

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS-SETIF

MEMOIRE

Présenté à la Faculté des Sciences
Département de physique
Pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER

Option : Energétique et mécanique des fluides

Par

Mr. SOUALMI Hamou

THEME

**ÉTUDE DE LA CONVECTION NATURELLE
DANS UN RESERVOIR DE STOCKAGE DE GNL**

Soutenu le : 03 / 07 / 2007

Devant le jury :

Président :	Dr. M. Benkari	M. C	Université Ferhat Abbas Sétif
Rapporteur :	Dr. M. Chegaar	M. C	Université Ferhat Abbas Sétif
Examineur :	Dr. S. Nacef	M. C	Université Ferhat Abbas Sétif
Invité :	Dr. M. Guellal	C. C	Université Ferhat Abbas Sétif

Remerciements

Je voudrais d'abord présenter toute ma gratitude et mes sincères remerciements à tous ceux qui ont contribué de loin ou de près à la réalisation de ce travail, notamment :

Mon encadreur **Dr M. Chegaar** Maître de conférences à l'Université de Sétif, pour ses conseils judicieux durant toute la période de mon travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude au **Dr. M. Guellal**, qui m'a guidé et encouragé dans ce travail. Je tiens aussi à lui exprimer ma reconnaissance pour les conseils fructueux qu'il m'a prodigués, pour l'aide et le soutien qu'il m'a manifesté dans l'accomplissement de ce travail.

Le **Dr M. Benkari**, Maître de Conférence à l'Université de Sétif, m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury. Je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance.

Je remercie vivement le **Dr. S. Nacef**, Maître de Conférence à l'Université de Sétif, d'avoir accepté d'évaluer le présent travail.

Je ne peux oublier de remercier Messieurs **M. Charifi** et **A. Touabti** qui m'ont aidé tout au long de cette étude.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à ma famille qui m'a encouragé durant mes études.

Je remercie tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation.

Enfin, je désire remercier tous mes amis et toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Sommaire

Nomenclature	1
Introduction générale	4
Chapitre 1 : Revue bibliographique sommaire	7
Chapitre 2 : Etude descriptive du phénomène	13
1. Introduction	14
2. Liquéfaction du gaz naturel	14
3. Spécifications du GNL	14
4. Stockage du GNL	15
5. Sécurité dans l'industrie du GNL	17
5.1. Phénomène de la stratification	18
5.2. Causes de la stratification	18
5.3. Méthodes de prévention de la stratification du GNL	21
5.4. Exemple d'accident lié au Rollover	22
Chapitre 3 : Etude théorique du problème de convection dans un cylindre vertical	23
1. Introduction	24
2. Généralités et définitions	24
3. Formulation mathématique	24
3. 1. Hypothèses de calcul	25
3. 2. Equation de continuité	26
3. 3. Equation de conservation de la quantité de mouvement	26
3. 4. Equation de conservation de l'énergie	27
3. 5. Simplification des équations	29
3. 6. Conditions initiales et conditions aux limites	32
Chapitre 4 : Simulation numérique	35
1. Introduction	36
2. La méthode des différences finies	36
2. 1. Le maillage	36
2. 2. Approximations des dérivées par des différences finies	37
2. 3. Quelques schémas aux différences finies	38

3. Méthode des Directions Alternées ADI.....	40
4. Choix de la méthode ADI.....	42
4. 1. Consistance.....	42
4. 2. Stabilité.....	43
4. 3. Conclusion.....	45
5. Discrétisation des équations de vorticité et d'énergie.....	45
6. Discrétisation de l'équation de fonction de courant.....	49
Chapitre 5 : Résultats obtenus et discussions	51
1. Introduction.....	52
2. Comportement thermique et dynamique du fluide en régime variable	53
3. Analyse de l'influence des principaux paramètres sur l'écoulement a l'état stationnaire	69
3.1. Influence du nombre de Rayleigh	69
3.2. Influence de la géométrie de réservoir	69
3.3. Influence du nombre de Prandtl.....	71
Conclusion générale	82
Annexes :	85
Annexe1 : Présentation de l'algorithme T.D.M.A	86
Annexe 2 : Complément de résultats obtenus	88
Références bibliographiques	102

Nomenclature

a	diffusivité thermique [m^2s^{-1}]
C_p	capacité calorifique à pression constante [$\text{JKg}^{-1}\text{K}^{-1}$]
D	diamètre de réservoir [m]
\vec{F}	Force massique
F_0	fraction de flux d'évaporation par rapport aux flux thermique d'entrée
G	facteur d'amplification
g	l'accélération de pesanteur [ms^{-2}]
H	hauteur de réservoir [m]
h	pas d'espace
k	pas d'espace
P	Pression [Nm^{-2}]
P_0	pression de référence [Nm^{-2}]
P'	pression adimensionnelle
Pr	nombre de Prandtl, ν / a
q_0	densité de flux de chaleur horizontale [wm^{-2}]
q_1	densité de flux due à l'évaporation [wm^{-2}]
R	rayon de réservoir [m]
r	rayon adimensionnel
Ra	Nombre de Rayleigh $\frac{g\beta\Delta TH^3}{a\nu}$
t	temps [s]
t_0	temps de référence [s]
T	température [K]
U	la composante de vitesse selon l'axe ox [ms^{-1}]
u	composante de vitesse adimensionnelle selon or
v	composante de vitesse adimensionnelle selon oz
V	la composante de vitesse selon l'axe oy [ms^{-1}]
\vec{V}	Vecteur de vitesse [ms^{-1}]
V_0	vitesse de référence ms^{-1}
x	coordonné adimensionnelle selon l'axe ox
z	coordonné adimensionnelle selon l'axe oz

Les symboles grecs

β	coefficient de dilatation thermique [k^{-1}]
ΔT	température de référence [K]
λ	conductivité thermique [$\text{Wm}^{-1}\text{k}^{-1}$]
μ	viscosité dynamique [Nsm^{-2}]
ν	viscosité cinématique [m^2s^{-1}]
ρ	masse volumique [kgm^{-3}]
Ψ'	fonction de courant
Ψ	fonction de courant adimensionnelle
ω	vorticité
Ω'	vorticité modifié Rw
Ω	vorticité adimensionnel
τ	temps adimensionnel
θ	température adimensionnelle

Indices

i	itération sur x,r
j	itération sur z
n	itération sur t
max	maximum
min	minimum

Introduction générale

Le gaz naturel est un hydrocarbure gazeux représentant une source d'énergie très importante, compte tenu de sa forte consommation dans le monde. Avant qu'il arrive au consommateur, le gaz passe par un long trajet où il rencontre des transformations et des opérations compliquées telles que l'extraction, le traitement, la liquéfaction et le stockage.

Pour des raisons de stockage et de commerce, le gaz naturel doit être liquéfié ; cette opération consiste à rendre le gaz naturel liquide à $-160\text{ }^{\circ}\text{C}$, afin de réduire son volume initial de 600 fois après le traitement final. Grâce à cette caractéristique, il est possible de stocker à l'état liquide des quantités beaucoup plus importantes qu'à l'état gazeux, même à haute pression.

Pour stocker les gaz liquéfiés sous pression atmosphérique, la température du gaz doit être abaissée jusqu'à leur point d'ébullition par un système de réfrigération approprié. Les unités de stockage doivent comprendre des isolations thermiques performantes afin d'éviter le réchauffement du gaz réfrigéré.

Les réservoirs de stockage se caractérisent par leurs formes, leurs dimensions géométriques, la pression et la température du produit stocké qui est liée à sa pression par la loi de vapeur saturante.

Il est évident qu'au fur et à mesure que les matériaux isolants du réservoir sont de mauvaise qualité ou perdent leur efficacité (vieillessement, craquement, etc.), les gains de chaleur à travers les parois du réservoir provoquent une stratification thermique du GNL. En effet, dans un réservoir de stockage de GNL peut apparaître des couches ou des cellules en stratification de densités différentes. Par la suite, les entrées de chaleur dans le réservoir, les échanges de chaleur et de matière entre les cellules et enfin l'évaporation à la surface du liquide provoquent l'égalisation des masses volumiques des couches et finalement leur mélange. Ce brassage peut être accompagné d'une augmentation brutale du débit d'évaporation. Cette évaporation brutale et importante peut, dans certains cas, générer une augmentation de pression dans le réservoir et provoquer l'ouverture des soupapes de sécurité. Si ces dernières sont sous-dimensionnées, la cuve interne du réservoir peut être endommagée.

Le travail présenté dans ce mémoire, entre dans le cadre de la simulation numérique du transfert thermique par convection naturelle en régime instationnaire afin de prévoir l'évolution de la stratification et la dynamique du GNL impliquées dans le phénomène du Roll-over. L'objectif général est ici de proposer des méthodes

de résolution numérique, permettant d'obtenir une description qualitative et quantitative du phénomène étudié.

Dans l'étude bibliographique du chapitre 1, nous donnons un aperçu des divers travaux entrepris sur l'étude de la convection naturelle dans des cavités fermées, et plus particulièrement les méthodes numériques employées pour discrétisation et la résolution des équations différentielles en régime variable.

Le chapitre 2 décrit le phénomène du Rollover. Les principales caractéristiques, les différents procédés de liquéfaction, ainsi que les techniques de stockage du GNL y sont présentés. Nous présentons également les principales méthodes de prévention de la stratification du GNL.

Nous développons dans le chapitre 3 l'analyse mathématique utilisée pour modéliser le comportement du GNL dans le réservoir de stockage. Ce modèle prend en compte des transferts thermiques à l'intérieur du réservoir, et qui sont dus à un flux de chaleur horizontal traversant la surface latérale du cylindre.

Le chapitre 4 concerne la résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la fonction de courant, de vorticité, et d'énergie. Une comparaison entre quatre schémas aux différences finies y sera présentée. En montrant que la méthode des Directions Alternées ADI est la plus avantage, nous proposons son application pour la résolution des équations aux dérivées partielles établies au chapitre 3.

Dans le chapitre 5, nous présentons les résultats numériques pour diverses situations, afin de mettre en évidence l'effet des entrées de chaleur à travers les parois du réservoir sur le comportement dynamique et thermique du fluide. Dans ce même chapitre, nous proposons une analyse de l'influence des principaux paramètres intervenant dans les équations discrétisées. A savoir, le rapport de forme, le nombre de Rayleigh, et le nombre de Prandtl.

Chapitre 1

Revue bibliographique sommaire

1. INTRODUCTION

Dans différentes situations physiques et applications technologiques, la convection naturelle joue un rôle important puisqu'elle peut être à l'origine des écoulements de fluide et des échanges de chaleur et/ou de masse. L'importance de l'étude d'un tel phénomène, est dictée par le rôle qu'il joue dans divers secteurs industriels.

La convection naturelle est présente dans de nombreux procédés industriels et en particulier dans le stockage des hydrocarbures. La bonne connaissance des écoulements au niveau des parois, ainsi que celle des champs de température, nous permet d'évaluer les transferts d'énergie à travers ces parois plus ou moins adiabatiques et prédire le comportement thermique du produit stocké.

Ce phénomène d'écoulement naturel qui est provoqué par un gradient de densité dans un fluide placé dans un champ de gravité peut avoir pour origine un gradient de température, et dans le cas d'un fluide à plusieurs composants un gradient de concentration. Dans cette étude nous ne traiterons que la convection naturelle d'origine thermique. L'étude de la convection naturelle dans des cavités fermées a suscité de nombreux travaux de recherche, vu les exigences nouvelles en matière de connaissances des propriétés dynamiques et thermiques des fluides industriels.

2. REVUE BIBLIOTIQUE

A. Mark, All [1] ont étudié la convection naturelle en régime variable d'un fluide (pétrole brut chaud) contenu dans un réservoir de stockage cylindrique vertical placé dans un environnement froid. Les équations fondamentales de conservation sont résolues numériquement en utilisant les volumes de control de la méthode des différences finies. Des expériences sont réalisées sur un réservoir métallique de diamètre de 0.61 m contenant du pétrole brut chaud. Les essais expérimentaux sont comparés aux résultats de la simulation numérique, et une bonne concordance a été trouvée entre la température expérimentale et la température simulée pour des diverses positions du réservoir.

A. Ben Khalifa [2] lui aussi s'intéressait à la convection naturelle dans un cylindre verticale. Cette étude concerne une enceinte cylindrique dont ces parois latérale et supérieure sont isolées ; la paroi inférieure est froide ($T=0$) ; et l'enceinte contient un fluide de nombre de Prandtl $Pr = 0.71$. Pour la discrétisation des

équations, il a utilisé la méthode des volumes finis, et la résolution est faite à l'aide de l'algorithme SIMPLE (Semi Implicit Method For Pressure Linked Equations). Cette étude a permis de prédire l'influence de certains paramètres géométriques et physiques sur le comportement dynamique et thermique du fluide, et par conséquent, sur les performances de stockage et de stratification thermique dans la cuve.

Nous citons également les travaux de A. BENKHALIFA et M. BELHAMEL [3] qui concernent la simulation numérique de la convection naturelle en régime permanent dans une cuve cylindrique. Cette enceinte, de rapport d'aspect $H/D=0.5$, est utilisée dans le stockage à l'état liquide de l'hydrogène ($Pr=1.29$). La température de la paroi latérale supérieure est élevée par rapport à celle de sa paroi inférieure. Les différentes équations ont été discrétisées par la procédure numérique des volumes finis. Le système d'équations ainsi discrétisé a été résolu par l'algorithme SIMPLE (Semi-Implicit Méthod for Pressure Linked Equations). L'influence du nombre de Rayleigh ($10 < Ra < 5.10^5$) sur le transfert thermique et le champ dynamique a été analysée et des corrélations donnant le nombre de Nusselt moyen au niveau de la paroi latérale et inférieure ont été établies. Ils ont montré que plus le nombre de Rayleigh augmente plus la variation de la température, suivant le rayon tend vers zéro, ce qui favorise la stratification thermique.

M.S.KHELIFI TOUHAMI, All [4] ont étudié la convection naturelle en régime laminaire dans une cavité cylindrique. Cette enceinte contient du GNL de nombre (Prandtl $Pr=2$). La paroi supérieure est refroidie par évaporation d'un flux ϕ_{ev} . La paroi latérale est chauffée par un flux ϕ_l Φ_l . L'influence des paramètres caractérisant le système est analysée ($10^3 \leq Ra \leq 10^5$, $Al=1/3, 1/2, 1$). Les équations régissant la convection naturelle sont discrétisées par la méthode des différences finies. Les équations de vorticité et de l'énergie sont r solv es par la méthode ADE (Alternate Direction Explicit), tandis que l'équation de fonction de courant est r solv e par l'algorithme de Gauss-Seidel sous relaxée. Les résultats obtenus montrent particulièrement l'importance de présenter l'évaporation du gaz par une loi locale le long de la surface libre :

$$\text{Pour } T > T_0 : \phi_{ev} = 0,13\lambda \left(\frac{g\beta}{av} \right) (T - T_0)^{4/3}$$

$$\text{Pour } T \leq T_0 : \phi_{ev} = 0$$

L'étude a permis d'obtenir certaines informations qualitatives sur la thermique du GNL

De leur part A. LEMEBRE et P PETIT [5] ont proposé une étude de simulation en régime laminaire de la convection naturelle dans un cylindre vertical. Les parois latérale et supérieure sont soumises à un flux uniforme, tandis que la paroi inférieure est supposée adiabatique. Les équations de vorticité et d'énergie sont résolues par la méthode ADI (Alternate Direction Implicit), par contre l'équation de la fonction de courant est résolue par l'algorithme de Gauss-Seidel sur-relaxé. L'influence des paramètres caractérisant le système est analysée ($10^2 < Ra < 10^6$, $0.7 < Pr < 92.5$, $1/5 \leq Al \leq 2$) avec $Al=H/D$. ils ont pu démontrer que dans le régime stationnaire le transfert de chaleur par convection est plus important dans la paroi supérieure pour $1/5 \leq Al \leq 1/2$, et explicitement indépendant du nombre de Prandtl. Dans ce cas il y a présence d'une seule cellule des lignes de courant. Dans le cas transitoire lorsque $Al \leq 1/3$ il y a apparition de deux cellules.

Les travaux de V. SEVELEDER et J. PETIT [6] concernent le transfert simultané de chaleur et de masse. Cette étude est réalisée pour prévoir le comportement de la solution aqueuse ($CuSO_4$) qui se trouve dans une cavité rectangulaire fermée. L'enceinte utilisée pour le stockage de la solution a un rapport de forme $\frac{H}{L} = 2$. Les parois horizontales supérieure et inférieure de la cavité sont maintenues isolées (pas de gradient de température ni de concentration). Par contre les parois verticales sont soumises à un gradient de température seulement. Pour la résolution, ils ont utilisé la méthode ADI (Alternate Direction Implicit). Les auteurs ont pu montrer que pour un Rayleigh élevé la méthode numérique utilisée est stable.

E. BILGEN et H. OZTOP [7] ont étudié le transfert de chaleur par convection naturelle dans une cavité carrée inclinée et partiellement ouverte. L'ouverture, de largeur h , se situe sur la paroi verticale droite de la cavité. d est la distance entre le centre de l'ouverture et le fond de la cavité. Les conditions aux limites imposées sont: la paroi verticale gauche est maintenue à température constante, et les parois horizontales supérieure et inférieure ainsi que la paroi verticale droite sont isolées. La température et le gradient de température à l'intérieur de la cavité sont nuls. La méthode numérique utilisée pour la résolution des équations régissant le problème est basée sur l'algorithme

SIMPLER. L'influence de quelques facteurs tels que l'inclinaison de la cavité, la position de l'ouverture (d) et la largeur de l'ouverture h ainsi que le nombre de Rayleigh, est particulièrement étudiée.

D'autres auteurs comme A. SKOUTA, All [8] se sont intéressés à la convection naturelle bidimensionnelle en régime transitoire dans une cavité parallélépipédique. La section verticale de cette cavité ABCD est carrée, cette section est inclinée de façon que leur diagonale (DB) soit horizontale, et la diagonale (AC) verticale. Les parois AB et DC sont maintenues à la température T_{ch} . Les parois BC et AD sont à la température T_{fr} ($T_{ch} \geq T_{fr}$). Le nombre de Prandtl est fixé à 0.71. Les équations différentielles obtenues sont discrétisées par la méthode des différences fines en utilisant le schéma ADI pour la discrétisation des équations d'énergie et de vorticité. L'influence de nombre de Rayleigh est analysée.

Dans leurs travaux, L. BEN SNOUSSI, All [9] ont étudié numériquement l'écoulement d'un fluide en présence de la convection naturelle qui résulte des effets combinés de flottabilité de la diffusion thermique et massique, dans une cavité rectangulaire fermée de rapport d'aspect égal à 4. Les parois verticales gauche et droite sont maintenues à des températures uniformes T_h et T_c respectivement ($T_h > T_c$). Les parois horizontales sont supposées adiabatiques. Les équations de transport de vorticité, de fonction de courant, de concentration et d'énergie sont discrétisées à l'aide des volumes de contrôle basés sur la méthode des éléments finis, puis elles sont résolues simultanément par l'algorithme de sur relaxation et l'algorithme d'accélération de chebyshev. L'influence de nombre de Rayleigh est analysée.

Les travaux de A. BOUHDJAR, A. HARHAD [10] concernent l'analyse numérique de la convection mixte en régime variable dans un réservoir de stockage. L'influence de la nature du fluide utilisé (huile de Torada, éthylène glycol, eau) et celle du rapport d'aspect du réservoir (1/3 à 3) sur la stratification a été examinée. Dans leurs études, les auteurs considèrent une cavité cylindrique adiabatique, de deux ouvertures. La première se trouve en haut de la paroi verticale où le fluide rentre et la deuxième se situe en bas de la même paroi, par laquelle le fluide sort. Le fluide rentre avec une température constante, et il sort avec un gradient de température nul. Pour la discrétisation des équations gouvernantes, la méthode des

volumes finis a été utilisée. La résolution du problème est faite par l'algorithme SIMPLE.

L'objectif de l'étude réalisée par M. LAMSAADI, All [11] consiste à développer une solution analytique afin de décrire les écoulement de convection naturelle et les transferts thermiques au sein d'une cavité rectangulaire horizontale remplie d'un un fluide non-Newtonien, et soumise à un flux de chaleur uniforme ascendant. Avec l'approximation d'un écoulement parallèle, une solution analytique donnant les distributions de vitesse et de température dans le cas d'une cavité allongée ($L/H > 4$) est obtenue. Afin de démontrer la validité de la méthode proposée, les équations de la convection sont résolues numériquement par le biais d'une approche aux différences finies. Les équations de vorticité et d'énergie sont résolues par la méthode ADI. L'équation de fonction de courant est traitée par la méthode de sur relaxation successive par point. L'étude a permis de prouver l'existence d'une solution analytique au problème, et de valoriser la convection thermique par le comportement pseudo-plastique (effet de la rhéologie).

3. CONCLUSION

Le travail présenté dans ce mémoire, a pour sujet la simulation numérique des transferts thermiques et des écoulements du gaz naturel liquéfié dans un réservoir de stockage en régime variable. L'objectif général est de proposer un code de calcul permettant de prédire le phénomène de la stratification, et de décrire avec précision le comportement du fluide dans des conditions proches aux conditions réelles de stockage. La méthode proposée possède un avantage particulier, car elle permet la résolution du phénomène transitoire en utilisant des schémas de discrétisation stables et convergents.

Chapitre 2

Etude descriptive de phénomène

1. INTRODUCTION

Le gaz naturel est un hydrocarbure gazeux extrait du sous-sol, constitué principalement de Méthane. Il représente une source d'énergie très importante dans le monde, en raison de ses avantages économiques et écologiques. Les propriétés de ce produit, comme par exemple le faible intervalle de combustion le caractérisant, en font l'une des sources d'énergie les plus fiables connues à ce jour. Actuellement, il représente la deuxième source d'énergie la plus utilisée après le pétrole.

Avant qu'il arrive au consommateur, le gaz passe par un long trajet où il rencontre des transformations et des opérations compliquées telles que la production, le traitement, la liquéfaction et le stockage.

Pour des raisons de stockage et de commerce, le gaz naturel doit être liquéfié; cette opération consiste à rendre le gaz naturel liquide à -160 °C , afin de réduire son volume initial de 600 fois après le traitement final.

2. LA LIQUEFACTION DU GAZ NATUREL

Les procédés industriels de liquéfaction sont tous basés sur le même principe thermodynamique: le gaz naturel à haute ou moyenne pression est refroidi progressivement jusqu'à une température de l'ordre de -160 °C , qui lui permet de rester liquide à son point d'ébullition, une fois détendu à la pression de stockage et de transport.

Ce refroidissement s'obtient par passage dans des échangeurs successifs où la chaleur contenue dans le gaz naturel est absorbée progressivement par un ou plusieurs fluides réfrigérants; ces derniers suivent un cycle de réfrigération classique. La production de froid dans les installations industrielles de liquéfaction des gaz fait généralement appel aux moyens ci après, parfois d'ailleurs en combinaison [22] :

- Effet **Joule-Thomson** appelé parfois "détente Joule-Thomson" ou "détente libre" ;
- Détente avec un travail extérieur " **Cycle CLAUDE** " ;
- Cycle de "**PICTET**" à condensation -vaporisation appelé " cycle à cascade "

3. LES SPECIFICATIONS DU GNL

Le GNL est un liquide froid, incolore, inodore et non visqueux, maintenu légèrement sous son point d'ébullition sous une pression atmosphérique.

En cas d'épandage sur le sol à la température ambiante, le GNL génère de grandes quantités de vapeurs froides. Ces vapeurs sont, jusqu'à -100 °C environ, plus

lourdes que l'air et se diffusent sur une grande distance avant réchauffage et dispersion en hauteur.

Il a la particularité d'avoir une masse volumique plus faible que celle de l'eau, donc en cas d'épandage sur l'eau, la vaporisation est très rapide : c'est le phénomène de transition rapide de phase (**TRP**) et peut être accompagnée de surpression significative. Il est également ininflammable: seules ses vapeurs peuvent s'enflammer si leurs concentrations dans l'air se situent entre 5% et 15% et que ce mélange entre en contact avec une source d'ignition. De plus, le GNL est non corrosif et non explosif.

Les risques principaux liés à la manipulation du GNL sont :

- Brûlures de la peau en cas de contact avec le GNL;
- Fragilisation des matériaux classiques en cas de contact avec le GNL;
- Contractions et dilatations des matériaux utilisés à son contact avec le GNL;
- Phénomène de basculement de couches, ou "**Roll-Over**".

Le GNL est composé typiquement à plus de 70% de méthane, le reste étant principalement composé d'éthane, de propane et de butane et d'autres hydrocarbures lourds. La composition du GNL peut cependant varier selon la provenance de la cargaison (Tableau 2.1).

	Composition de GNL (mole %)						
	CH_4	C_2H_6	C_3H_8	$n-C_4H_{10}$	$i-C_4H_{10}$	N_2	$n-C_5H_{10}$
LYBIE	70.00	15.00	10.00	1.00	2.10	0.90	0.60
INDON- ESIE	86.81	8.23	3.87	0.53	0.46	0.06	0.04
ALGERIE (Arzew)	87.39	8.60	2.43	0.47	0.72	0.37	0.02
VENEZ- UELA	87.30	10.10	2.10	0.10	0.10	0.3	–
ALGERIE (Skikda)	91.50	5.64	1.50	0.25	0.25	0.85	0.01
ALASKA	99.60	–	–	–	–	0.40	–

Tableau 2.1. Composition de GNL selon la provenance de la cargaison

4. LE STOCKAGE DU GNL

Pour stocker les gaz liquéfiés sous pression atmosphérique, la température du gaz doit être abaissée jusqu'à leur point d'ébullition par un système de réfrigération approprié. Les unités de stockage doivent comprendre des isolations thermiques performantes afin d'éviter le réchauffement du gaz réfrigéré.

Les réservoirs de stockage se caractérisent par leurs formes, leurs dimensions géométriques, la pression et la température du produit stocké qui est liée à sa pression par la loi de vapeur saturante.

Généralement un réservoir de stockage est formé de deux enveloppes séparées par une épaisseur importante de calorifuge (isolation).

Les réservoirs de stockage du GNL peuvent se différencier en :

- réservoirs aériens;
- réservoirs enterrés;
- réservoirs semi- enterrés.

La conception des cuves de stockage de GNL est généralement basée sur l'association d'une enceinte interne, destinée à contenir le liquide stocké et d'une enceinte externe qui contient l'isolation placée autour de l'enceinte interne (Figure 2.1) [20]

Dans la conception des cuves de stockages, deux type de techniques sont utilisés : les réservoirs à double paroi, et les réservoirs à membrane.

- les réservoirs à double paroi : la cuve interne est généralement construite en acier à 9% de nickel. Elle est conçue de manière à pouvoir supporter à elle seule les contraintes exercées par le liquide stocké. L'enceinte extérieure est réalisée en acier ou en béton précontraint. Une isolation de nature minérale (perlite, verre cellulaire, laine de verre, etc,...) est disposée entre les deux parois.

- les réservoirs à membrane : similaires à celles utilisées pour les méthaniers. Ils sont constitués par une membrane gaufrée en acier inoxydable qui s'appuie sur la coque par un l'intermédiaire d'un isolant et d'une barrière secondaire formée par un matériau composite "Triplex" consistant en une feuille d'aluminium placée entre deux couches de tissu de verre. Cette barrière est destinée à protéger la cuve contre une éventuelle fuite de GNL. La barrière primaire est formée par une membrane gaufrée, constituée par un assemblage de tôles en acier inoxydable. L'isolant est constitué par trois à cinq couches de balsa, permettant de réduire le taux d'évaporation de GNL dû aux échanges thermiques de 0.25-0.3% à 0.18% par jour.

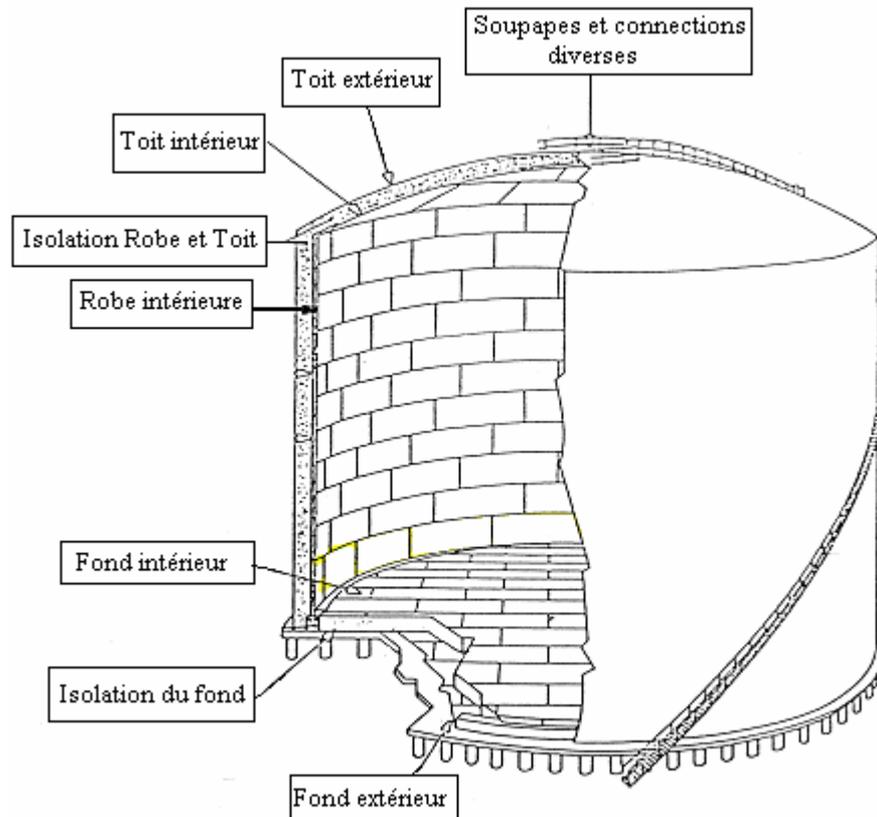


Figure 2.1. Schéma représentatif d'un réservoir aérien

5. SECURITE DANS L'INDUSTRIE DU GNL

La sécurité des installations gazières est une des préoccupations majeures des industriels. Une attitude volontaire dans les domaines de la formation, de la prévention et de l'intervention nécessite au préalable une bonne connaissance des risques.

Les mesures qu'il convient de prendre pour assurer la sécurité d'une installation de GNL, s'inspirent des dispositions générales applicables à toute activité industrielle et des consignes particulières propres au secteur gazier. Elles doivent, en outre, tenir compte des risques spécifiques engendrés, pour le personnel d'exploitation et pour l'environnement, par l'emploi du gaz naturel liquéfié. Parmi ces risques spécifiques, on peut citer [21]:

- le comportement du GNL stocké (Roll-over)
- Les épandages de GNL.
- Inflammation d'un nuage de GNL (rayonnement de l'incendie)

5.1. Phénomène de la stratification

Il est possible qu'apparaissent, dans un réservoir de GNL, des couches ou cellules en stratification. La densité du liquide est uniforme à l'intérieur d'une cellule, mais celle de la cellule inférieure est différente de celle de couche supérieure.

Par la suite, les entrées de chaleur dans le réservoir, les échanges de chaleur et de matière entre les cellules et enfin l'évaporation à la surface du liquide provoquent l'égalisation des masses volumiques des couches et finalement leur mélange. Ce brassage est appelé roll-over. Il peut être accompagné d'une augmentation brutale du débit d'évaporation si le liquide de la cellule inférieure est en état de surchauffe vis-à-vis de la pression de phase gaz du réservoir.

Cette évaporation brutale et importante peut, dans certains cas, générer une augmentation de pression dans le réservoir et provoquer l'ouverture des soupapes de sécurité. Si ces dernières sont sous-dimensionnées, la cuve interne du réservoir peut être endommagée [21].

