

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE FERHAT ABBAS – SETIF
UFAS (ALGERIE)**

MEMOIRE

Présenté à la Faculté des Sciences de
Département de l'Electrotechnique

Pour l'Obtention du Diplôme de

MAGISTER

Option : **Automatique**

Par

MR. KHETTAB KHATIR

Thème

**COMMANDE ADAPTATIVE FLOUE
DES SYSTEMES NON LINEARES
PAR LA METHODE DE BACKSTEPPING
UTILISANT LE MODE GLISSANT**

Soutenu le / / 2005 devant la commission d'examen :

Mr. N. GOLÉA.

Mr. K. BENMAHAMMED

Mr. M.N. HARMAS

Mr. F. ABDESSEMED

Mr. A. FERHAT HAMIDA

M.C à l'univ de Oum EL Bouaki

Prof à l'univ de Sétif

C.C à l'univ de Sétif

M.C à l'univ de Batna

C.C à l'univ de Sétif

Président.

Rapporteur.

Co-Rapporteur.

Examineur.

Examineur.

Avant propos ...

Le présent travail a été effectué au **Laboratoire des Systèmes Intelligents (LSI)** du département d'électronique au sein de l'**Université Ferhat Abbas Sétif (UFAS)**.

Tout d'abord, je tiens à remercier les personnes qui ont accepté de faire partie de mon jury de mémoire.

- **Mr. K.BENMAHAMMED**, Professeur au département d'électronique de l'université de Sétif, pour avoir accepté le rôle de rapporteur et pour la longue conversation au LAS m'apportant de précieux conseils. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance et de mes sincères remerciements.
- **Mr. N. GOLEA**, Maître de conférences au département d'électrotechnique de l'université de Oum El Bouaki, qui m'a fait l'honneur de présider le jury.
- **Mr. F. ABDESSEMED**, Maître de conférences à l'université de Batna, pour avoir accepté de participer au jury, et pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail.
- **Mr. A. FERHAT HAMIDA**, chargé de cours au département d'électrotechnique de l'université de Sétif, en acceptant de faire partie du jury d'examen pour la soutenance de ce travail, et de porter un intérêt certain à ce modeste travail.

Je souhaite également remercier **Mr. M.N.HARMAS**, chargé de cours au département d'électrotechnique de l'université de Sétif pour ses conseils.

J'adresse mes sincères remerciements à tous mes amis qui m'ont aidé, de près ou de loin, pour l'élaboration de ce travail.

DEDICACE

À ma grande famille,
À mes ami(e)s,
Je dédie ce modeste travail.

Zoubir ...

SOMMAIRE

SOMMAIRE

- Introduction générale 01

CHAPITRE I COMMANDE ADAPTATIVE FLOUE (CAF).

I.1. Introduction	04
I.2. Définitions	04
I.2.1. Commande adaptative	04
I.2.1.1. Principe de la commande adaptative	05
I.2.1.2. Différentes techniques de commande adaptative	05
I.2.1.3. Système de commande adaptative	06
I.2.1.4. Commande adaptative directe et indirecte	06
I.2.1.5. La différence entre MRAC et STC	07
I.2.1.6. Structures du MR et du SA	07
I.2.2. Commande floue	08
I.2.2.1. Systèmes flous	08
I.2.2.2. Définition des fonctions d'appartenance pour les variables d'entrée/sortie	12
I.2.2.3. La désignation standard des ensembles flous	12
I.2.2.4. Inférence et opérateurs	13
I.3. Approche constructive de synthèse de Lyapunov à la conception du contrôleur adaptatif flou	13
I.3.1. Objectif de commande	14
I.3.2. Supposition 1	15
I.3.3. Supposition 2	19
I.4. Conception et analyse de stabilité de premier contrôleur	19
I.4.1. Conception de premier contrôleur adaptatif flou	19
I.4.2. Théorème 1	21
I.5. Conception et analyse de stabilité du deuxième contrôleur	21
I.5.1. Conception du 2 ^{ème} contrôleur adaptatif flou	22
I.5.2. Théorème 2	24
I.5.3. Remarque	24
I.6. Simulation et résultats	25
I.7. Conclusion	32

CHAPITRE II COMMANDE ADAPTATIVE BACKSTEPPING AVEC OBSERVATEUR

II.1. Introduction	33
II.2. Méthode de Backstepping	33
II.2.1. Commande par « backstepping »	33
II.2.2. Exemples et formulation du problème	37

II.2.3. Simulation et résultats	41
II.2.4. Remarque	43
II.3. Commande adaptative Backstepping	43
II.3.1. Approche adaptative	43
II.3.1.1. Conditions d'implantation	43
II.3.1.2. Exemples d'études	45
II.3.1.3. Simulation et résultats	46
II.4. Commande par backstepping avec observateur	51
II.4.1. Commande adaptative avec observateur	51
II.4.2. Développement théorique d'un exemple du deuxième ordre	52
II.4.3. Exemple d'application (système de pendule simple)	57
II.5. Conclusion	63

CHAPITRE III

COMMANDE ADAPTATIVE FLOUE VIA BACKSTEPPING (CAFB)

III.1. Introduction	64
III.2. Formulation du Problème	64
III.2.1. Suppositions	66
III.2.2. Exemple	66
III.3. Commande à structure variable par retour de sortie via backstepping	67
III.3.1. Proposition 1	69
III.3.2. Proposition 2	70
III.3.3. Proposition 3	70
III.3.4. Théorème 1	72
III.3.5. Exemple de simulation	72
III.3.6. Remarque	73
III.4. Commande à structure variable Adaptative floue	74
III.4.1. Remarque	78
III.4.2. Proposition 4	78
III.4.3. Théorème 2	79
III.4.4. Remarque	79
III.5. Exemple de simulation	79
III.6. Conclusion	81

CHAPITRE IV

COMMANDE PAR BACKSTEPPING UTILISANT LE MODE GLISSANT

IV.1. Introduction	82
IV.2. Système à structure variable	82
IV.2.1. Systèmes à structure variable aux régimes glissants	82
IV.2.2. Représentation des systèmes à structure variable	83
IV.2.2.1. Commutation par retour d'état variable	83
IV.2.2.2. Commutation de type relais	83
IV.2.3. Remarque	84

IV.3. Commande par mode glissant	84
IV.3.1. Formalisation classique du régime glissant	84
IV.3.2. Théorème de Philippov	85
IV.3.3. Technique de commande par mode glissant	85
IV.3.4. Application à la commande d'un pendule inversé	86
IV.3.4.1. Description	86
IV.3.4.2. Surface de glissement	87
IV.3.4.3. Dérivée de la surface	87
IV.3.4.5. Condition de glissement par Lyapunov	87
IV.3.4.6. Simulation et résultats	88
IV.4. Commande par mode glissant d'ordre supérieur	90
IV.4.1. Mode glissant d'ordre supérieur	90
IV.4.2. Mode glissant d'ordre deux (2-sliding)	90
IV.5. Conception de backstepping avec mode glissant du deuxième ordre	92
IV.5.1. Formulation du problème	92
IV.5.1.1. Procédure de conception de backstepping	93
IV.5.1.2. Transformation d'états modifiée	94
IV.6. Loi globale de commande par mode glissant d'ordre 2	96
IV.7. Simulation et résultats	99
IV.8. Conclusion	100
• Conclusion générale et perspectives	101
• Bibliographie	103
• Annexes	A1

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

L'objectif principal d'un ingénieur automaticien est d'élaborer une loi de commande qui confère à un procédé des propriétés désirées. Pour vérifier les performances d'une loi de commande développée, une première approche consiste tout simplement à tester la validité de cette dernière sur le procédé lui-même. Cette technique peut s'avérer difficile, parfois même impossible à mettre en œuvre, comme par exemple dans le cas des structures spatiales, nucléaires, etc. une alternative consiste alors à concevoir un modèle mathématique du procédé à commander, exploitable d'une part pour la synthèse du contrôleur et d'autre part pour la simulation des performances obtenues en boucle fermée. Dans cette optique, le but d'un chercheur automaticien est donc de développer des techniques permettant de proposer des méthodologies de synthèse de contrôleurs assurant les performances recherchées (synthèse), et garantir a priori le bon fonctionnement d'une loi de commande sur le procédé (analyse).

Pour commander un système, on s'appuie en général sur un modèle obtenu à partir de connaissances a priori comme les lois physiques ou à partir d'observations expérimentales. Dans beaucoup d'applications, on se contente d'une approximation linéaire autour d'un point de fonctionnement ou d'une trajectoire. Il est tout de même très important d'étudier les systèmes non linéaires et leurs commandes.

On vit dans un environnement constitué de deux mondes superposés : 1) Le monde réel constitué des objets matériels et des différents phénomènes (physiques, biologiques, sociaux, économiques,...) et 2) sa réflexion sur notre esprit en termes d'*information et de connaissances*. Ce dernier est un monde de symboles et de représentations conçus par la pensée humaine pour tenir compte du sens des éléments du premier. Ainsi, deux espaces de recherches ont été émergés. Le premier vise à comprendre le caractère du monde réel. Suivant la nature du phénomène étudié, plusieurs domaines scientifiques ont été développés (eg, physique, biologie, sociologie, etc). Par la suite, l'attention a été orientée vers le monde de l'information ainsi induit, en particulier, les mécanismes de la pensée humaine. Par conséquent, une nouvelle terminologie a vu le jour telles que la théorie de l'information, les sciences cognitives, l'intelligence artificielle, etc.

L'utilisation pragmatique des développements scientifiques a conduit, en particulier, à l'apparition de la technologie industrielle. Le besoin de produits industriels sophistiqués avec un coût et un temps de production réduits a conduit au développement de la commande

automatique. Par la suite, la théorie de l'automatique a été étendue à d'autres processus tels que les processus biologiques, économiques, sociaux et autres.

De nos jours, plusieurs problèmes stimulent encore la recherche dans ce domaine. La commande des systèmes complexes se heurte de plusieurs difficultés. Celles-ci ont été classées en trois catégories : 1) la présence des non linéarités, 2) les incertitudes et 3) la complexité des calculs. Ce qui exige des contrôleurs intelligents ayant de grandes capacités d'apprentissage et de prise de décisions dans des environnements incertains. Les systèmes biologiques et, en particulier, l'être humain en présentent un exemple. Ainsi, une imitation, même partielle, de leurs capacités présente une contribution importante à la théorie des systèmes. Cette imitation peut être faite par l'analyse et la compréhension des aspects structurels et fonctionnels de ces systèmes naturels. Puis, la modélisation des composantes d'intelligence ainsi identifiées en utilisant des représentations graphiques et les mathématiques. Les travaux déjà réalisés ont conduit à l'avènement de puissants outils tels que la logique floue, l'adaptation, le backstepping, le mode glissant, les réseaux de neurones et les calculs évolutionnaires.

Ainsi, en se basant sur leurs origines théoriques, les méthodes de la commande automatique peuvent être classées en deux grandes familles : 1) les méthodes conventionnelles basées sur les mathématiques du système, ayant leurs origines et leurs outils théoriques de l'espace de recherche concernant le monde réel, et 2) les méthodes modernes à base de l'intelligence artificielle, ayant essence du deuxième espace de recherche. Celles-ci visent à surmonter les difficultés rencontrées dans la commande de processus complexes par une approche qui ne fait pas appel aux mathématiques du système commandé.

Objectifs

Dans cette étude on s'intéresse aux méthodes de commande non linéaires adaptatives. Ces méthodes apportent une amélioration substantielle aux performances des contrôleurs adaptatifs basés sur l'estimation. Pour les méthodes non linéaires, la stabilité passe au premier plan pour devenir l'élément clé du design. La loi de commande tient compte de la dynamique d'adaptation. Ces deux dernières, ainsi que la fonction de Lyapunov qui garantit la stabilité et les performances du système, sont conçues simultanément, grâce à l'algorithme du backstepping et ses variantes. Cette méthode manque toutefois de souplesse dans le choix de la commande.

On a exploité la technique de la logique floue pour l'approximation des fonctions inconnues concernant le système étudié qui est non linéaire, et on intègre l'adaptation pour adapter le vecteur de paramètres de ce système.

La technique du backstepping adaptée aux systèmes triangulaires, est une méthode de commande réursive basée sur la fonction de Lyapunov. Cette dernière est un outil bien connu pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques non commandés.

Une commande à structure variable adaptative floue avec des fonctions d'appartenance lisses utilisant le concept de backstepping est systématiquement développée pour rapporter la performance relative de poursuite améliorée.

Une procédure réursive de backstepping pour la conception des contrôleurs basés sur l'estimation des systèmes non linéaires incertains est présentée dans cette étude. Sa motivation se fonde sur l'intention de réduire le volume des calculs de la conception de backstepping en exploitant la simplicité de la commande par mode glissant.

Plan du travail

Ce mémoire est réparti en quatre chapitres et la simulation est faite en se basant sur des programmes formulés en MATLAB version 6.5.

Dans le premier chapitre, on présente d'abord le concept de la technique de commande adaptative floue, puis nous établissons l'algorithme généralisé. Nous intéressons uniquement aux lois d'adaptations et à l'approximation.

Le deuxième chapitre est le sujet d'une étude détaillée de la technique backstepping adaptative avec observateur, on met la procédure de développement de cette technique de backstepping et on intègre l'observateur pour reconstruire les variables d'état du système.

Nous consacrons le troisième chapitre, à la résolution des problèmes de commande des systèmes non linéaires en se basant sur la commande adaptative floue par le backstepping.

Au quatrième chapitre, on présente une étude sur la commande des systèmes non linéaires par la technique backstepping en utilisant le mode de glissement.

Nous terminons l'étude de chaque chapitre par une analyse des différents résultats de simulation obtenus.

Une conclusion et des perspectives sont émises à la fin de cette recherche.

CHAPITRE 1

COMMANDE ADAPTATIVE FLOUE

CHAPITRE I

COMMANDE ADAPTATIVE FLOUE.

CONTENU

I. Sommaire

I.1. Introduction	04
I.2. Définitions	04
I.2.1. Commande adaptative	04
I.2.1.1. Principe de la commande adaptative	05
I.2.1.2. Différentes techniques de commande adaptative	05
I.2.1.3. Système de commande adaptative	06
I.2.1.4. Commande adaptative directe et indirecte	06
I.2.1.5. La différence entre MRAC et STC	07
I.2.1.6. Structures du MR et du SA	07
I.2.2. Commande floue	08
I.2.2.1. Systèmes flous	08
I.2.2.2. Définition des fonctions d'appartenance pour les variables d'entrée/sortie	12
I.2.2.3. La désignation standard des ensembles flous	12
I.2.2.4. Inférence et opérateurs	13
I.3. conception du contrôleur adaptatif flou selon la synthèse de Lyapunov	13
I.3.1. Objectif de commande	14
I.4. Conception et analyse de stabilité de premier CAF	19
I.4.1. Conception du premier contrôleur adaptatif flou	19
I.4.2. Théorème 1	21
I.5. Conception et analyse de stabilité du 2 ^{ième} CAF	21
I.5.1. Conception du contrôleur	21
I.5.2. Théorème 2	24
I.5.3. Remarque	24
I.6. Simulation et résultats	24
I.7. Conclusion	32

II. Figures :

Figure I.1. Principe des systèmes de commande adaptative	05
Figure I.2. Commande adaptative avec modèle de référence explicite (directe).	06
Figure I.3. Commande adaptative auto-ajustable (indirecte)	07
Figure I.4. Différentes structures du MRAC	07
Figure I.5. Configuration de base d'un système flou.	08
Figure I.6. Fuzzification avec (a)-trois, (b)-cinq et (c)-sept fonctions d'appartenance.	13
Figure I.7. Schéma général des systèmes de commande adaptative floue.	18
Figure I.8. Système pendule inversé.	25
Figure I.9. Sortie $y(t)$ & référence $y_m(t)$.	28
Figure I.10. Erreur $e(t)$.	28
Figure I.11. (a et b) Commande globale du système $u(t)$.	29
Figure I.12. Sortie $y(t)$ et référence $y_m(t)$.	29
Figure I.13. Erreur $e(t)$.	29
Figure I.14. Commande globale du système $u(t)$.	30
Figure I.15. (a & b) Sortie $y(t)$ & référence $y_m(t)$.	30
Figure I.16. (a & b) Erreur $e(t)$.	31
Figure I.17. Commandes $u_s(t)$ et $u_c(t)$.	31
Figure I.18. (a & b) Commande globale $u(t)$ du système.	32

CHAP I. COMMANDE ADAPTATIVE FLOUE.

I.1. Introduction

La commande floue a été appliquée à de nombreux produits commerciaux et systèmes industriels, où aucun modèle mathématique précis des systèmes sous commande n'est disponible, mais l'on dispose une partie de descriptions linguistiques concernant le fonctionnement de ces systèmes, fournies par des opérateurs humains expérimentés. Des méthodes conventionnelles de la commande non adaptative nécessitent la connaissance du modèle mathématique du système, lorsque la majorité des approches de la commande adaptative existant traitent seulement des systèmes linéaires.

Récemment, il y a quelques recherches utilisant des réseaux de neurones comme étant des blocs de construction des contrôleurs adaptatifs pour des systèmes non linéaires inconnus. [10]. Cependant, ces contrôleurs adaptatifs ne peuvent pas incorporer des informations floues. C'est pour cela, plusieurs recherches humaines sont représentées en termes linguistiques, mais leur incorporation au sien des contrôleurs dans une voie systématique est très importante.

Bien que les contrôleurs flous existés soient capables d'incorporer des informations linguistiques, ils sont de nature heuristique dans le sens où il n'y a pas de méthodes de forme générale qui garantissent les exigences de base telles que la stabilité, la robustesse, etc. Le présent succès de la pratique de la commande floue est principalement dû à son faible coût, à sa rapidité d'exécution et à sa capacité d'incorporer des informations linguistiques concernant le système sous commande.

Dans le contexte de la commande adaptative floue, deux approches sont proposées : directe et indirecte. La boucle de commande est composée, dans les deux cas, d'un type de commande, notamment un système flou pour assurer le suivi d'un modèle de référence stable et pour éliminer les effets de l'erreur d'approximation et des perturbations externes. Les processus traités sont non linéaires continus. Les outils de la théorie de Lyapunov sont utilisés pour établir la stabilité des boucles du contrôle. En plus, il est démontré que sous des conditions usuelles l'erreur de suivi converge vers zéro et que tous les autres signaux restent bornés.

Dans l'approche directe le système flou est utilisé comme un régulateur adaptatif. Dans l'approche indirecte, le système flou est utilisé comme un modèle flou pour estimer la dynamique du processus à contrôler. Dans les deux cas, un système flou de Takagi_Sugeno (TS) est utilisé.

La faisabilité des approches proposées est démontrée en simulation avec un système non linéaire SISO (pendule inversé).

I.2. Définitions

I.2.1. Commande adaptative

Adapter veut dire changer un comportement en conformité avec de nouvelles circonstances. Intuitivement, un contrôleur adaptatif est un régulateur qui peut modifier son comportement en réponses aux changements dus aux dynamiques d'un système et aux perturbations. Le contrôle adaptatif consiste à éliminer les perturbations structurelles (les variations des paramètres) agissant sur la performance du système de contrôle. Un système de contrôle est adaptatif, si en plus d'une contre réaction conventionnelle, il contient une boucle fermée de contrôle de son indice de performance. Une solution de ce problème est apportée par l'approche appelée commande adaptative.

I.2.1.1. Principe de la commande adaptative

La commande adaptative est un ensemble de techniques permettant un ajustement automatique en temps réel des paramètres des régulateurs des boucles de commandes afin de réaliser ou de maintenir un niveau de performance désiré lorsque les paramètres du processus sont inconnus et /ou varient dans le temps.

I.2.1.2. Différentes techniques de commande adaptative

Deux approches principales ont été établies pour palier à ces contraintes :

- 1- la commande adaptative à modèle de référence (model reference adaptive control MRAC).
- 2- la commande auto-ajustable (Self-tuning control : STC).

La différence entre ces deux modes réside dans le mode d'ajustement des paramètres du régulateur.

Pour la commande adaptative à modèle de référence, cet ajustement a une seule étape (méthode directe) : il est possible d'ajuster directement en boucle fermée les paramètres du régulateur.

Pour la commande auto-ajustable, l'ajustement se fait en deux étapes (méthodes indirectes) : la reconstitution du régulateur passe par l'identification en boucle fermée des paramètres inconnus du système.

Dans cette étude, on va s'occuper uniquement des régulateurs.

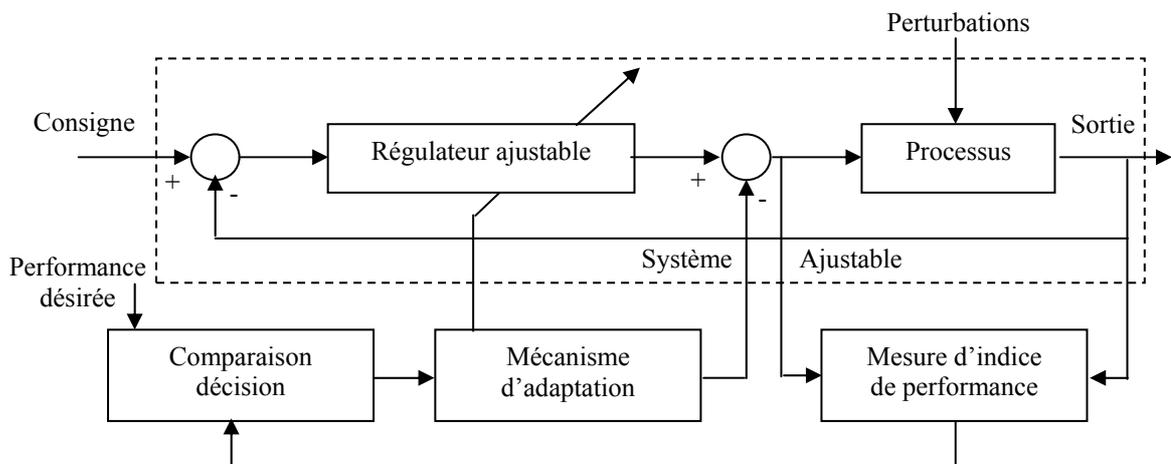


Figure I.1. Principe des systèmes de commande adaptative

La réalisation d'une commande adaptative ne se présente de sens que pour un processus pour lequel on sait réaliser une commande conventionnelle à partir d'un régulateur de type donné.

L'adaptation intervient au niveau de l'ajustement des paramètres de ce régulateur ou parfois directement au niveau du signal de commande de façon à satisfaire un indice de performance, préalablement défini, par l'intermédiaire d'un mécanisme d'adaptation.

La synthèse d'un contrôleur adaptatif impose le plus souvent les phases suivantes :

- Spécification des performances désirées (temps de réponse, déviation maximale admissible, minimisation d'énergie de commande ...).

- Définition de la structure de commande ou de type de régulateur qui sera utilisé en vue de réaliser les performances désirées.
- Conception du mécanisme d'adaptation qui permettra d'ajuster de façon "optimale" les paramètres du régulateur utilisé.

Les tâches qui incombent au mécanisme d'adaptation sont :

- ajustement automatique des régulateurs et optimisation de leurs paramètres en divers points de fonctionnement du processus.
- maintenance des performances exigées en cas de variation des paramètres du processus.
- détection des variations anormales des caractéristiques du processus.

I.2.1.3. Système de commande adaptative

Un système de commande adaptative mesure un certain indice de performance du système de commande, et à partir de l'écart entre l'indice de performance désiré et l'indice de performance mesuré, le mécanisme d'adaptation modifie les paramètres du système ajustable. On génère des signaux de commande auxiliaire, afin de maintenir l'indice de performance du système dans le voisinage des valeurs désirées.

On note que les systèmes de commande adaptative, même s'il s'agit de la commande d'un système linéaire à paramètres inconnus, sont des systèmes non linéaires car les paramètres du régulateur dépendent des variables ou des procédés à travers les mécanismes d'adaptation. Ceci explique les difficultés d'analyse et de synthèse de tels systèmes.

I.2.1.4. Commande adaptative directe et indirecte

Deux approches principales existent pour la commande adaptative (des processus à paramètres inconnus ou variables dans le temps) :

- La commande adaptative directe dont laquelle les paramètres du régulateur sont ajustés directement et en temps réel à partir d'une comparaison entre performance réelle et performance désirée (c'est le cas en particulier de la commande adaptative à modèle de référence (*Model Reference Adaptive Control* MRAC)) (fig. I.2).
- La commande adaptative indirecte, qui suppose une estimation des paramètres du processus par une procédure d'identification (c'est le cas des régulateurs auto-ajustables (*Self-tuning control* STC)) (fig. I.3).

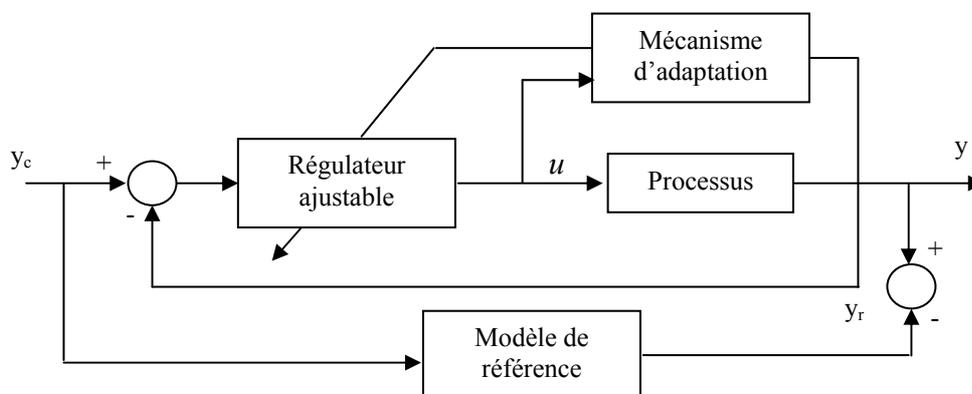


Figure I.2. Commande adaptative avec modèle de référence explicite (directe).

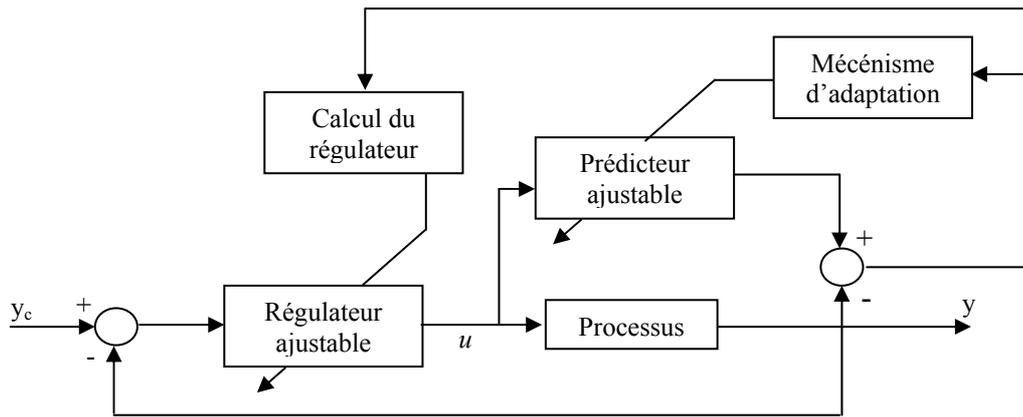


Figure I.3. Commande adaptative auto-ajustable (indirecte)

I.2.1.5. La différence entre MRAC et STC

Le problème de la commande adaptative avec modèle de référence MRAC est de déterminer le mécanisme d'ajustement MA pour qu'un système stable qui mène l'erreur à zéro soit obtenu. La différence entre le MRAC et le STC (système de commande auto ajustable ou auto réglable) réside dans le mode d'ajustement des paramètres du régulateur.

Pour le STC, l'ajustement se fait en deux étapes, utilisant des algorithmes explicites ou indirects. La reconstruction du régulateur passe par l'identification en boucle fermée des paramètres inconnus du système, puis par l'adaptation de ces paramètres.

Pour le MRAC, l'ajustement se fait en une seule étape. Il est possible d'ajuster les paramètres du régulateur directement en boucle fermée, utilisant des méthodes directes ou implicites.

I.2.1.6. Structures du MR et du SA

Il y a plusieurs structures de modèle de référence MR et du système à adapter SA dépendant de la position relative et la structure du MR et du SA, aussi bien de la manière dont l'erreur générée est formée. Les trois structures communes sont : parallèle, série et série-parallèle (fig. I.4).

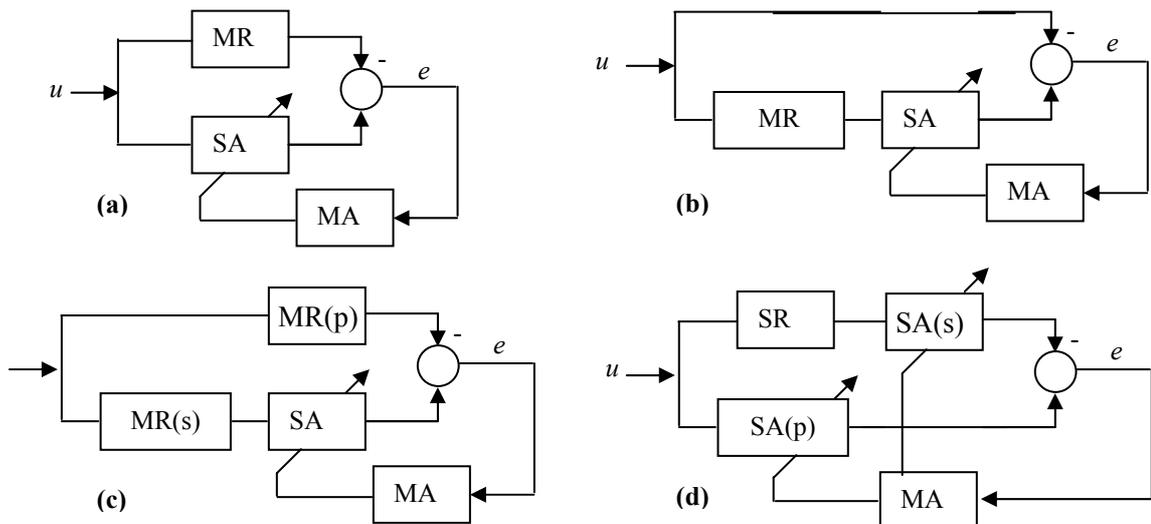


Figure I.4 Différentes structures du MRAC : (a) Parallèle, (b) Série, (c) et (d) Série-Parallèle.

Où, MR le modèle de référence, SA le système à adapter, MA le mécanisme d'adaptation, (p) parallèle et (s) série.

1.2.2. Commande floue

La logique floue a été introduite en 1965 par L.A Zadeh. Ses principes ont été appliqués en 1974 par E.H Mamdani à la construction d'un premier contrôleur flou.

Mais ce n'est que depuis quelques années que la commande floue a connu, essentiellement au Japon un essor remarquable ; elle a été appliquée dans divers domaines comme la purification de l'eau, la fabrication du ciment, la marche automatisé d'une trame de métro, etc.

Les ensembles flous permettent à des algorithmes déterministes de traiter des données linguistiques approximatives. La logique floue autorise un système artificiel à manipuler des données imprécises. En cela, elle s'inscrit dans l'éventail des techniques qui permettent d'effectuer par des systèmes artificiels des tâches habituellement prises en charge par les experts.

1.2.2.1. Systèmes flous

La fig. (I.5) représente la configuration de base des systèmes flous considérés dans cette étude, le système flou exécute une représentation de $U \subset R^n$ à \mathfrak{R} . On l'assume $U = U_1 \times \dots \times U_n$ où $U_i \in \mathfrak{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$. On présente maintenant une description détaillée de chacun des quatre blocs dans le système à la fig. (I.5).

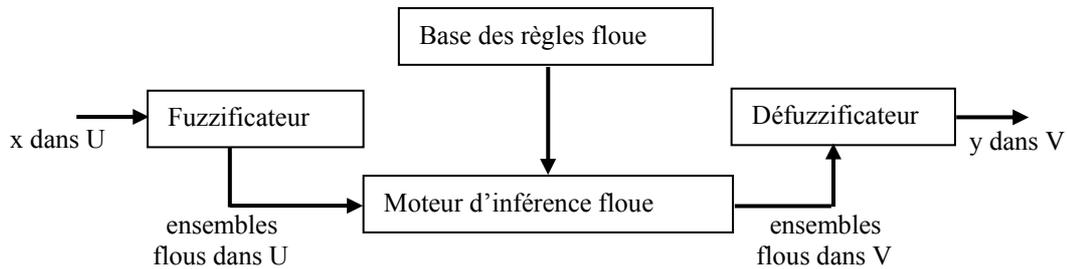


Figure I.5. Configuration de base d'un système flou.

a). Base des règles floues

La base des règles floues comprend une collection de règles floues *If-Then (Si-Alors)*,
 $R^{(l)} : \text{If } (x_1 \text{ is } F_1^l \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } F_n^l) \text{ Then } y \text{ is } G^l$ (I.1)
 où, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in U$ et $y \in \mathfrak{R}$ sont les entrées et la sortie du système flou respectivement, F_i^l et G^l sont les ensembles flous dans U_i et \mathfrak{R}_i respectivement, et $l = 1, 2, \dots, M$. Chaque règle floue de (I.1) définit une implication floue [8] $F_1^l \times \dots \times F_n^l \rightarrow G^l$, qui est un ensemble flou défini dans l'espace de produit $U \times \mathfrak{R}$, en se basant sur des généralisations des implications dans une logique multivariable, plusieurs règles d'implication ont été proposées dans la littérature de la logique floue, on cite quatre généralités utilisant ces règles [8] :

I- Règle d'opération Min,

$$\mu_{F_1^l \times \dots \times F_n^l \rightarrow G^l}(x, y) = \min \left[\mu_{F_1^l \times \dots \times F_n^l}(x), \mu_{G^l}(y) \right] \quad (\text{I.2})$$

2- Règle d'opération Produit,

$$\mu_{F_1^l \times \dots \times F_n^l \rightarrow G^l}(x, y) = \mu_{F_1^l \times \dots \times F_n^l}(x) \cdot \mu_{G^l}(y) \quad (I.3)$$

3- Règle d'opération arithmétique,

$$\mu_{F_1^l \times \dots \times F_n^l \rightarrow G^l}(x, y) = \min \left[1, 1 - \mu_{F_1^l \times \dots \times F_n^l}(x) + \mu_{G^l}(y) \right] \quad (I.4)$$

4- Règle d'opération Max,

$$\mu_{F_1^l \times \dots \times F_n^l \rightarrow G^l}(x, y) = \max \left[\min(\mu_{F_1^l \times \dots \times F_n^l}(x), \mu_{G^l}(y)), 1 - \mu_{F_1^l \times \dots \times F_n^l}(x) \right] \quad (I.5)$$

$$\text{où : } \mu_{F_1^l \times \dots \times F_n^l}(x) = \mu_{F_1^l}(x_1) * \dots * \mu_{F_n^l}(x_n) \quad (I.6)$$

et : « * » noté la *t-norme* [8] qui correspond la conjonction « and » dans (I.1) :

$\min(u, v)$ implication floue.

$u * v = uv$ produit algébrique

$\max(0, u + v - 1)$ produit borné.

$$(I.7)$$

b). Mécanisme (moteur) d'inférence floue

Le moteur ou mécanisme d'inférence floue, fonctionne à la configuration des ensembles flous dans U aux ensembles flous dans \mathfrak{R} , basé sur les règles floues (*If-Then*) dans la base de règle floue et la règle de la composition d'inférence [26].

On prend A_x comme un ensemble flou arbitraire dans U , alors chaque $R^{(l)}$ de (I.1) détermine un ensemble flou, $A_x \circ R^{(l)}$ dans \mathfrak{R} basé sur la règle de composition d'inférence *sup-étoile* (sup-star) comme suit,

$$\mu_{A_x \circ R^{(l)}}(y) = \sup_{x \in U} \left[\mu_{A_x}(x) * \mu_{F_1^l \times \dots \times F_n^l \rightarrow G^l}(x, y) \right] \quad (I.8)$$

où « * » la *t-norme* (I.7), et $\mu_{F_1^l \times \dots \times F_n^l \rightarrow G^l}(x, y)$ est déterminée par les règles d'implication

floues (I.2)-(I.5). L'ensemble flou final $A_x \circ (R^{(1)}, \dots, R^{(M)})$ est déterminé par toutes les M règles dans la base de la règle floue est obtenue en combinant $\mu_{A_x \circ R^{(l)}}(y)$ de (I.8) pour

$l = 1, 2, \dots, M$ utilisant la disjonction floue,

$$\mu_{A_x \circ (R^{(1)}, \dots, R^{(M)})}(y) = \mu_{A_x \circ R^{(1)}}(y) \dot{+} \dots \dot{+} \mu_{A_x \circ R^{(M)}}(y) \quad (I.9)$$

où « $\dot{+}$ » noté la *t-conorme* [8], le plus généralement l'opération utilisée pour $\dot{+}$ est :

$\max(u, v)$ union floue.

$u \dot{+} v = u + v - uv$ somme algébrique

$\min(1, u + v)$ somme bornée.

$$(I.10)$$

c). Fuzzification

Dans cette partie de fuzzification, on va effectuer une transformation des variables d'entrée, définies par des fonctions d'appartenance, en des variables linguistiques qui peuvent être traitées par des opérations floues. Elle correspond au point $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in U$, un ensemble flou A_x dans U . Il y a au moins deux choix possibles de cette configuration :

1- A_x est un singleton flou avec support x , c'est-à-dire,

$$\mu_{A_x}(x') = 1 \text{ pour } x' = x \text{ et } \mu_{A_x}(x') = 0 \text{ pour tout } x' \in U \text{ avec } x' \neq x.$$

2- $\mu_{A_x}(x) = 1$ et $\mu_{A_x}(x')$ diminue à 1 comme x' se déplace loin de x ,

Exp. $\mu_{A_x}(x') = \exp\left[-\frac{(x'-x)^T(x'-x)}{\sigma^2}\right]$ où σ^2 est un paramètre caractérisant la forme de la fonction d'appartenance $\mu_{A_x}(x')$.

Dans la littérature de la logique floue, il montre que seulement le singleton fuzzification en (I.1) a été utilisé d'une part, en autre, le non singleton fuzzification en (I.2) peut être utile si les entrées sont décomposées par le bruit.

d). défuzzification

Après l'étape d'inférence, on obtient une valeur floue, et puisque les entrées du système à commander sont des valeurs précises, alors il est nécessaire de transformer les valeurs floues en des valeurs numériques bien déterminées.

La défuzzification dessine des ensembles flous dans \mathfrak{R} à un nouveau point dans le même \mathfrak{R} , il y a au moins trois choix possibles de cette configuration :

1- défuzzification Max, définie comme :

$$y = \arg \sup_{y' \in \mathfrak{R}} \left[\mu_{A_x \circ (R^{(1)}, \dots, R^{(M)})}(y') \right] \quad (I.11)$$

où $\mu_{A_x \circ (R^{(1)}, \dots, R^{(M)})}(y')$ est donnée par (I.9).

2- défuzzification par centre de gravité (qui est la plus utilisée dans le domaine) définie comme :

$$y = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l (\mu_{A_x \circ R^{(l)}}(\bar{y}^l))}{\sum_{l=1}^M (\mu_{A_x \circ R^{(l)}}(\bar{y}^l))} \quad (I.12)$$

où \bar{y}^l est un point dans \mathfrak{R} auquel $\mu_{G^{(l)}}(y)$ réalise sa valeur maximum, et $\mu_{A_x \circ R^{(l)}}(y)$ est donnée par (I.8).

3- défuzzification par centre de gravité modifié, définie comme :

$$y = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l (\mu_{A_x \circ R^{(l)}}(\bar{y}^l) / \sigma^l)}{\sum_{l=1}^M (\mu_{A_x \circ R^{(l)}}(\bar{y}^l) / \sigma^l)} \quad (I.13)$$

où σ^l est un paramètre caractérisant la forme de $\mu_{G^{(l)}}(y)$, tel que cette forme est bornée, σ^l est plus petit, par exemple :

$$\text{If } \mu_{G^{(l)}}(y) = \exp\left(-\frac{(y-\bar{y}^l)^2}{\sigma^l}\right), \text{ Then } \sigma_j^i \text{ est un tel paramètre.}$$

e). Sous-classes du système flou

Aux sections (2-a) à (2-d), on voit que les systèmes flous (fig. I.5) comprennent une classe très riche de configuration de système statique de $U \subset \mathfrak{R}^n$ à \mathfrak{R} , parce que dans chaque bloc, il y a des différents choix et beaucoup de combinaisons de ces choix peuvent aboutir aux sous classes utiles de systèmes flous. On considère maintenant deux sous classes des systèmes flous qui seront utilisés comme des composants de nos contrôleurs adaptatifs flous.

L'ensemble du système flou avec la fuzzification singleton, la défuzzification par centre de gravité et le produit d'inférence sont toutes des fonctions $f: U \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ de la forme suivante :

$$y(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left(\prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i) \right)}{\sum_{l=1}^M \left(\prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i) \right)} \quad (\text{I.14})$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in U$, \bar{y}^l est le point auquel $\mu_{G^l}(y)$ réalise sa valeur maximum (en général, on l'assume $\mu_{G^l}(\bar{y}^l) = 1$), et F_i^l et G^l sont les ensembles flous dans (I.1).

Le système flou (I.14) est obtenu par le remplacement de (I.8) en (I.12) (défuzzification par centre de gravité) substitution (I.6) en (I.3) et (I.3) en (I.8) en remplaçant « * » par le produit algébrique (produit d'inférence), et remarquant que si A_x est un singleton flou avec support x (fuzzification par singleton), donc

$$\mu_{A_x \circ R^l}(y) = \sup_{x' \in U} \left[\mu_{A_x}(x') \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x'_i) \mu_{G^l}(\bar{y}^l) \right] = \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i)$$

si l'on fixe $\mu_{F_i^l}(x_i)$ et considère \bar{y}^l comme des paramètres ajustables, alors (I.14) peut être réécrite comme,

$$y(x) = \theta^T \xi(x) \quad (\text{I.15})$$

où $\theta = (\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^M)^T$ est un vecteur de paramètres et $\xi(x) = (\xi^1(x), \dots, \xi^M(x))^T$ est un vecteur régressif avec le régresseur $\xi^l(x)$ [23], défini comme,

$$\xi^l(x) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i)}{\sum_{l=1}^M \left(\prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i) \right)} \quad (\text{I.16})$$

Dans cette section, on utilise le système flou (I.15) comme des composants de notre premier contrôleur adaptatif flou.

L'avantage d'utiliser le système flou en (I.15) consiste à ce que $y(x)$ soit une fonction non linéaire par rapport à x , elle est linéaire dans son paramètre θ , donc, les contrôleurs adaptatifs flous basés sur cela seront relativement faciles à concevoir et à analyser.

L'inconvénient d'utiliser ce système de la forme (I.15) réside dans le fait de ne pas pouvoir ajuster les fonctions d'appartenance $\mu_{F_i^l}(x_i)$ pendant la procédure d'adaptation, le contrôleur

adaptatif flou n'est pas efficace dans l'utilisation de ces paramètres ajustables. L'ensemble du système flou avec fuzzification par singleton, défuzzification par centre de gravité, produit d'inférence et fonction d'appartenance gaussiennes consiste pour toutes fonctions $f: U \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ de la forme suivante,

$$y(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left[\prod_{i=1}^n \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l} \right)^2 \right) \right]}{\sum_{l=1}^M \left[\prod_{i=1}^n \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l} \right)^2 \right) \right]} \quad (\text{I.17})$$

(I.17) est obtenue par le remplacement $\mu_{F_i^l}(x_i) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2\right)$ (fonction

d'appartenance gaussienne) dans (I.14).

On remarque \bar{y}^l, \bar{x}_i^l et $\sigma_i^l > 0$ en (I.17) comme des paramètres ajustables.

On voit que le système (I.17) n'est pas seulement une fonction non linéaire par rapport à x , mais aussi non linéaire par rapport à ses paramètres. On utilise ce système flou comme une composante de notre deuxième contrôleur adaptatif flou.

Il y a deux raisons principales pour utiliser les systèmes flous (I.14) et (I.17) comme des composantes de base des contrôleurs adaptatifs flous. D'abord, il a été prouvé en [19] que les systèmes flous (I.14) et (I.17) sont approximations universelles, c'est-à-dire, pour n'importe quelle fonction donnée réelle continue g sur l'ensemble U , existent là des systèmes flous dans la forme (I.14) et (I.17), tel que ces systèmes peuvent uniformément approximer g sur U à la précision arbitraire. Alors, les systèmes flous (I.14) et (I.17) sont comme composantes des contrôleurs adaptatifs flous pour les systèmes non linéaires.

Deuxièmement, les systèmes flous (I.14) et (I.17) sont construits à partir des règles floues *If-Then* de la forme (I.1) en utilisant quelques stratégies spécifiques d'inférence floue, de fuzzification et de défuzzification, autrement, les informations linguistiques de l'expert humain (dans la forme des règles floues *If-Then* dans (I.1)) peuvent être incorporées directement dans le contrôleur.

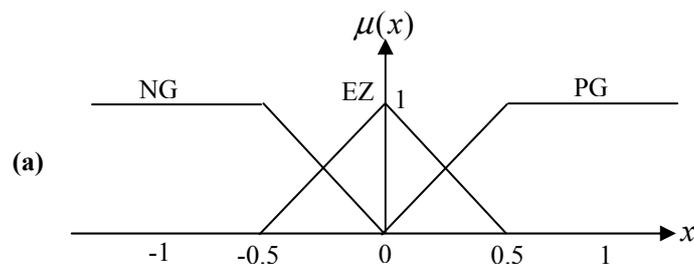
I.2.2.2. Définition des fonctions d'appartenance pour les variables d'entrée/sortie

Pour la définition des variables linguistiques par des fonctions d'appartenance on utilise, en général, des formes trapézoïdales et triangulaires. Bien qu'il n'existe pas des règles précises pour la définition des fonctions d'appartenance, quelques directives générales seront données, afin de faciliter un premier choix.

Le nombre des ensembles flous dépend de la résolution et de l'intervention du réglage désiré. En général, ce nombre ne dépasse pas sept (Fig.I.6).

I.2.2.3. La désignation standard des ensembles flous

NG (Négatif grand), NM (Négatif moyen), NP (Négatif petit), EZ (Environ zéro), PP (Positif petit), PM (Positif moyen) et PG (Positif grand) (fig. I.6).



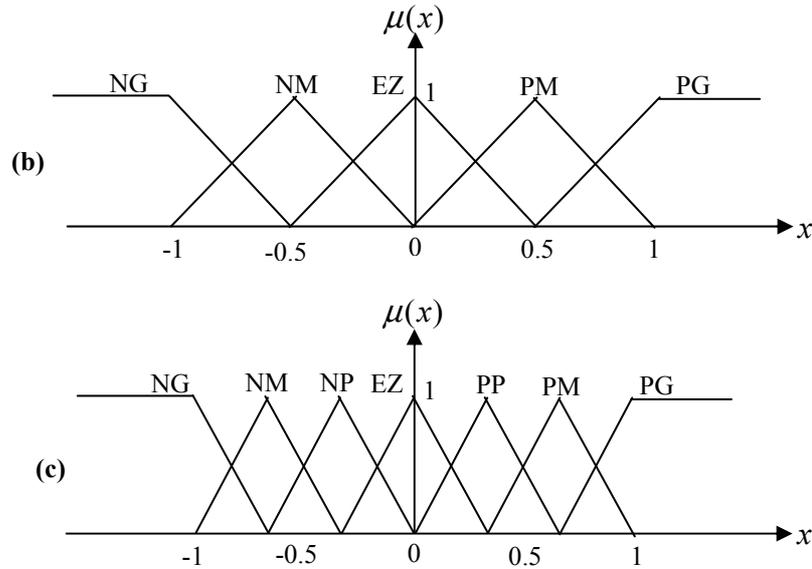


Figure I.6. Fuzzification avec (a)-trois, (b)-cinq et (c)-sept fonctions d'appartenance.

1.2.2.4. Inférence et opérateurs

a). **Règles d'inférences** : Ces règles permettent de relier les variables floues d'entrée aux variables floues de sortie à l'aide de différents opérateurs. Elles doivent être définies par le concepteur de système de réglage en fonction de son expérience (rôle d'*expert*) et mémorisées dans l'organe de commande.

b). **Opérateurs** : Les règles d'inférences font appel aux opérateurs **et**, **ou** et **non**, qui s'appliquent aux variables floues. Dans le cas de la logique binaire, ces opérateurs sont définis de façon simple et univoque. Dans le cas de la logique floue, la définition de ces opérateurs n'est plus univoque et on utilise le plus souvent les relations (min, max, produit et moyenne).

Les opérations **min** et **max** présentent l'avantage de la simplicité lors du calcul, par contre, elles privilégient l'une des deux variables. Les opérations de produit et valeurs moyennes sont plus complexes à calculer, mais elles produisent un résultat qui tient compte des valeurs des deux variables.

1.3. Conception du contrôleur adaptative flou selon la synthèse de Lyapunov

Dans cette section, on utilise d'abord, les objectifs de la commande et montre ensuite, dans une façon constructive, comment développer des contrôleurs adaptatifs basés sur les systèmes flous pour réaliser ces objectifs,

On considère le système $n^{\text{ème}}$ ordres comme,

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= x_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(x_1, x_2, \dots, x_n)u \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{I.18}$$

qui est équivalent la forme,

$$x^{(n)} = f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) + g(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})u, \quad y = x \quad (\text{I.19})$$

où, f et g sont des fonctions continues et inconnues, $u \in \mathfrak{R}$ et $y \in \mathfrak{R}$ sont l'entrée et la sortie du système respectivement et $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = (x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \in \mathfrak{R}$ est le vecteur d'état de ce système qui est assumé être disponible pour la mesure. Pour (I.18) être contrôlable, on exige que $g(x) \neq 0$ pour x dans une certaine région contrôlable $U_c \subset \mathfrak{R}^n$. Puisque $g(x)$ est continue, sans perte de généralité, on assume $g(x) > 0$ pour $x \in U_c$.

Dans le domaine de la commande non linéaire [5], [17] ces systèmes sont dans une forme normale et ont le degré relatif égale à n .

L'objectif de la commande est de forcer y de suivre le signal de référence donné borné y_m , dans la contrainte que tout signal impliqué doit être borné.

I.3.1. Objectif de commande

On détermine une commande contre réaction (feedback) $u = u(x/\theta)$, et une loi d'adaptation pour l'ajustement du vecteur de paramètres θ tel que,

- 1- le système en boucle fermée (BF) doit être globalement stable et robuste dans le sens que toutes les variables $x(t)$, $\theta(t)$ et $u = u(x/\theta)$ uniformément bornées. C'est-à-dire, $|x(t)| \leq M_x < \infty$, $|\theta(t)| \leq M_\theta < \infty$ et $|u(x/\theta)| \leq M_u < \infty$ pour tout $t \geq 0$, où M_x, M_θ et M_u sont des paramètres de conception indiqués par le concepteur.
- 2- l'erreur de poursuite $e = y_m - y$, doit être le moins possible dans les contraintes de (I.1).

Dans le reste de cette partie, on va montrer comment construire des contrôleurs adaptatifs flous pour réaliser les objectifs de la commande.

Pour commencer, on prend $e = (e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)})$ et $k = (k_n, \dots, k_1)^T \in \mathfrak{R}^n$, telles que toutes les racines du polynôme $h(s) = s^n + k_1 s^{n-1} + \dots + k_n$ sont dans le demi-plan gauche.

Si les fonctions f et g sont connues, alors la loi de commande est,

$$u = \frac{1}{g(x)} \left[-f(x) + y_m^{(n)} + k^T e \right] \quad (\text{I.20})$$

appliqué à (I.19) cela donne,

$$e^{(n)} + k_1 e^{(n-1)} + \dots + k_n e = 0 \quad (\text{I.21})$$

qui implique que $\lim_{t \rightarrow 0} e(t) = 0$ qui est l'objectif principal de notre commande.

Ainsi, si f et g sont inconnues, on les remplace par les systèmes flous $\hat{f}(x/\theta_f)$ et $\hat{g}(x/\theta_g)$ respectivement, lesquels sont de la forme (I.14) ou (I.17), la loi de commande résultante est,

$$u_c = \frac{1}{\hat{g}(x/\theta_g)} \left[-\hat{f}(x/\theta_f) + y_m^{(n)} + k^T e \right] \quad (\text{I.22})$$

en appliquant (I.22) à (I.19) et après quelques manipulations directes, on obtient l'équation de l'erreur comme,

$$e^{(n)} = -k^T e + \left[\hat{f}(x/\theta_f) - f(x) \right] + \left[\hat{g}(x/\theta_g) - g(x) \right] u_c \quad (\text{I.23})$$

qui est équivalente à,

$$\dot{e} = \Lambda_c e + b_c \left[\left(\hat{f}(x/\theta_f) - f(x) \right) + \left(\hat{g}(x/\theta_g) - g(x) \right) u_c \right] \quad (\text{I.24})$$

$$\text{où, } \Lambda_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & -k_1 \end{bmatrix}, \quad b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.25})$$

et, Λ_c est une matrice stable ($|sI - \Lambda_c| = s^{(n)} + k_1 s^{(n-1)} + \dots + k_n$ qui est stable), on déduit qu'il existe dans ce cas, une matrice unique positive définie symétrique $P(n \times n)$ qui satisfait l'équation de Lyapunov [17],

$$\Lambda_c^T P + P \Lambda_c = -Q \quad (\text{I.26})$$

où, Q ($n \times n$) est une matrice arbitraire positive définie.

