*)^2 - \gamma|}, \\ \text{et} \\ \sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)} \Big|_{p=r_2^*} = \frac{(r_2^*)^4 - 2\gamma (r_2^*)^2 + \lambda\gamma}{|(r_2^*)^2 - \gamma|}, \end{array} \right.$$

par suite,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial p} (\Pi_1(p)) \Big|_{p=r_1^*} = \frac{2\sqrt{2} ((r_1^*)^2 - \gamma) ((r_1^*)^4 - 2\gamma (r_1^*)^2 + \lambda\gamma) (r_1^*) e^{2\pi\alpha}}{2 \frac{(r_1^*)^4 - 2\gamma (r_1^*)^2 + \lambda\gamma}{|(r_1^*)^2 - \gamma|} \sqrt{2} (r_1^*) ((r_1^*)^2 - \gamma)^2}, \\ \text{et} \\ \frac{\partial}{\partial p} (\Pi_2(p)) \Big|_{p=r_2^*} = \frac{2\sqrt{2} (-(r_2^*)^2 + \gamma) ((r_2^*)^4 - 2\gamma (r_2^*)^2 + \lambda\gamma) (r_2^*) e^{2\pi\alpha}}{2 \frac{(r_2^*)^4 - 2\gamma (r_2^*)^2 + \lambda\gamma}{|(r_2^*)^2 - \gamma|} \sqrt{2} (r_2^*) ((r_2^*)^2 - \gamma)^2}. \end{array} \right.$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial p} (\Pi_1(p)) \Big|_{p=r_1^*} = \frac{|(r_1^*)^2 - \gamma| e^{2\pi\alpha}}{(r_1^*)^2 - \gamma}, \\ \text{et} \\ \frac{\partial}{\partial p} (\Pi_2(p)) \Big|_{p=r_2^*} = \frac{|(r_2^*)^2 - \gamma| e^{2\pi\alpha}}{\gamma - (r_2^*)^2}. \end{array} \right.$$

De plus, du lemme 3.8.,

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 - \gamma > 0 \quad \forall \alpha \neq 0, \\ \text{et} \\ C_2 - \gamma < 0 \quad \text{pour } \alpha < 0. \end{array} \right.$$

ce qui entraîne que

$$\left\{ \begin{array}{l} (r_1^*)^2 - \gamma > 0 \quad \forall \alpha \neq 0, \\ \text{et} \\ (r_2^*)^2 - \gamma < 0 \quad \text{pour } \alpha < 0. \end{array} \right.$$

Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial p} (\Pi_1(p)) \Big|_{p=r_1^*} = e^{2\pi\alpha} \quad \forall \alpha \neq 0, \\ \text{et} \\ \frac{\partial}{\partial p} (\Pi_2(p)) \Big|_{p=r_2^*} = e^{2\pi\alpha} \quad \text{pour } \alpha < 0. \end{array} \right.$$

En fin, dans le cas $\lambda > \gamma > 0$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial p} (\Pi_1(p)) \Big|_{p=r_1^*} = e^{2\pi\alpha} < 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial p} (\Pi_2(p)) \Big|_{p=r_2^*} = e^{2\pi\alpha} < 1 \quad \text{lorsque } \alpha < 0, \\ \text{et} \\ \frac{\partial}{\partial p} (\Pi_1(p)) \Big|_{p=r_1^*} = e^{2\pi\alpha} > 1 \quad \text{lorsque } \alpha > 0. \end{array} \right.$$

Donc, dans la région $r^2 \neq \gamma$, lorsque $\alpha < 0$, les deux solutions données par (3.3.10) du système (3.1.2) sont des cycles limites stables et hyperboliques. Par conséquent, ce sont des cycles limites stables et hyperboliques pour le système (3.1.1). Lorsque $\alpha > 0$, la solution $r_1(\theta, r_1^*)$ donnée par (3.3.10) du système (3.1.2) est instable et hyperbolique, voir [20]. Par conséquent, il s'agit d'un cycle limite instable et hyperbolique pour le système (3.1.1).