5.2. Causes de la stratification

Deux causes différentes peuvent être à l'origine de la stratification du GNL dans un réservoir qu'on appellera, pour les différencier, stratification au remplissage, et stratification spontanée.

5.2.1 Stratification créée au remplissage

Lorsqu'on remplit un réservoir contenant déjà du GNL de masse volumique différente, il peut arriver que les deux liquides ne se mélangent pas, créant ainsi deux couches différentes. Cette stratification est stable si le liquide le plus lourd est au fond. Cette condition est effectivement satisfaite lors d'un remplissage par le bas si le liquide ajouté (la cargaison) est plus dense que le liquide se trouvant déjà dans le réservoir (le talon) ou, lors d'un remplissage par le haut si la cargaison est moins dense que le talon. L'observation montre qu'après leur formation, ces couches restent remarquablement stables. Deux cellules de circulation indépendante s'établissent dans le liquide (Figure 2.2). Chaleur et matière sont échangées par convection à travers l'interface des deux couches.

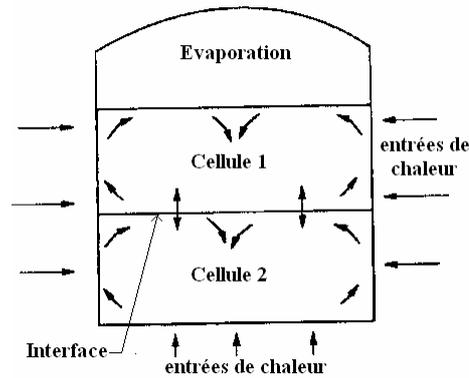


Figure 2.2: Liquide stratifié de manière stable en deux cellules.

La chaleur, pénétrant dans la cellule supérieure par ses cotés par son fond, est véhiculée vers la surface par convection naturelle, et perdue sous forme de chaleur latente d'évaporation dans la couche de surface.

Par contre, la cellule inférieure reçoit de la chaleur par le fond et les cotés du réservoir, mais ne peut perdre de l'énergie calorifique que par des mécanismes de convection à l'interface des deux couches. Deux cas d'évolution dans le temps peuvent se produire selon que le transfert de chaleur à l'interface des deux cellules est inférieur ou supérieur aux entrées thermiques dans la couche inférieure.

- **Première cas :** si le transfert de chaleur à l'interface est inférieur aux entrées thermiques dans la couche inférieure. Dans ce cas les entrées de chaleur aux parois du réservoir chauffent le GNL adjacent, sa température augmente et sa densité baisse (Figure 2.3)

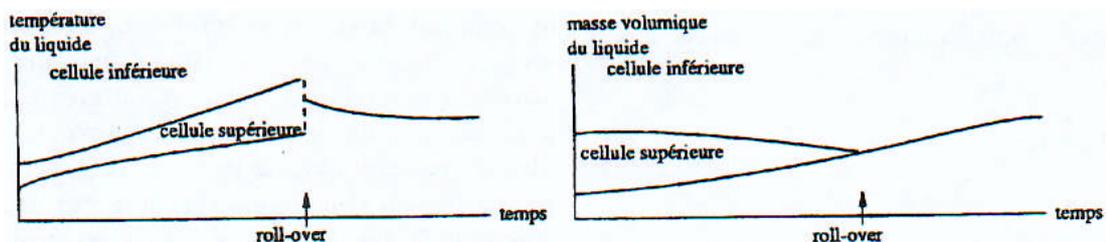


Figure 2.3: variation de la température et de la masse volumique en fonction du temps

- **Deuxième cas :** Si le transfert de chaleur à l'interface est supérieur aux entrées thermiques dans la couche inférieure, le GNL de cette couche (inférieure) se refroidit et devient plus lourd car sa densité augmente (Figure 2.4).

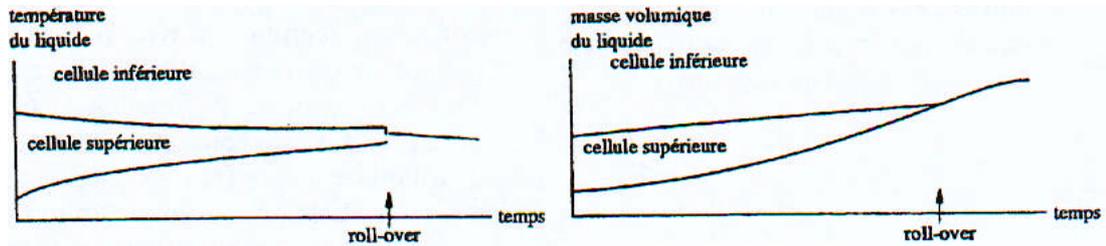


Figure 2.4: variation de la température et de la masse volumique en fonction du temps

Lorsque les masses volumiques des deux cellules deviennent sensiblement égales, l'interface disparaît et les couches se mélangent rapidement (Roll-Over) avec une augmentation brutale du débit d'évaporation du GNL stocké.

5. 2. 2 Stratification spontanée

La présence d'Azote en teneur importante dans le GNL peut provoquer la stratification d'un stockage initialement homogène de la façon suivante : Un liquide non stratifié reçoit de la chaleur par les parois et s'élève le long de celles-ci. En atteignant la surface, ce liquide est soumis à une détente qui lui fait perdre beaucoup d'Azote. Il devient donc moins dense que le liquide restant, et peut ainsi s'accumuler au voisinage de la surface.

Cette accumulation de liquide léger peut se poursuivre jusqu'à ce que l'épaisseur de la couche formée soit telle que l'énergie cinétique du liquide en circulation le long des parois soit égale à l'énergie potentielle résultant de la différence de masse volumique existant entre les deux cellules .

Lorsque cette couche supérieure est formée, la cellule inférieure ne peut plus perdre sa chaleur par convection et détente. En conséquence, sa température commence à croître. Le comportement du stockage est alors identique à celui décrit

au paragraphe précédent, le roll-over survient après égalisation des masses volumiques des deux couches.

Il est à noter que le liquide brassé peut toujours contenir une quantité d'Azote suffisante pour provoquer le processus de stratification spontanée une ou plusieurs fois.

5.2.3 Autres causes de la stratification

Le vieillissement de grandes quantités de GNL et la superposition de cargaisons de compositions légèrement différentes peuvent générer dans le réservoir des phénomènes de ségrégation de couches, dont l'homogénéisation non contrôlée risque de provoquer des évaporations importantes.

Afin de garantir l'exploitation des réservoirs avec un maximum de sécurité, il est indispensable de développer de modèles de prédiction de l'évolution d'une stratification qui peuvent être validés expérimentalement.

5.3. Méthodes de prévention de la stratification du GNL

Il est possible d'éviter la stratification au remplissage en utilisant des dispositifs de brassage ou en choisissant des procédures de remplissage appropriées [21].

5.3.1 Remplissage par des orifices de brassage

Une cargaison et un talon de masses volumiques différentes peuvent être mélangés efficacement en utilisant lors du remplissage par le bas un orifice en jet, sous certaines conditions :

- le jet doit atteindre la surface du liquide
- le temps de mélange doit être suffisamment long pour que tout le GNL stocké soit affecté par le jet turbulent

5.3.2 Recirculation par des orifices de brassage

L'homogénéisation d'un stockage stratifié peut être réalisée en aspirant le GNL du réservoir à l'aide des pompes centrifuges immergées installées dans celui-ci. Le gaz naturel liquéfié refoulé crée, par l'intermédiaire d'un ou plusieurs injecteurs situés au fond du réservoir, des jets liquides assurant l'homogénéisation de la phase liquide.

5.3.3 Remplissage par des tubes multi-orifices

Il est possible de réduire considérablement la probabilité d'apparition d'une stratification en favorisant le mélange lors du remplissage par l'utilisation d'un tube multiorifices percé sur une partie de sa hauteur. Le liquide chargé dans le réservoir est ainsi uniformément réparti au sein du talon. Il est nécessaire que les trous soient placés en permanence dans le GNL pour éviter de perturber l'interface ce qui créerait une augmentation excessive du débit d'évaporation du réservoir.

5.3.4 Brassage par injection de gaz

Des dispositifs d'injection de gaz, tels que l'hydrogène et l'hélium, peuvent réduire la stratification d'un GNL stocké. Cependant, cette méthode n'est pas considérée comme un moyen pratique pour supprimer la stratification, en raison du taux d'évaporation prohibitif.

5.4. Exemple d'accident lié au Rollover

La Spezia, Italy, 1971. [24]

Le méthanier Esso Brega est resté dans le port pendant environ un mois avant le déchargement de la cargaison de GNL "lourd" dans les réservoirs de stockage. Dix-huit heures après le remplissage du réservoir, il y a eu augmentation soudaine de la pression provoquant le dégagement de GNL vapeur des soupapes de sécurité du réservoir pendant quelques heures. Le toit du réservoir a été légèrement endommagé. On estime qu'environ 100 mmscf de GNL vapeur s'est échappé du réservoir. Aucun feu n'a eu lieu.

Chapitre 3

Etude théorique du problème de convection dans un cylindre vertical

1. INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est d'étudier un des phénomènes les plus importants qui accompagnent les différentes transformations subies par le gaz naturel liquéfié. Il s'agit du comportement thermique et dynamique de ce fluide dans un réservoir de stockage. Nous donnons d'abord quelques généralités et définitions concernant le mode de transfert de chaleur par convection libre ou naturelle. Nous développons ensuite le calcul analytique des équations de base régissant le processus.

2. GENERALITES ET DEFINITIONS

La convection est un mode de transfert de chaleur qui se produit uniquement au sein des milieux fluides. Alors que la conduction peut être considérée comme un transfert d'énergie par des mouvements microscopiques, la convection est un transport d'énergie dû à des mouvements macroscopiques. Elle apparaît lorsqu'un fluide, liquide ou gaz, est en mouvement et présente des inhomogénéités spatiales de températures.

Dans la convection, certaines parties du système sont en mouvement et emportent avec elles la chaleur qu'elles ont reçue par conduction au contact des parties les plus chaudes. Le mouvement du fluide peut être dû à une action mécanique extérieure (pompe, ventilateur, ...), on dit alors que la convection est forcée, ou bien il peut être dû, lorsqu'il existe un champ d'inertie, à la différence de masse volumique entre les particules fluides chauffées et les particules froides, on dit alors que la convection est naturelle ou libre.

3. FORMULATIONS MATHÉMATIQUES

Notre objectif était d'étudier le problème de la convection naturelle dans une cavité cylindrique verticale de hauteur H et de rayon R , et contenant du gaz naturel liquéfié de viscosité cinématique ν et de diffusivité thermique a . La mauvaise isolation de la paroi latérale du réservoir provoque un flux de chaleur horizontal q_0 qui traverse la surface cylindrique.

Le mouvement du fluide est donc généré par un chauffage latéral avec un flux q_1 dû à l'évaporation et qui est supposé constant et libre (Figure 3.1)

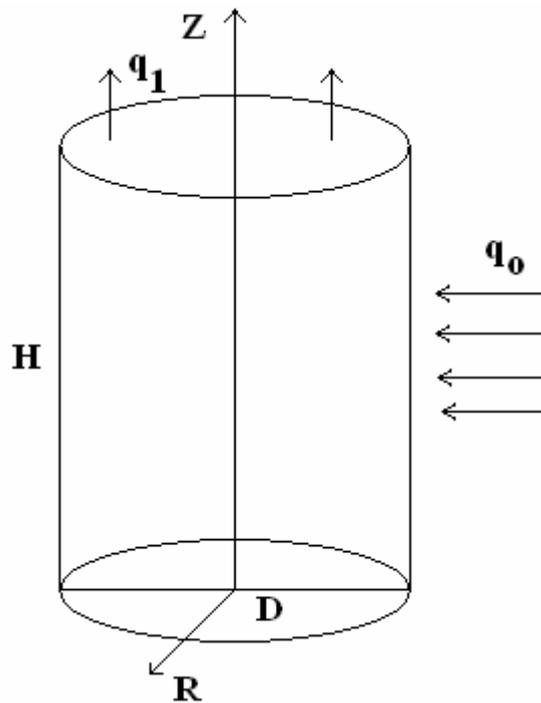


Figure 3.1: Modèle utilisé

Pour résoudre complètement un problème de convection, il faut déterminer en tous points et à tout instant les grandeurs caractéristiques du fluide qui sont les suivantes :

- la vitesse \vec{V} définie par les 3 composantes U, V, W
- la masse volumique ρ ;
- la pression P ;
- la température T ;

Pour calculer ces fonctions, il faut disposer de six équations. Nous allons donc établir des relations traduisant les principes de conservation dans la mécanique et les principes de la thermodynamique et nous obtiendrons les équations de conservation:

- de masse (équation de continuité)
- d'énergie
- de quantité de mouvement
- de concentration.

3.1 Hypothèses de calcul

- le transfert de masse est négligé.
- l'écoulement est laminaire bidimensionnel.
- le fluide est newtonien et incompressible.
- la dissipation visqueuse est négligeable.

- pas des sources de chaleur interne.
- on suppose que les propriétés thermo-physiques du fluide sont constantes sauf pour la masse volumique dans le terme des forces de volume, ce qui nous ramène à utiliser l'approximation de Boussinesq : $\rho_0 = \rho(1 + \beta\Delta T)$

3. 2. Equation de continuité

L'équation de continuité traduit le principe de la conservation de la masse. L'augmentation de la masse de fluide contenue dans un volume donné pendant un certain temps doit être égale à la somme des masses du fluide qui y entrent diminuée de celle qui sort. Le plus souvent il n'y a ni diminution, ni augmentation de masse de fluide au cours du mouvement. L'équation de continuité s'écrit donc :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = \rho q_v \tag{3.1}$$

q_v : Le débit des sources ou des puits par unité de volume.

Pour un fluide incompressible sans sources ni puits on a : $\operatorname{div} \vec{V} = 0$

Pour un système bidimensionnel :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \tag{3.2}$$

En coordonnées cylindriques (R, Z) :

$$\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{U}{R} = 0 \tag{3.3}$$

3. 3. Equation de conservation de la quantité de mouvement

On applique le principe fondamental de la mécanique pour un fluide incompressible dans un fluide sans puits ni sources, de viscosité μ constante. On trouve les équations de Navier Stokes :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho' \vec{F} - \operatorname{grad} P + \mu \Delta \vec{V} \tag{3.4}$$

Où \vec{F} : Les forces massiques ;

ρ' : Variation de masse volumique due à la convection naturelle ;

$\mu \Delta \vec{V}$: Forces de viscosité (contraintes) ;

$\operatorname{grad} P$: Force de pression.

Selon l'axe (X) : Les forces massiques sont nulles

On a donc :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial X}. \quad (3.5)$$

Selon l'axe (Y) : $\rho' = \rho_0 - \rho$: à cause de la poussée d'Archimède (en convection naturelle)

Et les forces massiques ne sont dues qu'à l'accélération de la pesanteur.

$$\rho \frac{dV}{dt} = (\rho_0 - \rho)g + \mu \Delta V - \frac{\partial P}{\partial Y} \quad (3.6)$$

ρ_0 : La masse volumique loin des parois.

En convection naturelle la masse volumique du fluide est variable, si on utilise l'approximation de Boussinesq : $\rho_0 = \rho (1 + \beta (T - T_0))$

Et en supposant que ρ reste constante dans les autres termes ($\rho = \rho_0$), on obtient :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = g\beta(T - T_0) + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial Y} \quad (3.7)$$

Avec β le coefficient de dilatation volumique thermique.

En coordonnées cylindriques, les deux équations de la quantité de mouvement deviennent :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial R} + V \frac{\partial U}{\partial Z} = \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} - \frac{U}{R^2} \right) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial R} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial R} + V \frac{\partial V}{\partial Z} = g\beta(T - T_0) + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial Z} \quad (3.9)$$

3. 4. Equation de conservation de l'énergie

Le problème consiste à appliquer le 1^{er} principe de la thermodynamique à un fluide en mouvement. L'équation générale de conservation de l'énergie s'écrit pour un fluide Newtonien sans sources ni puits :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \text{div} (\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) + T\beta_t \frac{dP}{dt} + q + \Phi \quad (3.10)$$

Avec Φ : fonction de dissipation regroupant tous les termes contenant la viscosité μ , définie par :

$$\Phi = -\frac{2}{3}\mu(\text{div } \vec{U})^2 + 2\mu\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y}\right)\frac{\partial U}{\partial Y}\right)$$

q : source de la chaleur interne (rayonnement thermique, réaction chimique...etc.)

Dans le cas d'un fluide incompressible, sans sources de chaleur interne, de conductivité thermique λ et de viscosité μ constantes. Si on suppose que les vitesses et les écarts de températures sont faibles, l'équation de l'énergie devient :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \lambda \text{div}(\vec{\text{grad}}T) \quad (3.11)$$

Avec : $\text{div}(\vec{\text{grad}}T) = \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}$ pour un système bidimensionnel (o, x, y)

Et $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$: diffusivité thermique.

L'équation devient donc :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}\right) \quad (3.12)$$

En coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial R} + V \frac{\partial T}{\partial Z} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}\right) \quad (3.13)$$

Les 4 équations en coordonnées cylindriques sont :

Continuité : $\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{U}{R} = 0$ (3.14)

Quantité de mouvement :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial R} + V \frac{\partial U}{\partial Z} = \nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} - \frac{U}{R^2}\right) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial R} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial R} + V \frac{\partial V}{\partial Z} = g\beta(T - T_0) + \nu\left(\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}\right) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial Z} \quad (3.16)$$

Energie : $\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial R} + V \frac{\partial T}{\partial Z} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}\right)$ (3.17)

3. 5. Simplification des équations

3. 5. 1. Adimensionnement des équations

L'emploi des variables réduites dans les équations permet de s'approcher de plus près de la réalité des phénomènes physiques, car leur existence et leur évolution sont indépendantes du système d'unités de mesure utilisé pour les étudier. On peut dire aussi, que ces variables permettent d'obtenir des informations générales qui jouent un rôle prépondérant dans les similitudes. En effet, pour ramener les équations phénoménologiques sous une forme adimensionnelle, il est nécessaire de définir des grandeurs caractéristiques.

Désignons par H une dimension linéaire caractéristique de l'écoulement, et par V_0 la vitesse de référence, et par $\frac{H}{V_0}$ un temps de référence, ΔT_0 étant l'écart de température de référence.

- les grandeurs de référence sont :

$$* V_0 = \sqrt{g\beta q_0 H^2 / \lambda}$$

$$* t_0 = \frac{H}{V_0}$$

$$* \Delta T_0 = \frac{q_0 H}{\lambda}$$

$$* P_0 = \rho_0 V_0^2$$

Les variable réduites sont données par :

$$r = \frac{R}{H}, \quad z = \frac{Z}{H}, \quad x = \frac{X}{H}, \quad y = \frac{Y}{H}, \quad u = \frac{U}{V_0}, \quad v = \frac{V}{V_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}.$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{\Delta T_0}, \quad P' = \frac{P}{P_0}$$

Ce changement de variables effectué sur les équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et d'énergie, nous conduit aux équations réduites suivantes :

a- En coordonnées cartésiennes :

- l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.18)$$

- les équations de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial P'}{\partial x} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = T + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial P'}{\partial y} \quad (3.20)$$

- l'équation de l'énergie :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{\text{Ra Pr}}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (3.21)$$

b- en coordonnées cylindriques :

- l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u}{r} = 0. \quad (3.22)$$

- les équations de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right] - \frac{\partial P'}{\partial r} \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} = \theta + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial P'}{\partial z} \quad (3.24)$$

- l'équation de l'énergie :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial r} + v \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{\text{Pr Ra}}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (3.25)$$

$$\text{Avec : } Ra = g\beta\Delta T_0 H^3 / \alpha\nu \quad Ra = \frac{g\beta\Delta T_0 H^3}{\alpha\nu}$$

$$\text{Et } Pr = \nu/\alpha$$

3. 5. 2. Formalisme Vorticité –Fonction de courant [25]

L'intérêt d'utiliser ce formalisme est de réduire le nombre d'équation et de faire sortir des variables dominantes. On se limite dans cette partie de l'étude au cas d'un système cylindrique :

$$\text{On définit la vorticité : } \omega' = \left(\frac{\partial U}{\partial Z} - \frac{\partial V}{\partial R} \right) \quad (3.26)$$

$$\text{et la vorticité modifiée : } \Omega' = R\omega' = R \left(\frac{\partial U}{\partial Z} - \frac{\partial V}{\partial R} \right) \quad (3.27)$$

Qui s'exprime sous forme adimensionnelle par :

$$\Omega = \frac{\Omega'}{V_o} = r \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad (3.28)$$

La fonction de courant ψ' est définie par :

$$\begin{cases} U = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi'}{\partial Z} \\ V = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi'}{\partial R} \end{cases} \quad (3.29)$$

En se servant de la forme réduite de la fonction de courant $\psi = \frac{\psi'}{V_o H^2}$, on obtient :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases} \quad (3.30)$$

$$\text{On a donc : } \Omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (3.31)$$

Cette équation peut être considérée comme un cas particulier (permanent) du cas général (variable) suivant :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\Omega - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (3.32)$$

D'un autre côté, si on dérive l'équation (3.23) par rapport à z et l'équation (3.24) par rapport à r , et en se servant de l'équation de continuité, la soustraction des 2 équations obtenues nous donne :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} = -r \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Omega - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \right) \quad (3.33)$$

En introduisant les expressions de u et v définies par (3.30) dans l'équation (3.28), l'équation d'énergie s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{Ra Pr}}} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{\text{Pr Ra}}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (3.34)$$

Récapitulation des équations à résoudre

$$1) \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\Omega - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \quad \text{Fonction de courant}$$

$$2) \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} = -r \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Omega - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \right)$$

Vorticité

$$3) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{Ra Pr}}} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{\text{Ra Pr}}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad \text{Energie}$$

3.6. Conditions initiales et conditions aux limites

A chaque problème donné, on adjoint les conditions initiales et les conditions aux limites. Concernant le cas que nous avons présenté précédemment, ces conditions sont données par :

- conditions initiales : Pour $t=0$

$$U = 0, \quad V = 0, \quad T = 0$$

- conditions de symétrie appliquée à l'axe du cylindre $R = 0$

$$\frac{\partial V}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial R} = 0, \quad U = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial R} = 0.$$

- Sur la paroi verticale : $R = D/2$

$$U = 0, \quad V = 0, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial R} = q_0.$$

- Au fond du réservoir : $Z = 0$

$$U = 0, \quad V = 0, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial R} = 0.$$

- Sur la surface libre du fluide : $Z = H$

$$U = 0, \quad V = 0, \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial Z} = q_1.$$

La procédure d'adimensionnement des équations de conservation est appliquée cette fois ci aux conditions initiales et aux limites en utilisant de formalisme vorticité-fonction de courant.

- les conditions initiales : pour $\tau = 0$

$$\Psi(r, z, 0) = 0 \quad \Omega(r, z, 0) = 0 \quad \theta(r, z, 0) = 0$$

- la condition de symétrie : à l'axe du cylindre ($r = 0$)

$$\frac{\partial \Psi(r, z, t)}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \theta(r, z, t)}{\partial r} = 0 \quad \Omega(r, z, t) = 0 \quad \Psi(r, z, t) = 0.$$

- sur la paroi latérale verticale : pour $r = r_{\max} = \frac{D}{2H}$

$$\Psi(r, z, t) = 0 \quad \frac{\partial \Psi(r, z, t)}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \Psi(r, z, t)}{\partial r} = 0$$

$$\Omega(r, z, t) = \frac{\partial^2 \Psi(r, z, t)}{\partial r^2} \quad \frac{\partial \theta(r, z, t)}{\partial r} = 1.$$

- au fond de réservoir ($z=0$)

$$\Psi(r, z, t) = 0 \quad \frac{\partial \Psi(r, z, t)}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial \Psi(r, z, t)}{\partial z} = 0$$

$$\Omega(r, z, t) = \frac{\partial^2 \Psi(r, 0, t)}{\partial z^2} \quad \frac{\partial \theta(r, z, t)}{\partial z} = 0$$

- sur la surface libre du fluide ($z=1$)

$$\Psi(r, z, t) = 0 \quad \frac{\partial \Psi(r, z, t)}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial \Psi(r, z, t)}{\partial z} = 0$$

$$\Omega(r, z, t) = \frac{\partial^2 \Psi(r, z, t)}{\partial z^2} \quad \frac{\partial \theta(r, z, t)}{\partial z} = -4F_0 \frac{H}{D}.$$

$$\text{Avec } F_0 = \frac{q_1}{q_0}$$

F_0 : Fraction de flux de chaleur perdu par évaporation par rapport aux flux thermique d'entrée.

4. CONCLUSION

Pour procéder au développement analytique concernant le phénomène de la convection naturelle, nous avons été conduits à établir les quatre équations de conservation sous forme simplifiée en se basant sur des hypothèses simplificatrices, et sur le formalisme vorticité-fonction de courant, et sur le principe de l'adimensionnement. L'analyse théorique entreprise a permis de réduire le nombre de variables à trois (la température θ , la fonction de courant ψ , et la vorticité Ω), et de montrer que le système à résoudre est fonction de quatre grandeurs principales : Le nombre de Prandtl Pr , le nombre de Rayleigh Ra , le rapport de forme H/D , et le rapport des flux F_0

Chapitre 4

Simulation numérique

1. INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons établi la forme complète des équations aux dérivées partielles qui gouvernent le problème à étudier. Nous intéressons dans ce chapitre à la résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la fonction de courant, de vorticité, et d'énergie.

L'intégration numérique des équations gouvernantes consiste en la détermination d'un certain nombre de variables (θ, ψ, Ω) à des points précis appelés "nœuds". La méthode numérique conduit à un système d'équations algébriques où les inconnus sont justement les valeurs des variables physiques aux différents nœuds. L'intérêt de l'intégration numérique consiste à remplacer une information continue par une information discrétisée qu'est très facile à manipuler.

Les équations de conservation régissant le phénomène de la convection naturelle sont des équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires, elliptiques et couplées. En raison de leurs complexités, ces équations sont résolues à l'aide des techniques numériques. Plusieurs méthodes numériques sont disponibles dans la littérature. On peut citer à titre d'exemples :

- la méthode des différences finies.
- la méthode des éléments finis.
- la méthode des volumes finis.

Pour résoudre le système d'équations présenté dans le chapitre précédent, nous avons choisi la procédure des différences finies.

2. LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

2. 1. Le maillage

Nous restreindrons notre étude au cas d'un problème plan, et d'un domaine rectangulaire Γ . Nous choisissons évidemment les directions \vec{x} et \vec{y} parallèles aux côtés du rectangle. Nous traçons alors un réseau de droites parallèles à l'axe des x , équidistances de pas k , ainsi qu'un réseau de droites parallèles à l'axe y , équidistances de pas h . Les intersections des deux réseaux sont les points ou les nœuds $m_{i,j}$ de coordonnées (ih, jk) tels que $i \in Z$ et $j \in Z$. Les points $m_{i,j}$ constituent l'ensemble $hZ \times kZ$, qu'on appelle "maillage".

2. 2. Approximation des dérivées par des différences finies [14]

Considérons un point $m_{i,j}$ intérieur au domaine Γ , ainsi que les points voisins du maillage.

Les pas h et k sont supposés petits par rapport aux dimensions de Γ , c'est à dire par rapport à l'échelle de variation d'une grandeur " u ". On peut estimer que u varie peu lorsqu'on passe de $m_{i,j}$ aux points voisins et que cette variation doit s'écrire en première approximation à l'aide des dérivées partielles de u au point $m_{i,j}$ grâce au théorème des accroissements finis :

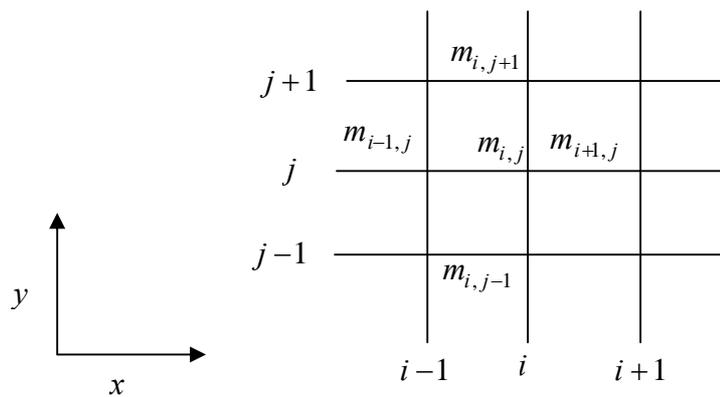


Figure 4.1 : Discrétisation du domaine et implantation de la maille

Soit f une fonction d'une variable x , de classe C^4 . Alors, si h tend vers 0, on a :

$$* f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + O(h^4) \quad (4.1)$$

$$* f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + o(h^4) \quad (4.2)$$

D'où

$$* f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + o(h) \quad (4.3)$$

$$* f'(x) = \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} + o(h) \quad (4.4)$$

$$* f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + o(h^2) \quad (4.5)$$

$$* f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + o(h^2) \quad (4.6)$$

Si la grandeur u est de classe C^4 dans Γ , en appliquant (4.3), (4.4) (4.5) et (4.6) dans chacune des directions \bar{x}, \bar{y} , on peut déduire :

- l'approximation d'une dérivée première par des différences finies décentré à droite:

$$u_x(m_{i,j}) = \frac{u(m_{i+1,j}) - u(m_{i,j})}{h} + o(h) \quad (4.7)$$

- l'approximation d'une dérivée première par des différences finies décentré à gauche:

$$u_x(m_{i,j}) = \frac{u(m_{i-1,j}) - u(m_{i,j})}{h} + o(h) \quad (4.8)$$

- l'approximation d'une dérivée première par des différences finies centré :

$$u_x(m_{i,j}) = \frac{u(m_{i+1,j}) - u(m_{i-1,j})}{2h} + o(h^2) \quad (4.9)$$

- l'approximation d'une dérivée seconde par des différences finies centrées :

$$\begin{aligned} \Delta u(m_{i,j}) &= \frac{u(m_{i+1,j}) - 2u(m_{i,j}) + u(m_{i-1,j}))}{h^2} \\ &+ \frac{u(m_{i,j+1}) - 2u(m_{i,j}) + u(m_{i,j-1}))}{k^2} + o(h^2, k^2) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Au lieu de chercher u dans Γ vérifiant l'équation différentielle et les conditions aux limites considérées, nous cherchons \hat{u} dans la partie $(hZ \times kZ)$ du maillage situé dans Γ vérifiant une équation "proche" de l'équation considérée et des conditions aux limites "proche" des conditions considérées. On peut définir ainsi un problème discret \hat{P} "proche" du problème continue P .

2.3. Quelques schémas aux différences finies [14]

Considérons par exemple l'équation de la chaleur définie par :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.11)$$

Désignons par h, k successivement les pas d'espace et de temps. On utilise une grille constituée des points m_j^n de coordonnées (jh, nk) dans le plan (x, t) .

2. 3. 1. Schéma explicite

Pour discrétiser l'équation de la chaleur (4.11) en une grille des points m_j^n , on utilise la différence décentrée pour la dérivée en temps $\frac{\partial u}{\partial t}$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + o(k) \quad (4.12)$$

Pour la dérivée en espace, on utilise la différence finie centrée :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + o(h^2) \quad (4.13)$$

D'où le schéma appelé explicite :

$$\hat{u}_j^{n+1} = \hat{u}_j^n + \frac{\alpha k}{h^2} [\hat{u}_{j+1}^n - 2\hat{u}_j^n + \hat{u}_{j-1}^n] \quad (4.14)$$

Le schéma (4.14) est explicite en sens que, pour calculer \hat{u}_j^{n+1} en un point j , il suffit de remplacer explicitement les quantités figurant au second membre de (4.14) par les valeurs (connues et stockées en mémoire). Le schéma explicite n'est pas stable, mais facile pour l'exécution.