Prenant l'équation de Lyapunov $V_e = \frac{1}{2} e^T P e$, en utilisant (I.24) et (I.26), on aura,

$$\dot{V}_e = \frac{1}{2} \dot{e}^T P e + \frac{1}{2} e^T P \dot{e} = \frac{1}{2} e^T Q e + e^T P b_c \cdot \left[(\hat{f}(x/\theta_f) - f(x)) + (\hat{g}(x/\theta_g) - g(x)) u_c \right] \quad (\text{I.27})$$

Pour que $x_i = y_m^{(i-1)} - e^{(i-1)}$ soit limité, V_e doit être limité, ce qui signifie que $\dot{V}_e \leq 0$ lorsque V_e est plus grand à une constante \tilde{V} . Cependant, de (I.27) on voit qu'il est très difficile de concevoir u_c tel que le dernier terme de (I.27) soit négatif. Pour résoudre ce problème, on rajoute un autre terme de commande u_s à u_c , la commande finale sera,

$$u = u_c + u_s \quad (\text{I.28})$$

le terme de la commande additionnelle u_s est appelé la commande de superviseur. La détermination de u_s , tel que $\dot{V}_e \leq 0$ quand $V_e > \tilde{V}$, est obtenue en substituant (I.28) dans (I.19) et en utilisant la même manipulation pour obtenir (I.24), on a la nouvelle équation de l'erreur,

$$\dot{e} = \Lambda_c e + b_c \left[(\hat{f}(x/\theta_f) - f(x)) + (\hat{g}(x/\theta_g) - g(x)) u_c - g(x) u_s \right] \quad (\text{I.29})$$

utilisant (29) et (26) on aura,

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &= -\frac{1}{2} e^T Q e + e^T P b_c \cdot \left[(\hat{f}(x/\theta_f) - f(x)) + (\hat{g}(x/\theta_g) - g(x)) u_c - g(x) u_s \right] \\ &\leq -\frac{1}{2} e^T Q e + |e^T P b_c| \cdot \left[|\hat{f}(x/\theta_f)| + |f(x)| + |\hat{g}(x/\theta_g) u_c| + |g(x) u_c| \right] - e^T P b_c g(x) u_s \end{aligned} \quad (\text{I.30})$$

Pour concevoir u_s tel que le dernier terme de (I.30) soit non positif, on a besoin de connaître les limites des f et g , c'est-à-dire on doit faire la supposition suivante :

I.3.2. Supposition 1 [25]

On détermine des fonctions $f^U(x)$, $g^U(x)$ et $g_L(x)$ tel que $|f(x)| \leq f^U(x)$ et $g_L(x) \leq g(x) \leq g^U(x)$ pour $x \in U_c$, où $f^U(x) < \infty$, $g^U(x) < \infty$ et $g_L(x) > 0$ pour $x \in U_c$ basé sur f^U , g^U et g_L en observant (I.30), on choisit la commande de supervision u_s comme,

$$u_s = I_1^* \operatorname{sgn}(e^T P b_c) \frac{1}{g_L(x)} \left[|\hat{f}(x/\theta_f)| + f^U(x) + |\hat{g}(x/\theta_g) u_c| + |g^U(x) u_c| \right] \quad (\text{I.31})$$

où, $I_1^* = 1$ si $V_e > \tilde{V}$ (constant indiqué par le concepteur), $I_1^* = 0$ si $V_e \leq \tilde{V}$ et $\text{sgn}(y) = 1(-1)$ si $y \geq 0 (< 0)$. Remplaçant (I.31) dans (I.30) et considérant le cas $V_e < \tilde{V}$, donc,

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &\leq \frac{1}{2} e^T Q e + |e^T P b_c| \cdot \left[|\hat{f}| + |f| + |\hat{g} u_c| + |g u_c| - \frac{g}{g_L} (|\hat{f}| + |f^U| + |\hat{g} u_c| + |g^U u_c|) \right] \\ &\leq -\frac{1}{2} e^T Q e \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

Dans un résumé, en utilisant la commande (I.28) avec u_c donnée en (I.22) et u_s donnée en (I.31), on peut garantir que $V_e \leq \tilde{V} < \infty$. Lorsque P est défini positif, le fait que V_e est limitée implique que e est limitée qui à son tour implique que x est bornée.

Notons que toutes les termes dans les cotés à droite de (I.22) et (I.31) sont disponibles pour la mesure, donc la loi de commande (I.28) peut être mise en œuvre.

La tâche suivante, dans une façon constructive, est à remplacer \hat{f} et \hat{g} par la formule spécifique des systèmes flous (I.14) et (I.17) et à développer une loi d'adaptation pour ajuster leurs paramètres dans le but d'assumer la convergence de l'erreur de poursuite.

D'abord, on définit :

$$\theta_f^* = \arg \min_{\theta_f \in \Omega_f} \left[\sup_{x \in U_c} |\hat{f}(x/\theta_f) - f(x)| \right] \quad (\text{I.33})$$

$$\theta_g^* = \arg \min_{\theta_g \in \Omega_g} \left[\sup_{x \in U_c} |\hat{g}(x/\theta_g) - g(x)| \right] \quad (\text{I.34})$$

où Ω_f et Ω_g sont des ensembles de contraintes pour θ_f et θ_g respectivement, spécifiés par le concepteur. Pour Ω_f , on exige que θ_f soit borné et pour le système flou (I.17) que les σ_i^l soient positives c'est-à-dire,

$$\Omega_f = \left\{ \theta : |\theta_f| \leq M_f, \sigma_i^l \geq \sigma \right\} \quad (\text{I.35})$$

avec M_f et σ sont des constantes positives spécifiées par le concepteur. Si l'on utilise le système flou (I.14), on ignore $\sigma_i^l \geq \sigma$ dans (I.35).

Pour Ω_g , en plus des contraintes semblables à (I.35), on exige aussi que $\hat{g}(x/\theta_g)$ soit positive (car $g(x)$ est positive). En observant (I.14) et (I.17), on aura,

$$\Omega_g = \left\{ \theta_g : |\theta_g| \leq M_g, \bar{y}^l \geq \varepsilon, \sigma_i^l \geq \sigma \right\} \quad (\text{I.36})$$

où M_g , ε , σ sont des constantes positives spécifiées par le concepteur.

Tous les deux système flous (I.14) et (I.17) sont les moyennes pondérées de $\bar{y}^l \geq \varepsilon > 0$ implique que les systèmes flous correspondants sont positifs. Si l'on utilise le système (I.14) on ignore la contrainte $\sigma_i^l \geq \sigma$. Définissons l'erreur d'approximation minimale comme suit,

$$w = (\hat{f}(x/\theta_f^*) - f(x)) + (\hat{g}(x/\theta_g^*) - g(x))u_c \quad (\text{I.37})$$

alors, l'équation de l'erreur (I.29) peut être réécrite comme,

$$\dot{e} = \Lambda_c e - b_c g(x)u_s + b_c \left[(\hat{f}(x/\theta_f) - \hat{f}(x/\theta_f^*)) + (\hat{g}(x/\theta_g) - \hat{g}(x/\theta_g^*))u_c + w \right] \quad (\text{I.38})$$

si l'on choisit \hat{f} et \hat{g} de la forme (I.14) ou (I.15), donc on peut récrire (I.38) comme,

$$\dot{e} = \Lambda_c e - b_c g(x)u_s + b_c w + b_c \left[\phi_f^T \xi(x) + \phi_g^T \xi(x)u_c \right] \quad (\text{I.39})$$

où, $\phi_f = \theta_f - \theta_f^*$, $\phi_g = \theta_g - \theta_g^*$ et $\xi(x)$ est la fonction floue de base.

Maintenant, on considère la fonction de Lyapunov comme suit :

$$V = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2\gamma_1} \phi_f^T \phi_f + \frac{1}{2\gamma_2} \phi_g^T \phi_g \quad (\text{I.40})$$

où, γ_1 et γ_2 sont des constantes positives.

La dérivée de V par rapport au temps est donnée par,

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\frac{1}{2} e^T Q e - g(x) e^T P b_c u_s + e^T P b_c w + \frac{1}{\gamma_1} \phi_f^T (\dot{\theta}_f + \gamma_1 e^T P b_c \xi(x)) + \\ & \frac{1}{\gamma_2} \phi_g^T (\dot{\theta}_g + \gamma_2 e^T P b_c \xi(x) u_c) \end{aligned} \quad (\text{I.41})$$

où on utilise (I.26) et $\dot{\phi}_f = \dot{\theta}_f$, $\dot{\phi}_g = \dot{\theta}_g$ de (I.31) et $g(x) > 0$. On a $g(x) e^T P b_c u_s \geq 0$, si l'on choisit les lois d'adaptation comme,

$$\dot{\theta}_f = -\gamma_1 e^T P b_c \xi(x) \quad (\text{I.42})$$

$$\dot{\theta}_g = -\gamma_2 e^T P b_c \xi(x) u_c \quad (\text{I.43})$$

donc, à partir de (41) on aura,

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} e^T Q e + e^T P b_c w \quad (\text{I.44})$$

C'est le mieux qu'on puisse espérer avoir parce que le terme $e^T P b_c w$ est de l'ordre de l'erreur minimale de l'approximation. Si $w = 0$, c'est-à-dire, que les espaces de recherche pour \hat{f} et \hat{g} sont si grands que f et g y sont inclus. Alors, on a $\dot{V} \leq 0$. Parce que les systèmes flous dans les définitions 1 et 2 sont des approximations universelles, on peut espérer que w soit petit, sinon égale à zéro, à condition qu'on utilise suffisamment le complexe.

Si l'on choisit \hat{f} et \hat{g} de la forme (I.17), donc pour utiliser la même stratégie qu'avant, on doit développer \hat{f} et \hat{g} en utilisant les développements en séries de Taylor.

Spécifiquement, en prenant les développements en séries de Taylor de $\hat{f}(x/\theta_f^*)$ et $\hat{g}(x/\theta_g^*)$ autour de θ_f et θ_g on aura,

$$\hat{f}(x/\theta_f) - \hat{f}(x/\theta_f^*) = \phi_f^T \left(\frac{\partial \hat{f}(x/\theta_f)}{\partial \theta_f} \right) + o\left(\left|\phi_f\right|^2\right) \quad (\text{I.45})$$

$$\hat{g}(x/\theta_g) - \hat{g}(x/\theta_g^*) = \phi_g^T \left(\frac{\partial \hat{g}(x/\theta_g)}{\partial \theta_g} \right) + o\left(\left|\phi_g\right|^2\right) \quad (\text{I.46})$$

où, $o\left(\left|\phi_f\right|^2\right)$ et $o\left(\left|\phi_g\right|^2\right)$ sont des termes d'ordre élevé.

On remplace (I.45) et (I.46) en (I.38), on donne,

$$\dot{e} = \Lambda_c e - b_c g(x) u_s + b_c v + b_c \left[\phi_f^T \left(\frac{\partial \hat{f}(x/\theta_f)}{\partial \theta_f} \right) + \phi_g^T \left(\frac{\partial \hat{g}(x/\theta_g)}{\partial \theta_g} \right) u_c \right] \quad (\text{I.47})$$

$$\text{où } v = w + o\left(\left|\phi_f\right|^2\right) + o\left(\left|\phi_g\right|^2\right) u_c \quad (\text{I.48})$$

Le reste du développement est le même que pour (I.40)-(I.44).

Le problème final est comment forcer θ_f et θ_g dans les ensembles Ω_f (I.35) et Ω_g (I.36), respectivement. Si nous pouvons garder $\theta_f \in \Omega_f$ et $\theta_g \in \Omega_g$, alors u_c (I.22) et u_s (I.31) seront bornées parce que dans ce cas-ci \hat{f} est bornée et $\hat{g} > 0$, et on rappelle que e est bornée grâce à la commande de supervision u_s .

Il est clair que les lois d'adaptation (I.42) et (I.43) ne peuvent pas garantir que $\theta_f \in \Omega_f$ et $\theta_g \in \Omega_g$, pour résoudre ce problème, on utilise l'algorithme de la projection de paramètres [4], [9].

Si les vecteurs de paramètres θ_f et θ_g sont dans les ensembles de contraintes ou ils sont sur les limites mais se déplaçant vers l'intérieur de ces ensembles, alors en utilisant la loi d'adaptation simple (I.42) et (I.43), autrement dit, s'ils sont sur les limites en mouvement vers l'extérieur des ensembles donc on utilise l'algorithme de la projection pour modifier la loi d'adaptation (I.42) et (I.43) de telle façon que les vecteurs restent à l'intérieur des ensembles.

On montre l'arrangement de la commande complète dans la fig. (I.7).

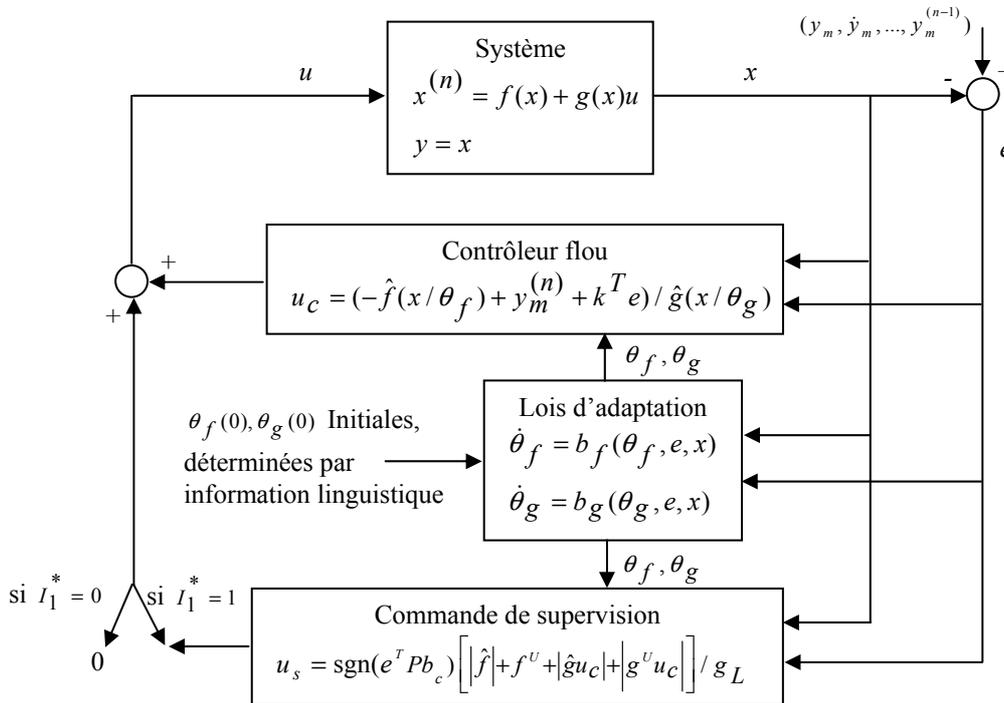


Figure I.7. Schéma général des systèmes de commande adaptative floue.

On a montré toutes les idées de base pour la conception des contrôleurs adaptatifs flous stables d'une façon constructive. Dans les sections 4 et 5, on fait la procédure inverse par l'exposition des étapes de conception détaillées des contrôleurs adaptatifs flous, ensuite, on montre que les CAF ainsi conçus ont les propriétés désirées.

On pense que la manière de la présentation dans cette section devrait la faciliter pour comprendre comment les CAF sont obtenus, tandis que la manière de la présentation dans les sections 4 et 5 devrait la faciliter pour les employer.

Avant de conclure cette section, on considère la supposition suivante,

I.3.3. Supposition 2 [25]

On suppose qu'il existe des descriptions linguistiques fournies par un opérateur humain pour les fonctions inconnues $f(x)$ et $g(x)$:

$$R_f^{(r)} : \text{If } x_1 \text{ is } A_1^r \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } A_n^r \text{ Then } f(x) \text{ is } C^r \quad (\text{I.49})$$

$$R_g^{(s)} : \text{If } x_1 \text{ is } B_1^s \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } A_n^s \text{ Then } g(x) \text{ is } D^s \quad (\text{I.50})$$

avec A_i^r, B_i^s, C^r et D^s sont des ensembles flous dans \mathfrak{R} , $r = 1, 2, \dots, L_f$ et $s = 1, 2, \dots, L_g$.

On admet que $L_f = L_g = 0$, ce qui signifie qu'il n'y a aucune description linguistique (I.49) et (I.50) au sujet de f et g , donc la supposition 2 n'est pas une nécessité, on la pose juste pour accentuer l'incorporation des descriptions linguistiques (s'il y en a) dans les contrôleurs adaptatifs flous.

I.4. Conception et analyse de stabilité de premier contrôleur

Dans cette partie, on choisit $\hat{f}(x/\theta_f)$ et $\hat{g}(x/\theta_g)$ de la forme des systèmes flous en (I.14) ou (I.15). On présente d'abord les étapes détaillées de conception du contrôleur adaptatif flou et étudions ensuite ses propriétés.

I.4.1. Conception du premier contrôleur adaptatif flou

• Étape 1 : Présentation autonome

- indiquer les k_1, \dots, k_n telles que toutes les racines de $s^n + k_1 s^{n-1} + \dots + k_n$ sont dans le demi-plan gauche, spécifier une matrice $Q_{(n \times n)}$ positive définie.
- résoudre l'équation de Lyapunov (I.26), par exemple en utilisant la méthode en [24], pour obtenir $P > 0$ symétrique.
- indiquer les paramètres de conception M_f, M_g, ε et \tilde{V} basés sur les contraintes pratiques.

• Etape 2 : Construction du contrôleur initial

- définir m_i ensembles flous $F_i^{l_i}$ dont les fonctions d'appartenances $\mu_{F_i^{l_i}}$ contiennent uniformément U_{c_i} qui est la projection de U_c sur les $i^{\text{ème}}$ coordonnées, où $l_i = 1, 2, \dots, m_i$ et $i = 1, 2, \dots, n$, on exige que $F_i^{l_i}$ inclus A_i^r et B_i^s dans (I.49) et (I.50).
- construire les règles floues de base à partir des systèmes flous $\hat{f}(x/\theta_f)$ et $\hat{g}(x/\theta_g)$, dont chacun construit à partir de $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$ règles, ces dernières ont les parties *If* qui exprime toutes les combinaisons possibles des $F_i^{l_i}$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.

La base des règles floues de $\hat{f}(x/\theta_f)$ et $\hat{g}(x/\theta_g)$ est construite par les règles suivantes:

$$\begin{aligned} R_f^{(l_1, l_2, \dots, l_n)} : \text{If } x_1 \text{ is } F_1^{l_1} \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } F_n^{l_n} \\ \text{Then } \hat{f}(x/\theta_f) \text{ is } G^{(l_1, l_2, \dots, l_n)} \end{aligned} \quad (\text{I.51})$$

$$R_g^{(l_1, l_2, \dots, l_n)} : \text{If } x_1 \text{ is } F_1^{l_1} \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } F_n^{l_n} \quad (I.52)$$

$$\text{Then } \hat{g}(x/\theta_g) \text{ is } H^{(l_1, l_2, \dots, l_n)}$$

respectivement, où $l_i = 1, 2, \dots, m_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $G^{(l_1, l_2, \dots, l_n)}$ et $H^{(l_1, l_2, \dots, l_n)}$ sont des ensembles flous dans \mathfrak{X} , qui sont indiqués comme suit :

Si la partie IF de (I.51) ou (I.52) est conforme à la partie IF de (I.49) ou (I.50), on met $G^{(l_1, l_2, \dots, l_n)}$ ou $H^{(l_1, l_2, \dots, l_n)}$ égal à la développement C^r ou D^s , respectivement; autrement, on met $G^{(l_1, l_2, \dots, l_n)}$ ou $H^{(l_1, l_2, \dots, l_n)}$ arbitrairement avec la contrainte qui centres $G^{(l_1, l_2, \dots, l_n)}$ ou $H^{(l_1, l_2, \dots, l_n)}$ sont à l'intérieur des ensembles de contraintes Ω_f et Ω_g , respectivement.

Par conséquent, le contrôleur initial est construit par les règles (I.49) et (I.50).

- Construire les fonctions floues de base,

$$\xi^{(l_1, l_2, \dots, l_n)}(x) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{F_i^{l_i}}(x_i)}{\sum_{l_1=1}^{m_1} \dots \sum_{l_n=1}^{m_n} \left(\prod_{i=1}^n \mu_{F_i^{l_i}}(x_i) \right)} \quad (I.53)$$

et les rassembler dans $\prod_{i=1}^n$ le vecteur $\xi(x)$ m_i -dimensionnel dans un ordre naturel pour $l_i = 1, 2, \dots, l_i = 1, 2, \dots, m_n$, on prend les points auxquels $\mu_{G^{(l_1, \dots, l_n)}}$ et $\mu_{H^{(l_1, \dots, l_n)}}$ réalisent leurs valeurs maximales, dans le même ordre que $\xi(x)$, dans les vecteurs $\theta_f(0)$ et $\theta_g(0)$, respectivement.

Les $\hat{f}(x/\theta_f)$ et $\hat{g}(x/\theta_g)$ sont construites comme suit :

$$\hat{f}(x/\theta_f) = \theta_f^T \xi(x) \quad (I.54)$$

$$\hat{g}(x/\theta_g) = \theta_g^T \xi(x) \quad (I.55)$$

• Etape 3 : Adaptation directe (en temps réel)

- Appliquer la commande contre réaction (feedback) (I.28) au système (I.18), où u_c est donnée par (I.22) et u_s donnée par (I.31), $\hat{f}(x/\theta_f)$ et $\hat{g}(x/\theta_g)$ sont données par (I.54) et (I.55) respectivement.

- Utiliser les lois d'adaptation suivantes pour ajuster le vecteur de paramètres θ_f :

$$\dot{\theta}_f = \begin{cases} -\gamma_1 e^T P b_c \xi(x) & \text{si } (|\theta_f| < M_f) \text{ ou } (|\theta_f| = M_f \ \& \ e^T P b_c \theta_f^T \xi(x) \geq 0) \\ p \{-\gamma_1 e^T P b_c \xi(x)\} & \text{si } (|\theta_f| = M_f \ \& \ e^T P b_c \theta_f^T \xi(x) < 0) \end{cases} \quad (I.56)$$

où l'opérateur de projection $P\{*\}$ est défini comme [4], [9],

$$P\{-\gamma_1 e^T P b_c \xi(x)\} = -\gamma_1 e^T P b_c \xi(x) + \gamma_1 e^T P b_c \frac{\theta_f \theta_f^T \xi(x)}{|\theta_f|^2} \quad (I.57)$$

- Utiliser les lois d'adaptation suivantes pour ajuster le vecteur de paramètres θ_g :

- chaque fois qu'un élément θ_{g_i} de $\theta_g = \varepsilon$ on utilise,

$$\dot{\theta}_{g_i} = \begin{cases} -\gamma_2 e^T P b_c \xi_i(x) u_c & \text{si } e^T P b_c \xi_i(x) u_c < 0 \\ 0 & \text{si } e^T P b_c \xi_i(x) u_c \geq 0 \end{cases} \quad (\text{I.58})$$

où $\xi_i(x)$ est le $i^{\text{ième}}$ composant de $\xi(x)$.

- Autrement, on utilise,

$$\dot{\theta}_g = \begin{cases} -\gamma_2 e^T P b_c \xi(x) u_c & \text{si } (|\theta_g| < M_g) \text{ ou } (|\theta_g| = M_g \ \& \ e^T P b_c \theta_g^T \xi(x) u_c \geq 0) \\ P \{-\gamma_2 e^T P b_c \xi(x) u_c\} & \text{si } (|\theta_g| = M_g \ \& \ e^T P b_c \theta_g^T \xi(x) u_c < 0) \end{cases} \quad (\text{I.59})$$

$$\text{où, } P \{-\gamma_2 e^T P b_c \xi(x) u_c\} = -\gamma_2 e^T P b_c \xi(x) u_c + \gamma_2 e^T P b_c \frac{\theta_g \theta_g^T \xi(x)}{|\theta_g|^2} u_c \quad (\text{I.60})$$

Le théorème suivant montre les propriétés de ce contrôleur adaptatif flou,

I.4.2. Théorème 1 [25]

Considérons le système (I.18) avec la commande (I.28), et soient les vecteurs de paramètres θ_f et θ_g ajustables par les lois d'adaptation (I.56)-(I.60). Les suppositions 1 et 2 sont vérifiées, alors la classification globale de la commande garantit les propriétés suivantes :

1. $|\theta_f(t)| \leq M_f$, $|\theta_g(t)| \leq M_g$ toutes les éléments de $\theta_g \geq \varepsilon$,

$$|x(t)| \leq |y_m| + \left(\frac{2\tilde{V}}{\lambda_{\min}} \right)^{1/2} \quad (\text{I.61})$$

et,

$$|u(t)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \left(M_f + |y_m^{(n)}| + |k| \left(\frac{2\tilde{V}}{\lambda_{\min}} \right)^{1/2} \right) + \frac{1}{g_L(x)} \left[M_f + |f^U(x)| + \frac{1}{\varepsilon} (M_g + g^U) \left(M_f + |y_m^{(n)}| + |k| \left(\frac{2\tilde{V}}{\lambda_{\min}} \right)^{1/2} \right) \right] \quad (\text{I.62})$$

Pour tout $t \geq 0$, où λ_{\min} c'est la valeur propre minimale de P et $y_m = (y_m, \dot{y}_m, \dots, y_m^{(n-1)})^T$.

$$2. \int_0^t |e(\tau)|^2 d\tau \leq a + b \int_0^t |w(\tau)|^2 d\tau \quad (\text{I.63})$$

Pour tout $t \geq 0$, où a et b sont des constantes, et w est l'erreur d'approximation minimale définie par (I.37).

3. si Q ajustait intégrable c'est-à-dire, $\int_0^\infty |w(t)|^2 dt < \infty$, alors, $\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = 0$.

I.5. Conception et analyse de stabilité du deuxième contrôleur

On voit que le contrôleur dans la section 4 peut exiger un grand nombre de règles pour un système de dimension élevée. Une manière de surmonter ce problème d'explosion des règles est de permettre les ensembles flous dans les parties *If* des règles également à changer

pendant la procédure d'adaptation de sorte qu'en principe n'importe quelle règle puisse couvrir n'importe quelle région de U_c , en conséquence, on a besoin seulement d'un petit nombre de règles.

On choisit \hat{f} et \hat{g} de la forme (I.17) et on développe une loi d'adaptation pour ajuster tous les paramètres \bar{y}^l, \bar{x}_i^l et σ_i^l . Le prix à payer pour cette liberté, est que ces systèmes deviennent non linéaires par rapport à ses paramètres de sorte qu'on doit utiliser une loi d'adaptation plus compliquée.

I.5.1. Conception du contrôleur

• Etape 1 : Présentation autonome

La même procédure comme le premier contrôleur, l'expert qu'on doit spécifier encore c'est un paramètre de conception σ .

• Etape 2 : Construction du contrôleur initial

- choisir $\hat{f}(x/\theta_f)$ et $\hat{g}(x/\theta_g)$ de la forme des systèmes flous, c'est-à-dire,

$$\hat{f}(x/\theta_f) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}_f^l \left[\prod_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_{f_i}^l}{\sigma_{f_i}^l} \right)^2 \right) \right]}{\sum_{l=1}^M \left[\prod_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_{f_i}^l}{\sigma_{f_i}^l} \right)^2 \right) \right]} \quad (\text{I.64})$$

$$\hat{g}(x/\theta_g) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}_g^l \left[\prod_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_{g_i}^l}{\sigma_{g_i}^l} \right)^2 \right) \right]}{\sum_{l=1}^M \left[\prod_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_{g_i}^l}{\sigma_{g_i}^l} \right)^2 \right) \right]} \quad (\text{I.65})$$

où, θ_f et θ_g sont les collections des paramètres ajustables $\bar{y}_f^l, \bar{x}_{f_i}^l$ et $\sigma_{f_i}^l$ ($\bar{y}_g^l, \bar{x}_{g_i}^l$ et $\sigma_{g_i}^l$), clairement, \hat{f} et \hat{g} en (I.64) et (I.65) sont basé sur les M -règles dont les parties If sont caractérisées par les fonctions d'appartenances gaussiennes,

$$\mu_{F_i^l}(x_i) = \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_{f_i}^l}{\sigma_{f_i}^l} \right)^2 \right) \quad (\text{I.66})$$

$$\mu_{G_i^l}(x_i) = \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_{g_i}^l}{\sigma_{g_i}^l} \right)^2 \right) \quad (\text{I.67})$$

où, $l_i = 1, 2, \dots, M$ et $i = 1, 2, \dots, n$.

Pour ce contrôleur, on suppose que A_i^r et B_i^s en (I.49) et (I.50) sont aussi caractérisés par les fonctions d'appartenance gaussiennes sous forme (I.66) et (I.67), et que $L_f \leq M$ et $L_g \leq M$.

- Déterminer les $\theta_f(0)$ et $\theta_g(0)$ initiales comme suit :

Pour $L_f(L_g)$, $\mu_{F_i^l}(\mu_{G_i^l})$ qui sont les mêmes que pour $\mu_{A_i^r}(\mu_{B_i^s})$ en (I.49) et (I.50), on détermine $\bar{x}_{f_i}^l(0)$ et $\sigma_{f_i}^l(0)$ ($\bar{x}_{g_i}^l(0)$ et $\sigma_{g_i}^l(0)$) basées sur $\mu_{A_i^r}(\mu_{B_i^s})$, et on choisit $\bar{y}_f^l(0)$ ($\bar{y}_g^l(0)$) pour être les centres des $\mu_{C_r}(\mu_{D_s})$ correspondant, les paramètres restants sont choisis arbitrairement dans les ensembles de contraintes (I.35) et (I.36).

• **Etape 3 : Adaptation directe (en temps réel)**

- calculer $\frac{\partial \hat{f}(x/\theta_f)}{\partial \theta_f}$, en utilisant l'algorithme suivant :

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \bar{y}_f^l} = \frac{b_f^l}{\sum_{l=1}^M b_f^l} \quad (I.68)$$

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \bar{x}_{f_i}^l} = \frac{\bar{y}_f^l - \hat{f}}{\sum_{l=1}^M b_f^l} b_f^l \frac{-2(x_i - \bar{x}_{f_i}^l)}{(\sigma_{f_i}^l)^2} \quad (I.69)$$

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \sigma_{f_i}^l} = \frac{\bar{y}_f^l - \hat{f}}{\sum_{l=1}^M b_f^l} b_f^l \frac{-2(x_i - \bar{x}_{f_i}^l)^2}{(\sigma_{f_i}^l)^3} \quad (I.70)$$

où,
$$b_f^l = \prod_{i=1}^n \exp\left(-\left(\frac{x_i - \bar{x}_{f_i}^l}{\sigma_{f_i}^l}\right)^2\right) \quad (I.71)$$

Les équations (I.68)-(I.70) sont obtenues en prenant les différentiels de \hat{f} en (I.64) en ce qui concerne les paramètres correspondants.

- calculer $\frac{\partial \hat{g}(x/\theta_g)}{\partial \theta_g}$, utilisant le même algorithme (I.68)-(I.70), en remplaçant f par g .
- appliquer la commande de feedback (I.28) à (I.18) où u_c est donnée par (I.22) et u_s est donnée par (I.31), $\hat{f}(x/\theta_f)$ et $\hat{g}(x/\theta_g)$ sont données par (I.64) et (I.65), respectivement.
- utilisons les lois d'adaptation suivantes pour ajuster le vecteur de paramètres θ_f :

- chaque fois que $\sigma_{f_i}^l = \sigma$, on utilise,

$$\dot{\sigma}_{f_i}^l = \begin{cases} -\gamma_1 e^T P b_c \frac{\partial \hat{f}}{\partial \sigma_{f_i}^l} & \text{si } e^T P b_c \frac{\partial \hat{f}}{\partial \sigma_{f_i}^l} < 0 \\ 0 & \text{si } e^T P b_c \frac{\partial \hat{f}}{\partial \sigma_{f_i}^l} \geq 0 \end{cases} \quad (I.72)$$

- Autrement, on utilise,

$$\dot{\theta}_f = \begin{cases} -\gamma_1 e^T P b_c \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta_f} & \text{si } (|\theta_f| < M_f) \text{ ou } (|\theta_f| = M_f \ \& \ e^T P b_c \theta_f^T \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta_f} \geq 0) \\ -\gamma_1 e^T P b_c \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta_f} + \gamma_1 e^T P b_c \frac{\theta_f \theta_f^T}{|\theta_f|^2} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta_f} & \text{si } (|\theta_f| = M_f \ \& \ e^T P b_c \theta_f^T \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta_f} < 0) \end{cases} \quad (I.73)$$

- utilisons les lois d'adaptation suivantes pour ajuster le vecteur de paramètres θ_g :

- chaque fois que $\bar{y}_g^l = \varepsilon$, utilise,

$$\dot{\bar{y}}_g^l = \begin{cases} -\gamma_2 e^T P b_c \frac{\partial \hat{g}}{\partial \bar{y}_g^l} u_c & \text{si } e^T P b_c \frac{\partial \hat{g}}{\partial \bar{y}_g^l} u_c < 0 \\ 0 & \text{si } e^T P b_c \frac{\partial \hat{g}}{\partial \bar{y}_g^l} u_c \geq 0 \end{cases} \quad (I.74)$$

- chaque fois que $\sigma_{g_i}^l = \sigma$

$$\dot{\sigma}_{g_i}^l = \begin{cases} -\gamma_2 e^T P b_c \frac{\partial \hat{g}}{\partial \sigma_{g_i}^l} u_c & \text{si } e^T P b_c \frac{\partial \hat{g}}{\partial \sigma_{g_i}^l} u_c < 0 \\ 0 & \text{si } e^T P b_c \frac{\partial \hat{g}}{\partial \sigma_{g_i}^l} u_c \geq 0 \end{cases} \quad (I.75)$$

- Autrement, on utilise,

$$\dot{\theta}_g = \begin{cases} -\gamma_2 e^T P b_c \frac{\partial \hat{g}}{\partial \sigma_{g_i}^l} u_c & \text{si } (|\theta_f| < M_f) \text{ ou } (|\theta_g| = M_g \ \& \ e^T P b_c \theta_g^T \frac{\partial \hat{g}}{\partial \theta_g} \geq 0) \\ -\gamma_2 e^T P b_c \frac{\partial \hat{g}}{\partial \theta_g} + \gamma_2 e^T P b_c \frac{\theta_g \theta_g^T}{|\theta_g|^2} \frac{\partial \hat{g}}{\partial \theta_g} u_c & \text{si } (|\theta_g| = M_g \ \& \ e^T P b_c \theta_g^T \frac{\partial \hat{g}}{\partial \theta_g} u_c < 0) \end{cases} \quad (I.76)$$

Les propriétés de ce contrôleur adaptatif flou sont résumées dans le théorème suivant,

I.5.2. Théorème 2 [25]

Le CAF conçu par les trois étapes ci-dessus garantit les propriétés suivantes :

- $|\theta_f| \leq M_f$, $\sigma_{f_i}^l$ dans $\theta_f \geq \sigma$, $|\theta_g| \leq M_g$ dans $\theta_g \geq \sigma$ et x et u satisfait (I.61) et (I.62), respectivement.

$$- \int_0^t |e(\tau)|^2 d\tau \leq a + b \int_0^t |v(\tau)|^2 d\tau \quad (I.77)$$

pour tout $t \geq 0$, où a et b des constantes, et v donnée par (I.48).

- si v est intégrable, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = 0$.

I.5.3. Remarque

À partir de l'équation (I.48), on voit qu'en plus de l'erreur d'approximation minimale w , on a un autre terme de l'erreur $o(|\theta_f - \theta_f^*|^2) + o(|\theta_g - \theta_g^*|^2) u_c$ dans ce deuxième

contrôleur. Dans ce dernier, on a un plus grand espace de recherche pour $\hat{f}(x/\theta_f^*)$ et $\hat{g}(x/\theta_g^*)$ que dans le premier, l'erreur d'approximation minimale w dans ce cas, devrait être plus petite que celle-ci dans le premier contrôleur. Donc, la performance de ce contrôleur doit être plus sensible aux conditions initiales $\theta_f(0)$ et $\theta_g(0)$ que celles du premier contrôleur. De ce fait, si $\theta_f(0)$ et $\theta_g(0)$ sont près de θ_f^* et θ_g^* optimales, respectivement, alors l'erreur totale v peut être plus petite que w du premier contrôleur, d'autre part si $\theta_f(0)$ et $\theta_g(0)$ sont loin des valeurs optimales, v sera grande. Car les contrôleurs initiaux sont construits par les règles linguistiques (I.49) et (I.50), ces règles sont plus importantes pour le deuxième contrôleur que pour le premier.

I.6. Simulation et résultats

L'algorithme proposé a été appliqué dans plusieurs processus [70-73]. Dans cette simulation, il est appliqué aux problèmes de commande d'un pendule inversé.

I.6.1. Pendule inversé

Dans cette partie, on utilise notre CAF pour commander le pendule inversé dans le but de suivre une trajectoire de référence sinusoïdale. La fig. (I.8) représente le système de pendule inversé ($x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$), les équations dynamiques de ce système sont [17] ;

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin(x_1) - \frac{mlx_2^2 \cos(x_1) \sin(x)}{m_c + m}}{l\left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2(x_1)}{m_c + m}\right)} + \frac{\frac{\cos(x_1)}{m_c + m}}{l\left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2(x_1)}{m_c + m}\right)} u + \eta(t) \end{aligned} \quad (I.78)$$

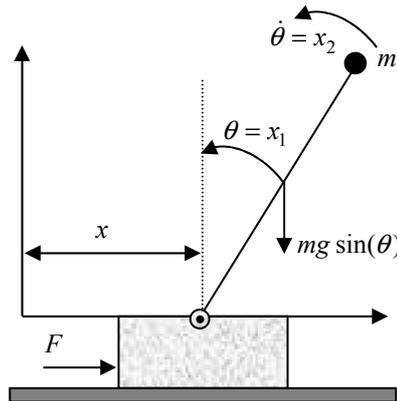


Figure I.8. Système du PI

où, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ est l'accélération, m_c est la masse du chariot, m est la masse de tige, l est le demi-longueur de tige et u est la commande appliquée. On choisit $m_c = 1 \text{ kg}$, $m = 0.1 \text{ kg}$ et $l = 0.5 \text{ m}$ dans la simulation suivante, la perturbation externe est donnée par :

$$\eta(t) = 0.1 \sin(2\pi t) + 0.2 \text{sgn}(x_2)$$

I.6.1.1. Développement de l'algorithme

Il est clair que (I.78) est de la forme de (I.18), donc notre contrôleur est appliqué à ce système. On prend comme signal de référence $y_m(t) = \frac{\pi}{30} \sin(t)$ (autres choix sont possibles). Pour appliquer le contrôleur à ce système, on a besoin de déterminer les limites f^U, g^U et g_L .

$$|f(x_1, x_2)| = \left| \frac{g \sin(x_1) - \frac{m l x_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c + m}}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2(x_1)}{m_c + m} \right)} \right| \leq \frac{9.8 + \frac{0.025}{1.1} x_2^2}{\frac{2}{3} - \frac{0.05}{1.1}} = 15.78 + 0.036 x_2^2 = f^U(x_1, x_2) \quad (I.79)$$

$$|g(x_1, x_2)| = \left| \frac{\cos(x_1) \frac{1}{m_c + m}}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2(x_1)}{m_c + m} \right)} \right| \leq \frac{1}{1.1 \left(\frac{2}{3} - \frac{0.05}{1.1} \right)} = 1.46 = g^U(x_1, x_2) \quad (I.80)$$

Si l'on exige que $|x_1| \leq (\pi/6)$, alors,

$$|g(x_1, x_2)| \geq \frac{\cos(\pi/6)}{1.1 \left(\frac{2}{3} + \frac{0.05}{1.1} \cos^2(\pi/6) \right)} \leq \frac{1}{1.1 \left(\frac{2}{3} - \frac{0.05}{1.1} \right)} = 1.12 = g_L(x_1, x_2) \quad (I.81)$$

Maintenant, supposons qu'on a besoin de cela

$$|x_1| \leq \pi/6 \quad \text{et} \quad |u| \leq 180 \quad (I.82)$$

Puisque $|x_1| \leq (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{1/2} = |x|$, si l'on peut prendre $|x| = \pi/6$, alors $|x_1| \leq \pi/6$, dans ce cas on a aussi $|x_2| \leq \pi/6$. Notre première tâche est de déterminer les paramètres $\tilde{V}, k_1, k_2, \varepsilon, M_f$ et M_g , selon (I.61), (I.62) et la contrainte (I.82).

Selon $|y_m| \leq \pi/30$, si l'on détermine \tilde{V} et λ_{\min} tel que $\left(\frac{2\tilde{V}}{\lambda_{\min}} \right) \leq 2\pi/15$.

D'après (I.61), on a $|x| \leq (\pi/30) + (2\pi/15) = \pi/6$. Car le nombre des paramètres de conception est plus grand que le nombre de contraintes, on a plus de liberté pour le choix de ces paramètres.

On considère simplement $k_1 = 2$ et $k_2 = 1$ (de sorte que $s^2 + k_1 s + k_2$ soit stable) et $Q = \text{diag}(10, 10)$, alors on résout (I.26) pour obtenir la solution de l'équation de Lyapunov,

$$P = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \quad (I.83)$$

cette P est positive définie avec $\lambda_{\min} = 2.93$, pour satisfaire la contrainte pour $|x|$, on choisit

$$\tilde{V} = \frac{\lambda_{\min}}{2} \left(\frac{2\pi}{15} \right)^2 = 0.267.$$

Finalement, on détermine M_f et ε tel que $|u| \leq 180$ selon (I.62). Après quelques simulations on a choisi $M_f = 16, M_g = 1.6$ et $\varepsilon = 0.7$.

Il est droit de vérifier à partir de (I.61) et (I.62) que le choix ci-dessus des paramètres de conception garantit que l'état et la commande soit borné (I.82).

Pour le deuxième contrôleur, on choisit $\sigma = 10^{-2}$.

- **Cas. 1**

Dans cet exemple, on utilise le premier contrôleur, la supposition qu'il n'y a aucune règle linguistique (I.49) et (I.50), on choisit $m_1 = m_2 = 5$ depuis $|x_i| \leq \pi/6$ pour tous les deux $i=1,2$, on prend les fonctions d'appartenance définies sur l'univers $[-\pi/6, \pi/6]$ comme suit :

$$\begin{aligned} \mu_{F_i^1}(x_i) &= \exp\left[-\left(\frac{x_i + \pi/6}{\pi/24}\right)^2\right], \mu_{F_i^2}(x_i) = \exp\left[-\left(\frac{x_i + \pi/12}{\pi/24}\right)^2\right] \\ \mu_{F_i^3}(x_i) &= \exp\left[-\left(\frac{x_i}{\pi/24}\right)^2\right], \mu_{F_i^4}(x_i) = \exp\left[-\left(\frac{x_i - \pi/12}{\pi/24}\right)^2\right], \mu_{F_i^5}(x_i) = \exp\left[-\left(\frac{x_i - \pi/6}{\pi/24}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

À partir des limites (I.79)-(I.81) de $f(x_1, x_2)$ et $g(x_1, x_2)$ on voit que la gamme de $f(x_1, x_2)$ est plus large que celle de $g(x_1, x_2)$, donc on a choisi arbitrairement $\gamma_1 = 50$ et $\gamma_2 = 1$.

- **Cas. 2**

On considère la même situation comme dans le premier cas sauf qu'il y a quelques règles linguistiques de $f(x_1, x_2)$ et $g(x_1, x_2)$ qui sont basées sur l'intuition physique. Supposons qu'il n'y a aucune commande, c'est-à-dire $u = 0$, dans ce cas, l'accélération de l'angle $\theta = x_1$ égale $f(x_1, x_2)$. En se basant sur l'intuition physique, on a l'observation suivante :

$$\text{Plus } x_1 \text{ est grande, plus } f(x_1, x_2) \text{ est grande} \quad (\text{I.84})$$

Notre tâche maintenant est de transformer cette information floue en règle floue au sujet de $f(x_1, x_2)$. Puisque $(x_1, x_2) = (0, 0)$ est un point d'équilibre (instable) du système, on a la première règle,

$$R_f^{(1)} : \text{If } x_1 \text{ is } F_1^3 \text{ and } x_2 \text{ is } F_2^3 \text{ Then } f(x_1, x_2) \text{ est près de } 0 \quad (\text{I.85})$$

où, $F_i^j (i=1,2 \text{ et } j=1,2,\dots,5)$ sont les ensembles flous donnés par l'exemple 1, et « près du zéro » est un ensemble flou centré à zéro (puisque, seulement les centres des ensembles flous de la partie *Then* sont utilisées dans le système flou, on ne doit pas spécifier les fonctions d'appartenance détaillées de cette partie *Then* des ensembles flous, c'est-à-dire sachant leurs centres est suffisant).

L'accélération x_1 est proportionnelle à la gravité $mg \sin(x_1)$ c'est-à-dire, on a approximativement, ce $f(x_1, x_2) = \alpha \sin(x_1)$ où α est une constante. Clairement, $f(x_1, x_2)$ réalise son maximum à $x_1 = \pi/2$, basé sur (I.79) on a approximativement de $\alpha = 16$.

Alors on a les règles floues suivantes pour $f(x_1, x_2)$,

$$R_f^{(2)} : \text{If } x_1 \text{ is } F_1^1 \text{ and } x_2 \text{ is } F_2^3 \text{ Then } f(x_1, x_2) \text{ est près de } (-8) \quad (\text{I.86})$$

$$R_f^{(3)} : \text{If } x_1 \text{ is } F_1^2 \text{ and } x_2 \text{ is } F_2^3 \text{ Then } f(x_1, x_2) \text{ est près de } (-4) \quad (\text{I.87})$$

$$R_f^{(4)} : \text{If } x_1 \text{ is } F_1^4 \text{ and } x_2 \text{ is } F_2^3 \text{ Then } f(x_1, x_2) \text{ est près de } (+4) \quad (\text{I.88})$$

$$R_f^{(5)} : \text{If } x_1 \text{ is } F_1^5 \text{ and } x_2 \text{ is } F_2^3 \text{ Then } f(x_1, x_2) \text{ est près de } (+8) \quad (\text{I.89})$$

où, F_i^j ($i=1,2$ et $j=1,2,\dots,5$) sont les ensembles flous précédemment donnés, et les valeurs (*) dans « près de (*) » sont déterminées selon $16\sin(\pi/6) = 8$ et $8\sin(\pi/12) = 4$.

En outre, en se basant sur l'intuition physique on a que $f(x_1, x_2)$ est plus sensible à x_1 que x_2 , Nous poursuivons donc les règles (I.85)-(I.89) aux règles où x_2 est n'importe quelle F_i^j pour $j=1,2,\dots,5$.

$$x_1 \text{ est plus petite} \rightarrow g(x_1, x_2) \text{ plus grande} \quad (\text{I.90})$$

Les Figures suivantes montrent les différents résultats de simulation pour la condition $\mathbf{x}(0) = (-\pi/60, 0)^T$, après les règles floues sont incorporées.

I.6.1.2. Problème de stabilisation et régulation

- **Cas 1 :** Pour une référence nulle ($y_m = 0$),

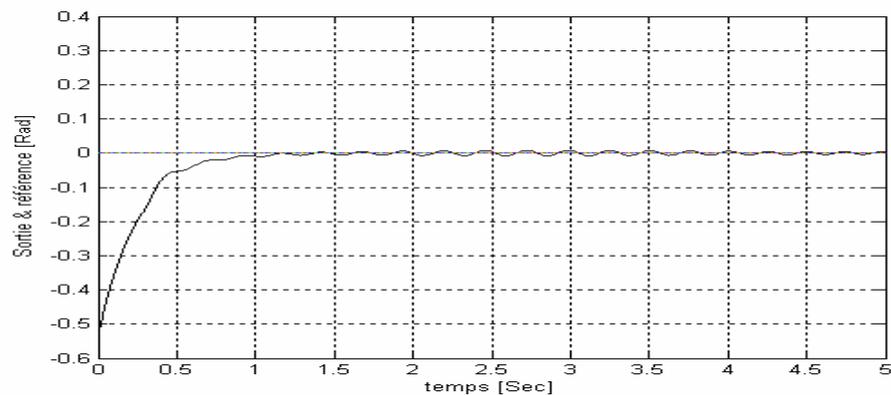


Fig. I.9. Sortie $y(t)$ et référence $y_m(t)$.

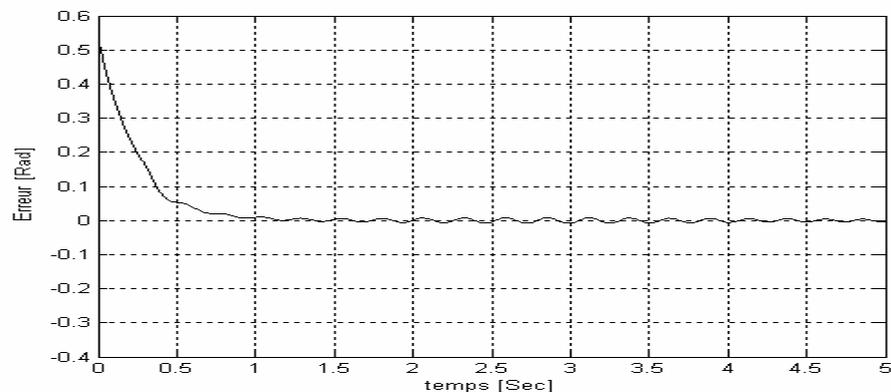


Fig. I.10. Erreur $e(t)$.

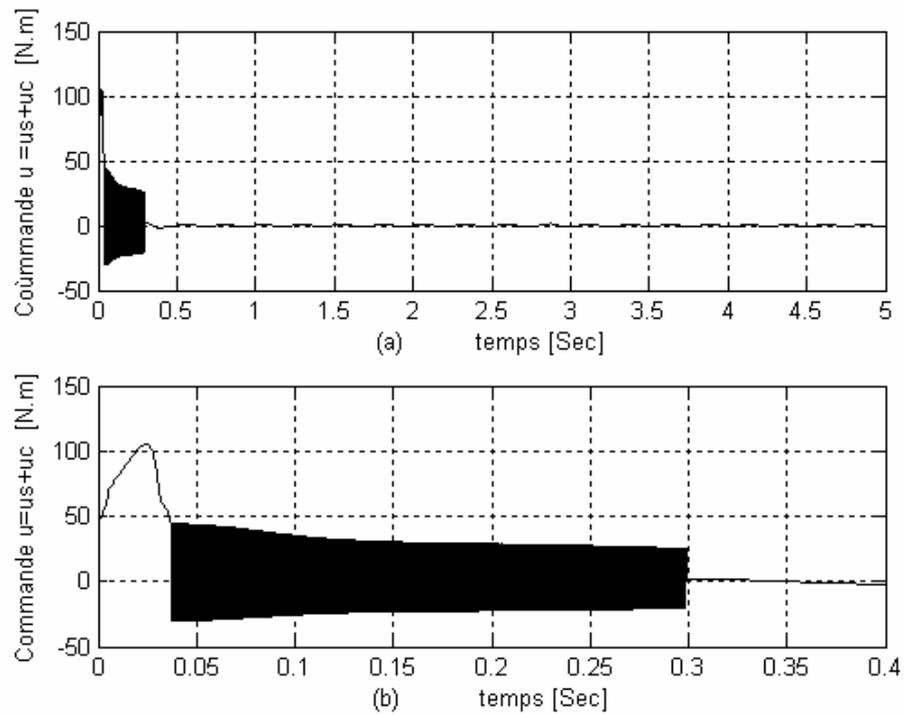


Fig. I.11. (a et b) Commande globale du système $u(t)$.

- **Cas 2 :** Pour une référence constante ($y_m = 1$),

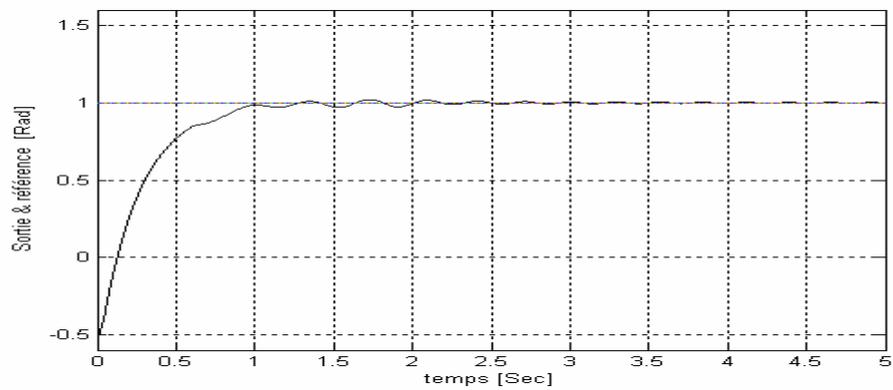


Fig. I.12. Sortie $y(t)$ et référence $y_m(t)$.

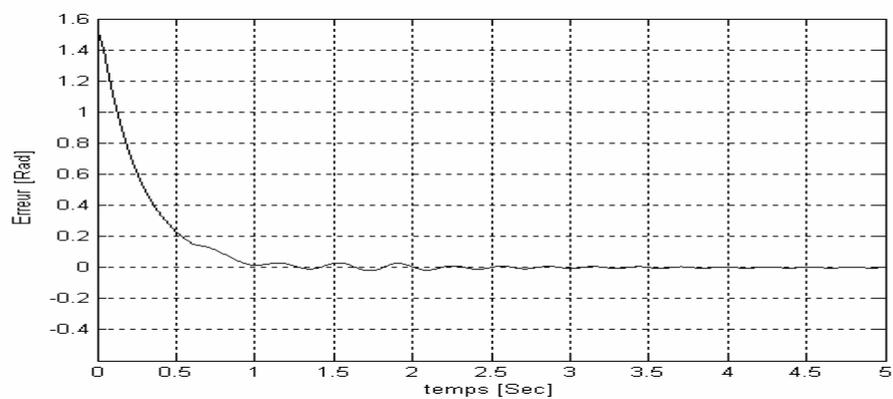


Fig. I.13. Erreur $e(t)$.