Pour distinguer le cycle limite algébrique du cycle limite non algébrique, nous devons discuter les deux cas $\beta \neq 0$ et $\beta = 0$.

i) Si $\beta \neq 0$, les cycles limites donnés par (3.3.10) sont non-algébriques, du fait de l'expression de $M(\theta)$.

Plus précisément, en coordonnées Cartésiennes $(r^2 = x^2 + y^2, \theta = \arctan \frac{y}{x})$, la courbe définie par ces cycles limites est

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - \lambda}{x^2 + y^2 - \gamma} (x^2 + y^2) - N(x, y) = 0,$$

avec

$$N(x, y) = \left(e^{\alpha \arctan(\frac{y}{x}) + \beta \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}} \right) \left(\frac{e^{2\pi\alpha}}{1 - e^{2\pi\alpha}} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds + \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds \right).$$

Il n'existe pas d'entier n pour lequel $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ et $\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$ s'annulent en même temps. On calcul par exemple $\frac{\partial f}{\partial y}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y \left((x^2 + y^2)^2 - \gamma(2x^2 + 2y^2 - \lambda) \right)}{(x^2 + y^2 - \gamma)^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} \left[(\alpha(x^2 + y^2) - 4\beta xy) N(x, y) + 1 \right].$$

Puisque $N(x, y)$ réapparaît, il restera à n'importe quel ordre de dérivation, donc la courbe $f(x, y) = 0$ est non-algébrique et les cycles limites du système (3.1.1) sont également non algébriques.

ii) Si $\beta = 0$, comme $\int_0^\theta e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds = \int_0^\theta e^{-\alpha s} ds = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\theta})$ et $\int_0^{2\pi} e^{-\alpha s} ds = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-2\pi\alpha})$, alors

$$M(\theta) = e^{\alpha\theta} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{e^{2\pi\alpha}}{1 - e^{2\pi\alpha}} (1 - e^{-2\pi\alpha}) + \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\theta}) \right) = \frac{-1}{\alpha}.$$

Par conséquent, en coordonnées Cartésiennes, lorsque $\alpha < 0$, les courbes définies par les deux cycles limites donnés par (3.3.10) sont

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{|\alpha|} \sqrt{\alpha^2 \lambda^2 + 2\alpha(2\gamma - \lambda) + 1} \right),$$

et

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{|\alpha|} \sqrt{\alpha^2 \lambda^2 + 2\alpha(2\gamma - \lambda) + 1} \right),$$

et sont algébriques.

Lorsque $\alpha > 0$, la courbe définie par le cycle limite $r_1(\theta, r_1^*)$ donnée par (3.3.10) est

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{|\alpha|} \sqrt{\alpha^2 \lambda^2 + 2\alpha(2\gamma - \lambda) + 1} \right),$$

et est algébrique. Ceci complète la preuve de l'assertion I) du théorème 3.2.. ■

Preuve de l'assertion II) du théorème 3.3..

Dans le cas $\lambda < \gamma < 0$, il est clair que $r^2 = \gamma$ n'est pas une solution du système (3.1.2). De plus, dans la région $r^2 \neq \gamma$, on distingue deux cas :

i) Lorsque $\alpha < 0$, en passant par les mêmes étapes de la preuve de l'assertion I) du théorème 3.2., on montre que le système (3.1.2) admet $r_1(\theta, r_1^*)$ comme solution périodique.

En effet, par les lemmes 3.5., 3.6. et 3.7.,

r_1^* et r_1 sont des solutions strictement positives et 2π - périodiques.