2. 3. 2. Le Schéma implicite

La discrétisation de la dérivée en temps et de la dérivée en espace peut être appliquée au niveau $(n+1)$ plutôt qu'au niveau (n) . On a alors :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^{n+1} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + o(k) \quad (4.15)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + o(h^2) \quad (4.16)$$

D'où le schéma appelé totalement implicite :

$$\hat{u}_j^{n+1} = \hat{u}_j^n + \frac{\alpha k}{h^2} [\hat{u}_{j+1}^{n+1} - 2\hat{u}_j^{n+1} + \hat{u}_{j-1}^{n+1}] \quad (4.17)$$

Avec le schéma implicite, il n'est pas possible de calculer \hat{u}_j^{n+1} pour une seule valeur de j : les inconnues \hat{u}_j^{n+1} sont liées entre elles par autant d'équations de

type (4.17), en un système linéaire qu'il s'agit de résoudre. Et cela coûte cher. Mais on remplace le schéma explicite par le Schéma implicite pour une raison de stabilité. Le schéma implicite est inconditionnellement stable.

2. 3. 3. Le schéma de Crank-Nicolson

On peut faire une moyenne entre les deux schémas précédents : le schéma implicite et le schéma explicite, ce qui donne le schéma de Crank-Nicolson :

$$\hat{u}_j^{n+1} = \hat{u}_j^n + \frac{\alpha k}{2h^2} \left\{ \hat{u}_{j+1}^n - 2\hat{u}_j^n + \hat{u}_{j-1}^n + \hat{u}_{j+1}^{n+1} - 2\hat{u}_j^{n+1} + \hat{u}_{j-1}^{n+1} \right\} \quad (4.18)$$

Ce schéma est également implicite, donc aussi coûteux que le schéma implicite. Mais il a l'avantage d'être précis au second ordre.

3. METHODE DES DIRECTIONS ALTERNEES (ADI) [12,14,25]

Il s'agit d'une méthode implicite du type prédicteur-correcteur. La méthode ADI (Alternating Direction Implicite) est applicable en deux étapes ; pour la première étape (prédicteur) elle est implicite dans la direction x et explicite dans la direction y . Pour la seconde étape (correcteur), la méthode ADI est explicite dans la direction x , et implicite dans la direction y . (Figure 4.2)

Pendant la première étape les valeurs aux nœuds (i, j) sont connues à l'instant (n) mais elles sont inconnues à l'instant $(n + \frac{1}{2})$. Les valeurs inconnues sont associées à la direction x seulement (c'est à dire j fixe). Les valeurs à l'instant inconnu $(n + \frac{1}{2})$ dans tous les nœuds de maillage sont données par la résolution des systèmes d'équations pour $i = 2, \dots, i_{\max} - 1$ et pour chaque j tel que $j = 2, \dots, j_{\max} - 1$.

Dans la seconde étape les valeurs aux nœuds (i, j) sont inconnues à l'instant $(n + 1)$, mais connues à l'instant $(n + \frac{1}{2})$. On obtient les valeurs de tous les nœuds à l'instant inconnu $(n + 1)$ par la résolution des systèmes d'équations pour

$j = 2, \dots, j_{\max} - 1$ et pour chaque i tel que $i = 2, \dots, i_{\max} - 1$. Les valeurs des nœuds à l'instant $(n + 1)$ sont associées à la direction y seulement (c'est à dire i fixe).

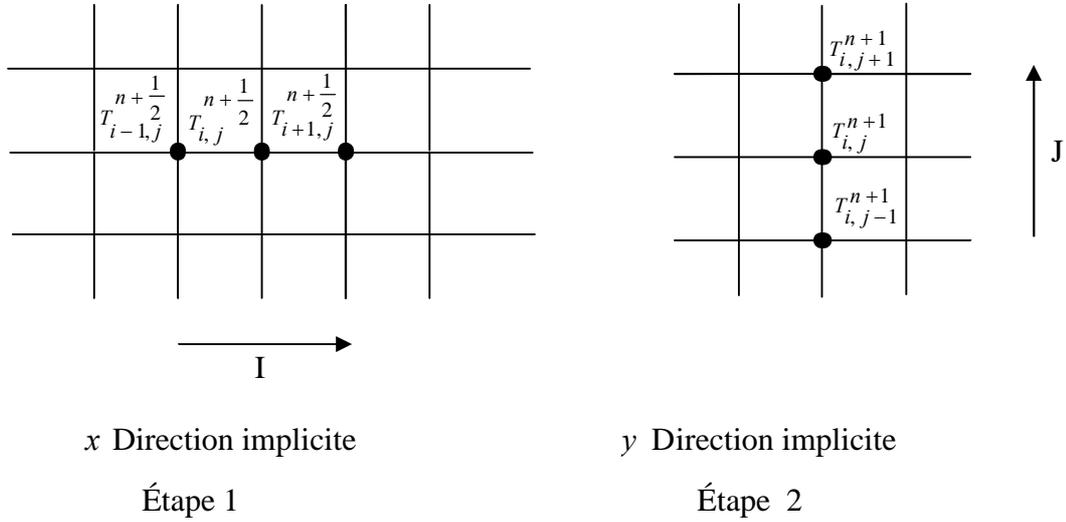


Figure 4.2 : Discretisation du domaine et implantation des mailles dans la direction x (étape 1) et dans le direction y (étape 2)

Pour illustrer le principe de la méthode ADI on traite l'exemple de l'équation de la diffusion de la chaleur (4.11) dans un système bidimensionnel:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

On discrétise l'équation précédente par la méthode ADI, on obtient :

Première étape - Prédicteur

$$\frac{u_{i,j}^{n+1/2} - u_{i,j}^n}{\Delta t / 2} = \alpha \frac{u_{i+1,j}^{n+1/2} - 2u_{i,j}^{n+1/2} + u_{i-1,j}^{n+1/2}}{h^2} + \alpha \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{k^2} \quad (4.20)$$

Seconde étape - Correcteur

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t / 2} = \alpha \frac{u_{i+1,j}^{n+1/2} - 2u_{i,j}^{n+1/2} + u_{i-1,j}^{n+1/2}}{h^2} + \alpha \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{k^2} \quad (4.21)$$

En posant $s = \frac{\alpha \Delta t}{2h^2}$ et $s' = \frac{\alpha \Delta t}{2k^2}$, les équations (4.20), (4.21) deviennent :

Première étape - Prédicteur

$$-su_{i-1,j}^{n+1/2} + (1+2s)u_{i,j}^{n+1/2} - su_{i+1,j}^{n+1/2} = s'u_{i,j-1}^n + (1-2s')u_{i,j}^n + s'u_{i,j+1}^n \quad (4.22)$$

Seconde étape - Correcteur

$$-s'u_{i,j-1}^{n+1} + (1+2s')u_{i,j}^{n+1} - s'u_{i,j+1}^{n+1} = su_{i-1,j}^{n+1/2} + (1-2s)u_{i,j}^{n+1/2} + su_{i+1,j}^{n+1/2} \quad (4.23)$$

4. CHOIX DE LA METHODE ADI**4.1. La consistance [15]***4.1.1. Définition*

On considère l'équation de la variable w : $A(w) = 0$

Soit $\tilde{A}(w)$ le schéma approché de $A(w)$. On dit que $\tilde{A}(w)$ est consistant avec l'équation $A(w) = 0$ si :

$$\max |A(w_{i,j}^n) - \tilde{A}(w_{i,j}^n)| \rightarrow 0 \text{ quand } (h, \Delta t) \rightarrow 0.$$

4.1.2. Consistance de la méthode ADI

Soit l'équation de Navier Stocks

$$A(w) = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (4.24)$$

L'équation approchée $\tilde{A}(w) = 0$ qui correspond à l'équation (4.24) est obtenue en appliquant la première étape de la méthode ADI (Prédicteur), on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{A}(w) = & \frac{w_{i,j}^{n+1/2} - w_{i,j}^n}{\Delta t / 2} + u \frac{w_{i+1,j}^{n+1/2} - w_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} + v \frac{w_{i,j+1}^n - w_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \\ & - \nu \left(\frac{w_{i+1,j}^{n+1/2} - 2w_{i,j}^{n+1/2} + w_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{w_{i,j+1}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Avec :

Δt : Le pas dans le temps

Δx : Le pas dans l'espace selon la direction x

Δy : Le pas dans l'espace selon la direction y

u : La vitesse selon la direction x

v : La vitesse selon la direction y

w : représente soit u ou v

Or on a :

$$w_{i,j}^{n+1/2} = w_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial w}{\partial t} + o\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \quad (4.26)$$

$$w_{i\pm 1,j}^{n+1/2} = w_{i,j}^{n+1/2} \pm \Delta x \frac{\partial w}{\partial x} + o(\Delta x^2) \quad (4.27)$$

$$w_{i\pm 1,j}^{n+1/2} = w_{i,j}^{n+1/2} \pm \Delta x \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \pm \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + o(\Delta x^4) \quad (4.28)$$

$$w_{i,j\pm 1}^n = w_{i,j}^n \pm \Delta y \frac{\partial w}{\partial y} + o(\Delta y^2) \quad (4.29)$$

$$w_{i,j\pm 1}^n = w_{i,j}^n \pm \Delta y \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\Delta y^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \pm \frac{\Delta y^3}{6} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + o(\Delta y^4) \quad (4.30)$$

En introduisant (4.26), (4.27), (4.28), (4.29) et (4.30) dans (4.25), la soustraction de (4.24) et (4.25) donne :

$$A(w) - \tilde{A}(w) = \frac{\Delta t}{2} + o(\Delta x) + o(\Delta y) + o(\Delta x^2) + o(\Delta y^2) \quad (4.31)$$

Si on pose $\Delta x = \Delta y = h$, alors :

$$A(w) - \tilde{A}(w) = \frac{\Delta t}{2} + o(h) + o(h^2)$$

Si $\Delta t \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$ alors : $A(w) - \tilde{A}(w) \rightarrow 0$. Donc la méthode ADI est consistante.

Pour la seconde étape (Correcteur), le même résultat est obtenu en suivant la même procédure que celle appliquée à l'étape prédicteur.

4. 2. La stabilité [14, 15 , 25]

On choisit la méthode de Von Neumann pour analyser et vérifier la stabilité de la méthode ADI

On choisit une perturbation de la forme $\varepsilon e^{z(px+qy)}$, avec $z = \sqrt{-1}$ s'appliquant à tous les points d'une ligne du réseau pour un temps $t = nk$ donné ($k = \Delta t$), et tous les points $x = ih$, $y = jh$.

Avec :

Δt : Pas dans le temps

h : Pas dans l'espace

$$\text{On pose } w_{i,j}^n = \varphi(nk) e^{z(pih+qjh)} \quad (4.32)$$

$$w_{i\pm 1, j\pm 1} = \varphi(nk)e^{z[p(i\pm 1)h+q(j\pm 1)h]} \quad (4.33)$$

p et q Sont arbitraires.

On reporte ces formules dans l'équation aux différences finies puis, on calcul

$$G(n, i, j, p, q) = \frac{\varphi((n + \frac{1}{2})k)}{\varphi(nk)}$$

Une condition suffisante de stabilité est : $|G| \leq 1$, $\forall (n, i, j, q, p)$.

Soir par exemple l'équation de Navier Stocks simplifiée $\frac{dw}{dt} = v \Delta w$

Et on propose de discrétiser de cette équation par la méthode ADI/

$$\text{On pose : } c = \frac{ku}{4h}, \quad d = \frac{kv}{4h}, \quad e = \frac{vk}{2h^2}$$

Étape 1 - Prédicteur :

$$-(c + e)w_{i-1, j}^{n+1/2} + (1 + 2e)w_{i, j}^{n+1/2} + (c - e)w_{i+1, j}^{n+1/2} = (d + e)w_{i, j-1}^n + (1 - 2e)w_{i, j}^n - (e - d)w_{i, j+1}^n \quad (4.34)$$

Étape 2 - Correcteur :

$$-(d + e)w_{i, j-1}^{n+1} + (1 - 2e)w_{i, j}^{n+1} + (d - e)w_{i, j+1}^{n+1} = (c + e)w_{i-1, j}^{n+1/2} + (1 - 2e)w_{i, j}^{n+1/2} + (e - c)w_{i+1, j}^{n+1/2} \quad (4.35)$$

En reportant les formules (4.32) et (4.33) dans (4.34) et (4.35) , on trouve un facteur d'amplification G' correspondant à l'étape prédicteur et un facteur d'amplification G'' correspondant à l'étape correcteur. Le facteur d'amplification de la méthode ADI est le produit des deux facteurs ($G = G'G''$)

$$G' = \frac{1 - (\frac{kv}{2h})z \sin(qh) - (\frac{vk}{h^2})[1 - \cos(qh)]}{1 + (\frac{ku}{2h})z \sin(ph) + (\frac{vk}{h^2})[1 - \cos(ph)]} = \frac{L}{H}$$

$$G'' = \frac{1 - (\frac{ku}{2h})z \sin(ph) - (\frac{vk}{h^2})[1 - \cos(ph)]}{1 + (\frac{kv}{2h})z \sin(qh) + (\frac{vk}{h^2})[1 - \cos(qh)]} = \frac{M}{Y}$$

$$\text{D'où } G = \frac{L}{H} \frac{M}{Y} = \frac{L}{Y} \frac{M}{H}$$

Chacun des deux facteurs $\frac{L}{Y}$ et $\frac{M}{H}$ sont du type $\frac{N}{D}$ avec $\text{Re}(N) \leq \text{Re}(D)$ et

$$\text{Im}(N) = -\text{Im}(D) \text{ d'où } \left| \frac{L}{Y} \right| \leq 1 \text{ et } \left| \frac{M}{H} \right| \leq 1 .$$

On déduit alors que $|G| \leq 1 \quad \forall (q, p, k, h)$.

D'après l'analyse de stabilité par la méthode de Von Neumann la méthode ADI est inconditionnellement stable.

4.3 Conclusion

Pour éviter les contraintes imposées par les conditions de stabilité des schémas explicites, on a intérêt, la plupart du temps, à utiliser des schémas implicites. Toutefois, ceux-ci coûtent cher. C'est ce que explique le succès remporté par la méthode des directions alternées (Alternating Direction Implicite ou ADI) dans laquelle on limite habilement le coût des résolutions. La méthode ADI est inconditionnellement stable et convergente. Elle est consistante. Elle a une erreur de troncature de l'ordre de $o(\frac{\Delta t}{2}, \Delta h^2)$. Vu ces propriétés, elle est la méthode la plus adaptée à notre problème.

5. DISCRETISATION DES EQUATIONS DE VORTICITE ET D'ENERGIE

Les équations aux dérivées partielles de vorticité (3.33) et d'énergie (3.34) sont approchées par les différences finies en utilisant la méthode ADI.

5.1 Discrétisation de l'équation de vorticité

L'équation de vorticité est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} = & -r \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Omega - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \\ & + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Etape 1 – Prédicteur

$$\begin{aligned}
\frac{\Omega_{i,j}^{n+1/2} - \Omega_{i,j}^n}{\Delta\tau/2} = & -r \frac{\theta_{i+1,j}^{n+1/2} - \theta_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta r} + \frac{2}{r^2} \frac{\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j-1}^n}{2\Delta z} \Omega_{i,j}^n \\
- \frac{1}{r} \left(\frac{\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j-1}^n}{2\Delta z} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \right) & \frac{\Omega_{i+1,j}^{n+1/2} - \Omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta r} + \frac{1}{r} \frac{\Psi_{i+1,j}^{n+1/2} - \Psi_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta r} \frac{\Omega_{i,j+1}^n - \Omega_{i,j-1}^n}{2\Delta z} \\
+ \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left(\frac{\Omega_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\Omega_{i,j}^{n+1/2} + \Omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta r^2} + \frac{\Omega_{i,j+1}^n - 2\Omega_{i,j}^n + \Omega_{i,j-1}^n}{\Delta z^2} \right) & \quad (4.37)
\end{aligned}$$

Avec :

$\Delta\tau$: Pas dans le temps

Δr : Pas dans l'espace selon l'axe $o\vec{r}$

Δz : Pas dans l'espace selon l'axe $o\vec{z}$

On pose :

$$\begin{aligned}
A &= \frac{r\Delta\tau}{4\Delta r} (\theta_{i+1,j}^{n+1/2} - \theta_{i-1,j}^{n+1/2}), & B &= \frac{\Delta\tau}{2r^2\Delta z} (\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j-1}^n) \\
C &= \frac{\Delta\tau}{4r\Delta r} \left(\frac{\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j-1}^n}{2\Delta z} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \right), & D &= \frac{\Delta\tau}{8r\Delta r\Delta z} (\Psi_{i+1,j}^{n+1/2} - \Psi_{i-1,j}^{n+1/2}). \\
E &= \frac{\Delta\tau}{2\Delta r^2} \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} & F &= \frac{\Delta\tau}{2\Delta z^2} \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}}
\end{aligned}$$

En obtient :

$$\begin{aligned}
(C + E)\Omega_{i-1,j}^{n+1/2} + (-1 - 2E)\Omega_{i,j}^{n+1/2} + (E - C)\Omega_{i+1,j}^{n+1/2} = & A + (D - F)\Omega_{i,j-1}^n \\
+ (-1 - B + 2F)\Omega_{i,j}^n + (-D - F)\Omega_{i,j+1}^n & \quad (4.38)
\end{aligned}$$

Etape 2 - Correcteur

$$\begin{aligned}
\frac{\Omega_{i,j}^{n+1} - \Omega_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta\tau/2} &= -r \frac{\theta_{i+1,j}^{n+1/2} - \theta_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta r} + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta z} \right) \Omega_{i,j}^n \\
&\quad - \frac{1}{r} \left(\frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta z} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \right) \frac{\Omega_{i+1,j}^{n+1/2} - \Omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta r} \\
&\quad + \frac{1}{r} \frac{\Psi_{i+1,j}^{n+1/2} - \Psi_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta r} \frac{\Omega_{i,j+1}^{n+1} - \Omega_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta z} \\
&\quad + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left(\frac{\Omega_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\Omega_{i,j}^{n+1/2} + \Omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta r^2} + \frac{\Omega_{i,j+1}^{n+1} - 2\Omega_{i,j}^{n+1} + \Omega_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta z^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.39}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
A' &= \frac{r\Delta\tau}{4\Delta r} (\theta_{i+1,j}^{n+1/2} - \theta_{i-1,j}^{n+1/2}), & B' &= \frac{\Delta\tau}{2r^2\Delta z} (\Psi_{i,j+1}^{n+1} - \Psi_{i,j-1}^{n+1}). \\
C' &= \frac{\Delta\tau}{4r\Delta r} \left(\frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta z} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \right), & D' &= \frac{\Delta\tau}{8r\Delta r\Delta z} (\Psi_{i+1,j}^{n+1/2} - \Psi_{i-1,j}^{n+1/2}). \\
E' &= \frac{\Delta\tau}{2\Delta r^2} \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}}, & F' &= \frac{\Delta\tau}{2\Delta z^2} \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}}.
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
(F' - D')\Omega_{i,j-1}^{n+1} + (-1 - 2F')\Omega_{i,j}^{n+1} + (D' + F')\Omega_{i,j+1}^{n+1} &= A' + (-C' - E')\Omega_{i-1,j}^{n+1/2} \\
&\quad + (-1 - B' + 2E')\Omega_{i,j}^{n+1/2} + (C' - E')\Omega_{i+1,j}^{n+1/2}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

5.2. Discrétisation de l'équation de l'énergie

L'équation de l'énergie est donnée par :

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{Ra Pr}}} - \frac{\partial\Psi}{\partial z} \right) \frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial r} \frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{\text{Ra Pr}}} \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} \right) \tag{4.41}$$

Etape 1 - Prédicteur

$$\begin{aligned}
\frac{\theta_{i,j}^{n+1/2} - \theta_{i,j}^n}{\Delta\tau/2} &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{Pr Ra}}} - \frac{\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j-1}^n}{2\Delta z} \right) \frac{\theta_{i+1,j}^{n+1/2} - \theta_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta r} + \frac{1}{r} \frac{\Psi_{i+1,j}^{n+1/2} - \Psi_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta r} \\
\frac{\theta_{i,j+1}^n - \theta_{i,j-1}^n}{2\Delta z} &+ \frac{1}{\sqrt{\text{Ra Pr}}} \left(\frac{\theta_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\theta_{i,j}^{n+1/2} + \theta_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta r^2} + \frac{\theta_{i,j+1}^n - 2\theta_{i,j}^n + \theta_{i,j-1}^n}{\Delta z^2} \right). \tag{4.42}
\end{aligned}$$

En posant :

$$P = \frac{\Delta\tau}{4r\Delta r} \left[\frac{1}{\sqrt{Ra Pr}} - \frac{\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j-1}^n}{2\Delta z} \right]$$

$$Q = \frac{\Delta\tau}{8r\Delta r\Delta z} (\Psi_{i+1,j}^{n+1/2} - \Psi_{i-1,j}^{n+1/2})$$

$$R = \frac{\Delta\tau}{2\Delta r^2 \sqrt{Ra Pr}}$$

$$S = \frac{\Delta\tau}{2\Delta z^2 \sqrt{Ra Pr}}$$

Et en exprimant $\Psi^{n+1/2}$ en fonction de Ψ^{n+1} et Ψ^n , on trouve :

$$\begin{aligned} (-P + R)\theta_{i-1,j}^{n+1/2} + (-1 - 2R)\theta_{i,j}^{n+1/2} + (P + R)\theta_{i+1,j}^{n+1/2} &= (Q - S)\theta_{i,j-1}^n + (2S - 1)\theta_{i,j}^n \\ &+ (-Q - S)\theta_{i,j+1}^n \end{aligned} \quad (4.43)$$

Etape 2 - Correcteur

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{i,j}^{n+1} - \theta_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta\tau/2} &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{Ra Pr}} - \frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta z} \right) \frac{\theta_{i+1,j}^{n+1/2} - \theta_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta r} + \frac{1}{r} \frac{\Psi_{i+1,j}^{n+1/2} - \Psi_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta r} \\ \frac{\theta_{i,j+1}^{n+1} - \theta_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta z} &+ \frac{1}{\sqrt{Pr Ra}} \left(\frac{\theta_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\theta_{i,j}^{n+1/2} + \theta_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta r^2} + \frac{\theta_{i,j+1}^{n+1} - 2\theta_{i,j}^{n+1} + \theta_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta z^2} \right) \end{aligned} \quad (4.44)$$

On pose :

$$P' = \frac{\Delta\tau}{4r\Delta r} \left[\frac{1}{\sqrt{Ra Pr}} - \frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta z} \right]$$

$$Q' = \frac{\Delta\tau}{8r\Delta r\Delta z} (\Psi_{i+1,j}^{n+1/2} - \Psi_{i-1,j}^{n+1/2})$$

$$R' = \frac{\Delta\tau}{2\Delta r^2 \sqrt{Ra Pr}}$$

$$S' = \frac{\Delta\tau}{2\Delta z^2 \sqrt{Ra Pr}}$$

Et en exprimant $\Psi^{n+1/2}$ en fonction de Ψ^{n+1} et Ψ^n , on trouve :

$$\begin{aligned}
(-Q' + S')\theta_{i,j-1}^{n+1} + (-1 - 2S')\theta_{i,j}^{n+1} + (Q' + S')\theta_{i,j+1}^{n+1} &= (P' - R')\theta_{i-1,j}^{n+1/2} \\
&+ (-1 + 2R')\theta_{i,j}^{n+1/2} + (-P' - R')\theta_{i+1,j}^{n+1/2}
\end{aligned} \quad (4.45)$$

Les équations linéaire (4.38),(4.40), (4.43) et (4.45) sont obtenues après discrétisation des équations non linéaires (3.33) et (3.34) en utilisant la méthode ADI. Les coefficients de ces équations sont considérés comme connus à chaque instant. Chaque équation constitue un système d'équations constituant une matrice tridiagonale. Le système ainsi obtenu est résolu par l'algorithme T.D.M.A de Thomas (Tri Diagonal Matrix Algorithm) (Annexe 1) [23]

6. DISCRETISATION DE L'EQUATION DE FONCTION DE COURANT

L'équation de la fonction de courant est donnée par (3.32) :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\Omega - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (4.46)$$

En utilisant les différences finies décentrées gauche pour le temps et les différences finies centrées pour l'espace tels que :

$$\frac{\Psi_{i,j}^n - \Psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta \tau} = -\Omega_{i,j}^{n-1} - \frac{1}{r} \frac{\Psi_{i+1,j}^{n-1} - \Psi_{i-1,j}^{n-1}}{2\Delta r} + \frac{\Psi_{i+1,j}^{n-1} - 2\Psi_{i,j}^{n-1} + \Psi_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta r^2} + \frac{\Psi_{i,j+1}^{n-1} - 2\Psi_{i,j}^{n-1} + \Psi_{i,j-1}^{n-1}}{\Delta z^2}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\Psi_{i,j}^n &= (ac + bc)\Psi_{i-1,j}^{n-1} + (1 - 2bc - 2cc)\Psi_{i,j}^{n-1} + (-ac + bc)\Psi_{i+1,j}^{n-1} + cc\Psi_{i,j+1}^{n-1} \\
&+ cc\Psi_{i,j-1}^{n-1} + cc\Psi_{i,j+1}^{n-1} - \Delta \tau \Omega_{i,j}^{n-1}
\end{aligned} \quad (4.47)$$

Avec :

$$ac = \frac{\Delta \tau}{2r(i)\Delta r}, \quad bc = \frac{\Delta \tau}{\Delta r^2}, \quad cc = \frac{\Delta \tau}{\Delta z^2}.$$

La résolution du système d'équations ainsi obtenu est effectuée en utilisant la méthode de Gauss Seidel.

7. CONCLUSION

Nous pouvons conclure de cette étude que :

- les équations de conservation régissant le phénomène de la convection naturelle sont des équations différentielles complexes, et leur résolution nécessite l'emploi de techniques numériques.
- plusieurs méthodes numériques sont disponibles dans la littérature, telles que les différences finies, les éléments finis, et les volumes finis.
- parmi les différents schémas aux différences finies présentés, il s'avère que la méthode implicite de directions alternées (ADI) est la plus avantageuse, en raison de sa stabilité inconditionnelle, sa convergence et sa consistance.

Chapitre 5

Résultats obtenus et discussions

1. INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est d'appliquer les formules numériques préalablement établi (cf. Chap. 4) à un réservoir cylindrique de hauteur H et de diamètre D , contenant du gaz naturel liquéfié; en conséquence nous abordons ici les 2 points suivants :

- étude du régime variable
- étude de l'état stationnaire, et analyse de l'influence des principaux paramètres intervenant agissant sur le phénomène

Les méthodes de simulation numérique utilisées pour résoudre les équations de vorticité et d'énergie (ADI), et l'équation de la fonction de courant (Méthode itérative de Gauss), permettent de décrire convenablement le régime variable avant d'atteindre l'état stationnaire. Le critère de convergence adopté à chaque pas de

temps est $\frac{\sum_i \sum_j |F_{i,j}^{n+1} - F_{i,j}^n|}{\sum_i \sum_j |F_{i,j}^{n+1}|} \leq 10^{-7}$, où F représente la température ou la vorticité.

L'étude du problème de la convection naturelle dans un réservoir cylindrique est liée à trois principaux paramètres : le rapport de forme $\frac{H}{D}$, le nombre de Rayleigh Ra et le nombre de Prandtl Pr .

Des essais numériques ont été nécessaires pour optimiser le temps et la précision des calculs. Ainsi, un maillage uniforme de 21×21 a été trouvé suffisant pour simuler les distributions d'écoulement et de température dans une cavité cylindrique de rapport de forme $0.125 \leq \frac{H}{D} \leq 0.5$. Ces rapports de forme sont inférieurs à 1 car ils correspondent au fait que les réservoirs de stockage du GNL sont généralement partiellement remplis. Les autres paramètres utilisés dans les calculs sont : $Pr = 2.2$ (Nombre de Prandtl du GNL) et $10^3 \leq Ra \leq 5 \times 10^4$.

Les principaux résultats sont présentés, sous forme de figures, pour chaque rapport de forme et chaque valeur du nombre de Rayleigh Ra . Nous présentons au premier

2. COMPORTEMENT THERMIQUE ET DYNAMIQUE DU FLUIDE EN REGIME VARIABLE

Les figures 5.1 et 5.2 représentent respectivement les variations de température et de vorticité en fonction du temps pour $H/D= 0.5$ et $Ra = 1E03$, à des positions différentes dans le réservoir.

On remarque que les parties fluides qui se situent près de l'axe du cylindre subissent des variations très faibles de leur température, puis ces variations deviennent importantes au fur et à mesure qu'on se rapproche des parois latérales et de la surface libre. Un comportement dynamique variable change en fonction du temps, avant d'atteindre une limite asymptotique stationnaire.

Nous assistons au même phénomène pour des valeurs différentes du rapport de forme $H/D= 0.125$, 0.25 et du nombre de Rayleigh Ra : variant de $4E02$ à $2E04$. Nous rappelons que le l'état stationnaire est obtenu lorsque l'écart relatif moyen de la température et de la vorticité entre deux pas de temps devient inférieur à 10^{-7} . (Figures A1 à A10). Cependant, nous remarquons d'après ces différentes figures une augmentation apparente de la température en fonction du temps pour toutes les valeurs du rapport de forme et du nombre de Rayleigh. En effets les courbes des figures 5.3 et 5.4 qui correspondent respectivement à l'évolution des températures maximale T_{max} et minimale T_{min} en fonction du temps, peuvent nous informer sur cette augmentation au cours du régime variable avant d'atteindre l'état stationnaire. Nous remarquons la même évolution des fonctions de courant maximale ψ_{max} et minimale ψ_{min} (Figures 5.5 et 5.6). La vitesse verticale maximale donne une idée sur l'intensité de l'écoulement. Les résultats de la figure 5.7 montrent que cette vitesse augmente en fonction du temps pour toutes les valeurs du rapport de forme et du nombre de Rayleigh.

Les figures 5.8, 5.9 et 5.10 représentent, pour $Ra = 8.10^3$ et $H/D = 0.125$, les isothermes, les lignes de courant et les champs de vitesse en régime variable. Une structure bi-cellulaire est observée. On remarque d'après la figure 5.10 qu'initialement l'écoulement est unicellulaire: une cellule se développe près de la paroi latérale du réservoir. Elle se déplace de plus en plus vers le centre du cylindre avant qu'une deuxième cellule se développe près de la paroi latérale. Ce déplacement de cellule s'accompagne d'un accroissement de la température et de la vitesse verticale du fluide qui atteint une valeur maximale $V_{max}=0.13$ au temps $t=30$.

Cette conclusion a un intérêt, c'est celui de mettre en évidence le processus de la stratification, puisque c'est à cause de ce développement et de déplacement de cellules que la convection naturelle a eu lieu. En effet, chaque couche du GNL absorbe une quantité de chaleur plus ou moins importante et la transmet à la couche voisine jusqu'à l'équilibre thermique. L'échauffement du liquide provoque la formation de couches de températures différentes ; ces couches peuvent subir un mouvement de rotation suivi d'un renversement (Rollover), et par la suite d'une évaporation.

Pour des valeurs du nombre de Rayleigh allant de $4E03$ à $2 E04$, et pour des rapports de forme de 0.25 et 0.5, nous observons le même comportement du fluide en régime variable (Figures 5.11 à 5.16 et figures A11 à 19); néanmoins une dépendance apparente des températures, des fonctions de courant et des vitesses maximales et minimales par rapport aux deux paramètres Ra et H/D est remarquée. En conséquence, une étude de sensibilité sur ces deux grandeurs s'impose, et fera l'objet du prochain paragraphe.