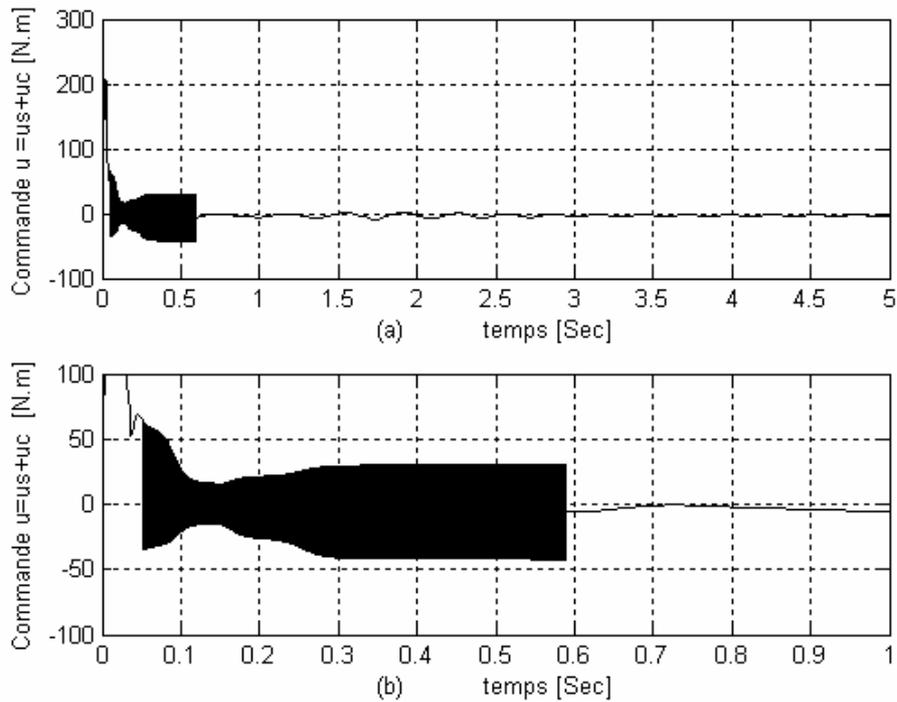


Fig. I.14. Commande globale du système $u(t)$.

En première étape, la boucle de commande est simulée toujours pour tester la performance propre de la commande floue. Les résultats de la simulation pour le problème de stabilisation (c-à-d $y_m(t) = 0$) et de régulation ($y_m(t) = 1$), sont montrés dans les figures (I.11-16). il est clair que les erreurs convergent vers une bande très étroite autour de zero, ce qui indique une performance satisfaisante. L'erreur résiduelle est due à la perturbation externe.

I.6.2.2. Problème de poursuite : Pour une référence sunisoïdale ($y_m = a \sin(bt)$),

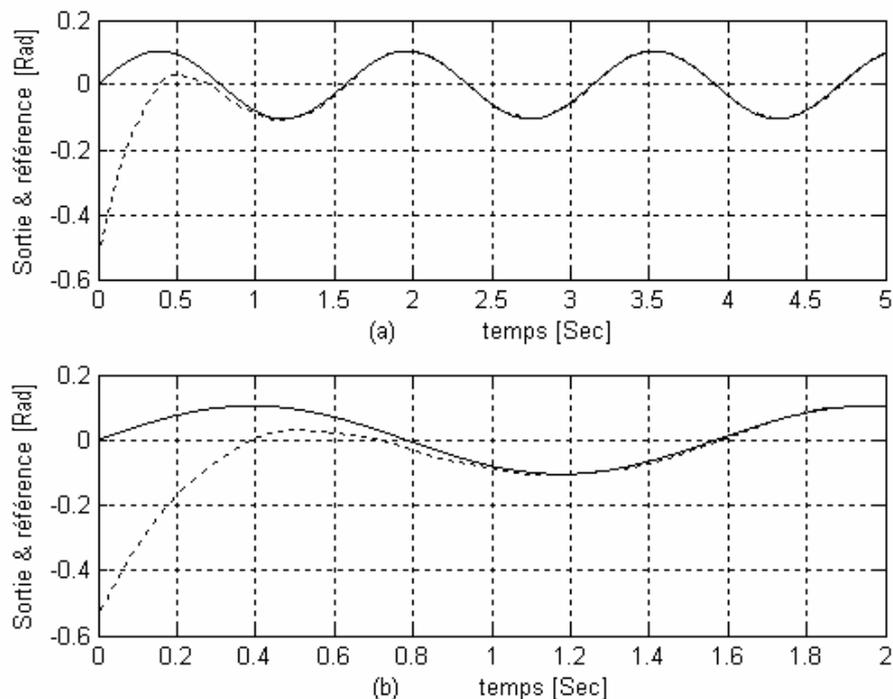


Fig. I.15. (a & b) Sortie $y(t)$ et référence $y_m(t)$.

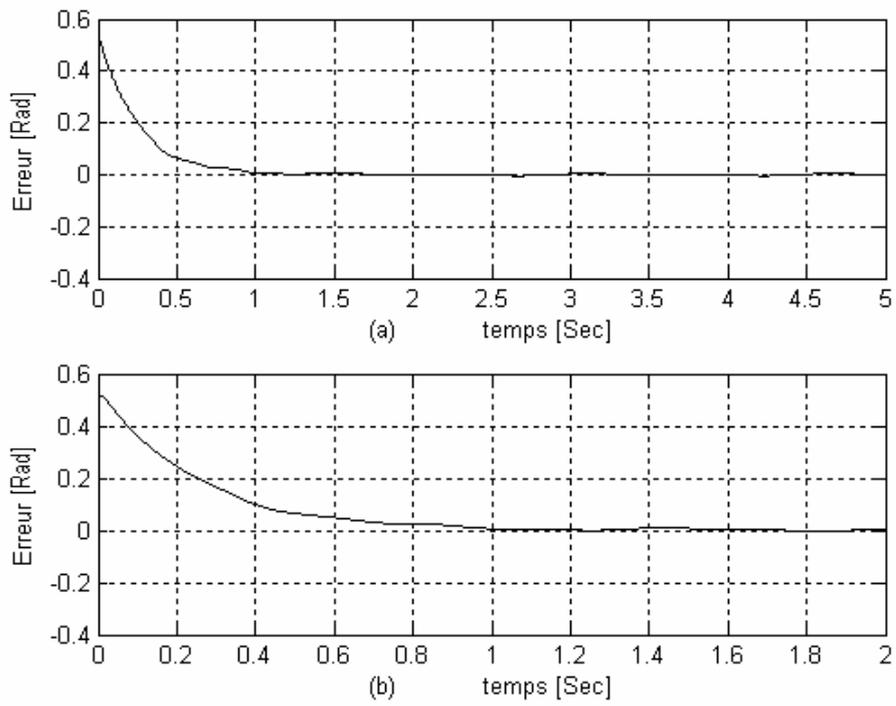


Fig. I.16. (a & b) Erreur $e(t)$.

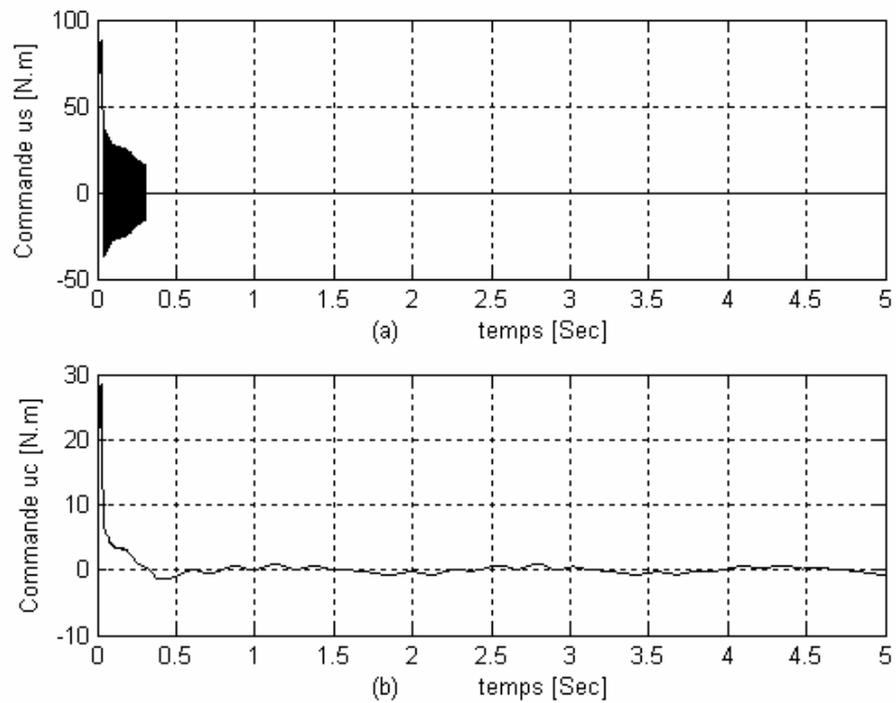


Fig. I.17. Commande (a) : $u_s(t)$, et (b) : $u_c(t)$.

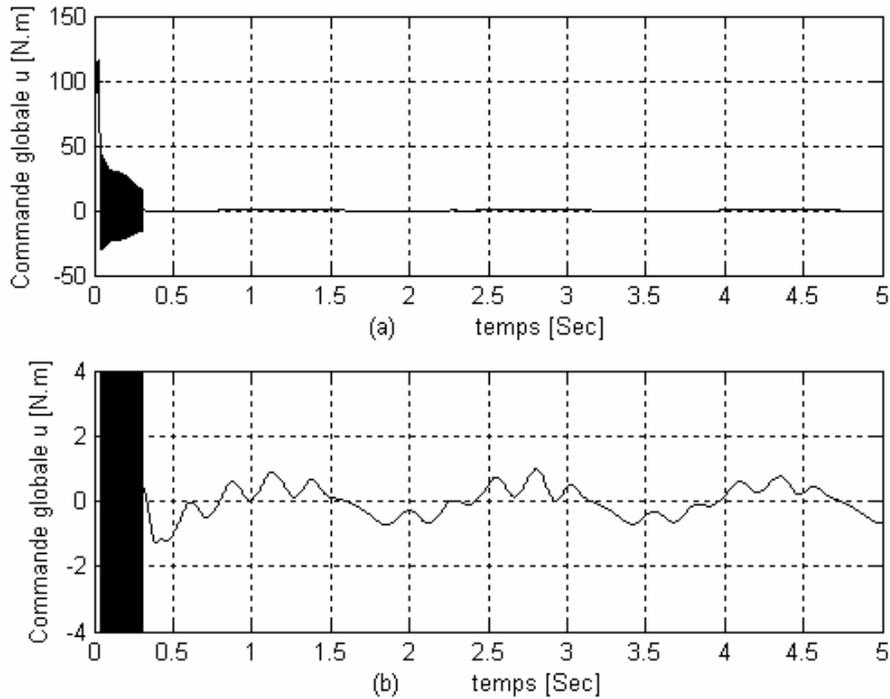


Fig. I.18. (a & b) Commande globale $u(t)$ du système.

Les résultats pour une poursuite de la consigne $y_m(t) = (\pi/30)\sin(t)$ sont représentés dans les figures (I.17-I.21). Ces résultats révèlent aussi une bonne performance de poursuite (fig. I.17). L'oscillation de la commande est due à la variation rapide du gain d'entrée.

Dans nos exemples de simulation, le contrôleur adaptatif flou force la sortie du système à suivre un signal de référence sinusoïdal. On a constaté que quelque soient les conditions initiales considérées, la poursuite s'effectue en minimisant l'erreur d'approximation d'une part, et en assurant la stabilité globale du système d'autre part. cette erreur estimée, peut être améliorée par l'affinement des procédures de calcul et un choix judicieux des lois d'adaptation.

I.7. Conclusion

Dans ce chapitre, on a développé des contrôleurs adaptatifs flous de telle façon qu'il :

- n'exigent pas un modèle mathématique précis du système sous commande.
- sont capables d'incorporer des règles floues *If-Then* décrivant le système, directement dans les contrôleurs.
- garantissent la stabilité globale du système en boucle fermée résultant dans le sens que tous les signaux impliqués sont uniformément limités.

On a utilisé ces contrôleurs pour commander le pendule inversé afin de suivre une trajectoire de référence sinusoïdale, et les résultats de simulation montrent que :

- les contrôleurs pourrait (on pu) exécuter la poursuite réussie sans utiliser n'importe quelle information linguistique.
- après l'incorporation de quelques règles linguistiques dans les contrôleurs, la vitesse d'adaptation est devenue plus rapide et l'erreur de poursuite devient plus petite.

CHAPITRE 2

COMMANDE ADAPTATIVE BACKSTEPPING AVEC OBSERVATEUR

CHAPITRE II

COMMANDE ADAPTATIVE BACKSTEPPING AVEC OBSERVATEUR.

CONTENU

I. Sommaire :

II.1. Introduction	33
II.2. Méthode de backstepping	33
II.2.1. Commande par « backstepping »	33
II.3. Exemples et formulation du problème	37
II.3.1. Pendule inversé	38
II.3.2. Robot manipulateur	40
II.3.4. Simulation et résultats	41
II.4. Commande backstepping adaptative	43
II.4.1. Approche adaptative	43
II.4.1.1. Conditions d'implantation	43
II.4.1.2. Exemples d'études	45
II.4.1.3. Simulation et résultats	46
II.5. Commande par backstepping avec observateur	51
II.5.1. commande adaptative avec observateur	51
II.5.2. Développement théorique d'un exemple du deuxième ordre	52
II.5.3. Exemple d'étude : pendule inversé.	57
II.6.3.2. Simulation et résultats	61
II.7. Conclusion	63

II. Figure :

Figure II.1. Pendule inversé sur un chariot	38
Figure II.2. Robot manipulateur	40
Figure II.3. (a et b) Sortie $y(t)$ et référence $y_m(t)$	41
Figure II.4. Erreur $e(t)$	41
Figure II.5. Commande $u(t)$ du système	42
Figure II.6. (a et b) Sortie $y(t)$ et référence $y_m(t)$	42
Figure II.7. Erreur $e(t)$	42
Figure II.8. Commande $u(t)$ du système	43
Figure II.9. Schéma de principe de la commande adaptative	43
Figure II.10. Schéma du système d'ordre trois.	44
Figure II.11. Schéma de principe de la commande adaptative	46
Figure II.12. Sortie $y(t)$ & référence $y_m(t)$	47
Figure II.13. Erreur $z_1(t)$	47
Figure II.14. Commande $u(t)$ du système	47
Figure II.15. Sortie $y(t)$ & référence $y_m(t)$	48
Figure II.16. Commande $u(t)$ du système	48
Figure II.17. Erreur $z_1(t)$	49
Figure II.18. Schéma de principe de l'observateur	51
Figure II.19. Schéma de principe de la commande adaptative avec observateur	51
Figure II.20. Sortie $y(t)$ & référence $y_m(t)$	61
Figure II.21. Erreur $z_1(t)$	61
Figure II.22. Commande $u(t)$ du système	62
Figure II.23. Sortie $y(t)$ & référence $y_m(t)$	62
Figure II.24. Erreur $z_1(t)$	63
Figure II.25. Commande $u(t)$ du système	63

CHAP II. COMMANDE ADAPTATIVE BACKSTEPPING AVEC OBSERVATEUR

II.1. Introduction

Comparé à la méthode de linéarisation par boucle de retour qui élimine toutes les non linéarités du système, la technique de Backstepping basée sur la théorie de Lyapunov, donne plus de flexibilité au concepteur en exploitant les bonnes non linéarités, tandis que les mauvaises non linéarités ou les non linéarités déstabilisantes sont dominées en ajoutant des amortissements non linéaires. Ainsi, une robustesse additionnelle est obtenue. Cette procédure de conception est connue sous le mot anglais « backstepping » qui veut dire marche en arrière à travers les intégrateurs du système en sélectionnant les valeurs désirées des composants de l'état jusqu'à ce que l'entrée actuelle de commande soit atteinte. Une fonction de Lyapunov est construite pour garantir la stabilité et les propriétés de convergence.

L'instabilité est un problème plus gênant pour les systèmes non linéaires que pour les systèmes linéaires. Durant les transitions du paramètre estimé, l'état peut diverger vers l'infini durant un temps fini. Pour cette raison, la commande adaptative non linéaire, adoptée dans cette étude, va résoudre ce problème de stabilité pour certaines classes de systèmes non linéaires. On intègre un observateur qui est un système d'équations différentielles dont l'objectif est de reconstruire asymptotiquement les variables d'état du système.

II.2. Méthode de Backstepping

On considère le système non linéaire (II.1) d'ordre 4, sous la forme paramétrique du type boucle de retour strict,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_1(x_1) \\ \dot{x}_2 = x_3 + f_2(x_1, x_2) \\ \dot{x}_3 = x_4 + f_3(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_4 = f_0(x_1, \dots, x_4) + f_4(x_1, \dots, x_4) + g_4(x_1, \dots, x_4)u \\ y = x_1 \\ g_4 \neq 0 \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

où f_i sont des fonctions continues dérivables.

II.2.1. Commande par « backstepping »

Le but de la commande du système non linéaire (II.1) est d'avoir $\lim_{t \rightarrow \infty} y = 0$.

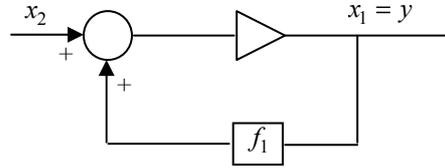
Le seul point d'équilibre avec $y = 0$ est :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, -f_1(0), -f_2(0, -f_1(0)), -f_3(0, -f_1(0), -f_2(0, -f_1(0)))) \quad (\text{II.2})$$

L'objectif de la conception est de rendre le point d'équilibre globalement asymptotiquement (exponentiellement) stable GAS (GES). Puisque le système original est constitué de quatre états ou 4 équations différentielles du premier ordre, alors il y aura une méthode de conception récursive à 4 étapes. On traite le système comme 4 sous systèmes en cascade chacun avec une seule entrée et une seule sortie. On commence la conception par le sous système 1 de la première équation différentielle du premier ordre et on continue jusqu'au dernier sous système. Durant le processus de conception, un changement de coordonnées ou un difféomorphisme $z = \phi(x)$ est effectué.

- **Etape 1**

Pour le sous système 1, on choisit l'état x_2 comme une entrée virtuelle ou fictive de commande au sous système 1. Rappelons que l'objectif de commande est de conduire $y = x_1$ vers zéro.



D'où la première variable du « backstepping » est choisie comme $z_1 = x_1$.

La commande virtuelle est alors définie comme :

$$x_2 = z_1 + \alpha_1(x_1) \quad (\text{II.3})$$

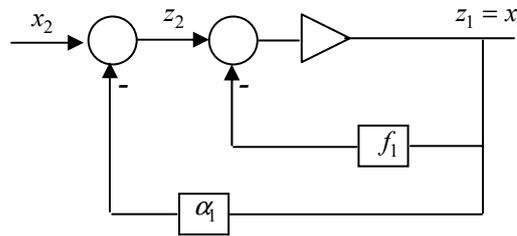
où $\alpha_1(x_1)$ est la fonction linéarisante du sous système 1, z_2 est une nouvelle variable.

d'où, le sous système 1 :

$$\dot{x}_1 = x_2 + f_1, \quad (\text{II.4})$$

devient :

$$\dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1 + f_1 \quad (\text{II.5})$$



La nouvelle variable z_2 ne sera pas utilisée dans la première étape, mais sa présence est nécessaire puisqu'on a besoin de z_2 pour lier le nouveau sous système 1 en z_1 au prochain sous système ou sous système en z_2 qui serait considéré dans la seconde étape. Les coordonnées de conception ont changées de $(x_1, x_2) = (z_1, z_2)$. Maintenant, l'attention est tournée vers la fonction stabilisante α_1 qui produira la contre réaction nécessaire pour le nouveau sous système 1. On prend la fonction stabilisante α_1 (commande linéarisante de contre réaction) comme :

$$\alpha_1 = -k_1 z_1 - f_1(x_1), \quad \alpha_1 = \alpha_1(x_1) \quad (\text{II.6})$$

celle-ci donne

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 + z_2 \quad (\text{II.7})$$

Choisissons une fonction de Lyapunov V_1 pour le nouveau sous système 1, comme

$$V_1 = (1/2)z_1^2 \quad (\text{II.8})$$

alors ,

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 = z_1(z_2 - k_1 z_1) = -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 \quad (\text{II.9})$$

où, $k_1 > 0$ est le gain de la contre réaction. D'où, le nouveau sous système 1 est stabilisé.

Notons que α_1 a été choisi de manière à éliminer la non linéarité f_1 et d'avoir $\dot{V} < 0$, le terme $z_1 z_2$ de \dot{V} sera éliminé dans l'étape suivante. Maintenant, on passe au sous système 2.

• Etape 2

Les dynamiques du nouveau sous système sont calculées en prenant la dérivée de $x_2 = \alpha_1 + z_2$ pour avoir

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 = x_3 + f_2 - \dot{\alpha}_1 \quad (\text{II.10})$$

On prend x_3 comme l'entrée virtuelle du sous système 2 et on définit la nouvelle variable d'état z_3 comme,

$$z_3 = x_3 - \alpha_2 \quad (\text{II.11})$$

où α_2 est la fonction stabilisante du sous système 2, alors

$$\dot{z}_2 = x_3 + f_2 - \dot{\alpha}_1 = z_3 + \alpha_2 - \dot{\alpha}_1 + f_2 \quad (\text{II.12})$$

Puisque $\alpha_1 = \alpha_1(x_1)$ alors,

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (x_2 + f_1) \quad (\text{II.13})$$

on prend la fonction de Lyapunov du sous système 2 comme

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2, \text{ alors, } \dot{V}_2 = \dot{V}_1 + z_2 \dot{z}_2 \quad (\text{II.14})$$

Introduisons les variables,

$$w_1 = f_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} f_1 \text{ et } \beta_2 = w_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2$$

on prend $w_2 = f_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} f_1$ et $\beta_2 = w_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2$, alors,

$$\dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 + z_2 z_3 + z_2 (z_1 + \alpha_2 + \beta_2) \quad (\text{II.15})$$

on choisit

$$\alpha_2 = -k_2 z_2 - z_1 - \beta_2, \text{ où } k_2 > 0, \quad (\text{II.16})$$

$$\text{alors, } \dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 + z_1 z_2$$

et

$$\dot{z}_2 = z_3 + \alpha_2 - \dot{\alpha}_1 + f_2 = z_3 + \alpha_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} f_1 + f_2 \quad (\text{II.17})$$

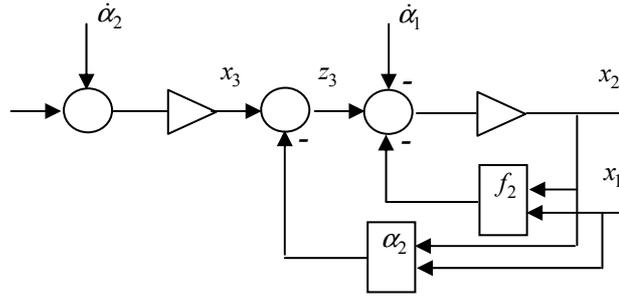
$$= z_3 + \alpha_2 + \beta_2 = -z_1 - k_2 z_2 + z_3$$

On note que dans cette étape $\alpha_2 = \alpha_2(x_1, x_2)$.

• Etape 3

Les dynamiques du sous-système 3 sont :

$$\dot{x}_3 = x_4 + f_3 \text{ et } \dot{z}_3 = \dot{x}_3 - \dot{\alpha}_2 = x_4 + f_3 - \dot{\alpha}_2 \quad (\text{II.18})$$



On prend x_4 comme l'entrée virtuelle du sous-système 3 et on définit la nouvelle variable d'état z_4 comme

$$z_4 = x_4 - \alpha_3 \quad (\text{II.19})$$

où α_3 est la fonction stabilisante du sous-système 3, alors

$$\dot{z}_3 = x_4 + f_3 - \dot{\alpha}_2 = z_4 + f_3 + \alpha_3 - \dot{\alpha}_2 \quad (\text{II.20})$$

Puisque $\alpha_2 = \alpha_2(x_1, x_2)$ alors,

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (x_2 + f_1) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} (x_3 + f_2) \quad (\text{II.21})$$

on prend la fonction de Lyapunov du sous-système 3 comme

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2} z_3^2, \text{ alors, } \dot{V}_3 = \dot{V}_2 + z_3 \dot{z}_3 \quad (\text{II.22})$$

et,

$$w_3 = f_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} f_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} f_2 \text{ et } \beta_3 = w_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} x_3$$

$$\dot{V}_3 = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 + z_3 z_4 + z_3 (z_2 + \alpha_3 + \beta_3). \quad (\text{II.23})$$

on choisit $\alpha_3 = -k_3 z_3 - z_2 - \beta_3$ où le gain $k_3 > 0$

$$(\text{II.24})$$

Alors, $\dot{V}_3 = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 - k_3 z_3^2 + z_3 z_4$

$$(\text{II.25})$$

et,

$$\dot{x}_4 = f_0 + f_4 + g_4 u \text{ et}$$

$$(\text{II.26})$$

$$\dot{z}_4 = \dot{x}_4 - \dot{\alpha}_3 = f_0 + f_4 + g_4 u - \dot{\alpha}_3$$

$$\dot{z}_3 = z_4 + \alpha_3 - \dot{\alpha}_2 + f_3 = z_4 + \alpha_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} f_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} x_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} f_2 + f_3 \quad (\text{II.27})$$

$$= z_4 + \alpha_3 + \beta_3 = -z_2 - k_3 z_3 + z_4$$

Notons que dans cette étape $\alpha_3 = \alpha_3(x_1, x_2, x_3)$.

• Etape 4

Les dynamiques du sous-système 4 sont :

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= f_0 + f_4 + g_4 u \text{ et } \dot{z}_4 = \dot{x}_4 - \dot{\alpha}_3 \\ &= f_0 + f_4 + g_4 u - \dot{\alpha}_3 \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

Puisque le système original est décrit par 4 états seulement, l'entrée de commande apparaît dans la quatrième étape. On prend α_4 la fonction stabilisante du sous système 4,

$$\dot{x}_4 = f_0 + f_4 + g_4 u \text{ et } \dot{z}_4 = \dot{x}_4 - \dot{\alpha}_3 \quad (\text{II.29})$$

En réalisant la loi de commande, il est important d'éviter les expressions contenant les dérivées des états, mais $\alpha_3 = \alpha_3(x_1, x_2, x_3)$ alors,

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_3 &= \frac{d\alpha_3}{dt} = \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_3}\dot{x}_3 \\ &= \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_1}(x_2 + f_1) + \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_2}(x_3 + f_2) + \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_3}(x_4 + f_3)\end{aligned}\quad (\text{II.30})$$

Prenons la fonction de Lyapunov du sous système 4 comme

$$V_4 = V_3 + \frac{1}{2}z_4^2, \text{ alors, } \dot{V}_4 = \dot{V}_3 + z_4\dot{z}_4 \quad (\text{II.31})$$

et, on prend

$$w_4 = f_4 - \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_1}f_1 - \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_2}f_2 - \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_3}f_3 \text{ et } \beta_4 = w_4 - \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_2}x_3 - \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_3}x_4$$

$$\text{alors, } \dot{V}_4 = -k_1z_1^2 - k_2z_2^2 - k_3z_3^2 + z_4(z_3 + f_0 + g_4u + \beta_4) \quad (\text{II.32})$$

on choisit $\alpha_4 = -k_4z_4 - z_3 - \beta_4$ où le gain $k_4 > 0$ et la loi de commande

$$u = \frac{1}{g_4}(\alpha_4 - f_0), \quad g_4 \neq 0 \quad (\text{II.33})$$

Alors $\dot{V}_4 = -k_1z_1^2 - k_2z_2^2 - k_3z_3^2 - k_4z_4^2$ et

$$\begin{aligned}\dot{z}_4 &= f_0 + f_4 + g_4u - \dot{\alpha}_3 \\ &= f_0 + f_4 + g_4u - \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_1}f_1 - \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_1}f_1 - \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_2}x_3 - \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_2}f_2 - \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_3}x_4 - \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_3}f_3 \\ &= f_0 + f_4 + g_4u + \beta_3 = -z_3 - k_4z_4\end{aligned}\quad (\text{II.34})$$

En général, la conception du « backstepping » de la loi de commande u est exécutée en n étapes. A la $i^{\text{ème}}$ étape, un sous système du $i^{\text{ème}}$ ordre est stabilisé par rapport à une fonction de Lyapunov V_i par la conception d'une fonction stabilisante α_i .

La loi de commande est alors conçue à l'étape finale :

$$u = \frac{1}{g_n}(\alpha_n - f_0) \quad (\text{II.35})$$

II.2.2. Exemples et formulation du problème

On considère deux systèmes non linéaires, le premier est un pendule inversé, et l'autre un robot manipulateur.

Le but de conception pour le premier système est de stabiliser le pendule dans sa position d'équilibre verticale instable. Ce système est généralement traité comme le modèle $(\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x})$, où x est la position du chariot et θ est l'angle de la tige. Pour l'autre système (robot manipulateur) dans le but de suivre un signal de référence donné en temps réel par la coordonnée angulaire x de la tige.

II.2.2.1. Pendule inversé

A partir de Lagrangien, les équations générales du mouvement sont :

$$\begin{aligned} (m_c + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta &= F \\ \ddot{x} \cos \theta + l\ddot{\theta} - g \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

où F est la force agissant sur le chariot, m et m_c sont les masses de la tige et du chariot respectivement, g est l'accélération de gravité et l est la moitié de la longueur de la tige, voir figure (II.1).

Pour simplifier la représentation d'état et appliquer l'algorithme du backstepping, on prend comme entrée, l'accélération angulaire de la tige (plutôt que la force F).

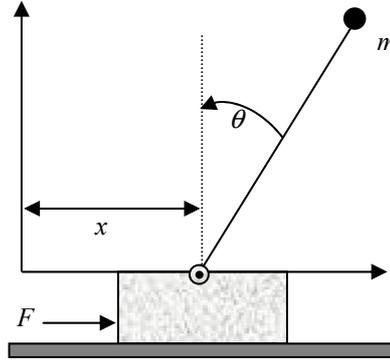


Figure II.1. Pendule inversé sur un chariot

Puisque, le paramètre l est connu, seulement la transformation partielle est possible. Le choix de la loi de commande de feedback est :

$$F = mg \sin \theta \cos \theta + \frac{(g \sin \theta - u)(m_c + m \sin^2 \theta)}{\cos \theta} \quad (\text{II.37})$$

où u est la partie de la loi de commande.

La représentation d'état est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \varphi_1(x) + \varphi_2(x)u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

Avec :

$$\varphi_1(x) = \frac{g \sin(x_1) - \frac{mlx_2^2 \cos(x_1) \sin(x_1)}{m_c + m}}{l\left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2(x_1)}{m_c + m}\right)} \quad (\text{II.39})$$

$$\varphi_2(x) = \frac{\frac{\cos(x_1)}{m_c + m}}{l\left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2(x_1)}{m_c + m}\right)} \quad (\text{II.40})$$

• **Etape 1**

Dans la première étape, on définit la variable de l'erreur ξ_1 comme,

$$\xi_1 = y - y_r = x_1 - y_r \quad (\text{II.41})$$

Avec la fonction de la commande de Lyapunov :

$$\begin{aligned} V(\xi_1) &= \frac{1}{2} \xi_1^2, \text{ d'où } \dot{V}(\xi_1) = \xi_1 \dot{\xi}_1 < 0 \\ \Rightarrow \dot{V}(\xi_1) &= \xi_1(\dot{x}_1 - \dot{y}_r) = \xi_1(x_2 - \dot{y}_r) \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

on obtient la première commande virtuelle,

$$x_{2d} = -k_1 \xi_1 + \dot{y}_r \quad (\text{II.43})$$

d'où ,

$$\dot{V}(\xi_1) = \xi_1(-k_1 \xi_1 + \dot{y}_r + \dot{y}_r) = -k_1 \xi_1^2 \quad (\text{II.44})$$

Où $k_1 > 0$ est un paramètre de conception et y_r est le signal de référence.

• **Etape 2**

On définit notre deuxième variable d'erreur ξ_2 comme,

$$\xi_2 = x_2 - x_{2d} = x_2 + k_1 \xi_1 - \dot{y}_r \quad (\text{II.45})$$

Avec la fonction de commande de Lyapunov de deuxième sous-système est

$$V(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} \xi_1^2 + \frac{1}{2} \xi_2^2 \quad (\text{II.46})$$

$$\dot{V}(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \dot{\xi}_1 + \xi_2 \dot{\xi}_2 \quad (\text{II.47})$$

Après certains calculs on a trouvé :

$$\dot{V}(\xi_1, \xi_2) = -k_1 \xi_1^2 + \xi_2(\phi_1(x) + \omega(x) + \xi_1 - k_1^2 \xi_1 + k_1 \xi_2 - \ddot{y}_r) \quad (\text{II.48})$$

Prenons

$$\omega(x) = -k_2 \xi_2 - \phi_1(x) - \xi_1 + k_1^2 \xi_1 - k_1 \xi_2 + \ddot{y}_r \quad (\text{II.49})$$

tel que,

$$\dot{V}(\xi_1, \xi_2) = -(k_1 \xi_1^2 + k_2 \xi_2^2) \quad (\text{II.50})$$

est négative, c'est-à-dire $\dot{V}(\xi_1, \xi_2) < 0$.

où k_2 est un paramètre de conception positif.

Ceci implique que le sous-système de la boucle fermée est globalement asymptotiquement stable (GAS).

Les sous-systèmes (1) et (2) peut être réécrit dans l'espace (ξ_1, ξ_2) comme suit

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{y}_r = x_2 - \dot{y}_r = \xi_2 + x_{2d} - \dot{y}_r \\ \text{ou } \dot{\xi}_1 &= \xi_2 - k_1 \xi_1 + \dot{y}_r - \dot{y}_r \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

$$\text{donc, } \dot{\xi}_1 = -k_1 \xi_1 + \xi_2 \quad (\text{II.52})$$

Et ainsi, pour la deuxième étape :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{x}_{2d} = \dot{x}_2 + k_1 \dot{\xi}_1 - \ddot{y}_r \\ \dot{\xi}_2 &= -k_1^2 \xi_1 + k_1 \xi_2 - \ddot{y}_r + \varphi_1 + \varphi_2 u \end{aligned} \quad (\text{II.53})$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= -k_1 \xi_1 + \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -k_1^2 \xi_1 + k_1 \xi_2 - \ddot{y}_r + \varphi_1 + \varphi_2 u \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

En général, le système s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \varphi_1 + \omega(x) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (\text{II.55})$$

$$\text{Avec } \omega(x) = \varphi_2 u \text{ et } u = \frac{\omega(x)}{\varphi_2} \quad (\text{II.56})$$

On remplace (II.14) en (II.22), on trouve :

$$\begin{aligned} u &= \frac{-k_2 \xi_2 - \varphi_1(x) - \xi_1 + k_1^2 \xi_1 - k_1 \xi_2 + \ddot{y}_r}{\varphi_2(x)} \\ &\text{avec } \varphi_2(x) \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{II.57})$$

II.2.2.2. Robot manipulateur

L'équation dynamique de ce système est donnée comme

$$\ddot{x} = -2 \frac{\dot{R}}{R} \dot{x} - g \frac{1}{R} \sin(x) + \frac{1}{mR^2} u$$

On applique la même procédure précédente au robot manipulateur (fig. II.2) qui comporte les équations d'état (II.38) avec :

$$\varphi_1(x) = \left[-2 \frac{\dot{R}}{R} x_2 - g \frac{1}{R} \sin(x_1) \right] \quad (\text{II.58})$$

$$\varphi_2(x) = [1/(m.R^2)] \quad (\text{II.59})$$

Une charge de masse m se déplace le long de la tige et sa distance de l'origine o est $R(t)$.

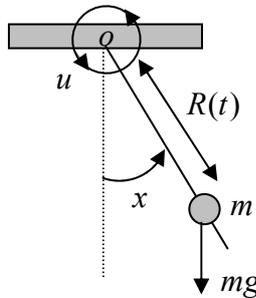


Figure II.2. Robot manipulateur.

II.2.3. Simulation et résultats

Dans cette partie, la conception des contrôleurs précédents est mise en œuvre et évaluée par simulation.

On a pris les systèmes précédents (pendule inversé et robot manipulateur), dont les résultats de simulation avec Matlab sont illustrés par les figures (II.3)-(II.8), en attribuant les paramètres suivants :

$g = 10, l = 0.5, m_c = 1, m = 0.1$, pour le système 1.

$g = 10, m = 1, R(t) = \sin(2t) + \cos(2t)$, pour le système 2.

Les figures (II.3) et (II.6) montrent la position suivant la trace du fonctionnement c'est-à-dire l'entrée de référence et la sortie, tandis que les figures (II.4 et II.7) donnent la trace de l'erreur. On remarque que le contrôleur montre une bonne robustesse malgré son manque de performance dans l'assurance de la convergence du paramètre inconnu vers sa vraie valeur constante. On constate aussi que l'erreur entre l'entrée et la sortie tend vers zéro après 0.1 sec, et on peut améliorer cette convergence en faisant un bon choix des constantes k_1 et k_2 .

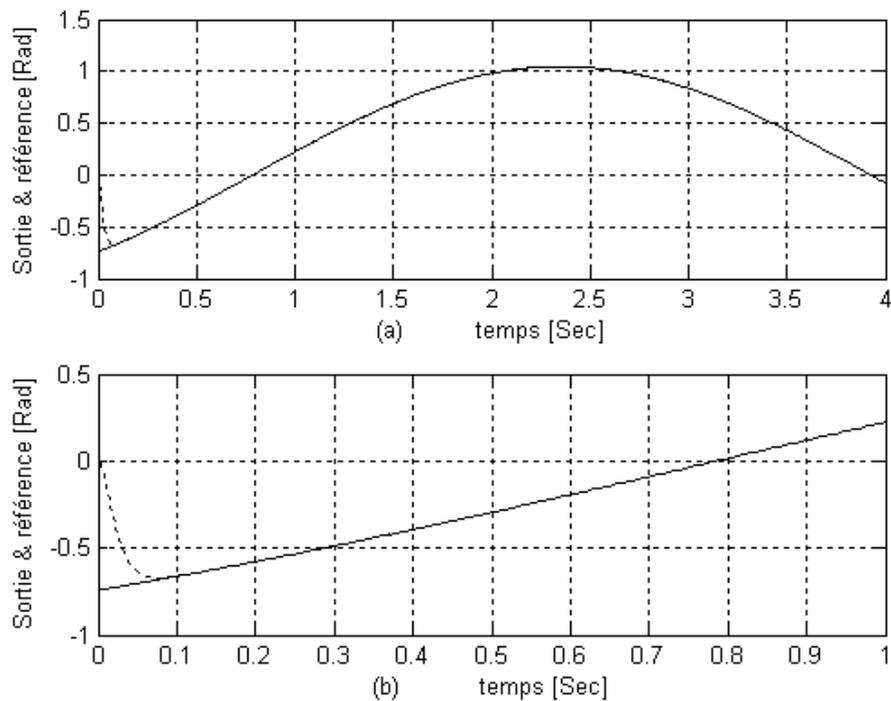


Figure II.3. (a et b) Sortie $y(t)$ et référence $y_m(t)$.

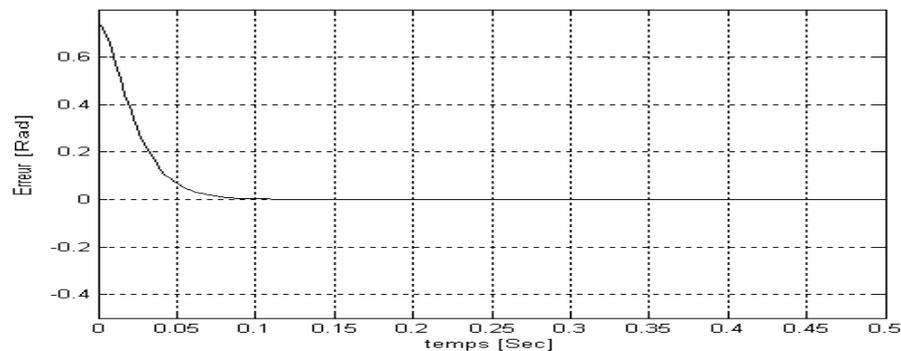


Figure II.4. Erreur $e(t)$.

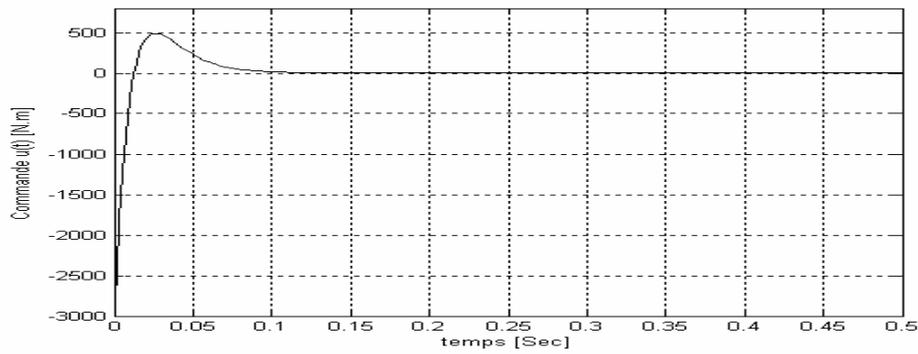


Figure II.5. Commande $u(t)$ du système.

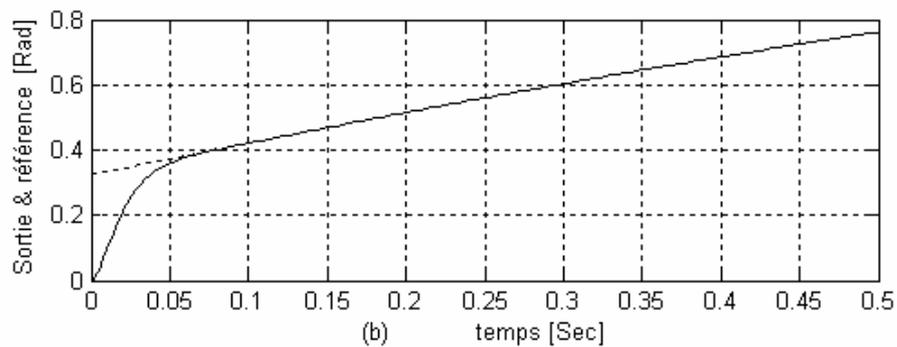
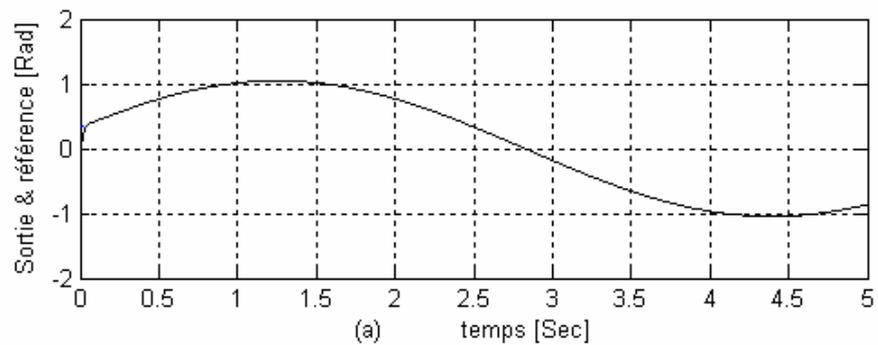


Figure II.6. (a et b) Sortie $y(t)$ et référence $y_m(t)$.

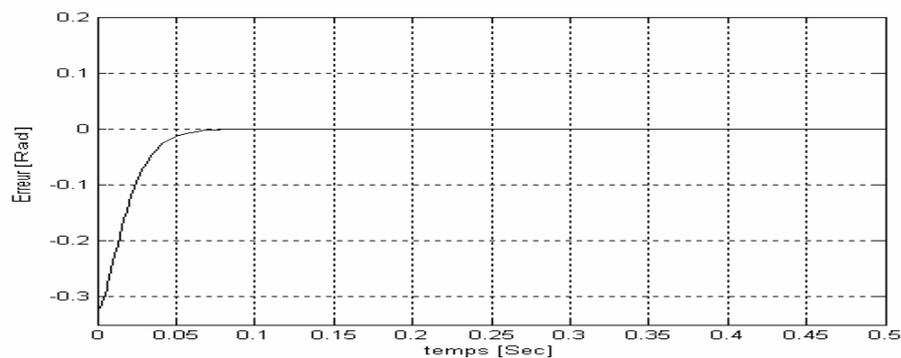


Figure II.7. Erreur $e(t)$.

Il est clair que la commande appliquée à notre système (fig.II.5 et fig.II.8), force la sortie à suivre le signal de référence, cette poursuite s'effectue, donc en minimisant l'erreur d'approximation d'une part, et de l'autre en assurant la stabilité du système.

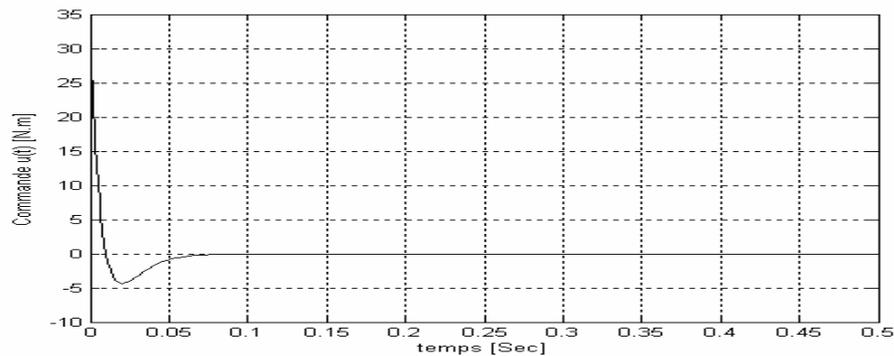


Figure II.8. Commande $u(t)$ du système.

II.2.4. Remarque

La technique de backstepping est une nouvelle technique, qui est appliquée pour la stabilisation du système non linéaire. La méthodologie n'est pas limitée aux systèmes linéaires, mais elle peut être appliquée à une large classe des systèmes non linéaires continus et discontinus.

La méthode backstepping est considérée avec ses limitations dans le contexte de commande de processus. Le problème principal du rejet de perturbation est d'abord résolu par l'introduction d'une action intégrale dans la procédure de conception. Le fonctionnement stationnaire des contrôleurs basés sur le backstepping est ainsi augmenté.

Le comportement des contrôleurs obtenus est amélioré via l'introduction du nouveau filtre basé sur la théorie de Lyapunov.

Les résultats sont conclusifs. Le fonctionnement obtenu peut même être amélioré en exploitant la version adaptative du backstepping, qui peut indemniser les non linéarités de l'industrie.

II.3. Commande adaptative backstepping

II.3.1. Approche adaptative

Les modèles réels des systèmes physiques ne sont pas linéaires et, habituellement, caractérisés par des paramètres (masses, inductances,...) qui sont peu connus ou dépendent d'un petit changement d'environnement. Si ces paramètres varient dans un intervalle important, il serait mieux d'employer une loi d'adaptation pour estimer les paramètres du système (fig. II.9) [27, 76].

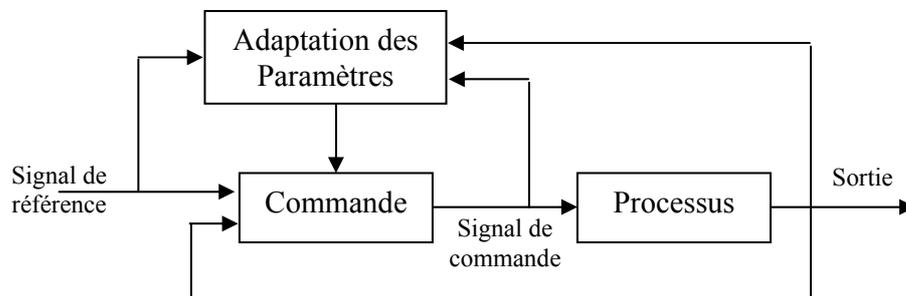


Figure II.9. Schéma de principe de la commande adaptative.

II.3.1.1. Conditions d'implantation

Comme la majorité des méthodes de commande étudiées, l'application de la technique backstepping est limitée à certaines classes de systèmes. Les systèmes dans ce cas doivent être sous une certaine forme triangulaire [28].

La forme général du système à analyser est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 + \varphi_1(x_1)^T \cdot \theta \\
 \dot{x}_2 &= x_3 + \varphi_2(x_1, x_2)^T \cdot \theta \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_n + \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})^T \cdot \theta \\
 \dot{x}_n &= \beta(x)u + \varphi_n(x)^T \cdot \theta \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{II.60}$$

où chaque $\varphi_i : \mathcal{R}^i \mapsto \mathcal{R}^p$ est un vecteur de fonctions non linéaires, et $\theta \in \mathcal{R}^p$ est un vecteur de coefficients constants. La commande u est multipliée par la fonction $\beta(x)$, avec $\beta(x) \neq 0, \forall x \in \mathcal{R}^n$, si le but est d'atteindre la fonction désirée y_r en utilisant l'état x_1 . Alors l'algorithme du backstepping peut être utilisé pour la stabilisation globale asymptotique de l'erreur primaire du système (on note l'erreur primaire par $z \in \mathcal{R}^n$). [76]

Puisque le vecteur θ est inconnu, alors avec une augmentation du système par la dynamique de l'estimation $\hat{\theta}$ une version algorithmique adaptative du backstepping est utilisée dans le but d'avoir une stabilité globale et asymptotique de l'erreur primaire du système.

En général, l'algorithme de la commande adaptative backstepping peut être utilisé pour atteindre la stabilité globale et asymptotique de l'erreur primaire du système si les étapes et les conditions suivantes sont respectées :

- Les systèmes sont introduits selon la forme (II.60),
- Les fonctions non linéaires φ_i sont connues,
- La paramétrisation est linéaire,
- La fonction $\beta(x)$ satisfait la condition $\beta(x) \neq 0, \forall x \in \mathcal{R}^n$,
- Chaque φ_i est suffisamment lisse,
- Le signal qui suivra y_r est continu,
- Tous les états sont mesurables.

Le diagramme, présenté par la figure (II.10) expose un exemple d'ordre trois avec $\beta(x) = 1$ et les fonctions non linéaires dépendent seulement des variables d'états.

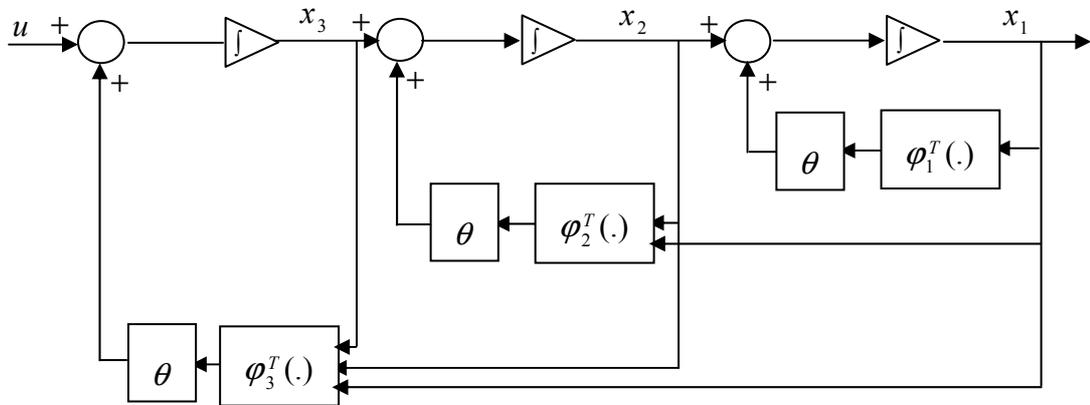


Figure II.10. Schéma du système d'ordre trois.

II.3.1.2. Exemples d'études

Dans ce qui suit, on présentera l'étude des deux systèmes non linéaires et l'implantation du backstepping sera introduite afin de réaliser une commande adaptative.

Le problème d'adaptation surgit à cause du vecteur paramétrique inconnu θ et le vecteur de fonction non linéaire $\varphi(x_1)$ est connu avec $\varphi(0) = 0$.

Les systèmes (I) et (II) sont complètement différents : le nombre d'intégrations entre la commande u et le paramètre θ augmente de 1 en (I) à 2 en (II).

Système (I)

Soit le système suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \varphi(x_1)^T \cdot \theta \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{II.61}$$

Pour concevoir une commande adaptative dans cette partie, on remplace le vecteur de paramètres réels θ , par son estimation $\hat{\theta}$ dans la fonction de stabilisation.

Ce qui donne

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1 - y_r \\ z_2 &= x_2 - \alpha_1(x_1, \hat{\theta}) - y_r \\ \alpha_1(x_1, \hat{\theta}) &= -c_1 z_1 - \varphi^T \cdot \hat{\theta}\end{aligned}\tag{II.62}$$

Dans ce cas, la loi de commande sera renforcée par le terme $v_2(x_1, x_2, \hat{\theta})$ qui compensera les transitions du paramètre estimateur.

$$u = \alpha_2(x_1, x_2, \hat{\theta}) = -c_2 z_2 - z_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(x_2 + \varphi^T \cdot \hat{\theta}) + v_2(x_1, x_2, \hat{\theta}) + \ddot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \cdot \dot{y}_r\tag{II.63}$$

le système résultant dans les coordonnées z est

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 + \alpha_1 + \varphi^T \cdot \tilde{\theta} \\ \dot{z}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 = u - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(x_2 + \varphi^T \cdot \theta) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \ddot{y}_r - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \cdot \dot{y}_r \\ &= -c_2 z_2 - z_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \varphi^T \cdot \tilde{\theta} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} + v_2(x_1, x_2, \hat{\theta}) - \ddot{y}_r - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \cdot \dot{y}_r\end{aligned}\tag{II.64}$$

avec : $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$.

En tenant compte de l'équation (II.64), le terme compensateur est choisi comme suit :

$$v_2(x_1, x_2, \hat{\theta}) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}}\tag{II.65}$$

Si l'erreur $\tilde{\theta}$ est nulle, le système devient asymptotiquement linéaire et stable (équation II.59). Puisque ce n'est pas le cas, la tâche suivante est de choisir la loi de mise à jour $\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_2(x, \hat{\theta})$.