Montrons que cette solution périodique $r_1(\theta, r_1^*)$ est un cycle limite. Pour ce faire, nous présentons l'application de premier retour de Poincaré

$$p \mapsto \Pi_1(p) = r_1(2\pi, p) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{M(2\pi) + \lambda + \sqrt{(M(2\pi) + \lambda)^2 - 4\gamma M(2\pi)}},$$

avec

$$M(2\pi) = e^{2\pi\alpha + \beta} \left(\frac{p^2 - \lambda}{e^\beta (p^2 - \gamma)} p^2 + \int_0^{2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds \right)$$

et montrer que la fonction Π_1 vérifie $\left. \frac{d\Pi_1(p)}{dp} \right|_{p=r_1^*} \neq 1$, voir [20].

A partir de la preuve de l'assertion I) du théorème 3.2., on a :

$$\left. \frac{d\Pi_1(p)}{dp} \right|_{p=r_1^*} = e^{2\pi\alpha} < 1.$$

Alors, la solution $r_1(\theta, r_1^*)$ donnée par (3.3.10) du système (3.1.2) est stable et hyperbolique, voir [20], par conséquent, il s'agit d'un cycle limite stable et hyperbolique pour le système (3.1.1). De la partie précédente de la section 3, ce cycle limite est non algébrique pour $\beta \neq 0$ et algébrique pour $\beta = 0$.

ii) Lorsque $\alpha > 0$, $r_1(\theta, r_1^*)$ et $r_2(\theta, r_2^*)$ donnés par (3.3.10) ne sont pas définis. En effet, par les lemmes 3.5. et 3.6., C_1 et C_2 sont négatives. Par conséquent, il n'y a pas de solution périodique pour le système (3.1.1).

Ceci complète la preuve de l'assertion II) du théorème 3.2.. ■

3.4 Exemples d'applications

Dans cette section, nous présentons quelques exemples pour illustrer l'applicabilité de nos principaux résultats. Des tracés de portraits de phase sur le disque de Poincaré pour chaque exemple sont effectués.

Exemple 10. Dans le système (3.1.1), pour $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\lambda = -2$ et $\gamma = -1$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} x - 2x(-1 - x^2 - y^2)(-2 - x^2 - y^2)(x + y)^2 + \\ (x^2 + y^2)(-2(-x + 2y) + (x^2 + y^2)(x - 4y) - 2y(x^2 + y^2)^2) \end{pmatrix}, \\ \dot{y} = \begin{pmatrix} y - 2y(-1 - x^2 - y^2)(-2 - x^2 - y^2)(x + y)^2 + \\ (x^2 + y^2)(-2(-2x - y) + (x^2 + y^2)(4x + y) + 2x(x^2 + y^2)^2) \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Il admet un cycle limite non-algébrique, stable et hyperbolique donné par l'expression (3.3.5)

avec

$$A = e^{2\pi\alpha+\beta} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds \simeq 1.0208 \text{ et } r_1^* \simeq 0.7957,$$

comme indiqué sur le disque de Poincaré dans la **Figure 3.1** .

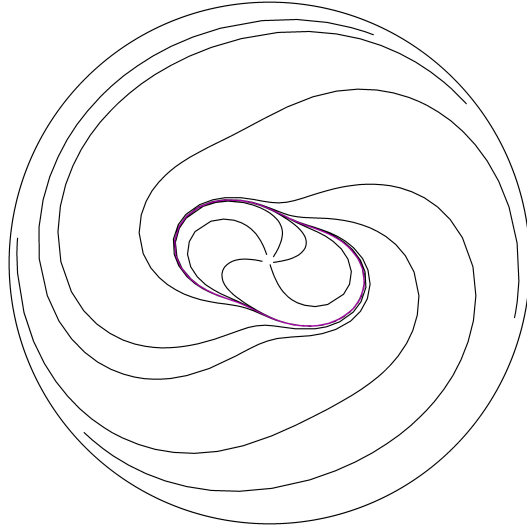


Figure 3.1. Le portrait de phase sur le disque de Poincaré du système (3.4.1), montrant un cycle limite.