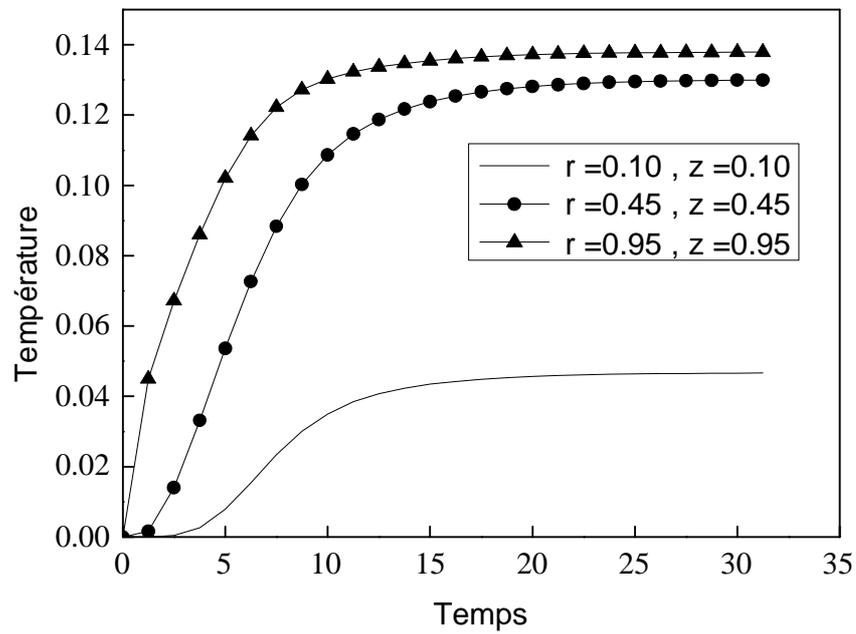


Figure 5.1. Evolution de la température en fonction du temps pour $H/D=0.5$ et $Ra=1E03$

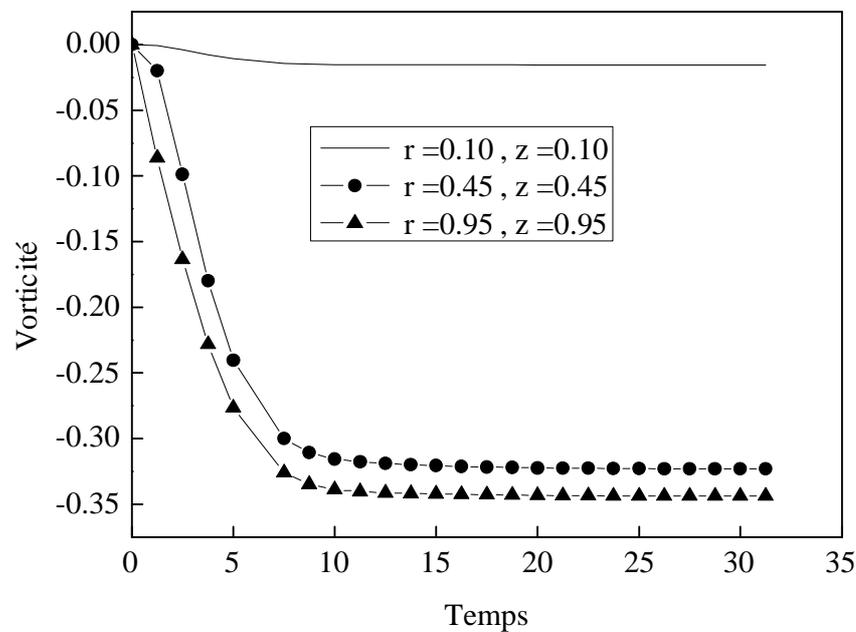


Figure 5.2. Evolution de la vorticité en fonction du temps pour $H/D=0.5$ et $Ra=1E03$

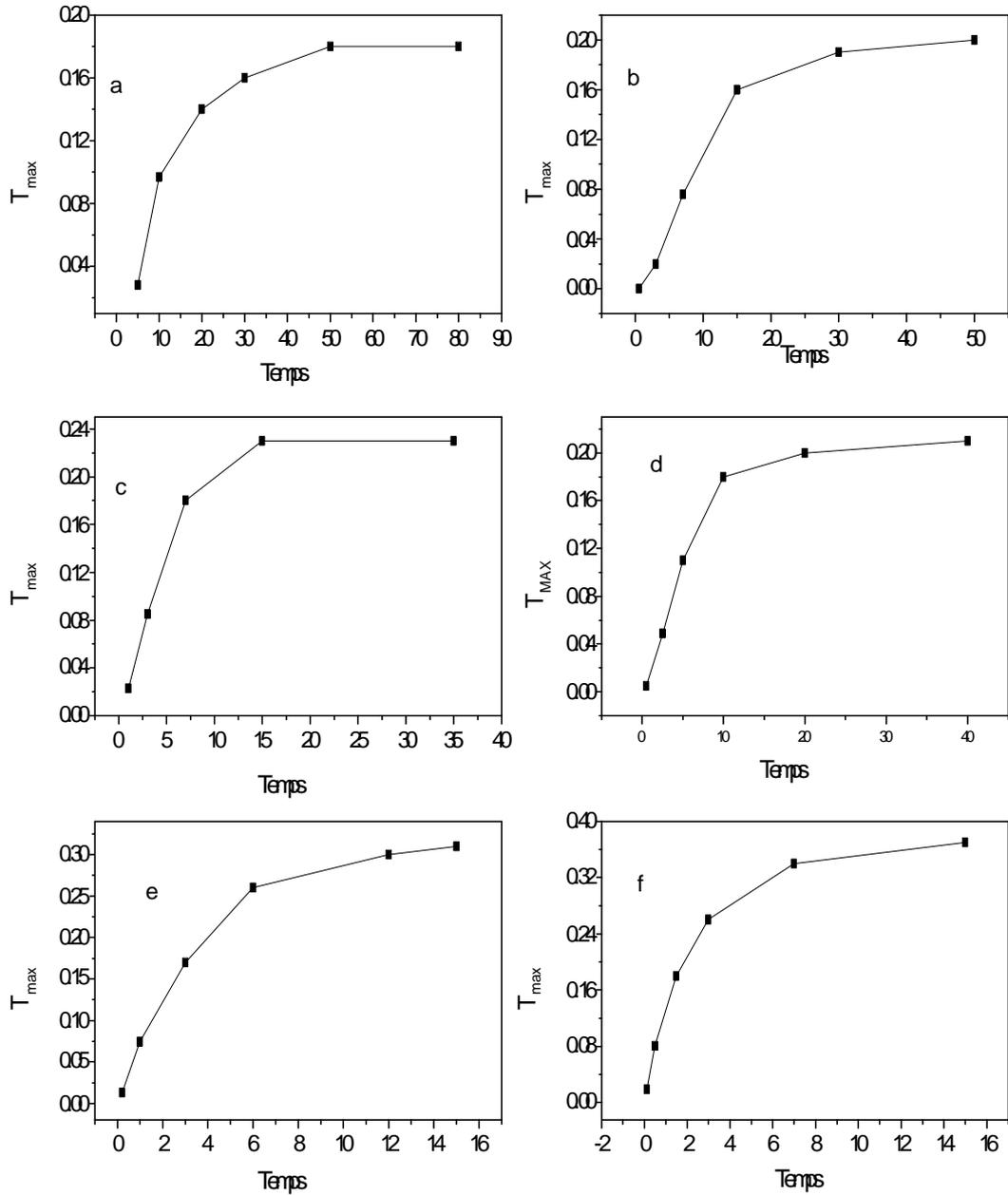


Figure 5.3. Evolution de la température maximale en fonction de temps
 (a) $H/D=0.125, Ra=2.E4$; (b) $H/D=0.125, Ra=8.E3$, (c) $H/D=0.25, Ra=4.E3$;
 (d) $H/D=0.25, Ra=8.E3$; (e) $H/D=0.5, Ra=2.E3$; (f) $H/D=0.5, Ra=4.E2$

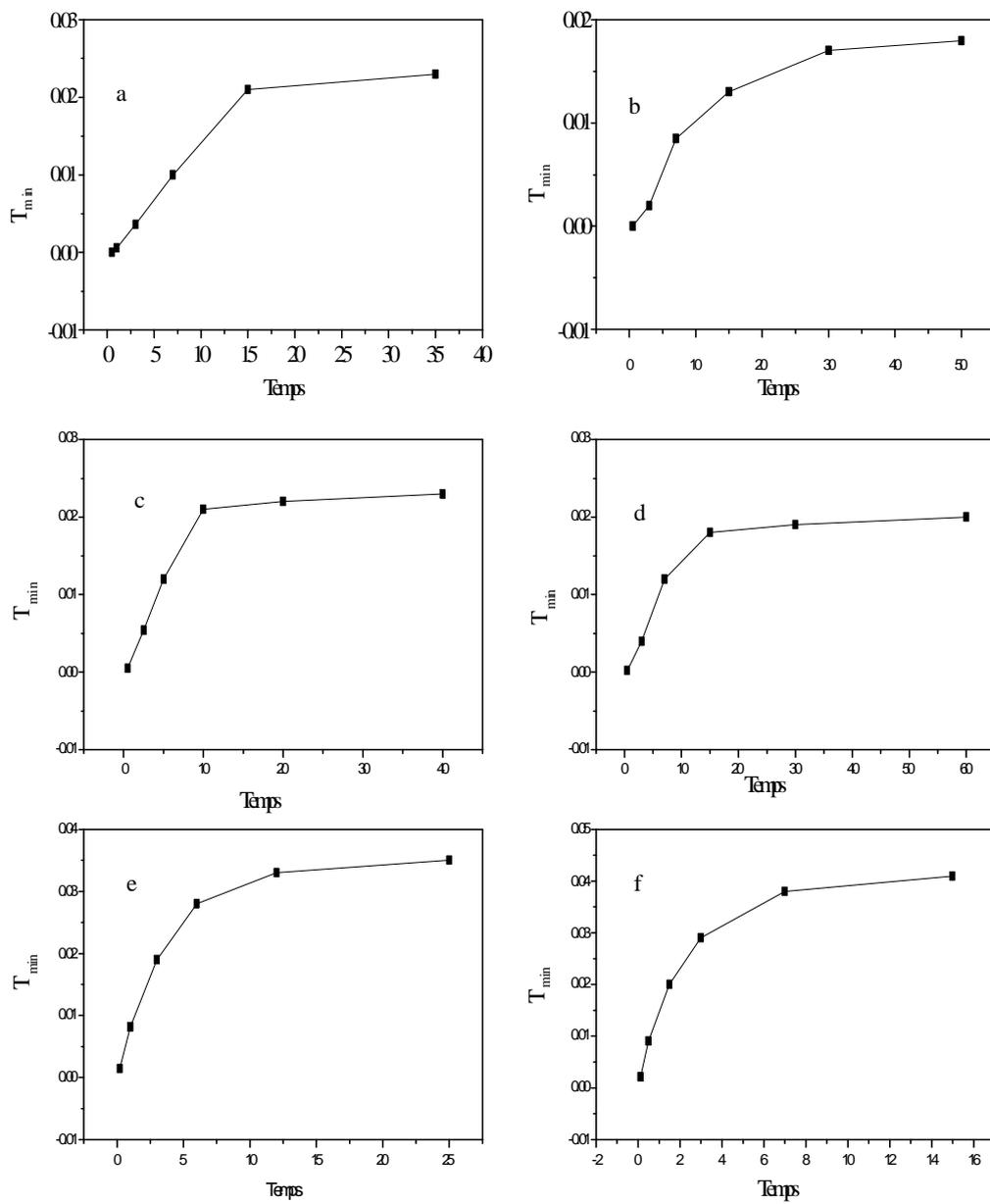


Figure 5.4. Evolution de la température minimale en fonction de temps
 (a) $H/D=0.125, Ra=4.E3$; (b) $H/D=0.125, Ra=8.E3$; (c) $H/D=0.25, Ra=4.E3$,
 (d) $H/D=0.25, Ra=2.E4$; (e) $H/D=0.5, Ra=2.E3$; (f) $H/D=0.5, Ra=4.E2$

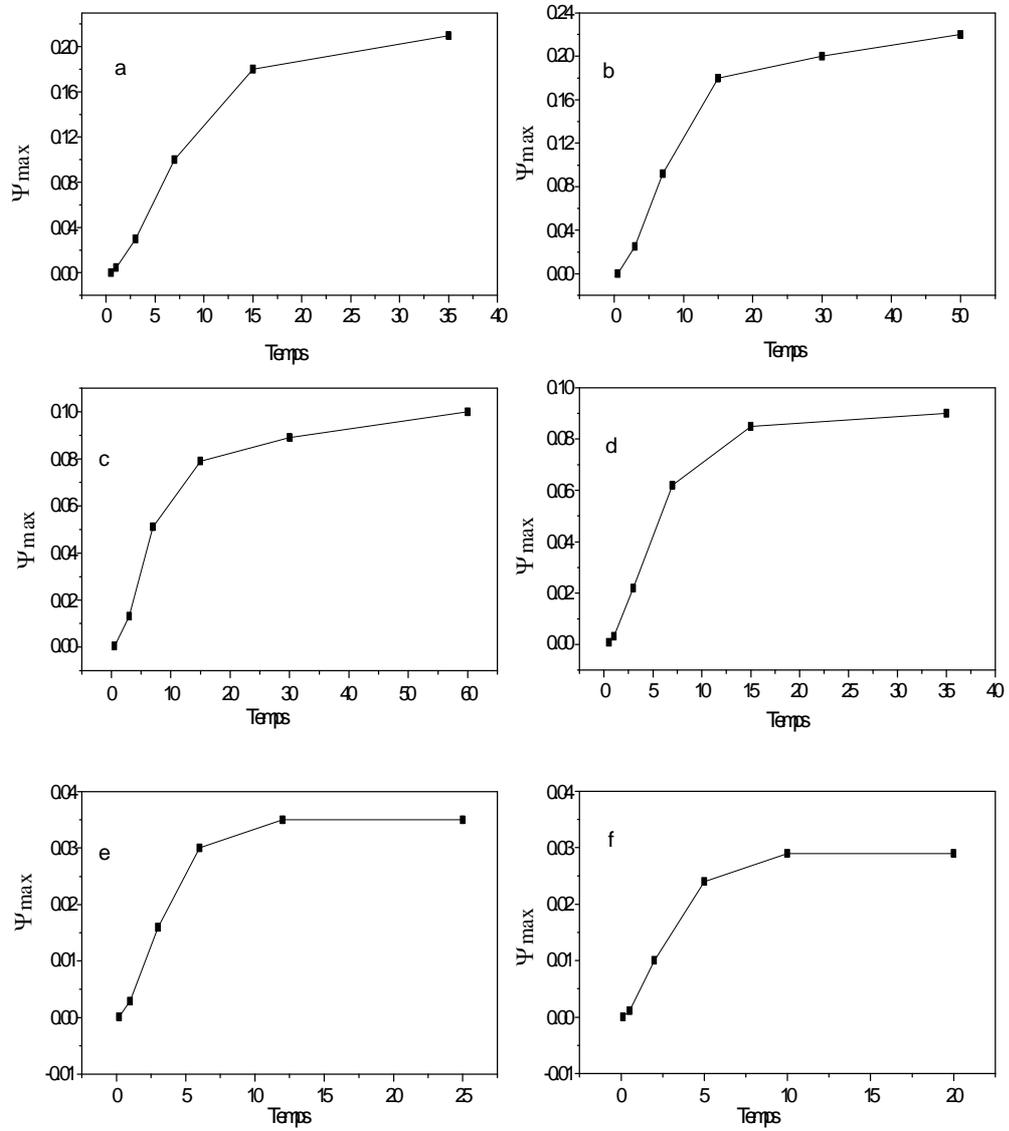


Figure 5.5. Evolution de la fonction de courant maximale en fonction du temps
 (a) $H/D = 0.125$, $Ra = 4.E3$; (b) $H/D = 0.125$, $Ra = 8.E3$; (c) $H/D = 0.25$, $Ra = 2.E4$
 (d) $H/D = 0.25$, $Ra = 4.E3$; (e) $H/D = 0.5$, $Ra = 2.E3$; (f) $H/D = 0.5$, $Ra = 8.E2$

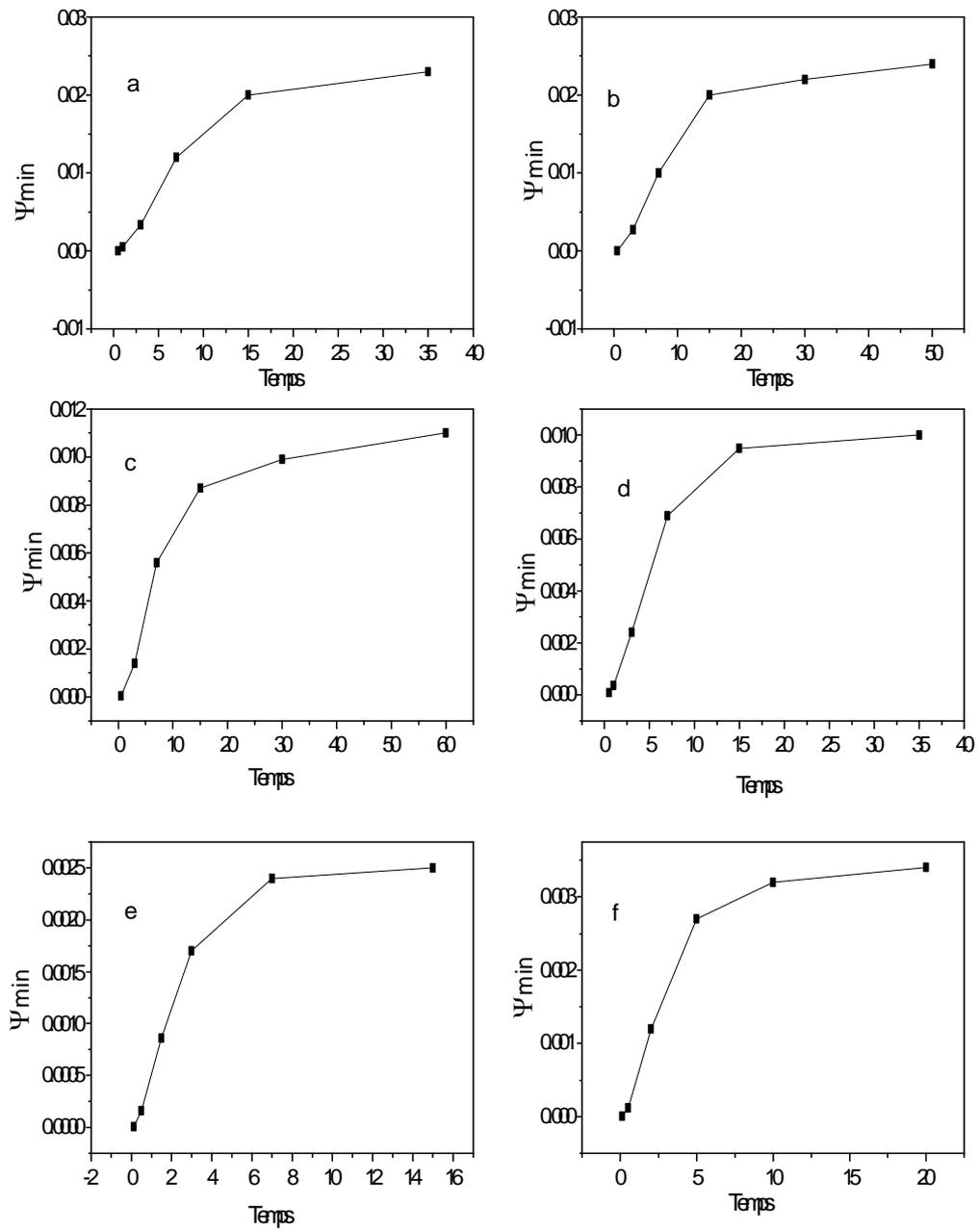


Figure 5.6. Evolution de la fonction de courant minimale en fonction du temps
 (a) $H/D = 0.125, Ra = 4.E3$; (b) $H/D = 0.125, Ra = 8.E3$; (c) $H/D = 0.25, Ra = 2.E4$
 (d) $H/D = 0.25, Ra = 4.E3$, (e) $H/D = 0.5, Ra = 4.E2$; (f) $H/D = 0.5, Ra = 8.E2$

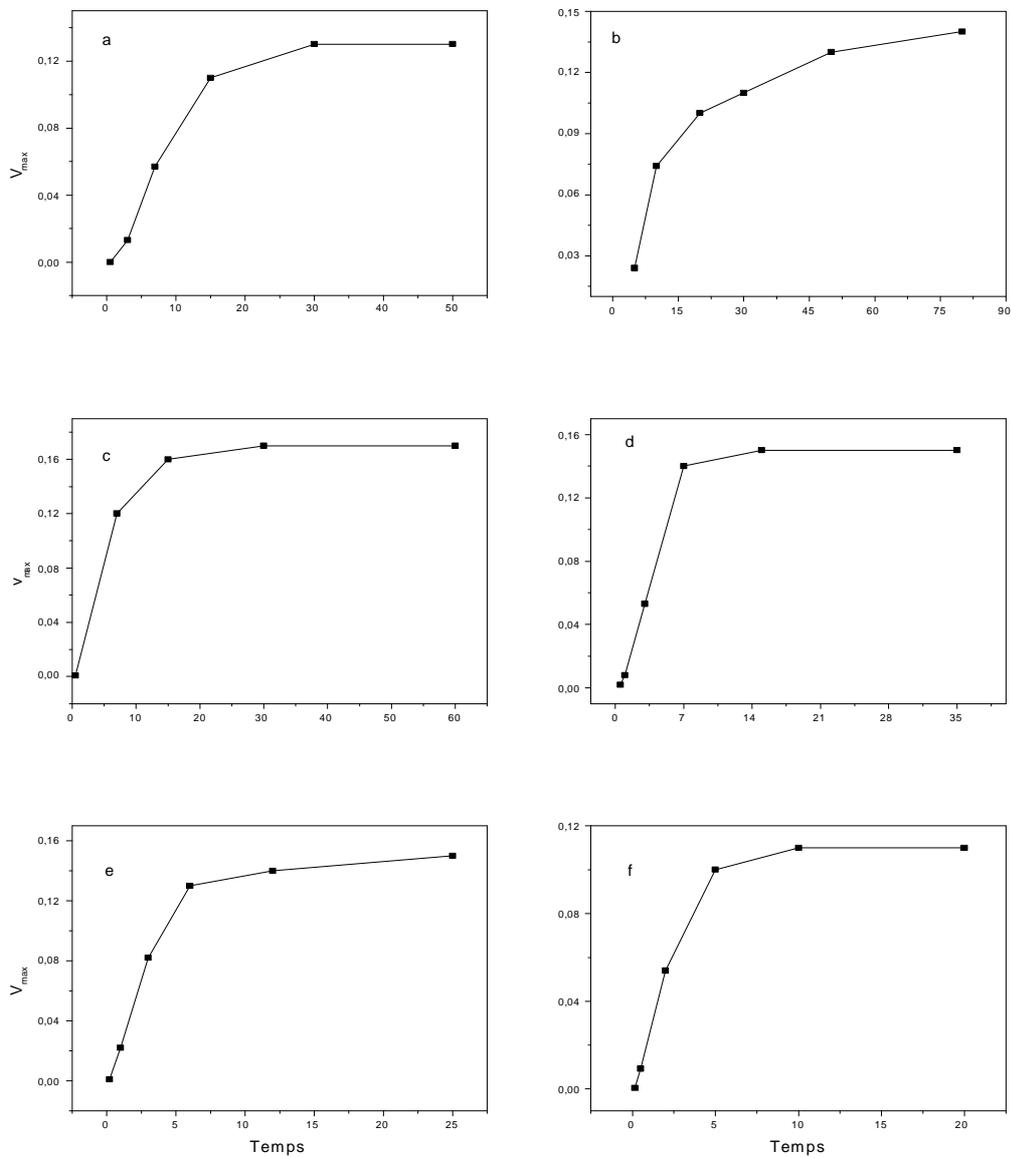


Figure 5.7. Evolution de la vitesse verticale maximale en fonction du temps

(a) $H/D=0.125$; $Ra=4.E3$, (b) $H/D=0.125$; $Ra=8.E3$

(c) $H/D=0.25$; $Ra=4.E3$; (d) $H/D=0.25$; $Ra=2.E4$

(e) $H/D=0.5$; $Ra=2.E3$; (f) $H/D=0.5$; $Ra=4.E2$

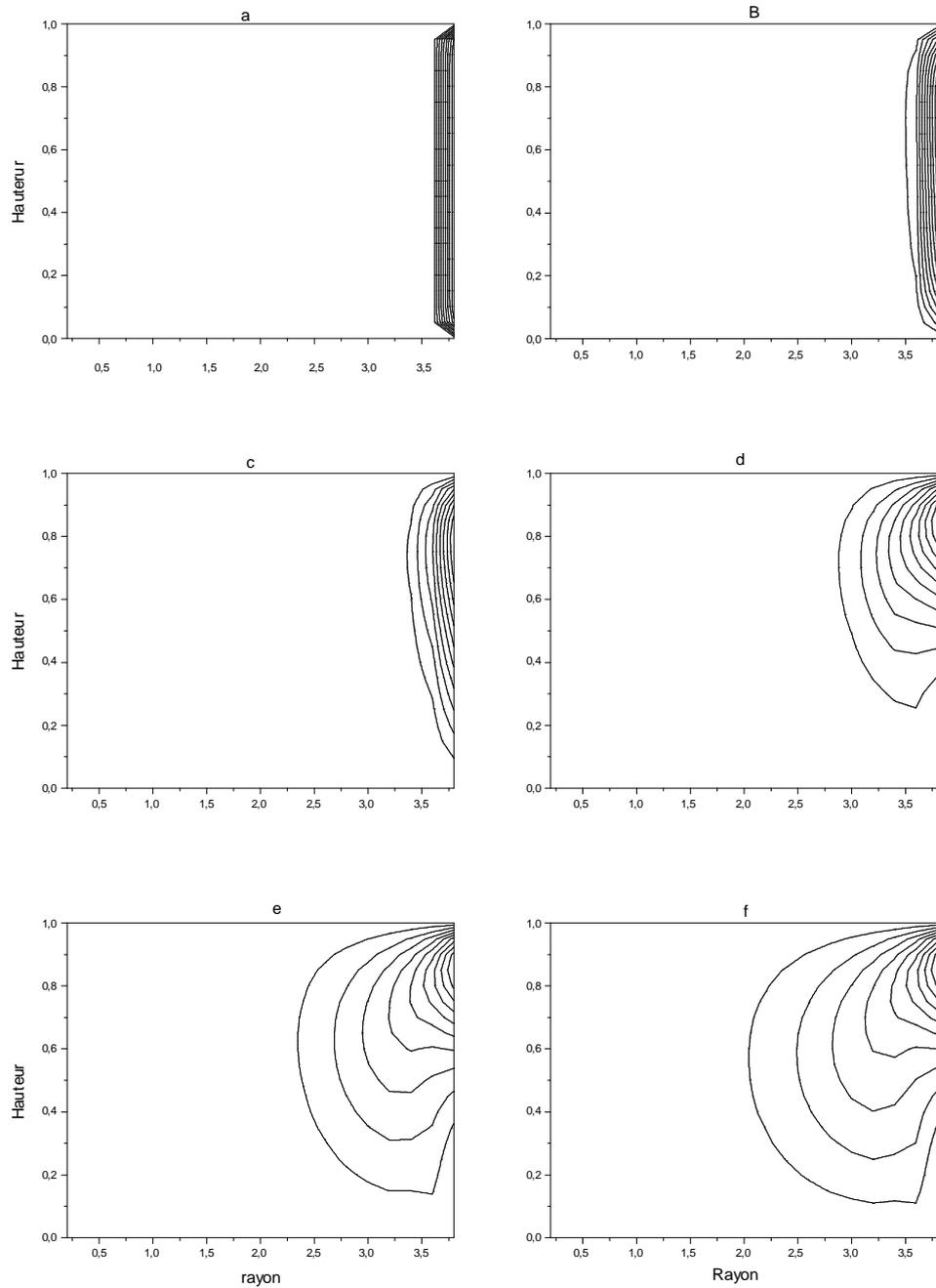


Figure 5.8. Profils de température (isothermes) en régime variable pour $H/D=0.125$; $Ra=8.E3$

- (a) $t=0.5$, $T_{\min}=3.3.E-6$, $T_{\max}=3.3.E-5$; (b) $t=3$, $T_{\min}=0.0022$, $T_{\max}=0.02$;
 (c) $t=7$, $T_{\min}=0.0085$, $T_{\max}=0.076$; (d) $t=15$, $T_{\min}=-0.0048$, $T_{\max}=0.16$;
 (e) $t=30$, $T_{\min}=-0.0045$, $T_{\max}=0.19$; (f) $t=50$, $T_{\min}=-0.0045$, $T_{\max}=0.2$.

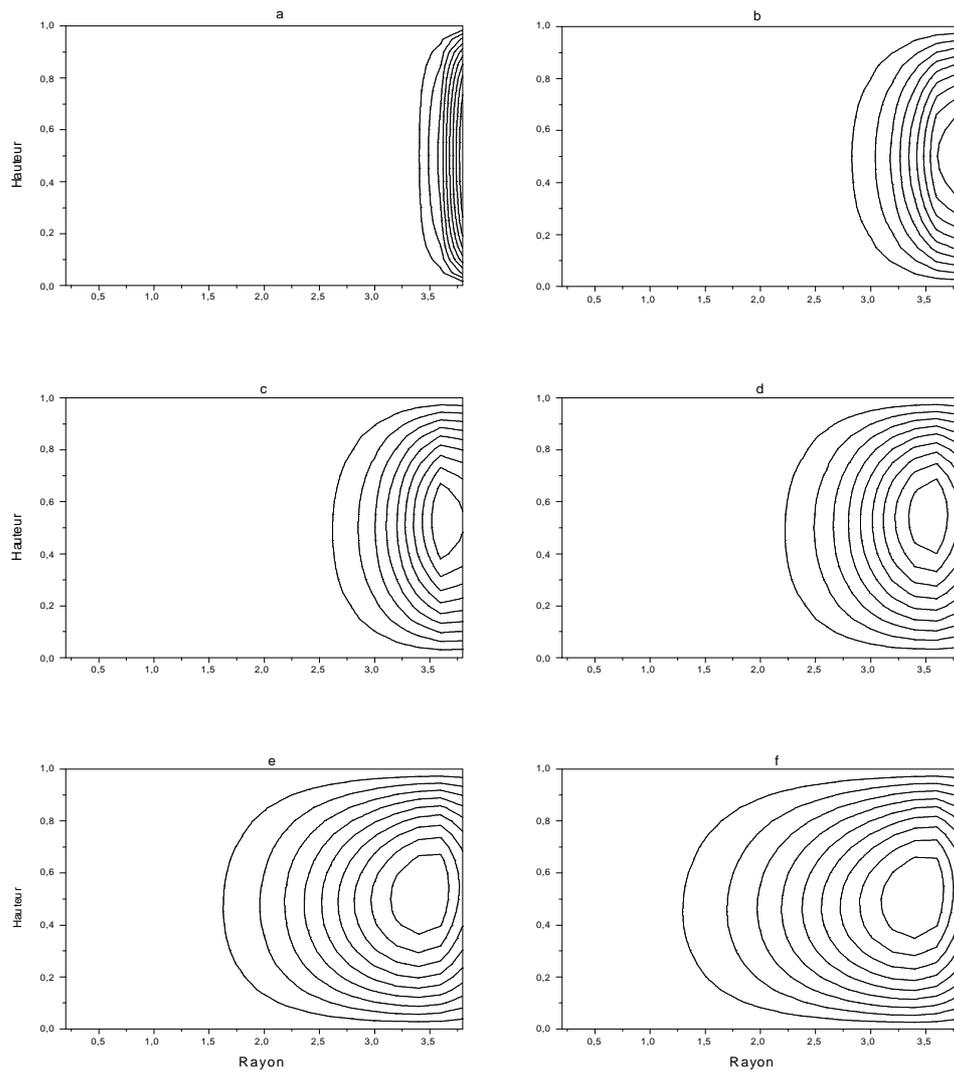


Figure 5.9. Les lignes de courants en régime variable
pour $H/D=0.125$; $Ra=8.E3$

- (a) $t=0.5$, $\Psi_{\min}=2.5.E-6$, $\Psi_{\max}=2.3.E-5$; (b) $t=3$, $\Psi_{\min}=0.0027$, $\Psi_{\max}=0.025$;
(c) $t=7$, $\Psi_{\min}=0.01$, $\Psi_{\max}=0.092$; (d) $t=15$, $\Psi_{\min}=0.02$, $\Psi_{\max}=0.18$;
(e) $t=30$, $\Psi_{\min}=0.022$, $\Psi_{\max}=0.2$; (f) $t=50$, $\Psi_{\min}=0.024$, $\Psi_{\max}=0.22$.