On considère la fonction de Lyapunov

$$V_2 = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \tag{II.66}$$

puisque $\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\tilde{\theta}}$, la dérivée de V_2 s'écrit alors

$$\begin{aligned} V_2 &= -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \left(\Gamma \begin{bmatrix} \varphi^T \\ -\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \varphi^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} - \dot{\tilde{\theta}} \right) \\ &= -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \left(\Gamma \begin{bmatrix} \varphi \\ -\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} - \dot{\tilde{\theta}} \right) \end{aligned} \tag{II.67}$$

La seule solution pour éliminer l'erreur paramétrique $\tilde{\theta}$ est de choisir la loi de mise à jour suivante

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_2(x, \hat{\theta}) = \Gamma \begin{bmatrix} \varphi \\ -\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{II.68}$$

ce qui permet d'écrire les expressions suivantes,

$$\begin{aligned} \tau_1(x_1) &= \varphi_1 z_1 \\ \tau_2(x_1, x_2, \hat{\theta}) &= \tau_1(x_1) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \varphi z_2 \end{aligned} \tag{II.69}$$

Alors, \dot{V}_2 est négative et la stabilité globale de $z = 0$ est réalisée.

$$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \leq 0 \tag{II.70}$$

Enfin, il en résulte que l'équation $x_1 = y_r$ est globalement stable et $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = y_r$.

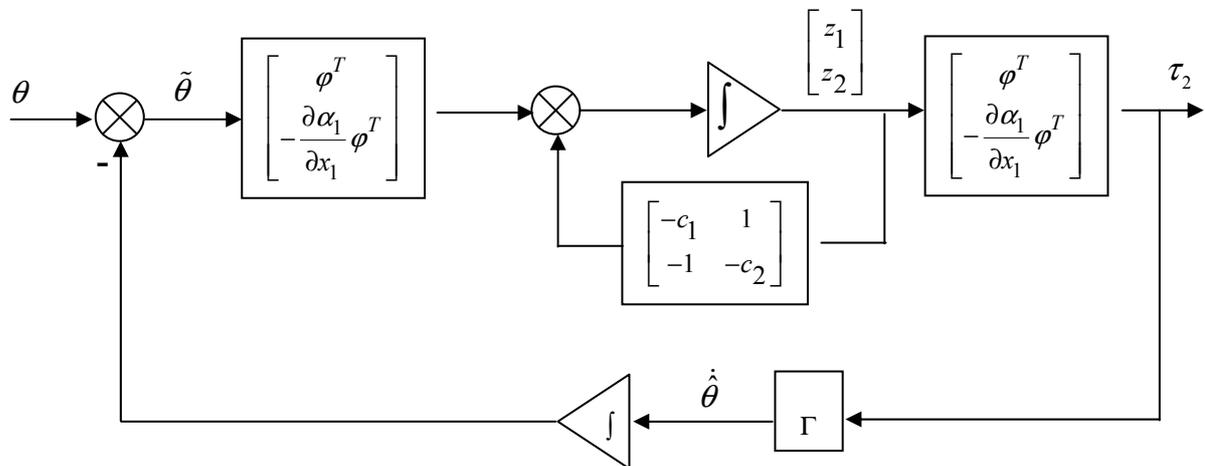


Figure II.11. Schéma de principe de la commande adaptative.

La propriété de cette loi de commande est définie par le terme v_2 , proportionnel à $\dot{\hat{\theta}}$ et composée par l'effet transitoire du paramètre estimé. C'est ce départ, certainement essentiel, qui rend la stabilité adaptative du système possible.

II.3.1.3. Simulation et résultats

Dans cette partie, la conception des contrôleurs est mise en œuvre et évaluée par simulation. On prend les systèmes précédents, dont les résultats de simulation avec Matlab sont illustrés par les figures (II.12-II.17), en attribuant les paramètres suivants :

A). Problème de régulation

$$y_d = 1, c_1 = 200, c_2 = 200, \theta = [2 \ 1]^T, \hat{\theta} = [1 \ 0.8]^T$$

$$x_1(0) = -1, x_2(0) = -1, \varphi(x_1) = [\sin(x_1) \ x_1^2]^T.$$

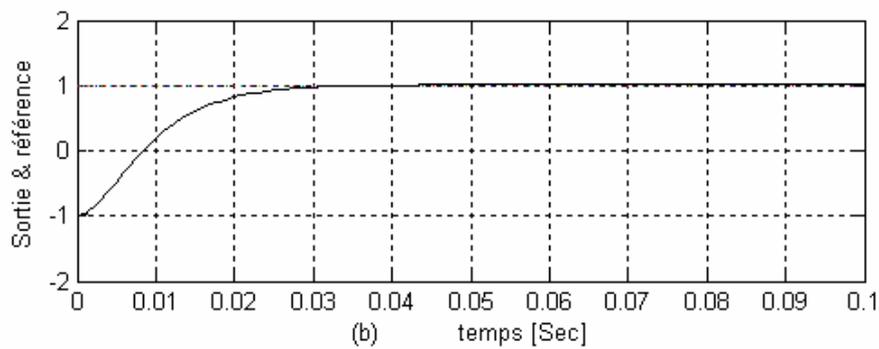
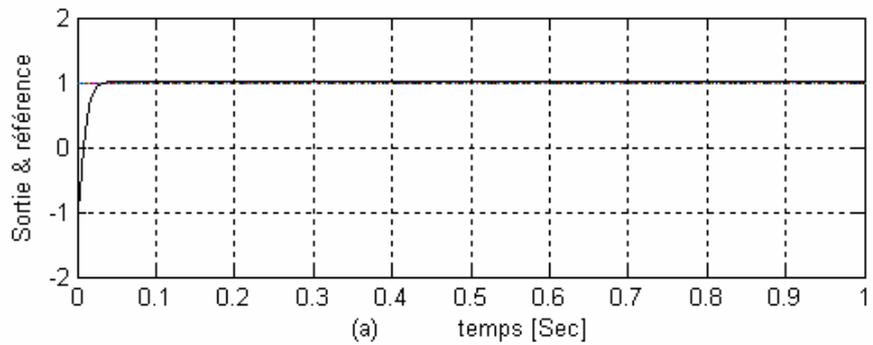


Figure II.12. Sortie $y(t)$ & référence $y_m(t)$.

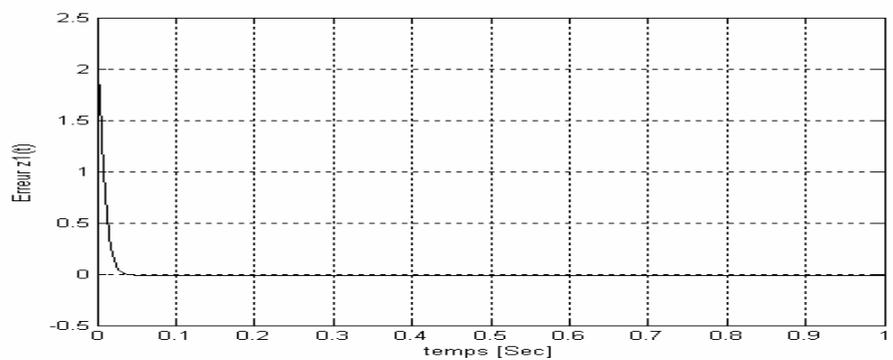


Figure II.13. Erreur $z_1(t)$

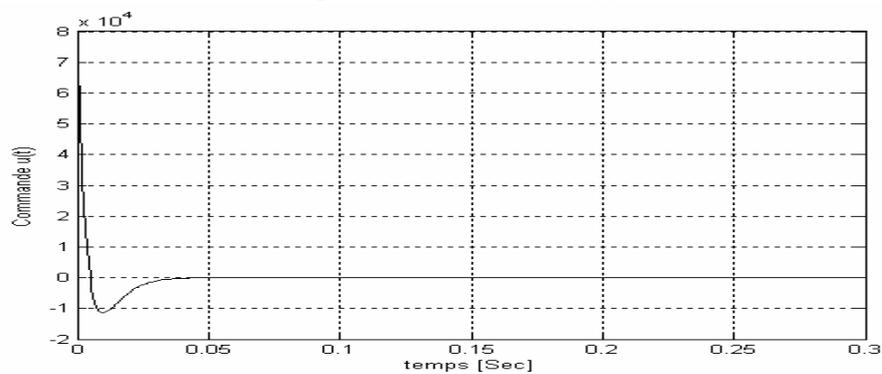


Figure II.14. Commande $u(t)$ du système.

Il est clair qu'à partir de certain temps l'erreur tend vers zéro, et les paramètres estimés diffèrent peu des valeurs réelles. Remarquant que le temps nécessaire pour la convergence n'est pas assez convaincant pour certains systèmes et cela peut être réglé par un bon choix des gains d'adaptation et des conditions initiales.

B). Problème de poursuite

$$y_d = (\pi/30) \cdot \sin(t), \quad c_1 = 500, \quad c_2 = 500, \quad \theta = [15 \ 20]^T, \quad \hat{\theta} = [11 \ 18]^T$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad \varphi(x_1) = [\sin(x_1) \ x_1^2]^T.$$

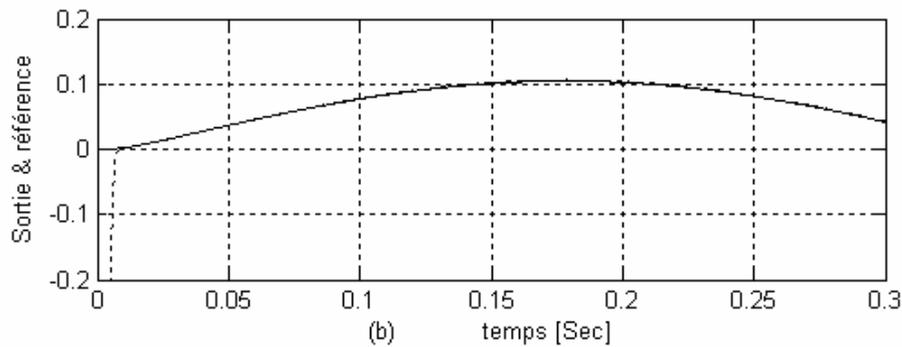
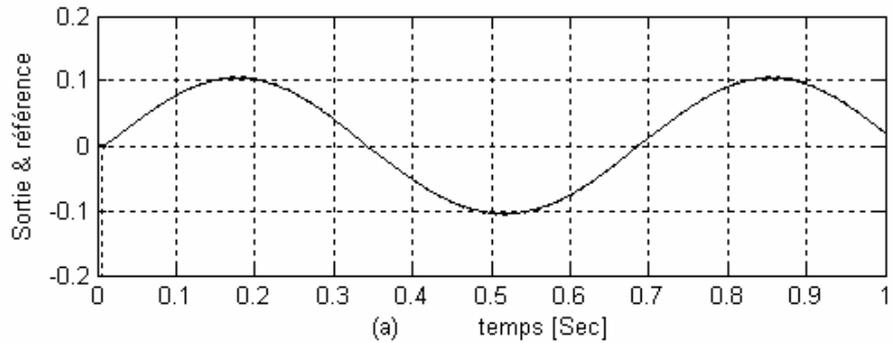


Figure II.15. Sortie $y(t)$ & référence $y_m(t)$.

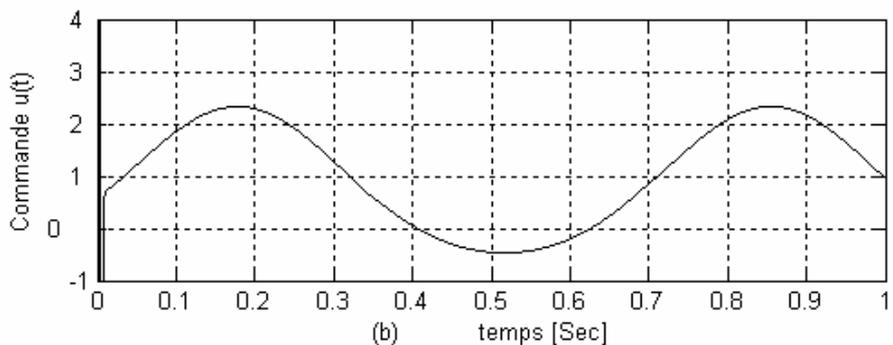
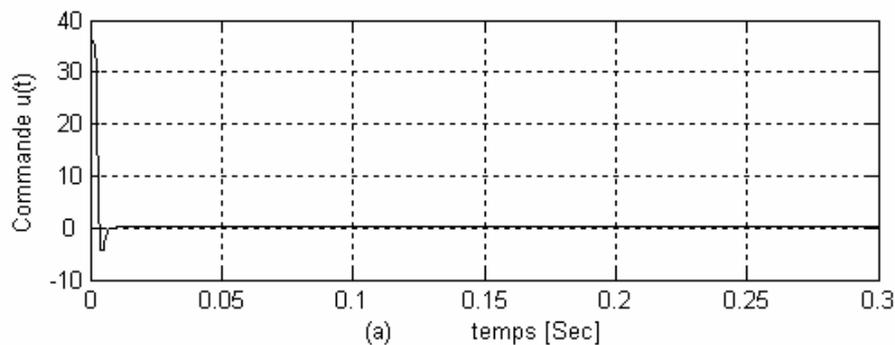


Figure II.16. Commande $u(t)$ du système.

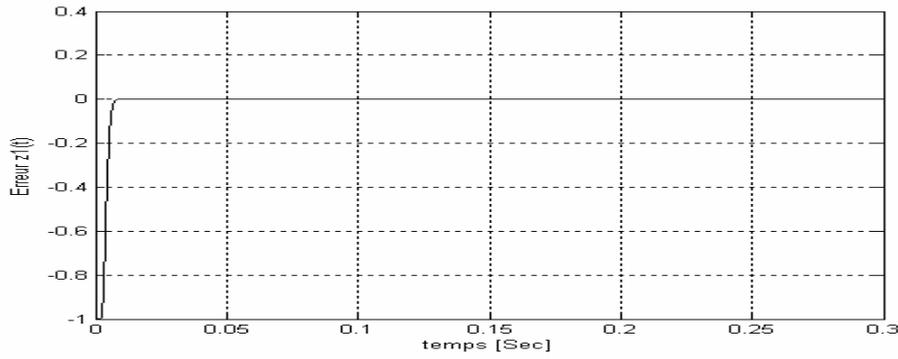


Figure II.17. Erreur $z_1(t)$.

Notons bien que la commande $u(t)$ présente une variation ce qui est provoqué par la variation sinusoïdale de l'entrée de référence. Cette commande force la sortie du système à suivre le signal de référence, cette poursuite s'effectue en minimisant l'erreur de poursuite (fig.II.17) d'une part et en assurant la stabilité d'autre part.

Système (II)

Soit le système :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \varphi(x_1)^T \theta \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (II.71)$$

Ce système est obtenu par l'augmentation avec un intégrateur du système (II.61). La loi de commande $\alpha_2(x_1, x_2, \hat{\theta})$, désignée dans l'équation (II.63), ne peut être appliquée directement puisque x_3 est un état et non une commande. On considère l'étape $\dot{x}_3 = u$ et on développe la conception de la loi de commande u « nouvelle entrée » pour définir l'erreur suivante :

$$z_3 = x_3 - \alpha_2(x_1, x_2, \hat{\theta}) - \dot{y}_r \quad (II.72)$$

Etant donné que la loi de mise à jour du paramètre (II.68) modifie l'existence de z_3 , le terme compensateur v_2 adoptera la structure suivante :

$$v_2(x_1, x_2, \hat{\theta}) = \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \tau_2(x_1, x_2, \hat{\theta}) \quad (II.73)$$

tel que τ_2 compense l'effet transitoire du paramètre estimé.

Avec les équations (II.59), (II.72), (II.69) et (II.73), la dynamique des erreurs aura la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 & 1 \\ -1 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi^T \\ -\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \varphi^T \end{bmatrix} \tilde{\theta} + \begin{bmatrix} 0 \\ z_3 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} (\Gamma \tau_2 - \dot{\hat{\theta}}) \end{bmatrix} \quad (II.74)$$

ce qui permet d'avoir la fonction dérivée de Lyapunov suivante :

$$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 + z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} (\Gamma \tau_2 - \dot{\hat{\theta}}) + \tilde{\theta}^T (\tau_2 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}) \quad (II.75)$$

d'après l'équation (II.72), on aboutit à :

$$\dot{z}_3 = u - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (x_2 + \varphi^T \hat{\theta}) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} x_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \varphi^T \tilde{\theta} - y_r^{(3)} \quad (\text{II.76})$$

la dernière étape consiste à utiliser la fonction de Lyapunov suivante

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2} z_3^2 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} z_3^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad (\text{II.77})$$

et sa dérivée s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & -c_1 z_1^2 + z_2^2 + z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} (\Gamma \tau_2 - \dot{\hat{\theta}}) \\ & + z_3 \left[z_2 + u - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (x_2 + \varphi^T \hat{\theta}) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} x_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - y_r^{(3)} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial y_r} \dot{y}_r - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \dot{y}_r} \ddot{y}_r \right] \\ & + \tilde{\theta}^T \left(\tau_2 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \varphi z_3 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.78})$$

il faut éliminer l'erreur paramétrique $\tilde{\theta}$, pour cette raison, on choisit la loi de mise à jour suivante :

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_3 (x_1, x_2, x_3, \hat{\theta}) = \Gamma \left(\tau_2 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \varphi z_3 \right) \quad (\text{II.79})$$

A partir de l'équation (II.78), on déduit la loi de commande

$$u = \alpha_3 (x_1, x_2, x_3, \hat{\theta}) = -z_2 - c_3 z_3 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (x_2 + \varphi^T \hat{\theta}) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} x_3 + v_3 \quad (\text{II.80})$$

ce qui donne,

$$\dot{V}_3 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 + z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} (\Gamma \tau_2 - \dot{\hat{\theta}}) + z_3 \left(v_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \right). \quad (\text{II.81})$$

D'après l'expression (II.81), v_3 compense $\frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}}$ et puisque les deux termes

$z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} (\Gamma \tau_2 - \dot{\hat{\theta}})$ et v_3 ne peuvent être éliminés ensemble, on procède à la notation suivante :

$$\dot{\hat{\theta}} - \Gamma \tau_2 = \dot{\hat{\theta}} - \Gamma \tau_3 + \Gamma \tau_3 - \Gamma \tau_2 = \dot{\hat{\theta}} - \Gamma \tau_3 - \Gamma \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \varphi z_3 \quad (\text{II.82})$$

d'après l'équation (II.81), \dot{V}_3 peut être formulée par :

$$\dot{V}_3 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 + z_3 \left(v_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \tau_3 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \varphi z_2 \right) \quad (\text{II.83})$$

En tenant compte de l'équation (II.83), le terme v_3 doit être choisi comme suit :

$$v_3 (x_1, x_2, x_3, \hat{\theta}) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \tau_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \varphi z_2 \quad (\text{II.84})$$

alors, l'équation (II.83) peut s'écrire comme :

$$\dot{V}_3 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 \leq 0 \quad (\text{II.85})$$

ce qui garantit que l'équation $x_1 = y_r$ est globalement stable, et $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = y_r$.

II.4. Commande backstepping avec observateur

Le problème d'observation a une importance pratique, car certaines variables internes sont quelques fois inaccessibles aux états à mesurer. La plupart du temps, soit par impossibilité physique d'introduire un capteur, soit pour des questions de coût, on ne peut pas mesurer tous les états [29, 30].

On va voir comment on peut, à partir de mesures faites sur l'entrée et la sortie du processus, observer le vecteur d'état X , noté alors \hat{X} . Le sous-système qui réalise cette reconstruction est appelé reconstruteur ou observateur [76].

L'observateur a comme entrées les entrées et les sorties du processus réel et comme sortie la valeur estimée (observée) de l'état de ce processus (Fig. II.18).

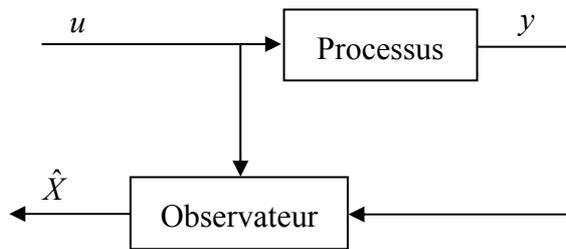


Figure II.18. Schéma de principe de l'observateur.

Le problème de l'observateur consiste donc à reconstruire, pour un processus donné, un système défini par ses équations d'état, dont la sortie donne une estimation de l'état réel du processus. L'observateur est dit asymptotique.

II.4.1. commande adaptative avec observateur

Pour atteindre l'objectif fixé dans cette partie, on doit adopter un ensemble d'hypothèses afin d'introduire l'observateur. On va traiter deux exemples selon les étapes habituelles de la commande adaptative backstepping.

Le premier principe consiste à exposer un schéma permettant d'expliquer la commande adaptative avec observateur (Fig. II.19).

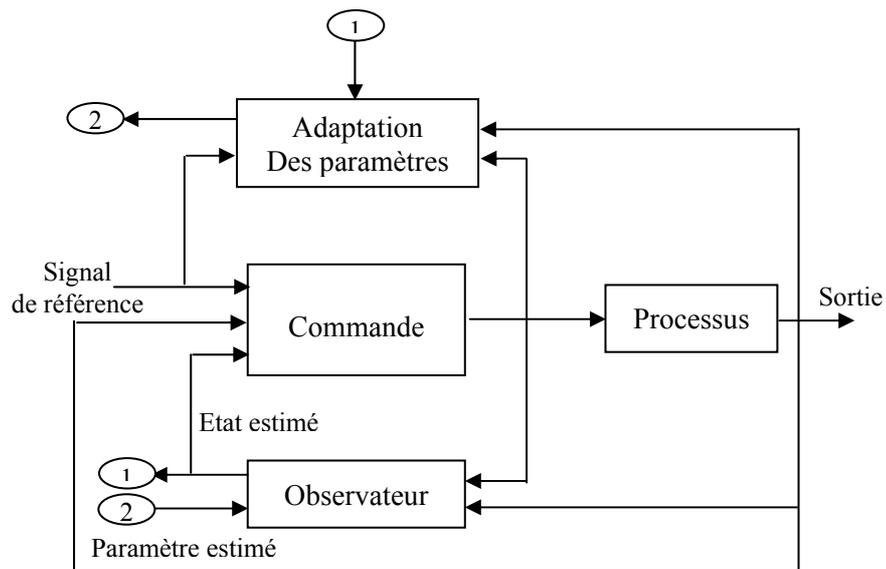


Figure II.19. Schéma de principe de la commande adaptative avec observateur.

Dans le but de faire la synthèse de la commande adaptative backstepping avec observateur, les hypothèses suivantes sont supposées être réalisées :

- 1- la plupart des états ne sont pas disponibles ;
- 2- la fonction de sortie $y = h(x)$ doit être définie ;
- 3- les non linéarités du système sont fonctions de grandeurs mesurables.

Ces conditions supplémentaires permettent au système de prendre la forme,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \phi_1(y)^T \theta \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \phi_2(y)^T \theta \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \beta(y).u + \phi_n(y)^T \theta \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{II.86}$$

tel que chaque $\phi: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^p$ est un vecteur de fonctions non linéaires, et $\theta \in \mathfrak{R}^p$ est un vecteur de paramètres constants.

Dans le but de concevoir un observateur, le système (II.86) peut être représenté par la somme :

- 1- d'une partie connue linéaire,
- 2- d'une partie non linéaire inconnue,
- 3- d'une fonction de commande.

$$\dot{x} = \underbrace{Ax}_{\text{Partie linéaire}} + \underbrace{\phi^T(y)\theta}_{\text{Non linéaire inconnue}} + \underbrace{Bg(y)u}_{\text{Commande}} \tag{II.87}$$

où,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \phi(y) = [\phi_1^T(y) \quad \phi_1^T(y) \quad \cdots \quad \phi_n^T(y)]$$

$$B^T = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1], \quad x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T, \quad \theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \cdots \quad \theta_p]^T$$

II.4.2. Développement théorique d'un exemple du deuxième ordre

Une fois l'observateur est défini, les étapes de la commande adaptative backstepping avec observateur suivent les états du système afin de compenser les erreurs et réaliser une stabilité asymptotique.

a). Système d'ordre 2

Pour illustrer la technique de cette méthode, on considère le système d'ordre deux comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \phi_1^T(y)\theta \\ \dot{x}_2 &= \theta_u u + \phi_2^T(y)\theta \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{II.88}$$

Tel que chaque $\phi_i^T(y) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^M$ est un vecteur de fonctions non linéaires, et $\theta \in \mathfrak{R}^M$ est un vecteur de paramètres constants inconnus. On peut écrire (II.88) sous la forme :

$$\dot{x} = Ax + \phi(y)\theta + B\theta_u u \quad (\text{II.89})$$

où,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \phi(y) = [\phi_1^T(y) \quad \phi_2^T(y)], \theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_M]^T, B^T = [0 \quad 1].$$

b). Observateur

Si on note \hat{x} le vecteur d'état estimé et ε l'erreur d'observation alors,

$$x = \hat{x} + \varepsilon \quad (\text{II.90})$$

L'état de l'observateur \hat{x} est défini par une composition de trois vecteurs :

- 1- ξ dépend de la partie linéaire connue,
- 2- λ dépend de la partie liée aux paramètres θ inconnus.
- 3- v dépend de la partie liée aux paramètres θ_u inconnus.

L'observateur aura alors la structure suivante :

$$\hat{x} = \xi(t) + \lambda(t)\theta + v(t)\theta_u \quad (\text{II.91})$$

tel que, $\xi \in \mathfrak{R}^2$, $\lambda \in \mathfrak{R}^{2 \times M}$ et $v \in \mathfrak{R}^2$.

Les termes θ et θ_u , utilisés dans (II.91) sont des paramètres réels inconnus et les filtres ξ, λ et v sont implantés individuellement comme suit :

$$\dot{\xi}(t) = A\xi - K\xi_1 + Ky \quad (\text{II.92})$$

$$\dot{\lambda}(t) = A\lambda - K\lambda_1 + \phi^T(y) \quad (\text{II.93})$$

$$\dot{v}(t) = Av - Kv_1 + Bu \quad (\text{II.94})$$

tel que, $K = [k_1 \quad k_2]^T$.

A partir des équations (II.90), (II.92) et (II.94), l'erreur dynamique de l'observateur prend la description suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= \dot{x} - (\dot{\xi}(t) + \dot{\lambda}(t)\theta + \dot{v}(t)\theta_u) \\ &= \dot{x} - ((A\xi - K\xi_1 + Ky) + (A\lambda - K\lambda_1 + \phi^T(y))\theta + (Av - Kv_1 + Bu)\theta_u) \\ &= \dot{x} - (A(\xi + \lambda\theta + v\theta_u) + K(y - (\xi_1 + \lambda_1\theta + v_1\theta_u)) + \phi^T(y)\theta + Bu\theta_u) \end{aligned} \quad (\text{II.95})$$

en utilisant l'équation (II.4) l'expression (II.95) devient :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= Ax - (A(\xi + \lambda\theta + v\theta_u) + K(y - (\xi_1 + \lambda_1\theta + v_1\theta_u))) \\ &= Ax - A\hat{x} - K(x_1 - \hat{x}_1) \\ &= A\varepsilon - K\varepsilon_1 \end{aligned} \quad (\text{II.96})$$

avec, $\varepsilon = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2]^T$.

Ce qui permet d'écrire l'équation (II.96) sous forme :

$$\dot{\varepsilon} = A_0\varepsilon \quad (\text{II.97})$$

tel que $A_0 = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}$, et K est choisi de telle sorte que A_0 soit stable.

c). Transformation de coordonnées

Une fois la dynamique de l'erreur de l'observation, qui est exponentiellement stable, est définie, il sera possible d'utiliser la procédure du backstepping pour définir la loi de commande. La première étape pour la méthode du backstepping consiste toujours à définir le changement de variables :

$$\begin{aligned} z_1 &= y - y_r \\ z_2 &= v_2 \hat{\theta}_u - \dot{y}_r - \alpha_1 \end{aligned} \quad (\text{II.98})$$

tel que α_1 est la première commande virtuelle.

• Etape 1

Cette première étape consiste à identifier la commande virtuelle α_1 . Pour atteindre cet objectif, on utilise la fonction de Lyapunov qui garantit la stabilité et les performances du système.

On choisit, $P \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$, $P > 0$ et $P^T = P$

Tel que la condition suivante soit satisfaite :

$$PA_0 + A_0^T P = -I \quad (\text{II.99})$$

La première fonction de Lyapunov est définie par :

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2g} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} + \frac{1}{2g_u} \tilde{\theta}_u^2 + \frac{1}{d_1} \varepsilon^T P \varepsilon \quad (\text{II.100})$$

Sa dérivée s'écrit alors,

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 - \frac{1}{g} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} - \frac{1}{2g_u} \tilde{\theta}_u \dot{\tilde{\theta}}_u - \frac{1}{d_1} \varepsilon^T \dot{\varepsilon} \quad (\text{II.101})$$

d'après les équations (II.90) et (II.98), on peut déduire,

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 + \phi_1^T(y) \theta = \hat{x}_2 + \varepsilon_2 + \phi_1^T(y) \theta \quad (\text{II.102})$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \hat{x}_2 + \varepsilon_2 + \phi_1^T(y) \theta - \dot{y}_r \\ &= z_2 + \alpha_1 + \xi_2 + (\lambda_2 + \phi_1^T) \hat{\theta} + (\lambda_2 + \phi_1^T) \tilde{\theta} + v_2 \tilde{\theta}_u + \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (\text{II.103})$$

Pour choisir la commande virtuelle et ajouter un terme de stabilisation, il faut annuler tous les termes connus sauf le terme z_2 et isoler les erreurs d'observateur inconnues, d'où,

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 - \left(\xi_2 + (\lambda_2 + \phi_1^T) \hat{\theta} \right) - d_1 z_1 \quad (\text{II.104})$$

$$\text{alors, } \dot{z}_1 = z_2 - c_1 z_1 + (\lambda_2 + \phi_1^T) \tilde{\theta} + v_2 \tilde{\theta}_u + \varepsilon_2 \quad (\text{II.105})$$

Et la fonction de Lyapunov aura la forme :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= z_1 \left(z_2 - c_1 z_1 - d_1 z_1 + (\lambda_2 + \phi_1^T) \tilde{\theta} + v_2 \tilde{\theta}_u + \varepsilon_2 \right) + \tilde{\theta}^T \left(-\frac{1}{g} \dot{\tilde{\theta}} \right) + \tilde{\theta}_u \left(-\frac{1}{g_u} \dot{\tilde{\theta}}_u \right) - \frac{1}{2} \varepsilon^T \dot{\varepsilon} \\ &= -c_1 z_1^2 - d_1 \left(z_1 - \frac{\varepsilon_2}{2d_1} \right)^2 + \frac{\varepsilon_2^2}{4d_1} - \frac{1}{d_1} \varepsilon^T \varepsilon + z_1 z_2 \\ &\quad + \tilde{\theta}^T \left(z_1 (\lambda_2 + \phi_1^T)^T - \frac{1}{g} \dot{\tilde{\theta}} \right) + \tilde{\theta}_u \left(z_1 v_2 - \frac{1}{g_u} \dot{\tilde{\theta}}_u \right) \end{aligned}$$

$$\text{avec, } \varepsilon^T \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$$

Ceci permet de réécrire l'équation précédente sous forme :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= -c_1 z_1^2 - d_1 \left(z_1 - \frac{\varepsilon_2}{2d_1} \right)^2 - \frac{3\varepsilon_2^2}{4d_1} - \frac{\varepsilon_1^2}{d_1} + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^T \left(z_1 (\lambda_2 + \phi^T)^T - \frac{1}{g} \dot{\hat{\theta}} \right) + \tilde{\theta}_u \left(z_1 v_2 - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) \\
&\leq -c_1 z_1^2 - d_1 \left(z_1 - \frac{\varepsilon_2}{2d_1} \right)^2 - \frac{3\varepsilon_2^2}{4d_1} - \frac{3\varepsilon_1^2}{4d_1} + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^T \left(z_1 (\lambda_2 + \phi^T)^T - \frac{1}{g} \dot{\hat{\theta}} \right) + \tilde{\theta}_u \left(z_1 v_2 - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) \\
&\leq -c_1 z_1^2 - \frac{3}{4d_1} \varepsilon^T \varepsilon + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^T \left(z_1 (\lambda_2 + \phi^T)^T - \frac{1}{g} \dot{\hat{\theta}} \right) + \tilde{\theta}_u \left(z_1 v_2 - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) \quad (\text{II.106})
\end{aligned}$$

en adoptant les définitions suivantes :

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= z_1 (\lambda_2 + \phi^T)^T \\
\tau_{u1} &= z_1 v_2
\end{aligned} \quad (\text{II.107})$$

L'expression (II.106) s'écrit alors,

$$\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 - \frac{3}{4d_1} \varepsilon^T \varepsilon + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^T \left(\tau_1 - \frac{1}{g} \dot{\hat{\theta}} \right) + \tilde{\theta}_u \left(\tau_{u1} - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) \quad (\text{II.108})$$

• Etape 2

La fonction de Lyapunov va être augmentée par le terme z_2 et l'erreur d'observation, ce qui permet d'écrire :

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{d_2} \varepsilon^T P \varepsilon \quad (\text{II.109})$$

Et déduire sa dérivée comme,

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + z_2 \dot{z}_2 - \frac{1}{d_2} \varepsilon^T \varepsilon \quad (\text{II.110})$$

D'après (II.22), on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &\leq -c_1 z_1^2 - \frac{3}{4d_1} \varepsilon^T \varepsilon + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^T \left(\tau_1 - \frac{1}{g} \dot{\hat{\theta}} \right) + \tilde{\theta}_u \left(\tau_{u1} - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) + z_2 \dot{z}_2 - \frac{1}{d_2} \varepsilon^T \varepsilon \\
&\leq -c_1 z_1^2 - \frac{3}{4d_1} \varepsilon^T \varepsilon + z_2 (z_1 + \dot{z}_2) - \frac{1}{d_2} \varepsilon^T \varepsilon + \tilde{\theta}^T \left(\tau_1 - \frac{1}{g} \dot{\hat{\theta}} \right) + \tilde{\theta}_u \left(\tau_{u1} - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right)
\end{aligned} \quad (\text{II.111})$$

A partir des expressions (II.94) et (II.98), le terme $(z_1 + \dot{z}_2)$ aura le développement suivant :

$$\begin{aligned}
(z_1, \dot{z}_2) &= z_1 + \frac{d(v_2 \hat{\theta}_u - \dot{y}_r - \alpha_1)}{dt} \\
&= z_1 + (-k_2 v_1 + u) \hat{\theta}_u + v_2 \dot{\hat{\theta}}_u - \ddot{y}_r - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \dot{y}
\end{aligned} \quad (\text{II.112})$$

$$\begin{aligned}
&- \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \lambda_1} \dot{\lambda}_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial v_1} \dot{v}_1 \right) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}_u} \dot{\hat{\theta}}_u
\end{aligned} \quad (\text{II.113})$$

À (II.104) α_1 est une fonction seulement de y, ξ_2, y_r, λ_2 et $\hat{\theta}$, alors sa dérivée s'écrit :

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \dot{\xi}_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \lambda_2} \dot{\lambda}_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}}$$

et l'expression (II.112) devient alors,

$$\begin{aligned} (z_1 + \dot{z}_2) &= z_1 + (-k_2 v_1 + u) \hat{\theta}_u + v_2 \dot{\hat{\theta}}_u - \dot{y}_r - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \dot{y} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \dot{\xi}_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \lambda_2} \dot{\lambda}_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \\ &= u \hat{\theta}_u + z_1 - k_2 v_1 \hat{\theta}_u + v_2 \dot{\hat{\theta}}_u - \dot{y}_r - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \dot{y} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \dot{\xi}_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \lambda_2} \dot{\lambda}_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \end{aligned} \quad (\text{II.114})$$

On remplace \dot{y} par son expression (II.102) et on aura,

$$\begin{aligned} (z_1 + \dot{z}_2) &= u \hat{\theta}_u + z_1 - k_2 v_1 \hat{\theta}_u + v_2 \dot{\hat{\theta}}_u - \dot{y}_r - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (\xi_2 + \lambda_2 \hat{\theta} + \lambda_2 \tilde{\theta} + v_2 \hat{\theta}_u + v_2 \tilde{\theta}_u \\ &\quad + \varepsilon_2 + \phi_1^T \hat{\theta} + \phi_1^T \tilde{\theta}) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \dot{\xi}_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \lambda_2} \dot{\lambda}_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \end{aligned} \quad (\text{II.115})$$

Tel que ξ_2 et λ_2 sont des filtres entièrement définis.

Afin de choisir la commande virtuelle et ajouter un terme de stabilisation, il faut annuler tous les termes connus sauf le terme z_2 et isoler les erreurs d'observateur inconnues.

On note $\alpha_2 = u \hat{\theta}_u$ et on choisit α_2 comme :

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -c_2 z_2 - \left(z_1 - k_2 v_1 \hat{\theta}_u - \dot{y}_r - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (\xi_2 + (\lambda_2 + \phi_1^T) \hat{\theta} + v_2 \hat{\theta}_u) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \dot{\xi}_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \lambda_2} \dot{\lambda}_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} g \tau_2 + v_2 g_u \tau_{u2} \right) - d_2 z_2 \left(-\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{II.116})$$

Avec τ_2 et τ_{u2} qui vont être convenablement définies.

L'expression (II.115) aura la forme :

$$\begin{aligned} (z_1 + \dot{z}_2) &= -c_2 z_2 + v_2 \dot{\hat{\theta}}_u - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (\lambda_2 \tilde{\theta} + v_2 \tilde{\theta}_u + \varepsilon_2 + \phi_1^T \tilde{\theta}) \\ &\quad - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} g \tau_2 - v_2 g_u \tau_{u2} - d_2 z_2 \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{II.117})$$

La fonction de Lyapunov dérivée aura l'expression :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -c_1 z_1^2 - \frac{3}{4d_1} \varepsilon^T \varepsilon + z_2 \left(-c_2 z_2 + v_2 \dot{\hat{\theta}}_u - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (\lambda_2 \tilde{\theta} + v_2 \tilde{\theta}_u + \varepsilon_2 + \phi_1^T \tilde{\theta}) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} g \tau_2 - v_2 g_u \tau_{u2} - d_2 z_2 \left(-\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right)^2 \right) - \frac{1}{d_2} \varepsilon^T \varepsilon + \tilde{\theta}^T \left(\tau_1 - \frac{1}{g} \dot{\hat{\theta}} \right) + \tilde{\theta}_u \left(\tau_{u1} - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) \\ &\leq -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - \frac{3}{4d_1} \varepsilon^T \varepsilon - d_2 z_2^2 \left(-\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right)^2 + z_2 \left(-\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right) \varepsilon_2 - \frac{1}{d_2} \varepsilon^T \varepsilon \\ &\quad + z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} g \left(\tau_2 - \frac{1}{g} \dot{\hat{\theta}} \right) + \tilde{\theta}^T \left(z_2 \left(-\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right) (\lambda_2 + \phi_1^T)^T + \tau_1 - \frac{1}{g} \dot{\hat{\theta}} \right) \\ &\quad - z_2 v_2 g_u \left(\tau_{u2} - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) + \tilde{\theta}_u \left(z_2 \left(-\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right) v_2 + \tau_{u1} - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) \end{aligned} \quad (\text{II.118})$$

Pour s'assurer que les deux termes $z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}}$ et $\tilde{\theta}$ s'annulent aussi bien que les termes z_2, v_2, g_u et $\tilde{\theta}_u$, on définit les fonctions :

$$\begin{aligned}\tau_2 &= z_2 \left(-\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right) (\lambda_2 + \phi_1^T)^T + \tau_1 \\ \tau_{u2} &= z_2 \left(-\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right) v_2 + \tau_{u1}\end{aligned}\quad (\text{II.119})$$

Ce qui permet d'avoir l'expression dérivée de Lyapunov :

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &\leq -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - \frac{3}{4d_1} \varepsilon^T \varepsilon - z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} g \left(\tau_2 - \frac{1}{g} \dot{\hat{\theta}} \right) \\ &+ \tilde{\theta}^T \left(\tau_2 - \frac{1}{g} \dot{\hat{\theta}} \right) - z_2 v_2 g_u \left(\tau_{u2} - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) + \tilde{\theta}_u \left(\tau_{u2} - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right)\end{aligned}\quad (\text{II.120})$$

• Etape 3

Dans cette dernière étape, on peut déduire la loi de commande et les lois de mise à jours :

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{\hat{\theta}_u} \left[\left[-c_1 z_2 - \left(z_1 - k_2 v_1 \hat{\theta}_u - \ddot{y} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (\xi_2 + (\lambda_2 + \phi_1^T) \hat{\theta} + v_2 \hat{\theta}_u) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} \dot{\xi}_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \lambda_2} \dot{\lambda}_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} g \tau_2 + v_2 g_u \tau_{u2} \right] - d_2 z_2 \left(-\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right)^2 \right]\end{aligned}\quad (\text{II.121})$$

$$\dot{\hat{\theta}} = g \tau_2 = g \left(z_2 \left(-\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right) + z_1 \right) (\lambda_2 + \phi_1^T)^T \quad (\text{II.122})$$

$$\dot{\hat{\theta}}_u = g_u \tau_{u2} = g_u \left(z_2 \left(-\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \right) + z_1 \right) v_2$$

Donc la dernière fonction dérivée de Lyapunov est :

$$\dot{V}_2 \leq -\sum_{j=1}^2 c_j z_j^2 - \sum_{i=1}^2 \frac{3}{4d_i} \varepsilon^T \varepsilon \quad (\text{II.123})$$

En se basant sur la fonction de Lyapunov $V = V_2$, on a pu démontrer que $\dot{V} < 0, \forall (z, \varepsilon) \neq 0$, ce qui implique une stabilité asymptotique du système (II.89) et l'observateur (II.91).

II.4.3. Exemple d'étude

II.4.3.1. Pendule simple

La dynamique du pendule est donnée par les équations (II.38, II.58-II.59) de la section précédente (fig. II.2). Toutes les autres données du problème sont les mêmes sauf la fonction $R(t)$ dans ce cas est constante égale l (c-à-d, la masse m est fixe dans une position $R(t) = l$), ainsi que le modèle de référence.

Lorsque $R(t) = l$, alors l'équation du système sera exprimée par :

$$ml^2 \ddot{x} + mgl \sin x = u \quad (\text{II.124})$$

Le modèle résultant peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 + \frac{1}{ml^2} u \\
y &= x_1
\end{aligned} \tag{II.125}$$

on définit les paramètres comme suit,

$$\theta_l = -\frac{g}{l}, \quad \theta_u = \frac{1}{ml^2}$$

l'équation (II.125), peut être écrite comme,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \theta_l \varphi(x_1) + \theta_u u \\
y &= x_1
\end{aligned} \tag{II.126}$$

où, $\varphi(x_1) = \sin x_1$ est une fonction non linéaire.

L'observateur est défini par :

$$\hat{x} = \zeta(t) + \lambda(t) \cdot \theta_l + v(t) \cdot \theta_u \tag{II.127}$$

tel que, $\zeta \in \mathfrak{R}^2$, $\lambda \in \mathfrak{R}^2$ et $v \in \mathfrak{R}^{2 \times M}$.

Les termes θ_l et θ_u , utilisés dans l'équation (II.127), sont les paramètres réels inconnus qu'on ne peut pas implanter. En réalité, se sont les filtres ζ , λ et v qu'on doit introduire individuellement comme suit :

$$\dot{\zeta}(t) = A\zeta - K\zeta_1 + Ky \tag{II.128}$$

$$\dot{\lambda} = A\lambda - K\lambda_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi(y) \end{bmatrix} \tag{II.129}$$

$$\dot{v} = Av - Kv_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \tag{II.130}$$

où, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$.

Les équations (II.127-130) permettent d'aboutir au résultat suivant :

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\
&= \dot{x} - (\dot{\zeta}(t) + \dot{\lambda}(t)\theta_l + \dot{v}(t)\theta_u) \\
&= \dot{x} - \left((A\zeta - K\zeta_1 + Ky) + \left(A\lambda - K\lambda_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi(y) \end{bmatrix} \right) \theta_l + \left(Av - Kv_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \right) \theta_u \right) \\
&= \dot{x} - \left(A(\zeta + \lambda\theta_l + v\theta_u) + K(y - (\zeta_1 + \lambda_1\theta_l + v_1\theta_u)) + \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi(y) \end{bmatrix} \theta_l + \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \theta_u \right) \\
&= A\varepsilon - K\varepsilon_1
\end{aligned} \tag{II.131}$$

avec, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$ et $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$.

Alors, l'équation (II.131) s'écrit sous la forme :

$$\dot{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_2 - k_1 \varepsilon_1 \\ -k_2 \varepsilon_1 \end{bmatrix} = A_0 \varepsilon \tag{II.132}$$

tel que, $A_0 = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}$, et K est choisi de tel sorte que A_0 soit de Hurwitz (l'équation $s^2 + k_1s + k_2 = 0$ avec solutions à parties réelles négatives).

- **Etape 1**

On a les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} z_1 &= y - y_r \\ z_2 &= v_2 \hat{\theta}_u - \dot{y}_r - \alpha_1 \end{aligned} \quad (\text{II.133})$$

où, α_1 la commande virtuelle définie par la suite.

Sachant que cette premier pas consiste à identifier la commande virtuelle, on choisit $P \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$, $P > 0$ et $P^T = P$ où $PA_0 + A_0^T P = -I$, la première fonction de Lyapunov est définie par :

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2g_l} \tilde{\theta}_l^2 + \frac{1}{2g_u} \tilde{\theta}_u^T \tilde{\theta}_u + \frac{1}{d_1} \varepsilon^T P \varepsilon \quad (\text{II.134})$$

sa dérivée peut s'écrire,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= z_1 \dot{z}_1 + \tilde{\theta}_l \left(-\frac{1}{g_l} \dot{\hat{\theta}}_l \right) + \tilde{\theta}_u^T \left(-\frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) - \frac{1}{d_1} \varepsilon^T \varepsilon \\ &= z_1 (\dot{y} - \dot{y}_r) + \tilde{\theta}_l \left(-\frac{1}{g_l} \dot{\hat{\theta}}_l \right) + \tilde{\theta}_u^T \left(-\frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) - \frac{1}{d_1} \varepsilon^T \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{II.135})$$

on note que,

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 = \hat{x}_2 + \varepsilon_2 = \zeta_2(t) + \lambda_2(t) \theta_l + v_2(t) \theta_u + \varepsilon_2 \quad (\text{II.136})$$

on aura alors,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= z_1 (\zeta_2 + \lambda_2 \theta_l + v_2 \theta_u + \varepsilon_2 - \dot{y}_r) + \tilde{\theta}_l \left(-\frac{1}{g_l} \dot{\hat{\theta}}_l \right) + \tilde{\theta}_u^T \left(-\frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) - \frac{1}{d_1} \varepsilon^T \varepsilon \\ &= z_1 (z_1 + \alpha_1 + \zeta_2 + \lambda_2 \hat{\theta}_l) + z_1 \varepsilon_2 + \tilde{\theta}_l \left(z_1 \lambda_2 - \frac{1}{g_l} \dot{\hat{\theta}}_l \right) + \tilde{\theta}_u^T \left(z_1 v_2^T - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) - \frac{1}{d_1} \varepsilon^T \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{II.137})$$

On définit la première commande virtuelle par l'expression suivante :

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 - d_1 z_1 - (\zeta_2 + \lambda_2 \hat{\theta}_l) \quad (\text{II.138})$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 - d_1 z_1^2 + z_1 \varepsilon_2 + \tilde{\theta}_l \left(z_1 \lambda_2 - \frac{1}{g_l} \dot{\hat{\theta}}_l \right) + \tilde{\theta}_u^T \left(z_1 v_2^T - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) - \frac{1}{d_1} \varepsilon^T \varepsilon \\ &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 - d_1 \left(z_1 - \frac{1}{2d_1} \varepsilon_2 \right)^2 + \frac{1}{4d_1} \varepsilon_2^2 - \frac{1}{d_1} \varepsilon^T \varepsilon + \tilde{\theta}_l \left(z_1 \lambda_2 - \frac{1}{g_l} \dot{\hat{\theta}}_l \right) + \tilde{\theta}_u^T \left(z_1 v_2^T - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) \\ &\leq -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 - \frac{3}{4d_1} \varepsilon^T \varepsilon + \tilde{\theta}_l \left(z_1 \lambda_2 - \frac{1}{g_l} \dot{\hat{\theta}}_l \right) + \tilde{\theta}_u^T \left(z_1 v_2^T - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) \end{aligned} \quad \text{II.139}$$

- **Etape 2**

La fonction de Lyapunov est définie par l'expression suivante :

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{d_2}\varepsilon^T P \varepsilon \quad (\text{II.140})$$

sa dérivée s'écrit :

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + z_2 \dot{z}_2 - \frac{1}{d_1}\varepsilon^T \varepsilon \quad (\text{II.141})$$

en utilisant les définitions $c_1^* = c_1 + d_1$ et $u = \alpha_2 / \hat{\theta}_u$, on peut développer le terme $(z_1 + \dot{z}_2)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (z_1 + \dot{z}_2) &= z_1 + \frac{d(v_2 \hat{\theta}_u - \dot{y}_r - \alpha_1)}{dt} \\ &= \alpha_2 + z_1 - k_2(\zeta_1 + \lambda_1 \hat{\theta}_l + v_1 \hat{\theta}_u) + c_1^*(\zeta_2 + \lambda_2 \hat{\theta}_l + v_2 \hat{\theta}_u) + c_1^*(\lambda_2 \tilde{\theta}_l + v_2 \tilde{\theta}_u) \\ &\quad - c_1^* \dot{y}_r + k_2 y - \ddot{y}_r + c_1^* \varepsilon_2 + \lambda_2 \dot{\hat{\theta}}_l + v_2 \dot{\hat{\theta}}_u + \varphi(y) \hat{\theta}_l \end{aligned} \quad (\text{II.142})$$

On peut définir la commande u en adoptant le choix de α_2 suivant :

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -c_2 z_2 - d_2 (c_1^*)^2 z_2 - \left(z_1 - k_2(\zeta_1 + \lambda_1 \hat{\theta}_l + v_1 \hat{\theta}_u) + c_1^*(\zeta_2 + \lambda_2 \hat{\theta}_l + v_2 \hat{\theta}_u) \right. \\ &\quad \left. - c_1^* \dot{y}_r + k_2 y - \ddot{y}_r + \varphi(y) \hat{\theta}_l + \lambda_2 g_l \tau_l + v_2 g_u \tau_u \right) \end{aligned} \quad (\text{II.143})$$

l'équation (II.142) peut alors s'écrire :

$$(z_1 + \dot{z}_2) = -c_2 z_2 - d_2 (c_1^*)^2 z_2 + c_1^*(\lambda_2 \tilde{\theta}_l + v_2 \tilde{\theta}_u + \varepsilon_2) + \lambda_2 \dot{\hat{\theta}}_l + v_2 \dot{\hat{\theta}}_u - (\lambda_2 g_l \tau_l + v_2 g_u \tau_u) \quad (\text{II.144})$$

alors, on aura,

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - \frac{3}{4d_1} \varepsilon^T \varepsilon - \frac{3}{4d_2} \varepsilon^T \varepsilon - \lambda_2 z_2 g_l \left(\tau_l - \frac{1}{g_l} \dot{\hat{\theta}}_l \right) + \tilde{\theta}_l \left(\tau_l - \frac{1}{g_l} \dot{\hat{\theta}}_l \right) \\ &\quad - v_2 z_2 g_u \left(\tau_u - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) + \tilde{\theta}_u^T \left(\tau_u - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) \\ &\leq -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - \frac{3}{4d_1} \varepsilon^T \varepsilon - \frac{3}{4d_2} \varepsilon^T \varepsilon + (-\lambda_2 z_2 g_l + \tilde{\theta}_l) \left(\tau_l - \frac{1}{g_l} \dot{\hat{\theta}}_l \right) + (-v_2 z_2 g_u + \tilde{\theta}_u^T) \left(\tau_u - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) \end{aligned} \quad (\text{II.145})$$

tel que,

$$\begin{aligned} \tau_l &= (c_1^* z_2 + z_1) \lambda_2 \\ \tau_u &= (c_1^* z_2 + z_1) v_2^T \end{aligned} \quad (\text{II.146})$$

Finalement, la loi de commande est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} u = \frac{\alpha_2}{\hat{\theta}_u} &= \frac{1}{\hat{\theta}_u} \left(-c_2 z_2 - d_2 (c_1^*)^2 z_2 - \left(z_1 - k_2(\zeta_1 + \lambda_1 \hat{\theta}_l + v_1 \hat{\theta}_u) + c_1^*(\zeta_2 + \lambda_2 \hat{\theta}_l + v_2 \hat{\theta}_u) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - c_1^* \dot{y}_r + k_2 y - \ddot{y}_r + \varphi(y) \hat{\theta}_l + \lambda_2 g_l \tau_l + v_2 g_u \tau_u \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.147})$$

Les lois de mise à jour sont définies par :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_l &= g_l \tau_l = g_l (c_1^* z_2 + z_1) \lambda_2 \\ \dot{\hat{\theta}}_u &= g_u \tau_u = g_u (c_1^* z_2 + z_1) v_2^T \end{aligned} \quad (\text{II.148})$$

Enfin, la fonction dérivée de Lyapunov aura l'expression suivante :

$$\dot{V}_2 \leq -\sum_{j=1}^2 c_j z_j^2 - \sum_{i=1}^2 \frac{3}{4d_i} \varepsilon^T \varepsilon \quad (\text{II.149})$$

en se basant sur la fonction de Lyapunov $V = V_2$, on a pu démontrer que $\dot{V} < 0$, $\forall (z, \varepsilon) \neq 0$, ce qui implique une stabilité asymptotique du système et de l'observateur.