Exemple 11. Dans le système (3.1.1), on prenant $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\lambda = 12$ et $\gamma = 0.5$, on obtient le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(\begin{array}{l} 0.25x + x(0.5 - x^2 - y^2)(12 - x^2 - y^2)(x^2 - 8xy + y^2) + \\ (x^2 + y^2) \left((-x - 12y) + (x^2 + y^2)(x + 2y) - 2y(x^2 + y^2)^2 \right) \end{array} \right), \\ \dot{y} = \left(\begin{array}{l} 0.25y + y(0.5 - x^2 - y^2)(12 - x^2 - y^2)(x^2 - 8xy + y^2) + \\ (x^2 + y^2) \left((12x - y) + (x^2 + y^2)(-2x + y) + 2x(x^2 + y^2)^2 \right) \end{array} \right), \end{cases} \quad (3.4.2)$$

qui admet deux cycles limites, l'un algébrique (Γ) : $x^2 + y^2 = 0.5$ et l'autre est non-algébrique et est donné par l'expression (3.3.4) avec

$$A = e^{2\pi\alpha+\beta} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds \simeq 6770.3 \text{ et } r_1^* \simeq 1.4850.$$

Le cycle limite algébrique (Γ) se situe à l'intérieur du cycle non-algébrique comme indiqué sur le disque de Poincaré dans la **Figure 3.2** .

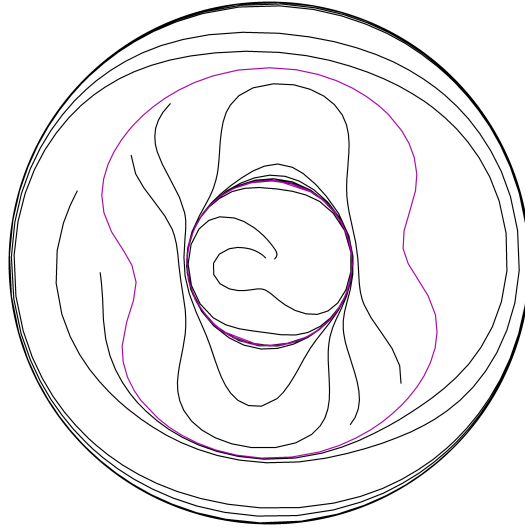


Figure 3.2. Le portrait de phase sur le disque de Poincaré du système (3.4.2), montrant deux cycles limites.

Exemple 12. Dans le système (3.1.1), on prend $\alpha = -0.6$, $\beta = 1.2$, $\lambda = 10$ et $\gamma = 0.4$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0.16x + x(0.4 - x^2 - y^2)(10 - x^2 - y^2)(-0.6x^2 - 4.8xy - 0.6y^2) + \\ (x^2 + y^2)(0.8(-x - 10y) + (x^2 + y^2)(x + 1.6y) - 2y(x^2 + y^2)^2) \end{pmatrix}, \\ \dot{y} = \begin{pmatrix} 0.16y + y(0.4 - x^2 - y^2)(10 - x^2 - y^2)(-0.6x^2 - 4.8xy - 0.6y^2) + \\ (x^2 + y^2)(0.8(10x - y) + (x^2 + y^2)(-1.6x + y) + 2x(x^2 + y^2)^2) \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (3.4.3)$$

Ce système admet trois cycles limites, l'un algébrique (Γ) : $x^2 + y^2 = 0.4$ et les autres sont non-algébriques et sont donnés par les expressions (3.3.3) avec

$$A = e^{2\pi\alpha+\beta} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha s - \beta \cos(2s)} ds \simeq 6.9407, \quad r_1^* \simeq 4.1154 \quad \text{et} \quad r_2^* \simeq 0.4096.$$

Le cycle limite algébrique (Γ) se trouve à l'intérieur des deux cycles non-algébriques comme indiqué sur le disque de Poincaré dans la **Figure 3.3**