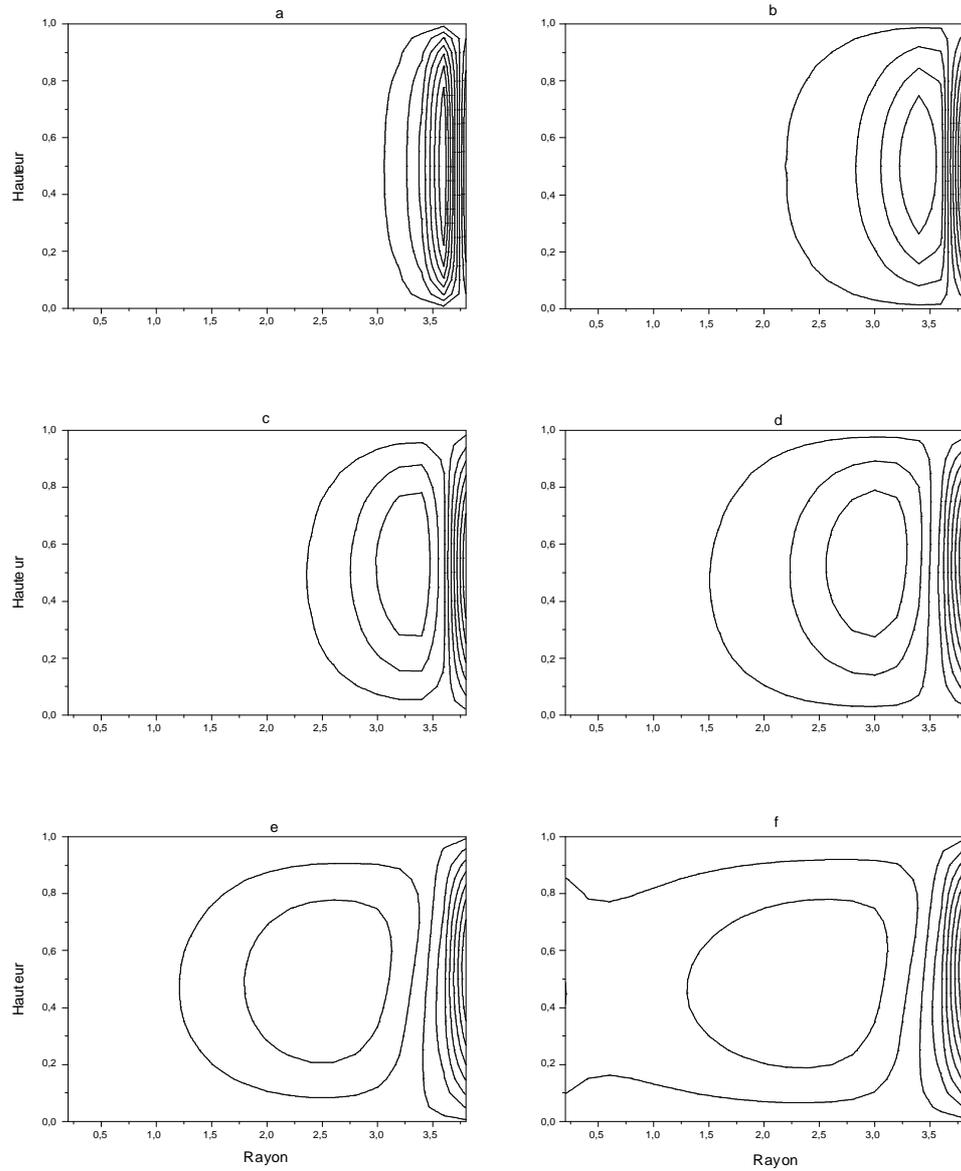


Figure 5.10. Profils de vitesse en régime variable pour $H/D=0.125$; $Ra=8.E3$;
 (a) $t=0.5$, $V_{\min}=-1.6.E-5$, $V_{\max}=3.4.E-6$; (b) $t=3$, $V_{\min}=-0.012$, $V_{\max}=0.013$;
 (c) $t=7$, $V_{\min}=-0.038$, $V_{\max}=0.057$; (d) $t=15$, $V_{\min}=-0.064$, $V_{\max}=0.11$;
 (e) $t=30$, $V_{\min}=-0.058$, $V_{\max}=0.13$; (f) $t=50$, $V_{\min}=-0.056$, $V_{\max}=0.13$

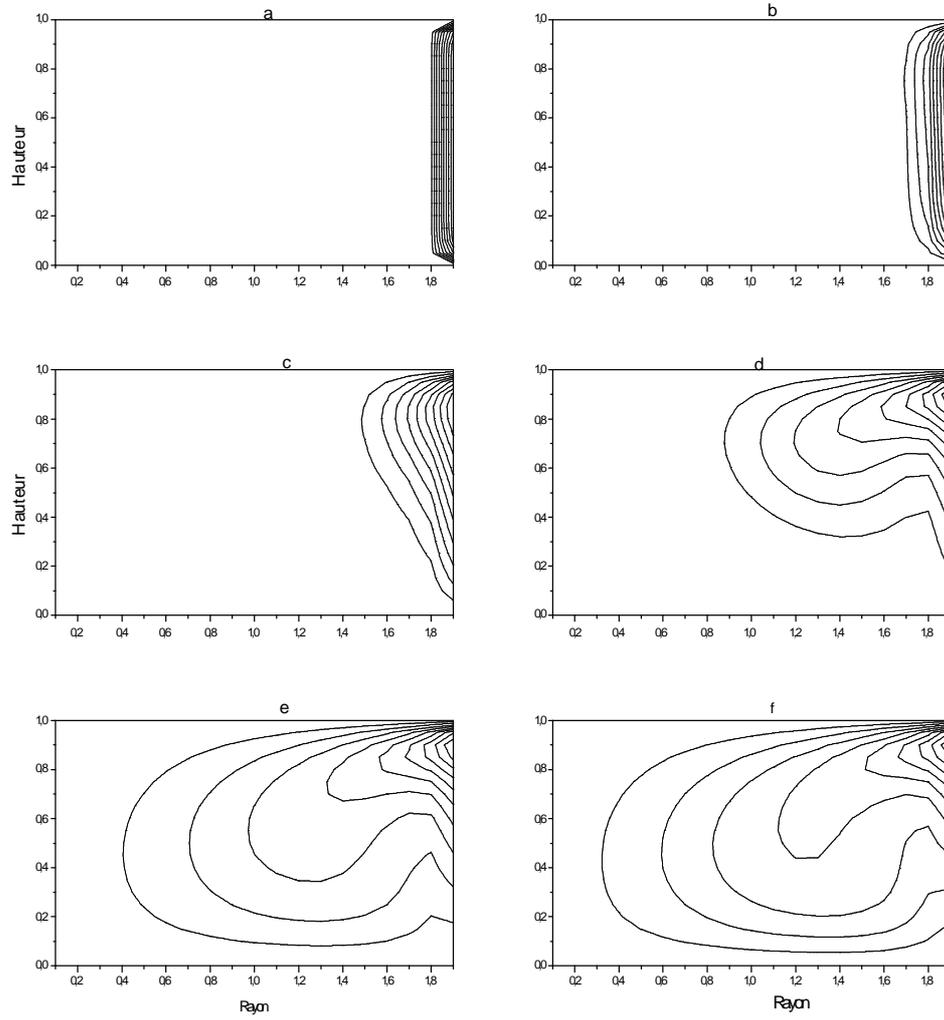


Figure 5.11. Profils de température (isothermes) en régime variable pour $H/D = 0.25$; $Ra = 2.E4$;

(a) $t=0.5$, $T_{\min} = 2.4.E-4$, $T_{\max} = 0.0022$; (b) $t=3$, $T_{\min} = 0.004$, $T_{\max} = 0.36$;

(c) $t=7$, $T_{\min} = 0.012$, $T_{\max} = 0.11$; (d) $t=15$, $T_{\min} = 0.018$, $T_{\max} = 0.16$;

(e) $t=30$, $T_{\min} = 0.019$, $T_{\max} = 0.17$; (f) $t=60$, $T_{\min} = 0.02$, $T_{\max} = 0.18$.

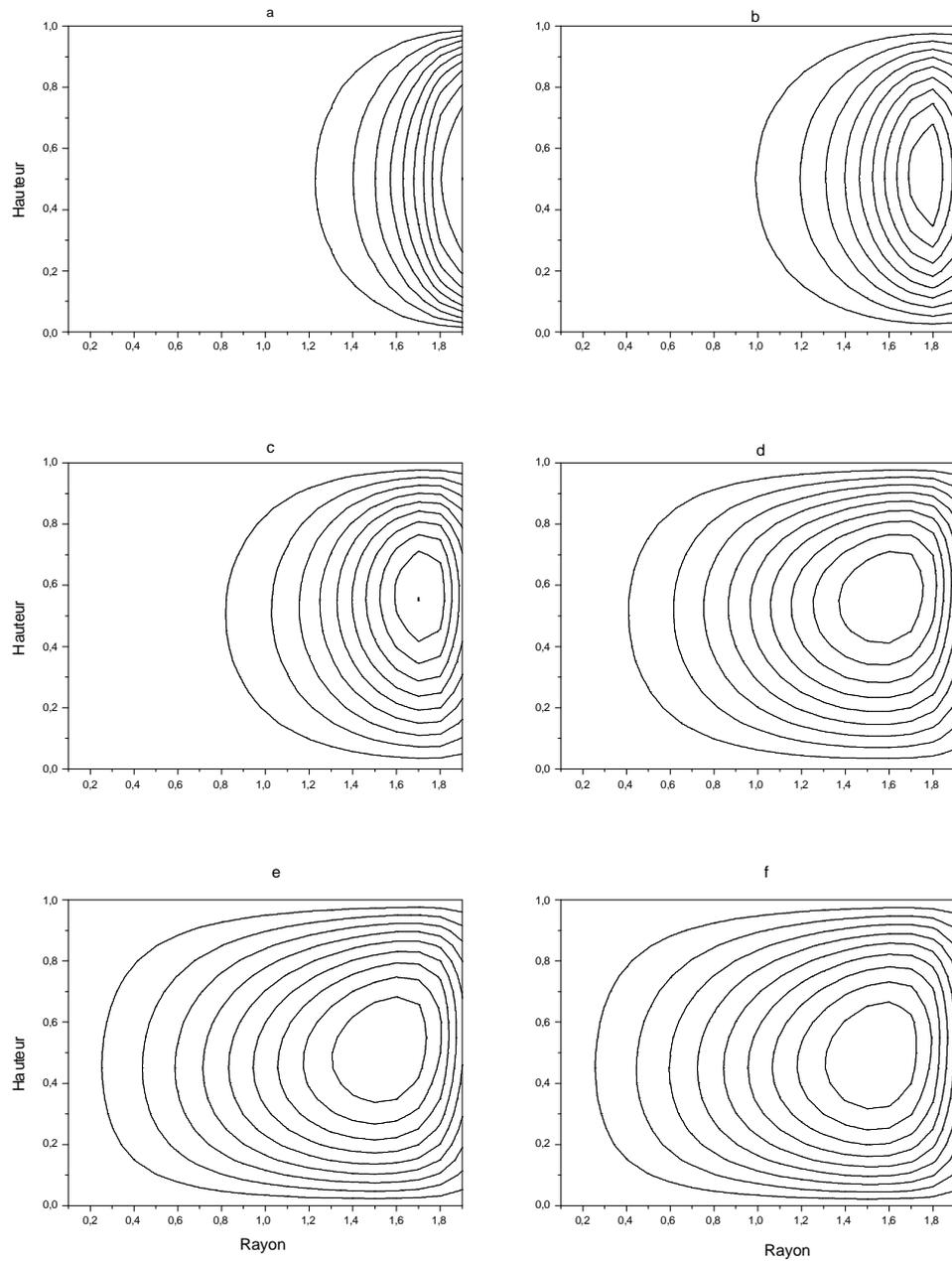


Figure 5.12. Les lignes de courants en régime variable pour $H/D=0.25$; $Ra=2.E4$

- (a) $t=0.5$, $\Psi_{\min}=4.E-5$, $\Psi_{\max}=3.6.E-4$; (b) $t=3$, $\Psi_{\min}=0.0014$, $\Psi_{\max}=0.013$;
 (c) $t=7$, $\Psi_{\min}=0.0056$, $\Psi_{\max}=0.079$; (d) $t=15$, $\Psi_{\min}=0.0087$, $\Psi_{\max}=0.079$;
 (e) $t=30$, $\Psi_{\min}=0.0099$, $\Psi_{\max}=0.089$; (f) $t=60$, $\Psi_{\min}=0.011$, $\Psi_{\max}=0.1$.

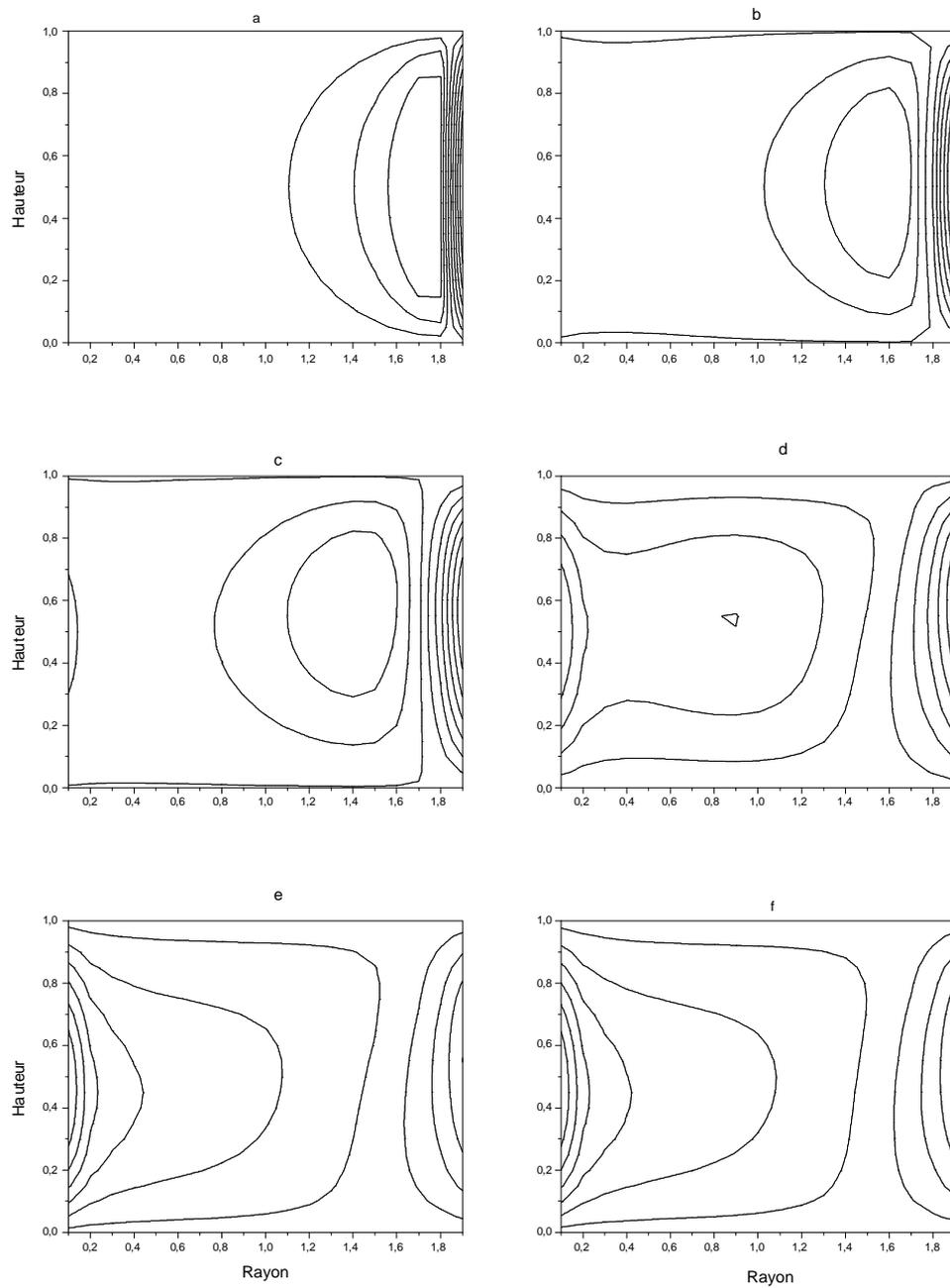


Figure 5.13. Profils de vitesse en régime variable pour $H/D = 0.25$; $Ra = 2.E4$
 (a) $t=0.5$, $V_{\min} = -5.4.E-4$, $V_{\max} = 8.E-4$; (b) $t=3$, $V_{\min} =, V_{\max}$;
 (c) $t=7$, $V_{\min} = -0.061$, $V_{\max} = 0.12$; (d) $t=15$, $V_{\min} = -0.17$, $V_{\max} = 0.16$;
 (e) $t=30$, $V_{\min} = -0.37$, $V_{\max} = 0.15$; (f) $t=60$, $V_{\min} = -0.42$, $V_{\max} = 0.17$.

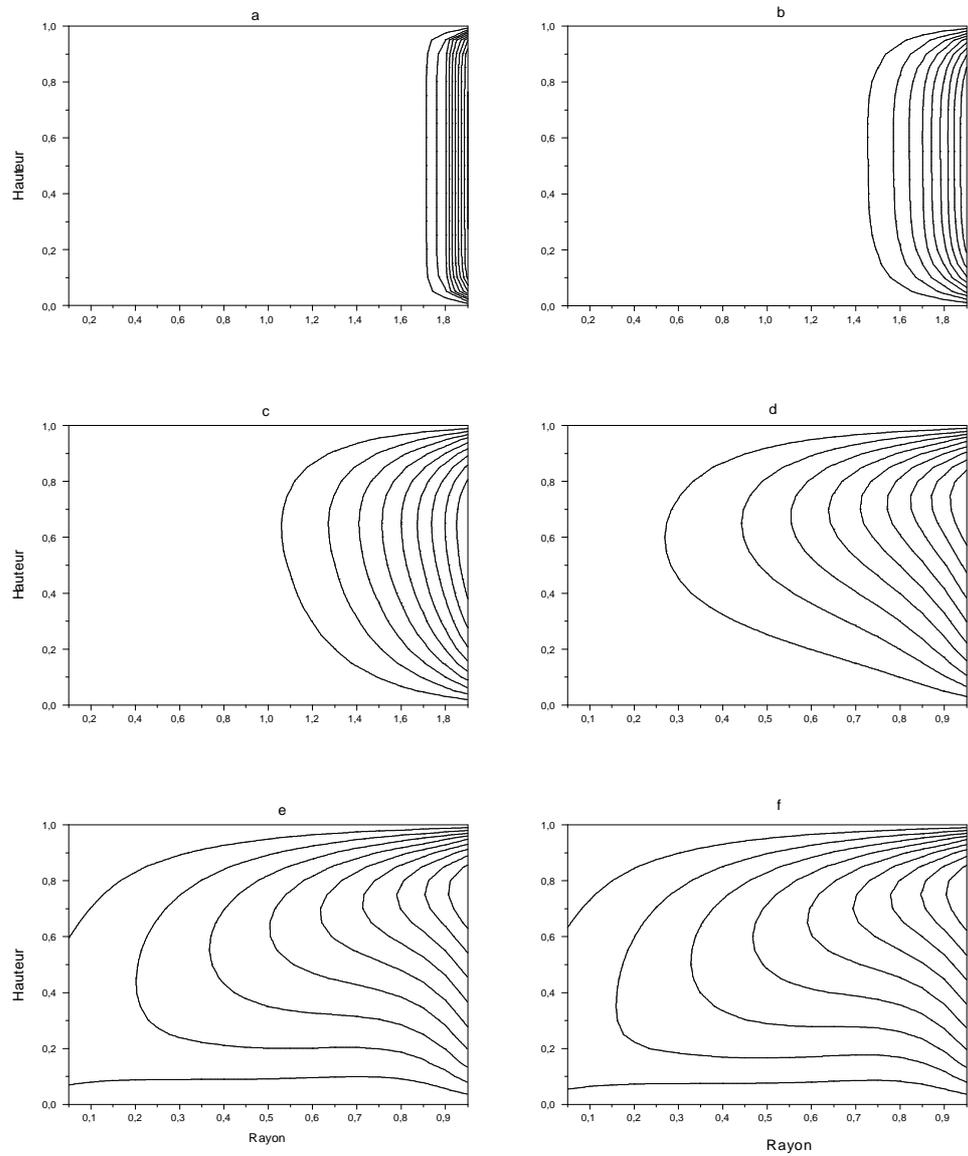


Figure 5.14. Profils de température (isothermes) en régime variable pour $H/D=0.5$; $Ra=2.E3$

- (a) $t=0.2$, $T_{\min}=0.0014$, $T_{\max}=0.013$; (b) $t=1$, $T_{\min}=0.0082$, $T_{\max}=0.074$;
 (c) $t=3$, $T_{\min}=0.019$, $T_{\max}=0.17$; (d) $t=6$, $T_{\min}=0.028$, $T_{\max}=0.26$;
 (e) $t=12$, $T_{\min}=0.033$, $T_{\max}=0.3$; (f) $t=25$, $T_{\min}=0.035$, $T_{\max}=0.31$.

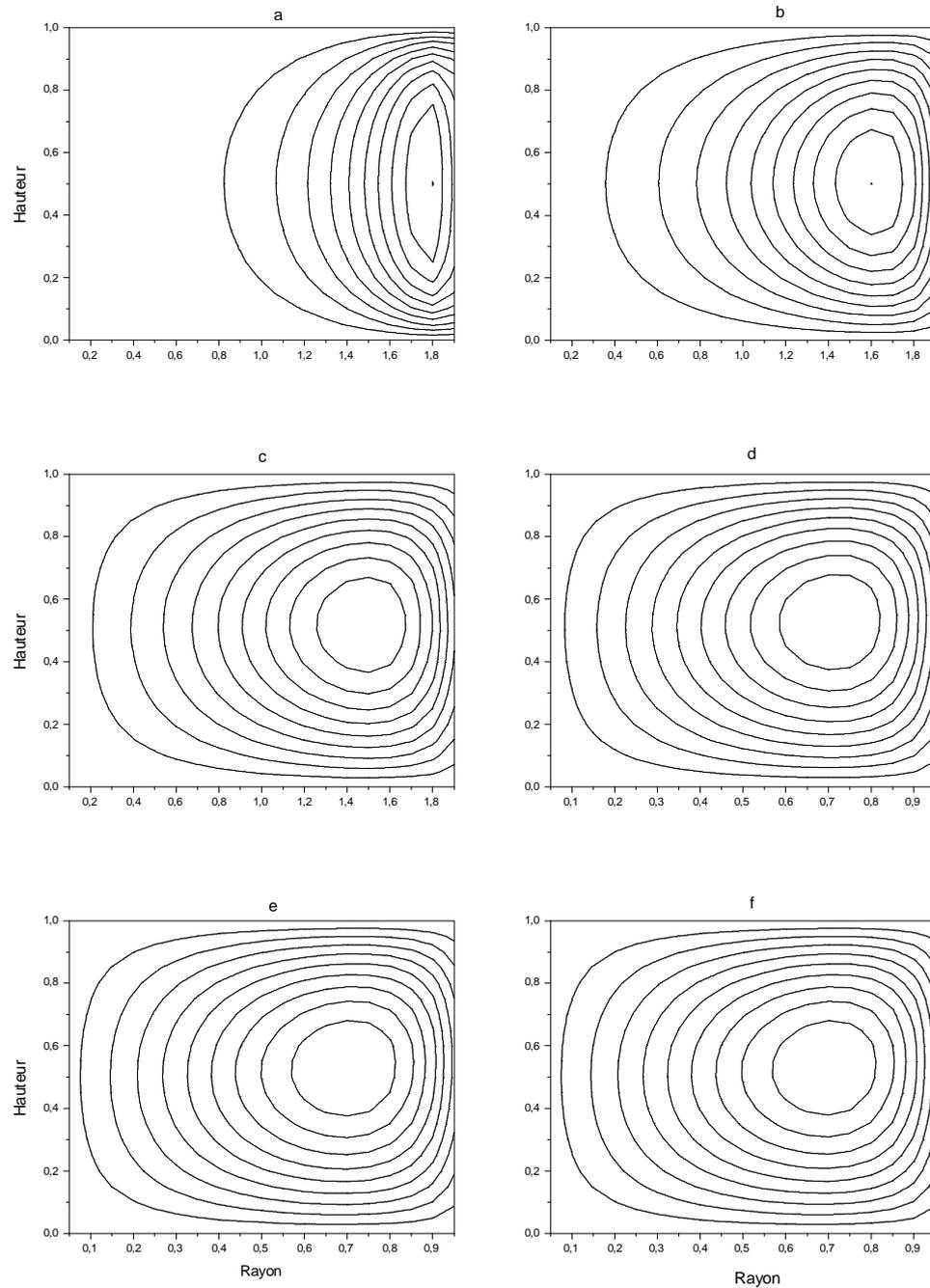


Figure 5.15. Les lignes de courants en régime variable
pour $H/D = 0.5$; $Ra = 2.E3$;

- (a) $t=0.2$, $\Psi_{\min} = 1.1.E-5$, $\Psi_{\max} = 9.9.E-5$; (b) $t=1$, $\Psi_{\min} = 3.2.E-4$, $\Psi_{\max} = 0.0029$;
(c) $t=3$, $\Psi_{\min} = 0.0017$, $\Psi_{\max} = 0.016$; (d) $t=6$, $\Psi_{\min} = 0.0034$, $\Psi_{\max} = 0.03$;
(e) $t=12$, $\Psi_{\min} = 0.0039$, $\Psi_{\max} = 0.035$; (f) $t=25$, $\Psi_{\min} = 0.0042$, $\Psi_{\max} = 0.035$.

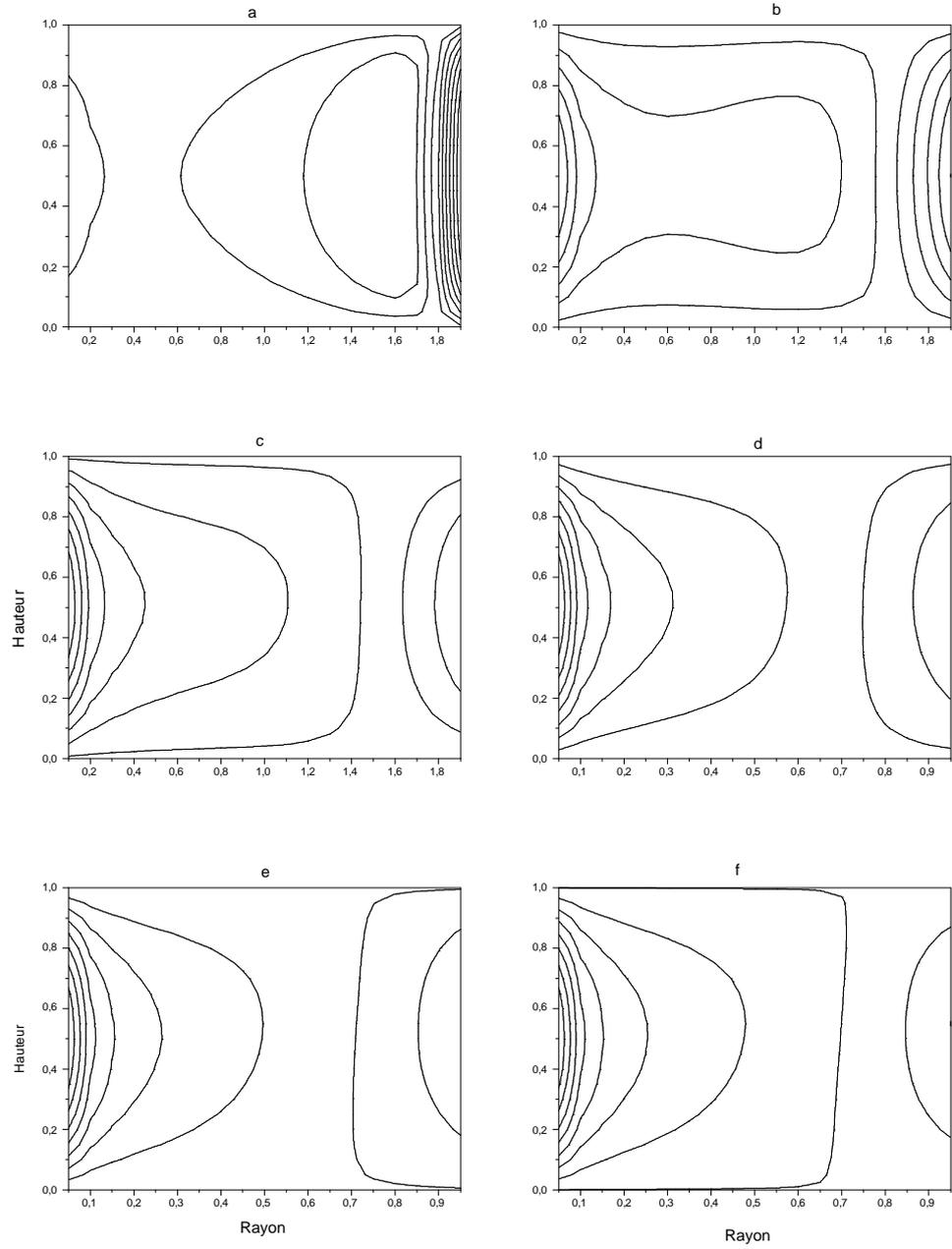


Figure 5.16. Profils de vitesse en régime variable pour $H/D = 0.5$; $Ra = 2.E3$
 (a) $t=0.2$ $V_{\min} = -4.4.E-4$, $V_{\max} = 1.E-3$; (b) $t=1$, $V_{\min} = -0.033$;
 (c) $t=3$, $V_{\min} = -0.33$, $V_{\max} = 0.082$; (d) $t=6$, $V_{\min} = -0.82$, $V_{\max} = 0.13$;
 (e) $t=12$, $V_{\min} = -1$, $V_{\max} = 0.14$; (f) $t=25$, $V_{\min} = -1$, $V_{\max} = 0.15$.

3. ANALYSE DE L'INFLUENCE DES PRINCIPAUX PARAMETRES SUR L'ÉCOULEMENT A L'ÉTAT STATIONNAIRE

Le but de ce paragraphe est de faire un paramétrage des principales grandeurs physiques intervenant dans les équations qui gouvernent le problème de la convection naturelle, à savoir le nombre de Rayleigh caractérisant l'échange thermique, le rapport de forme décrivant la géométrie du réservoir, et le nombre de Prandtl qui caractérise l'importance relative des effets thermiques et visqueux ; ce qui consiste à faire varier un paramètre en fixant les 2 autres et à voir son influence sur les profils de température, de vitesse et des lignes de courant.