II.4.3.2. Simulation et résultats

Pour deux cas de simulation, on prend les paramètres suivants,

$$g = 10, l = 1, m = 10, c_1 = c_2 = 10, d_1 = d_2 = 1$$

$$k_1 = 10, k_2 = 200, g_l = 700, g_u = 11.$$

- **Cas 1. Problème de régulation :** (référence unitaire $y_r = 1$)

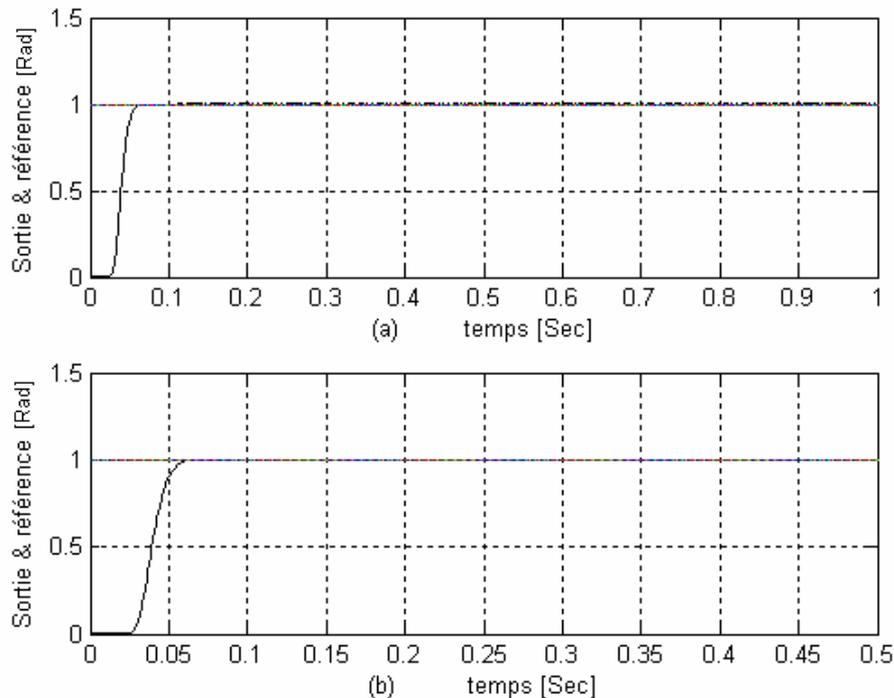


Figure II.20. Sortie $y(t)$ & référence $y_m(t)$.

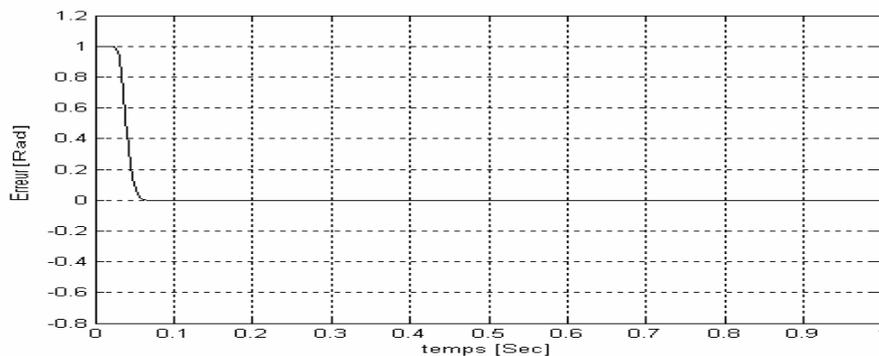


Figure II.21. Erreur $z_I(t)$.

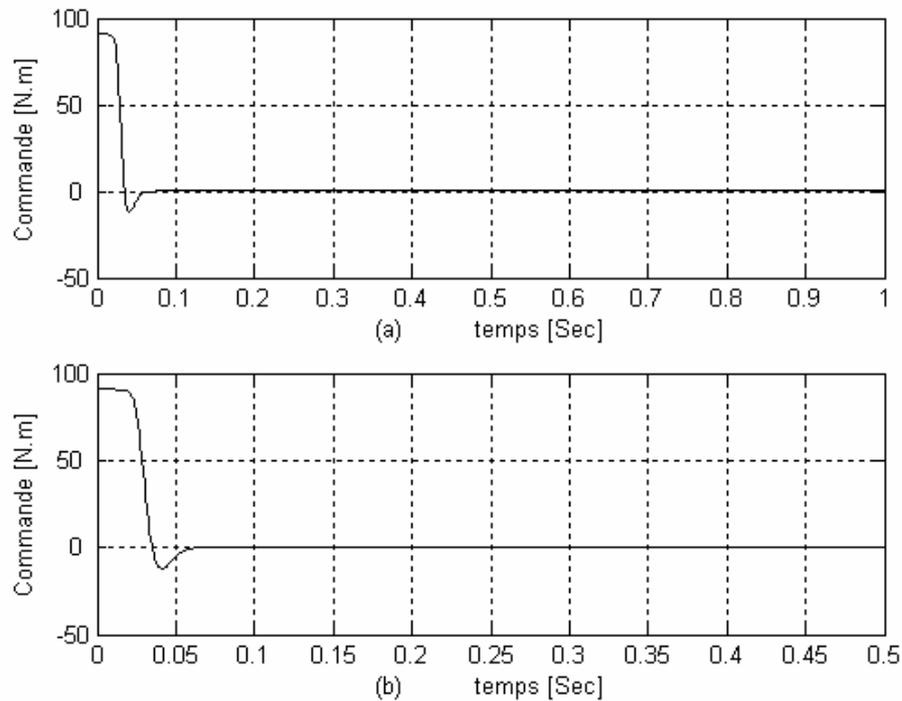


Figure II.22. Commande $u(t)$ du système.

On note que, pour toutes les simulations, le pic initial de la commande est due pour composer les erreurs initiales, et au fait que notre régulateur n'a pas encore approché suffisamment la dynamique du régulateur optimal.

- **Cas 2. Problème de poursuite :** (référence sinusoïdale)

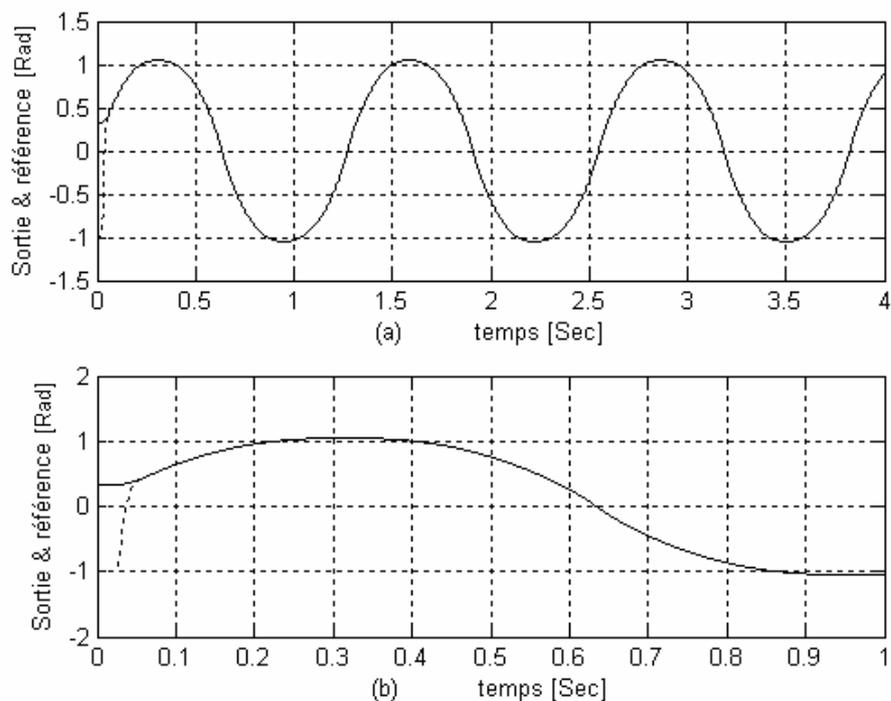
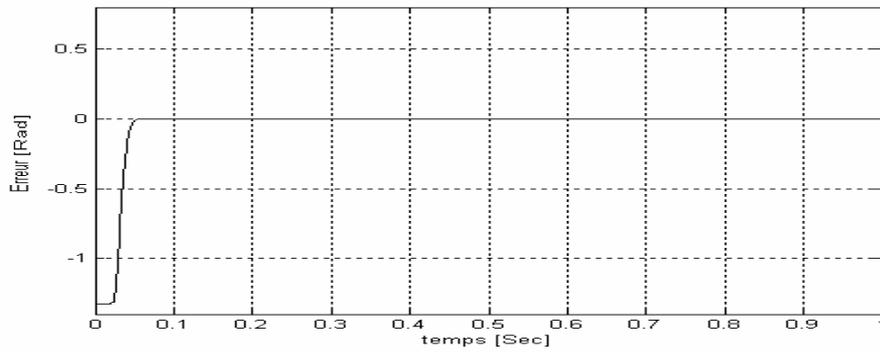
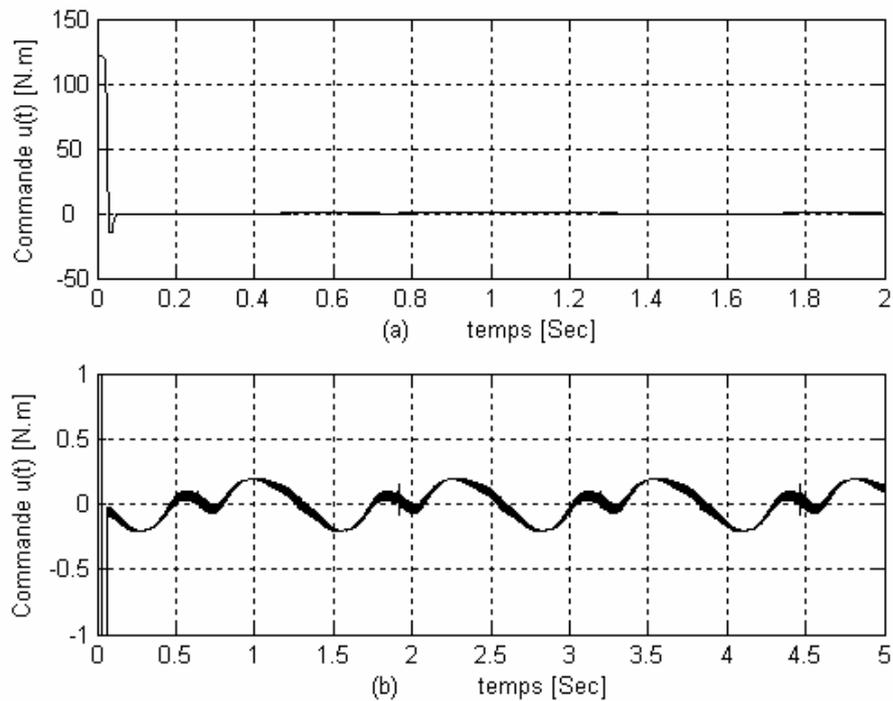


Figure II.23. Sortie $y(t)$ & référence $y_m(t)$.

Figure II.24. Erreur $z1(t)$.Figure II.25. Commande $u(t)$ du système.

Il est apparent que les paramètres convergent très rapidement vers des valeurs moyennement stationnaires. Les oscillations résiduelles (fig.II.25) sont dues d'un côté aux grands pas d'adaptation choisis, et d'autre part à cause de la variation rapide du gain d'entrée.

II.5. Conclusion

Pour conclure, on résume les caractéristiques principales de l'approche développée,

- cette commande étudiée concerne les systèmes non linéaires SISO continus et connus, mais peut être facilement étendue aux systèmes non linéaires MIMO découplés.
- Lorsque les paramètres de ces systèmes sont inconnus, alors la commande adaptative est employée pour résoudre le problème.
- Cette technique de commande présentée repose sur l'utilisation d'un observateur en supposant que les états du système sous forme triangulaire, ne sont pas tous mesurables. Cet observateur permet de réaliser la poursuite ainsi que la régulation d'une manière parfaite.

CHAPITRE 3

COMMANDE ADAPTATIVE FLOUE VIA BACKSTEPPING

CHAPITRE III

COMMANDE ADAPTATIVE FLOUE VIA BACKSTEPPING

CONTENU

I. Sommaire :

III.1. Introduction	64
III.2. Formulation du Problème	64
III.2.1. Suppositions	66
III.2.2. Exemple	66
III.3. Commande à structure variable par retour de sortie via backstepping	67
III.3.1. Proposition 1	69
III.3.2. Proposition 2	70
III.3.3. Proposition 3	70
III.3.4. Théorème 1	72
III.3.5. Exemple de simulation	72
III.3.6. Remarque	73
III.4. Commande à variables structure Adaptative floue	74
III.4.1. Remarque	78
III.4.2. Proposition 4	78
III.4.3. Théorème 2	79
III.4.4. Remarque	79
III.5. Exemple de simulation	79
III.6. Conclusion	81

II. Figures :

Figure III.1. Erreur de poursuite $e_0(t)$	72
Figure III.2. Etat $x_2(t)$ du système	73
Figure III.3. Commande $u(t)$	73
Figure III.4. Base de B-spline de $m^{\text{ème}}$ pour le $m = 0, 1, 2$, et 3	75
Figure III.5. Diagramme de bloc du système boucle fermée avec $\rho \geq 2$	77
Figure III.6. Erreur $e_0(t)$ du système	80
Figure III.7. Commande du système	80

CHAP III. COMMANDE ADAPTATIVE FLOUE VIA BACKSTEPPING

III.1. Introduction

La plupart des travaux récents de recherche affinent dessus les systèmes non linéaires comportent la linéarisation du système, c'est-à-dire annuler de manière adaptative les termes non modelés qui peuvent être linéairement paramétrisables [40]. Pour résoudre les problèmes de commande de linéarisation par retour d'état, les conceptions de backstepping adaptatives ont été développées, [41-42].

Pour faire face aux problèmes de commande par retour de sortie, dans lesquels la non linéarité du système dépend seulement de la sortie, une transformation filtrée et une approche backstepping ont été utilisées pour rapporter la stabilité asymptotique globale ou bien par certains processus de paramétrisation linéaire [36], [43] ou non linéaire [37]. Il s'avère que cette paramétrisation non linéaire caractérise une classe plus générale des systèmes non linéaires.

D'autre part, la commande à structure variable floue peut fournir la stabilité et le lissage en même temps d'une commande floue si elle est formulée sous une forme d'une commande à structure variable [46-47], ou si la commande à structure variable est augmentée avec un certain paramètre de règle plaçant le mécanisme [48-50]. Cependant, une approche systématique d'une conception de commande floue robuste, pour augmenter le lissage.

Dans ce chapitre, une commande à structure variable adaptative floue avec des fonctions d'appartenance lisses utilisant le concept de backstepping est systématiquement développée pour rapporter la performance relative de poursuite améliorée à cela du contrôleur à gain élevé. En basant sur la théorie d'approximation, plusieurs sortes de fonction de base telles que la base sinusoïde, ou la base gaussienne [51-52], sont souvent incorporées à un contrôleur adaptatif. Dans ce cas, on choisit les fonctions lisses de type B-spline comme des fonctions d'appartenance dans la part de l'approximation floue [53].

Etant donné des fonctions d'appartenance de type B-spline, le contrôleur adaptatif flou à structure variable proposé avec une structure consacrée de manière adaptative peut compenser les incertitudes du système, d'une façon lisse et localement pondérée, mais ne pas se transformer en un contrôleur global à gain élevé [38].

III.2. Formulation du Problème

On considère un système non linéaire de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \alpha) + g(x, \alpha)u \\ y &= h(x, \alpha) \end{aligned} \tag{III.1}$$

où $x \in R^n, u \in R, y \in R$ et $\alpha \in \Omega_\alpha$ (Ω_α un ensemble compact) est un vecteur de paramètres inconnu et constant qui caractérise les vecteurs non linéaires des fonctions f, g et le scalaire h , satisfaire $f(0, \alpha) = 0, g(0, \alpha) \neq 0$ et $h(0, \alpha) = 0, \forall \alpha \in \Omega_\alpha$.

Si le système non linéaire décrit en (III.1) peut satisfaire quelques conditions géométriques [36], alors il existe une transformation du même rang $z = T(x)$ tel que ce système peut être transformé en forme de retour de sortie comme suit,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + \Phi(y, \alpha) + b(\alpha)\delta(y)u \\ y &= c^T z \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \Phi(y, \alpha) = \begin{bmatrix} \Phi_1(y, \alpha) \\ \vdots \\ \Phi_n(y, \alpha) \end{bmatrix}, b(\alpha) = \begin{bmatrix} b_1(\alpha) \\ \vdots \\ b_n(\alpha) \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les conditions de coordonnées libres peuvent être synthétisées comme :

Pour tout $\alpha \in \Omega_\alpha$, alors

- $\text{rang}(dh, d(L, h), \dots, d(L_h^{n-1})) = n$;
- $[ad_f^i r, ad_f^j r] = 0, 0 \leq i, j \leq n-1$;
- $[g, ad_f^k r] = 0, 0 \leq k \leq n-2$;
- $g = \sigma(\cdot) \sum_{j=1}^n b_j(\alpha) (-1)^{n-1} ad_f^{n-j} r$;
- Les domaines vectoriels $ad_f^i r, 0 \leq i \leq n-1$ sont complets, où r est le domaine vectoriel satisfaisant,

$$L_r L_f^j h = \begin{cases} 0, & \text{si } j = 0, 1, \dots, n-2 \\ 1, & \text{si } j = n-1 \end{cases}$$

En outre, le système (III.1) est avec un degré relatif ρ , c.-à-d.,

$$L_g L_f^i h(x, \alpha) = 0, \quad 0 \leq i \leq \rho-2, \quad \forall x \in R^n, \quad \forall \alpha \in \Omega_\alpha$$

$$L_g L_f^{\rho-1} h(x, \alpha) \neq 0, \quad \forall \alpha \in \Omega_\alpha$$

Alors, notre but de commande est de forcer la sortie y à suivre une trajectoire désirée y_m , construite par le modèle de référence suivant:

$$\begin{cases} \dot{z}_m = A_c z_m + b_m r_m \\ y_m = c^T z_m \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

où,

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

A_c c'est une matrice stable, $b_m = [0, \dots, b_{m\rho}, \dots, b_{mn}]^T$ et $r_m \in L_\infty$ est une entrée de référence bornée, or $y_m = W_m(s).r_m$ avec $W_m(s) = \frac{b_{m\rho}s^{n-\rho} + \dots + b_{mn}}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n}$ de sorte que $y \in L_\infty$.

Pour rendre le problème du modèle de poursuite plus clair, on fait des suppositions suivantes :

III.2.1. Suppositions

- $b = [b_1, \dots, b_n]^T$ est un vecteur des coefficients de Hurwitz de degré ρ , c'est-à-dire le polynôme associé $b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \dots + b_n$ est de degré $n - \rho$ ($b_1 \neq 0$ si $\rho = 1$ or $b_1 = \dots = b_{\rho-1} = 0, b_\rho \neq 0$, si $\rho > 1$).
- le signe de $b_\rho(\alpha)$ est connu et constant pour tout $\alpha \in \Omega_\alpha$, $1 \leq \rho \leq n$.
- $\Phi(y, \alpha)$ peut être développée en série de Taylor en y pour n'importe quel $\alpha \in \Omega_\alpha$,

$$\text{c'est-à-dire, } \Phi(y, \alpha) = \Phi(y_0, \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} \frac{\partial^{(n)} \Phi}{\partial y^n} \Big|_{y=y_0} (y - y_0)^n \right]$$

- $\|\Phi(y, \alpha) - \Phi(y_0, \alpha)\| \leq l_\Phi (y - y_0, y_0, \alpha) |y - y_0|$, pour certains $l_\Phi (y - y_0, y_0, \alpha) \geq 0$.

Etant donné un tel problème de poursuite, la forme (III.2) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az - ay + ay + \Phi(y, \alpha) + b(\alpha)\delta u \\ &= A_c z + ay + \Phi(y, \alpha) + b(\alpha)\delta u \\ y &= c^T z \end{aligned} \quad (III.4)$$

où $a = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ et $W(s)$ définie comme suit :

$$W(s) = c^T (sI - A_c) b = \frac{b_\rho s^{n-\rho} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (III.5)$$

$W(s)$ est une fonction de transfert stable. On définit le vecteur d'erreur $e = z_m - z$, alors le modèle d'erreur peut être dérivé comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_c e - ay - \Phi + b_m r_m - b\delta(y)u \\ e_0 &= y_m - y = c^T e \end{aligned} \quad (III.6)$$

III.2.2. Exemple

On considère le système [44] comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1^\alpha, \\ \dot{x}_2 &= u, \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Ce système à un degré relatif $\rho = 2$ qui correspond au système non linéaire (III.2). Le modèle de référence désiré est donné comme $y_m(t) = (1/(s^2 + 2s + 1))r_m(t)$ et $r_m(t)$ est une entrée unitaire ($r_m(t) = 1$). Un filtre stable (III.7) est donné comme $1/(s + 1)$, et on peut tirer le modèle d'erreur basé sur le backstepping comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \xi_1 + e_0 - (y_m - e_0)^\alpha - 2y_m - \eta_1 \\ \dot{\eta}_1 &= -\eta_1 + u\end{aligned}$$

III.3. Commande à structure variable par retour de sortie via backstepping

Considérons le cas du degré relatif $\rho > 1$ (le cas de $\rho = 1$ peut être intuitivement dérivé), et un filtre stable :

$$W_f^{-1}(s) = \frac{1}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)\dots(s + \lambda_{\rho-1})}, \lambda_i > 0 \quad (\text{III.7})$$

On caractérise le rapport entrée-sortie $\eta_1 = W_f^{-1}(s)\delta(y)u$, qui est réalisé dans la forme de l'espace d'état comme suit :

$$\dot{\eta} = A_{f\eta} + b_f \delta(y)u, \eta \in R^{\rho-1} \quad (\text{III.8})$$

où

$$A_f = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_{\rho-1} \end{bmatrix}, \quad b_f = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\eta = [\eta_1, \dots, \eta_{\rho-1}]$, et $\eta(0) = \eta_0$. Puis, on augmente le modèle d'erreur (III.6) avec le filtre (III.8) comme suit :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_c & 0 \\ 0 & A_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b(\alpha) \\ b_f \end{bmatrix} \delta(y)u + \begin{bmatrix} -ay - \Phi(y, \alpha) + b_m r_m \\ 0 \end{bmatrix} \\ e_0 &= c^T e\end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

qui est équivalent la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A_c \xi - ay - \Phi(y, \alpha) + b_m r_m - d(\alpha)\eta_1 \\ e_0 &= c^T \xi\end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

où $d = [d_1, d_2, \dots, d_n]$ est un vecteur des coefficients de Hirwitz avec degré 1, obtenu de la fonction de transfert,

$$\begin{aligned}W(s)W_f(s) &= \frac{b_\rho s^{n-\rho} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} (s + \lambda_1)(s + \lambda_2)\dots(s + \lambda_{\rho-1}) \\ &= \frac{d_1 s^{n-1} + \dots + d_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}\end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Apparemment, $d_1 = b_\rho$. Après l'application de la transformation développée par [37], on définit un nouveau vecteur $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}]^T$ comme suit :

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_2 - \frac{d_2(\alpha)}{d_1(\alpha)} e_0 \\ &\vdots \\ \xi_{n-1} &= \xi_n - \frac{d_n(\alpha)}{d_1(\alpha)} e_0\end{aligned}\tag{III.12}$$

Par conséquent, on peut obtenir un modèle dynamique différent comme suit:

$$\begin{aligned}\xi &= \begin{bmatrix} -\frac{d_2}{d_1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{d_3}{d_1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{d_{n-1}}{d_1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{d_n}{d_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} \frac{d_3}{d_1} - \frac{d_2^2}{d_1^2} \\ \frac{d_4}{d_1} - \frac{d_3 d_2}{d_1^2} \\ \vdots \\ \frac{d_n}{d_1} - \frac{d_{n-1} d_2}{d_1^2} \\ -\frac{d_n d_2}{d_1^2} \end{bmatrix} e_0 + \begin{bmatrix} \frac{d_2}{d_1} \Phi_1(y, \alpha) - \Phi_2(y, \alpha) \\ \frac{d_3}{d_1} \Phi_1(y, \alpha) - \Phi_3(y, \alpha) \\ \vdots \\ \frac{d_{n-1}}{d_1} \Phi_1(y, \alpha) - \Phi_{n-1}(y, \alpha) \\ \frac{d_n}{d_1} \Phi_1(y, \alpha) - \Phi_n(y, \alpha) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{d_2}{d_1} a_1 y_m - a_2 y_m \\ \frac{d_\rho}{d_1} a_1 y_m - (a_\rho y_m - b_{m\rho} r_m) \\ \vdots \\ \frac{d_{n-1}}{d_1} a_1 y_m - (a_{n-1} y_m - b_{m(n-1)} r_m) \\ \frac{d_n}{d_1} a_1 y_m - (a_n y_m - b_{mn} r_m) \end{bmatrix} \\ &= \Gamma \xi + \beta e_0 + \Psi(y, \alpha) + \Psi_r(y_m, r_m)\end{aligned}\tag{III.13}$$

où Γ est une matrice stable. Par les suppositions précédentes (point 4), il peut être vérifié que,

$$\|\Psi(y, \alpha) - \Psi(y_m, \alpha)\| \leq l_\Phi(e_0, y_m, \alpha) |e_0|\tag{III.14}$$

pour certains $l_\Phi(e_0, y_m, \alpha) \geq 0$.

D'autre part, de la transformation (III.12) et de l'équation (III.10), le modèle d'erreur de sortie peut être exprimé comme suit :

$$\dot{e}_0 = \xi_1 + \frac{d_2(\alpha)}{d_1(\alpha)} e_0 - \phi(e_0, y_m, \alpha) - a_1 y_m - d_1 \eta_1\tag{III.15}$$

$$\text{où} \quad \phi(e_0, y_m, \alpha) = \Phi_1(y_m - e_0, \alpha) = \Phi_1(y, \alpha) \quad (\text{III.16})$$

Il est bien connu que l'application de la conception de contrôleur basée sur la procédure de backstepping peut résoudre le problème de commande avec le model d'erreur en (III.15) [37].

Les concepts de la commande de backstepping ont conçu le contrôleur désiré de premier état désiré du filtre, η_1^* , qui peut garantir que l'erreur de poursuite de sortie e_0 donnée dans l'équation (III.15) peut approcher zéro, et concevoir alors le contrôleur indiqué du deuxième état désiré du filtre, η_2^* , qui peut réaliser η_1 comme η_1^* soumis à l'équation :

$$\dot{\eta}_1 = -\lambda_1 \eta_1 + \eta_2 \quad (\text{III.17})$$

D'une manière similaire, la conception de contrôleur par backstepping au contrôleur d'entrée de commande $\delta(y)u = \eta_\rho^*$ de sorte que $\eta_{\rho-1}$ puisse s'approcher à $\eta_{\rho-1}^*$.

Maintenant, on conçoit un contrôleur à structure variable η_1^* comme suivant :

$$\eta_1^* = \text{sgn}(d_1)k_{11}(t)e_0 + \text{sgn}(d_1)k_{12}(t)\text{sgn}(e_0) \quad (\text{III.18})$$

avec les fonctions lisses $k_{11}(t)$ et $k_{12}(t)$ satisfaisant les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} k_{11}(t) &\geq \frac{1}{|d_1|} \left(\left| \frac{d_2}{d_1} \right| + \frac{((1/2) + \|P\|(\|\beta\| + l_\phi))^2}{q_0} + \rho \varepsilon_1 \right) \\ k_{12}(t) &\geq \frac{1}{|d_1|} (\|\hat{\xi}\| + |\phi| + |a_1| |y_m|) \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

où q_0 et ε_1 sont des constants positifs, P est une matrice positive définie, et $\|\hat{\xi}\|$ est construit par l'équation dynamique suivante :

$$\dot{\hat{\xi}} = \Gamma \hat{\xi} + \Psi(y_m, \alpha) + \Psi_r(y_m, r_m) \quad (\text{III.20})$$

avec les conditions initiales $\hat{\xi}(0) = \hat{\xi}_0$.

Apparemment, le système (III.20) est BIBO stable, puisque $\Psi(y_m, \alpha)$ et $\Psi_r(y_m, r_m)$ sont limitées pour y_m, α et r_m sont bornées, pour le résultat $\hat{\xi} \in L_\infty^{n-1}$.

Cette loi de commande sera montrée efficace au problème de commande de poursuite via la proposition suivante.

III.3.1. Proposition 1

Si $\eta_1 = \eta_1^*$ comme donné dans l'équation (III.18), alors l'erreur de poursuite de sortie du système (III.6) convergera à zéro globalement et exponentiellement [77].

Pour réaliser la loi de commande (III.18), la fonction de commutation $\text{sgn}(e_0)$ rendra η_1^* discontinue à $e_0 = 0$. Ce fait rend souvent que η_1^* est non réalisable quand il vient pour concevoir le contrôleur suivant η_2^* .

Pour résoudre ce problème, il est raide pour modifier le contrôleur précédent en mettant un compensateur lisse pour une gamme de zone morte spécifiée, telle que un compensateur de type saturation ou un compensateur de type hyper-tangente. Alors, ce contrôleur peut être exprimé comme suit :

$$\eta_1^\diamond = \text{sgn}(d_1)k_1 = \begin{cases} \text{sgn}(d_1)[k_{11}(t)e_0 + k_{12}(t)\text{sgn}(e_0)], & \text{si } e_0 \notin [-\Delta_e, \Delta_e] \\ k_{s1}(e_0, \alpha, \Delta_e), & \text{Autrement} \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

où $k_{s1}(\cdot)$ est une fonction lisse pour rendre η_1^\diamond lisse, et $[-\Delta_e, \Delta_e]$ est une gamme de zone morte désignée qui peut être arbitrairement placée. Alors, la proposition suivante est valide.

III.3.2. Proposition 2

Si la loi de commande $\eta_1 = \eta_1^\diamond$ est donnée en (III.21), alors l'erreur de poursuite du système (III.6) sera conduite à la gamme de zone morte $[-\Delta_e, \Delta_e]$ globalement et exponentiellement [77].

Cependant, en construit η_1 est conduit par η_2 selon l'équation d'ordre 1 en (III.17), et par conséquent, on définit la différence entre l'état de filtre lisse désiré η_1^\diamond et l'état de filtre réel η_1 comme $\tilde{\eta}_1 = \eta_1^\diamond - \eta_1$, de sorte que sa dérivée de temps puisse être tirée de (III.17) comme suit :

$$\dot{\tilde{\eta}}_1 = \dot{\eta}_1^\diamond - \dot{\eta}_1 = \frac{\partial \eta_1^\diamond}{\partial e_0} \dot{e}_0 - \lambda_1 \tilde{\eta}_1 + \lambda_1 \eta_1^\diamond - \eta_2 \quad (\text{III.22})$$

En conséquence, le but de la loi de commande η_2 est de forcer η_1 pour réaliser η_1^\diamond et, par conséquent, on dérive la commande à structure variable η_2^* comme suit :

$$\eta_2^* = \lambda_1 \eta_1^\diamond + k_{21}(t)\tilde{\eta}_1 + k_{22}(t)\text{sgn}(\tilde{\eta}_1) \quad (\text{III.23})$$

où $k_{21}(\cdot)$ et $k_{22}(\cdot)$ des fonctions lisses satisfaisant les conditions suivantes :

$$k_{21}(t) \geq \left| d_{11} \left| \frac{\partial \eta_1^\diamond}{\partial e_0} \right| + \frac{(d_1 + \frac{d_2}{d_1} \frac{\partial \eta_1^\diamond}{\partial e_0})^2}{4\varepsilon_1} + \frac{1}{4\varepsilon_2} \left(\frac{\partial \eta_1^\diamond}{\partial e_0} \right)^2 \right. \quad (\text{III.24})$$

$$k_{22}(t) \geq \left| \frac{\partial \eta_1^\diamond}{\partial e_0} \right| (\|\hat{\xi}\| + |\phi| + |a_1| |y_m| + |d_1| |\eta_1^\diamond| + \left| \frac{d_2}{d_1} \right| \Delta_e)$$

de sorte que la proposition suivante soit valide.

III.3.3. Proposition 3

Si $\eta_2 = \eta_2^*$ est donnée en (III.23), alors l'erreur de poursuite du système (III.6) convergera à la gamme de la zone morte $[-\Delta_e, \Delta_e]$ globalement et exponentiellement [77].

Cependant, le contrôleur donné en (III.23) fait face encore au problème avec la discontinuité de sorte que, semblable à (III.21), on remplace le contrôleur (III.23) avec un compensateur lisse d'une gamme de zone morte $[-\Delta_{\eta_1}, \Delta_{\eta_1}]$ comme suit :

$$\eta_2^\diamond = \lambda_1 \eta_1^\diamond + k_2(e_0, \tilde{\eta}_1, \alpha, \Delta_e, \Delta_{\eta_1}) \quad (\text{III.25})$$

où

$$k_2 = \begin{cases} k_{21}(t)\tilde{\eta}_1 + k_{22}(t)\text{sgn}(\tilde{\eta}_1), & \tilde{\eta}_1 \notin [-\Delta_{\eta_1}, \Delta_{\eta_1}] \\ k_{s_2}(e_0, \tilde{\eta}_1, \alpha, \Delta_e, \Delta_{\eta_1}), & \text{Autrement.} \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

avec $k_{s_2}(\cdot)$ étant une fonction lisse pour rendre η_2^\diamond lisse.

Du même coup, la conception de contrôleur par backstepping à l'équation contenant l'entrée de la commande réelle est donnée comme suit :

$$\dot{\eta}_{\rho-1} = -\lambda_{\rho-1}\eta_{\rho-1} + \delta(y)u \quad (\text{III.27})$$

Cependant, malheureusement, le contrôleur ci-dessus peut réaliser son contrôleur indiqué seulement jusqu'aux les gammes de zone morte correspondantes. (e.g., le contrôleur η_2^\diamond donné en (III.25) peut réaliser η_1^\diamond donné en (III.21) seulement jusqu'à la gamme de zone morte $[-\Delta_{\eta_1}, \Delta_{\eta_1}]$).

Ce fait résulte parce que l'ancienne proposition n'est plus valable. Ainsi, on exige des compensateurs complémentaires pour compenser les gammes de zone morte en arrière, rapportant l'ensemble suivant les contrôleurs indiqués (les états désirés de filtre) :

$$\begin{aligned} \eta_1^\diamond &= \text{sgn}(d_1)(k_1 + k_{\delta_1} e_0) \\ \eta_1^\diamond &= \lambda_1 \eta_1^\diamond + k_2 + k_{\delta_2} \tilde{\eta}_1 \\ &\vdots \\ \eta_{\rho-1}^\diamond &= \lambda_{\rho-2} \eta_{\rho-2}^\diamond + k_{\rho-1} + k_{\delta_{\rho-1}} \\ \delta(y)u &= \eta_\rho^\diamond = \lambda_{\rho-1} \eta_{\rho-1}^\diamond + k_\rho \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

où $k_1(\cdot), \dots, k_\rho(\cdot)$ et $k_{\rho_1}(\cdot), \dots, k_{\delta_{\rho-1}}(\cdot)$ sont les compensateurs désignés qui sont définis plus tard. Les erreurs de poursuite sont définies comme $\tilde{\eta}_2 = \eta_2^\diamond - \eta_2, \dots, \tilde{\eta}_{\rho-1} = \eta_{\rho-1}^\diamond - \eta_{\rho-1}$ correspondant aux les gammes de zone morte $[-\Delta_{\eta_2}, \Delta_{\eta_2}], \dots, [-\Delta_{\eta_{\rho-1}}, \Delta_{\eta_{\rho-1}}]$, respectivement, et

$$\tilde{\eta}_{j\Delta} = \begin{cases} \tilde{\eta}_j, & \text{comme } \tilde{\eta}_j < -\Delta_{\eta_j} \text{ or } \tilde{\eta}_j > \Delta_{\eta_j}; \\ 0, & \text{Autrement (c-à-d } \tilde{\eta}_j \in [-\Delta_{\eta_j}, \Delta_{\eta_j}]); \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

de sorte que

$$\dot{\tilde{\eta}}_{j\Delta} = \dot{\tilde{\eta}}_j \text{ pour } \tilde{\eta}_{j\Delta} \neq 0$$

pour $j = 1, \dots, \rho - 1$

Alors, les théorèmes suivants sont valables.

III.3.4. Théorème 1

Si la loi de commande $\delta(y).u = \eta_\rho^\diamond$ est donnée comme (III.28), alors l'état de système en (III.4) est assuré pour être borné et l'erreur de poursuite du système (III.6) convergera à la gamme de zone morte $[-\Delta_e, \Delta_e]$ globalement et exponentiellement [77].

III.3.5. Exemple de simulation

Dans cet exemple, on simule le contrôleur (III.28) sur le système présenté dans l'exemple montré en section 2, on donne $\alpha = 2$. La simulation est faite pour les conditions initiales $x(0) = [0.5, 0]$ par Matlab et la loi de commande peut être facilement tirée de (III.19), (III.24) et (III.28) en mettant,

$$\Delta_e = \Delta_{\eta_1} = 0.1, \varepsilon_1 = 0.5, \varepsilon_2 = 0.5, P = 1, q_0 = 1, \|\tilde{\xi}\| \leq 2, \|\beta\| = 1$$

$$l_\phi \leq e_0^2 + (1/4) + 2, \gamma_1 = 10, \gamma_2 = 5, \text{ comme suit :}$$

$$\eta_1^\diamond = (e_0^2 + 6 \cdot \frac{1}{4})e_0 + (6 + 2e_0^2) \frac{\tanh(\gamma_1 e_0)}{\tanh(\gamma_1 \Delta_e)},$$

$$u = \eta_1^\diamond + \left[\frac{\partial \eta_1^\diamond}{\partial e_0} + \frac{(1 + \partial \eta_1^\diamond / \partial e_0)^2}{2} + 2 \left(\frac{\partial \eta_1^\diamond}{\partial e_0} \right)^2 \right] \tilde{\eta}_1 + \frac{\partial \eta_1^\diamond}{\partial e_0} \left[7 + 2e_0^2 + \Delta_e + \left(\frac{\eta_1^\diamond}{2} \right)^2 \right] \frac{\tanh(\gamma_2 \tilde{\eta}_1)}{\tanh(\gamma_2 \Delta_{\eta_1})}$$

où,

$$\frac{\partial \eta_1^\diamond}{\partial e_0} = 3e_0^2 + 6 \cdot \frac{1}{4} + 4e_0 \frac{\tanh(\gamma_1 e_0)}{\tanh(\gamma_1 \Delta_e)} + \frac{(6 + 2e_0^2)}{\tanh(\gamma_1 \Delta_e)} \frac{4\gamma_1}{(e^{\gamma_1 e_0} + e^{-\gamma_1 e_0})^2} > 0$$

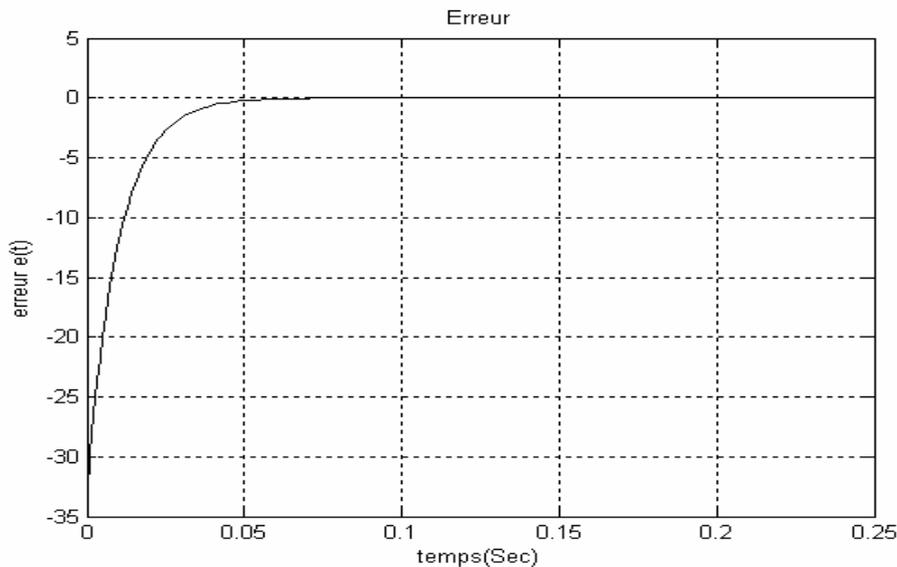


Figure III.1. Erreur de poursuite $e_0(t)$.

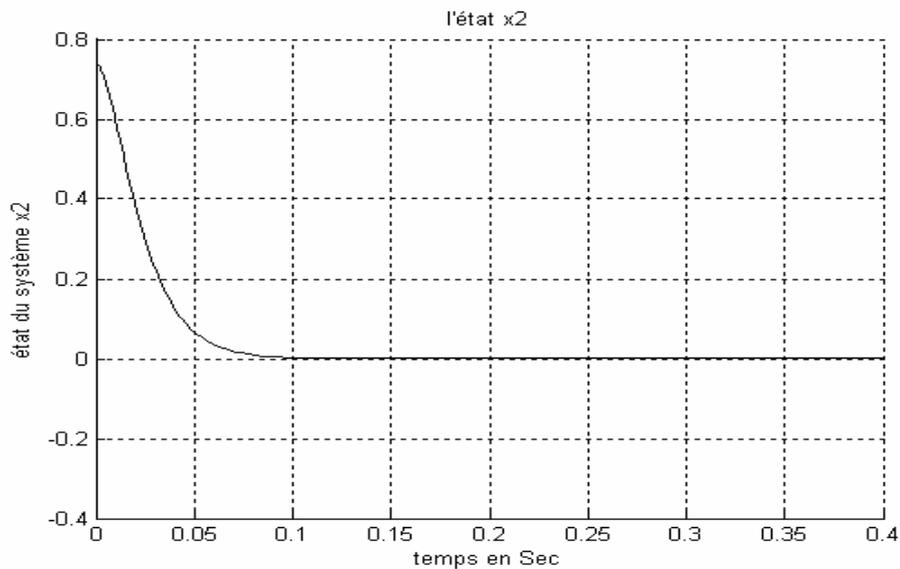


Figure III.2. Etat du système $x_2(t)$.

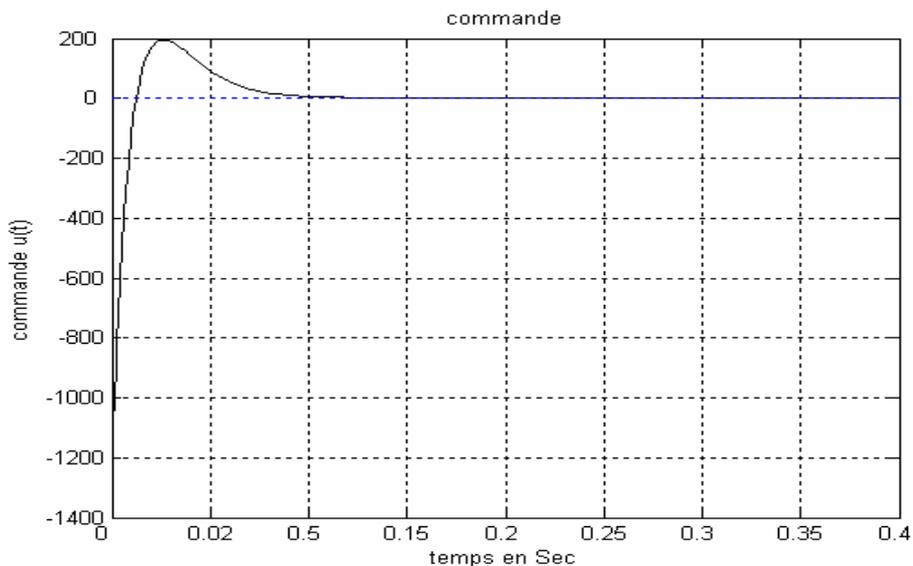


Figure III.3. Commande $u(t)$.

La fig. (III.1) illustre que l'erreur de poursuite ne peut pas seulement converger dans la gamme de zone morte mais s'approcher aussi du zéro. La fig. (III.2) présente que l'état du système x_2 est borné. La fig. (III.3) représente l'entrée de la commande finale u , qui est lisse.

III.3.6. Remarque

Tandis que les contrôleurs donnés ne sont pas lisses, alors les contrôleurs de conception suivants seront renforcés avec un gain élevé puisque ces contrôleurs contiennent des termes différentiels, par exemple, $(\partial \eta_1^\diamond / \partial e_0), (\partial \eta_2^\diamond / \partial e_0), \dots, (\partial \eta_{\rho-1}^\diamond / \partial \tilde{\eta}_{\rho-2})$ [38].

En outre, il est difficile de réaliser ces contrôleurs en considérant les incertitudes du système sous commande. Dans la section suivante, on proposera une commande adaptative floue à structure variable pour résoudre le problème mentionné ci-dessus.

III.4. Commande adaptative floue à structure variable

Considérons le vecteur d'entrée du contrôleur flou $u_f = [u_{f_1}, u_{f_2}, \dots, u_{f_\rho}]^T$, consistant de commandes floues (MISO) de ρ multi-entrée simple-sortie, qui sont respectivement caractérisés par :

$$\begin{aligned} \eta_{f_1} &\triangleq u_{f_1}(w_1) : \Omega_{w_1} \rightarrow \mathfrak{R} \\ \eta_{f_2} &\triangleq u_{f_2}(w_1, w_2) : \Omega_{w_1} \times \Omega_{w_2} \rightarrow \mathfrak{R} \\ &\vdots \\ \eta_{f_i} &\triangleq u_{f_i}(w_1, \dots, w_i) : \Omega_{w_1} \times \Omega_{w_2} \times \dots \times \Omega_{w_i} \rightarrow \mathfrak{R} \\ &\vdots \\ \eta_{f_\rho} &\triangleq u_{f_\rho}(w_1, \dots, w_\rho) : \Omega_{w_1} \times \Omega_{w_2} \times \dots \times \Omega_{w_\rho} \rightarrow \mathfrak{R} \end{aligned}$$

où $u_{f_i}(w_1, \dots, w_i)$ est $i^{\text{ème}}$ contrôleur flou, (w_1, \dots, w_ρ) sont définies comme des variables d'entrée floues,

$$w = [w_1, \dots, w_\rho]^T = [e_0, \tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_{\rho-1}]^T \quad (\text{III.30})$$

et, $\Omega_{w_1} \equiv [-\Upsilon\Delta_1, \Upsilon\Delta_1]$, $\Omega_{w_2} \equiv [-\Upsilon\Delta_2, \Upsilon\Delta_2]$, \dots , $\Omega_{w_\rho} \equiv [-\Upsilon\Delta_\rho, \Upsilon\Delta_\rho]$, avec Υ étant un nombre entier positif arbitrairement grand, et $\Delta_1, \dots, \Delta_\rho$ étant quelques nombres réel positifs.

Dans ce cas, chacune des fonctions d'appartenance est donnée comme une fonction centrale de B-spline de dimension multiple $m^{\text{ème}}$ ordre ($m > 2$) (voir fig. III.4), la $j^{\text{ème}}$ dimension est définie comme suit :

$$N_{mj}(x) = \sum_{k=0}^{m+1} \frac{(-1)^k}{m!} \binom{m+1}{k} \left[(x + (\frac{m+1}{2} - k)\Delta_j)_+ \right]^m \quad (\text{III.31})$$

où on utilise la notation :

$$x_+ := \max(0, x) \quad (\text{III.32})$$

Le type de B-spline de $m^{\text{ème}}$ ordre de fonction d'appartenance a les propriétés suivantes :

- une fonction de $(m-1)^{\text{ème}}$ ordre continue et différentiable, c'est-à-dire $N_{mj}(x) \in C^{m-1}$;
- support compact local, c'est-à-dire $N_{mj} \neq 0$ seulement pour,

$$x \in \left[-\frac{m+1}{2}\Delta_j, \frac{m+1}{2}\Delta_j \right].$$

- $N_{mj}(x) > 0$ pour $x \in \left[-\frac{m+1}{2}\Delta_j, \frac{m+1}{2}\Delta_j \right]$.
- symétrique en ce qui concerne le point de centre (point nul).
- $\sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{i_j=-\infty}^{\infty} N_{m_1}(x - i_1\Delta_1) \dots N_{m_j}(x - i_j\Delta_j) = 1, \forall x \in \mathfrak{R}, j \in L^+$

qui est basé sur la définition de support compact local, la propriété ci-dessus peut être réécrite comme :

$$\sum_{i_1 \in I_{c_1}(x)} \dots \sum_{i_j \in I_{c_j}(x)} N_{m_1}(x - i_1 \Delta_1) \dots N_{m_j}(x - i_j \Delta_j) = 1, \quad \forall x \in \mathfrak{R}, j \in L^+$$

où $I_{c_j}(x)$ est un ensemble d'intégral, défini comme :

$$I_{c_j}(x) \equiv \left\{ i : \frac{x}{\Delta_j} - \frac{m+1}{2} < i < \frac{x}{\Delta_j} + \frac{m+1}{2}, i \in L, j \in L^+ \right\}$$

Alors les fonctions d'appartenance pour la $j^{\text{ème}}$ variable floue w_j sont définies comme suit :

$$\mu_{ij}(w_j) = N_{m_j}(w_j - i\Delta_j), \quad i = -Y, \dots, 0, \dots, Y \quad (\text{III.33})$$

dont le support compact est donné comme,

$$\Omega_{w_{ji}} = \left[\left(i - \frac{m+1}{2} \right) \Delta_j, \left(i + \frac{m+1}{2} \right) \Delta_j \right], \quad i = -Y, \dots, 0, \dots, Y \quad (\text{III.34})$$

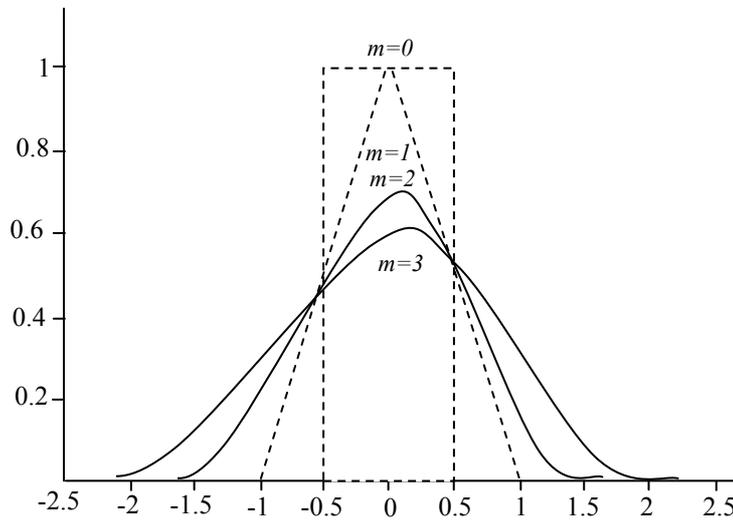


Figure III.4. B-spline d'ordre m ($m = 0, 1, 2,$ et 3)

Pour $j = 1, \dots, \rho$ qui signifie que $w_j \in \text{int}(\Omega_{w_{ji}})$ implique que $\mu_{ji}(w_j) > 0$. Apparemment, on peut obtenir $\Omega_{w_j} \equiv \bigcup_{i \in \{-Y, \dots, Y\}} \Omega_{w_{ji}} \equiv [-Y\Delta_j, Y\Delta_j]$. En outre, il est possible que $\Omega_{w_{ji}} \cap \Omega_{w_{jk}} \neq \emptyset$, pour un certain $i \neq k$, c.-à-d., w_j peut simultanément tomber dans plusieurs supports compacts. Il est intéressant de noter que l'indexe marquant ces rapports peuvent être réexprimés comme :

$$\begin{aligned} I_{c_j}(w_j) &\equiv \left\{ i : w_j \in \text{int}(\Omega_{w_{ji}}), i \in L, -Y \leq i \leq Y \right\} \\ &\equiv \left\{ i : \Omega_{w_{ji}} \subset \Omega_{c_j}(w_j) \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

où $\Omega_{c_j}(w_j)$ est un ensemble union de ceux supports compacts, définie comme :

$$\Omega_{c_j}(w_j) \equiv \bigcup_{i \in I_{c_j}(w_j)} \Omega_{w_{j_i}} \quad (\text{III.36})$$

Ce qui signifie que $i \in I_{c_j}(w_j)$ si et seulement si $w_j \in \Omega_{c_j}(w_j)$.