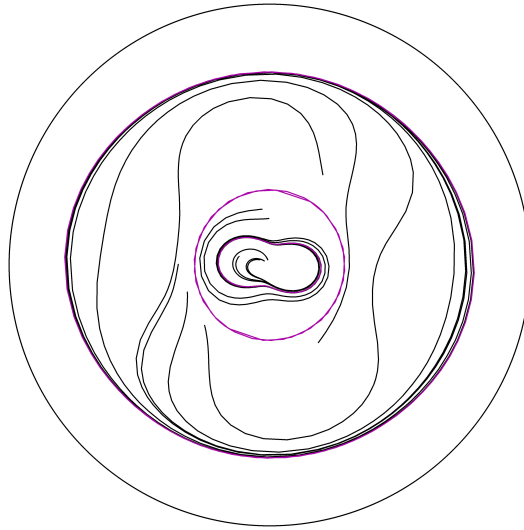


Figure 3.3. Le portrait de phase sur le disque de Poincaré du système (3.4.3), montrant trois cycles limites.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons construit une classe de systèmes différentiels planaires afin de montrer qu'ils admettent plus d'un cycle limite. Pour cela, nous avons montré que ce système admet un cercle comme courbe invariante qui s'avère être un cycle limite. À l'aide de l'écriture du système en coordonnées polaires, nous avons obtenu l'expression explicite de l'intégrale première, ce qui nous a conduit à deux autres cycles limites non algébriques.

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons réalisé une analyse qualitative de certaines classes de systèmes différentiels polynômiaux planaires non linéaires en étudiant l'intégrabilité et l'existence des cycles limites pour ces systèmes. Nous avons traité :

- i) Deux classes de systèmes différentiels planaires quintiques de type Kolmogorov, en donnant les expressions des intégrales premières de chacune d'elles, en montrant que la première classe possède un cycle limite algébrique tandis que la deuxième possède un cycle limite non algébrique, en précisant la forme explicite de chacune d'elles. À notre connaissance, c'est le premier système de Kolmogorov construit qui admet un cycle limite non algébrique explicite.
- ii) Une classe de systèmes différentiels planaires de degré sept possédant une intégrale première et pour laquelle on a montré sous certaines conditions l'existence de trois cycles limites. Deux d'entre eux sont non algébriques et l'autre est algébrique. Nous avons précisé leurs expressions explicites. À notre connaissance, il n'y a pas d'exemple de la sorte dans la littérature mathématique.

En perspective, nous envisageons de trouver :

- i) une classe de systèmes différentiels quadratiques qui admet un cycle limite non algébrique donné explicitement.
- ii) une classe des systèmes différentiels de Kolmogorov cubique ou quartique qui admet un cycle limite non algébrique donné explicitement.
- iii) une classe de systèmes différentiels de Kolmogorov qui présente plus d'un cycle limite non algébrique.
- iv) des domaines d'application pour les modèles étudiés.

Annexe - Programme P4

P4 "polynomial planar phase portraits" est un programme qui étudie un champ de vecteur polynomial planaire (ou bien système différentiel) de degré quelconque.

Le programme P4 fonctionne en C sous n'importe quel environnement UNIX et également en $C++$ sous environnement Windows. Il est important de posséder REDUCE uniquement pour UNIX et MAPLE pour les deux UNIX et Windows.

Ce programme détermine tous les points singuliers (finis ou infinis). Il localise également les points singuliers qui possèdent des séparatrices et les dessine en donnant une vision complète du portrait de phase global. Il est capable de chercher des cycles limites dans des régions spécifiques déterminées par l'utilisateur jusqu'à un certain degré de précision.

Pour plus de détails sur ce programme voir [20].