3.1. Influence du nombre de Rayleigh

Les figures 5.17 et 5.18 montrent l'effet du nombre de Rayleigh pour un rapport de forme constant. On remarque que même pour des petites valeurs du nombre Rayleigh (lorsque la chaleur est principalement échangée par conduction) un écoulement existe, et se traduit par des faibles variations au niveau des isothermes. Ces variations deviennent de plus en plus importantes au fur et à mesure que Ra augmente. On note que la valeur maximale de la température T_{\max} correspond à des petites valeurs de Ra (Figures 5.19, 5.21 et 5.23), et celle de la fonction de courant correspond à des grandes valeurs de Ra (Figures 5.20, 5.22 et 5.24). On note également que la température minimale diminue avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.

Les figures 5.25 et 5.26 montrent l'influence du nombre de Rayleigh sur la vitesse maximale. On remarque que l'augmentation du nombre de Rayleigh fait accroître la vitesse maximale quelque soit la dimension du réservoir. Néanmoins, cette augmentation est plus significative dans le cas d'un rapport de forme élevé (réservoir moins large).

3.2. Influence de la géométrie du réservoir

La figure 5.27 montre l'effet du rapport de forme du réservoir H/D pour $Ra = 10^3$. Dans ce cas, nous notons que la perturbation atteint plus rapidement le centre du réservoir quand celui-ci est moins large. Par ailleurs, les profils de température prouvent que la zone froide s'étend sur la surface du cylindre au fur et à mesure que le rapport de forme augmente.

Contrairement au cas de l'influence de Ra, nous avons remarqué que la température maximale augmente avec l'accroissement du rapport de forme H/D (Figure 5.28) , alors que la fonction de courant maximale diminue lorsque H/D augmente (Figure 5.29).

3.3. Influence du nombre de Prandtl

Comme il a été indiqué plus haut, le nombre de Prandtl caractérise l'importance relative des effets thermiques et visqueux. Nous notons ainsi que pour les fluides de grand nombre de Prandtl (Ethylène glycol par exemple, $Pr = 92.5$), le temps thermique est plus grand que le temps visqueux et que les processus de diffusion de la chaleur pilotent le mouvement du fluide. Pour les faibles valeurs du nombre de Prandtl (Hydrogène liquide par exemple, $Pr = 1.29$), les effets thermiques s'amenuisent et le comportement du fluide est essentiellement hydrodynamique. Nos expériences numériques sont réalisées avec des fluides différents tels que :

$$1.29 \leq Pr \leq 92.5$$

Il peut être observé, d'après la figure 5.30, que le nombre de Prandtl influe sur la structure de l'écoulement. L'examen des figures 5.31 et 5.32, nous montre que plus le nombre de Prandtl diminue plus la vitesse verticale maximale augmente, ce qui favorise la stratification thermique.

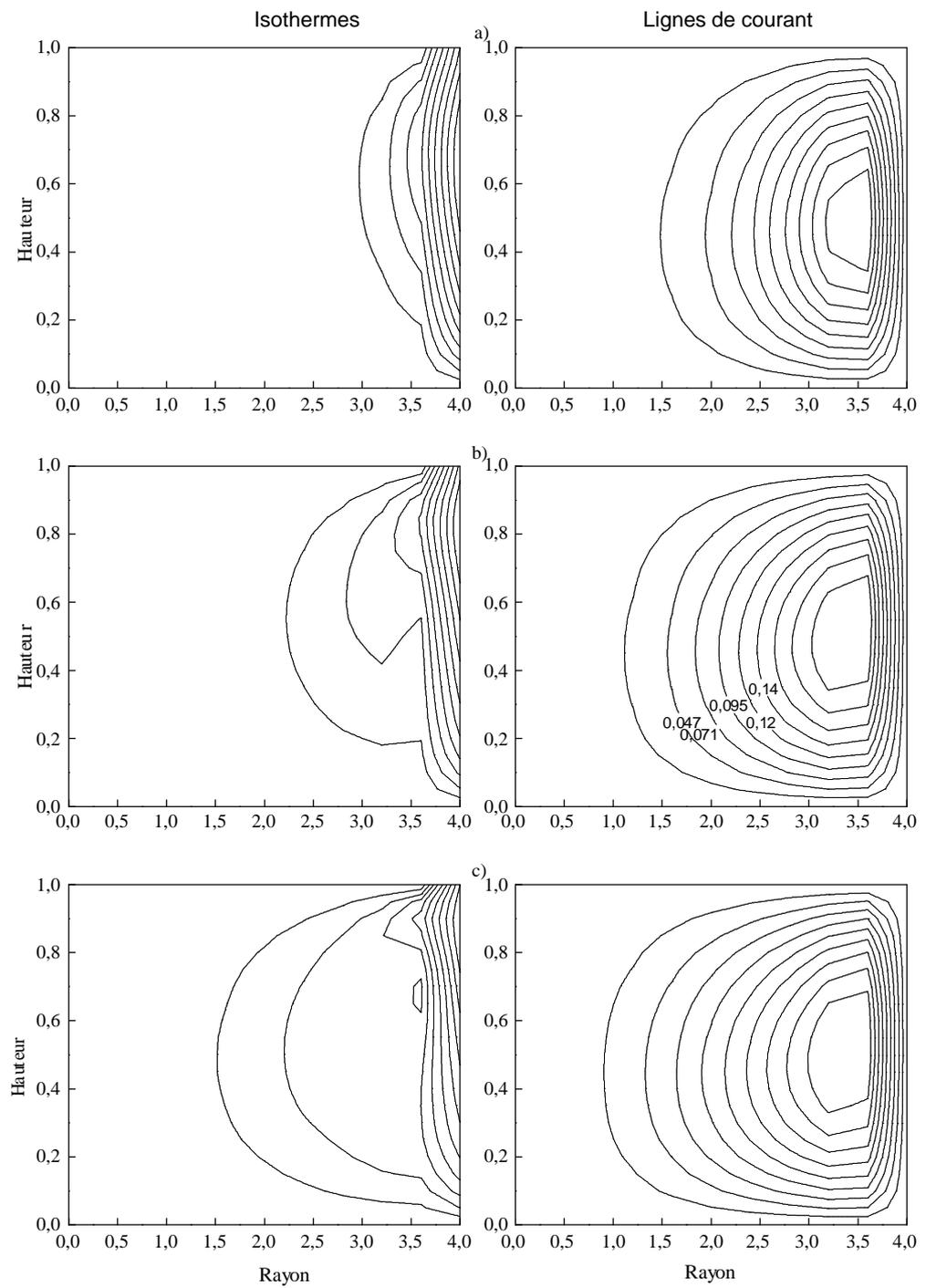


Figure 5.17. Influence du nombre de Rayleigh sur les isothermes et lignes de courant pour $H/D=0.125$

(a) $Ra = 1E03$, $T_{\max} = 0.41$, $T_{\min} = 0.039$, $\psi_{\max} = 0.18$;

(b) $Ra = 1E04$, $T_{\max} = 0.32$, $T_{\min} = 0.032$, $\psi_{\max} = 0.24$

(c) $Ra = 5E04$, $T_{\max} = 0.28$, $T_{\min} = 0.027$, $\psi_{\max} = 0.28$

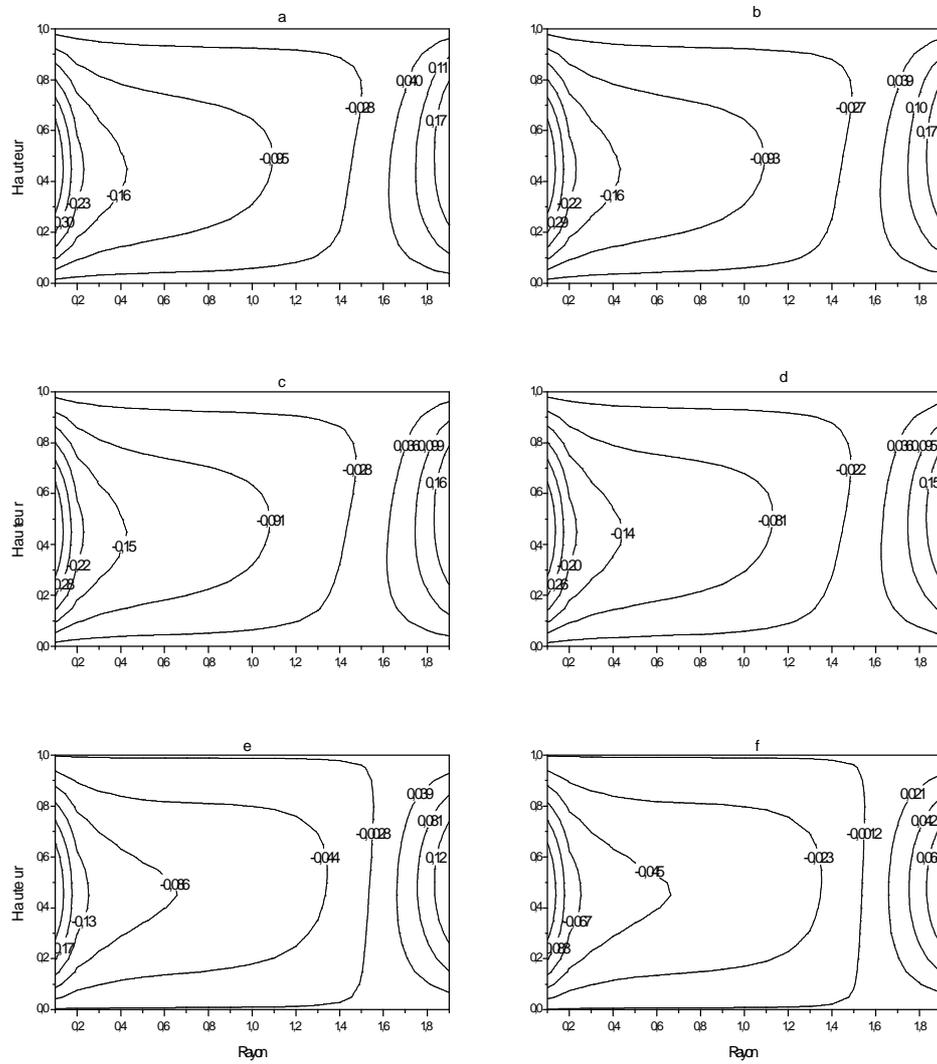


Figure 5.18 Influence de Rayleigh sur le profil de vitesse verticale à l'état stationnaire pour $H/D=0.25$, $Pr=2.2$
 (a) $Ra = 2.E4$; (b) $Ra=1,5.E4$; (c) $Ra=1.E4$; (d) $Ra=5.E3$, (e) $Ra=1.E3$, (f) $Ra=200$.

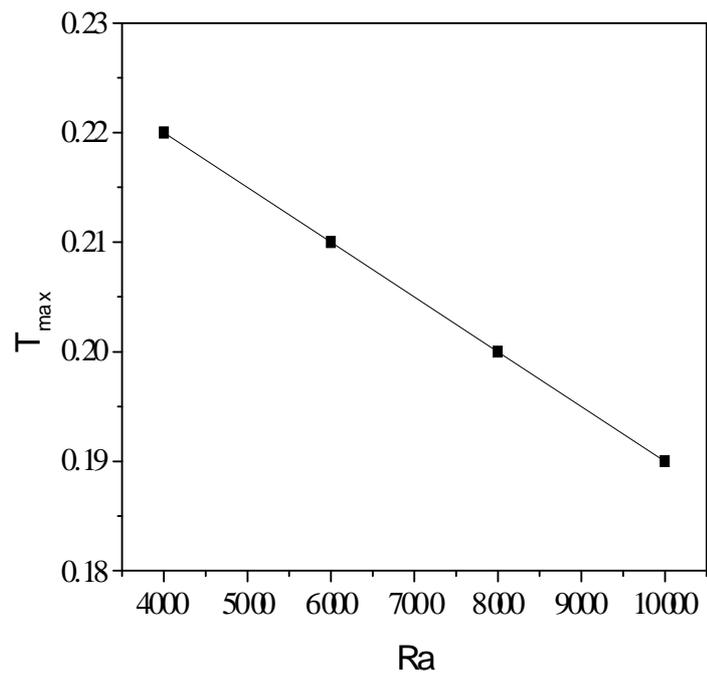


Figure 5.19. Evolution de la température maximale en fonction de Ra à l'état stationnaire pour $H/D = 0.5$

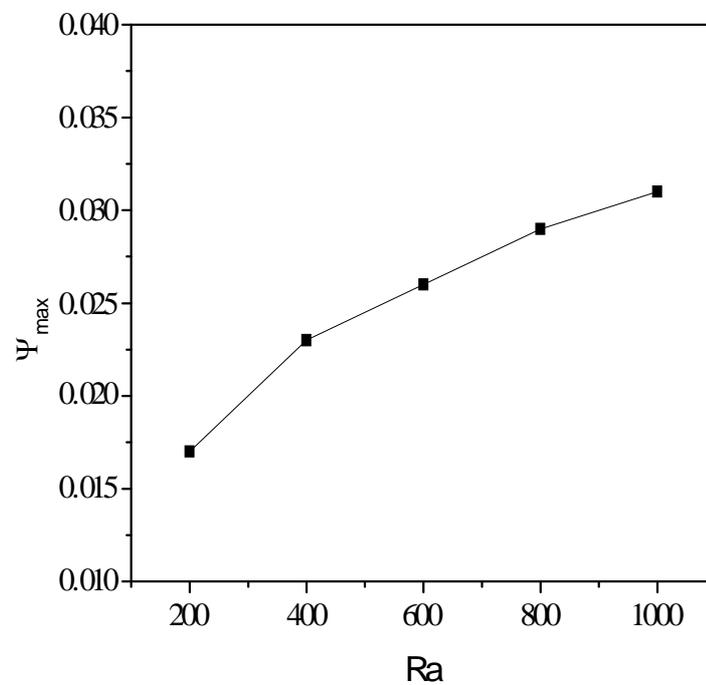


Figure 5.20. Evolution de la fonction de courant maximale en fonction de Ra à l'état stationnaire pour $H/D = 0.5$

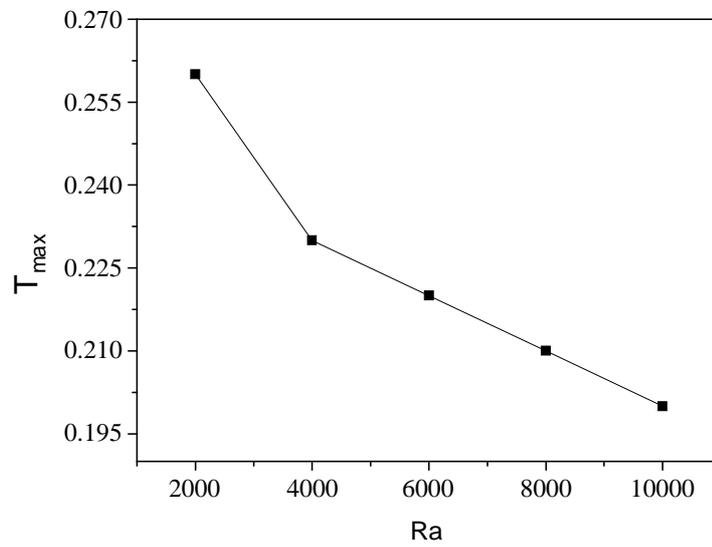


Figure 5.21. Evolution de la température maximale en fonction de Ra à l'état stationnaire pour $H/D=0.25$

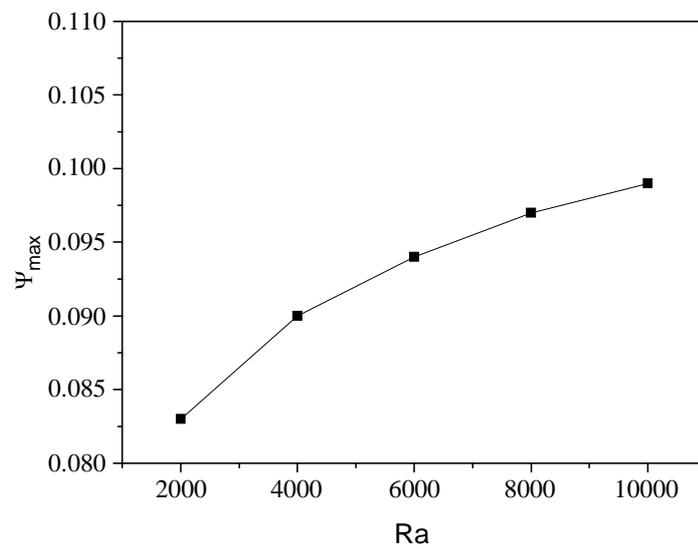


Figure 5.22. Evolution de la fonction de courant maximale en fonction de Ra à l'état stationnaire pour $H/D = 0.25$

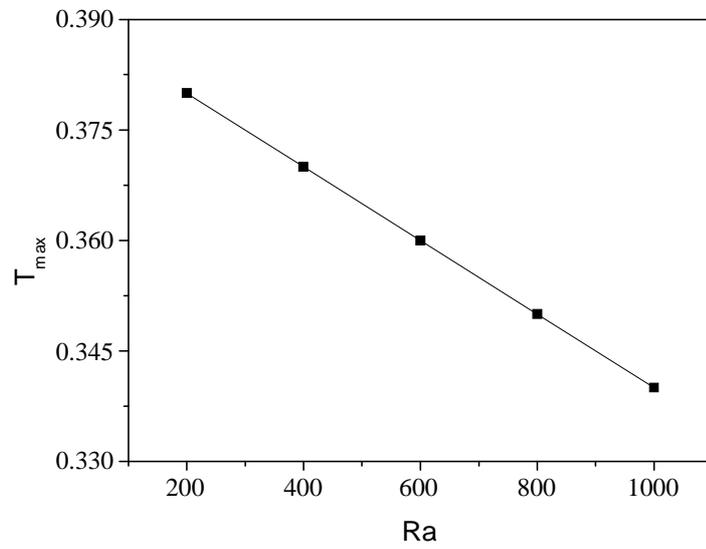


Figure 5.23. Evolution de la température maximale en fonction de Ra à l'état stationnaire pour $H/D=0.125$

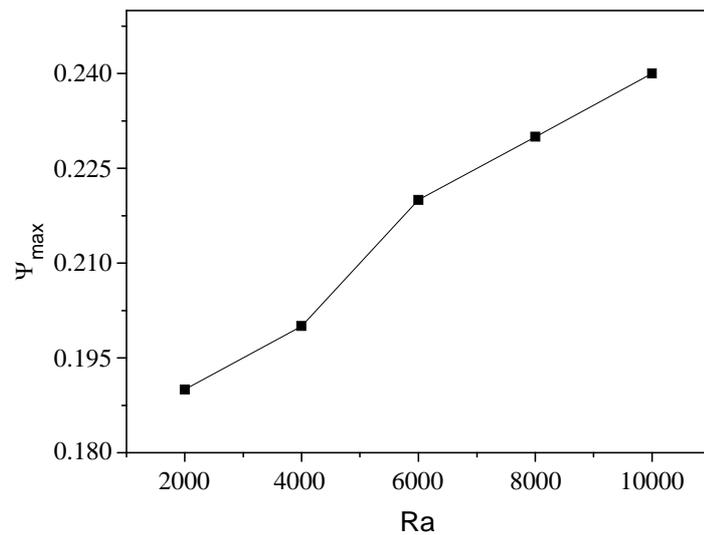


Figure 5.24. Evolution de la fonction de courant maximale en fonction de Ra à l'état stationnaire pour $H/D=0.125$

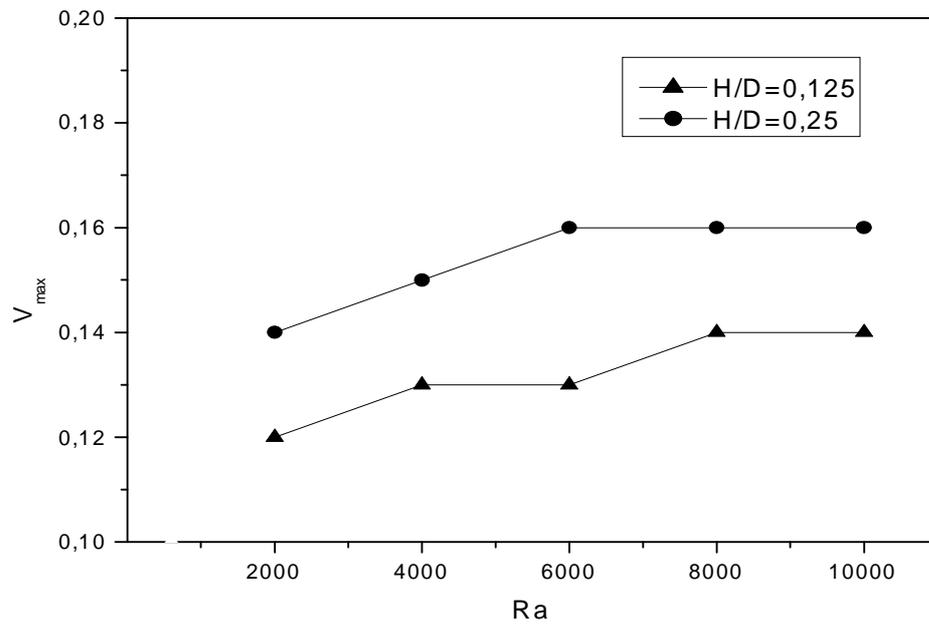


Figure 5.25. Evolution de la vitesse verticale maximale en fonction de Ra à l'état stationnaire pour H/D=0.125 et H/D=0.25

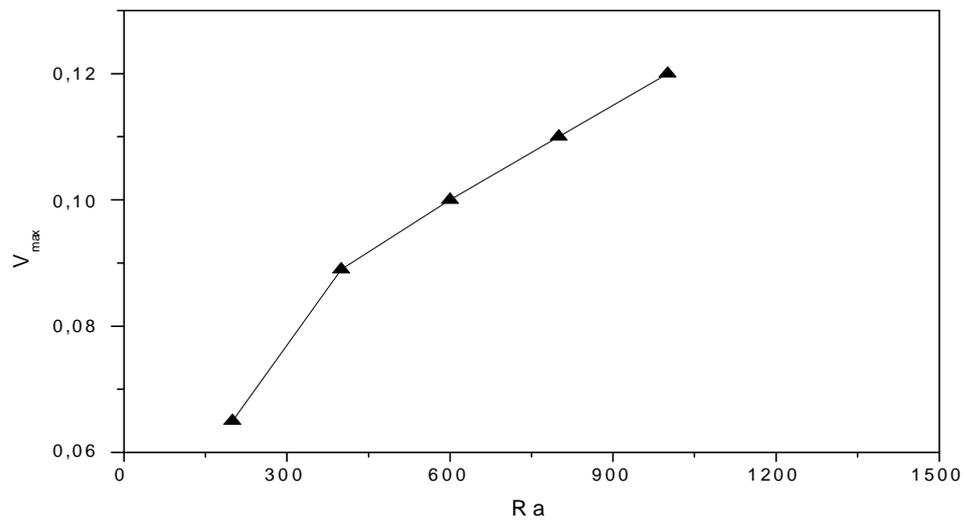


Figure 5.26. Evolution de la vitesse verticale maximale en fonction de Ra à l'état stationnaire pour H/D=0.5

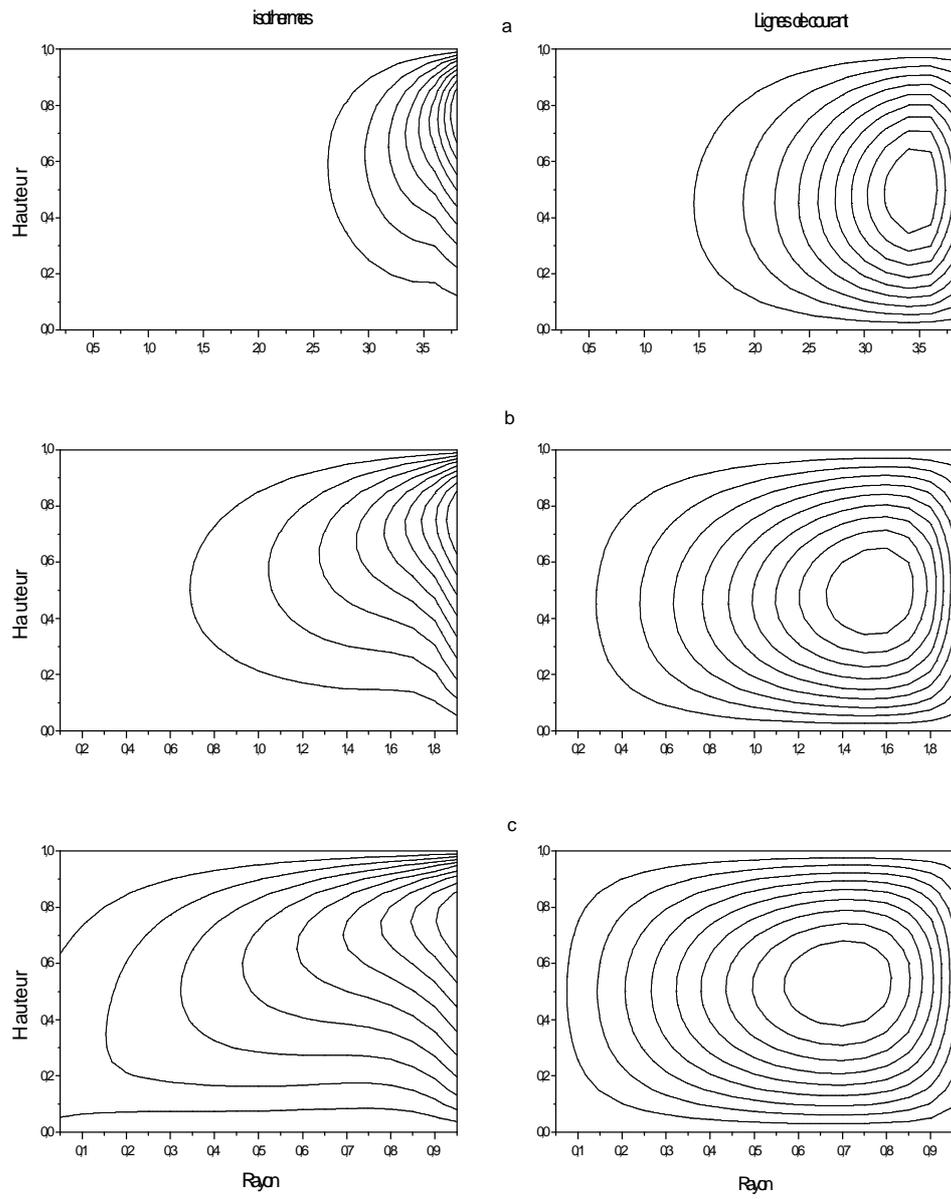


Figure 5.27. Effet de la géométrie du réservoir pour $Ra=1.E3$
 (a) $H/D=0.125$; (b) $H/D= 0.25$; (c) $H/D =0.5$

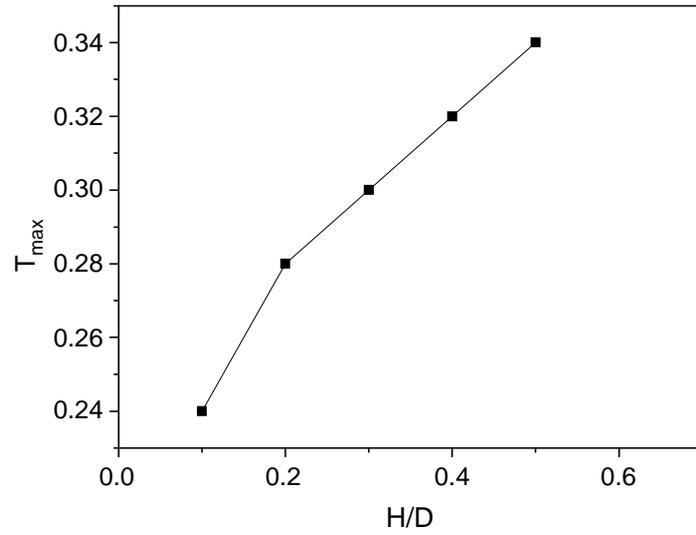


Figure 5.28. Evolution de la température maximale en fonction de H/D à l'état stationnaire pour $Ra=1E3$

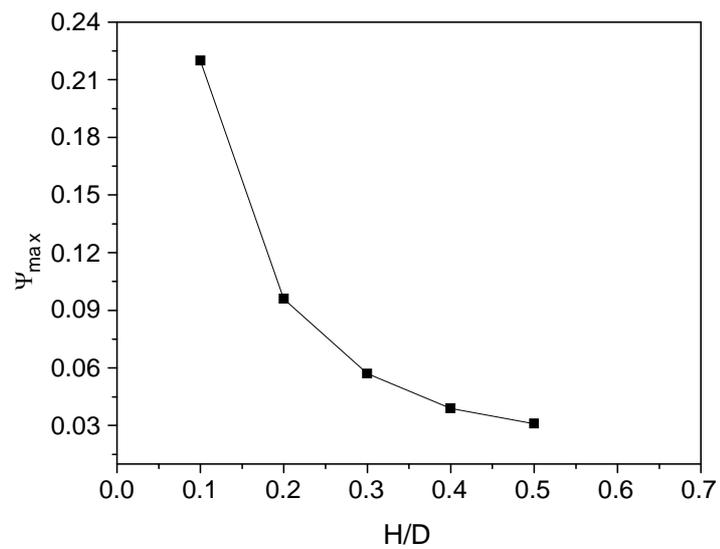


Figure 5.29. Evolution de la fonction de maximale en fonction de H/D à l'état stationnaire pour $Ra=1E3$

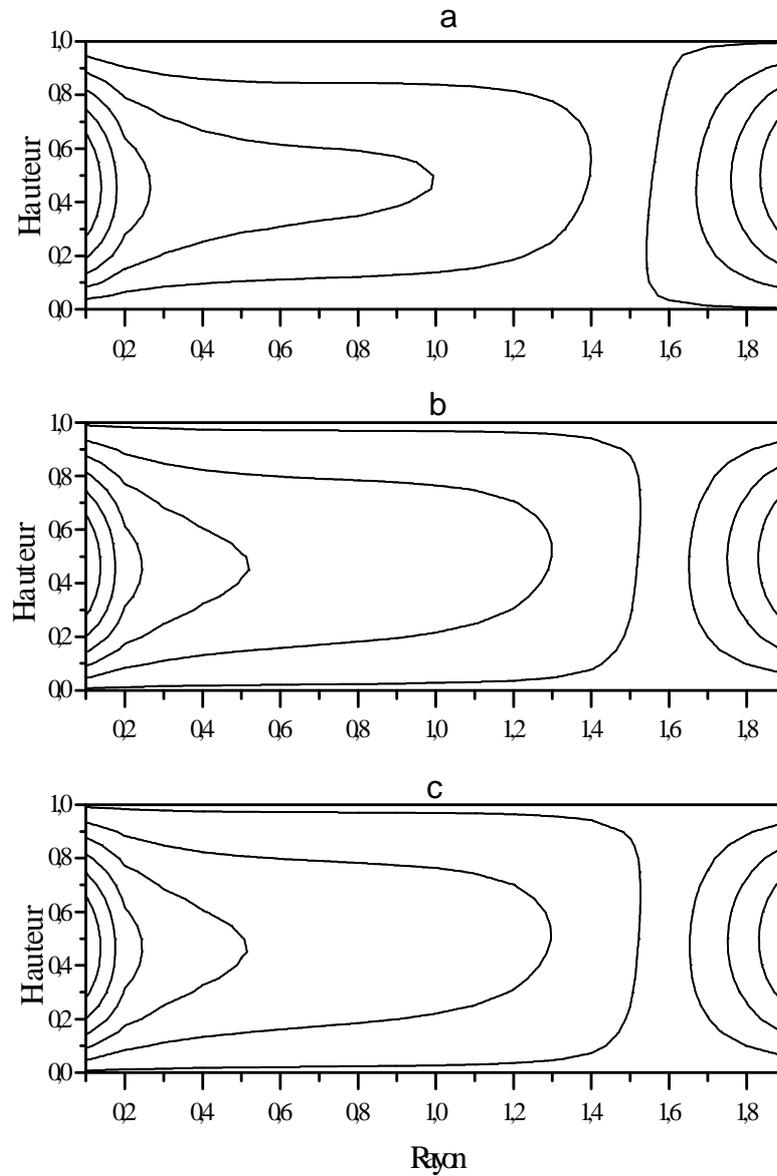


Figure 5.30. Influence du Nombre de Prandtl sur le profil de vitesse verticale à l'état stationnaire pour $H/D=0.25$, $Ra=1.E3$
(a) $Pr=1.29$; (b) $Pr=7$, (c) $Pr=92.5$

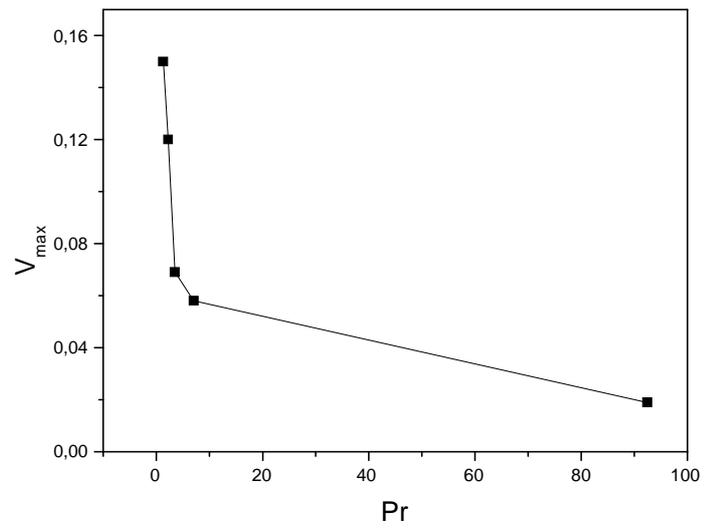


Figure 5.31. Evolution de la vitesse verticale maximale en fonction de Pr à l'état stationnaire pour $H/D=0.125$ et $Ra=2E03$

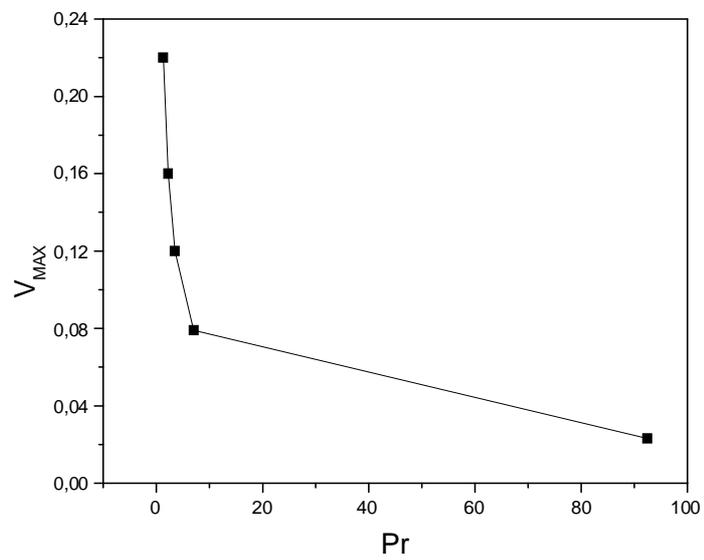


Figure 5.32. Evolution de la vitesse verticale maximale en fonction de Pr à l'état stationnaire pour $H/D=0.25$ et $Ra=1E04$

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire, a pour sujet la simulation numérique des transferts thermiques et des écoulements du gaz naturel liquéfié dans un réservoir de stockage en régime variable. L'objectif général est de proposer un code de calcul permettant de prédire le phénomène de la stratification, et de décrire avec précision le comportement du fluide dans des conditions proches aux conditions réelles de stockage. La méthode proposée possède un avantage particulier, car elle permet la résolution du phénomène transitoire en utilisant des schémas de discrétisation stables et convergents.