Comme une représentation générale du contrôleur flou (MISO) avec défuzzification par centre de gravité, d'inférence avec l'opérateur produit, et fuzzification par singleton [52], on peut représenter les contrôleurs flous ci-dessus comme :

$$\begin{aligned} u_{f_1} &= \frac{\sum_{i_1=-Y}^Y \mu_{1_{i_1}}(w_1) \theta_{i_1}}{\sum_{i_1=-Y}^Y \mu_{1_{i_1}}(w_1)} = \sum_{i_1=-Y}^Y v_{i_1}(w_1) \theta_{i_1} = \sum_{i_1 \in I_{c_1}(w_1)} v_{i_1}(w_1) \theta_{i_1} = \theta^{(1)T} v^{(1)}, \\ &\vdots \\ u_{f_1} &= \frac{\sum_{i_1=-Y}^Y \dots \sum_{i_k=-Y}^Y \mu_{1_{i_1}}(w_1) \theta_{i_1} \dots \mu_{k_{i_k}}(w_k) \theta_{i_1 i_2 \dots i_k}}{\sum_{i_1=-Y}^Y \dots \sum_{i_k=-Y}^Y \mu_{1_{i_1}}(w_1) \dots \mu_{k_{i_k}}(w_k)} \\ &= \sum_{i_1=-Y}^Y \dots \sum_{i_k=-Y}^Y v_{i_1 \dots i_k}(w_1, \dots, w_k) \theta_{i_1 \dots i_k} \\ &= \sum_{i_1 \in I_{c_1}(w_1)} \dots \sum_{i_k \in I_{c_k}(w_k)} v_{i_1 \dots i_k}(w_1, \dots, w_k) \theta_{i_1 \dots i_k} = \theta^{(k)T} v^{(k)}, \\ &\vdots \\ u_{f_\rho} &= \frac{\sum_{i_1=-Y}^Y \dots \sum_{i_\rho=-Y}^Y \mu_{1_{i_1}}(w_1) \theta_{i_1} \dots \mu_{\rho_{i_\rho}}(w_\rho) \theta_{i_1 i_2 \dots i_\rho}}{\sum_{i_1=-Y}^Y \dots \sum_{i_\rho=-Y}^Y \mu_{1_{i_1}}(w_1) \dots \mu_{\rho_{i_\rho}}(w_\rho)} \\ &= \sum_{i_1=-Y}^Y \dots \sum_{i_\rho=-Y}^Y v_{i_1 \dots i_\rho}(w_1, \dots, w_\rho) \theta_{i_1 \dots i_\rho} \quad (\text{III.37}) \\ &= \sum_{i_1 \in I_{c_1}(w_1)} \dots \sum_{i_\rho \in I_{c_\rho}(w_\rho)} v_{i_1 \dots i_\rho}(w_1, \dots, w_\rho) \theta_{i_1 \dots i_\rho} = \theta^{(\rho)T} v^{(\rho)}, \end{aligned}$$

où $i_1, \dots, i_k, \dots, i_\rho$ sont des indices entiers, $v_{i_1 \dots i_k}(w_1, \dots, w_k)$ est la fonction floue de base du $k^{\text{ième}}$ contrôleur flou lié aux indices i_1, \dots, i_k , définis comme suit :

$$\begin{aligned} v_{i_1 \dots i_k}(w_1, \dots, w_k) &= \frac{\mu_{1_{i_1}}(w_1) \dots \mu_{k_{i_k}}(w_k)}{\sum_{i_1=-Y}^Y \dots \sum_{i_k=-Y}^Y \mu_{1_{i_1}}(w_1) \dots \mu_{k_{i_k}}(w_k)} \\ &= \frac{\mu_{1_{i_1}}(w_1) \dots \mu_{k_{i_k}}(w_k)}{\sum_{i_1 \in I_{c_1}(w_1)} \dots \sum_{i_k \in I_{c_k}(w_k)} \mu_{1_{i_1}}(w_1) \dots \mu_{k_{i_k}}(w_k)} \end{aligned}$$

$\theta_{i_1 \dots i_k}$ est le paramètre du $k^{\text{ème}}$ contrôleur flou associés aux indices $i_1 \dots i_k$, $v^{(k)}$ et $\theta^{(k)}$ sont les vecteurs composant $v_{i_1 \dots i_k}$ et $\theta_{i_1 \dots i_k}$ pour $i_1 = -Y, \dots, Y, \dots, i_k = -Y, \dots, Y$, respectivement.

Le diagramme de bloc du système global en boucle fermée est représenté dans la fig. (III.5). En outre, on réalise la loi de commande à structure variable adaptative floue comme une commande intégrée comprenant l'ancien vecteur de commande floue u_f et un vecteur de

commande de supervision $\bar{\eta} = [\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_\rho]^T$ comme suit :

$$\begin{aligned}
 &\text{if } w_1 \in \Omega_{w_1}, \text{ then } \eta_1^\diamond = \text{sgn}(d_1)(u_{f_1} + k_{f_1} w_1); \text{ Autrement } \eta_1^\diamond = \bar{\eta}_1, \\
 &\text{if } w_2 \in \Omega_{w_2}, \text{ then } \eta_2^\diamond = \lambda_1 \eta_1^\diamond + u_{f_2} + k_{f_2} w_2; \text{ Autrement } \eta_2^\diamond = \bar{\eta}_2, \\
 &\vdots \\
 &\text{if } w_{\rho-1} \in \Omega_{w_{\rho-1}}, \text{ then } \eta_{\rho-1}^\diamond = \lambda_{\rho-2} \eta_{\rho-2}^\diamond + u_{f_{\rho-1}} + k_{f_{\rho-1}} w_{\rho-1}; \text{ Autrement } \eta_{\rho-1}^\diamond = \bar{\eta}_{\rho-1}, \\
 &\text{if } w_\rho \in \Omega_{w_\rho}, \text{ then } \eta_\rho^\diamond = \lambda_{\rho-1} \eta_{\rho-1}^\diamond + u_{f_\rho} + k_{f_\rho} w_\rho; \text{ Autrement } \eta_\rho^\diamond = \bar{\eta}_\rho,
 \end{aligned} \tag{III.38}$$

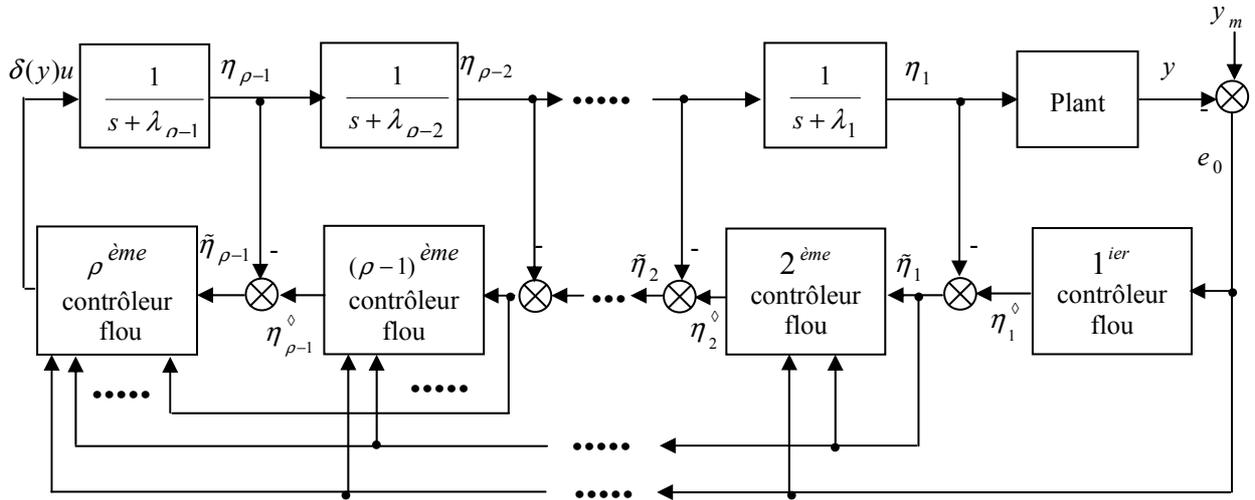


Figure III.5. Diagramme de bloc du système boucle fermée avec $\rho \geq 2$.

où $k_{f_1}, \dots, k_{f_\rho}$ sont des constantes positives, et

$$\begin{aligned}
 \bar{\eta}_1 &= \text{sgn}(d_1) \bar{k}_1(t), \\
 \bar{\eta}_2 &= \lambda_1 \eta_1^\diamond + \bar{k}_2(t), \\
 &\vdots \\
 \bar{\eta}_\rho &= \lambda_{\rho-1} \eta_{\rho-1}^\diamond + \bar{k}_\rho(t),
 \end{aligned} \tag{III.39}$$

où $\text{sgn}(\bar{k}_j) = \text{sgn}(w_j)$ et $|\bar{k}_j(t)| \geq |k_j(t) + k_{\delta_j}(t) w_j|$ pour $j = 1, \dots, \rho$, avec $k_j(t)$ et $k_{\delta_j}(t)$ étant définis dans (III.21) et (III.26).

III.4.1. Remarque

Le compensateur de supervision $\tilde{\eta}$ doit assurer que si le $j^{\text{ème}}$ variable floue d'entrée $w_j \notin \Omega_{w_j}$, la commande intégrée peut conduire w_j dans l'ensemble compact Ω_{w_j} , et, alternativement, le $j^{\text{ème}}$ contrôleur flou u_{f_j} peut être appliqué pour amener w_j plus loin dans la gamme de zone morte spécifiée $[-\Delta_{w_j}, \Delta_{w_j}]$ avec $w_j \in \Omega_{w_j}$.

Apparemment, $\tilde{\eta}$ est un compensateur à gain élevé, et à la place on peut placer les ensembles compacts Ω_{w_j} pour être suffisamment grands pour éviter d'appliquer $\tilde{\eta}$. Une telle stratégie veut cependant le résultat dans une différence qui crée des règles floues plus.

Les gammes de zone morte sont définies pendant que les supports compacts des fonctions d'appartenance $\mu_{\gamma}(w_1), \dots, \mu_{\rho}(w_{\rho})$, à savoir,

$$\begin{aligned} \Omega_{w_{10}} &\equiv \left[-\frac{m+1}{2}\Delta_1, \frac{m+1}{2}\Delta_1 \right] \equiv [-\Delta_{w_1}, \Delta_{w_1}] \equiv [-\Delta_e, \Delta_e], \\ &\vdots \\ \Omega_{w_{\rho 0}} &\equiv \left[-\frac{m+1}{2}\Delta_{\rho}, \frac{m+1}{2}\Delta_{\rho} \right] \equiv [-\Delta_{w_{\rho}}, \Delta_{w_{\rho}}] \equiv [-\Delta_{\eta_{\rho-1}}, \Delta_{\eta_{\rho-1}}] \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

Alors, la proposition suivante peut être établie.

III.4.2. Proposition 4

Si la loi de commande $\delta(y)u = \eta_{\rho}^{\diamond}$ est donnée comme dans les équations (III.37), (III.38) et (III.39), alors existent là une classe du vecteur de contrôleur flou u_f donné en (III.37) qui peut conduire l'erreur de poursuite du système (III.6), w_1 (i.e., e_0), dans la gamme de zone morte $[-\Delta_{w_j}, \Delta_{w_j}]$ globalement et exponentiellement [77].

Maintenant, on définit le vecteur de paramètres optimal pour le $j^{\text{ème}}$ contrôleur flou comme suit :

$$\theta^{(j)*} = \arg \min \left\{ \begin{aligned} &\sup_{w_1 \in \Omega_{w_1}, \dots, w_{j-1} \in \Omega_{w_{j-1}}, w_{i_j} \in \Omega_{w_{i_j}} \setminus \Omega_{w_{j_0}}} \sum_{i_1=-\Upsilon}^{\Upsilon} \dots \sum_{i_{j-1}=-\Upsilon}^{\Upsilon} \sum_{i_j=-\Upsilon}^{\Upsilon} \\ &v_{i_1 \dots i_j} \theta_{i_1 \dots i_j} \operatorname{sgn}(w_j) \geq |k_j(t) + k_{\delta_j}(t)w_j| \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.41})$$

Il est, cependant, que $\theta^{(j)*}$ ne peut pas être disponible facilement dû à la complexité de $k_j(t)$ et de $k_{\delta_j}(t)$, $j = 1, \dots, \rho$. Par conséquent, la loi adaptative suivante pour mettre à jour le vecteur de paramètres $\theta^{(j)}$ sera nécessaire de sorte que l'erreur de poursuite puisse être converger à la gamme de zone morte :

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}^{(1)} &= \begin{cases} rd_1 v^{(1)}(w_1)w_{1\Delta} & \text{Pour } w_1 \in \Omega_{w_1} \\ 0 & \text{Autrement,} \end{cases} \\
\dot{\theta}^{(2)} &= \begin{cases} rv^{(2)}(w_1, w_2)w_{2\Delta} & \text{Pour } w_1 \in \Omega_{w_1}, w_2 \in \Omega_{w_2} \\ 0 & \text{Autrement,} \end{cases} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\dot{\theta}^{(\rho)} &= \begin{cases} rv^{(\rho)}(w_1, \dots, w_\rho)w_{\rho\Delta} & \text{Pour } w_1 \in \Omega_{w_1}, \dots, w_\rho \in \Omega_{w_\rho} \\ 0 & \text{Autrement,} \end{cases}
\end{aligned} \tag{III.42}$$

où $w_{1\Delta} = e_{0\Delta}$, $w_{2\Delta} = \eta_{1\Delta}$, ..., $w_{\rho\Delta} = \eta_{\rho-1\Delta}$ sont définies en (III.33). En se basant sur la loi de commande en (III.37)-(III.39), et la loi adaptative (III.42), le système peut être montré pour réaliser la convergence appropriée de l'erreur de sortie. Ceci est résumé et prouvé par le théorème suivant.

III.4.3. Théorème 2

Si la loi de commande à structure variable adaptative floue est donnée par (III.37)-(III.39) avec la loi adaptative (III.38), alors l'erreur de poursuite de sortie du système (III.6) sera conduite à la gamme de zone morte $\left[-\Delta_{w_1}, \Delta_{w_1}\right]$ globalement et asymptotiquement [77].

III.4.4. Remarque

Le contrôleur flou (III.37) avec les lois adaptatives (III.42), possède les avantages suivants :

- *Contrôleur flou localement estimé* : Seulement des règles supportées par l'ensemble compact Ω_{c_j} sont exigées pour être mises à jour, et par conséquent, ces règles sont localement pondérées.
- *Contrôleur flou lisse* : Apparemment, le contrôleur flou (III.37) peut se comporter pendant qu'un contrôleur plus lisse fournissait les termes différentiels $(\partial u_{f_1} / \partial w_1), (\partial u_{f_2} / \partial w_2), \dots, (\partial u_{f_\rho} / \partial w_\rho)$ peut être rendu petit, qui alors exige que des fonctions d'appartenance plus lisses soient adoptées. Ainsi, les contrôleurs à gain élevé avec la procédure de backstepping peuvent être évités, si on peut choisir les fonctions d'appartenance lisses de type B-spline d'ordre supérieur.

III.5. Exemple de simulation

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^\alpha, \\ \dot{x}_2 = u, \\ y = x_1 \end{cases} \tag{III.43}$$

Dans cet exemple, $\alpha = 2$ est assumée être inconnue. Le système a un degré relatif $\rho = 2$, un filtre stable (III.7) est donné comme $1/(s+1)$, La trajectoire de référence est donné comme $y_m(t) = (1/(s^2 + 2s + 1))r_m(t)$ et $r_m(t)$ est une entrée unitaire, i.e., $r_m(t) = 1$.

La commande à structure variable adaptative floue développée est appliquée au système décrit en (III.43), et les résultats de simulations pour cette commande et l'erreur sont illustrés dans les fig. (III.6 et III.7).

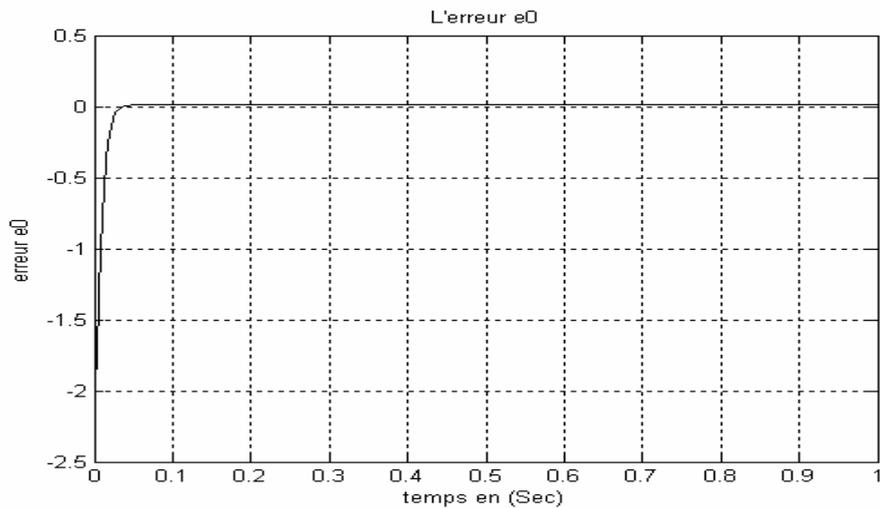


Figure III.6. Erreur de poursuite $e_0(t)$.

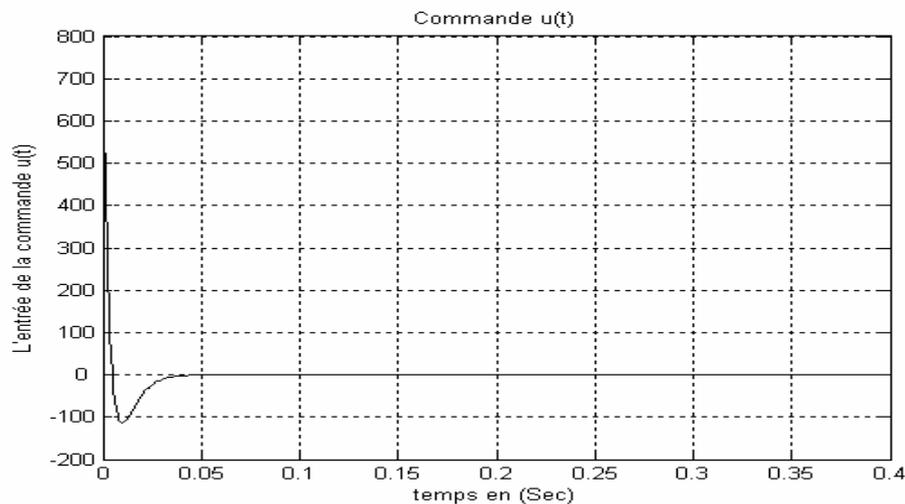


Figure III.7. Commande $u(t)$.

Le contrôleur flou est synthétisé comme suit : le premier contrôleur flou pour l'état de filtre désiré η_1 prend l'erreur de poursuite e_0 comme une simple variable d'entrée, tandis que le deuxième contrôleur flou prend l'erreur de poursuite e_0 et la sortie du premier contrôleur flou comme deux variables d'entrées (w_1, w_2) .

Le nombre de règles floues de premier contrôleur flou est égal à $2Y+1=11$, et celui du deuxième contrôleur flou égal à $11 \times 11 = 121$. D'ailleurs, $k_{f_1} = k_{f_2} = 10$ est assigné.

La fig. (III.6) prouve que les erreurs de poursuite peuvent converger dans la gamme de zone morte. Apparemment, seulement une moitié des paramètres de règles floues avait été mise à jour depuis e_0 reste presque dans la région $e_0 < 0$ pendant la course de la tâche. La fig. (III.7) représente la commande du système qui est lisse.

III.6. Conclusion

Dans ce chapitre, on a étudié une nouvelle commande à structure variable adaptative floue par l'intermédiaire de backstepping pour une classe des systèmes SISO non linéaires, qui peuvent résoudre le problème de commande adaptative à modèle de référence classique en présence des incertitudes du système.

On a montré que la stabilité globale du système est assurée et l'erreur de poursuite peut converger à la gamme de zone morte indiquée. En outre, avec les vibrations indésirables aux lois de commande à gain élevé peuvent être évitées en raison de l'adoption des fonctions d'appartenance lisses de type B-spline. Les dispositifs saillants du travail actuel inclut que les règles impliquées sont localement pondérées et la commande de sortie est plutôt lisse.

CHAPITRE 4

COMMANDE PAR BACKSTEPPING UTILISANT LE MODE GLISSANT

CHAPITRE IV

COMMANDE PAR **B**ACKSTEPPING UTILISANT LE **M**ODE **G**LISSANT.

CONTENU

I. Sommaire

IV.1. Introduction	82
IV.2. Systèmes à structure variable	82
IV.2.1. Systèmes à structure variable aux régimes glissants	82
IV.2.2. Représentation des systèmes à structure variable	83
IV.2.2.1. Commutation par retour d'état variable	83
IV.2.2.2. Commutation de type relais	83
IV.3. Commande par mode glissant	84
IV.3.1. Formalisation classique du régime glissant	84
IV.3.2. Théorème de Philippov	85
IV.3.3. Technique de commande par mode glissant	85
IV.3.4. Application à la commande d'un pendule inversé	86
IV.3.4.2. Surface de glissement	87
IV.3.4.3. Dérivée de la surface	87
IV.3.4.5. Condition de glissement par Lyapunov	87
IV.3.4.6. Simulation et résultats	88
IV.4. Commande par mode glissant d'ordre supérieur	90
IV.4.1. Mode glissant d'ordre supérieur (HOSM)	90
IV.4.2. Mode glissant d'ordre deux (2-sliding)	90
IV.5. Conception de backstepping avec mode glissant du deuxième ordre	92
IV.5.1. Formulation du problème	92
IV.5.1.1. Procédure de conception de backstepping	93
IV.5.1.2. Transformation d'états modifiée	94
IV.6. Loi globale de commande par mode glissant d'ordre deux	96
IV.7. Simulation et résultats	99
IV.8. Conclusion	100

II. Figures :

Figure IV.1. Système à structure variable dans l'espace.	82
Figure IV.2. Configuration de la structure à commutation par retour d'état variable.	83
Figure IV.3. Configuration de la structure par commutation au niveau de commande	83
Figure IV.4. Evolution de la trajectoire d'état autour de la surface	84
Figure IV.5. Régime glissant.	86
Figure IV.6. Pendule inversé	86
Figure IV.7. Sortie $y(t)$ & référence $y_m(t)$.	88
Figure IV.8. Erreur $e(t)$.	89
Figure IV.9. Surface $s(t)$.	89
Figure IV.10. Commande $u(t)$ du système.	89
Figure IV.11. Portrait de phase.	91
Figure IV.12. Trajectoire de z_1 par la procédure proposée	100

CHAP IV. COMMANDE PAR BACKSTEPPING UTILISANT LE MODE GLISSANT

IV.1. Introduction

Une procédure récursive de backstepping pour la conception des contrôleurs basés sur l'estimation des systèmes non linéaires incertains est présentée dans cette étude.

Sa motivation se fonde sur l'intention de réduire le volume des calculs de la conception de backstepping en exploitant la simplicité de la commande par mode glissant.

La stabilité du système sous commande est globale via l'approche proposée. Cette approche montre la modularité, dans le sens qu'on s'avère que le contrôleur garantit la stabilité de l'entrée à l'état indépendamment du choix du mécanisme d'évaluation de paramètres.

IV.2. Systèmes à structure variable

Un système à structure variable peut être considéré comme une combinaison de sous systèmes où chacun a une structure de commande fixe et valide pour des régions spécifiées résultant du comportement du système, caractérisé par un ensemble ou une suite de lois de commande par retour ou bien réaction (Feedback) et de règles de décision, appelées fonctions de commutation.

Un des avantages de l'introduction de cette complexité additionnelle dans le système est la capacité de combiner les propriétés utiles de chacune de ses structures composites. De plus, le système peut être conçu pour posséder de nouvelles propriétés qu'aucune des structures prises séparément ne possède. L'utilisation de ces idées naturelles a vu le jour en Union Soviétique vers la fin des années cinquante.

IV.2.1. Systèmes à structure variable aux régimes glissants

La théorie des systèmes à structure variable datant du début du 20^{ème} siècle a pris son essor dans les années 60 (Emelyanov [54]) et à cause de la structure du contrôleur utilisé qui peut changé d'une façon discontinue entre deux ou plusieurs structures, c'est le cas par exemple des circuits de conversion de puissance ou le système est gouverné par une équation différentielle différente pour chaque position de l'interrupteur [55].

La théorie des systèmes à structure variable et les modes glissants associés à fait l'objet d'études détaillées au cours des trente dernières années aussi bien par les chercheurs soviétiques que par les chercheurs d'autres pays, ce n'est que durant le premier congrès de l'IFAC en 1960 que la détermination du comportement dynamique du système commandé sur la surface de commutation a été considérée [56].

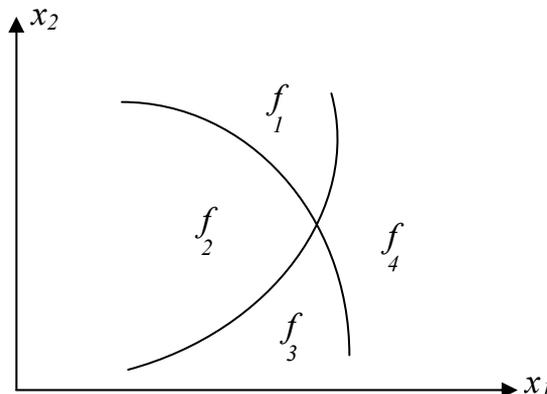


Fig IV.1. Système à structure variable dans l'espace.

IV.2.2. Représentation des systèmes à structure variable

On peut distinguer deux configurations de base pour les systèmes à structure variable présentées dans ce qui suit :

IV.2.2.1. Commutation par retour d'état variable

Le changement de la structure se fait lors de la commutation de la commande u l'organe de commande reçoit dans ce cas une tension de commande u_{cm} qui commute rapidement entre deux valeurs variables u_{cm1} et u_{cm2} ce qui peut provoquer de fortes sollicitations de l'organe de commande donc une réalisation pratique impossible.

La représentation de cette configuration est donnée par la figure suivante :

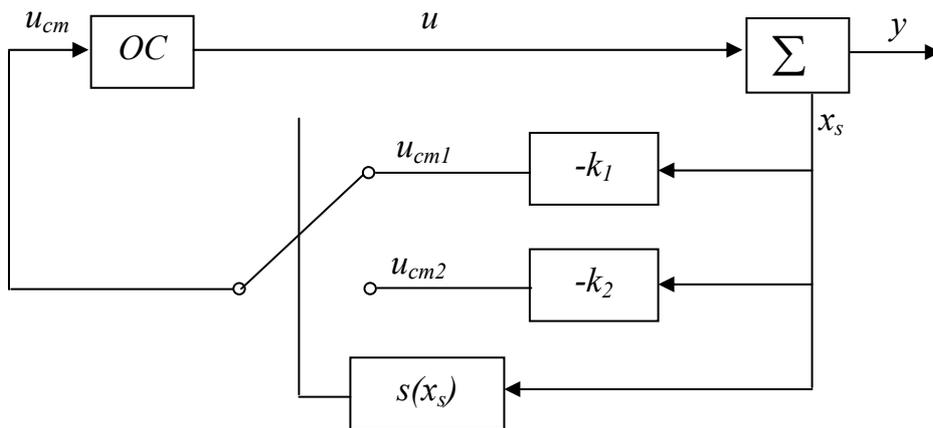


Fig IV.2. Configuration de la structure à commutation par retour d'état variable.

Le système fonctionne alors en mode de glissement et le comportement dynamique du système est déterminé par la condition $s(x_s) = 0$.

$$\begin{cases} U_{cm} = U_{cm1} = -k_1 x_s & \text{pour } x_s > 0 \\ U_{cm} = U_{cm2} = -k_2 x_s & \text{pour } x_s < 0 \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

où, $s(x_s)$ représente la loi de commutation.

IV.2.2.2. Commutation de type relais

Le changement de la structure se fait par commutation au niveau de l'organe de commande conformément à la figure représentée ci-dessous.

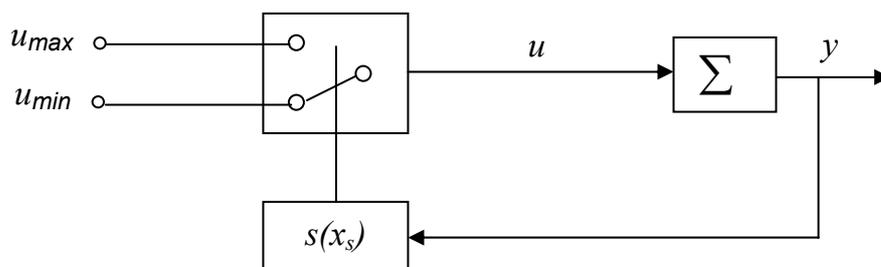


Fig IV.3. Configuration de la structure par commutation au niveau de l'organe de commande

Dans ce cas l'organe de commande est conçu de sorte que la grandeur de commande commute entre deux valeurs constantes u_{\max} et u_{\min} selon le signe de la fonction $s(x_s)$. La logique de commutation est donnée par :

$$\begin{cases} U = U_{\max} & \text{pour } s(x_s) > 0 \\ U = U_{\min} & \text{pour } s(x_s) < 0 \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

IV.2.3. Remarque

Sous certaines conditions, la commutation se fait à une fréquence très élevée. Le système est alors déterminé par la condition :

$$s(x_s) = 0 \quad (\text{IV.3})$$

IV.3. Commande par mode glissant

Les processus physiques sont le plus souvent non linéaires, mal définis et ont des paramètres variables. Par exemple, dans le cas des robots les équations dynamiques sont non linéaires, couplées, et les paramètres intervenant dans leur description dépendent de la charge. D'autre part, un modèle mathématique n'est rien d'autre qu'une représentation approximative de la réalité physique et cependant on ne se repose que de ce modèle pour construire une loi de commande.

La commande par mode glissant permet de répondre à ce problème cette robustesse se fera au déterminant des performances. De plus, la surface de glissement définie dans le formalisme réduit l'ordre de système en boucle fermée, ce qui ne permet pas dans certains cas, d'imposer au système un mode de stabilisation.

IV.3.1. Formalisation classique du régime glissant

Soit un système d'équations différentielles présentant des discontinuités sur le second membre.

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (\text{IV.4})$$

$x = (x_1, \dots, x_n)^T$ vecteur d'état .

$f = (f_1, \dots, f_n)^T$ Les fonctions définies dans G

Soit la surface définie comme suit :

$$s(x_s) = 0 \quad (\text{IV.5})$$

Séparant le domaine de définition G du système (IV.4) en deux parties $G^+(s > 0)$ et $G^-(s < 0)$ sur laquelle s'effectuent les discontinuités (fig. IV.4).

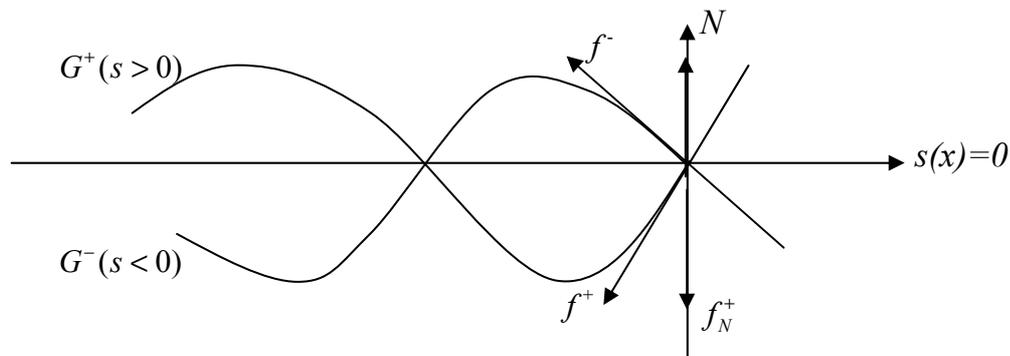


Fig. IV.4. Evolution de la trajectoire d'état autour de la surface

où,

N la normale à la surface.

f^+, f^- les valeurs de f au voisinage de s .

f_N^+, f_N^- les projections respectives de f^+, f^- sur la normale.

IV.3.2. Théorème de Philippov

Le théorème de Philippov permet la démonstration de l'existence du régime glissant sur la surface s [57].

Soit le système (IV.4) satisfaisant la condition suivante :

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq k \quad \text{avec} \quad \begin{cases} i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n \end{cases} \quad \forall t \in G = (G^+ \cup G^-) \quad (\text{IV.6})$$

où, k est une constante positive indépendante de t et de x .

si pour tout point de s (deux fois différentiable), l'une des inégalités $f_N^+ < 0$ ou $f_N^- > 0$ est vérifiée tel que $h = f^+ - f^-$ soit continûment différentiable, alors le système (IV.4) possède une solution.

La dérivée par rapport au temps de la surface $s(x_1, \dots, x_n) = 0$, conduit sur la normale.

$$\dot{s} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (\text{IV.7})$$

Selon le signe de $s(x)$, on déduit :

$$\begin{cases} f_N^+ < 0 \Rightarrow s > 0 \text{ et } \dot{s} < 0 \\ f_N^- > 0 \Rightarrow s < 0 \text{ et } \dot{s} > 0 \end{cases} \quad (\text{IV.8})$$

D'où la condition pour l'obtention du régime glissant :

$$f_N^+ < 0 \text{ et } f_N^- > 0 \Leftrightarrow s\dot{s} < 0 \quad (\text{IV.9})$$

La condition de glissement est traduite par (IV.9) qui est l'inégalité fondamentale utilisée pour résoudre le problème de la synthèse de la commande des systèmes à structure variable.

IV.3.3. Technique de commande par mode glissant

La commande par régime glissant consiste à garantir qu'un système dynamique d'ordre n peut être amené vers l'origine à partir de la stabilisation d'un nouveau système d'ordre 1 ; une seule variable s va définir le nouveau système au lieu de stabiliser de manière explicite les n variables qui constituent le système original, le problème est réduit à la stabilisation de s qui est une fonction des variables des systèmes elle est couramment appelée variable de glissement [58].

Plus précisément cette technique repose sur les deux étapes décrites ci-dessous :

- On définit d'abord une fonction $s = 0$ appelée surface de glissement, cette variable est déterminée de telle sorte que lorsque le point représentatif des systèmes l'atteint, sa dynamique le fait converger vers zéro.
- Ensuite, on impose une dynamique sur s afin de garantir que le système va effectivement atteindre la surface de glissement à l'aide de la condition d'attraction (IV.9).

La façon de définir s permet de déduire la commande à partir de la dynamique imposée.

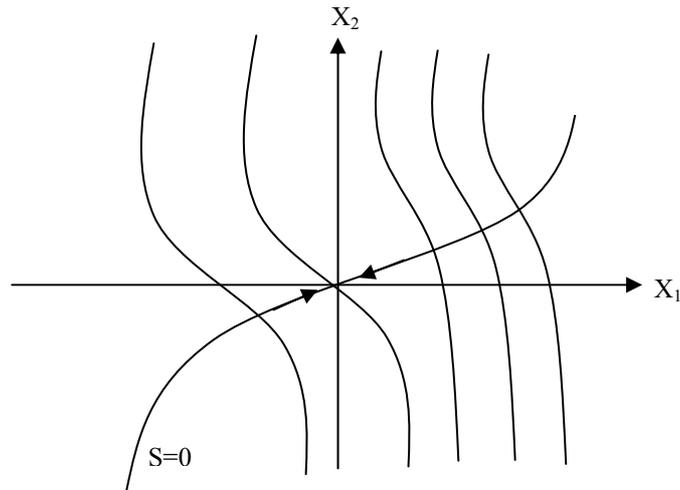


Fig. IV.5. Régime glissant.

IV.3.4. Application à la commande d'un pendule inversé

Dans cette partie, on utilise notre contrôleur pour commander un pendule inversé dans le but de suivre un signal de référence sinusoïdal.

IV.3.4.1. Description

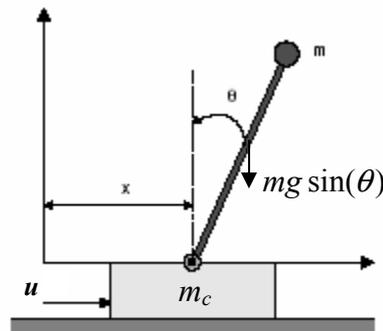


Fig. IV.6. Pendule inversé.

L'équation dynamique du pendule inversé est donnée comme suit [58]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin(x_1) - \frac{mlx_2^2 \cos(x_1) \sin(x_1)}{m_c + m}}{l\left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2(x_1)}{m_c + m}\right)} + \frac{\cos(x_1)}{m_c + m} u \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

où,

$y = x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$, $X = [x_1 \ x_2]^T$ est le vecteur d'état tel que $x_1 = y$ et $x_2 = \dot{y}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$
 m_c : la masse du chariot.
 m : la masse de poutre.
 $2l$: le longueur de la poutre.
 y : la sortie du système.

Le passage à l'espace des phases de l'erreur donne :

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= 2e_2 - e_1 + u - y_d + 2\dot{y}_d - \ddot{y}_d \\ e_1 &= y - y_d \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

où $e = [e_1 \ e_2]^T$ est le vecteur de l'erreur.
 y_d est la trajectoire de référence que doit suivre la sortie.

IV.3.4.2. Surface de glissement

La commande à structure variable permet d'amener l'état du système dans l'espace de l'erreur sur une surface de glissement d'équation [58]:

$$s(t) = e_2 + \lambda e_1 \quad (\lambda > 0) \quad (\text{IV.12})$$

Où :

λ : Constante appelée coefficient de la surface de glissement.

IV.3.4.3. Dérivée de la surface

La dérivée de la surface en (IV.12) est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \lambda e_2 + \dot{e}_2 \\ &= (\lambda + 2)e_2 - e_1 + u - (\ddot{y}_d - 2\dot{y}_d + y_d) \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

IV.3.4.5. Condition de glissement par Lyapunov

La commande u doit être conçue pour rendre la surface $s = 0$ attractive en un temps fini, pour cela elle doit donc satisfaire la condition de glissement, on considère alors l'expression de la fonction de Lyapunov :

$$V = \frac{1}{2} s^2 \quad (\text{IV.14})$$

La dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\dot{V} = s\dot{s}, \quad \forall s \neq 0 \quad (\text{IV.15})$$

comme le système est de degré relatif 1 ($\frac{\partial \dot{s}}{\partial u} \neq 0$) avec s comme sortie, on prend :

$$\dot{s} = -k \cdot \text{sign}(s) \quad (\text{IV.16})$$

où, k est une constante positive.

Cette équation garantit la convergence vers la surface de glissement en un temps fini, ceci résulte du fait que \dot{V} est définie négative.

En développant les deux membres de l'équation (IV.16) on obtient :

$$\begin{aligned} -k.sign(s) &= (\lambda + 2)e_2 - e_1 + u - (\ddot{y}_d - 2\dot{y}_d + y_d) \\ \text{et} \quad u &= e_1 - (\lambda + 2)e_2 + (\ddot{y}_d - 2\dot{y}_d + y_d) - k.sign(s) \end{aligned} \quad (IV.17)$$

• **Remarque**

La condition de glissement donne seulement l'ordre de grandeur des coefficients λ et k , leurs valeurs ont été déterminées par simulation numérique en tenant compte des critères suivants :

- rapidité de la réponse sans dépassement important.
- réduction de l'amplitude des oscillations du régime glissant.
- réduction de l'erreur statique.

IV.3.4.6. Simulation et résultats

Les résultats de simulation de l'exemple précédent sous Matlab sont illustrés par les figures (IV.7-IV.10), en partant des conditions initiales $x_0 = (p/6, p/3)^T$, vers la position d'équilibre $x = (0, 0)^T$ en attribuant les valeurs $k = 7$ et $l = 3$ aux paramètres de la commande.

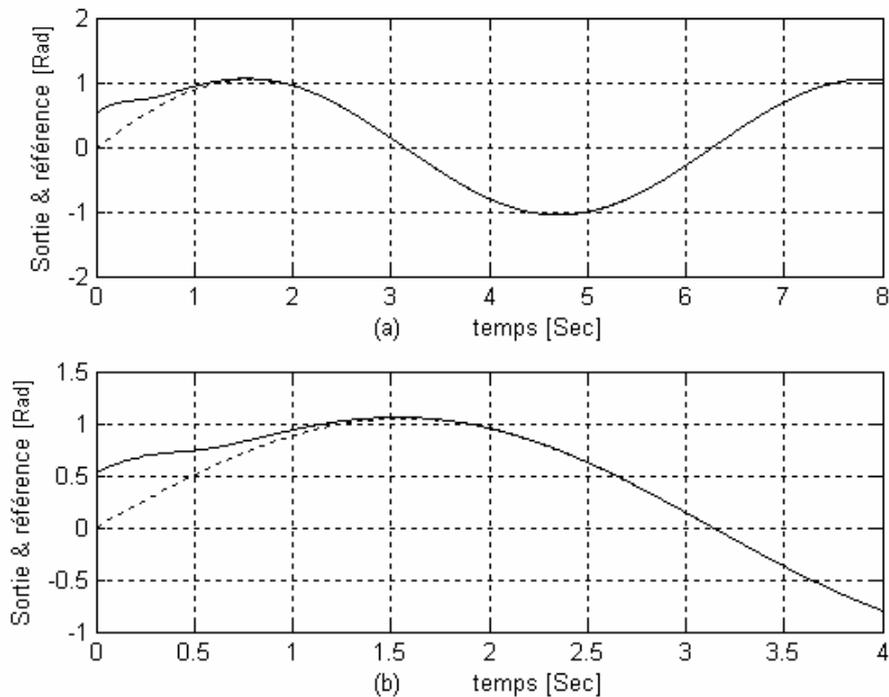
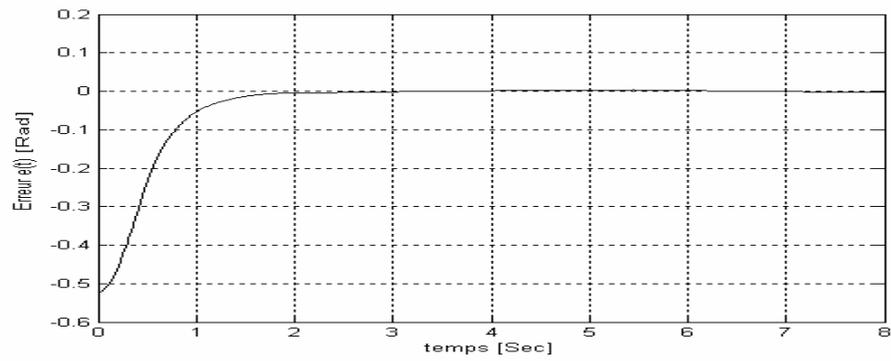
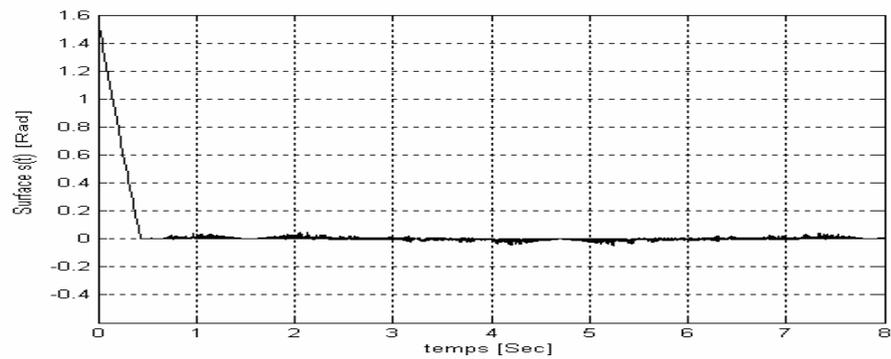
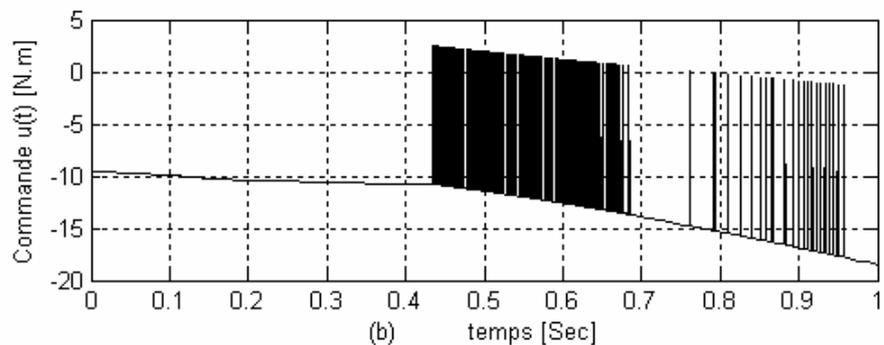
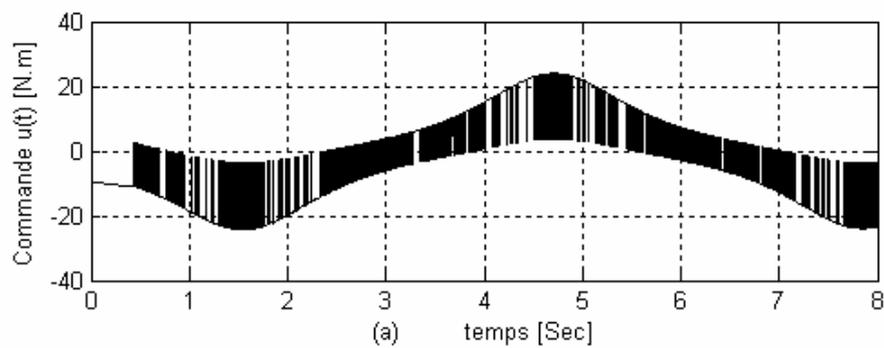


Fig. IV.7. Sortie $y(t)$ & référence $y_m(t)$.

Fig. IV.8. Erreur $e(t)$.Fig. IV.9. Surface $s(t)$.Fig. IV.10. Commande $u(t)$ du système.

La commande appliquée force la sortie du système à suivre le signal de référence, cette poursuite s'effectue en minimisant l'erreur d'approximation d'une part, et en assurant la stabilité du système d'autre part.

IV.4. Commande par mode glissant d'ordre supérieur

Afin d'éliminer le broutement, plusieurs techniques ont été proposées telles que la décomposition de la commande en une composante continue de basse fréquence et une commande discontinue de haute fréquence [59], la commande continue dans une bande autour de la surface de glissement [63] et plus récemment les modes glissants d'ordre supérieur.

Il est proposé de modifier selon la dynamique du système dans un petit voisinage de la surface de discontinuité et en même temps de préserver, de manière générale, les propriétés importantes de la commande par mode glissant.

Vu que la condition à satisfaire est $S = 0$ et si la dynamique du système est de degré relatif égal à un, alors la commande apparaît explicitement dans la première dérivée de S . Par conséquent, le broutement dans la commande correspond au broutement dans \dot{S} et vice versa.

L'idée est de satisfaire deux conditions de contrainte $S = \dot{S} = 0$ au lieu de la précédente, et simultanément garantir la continuité de \dot{S} . Pour cela l'espace d'état est élargi par l'addition de la variable de commande u comme nouvelle coordonnée. Dans ce but, la dérivée \dot{u} de la commande, peut être traitée comme une nouvelle variable de commande.

Par le maintien de $S = \dot{S} = 0$, le problème énoncé peut être résolu par l'approche standard de SSV. Ceci mènera à la réalisation commune des deux contraintes mentionnées ci-dessus en un temps infini au moyen d'une commande continue $u(t)$.

IV.4.1. Mode glissant d'ordre supérieur (HOSM)

L'ordre r du mode glissant, est le nombre de dérivées totales continues de la variable S (incluant l'ordre zéro) au voisinage de la structure de glissement. [61]-[62]

Il est déterminé par les équations :

$$S = \dot{S} = \dots = S^{(r-1)} = 0 \quad (\text{IV.18})$$

où, $S = \dot{S} = \dots = S^{(r-1)} = 0$ continue et $S^{(r)}$ discontinue (ou indéfinie).

Si S et \dot{S} sont des fonctions continues de l'état de système en boucle fermée, le mouvement en mode $S = \dot{S} = 0$ est appelé, le mouvement en mode glissant d'ordre deux (2-sliding mode).

Il convient de noter que la fonction $\dot{S}(t, x, u)$ est considérée en tant qu'inconnue, et que seulement ses valeurs courantes $\dot{S}(t, x(t), u(t))$ sont disponibles en temps réel par la manipulation des données ou des mesures observées.

IV.4.2. Mode glissant d'ordre deux (2-sliding mode)

Une explication détaillée a été présentée dans les travaux de Levant [13], les points principaux seulement sont clarifiés ci-dessous.

$$\dot{u} = \begin{cases} -u & \text{si } |u| > 1, \\ -\alpha_M \operatorname{sgn}(S) & \text{si } S \cdot \dot{S} > 0, |u| \leq 1, \\ -\alpha_m \operatorname{sgn}(S) & \text{si } S \cdot \dot{S} \leq 0, |u| \leq 1, \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

avec : $\alpha_M > \alpha_m > 0$.

Soit

$$\Lambda_u(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + \frac{\partial}{\partial x}(\cdot)f(t, x, u) \quad (\text{IV.20})$$

$$\dot{S}(t, x, u) = \Lambda_u(S(t, x)), \quad |\Lambda_u \Lambda_u S| < C$$

où, $C > 0$

Le calcul de \ddot{S} pour les lois de commande (19), en supposant que $|u| < 1, S < S_0$ donne :

$$\ddot{S} = \Lambda_u \Lambda_u S + \frac{\partial \dot{S}}{\partial u} \dot{u} = \Lambda_u \Lambda_u S - \tilde{\alpha} \frac{\partial \dot{S}}{\partial u} \quad (\text{IV.21})$$

où,

$$\tilde{\alpha} = \begin{cases} -\alpha_m \operatorname{sgn}(S), & S \dot{S} > 0 \\ -\alpha_M \operatorname{sgn}(S), & S \dot{S} \leq 0 \end{cases}$$

Ce qui suit est l'ensemble des principes qui sont employés dans la construction de contrôleur (2-sliding) mentionné ci-dessus :

1. $\frac{\partial \dot{S}}{\partial u}$ est une quantité bornée définie positive et différente de zéro.
2. la commande équivalente $u_{eq}(t, x)$ demeure dans un certain intervalle $[-u_0, u_0] \subset [-1, 1]$.
3. la dérivée \dot{u} de la commande doit dominer dans l'expression (IV.19) de \ddot{S} .

Clairement, cela signifie que l'inégalité $\inf \left(\tilde{\alpha} \frac{\partial \dot{S}}{\partial u} \right) > \sup |\Lambda_u \Lambda_u S|$ donnée par $S \dot{S} < 0$ est vérifiée (il est suffisant que $\inf \left(\tilde{\alpha} \frac{\partial \dot{S}}{\partial u} \right) > C$). Cela conduit à la vérification de $|\dot{u}| > \sup |\dot{u}_{eq}|$.

L'algorithme conduit également à la rotation de la projection de la trajectoire sur le plan $S\dot{S}$ autour de l'origine (Fig. IV.11).

4. l'idée est de quitter la région $S \dot{S} < 0$ aussi rapidement que possible et de rester dans le voisinage de la région $S \dot{S} < 0$ aussi longtemps que possible. Dans ce cas $\tilde{\alpha}|_{S \dot{S} > 0}$ doit être suffisamment grand par rapport à $\tilde{\alpha}|_{S \dot{S} < 0}$.

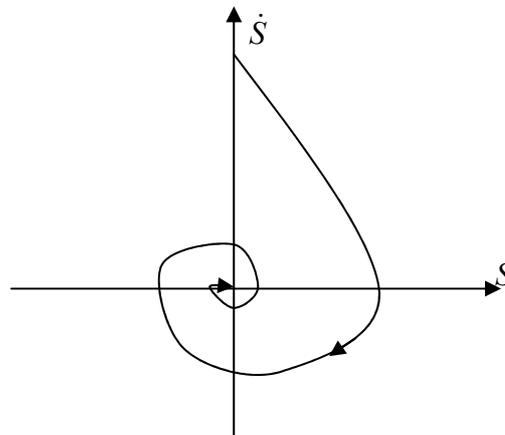


Fig. IV.11. Portrait de phase (S, \dot{S}) .

IV.5. Conception de backstepping avec mode glissant d'ordre deux

Le problème de la commande par mode glissant d'ordre deux (SOSMC) est, par exemple, celui de conduire asymptotiquement l'état à zéro du système incertain décrit par,

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= x_{i+1}, & i &= 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= \phi_0(x_1, \dots, x_n) + \beta_0(x_1, \dots, x_n)u\end{aligned}\quad (\text{IV.22})$$

où $\phi_0(\cdot)$, $\beta_0(\cdot)$ sont des fonctions scalaires incertaines ($\beta_0(\cdot)$ avec le signe connu), et x_n non mesurable.

Si le système sous commande de la forme (IV.22) a des incertitudes d'un type plus général, par exemple apparaissant à chaque équation d'état, la procédure de solution en [65] n'est pas directement applicable. Au cas où le système non linéaire, avec un certain degré d'incertitude, soit exprimable sous les formes de réactions, alors une procédure de conception de backstepping / SOSMC combinée peut être conçue pour résoudre le problème [64].

La procédure globale de commande que l'on propose, consiste à une transformation d'état qui maintient $\rho_i - 1$ équations d'état transformées (ρ_i étant le nombre d'équations de chaque bloc de la forme originale), pour chaque bloc, égales à celles obtenues via la procédure de backstepping, les couplant avec deux équations auxiliaires, obtenues par choix, pour chaque bloc, une quantité convenablement glissante $S = 0$, et considérer sa première et deuxième dérivée.

En groupant les équations auxiliaires liées à chaque bloc, un deuxième système auxiliaire non linéaire d'ordre incertain est obtenu à la classe des systèmes auxquels l'extension au cas de multi-entrées de la stratégie SOSMC indiquée dans [66] est applicable.

Si la matrice de commande est diagonale dominante, alors l'extension de la procédure de conception proposée en [64] est directe. En effet, les signaux de commande SOSM de m signal-entrée (m étant le nombre de blocs) doivent être employés pour atteindre le temps fini du système auxiliaire, provoquant une réduction d'ordre du système transformé, qui devient un système autonome pour lequel les considérations de la stabilité s'appliquent.

Si l'on permet quelques incertitudes, indépendamment des composants de vecteur de paramètres, la procédure de backstepping ne s'applique pas, alors que la procédure proposée peut être utilisée, fournissant quelques limites sur les quantités incertaines appropriées qui sont déterminables.

En fait, la commande conçue par l'approche présentée en cette étude n'est pas affectée par l'effet de vibration puisqu'elle est continue, malgré les dérivées discontinues de ses composants.

IV.5.1. Formulation du problème

La forme d'un retour-pur multi-entré peut être exprimée comme association des m sous-système, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}\dot{x}_{\gamma_i+j} &= x_{\gamma_i+j+1} + \phi_{\gamma_i+j}^T(x_1, \dots, x_{\rho_1-\rho_i+j+1}, \dots, x_{\gamma_{m+1}}, \dots, x_{\gamma_{m+1}-\rho_i+j+1})\theta \\ \dot{x}_{\rho_i+1} &= \sum_{j=1}^m (\beta_{i,j}(x(t)) + q_{i,j}^T(x(t))\theta)u_j + \phi_{\gamma_i+1}^T(x(t))\theta\end{aligned}\quad (\text{IV.23})$$

où, $i = 1, \dots, m$, ρ_i l'ordre du $i^{\text{ème}}$ sous-système, et $\gamma_k = \sum_{l=1}^{k-1} \rho_l$, $x(t) = [x_1(t), \dots, x_{\gamma_m}(t)]^T \in \mathfrak{R}^n$, $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_p]^T \in \mathfrak{R}$ est un vecteur de paramètres constant et inconnu, et $\phi_{\gamma_i+1}(x(t)) \in \mathfrak{R}$.