Bibliographie

- [1] V.I. Arnol'd, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Edition MIR, Moscow, 1980.
- [2] Al-Dosary Khalil I. T. *Non-algebraic limit cycles for parameterized planar polynomial systems*, Int. J. Math., Vol. 18, N° 2 (2007), 179-189.
- [3] A. Bendjeddou, A. Berbache and R. Cheurfa, *A class of Kolmogorov system with exact algebraic limit cycle*, Int. J. Diff. Equ. App., Vol. 14, N° 3 (2015), 159-165
- [4] A. Bendjeddou and R. Cheurfa, *Cubic and quartic planar differential system with exact algebraic limit cycles*, Elect. J. Diff. Equ., Vol 2011, N° 15 (2011), 1-12.
- [5] A. Bendjeddou and R. Cheurfa, *Coexistence of algebraic and non-algebraic limit cycles for quintic polynomial differential systems*, Elect. J. Diff. Equ., Vol 2017, N° 71 (2017), 1-7.
- [6] A. Bendjeddou and M. Grazem, *A class of quintique Kolmogorov systems with explicit non-algebraic limit cycle*, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., Vol. 12, N° 3 (2019), 285–297.
- [7] A. Bendjeddou, J. Llibre and T. Salhi, *Dynamics of the differential systems with homogenous nonlinearities and a star node*, J. Diff. Equ. Vol. 254 (2013), 3530-3537.
- [8] R. Benterki and J. Llibre, *Polynomial differential systems with explicit non-algebraic limit cycles*, Elect. J. Diff. Equ., Vol. 2012 (78) (2012), 1-6.
- [9] S. Benyoucef and A. Bendjeddou, *A class of Kolmogorov system with exact limit cycles*, Int. J. Pur. App. Math., Vol. 103 (4) (2015), 439-451.

-
- [10] S. Benyoucef and A. Bendjeddou, *Kolmogorov system with explicit hyperbolic limit cycle*, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., Vol. 10, N° 2 (2017), 216–222.
- [11] R. Boukoucha and A. Bendjeddou, *On the dynamics of a class of rational Kolmogorov systems*, J. Nonl. Math. Phy., Vol. 23, N° 1 (2016), 21-27.
- [12] F. H. Busse, *Transition to turbulence via the statistical limit cycle route*, Synergetics, Springer-Verlag, berlin, 1978.
- [13] L. Cairó, J. Llibre, *Phase portraits of cubic polynomial vector fields of Lotka–Volterra type having a rational first integral of degree 2*, J. Phys. A40 (2007), 6329–6348.
- [14] L. Cairó, H. Giacomini and J. Llibre, *Liouvilian first integrals for the planar Lotka–Volterra system*, Rend. Circ. Mat. Palermo 2 (5) (2003), 389–418
- [15] J. Cao and H. Jiang, *Planar polynomial vector fields having first integrals and algebraic limit cycles*, J. Math. Anal. App. 361 (2010), 177-186.
- [16] C. Christopher, Ch. Li, *On Limit Cycles of Differential Equations*, 2006, Advanced Course in Mathematics CRM Barcelona, 2007 Birkhäuser Verlag.
- [17] C. Chicone, *Ordinary Differential Equation With Application*, Spring-Verlag, Now York, 1999.
- [18] C.J. Christopher and J. Llibre. *Integrability via invariant algebraic curves for planar polynomial differential systems*. Ann. Diff. Equ. 16 (2000), 5–19.
- [19] G. Darboux, *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré*, Bull. Sc. Math. et astr. 2^e série, tome 2, N° 1 (1878), p. 60-96, p. 123-144, p. 151-200.
- [20] F. Dumortier, J. Llibre and J. Artés, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, (Universitex) Berlin, Springer (2006).
- [21] P. Gao, *Hamiltonian structure and first integrals for the Lotka–Volterra systems*, Phys. Lett. A 273 (2000), 85-96.