L'analyse théorique entreprise a permis de réduire le nombre de variables à trois (la température θ , la fonction de courant ψ , et la vorticité Ω). Dans les équations de conservation figurent un certain nombre de grandeurs physiques telles que le nombre de Prandtl Pr , le nombre de Rayleigh Ra , le rapport de forme H/D , et le rapport des flux F_0 .

L'étude a montré que les équations de conservation régissant le phénomène de la convection naturelle sont des équations différentielles complexes, et que leur résolution nécessite l'emploi de techniques numériques. Parmi les différents schémas aux différences finies présentés, il s'avère que la méthode implicite de directions alternées (ADI) est la plus avantageuse, en raison de sa stabilité inconditionnelle, sa convergence et sa consistance.

Les formules de simulations établies sont appliquées à diverses situations selon la valeur du rapport de forme et du nombre de Rayleigh. L'analyse des profils de vitesse, de température et des lignes de courant, a permis de mettre en évidence l'effet des entrées de chaleur à travers les parois du réservoir sur le comportement dynamique et thermique du fluide. Il s'avère en fait que la température des parties fluides se situant au centre du réservoir subit des variations très faibles, qui deviennent ensuite de plus en plus importantes quand on se rapproche des parois latérales et de la surface libre. On assiste à un comportement dynamique qui varie en fonction du temps, avant d'atteindre une limite asymptotique stationnaire.

Les résultats obtenus en régime variable montrent l'existence d'une structure bi-cellulaire se traduisant par le développement d'une seule cellule près de la paroi latérale du réservoir, qui se déplace de plus en plus vers le centre du cylindre avant qu'une deuxième cellule se développe près de la paroi latérale. Le mouvement des cellules s'accompagne d'un accroissement de la température et de la vitesse verticale du fluide.

Nous avons discuté de l'influence des principaux paramètres physiques intervenant dans les différentes équations, et ce pour différentes configurations thermiques et géométriques. Celle-ci met en évidence le rôle primordial du rapport de forme H/D , donc de la géométrie de l'enceinte, et celui du nombre de Rayleigh Ra . L'étude a montré en particulier que la valeur maximale de la température correspond à des petites valeurs de Ra , et celle de la fonction de courant correspond à des grandes valeurs de Ra . En revanche, la température maximale augmente avec l'accroissement du rapport de forme H/D , alors que la fonction de courant maximale diminue lorsque H/D augmente. L'effet du nombre de Prandtl sur l'écoulement a été particulièrement analysé, et les résultats ont montré une variation importante de la vitesse maximale verticale du fluide en fonction du nombre de Prandtl.

Les conséquences pratiques de cette étude paraissent intéressantes, puisqu'elle permet de connaître le comportement dynamique du gaz naturel stocké. La simulation numérique présentée pourrait être poursuivie dans des cas plus complexes tels que : transferts simultanés de chaleur et de masse, présence d'une source de la chaleur interne (réaction chimique), etc

Références bibliographiques

- [1] **Mark A. Cotter et Michael E. Charles**, “Transient cooling of petroleum by natural convection in cylindrical storage tanks—I. Development and testing of a numerical simulator”, *International Journal Heat Mass Transfer*, vol 36, n° 8, pp 2165-2174, 1993.
- [2] **A. Benkhalifa**, “Etude numérique de la stratification thermique dans une cuve de stockage cylindrique”, thèse de magister, centre de développement des énergies Renouvelables d’Alger 1994.
- [3] **A. Benkhalifa, M. Belhamel**, “Simulation de la convection naturelle en régime permanent dans une cuve cylindrique : Cas de l’hydrogène liquide”, *Proceedings des 10^{ème} Journées Internationales de Thermique*, Tunis, 2001.
- [4] **M. S. Khelifi-Touhami, A. Benbrik, D. Lemonnier, D. Blay**, “Convection naturelle en régime laminaire dans une cavité cylindrique, application au stockage de GNL”, *12^{èmes} Journées Internationales de Thermique*, Tanger, Maroc, 5-17 Novembre 2005.
- [5] **A. Lemembre, J. P. Petit**, “Laminar natural convection in a laterally heated and upper cooled vertical cylindrical enclosure”, *International Journal Heat Mass Transfer*, vol 41, no16, pp 2437-2454, 1998.
- [6] **V. Sévéléder, J. P. Petit**, “Simultaneous heat mass transfer in unsteady natural convection”, *Numerical methods in laminar and turbulent flow; Proceedings of the Sixth International Conference*, Swansea, Wales, July 11-15, 1989.
- [7] **E. Bilgen, H. Oztop**, “Natural convection heat transfer in partially open inclined square cavities”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol 48, pp 1470- 1479, 2005.
- [8] **A. Skouta, M. A. Randriazanamparany, M. Daguénet**, “Numerical study of Two-dimensional transient natural convection in an air filled square enclosure, tilted in relation to the horizontal plane, heated from two opposite sides”, *International Journal of Thermal Sciences*, 40(4), pp. 352 – 365, 2001
- [9] **L. Bensnoussi, R. CHouikh, A. Guizani**, “Numerical study of the natural convection flow resulting from the combined buoyancy effects of thermal and mass diffusion in a cavity with differentially heated side walls”, *Desalination*, vol 182, pp 143-150, 2005.
- [10] **A. Bouhdjar, A. Harhad**, “Numerical analysis of transient mixed convection flow in storage tank: influence of fluid properties and aspect ratios on stratification”, *Renewable Energy*, vol 25, pp 555-567, 2002

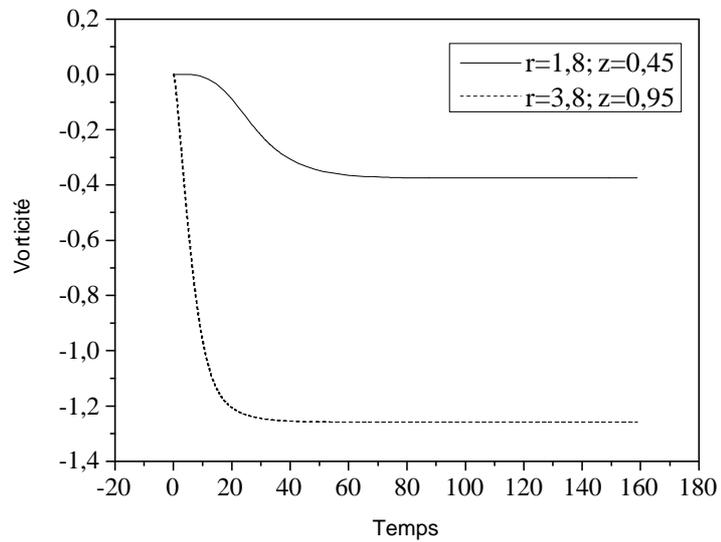
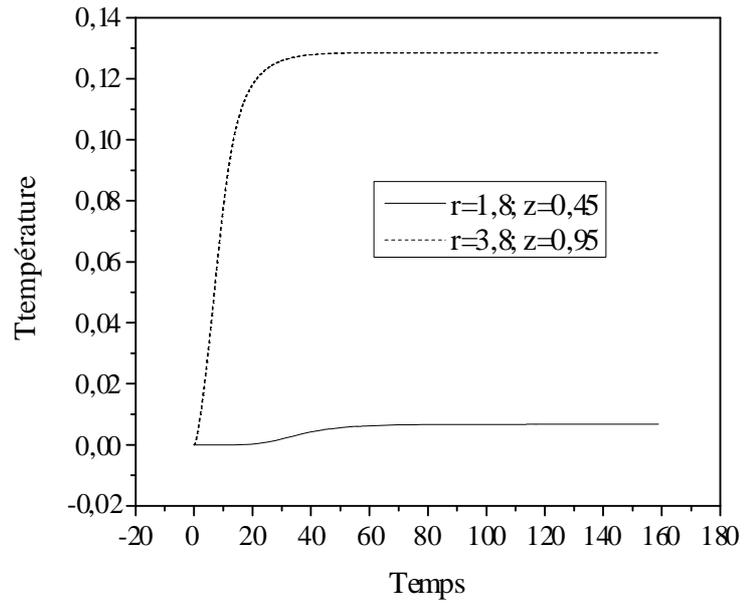
- [11] **M. Lamsaadi, M. Naimi, M. Hasnaoui**, “Etude analytique et numérique de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire horizontale uniformément chauffée par le bas”, Proceeding of the International Forum on Renewable Energies FIER, 2002, Tétouan Maroc.
- [12] **Ting-Yuan Wang, Charlie Chung- Ping Chen**, “Thermal- ADI- a linear-time chip-level dynamic thermal-simulation algorithm based on Alternating-Direction-Implicit (ADI) method”, IEEE transaction on very large scale integration (VLSI) systems, vol 11, no.4, August 2003.
- [13] **M. Guellal, H. Soualmi, M. Charifi, M.C.A. Touabti**, “Numerical simulation of the liquefied natural gas behaviour in storage tank”, Congrès International sur les Energies Renouvelables et le Développement Durable, Tlemcen, Algérie, 21-24 Mai 2007
- [14] **D. Euvrard**, “Résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la physique, de la mécanique et des sciences de l’ingénieur”, Edition Masson, 1994.
- [15] **M. Sibony, J.C. Mardon**, “Analyse numérique Tome 2, Approximations et équations différentielles”, Edition Hermann, année 1984.
- [16] **M. Boumahrat, A. Gourdin**, “Méthodes numériques appliquées”, Edition Technique et Documentation, 1983.
- [17] **S. Lipschutz**, “Programmation fortran”, Edition Mc Graw Hill, 2002
- [18] **A. Léontiev**, “Théorie des échanges de chaleur et de masse”, Ed. Mir, 1985.
- [19] **A. Rojey, B. Durand**, “Le gaz naturel : production, traitement, transport”, édition Technip, 1994
- [20] **P. Jollivet**, “Les réservoirs de stockage du GNL”, Centre de formation aux techniques gazières, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris’, 1990
- [21] **M. Le Diraison**, “La sécurité dans l’industrie du GNL”, Centre de formation aux techniques gazières, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1990.
- [22] **K.LAIMENE** “Analyse des cycles de liquéfaction du gaz naturel”, Thèse Doctorat, Université Catholique de Louvain, 2003
- [23] **J. C. Tannehill, D. A. Anderson, R. H. Pletcher**, “Computational fluid mechanics and heat transfer”, 2nd edn., Taylor and Francis, Washington, 1997
- [24] **CH·IV International The LNG Specialists**, “Safety History of International LNG Operations”, Hanover, Maryland, USA, December, 2006
- [25] **C. A. J. Fletcher**, “Computational techniques for fluid dynamics”, Ed. Springer, 1987

Références bibliographiques

[26] **F. Kreith, ; R. F. Boehm**; et. al. “Heat and Mass Transfer”, Ed. Frank Kreith
Boca Raton: CRC Press LLC, 1999

[27] **John C. Tannehill, Dale A. Anderson, Richard H. Pletcher**, “Computational
Fluid Mechanics and Heat Transfer’’, 2nd Ed. Taylor & Franis, 1997

Annexes



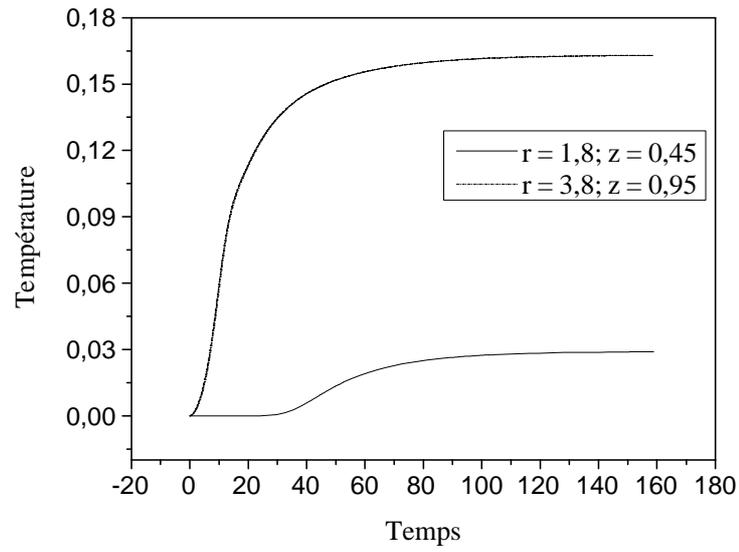


Figure A3. Evolution de la température en fonction du temps pour $H/D = 0.125$; $Ra=2.E4$

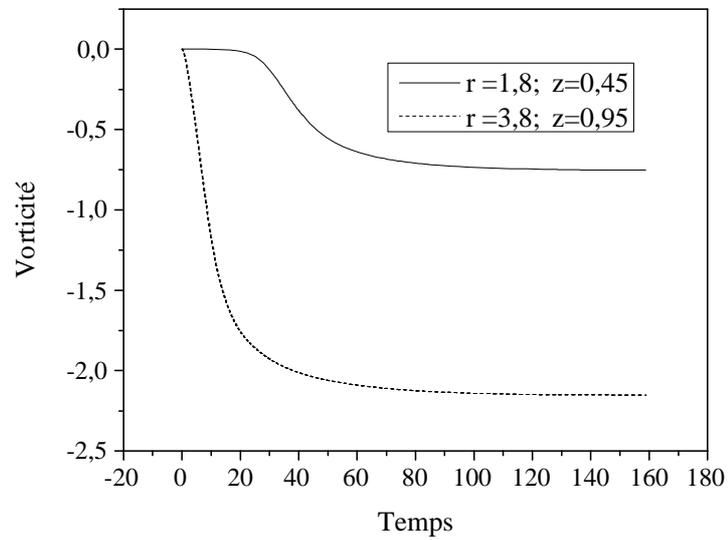


Figure A4. Evolution de la vorticité en fonction de temps pour $H/D = 0.125$; $Ra=2.E4$

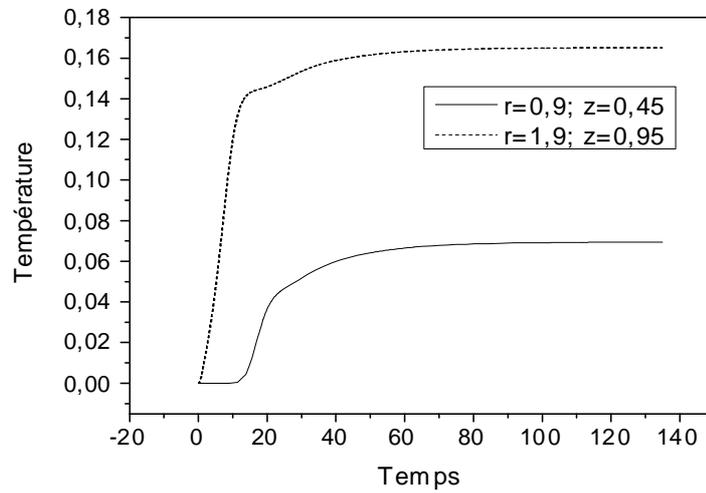


Figure A5. Evolution de la température en fonction du temps pour $H/D = 0.25$; $Ra=2.E4$

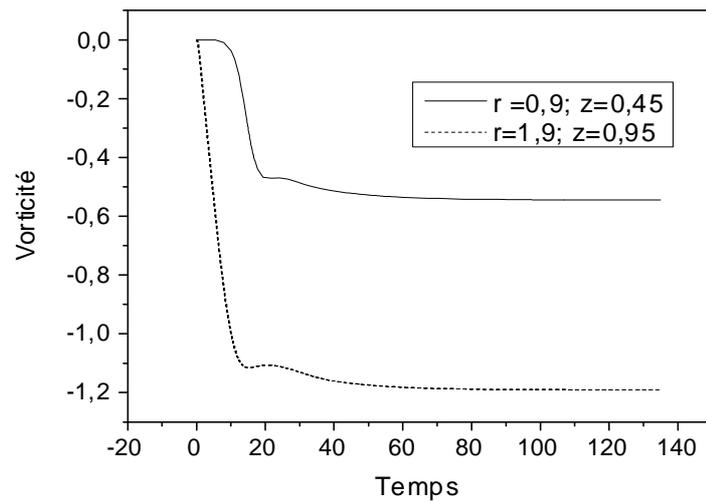


Figure A6. Evolution de la vorticité en fonction du temps pour $H/D = 0.25$; $Ra=2.E4$

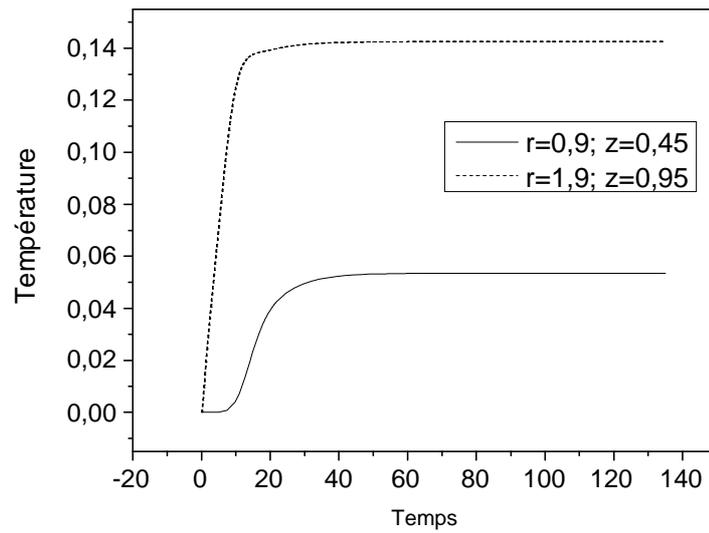


Figure A7. Evolution de la température en fonction du temps pour $H/D=0.25$; $Ra=4.E3$

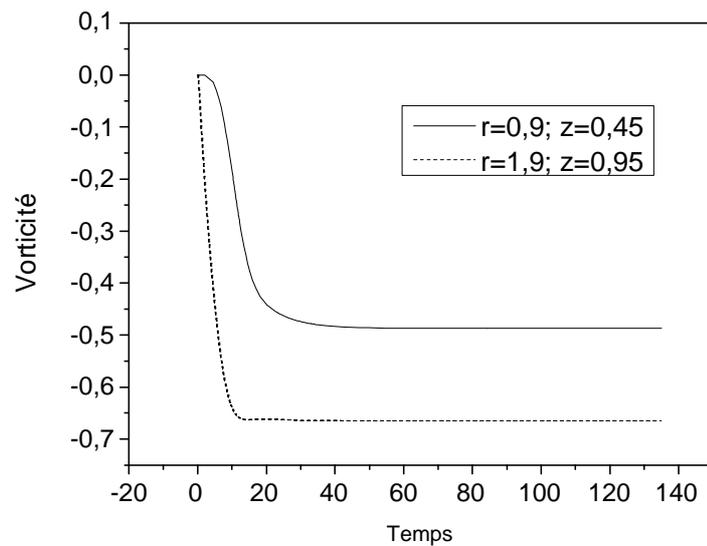


Figure A8. Evolution de la vorticité en fonction du temps pour $H/D=0.25$; $Ra=4.E3$

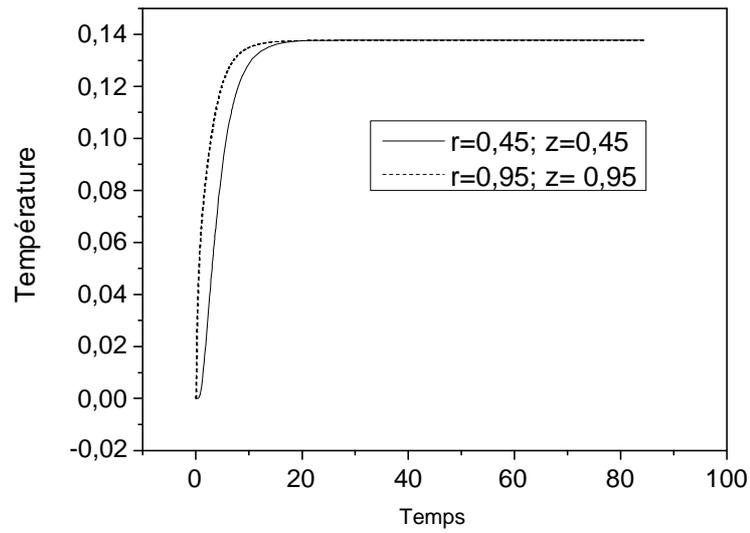


Figure A9. Evolution de la température en fonction du temps pour $H/D = 0.5$; $Ra = 4.E2$

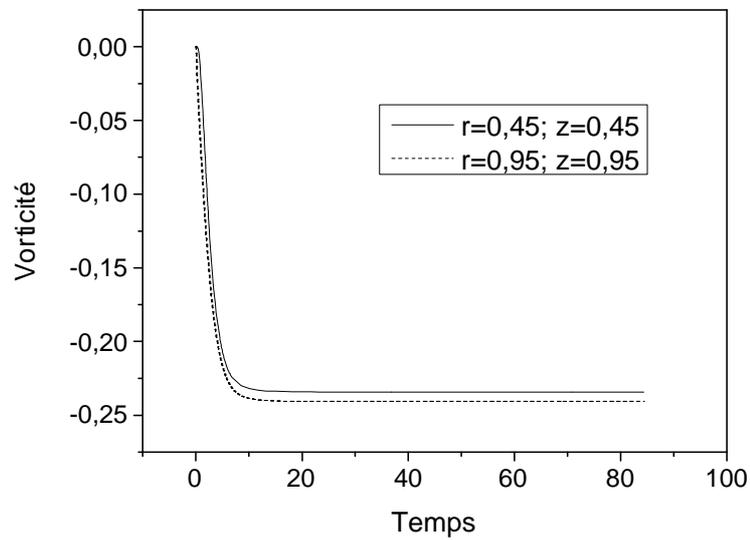


Figure A10. Evolution de la vorticité en fonction du temps pour $H/D = 0.5$; $Ra = 4.E2$

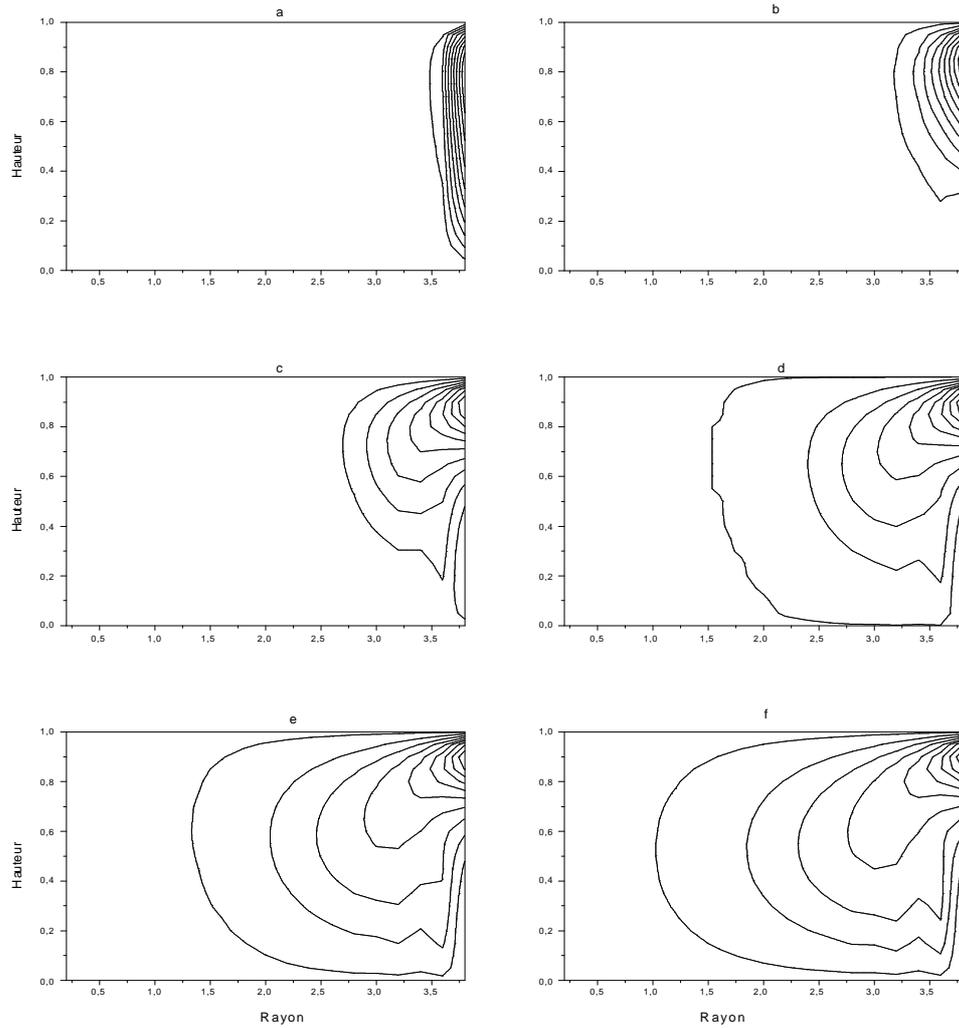


Figure A11. Profils de température (isothermes) en régime variable
pour $H/D = 0.125$; $Ra = 2.E4$

- (a) $t = 5$, $T_{\min} = 0.0028$, $T_{\max} = 0.028$; (b) $t = 10$, $T_{\min} = -0.0065$, $T_{\max} = 0.097$;
(c) $t = 20$, $T_{\min} = -0.022$, $T_{\max} = 0.14$; (d) $t = 30$, $T_{\min} = -0.02$, $T_{\max} = 0.16$;
(e) $t = 50$, $T_{\min} = -0.018$, $T_{\max} = 0.18$; (f) $t = 80$, $T_{\min} = -0.18$.

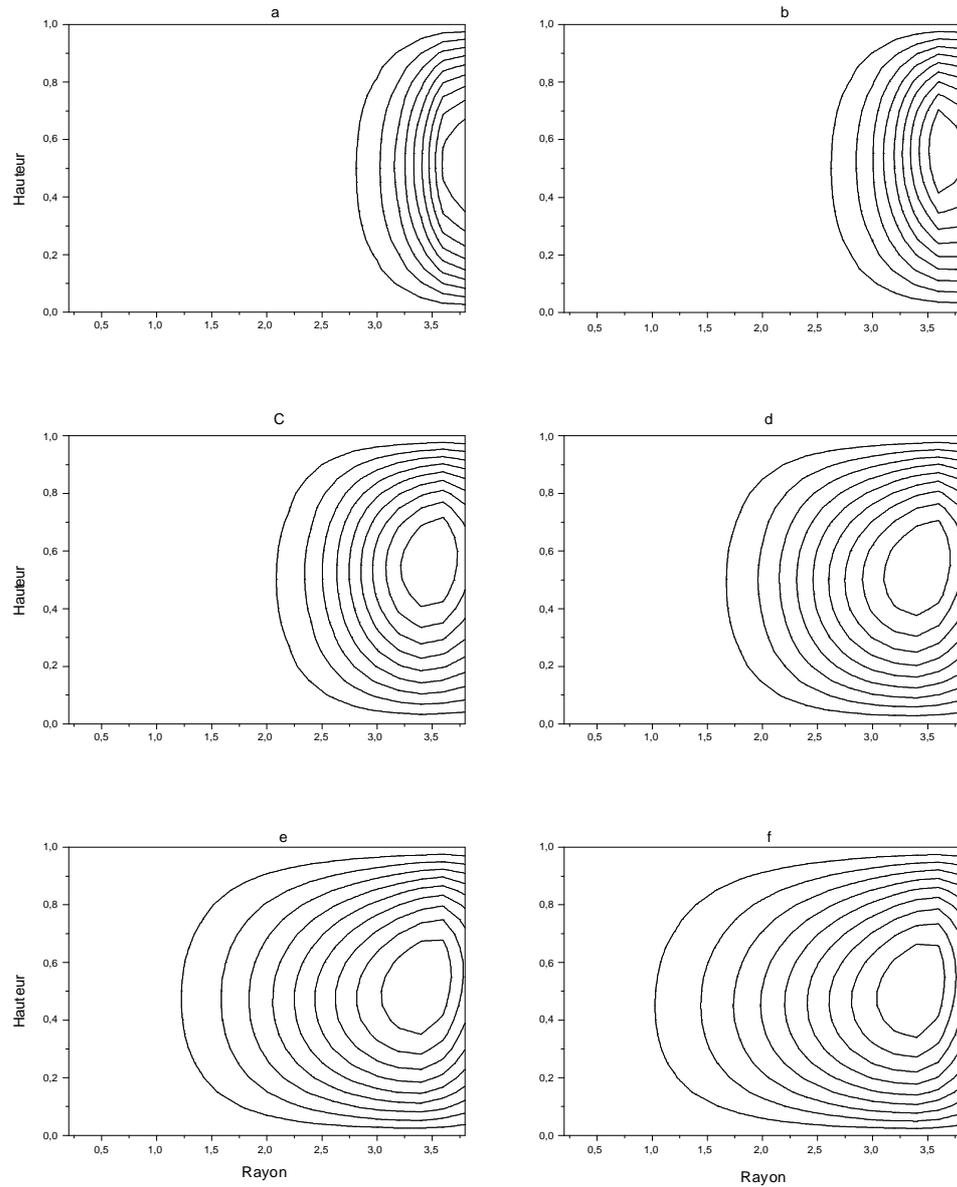


Figure A12. Les lignes de courants en régime variable
pour $H/D = 0.125$; $Ra = 2.E4$

- (a) $t = 5$, $\Psi_{\min} =$, $\Psi_{\max} =$; (b) $t = 10$, $\Psi_{\min} = 0.013$, $\Psi_{\max} = 0.13$;
(c) $t = 20$, $\Psi_{\min} = 0.019$, $\Psi_{\max} = 0.17$; (d) $t = 30$, $\Psi_{\min} = 0.02$, $\Psi_{\max} = 0.18$;
(e) $t = 50$, $\Psi_{\min} = 0.023$, $\Psi_{\max} = 0.21$; (f) $t = 80$, $\Psi_{\min} = 0.026$, $\Psi_{\max} = 0.23$.