On définit,

$$\beta(x(t), v) = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} + q_{1,1}^T v & \cdots & \beta_{1,m} + q_{1,m}^T v \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \beta_{m,1} + q_{m,1}^T v & \cdots & \beta_{m,m} + q_{m,m}^T v \end{bmatrix}$$

$\beta(x(t), v) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, $v \in \mathfrak{R}^p$, $\beta_{i,j}$ sont des fonctions non linéaires lisses connues (notons que dans la définition de $\beta(x(t), v)$, la variable v sera remplacée par θ ou bien par le vecteur adapté $\hat{\theta}$). De plus, $\beta(x(t), v)$ est non singulier. Notons également que la supposition de la connaissance parfaite de $\beta_{i,j}$ sera accordée.

L'objectif de la commande est que les signaux de sortie $v_i(t) = x_{\gamma_i+1}(t)$, $i = 1, \dots, m$, poursuivent la trajectoire de référence lisse (l'objectif de poursuite). Autrement dit, le but est de forcer la sortie d'un système non linéaire incertain à suivre un signal de référence avec les premières dérivées ρ_i de chaque composant connu, bornés et continus.

IV.5.1.1. Procédure de conception de backstepping

La procédure de conception de backstepping dans le cas des systèmes multi-entrés et concernant un objectif de poursuite consistant à construire étape-par-étape un système transformé avec l'état,

$$\begin{aligned} z_{\gamma_i+j} &= x_{\gamma_i+j} - y_{i,r}^{(j-1)} - \alpha_{\gamma_i+j-1} \\ i &= 1, \dots, m, j = 1, \dots, \rho_i \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

où α_{γ_i+j-1} est la commande virtuelle à l'étape de conception $\gamma_i + j - 1$, et $y_{i,r}^{(j-1)}$ est la dérivée d'ordre $j - 1$ du signal de référence $y_{i,r}$, pour la sortie $v_i = x_{\gamma_i+1}$. (t peut être parfois négligée).

Avec cette transformation d'état, le problème de poursuite original est transformé en problème de stabilisation, c.-à-d., α_{γ_i+j} est calculée à l'étape $\gamma_i + j$ pour conduire $z = [z_1, \dots, z_n]^T$ à l'état d'équilibre $[0, \dots, 0]^T$.

Ce dernier est prouvé être stable par une analyse standard de Lyapunov. Les fonctions de Lyapunov calculées à chaque étape sont employées pour déterminer α_{γ_i+1} le plus approprié. Les signaux α_{γ_i+1} pour $i = 1, \dots, m$, sont considérés comme des composants d'un vecteur appelé $\alpha(x(t), u(t))$. Rappelons selon les rapports appropriés de procédure de backstepping pour la forme du système retour-simple multi-entré à l'étape $\gamma_i + j$, c'est-à-dire,

$$z_{\gamma_i+j+1} = x_{\gamma_i+j+1} - y_{i,r}^{(j)} - \alpha_{\gamma_i+j} \quad (\text{IV.25})$$

$$V_{\gamma_i+j} = \sum_{k=1}^{\gamma_i+j} \frac{1}{2} z_k^2 + \frac{1}{2} (\hat{\theta} - \theta)^T \Gamma^{-1} (\hat{\theta} - \theta) \quad (\text{IV.26})$$

$$\begin{aligned} \alpha_{\gamma_i+j} = & -z_{\gamma_i+j-1} - c_{\gamma_i+j} z_{\gamma_i+j} + w_{\gamma_i+j}^T \left(\sum_{k=1}^{\gamma_i+j-1} z_{k+1} \frac{\partial \alpha_{\gamma_k}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma - \hat{\theta} \right) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \alpha_{\gamma_k+j-1}}{\partial x_k} x_{k+1} \\ & + \sum_{k=1}^{\gamma_k+j+1} \frac{\partial \alpha_{\gamma_k+j-1}}{\partial y_{i,r}^{k-1}} y_{i,r}^k + \frac{\partial \alpha_{\gamma_k+j-1}}{\partial \hat{\theta}} \tau_{\gamma_i+j} \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

$$w_{\gamma_i+j} = \phi_{\gamma_i+j} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial \alpha_{\gamma_i+j-1}}{\partial x_k} \phi_k \quad (\text{IV.28})$$

$$\tau_{\gamma_i+j} = \Gamma z_{\gamma_i+j} w_{\gamma_i+j} + \tau_{\gamma_i+j-1} \quad (\text{IV.29})$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_{\gamma_i+j} = & -z_{\gamma_i+j-1} - c_{\gamma_i+j} z_{\gamma_i+j} + z_{\gamma_i+j+1} + w_{\gamma_i+j}^T (\tilde{\theta}) \\ & + \sum_{k=1}^{j-1} z_{k+1} \frac{\partial \alpha_{\gamma_i+j}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma w_{\gamma_i+j} - \frac{\partial \alpha_{\gamma_k}}{\partial \hat{\theta}} (\tau_{\gamma_i+j} - \hat{\theta}) \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

avec, $i = 1, \dots, m$, $j = 0, \dots, \rho_i$, $\alpha_{\gamma_i} = 0$, $\tau_0 = [0, \dots, 0] \in \mathfrak{R}^p$. Les termes c_{γ_i+j} sont des constantes de conception, alors que τ_{γ_i+j} est une fonction supposée à l'étape $\gamma_i + j$.

On note qu'il existe une séparation dans le processus d'itération chaque fois qu'on atteint l'équation appropriée à \dot{x}_{γ_i+j} (puisque $\alpha_{\gamma_i} = 0$). Ceci signifie qu'à l'étape γ_i , la procédure itérative considère $z_{\gamma_i+1} = x_{\gamma_i+1} - y_{i,r}$: alors, quelques calculs de dérivés partiels sont maintenus pour calculer α_{γ_i+1} . Finalement, on note que les termes résiduels du $i^{\text{ème}}$ sous-système influencent le $(i+1)^{\text{ème}}$ sous-système seulement par les termes τ_k .

IV.5.1.2. Transformation d'états modifiée

La procédure de backstepping à multi-entrées standard, rappelé dans la section précédente, exige que les calculs concernant l'étape $\gamma_i + j$ soient répétés n temps, de sorte que, à l'étape n , on obtient la commande réelle comme,

$$u(t) = \bar{\beta}(x(t), \hat{\theta})^{-1} \bar{\alpha}(x(t)) + y_r^{(*)}(t) \quad (\text{IV.31})$$

où,

$$\bar{\beta}(x(t), v) = \begin{bmatrix} (1 - \frac{\partial \alpha_{\rho_1-1}}{\partial x_{\rho_1}}) \beta_1 - \sum_{k=2}^m \frac{\partial \alpha_{\rho_1-1}}{\partial x_{\gamma_{k+1}}} \beta_k \\ \vdots \\ (1 - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_n}) \beta_m - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_{\gamma_{k+1}}} \beta_k \end{bmatrix}$$

avec, β_i est la $i^{\text{ème}}$ rangée de $\beta(x(t))$, $y_r^{(*)} = [y_{1,r}^{(\rho_1)}(t), \dots, y_{m,r}^{(\rho_m)}(t)]^T$, et

$$\bar{\alpha}(x(t)) = \begin{bmatrix} \alpha_{\rho_1} - \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial \alpha_{\rho_1-1}}{x_{\gamma_{k+1}}} \beta_k \right) u \\ \vdots \\ \alpha_n - \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial \alpha_{n-1}}{x_{\gamma_{k+1}}} \beta_k \right) u \end{bmatrix}$$

Dans la procédure de conception modifiée, on propose la procédure (IV.25)-(IV.29) est au lieu de cela arrêté pour les m temps, chaque fois à l'étape $\gamma_{i+1}-1$, calculant α_{γ_i} , et l'état transformé est accompli pour obtenir les variables d'état $\gamma_{m+1}+m$ avec les variables auxiliaires $2m$

$$\begin{aligned} y_{i,1} &= x_{\gamma_{i+1}} - y_{i,r}^{(\rho_i)} - \alpha_{\gamma_{i+1}-1} + \tilde{c}_{\gamma_{i+1}-1} z_{\gamma_{i+1}-1} \\ y_{i,2} &= \dot{y}_{i,1} \end{aligned} \quad (\text{IV.32})$$

où $\tilde{c}_{\gamma_{i+1}-1}$ est une constante à choisir puisqu'il influence la dynamique $z_{\gamma_{i+1}-1}$, et, ainsi que d'autres constantes, les performances de stabilité du système commandé, cela deviendra apparent dans la suite.

Avec cette transformation,

$$\begin{aligned} \dot{z}_{\gamma_{i+1}-1} &= -z_{\gamma_{i+1}-2} - (c_{\gamma_{i+1}-1} + \tilde{c}_{\gamma_{i+1}-1}) z_{\gamma_{i+1}-1} + y_{i,1} + (\theta - \hat{\theta})^T w_{\gamma_{i+1}-1} \\ &\quad - \frac{\partial \alpha_{\gamma_{i+1}-2}}{\partial \hat{\theta}} (\tau_{\gamma_{i+1}-1} - \dot{\hat{\theta}}) + \sum_{k=1}^{\rho_i-4} z_{\gamma_i+k} \frac{\partial \alpha_{\gamma_i+k}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma w_{\gamma_{i+1}-1} \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

Ceci, permet d'écrire la transformée modifiée de l'espace d'état du système comme :

$$\begin{cases} \dot{z} = A(z, \hat{\theta})z + W(z, \hat{\theta})^T \dot{\hat{\theta}} + D(z, \hat{\theta})^T \hat{\theta} + \tilde{b}y \\ \dot{y} = F(y, z, \theta, \hat{\theta}, u) + B(y, z, \theta, \hat{\theta})\dot{u} \end{cases} \quad (\text{IV.34})$$

Où, $z = [z_1, \dots, z_{\gamma_{i+1}-1}, z_{\gamma_{i+1}+1}, \dots, z_{\gamma_{m+1}-1}]^T$, $y = [y_{1,1}, \dots, y_{m,1}, y_{1,2}, \dots, y_{m,2}]^T \in \mathfrak{R}^{2m}$, A, F, B, W, D et \tilde{b} des fonctions appropriées des arguments indiqués.

En choisissant le mécanisme d'adaptation comme :

$$\dot{\hat{\theta}} = \tau_{\gamma_{m+1}-1} = \Gamma W(z, \hat{\theta})z \quad (\text{IV.35})$$

où $\tau_{\gamma_{m+1}-1}$ est la fonction d'accord à l'étape avant dernière (étape $n-1$), et on note que $\tau_{\gamma_i} = [0, \dots, 0] \in \mathfrak{R}^p$, l'équation (IV.34) réduit à la forme de boucle fermée,

$$\dot{z} = A_x(z, \hat{\theta})z + W(z, \hat{\theta})\tilde{\theta} + \tilde{b}y \quad (\text{IV.36})$$

Pour prouver la stabilité du système (IV.34), on choisit la fonction de Lyapunov comme,

$$V = \frac{1}{2} (z^T z + (\theta - \hat{\theta})^T \Gamma (\theta - \hat{\theta})) \quad (\text{IV.37})$$

La dérivée de V avec les fonctions virtuelles comme synthétisées dans la procédure (IV.25)-(IV.30), et $\dot{\hat{\theta}}$ est remplacée par $\Gamma W(z, \hat{\theta})z$ donne :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{1}{2} z^T \dot{z} + \frac{1}{2} \dot{z}^T z - \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} - \frac{1}{2} \dot{\tilde{\theta}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \\ &= z^T \left(\frac{A_x + A_x^T}{2} \right) z + z^T \tilde{b} y\end{aligned}\quad (\text{IV.38})$$

En raison de la symétrie baissé de la matrice A_x ,

$\left(\frac{A_x + A_x^T}{2} \right) = \text{diag}(-c_1, \dots, -c_{\rho_1-1} - \tilde{c}_{\rho_1-1}, -c_{\rho_1+1}, \dots, -c_{\gamma_{m+1}-1} - \tilde{c}_{\gamma_{m+1}-1})$. On définit $c_0 = \min_i c_i$ et et $\tilde{c}_0 = \min_i \tilde{c}_i$ il rapporte,

$$\dot{V} \leq -c_0 |z|_2^2 - \tilde{c}_0 |\tilde{z}|_2^2 + \tilde{z}^T y_1 \quad (\text{IV.39})$$

où $\tilde{z} = [z_{\rho_1-1}, \dots, z_{\gamma_{i+1}-1}, \dots, z_{\gamma_{m+1}-1}]$ et $|\cdot|$ est la norme euclidienne. Alors, existe une boule centrée à l'origine de l'espace de z-état, du rayon $\frac{|y_1|_2}{\tilde{c}_0}$, dont \dot{V} est sûrement négatif (notons que, pour $c_i, i=1, \dots, n$ suffisamment élevé, la première dérivée de V pourrait être négative dans tout l'espace d'état). Ce rayon dépend y_1 proportionnellement. Le vecteur y_1 est garanti, dans le cas de $\beta(x(t))$ positive définie, pour converger à zéro à un temps fini. Ainsi, dans ce cas, la boule se détruira aussi bien à l'origine dans un temps fini.

IV.6. Loi globale de commande par mode glissant d'ordre deux

Supposons que $m=1$, c'est à dire, le système commandé est un système S1S0. Ainsi, les résultats de la transformation d'état modifiée proposée de remplacement la dernière étape de la procédure de backstepping avec plus simple, présentant le système auxiliaire S1S0 de deuxième ordre obtenu en (IV.32).

Ce système s'avère appartenir à la classe des systèmes S1S0 non linéaires auxquels la stratégie de SOSMC proposée en [65] peut être appliquée. En effet, la possibilité de combiner la procédure de conception de backstepping de base avec simple-entrée SOSMC déjà étudié dedans [64]. Récemment, on observe que la validité de la stratégie SOSMC simple-entrée peut être développée, sous conditions appropriées, au cas de multi-entrée [66].

Dans ce chapitre, on exploite les résultats de [66] pour formuler une procédure de backstepping récursive comme la procédure caractérisée par la construction du système auxiliaire (IV.34) en comptant sur ce qu'une commande de SOSM multi-entrée est organisée. Maintenant, considère le système (IV.34).

Mettant $S := y_1 = [y_{1,1}, \dots, y_{m,1}]^T$ $\dot{y}_1 = y_2 = [y_{1,2}, \dots, y_{m,2}]^T \in \mathfrak{R}^m$ et $\chi = [y, z, \theta, \hat{\theta}]^T$. Alors, l'équation de deuxième ordre en (IV.33) peut être écrite une forme plus compacte comme :

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= F(\chi) + B(\chi)\dot{u}\end{aligned}\quad (\text{IV.40})$$

Le problème de commande peut être examiné comme la direction de y_1, y_2 vers à zéro dans un temps fini malgré les incertitudes dans le domaine de vecteur $F(\chi)$ et dans la matrice $B(\chi)$, et de la non disponibilité du vecteur y_2 . On note que $S = 0$ peut être considéré

comme un collecteur glissant de m dimensions. Ainsi, le problème est celui de la commande par mode glissant d'ordre deux, selon la définition mentionnée dans l'introduction.

Le domaine du vecteur $F^T(\chi) = [F_1(\chi), \dots, F_m(\chi)]$ est incertain tels que ses composants doivent être bornés par des fonctions connues de telle manière que le problème de commande par mode glissant d'ordre deux concernant le système auxiliaire simple-entrée :

$$\begin{aligned} \dot{y}_{i,1} &= y_{i,2} \\ \dot{y}_{i,2} &= F_i(\chi) + \eta_i \end{aligned} \quad (\text{IV.41})$$

C'est-à-dire, le problème de conduire $y_{i,1}$ et $y_{i,2}$ à zéro d'un temps fini en mesurant seulement $y_{i,1}$ a une solution.

Dans ce chapitre, pour maintenir le traitement plus facile, on suppose :

$$F(\chi) < \bar{F}_i \quad (\text{IV.42})$$

Où \bar{F}_i est un constant connu.

La matrice $B(\chi)$ et la matrice $\beta(x(t))$ sont incertaines et positives définies. En fait, des cas plus généraux ont pu être traités : au moins tout ceux indiqués en [66] auxquels l'extension de SOSMC au cas à multi-entrées est commode. De plus, puisqu'il est suffisant pour les applications, on suppose que $B(\chi)$ soit non seulement positif définie mais également diagonale dominante, c'est-à-dire,

$$0 < \sum_{j=1, j \neq i}^m |b_{ij}| < b_{ii} \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{IV.43})$$

Puis, l'équation (19) peut être réécrite, comme :

$$\dot{y}_{i,2} = F_i(\chi) + \sum_{j=1, j \neq i}^m b_{ij} \dot{u}_j + b_{ii} \dot{u}_i \quad (\text{IV.44})$$

Dans [65] il est montré que, dans le cas des systèmes incertains d'un second degré SISO avec la mesure inachevée d'état, la commande $u(t)$ peut être choisie comme une commutations de commande pas à pas [67] entre deux valeurs $-U_{Max}$ et $+U_{Max}$, la tâche sur une logique de commutation basée seulement sur les états disponibles. Plus précisément, il a été prouvé que si, au lieu de l'équation (IV.44) on aura :

$$\dot{y}_{i,2} = F_i(\chi) + b_{ij}(\chi) \dot{u}_i \quad (\text{IV.45})$$

Avec $F_i(\chi)$ est donnée dans (IV.42), le mode glissant d'ordre deux est atteint, par exemple, au moyen de l'algorithme suivant, basé sur l'hypothèse d'avoir les possibilités de détecter les valeurs extrémales de $y_{i,1}$ (par exemple, au moyen des détecteurs maximaux),

IV.6.1. Algorithme 1

- Fixons $\delta_i^* \in (0, 1] \cap (0, \frac{sB_1}{B_2})$, où $B_1 > 0, B_2 \geq B_1$ sont des bornes inférieures et supérieures connues sur la quantité b_{ii} ,
- Fixons $y_{i,1_{\max}} = y_{i,1}(0)$. Répétition, pour tout $t > 0$, les étapes suivantes,
 - Si $[y_{i,1}(t) - \frac{1}{2}y_{i,1_{\max}}][y_{i,1_{\max}} - y_{i,1}(t)] > 0$, alors fixe $\delta_i = \delta_i^*$ sinon prend $\delta_i = 1$,
 - Si $y_{i,1}(t)$ est une valeur extrême, alors, on fixe $y_{i,1_{\max}} = y_{i,1}(t)$,

- Appliquons la loi de commande :

$$\dot{u}(t) = -\delta_i U_{i_{\max}} \text{sign}\left\{y_{i,1}(t) - \frac{1}{2} y_{i,1_{\max}}\right\} \quad (\text{IV.46})$$

jusqu'à la fin de l'intervalle du temps de commande.

Notons qu'en (IV.44), avec [65].

$$U_{i_{\max}} > \max\left(\frac{\bar{F}_{1_i}}{\delta^* B_{1_i}}; \frac{4\bar{F}_{1_i}}{3B_{1_i} - \delta^* B_{2_i}}\right) \quad (\text{IV.47})$$

Donc, on considère (IV.44) et rappelle la proposition de la dominance diagonale (IV.43). D'une analogie avec (IV.46), on peut supposer que n'importe quel signal de commande \dot{u}_i dans (IV.44) a la forme :

$$\dot{u}_i = \delta_i U_{\max} \text{sgn}\left\{y_{i,1}(t) - \frac{1}{2} y_{i,1_{\max}}\right\} \quad (\text{IV.48})$$

On aura comme conclusion :

$$\begin{aligned} \dot{y}_{i,2} = & F_i(\chi) - \sum_{j=1, j \neq i}^m b_{ij} \delta_j U_{j_{\max}} \text{sgn}\left\{y_{j,1}(t) - \frac{1}{2} y_{j,1_{\max}}\right\} \\ & - b_{ii} \delta_i U_{i_{\max}} \text{sgn}\left\{y_{i,1}(t) - \frac{1}{2} y_{i,1_{\max}}\right\} \end{aligned} \quad (\text{IV.49})$$

Or :

$$y_{i,2} = F_i(\chi) - g_i(\chi) \delta_i U_{\max} \text{sgn}\left\{y_{i,1}(t) - \frac{1}{2} y_{i,1_{\max}}\right\} \quad (\text{IV.50})$$

où,

$$g_{i_1}(\chi) < g_i(\chi) < g_{i_2}(\chi) \quad (\text{IV.51})$$

Avec

$$g_{i_1}(\chi) = b_{ii} - \sum_{j=1, j \neq i}^m |b_{ij}| \quad (\text{IV.52})$$

$$g_{i_2}(\chi) = b_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^m |b_{ij}| \quad (\text{IV.53})$$

On note qu'une valeur de U_{\max} valide pour chaque $\dot{u}_i (U_{\max} = \max_{1 \leq i \leq m} U_{i_{\max}})$ peut être dérivée en tenant compte des expressions suivantes :

$$F_{\max}^* = \max_{1 \leq i \leq m} \bar{F}_i \quad (\text{IV.54})$$

$$\rho = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \max \left[\frac{1}{\delta^* g_{i_1}}; \frac{4}{3g_{i_1} - \delta^* g_{i_2}} \right] \right\} \quad (\text{IV.55})$$

$$\delta^* \in (0; 1) \cap \left(0; \min_{1 \leq i \leq m} \frac{3g_{i_1}}{g_{i_2}} \right) \quad (\text{IV.56})$$

C'est que,

$$U_{\max} \geq \rho F_{\max}^* \quad (\text{IV.57})$$

Puis, un vecteur de commande avec des composants comme dans (IV.48), et U_{\max} inégalités satisfaisantes (IV.54)-(IV.56), est suffisant pour conduire les vecteurs y_1 et $\dot{y}_1 = \dot{y}_2$ à zéro. On a observé que si la matrice $B(\chi)$ est positive définie et diagonale dominante, alors le système auxiliaire multi-entrée peut être passé en un système simple-entrée auxquels l'approche de SOSMC décrit en [65] peut être appliqué.

Une fois que, la condition $y_1 = y_2 = 0$ est atteint, le système transformé proposé en (IV.36)-(IV.40) réduit à,

$$\dot{z} = A_z(z, \hat{\theta})z + W(z, \hat{\theta})^T \tilde{\theta} \quad (\text{IV.58})$$

C'est-à-dire cela devient un système multi-entrée d'ordre réduit transformé par une procédure de backstepping pour laquelle les propriétés de stabilité indiquées dans [68] soit maintenues.

Alors, la procédure de conception que l'on propose pour résoudre ce problème de commande, peut être exprimé dans l'algorithme 2.

IV.6.2. Algorithme 2

- Arrêter la procédure de backstepping pour m chronomètre à l'étape $\gamma_{i+1}-1$ et on calcule les quantités $\alpha_{\gamma_{i+1}-1}, z_{\gamma_{i+1}-1}, \tau_{\gamma_{i+1}-1}$. On fixe $\dot{\theta} = \tau_{\gamma_{m+1}-1}$.

- Définir les vecteurs :

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= [z_{\rho_1-1}, \dots, z_{\gamma_{i+1}-1}, \dots, z_{\gamma_{m+1}-1}]^T \\ \tilde{c} &= [\tilde{c}_{\rho_1-1}, \dots, \tilde{c}_{\gamma_{i+1}-1}, \dots, \tilde{c}_{\gamma_{m+1}-1}] \\ \tilde{\alpha} &= [\alpha_{\rho_1-1}, \dots, \alpha_{\gamma_{i+1}-1}, \dots, \alpha_{\gamma_{m+1}-1}]^T, \\ \tilde{x} &= [x_{\rho_1}, \dots, x_{\gamma_{i+1}}, \dots, x_{\gamma_{m+1}}]^T \\ \tilde{y}_r &= [y_{1,r}^{(\rho_1)}, \dots, y_{i,r}^{(\rho_i)}, \dots, y_{m,r}^{(\rho_m)}]^T\end{aligned}\tag{IV.59}$$

et on compte $S = y_1 = \tilde{c}\tilde{z} + \tilde{x} - \tilde{y}_r - \tilde{\alpha}$.

- Calculer les bornes supérieures des fonctions appropriées dans (IV.34) pour obtenir les bornes \tilde{F}_i, g_{i_1} et g_{i_2} , $i = 1, \dots, m$.
- Appliquer l'algorithme 1 pour déterminer chaque composant de \hat{u}_i du vecteur de commande, avec $U_{i_{\max}} = U_{\max}$ comme dans (IV.54)-(IV.56).

IV.7. Simulation et résultats

Pour compléter la discussion théorique, un exemple est présenté dans cette partie. On considère le système augmenté [69],

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \theta_2 \sin(x_2) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= v\end{aligned}\tag{IV.60}$$

où $u = x_4$ (notons que l'effet d'anti-vibration est présentée). Le point d'équilibre du système est $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$, avec les valeurs idéales $\theta_1 = \theta_2 = 1$.

En fait, on assume que telles valeurs sont inconnues. Les quantités de référence $v_r(t), v_r^1(t)$ et $v_r^2(t)$, venues du modèle linéaire $60/((s+3)(s+4)(s+5))$. Le collecteur glissant est $S = 0$. A, A_0 sont des filtres d'ordre deux:

$$\begin{aligned}\ddot{z}_2 &= x_4 + \theta_2 x_3 + \theta_1^2 - y - r^{(3)} + c_1(x_3 + \theta_2 + \theta_1 x_1^2) + x_1^2 f_1(A, A_0) \\ &\quad + 2x_1 f_2(A, A_0) - 2k_1(5x_1^2 + 2x_1^2 x_2 + 2\theta_1 x_1^3) - 4k_1 x_1^2 (x_2 + x_1^2) \\ &\quad - k_1 x_1^2 (x_3 + \theta_2 \sin(x_2) + 2\theta_1 x_1)\end{aligned}\tag{IV.61}$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions bornées. Pour $x(0)$ dans une certaine boule Ω , et $\theta \in [\theta_{Min}, \theta_{Max}]$ il est possible de trouver une limite supérieure à \ddot{z} égales à Z .

Quant à $\ddot{z}_2, \ddot{\alpha}_2$ il peut écrire,

$$f_{1\alpha}(x, \theta)\ddot{z}_2 + f_{2\alpha}(x, \theta) < f_{1\alpha}(x, \theta)Z + f_{2\alpha}(x, \theta) < H_\Omega$$

Alors, étant $\beta(x) = 1$, U_{Max} peut être calculé et la commande $u = -\alpha U_{Max} \text{sgn}(S - 1/2S_{Max})$, avec α et S_{Max} changeant selon le premier algorithme.

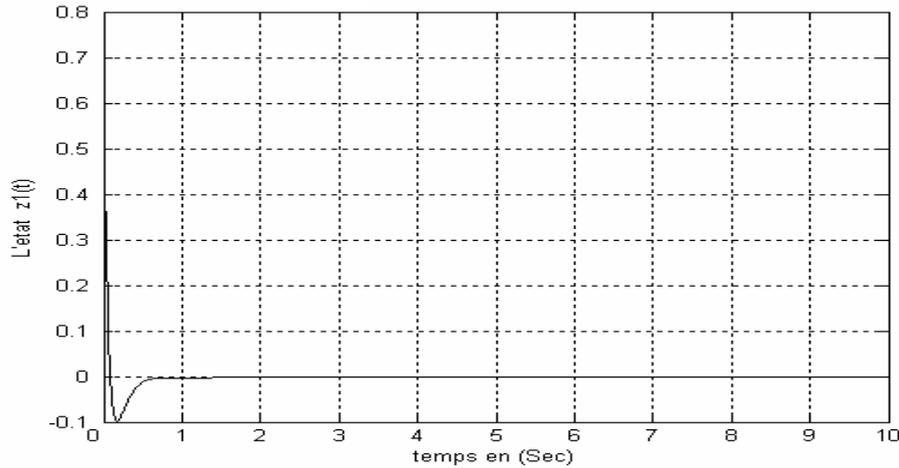


Figure IV.12. Trajectoire de z_1 par la procédure proposée

La fig. (IV.12), montre la trajectoire de notre état $z_1(t)$ par la procédure de SOSMC proposée, on voit dans ce cas que l'état tend vers à zéro qui signifie notre objectif.

IV.8. Conclusion

Dans ce chapitre, un problème de commande de poursuite est considéré consistant de forcer la sortie d'un système non linéaire incertain pour suivre un signal de référence avec les premières dérivées ρ_i de chaque composant connu, borné et continu.

Un tel objectif est atteint concevant un vecteur de commande approprié sur la base d'une procédure qui passe par la construction d'un système transformé caractérisé par $\rho_i - 1$ avec des équations différentielles de blocs analogues à ceux possibles via d'une conception de backstepping, couplés à un système non linéaire auxiliaire incertain. Sous des suppositions appropriées sur la matrice de commande, cette dernière est choisie pour être l'extension au cas de multi-entrées d'un algorithme SOSMC, afin d'assurer la convergence des variables d'état transformées.

Il vaut la peine de souligner que la synthèse de commande est robuste avec la présence d'incertitudes actuelles dans la matrice $\beta(x)$.

D'ailleurs, contrairement aux stratégies de commande à structure variable traditionnelle, dans ce cas, la procédure de conception de commande proposée produit une commande continue.

*CONCLUSION GENERALE
ET PERSPECTIVES*

Conclusion générale et perspectives

Après plusieurs années de succès pratiques, la commande adaptative floue est arrivée à sa maturité avec la formation et la justification théorique de ses capacités prouvées par l'expérience. Les travaux théoriques, depuis le début des années 90, ont porté sur les axes suivants :

- La justification théorique des capacités d'approximation des systèmes a offert une base théorique pour le développement de la commande adaptative floue.
- L'établissement théorique de la stabilité des boucles de commande floues, longtemps critiquée par ses antagonistes, est réalisé par plusieurs approches, à savoir la méthode de Lyapunov, de l'hyperstabilité et le critère du cercle, et ceci pour des régulateurs adaptatifs flous.

Au cours de ce travail, on a essayé d'apporter le plus grand soin au développement de cette commande, et on a pu adopter une démarche didactique dans la rédaction du mémoire et des chapitres proposés.

On peut conclure que l'objectif de cette étude est atteint, dont on a proposé une technique de commande adoptée pour résoudre le problème de commande des systèmes non linéaires.

Le but de ce travail était une étude par simulation de la commande adaptative floue par la technique backstepping. On a opté pour l'application de backstepping en utilisant le formalisme de Lyapunov probablement c'est le formalisme le plus aisé à mettre en œuvre, et bien adopté aux techniques de calcul assisté par ordinateur.

Les programmes des différentes applications ont été totalement élaborés en Matlab 6.5 qui est un outil de haut niveau pour la réalisation de ce genre de programmes.

Cette méthode nous a permis d'obtenir des résultats satisfaisants et qui sont presque identiques pour les différentes applications. Ces résultats justifient clairement l'avantage d'utilisation de cette technique de commande.

Les commandes actuelles de plus en plus sophistiquées exigent des déterminations des paramètres de plus en plus précises pour l'obtention de la stabilité de l'ensemble des divers régimes de fonctionnement. Donc, on signale qu'il reste beaucoup à faire dans le domaine de commande adaptative floue via backstepping des systèmes non linéaires.

La technique backstepping avec le mode glissant, qui présente une partie complémentaire du développement précédent est un emplacement primordial pour l'amélioration des performances.

Bien que les techniques actuelles de l'intelligence artificielle aient pu être efficaces dans plusieurs situations où les méthodes classiques ont échoué, leurs capacités restent incomparables à celles de l'être humain. Ce dernier réalise ses tâches dans un monde caractérisé par une très grande complexité. Il peut identifier son environnement en utilisant des mesures approximatives, indirectes et, dans certains cas, intuitives.

Enfin, on espère que la commande adaptative floue par backstepping est une technique moderne utile et rentable qu'on propose aux prochaines promotions d'élargir éventuellement ses applications. Et cela peut être effectué par une combinaison avec autres techniques telles que la commande par réseaux de neurones ou celle par l'intelligence artificielle afin d'avoir des performances plus améliorées.

BIBLIOGRAPHIES

Bibliographie

- [1]. J. Kiszka, M. Gupta, and P. Nikiforuk, « Energetic stability of fuzzy dynamic systems », IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., vol. SMC-15, no. 5, pp. 783-792, 1985.
- [2]. S. Chiu, S. Chand, D. Moore, and A. Chaudhary, « Fuzzy logic for control of roll and moment for a flexible wing aircraft », IEEE Cont. Syst. Mag., vol. 11, no. 4, pp. 42-48, 1991.
- [3]. R. M. Tong, « Some properties of fuzzy feedback systems », IEEE Trans. Syst., Man, Cybern, vol. SMC-10, no. 6, pp. 327-330, 1980.
- [4]. G. C. Goodwin and D. Q. Mayne, « A parameter estimation perspective of continuous time model reference adaptive control », Automatica, vol. 23, pp. 57-70, 1987.
- [5]. A. Isdori, « nonlinear control systems », Berlin, Springer-Verlage, 1989.
- [6]. R. E. Bellman et L. A. Zadeh, « Local and fuzzy logics » in Modern Uses of Multiole-Valued, J. M. Dunn and G. Epstein, Eds. Reidel Dordrecht, the Natherlands, 1997, pp. 103-165.
- [7]. A. L. Schwartz, « Comments on fuzzy logic for control of roll and moment for a flexible wing aircraft », IEEE Contr. Syst.Mag., Fed. 1992.
- [8]. C. C. Lee, « Fuzzy logic in control systems, fuzzy logic controller, Part I and II », IEEE Trans. Syst. Man, Cybern., vol. 20, no. 2, pp. 404-435, 1990.
- [9]. D. G. Lneberger, « linear and nonlinear programming », Reading, MA Addison-Weslev, 1984.
- [10]. W. T. Miller, R. S. Sutton and P. J. Werbos. Eds., « Neural Networks for control », Cambridge, MA: the MIT Press, 1990.
- [11]. K. S. Narendra and A. M. Annaswamy, « Stable Adaptive systems », Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989.
- [12]. K. S. Narendra and K. Parthasarathy, « Identification and control of dynamical systems using neural network », IEEE Trans. Neural Networks, vol. 1, no. 1, pp. 4-27, 1990.
- [13]. M. M. Polycarpou and P. A. Ioannou, « Identification and control nonlinear systems using neural network models: Design and stability analysis», USC EE-Report 91-09-01, 1991.
- [14]. R. M. Sanner and J. E. Slotine, « Gaussian networks for direct adaptive control », in Proc, Amer. Contr. Conf., pp. 2153-2159, 1991.
- [15]. S. Sastry and M. Bodson, « Adaptive control: Stability, Convergence, and Robustness », Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989.
- [16]. G. Langari and M. Tomizuka, « Stability of fuzzy linguistic control systems », in Proc. IEEE Conf. Decision and Control, Hawaii, pp. 2185-2190, 1990.
- [18]. D. Dubois and H. Prade, « Fuzzy sets and systems, theory and applications », Orlando, FL, Academic, 1980.
- [17]. J. E. Slotine and W. Li, « Applied nonlinear Control », Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991.

- [19]. L. X. Wang, « Fuzzy systems are universal approximations », in Proc. IEEE Int. Conf. Fuzzy Systems, San Diego, CA, pp. 1163-1170, 1992.
- [20]. L. X. Wang, « Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems », IEEE Trans, Fuzzy Systems, vol. 1, no. 2, pp. 146-155, 1993.
- [21]. L. X. Wang and J. M. Mendel « Generating fuzzy rules by learning from numerical examples », IEEE Trans, Syst. Man, Cybern. vol. 22, no. 6, pp. 1414-1427, 1992.
- [22]. L. X. Wang, « Back-propagation fuzzy systems as nonlinear dynamic system identifiers », IEEE Int. Conf. Fuzzy Syst., San Diego, CA, pp. 1409-1418, 1992.
- [23]. L. X. Wang, « fuzzy basis function, universal approximation, and orthogonal least squares learning », IEEE Trans, Neural networks, vol. 3, no. 5, pp. 807-814, 1992.
- [24]. L. X. Wang, « three-dimensional structured networks for matrix equation solving », IEEE Trans, Computers, vol. 40, no. 12, pp. 1337-1346, 1991.
- [25]. L. X. Wang, « Stable adaptive fuzzy controller with application to Inverted pendulum tracking », IEEE Trans on Systems, Man, Cybern-Part B. vol. 26, no. 5, October 1996.
- [26]. L. A. Zadeh, « Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes », IEEE Trans, Syst, Man, Cybern., vol. SMC-3, no. 1, pp. 28-44, 1973.
- [27]. M. Jakovi, « Adaptive nonlinear output feedback tracking with a partial High-gain observer and Backstepping », IEEE Trans on automatica Contr. Vol. 42, no. 1, pp. 106-113, January 1997.
- [28]. P. Kokotovic, « the joy of feedback : nonlinear and adaptive » IEEE Contr Syst Mag, pp. 7-17, June 1992.
- [29]. A. Grovlen and T. I. Fossen « Nonlinear control dynamic positional ships using only position feedback : an observer Backstepping approach », In Proc. Of IEEE Conf. pp. 3388-3393, 1996.
- [30]. F. Galugi, « Observer-based adaptive control », Department of Automatic Control Lund Institute of Technology, Box 118 SE-221 00 Lund Sweden, April, 2002.
- [31]. A. Benaskeur and A. Desiens, « Application of adaptive Backstepping to the stabilisation of the inverted pendulum », IEEE, Trans on Industrial Electronics, pp. 113-116, 1998.
- [32]. C. M. Kwan and F. L. Lewis, « Robust Backstepping control of Induction motors using neural networks » IEEE Trans on Neural networks, vol. 11, no. 5, pp. 1178-1187, 2000.
- [33]. D. N. Kouya, M. Saad, L. Lamarche and C. Khairallah « Backstepping adaptive position control for robotic manipulator », Proc of American control conf, Arlington, VA June 25-27, pp. 636-640, June 2001.
- [34]. Y. Ling and G. Tao, « Adaptive Backstepping control design for linear multivariable plants », Department of Electrical Engineering, University of Virginia, Charlottesville, VA 22903, USA, In Proc. IEEE conf, pp. 2438-2443, 1996.
- [35]. Z. P. Jiang and H. Nijmeijer, « Tracking control of mobile robots : a case study in Backstepping », Printed in Great Britain, Automatica, vol. 33, no. 7, pp. 1393-1399, 1997.

- [36]. R. Marino and P. Tomei, « Global Adaptive Output-Feedback Control of Nonlinear System, Part I: Linear Parameterization » IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 38, no. 1, pp.17-32, January 1993.
- [37]. R. Marino and P. Tomei, « Global Adaptive Output-Feedback Control of Nonlinear System, Part II: Nonlinear Parameterization », IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 38, no. 1, pp.33-48, January 1993.
- [38]. R. A. Freeman and P. V. Kokotovic, « Design of Softer Robust Nonlinear Control Laws », Automatica, vol. 29, no. 6, pp. 1425-1437, 1993.
- [39]. R. A. Freeman and P. V. Kokotovic, « Tracking Controllers for systems Linear in the Unmodeled States », Automatica, vol. 32, no. 5, pp. 735-745, 1996.
- [40]. S. Shankar Sastry and Alberto Isidori, « Adaptive Control of Linearizable systems », IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 34, no. 11, pp. 1129-1131, 1989.
- [41]. David G. Taylor, P. V. Kokotovic and R. Marine, « Adaptive Regulation of Nonlinear systems with Unmodeled Dynamics », IEEE Trans. on Automatic contr, vol. 34, no. 4, pp. 405-412, 1989.
- [42]. I. Kanell, P. V. Kokotovic and A. S. Morse, « Systematic Design of Adaptive Controllers for Feedback Linearizable systems », IEEE Trans. Automatic Contr, vol. 36, no. 11, pp. 1241-1253, 1991.
- [43]. M. Kretic, and P. V. Kokotovic, « Adaptive Nonlinear Output-Feedback Schemes with Marine-Tomei Controller » IEEE Trans. Automatic Contr. Vol. 41, no. 2, pp. 274-280, 1996.
- [44]. R. A. Decarlo., S. H. Zak, and G. P. Matthews, « Variable Structure Control of Nonlinear Multivariable systems », Proc. IEEE, vol. 76, pp. 212-232, 1988.
- [45]. Z. Qu, « Robust control of Nonlinear uncertainties systems under generalized matching Conditions », Automatica, vol. 29, pp. 985-998, 1993.
- [46]. Jacob S. Glower and J. Munighan, « Designing fuzzy controllers from a variable structures standpoint », IEEE Trans. On Fuzzy systems, vol. 5, no. 1, pp. 138-144, Feb 1997.
- [47]. J. C. Wu and T. S. Liu, « Fuzzy control stabilization with applications to motorcycle control », IEEE Trans. on Syst. Man, and Cybern, Part B: Cybernetics, vol. 36, no. 6, pp. 836-847, Dec 1996.
- [48]. F-Y. Hsu and L-C. Fu, « Adaptive robust fuzzy control for robot manipulator », IEEE, Conf. on Robotic and Automation, pp. 629-634, 1994.
- [49]. F-Y. Hsu and L-C. Fu, « An adaptive fuzzy hybrid control for robot manipulators following contours of an uncertain object », IEEE conf. on Robotics and Automation, pp. 2292-2296, 1996.
- [50]. F-Y. Hsu and L-C. Fu, « Intelligent robot debarring using adaptive fuzzy hybrid control », Proc. 27th International symposium on Industrial robots, pp. 847-852, Milan. Italy, 1996.
- [51]. R. M. Senner and J-J E. Slotine, « Gaussian Networks for direct adaptive control », IEEE, Trans. On Neural networks, vol. 8, no. 6, pp. 837-863, 1992.
- [52]. L. X. Wang, « Adaptive fuzzy systems and control: design and stability analysis » NJ : Prentice-Hall, 1994.

- [53]. F-Y. Hsu and L-C. Fu, « Recent progress in fuzzy control », A chapter in control problems in robotics and automation: future directions. Ed. Bruno Siciliano, Springer-Verlag, London, 1997.
- [54]. S.V. Emelyanov “ Sliding mode control systems” , Nauka, Moscou, 1967.
- [55]. Sonia Hajri « Commande dynamique par mode glissant application à la robustification des processus complexes », Thèse de doctorat en Automatique et Informatique industrielle, Lille, 1997.
- [56]. M.Dekik Souhila, Kadri Khalissa « Commande par mode glissant », Thèse d'ingénieur en Automatique, Sétif, Algérie. 1998
- [57]. H.Buhler « Réglage par mode glissant », Presses Polytechnique, Romandes Lausanne, 1986.
- [58]. B.Idris, B.Said « Commande par mode glissant d'ordre deux », Mémoire d'ingénieur, Sétif, 2002.
- [59]. M. Bouyoucef, « La commande à structure variable par régime glissant et à logique floue appliquée à un robot manipulateur », Thèse de Magister,- USTHB - Alger, 1999.
- [60]. K. Kermali, Z. Dib « Commande floue adaptative des systèmes non-linéaires multivariables », Mémoire d'ingénieur en Automatique, Sétif, 2001.
- [61]. A. Levant and L. Fridman, « Higher order sliding modes », Chapter 3, 2002.
- [62]. A. Levant, « Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control », International Journal of control, vol. 58, no. 6, pp. 1247-1263, 1997.
- [63]. J. J. E. Slotine and W. Li, « Applied nonlinear control », Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991.
- [64]. G. Bartolini, A. Ferrara, L. Giacomini and E. Usai, « A combined backstepping / second order sliding mode approach to control a class of nonlinear systems » Proc. IEEE International Workshop on Variable Structure Systems, Tokyo, Japan, pp. 205-210, 1996.
- [65]. G. Bartolini, A. Ferrara and E. Usai « Applications of a suboptimal discontinuous control algorithm for uncertain second order systems » Int. J. of Robust Nonlin. Control, vol. 7, pp. 299-320, 1997.
- [66]. G. Bartolini, A. Ferrara, E. Usai and V. I. Utkin, « Second order chattering-free sliding mode control for some classes of multi-input uncertain nonlinear systems » Proc. of the 6th IEEE Mediterranean Conference on Control and Systems, Alghero, Italy, 1998.
- [67]. D.E. Kirk, « Optimal control theory », Prentice Hall, 1970. 10^{-3}
- [68]. P.V. Kokotovic, M. Krstic and I. Kanellakopoulos, « Nonlinear and Adaptive Control Design », New York, Wiley, 1995.
- [69]. A. Ferrara and L. Giacomini, « Application of a multi-input Backstepping design with second order sliding mode to control mechanical systems with flexibility », Proc of the 37th IEEE, conf. on decision and control, Florida USA, Dec 1998.

- [70]. N. Goléa, A. Goléa and K. Benmahammed, « Fuzzy adaptive control of permanent magnet synchronous motor drives », International conference on power system technology POWERCON'98, Beijing China, pp. 600-604, 1998.
- [71]. N. Goléa, A. Goléa and M. Kadjoudj, « Fuzzy adaptive control of induction motor drive », European control conference ECC'99, Karlsruhe Germany, (CDROM), 1999.
- [72]. N. Goléa, « Commande par logique floue », Thèse de Magister, Institut d'Electronique, Université de Sétif, 1994.
- [73]. N. Goléa « Identification et commande adaptative floues », Thèse de doctorat, Institut d'Electronique, Université de Batna, 2001.
- [74]. L. X. Wang « Design and analysis of fuzzy identifiers of nonlinear dynamic systems », IEEE Trans. Automatic Control, vol. 40, no. 1, pp. 11-23, 1995.
- [75]. L. X. Wang « adaptive fuzzy systems and control: design and stability analysis », Printice-Hall, Engelwood Cliffs, NJ, 1994.
- [76]. M. Mokhtari, « Commande adaptative des systèmes non linéaires -Backstepping- », Mémoire de magister en électronique , Batna, 2001.
- [77]. Feng-Y Hsu and Li-Chen Fu, «A novel adaptive Fuzzy variable structure control for a class of nonlinear uncertain systems via backstepping», Fuzzy Sets and Systems, vol. 122, no. 1, pp. 83-106, 2001.

ANNEXE

Annexe_A

A.1. Commande adaptative floue

La théorie classique des systèmes asservis étudie des systèmes dits unidimensionnels ou monovariables (SISO). Or, les schémas de commande des systèmes comporte une structure très compliquée à plusieurs boucles internes de retour mais ils représentent toujours une seule sortie. Il existe encore des systèmes dits multivariables (MIMO) qui possède plusieurs objets de régulation (système à commander) liées par un système de commande afin d'atteindre une liaison bien déterminée entre les grandeurs réglante et de sortie. Il se peut que les systèmes multivariables comprennent un seul objet de régulation mais avec plusieurs grandeurs réglantes, et plusieurs grandeurs à régler.

Pour une autre catégorie des systèmes (les systèmes non linéaires), si le domaine de fonctionnement est restreint, alors il est nécessaire de leurs fournir une bonne approximation, les recherches dans le domaine du flou ont démontré la grande capacité et la puissance des modèles flous dans l'approximation et l'identification floue des procédés non linéaires.

Dans les système de commande ordinaire (classique), toute l'information disponible à priori est utilisée pour le choix et la réalisation des propriétés du système de commande quoi sont optimales pour certaines conditions externes et internes de fonctionnement. Cependant, au cours de l'exploitation, les caractéristiques des systèmes à commander peuvent changer de manière imprévisible. Ces variations sont dues à plusieurs facteurs, dont la variation paramétrique du modèle, les imprécisions de modélisation des éléments du modèle et le changement des caractéristiques du signal d'entrée.

Ainsi, sous l'influence de ces facteurs, les systèmes classiques n'assurent pas de bonnes performances. Ce sont les raisons qui expliquent le désir de rechercher d'autres systèmes de commande pouvant adapter en permanence, les paramètres du contrôleur en fonction d'un indice de qualité de commande, en vu de maintenir les performances du système au voisinage des valeurs désirées. Donc, ils s'agit de concevoir des systèmes qui peuvent effectuer les adaptation au moyen de l'ajustement adéquat des paramètres du système. Pour ajuster ces paramètres, des lois d'adaptation basées sur la synthèse de Lyapunov seront élaborées.

Les travaux présentés dans cette étude s'inscrivent dans ce contexte et dont le thème principal est la commande adaptative floue d'une classe de système non linéaires garantissant la stabilité en boucle fermée. Le principe de l'approximation floue, où toute fonction réelle continue peut être approximée par un modèle flou avec une précision arbitraire donnée.

Un contrôleur adaptatif flou est conçu pour commander un système flou SISO de type Takagi_Sugeno (TS) dont les paramètres sont ajustés par des lois d'adaptation construites sur la base de la synthèse de Lyapunov.

A.2. Prouve du théorème 1

i). Pour prouver $|\theta_f| \leq M_f$, on prend $V_f = \frac{1}{2} \theta_f^T \theta_f$. Si la première ligne de (I.56) est vraie, nous avons pris $|\theta_f| < M_f$ or $\dot{V}_f = -\gamma_1 e^T P b_c \theta_f^T \xi(x) \leq 0$ quand $|\theta_f| = M_f$, c-à-d, nous avons toujours $|\theta_f| \leq M_f$; si la seconde ligne de (I.56) est vraie nous avons $|\theta_f| = M_f$ et

$$\dot{V}_f = -\gamma_1 e^T P b_c \theta_f^T \xi(x) + \gamma_1 e^T P b_c \frac{|\theta_f|^2 \theta_f^T \xi(x)}{|\theta_f|^2} = 0, \quad \text{c-à-d} \quad |\theta_f| \leq M_f. \quad \text{Donc, nous avons}$$

$|\theta_f(t)| \leq M_f, \forall t \geq 0$. Utilisant la même méthode, nous pouvons le prouver $|\theta_g(t)| \leq M_g, \forall t \geq 0$. de (I.58), on voit que si $\theta_{gi} = \varepsilon$ alors $\dot{\theta}_{gi} \geq 0$, c-à-d, nous avons $\theta_{gi} \geq \varepsilon$ pour tous les éléments θ_{gi} de θ_g .

Dans la section 3 nous prouvons que $\bar{V}_e \leq \bar{V}$, donc, $\frac{1}{2} \lambda_{\min} |e|^2 \leq \frac{1}{2} e^T P e \leq \bar{V}$ c-à-d

$$|e| \leq \left(\frac{2\bar{V}}{\lambda_{\min}} \right)^{1/2}.$$

Puis, $e = y_m - x$, nous avons $|x| \leq |y_m| + |e| \leq |y_m| + \left(\frac{2\bar{V}}{\lambda_{\min}} \right)^{1/2}$ qui est (I.61). Finalement nous prouvons (62).

Puis, $\hat{f}(x/\theta_f)$ et $\hat{g}(x/\theta_g)$ sont les moyennes pondérées des éléments θ_f et θ_g respectivement, nous avons $|\hat{f}(x/\theta_f)| \leq |\theta_f| \leq M_f$ et $|\hat{g}(x/\theta_g)| \geq \varepsilon$ (depuis tous les éléments de $\theta_g \geq \varepsilon$). Alors, de (I.22) nous avons

$$|u_c| \leq \frac{1}{\varepsilon} \left(M_f + |y_m^{(n)}| + |k| \left(\frac{2\bar{V}}{\lambda_{\min}} \right)^{1/2} \right) \quad (\text{A.1})$$

de (31) nous avons,

$$|u_s| \leq \frac{1}{|g_L(x)|} \left[M_f + |f^U(x)| + (M_f + |g^U(x)|) |u_c| \right] \quad (\text{A.2})$$

en combinant (A.1) et (A.2) nous obtenons (I.62).

ii). De l'équation (I.41) et (I.56)-(I.60), nous avons,

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\frac{1}{2} e^T Q e - g(x) e^T P b_c u_s + e^T P b w \\ & + I_1 e^T P b_c \frac{\phi_f^T \theta_f \theta_f^T \xi(x)}{|\theta_f|^2} + I_2 e^T P b_c \frac{\phi_{g^+}^T \theta_{g^+} \theta_{g^+}^T \xi(x) u_c}{|\theta_{g^+}|^2} + I_3 \phi_{g^+}^T e^T P b_c \xi_{\varepsilon}(x) u_c \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

où $I_1 = 0(1)$ si la première (Seconde) ligne de (I.56) est vraie,

$I_2 = 0(1)$ si la première (Seconde) ligne de (I.59) est vraie,

$I_3 = 0(1)$ si la première (Seconde) ligne de (I.58) est vraie,

θ_{g^+} notée la collection de $\theta_{gi} > \varepsilon$, θ_{g^ε} notée la collection de $\theta_{gi} = \varepsilon$, $\phi_{g^+} = \theta_{g^+} - \theta_{g^+}^*$, $\phi_{g^\varepsilon} = \theta_{g^\varepsilon} - \theta_{g^\varepsilon}^*$, et $\xi_+(x)$ ($\xi_\varepsilon(x)$) est la collection des éléments correspond $\xi(x)$ en ce qui concerne θ_{g^+} (θ_{g^ε}). Maintenant, on voit que les trois derniers termes de (A.3) sont non positifs. D'abord, le terme avec I_1 . si $I_1=0$, La conclusion est insignifiante. Puis $I_1=1$, ce le signifie $|\theta_f| = M_f$ et $e^T P b \theta_f^T \xi(x) < 0$, on a :

$$\phi_f \theta_f = (\theta_f - \theta_f^*)^T \theta_f = \frac{1}{2} \left[|\theta_f|^2 - |\theta_f^*|^2 + |\theta_f - \theta_f^*|^2 \right] \geq 0, \text{ puis } |\theta_f| = M_f \geq |\theta_f^*|.$$

Donc, le terme avec I_1 est non positif. De la même façon nous pouvons prouver que le terme avec I_2 est non positif. Finalement, de (I.58) et de ce la $\phi_{gi} = \theta_{gi} - \theta_{gi}^* = \varepsilon - \theta_{gi}^* \leq 0$, nous avons pour le terme avec I_3 est aussi non positif. Donc, on aura

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} e^T Q e - g(x) e^T P b_c u_s + e^T P b_c w \quad (\text{A.4})$$

De (I.31) et $g(x) > 0$, nous avons $g(x) e^T P b_c u_s \geq 0$, alors, (A.4) peut être simplifié à,

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} e^T Q e + e^T P b_c w \leq -\frac{\lambda_{Q_{\min}} - 1}{2} |e|^2 - \frac{1}{2} \left[|e|^2 - 2e^T P b_c w + |P b_c w|^2 \right] \leq -\frac{\lambda_{Q_{\min}} - 1}{2} |e|^2 + \frac{1}{2} |P b_c w|^2 \quad (\text{A.5}).$$

où $\lambda_{Q_{\min}}$ est la valeur propre minimale de Q. Intégrant les deux côtés de (A.5) et l'assumant

$\lambda_{Q_{\min}} > 1$ on aura,

$$\int_0^t |e(\tau)|^2 d\tau \leq \frac{2}{\lambda_{Q_{\min}} - 1} \left[|V(0)| + |V(t)| \right] + \frac{1}{\lambda_{Q_{\min}} - 1} |P b_c|^2 \int_0^t |w(\tau)|^2 d\tau \quad (\text{A.6})$$

on à définie $a = \frac{2}{\lambda_{Q_{\min}} - 1} \left[|V(0)| + \sup_{t \geq 0} |V(t)| \right]$ et $b = \frac{1}{\lambda_{Q_{\min}} - 1} |P b_c|^2$, (A.6) devient (I.63).

iii). Si $w \in L_2$, alors de (I.62) nous avons $e \in L_2$. Parce que nous l'avons prouvé toutes les variables dans le côté droit de (I.47) sont limitées, nous avons $\dot{e} \in L_\infty$, utilisant le théorème de Barbalat [17] (si $e \in L_2 \cap L_\infty$ et $\dot{e} \in L_\infty$ donc $\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = 0$), nous avons $\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = 0$.