-
- [22] A. Gasull, H. Giacomini and J. Torregrosa, *Explicit non-algebraic limit cycles for polynomial systems*, J. Comput. Appl. Math. 200 (2007), 448-457.
- [23] A. Gasull, and J. Torregrosa, *Exact number of limit cycles for a family of rigid systems*, Proc. of the AMS 133 (2005), 751–758.
- [24] H. Giacomini, J. Llibre and M. Viano, *On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles*, Nonlinearity 9 (1996), 501-516.
- [25] J. Ch. Gille, P. Decaulne and M. Pelegrin, *Système asservis non linéaires, Méthode topologique Stabilité, Tome 3*, Dunod 1975.
- [26] J. Giné and M. Grau, *A note on : "Relaxation Oscillator with Exact Limit Cycles"*, J. Math. Anal. App. 324 (2006), 739-745.
- [27] J. Giné and M. Grau, *Coexistence of algebraic and non-algebraic limit cycles, explicitly given, using Riccati equations*. Nonlinearity 19 (2006), 1939-1950.
- [28] M. Grazem, A. Bendjeddou and R. Cheurfa, *Coexistence of Three Limit Cycles for a Septic Polynomial Differential Systems*, Int. J. Dyn. Sys. Diff. Equ., (Accepted pour publication).
- [29] D. Hilbert, *Mathematische Problem* (lecture), Second Internat. Congress Math. Paris, 1900, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.–Phys. Kl. (1900), 253–297.
- [30] D. Hilbert, *Mathematical problems*, Bull. Amer. Math. Soc. 8 (1902) 437-479.
- [31] Xun-Cheng Huang, *Limit cycles in a Kolmogorov-type Model*, Int. J. Math. and Math. Sci. Vol. 13, N° 3 (1990), 555-566.
- [32] Xun C. Huang and Lemin Zhu, *Limit cycles in a general Kolmogorov model*, Nonlinear Analysis 60 (2005) 1393 – 1414.
- [33] Y. S. Ilyashenko, *Finiteness theorems for limit cycles*, Trans. Amer. Math. Soc. (Providence, RI : AMS, 1991).

-
- [34] D.W. Jordan and P. Smith, *Nonlinear ordinary differential equation*, Oxford applied mathematics and computing science series, Seconde edition 1987.
- [35] J. Llibre, *Integrability of polynomial differential systems*, *Handbook of Differential equations, Ordinary Differential Equations*, vol. 1, Chap. 5, pp 437–531. Edited by A. Că-nada, P. Drábek and A. Fonda. Elsevier B.V. 2004.
- [36] J. Llibre and G. Rodríguez, *Configurations of limit cycles and planar polynomial vector fields*. *J. Diff. Equ.* 198 (2004), 374–380.
- [37] J. Llibre and T. Salhi, On the dynamic of a class of Kolmogorov systems, *App. Math. Comput.*, 225 (2013), 242-245.
- [38] J. Llibre and C. Valls, *Global analytic first integrals for the real planar Lotka–Volterra system*, *J. Math. Phys.* Vol. 48, N° 3 (2007), 033507-033507-13.
- [39] J. Llibre, J. Yu and X. Zhang, *On the limit Cycle of the Polynomial Differential Systems with a Linear Node and Homogeneous Nonlinearities*, *Int. Bifu. and Chaos*, Vol. 24, N° 5 (2014) 1450065.
- [40] G. Lavel and R. Pellat, *Plasma Physics, in: Proceedings of Summer School of Theoretical Physics*, Gordon and Breach, New York, 1975.
- [41] N. G. Llyod, J. M. Pearson, E Sáez and I. Szántó, *Limit cycles of a Cubic Kolmogorov System*, *Appl. Math. Lett.* Vol. 9, N° 1 (1996), 15-18.
- [42] N. G. Lloyd, J. M. Pearson, E Sáez and I. Szántó, *A Cubic Kolmogorov System with Six Limit Cycles*, *An Int. J. Comput. Math. with App.* 44 (2002), 445-455.
- [43] R.M. May, *Stability and complexity in Model Ecosystems*, Princeton, New Jersey, 1974.
- [44] K. Odani, *The limit cycle of the Van der Pol equation is not algebraic*, *J. Diff. Equ.* 115 (1995), 146-152.
- [45] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Third edition. Texts in Applied Mathematics, Vol. 7. Springer-Verlag, New York, 2001.