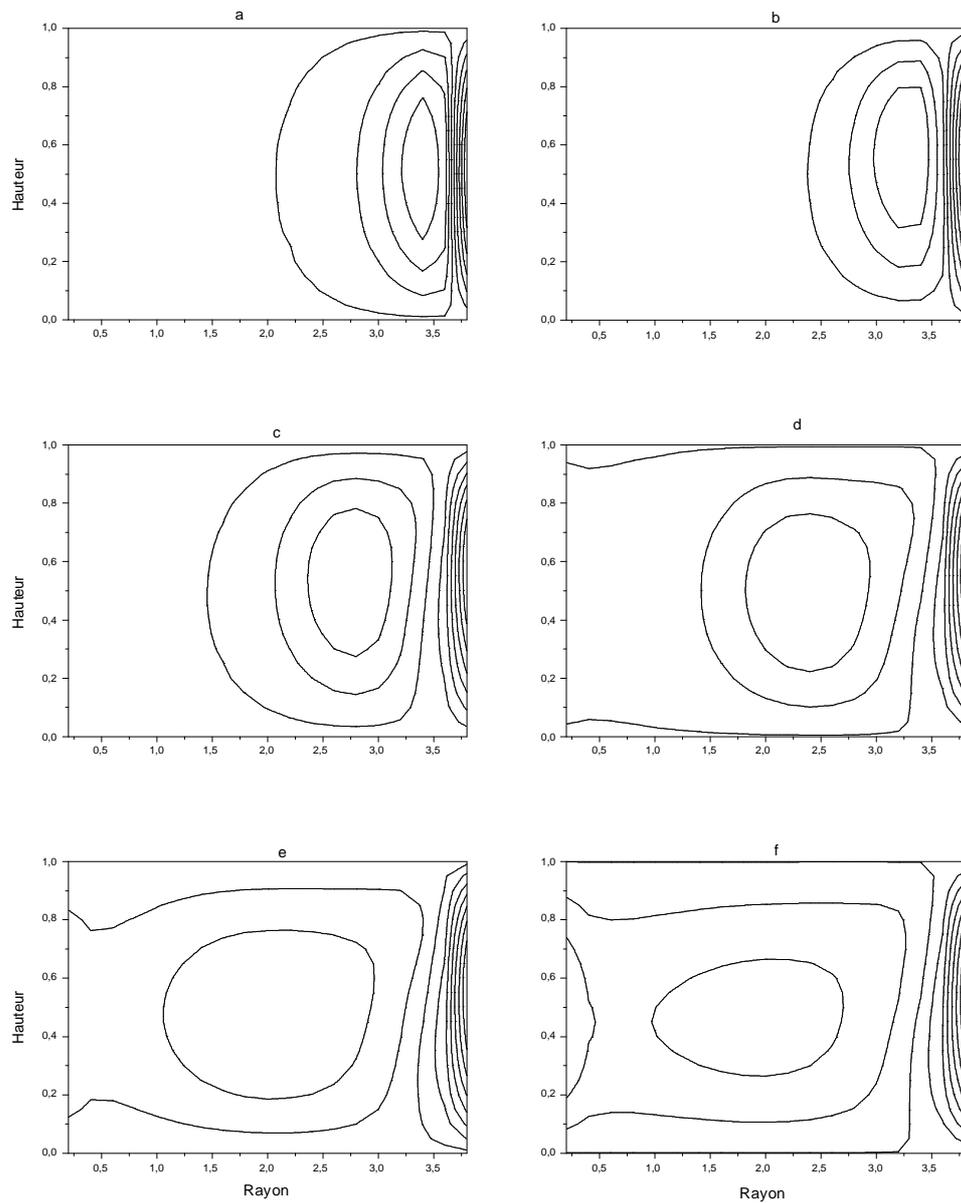


Figure A13. Profils de vitesse en régime variable
pour $H/D = 0.125$; $Ra = 2.E4$;

- (a) $t = 5$, $V_{\min} = -0.02$, $V_{\max} = 0.024$; (b) $t = 10$, $V_{\min} = -0.05$, $V_{\max} = 0.074$;
(c) $t = 20$, $V_{\min} = -0.061$, $V_{\max} = 0.1$; (d) $t = 30$, $V_{\min} = -0.58$, $V_{\max} = 0.10$;
(e) $t = 50$, $V_{\min} = -0.65$, $V_{\max} = 0.13$; (f) $t = 80$, $V_{\min} = -0.016$, $V_{\max} = 0.14$.

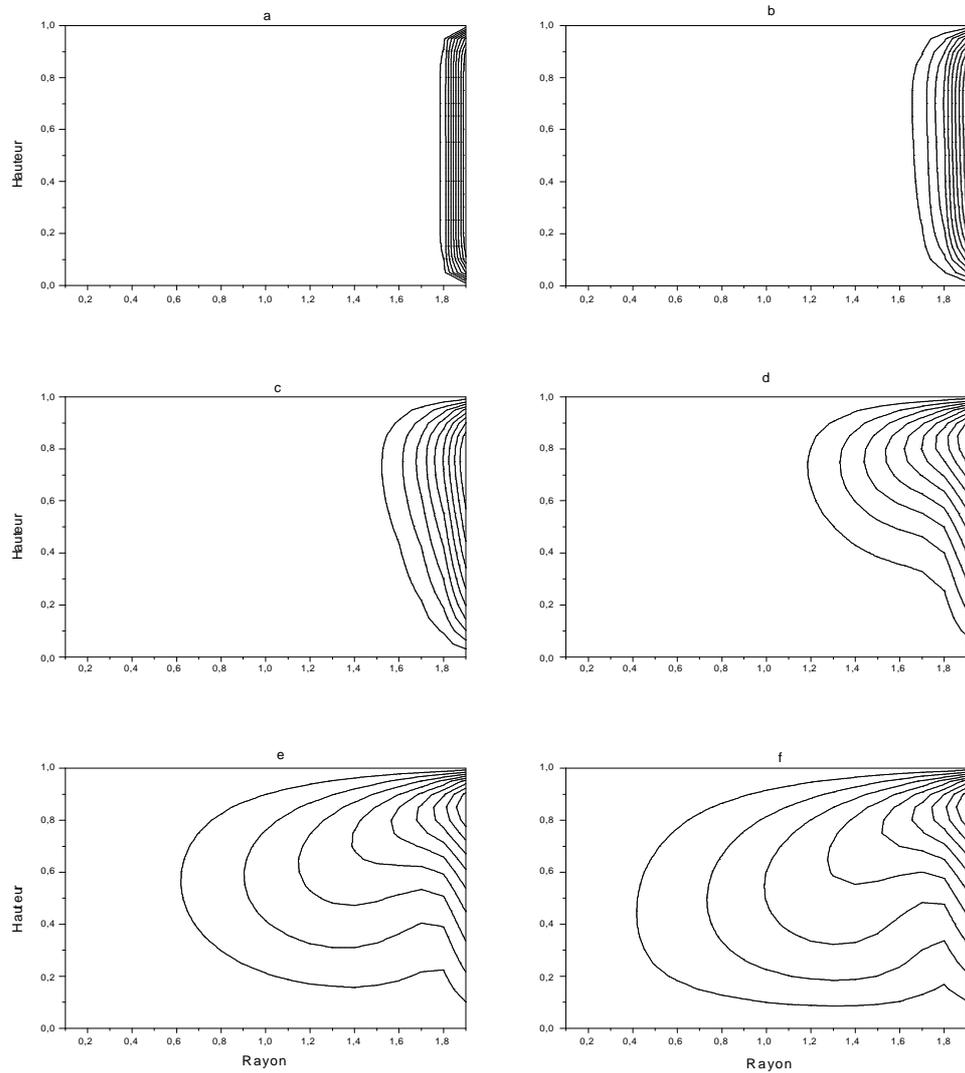


Figure A14. Profils de température (isothermes) en régime variable
pour $H/D = 0.25$; $Ra = 8.E3$

- (a) $t=0.5$, $T_{\min} = 5.3.E-4$, $T_{\max} = 0.0048$; (b) $t=2.5$, $T_{\min} = 0.0054$, $T_{\max} = 0.049$;
(c) $t=5$, $T_{\min} = 0.012$, $T_{\max} = 0.11$; (d) $t=10$, $T_{\min} = 0.021$, $T_{\max} = 0.18$;
(e) $t=20$, $T_{\min} = 0.022$, $T_{\max} = 0.2$; (f) $t=40$, $T_{\min} = 0.023$, $T_{\max} = 0.21$.

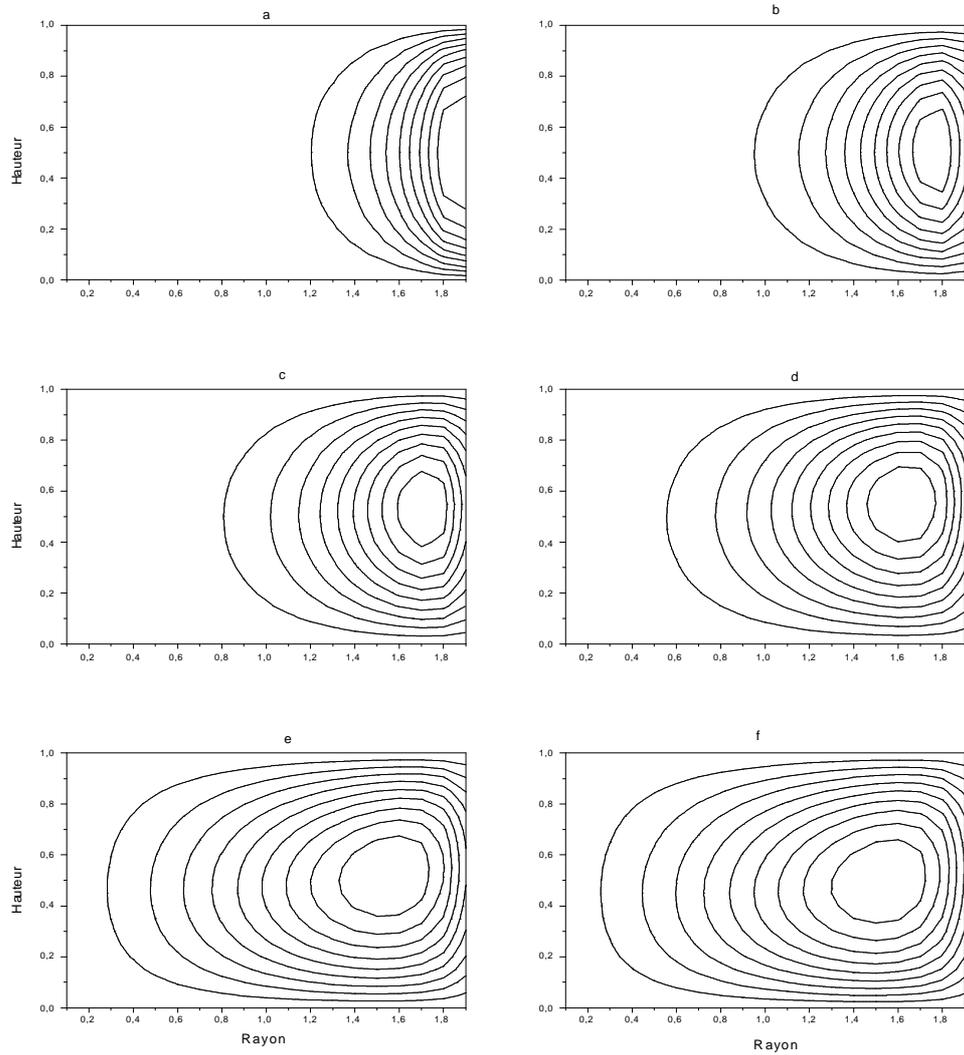


Figure A15. Les lignes de courants en régime variable

pour $H/D = 0.25$; $Ra = 8.E3$;

(a) $t=0.5$, $\Psi_{\min} = 6.1.E-5$, $\Psi_{\max} = 0.0048$; (b) $t=2.5$, $\Psi_{\min} = 0.0015$, $\Psi_{\max} = 0.013$;

(c) $t=5$, $\Psi_{\min} = 0.0044$, $\Psi_{\max} = 0.039$; (d) $t=10$, $\Psi_{\min} = 0.0086$, $\Psi_{\max} = 0.077$;

(e) $t=20$, $\Psi_{\min} = 0.0096$, $\Psi_{\max} = 0.068$; (f) $t=40$, $\Psi_{\min} = 0.011$, $\Psi_{\max} = 0.095$.

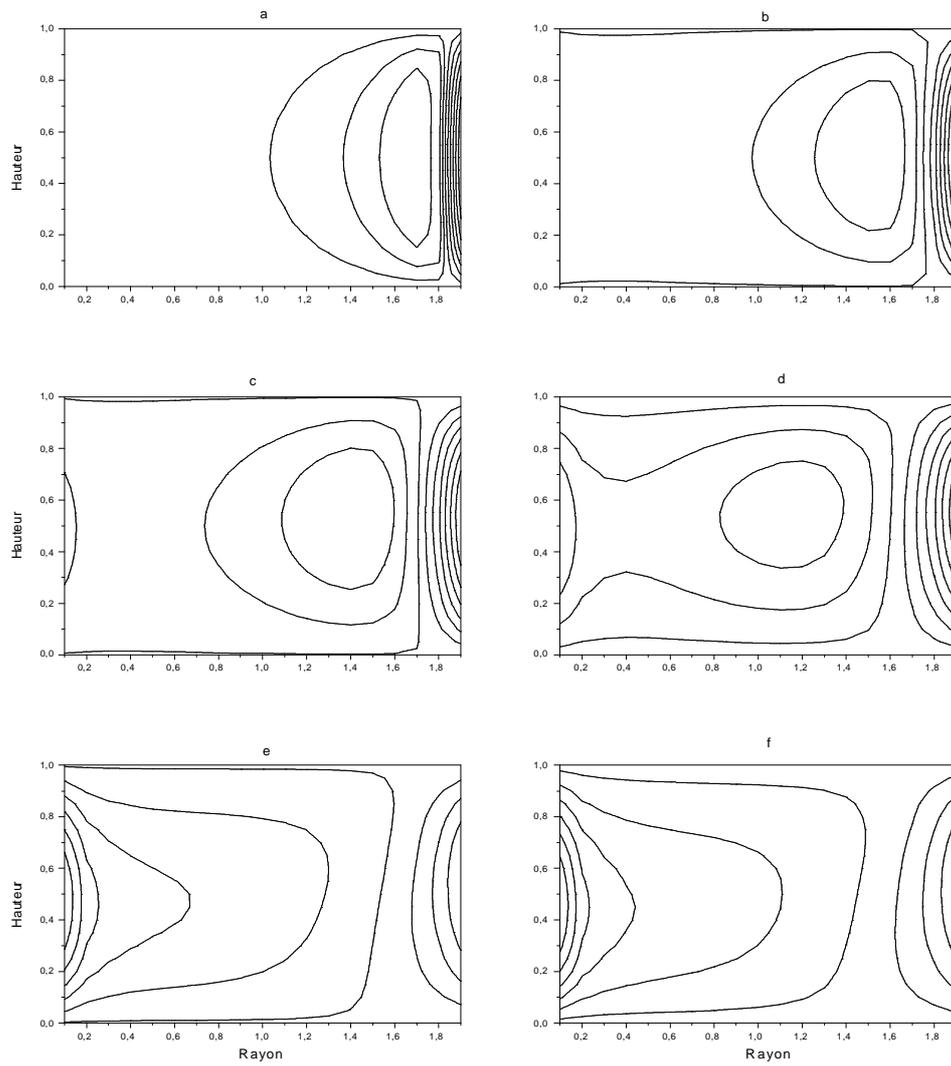


Figure A16. Profils de vitesse en régime variable
pour $H/D = 0.25$; $Ra = 8.E3$; $Pr = 2.2$

- (a) $t = 0.5$, $V_{\min} = -8.4.E-4$, $V_{\max} = 0.0013$; (b) $t = 2.5$, $V_{\min} = -0.017$, $V_{\max} = 0.033$;
(c) $t = 5$, $V_{\min} = -0.1$, $V_{\max} = 0.17$; (d) $t = 10$, $V_{\min} = -0.1$, $V_{\max} = 0.17$;
(e) $t = 20$, $V_{\min} = -0.32$, $V_{\max} = 0.15$; (f) $t = 40$, $V_{\min} = -0.39$, $V_{\max} = 0.16$.

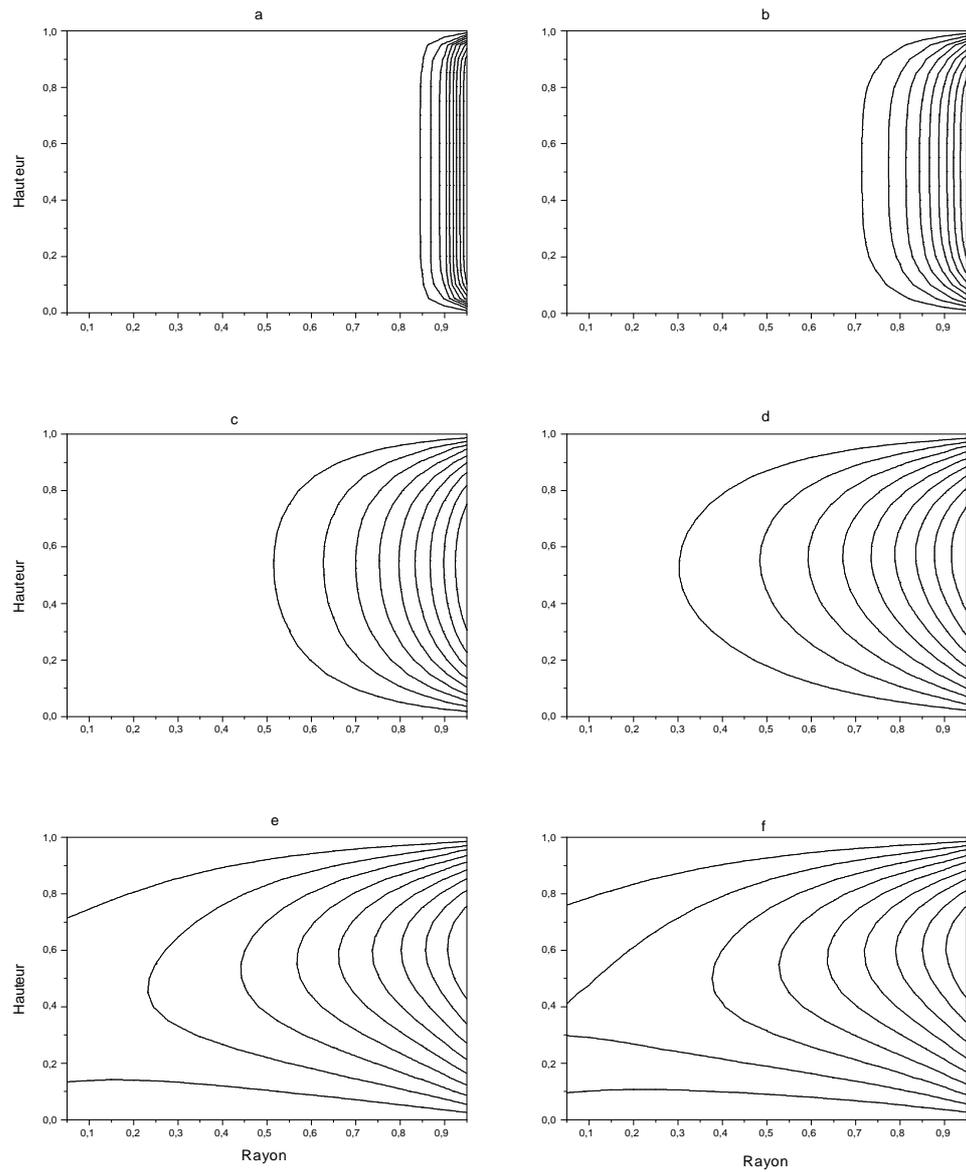


Figure A17. Profils de température (isothermes) en régime variable
pour $H/D = 0.5$; $Ra = 4.E2$

- (a) $t=0.115$, $T_{\min}=0.0021$, $T_{\max}=0.019$; (b) $t=0.5$, $T_{\min}=0.009$, $T_{\max}=0.091$;
(c) $t=1.5$, $T_{\min}=0.02$, $T_{\max}=0.18$; (d) $t=3$, $T_{\min}=0.029$, $T_{\max}=0.26$;
(e) $t=7$, $T_{\min}=0.038$, $T_{\max}=0.34$; (f) $t=15$, $T_{\min}=0.041$, $T_{\max}=0.37$.

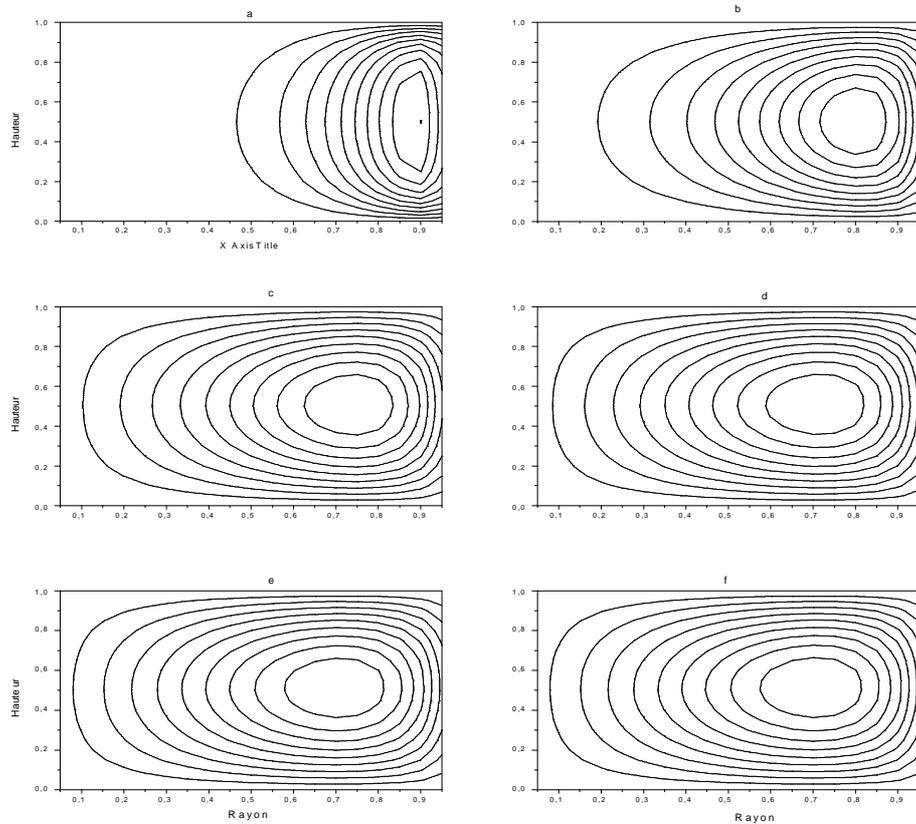


Figure A18 Les lignes de courants en régime variable
pour $H/D = 0.5$; $Ra = 4.E2$

- (a) $t=0.115$, $\Psi_{\min} = 8.1.E-6$, $\Psi_{\max} = 7.3.E-5$; (b) $t=0.5$, $\Psi_{\min} = 1.6.E-4$, $\Psi_{\max} = 0.0014$;
(c) $t=1.5$, $\Psi_{\min} = 8.6.E-4$, $\Psi_{\max} = 0.0078$; (d) $t=3$, $\Psi_{\min} = 0.0017$, $\Psi_{\max} = 0.015$;
(e) $t=7$, $\Psi_{\min} = 0.0024$, $\Psi_{\max} = 0.022$; (f) $t=15$, $\Psi_{\min} = 0.0025$, $\Psi_{\max} = 0.023$.

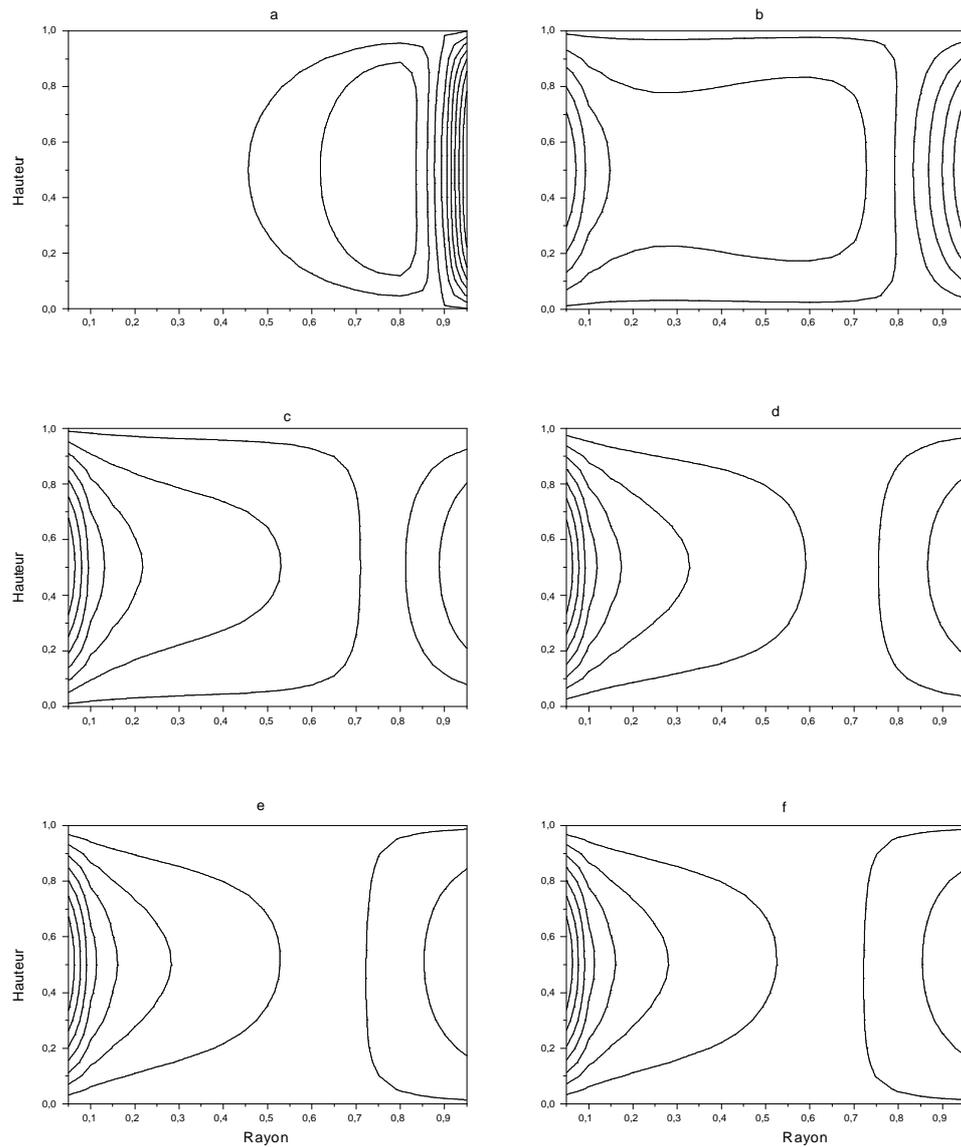


Figure A19. Profils de vitesse en régime variable
pour $H/D=0.5$; $Ra=4.E2$

- (a) $t=0.115$, $V_{\min}=-3.6.E-4$, $V_{\max}=7.4.E-4$; (b) $t=0.5$, $V_{\min}=-0.15$, $V_{\max}=0.011$;
(c) $t=1.5$, $V_{\min}=-0.17$, $V_{\max}=0.04$; (d) $t=3$, $V_{\min}=-0.41$, $V_{\max}=0.067$;
(e) $t=7$, $V_{\min}=-0.61$, $V_{\max}=0.086$; (f) $t=15$, $V_{\min}=-0.64$, $V_{\max}=0.089$.

ملخص

لدراسة التنبؤ الطبقي الحراري داخل صهريج تخزين غاز طبيعي مميع استعملنا طريقة عددية، مرتكزة على مفهوم الفوارق المنتهية. النموذج الرياضي المصاغ يطبق على حاوية ذات الشكل اسطواني في حمل طبيعي. افترضنا أن الجريان هادي و انتقالي وذو بعدين.

بعد اختيارنا للشروط الابتدائية و الشروط المطبقة على النهايات، قمنا بدراسة تطور الحقل الحراري و الحقل الحركي داخل الصهريج. النتائج المحصل عليها سمحت لنا بمعرفة التصرف الحركي و التصرف الحراري وتأثير أهم الوسائط على التنبؤ الحراري.

الكلمات المفتاحية: الغاز الطبيعي المميع، الحمل الطبيعي، المحاكاة العددية، التنبؤ، ADI.

Résumé :

Dans ce travail on propose d'étudier le phénomène de la stratification thermique dans un réservoir cylindrique vertical, utilisé pour le stockage de gaz naturel liquéfié. Après l'application des conditions initiales et aux limites, les équations de quantité de mouvement et d'énergie sont résolues numériquement par la méthode des différences finies en utilisant la méthode des directions alternées (ADI).

Les résultats obtenus permettent de prévoir le comportement thermique et dynamique du GNL dans le réservoir et l'influence des principaux paramètres sur la stratification thermique.

Mots Clés: Gaz Naturel liquéfié, convection naturelle, simulation numérique simulation, stratification, ADI

Abstract :

We suggest in this work to study, by means of numerical simulations, the evolution of the stratification and the LNG dynamics. Mathematical models of mixtures prediction can be used to model the LNG behavior in storage tanks. These models take into account the thermal convective exchanges between layers. The convection equations are solved by the finite differences methods using the following schemes: the Alternating Direction Implicit method (ADI) and the over-relaxation method. The cylindrical tank is laterally heated at a uniform heat flux density. The influence of Rayleigh number and the aspect ratio on the temperature and the velocity of the fluid are particularly studied.

Key words: Liquefied Natural Gas, natural convection, numerical simulation, stratification, ADI