A.3. Prouve du théorème 2

Comparant l'équation d'erreur (I.39) du premier contrôleur adaptatif flou avec l'équation d'erreur (I.47) du deuxième contrôleur adaptatif flou, nous voyons qu'ils sont les mêmes si nous remplaçons w par v et $\xi(x)$ par $\frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta_f}$ et $\frac{\partial \hat{g}}{\partial \theta_g}$ [comme en (I.47)].

Aussi, même comme (I.58), les lois d'adaptation (I.72), (I.74) et (I.75) garantissent les termes $\sigma_{fi}^l \geq \sigma$, $\bar{y}_{gi}^l \geq \varepsilon$ et $\sigma_{gi}^l \geq \sigma$. Donc, employant exactement la même procédure que dans la preuve du théorème 1, nous pouvons prouver ce théorème 2.

Annexe_B

B.1. Fonction de Lyapunov :

B.1.1. analogie mécanique :

Considérons par exemple un système non linéaire, l'intégration de ce système est difficile ou même impossible. Cependant, un résultat certain apparaît lorsqu'on s'intéresse à l'énergie mécanique emmagasinée dans le système : c'est une fonction qui décroît avec le temps, ce qui conduit finalement à l'immobilisation du système.

Elle est due cette décroissance à la dissipation d'énergie liée aux frottements, ou plus généralement à la non réversibilité des phénomènes de transport et de transformation de l'énergie.

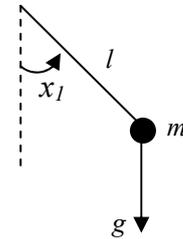
Ainsi, dans les systèmes dissipatifs, l'énergie décroît, et le système est stable quelque part. un cas limite est celui des conservatifs (sans frottement) qui peuvent rester éternellement en dehors de l'équilibre.

B.1.2. Exemple

On considère un pendule pesant :

$$dx_1 / dt = x_2$$

$$dx_2 / dt = -(g/l)\sin(x_1) - (f/l)x_2$$



on vérifie sans peine que $[x_1, x_2] = [2k\pi, 0]$ sont des points d'équilibre, stables localement en vertu du *premier théorème de Lyapunov*.

Définissons la fonction énergie **E** en ajoutant l'énergie cinétique et l'énergie potentielle,

$$E(x) = (g/l)(1 - \cos x_1) + (1/2)x_2^2$$

positive ou nulle, et calculons sa variation au cours du temps,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = \begin{bmatrix} (g/l)\sin x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ -(g/l)\sin x_1 - (f/m)x_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dE}{dt} = -(f/m)x_2^2$$

la variation d'énergie est toujours négative dès qu'il y a un mouvement, le système est donc stable (chaque mouvement diminue l'énergie, et il s'arrêtera en un point d'énergie minimum).

B.2. Seconde méthode de Lyapunov

B.2.1. Deuxième théorème

Soit $x = x_e$ un point d'équilibre, et D un domaine entourant l'équilibre.

S'il existe une fonction dérivable $V(x)$ telle que,

$$V(0) = 0$$

$$V(x) > 0 \text{ pour } x \neq 0$$

Alors, l'équilibre est stable si $\partial V / \partial t < 0$ dans le domaine D et asymptotiquement stable si $\partial V / \partial t = 0$ seulement en $x = x_e$.

La méthode est alors la suivante :

- Pour prouver la stabilité d'un équilibre, on recherche une fonction positive de l'état dont la dérivée dans le temps est négative.
- Si une fonction positive possède une dérivée temporelle non négative, alors on ne peut rien conclure.

B.3. Applications sur le pendule pesant :

Considérons pour le pendule, étudié pour $|x_1| < \pi$, la fonction

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x + (g/l)(1 - \cos x_1)$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{f^2}{2m^2} & \frac{f}{2m} \\ \frac{f}{2m} & 1 \end{bmatrix}$$

avec, la fonction $V(x)$ est évidemment positive, car P est définie positive. Sa dérivée est,

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{gf}{2lm} x_1 \sin x_1 - \frac{kx_2^2}{2m}$$

qui est négative, et nulle seulement en $x=[0,0]$. L'équilibre est donc asymptotiquement stable.

B.4. Recherche de fonction de Lyapunov

La recherche d'une fonction satisfaisant les conditions ci-dessus est parfois délicate, la découverte d'une telle fonction n'est pas garantie.

En général, on commence par essayer des fonctions quadratiques de l'état,

$$V(x) = x^T P x, P \text{ définie positive.}$$

D'autres fonctions, comportant des intégrales, sont aussi employées. En règle générale, on cherche une fonction candidate avec un nombre suffisant de paramètres pour pouvoir rendre sa dérivée négative. Ce sujet sera abordé à propos de la commande par les fonctions de Lyapunov.

B.5. Note

Pour un système non linéaire stable $\dot{x} = Ax$, une fonction de Lyapunov peut être trouvée à coup sûr sous la forme $V(x) = x^T P x$, P étant solution de l'équation $PA + A^T P = -I$.

Pour le pendule pesant, avec la fonction proposée, une trajectoire traversant les lignes de niveau en descendant est représentée de la même manière.

B.6. Méthode de Backstepping**B.6.1. Développement théorique de quelques équations**

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{y}_r \\
&= x_2 + \varphi_1^T \theta - \dot{y}_r \\
&= z_2 + \dot{y}_r + \alpha_1 + \varphi_1^T \hat{\theta} + \varphi_1^T \tilde{\theta} - \dot{y}_r \\
&= z_2 - c_1 z_1 - w_1^T \hat{\theta} + \varphi_1^T \hat{\theta} + \varphi_1^T \tilde{\theta} \\
&= z_2 - c_1 z_1 + \varphi_1^T \tilde{\theta}
\end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_2 &= \dot{x}_2 - y_r^{(2)} - \dot{\alpha}_1(x_1, \hat{\theta}, y_r) \\
&= \dot{x}_2 - y_r^{(2)} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r \\
&= x_3 + \varphi_2^T \theta - y_r^{(2)} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (x_2 + \varphi_1^T \theta) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r \\
&= z_3 + y_r^{(2)} + \alpha_2 + \varphi_2^T \theta - y_r^{(2)} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (x_2 + \varphi_1^T \theta) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r \\
&= z_3 + \alpha_2 + \varphi_2^T \tilde{\theta} + \varphi_2^T \hat{\theta} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (x_2 + \varphi_1^T \theta) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \varphi_1^T \tilde{\theta} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r \\
&= z_3 + \left[-z_1 - c_2 z_2 - \left(\varphi_2^T - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \varphi_1^T \right) \hat{\theta} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r + v_2 \right] \\
&\quad + \varphi_2^T \tilde{\theta} + \varphi_2^T \hat{\theta} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (x_2 + \varphi_1^T \theta) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \varphi_1^T \tilde{\theta} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r \\
&= -z_1 - c_2 z_2 - z_3 + \varphi_2^T \tilde{\theta} + v_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \varphi_1^T \tilde{\theta} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \\
&= -z_1 - c_2 z_2 - z_3 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \tau_2 + \left(\varphi_2^T - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \varphi_1^T \right) \tilde{\theta} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}}
\end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}
V_2 &= \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \\
\dot{V}_2 &= z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 - \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \\
&= -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 + z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \left[\Gamma \tau_2 - \dot{\hat{\theta}} \right] + \tilde{\theta}^T \left[z_1 \varphi_1 + z_2 \left(\varphi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \varphi_1 \right) - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \right]
\end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_3 &= -z_2 - c_3 z_3 + v_3 + w_3^T \tilde{\theta} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \tau_2 \\
&= -z_2 - c_3 z_3 + w_3^T \tilde{\theta} + z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \Gamma w_3 \\
&= (-1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \Gamma w_3) z_2 - c_3 z_3 + w_3^T \tilde{\theta} \\
&= (-1 - \sigma_{23}) z_2 - c_3 z_3 + w_3^T \tilde{\theta}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \hat{x}_2 + \varepsilon_2 + \varphi_1(y)^T \theta - \dot{y}_r \\
&= \zeta_2(t) + \lambda_2(t) \theta + v_2(t) \theta_u + \varepsilon_2 + \varphi_1(y)^T \theta - \dot{y}_r \\
&= \zeta_2(t) + \lambda_2(t) \theta + v_2(t) \theta_u + \varepsilon_2 + \varphi_1(y)^T \tilde{\theta} + \varphi_1(y)^T \hat{\theta} - \dot{y}_r \\
&= (v_2 \hat{\theta}_u - \dot{y}_r - \alpha_1) + \alpha_1 + \zeta_2 + \lambda_2 \hat{\theta} + \varphi_1^T \hat{\theta} + (\lambda_2 + \varphi_1^T) \tilde{\theta} + v_2 \tilde{\theta}_u + \varepsilon_2 \\
&= z_2 + \alpha_1 + \zeta_2 + (\lambda_2 + \varphi_1^T) \hat{\theta} + (\lambda_2 + \varphi_1^T) \tilde{\theta} + v_2 \tilde{\theta}_u + \varepsilon_2
\end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= z_1(z_2 - c_1 z_1 - d_1 z_1 + (\lambda_2 + \varphi_1^T) \tilde{\theta} + v_2 \tilde{\theta}_u + \varepsilon_2) + \tilde{\theta}^T \left(-\frac{1}{g} \dot{\hat{\theta}} \right) + \tilde{\theta}_u^T \left(-\frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) - \frac{1}{d_1} \varepsilon^T \varepsilon \\
&= -c_1 z_1^2 + z_1(z_2 + (\lambda_2 + \varphi_1^T) \tilde{\theta} + v_2 \tilde{\theta}_u) - d_1 z_1^2 + z_1 \varepsilon_2 - \frac{1}{d_1} \varepsilon^T \varepsilon + \tilde{\theta}^T \left(-\frac{1}{g} \dot{\hat{\theta}} \right) + \tilde{\theta}_u^T \left(-\frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) \\
&= -c_1 z_1^2 - d_1 \left(z_1 - \frac{\varepsilon_2}{2d_1} \right)^2 + \frac{\varepsilon_2^2}{4d_1} - \frac{1}{d_1} \varepsilon^T \varepsilon + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^T \left(z_1 (\lambda_2 + \varphi_1^T)^T - \frac{1}{g} \dot{\hat{\theta}} \right) + \tilde{\theta}_u^T \left(z_1 v_2 - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right)
\end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\
&= \dot{x} - \left(\dot{\zeta}(t) + \dot{\lambda}(t) \theta + \dot{v}(t) \theta_u \right) \\
&= \dot{x} - \left((A\zeta - K\zeta_1 + Ky) + (A\lambda - K\lambda_1 + \varphi^T(y)) \theta + (Av - Kv_1 + Bu) \theta_u \right) \\
&= \dot{x} - \left(A(\zeta + \lambda \theta + v \theta_u) + K(\zeta_1 + \lambda_1 \theta + v_1 \theta_u) \right) + \varphi^T(y) \theta + Bu \theta_u
\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \hat{x}_2 + \varepsilon_2 + \varphi_1^T \theta - \dot{y}_r \\
&= \zeta_2(t) + \lambda_2(t) \theta + v_2(t) \theta_u + \varepsilon_2 + \varphi_1^T \theta - \dot{y}_r \\
&= \zeta_2(t) + \lambda_2(t) (\hat{\theta} + \tilde{\theta}) + v_2(t) (\hat{\theta}_u + \tilde{\theta}_u) + \varepsilon_2 + \varphi_1^T (\hat{\theta} + \tilde{\theta}) - \dot{y}_r \\
&= (v_2 \hat{\theta}_u - \dot{y}_r - \alpha_1) + \alpha_1 + \zeta_2 + \lambda_2 \hat{\theta} + \varphi_1^T \hat{\theta} + (\lambda_2 + \varphi_1^T) \tilde{\theta} + v_2 \tilde{\theta}_u + \varepsilon_2 \\
&= z_2 + \alpha_1 + \zeta_2 + (\lambda_2 + \varphi_1^T) (\hat{\theta} + \tilde{\theta}) + v_2 \tilde{\theta}_u + \varepsilon_2
\end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= z_1(z_2 - c_1 z_1 - d_1 z_1 + (\lambda_2 + \varphi_1^T)\tilde{\theta} + v_2 \tilde{\theta}_u + \varepsilon_2) + \tilde{\theta}^T \left(-\frac{1}{g} \dot{\hat{\theta}} \right) + \tilde{\theta}_u^T \left(-\frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) - \frac{1}{d_1} \varepsilon^T \varepsilon \\
&= -c_1 z_1^2 + z_1 \left(z_2 + (\lambda_2 + \varphi_1^T)\tilde{\theta} + v_2 \tilde{\theta}_u \right) - d_1 z_1^2 + z_1 \varepsilon_2 - \frac{1}{d_1} \varepsilon^T \varepsilon + \tilde{\theta}^T \left(-\frac{1}{g} \dot{\hat{\theta}} \right) + \tilde{\theta}_u^T \left(-\frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) \quad (\text{B.9}) \\
&= -c_1 z_1^2 - d_1 \left(z_1^2 - z_1 \frac{\varepsilon_2}{d_1} + \frac{\varepsilon_2^2}{4d_1^2} \right) + \frac{\varepsilon_2^2}{4d_1} - \frac{1}{d_1} \varepsilon^T \varepsilon + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^T \left(z_1 (\lambda_2 + \varphi_1^T)^T - \frac{1}{g} \dot{\hat{\theta}} \right) + \tilde{\theta}_u^T \left(z_1 v_2 - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) \\
&= -c_1 z_1^2 - d_1 \left(z_1 - \frac{\varepsilon_2}{2d_1} \right)^2 + \frac{\varepsilon_2^2}{4d_1} - \frac{1}{d_1} \varepsilon^T \varepsilon + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^T \left(z_1 (\lambda_2 + \varphi_1^T)^T - \frac{1}{g} \dot{\hat{\theta}} \right) + \tilde{\theta}_u^T \left(z_1 v_2 - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= z_1 \left(\zeta_2 + \lambda_2 \theta_1 + v_2 \theta_u + \varepsilon_2 - \dot{y}_r \right) + \tilde{\theta}_1^T \left(-\frac{1}{g_1} \dot{\hat{\theta}}_1 \right) - \tilde{\theta}_u^T \left(-\frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) - \frac{1}{d_1} \varepsilon^T \varepsilon \\
&= z_1 \left(\zeta_2 + \lambda_2 \hat{\theta}_1 + v_2 \hat{\theta}_u + \lambda_2 \tilde{\theta}_1 + v_2 \tilde{\theta}_u + \varepsilon_2 - \dot{y}_r \right) + \tilde{\theta}_1^T \left(-\frac{1}{g_1} \dot{\hat{\theta}}_1 \right) + \tilde{\theta}_u^T \left(-\frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) - \frac{1}{d_1} \varepsilon^T \varepsilon \quad (\text{B.10}) \\
&= z_1 \left(\zeta_2 + \lambda_2 \hat{\theta}_1 + v_2 \hat{\theta}_u - \dot{y}_r + \alpha_1 - \alpha_1 \right) + z_1 \varepsilon_2 + \tilde{\theta}_1^T \left(z_1 \lambda_2 - \frac{1}{g_1} \dot{\hat{\theta}}_1 \right) + \tilde{\theta}_u^T \left(z_1 v_2^T - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) - \frac{1}{d_1} \varepsilon^T \varepsilon \\
&= z_1 \left(z_2 + \alpha_1 + \zeta_2 + \lambda_2 \hat{\theta}_1 \right) + z_1 \varepsilon_2 + \tilde{\theta}_1^T \left(z_1 \lambda_2 - \frac{1}{g_1} \dot{\hat{\theta}}_1 \right) + \tilde{\theta}_u^T \left(z_1 v_2^T - \frac{1}{g_u} \dot{\hat{\theta}}_u \right) - \frac{1}{d_1} \varepsilon^T \varepsilon
\end{aligned}$$

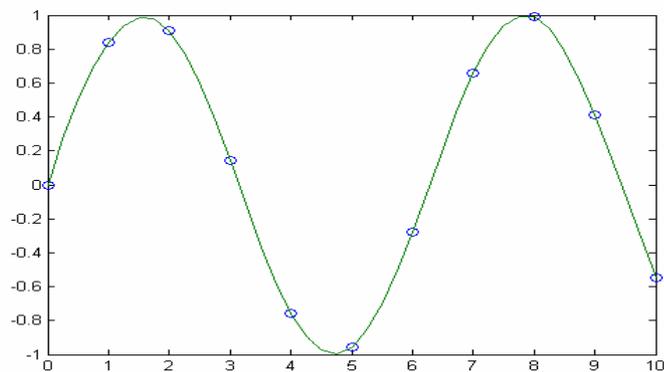
$$\begin{aligned}
(z_1 + \dot{z}_2) &= z_1 + \frac{d(v_2 \hat{\theta}_u - \dot{y}_r - \alpha_1)}{dt} \\
&= z_1 + \dot{v}_2 \hat{\theta}_u + v_2 \dot{\hat{\theta}}_u - \dot{y}_r - \dot{\alpha}_1 \\
&= z_1 + (-k_2 v_1 + u) \hat{\theta}_u - \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta_2} \dot{\zeta}_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \lambda_2} \dot{\lambda}_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}_1} \dot{\hat{\theta}}_1 \right) - \dot{y}_r \quad (\text{B.11}) \\
&= \alpha_2 + z_1 - k_2 (\zeta_1 + \lambda_1 \hat{\theta}_1 + v_1 \hat{\theta}_u) + c_1^* (\zeta_2 + \lambda_2 \hat{\theta}_1 + v_2 \hat{\theta}_u) + c_2^* (\lambda_2 \tilde{\theta}_1 + v_2 \tilde{\theta}_u) \\
&\quad - c_1^* \dot{y}_r + k_2 y - \dot{y}_r + c_1^* \varepsilon_2 + \lambda_2 \dot{\hat{\theta}}_1 + v_2 \dot{\hat{\theta}}_u + \varphi(y) \hat{\theta}_1
\end{aligned}$$

Annexe_C

C.1. Exemple d'une fonction spline

Cela produit une courbe de sinus, alors des échantillons du spline sur une maille plus fine.

```
x = 0:10;
y = sin(x);
xx = 0:.25:10;
yy = spline(x,y,xx);
plot(x,y,'o',xx,yy)
```



C.2. B-spline

Ce exemple montre un B-spline et ses pièces de polynôme

```
bspline(t)
bspline(t>window)
pp = bspline(t)
```

Description

`bspline(t)` trace $B(\cdot|t)$, c'est-à-dire, le B-spline avec l'ordre de noeud t , aussi bien que les pièces de polynôme il est composé.

Si le deuxième argument, la fenêtre, est présent, la trace est fait dans la fenêtre de sous trace indiquée par la fenêtre, voir le sous complot de commande de MATLAB pour des détails. S'il y a un argument de production, donc rien n'est tracé et la forme de `pp` du B-spline est rendu au lieu de cela.

C.3. Dérivée de Lie

Prenons le système non linéaire

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t)$$

$$y(t) = h(x(t))$$

où $x \in \mathfrak{X}^n$, f et g sont des fonctions vecteurs (vecteurs de champs) non linéaires lisses appartenant à \mathfrak{X}^n et h est une fonction non linéaire lisse.

$x_e \in U \subset \mathfrak{X}^n$ est un point d'équilibre tel que $f(x_e) = 0$ et U est l'ensemble contenant le voisinage du point d'équilibre. Alors

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial h}{\partial x} f(x) + \frac{\partial h}{\partial x} g(x)u \\ &= L_f h(x) + L_g h(x)u \end{aligned}$$

où $L_f h(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ est la dérivée de Lie de h par rapport à f et $L_g h(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ est la dérivée de Lie de h par rapport à g .

Si $|L_g h(x)| > \delta_1, \forall x \in U$ définissons

$$u = \frac{1}{L_g h(x)} \left[-L_f h(x) + v \right] \quad (\text{C.1})$$

Alors, $\dot{y} = v$

est le système linéaire du second ordre de la nouvelle entrée v à la sortie y . La loi de commande (C.1) rend $1-n$ des états du système non linéaire non observable à travers le retour d'état.

Si $|L_g h(x)| = 0, \forall x \in U$ prenons la dérivée seconde de y pour avoir

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{\partial L_f h}{\partial x} f(x) + \frac{\partial L_g h}{\partial x} g(x)u \\ &= L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u \end{aligned}$$

Si $|L_g L_f h(x)| > \delta_1, \forall x \in U$ définissons

$$u = \frac{1}{L_g L_f h(x)} \left[-L_f^2 h(x) + v \right] \quad (\text{C.2})$$

Alors, $\ddot{y} = v$

est le système linéaire du second ordre de la nouvelle entrée v à la sortie y . La loi de commande (C.2) rend $2-n$ des états du système non linéaire non observable à travers le retour d'état.

En général, si γ est le plus petit entier pour lequel $|L_g L_f^i h(x)| = 0 \forall x \in U$ pour $i = 1, \dots, \gamma - 2$,

et $|L_g L_f^\gamma h(x)| > \delta_\gamma, \forall x \in U$. Alors, la loi de commande donnée par :

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\gamma-1} h(x)} \left[-L_f^\gamma h(x) + v \right] \quad (\text{C.3})$$

produit le système linéaire du γ^{eme} ordre de la nouvelle entrée v à la sortie y ,

$$y^{(\gamma)} = v.$$

C.4. Degré relatif

Le système non linéaire SISO est dit d'avoir un degré relatif γ à $x_e \in U$, si

$$\left| L_g L_f^i h(x) \right| = 0 \quad \forall x \in U \text{ pour } i = 1, \dots, \gamma - 2 \text{ et } L_g L_f^{\gamma-1} h(x) \neq 0$$

C.5. forme normale

Si un système non linéaire à une seule entrée / une seule sortie a le degré relatif $n \leq \gamma$ à un certain point x^0 , il est possible de transformer le système non linéaire en une forme normale comme suit :

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= h(x) = \xi_1 \\
\phi_2(x) &= L_f h(x) = \xi_2 \\
&\vdots \\
\phi_\gamma(x) &= L_f^{\gamma-1} h(x) = \xi_\gamma \\
\eta_1(x) & \\
&\vdots \\
\eta_{n-\gamma}(x) &
\end{aligned}$$

On a un ensemble de γ coordonnées qui dépendent de $h(x)$, cet ensemble est complété par $n - \gamma$ coordonnées. Maintenant, le problème est de démontrer que les n équations sont linéairement indépendantes.

Pour cela, considérons la fonction $\Phi : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ telle que

$$\Phi : x \mapsto \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \vdots \\ \phi_\gamma(x) \\ \eta_1(x) \\ \vdots \\ \eta_{n-\gamma}(x) \end{bmatrix}$$

C.6. Fonction diffeomorphisme

La fonction $\Phi(x)$ est appelée un diffeomorphisme, si elle est une fonction lisse un à un, avec un inverse lisse.

La fonction $\Phi : U \rightarrow U$ est un diffeomorphisme, si son Jacobien $D\Phi$ a un rang plein (rang complet).

C.7. Preuve de la supposition 1

D'abord, on définit $\tilde{\xi} = \xi - \hat{\xi}$ et sa dérivée donnée comme,

$$\dot{\tilde{\xi}} = \Gamma \tilde{\xi} + \psi(y, \alpha) - \psi(y_m, \alpha) \tag{C.1}$$

Alors, nous considérons la fonction de Lyapunov

$$V_1 = \frac{1}{2} e_0^2 + \tilde{\xi}^T P \tilde{\xi} \tag{C.2}$$

où P est une matrice symétrique positive définie satisfaisant la forme suivante,

$$\Gamma^T P + P \Gamma = -Q \leq -(q_0 + \rho \varepsilon_2) I < 0 \tag{C.3}$$

où I est une matrice d'identité $(n-1) \times (n-1)$ et $\varepsilon_2 > 0$ un constant positif. En différenciant V_1 long des trajectoires de solution de (8) et (52), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= e_0 \dot{e}_0 + \tilde{\xi}^T P \dot{\tilde{\xi}} + \dot{\tilde{\xi}}^T P \tilde{\xi} \\
&= e_0 (\dot{\tilde{\xi}}_1 + \hat{\xi}_1) + \frac{d}{d_1} e_0^2 - e_0 [\phi(e_0, y_m, \alpha) + a_1 y_m] - |d_1| k_{11} e_0^2 - |d_1| k_{11} e_0^2 \\
&\quad - \tilde{\xi}^T Q \tilde{\xi} + 2 \tilde{\xi}^T P [\beta e_0 + \psi(y, \alpha) - \psi(y_m, \alpha)] \\
&\leq |e_0| (\|\hat{\xi}\| + |\phi| + |a_1| |y_m| - |d_1| \delta_0 k_{12}) + \left(\left| \frac{d_2}{d_1} \right| - |d_1| k_{11} \right) e_0^2 \\
&\quad + 2 \|\tilde{\xi}\| |e_0| \left[\frac{1}{2} + \|P\| (\|\beta\| + l_\phi) \right] - q_0 \|\tilde{\xi}\|^2 - \rho \varepsilon_2 \|\tilde{\xi}\|^2 \\
&\leq |e_0| (\|\hat{\xi}\| + |\phi| + |a_1| |y_m| - |d_1| k_{12}) + \left(\left| \frac{d_2}{d_1} \right| - |d_1| k_{11} \right) e_0^2 \\
&\quad + \frac{\left[\frac{1}{2} + \|P\| (\|\beta\| + l_\phi) \right]^2}{q_0} e_0^2 - \left[\frac{\frac{1}{2} + \|P\| (\|\beta\| + l_\phi)}{\sqrt{q_0}} e_0 - \sqrt{q_0} \|\tilde{\xi}\| \right]^2 - \rho \varepsilon_2 \|\tilde{\xi}\|^2 \\
&\leq -\rho \varepsilon_1 e_0^2 - \rho \varepsilon_2 \|\tilde{\xi}\|^2
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Cela implique que e_0 et $\tilde{\xi}$ sont bornées, et l'erreur e_0 converge à zéro selon la théorie de stabilité de Lyapunov, qui complète la preuve.

C.8. Preuve de la supposition 2

On définit la nouvelle variable $e_{0\Delta}$ comme suit :

$$e_{0\Delta} = \begin{cases} e_0 & \text{comme } e_0 < -\Delta_e \text{ or } e_0 > \Delta_e \\ 0 & \text{ailleurs (i.e. } e_0 \in [-\Delta_e, \Delta_e] \end{cases} \tag{C.5}$$

pour que

$$\dot{e}_{0\Delta} = \dot{e}_0 \text{ pour } e_{0\Delta} \neq 0$$

considérons la fonction de Lyapunov

$$V_\Delta = \frac{1}{2} e_{0\Delta}^2 + \tilde{\xi}^T P \tilde{\xi} \tag{C.6}$$

Comparable à la procédure de prouver la proposition 1, nous pouvons facilement le tirer

$$\dot{V}_\Delta \leq \begin{cases} -\rho \varepsilon_1 e_{0\Delta}^2 - \rho \varepsilon_2 \|\tilde{\xi}\|^2 & \text{pour } e_{0\Delta} > 0 \\ -\rho \varepsilon_2 \|\tilde{\xi}\|^2 + \left[\frac{\frac{1}{2} + \|P\| (\|\beta\| + l_\phi)}{\sqrt{q_0}} e_0 \right]^2 & \text{pour } e_{0\Delta} = 0 \end{cases} \tag{C.7}$$

d'abord, implique que $e_{0\Delta}$ (e_0) et $\tilde{\xi}$ sont bornées. Ensuite, nous pouvons conclure que $e_{0\Delta} \rightarrow 0$ selon la théorie de stabilité de Lyapunov, qui implique $e_0 \rightarrow [-\Delta_e, \Delta_e]$.

C.9. Preuve de la supposition 3

On considère la fonction de Lyapunov comme,

$$V_2 = \frac{1}{2} e_{0\Delta}^2 + \tilde{\xi}^T P \tilde{\xi} + \frac{1}{2} \tilde{\eta}_1^2 \quad (\text{C.8})$$

sa dérivée pour $e_{0\Delta} > 0$ est,

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= e_{0\Delta} (\dot{e}_{0\Delta} - d_1 \eta_1^\diamond + d_1 \dot{\eta}_1^\diamond) + \tilde{\xi}^T P \dot{\tilde{\xi}} + \dot{\tilde{\xi}}^T P \tilde{\xi} + \tilde{\eta}_1 \dot{\tilde{\eta}}_1 \\ &\leq -\rho \varepsilon_1 e_{0\Delta}^2 - \rho \varepsilon_2 \|\tilde{\xi}\|^2 + d_1 e_{0\Delta} \tilde{\eta}_1 + \tilde{\eta}_1 \dot{\tilde{\eta}}_1 \\ &\leq -\rho \varepsilon_1 e_{0\Delta}^2 - \rho \varepsilon_2 \|\tilde{\xi}\|^2 + \tilde{\eta}_1 \left[d_1 e_{0\Delta} + \frac{\partial \eta_1^\diamond}{\partial e_0} \dot{e}_0 - (\lambda_1 + k_{21}) \tilde{\eta}_1 - k_{22} \text{sgn}(\tilde{\eta}_1) \right] \\ &\leq -\rho \varepsilon_1 e_{0\Delta}^2 - \rho \varepsilon_2 \|\tilde{\xi}\|^2 - \left(\lambda_1 - d_1 \frac{\partial \eta_1^\diamond}{\partial e_0} + k_{21} \right) \tilde{\eta}_1^2 + \frac{\partial \eta_1^\diamond}{\partial e_0} \tilde{\eta}_1 \tilde{\xi} + \left(d_1 + \frac{d_2}{d_1} \frac{\partial \eta_1^\diamond}{\partial e_0} \right) e_{0\Delta} \tilde{\eta}_1 \\ &\quad + \tilde{\eta}_1 \left\{ \frac{\partial \eta_1^\diamond}{\partial e_0} \left[\hat{\xi}_1 - \phi - a_1 y_m - d_1 \eta_1^\diamond + \frac{d_1}{d_2} (e_0 - e_{0\Delta}) \right] - k_{22} \text{sgn}(\tilde{\eta}_1) \right\} \\ &\leq -(\rho - 1) \varepsilon_1 e_{0\Delta}^2 - (\rho - 1) \varepsilon_2 \|\tilde{\xi}\|^2 - \lambda_1 \tilde{\eta}_1^2 \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

et

$$\dot{V}_2 \leq -(\rho - 1) \varepsilon_2 \|\tilde{\xi}\|^2 - \lambda_1 \tilde{\eta}_1^2 + \left[\frac{\frac{1}{2} + \|P\|(\|\beta\| + l_\phi)}{\sqrt{q_0}} e_0 \right]^2 + \varepsilon_1 e_0^2 \quad \text{pour } e_{0\Delta} = 0 \quad (\text{C.10})$$

avec comparaison implique que tout les signaux sont bornées et $e_{0\Delta}$ converge à zéro.

C.10. Preuve de théorème 1

On considère la fonction de Lyapunov comme,

$$V_\Delta = \frac{1}{2} e_{0\Delta}^2 + \tilde{\xi}^T P \tilde{\xi} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\rho-1} \tilde{\eta}_{j\Delta}^2 \quad (\text{C.11})$$

Sa dérivée pour $e_{0\Delta} > 0$ est donnée comme suit,

$$\begin{aligned}
\dot{V}_\Delta &= e_{0\Delta} (\dot{e}_{0\Delta} - d_1 \eta_1^\diamond + d_1 \dot{\eta}_1^\diamond) + \tilde{\xi}^T P \dot{\tilde{\xi}} + \dot{\tilde{\xi}}^T P \tilde{\xi} + \tilde{\eta}_{1\Delta} (\dot{\tilde{\eta}}_1 - \eta_2^\diamond + \dot{\eta}_2^\diamond) + \sum_{j=2}^{\rho-1} (\tilde{\eta}_{j\Delta} \dot{\tilde{\eta}}_j) \\
&\leq -\rho \varepsilon_1 e_{0\Delta}^2 - \rho \varepsilon_2 \|\tilde{\xi}\|^2 - e_{0\Delta} [k_{\delta_1} e_0 - d_1 (\tilde{\eta}_1 - \tilde{\eta}_{1\Delta})] \\
&\quad + \tilde{\eta}_{1\Delta} \left[d_1 e_{0\Delta} + \frac{\partial \eta_1^\diamond}{\partial e_0} \dot{e}_0 - (\lambda_1 + k_{21} + k_{\delta_2}) \tilde{\eta}_1 - k_{22} \operatorname{sgn}(\tilde{\eta}_1) \right] + \sum_{j=2}^{\rho-1} (\tilde{\eta}_{j\Delta} \dot{\tilde{\eta}}_j) \\
&\leq -(\rho-1) \varepsilon_1 e_{0\Delta}^2 - (\rho-1) \varepsilon_2 \|\tilde{\xi}\|^2 - \lambda_1 \tilde{\eta}_{1\Delta}^2 - e_{0\Delta} [k_{\delta_1} e_0 - d_1 (\tilde{\eta}_1 - \tilde{\eta}_{1\Delta})] \\
&\quad - \tilde{\eta}_{1\Delta} [k_{\delta_2} \tilde{\eta}_1 - (\tilde{\eta}_2 - \tilde{\eta}_{2\Delta}) + \tilde{\eta}_{2\Delta}] + \sum_{j=2}^{\rho-1} \left(\tilde{\eta}_{j\Delta} [g_{1j} (\dot{\xi}_1 - \phi - a_1 y_m - d_1 \eta_1^\diamond) + g_{1j} \tilde{\xi}_1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{d_1}{d_2} g_{1j} e_0 + g_{2j} \tilde{\eta}_1 + \dots + (g_{jj} + 1) \tilde{\eta}_{j-1} + g_{(j+1)j} \tilde{\eta}_j - k_{j+1} - k_{\delta_{j+1}} \tilde{\eta}_j + \tilde{\eta}_{j+1}] \right) \quad (C.12) \\
&\leq -(\rho-1) \varepsilon_1 e_{0\Delta}^2 - (\rho-1) \varepsilon_2 \|\tilde{\xi}\|^2 - (\rho-1) \varepsilon_3 \tilde{\eta}_{1\Delta}^2 + \sum_{j=2}^{\rho-1} \left(\tilde{\eta}_{j\Delta} [g_{1j} (\dot{\xi}_1 - \phi - a_1 y_m - d_1 \eta_1^\diamond) + g_{1j} \tilde{\xi}_1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{d_1}{d_2} g_{1j} e_{0\Delta} + g_{2j} \tilde{\eta}_{1\Delta} + \dots + (g_{jj} + 1) \tilde{\eta}_{(j-1)\Delta} + g_{(j+1)j} \tilde{\eta}_{j\Delta} - k_{j+1}] \right) - \sum_{j=2}^{\rho-1} [(\rho-j) \varepsilon_{j+2} \tilde{\eta}_{j\Delta}^2] \\
&\quad - \sum_{j=2}^{\rho-1} \left(\tilde{\eta}_{j\Delta} \left[k_{\delta_{j+1}} \tilde{\eta}_j - (\tilde{\eta}_{j+1} - \tilde{\eta}_{(j+1)\Delta}) - \frac{d_1}{d_2} g_{1j} (e_0 - e_{0\Delta}) - \dots - g_{jj} (\tilde{\eta}_{j-1} - \tilde{\eta}_{(j-1)\Delta}) \right] \right) \\
&\leq -\varepsilon_1 e_{0\Delta}^2 - \varepsilon_2 \|\tilde{\xi}\|^2 - \sum_{j=1}^{\rho-1} \varepsilon_{j+2} \tilde{\eta}_{j\Delta}^2 - \sum_{j=2}^{\rho-1} \left[\left(\sqrt{\varepsilon_1} e_{0\Delta} - \frac{(d_2/d_1) g_{1j}}{2\sqrt{\varepsilon_1}} \tilde{\eta}_{j\Delta} \right)^2 + \left(\sqrt{\varepsilon_2} \|\tilde{\xi}\| - \frac{g_{1j}}{2\sqrt{\varepsilon_2}} \tilde{\eta}_{j\Delta} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\sqrt{\varepsilon_3} \tilde{\eta}_{1\Delta} - \frac{g_{2j}}{2\sqrt{\varepsilon_3}} \tilde{\eta}_{j\Delta} \right)^2 + \dots + \left(\sqrt{\varepsilon_j} \tilde{\eta}_{(j-2)\Delta} - \frac{(g_{(j-1)j}}{2\sqrt{\varepsilon_j}} \tilde{\eta}_{j\Delta} \right)^2 + \left(\sqrt{\varepsilon_{j+1}} \tilde{\eta}_{(j-1)\Delta} - \frac{(g_{jj} + 1)}{2\sqrt{\varepsilon_{j+1}}} \tilde{\eta}_{j\Delta} \right)^2 \right] \\
&\leq -\varepsilon_1 e_{0\Delta}^2 - \varepsilon_2 \|\tilde{\xi}\|^2 - \sum_{j=1}^{\rho-1} \varepsilon_{j+2} \tilde{\eta}_{j\Delta}^2
\end{aligned}$$

Tandis que,

$$\dot{V}_\Delta \leq \varepsilon_2 \|\tilde{\xi}\|^2 - \sum_{j=1}^{\rho-1} \varepsilon_{j+2} \tilde{\eta}_{j\Delta}^2 + \left[\frac{1 + \|P\|(\|\beta\| + l_\phi)}{2\sqrt{q_0}} e_0 \right]^2 + (\rho-1) \varepsilon_1 e_0^2 \quad \text{pour } e_{0\Delta} = 0. \quad (C.13)$$

Par la théorie de stabilité de Lyapunov, il est clair que $e_{0\Delta} > 0$, $e_{0\Delta}$ et $\tilde{\eta}_{j\Delta}$ convergera au zéro généralement et exponentiellement, qui implique alors que l'entrée u est bornée. Nous pouvons alors conclure que e est bornée.

Annexe_D

D.1. Commande par mode glissant d'ordre

Afin d'éliminer le broutement (chattering), plusieurs techniques telles que la décomposition de la commande en une composante continue de basse fréquence et une commande discontinue de haute fréquence, la commande continue dans une bande autour de la surface de glissement et plus récemment les modes glissants d'ordres supérieurs.

Il est proposé de modifier convenablement la dynamique dans un petit voisinage de la surface de discontinuité et en même temps de préserver, de manière générale, les propriétés importantes de la commande par mode glissant.

Vu que la condition à satisfaire est $S=0$ et si notre système dynamique est de degré relatif 1, alors la commande apparaît explicitement dans la première dérivée totale de S . par conséquent, le broutement dans la commande correspond au broutement dans \dot{S} et vice versa.

L'idée est de satisfaire deux conditions de contrainte $S = \dot{S} = 0$ au lieu de la précédente, et simultanément garantir la continuité de \dot{S} . Pour cela l'espace d'état est élargi par l'addition de la variable de commande u comme nouvelle coordonnée.

La dérivée totale \dot{S} peut, dans ce cas, être considérée comme une fonction continue régulière définie sur l'espace d'état étendu. La tâche est complétée en prescrivant la dynamique appropriée aux coordonnées de l'espace d'état étendu.

Dans ce but, la dérivée \dot{u} de la commande, peut être traitée comme une nouvelle variable de commande.

L'avènement des SOSMC ou mode glissant d'ordre 2, a permis son implémentation dans des domaines très restrictifs tels que la robotique, l'aéronautique et surtout dans les applications militaires où l'insensibilité aux incertitudes est d'une importance primordiale.

La procédure globale de commande que l'on propose, consiste à une transformation d'état pour chaque bloc, égales à celles obtenues via la procédure de backstepping, les couplant avec deux équations auxiliaires, obtenues par choix, pour chaque bloc, une quantité convenablement glissante $S = 0$, et considérer sa première et deuxième dérivée.

D.2. Stabilité

D.2.1 Stabilité asymptotique

Si $V(x)$ une fonction de Lyapunov scalaire différentiable, telle que

$$\begin{aligned} 1. \forall x \in \mathfrak{R}^n, V(x) > 0 \text{ et } V(x) = 0 \\ 2. \forall x \in \mathfrak{R}^n, \dot{V}(x) \leq 0 \text{ et } \dot{V}(x) = 0 \end{aligned} \tag{D.1}$$

alors, le point $x=0$ d'un système non linéaire est stable. Si de plus,

$$3. \forall x \in \mathfrak{R}^n, \dot{V}(x) < 0$$

alors, la stabilité est dite asymptotique.

D.2.2. Stabilité globale asymptotique

Supposons qu'il existe une fonction $V(x)$ scalaire différentiable, telle que

1. $\forall x \in \mathfrak{R}^n, V(x) > 0$ et $V(x) = 0$
 2. $\forall x \in \mathfrak{R}^n, \dot{V}(x) > 0$ et $\dot{V}(x) = 0$
 3. $V(x) \rightarrow \infty$, lorsque $\|x\| \rightarrow \infty$
- (D.2)

alors, le point d'équilibre $x=0$ du système est globalement asymptotiquement stable.

D.2.3. Stabilité ordinaire

La condition suffisante pour qu'un équilibre défini par $\dot{x} = f(x,t)$ avec $f(0,t) = 0$ soit stable est qu'il existe une fonction $V(x,t)$ positive définie telle que sa dérivée totale par rapport au temps $\dot{V}(x,t)$, n'est pas positive.

D.2.4. Stabilité asymptotique

La condition pour qu'un équilibre défini par $\dot{x} = f(x,t)$ avec $f(0,t) = 0$ soit asymptotiquement stable est qu'il existe une fonction $V(x,t)$ positive définie et décroissante telle que sa dérivée par rapport au temps $\dot{V}(x,t)$, le long de la trajectoire de x , soit définie négative.

D.2.5. Stabilité asymptotique globale

La condition suffisante pour qu'un équilibre défini par $\dot{x} = f(x,t)$ avec $f(0,t) = 0$ soit globalement asymptotiquement stable est qu'il existe une fonction $V(x,t)$ positive définie, radialement illimitée ($V(x,t) \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$) et décroissante ($V(x,\infty) < \infty$) et que sa dérivée totale par rapport au temps $\dot{V}(x,t)$, le long de la trajectoire de x , soit définie négative.

D.2.6. Lemme de Barbalat

Si la fonction $V(x,t)$ à une limite finie lorsque $t \rightarrow \infty$, et si sa dérivée $\dot{V}(x,t)$ est uniformément continue, alors $\dot{V}(x,t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Si la fonction $V(x,t)$ à une dérivée bornée alors $V(x,t)$ est uniformément continue.

D.3. Normes

1. Soit la matrice P de dimension $n \times n$ dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors P est dite :

- (a). Définie positive si ses valeurs propres sont positives, i.e., $\lambda_i(P) > 0$.
- (b). Semi-définie positive si ses valeurs propres sont positives ou nulles, i.e., $\lambda_i(P) \geq 0$.
- (c). Définie négative si ses valeurs propres sont négatives, i.e., $\lambda_i(P) < 0$.
- (d). Semi-définie négative si ses valeurs propres sont négatives ou nulles, i.e., $\lambda_i(P) \leq 0$.

2. Soit le vecteur $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ alors sa norme euclidienne est définie par :

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad (\text{D.3})$$

3. La norme Euclidienne de la matrice P est définie par :

$$\|P\| = \sqrt{\text{trace}(P^T P)} \quad (\text{D.4})$$

La norme (D.4) est bornée par :

$$\lambda_{\min}(P) \leq \|P\| \leq \lambda_{\max}(P) \quad (\text{D.5})$$

où $\lambda_{\min}(P)$ et $\lambda_{\max}(P)$ sont respectivement la plus petite et la plus grande valeurs propres de P .

4. A partir de 2 et 3 il résulte que :

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \leq x^T P x \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|^2 \quad (\text{D.6})$$

D.4. Commande par mode glissant d'ordre deux

D.4.1. Application a la commande d'un pendule inversé

Reprenons le système introduit dans la section (IV.3.4) du quatrième chapitre. Les résultats de simulation pour $((\alpha_m, \alpha_M) = (20, 80)$ et $\lambda = 2)$ pour les conditions initiales

$x_0 = \left(-\frac{\pi}{60}, 0\right)^T$ sont illustrés par les figures suivantes :

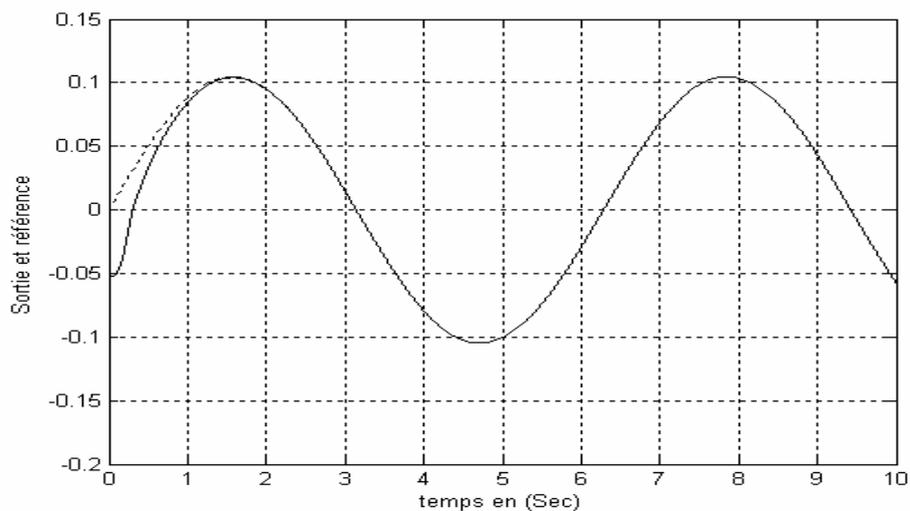


Figure D.1. Sortie et référence

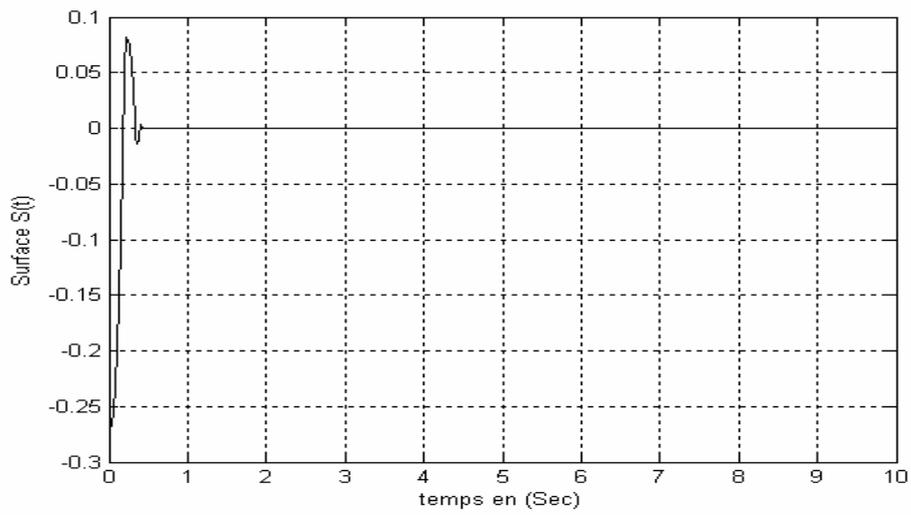


Figure D.3. Surface $S(t)$.

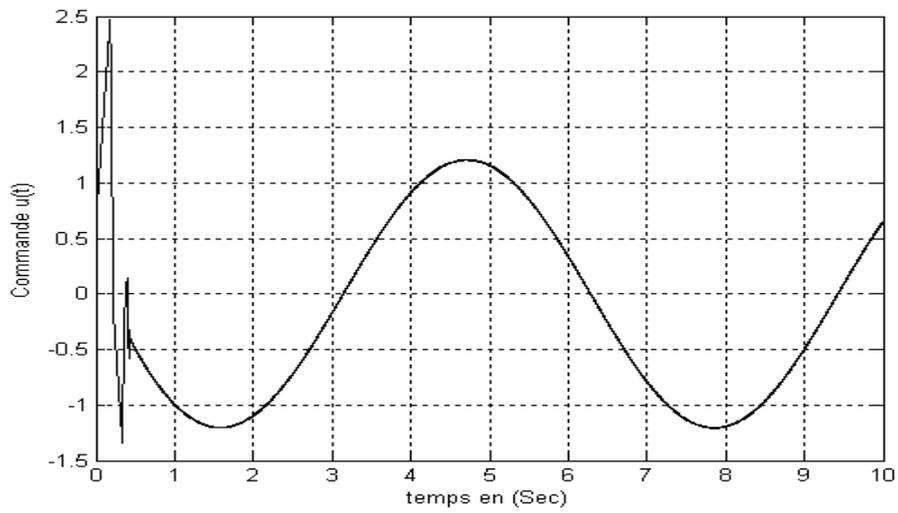


Figure D.1. Commande $u(t)$.

ملخص

المراقبة الغامضة تأخذ تسميتها من خلال تطبيقات التحكم في الآليات، إلا أنها زاخرة حاليا في إطار تطبيقاتها المتعددة. التحكم التآقلمي (الملائم) يهدف إلى تحويل الحركية في نظام غير خطي إلى نظام خطي مكافئ يهدف استعمال التقنيات الخطية الاصطلاحية. تختلف إشكالية التحكم التآقلمي أساسا عن إشكالية التحكم القوي (غير التآقلمي). يركّب المراقب التآقلمي الغامض المستقر عموما من خلال مجموعة من القواعد الغامضة (إذا كان-إذن)، النظام الغامض المستعمل من اجل مقارنة مراقب مثالي، يكون معدلا بواسطة قانون متآقلم مؤسس على المنهج الخاص بتركيبة لياينوف.

طريقة التخطيط الرجعي هي أسلوب تصميمي للمراقبين الخاصة بالأنظمة غير الخطية غير الدقيقة. محفّرها الأساسي يعتمد على النية في تقليص حجم الحسابات في تصورات التخطيط الرجعي عن طريق استغلال سهولة تحكم وضع الانزلاق. أجهزة الاستقرار في النظام المتحكم فيه بواسطة المنهج المقترح تكون نصف شاملة.

الألفاظ المفتاحية : التحكم الغامض، التحكم التآقلمي، التخطيط الرجعي، وضع الانزلاق، الأنظمة اللاخطية.

Abstract

The fuzzy control FC takes his name from the applications of control, but it extends now this frame by its multiple applications. Adaptive control serves for transforming the dynamics of the non-linear system into an equivalent linear system, so that the conventional linear techniques can be applied. Fundamentally the adaptive control problem is rather little different from that of the robust control (not adaptive). A globally stable fuzzy adaptive controller is at first synthesized from a collection of fuzzy rules « if-then », the fuzzy system used to approximate an optimal controller, is adjusted by an adaptive law based on the approach of Lyapunov's synthesis.

The backstepping approach is a design process of controllers for uncertain nonlinear systems. Its motivation bases on the volume reducing of the computations of the backstepping design by the exploitation of the sliding mode control simplicity. The stability tools of the controlled system via the proposed approach are semi global.

Key-words : Fuzzy control, adaptive control, Backstepping, sliding mode, nonlinear systems.

Résumé

Le contrôle flou CF tire son nom des applications de commande en Automatique, mais il déborde maintenant ce cadre par ses multiples applications. La commande adaptative sert à transformer les dynamiques d'un système non linéaire en un système linéaire équivalent afin que les techniques linéaires conventionnelles puissent être appliquées. La problématique de la commande adaptative est fondamentalement assez peu différente de celle de la commande robuste (non adaptative). Un contrôleur adaptatif flou stable globalement est d'abord synthétisé à partir d'une collection de règles floues « si-alors », le système flou utilisé pour approximer un contrôleur optimal, est ajusté par une loi adaptative basée sur l'approche de synthèse de Lyapunov.

La méthode backstepping est un procédé de conception des contrôleurs pour les systèmes non linéaires incertains. Sa motivation se fonde sur l'intention de réduire le volume des calculs de la conception backstepping par l'exploitation de la simplicité de commande par mode glissant. Les dispositifs de stabilité du système commandé par l'intermédiaire de l'approche proposée, sont semi globaux.

Mots-clés : Commande flous, commande adaptative, Backstepping, mode glissant, systèmes non linéaires.