-
- [46] H. Poincaré, *Sur les courbes définies par une équation différentielle*, J. Math. Pures et App., série III, tome 7 (1881), 375-422.
- [47] H. Poincaré, *Sur les courbes définies par une équation différentielle*, J. Math. Pures et App., série III, tome 8 (1882), 251-296.
- [48] H. Poincaré, *Notice sur les Travaux Scientifiques de Henri Poincaré*, Paris : Gauthier-Villars, 1884.
- [49] H. Poincaré, *Sur l'intégration des équations différentielles du premier ordre et du premier degré I and II*, Rend. Circ. Mat. Palermo 5 (1891), 161-191; 11 (1897), 193-239.
- [50] E. Sáez and I. Szántó, *Coexistence of algebraic and non-algebraic limit cycles in Kukles systems*, Period. Math. Hungar., Vol. 56 (2008), 137-142.
- [51] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Second Edition, 1996.
- [52] V. Volterra, *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la vie*, Gauthier Villars, Paris, 1931.
- [53] Y. Wang, *The necessary and sufficient conditions for the existence of periodic orbits in a Lotka–Volterra system*, J. Math. Anal. App. 284 (2003) 236–249.
- [54] Y. Yuana, H. Chenc, Ch. Du, Y. Yuan, *The limit cycles of a general Kolmogorov system*, J. Math. Anal. App. 392 (2012) 225–237.
- [55] Ye Yanqian et al. *Theory of Limit Cycles*, Transl. Math. Monographs Vol. 66, Amer. Math. Soc., Providence, 1984.

ملخص

الهدف من هذه الرسالة هو الدراسة النوعية لبعض أصناف النظم التفاضلية كثيرات الحدود المستوية غير الخطية. قمنا بدراسة قابلية التكامل لهذه الأنظمة. ثم أثبتنا تحت شروط معينة، وجود دورات حد نهائية زائدية. بالإضافة إلى ذلك، تمكنا من تحديد التعبيرات الصريحة لكل التكاملات الأولية ودورات الحد (الجبرية وغير الجبرية) التي تم العثور عليها لجميع الأصناف المدروسة. وأخيرا، قدمنا بعض الأمثلة لتوضيح النتائج التي تم الحصول عليها لكل صنف.

كلمات المفاتيح: النظم التفاضلية كثيرات الحدود المستوية، النظم التفاضلية لكولموغروف، التكامل الأولي، حلول دورية، دورات حد نهائية جبرية وغير جبرية.

Résumé

L'objectif de cette thèse est l'étude qualitative de certaines classes des systèmes différentiels polynômiaux planaires non linéaires. L'intégrabilité de ces systèmes a été étudiée. Sous des conditions appropriées, l'existence des cycles limites hyperboliques a été prouvée.

De plus, nous avons pu déterminer les expressions explicites des intégrales premières et des cycles limites (algébriques et non algébriques) trouvés pour toutes les classes étudiées.

Enfin, quelques exemples ont été présentés pour illustrer les résultats obtenus pour chaque classe.

Mots-clés : Systèmes différentiels polynômiaux planaires, systèmes différentiels de Kolmogorov, intégrale première, solutions périodiques, cycles limites algébriques et non algébriques.

Abstract

The objective of this thesis is the qualitative study of some classes of nonlinear planar polynomial differential systems. The integrability of these systems has been studied. Under appropriate conditions, the existence of hyperbolic limit cycles has been proved.

In addition, we were able to determine the explicit expressions of the first integrals and limit cycles (algebraic and non-algebraic) found for all the classes studied.

Finally, some examples were presented to illustrate the results obtained for each class.

Keywords: Planar polynomial differential systems, Differential systems of Kolmogorov, First integral, Periodic orbits, algebraic and non-algebraic limit cycles.

MSC: 34A34, 34C05, 34C07, 34C25.